



HAL
open science

Dynamique des milieux stratifiés ou tournants : Attracteurs d'ondes axisymétriques, interaction non-linéaire et panaches en rotation

Corentin Pacary

► **To cite this version:**

Corentin Pacary. Dynamique des milieux stratifiés ou tournants : Attracteurs d'ondes axisymétriques, interaction non-linéaire et panaches en rotation. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2023. Français. NNT : 2023ENSL0034 . tel-04203567

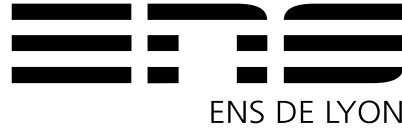
HAL Id: tel-04203567

<https://theses.hal.science/tel-04203567v1>

Submitted on 11 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : 2023ENSL0034

THÈSE

en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivrée par

l'École Normale Supérieure de Lyon

**École Doctorale N°52
École Doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon (PHAST)**

Discipline : Physique

Soutenue publiquement le 07/07/2023, par :

Corentin PACARY

**Dynamique des milieux stratifiés ou tournants :
Attracteurs d'ondes axisymétriques, interaction non-linéaire et panaches en
rotation**

Devant le jury composé de :

STAQUET, Chantal	PU	LEGI, Université Grenoble-Alpes	Rapportrice
CORTET, Pierre-Philippe	CR	FAST, CNRS & Université Paris-Saclay	Rapporteur
LE DIZÈS, Stéphane	DR	IRPHE, CNRS & Université Aix-Marseille	Président
DAUXOIS, Thierry	DR	Laboratoire de Physique, CNRS & ENS de Lyon	Directeur de thèse
JOUBAUD, Sylvain	MCF	Laboratoire de Physique, ENS de Lyon	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier sincèrement les membres du jury, Chantal, Pierre-Philippe et Stéphane d'avoir relu attentivement mon manuscrit et pour leurs questions pertinentes. Je remercie tout particulièrement Pierre-Philippe pour les deux pages de commentaires détaillés qui ont permis d'améliorer grandement le manuscrit.

Il me faut ensuite remercier mes directeurs de thèse qui m'ont fait confiance il y a un peu plus de trois ans. Thierry, bien qu'ayant un emploi du temps de presque ministre, tu as toujours réussi à me consacrer du temps, me prodiguer des conseils et donner la direction générale de la thèse. Sylvain, tu m'as suivi au quotidien pendant plus de trois ans, nous avons eu nos hauts et nos bas. Tu as été un moteur, souvent, et un sauveur du désespoir parfois, dernier ressort quand rien ne fonctionnait. Vous avez toujours cru en ce que je faisais, plus que moi, et cette foi inébranlable est une des raisons qui m'ont aidé à continuer. J'ai appris à votre contact ce qu'était un chercheur et cette thèse est aussi un peu la vôtre.

Je me dois aussi de remercier Pascal et Marc qui ont fait un travail exceptionnel pour monter l'expérience. Ce fut un réel plaisir de travailler avec vous, et sans vous rien de tout cela n'aurait été possible.

Merci à Jean-Christophe, Fatiha, Erika, Nelly et toutes celles et ceux qui gèrent ce laboratoire. Grâce à vous, tout a toujours été simple. Le laboratoire de physique est un cadre de travail formidable dans lequel j'ai pu m'épanouir.

L'ambiance qui y règne est aussi le fruit des personnes qui le composent et je remercie toutes celles et tous ceux avec qui j'ai pu interagir. Merci aussi aux responsables des doctorants successifs et surtout aux doctorants eux-mêmes d'avoir entretenu cette ambiance qui règne entre nous et qui permet de se sentir bien au laboratoire. Vous citer tous serait en oublier alors si vous êtes concernés par les pauses et/ou les bières, merci.

Merci aussi à Thomas qui a eu l'idée de cette réunion et à tous les membres de TOPIC-BG, qu'ils (et elle) aient été là pour deux ans ou pour trois mois, pour ces moments d'ouverture scientifique et de résolution de problèmes dans un cadre très libre et si agréable.

Merci aux personnes du couloir M2 et à Lise, ma co-bureau jusqu'au bout pour tous ces midis partagés. Merci à Julie, Gauthier et Francis qui ont particulièrement subi mes arrêts dans ce couloir. Je me dois aussi de remercier pêle-mêle Saskia, Elian, Léa, Antoine, François, Marc et les cool kids.

Merci à toutes les personnes que j'ai pu croiser au volley. Il y en a parmi vous que je côtoie depuis presque six ans, merci pour tous ces moments, sur le terrain, au bar et même ailleurs pour certains. Merci Denis, Antoine, Corentin, Simon, Luigi, Laurane, Maëlan, Raphaël, Jules,... Là encore je ne peux pas tous vous citer mais merci du fond du cœur de la première génération qui m'a fait découvrir ce sport et cette ambiance à la dernière qui perpétue le mouvement.

Merci à Julie de m'avoir tenu compagnie pendant cette dernière année, pour ta présence quotidienne et pour le voyage en Italie. J'aurais aimé que tu commences ta thèse plus tôt.

Parce qu'ils le méritent, je me dois de remercier Stéphane et Gauthier. Merci à Stéphane pour les innombrables discussions, pour cette nuit passée à courir dans la boue, pour m'avoir accueilli dans le vrai Sud, pour tous les entraînements et toutes les bouffes après, pour toutes les pauses. Merci à Gauthier pour m'avoir supporté quand je ne voulais pas travailler, pour les apéros chez toi ou ailleurs, pour m'avoir montré comment brasser et tous les autres moments partagés. Merci à vous deux d'avoir toujours été là.

Merci à Victor de m'avoir entraîné sur ses sorties et de m'avoir fait découvrir la Drôme.

Merci aux agrégé.e.s de lettres modernes Joachim, Juliette et Gabrielle pour leur présence et leur bonne humeur constante.

Merci à Alice, Marion, Valentine, et bien sûr Clémentine et Noa de faire encore partie de ma vie sept ans après.

Merci finalement à Mathilde, madame l'agrégée, qui m'a supporté et fait grandir pendant ces trois années et même un peu plus.

Merci à ma famille d'avoir toujours été là.

Merci.

TABLE DES MATIÈRES

1	Les ondes gravito-inertielles	15
A	Dans la nature	16
A.1	Les ondes gravito-inertielles dans l'atmosphère	16
A.2	Ondes gravito-inertielles et océan	17
A.3	Autres milieux	23
A.4	Astrophysique	24
B	Description mathématique des ondes gravito-inertielles	27
B.1	Phénoménologie	27
B.2	Équations du fluide	30
B.3	Relation de dispersion linéaire	32
B.4	Caractéristiques	35
B.5	Rôle de la dissipation	36
B.6	Effets non-linéaires	36
B.7	Équation d'amplitude	37
B.8	Ondes dans une géométrie cylindrique	38
C	Mise en place expérimentale	40
C.1	Cuves	40
C.2	Stratification	41
C.3	Rotation	45
C.4	Génération	46
C.5	Mesure	50
C.6	Traitement des signaux	52
C.7	Réponse impulsionnelle	53
2	Attracteurs : Tracé de rayons	57
A	Cas historique	58
A.1	Réflexion des ondes internes	58
A.2	Une première approche des attracteurs	61
A.3	Résultats expérimentaux	68
B	Géométrie 3D	70

B.1	Propagation et Réflexion	70
B.2	Piégeage	71
B.3	Axisymétrique	73
C	Construction d'un algorithme de tracé de rayon	75
C.1	Propagation du rayon	75
C.2	Reproduction des résultats	76
C.3	Cas 3D	78
C.4	Cas d'un canal	79
D	Prédictions en 3D	81
D.1	Double pente	81
D.2	Cuve axisymétrique	83
3	Attracteurs axisymétriques : Régimes linéaire et non-linéaire	89
A	Régime linéaire	90
A.1	Forçage constant	90
A.2	Réponse linéaire impulsionnelle	94
B	Régime faiblement non-linéaire	103
C	Au-delà du régime faiblement non-linéaire	107
C.1	Structure à grande amplitude	107
C.2	Interaction sur l'axe	111
4	Instabilité d'un mode d'ondes internes de gravité dans une stratification non-uniforme	115
A	Modes d'ondes internes de gravité	116
A.1	Structure Verticale	116
A.2	Motivation	120
A.3	Auto-interaction	121
A.4	Objectif	121
B	Mise en place expérimentale	123
C	Génération d'une harmonique	127
C.1	Interaction entre deux modes	127
C.2	Auto-Interaction	129
C.3	Influence d'une pycnocline	131
D	Instabilité triadique résonante (sous-harmonique)	133
D.1	Étude d'une expérience	133
D.2	Variation des paramètres	136
5	Panaches dans un fluide en rotation	141
A	Exposition	142
A.1	L'étude des panaches	142
A.2	Un phénomène étrange	143
B	Description du phénomène	145
B.1	Modèle d'un panache	145
B.2	Source virtuelle et nombre de Richardson	147
B.3	Influence de la rotation	147
B.4	Analyse : l'effet Tornado	150
C	Mise en œuvre expérimentale	151
C.1	Dispositif	151
C.2	Paramètres	151
C.3	Mesures	153
D	Observation expérimentale	154
D.1	Observations générales	154
D.2	Influence des paramètres	155

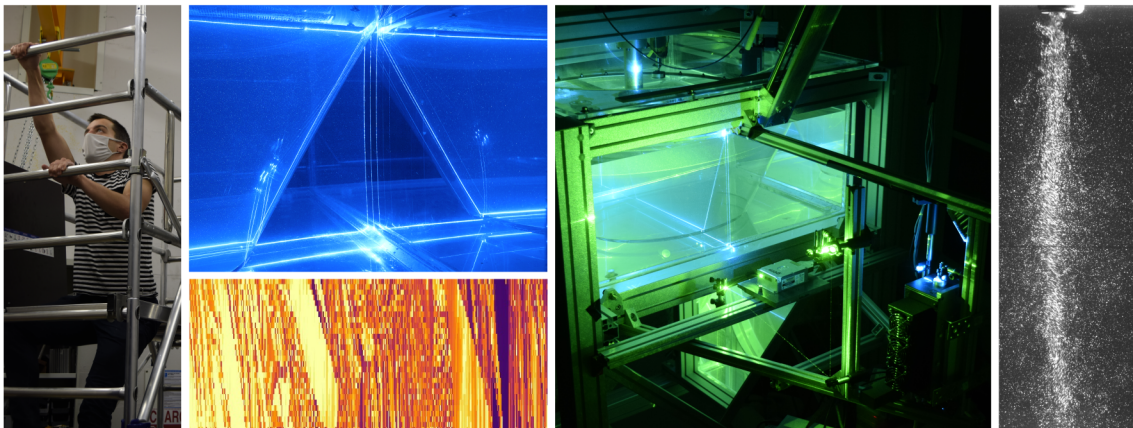
E	Simulations	160
	E.1 Mécanisme	160
	E.2 Discussion	160

INTRODUCTION

Avant-propos

Un grand spectre de personnes peut être amené à ouvrir cette thèse, des connaissances curieuses de savoir ce que j'ai bien pu faire pendant trois ans aux spécialistes du sujet chargés de l'évaluer. La progression des chapitres doit permettre à chacun de pouvoir suivre le déroulé avec toutes les cartes en mains pour comprendre.

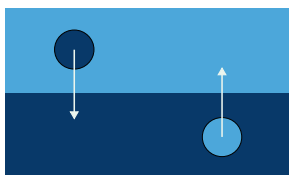
Cette thèse s'est déroulée en trois ans, de septembre 2020 à juillet 2023 et les résultats sont principalement expérimentaux. Le cœur de celle-ci a consisté dans le montage et l'exploitation d'un dispositif permettant l'étude des ondes gravito-inertielles (chapitre 3). Les ralentissements dûs aux deuxième et troisième confinements sur la partie expérimentale (pendant l'épidémie de coronavirus) ont donné lieu à une étude par tracé de rayons de ces ondes (chapitre 2) et au prolongement de l'analyse d'expériences sur les panaches en rotation (chapitre 5) réalisées sous l'impulsion de Bruce Sutherland. Ce dernier chapitre est donc en fait le premier dans l'ordre chronologique. Enfin, nous avons accueilli pendant deux ans Dheeraj Varma, un théoricien en contrat post-doctoral avec lequel j'ai collaboré sur une expérience de propagation de mode d'ondes internes, présentée dans le chapitre 4.



Ondes internes - une intuition pour non spécialiste

Deux notions sont nécessaires pour comprendre le sujet de cette thèse : la densité et la stabilité. Certains objets flottent et d'autres coulent, l'huile forme une couche au dessus de l'eau. Ces faits illustrent bien qu'il existe une propriété particulière d'un corps dictant son comportement lorsque immergé.

La masse volumique est le rapport entre la masse et le volume d'un objet ou d'un fluide, celui-ci est dit dense lorsque sa masse volumique est grande. Le principe énoncé par Archimède, savant grec ayant vécu au 3^e siècle avant J.C., dit que tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale vers le haut égale au poids du volume de liquide déplacé. Ainsi une boule plongée dans l'eau subira son poids qui l'entraîne vers le fond, dépendant de sa masse volumique, et la poussée d'Archimède le remontant vers la surface dépendant de la masse volumique de l'eau. Une boule en métal, plus dense que l'eau, coulera alors qu'une balle en plastique, remplie d'air, moins dense que l'eau flottera.



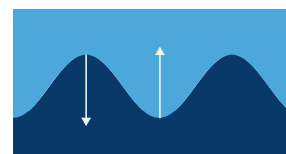
Prenons maintenant un verre d'eau rempli à moitié d'eau et à moitié d'huile d'olive, moins dense que l'eau. Au repos, l'eau remplira la moitié basse et l'huile la moitié haute. Imaginons maintenant que l'on prenne une goutte d'huile pour la placer dans l'eau, c'est une perturbation du système. La goutte remontera retrouver sa place dans la couche d'huile, entraînant des oscillations de l'interface. Le système revient à son état initial, c'est ce qu'on appelle un état stable. Il est possible de faire l'analogie avec un pendule : au repos (à l'équilibre) il pointe vers

bas, immobile à la verticale, et si on le perturbe un peu il reviendra vers cet état. Cependant, avec son inertie, il oscillera jusqu'à ce que les frottements de l'air l'arrêtent. Au contraire, si l'on avait fait en sorte de placer l'huile sous l'eau, la moindre perturbation provoquerait la remontée de l'huile.

Un étang est un volume d'eau surmonté d'air (l'atmosphère, bien moins dense que l'eau), et constitue un état d'équilibre stable. Une pierre lancée dans celui-ci constitue une perturbation, la surface de l'eau se retrouve courbée. Le retour à l'équilibre va provoquer des oscillations de la surface, ce sont les vagues que l'on voit apparaître. Ces vagues sont ce qu'on appelle des ondes gravito-capillaires, et elles se propagent à l'interface entre l'eau et l'air.

La densité de l'eau comme celle de l'air dépend de plusieurs propriétés : la température, la composition et la pression. Dans le cas de l'atmosphère et de l'océan, les trois varient. Il est plus simple au laboratoire de jouer sur la composition de l'eau, et en particulier sur la concentration en sel.

On flotte mieux dans la mer Morte que dans l'océan Atlantique car celle-ci est plus salée (275 grammes de sel par litre, contre 40 pour la Méditerranée et moins encore pour les océans), ce qui augmente sa densité. Avec une eau douce et une eau salée, on obtient un comportement similaire à l'huile sur l'eau, ou l'air sur l'eau de l'étang¹. Une perturbation à l'interface entre l'eau douce et l'eau salée va donc aussi provoquer une "vague", une onde dite interne car se propageant à l'intérieur du système.



Plutôt que d'être constitués de deux couches distinctes, l'océan et l'atmosphère sont stratifiés, c'est-à-dire que leur densité varie avec l'altitude ou la profondeur. Le phénomène présenté reste cependant valide : une portion de fluide est toujours au-dessus d'eau plus salée, et en-dessous d'eau moins salée. Déplacée vers le haut, cette portion se retrouve plus dense que le milieu ambiant et donc redescend. À l'inverse, déplacée vers le bas, elle se retrouve dans un milieu plus dense et remonte. Avec l'inertie, la portion, appelée particule de fluide, va osciller autour de sa position d'équilibre. À l'échelle du fluide, c'est cette oscillation que l'on appelle une onde interne de

1. Les effets capillaires, dus à la différence de nature des fluides, en moins.

gravité. Celles-ci seront décrites plus précisément dans la deuxième partie du chapitre 1.

Pour ces ondes internes de gravité, la force de rappel qui permet l'oscillation est la gravité, combinaison du poids et de la poussée d'Archimède. Dans le cadre d'un fluide en rotation, la force de Coriolis (à l'origine de la déviation vers l'Est sur notre planète) joue un rôle similaire. Elle donne donc lieu à des phénomènes très proches, et on parle alors d'ondes inertielles.

La situation instable, où un fluide moins dense est sous un fluide plus dense, fait aussi partie de notre vie courante. Si l'on veut faire bouillir une eau de cuisson pour des pâtes, la température augmentera d'abord au fond de la casserole où l'eau devient par conséquent moins dense et va alors s'élever ce qui permet d'obtenir *in fine* une casserole uniformément chaude. On parle alors de phénomènes convectifs. Un autre exemple est l'air chauffé au sein d'une cheminée, qui va s'élever dans l'atmosphère. Ce type de phénomène sera étudié dans le chapitre 5.

Les ondes internes - un objet d'étude

D'une part, la principale source d'énergie dans l'océan est l'action gravitationnelle de la Lune, formant les marées. La principale composante de celle-ci est dite M_2 , conduisant aux phénomènes des marées que l'on a deux fois par jour sur les côtes françaises, avec un cycle d'un peu moins de 12h. Les marées sont donc d'immenses courants disposant d'une grande quantité d'énergie qui doit être dissipée.

D'autre part, la formation de glace aux pôles génère une eau froide et salée² très dense qui descend au fond de l'océan et constitue un moteur de la circulation océanique profonde. La chaleur apportée par le soleil aux eaux tropicales apporte l'énergie pour les déplacer vers les pôles. Cependant, la lumière ne pénètre que sur quelques dizaines de mètres sous la surface de l'eau et ne permet pas d'expliquer la remontée des eaux profondes vers la surface pour refermer la boucle thermohaline.

Le mélange progressif entre les eaux profondes et les eaux de surface par l'action des ondes internes est un des mécanismes possibles pour l'expliquer. En effet, une vague à la surface de l'océan, générée par l'action du vent, peut déferler. C'est notamment ce qu'il se passe au bord de la plage, et l'air et l'eau sont alors mélangés et forment de l'écume. Une onde interne dans l'océan peut, elle, être formée par l'action des marées au dessus d'un relief sous-marin. Elle peut alors déferler rapidement et mélanger l'eau moins dense au-dessus et l'eau plus dense en-dessous, ou se propager et transporter son énergie pour déferler plus loin.



Ocean waves by Uehara Konen

Les ondes internes permettent donc d'expliquer une partie de la dissipation de l'énergie des marées, utilisée pour les générer, tout en servant à mélanger la colonne d'eau et donc fermer le circuit de la circulation océanique. L'étude de la formation, la propagation, la dissipation et le déferlement des ondes internes est donc nécessaire à la bonne compréhension du fonctionnement de l'océan. De plus, les ondes internes apparaissent dans l'océan ou l'atmosphère dès qu'une perturbation s'y produit (courant au-dessus d'une topographie, convection dans l'atmosphère, etc), et sont donc très courantes dès que l'on cherche à étudier ces milieux.

Au-delà de l'utilité de l'étude de ces ondes, leurs particularités en font aussi un objet intéressant d'un point de vue fondamental.

2. Le sel n'étant pas incorporé à la glace, il est repoussé dans le milieu environnant qui se charge en sel.

L'apport de cette thèse

Ondes internes : régime linéaire et non-linéaire

Les ondes gravito-inertielles ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques. Une des problématiques est leur dissipation et leur déferlement. En effet, lorsque leur amplitude est grande, elles déferlent à l'instar des vagues de manière turbulente. Il existe un régime intermédiaire, dit faiblement non-linéaire, dans lequel les ondes ne déferlent pas mais dans lequel l'énergie est transféré aux petites échelles où la dissipation visqueuse prend place. Ce transfert se fait en raison des interactions entre ondes, et un des mécanismes possible est une interaction à trois ondes appelée *interaction triadique résonante*.

Pour atteindre ce régime, des études utilisent les propriétés particulières de ces ondes pour concentrer l'énergie de ces ondes sur des structures appelées attracteurs, la plupart dans des géométries quasi-bidimensionnelles. Le principal apport de cette thèse est de pouvoir étudier dans le même dispositif expérimental les ondes internes de gravité et les ondes inertielles dans une géométrie tridimensionnelle et axisymétrique.

Lors de la collaboration avec Dheeraj Varma, c'est l'effet de la non-linéarité de la stratification sur la stabilité de modes d'ondes internes qui a pu être testé.

Les panaches : une histoire de rotation

Les panaches sont aussi des structures très étudiées car communes comme à la sortie des cheminées ou les sources hydrothermales, et aussi présents dans des phénomènes physiques comme la convection. Dans les applications à l'échelle de la planète, il est nécessaire de prendre en compte la rotation de la terre ainsi que la stratification des milieux environnants. Lors d'une étude dans ce sens, j'ai étudié en collaboration avec Bruce Sutherland, visiteur au laboratoire la formation sous certaines conditions d'une structure colonnaire cohérente à la place d'un panache turbulent habituel. Les travaux présentés ici ont pour but premier de reproduire le phénomène de manière robuste pour déterminer le mécanisme sous-jacent.

Résumé des chapitres

1 - Les ondes gravito-inertielles

Ce premier chapitre pose les bases des ondes gravito-inertielles pour les chapitres suivants. Il expose dans une première partie le contexte géophysique et la place des ondes internes de manière plus précise. Dans une seconde partie, nous développons les équations décrivant celles-ci, et dans une troisième partie c'est le dispositif expérimental et les méthodes utilisées pour les étudier qui sont présentés.

2 - Étude par tracé de rayon

Dans cette partie, nous exploitons le fait que les ondes gravito-inertielles se propagent à un angle donné par leur fréquence. Cette propriété induit une loi de réflexion permettant de focaliser l'énergie sur des structures appelées attracteurs. Après avoir présenté les expériences précédentes sur les attracteurs d'ondes internes, nous utilisons le tracé de rayon, technique utilisée par Grimaud Pillet et adaptée ici, à la géométrie 3D axisymétrique. Il en ressort un mécanisme couplé de convergences dans les plans verticaux et horizontaux vers une collection d'attracteurs comparables à ceux obtenus en 2D.

3 - Attracteurs axisymétriques : Régimes linéaire et non-linéaire

Les principaux résultats expérimentaux sur les attracteurs dans notre dispositif expérimental axisymétrique sont présentés dans ce chapitre. La formation d'attracteurs dans le régime linéaire a été observée comme prévue dans le chapitre précédent. Nous observons ensuite le régime faiblement non-linéaire, et notamment l'apparition de nouvelles ondes à une fréquence inférieure à la fréquence de forçage, signe d'interaction triadique. L'influence de l'axe est enfin discutée brièvement.

4 - Instabilité d'un mode en stratification non-linéaire

Dans ce chapitre sont présentées des expériences sur la propagation de mode dans une stratification non-linéaire. Les résultats expérimentaux confirment des prédictions théoriques sur l'interaction de deux modes superposés présentant des différences avec le cas linéaire. Il a aussi été possible d'observer l'auto-interaction d'un mode ainsi que l'apparition, comme dans le chapitre précédent, d'ondes sous-harmoniques.

5 - Panaches dans un fluide en rotation

Ce dernier chapitre présente les résultats obtenus lors de l'étude de panaches en rotation. Dans un premier temps, leur dynamique est décrite et l'effet de la rotation est discutée. Dans un second temps nous montrons la reproduction du phénomène recherché, la formation de tornade, ainsi que la gamme des paramètres permettant celui-ci, ce qui constitue le principal résultat de ce chapitre. Ces paramètres ont servi à la réalisation de simulations ultérieures par Bruce Sutherland pour comprendre ce phénomène.

"L'intelligence artificielle ne fait pas le poids face à la stupidité naturelle"

A. Einstein (source invérifiable).

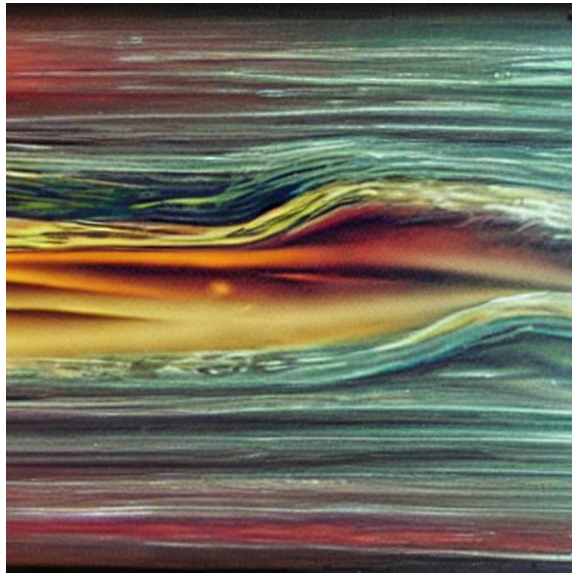


Le sujet de cette thèse d'après *Stable Diffusion*.

CHAPITRE

1

LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES



Les ondes gravito-inertielles, vue d'*IA*

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES



FIGURE 1.1 – Observation de motifs provoqués par des ondes internes dans l’atmosphère. Photo satellite, île d’Amsterdam, océan indien (NASA); dans la ville de Shiyuan (Chine), extraite de la thèse de [PILLET 2018]; à La-Tour-du-Pin (Isère, mai 2022), archives personnelles.

Ce chapitre est une brève introduction aux ondes gravito-inertielles. Il présente le contexte géophysique, les équations par lesquelles elles sont régies et les méthodes expérimentales permettant de les reproduire, le tout afin de donner les ingrédients nécessaires pour comprendre les chapitres suivants. Les panaches présentés en introduction seront le sujet du chapitre 5. Une description plus complète peut être trouvée dans [SUTHERLAND 2010].

A Dans la nature

Les ondes gravito-inertielles, un déplacement des isopycnes¹ dû à un mouvement de fluide, sont étudiées car présentes dans la nature. Il est même facile de les observer car elles possèdent un motif caractéristique reconnaissable, comme le montrent les trois exemples de la figure 1.1. Elles sont caractérisées par une pulsation caractéristique, la pulsation de flottabilité N liée au gradient de densité dans le milieu. La période correspondante peut aller de l’ordre de la minute à l’heure pour les exemples géophysiques.

A.1 Les ondes gravito-inertielles dans l’atmosphère

Le motif apparaissant sur la figure 1.1 est issu des propriétés particulières de l’atmosphère : l’air est un fluide compressible et la pression dépend de l’altitude. Les particules de fluides déplacées par l’onde vont ainsi se dilater lorsqu’elles montent et vont être compressées lorsqu’elles descendent. Si l’air est assez humide, la dilatation provoque une diminution de la température et la condensation de l’eau, et à l’inverse, la compression augmente la température et donc l’évaporation. On observe alors une alternance de nuages et de ciel clair marquant les maxima et les minima de déplacement des ondes.

Pour mieux caractériser ces ondes, et estimer cette pulsation caractéristique, l’évolution de la masse volumique de l’atmosphère en fonction de l’altitude (sa stratification) est mesurée à l’aide de ballons sondes qui embarquent des instruments de mesure et donnent une coupe verticale de l’atmosphère. Ces instruments mesurent notamment la température et la pression, dont dépend la densité. Il est possible de combiner l’influence de ces deux grandeurs en un unique paramètre, la température potentielle [BOLTON 1980] qui est la température qu’aurait la particule de fluide si elle était ramenée au niveau de la mer par compression adiabatique². Cette température potentielle est alors équivalente à la masse volumique et il est possible d’en déduire le profil de densité de l’atmosphère. La figure 1.2 présente la structure simplifiée de l’atmosphère terrestre.

1. Le suffixe "-pyncnes" vient du grec *puknotes*, signifiant densité. Ce sont les lignes de densité constantes, typiquement horizontales dans un fluide au repos dans le laboratoire.

2. Il est même possible de définir une température humide potentielle pour prendre en compte l’humidité [MARQUET et STEVENS 2022].

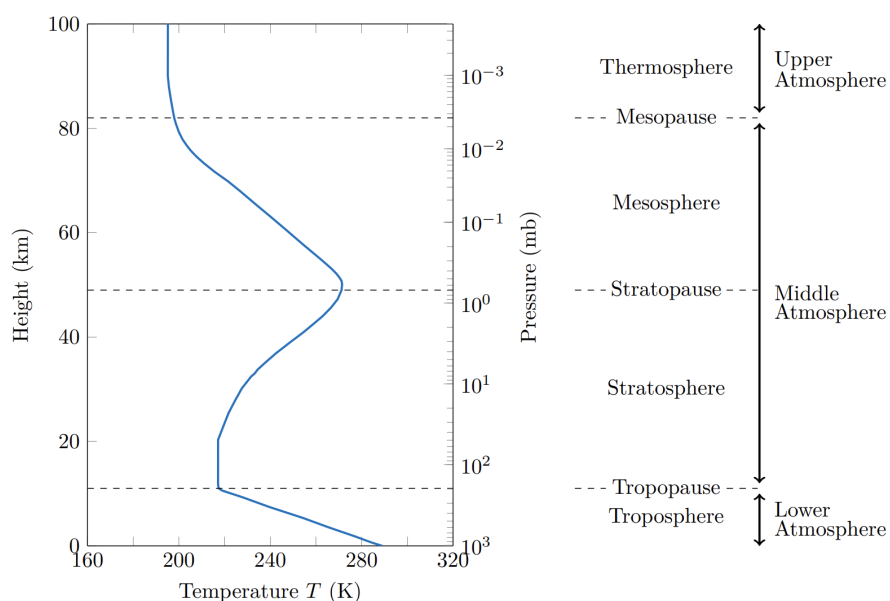


FIGURE 1.2 – Structure simplifiée de l’atmosphère terrestre , température en fonction de l’altitude. L’exosphère, au-dessus de la thermosphère n’est pas représentée. Extraite de la thèse de [BOURY 2020].

Malgré ces fortes variations de températures, causées par la variation de pression, la densité décroît de manière exponentielle avec l’altitude, ainsi 99% de la masse de l’atmosphère se situe en dessous de 30 km³. L’atmosphère est donc stratifiée de manière stable, à l’exception de la CBL (*Convective Boundary Layer*), couche convective au dessus du sol d’une épaisseur de 1 à 3 km bien mélangée [GARCIA et MELLADO 2014].

Celle-ci est découpée en cinq régions (suffixe "-sphère") séparées par des régions de transition (suffixe "-pause"). La troposphère est le volume dans lequel nous vivons, elle s’étend de la surface de la planète à une dizaine de kilomètres d’altitude, et constitue la zone où la plupart des phénomènes météorologiques ont lieu. La stratosphère se caractérise par la présence d’ozone qui absorbe la composante ultraviolette du rayonnement solaire, ce qui augmente la température dans cette zone.

On voit sur la figure 1.1 que les ondes sont générées par un vent balayant une île dans l’océan Indien. La topographie de l’île, à l’aide de l’énergie apportée par le vent, permet d’élever la masse d’air qui va ensuite subir le mécanisme d’oscillation décrit précédemment.

A.2 Ondes gravito-inertielles et océan

L’océan présente aussi les caractéristiques nécessaires à la propagation d’ondes internes. Celles-ci sont entre autre générées par les forces de marées, elles aident à la dissipation de cette énergie et participent au maintien de la stratification des océans.

a Stratification

Bien que l’eau soit considérée comme incompressible dans les conditions du laboratoire, à l’échelle de l’océan et de ses fortes pressions, il faut prendre en compte sa compressibilité. La

3. Voir le site de météo France : <http://education.meteofrance.fr/dossiers-thematiques/le-fonctionnement-de-l-atmosphere/la-composition-de-l-atmosphere/la-structure-de-latmosphere>.

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

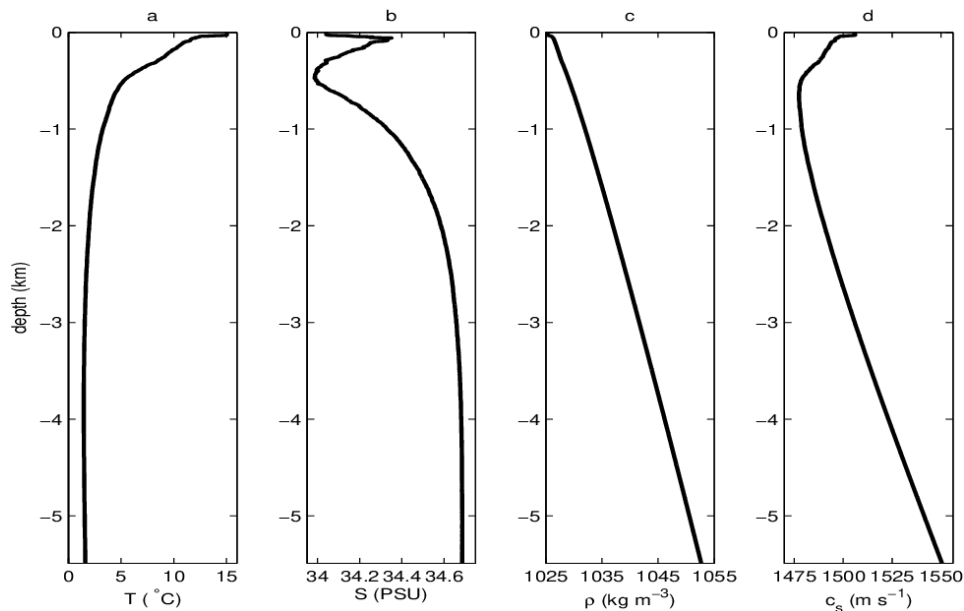


FIGURE 1.3 – Profil de température, de salinité, de densité et de vitesse du son dans l’océan. Extrait de [GERKEMA et ZIMMERMAN 2008]

présence de sel dans l’eau ainsi que la variation de la température sont aussi des variables dont dépend la densité.

La structure verticale des océans diffère selon les océans et selon la latitude. Les océans sont typiquement divisés entre une zone mélangée en surface : les eaux superficielles, et les eaux profondes : une grande zone stratifiée jusqu’au fond de l’océan. Les deux sont séparées par une zone de transition appelée thermocline à une profondeur de quelques centaines de mètres. La figure 1.3 montre un exemple de profil de température, de salinité ainsi que la combinaison donnant la masse volumique. Plusieurs méthodes permettent de mesurer ces profils, par exemple certaines bouées sont capables de réaliser des plongées et des bateaux d’exploration scientifique peuvent déployer des chaînes de capteurs. Il existe des exceptions notables telles que les océans polaires, les zones de fonte et de convergence.

L’amplitude des ondes gravito-inertielles peut être importante dans l’océan ou dans l’atmosphère, mais la différence de densité entre l’eau et l’air, d’un facteur 1000, réduit d’autant l’amplitude de ces ondes à la surface. L’élévation due à ces ondes est au plus de l’ordre du centimètre, ce qui est bien inférieur à l’amplitude typique des vagues créées par le vent. Ces ondes sont donc difficiles à observer à l’œil nu, mais elles peuvent être observées par satellite comme le montre la figure 1.4. L’élévation de la surface est mesurée par interférométrie radar⁴. La fréquence caractéristique de flottabilité N est de l’ordre de la dizaine de minutes, et la longueur d’onde sur la figure 1.4 est de l’ordre du kilomètre, il est donc possible de moyenniser les vagues de surface produites par le vent à plus petite échelle et fluctuant rapidement. La température de surface, est obtenue à partir des données satellite dans le domaine infrarouge.

La figure 1.3 montre que l’océan est stratifié, cette stratification est caractérisée par la pulsation de flottabilité N reliée au gradient de densité. Cette pulsation de flottabilité, liée au gradient de densité n’est pas uniforme dans l’océan, on a par ailleurs vu que le profil de densité n’était pas totalement linéaire, avec de grandes variations au niveau de la thermocline. Mesurée depuis une vingtaine d’années, cette grandeur est un marqueur, tout comme pourrait l’être la compo-

4. Voir par exemple la récente mission SWOT : <https://www.earthdata.nasa.gov/learn/articles/swot-calibration-validation>.

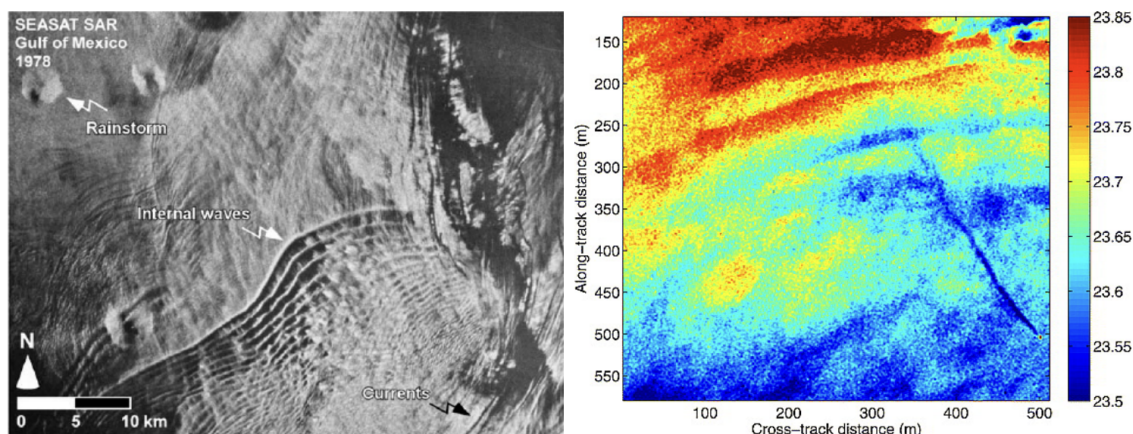


FIGURE 1.4 – Élévation de la surface due aux ondes internes de gravité. Signature thermique à la surface de l’océan. Extraites de [JACKSON et al. 2013] et [FARRAR et al. 2007], d’après [PILLET 2018].

tion chimique, des processus océaniques et de l’équilibre de ceux-ci. Il est alors intéressant de voir que [LI et al. 2020] ont mesuré des variations de cette pulsation sur la période 1960-2020. La figure 1.5(b) montre une hausse de la pulsation de flottabilité sur cette période. Cette augmentation, présente sur plusieurs jeux de données, a commencé dans les années 70 et a continué jusqu’à nos jours avec un léger ralentissement dans autour de l’année 2000. La décomposition par bassin océanique (atlantique, pacifique, indien, austral) montre que cette évolution est présente partout, avec une bonne corrélation. Il est cependant à noter que les premières mesures en 1960 montrent qu’il existait déjà une évolution, mais compensée entre les différents bassins. Il semblerait ainsi que le changement climatique ait aussi un effet sur la stratification de l’océan avec une tendance globale à l’augmentation de N au niveau mondial. Cette variation est cependant faible, et l’effet sur la circulation océanique ou sur la composition de l’océan n’est pas connu. L’origine de celle-ci n’est pas non plus discutée.

Comme le montre la figure 1.5(a), la variation n’est pas non plus uniforme à l’intérieur de chaque bassin. Il semble que la majorité de la hausse soit supportée par les eaux superficielles, au niveau de l’équateur. L’augmentation de N en moyenne, signifiant un profil plus abrupt, serait donc plutôt dû à un agrandissement de la pycnocline au niveau de l’équateur.

b Génération et dissipation

Il est donc établi que les ondes gravito-inertielles peuvent se propager dans l’océan, et qu’elles sont effectivement observées. Ces ondes peuvent être générées par tout mécanisme provoquant une perturbation des pycnoclines. Typiquement, comme nous l’avons vu avec les vents au-dessus d’une île (figure 1.1), les courants de marées génèrent des ondes gravito-inertielles au-dessus des topographies sous-marines. La figure 1.6(a) permet de retrouver ce mécanisme : elle présente la puissance transférée par les forces de marées aux marées internes⁵ et aux ondes orographiques⁶ le long des îles du Pacifique ou de la dorsale au milieu de l’atlantique. Une fois générées, ces ondes peuvent se propager sur de longues distances ou être dissipées localement. Là encore, il existe une diversité de mécanismes pour la dissipation de ces ondes. La figure 1.6(c) récapitule les processus de génération et dissipation de ces ondes. Tous ces mécanismes ont pour conséquence de transférer l’énergie aux petites échelles auxquelles les effets diffusifs (viscosité et diffusivité) dissipent

5. *Internal tides*, ondes internes à la même fréquence que la marée.

6. Ondes internes générées par le passage au-dessus d’une topographie.

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

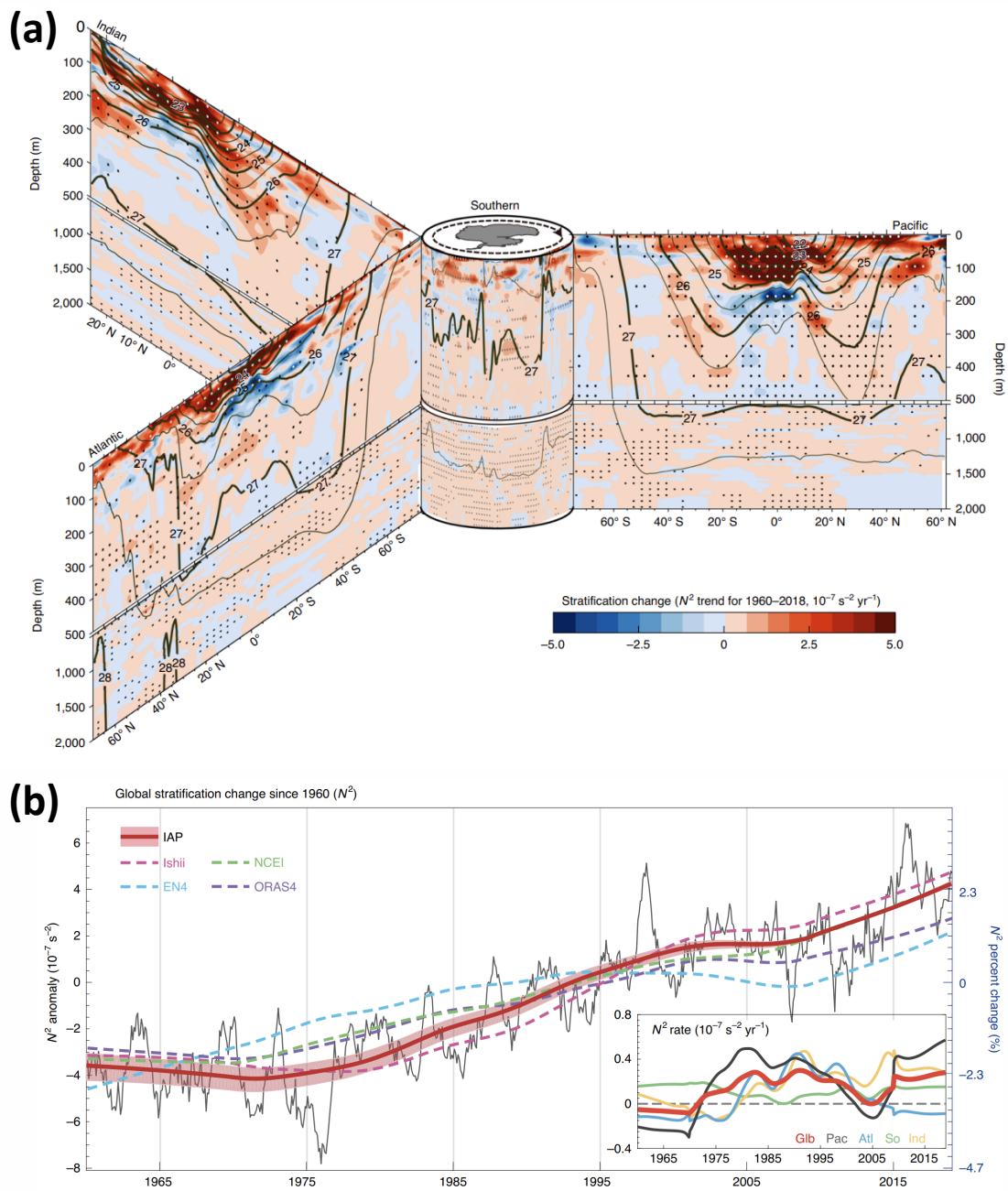


FIGURE 1.5 – (a) Tendence du changement du gradient de densité sur les années (1960-2018) dans les trois bassins principaux (Pacifique, Atlantique et Indien) entourant l’océan Austral. Les contours noirs marquent la densité potentielle moyenne sur la période. (b) Évolution globale du gradient de densité (anomalie par rapport à la moyenne sur la période (1981-2010)). En bas à gauche, le taux d’évolution global et décomposé par bassin. Extraits de [LI et al. 2020].

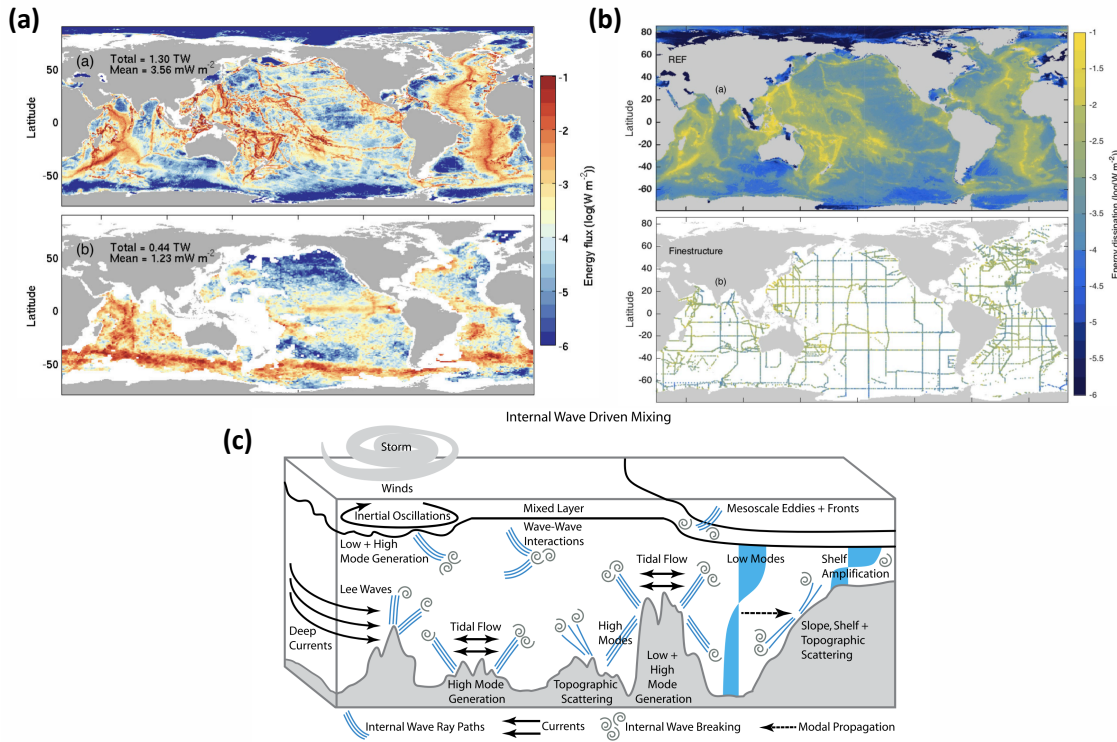


FIGURE 1.6 – (a) Production d’ondes internes de gravité (sous forme de marées internes, en haut) et d’ondes orographiques (en bas) à partir des forces de marée. (b) Dissipation d’énergie (par interactions entre ondes, diffusion par la topographie, les pentes critiques ou la productions de modes plus élevés) prédite par un modèle (REF, en haut) et mesurée (en bas). (c) Schéma des mécanismes produisant et dissipant des ondes internes. Extraites de [LAVERGNE et al. 2019] et [MACKINNON et al. 2017].

l’énergie. Cela peut se faire à partir d’interactions non-linéaires, créant une cascade d’énergie vers les petites échelles, ou par le déferlement des ondes (similaire à celui des vagues sur la plage) mettant en jeu la turbulence classique et provoquant le mélange du fluide. La figure 1.6(b) montre la répartition spatiale de cette dissipation, calculée par un modèle et les séries de mesures réalisées par des campagnes de terrain.

c Diffusivité turbulente et mélange

Les mesures présentées figure 1.6(b) sont moyennées sur une colonne d’eau, mais des disparités sont déjà visibles dans la dissipation de l’énergie. On peut caractériser cette dissipation par un coefficient, la diffusivité turbulente liée aux gradients de la vitesse. Ce coefficient, mesuré pour une tranche du bassin du Brésil figure 1.7(a), est élevé lorsque la topographie sous-marine est sinueuse et irrégulière, avec des reliefs importants. Le constat est le même dans le Pacifique (figure 1.7(b)), avec une augmentation prononcée de l’énergie cinétique proche des topographies, même si l’on constate qu’en valeur absolue, une grande partie de l’énergie des océans est dissipée dans les eaux superficielles, raison pour laquelle elles sont mélangées. Cette dissipation ne peut être imputée aux seules ondes internes, il faut aussi prendre en compte le cisaillement dû au vent par exemple. Cependant, la stratification étant plus forte à cette profondeur, la densité d’énergie des ondes internes y est aussi plus importante [POLLMANN 2020]. La nature des interactions mises en jeu est aidée par le calcul de la pente du spectre de l’énergie cinétique présentée figure 1.7(d).

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

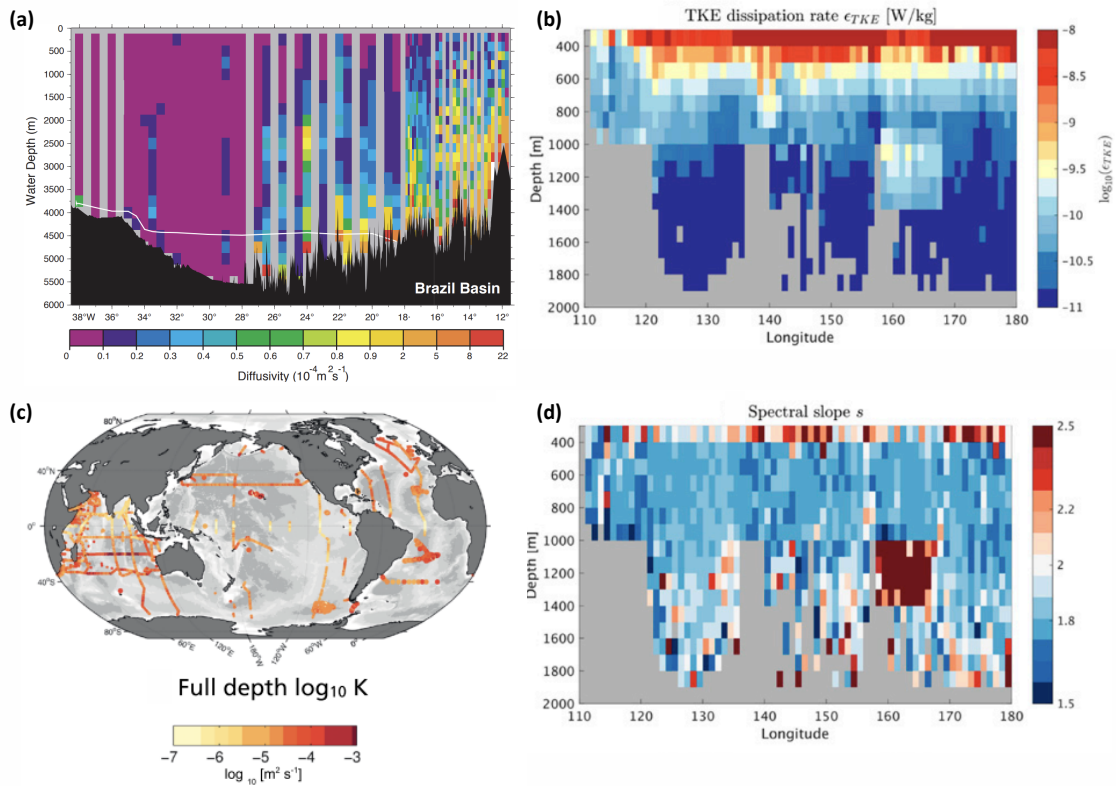


FIGURE 1.7 – (a) Coefficient de diffusivité turbulente mesuré dans le bassin Brésilien (b) Taux de dissipation turbulente (TKE) moyennée entre 18 °N et 22 °N dans le Pacifique Ouest. (c) Campagnes de mesure, valeur moyennée sur l'ensemble de la colonne d'eau. (d) équivalent de (b) pour la pente du spectre de l'énergie cinétique. Extraites de [POLZIN 2009], [POLLMANN 2020] et [MACKINNON et al. 2017].

On retrouve une dissipation locale très forte proche de la topographie causée par une génération d'ondes, due à une interaction marée-relief. Leur instabilité et leur déferlement induit un fort mélange turbulent. Ces données sont obtenues grâce aux plongées de bouées Argo, des données ne sont donc pas disponibles pour tous les océans. La figure 1.7(c) montre là où des mesures ont été réalisées.

d Importance géophysique

La génération, la propagation, la déstabilisation et le déferlement des ondes gravito-inertielles font donc partie des mécanismes permettant de transférer l'énergie reçue par les océans aux échelles turbulentes et de la dissiper. La place de ces ondes dans cet écosystème est schématisée sur la figure 1.8(a). Celles-ci agissent sur plusieurs propriétés de l'océan, dont sa stratification. Leur extension spatiale et leur période caractéristique (1 km et quelques dizaines de minutes) en font un phénomène "sous-maille", c'est-à-dire que les simulations à l'échelle mondiale ou même régionales ne résolvent pas ces échelles. Il est donc important de savoir modéliser et attribuer les bons coefficients à leur impact sur la dynamique du système climatique, et notamment sur la circulation océanique profonde.

Cette circulation, dite aussi circulation méridienne de retournement ou circulation thermohaline, est alimentée par la différence de température entre les pôles et l'équateur, et particulièrement

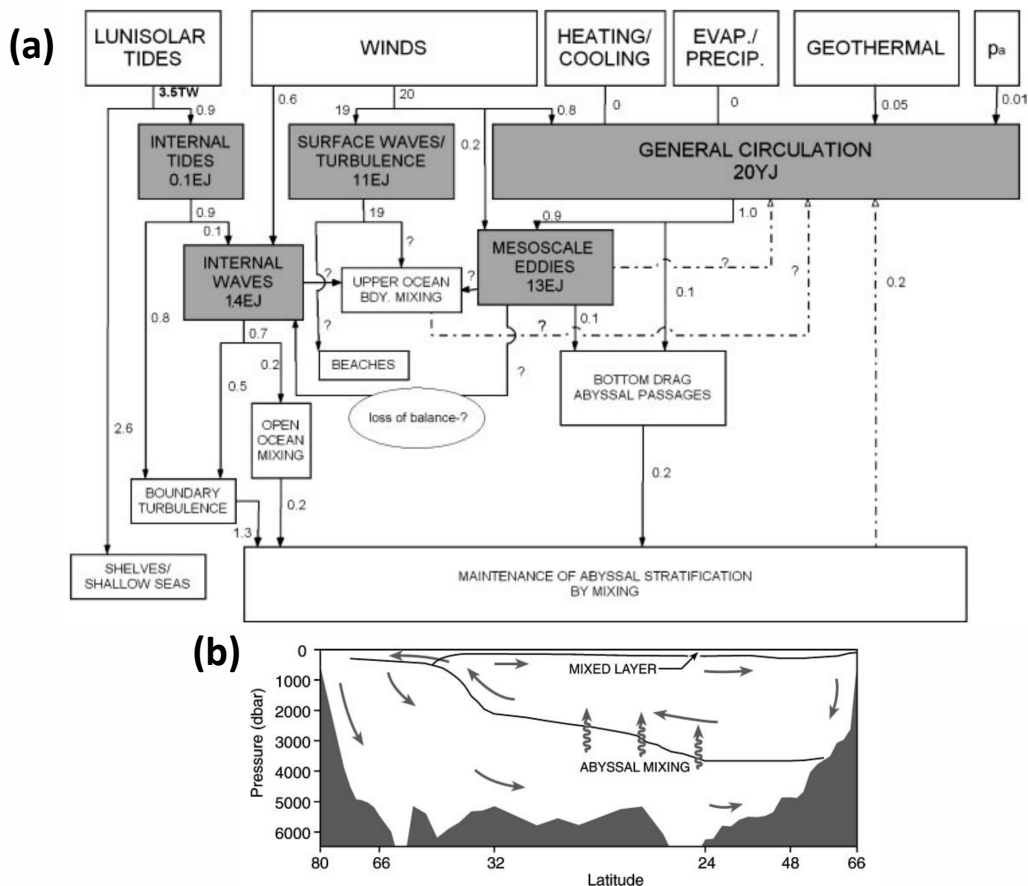


FIGURE 1.8 – (a) Bilan des transferts d'énergie dans les océans (avec des incertitudes d'au moins un facteur 2 pouvant aller jusqu'à 10 *sic*). (b) Schéma d'une circulation méridionale. Extraites de [WUNSCH et FERRARI 2004]

par la formation de glace qui crée une eau dense qui plonge en profondeur. Cependant, le forçage radiatif plus important à l'équateur est capturé par les cents premiers mètres d'eau et ne peut donc pas faire remonter cette eau dense et froide venue des pôles.

C'est là que le mélange induit par les instabilités d'ondes gravito-inertielles peut jouer un rôle par le mélange dans le volume de l'océan. En effet, une colonne d'eau de masse volumique uniforme $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ a un centre de masse plus élevé que cette même colonne séparée en un fluide léger de densité ρ_1 et lourd de densité ρ_2 . Dans ce cas, le mélange permet ainsi de transférer de l'énergie cinétique en énergie potentielle, et de faire remonter l'eau dense et salée et la mêlant à une eau plus douce. La figure 1.8(b) schématise une circulation méridionale typique. Le volume supérieur est fortement mélangé dans les régions proches de la surface alors que le volume inférieur subit le mélange principalement sur les bords et sur la topographie intérieure. L'action des ondes gravito-inertielles, quant à elle, se fait sentir dans le volume, le déferlement des ondes internes permettant un "mélange abyssal".

A.3 Autres milieux

Bien que l'océan ou l'atmosphère soient les sources principales d'intérêt pour l'étude des ondes internes, ce ne sont pas les seuls milieux stratifiés. Les lacs sont aussi des milieux stratifiés, mais il

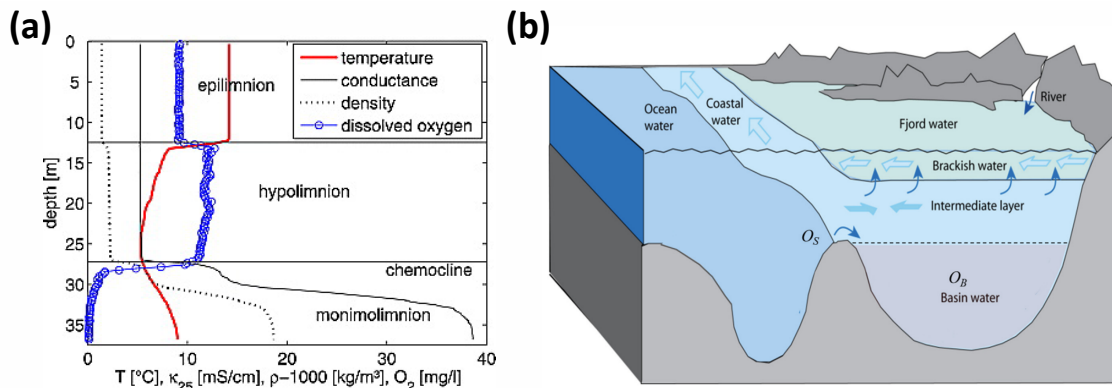


FIGURE 1.9 – (a) Profil de température, conductance, masse volumique et d’oxygène dissous dans le lac Rassnitzer (Allemagne). Extraite de [BOEHRER et SCHULTZE 2008]. (b) Les trois couches verticales d’un fjord norvégien (pas à l’échelle). En haut, une fine couche saumâtre (moins de quelques mètres), en dessous de laquelle se trouve la couche intermédiaire, qui s’étend jusqu’à la profondeur de l’embouchure (threshold) et contient de l’eau côtière. Si l’embouchure est suffisamment profonde, la couche intermédiaire contient également de l’eau océanique sous une couche d’eau côtière. Sous la couche intermédiaire se trouve l’eau du bassin qui, selon la profondeur du seuil, contient de l’eau côtière, océanique ou un mélange des deux. Extraite de [AKSNES et al. 2019].

existe une grande typologie selon la profondeur et la géologie du sous-sol. La figure 1.9 montre la variation de la température, la densité, la conductance et l’oxygène dissout dans le lac Rassnitzer (proche de Leipzig en Allemagne). Les lacs profonds peuvent présenter une région stratifiée dans leur partie basse, hors de l’influence des cycles journaliers et de la météo.

Les fjords sont aussi un milieu particulier, à la rencontre entre l’eau douce de la fonte des neiges et de l’océan. Des ondes peuvent donc s’y propager et sont associées au phénomène d’eau morte [EKMAN 1904; MERCIER et al. 2011] par lequel un bateau est freiné par génération d’ondes internes de gravité.

Dans les deux cas, des ondes internes dites d’interface peuvent se propager entre les couches de densité différentes.

A.4 Astrophysique

Des satellites comme Europe et ses océans sub-glaciaires [VAN HOOLST et al. 2008], aux étoiles à neutrons [SIDERY et al. 2008], une grande zoologie de corps célestes sont en rotation. Les fluides composant ces corps sont donc des milieux propices à la propagation d’ondes inertielles ou gravito-inertielles. À l’instar de la figure 1.8 pour les océans, la figure 1.10 fait le bilan des phénomènes physiques en interaction dans la couche radiative du soleil et donne les ordres de grandeur de fréquence associés. Les ondes gravito-inertielles sont générées par les mouvement de la couche convective apportant l’énergie ainsi que par la rotation de l’étoile.

Des simulations se sont alors attachées à simuler des couches de fluide en rotation (dans des "coquilles"), forcées par la libration⁷ de la couche interne [CALKINS et al. 2010; HE et al. 2022]. Il apparaît alors des lignes (voir figure 1.11), caractéristique des ondes gravito-inertielles. Comme pour l’océan ces ondes sont un mécanisme de transport et de dissipation de l’énergie cinétique mais aussi de moment cinétique. Il apparaît par ailleurs sur cette figure que les ondes sont organisés sur une structure périodique, un attracteur que l’on étudiera plus en détail dans le chapitre 2.

Pour les figures 1.11(a) et 1.11(b), les ondes sont générées à la latitude critique, c’est-à-dire à

7. Variation dans la vitesse de rotation.

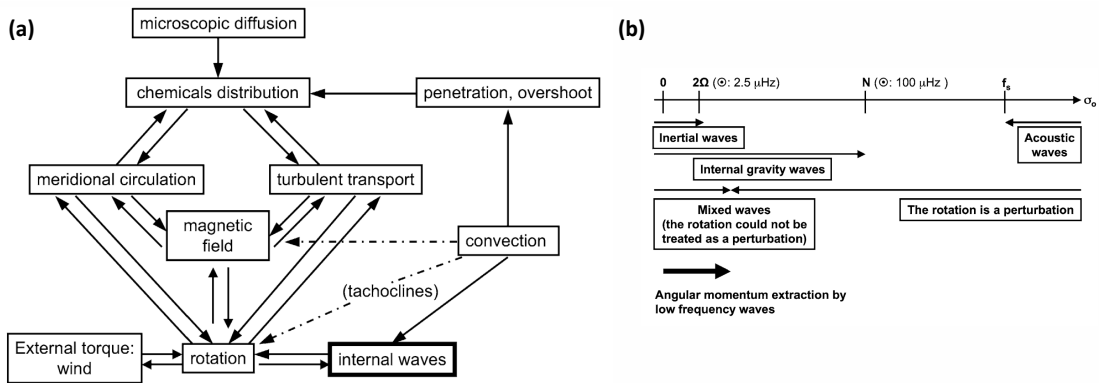


FIGURE 1.10 – (a) Bilan des phénomènes régissant la couche radiative du soleil. (b) Présence des ondes inertielles dans une étoile. Ω est sa fréquence de rotation, N la pulsation de flottabilité et f_s la fréquence de coupure des ondes acoustiques. Extraites de [MATHIS et al. 2008].

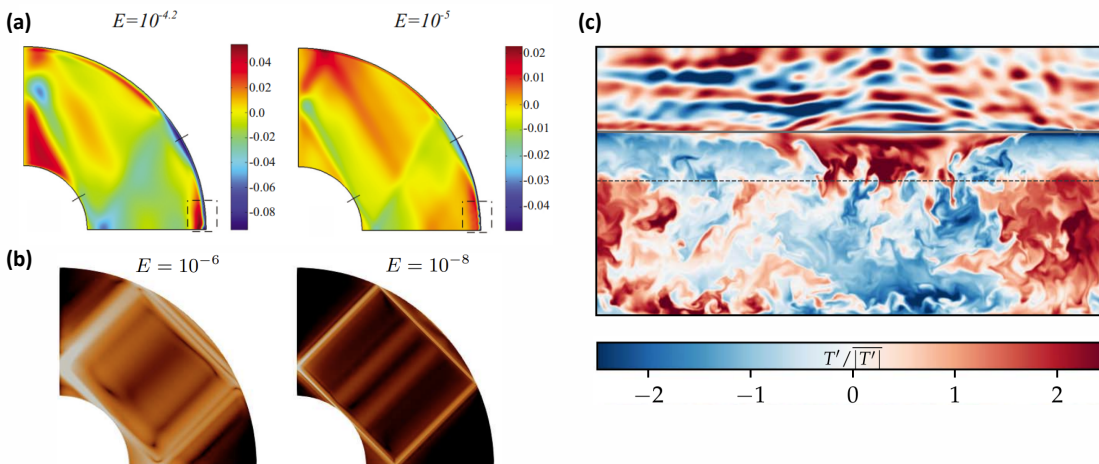


FIGURE 1.11 – Simulations d'un fluide dans une coque en rotation forcée par libration. (a) Vitesse azimutale au moment où l'enveloppe extérieure est en position rétrograde maximale pour les cas d'instabilité centrifuge. (b) Amplitude de la vitesse azimutale pour le rayon issu de la latitude critique. E est le nombre d'Ekman comparant les effets visqueux à la rotation. (c) Tranche verticale d'une simulation des couches convectives et radiatives d'une étoile, montrant les fluctuations de température, normalisées par leur amplitude moyenne à chaque hauteur afin d'afficher clairement toutes les caractéristiques dynamiques. La ligne horizontale en pointillés indique la limite convective où le fluide n'est plus instable. Le sommet de la zone de pénétration est indiqué par une ligne horizontale continue. Extraites de [CALKINS et al. 2010], [HE et al. 2022] et [LECOANET et al. 2021].

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

la latitude où la tangente au cercle fait le même angle avec la verticale que l'onde générée à la pulsation de forçage. Un autre mécanisme peut produire des ondes gravito-inertielles, celui-ci nécessite un fluide séparé en deux zones : une zone instable soumise à la convection, et une zone stratifiée de manière stable [COUSTON et al. 2017]. C'est notamment le cas dans les étoiles massives ($M > 1.5M_{\odot}$ ⁸) qui possèdent durant leur séquence principale un coeur convectif entouré d'une zone dite radiative⁹. Des simulations (voir figure 1.11(c)) montrent que des ondes peuvent être générées à l'interface entre les deux zones par les fluctuations dues à la convection dans la couche inférieure et les panaches perturbant l'interface. Il est par ailleurs possible qu'un phénomène similaire puisse avoir lieu à la limite entre la couche limite planétaire et la partie stratifiée de l'atmosphère terrestre.

8. $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg est la masse du soleil.

9. Dans la communauté astrophysique, la présence de convection est donnée par le critère de Schwarzschild, qui compare le gradient de température local au gradient de température subi par une particule lors d'une advection adiabatique (ce critère est lié au nombre de Rayleigh critique, revient à regarder si N^2 est positive ou négative dans l'équilibre statique). La zone convective est souvent plus grande à cause de la convection pénétrante, mélangeant une partie de la zone stratifiée. La formation de celle-ci est encore un sujet de recherche [BARAFFE et al. 2023].

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

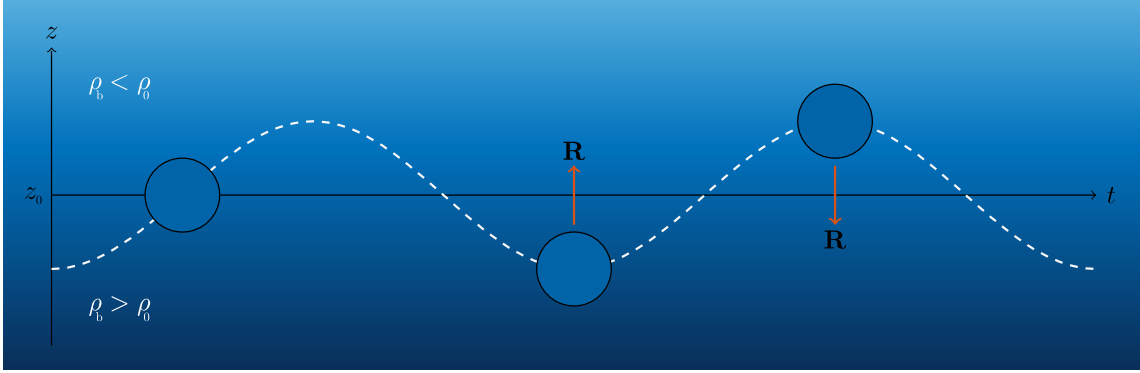


FIGURE 1.12 – Mouvement oscillant d'une particule fluide de masse volumique ρ_0 dû à l'équilibre entre le poids et la poussée d'Archimède. La résultante \vec{R} est orientée vers le haut si le fluide environnant est plus lourd ($\rho_b > \rho_0$) ou vers le bas dans le cas inverse, agissant comme une force de rappel. Modifié de [BOURY 2020].

B Description mathématique des ondes gravito-inertielles

Dans cette partie, nous allons développer la description des ondes gravito-inertielles, en utilisant les équations de Navier-Stokes afin d'une part d'obtenir la relation de dispersion de ces ondes, et d'autre part d'affiner notre compréhension.

B.1 Phénoménologie

a Physique d'un fluide stratifié

Des fluides comme l'eau de l'océan ou l'air de l'atmosphère ne sont pas homogènes, leur masse volumique ρ_b dépend de la position verticale z (profondeur ou altitude).

L'équilibre mécanique entre la résultante des forces de pression P et le poids donne l'équation de la statique des fluides

$$\partial_z P = -\rho_b(z)g, \quad (1.1)$$

avec g l'accélération de la gravité et l'axe \vec{e}_z dirigé suivant la verticale ascendante. L'intégrale des forces de pression sur une particule fluide à l'altitude h est donc

$$\vec{\Gamma} = \rho_b(h)g\vec{e}_z, \quad (1.2)$$

qui est la poussée d'Archimède. Une particule de fluide, initialement à la cote z_0 , donc de densité $\rho_b(z_0)$, déplacée de Δz , subit donc une force

$$\vec{R} = (\rho_b(z_0 + \Delta z) - \rho_b(z_0))g\vec{e}_z, \quad (1.3)$$

dite force de flottabilité, représentée sur la figure 1.12. Le principe fondamental de la dynamique est alors

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_z = \rho_b(z_0) \frac{d^2(z_0 + \Delta z)}{dt^2} = \rho_b(z_0) \frac{d^2\Delta z}{dt^2} = (\rho_b(z_0 + \Delta z) - \rho_b(z_0))g. \quad (1.4)$$

Pour un déplacement infinitésimal δz , on fait le développement limité autour de la position d'équilibre z_0

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{g}{\rho_b(z_0)} \partial_z \rho_b(z_0) \delta z + \mathcal{O}(\delta z^2) = -N^2 \delta z. \quad (1.5)$$

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

Pour un fluide stratifié stable, $\partial_z \rho_b < 0$, et la force de flottabilité est bien une force de rappel. L'équation obtenue est celle d'un oscillateur harmonique¹⁰ de pulsation N^2 . Cette pulsation, pulsation d'oscillation naturelle du système est appelée pulsation de flottabilité ou de Brunt-Väisälä et vaut

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_b}{\partial z}}, \quad (1.6)$$

où $\rho_b(z)$ est le profil de masse volumique à l'équilibre, ρ_0 une masse volumique de référence et g l'accélération de la gravité. La pulsation N est bien définie pour des stratifications stables $\partial_z \rho_b < 0$, et elle est d'autant plus grande que le fluide est stratifié, c'est-à-dire que le profil de densité est pentu. Un fluide homogène, qu'il soit dense ou non, a une pulsation de flottabilité $N = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On dira qu'un fluide est stratifié linéairement lorsque $N = \text{Cste}$, c'est-à-dire $\rho_b = \rho_0 - N_0^2 \rho_0 (z - z_0) / g$.

Ainsi, une perturbation dans un fluide stratifié génère un mouvement d'oscillation des particules fluides dont la force de rappel est la force de flottabilité. En se propageant, ces oscillations donnent naissance à ce que l'on appelle des ondes internes car elles se propagent dans le volume du fluide et non pas en surface comme les vagues que l'on connaît. Intuitive quand il s'agit d'un fluide à deux couches, la perception des ondes internes de gravité est plus complexe dans le cadre d'un fluide continûment stratifié mais le mécanisme de base reste le même, l'effet de la gravité.

b Physique d'un fluide en rotation

Considérons le cas d'un fluide (homogène de masse volumique ρ_0) en rotation uniforme, on peut écrire en tout point $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Une particule de fluide subit dans le référentiel tournant R une force, dite force de Coriolis

$$\vec{C} = -2\rho_0 \Omega \vec{e}_z \times \vec{v}_R, \quad (1.7)$$

où (r, θ, z) sont les coordonnées polaires de la particule. La vitesse dans ce référentiel est

$$\vec{v}_R(r) = \partial_t r \vec{e}_r + r \partial_t \theta(r) \vec{e}_\theta + \partial_t z \vec{e}_z, \quad (1.8)$$

soit une force de Coriolis

$$\vec{C} = -2\rho_0 \Omega (\partial_t r \vec{e}_\theta - r \partial_t \theta(r) \vec{e}_r). \quad (1.9)$$

Par définition, la dérivée de l'angle par rapport au temps est la vitesse angulaire de la particule fluide, qui est dans le référentiel tournant

$$r \partial_t \theta(r) = r \Omega_R(r) = r(\Omega_L(r) - \Omega). \quad (1.10)$$

Dans le référentiel du laboratoire, il y a conservation du moment angulaire $\mathcal{C}_L = r \Omega_L(r)^2$. Une particule de fluide initialement à l'équilibre en r_0 subissant un déplacement infinitésimal δr aura donc une vitesse angulaire

$$\Omega_L(r_0 + \delta r) = \sqrt{\frac{r_0 \Omega_L(r_0)^2}{r_0 + \delta r}} = \Omega_L(r_0) \left(1 - 2 \frac{\delta r}{r_0}\right) + \mathcal{O}(\delta r^2). \quad (1.11)$$

La particule étant initialement à l'équilibre, on a $\Omega_L(r_0) = \Omega$. La seconde loi de Newton donne l'évolution de cette particule

$$\frac{\vec{a}}{\rho_0} \cdot \vec{e}_r = \frac{d^2 \delta r}{dt^2} = -2\Omega(r_0 + \delta r) \left(\Omega(1 - 2 \frac{\delta r}{r_0}) - \Omega\right) = -(2\Omega)^2 \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2), \quad (1.12)$$

qui est, au premier ordre, là encore celle d'un oscillateur harmonique de pulsation $f_c = 2\Omega$, paramètre de Coriolis. La force de rappel est la force de Coriolis couplée à la conservation du moment cinétique, ce mécanisme est illustré sur la figure 1.13.

10. La viscosité a été oubliée volontairement, qui créerait de la dissipation. La diffusion de la quantité responsable du changement de densité a aussi été laissée de côté.

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

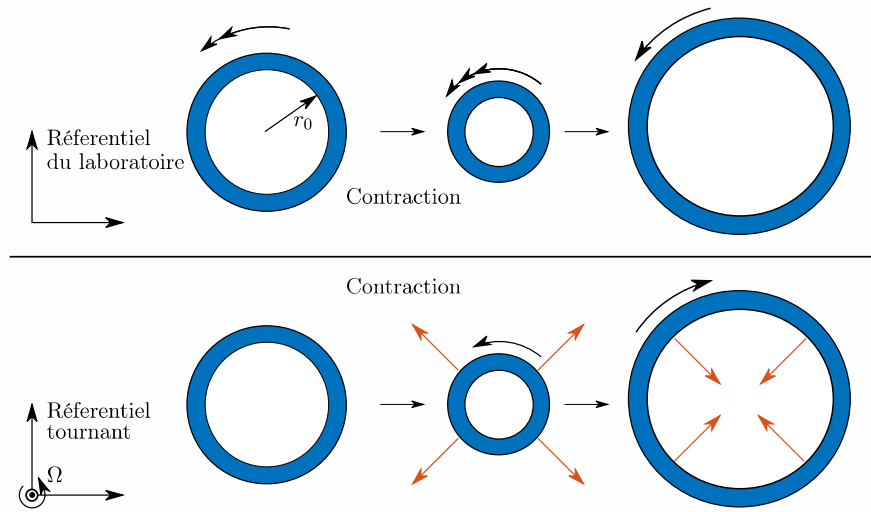


FIGURE 1.13 – Schématisation des oscillations inertielles à la pulsation f_c par un anneau. Une perturbation de la position horizontale, une contraction ici, provoque une accélération de la rotation par conservation du moment cinétique. La force de Coriolis indiquée par les flèches rouges agit comme une force de rappel.

Ce sont cette fois des perturbations horizontales qui vont pouvoir exciter des ondes, qu'on appelle les ondes inertielles dans les milieux en rotation. Le paramètre de Coriolis est directement proportionnel à la vitesse de rotation et $f_c = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ quand il n'y a pas de rotation.

c Brunt, Väisälä et Coriolis

Les pulsations caractéristiques N et f_c ont été nommées d'après trois chercheurs :

David Brunt (17 juin 1886 - 5 février 1965) est un météorologiste gallois, professeur avant de rejoindre la section météorologique des *Royal engineers* et de continuer ses travaux sous la tutelle de l'armée de l'air britannique pour étudier la dispersion des gaz. Il est devenu le premier professeur de météorologie à temps plein en Grande-Bretagne après être entré à l'*Imperial College London* en tant que professeur associé, et a publié le livre *Physical and dynamical Meteorology*. Outre ses distinctions honorifiques, la barrière de Brunt en Antarctique a été nommée en son honneur.

Vilho Väisälä (28 septembre 1889 - 12 août 1969) est un météorologue finlandais¹¹. Il a d'abord étudié le magnétisme terrestre avant de s'intéresser aux mesures dans l'atmosphère. Il reste célèbre pour la mise au point des ballons-sondes pouvant communiquer par radio, dite radiosonde, pour lesquelles il créera son entreprise de fabrication.

Gaspard-Gustave de Coriolis (21 mai 1792-1843) est un mathématicien et ingénieur français. Noble, polytechnicien, répétiteur de Cauchy et assistant de Navier, il a étudié et enseigné principalement la mécanique. Dans *Du calcul de l'effet des machines*, il donne son nom au *travail* d'une force et co-construit la formulation actuelle du théorème de l'énergie cinétique. Il a montré qu'un corps en mouvement sur la surface d'un solide en rotation subit une force qui a été nommée en son honneur.

11. Il est l'auteur de la seule thèse de doctorat en mathématiques rédigée en finnois d'après sa page Wikipédia.

B.2 Équations du fluide

Nous avons décrit la phénoménologie des fluides stratifiés ou en rotation. Lorsque les deux sont présents, la particule va à la fois osciller verticalement, contrôlée par la pulsation de flottabilité et horizontalement, contrôlée par le paramètre de Coriolis. La prise en compte de la propagation des ondes ou de la viscosité nécessite la description continue du fluide.

Un fluide à la position $\vec{r} = (x, y, z)$ de masse volumique $\rho(t, x, y, z)$, de vitesse $\vec{v}(t, x, y, z)$, de champ de pression $P(t, x, y, z)$ dans le référentiel tournant à la pulsation Ω et soumis à la gravité $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, est décrit par l'équation de Navier-Stokes (bilan de quantité de mouvement)

$$\rho \left(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}, \quad (1.13)$$

ainsi que par l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = \kappa \Delta \rho, \quad (1.14)$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient, $\vec{\nabla} \cdot$ la divergence et $\Delta = \nabla^2$ le Laplacien. Le système est fermé avec l'hypothèse d'incompressibilité qui se traduit par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.15)$$

Approximation de Boussinesq : La masse volumique est décomposée en trois contributions : ρ_0 le terme de référence, $\rho_b(z)$ la stratification et $\rho'(x, y, z)$ le terme perturbatif. L'approximation de Boussinesq (classique dans les écoulements contrôlés par la flottabilité [BOUSSINESQ 1903; GRAY et GIORGINI 1976; MAYELI et SHEARD 2021; SPIEGEL et VERONIS 1960]) revient à négliger les variations de densité dans tous les termes sauf dans le terme de flottabilité présent dans l'équation de Navier-Stokes, ainsi qu'à considérer les autres propriétés du fluide (comme la viscosité) comme constantes. En faisant cette approximation, on décompose aussi les autres champs en deux contributions, l'une statique et l'autre perturbative

$$\rho(t, x, y, z) = \rho_0 + \rho_b(z) + \rho'(t, x, y, z), \quad \rho', \rho_b \ll \rho_0 \quad (1.16)$$

$$P(t, x, y, z) = P_s + p', \quad p' \ll P_s \quad (1.17)$$

$$\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}'. \quad (1.18)$$

En séparant les termes d'ordre 0 et les termes d'ordre 1, on obtient l'équation de la statique des fluides (corrigée de la stratification et de l'accélération centrifuge) et l'équation perturbative

$$\vec{\nabla} P_s = -(\rho_0 + \rho_b(z))g\vec{e}_z + \Omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \quad (1.19)$$

$$\partial_t \vec{v}' + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \vec{v}' = -\vec{\nabla} \frac{p'}{\rho_0} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' - \rho' \frac{g}{\rho_0} \vec{e}_z + \nu \Delta \vec{v}' \quad (1.20)$$

$$\partial_t \rho' + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rho_b + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \rho' = \kappa \Delta \rho' \quad (1.21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0. \quad (1.22)$$

a Nombres adimensionnés

Introduisons les échelles caractéristiques L et U pour la taille et la vitesse du système. L'équation que nous sommes en train de regarder est l'équation de Navier-Stokes perturbative autour de l'équilibre hydrostatique. L et U sont donc des échelles caractéristiques des perturbations. La pression dynamique $\rho_0 U^2$ est alors bien adaptée pour adimensionner la pression p' . Plusieurs options sont possibles pour construire un temps : le temps typique d'advection $\tau_{adv} = L/U$ lié au non-linéarités, le temps de la dissipation visqueuse $\tau_{vis} = L^2/\nu$ et la période des ondes

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

$\tau_0 \simeq 4\pi/(N^2 + f_c^2)$. Pour ne pas prescrire ce choix, l'échelle caractéristique temporelle est notée τ . Notons u, t' et π la vitesse, le temps et la pression adimensionnés, alors la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{\tau_{adv}}{\tau} \partial_{t'} \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} \pi - 2 \frac{\Omega L}{U} \vec{e}_z \times \vec{u} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\rho'}{L} \left(\frac{L}{U}\right)^2 \vec{e}_z + \frac{\nu}{UL} \Delta \vec{u}. \quad (1.23)$$

Trois nombres sans dimension apparaissent :

1. Le nombre de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\tau_{vis}}{\tau_{adv}}$, qui représente le rapport entre le terme advectif et le terme visqueux, $Re \ll 1$ est un écoulement laminaire, $Re \gg 1$ est un écoulement turbulent.
2. Le nombre de Rossby $Ro = \frac{U}{2\Omega L}$, qui compare l'advection à la force de Coriolis. Un faible nombre de Rossby correspond à une influence prépondérante de la rotation.
3. Le nombre de Richardson $Ri = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial_z \rho'}{(\partial_z U)^2}$, qui compare quant à lui l'énergie potentielle due à la flottabilité et le cisaillement dans l'écoulement. Un nombre de Richardson petit signifie que le cisaillement est fort et que l'on peut s'attendre à des retournements et à du mélange.

Le même travail sur la conservation de la quantité de sel fait apparaître devant le terme de diffusion un nombre $(ScRe)^{-1}$, où $Sc = \nu/\kappa$ est le nombre de Schmidt comparant la viscosité à la diffusion, de l'ordre de 700 pour l'eau salée.

b Hypothèse d'invariance

Reprenons le système dimensionné, la condition d'incompressibilité permet d'écrire la vitesse sous la forme d'un écoulement potentiel en utilisant la fonction courant $\vec{v}' = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$. On fera aussi, de manière à simplifier les calculs, l'hypothèse que l'écoulement est invariant suivant la direction \vec{e}_y .

Nous pouvons sous cette hypothèse écrire $\vec{\psi} = \psi \vec{e}_y$, soit $\vec{v}' = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} + v_y \vec{e}_y = (-\partial_z \psi, v_y, \partial_x \psi)$. L'opérateur d'advection $\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}$ peut être développé $v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z = -\partial_z \psi \partial_x + 0 + \partial_x \psi \partial_z$. On écrira donc

$$(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \cdot = \mathcal{J}(\psi, \cdot) \quad (1.24)$$

où $\mathcal{J}(f(x, z), g(x, z)) = \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g$. On introduira aussi finalement $b' = -\rho' g / \rho_0$ la flottabilité. Finalement, on supposera la rotation suivant l'axe \vec{e}_z (approximation du plan β), soit $2\vec{\Omega} \times \vec{v}' = f_c \vec{e}_z \times \vec{v}'$ où le paramètre de Coriolis f_c a été introduit. Les équations sur la vitesse et la flottabilité s'écrivent alors

$$-\partial_t \partial_z \psi - \mathcal{J}(\psi, \partial_z \psi) = -\partial_x p' / \rho_0 + f_c v_y - \nu \Delta \partial_z \psi \quad (1.25)$$

$$\partial_t v_y + \mathcal{J}(\psi, v_y) = f_c \partial_z \psi + \nu \Delta v_y \quad (1.26)$$

$$\partial_t \partial_x \psi + \mathcal{J}(\psi, \partial_x \psi) = -\partial_z p' / \rho_0 + b + \nu \Delta \partial_x \psi \quad (1.27)$$

$$\partial_t b - \frac{g}{\rho_0} \partial_x \psi \partial_z \rho_b + \mathcal{J}(\psi, b) = \kappa \Delta b. \quad (1.28)$$

Deux des équations sont alors utilisées pour éliminer la pression

$$\partial_t \Delta \psi + \mathcal{J}(\psi, \Delta \psi) = \partial_x b - f_c \partial_z v_y + \nu \Delta \Delta \psi \quad (1.29)$$

$$\partial_t v_y + \mathcal{J}(\psi, v_y) = f_c \partial_z \psi + \nu \Delta v_y \quad (1.30)$$

$$\partial_t b + N^2 \partial_x \psi + \mathcal{J}(\psi, b) = \kappa \Delta b, \quad (1.31)$$

où la pulsation de flottabilité est

$$N = \sqrt{\frac{-g}{\rho_0} \partial_z \rho_b}. \quad (1.32)$$

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

Dans l'approximation faite qui est celle des perturbations, les termes de dérivées croisées \mathcal{J} sont négligeables à l'ordre linéaire. Ces équations en posant $\mathcal{J} = 0$ sont les équations linéarisées décrivant un fluide stratifié en rotation.

B.3 Relation de dispersion linéaire

On néglige les effets diffusifs (viscosité, sel et thermiques). Le système d'équations devient

$$\partial_t \Delta \psi = \partial_x b - f_c \partial_z v_y \quad (1.33)$$

$$\partial_t v_y = f_c \partial_z \psi \quad (1.34)$$

$$\partial_t b + N^2 \partial_x \psi = 0. \quad (1.35)$$

Il reste à dériver la première relation par rapport au temps pour obtenir une équation uniquement sur ψ

$$\partial_{tt}^2 \Delta \psi = -N^2 \partial_{xx}^2 \psi - f_c^2 \partial_{zz}^2 \psi \quad (1.36)$$

Pour aller plus loin, on développe la fonction courant sur la base des ondes planes $\psi = \psi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ où ω est la pulsation de l'onde et $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ son vecteur d'onde, ce qui donne

$$\omega^2 k^2 = N^2 k_x^2 + f_c^2 k_z^2. \quad (1.37)$$

En écrivant $\vec{k} = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$, d'angle θ par rapport à la verticale, on obtient la relation de dispersion des ondes gravito-inertielles

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta + f_c^2 \cos^2 \theta. \quad (1.38)$$

Cette relation indique que la fréquence d'excitation de l'onde est liée à l'angle que fait son vecteur d'onde avec la verticale, et ne dépend pas de la longueur d'onde. Ces deux propriétés distinguent ces ondes des ondes électro-magnétiques ou sonores. Plus la pulsation est proche de la pulsation de flottabilité, plus le vecteur d'onde est vertical, et inversement, plus le vecteur d'onde est horizontal plus la pulsation est proche du paramètre de Coriolis. Les ondes de gravité se propagent donc à un angle fixé par la valeur de la pulsation de flottabilité $N(z)$ et du paramètre de Coriolis f_c , et ne sont propagatives que lorsque $\text{Min}(N, f_c) < \omega < \text{Max}(N, f_c)$.

Vitesse de phase, vitesse de groupe : À partir de l'équation de dispersion (1.38), il est possible de calculer la vitesse de phase

$$\vec{c}_\phi = \frac{\omega}{k^2} \vec{k}, \quad (1.39)$$

qui est alignée avec le vecteur d'onde, et donne la direction d'évolution de la phase. La vitesse de groupe \vec{c}_g est elle la vitesse de propagation de l'enveloppe d'un faisceau d'onde et donc de

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

l'énergie, elle s'écrit ¹²

$$\vec{c}_g = \frac{(N^2 - f_c^2)k_x k_z}{\omega k^4} (k_z, 0, -k_x). \quad (1.45)$$

La vitesse de groupe et la vitesse de phase sont donc orthogonales. Elles ont le même signe selon \vec{e}_x si $N > f_c$ (cas des ondes internes) et selon la verticale si $f_c > N$ (cas des ondes inertielles). Si on calcule la vitesse particulière v' à partir de la fonction d'onde, et de l'équation pour v_y (eq. 1.34) on obtient

$$v' = (-\partial_z \psi, v_y, \partial_x \psi) = i\psi_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) (k_z, ik_z \frac{f_c}{\omega}, -k_x). \quad (1.46)$$

Du fait de la rotation, la composante de la vitesse particulière selon \vec{e}_y est nulle bien que $k_y = 0$ dans l'hypothèse d'invariance. Dans le cas où $f_c = 0$ (les ondes internes de gravité), la vitesse de groupe et la vitesse particulière sont alignées.

La figure 1.14 montre les gradients de densité produits par l'oscillation d'une boule dans un fluide stratifié, sur laquelle quatre branches sont observées, résultat de l'angle de propagation fixé par la fréquence d'oscillation. L'orthogonalité de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe est aussi vérifiée.

Retour sur l'hypothèse d'invariance : Reprenons les équations linéaires et non-visqueuses décrivant la perturbation dans le fluide (où l'on a oublié les apostrophes et introduit la flottabilité

$$\partial_t \vec{v} = -\vec{\nabla} \frac{p'}{\rho_0} - f_c \vec{e}_z \times \vec{v} + b \vec{e}_z \quad (1.47)$$

$$\partial_t b + N^2 v_z = 0 \quad (1.48)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.49)$$

La vorticité est définie comme $\zeta = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, son équation d'évolution est donc ¹³

$$\partial_t \zeta = -f_c \partial_z \vec{v} + \vec{\nabla} \times b \vec{e}_z. \quad (1.50)$$

La dérivée de cette équation par rapport au temps couplée à l'équation de la flottabilité donne

$$\partial_{tt}^2 \zeta = -f_c \partial_z \partial_t \vec{v} - \vec{\nabla} \times N^2 v_z \vec{e}_z. \quad (1.51)$$

On prend le rotationnel de celle-ci pour pouvoir utiliser l'équation 1.50

$$\partial_{tt}^2 \vec{\nabla} \times \zeta = -f_c \partial_z (\partial_z \vec{v} + \vec{\nabla} \times b \vec{e}_z) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times N^2 v_z \vec{e}_z). \quad (1.52)$$

12. $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ donc $2k dk = 2k_x dk_x + 2k_z dk_z$, et donc pour $i = x, z$, $\frac{dk}{dk_i} = k_i/k$. On part alors de la relation de dispersion

$$\omega^2 = (N^2 k_x^2 + f_c^2 k_z^2) / k^2 \quad (1.40)$$

$$2\omega d\omega = (2N^2 k_x dk_x k^2 - (N^2 k_x^2 + f_c^2 k_z^2) 2k_x dk_x) / k^4 \quad (1.41)$$

$$\frac{d\omega}{dk_x} = (N^2 - f_c^2) k_z^2 k_x / (\omega k^4). \quad (1.42)$$

Et de la même manière

$$\frac{d\omega}{dk_z} = (f_c^2 - N^2) k_x^2 k_z / (\omega k^4), \quad (1.43)$$

soit finalement

$$\vec{c}_g = \frac{(N^2 - f_c^2)k_x k_z}{\omega k^4} (k_z, 0, -k_x) \quad (1.44)$$

13. En effet, en utilisant l'incompressibilité

$$\vec{\nabla} \times (\vec{e}_z \times v) = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z v_x \\ -\partial_z v_y \\ \partial_x v_x + \partial_y v_y \end{pmatrix} = -\partial_z \vec{v}.$$

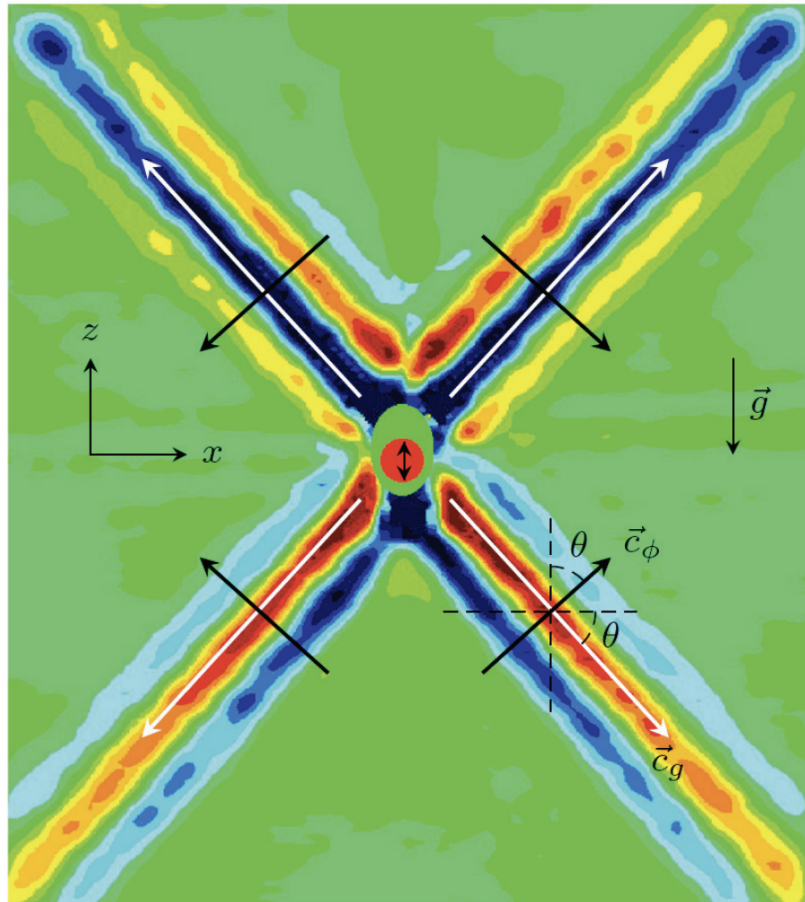


FIGURE 1.14 – Gradient vertical de densité engendré par l’oscillation d’un cylindre, en rouge au centre de l’image, dans un fluide stratifié. Les flèches blanches marquent la vitesse de groupe, les flèches noires la vitesse de phase. Expérience réalisée par Evgeny Ermanyuk, extraite de la thèse de [BROUZET 2016].

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

Or la propriété d'incompressibilité nous permet d'écrire $\vec{\nabla} \times \xi = -\Delta \vec{v}$. Les équations régissant les trois composantes de la vitesse sont alors

$$\partial_{tt}^2 \Delta v_x = -f_c^2 \partial_{zz}^2 v_x + f_c \partial_{zy}^2 b + N^2 \partial_{xz}^2 v_z, \quad (1.53)$$

$$\partial_{tt}^2 \Delta v_y = -f_c^2 \partial_{zz}^2 v_y - f_c \partial_{zx}^2 b + N^2 \partial_{yz}^2 v_z, \quad (1.54)$$

$$\partial_{tt}^2 \Delta v_z = -f_c^2 \partial_{zz}^2 v_z - N^2 (\partial_{xx}^2 v_z + \partial_{yy}^2 v_z). \quad (1.55)$$

L'équation sur v_z est découplée des deux autres, le développement sur la base des ondes planes ($v_z = v_z^0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$) donne la même relation de dispersion (eq. 1.38), en remplaçant k_x par $k_h = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Les deux autres équations (ainsi que celle sur la flottabilité) nous permettent d'obtenir les relations de polarisation

$$v_x^0 = \frac{k_z}{k_h^2} (-k_x + i \frac{f_c}{\omega} k_y) v_z^0, \quad (1.56)$$

$$v_y^0 = \frac{k_z}{k_h^2} (-k_y - i \frac{f_c}{\omega} k_x) v_z^0, \quad (1.57)$$

où v_x^0 et v_y^0 sont les amplitudes complexes des vitesses horizontales. Il est alors possible de retrouver l'expression 1.46 avec une rotation d'angle φ tel que $\cos \varphi = k_x/k_h$, ce qui nous place dans la direction de propagation de l'onde. Et alors, l'amplitude de la vitesse particulière s'écrit

$$\vec{v}^0 = (-k_z, i \frac{f_c}{\omega} k_z, k_h) v_z^0 \quad (1.58)$$

Pour la suite, nous reprendrons donc les calculs avec l'hypothèse d'invariance $k_y = 0$ et $k_h = k_x$.

B.4 Caractéristiques

Reprenons l'équation linéaire inviscide (1.36), en injectant une onde monochromatique à la pulsation ω

$$(\omega^2 - N^2) \partial_{xx}^2 \psi + (\omega^2 - f_c^2) \partial_{zz}^2 \psi = 0, \quad (1.59)$$

alors en effectuant le changement de variable $z \mapsto \tan \theta z'$, avec

$$\tan^2 \theta = -\frac{\omega^2 - f_c^2}{\omega^2 - N^2}, \quad (1.60)$$

du même angle θ , angle de propagation des ondes. Cette quantité est bien positive quand l'onde gravito-inertielle est propagative, on obtient une équation hyperbolique pour la fonction d'onde

$$\partial_{xx}^2 \psi - \partial_{z'z'}^2 \psi = 0. \quad (1.61)$$

Pour résoudre cette équation, on fait un changement de variables $\xi = x + z'$ et $\eta = x - z'$, et on obtient alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.62)$$

Une solution de cette équation est donc $\psi = f_+(\xi) + f_-(\eta)$. La description complète de la fonction d'onde demande de préciser les expressions de f_{\pm} à l'aide des conditions aux limites. On peut par exemple montrer [MAAS et LAM 1995] que si le domaine présente une paroi horizontale, alors $f_+ = -f_-$ et alors $\psi = f(\xi) - f(\eta)$. Cependant, le changement de variable nous indique que la fonction courant est constante sur les droites $x + z' = Cste$ et $x - z' = Cste$, et comme la fonction courant est continue à la réflexion, il est possible d'obtenir les trajectoires sur lesquelles $\psi = Cste$.

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

Ce sont ces trajectoires, des segments de droite dans l'espace x, z' , que l'on appelle les caractéristiques. Il est alors possible, une fois spécifiées les conditions aux limites, d'obtenir la fonction f et donc la fonction courant ψ en calculant en chaque point $f\xi - f\eta$. En étant plus précis, il est même possible de restreindre le champ d'étude de f . En effet, deux réflexions successives¹⁴ d'une même caractéristique sur la surface horizontale correspondent à une même valeur de ψ , et contiennent donc la même information. Il est alors possible de définir f uniquement sur cet intervalle. Un tel intervalle est dit fondamental, car il permet de générer toute la fonction d'onde [MAAS et LAM 1995].

B.5 Rôle de la dissipation

Pour identifier le rôle de la dissipation, il faut garder le système (1.29) avec les termes visqueux, toujours dans l'approximation linéaire, soit $\mathcal{J} = 0$. En injectant la même onde monochromatique, on obtient le système linéaire

$$\begin{bmatrix} -i\omega k^2 - vk^4 & -if_c k_z & ik_x \\ if_c k_z & i\omega + vk^2 & 0 \\ -ik_x N^2 & 0 & i\omega + \kappa k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ v_y \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

qui n'a de solution que lorsque son déterminant est nul, soit

$$k^2(i\omega + vk^2)^2(i\omega + \kappa k^2) + N^2 k_x^2(i\omega + vk^2) + f_c^2 k_z^2(i\omega + \kappa k^2) = 0. \quad (1.64)$$

La relation de dispersion complète pour une onde monochromatique dans l'approximation linéaire est donc

$$k^2 \omega^2 = N^2 k_x^2 + f_c^2 k_z^2 + v \left(2ik^4 \omega + N^2 k_x^2 \frac{(1 - \kappa/v)k^2}{(i\omega + \kappa k^2)} \right) + v^2 k^6. \quad (1.65)$$

Les premiers termes de cette équation sont ceux de l'équation (1.38) linéaire non-visqueuse, non-diffusive. Un développement en échelles multiples [BOURY 2020] montre que le premier terme correctif est imaginaire, et correspond donc à une atténuation de l'onde lors de sa propagation. Plus le vecteur d'onde k est grand, et plus l'atténuation est forte. Le deuxième terme correctif fait apparaître le nombre de Schmidt, qui est grand dans l'eau salée, et on peut donc prendre $\kappa = 0$.

B.6 Effets non-linéaires

a Ordres de grandeurs

Reprenons l'équation (1.29) avec une échelle caractéristique λ et un temps caractéristique T qui est ici la période des ondes. L'ordre de grandeur du terme linéaire est $\partial_t \Delta \psi \sim \psi_0 / (T\lambda^2)$ et celui du terme non-linéaire $\mathcal{J}(\psi, \Delta \psi) \sim \psi_0^2 / \lambda^4$. Le régime peut être qualifié de linéaire lorsque

$$\frac{\psi_0}{T\lambda^2} \gg \frac{\psi_0^2}{\lambda^4}. \quad (1.66)$$

La vitesse du fluide s'écrit $v \sim k\psi_0$, et l'amplitude de forçage $a = vT$, on obtient une condition sur la vitesse du fluide

$$v \frac{\pi}{\omega} k \ll 1, \quad (1.67)$$

ou sur l'amplitude de forçage

$$ak \ll 1, \quad (1.68)$$

14. En deux points x différents.

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

où k est le vecteur d'onde et ω sa pulsation. Les expériences montrent des longueurs d'onde de l'ordre de quelques centimètres et des pulsations de l'ordre du radian par seconde. Les termes non-linéaires seront donc à prendre en compte lorsque l'amplitude dépassera quelques millimètres et la vitesse quelques millimètres par seconde.

Au delà de ce seuil, on ne peut plus négliger les termes non-linéaires, qui proviennent de l'advection, et sont du type $(v \cdot \nabla v)$. Ce sont des termes quadratiques et il est donc attendu que les interactions soient des interactions à trois ondes.

B.7 Équation d'amplitude

Pour analyser plus précisément les termes non-linéaires, il faut reprendre le système entier. Le calcul explicite est donné par [DAUXOIS et al. 2018] pour les ondes de gravité et par [MAURER 2017] pour le développement complet dans le cas des ondes gravito-inertielles. La fonction courant se décompose sur la base des ondes planes

$$\psi = \sum_n \psi_{0,n} e^{i\omega_n t - \vec{k}_n \cdot \vec{r}} + c.c., \quad (1.69)$$

et de même pour la flottabilité b et v_y . Le système (1.29) peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} \begin{bmatrix} \psi \\ v_y \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\Delta\psi, \psi) \\ \mathcal{J}(v_y, \psi) \\ \mathcal{J}(b, \psi) \end{bmatrix}, \quad (1.70)$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire, les non-linéarités venant des termes jacobiens. On peut par exemple calculer

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Delta\psi, \psi) &= \partial_x(\partial_{xx}\psi + \partial_{zz}\psi)\partial_z\psi - \partial_x\psi\partial_z(\partial_{xx}\psi + \partial_{zz}\psi) \\ &= \sum_p \sum_q k_p^2(k_{x,p}k_{z,q} - k_{z,p}k_{x,q})\psi_{0,p}\psi_{0,q} e^{i(\omega_p + \omega_q)t - (\vec{k}_p + \vec{k}_q) \cdot \vec{r}} \\ &\quad - k_p^2(k_{x,p}k_{z,q} - k_{z,p}k_{x,q})\psi_{0,p}\psi_{0,q}^\dagger e^{i(\omega_p - \omega_q)t - (\vec{k}_p - \vec{k}_q) \cdot \vec{r}} \\ &\quad + c.c. \end{aligned} \quad (1.71)$$

On remarque premièrement que les ondes planes sont solutions du problème non-linéaire : les termes d'interaction d'une onde n avec elle-même sont nuls. L'interaction non-linéaire ne peut pas, dans le cas où la stratification est linéaire comme ici, interagir avec elle-même.

On obtient aussi une condition d'interaction sur les pulsations

$$\omega_n = \omega_p \pm \omega_q, \quad (1.72)$$

et sur les vecteurs d'onde

$$\vec{k}_n = \vec{k}_p \pm \vec{k}_q, \quad (1.73)$$

Il faut ajouter à ces conditions le fait que l'on souhaite obtenir une onde propagative, et donc que chaque couple (ω, \vec{k}) respecte la relation de dispersion. L'équation d'évolution des amplitudes $(\psi_{0,n}, v_{y0,n}, b_{0,n})$ est donnée par les relations de polarisation obtenues à partir de la dynamique linéaire, et permet de calculer le taux de croissance de chaque triade. Les travaux de [HASSELMANN 1967]¹⁵ ont montré que les termes d'interaction $\omega_n = \omega_p - \omega_q$ ne sont pas résonants, c'est-à-dire que leur amplitude ne croît pas.

Lorsque l'amplitude de la vitesse est assez forte, un forçage à une pulsation ω_0 peut interagir de manière résonante avec deux sous harmoniques telles que $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$. On appelle ce

15. prix Nobel de physique 2021

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

mécanisme l'instabilité triadique résonante, ou *TRI* (*Triadic Resonance Instability*). Cette résonance a été vérifiée pour les ondes internes de gravité [BROUZET et al. 2016b] comme pour les ondes inertielles [BORDES et al. 2012]. La perturbation et le transfert d'énergie cinétique provient du cisaillement dans l'onde primaire. Dans le cas particulier où $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0/2$, on parle d'instabilité paramétrique subharmonique PSI (*Parametric Subharmonic Instability*) [KOUDELLA et STAQUET 2006].

Dans le sens inverse, ce terme d'interaction montre que deux ondes de pulsations différentes produisent à l'endroit où elles se superposent une onde à la fréquence somme des leurs. Cette onde peut être propagative ou non, et être résonante ou non.

Ces équations ont été obtenues sous l'hypothèse d'invariance selon \vec{e}_y et pour la propagation d'ondes planes. Hors de ces hypothèses, les non-linéarités classiques des équations de Navier-Stokes peuvent aussi apparaître, et notamment de la turbulence lorsque le nombre de Reynolds est élevé.

B.8 Ondes dans une géométrie cylindrique

La rotation, ainsi que la forme de certaines cuves d'expériences ont une géométrie naturellement cylindrique. Il semble alors utile de regarder la propagation de ces ondes dans un référentiel $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Les équations qui régissent le système sont identiques (équation (1.47)), ce sont les opérateurs différentiels qui sont différents. L'hypothèse d'invariance est maintenant faite selon la direction azimutale \vec{e}_θ . C'est une grosse approximation, même si cela n'implique pas une vitesse azimutale nulle. Le développement proposé par [BOURY 2020] montre qu'en développant cette fois sur la base des fonctions de Bessel¹⁶, équivalent cylindrique du développement en ondes planes, la relation de dispersion (1.38) reste valable en remplaçant k_x par k_r le vecteur d'onde radial. Il est aussi à noter l'apparition d'un nouveau terme non-linéaire $v_\theta \partial_z v_\theta$ en plus des jacobiens cylindriques.

Afin de lever la condition sur la vitesse azimutale, on écrit l'équation sur la vorticité $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, en considérant une stratification linéaire

$$\partial_{tt} \vec{\nabla} \times \vec{\zeta} + \vec{\nabla} \times \vec{Q}(\vec{v}, \vec{b}) = f \partial_t \partial_z \vec{\zeta} - N^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (v_z \vec{e}_z), \quad (1.75)$$

où \vec{Q} est le terme non-linéaire quadratique

$$\vec{Q}(\vec{v}, \vec{b}) = \vec{\nabla} \times \left[\partial_t (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} \right]. \quad (1.76)$$

La résolution de cette équation, là aussi menée par [BOURY et al. 2023] par exemple, montre que le développement sur les fonctions de Bessel J_n permet de retrouver la même relation de dispersion. Il est aussi possible de résoudre pour la vitesse dans le cas linéaire :

$$v_r(r, \theta, z, t) = i \frac{k_z v_{z,0}}{4k_r \omega} [(f_c - 2\omega) J_{p-1}(k_r r) + (f_c + 2\omega) J_{p+1}(k_r r)] e^{i(\omega t - k_z z - p\theta)} + c.c., \quad (1.77)$$

$$v_\theta(r, \theta, z, t) = \frac{k_z v_{z,0}}{4k_r \omega} [(2f_c - \omega) J_{p-1}(k_r r) - (2f_c + \omega) J_{p+1}(k_r r)] e^{i(\omega t - k_z z - p\theta)} + c.c., \quad (1.78)$$

$$v_z(r, \theta, z, t) = v_{z,0} J_p(k_r r) e^{i(\omega t - k_z z - p\theta)} + c.c. \quad (1.79)$$

Ces expressions ont été obtenues en imposant la forme de v_z , conformément à un dispositif expérimental précis. On voit l'action de la rotation via le paramètre de Coriolis f_c . Le champ horizontal

16. Par définition, les fonctions de Bessel (de première espèce) d'ordre n sont les fonctions solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + (r^2 - n^2) f = 0, \quad (1.74)$$

et constituent donc une base de développement des ondes en géométrie cylindrique.

B. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

est alors une superposition de deux fonctions de Bessel, dont l'ordre dépend du nombre d'onde horizontal p . Ce développement reste une décomposition en ondes planes, sans tenir compte du dispositif expérimental, que nous présentons ci-après.

C Mise en place expérimentale

Après avoir montré l'importance géophysique des ondes gravito-inertielles et comment elles peuvent être décrites, il nous reste à expliquer comment les reproduire expérimentalement. Il faut pour cela pouvoir stratifier et/ou mettre en rotation un fluide, injecter de l'énergie et observer son mouvement.

C.1 Cuves

L'utilisation de fluides que l'on veut observer implique l'utilisation de cuves étanches dans un matériau transparent. Les cuves présentées sont fabriquées dans un dérivé de plexiglas. La géométrie de ces cuves influe sur le comportement des ondes et nous allons donc commencer par les présenter.

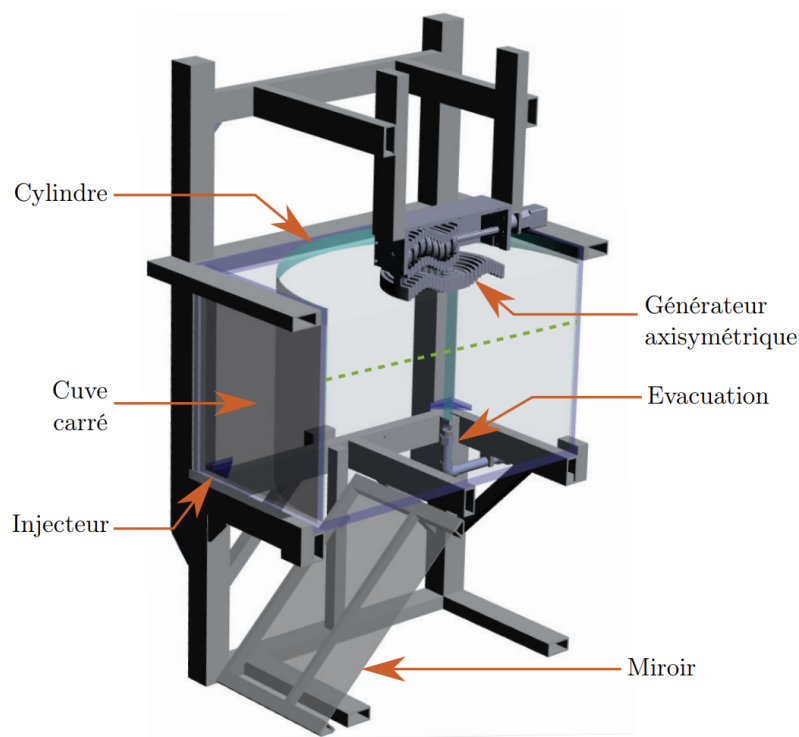


FIGURE 1.15 – Schéma de la cuve cylindrique. Un cylindre en plexiglas transparent de 1 m de diamètre et de 2 mm d'épaisseur est inséré dans une cuve à base carrée ($1 \times 1 \times 0.6 \text{ m}^3$) en plexiglas transparent de 1 cm d'épaisseur. Le cylindre est centré sur l'axe de rotation de la plateforme tournante et est inscrit dans la cuve carrée. Le générateur d'onde est positionné, centré, en haut de la cuve. Les ondes sont visualisées grâce au miroir positionné à 45° et placé sous la cuve. Des injecteurs et une évacuation permettent le remplissage et le vidage. Pour plus de clarté, seule la moitié du dispositif expérimental est représentée. Extraite de [MAURER 2017].

C. MISE EN PLACE EXPÉRIMENTALE

a Cuves rectangulaires

Deux cuves rectangulaires, des parallélépipèdes de format $L \times W \times H$ (longueur, largeur et hauteur), ont été utilisées.

Plate : Une première cuve de dimensions $1.2 \times 0.8 \times 0.5 \text{ m}^3$ a été utilisée lors du stage de Vincent Audoly au printemps 2022. Elle est remplie par des fentes horizontales lestées et placées dans les coins de la cuve.

Longue : Une deuxième cuve rectangulaire est composée de cinq blocs de dimension $0.8 \times 0.17 \times 0.4 \text{ m}^3$. Sa longueur totale de 4 m permet d'étudier la propagation d'ondes en évitant les réflexions au bout de la cuve. Elle a notamment servi pour la thèse de [HUSSEINI 2019] pour l'étude du mélange en milieu stratifié. Cette cuve a été utilisée ici, avec Dheeraj Varma, pour la propagation de modes verticaux dans une stratification non-linéaire (cf chapitre 4). Elle est remplie par un système fente - vanne anti-retour en bas et au bout de la cuve.

b Cuve cylindrique

Cette cuve est en réalité une cuve rectangulaire de dimensions $1 \times 1 \times 0.6 \text{ m}^3$ dans laquelle a été placé un cylindre transparent d'un mètre de diamètre (voir figure 1.15). Ce cylindre permet de délimiter un volume axisymétrique adapté à la rotation et d'éviter ainsi des recirculations. Un miroir placé à 45° sous la cuve permet de réaliser plus facilement des vues horizontales. Des injecteurs (fentes en plexiglas) lestés avec un système de tuyaux permet de remplir la cuve. Le cylindre possédant des encoches à sa base, le fluide à l'intérieur et à l'extérieur sont identiques. Fabriquée lors de la thèse de Paco Maurer [MAURER 2017], elle a aussi servi à [BOURY et al. 2021] pour l'étude des ondes internes axisymétriques. Dans le cadre de la visite de Bruce Sutherland, elle a accueilli l'étude des panaches en rotation [SUTHERLAND et al. 2021] (cf chapitre 5).

c Cuve tronconique

La cuve axisymétrique (achetée à un sous-traitant) ainsi que le châssis pour l'installer ont été conçus par Marc Moulin spécifiquement pour l'étude des ondes gravito-inertielles dans cette géométrie 3D. C'est un cône tronqué (voir figure 1.16) d'angle d'ouverture $\alpha = 30 \pm 1^\circ$, le rayon du cercle qui est la base inférieure est $r_0 = 268 \pm 2 \text{ mm}$ et celui de la base supérieure est $r(h) = 45 \text{ cm}$ et est continué par une portion de cylindre. Elle est remplie de manière stratifiée ou non jusqu'à une hauteur $h = 31 \pm 1 \text{ cm}$, soit environ 170 L. La surface latérale de cette cuve est courbée, alors pour limiter les aberrations¹⁷ elle est positionnée à l'intérieur d'une cuve rectangulaire de dimensions $90 \text{ cm} \times 90 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$ qui est quant à elle remplie d'eau douce.

C.2 Stratification

a Mise en place

Les ondes internes de gravité se propagent dans l'océan ou l'atmosphère qui sont des milieux stratifiés du fait d'un gradient de température, de salinité et de pression. Il est plus facile de travailler à pression atmosphérique. Le coefficient de diffusion du sel dans l'eau est 100 fois plus grand que le coefficient de diffusion thermique de l'eau, nous travaillerons donc à modifier la densité de l'eau par modification de la quantité en sel. La relation entre la salinité et la densité est, dans une bonne approximation, linéaire [BOURGET 2014]. La conservation de la quantité de sel sera donc donnée par la conservation de la masse.

¹⁷. Comme lorsque l'on regarde à travers un verre d'eau.

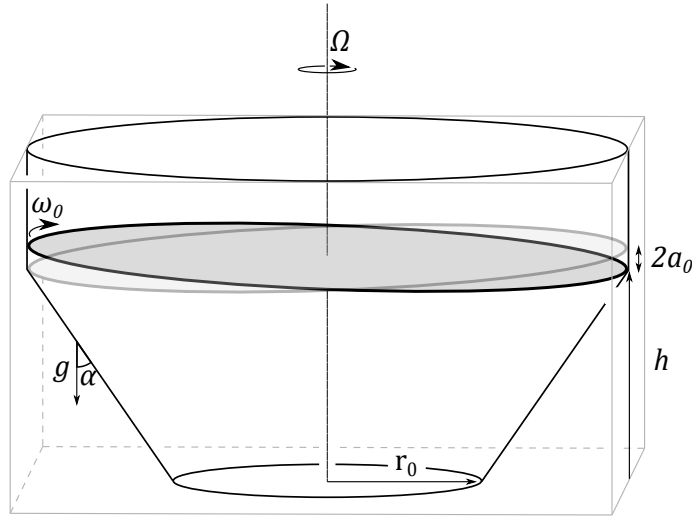


FIGURE 1.16 – Schéma de la cuve tronconique. C'est un cône tronqué dont la base inférieure est un disque de rayon $r_0 = 268 \pm 2$ mm, de hauteur $h = 31 \pm 1$ cm et la base supérieure un disque de rayon $r(h) = 45$ cm, soit un demi-angle d'ouverture 30° par rapport à la verticale. Elle est placée dans une enceinte rectangulaire, sous laquelle est placé un miroir à 45° . Un plateau de rayon $r(h)$ pouvant osciller avec une amplitude a_0 à la fréquence ω_0 est positionné à la surface libre. Le tout peut être mis en rotation à la fréquence Ω .

Pour réaliser une stratification, il faut donc modifier la densité d'un bac par l'ajout d'eau de concentration différente, c'est ce qu'on appelle la méthode des deux bacs [FORTUIN 1960; OSTER 1965]. Deux bacs de volume V_i et de masse volumique ρ_i sont reliés entre eux par une pompe de débit volumique réglable $Q(t)$. Le bac 2 est quant à lui relié à la cuve expérimentale à l'aide d'une pompe de débit Q_c constant (voir schéma figure 1.17).

La masse volumique ρ du fluide injecté dans la cuve est la masse volumique du fluide $\rho_2(t)$ à cet instant. Le défi est alors de déterminer la variation de Q pour obtenir le profil de masse volumique recherché dans la cuve. Le système est décrit par trois équations : la conservation du volume du bac 1 (de masse volumique ρ_1 fixée, paramètre du problème), et la conservation de la masse et du volume dans le bac 2, les conservations du volume étant données par l'incompressibilité du fluide. Elles s'écrivent

$$\frac{dV_1}{dt} = -Q \quad (1.80)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = Q - Q_c \quad (1.81)$$

$$\frac{d\rho_2 V_2}{dt} = \rho_1 Q - \rho_2 Q_c. \quad (1.82)$$

En définissant le volume déplacé du bac 1 au bac 2, $v = \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau$, et les volumes initiaux $V_{1,0}$ et $V_{2,0}$, on a $V_1 = V_{1,0} - v$ et $V_2 = V_{2,0} + v - Q_c t$, et par définition $dv = Q dt$. La masse volumique est donc donnée par

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\rho_1 - \rho_2(t)}{V_{2,0} + v - Q_c t} \frac{dv}{dt}. \quad (1.83)$$

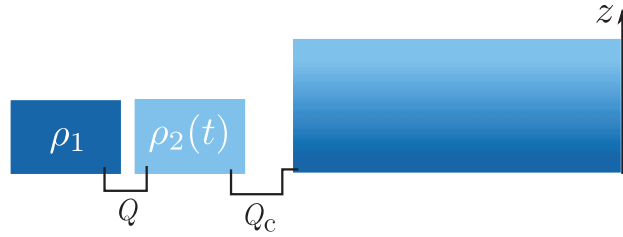


FIGURE 1.17 – Deux bacs de densité ρ_1 et $\rho_2(t)$ sont reliés par une pompe de débit variable $Q(t)$. Le bac 2 est relié à la cuve expérimentale par une pompe de débit volumique Q_c . Dans ce cas $\rho_1 > \rho_2$, la densité du bac 2 augmente et le remplissage se fait par le bas dans la cuve "rectangulaire longue" (partie 1.C.1). Extraite de [HUSSEINI 2019].

Stratification linéaire, cuve rectangulaire : Dans ce cas, on peut faire l'hypothèse simple qu'un débit Q constant peut suffire pour obtenir un tel profil. Alors $v = Qt$ et il reste à résoudre

$$\frac{d\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = Q \frac{dt}{V_{2,0} + (Q - Q_c)t'} \quad (1.84)$$

soit

$$\rho_2(t) = \rho_1 + (\rho_{2,0} - \rho_1) \left(1 + \frac{Q - Q_c}{V_{2,0}} t\right)^{Q/(Q_c - Q)}. \quad (1.85)$$

De plus, comme la cuve est rectangulaire, la hauteur du fluide à l'instant t est $z(t) = Q_c t / S$ et on obtient bien une stratification linéaire ($N = Cste$) lorsque $Q / (Q_c - Q) = 1$, c'est-à-dire $Q = Q_c / 2$. Pour obtenir une stratification linéaire dans une cuve rectangulaire, il suffit d'un débit constant entre les deux bacs, moitié de celui qui remplit la cuve, un siphon formé par un simple tuyau peut par exemple très bien remplir ce rôle.

Cas de la cuve conique : Dans notre cas, la surface de la cuve dépend de la hauteur

$$S(z) = \pi R(z)^2 = \pi (r_0 + z \tan \alpha)^2, \quad (1.86)$$

et on peut écrire la conservation du volume dans la cuve

$$Q_c t = \int_0^z S(z') dz' = \pi. \quad (1.87)$$

On a donc une fonction f telle $z = f(t)$ ¹⁸, et on connaît le profil de stratification $\rho(z) = -N^2 \rho_0 / gz$. Il reste alors à résoudre l'équation différentielle sur v

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_{2,0} - Q_c t + v}{\rho_1 - \rho_2(t)} \frac{d\rho_2}{dt}, \quad (1.88)$$

avec $\rho_2(t) = -N^2 \rho_0 / g f(t)$. La fonction f n'étant pas affine, on ne peut pas appliquer la méthode précédente et résoudre analytiquement cette équation, elle est donc résolue numériquement.

Un exemple d'une consigne de remplissage est donné sur la figure 1.18. La consigne donnée est $N(z) = 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à un profil de densité $\rho(z)$ linéaire dont la pente dépend de N_0 . L'ordonnée à l'origine dépend de la concentration initiale en sel dans le bac. Le débit Q_c

18.

$$f(t) = \frac{\sqrt[3]{r_0^3 + \frac{3Q_c \tan \alpha}{\pi} t} - r_0}{\tan \alpha}$$

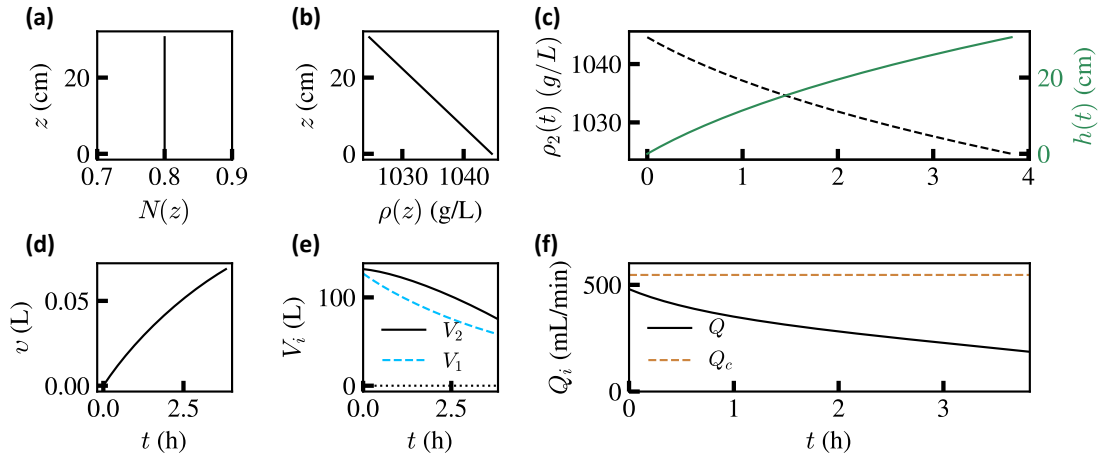


FIGURE 1.18 – Illustration de l’obtention de la consigne de débit pour un remplissage. (a) Stratification $N(z)$ souhaitée, ici $N = N_0 = 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. (b) Profil de masse volumique en fonction de la hauteur correspondante, avec la valeur de $\rho_{0,2}$ expérimentale. (c) Masse volumique (pointillés noirs) dans le bac 2 et hauteur de fluide h (ligne verte) dans la cuve en fonction du temps. (d) Solution v de l’équation (1.91). (e) Volume dans les bacs 1 (pointillés bleus) et 2 (ligne noire) lors du remplissage. (f) Débits volumiques des deux pompes en fonction du temps, Q est la consigne envoyée à la pompe entre les deux bacs.

étant gardé constant, il est possible de calculer $h(t)$, la hauteur de fluide dans la cuve, qui n’est pas linéaire en raison de la forme tronconique, et de laquelle on peut déduire la densité à avoir à chaque instant dans le bac 2 $\rho_2(t)$. La résolution numérique donne la quantité v et donc l’évolution du volume dans les deux bacs en fonction du temps. Sa dérivée donne la consigne $Q(t)$ à envoyer à la pompe pour réaliser la stratification.

Cas général : Une fois oubliée l’envie de résoudre analytiquement l’équation, on peut généraliser cette méthode à une stratification et une surface quelconques. La stratification est définie par la valeur de $N(z)$ dans la cuve. On peut décomposer

$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{d\rho}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (1.89)$$

et la conservation du volume dans la cuve (équation (1.87)) donne

$$\frac{dV}{dt} = Q_c = S(z) \frac{dz}{dt}. \quad (1.90)$$

En utilisant la fonction f telle que $z = f(t)$, il faut résoudre

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_{2,0} - Q_c t + v \frac{d\rho_2}{dz} \frac{Q_c}{S(f(t))}}{\rho_1 - \rho_2(f(t))}. \quad (1.91)$$

On peut alors proposer un schéma pour l’obtention d’une stratification, illustré sur la figure 1.18 :

1. Définir la stratification souhaitée $N(z)$ (figure 1.18(a) et 1.18(b)) et la surface de la cuve $S(z)$.
2. Par intégration analytique ou numérique, obtenir la fonction de conversion $z = f(t)$ à partir de l’équation (1.87) (figure 1.18(c)).
3. Obtenir la fonction $\rho_2(t)$ en intégrant $-N^2(z)\rho_0/g$ et en utilisant f pour obtenir une fonction du temps (figure 1.18(c)).

C. MISE EN PLACE EXPÉRIMENTALE

4. Intégrer numériquement l'équation (1.91) pour obtenir v (figure 1.18(d)).
5. Dériver v par rapport au temps pour obtenir la consigne de débit $Q(t)$ (figure 1.18(f)).

Cette méthode, analogue à celle de [HILL 2002] nous a permis d'écrire un algorithme pouvant créer une stratification linéaire dans une cuve tronconique (objet d'étude de la partie 3) ou une stratification non-linéaire dans une cuve rectangulaire (partie 4). Elle peut être adaptée pour un débit de remplissage $Q_c(t)$ variable, ce qui peut être utile pour réaliser des variations abruptes de ρ comme montré par [HILL 2002].

Sens de remplissage : Le remplissage peut être effectué de deux manières, par une buse en bas de la cuve ou par un flotteur à la surface libre. La seconde est plus facile à mettre en place car elle ne nécessite que de placer la sortie du tuyau sur un flotteur à la surface de l'eau et s'adapte donc à toute forme de cuve. La première demande quant à elle d'avoir prévu un système pour injecter le fluide sur une fine épaisseur au fond de la cuve. Ces deux techniques ont été utilisées pour les expériences présentes dans cette thèse. Il suffit d'adapter $\rho_1 < \rho_{2,0}$ lors d'un remplissage par le haut, afin de diminuer la masse volumique en fonction du temps et $\rho_1 > \rho_{2,0}$ pour un remplissage par le bas. Dans ce dernier cas, il faut aussi adapter la fonction $z = f(t)$ car c'est la couche en $z = h$ qui est injectée en premier.

b Mesure

La densité du fluide est modifiée par la présence de sel qui peut être mesurée à l'aide d'une sonde de conductivité. Le principe de cette mesure est décrit en détail dans l'annexe A de [DAVIS 2019]. Les variations de la mesure de la conductivité en fonction de la température sont données par le constructeur, ont été vérifiées une première fois [DAVIS 2019], et ont été mesurées à nouveau au début de ma thèse. La fonction qui donne la densité en fonction de la conductivité est calibrée à chaque expérience à l'aide d'un densimètre.

Expérimentalement, la sonde conductimétrique est montée sur un moteur pas-à-pas, et descend à une vitesse de $2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ en enregistrant la conductivité et la température en fonction du temps à une fréquence comprise entre 1 Hz et 10 Hz. La figure 1.19 montre une stratification typique obtenue lors d'une expérience à $N = \text{Cste}$ dans la cuve tronconique. Le profil de masse volumique est bien linéaire, dont la pente est $-N^2 g / \rho_0$ et permet donc d'obtenir la valeur de N . On remarque cependant une petite couche d'environ 1 cm au niveau de la surface libre qui indique un léger mélange. La valeur de $N = 0.77 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ est proche de la valeur de consigne $N_0 = 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (voir figure 1.18(a)), ce qui montre que l'algorithme mis en place fonctionne correctement. La différence peut être due à une erreur de mesure des paramètres expérimentaux $V_{2,0}$ et Q_c , une erreur sur la conversion tension-débit lors de la commande numérique de la pompe Q (étalonnée à chaque expérience), une variation de Q_c lors du remplissage ou encore au mélange lors du remplissage. Ce dernier phénomène a lieu car la vitesse d'injection ne peut être trop diminuée (le remplissage des 170 L était effectué en 4h environ). Il a pour conséquence de diminuer la valeur de N ¹⁹, à l'œil le fluide pénétrait sur quelques centimètres.

C.3 Rotation

a PERPET

Les dispositifs expérimentaux utilisés pour les parties 3 et 5 sont montés sur la plateforme tournante *PERPET* (Plateforme d'Études en Rotation de Phénomènes et Écoulements de la Terre). C'est une table de diamètre 1.92 m installée sur un moteur pouvant atteindre jusqu'à 60 tr/min. Son axe de rotation est aligné avec la verticale avec une erreur d'environ un millièmètre de degré. Des trous

19. On peut imaginer par exemple la convolution avec un noyau gaussien.

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

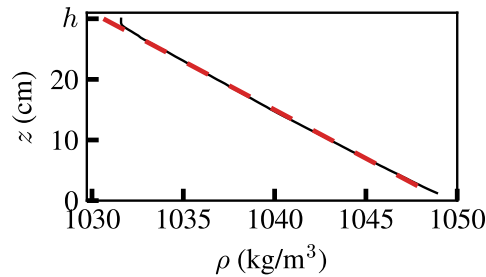


FIGURE 1.19 – Masse volumique ρ en fonction de la hauteur z , exemple de stratification obtenue. La ligne pointillée rouge est un ajustement linéaire dont la pente donne $N = 0.77 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

permettent de fixer l'appareil expérimental à la table et des caissons sur les côtés accueillent les ordinateurs. Une fois chargée des ordinateurs, des caméras et lasers, de la commande du forçage et de la cuve remplie, le poids supporté par la table est estimé à 700 kg. Pour des raisons de sécurité, avec l'accord du concepteur, la vitesse de rotation de la table a été limitée à 10 tr/min, soit une gamme de variation de 0 à $2.09 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ du paramètre de Coriolis f_c . Pendant les expériences, une grille et des rideaux protègent les personnes présentes, l'appareillage est donc commandé par des ordinateurs installés sur la table et connectés à un réseau sans fil local afin de les contrôler depuis l'autre côté.

b Mise en rotation

Lors de la mise en rotation d'un fluide homogène, comme dans la partie 5, le fluide est mis en rotation par entraînement visqueux au niveau des parois latérales et au fond de la cuve par le phénomène du pompage d'Ekman. Le transport vertical de la vitesse permet une mise en rotation plus rapide du fluide. Dans le cas d'un fluide stratifié, ce transport vertical est très réduit, et il ne reste plus que le transport radial par viscosité et l'évolution de la vitesse azimutale peut être décrite par une équation de diffusion

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \Delta v_\theta. \quad (1.92)$$

qu'il faut résoudre avec pour condition initiale $v_\theta = 0$, et pour condition aux limites dans le cas d'un cylindre $v_\theta(r_0) = \Omega R$. Il faut cependant mettre lentement la rotation en place pour ne pas provoquer de mélange. L'étude de la mise en rotation à l'aide de la plateforme *PERPET* a été réalisée par [MAURER 2017]. Les principaux résultats sont montrés sur la figure 1.20, la stratification ralentit bien la mise en rotation solide du fluide. De plus, la mise en rotation ne perturbe pas la stratification de manière significative.

En suivant ces courbes, et en vérifiant la rotation solide avant chaque expérience, un temps de mise en rotation de 2 heures a été respecté pour les fluides homogènes et de 16 heures pour les fluides stratifiés avant de lancer les expériences. Le temps plus court de mise en place pour le fluide homogène s'explique par la moindre hauteur de fluide dans notre cas et donc un transport vertical plus efficace.

C.4 Génération

La cuve remplie de manière stratifiée et/ou mise en rotation, des ondes gravito-inertielles peuvent être générées. Cette partie expose les trois types de forçage utilisés. Le premier est adapté aux cuves rectangulaires, c'est une méthode éprouvée qui a été utilisée depuis une dizaine d'années au laboratoire (voir [BORDES et al. 2012; GOSTIAUX et al. 2006; MERCIER et al. 2010] par exemple). Les deux autres ont été mis au point spécialement pour la cuve tronconique.

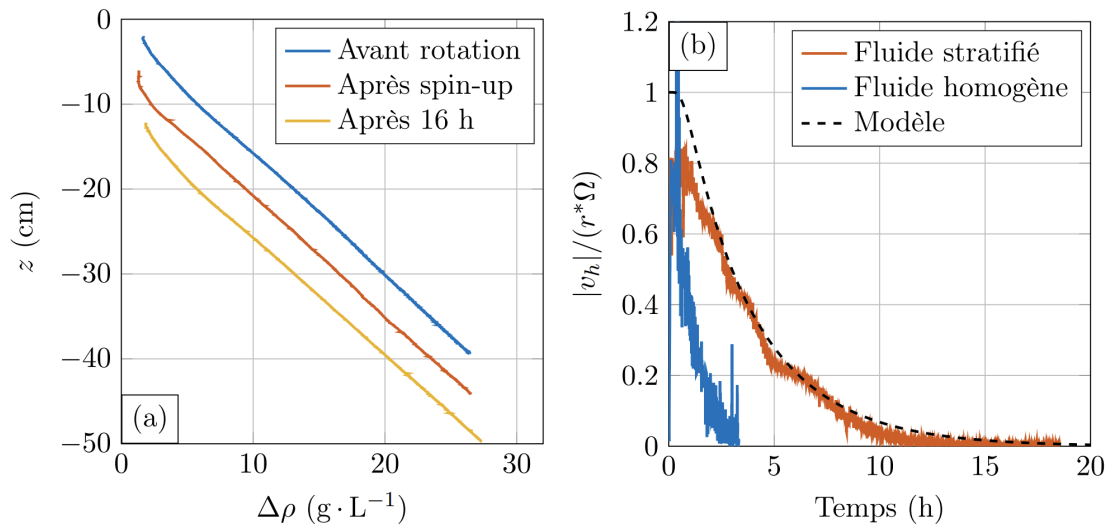


FIGURE 1.20 – (a) Mesure en fonction de la profondeur de l'évolution de la masse volumique du fluide stratifié, $\Delta\rho$, exprimée comme la différence entre la masse volumique mesurée et la masse volumique de l'eau douce $998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ avant la mise en rotation, après la fin de la phase d'accélération de la table jusqu'à sa vitesse angulaire nominale $\Omega = 0.125 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ en 240 s et après 16 heures de rotation à vitesse angulaire constante Ω . Un décalage vertical de 5 cm a été introduit entre les courbes pour plus de visibilité. Les mesures présentées ici ont été faites dans la cuve "panaches". (b) Valeur absolue de la vitesse horizontale du fluide, v_{h_i} , mesurée par *PIV* à $r = 29 \text{ cm}$ du centre pendant que la plateforme est mise en rotation à une vitesse de $\Omega = 0.125 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le cas d'un fluide homogène et dans le cas d'un fluide stratifié. La solution de l'équation (1.92) est tracée en ligne pointillée. Extraites de [MAURER 2017].

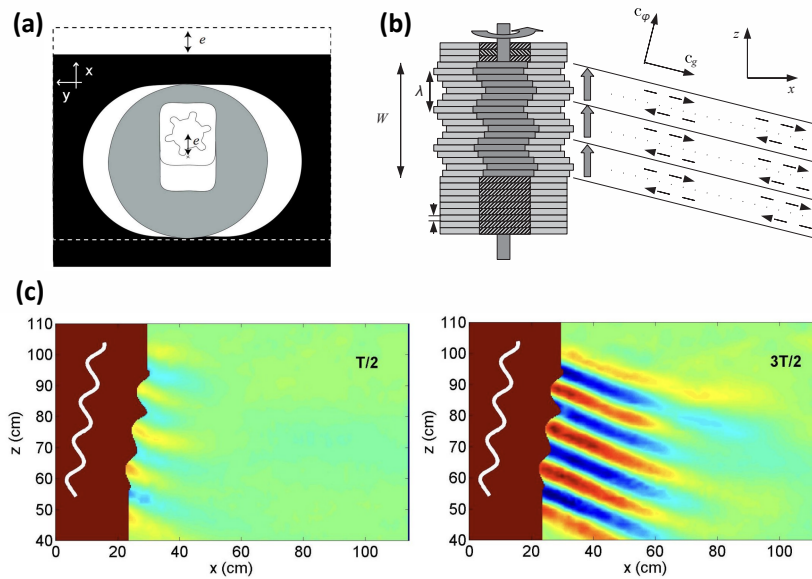


FIGURE 1.21 – Schéma de fonctionnement d'un générateur à cames. (a) Une plaque mise en mouvement par une came d'excentricité e . (b) Générateur monté pour lequel l'excentricité est identique pour toutes les plaques et le déphasage entre deux plaques successives est de $\pi/3$. (c) Champ de vitesse d'un faisceau d'onde créé par un tel générateur. (a) est extraite de la thèse de [MAURER et al. 2016], (b) et (c) de la thèse de [GOSTIAUX et al. 2006].

a Arbre à cames

Ce générateur a principalement été utilisé pendant le stage de Vincent Audoly avec la cuve rectangulaire "plate". Ce type de générateur étudié par [MERCIER et al. 2010] a été mis au point afin de générer un faisceau d'onde de longueur d'onde déterminée. En effet, la taille du faisceau ainsi que la longueur d'onde émise ne sont pas déterminées par la relation de dispersion, mais dictées par la manière de forcer. Ce type de générateur est composé de plaques de plastique empilées autour d'un axe. Chacune d'entre elles possède une came d'excentricité e qui permet la mise en mouvement par la rotation de l'axe, un mouvement de translation d'amplitude e . Un exemple est montré sur la figure 1.21. Notre générateur est composé de 52 plaques de plastique de 6 mm d'épaisseur avec une excentricité réglable entre 0 et 15 mm. En choisissant l'excentricité et le déphasage entre chaque came, il est possible de cisailer le fluide de la manière souhaitée. Dans l'exemple présenté, le déphasage est de $\pi/3$, ce qui donne une longueur d'onde $\lambda = 30$ mm, et 18 cames sont réglées avec une excentricité identique non nulle, soit un faisceau de largeur $W = 3\lambda$. Les expériences réalisées avec ce générateur dont un exemple est donné figure 1.21(c) montrent que le générateur joue bien son rôle.

b G.O.A.L

Le générateur à arbre à came a longtemps été utilisé car il ne demande qu'un moteur commandé en tension et peut facilement être changé de dispositif expérimental. Cependant chaque modification du forçage (longueur d'onde, amplitude, profil) demande de le démonter et de régler correctement chacune de ses parties. Un nouveau générateur a donc été mis au point par les services d'ingénierie mécanique et d'électronique du laboratoire, le générateur GOAL (*Generator Oscillating As you Like*). Les plaques mobiles, au nombre de 50 et d'une épaisseur de 6.5 mm, sont chacune commandées par un moteur indépendant. Coordonnées par ordinateur, ces moteurs per-

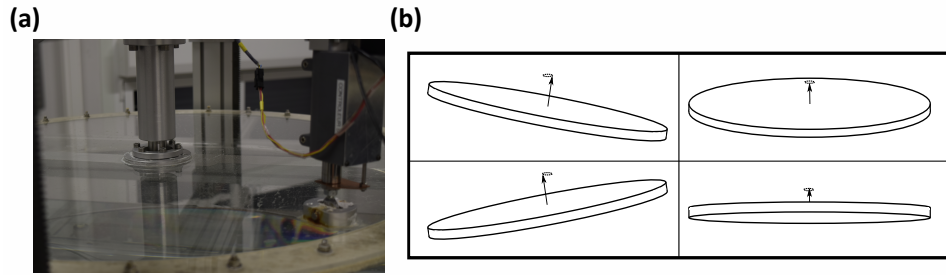


FIGURE 1.22 – (a) Photographie du plateau et d'un piston. (b) Décomposition du mouvement de la plaque de forçage, de gauche à droite, de haut en bas.

mettent d'appliquer un forçage à une fréquence ω_0 à un profil $a(z)$ donné. La structure est réalisée en téflon pour limiter les frottements mais les expériences menées par [HUSSEINI 2019] ont montré que ce dispositif avait tendance à chauffer, perturbant la stratification lors de longues expériences. La durée d'utilisation en continu a donc été limitée à une vingtaine de minutes lorsque ce générateur a été nécessaire.

c Plateau

Les deux manières de générer les ondes sont bien adaptées à la géométrie cartésienne où l'on fait se propager des ondes dans un canal. D'autres types de forçage ont été mis au point au laboratoire pour générer des ondes dans une géométrie cylindrique. Par exemple, [BOURY 2020; MAURER et al. 2016] ont utilisé un arbre à cames qui entraîne des cames en anneau. Pour cette thèse, Pascal Metz du service d'électronique et Marc Moulin du service d'ingénierie ont mis au point un générateur spécialement adapté à la cuve tronconique. Le fluide est mis en mouvement par une plaque de plexiglas placée au niveau de la surface libre en $z = h$, dont le rayon est le même que celui de la base supérieure de la cuve tronconique $R(h) = 88 \pm 2$ mm (partie 1.C.1). Ce disque d'environ 2 cm est monté sur une structure à crémaillère afin de pouvoir la mettre en place. Deux pistons commandés numériquement sont placés à 90° l'un de l'autre par rapport à une liaison pivot située au centre de la plaque. Lorsqu'ils sont pilotés à la même pulsation mais en quadrature de phase, le mouvement résultant de la plaque est un mouvement de précession. La figure 1.22 montre le dispositif et illustre le mouvement du plateau sur une période. En utilisant des coordonnées cylindriques (r, φ) , le déplacement vertical $a(r, \varphi)$ du plateau peut être décrit mathématiquement par

$$a = a_0 \cdot (r/R) \cdot \cos(\omega_0 t - m\varphi), \quad (1.93)$$

où $m = -1$ est le nombre d'onde azimutal indiquant une précession dans le sens horaire (vu du dessus). Dans un fluide homogène au repos ($N = f_c = 0$), le mouvement du fluide peut être comparé à un mode de seiche tournant. À un instant donné, le fluide se déplace horizontalement, du point où $a = -a_0$ vers le point où $a = a_0$. La forme de la cuve avec une pente inclinée induit un mouvement vertical descendant dans la première moitié de la cuve et ascendant dans l'autre moitié. À l'instant suivant les points de référence se sont déplacés, d'où le terme de mode de seiche tournant. Dans le cas où il y a de la stratification et/ou de la rotation, ces mouvements horizontaux et verticaux induisent des ondes gravito-capillaires à la fréquence de forçage ω_0 .

d Volume

La cuve tronconique et son châssis sont montés sur une structure composée de deux rails selon l'axe x et deux rails selon l'axe y associés chacun à un moteur permettant la mise en translation de l'ensemble selon les deux axes. Ce type de forçage permet d'injecter de l'énergie dans tout le

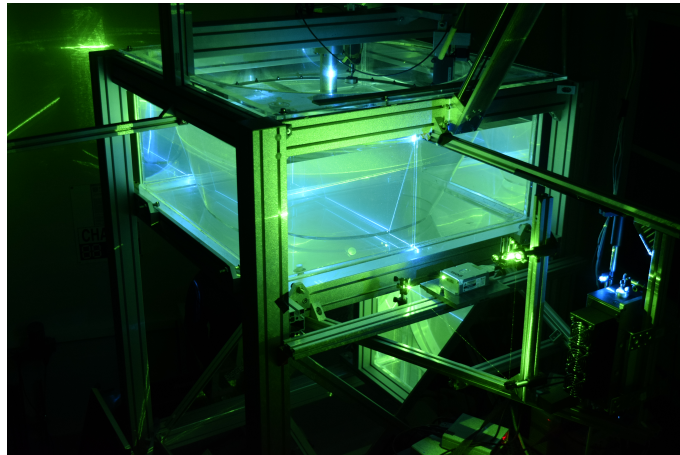


FIGURE 1.23 – Photographie du dispositif expérimental de la cuve tronconique.

volume du fluide en la "secouant" à la fréquence voulue. Aucun résultat ne sera présenté avec ce forçage car le mouvement engendré produit aussi un mouvement des caméras et il en résulte un plus haut niveau de bruit, pour des résultats similaires à ceux obtenus avec le plateau.

C.5 Mesure

a Particle Image velocimetry

Afin de pouvoir observer les mouvements du fluide, des traceurs sont introduits lors du remplissage. Leur rôle est de diffuser la lumière qui les éclaire pour être suivis sur une caméra. Le principal traceur utilisé est une bille en verre creuse de $10\ \mu\text{m}$ de diamètre et de densité 1.1 (Dantec©). L'expérience montre que celles-ci peuvent rester en suspension une journée. Lorsqu'il y avait besoin de plus de luminosité, notamment lors des prises de vues horizontales, des billes similaires recouvertes d'une couche d'argent ont aussi été utilisées. D'une densité de 1.4, leur vitesse de sédimentation fait qu'une partie non-négligeable tombe au fond de la cuve avant même la fin du remplissage, elles sont donc ajoutées le plus tard possible.

Ces billes sont éclairées par deux nappes lasers orthogonales, l'une formant un plan vertical (\vec{e}_x, \vec{e}_z) passant par le centre de la cuve, l'autre un plan horizontal (\vec{e}_x, \vec{e}_y) à une hauteur z réglable entre 0 et 30 cm grâce à une platine de translation. La lumière diffusée par ces billes est captée par deux caméras l'une en vision directe sur un côté, l'autre à l'aide d'un miroir placé sous la cuve à 45° simulant une vue du dessus. Ces deux vues seront dénommées vue verticale et vue horizontale au cours de cette thèse. Afin d'éviter l'interférence d'une nappe sur la caméra prévue pour l'autre, deux lasers de couleur turquoise 488 nm et verte 532 nm sont utilisés et des filtres interférentiels de longueur d'onde correspondante sont placés devant les caméras. La place étant limitée autour de la plateforme tournante, les nappes sont formées avec des lentilles fortement divergentes. Les lentilles cylindriques ont été remplacées par des lentilles de Powell, qui permettent dans ce cas une luminosité uniforme sur une section de la nappe. Le dispositif expérimental complet est montré sur la figure 1.23.

Deux types d'acquisition ont été utilisées : une acquisition en continu à une fréquence de 6 Hz, et une acquisition "burst" qui consiste à prendre deux images séparées de $1/30^e$ de seconde, une fois par seconde. Cette deuxième méthode permet de réduire le nombre d'images acquises tout en résolvant des vitesses plus élevées.

On utilise alors l'algorithme CIV (partie 1.C.5.c) pour obtenir le champ de vitesse.

b Schlieren Synthétique

Cette méthode, développée par [DALZIEL et al. 2000], se base sur la déviation des rayons lumineux par un gradient d'indice optique. Elle repose sur l'observation du déplacement apparent d'un motif de points éclairés dû au changement d'indice optique par les mouvements du fluide. Les rayons lumineux obéissent à l'équation eikonale

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = n, \quad (1.94)$$

où \vec{r} est la direction du rayon lumineux et n l'indice optique. En supposant l'écoulement généré bidimensionnel dans ces cuves, il est invariant selon \vec{e}_y ²⁰. La lumière se propage principalement selon la direction \vec{e}_y , soit $ds \simeq dy$ et l'équation s'écrit alors

$$\frac{d^2\vec{r}}{dy^2} = \frac{\vec{\nabla} n}{n}, \quad (1.95)$$

et en intégrant cette équation on obtient les angles (α_x, α_y) de sortie du rayon

$$\tan \alpha_i = W \frac{\partial_i n}{n}, \quad (1.96)$$

avec W la largeur de la cuve. La déviation du rayon lumineux selon un axe dépend du gradient d'indice selon ce même axe. Or l'indice de réfraction dépend des caractéristiques du milieu, et notamment de sa densité. Cette relation est linéaire

$$\nabla n = \beta \frac{n_0}{\rho_0} \nabla \rho, \quad (1.97)$$

avec $\beta = 0.184$ [WEAST et ASTLE 1981]. La déviation du rayon lumineux est donc le reflet du gradient de densité. En utilisant les relations de réfraction et la relation de conjugaison de la caméra, il est possible de relier le déplacement en pixel par rapport à la situation au repos $\Delta\vec{p}$ au gradient de densité

$$\Delta\vec{p} = \gamma \frac{\beta}{\rho_0} \nabla \rho', \quad (1.98)$$

où γ est un facteur géométrique dépendant de la distance entre la cuve et la caméra, l'épaisseur et l'indice des parois de la cuve, la largeur de la cuve, l'indice optique de l'eau douce n_0 et de l'air, de la focale de la lentille utilisée et de la taille des pixels de la caméra. Le déplacement du motif de point est obtenu par l'algorithme CIV présenté ci-après. Cette méthode ne fonctionne que pour les ondes internes de gravité car elles provoquent, par le déplacement des particules fluides, des gradients de densité.

c L'algorithme C.I.V

Les méthodes de suivi de particules individuelles, dite lagrangiennes, souvent utilisées dans l'étude de la turbulence, sont coûteuses en temps de calcul et demandent une haute fréquence d'acquisition. Une alternative est la méthode CIV (*Correlation Imaging Velocimetry*). Au lieu de détecter et de suivre chacune des particules, une image est découpée en boîtes, sous-domaines de taille $n \times m$ pixels (typiquement $n = m \simeq 30$ dans notre cas). Le motif de particule d'une boîte est alors comparé à une autre image (de référence dans le cas du Schlieren, l'image suivante dans le cas de la PIV) comme illustré figure 1.24. La nouvelle position du motif est donnée par la position du maximum de la fonction de corrélation qui est la moyenne des déplacements lagrangiens

²⁰. C'est le cas pour les cuves rectangulaires présentées dans la partie 1.C.1, cette technique n'est pas utilisable facilement pour les géométries 3D.

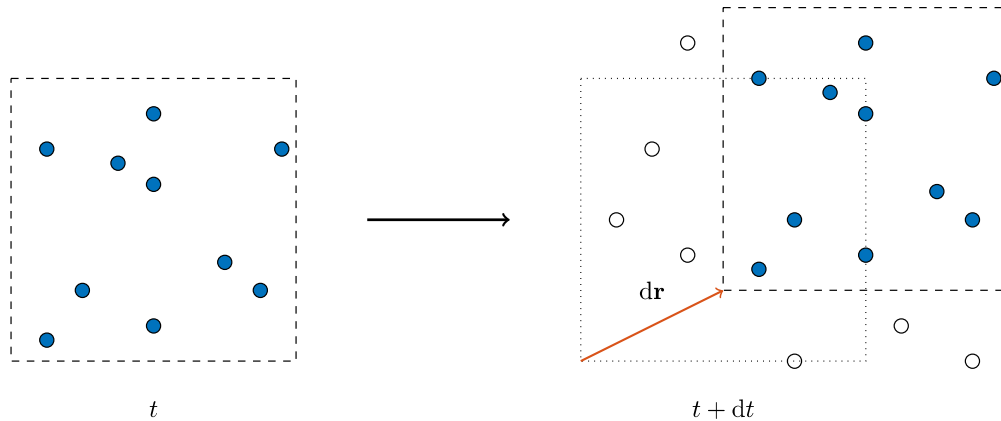


FIGURE 1.24 – Principe de fonctionnement de l’algorithme CIV. Les traceurs en bleu se sont déplacés de $d\vec{r}$. Extrait de la thèse de [BOURY 2020].

des particules présentes dans le sous-domaine. Nous utilisons l’implémentation UVmat²¹ de cet algorithme mis au point au cours des années 2000 [FINCHAM et DELERCE 2000].

Cette méthode permet d’obtenir avec une bonne approximation le champ eulérien de déplacement (et donc de vitesse en PIV) sur une grille régulière d’une résolution 10 fois plus faible que celle des caméras. La recherche du déplacement d’un motif empêche la visualisation des toutes petites échelles. Cependant, la longueur de Kolmogorov, échelle typique de la dissipation, est de l’ordre du millimètre comme nos sous-domaines, peu d’information devrait donc être perdue. Cette méthode permet une détection plus précise du déplacement en lissant le bruit sur le déplacement de chaque particule.

Pour qu’elle fonctionne, il faut s’assurer que les particules utilisées sont bien des traceurs, c’est-à-dire qu’elles suivent effectivement le champ eulérien de vitesse. C’est le cas en Schlieren puisque l’on suit le déplacement de particules virtuelles, et en PIV par la faible taille des particules (le nombre de Stokes St qui compare l’inertie de la particule au frottement visqueux est de l’ordre de 10^{-3}).

Les traitements (plus de $10T\theta$ d’images) ont été effectués à l’aide des ressources du pôle de calcul de l’ENS de Lyon, le PSMN (Pôle Scientifique de Modélisation Numérique).

C.6 Traitement des signaux

Cette partie sert à exposer les fonctions et les méthodes utilisées pour traiter les signaux obtenus après l’algorithme CIV.

a Transformée de Fourier

Il est souvent utile pour obtenir des informations à propos d’un signal temporel s de l’étudier dans l’espace fréquentiel. Pour cela, il est décomposé sur la base des exponentielles complexes, c’est ce qu’on appelle la transformée de Fourier

$$\tilde{s}(\omega) = \mathcal{TF}[s] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{i\omega t} dt, \quad (1.99)$$

et son inverse

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.100)$$

21. <http://servforge.legi.grenoble-inp.fr/projects/soft-uvmat>

C. MISE EN PLACE EXPÉRIMENTALE

Il est aussi possible de définir une transformée de Fourier spatio-temporelle

$$\tilde{s}(\omega, k) = \iint_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i(\omega t - kx)} dt dx. \quad (1.101)$$

L'énergie contenue dans chaque fréquence est alors donnée par la densité spectrale de puissance (DSP).

$$\tilde{S}(\omega) = |\tilde{s}|^2. \quad (1.102)$$

En pratique, les signaux ont une extension spatiale finie et sont discrets. On utilise donc plutôt la transformée de Fourier discrète qui repose sur le même principe

$$\tilde{s}(k) = \sum_{n=0}^N s(t_n) e^{2i\pi \frac{kn}{N}}. \quad (1.103)$$

Cette transformée de Fourier est réalisée numériquement par un algorithme de FFT (*Fast Fourier Transform*), l'implémentation de cette fonction ainsi que toutes celles liées au traitement du signal sont celles de la bibliothèque python *scipy.signal*²².

b Filtrage

Pour observer certaines composantes du spectre, ou pour éliminer du bruit, nous procéderons au filtrage des signaux, c'est-à-dire l'atténuation de certaines fréquences. Pour cela, on multiplie le spectre par une fenêtre $\tilde{f}_{\omega_0, \delta\omega}(\omega)$, qui est une fonction porte, une gaussienne ou une fenêtre de Hamming²³ centrée en ω_0 de largeur $\delta\omega$, le signal filtré s_f est alors

$$s_f(t) = \mathcal{TF}^{-1}[\tilde{s}\tilde{f}]. \quad (1.104)$$

Le filtrage du bruit s'effectue lui avec un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 4.

L'utilisation de fenêtres, sur le signal temporel cette fois, permet d'obtenir un diagramme temps-fréquence. Pour l'obtenir, la transformée de Fourier est faite sur le signal s multipliée avec par une fenêtre de Hamming glissante de largeur fixée. Un tel diagramme représente l'évolution de la densité spectrale de puissance en fonction du temps $\tilde{S}(\omega, t)$.

Une dernière utilisation des techniques de filtrage permet de séparer les différentes composantes des ondes (propagation selon $(+k_x, +k_z)$, $(+k_x, -k_z)$, etc). La transformée de Fourier spatio-temporelle produit un spectre possédant des fréquences spatiales comme temporelles positive et négatives. Pour les séparer, on commence par filtrer les pulsations ω négatives afin de ne garder que les positives. La transformée de Fourier inverse de ce spectre filtré est alors le signal analytique \tilde{s}_a dont il faut prendre la partie réelle pour retrouver le signal de départ. Ce procédé est la transformée de Hilbert [MERCIER et al. 2008].

La séparation des composantes se fait en insérant un filtre sur le signal analytique, par exemple $s_a(k_x < 0) = 0$ permet de ne garder que les ondes se propageant vers les x positifs. La partie réelle de la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir le signal filtré. Par exemple pour obtenir les ondes se propageant selon les x et z croissants

$$s_f(t) = \text{Re}(\mathcal{TF}^{-1}[\tilde{s}h(\omega)h(k_x)h(k_z)]), \quad (1.105)$$

où h est la fonction de Heaviside.

C.7 Réponse impulsionnelle

Dans cette dernière partie, nous présentons un rappel sur une technique de caractérisation basée sur la théorie du filtrage linéaire.

²². <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.html>

²³. Une porte avec des bords gaussiens, optimisée pour ce type de traitements.

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

Système à 1D : Prenons un système dépendant uniquement du temps, on peut imaginer un circuit électrique (*RLC* par exemple). Il possède une entrée, la tension appliquée à ses bornes que l'on notera $e(t)$, et une sortie qui est la grandeur que l'on souhaite en tirer que l'on notera $s(t)$ (qui peut être une intensité ou une tension aux bornes d'un de ses composants). On parle de SLIT (Système linéaire invariant temporellement) si ces deux grandeurs sont reliées par une équation différentielle de type

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{d^n s}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M-1} b_m \frac{d^m e}{dt^m} \quad (1.106)$$

où a_i et b_j sont des coefficients réels indépendants du temps. Dans l'exemple du circuit *RLC* série, le signal de sortie s peut-être par exemple la tension aux bornes du condensateur u_c , et le système est décrit par l'équation

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = e. \quad (1.107)$$

Une méthode classique pour résoudre ce problème est de passer dans l'espace de Fourier pour obtenir la fonction de transfert du système, que l'on analysera alors comme un filtre (passe-bas dans l'exemple donné). Dans le cas général, en supposant les signaux périodiques et donc décomposables sur la base des exponentielles complexes (sinon il faut utiliser la transformée de Laplace²⁴), on réécrit l'équation (1.106) dans l'espace de Fourier

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n (i\omega)^n \tilde{s} = \sum_{m=0}^{M-1} b_m (i\omega)^m \tilde{e}, \quad (1.108)$$

et on obtient la fonction de transfert H

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{\tilde{s}}{\tilde{e}} = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m (i\omega)^m}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n (i\omega)^n}. \quad (1.109)$$

La fonction H permet alors d'obtenir la réponse à n'importe quel signal d'entrée par le produit de convolution avec e

$$s(t) = (H * e)(t). \quad (1.110)$$

Il est donc possible de caractériser entièrement un SLIT à partir de sa fonction de transfert. On voit par ailleurs que si un *dirac* δ est appliqué en entrée du système, la réponse $s = (H * \delta) = H$. La caractérisation expérimentale du système peut donc être faite en mesurant la réponse de celui-ci à une impulsion, c'est ce qu'on appelle la méthode impulsionnelle.

Système avec une dimension spatiale : Le problème est un plus complexe lorsque le système possède à la fois une dimension spatiale et une dimension temporelle. En effet, un problème classique est de calculer la réponse d'une corde (de guitare à une condition initiale. On peut montrer par exemple²⁵ qu'une corde de longueur L attachée à ses deux extrémités et pincée en L/p (p un entier) ne présentera pas les harmoniques multiples de p . Cela montre que la forme spatiale de la condition initiale est importante et que la fonction de transfert ne suffit pas à elle seule à caractériser un système. Cependant, cet exemple montre aussi que la plupart des harmoniques sont générées et que donc la méthode impulsionnelle permettrait de quand même d'obtenir une information sur le système. Dans notre cas, nous avons vu dans les expériences à forçage constant que des attracteurs avaient pu être obtenus, il est donc probable que ceux-ci apparaissent.

24. Voir une théorie plus complète ici : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_transfert

25. Voir ce corrigé d'une épreuve du concours CCP : <https://forums.futura-sciences.com/attachments/physique/117572d1280742115-influence-de-lendroit-lon-pince-une-corde-ccp09.pdf>

C. MISE EN PLACE EXPÉRIMENTALE

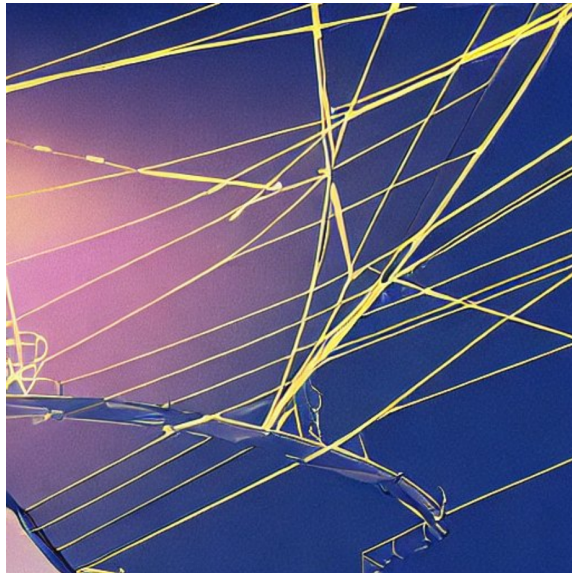
Système non-linéaire : Les équations de conservation de la masse et de Navier-Stokes qui régissent un fluide stratifié dans une cuve sont non-linéaires et ne respectent pas la forme de l'équation (1.106). C'est donc seulement par analogie et pour sonder les informations qu'elle peut apporter que sera utilisée la méthode de la réponse impulsionnelle dans ce cas, en gardant en tête ses limitations.

CHAPITRE 1. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES

CHAPITRE

2

ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS



Tracé de rayons, vue d'*IA*

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

Cette partie (tout comme ma formation à cet aspect des ondes internes qu'elle reflète) est très inspirée des travaux de C. Brouzet, G. Pillet et de L. Maas. Une part des résultats présentés a été soumise à PRF.

Après une présentation générales des ondes internes, nous allons nous rapprocher du sujet de cette thèse qui est l'obtention d'un attracteur d'onde interne. Nous appelons ondes internes, toute onde respectant la relation de dispersion présentée section 1.B.3, cela peut être une onde interne de gravité se propageant dans un fluide linéairement stratifié ($N = Cste$), une onde inertielle se propageant dans un fluide en rotation ($f_c = 2\Omega$), une onde gravito-inertielle combinaison des deux ou même tout autre type d'onde respectant cette relation fixant l'angle de propagation en fonction de la fréquence d'excitation. En étudiant premièrement la réflexion particulière de ces ondes, nous verrons qu'il est possible de focaliser (défocaliser) l'énergie. Ainsi une réflexion d'une onde interne devient un lieu propice aux interactions non-linéaire, au transfert vers les petites échelles et donc à la dissipation d'énergie. Pour profiter pleinement de cette propriété, il est possible en forçant les ondes dans des domaines fermés d'utiliser la focalisation pour créer un cycle limite, attracteur pour toutes les conditions initiales. On dispose alors d'une structure pour étudier les ondes internes dans le régime (faiblement) non-linéaire. Cependant, il faut pouvoir former ces structures qui demandent des conditions particulières. Proposée et étudiée en 1995 [MAAS et LAM 1995], l'existence théorique de ces attracteurs est confirmée expérimentalement [MAAS et al. 1997]. C'est plus tard que les attracteurs seront véritablement utilisés pour sonder le régime non-linéaire [BROUZET et al. 2016a; DAVIS et al. 2019; HAZEWINKEL et al. 2008; SCOLAN et al. 2013a]. D'abord en deux dimensions, puis étendue à la troisième, une méthode utilisant des algorithmes de tracé de rayon a été utilisée pour montrer la formation de ces structures. Ces algorithmes permettent à faible coût de prédire la présence d'attracteurs et de déterminer la valeur des paramètres à utiliser lors des expériences. Notre but a été de reproduire des résultats connus en 2D comme en 3D en concevant un tel algorithme, puis de l'appliquer au cas axisymétrique. Concrètement, cette partie a permis de valider des *a priori* tout en occupant chronologiquement la première partie de ma thèse pendant le montage du dispositif expérimental.

A Cas historique

A.1 Réflexion des ondes internes

a Sur une paroi horizontale ou verticale

Que ce soit dans les expériences ou dans la nature, les ondes internes se réfléchissent sur des parois qui imposent la condition d'imperméabilité sur celles-ci

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_{\text{paroi}} = 0, \quad (2.1)$$

où \vec{n}_{paroi} est la normale à celle-ci, voir figure 2.1(a). Dans le cas d'une réflexion horizontale (sur un plan $z = 0$, $\alpha = 0$), cette relation implique $v_z = \partial_x \psi = 0$. La fonction courant ψ est constante le long de la paroi, et qui peut être choisie nulle. Pour une réflexion horizontale, on a donc

$$\psi(x, z = 0, t) = \psi_i(x, z = 0, t) + \psi_r(x, z = 0, t) = 0, \quad (2.2)$$

où la fonction d'onde ψ a été décomposée en une composante incidente

$$\psi_i(x, z, t) = \psi_0 \exp i (k_x^i x + k_z^i z - \omega t) \quad (2.3)$$

considérée comme une onde plane, se propageant avec un angle θ tel que $\sin^2 \theta = k_x^2 / (k_x^2 + k_z^2)$, et une composante réfléchie ψ_r que l'on obtient en $z = 0$

$$\psi_r(x, 0, t) = -\psi_0 \exp i (k_x^i x - \omega t). \quad (2.4)$$

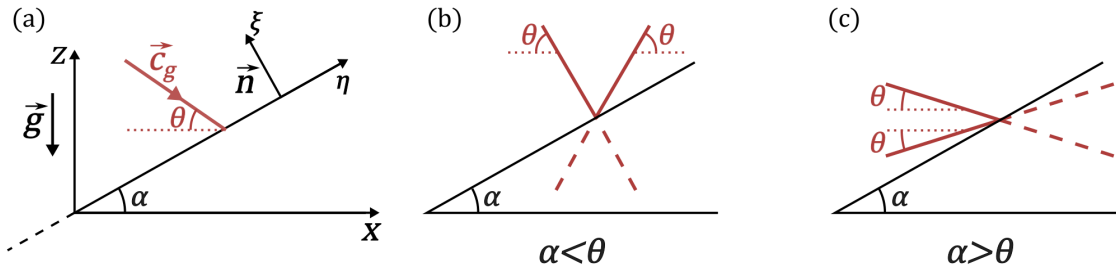


FIGURE 2.1 – (a) Schéma d'une réflexion sur une pente d'angle α selon l'axe x . Un rayon incident d'une onde avec une vitesse de groupe \vec{c}_g faisant un angle θ avec l'horizontale. Le référentiel associé à la pente est noté (η, ξ) , la normale est notée \vec{n} . Réflexion dans le cas sous-critique $\theta > \alpha$ (b) et sur-critique $\theta < \alpha$ (c). L'angle par rapport à l'horizontale est conservé lors de la réflexion.

L'onde réfléchi est donc aussi une onde plane, de même fréquence que l'onde incidente et de même nombre d'onde horizontal $k_x^r = k_x^i$. Les ondes ayant la même fréquence se propagent avec le même angle d'après la relation de dispersion, on obtient donc $k_z^r = -k_z^i$. Une paroi horizontale change donc le signe de k_z : c'est ce qu'on appellera une réflexion horizontale, ou réflexion "vers le haut/bas". On peut aussi noter que l'amplitude et la longueur d'onde de l'onde réfléchi sont identiques à celles de l'onde incidente. Le même calcul dans le cas d'une réflexion verticale donne $k_z^r = k_z^i$ et $k_x^r = -k_x^i$.

Dans le cas d'une surface libre, la condition d'impénétrabilité n'est plus valide, cependant l'équation aux limites est la continuité de la contrainte à l'interface, qui est liée à la différence de densité entre les milieux (de l'ordre de 1000). On peut donc raisonnablement s'y ramener [EKMAN 1904; MERCIER et al. 2011].

b Sur une pente

Il est à noter qu'une onde interne, d'après sa relation de dispersion, se propage (dans un milieu linéairement stratifié, ou en rotation uniforme) avec un angle fixé θ entre la vitesse de groupe et l'horizontale. Cette propriété étant vraie avant et après la réflexion comme il n'y a pas de changement de la fréquence, on a conservation de θ . L'angle α de la pente ne va donc pas jouer sur la direction de propagation et on peut donc à la main deviner la direction de réflexion en prenant l'autre branche de la croix de Saint-André qui n'est pas éliminée par la pente.

Comme illustré sur les figures 2.1(b) et 2.1(c), il faut distinguer deux cas. Dans le cas où $\theta > \alpha$, on parle de réflexion sur-critique, la seule possibilité de réflexion est selon la verticale et dans le cas inverse où $\theta < \alpha$, la réflexion est dite sous-critique, et le rayon est réfléchi selon l'horizontale. La réflexion des ondes internes est donc différente de celle d'ondes mécaniques, acoustiques ou lumineuses, on dit qu'elle n'est pas spéculaire, c'est-à-dire qu'elle ne respecte pas les lois de Snell-Descartes. Cette relation particulière a été étudiée expérimentalement et théoriquement dès les années 70, on peut noter respectivement les travaux de [CACCHIONE et WUNSCH 1974] et de [PHILLIPS 1966].

Pour décrire mathématiquement cette réflexion, reprenons le même raisonnement en se plaçant dans le repère (η, ξ) associé à la pente (voir figure 2.1). La condition d'impénétrabilité (2.1) donne

$$\psi(\eta, \xi = 0, t) = \psi_0 \exp i(k_\eta^i \eta - \omega t) + \psi_r(\eta, \xi = 0, t) = 0. \quad (2.5)$$

C'est maintenant la composante de \vec{k} le long de la pente qui est conservée, en plus de ω . Pour trouver la seconde composante, on utilise la conservation de la fréquence, soit $\theta_r = -\theta_i$, le signe

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

moins indiquant que l'onde ne pénètre pas la pente.

$$\tan \theta = \frac{k_x^i}{k_z^i} = -\frac{k_x^r}{k_z^r}. \quad (2.6)$$

Dans le cas particulier d'une pente inclinée d'un angle local α , on a

$$\eta = x \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (2.7)$$

$$\zeta = z \cos \alpha - x \sin \alpha \quad (2.8)$$

soit

$$k_\eta^i = k_\eta^r \quad (2.9)$$

$$k_x^i \cos \alpha + k_z^i \sin \alpha = k_x^r \cos \alpha + k_z^r \sin \alpha \quad (2.10)$$

$$(\cos \alpha \tan \theta + \sin \alpha) k_z^i = (-\cos \alpha \tan \theta + \sin \alpha) k_z^r. \quad (2.11)$$

On obtient ainsi le grandissement dans la direction z

$$\gamma_z = \frac{k_z^r}{k_z^i} = \frac{\cos \alpha \tan \theta + \sin \alpha}{-\cos \alpha \tan \theta + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \theta + \cos \theta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \theta - \sin \theta \cos \alpha} = \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\alpha - \theta)}. \quad (2.12)$$

On retrouve que lorsque $\theta > \alpha$, il y a un changement de direction selon e_z . La conservation de l'angle donne $\gamma_x = -\gamma_z$, il y a un changement de direction selon e_x si $\theta < \alpha$. On peut aussi voir que la longueur d'onde est modifiée d'un facteur

$$\gamma = \frac{k_r}{k_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{\sqrt{k_x^r{}^2 + k_z^r{}^2}}{\sqrt{k_x^i{}^2 + k_z^i{}^2}} = \left| \frac{k_z^r}{k_z^i} \right| \frac{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} = |\gamma_z|. \quad (2.13)$$

Ce paramètre γ ne dépend ainsi que des données géométriques α et θ

$$\gamma = \left| \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\alpha - \theta)} \right|. \quad (2.14)$$

Le cas $\gamma = 1$ correspond à $\alpha = 0$ (paroi horizontale) ou $\theta = \pi/2$ (paroi verticale), il n'y a un effet que si le gradient de la pente n'est pas aligné avec la verticale ou l'horizontale.

Ce paramètre est dit de focalisation car $\gamma > 1$ implique une diminution de la longueur d'onde, et au contraire $\gamma < 1$ correspond à une défocalisation. Par ailleurs, dans le cas où l'onde incidente se propage dans le sens opposé (équivalent du retour inverse de la lumière), le paramètre de focalisation vaut $\gamma^- = 1/\gamma$: il y a un sens focalisateur et un sens défocalisateur. On parle aussi de focalisation car pour une onde plane, un rapprochement des iso-phases correspond à une diminution de la longueur d'onde et, la vitesse de groupe c_g étant proportionnelle à la longueur d'onde, on a autant d'énergie (ψ_0 est conservé) dans un plus petit volume et pendant plus longtemps, soit une augmentation de la densité d'énergie. En 2D, un petit bilan de flux [DAVIS 2019] montre que la densité d'énergie est changée d'un facteur γ^2 . Cette (dé)focalisation géométrique est illustrée sur la figure 2.2.

Le cas spécial où $\theta = \alpha$, laissé de côté pour l'instant est appelé réflexion critique. Le modèle présenté ici diverge ($\gamma \rightarrow \infty$), il faut donc revenir sur l'équation qui nous a permis de définir la fonction d'onde, et prendre en compte les effet du terme advectif qui est non-linéaire. Une analyse théorique plus poussée [DAUXOIS et YOUNG 1999] montre l'augmentation de la dissipation dans les couches limites ainsi que le raccordement à la solution hors de celle-ci. On ne s'intéressera ici pas plus en profondeur à ce cas limite, absent des expériences étudiées au cours de cette thèse.

Ces résultats sur la réflexion d'ondes internes ont été vérifiés expérimentalement [MERCIER et al. 2008]. Il a aussi été montré que lors d'une réflexion sur une topographie quelconque, il n'y a pas d'onde réfléchi dans la même direction que l'onde incidente.

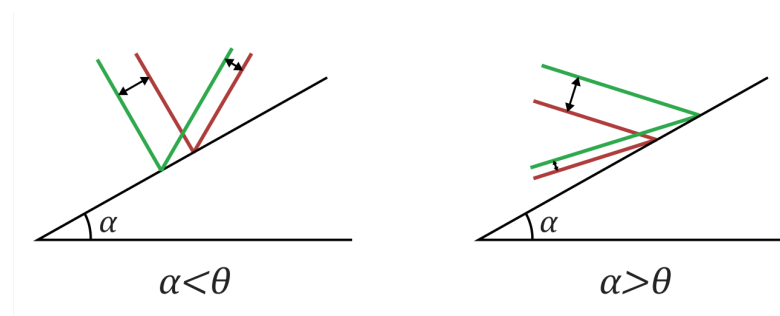


FIGURE 2.2 – Changement de la largeur d’un faisceau à une réflexion sur-critique (a) et sous-critique (b).

A.2 Une première approche des attracteurs

Dans la partie précédente, nous avons vu qu’une paroi inclinée avait une influence sur le comportement d’un faisceau d’onde, et notamment un effet focalisant. Cet effet peut permettre d’étudier des effets qui apparaissent dans le régime non-linéaire. C’est aussi l’occasion de regarder la trajectoire d’un faisceau d’onde dans un domaine possédant ce type de pente. On peut imaginer que plutôt qu’un faisceau, la figure 2.2 représente deux rayons issus de deux conditions initiales différentes. Une réflexion focalisante provoque un rapprochement de ceux-ci et un cycle limite peut être atteint après un certain nombre de réflexions. Cette partie repose en grande partie sur les travaux de L. Maas [MAAS 2005; MAAS et LAM 1995; MAAS et al. 1997; MANDERS et MAAS 2004] qui a introduit des concepts de systèmes dynamiques dans le cadre de l’étude d’ondes internes dans des domaines fermés.

a Systèmes dynamiques

Dans cette partie, nous allons emprunter des notions bien connues dans le domaine des systèmes dynamiques : les attracteurs et l’exposant de Lyapunov. Pour illustrer ces notions, un exemple de vulgarisation autour de cette question est un article de [HOFSTADTER 1981], c’est aussi celui donné sur la page Wikipédia consacrée aux systèmes dynamiques¹ : l’application logistique. C’est une application $T : x \mapsto \mu x(1 - x)$ itérée à partir d’une condition initiale x_0 afin d’obtenir la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (telle que $x_{n+1} = T(x_n)$). Pour $0 < \mu < 3$, on peut montrer (et facilement vérifier) qu’il n’existe qu’un seul point fixe x^* tel que $f(x^*) = x^*$, et que dans ce cas pour toute condition $x_0 \in]0, 1[$, la limite de la suite (x_n) est ce point fixe, c’est à dire que toutes les conditions initiales mènent à ce point. C’est le plus simple des attracteurs, un point fixe stable. Mesurer la vitesse de convergence vers cette limite x_∞ est alors aisé, il suffit de mesurer le coefficient de décroissance exponentielle vers cette limite.

Lorsque $3 < \mu \lesssim 3.449\dots$, la suite ne tend plus vers une valeur unique, mais vers une oscillation entre deux points x_1 et x_2 , tels que $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_1$. On appelle cette oscillation un cycle limite. La figure 2.3 montre comment on obtient ces valeurs limites graphiquement et illustre cette dénomination. Ce cycle limite attire les trajectoires pour tout x_0 dans l’intervalle $]0, 1[$, on appelle donc cela aussi un attracteur. Cependant, la limite de la suite étant un cycle et plus un point, il est plus difficile de mesurer la vitesse de convergence directement. Ce que l’on mesure plutôt c’est la distance entre deux trajectoires parties de deux positions initiales x_0 et $x_0 + \epsilon_0$ très rapprochées. Si la distance diminue alors c’est que les trajectoires se rapprochent et tendent vers la même limite (ou cycle limite), il y a convergence. Au contraire, si elle augmente, il y a séparation et donc divergence. Si on note ϵ_n l’écart entre les deux trajectoires à l’étape n , on peut définir λ tel que $|\epsilon_n| = \epsilon_0 \exp(\lambda n)$. Il est alors naturel de proposer comme mesure de la convergence

1. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_dynamique ou https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_logistique

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

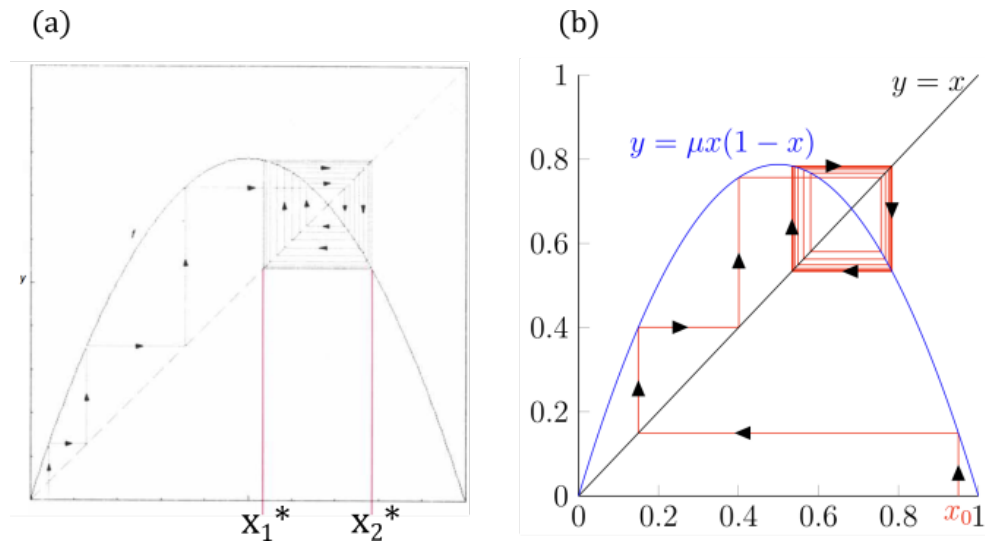


FIGURE 2.3 – Application logistique pour une valeur de μ conduisant à un cycle limite. (a) Version de [HOFSTADTER 1981]. x_1^* et x_2^* sont les deux valeurs entre lesquels oscille le cycle limite. (b) Version de [PILLET 2018]. La valeur initiale x_0 est indiquée en rouge. La courbe bleue permet de calculer x_{n+1} connaissant x_n .

$\lambda = 1/n \ln(\epsilon_n/\epsilon_0)$. Dans des systèmes plus complexes où il peut y avoir plusieurs attracteurs avec plusieurs bassins d'attraction, on veut une propriété locale qui ne dépend que de x_0 , on prend donc la limite où ϵ_0 tend vers 0. Pour ne dépendre que de l'attracteur et moyenner sur la trajectoire entière, on prend aussi la limite n infini. L'exposant de Lyapunov est alors défini comme

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \ln \frac{|\epsilon_n|}{\epsilon_0}. \quad (2.15)$$

En utilisant l'application définissant la suite, cette définition s'écrit

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |T'(x_i)|. \quad (2.16)$$

Cette deuxième version, qui est la moyenne du taux d'accroissement logarithmique, est utile pour calculer théoriquement dans des systèmes "simples" la présence d'attracteurs ($\lambda < 0$) et quantifier la force d'attraction par sa norme. La première version (équation (2.15)) sera utile pour le mesurer numériquement.

b Application aux ondes internes

Les deux notions présentées précédemment peuvent s'appliquer au cas des ondes internes. Dans la partie 1.B.4, nous avons vu que l'on pouvait décrire les ondes internes en utilisant des caractéristiques, ces chemins sur lesquels la fonction courant ψ est constante, analogues à des rayons (moyennant un changement de coordonnées). Expérimentalement, les ondes se propagent dans une cuve, délimitée par des parois, et il faut donc résoudre l'équation d'onde dans un domaine fermé. Dans le cas d'un domaine fermé en 2 dimensions, le calcul a été proposé par Magaard dans les années 60 [MAGAARD 1962, 1968]², basé sur des équations fonctionnelles portant

2. Mathématicien et océanographe germano-américain, les deux articles sont en allemand, cités par L. Maas.

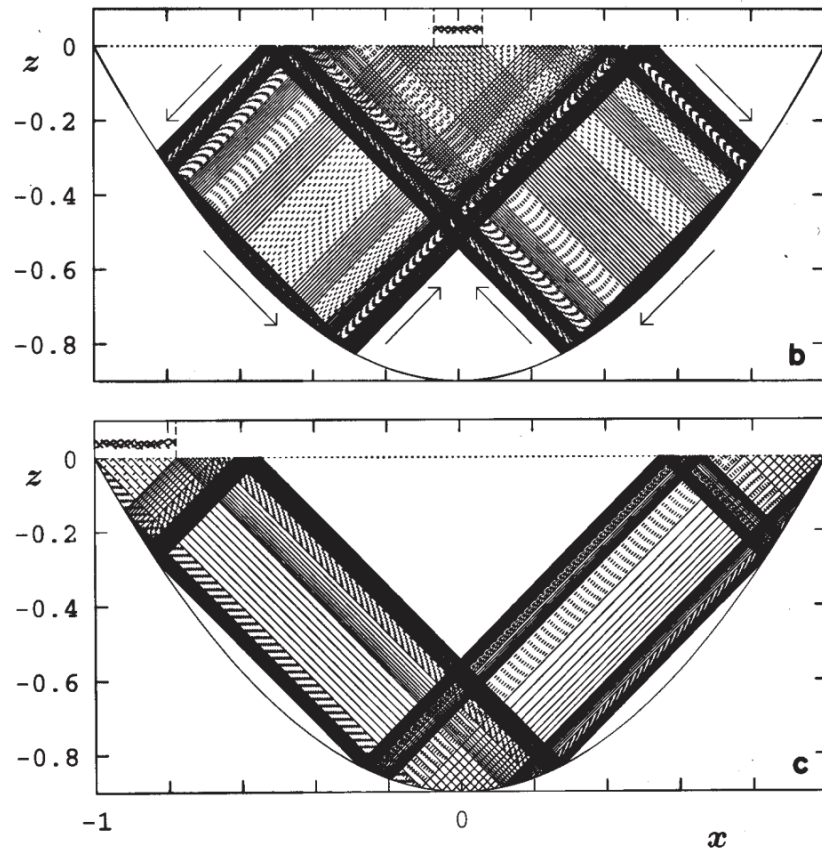


FIGURE 2.4 – Rayons provenant de l'intervalle fondamental primaire intérieur (b) et extérieur (c). L'emplacement de ces intervalles est indiqué en haut de ces figures; le symétrique est aussi possible dans le deuxième cas. Figures reprises de [MAAS et LAM 1995].

sur les réflexions des caractéristiques. Il décrit un *intervalle fondamental*, qui est l'espace entre deux réflexions successives, qui permet de décrire la fonction courant dans tout le domaine.

À partir de cette méthode, que Maagard avait appliqué seulement dans le cas de réflexions sur-critiques, Maas a calculé théoriquement en 1995 la présence d'attracteurs dans plusieurs géométries, ainsi que les exposants de Lyapunov associés [MAAS et LAM 1995]. Il est aussi possible de calculer la partie spatiale de la fonction courant à partir de ce résultat. Cet article fondateur explore en détails le cas d'un bassin de forme parabolique, et expose quelques résultats dans le cadre du rectangle, de l'ellipse et du "sceau" (trapèze isocèle). Un des principaux résultats est la présence de cycles limites (figure 2.4) vers lesquelles toutes les trajectoires convergent. On peut noter l'utilisation des caractéristiques dans la figure 2.4 par le fait qu'elles se propagent à 45° ³, c'est la profondeur de la parabole, notée τ qui est modifiée en conséquence. Les attracteurs sont présents sur une gamme continue de valeurs de τ , qui montre que ce ne sont pas des anomalies. Au contraire, ce qu'on appelle des *résonances globales* sont des valeurs ponctuelles du paramètre τ pour lesquelles chaque rayon, peu importe son point de départ boucle sur lui même, ayant donc un exposant de Lyapunov strictement nul.

3. Bien qu'il soit indu de parler de propagation, la dimension temporelle ayant été éliminée du problème.

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

c Le cas du trapèze

Le cas étudié plus précisément ici a été la première comparaison entre théorie et validation expérimentale des attracteurs d'ondes internes. Cette étude publiée en 1997 conjointe entre Maas et Lam du *Netherland Institute for Sea Research* et Benielli et Sommeria de l'*ENS de Lyon* s'intéresse au cas du trapèze rectangle [MAAS et al. 1997]. Cette géométrie ne possède qu'un seul plan incliné, et est donc plus facile à mettre en place expérimentalement ainsi que plus aisée à traiter théoriquement. La méthode des caractéristiques décrite précédemment peut s'appliquer avec un changement de variable adapté à des situations où la stratification n'est pas linéaire, mais pour pouvoir comparer simplement avec les expériences, seule la situation $N = Cste$ est considérée. Le trapèze est décrit par 3 paramètres : la largeur de la cuve L , sa hauteur H et l'angle de la pente par rapport à la verticale α . Il faut ajouter à ces paramètres géométriques l'angle de propagation des ondes θ . Pour se placer dans les conditions de [MAAS et LAM 1995], on applique un premier changement de variable sur l'abscisse

$$x' = \frac{2x}{L} - 1 \quad (2.17)$$

afin que x' varie dans l'intervalle $[-1, 1]$. L'angle de propagation est alors encore θ si l'on multiplie z par ce même facteur $2/L$. Cependant, lorsque l'on a écrit l'équation de la fonction d'onde (section 1.B.4), les caractéristiques (rayons) avaient un angle de 45° , on ajoute donc un facteur $1/\tan\theta$ pour corriger l'angle

$$z' = \frac{2z}{L} \frac{1}{\tan\theta}. \quad (2.18)$$

La géométrie adimensionnée est donc décrite par deux paramètres : sa hauteur τ et la distance entre le centre de la cuve et la pente d définies par

$$\tau = \frac{2H}{L} \frac{1}{\tan\theta} \quad (2.19)$$

$$d = 1 - \frac{2H}{L} \tan\alpha. \quad (2.20)$$

On peut déjà noter que d ne dépend que de la géométrie alors que τ représente plutôt l'angle de propagation des ondes internes dans l'espace réel. La figure 2.5 illustre cette démarche. Le nouvel angle de la pente dans cette géométrie α' est un paramètre redondant, et vaut $\tan\alpha' = \tan\alpha \tan\theta$ qui vaut dans cette nouvelle géométrie $(1-d)/\tau$. Une fois le changement de variable effectué, il reste à calculer l'exposant de Lyapunov associé à un couple (d, τ) . Dans ces géométries, les rayons convergent presque toujours, et la figure 2.6 montre la valeur de $\log_{10}(-\lambda)$ en fonction de ces paramètres adimensionnés.

On distingue tout d'abord la zone dite *corner* en bas à gauche, sous la droite $\tau = 1 - d$, correspondant aux réflexions sur-critiques pour lesquelles tous les rayons convergent vers le coin $(1, 0)$ (illustré sur la figure 2.7(c)). En effet dans ce cas la réflexion sur la pente est une réflexion verticale ($k_z^r = -k_z^i$), et donc les rayons se propagent toujours vers la droite. Le coin est ici un attracteur ponctuel. Étudiée expérimentalement et théoriquement sous le nom de "wedge" [HURLEY 1970], cette concentration des rayons amène une augmentation de l'amplitude et de la densité d'énergie, ce qui implique une forte augmentation de la dissipation.

Au dessus de cette droite, plus la région est claire, plus la convergence y est rapide. Elles sont numérotées (m, n) , m étant le nombre de réflexions à la surface et n sur la paroi verticale. Les grandes régions claires continues correspondent à des attracteurs simples, avec peu de réflexions, ils sont aussi dits attracteurs à grandes échelles (m et n sont faibles). Dans ces régions, parfois appelées langues d'Arnold, un seul rayon est vraiment périodique, c'est le cycle limite attractif. Par exemple, la figure 2.7 présente un attracteur $(2, 1)$ (a) et un attracteur $(1, 3)$ (b). Cette figure présente aussi 2.7(d) un exemple d'un attracteur hors des langues d'Arnold, aussi appelé attracteur à petites échelles. Ce dernier type d'attracteur, présent dans les zones grisées ou sombres du diagramme (d, τ) (figure 2.6), est peu convergent du fait de sa longueur et du nombre de réflexions,

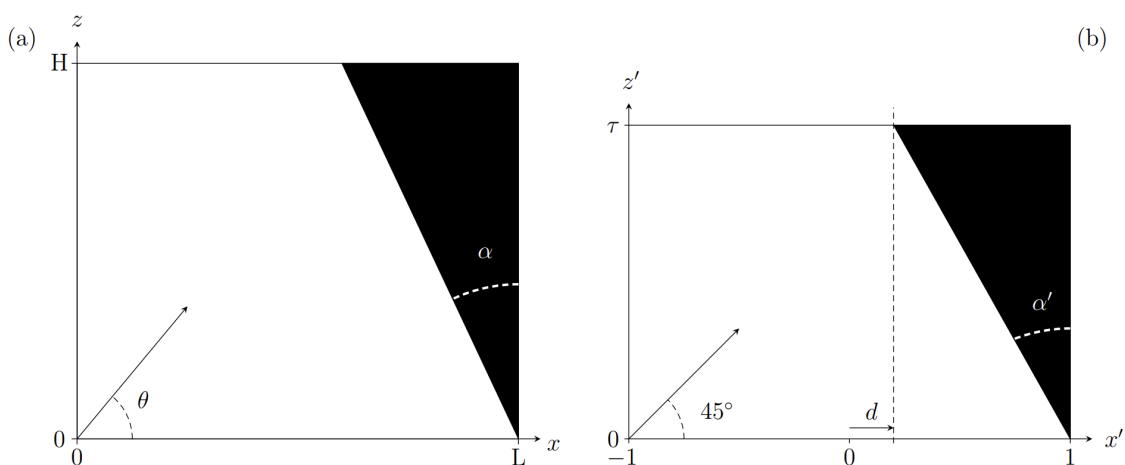


FIGURE 2.5 – (a) Trapèze rectangle défini par les paramètres H , L , α et θ . (b) Géométrie adimensionnée avec propagation à 45° . Figures extraites de la thèse de [BROUZET 2016].

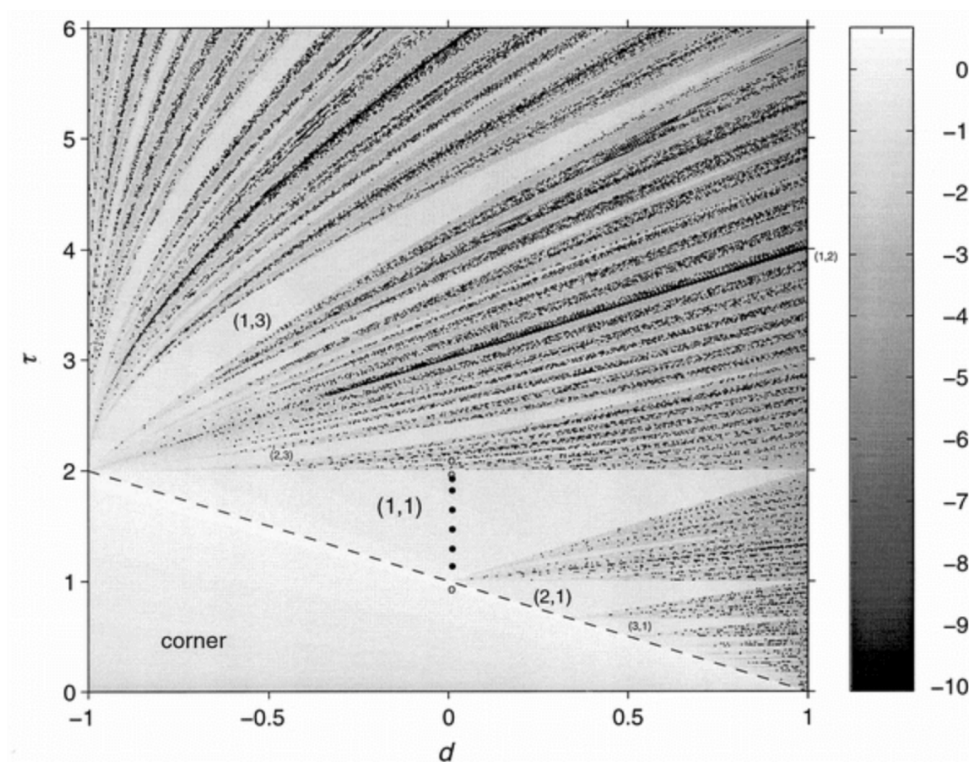


FIGURE 2.6 – Extrait de [MAAS et al. 1997]. Taux de convergence de deux trajectoires voisines dans le plan (d, τ) mesuré par l'exposant de Lyapunov $\log_{10}(\lambda)$. Une couleur sombre indique une convergence lente. La zone "corner" indique les attracteurs ponctuels lors d'une réflexion sur-critique. Les régions (m, n) sont les langues d'Arnold associées à une forte convergence vers un attracteur se réfléchissant m fois à la surface et n fois sur la paroi verticale. Les points noirs dans la zone $(1, 1)$ indiquent les paramètres pour lesquels l'observation expérimentale a été réalisée dans l'article [MAAS et al. 1997]. Le champ de vitesse est filtré autour de la fréquence de forçage $\omega_0/N = \sin \theta = 0.43$.

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

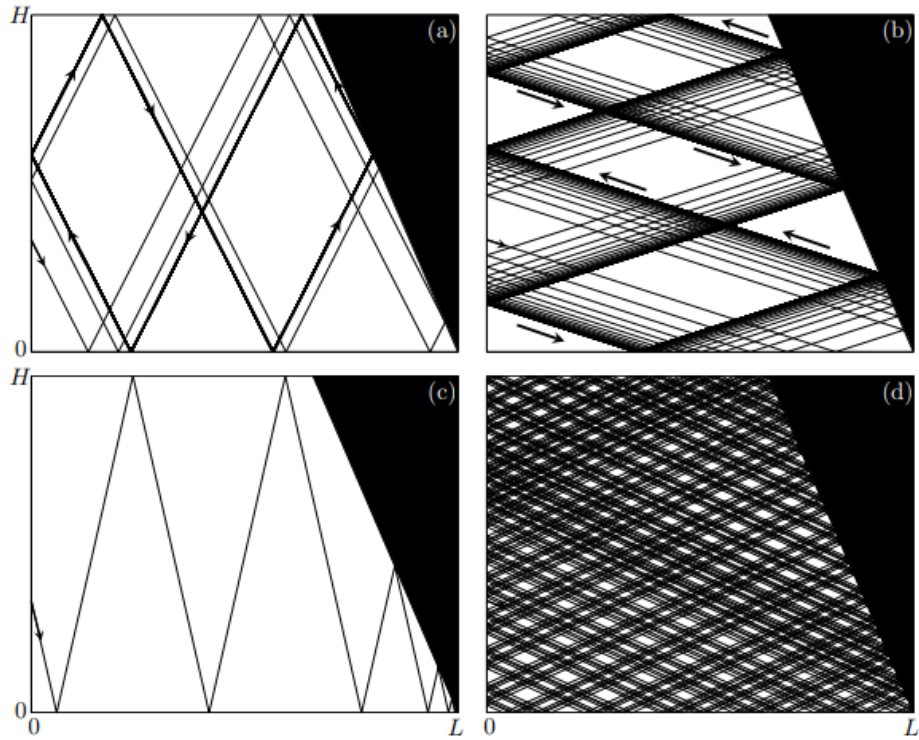


FIGURE 2.7 – Extrait de [BROUZET 2016] Convergence vers différents attracteurs : (2, 1) (a), (1, 3) (b), ponctuel (c) et attracteur à convergence faible (d). Comme dans la figure 2.8 $d = 0.32$. θ (respectivement τ) vaut 58° (resp. 0.83) (a), 15.2° (resp. 4.91) (b), 75° (resp. 0.36) (c) and 21° (resp. 3.47) (d).

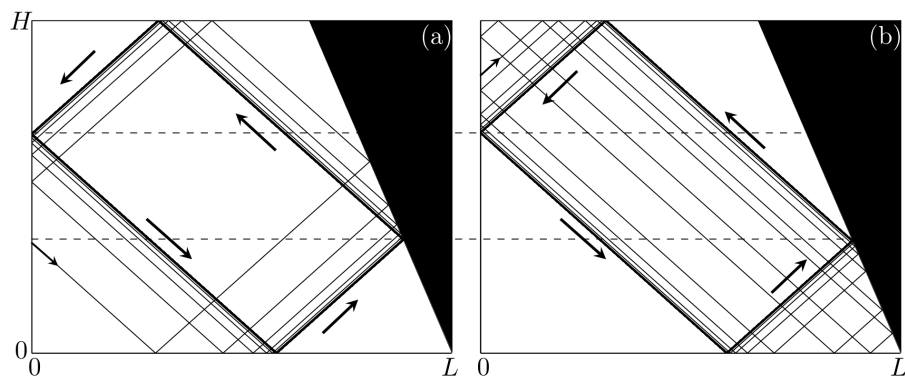


FIGURE 2.8 – Extrait de [BROUZET 2016]. Tracé de rayons pour deux conditions initiales différentes. La condition initiale est indiquée par la petite flèche. Les traits tiretés noirs placés aux réflexions montrent que les attracteurs sont identiques. Les paramètres géométriques sont $H/L = 2/3$, $\alpha = 27^\circ$, et $\theta = 37^\circ$, soit $(d, \tau) = (0.32, 1.77)$.

focalisantes comme défocalisantes. Du fait de la viscosité, il ne sera pas possible de l'observer expérimentalement.

La numérotation (m, n) est héritée de l'étude du cas parabolique et rectangulaire, pour lesquels avaient été identifiées des résonances globales : pour une valeur très précise des paramètres, tous les rayons sont périodiques, et l'intersection des rayons divise le domaine en cellules. Dans la géométrie parabolique, c'est le cas pour un nombre n pair de réflexions sur la paroi. Il y a alors une réflexion focalisante et une réflexion défocalisante et les deux facteurs γ et $1/\gamma$ se compensent. L'exposant de Lyapunov de cet attracteur est donc strictement nul. Cela a pour conséquence que chaque rayon est un cycle limite, on parle aussi de résonance globale.

La figure 2.8 illustre la convergence des rayons vers un cycle limite $(1, 1)$, pour deux conditions initiales ayant des directions de propagation initialement opposées. Les deux rayons sont issus de caractéristiques émises de deux intervalles fondamentaux différents, les réflexions à la surface n'ont pas lieu du même côté. Le cycle limite ne s'intersecte pas lui-même, il définit donc une seule cellule, d'où la dénomination $(1, 1)$ (une cellule verticale et une cellule horizontale, ou une réflexion verticale et une horizontale).

Nous ne détaillerons pas plus ces derniers aspects, mais une personne intéressée pourra lire la partie "An internal wave billiard" de la thèse de C. Brouzet [BROUZET et al. 2016c] qui étudie en profondeur ces derniers aspects.

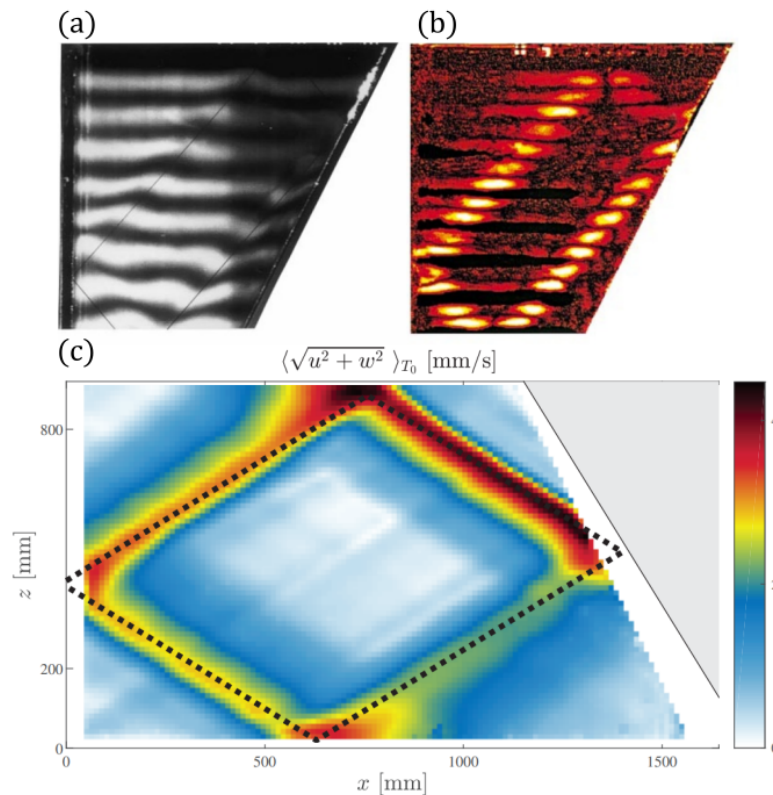


FIGURE 2.9 – Visualisation des lignes de colorants (a) et déplacement maximal de la ligne de colorant en chaque point (b), extraits de [MAAS et al. 1997]. Visualisation par PIV de la norme de la vitesse moyennée sur une période de forçage (c). Extrait de [DAVIS 2019].

A.3 Résultats expérimentaux

Une fois le diagramme (d, τ) obtenu pour la géométrie trapèze (figure 2.6), des expériences ont pu être menées pour vérifier ces prédictions. En visualisant le déplacement de lignes de colorant, marquant les pycnoclines, la première mesure a été effectuée en 1997 et montre l'existence des attracteurs (1,1) [MAAS et al. 1997]. L'amplitude des ondes, illustrée figure 2.9(a) et figure 2.9(b), est calculée en regardant en chaque point le déplacement maximal des pycnoclines. Il apparaît alors que le déplacement maximal, qui correspond à une amplitude d'oscillation maximale, est situé sur l'attracteur. Les techniques de visualisation se sont améliorées depuis avec l'utilisation du Schlieren et de la PIV (Particle Image Velocimetry) et il est possible de voir clairement la focalisation lors de la réflexion sur la pente comme montré figure 2.9(c).

Des avancées théoriques et expérimentales ont eu lieu les années suivantes et ont permis la description précise de la structure de l'attracteur, et en particulier la largeur des branches, qui n'est pas expliquée par le tracé de rayon. En prenant en compte la viscosité, il existe un équilibre entre la focalisation qui réduit la largeur et la dissipation qui tend à l'augmenter le long de la trajectoire [HAZEWINDEL et al. 2008]. En parallèle, des simulations ont été menées en rotation et ont montré l'existence d'attracteurs pour les ondes inertielles [OGILVIE 2005]. Des comparaisons entre simulations numériques directes et expériences ont pu être effectuées pour vérifier les résultats précédents [BROUZET et al. 2016b] et affiner la structure transverse des attracteurs (qui ne peuvent pas être entièrement 2D expérimentalement) qui a révélé que la majorité de l'énergie était dissipée dans les couches limites le long de la paroi [BECKEBANZE et al. 2018; DAVIS et al. 2019]. En parallèle, les attracteurs ont pu servir d'outil afin de focaliser l'énergie, en particulier sur la branche post-réflexion. Ainsi cette géométrie a pu servir à étudier l'apparition d'effets non-linéaires et en particulier l'Instabilité Triadique Résonante (TRI). Les observations se sont d'abord concentrées sur la branche de plus grande amplitude [SCOLAN et al. 2013b] (après la réflexion) puis sur l'entièreté de la cuve [BROUZET et al. 2016a]. Les figures 2.10(a-c) montrent ainsi un champ de vitesse horizontale (v_x) filtré à la fréquence de forçage ω_0 (a) ainsi que pour les fréquences des ondes secondaires. Les vecteurs d'onde des ondes secondaires sont plus grands que celui de l'onde primaire, et \vec{k}_1 et \vec{k}_2 sont de sens opposés. Une étude spectrale permet de suivre la croissance de l'instabilité comme cela est illustré sur le diagramme temps-fréquence présenté figure 2.10(c). On vérifie aussi bien la relation de résonance $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$. En augmentant l'amplitude de forçage, une suite d'instabilités a été envisagée afin de peupler le spectre et tenter d'atteindre la turbulence d'onde [DAVIS et al. 2020]. Ce type de résultat a aussi été montré pour les ondes inertielles [BRUNET et al. 2019].

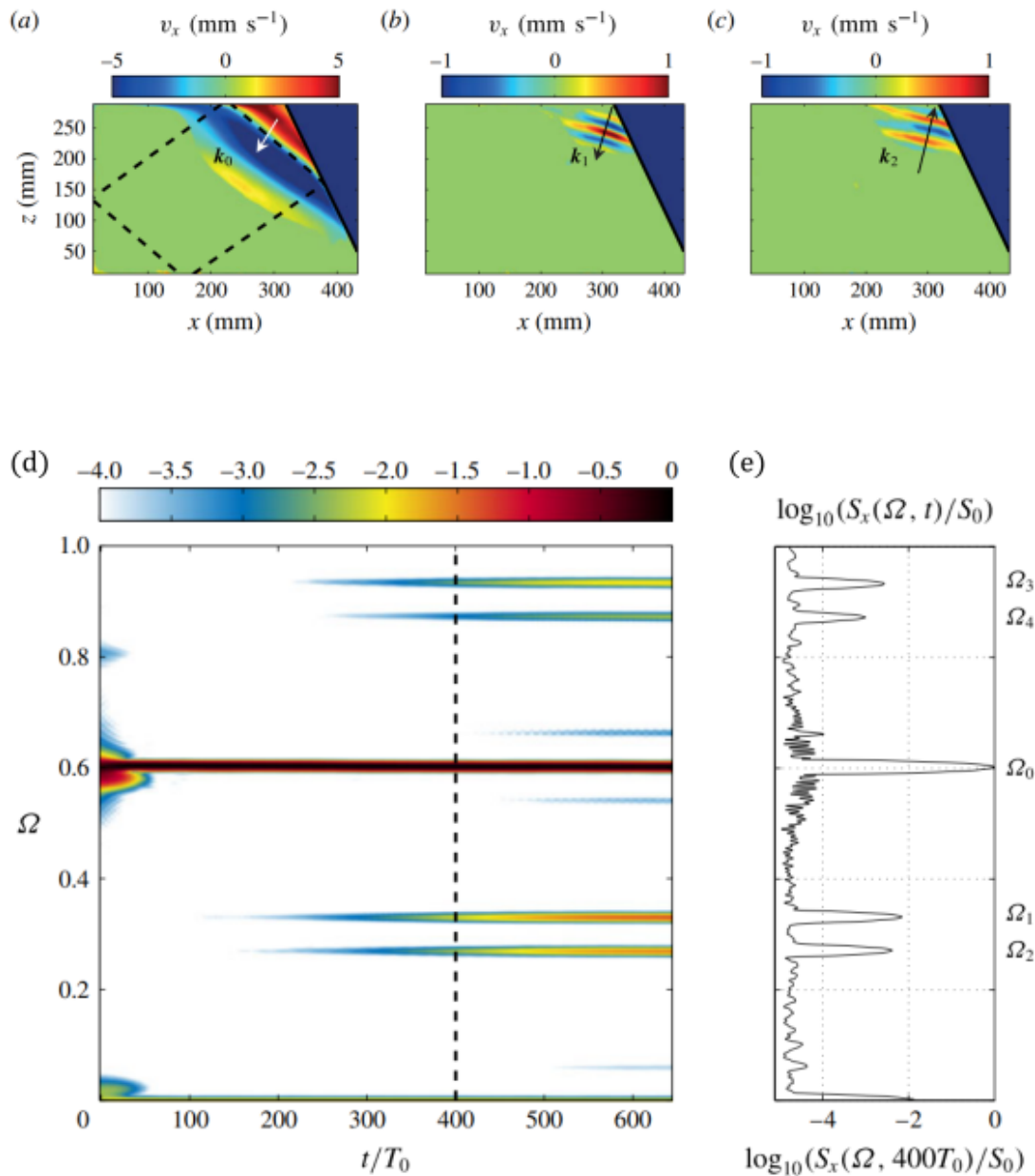


FIGURE 2.10 – Extrait de [BROUZET et al. 2016a]. Expériences d’ondes internes de gravité dans une géométrie trapézoïdale quasi-2D. Vitesse horizontale v_x uniquement le long de la branche post-focalisation, filtrée à la fréquence de forçage (a), et aux deux fréquences résonantes pour la TRI (b) et (c). Les vecteurs d’ondes sont plus grands et de sens opposés.

(d) Diagramme temps-fréquence présentant l’évolution du spectre de la vitesse horizontale en fonction du temps ($S_x(\Omega, t)$). L’onde primaire est clairement identifiable et on observe la croissance de l’instabilité. (e) Coupe dans le diagramme suivant la ligne pointillée. On note que dans l’étude citée, contrairement à la convention prise dans cette thèse, $\Omega = \omega/N$.

B Géométrie 3D

B.1 Propagation et Réflexion

a Dans le volume

En considérant maintenant le cas de la propagation dans un volume, dans le cas d'un fluide linéairement stratifié ($N = Cste$) et en rotation solide comme décrit en section 1.B.3, la relation de dispersion des ondes d'inertie-gravité s'écrit

$$\omega_0^2 = N^2 \sin^2 \theta + f_c^2 \sin^2 \theta, \quad (2.21)$$

où θ est l'angle que fait le vecteur \vec{k} avec la verticale, soit en 3D

$$\sin^2 \theta = \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (2.22)$$

La vitesse de phase \vec{c}_ϕ des ondes internes est alignée avec \vec{k} et la vitesse de groupe $\vec{c}_g = (c_x, c_y, c_z)$ est orthogonale. Cette dernière est donc sur un cône d'angle θ avec l'horizontale, tel que

$$c_z^2 = (c_x^2 + c_y^2) \tan^2 \theta. \quad (2.23)$$

Un rayon décrivant une onde gravito-inertielle est donc sur un cône et ceci est vrai avant, comme après la réflexion.

Pour simplifier le développement, nous nous restreindrons dans cette partie aux ondes internes de gravité. On notera que pour celles-ci, la vitesse de groupe \vec{c}_g et la vitesse particulière \vec{v} sont alignées, ainsi dans le cadre de la propagation de rayons, les deux sont équivalentes.

b Réflexion sur une pente

La situation la plus simple que l'on peut décrire est celle d'un rayon représenté par un vecteur directeur \vec{c}^i arrivant sur une pente se réfléchissant en un vecteur \vec{c}^r . Afin de simplifier l'analyse, on suppose la pente invariante par translation selon y , et faisant un angle α avec l'horizontale, d'équation $z = x \tan \alpha$ et de normale $\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_x$. D'après cette invariance, à la réflexion la composante selon y ne change pas : $v_y^i = v_y^r$. La condition d'impenétrabilité de la paroi donne

$$\vec{v}^i \cdot \vec{n} + \vec{v}^r \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.24)$$

$$\cos \alpha v_z^r - \sin \alpha v_x^r = \sin \alpha v_x^i - \cos \alpha v_z^i, \quad (2.25)$$

$$v_z^r + v_z^i = \tan \alpha (v_x^r + v_x^i). \quad (2.26)$$

L'équation du cône est valable avant et après la réflexion, ce qui donne

$$v_z^{r2} = (v_x^{r2} + v_y^{r2}) \tan^2 \theta, \quad (2.27)$$

$$v_z^{i2} = (v_x^{i2} + v_y^{i2}) \tan^2 \theta, \quad (2.28)$$

soit en les soustrayant

$$v_z^{r2} - v_z^{i2} = (v_x^{r2} - v_x^{i2}) \tan^2 \theta. \quad (2.29)$$

En factorisant et en utilisant la relation d'impenétrabilité, on obtient finalement un système à deux équations

$$(v_z^r - v_z^i) \tan \alpha = (v_x^r - v_x^i) \tan^2 \theta, \quad (2.30)$$

$$v_z^r + v_z^i = \tan \alpha (v_x^r + v_x^i). \quad (2.31)$$

Après avoir isolé les composantes du rayon réfléchi, on obtient les relations de réflexion

$$v_x^r = \frac{(1 + s^2) v_x^i - 2s / \tan \theta v_z^i}{1 - s^2}, \quad (2.32)$$

$$v_y^r = v_y^i \quad (2.33)$$

$$v_z^r = \frac{-(1 + s^2) v_z^i + 2s \tan \theta v_x^i}{1 - s^2}. \quad (2.34)$$

Le paramètre s est un paramètre géométrique défini comme

$$s = \frac{\tan \alpha}{\tan \theta}. \quad (2.35)$$

Ces expressions sont identiques à celles donnée par [PILLET et al. 2018] en prenant $\tan \theta = 1$, ainsi que [MANDERS et MAAS 2004] utilisant la formulation de [ERIKSEN 1982] en prenant $\psi = \pi/2 - \theta$ (raisonnement en vecteur d'onde plutôt qu'en rayon).

Ces expressions sont valables dans le plan contenant le gradient de la pente \vec{t} et sa normale \vec{n} . Dans le cas général, le vecteur normal \vec{n} n'est pas dans le plan (x, z) et alors une rotation d'un angle φ sera nécessaire pour se placer dans le plan associé à la pente. Les expressions de la réflexion pourront ainsi toujours être appliquées dans le cadre défini dans cette partie.

c Cas des ondes inertielles

Lorsque le milieu est en rotation ($f_c \neq 0$), la vitesse de groupe et la vitesse particulière ne sont plus alignées. [MANDERS et MAAS 2004] ont calculé le vecteur d'onde réfléchi d'une onde inertielle ($N = 0$) sur une pente inclinée. La formule liant \vec{m} le vecteur d'onde réfléchi au vecteur d'onde incident \vec{k} transposée dans nos notations est

$$m_x = \frac{(1 + s^2)k_x + 2s \tan \theta k_z}{s^2 - 1}, \quad (2.36)$$

$$m_y = k_y, \quad (2.37)$$

$$m_z = -\frac{(1 + s^2)k_z + 2s / \tan \theta k_x}{s^2 - 1}. \quad (2.38)$$

En utilisant la relation reliant vecteur d'onde et vitesse de groupe (eq. 1.45), ces expressions sont équivalentes à celle déterminée dans le cas des ondes internes de gravité. On peut donc s'attendre à ce que les résultats dérivés dans cette partie seront aussi valables dans le cas des ondes gravito-inertielles.

B.2 Piégeage

a Évolution azimutale

La quantité d'intérêt de ce problème est l'angle de propagation ϕ dans le plan horizontal, défini tel que

$$\vec{c}_g = c (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta), \quad (2.39)$$

et alors $\sin \phi = (c_y / c_z) \tan \theta = (v_y / v_z) \tan \theta$. L'angle ϕ^r du rayon réfléchi est

$$\sin \phi^r = (v_y^r / v_z^r) \tan \theta, \quad (2.40)$$

$$= \frac{(1 - s^2) v_y^i \tan \theta}{-(1 + s^2) v_z^i + 2s \tan \theta v_x^i}, \quad (2.41)$$

$$= \frac{(1 - s^2) \sin \phi^i}{-(1 + s^2) + 2s \cos \phi^i}, \quad (2.42)$$

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

et de même

$$\cos \phi^r = \frac{(1 + s^2)v_x^i - 2s}{-(1 + s^2) + 2s \cos \phi^i}. \quad (2.43)$$

La loi de réflexion obtenue est similaire à celle exposée par [MANDERS et MAAS 2004] et démontrée en premier lieu par [PHILLIPS 1963] :

$$\sin \phi^r = \frac{(s^2 - 1) \sin \phi^i}{1 + s^2 \pm 2s \sqrt{1 - \sin^2 \phi^i}} = g(\phi, s). \quad (2.44)$$

L'étude de la fonction g menée par [PILLET et al. 2018] distingue les trois cas usuels.

- $|\mathbf{s}| = \mathbf{1}$: C'est le cas où la réflexion est critique, v_x et v_z divergent à la réflexion et $\phi^r = 0$. Le rayon s'aligne avec la pente dès la réflexion, et on retrouve la forte dissipation ou le caractère fortement non-linéaire évoqués dans la partie sur la propagation en 2D.
- $|\mathbf{s}| < \mathbf{1}$: C'est le cas d'une réflexion sur-critique (inversion de la composante verticale). Seul le cône supérieur est accessible mais tous les angles sont possibles. Dans ce cas, pour étudier les réflexions successives, il est plus adapté de rapporter l'angle ϕ^r à un angle incident, on étudie plutôt alors l'angle $\phi^{i'} = \phi^r - \pi$ et alors

$$\phi^{i'} = \sin^{-1} \left(\frac{(1 - s^2) \sin \phi^i}{-(1 + s^2) + 2s \cos \phi^i} \right) - \pi = f(\phi, s), \quad (2.45)$$

l'intervalle image de la fonction \sin^{-1} étant étendue à $[-\pi, \pi]$ par la connaissance du cosinus. Les points 0 et $\pm\pi$ sont des points fixes de l'application f . On a $|f'(0)| > 1$ qui est donc instable, et le point fixe en π qui est stable⁴. C'est vers ce point que convergent les itérations $f^{(n)}(\phi_0)$, représentant des réflexions successives. Or la direction $\phi = \pi$ correspond à un rayon aligné dans le plan normal à la pente, dans le sens du gradient de celle-ci. En conclusion, dans le cas sur-critique, le rayon tend à s'aligner avec le gradient de la pente.

- $|\mathbf{s}| > \mathbf{1}$: C'est le cas sous-critique (inversion de la composante horizontale). Ici le cône de propagation n'est pas entièrement accessible car la pente intercepte celui-ci pour deux valeurs d'angle ϕ_ℓ et $-\phi_\ell$, tels que $\cos \phi_\ell = 1/s$, entre lesquels le cône de propagation est sous la pente. Jusqu'ici, on a toujours considéré le cas où $v_z^i < 0$, c'est à dire une arrivée par le haut, or ici les deux cas sont possibles. Dans ce premier cas, le rayon arrive par le cône supérieur et est réfléchi sur le cône inférieur. Là encore, la réflexion est focalisante et ϕ tends vers 0, il y a alignement avec la pente. Au contraire, un rayon arrivant sur le cône inférieur est réfléchi sur le cône supérieur et l'angle ϕ augmente.

Le résultat de cette étude montre déjà un lien entre les réflexions 2D et 3D. La condition à laquelle une réflexion est piégeante (alignement avec le gradient de la pente) en 3D est la même que pour qu'une réflexion soit focalisante (réduction de la largeur d'un faisceau) en 2D. On a ici un premier indice de la convergence tridimensionnelle vers un attracteur.

b Géométrie canal

La situation proposée par G.Pillet est celle d'un canal, c'est à dire un parallélépipède rectangle avec une longueur grande devant la hauteur et la largeur, présentant une pente avec un angle α . C'est une version invariante selon y du trapèze figure 2.5(a), pivotée de 90° . Ainsi, dans chaque plan (xz) , l'analyse 2D est valable, et il y a formation d'un attracteur ou non selon la valeur des variables d et τ . L'enjeu est dans la possibilité pour l'onde de se propager dans la troisième direction et d'étudier l'évolution de l'angle ϕ . On parlera de piégeage lorsque ϕ tend vers 0, c'est à dire que le rayon se retrouve dans un plan. L'étude du cas $|\mathbf{s}| < 1$ peut être éliminée, car c'est le cas où en deux dimensions le rayon vient se focaliser dans un coin. L'analyse tri-dimensionnelle ajoute

4. La définition de l'angle ϕ différente de l'étude menée par G. Pillet, ce qui inverse les résultats.

que le rayon va être piégé, c'est-à-dire que $\phi \rightarrow 0$, et donc que le rayon finit dans un plan (xz) , mais l'énergie est toujours concentrée vers un coin. On se place donc dans le cas où $|s| > 1$.

La question est alors de déterminer si les réflexions sont piégeantes ou dépiégeantes, et il est utile de se référer au cas 2D. En effet, si les paramètres (d, τ) sont dans la zone d'un attracteur $(1, 1)$, on peut s'attendre à des réflexions sur la pente qui sont focalisantes dans le plan (xz) mais donc aussi piégeantes pour la propagation horizontale. Ce résultat a été confirmé par tracé de rayons [PILLET et al. 2018]. Des expériences ont aussi été menées [PILLET 2018] pour montrer effectivement le piégeage d'ondes internes dû à ce mécanisme. Ce phénomène est similaire pour tous les attracteurs recensés figure 2.6. Cependant, deux conditions initiales, même très proches, induisent un piégeage dans deux plans distincts. Les cycles limites obtenus ne sont pas de "vrais" attracteurs au sens 3D.

Le cas du cycle limite $(1, 2)$ est intéressant puisque l'exposant de Lyapunov associé est nul. Dans le cadre du canal, il y a aussi une réflexion piégeante compensée par la réflexion suivante, et donc v_y est inchangée sur un cycle, il n'y a pas de piégeage. Un dernier cas à évoquer est celui des *whispering modes*, en effet pour une valeur ponctuelle de ϕ dans le cas sur-critique, lorsque $\cos \phi = -s$. Alors, $\phi_r = -\phi_i$ et $v_z^r = -v_z^i$ et le rayon ne se réfléchit que sur la pente et une seule paroi, comme s'il longeait celle-ci. Ce nom vient de la propriété à longer une paroi, qui dans le cas des ondes acoustiques permet d'entendre des chuchotements à des distances de plusieurs mètres.

In fine, la présence d'une convergence dans les coupes 2D ne laisse pas d'espoir d'un attracteur purement 3D dans cette géométrie, et à l'exception de valeurs ponctuelles des paramètres, tous les rayons sont piégés plus ou moins rapidement. Les cycles limites obtenus, bien qu'attracteurs dans les plans (xz) , ne sont pas des attracteurs 3D, la position de ce plan dépendant fortement des conditions initiales. Afin de transformer cette situation, il faut casser l'invariance par translation, c'est qu'on appellera la double pente, présentée dans la partie 2.D.1.

B.3 Axisymétrie

Imaginée comme un version axisymétrique du trapèze 2D, la géométrie tronconique semble adaptée à la formation d'attracteurs dans une géométrie 3D. En effet, en plus de focaliser les ondes comme en 2D, la principale dissipation qui était due à la paroi est fortement réduite, on s'attend donc à pouvoir étudier plus facilement les phénomènes non-linéaires et les transferts d'énergie. De manière similaire à la géométrie canal, le but ici est d'analyser les différents cas possibles. Premièrement, au regard de l'invariance par rotation, on s'attend à une structure également axisymétrique. En utilisant la propriété principale de la réflexion tridimensionnelle, l'alignement de la vitesse de groupe avec le gradient de la pente, il est attendu que les rayons se retrouvent piégés le long d'un diamètre. Dans le cas d'un cône, le gradient de la pente est toujours dirigé radialement, selon \vec{e}_r , chaque réflexion piégeante tend à diriger le rayon vers le centre du cône. Afin d'adapter la théorie précédente, les notations du schéma d'une coupe horizontale à une côte z_0 figure 2.11 sont adoptées. Un indice n dénote une quantité à la réflexion n , avec un exposant i pour le rayon incident et r pour le rayon réfléchi. On note ϕ l'angle de propagation azimutal du rayon, comme précédemment $\cos \phi = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, φ est l'angle en coordonnées cylindrique du point de réflexion. L'angle d'attaque du rayon sur la pente est donc $\chi = \phi - \varphi$, et $R(z_0)$ le rayon du cône à cette côte.

Les réflexions sur les plans $z = 0$ et $z = h$ sont neutres ($v_{z,n+1} = -v_{z,n}$) et on utilisera les formules pour la réflexion sur la pente

$$v'_{x,n}{}^r = \frac{(1 + s^2) v'_{x,n}{}^i - 2s / \tan \theta v'_{z,n}{}^i}{1 - s^2}, \quad (2.46)$$

$$v'_{z,n}{}^r = \frac{-(1 + s^2) v'_{z,n}{}^i + 2s \tan \theta v'_{x,n}{}^i}{1 - s^2} \quad (2.47)$$

avec \vec{v}' le champ de vitesse dans le référentiel associé à la pente au point de réflexion (rotation

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

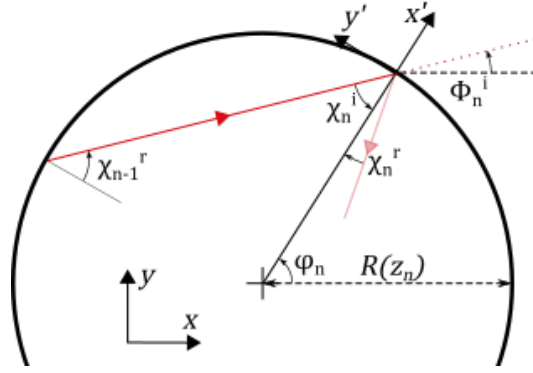


FIGURE 2.11 – Vue horizontale schématique d'une réflexion (vue du dessus). Φ est la direction azimutale du rayon, φ la position azimutale du point de réflexion et $R(z)$ le rayon du cône à la côte de la réflexion $R(z_0)$. n est le numéro de la réflexion sur la pente, les exposants i sont appliqués aux grandeurs incidentes, et r aux grandeurs réfléchies.

d'angle φ tel que $(\vec{e}_x^i, \vec{e}_y^i) = (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$, et s défini par l'équation (2.35). Un modèle naïf de l'évolution de χ serait d'appliquer une version linéarisée de l'équation (2.44), et donc d'avoir une évolution géométrique de l'angle à la réflexion, soit $\phi_n^r - \phi_n^i = \chi_n^r = \gamma_\phi \chi_n^i$. De plus, dans un cône, la relation entre deux points de réflexion est donné par $R(z_{n+1}) \cos \chi_{n+1}^i = R(z_n) \cos \chi_n^r$. Pour un nombre suffisant de réflexions, les facteurs géométriques devraient se compenser, soit en moyenne $\chi_{n+1}^i = \chi_n^r$. En déroulant la relation géométrique,

$$\chi_n = \gamma_\phi^n \chi_0. \quad (2.48)$$

La quantité d'intérêt à chaque étape n n'est pas l'angle en lui-même mais son évolution, et donc

$$\Delta \chi_n = \chi_n^r - \chi_n^i = (1 - \gamma_\phi) \gamma_\phi^{n-1} \chi_0. \quad (2.49)$$

D'après ce modèle, lorsque $|\gamma_\phi| < 1$, le rayon tend vers un diamètre ($\chi = 0$) avec une décroissance exponentielle caractérisée par $\Lambda_\phi = \ln \gamma_\phi$, analogue à un exposant de Lyapunov pour l'angle. Comme dans le cas du canal, les attracteurs obtenus ne sont des attracteurs qu'au sens 2D, le plan de convergence dans la troisième dimension dépendant des conditions initiales.

Le calcul du coefficient Λ_ϕ peut permettre de prédire quels sont les paramètres pour lesquels une convergence est obtenue. L'étude du canal nous a montré que le piégeage en 3D et la focalisation en 2D étaient liées on peut donc s'attendre à obtenir des résultats similaires dans le cas du cône. En s'inspirant des études réalisées précédemment, ce coefficient peut être calculé par un algorithme de tracé de rayon.

C Construction d'un algorithme de tracé de rayon

C.1 Propagation du rayon

Les expériences réalisées dans le cadre de cette thèse ont lieu dans une cuve tronconique, qui est une version axisymétrique du trapèze (d, τ) . Une coupe dans un plan vertical, permet de retrouver un tel domaine, une première étape consiste donc à étudier la propagation dans un plan contenant l'axe de symétrie. Avec N et f_c constants, un faisceau d'ondes est représenté comme un rayon se propageant en ligne droite, faisant un angle $\theta = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\omega^2 - f_c^2}{N^2 - f_c^2}}$ avec l'horizontale.

Afin d'étudier la convergence des trajectoires dans ce dispositif expérimental donné, la construction d'un algorithme a été nécessaire. Un objectif pour le tester est de retrouver les résultats précédents. Contrairement à la version historique, qui s'appuyait sur le taux de convergence γ et un calcul géométrique des différentes réflexions en fonction des paramètres (d, τ) du trapèze (partie 2.A), le but était de construire un algorithme le plus simple possible.

Plusieurs solutions existent pour construire un tel algorithme, une première idée est d'utiliser une "tortue", qui avance d'une certaine distance à chaque pas de temps. Le domaine est alors défini par des relations entre les coordonnées, par exemple pour le trapèze

$$y = 0, \quad y = \tau, \quad x = -1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\tau}{(1-d)}(1-x). \quad (2.50)$$

À chaque instant, on vérifie que la tortue est encore dans le domaine, et si une limite est franchie alors on applique la formule de réflexion correspondante. Il est à noter que les bordures ne sont pas précisément définies. En effet, on doit choisir si l'on retient comme position de la réflexion l'étape précédant ou suivant le franchissement de la barrière. Ce phénomène implique un déplacement virtuel de la barrière et change ainsi la taille du domaine et par le même effet que deux positions initiales ne se réfléchissent pas sur les mêmes limites. Ces inconvénients sont directement liés au pas de la tortue, et donc du pas de temps utilisé. Pour que la détection de la bordure soit la plus précise possible, il faut donc un pas de temps petit, et alors, bien que plus intuitive, cette technique ne permet pas un grand nombre de réflexion par le temps de calcul important demandé.

Toutes les limites du domaine étant des segments de droite, une autre démarche peut être adoptée, chaque bordure est une droite représentée par un point \vec{p} et un vecteur \vec{q}

$$\vec{p}_1 = (-1, 0) \quad \vec{q}_1 = (2, 0) \quad (2.51)$$

$$\vec{p}_2 = (-1, 0) \quad \vec{q}_2 = (0, \tau) \quad (2.52)$$

$$\vec{p}_3 = (-1, \tau) \quad \vec{q}_3 = (1+d, 0) \quad (2.53)$$

$$\vec{p}_4 = (d, \tau) \quad \vec{q}_4 = (1-d, -\tau). \quad (2.54)$$

Cette définition est illustrée sur la figure 2.12. Le rayon est lui aussi représenté par un couple (point \vec{r} , vecteur \vec{c}), qui correspond au point de départ et à la vitesse de groupe. On calcule le point d'intersection entre chaque paroi i , $\vec{p}_i + \alpha_i \vec{q}_i$, et le faisceau $\vec{r} + t_i \vec{c}$ (schématisé figure 2.14(a)) :

$$\vec{p}_i + \alpha_i \vec{q}_i = \vec{r} + t_i \vec{c}. \quad (2.55)$$

Afin d'éliminer l'inconnue α_i et isoler t_i , on prends le produit vectoriel par \vec{q}_i

$$(\vec{p}_i - \vec{r}) \times \vec{q}_i = t_i \vec{c} \times \vec{q}_i. \quad (2.56)$$

Le terme de droite est nul si le rayon est aligné avec la paroi, c'est à dire si on est dans un cas de réflexion critique, cas qui n'est pas envisagé. Le terme de gauche est lui nul ou très petit si le point de départ du rayon est déjà sur la paroi. Dans ce cas, on élimine cette paroi pour la réflexion en

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

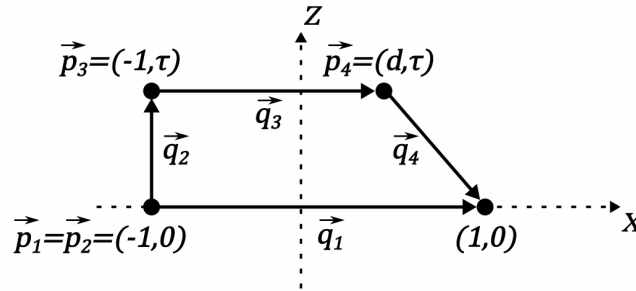


FIGURE 2.12 – Géométrie du trapèze (d, τ) défini pour le calcul numérique de la réflexion.

cours de calcul. Les vecteurs sont dans un espace à deux dimensions, leur produit vectoriel a donc une seule composante selon la troisième dimension \vec{e}_y , on peut donc écrire

$$t_i = \frac{((\vec{p}_i - \vec{r}) \times \vec{q}_i) \cdot \vec{e}_y}{(\vec{c} \times \vec{q}_i) \cdot \vec{e}_y}. \quad (2.57)$$

Il suffit alors de choisir le point d'intersection le plus proche du point de départ du rayon, le t_i le plus faible, et celui-ci est obtenu avec une précision qui est celle du langage de programmation choisi (la précision de l'arithmétique en *float* en python 3 dans notre cas, aux alentours de 10^{-16}). Il reste ensuite à appliquer la relation de réflexion associée à la paroi correspondante (horizontale, verticale, inclinée sur- ou sous-critique). \vec{r} est enfin réinitialisé à cette position et la vitesse de groupe mise à jour par la réflexion. On a ainsi une seule étape de 2×4 calculs et un tri par réflexion, au lieu de 4 comparaisons par pas de tortue dans le cas précédent.

C.2 Reproduction des résultats

L'algorithme présenté reproduit bien la focalisation des ondes internes et la formation d'attracteurs. Pour le tester plus en détail, il a été choisi de reproduire la figure historique du diagramme (d, τ) [MAAS et LAM 1995], toujours dans l'optique d'une approche plus directe. Pour cela, il faut calculer l'exposant de Lyapunov λ pour un grand nombre de couples (d, τ) , d'où l'utilité de la méthode rapide présentée précédemment. Soit (x_n, y_n) la suite des coordonnées des réflexions successives à partir d'une condition initiale et (x'_n, y'_n) à partir d'une autre. La distance e entre les trajectoires est calculée à chaque réflexion telle que

$$e_n = \sqrt{(x'_n - x_n)^2 + (y'_n - y_n)^2}. \quad (2.58)$$

Pour une distance initiale e_0 suffisamment petite, on peut écrire $e = e_0 \exp(\lambda n)$, avec n le nombre de réflexions. Pour une valeur des paramètres (d, τ) , on choisit une position initiale aléatoire (x_0, y_0) dans le domaine et on simule la trajectoire par tracé de rayon pendant 100 réflexions. On exécute le même programme avec des conditions initiales $(x_0 + \epsilon_x, y_0 + \epsilon_y)$ tel que $\epsilon_i > 10^{-3}$. La valeur de l'exposant de Lyapunov est ensuite obtenue selon l'équation (2.15) par un ajustement affine de e_n . La figure 2.13(a) montre le résultat de ce calcul pour 1024×1024 valeurs de (d, τ) . Dans ce cas précis, l'exposant de Lyapunov est toujours négatif ou nul, signe que l'on a toujours une convergence, plus ou moins rapide, vers un cycle limite plus ou moins long. La figure 2.13(a) est composée de pixels blancs lorsque $|\lambda(d, \tau)| > 10^{-2}$, c'est à dire lorsque la convergence est rapide, et noirs sinon. La ligne en pointillés noir marque les paramètres où la réflexion est critique.

Cet algorithme qui n'impose pas la focalisation géométrique présente les mêmes caractéristiques que la figure de référence produite par [MAAS et LAM 1995]. La partie inférieure gauche du diagramme est la zone des attracteurs ponctuels (réflexions super-critiques sur la pente qui

C. CONSTRUCTION D'UN ALGORITHME DE TRACÉ DE RAYON

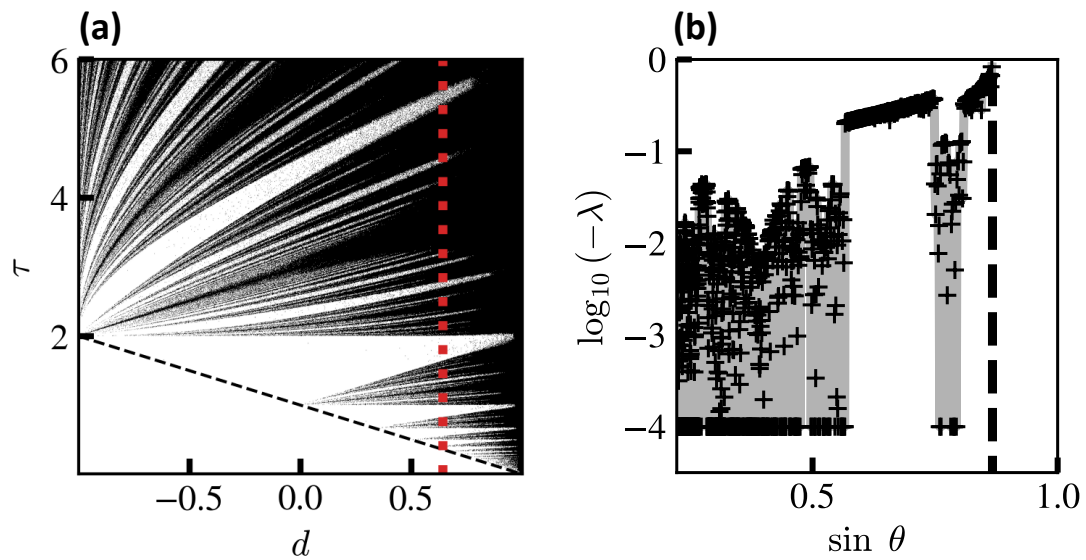


FIGURE 2.13 – (a) Logarithme de l'exposant de Lyapunov en fonction des paramètres (d, τ) . Chaque pixel est coloré blanc si $\log(-\lambda) > -2$ (convergence rapide) et noir sinon (convergence lente ou pas de convergence). Le programme simule 100 réflexions avec un écart initial de 10^{-3} . La ligne pointillée rouge verticale indique $d = 0.217$. La ligne tiretée noire $\tau = 1 - d$ indique la réflexion critique ($\theta = \alpha$). (b) Valeur de l'exposant de Lyapunov $\log(-\lambda)$ le long de la coupe verticale à $d = 0.217$. Chaque point est un calcul de tracé de rayon, pour une question de visualisation, la valeur minimale à été fixée à -4 . La ligne tiretée noire indique la réflexion critique.

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

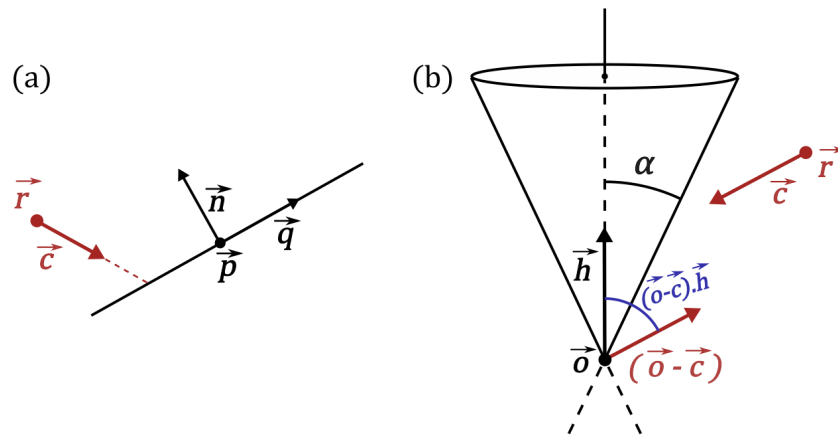


FIGURE 2.14 – (a) Définition des vecteurs pour le calcul numérique de la réflexion entre un rayon (\vec{r}, \vec{c}) et un plan de normale \vec{n} ou une droite définie par un point \vec{p} et un vecteur \vec{q} . (b) Même chose pour l'intersection avec un cône de sommet \vec{o} et de hauteur \vec{h}

focalisent les rayons dans le coin inférieur droit sous la pente, aux coordonnées $(1, 0)$). Le reste du diagramme est composé de langues d'Arnold en blanc, correspondantes aux orbites fermées courtes, soit les attracteurs à focalisation rapide.

Les paramètres géométriques L, h, α du réservoir expérimental sont fixes, donc seul θ peut varier dans notre protocole expérimental *via* la fréquence de forçage ω_0 , ce qui veut dire que l'on travaille à $d = 0.217$ fixé. Il est donc intéressant de regarder la variation de l'exposant de Lyapunov λ le long d'une cette coupe dans ce diagramme, représentée par une ligne pointillée rouge. Pour qu'elle soit exploitable afin de régler les expériences, on inverse le changement de coordonnées τ en $\sin \theta$. La figure 2.13(b) montre l'évolution de $\log |\lambda|$ en fonction de l'angle de propagation, elle indique deux zones principales où des attracteurs peuvent être attendus :

1. $0.582 < \sin \theta < 0.748$: attracteurs $(1,1)$, de courte longueur avec une réflexion sur la pente pour une réflexion en haut.
2. $0.809 < \sin \theta < 0.867$: attracteurs $(2,1)$, une réflexion sur la pente pour deux réflexion en haut.

Ces deux zones sont donc celles qui ont été utilisées dans les expériences, comme indiqué dans la section 1.C. Ce raisonnement a été fait dans un plan vertical contenant l'axe de symétrie, mais la situation hors de l'axe de symétrie et les rayons hors du plan sont encore à considérer.

C.3 Cas 3D

Le tracé de rayons en 3D se base sur le même principe, un rayon est représenté par un point d'application \vec{r} et une vitesse de groupe \vec{c} , mais les limites sont maintenant un cône d'ouverture α et les deux plans horizontaux.

a Intersection avec un cône

Comme illustré sur la figure 2.14(b), le cône est défini par son sommet \vec{o} et sa hauteur \vec{h} (vecteur unitaire). Un point du rayon $\vec{x} = \vec{r} + t\vec{c}$ est l'intersection avec le cône si le vecteur $\vec{x} - \vec{o}$ passant par \vec{o} fait un angle α avec la hauteur \vec{h} , on peut alors résoudre pour t

C. CONSTRUCTION D'UN ALGORITHME DE TRACÉ DE RAYON

$$(\vec{x} - \vec{o}) \cdot \vec{h} = \|\vec{x} - \vec{o}\| \cos \alpha \quad (2.59)$$

$$\left((\vec{r} + t\vec{c} - \vec{o}) \cdot \vec{h} \right)^2 = (\vec{r} + t\vec{c} - \vec{o})^2 \cos^2 \alpha \quad (2.60)$$

En développant, on obtient alors le polynôme du second degré :

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (2.61)$$

$$a = (\vec{c} \cdot \vec{h})^2 - c^2 \cos^2 \alpha \quad (2.62)$$

$$b/2 = (\vec{c} \cdot \vec{h}) (\vec{r} - \vec{o}) \cdot \vec{h} - (\vec{r} - \vec{o}) \cdot \vec{c} \cos^2 \alpha \quad (2.63)$$

$$c = \left((\vec{r} - \vec{o}) \cdot \vec{h} \right)^2 - (\vec{r} - \vec{o})^2 \cos^2 \alpha \quad (2.64)$$

On peut alors résoudre numériquement en déclinant selon le signe du discriminant Δ :

- $\Delta < 0$: Il n'y a pas de solution et donc pas d'intersection avec le cône, ce qui n'est *a priori* pas possible avec un rayon à l'intérieur de celui-ci.
- $\Delta = 0$ Il y a une seule intersection, impossible ici aussi (rayon tangent ou passant par le sommet).
- $\Delta > 0$ Il y a deux intersections, on choisit alors la solution positive avec la valeur absolue la plus faible⁵, qui est la première intersection avec le cône dans le sens du rayon.

b Intersection avec un plan

Le cas de l'intersection avec un plan est plus simple, c'est le cas où $\alpha = 90^\circ$: la hauteur \vec{h} est la normale au plan, \vec{n} , et \vec{o} est un point de référence appartenant au plan. L'équation est alors $(\vec{x} - \vec{o}) \cdot \vec{n} = 0$, soit

$$t = \frac{(\vec{r} - \vec{o}) \cdot \vec{n}}{\vec{c} \cdot \vec{n}}. \quad (2.65)$$

Dans notre cas, le dénominateur ne peut être nul que si le rayon se propage horizontalement. C'est un cas particulier que nous ne considérerons pas.

c Algorithme

On applique alors la même logique que dans le cas 2D : à chaque étape est calculée l'intersection avec chaque paroi et le déplacement t_i associé. La réflexion qui a effectivement lieu est celle qui a lieu en premier, soit le t_i plus faible⁶, qui est sélectionné. Les relations de réflexion correspondantes sont alors appliquées, et on peut répéter cette procédure afin d'obtenir une trajectoire de longueur souhaitée.

C.4 Cas d'un canal

Un test de cet algorithme est de regarder l'évolution d'un rayon dans un canal avec un plan incliné dans une situation identique à celle étudiée par [PILLET et al. 2018], présentée dans la section 2.B.2. La figure 2.15(a) montre le trajet d'un rayon se propageant dans un canal invariant par translation selon \vec{e}_x comportant un plan incliné à 20° par rapport à l'horizontale reprenant les paramètres géométriques des études précédentes [PILLET et al. 2018]. Conformément à ce qui a été montré, on a ici aussi un piégeage dans un plan (\vec{e}_y, \vec{e}_z) et formation d'un attracteur 2D⁷. La

5. Toujours avec une marge de sécurité prise au-delà du seuil de précision de calcul du langage

6. *Idem*

7. Comme dit dans la partie 2.B.2, ce n'est pas à proprement parlé un attracteur tridimensionnel mais une collection d'attracteur 2D dont l'un est choisi par les conditions initiales.

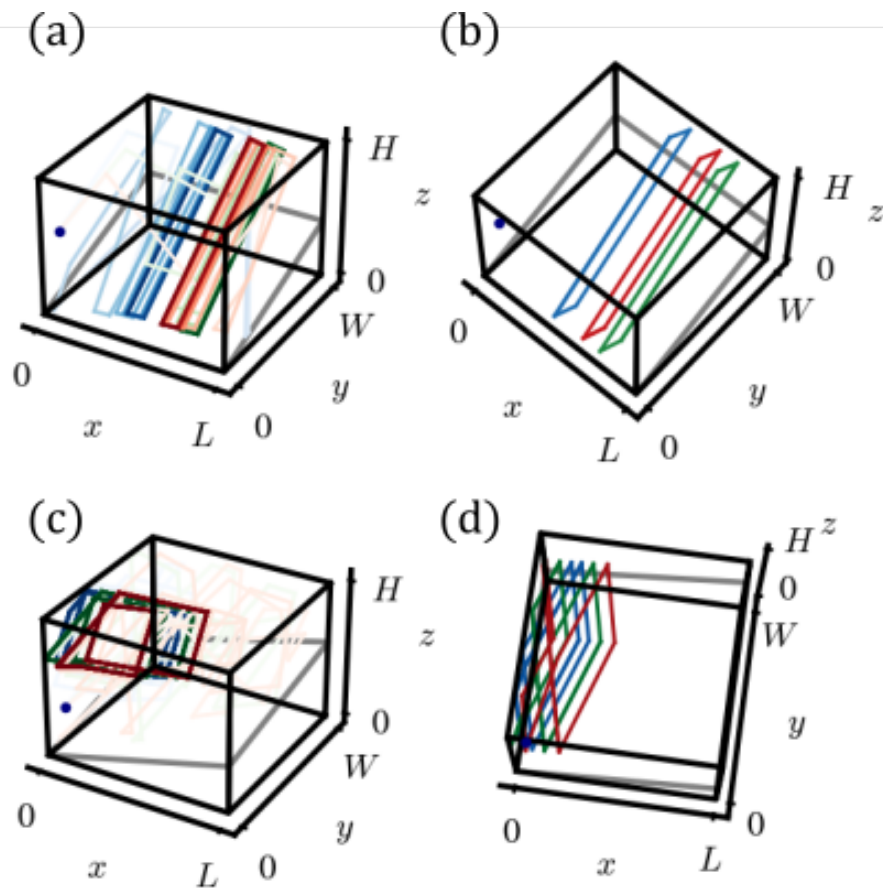


FIGURE 2.15 – (a) Tracé de rayon dans un canal de longueur $L = 1000$, largeur $W = 400$ et hauteur $H = 350$ avec un plan incliné à $\alpha = 20^\circ$ pendant $N = 40$ réflexions. Trois rayons partent du même point indiqué par un point bleu avec un angle θ tel que $\sin \theta = 0.57$ et un angle azimutal initial ϕ_0 de 70° (bleu), 40° (vert) et 10° (rouge). La saturation de la couleur est donné par le numéro de la réflexion (claire au début, foncé à la fin). (b) Cycles limites des trois rayons. (c) et (d) Idem dans le cas de la géométrie double pente. $L = 1000$, $W = 400$, $H = 650$, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 12.5^\circ$, $\sin \theta = 0.68$. La convergence et le piégeage étant plus longs, les trajectoires sont longues de $N = 100$ réflexions.

figure 2.15(b) montre que le plan de piégeage dépend de la condition initiale. On valide ainsi le principe de fonctionnement de cet algorithme.

D Prédiction en 3D

D.1 Double pente

a Analyse de la situation

La géométrie "canal" présentée précédemment possède une propriété forte qui est l'invariance par translation, qui permet de prédire simplement la convergence vers un attracteur. Une solution pour casser cette propriété est d'ajouter un second angle β dans la seconde direction, ainsi l'équation du plan s'écrit $z = y \tan \alpha + x \tan \beta$ (voir figure 2.16). Par ce procédé, le gradient de la pente $\vec{\nabla} S$ n'est plus contenu dans les plans (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , (\vec{e}_x, \vec{e}_z) ou (\vec{e}_y, \vec{e}_z) défini par les parois. Lors d'une réflexion sur la pente, la vitesse de groupe tend à s'aligner avec la pente, puis avec une paroi, puis avec la pente, etc. Le procédé ne semble plus pouvoir converger vers un attracteur 2D dans un plan. Il ne reste alors plus que la possibilité de converger vers un attracteur localisé proche des parois qui compensera cette alternance. Cette possibilité est confirmée par le tracé de rayon (figure 2.15(c)), où le tracé de rayons converge vers une structure qui n'est pas piégée dans un plan. Cette fois, quelle que soit la condition initiale, la structure attractive est localisée près de la paroi comme illustré figure 2.15(d), bien que les trois conditions initiales ne soient pas attirées par le même attracteur.

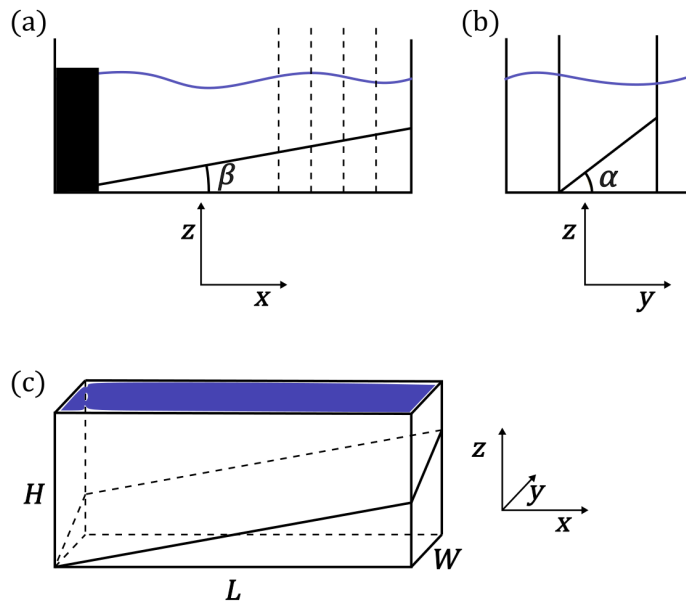


FIGURE 2.16 – Schéma de la mise en oeuvre expérimentale de la géométrie double pente. (a) Vue dans le plan longitudinal (x, z) montrant le nouvel angle β . Le rectangle noir marque la position du générateur, les lignes traitillées indiquent la position des plans laser utilisés lors de l'expérience. (b) Vue dans un plan transverse (y, z) , semblable à la géométrie canal, montrant l'angle α et les deux parois verticales installées pour fixer la pente. (c) Vue en 3D, de la cuve de longueur L , hauteur H et largeur W .

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

b Comparaison expériences-prédiction-simulation

Le stage de V. Audoly co-encadré avec S. Joubaud pendant le printemps 2021 a été l'occasion de tester expérimentalement cet effet de localisation des attracteurs. Les expériences ont été réalisées dans une cuve rectangulaire de 1.2 m de long et 80 cm de large similaire à celle utilisée pour le canal dans laquelle a été placée une pente "3D" ayant pour angles $\alpha = 15^\circ$ et $\beta = 4.5^\circ$, ainsi que deux parois verticales adaptées à la pente réduisant la largeur à 50 cm, illustrée sur la figure 2.16. Les expériences ont été réalisées pour des ondes internes de gravité dans de l'eau stratifiée par salinité ($N \sim 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $f_c = 0$). La vitesse est mesurée par *PIV* dans un plan à une distance ℓ de la paroi opposée au générateur, ces plans sont indiqués sur la figure 2.16(a). La figure 2.17 présente le champ de vitesse instantané selon \vec{e}_y filtré à la fréquence de forçage $\omega_0/N = \sin \theta = 0.43$. Le champ de vitesse n'est plus invariant selon la direction \vec{e}_x , ce qui indique que l'on a effectivement un effet 3D.

Pour comparer, la figure 2.18 présente un résultat de simulation directe (DNS) qui a inspiré cette expérience. Pour des paramètres $L = 1$, $H = 0.65$ et $W = 0.35$, la pente est ici située au-dessus (axe \vec{e}_z inversé par rapport aux expériences) avec $\alpha = 20^\circ$ et $\beta = 12.5^\circ$ et des ondes inertielles sont forcées telles que $\sin \theta = 0.68$ (voir la partie expérimentale 1.C). Cette géométrie qui avait été utilisée par les tracés de rayon de G.Pillet, est différente de celle utilisée en stage suite à des difficultés techniques. Les simulations montrent elles aussi un comportement qui n'est plus invariant selon \vec{e}_x .

Cependant, la comparaison entre les deux s'arrête à cette brisure d'invariance. En effet, le phénomène de localisation, assez marqué sur la figure 2.18, avec un champ de vitesse faible à une distance de 50 cm du bord n'est pas présent dans l'expérience. L'explication la plus évidente est la différence de géométrie entre les deux situations. L'angle β étant faible dans le cas expérimental, la localisation serait moins marquée. De plus, il est à noter que dû à cet angle, chaque coupe verticale est un trapèze différent avec des paramètres (d, τ) différents. Il se peut donc que l'évolution que l'on observe, que ce soit expérimentalement ou dans la simulation, est un effet d'absence de convergence 2D, ou de forme différente due à une évolution de ces paramètres plutôt qu'à une localisation sur une paroi. Des expériences et simulations approfondies seraient nécessaires afin de séparer les deux hypothèses.

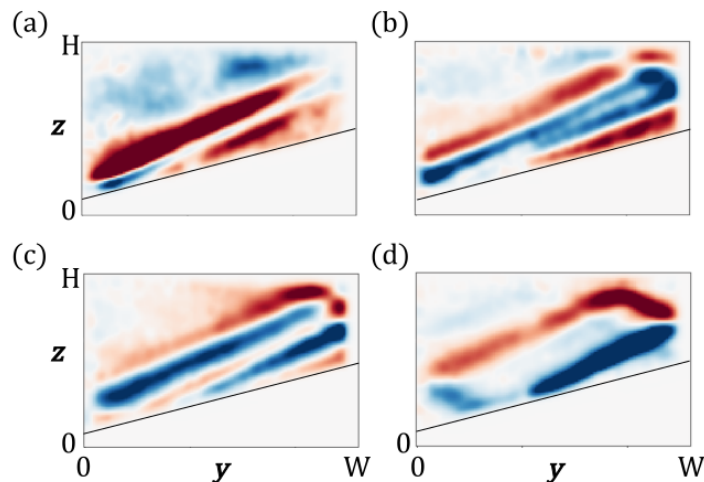


FIGURE 2.17 – Champ de vitesse instantané v_y dans la géométrie canal à double angle $\alpha = 15^\circ$ et $\beta = 4.5^\circ$, pour des ondes internes de gravité ($N \sim 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $f_c = 0$) à une distance de 10 cm (a), 18.5 cm (b), 28 cm (c) et 41 cm (d) de la paroi $x = L$. Le champ est filtré à la fréquence de forçage $\omega_0/N = 0.43$. Extrait de [AUDOLY 2021].

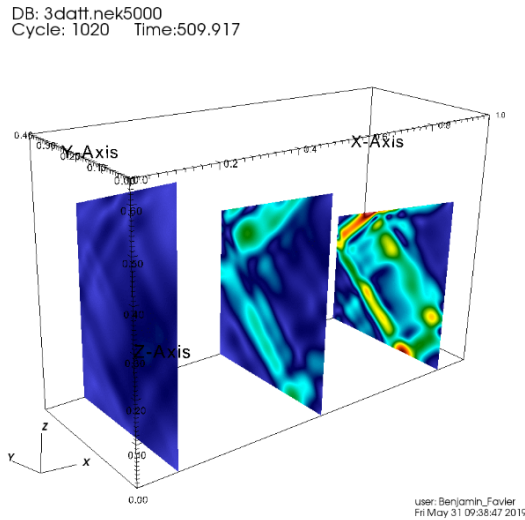


FIGURE 2.18 – Coupes verticales de l’amplitude de la vitesse pour une géométrie définie par $L = 1$, $H = 0.65$ et $W = 0.35$, avec $\alpha = 20^\circ$ et $\beta = 12.5^\circ$. L’axe \vec{e}_z est inversé par rapport à la figure 2.18. Des ondes inertielles sont forcées telles que $\sin \theta = 0.68$. Figure communiquée par Benjamin Favier.

D.2 Cuve axisymétrique

Tout le travail effectué auparavant a servi de test et de validation pour finalement étudier la géométrie d’intérêt de cette partie⁸ : La cuve axisymétrique.

L’algorithme présenté précédemment est utilisé pour simuler la propagation d’un rayon dans la géométrie expérimentale. Il est à noter qu’une transformation des coordonnées aurait été possible dans ce cas, afin d’adimensionner le problème une fois encore avec des paramètres similaires à d et τ . Cependant, le but étant d’étudier la possibilité de formation d’un attracteur dans cette configuration précise, les travaux présentés se sont concentrés sur les paramètres présentés dans la partie 1.C.

La figure 2.19 présente les conditions initiales utilisées pour l’algorithme projetées horizontalement et verticalement. Le rayon part de la position $(0, y_0, z_0)$, dans la direction \vec{c}_g définie équation 2.39. Les figures 2.20(a) et 2.20(b) illustrent la propagation de ces rayons, elles représentent les projections dans les plans (xy) et (xz) d’une trajectoire ayant pour condition initiale :

$$(x_0, y_0, z_0, \sin \theta, \phi_0) = (0, 0.93r_0, 2h/3, 0.61, 50^\circ) \quad (2.66)$$

où ϕ est la composante azimutale du rayon définie par $\cos \phi = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (voir figure 2.19). Avec ces paramètres, une convergence vers un attracteur $(1, 1)$ est clairement observée dans la coupe verticale. D’après la notation introduite précédemment, la dénomination devrait être $(2, 1)$ mais le choix a été fait du fait de la symétrie du problème de conserver la dénomination utilisée dans le cadre du trapèze. Ainsi un attracteur $(1, 1)$ dans cette géométrie est composé de deux attracteurs $(1, 1)$ du trapèze symétrique par rapport au centre de la cuve. La vue horizontale de la figure 2.20(a) montre que cette convergence vers un attracteur 2D se fait dans un plan qui contient l’axe de symétrie et un diamètre du cône.

Une manière de mesurer quantitativement la convergence vers un plan vertical est de tracer l’évolution de χ en fonction du nombre n de réflexions sur la pente. Les réflexions sur la base et le plateau, des surfaces verticales, ne sont pas prises en compte car neutres pour χ . La figure 2.21(a)

8. et de la majorité de ma thèse

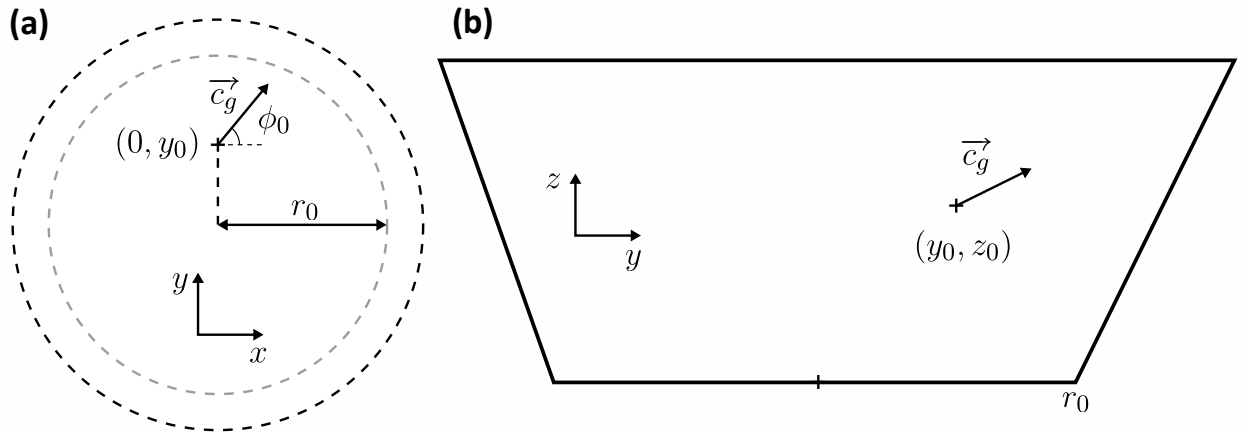


FIGURE 2.19 – Condition initiale de la simulation par tracé de rayon de la propagation dans le dispositif expérimental. r_0 est le rayon de la base inférieure du frustum représentée en gris, la base supérieure est représentée en noir. Le rayon, de direction \vec{c}_g avec un angle horizontal ϕ_0 (voir équation 2.39) part de la position $(0, y_0, z_0)$. (a) Projection horizontale. (b) Projection verticale.

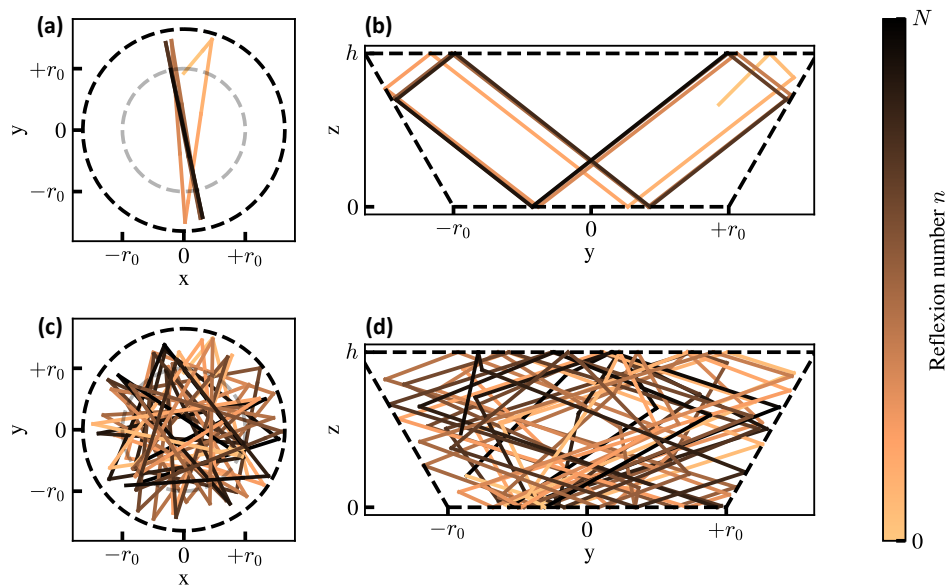


FIGURE 2.20 – (a) Projection horizontale d’une trajectoire dans l’espace 3D pour une onde gravito-inertielle d’angle $\sin \theta_0 = 0.61$ dans le dispositif expérimental, calculée par un algorithme de tracé de rayon à partir des condition initiales (2.66). Le cercle grisé est la base inférieure du cône, le cercle noir la base supérieure. (b) Projection verticale (dans le plan (y, z)) de la même trajectoire (c) et (d) sont identiques mais pour un angle $\sin \theta_0 = 0.292$.

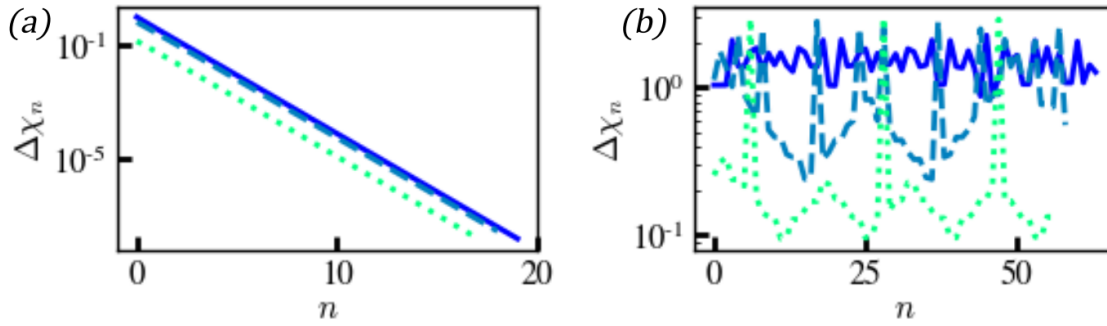


FIGURE 2.21 – (a) Évolution de la différence d’angle azimutal $\chi_n^r - \chi_n^i$ en fonction de numéro n de la réflexion pour $\sin\theta = 0.61$ trois direction initiales différentes ϕ_0 (0° trait plein; 40° traitillée et 80° pointillée). (b) Même graphe pour $\sin\theta = 0.292$.

est un tracé en échelle semi-logarithmique de $\Delta\chi$ pour les mêmes paramètres initiaux que précédemment (2.66), ϕ_0 mis à part qui prend les valeurs de 0° , 40° , et 80° . La décroissance est clairement exponentielle, ce qui est en accord avec le modèle naïf présenté eq 2.49.

Au contraire, dans le cas où $\sin\theta = 0.292$ représenté sur la même figure, aucune décroissance n’est observée. De plus, selon la direction azimutale initiale choisie, l’état final est différent, et aucun cycle limite ne semble se dessiner. Le problème du modèle (équation 2.49) est qu’il ne considère que des réflexions telles que $v_z < 0$ à la réflexion sur la pente, et donc $\gamma_\phi < 1$. Dans le cas où $v_z > 0$, la réflexion est dépiégeante ($\gamma_\phi > 1$), ce qui éloigne de la convergence dans le plan xy , et défocalisante dans le plan vertical. On obtient alors un cycle limite comme dans [MAAS 2005] ou dans ce cas, un comportement qui semble chaotique, comme montré sur les figures Fig. 2.20(c) et 2.20(d).

Pour étudier plus en détails l’effet de l’angle de propagation θ , dans l’esprit du diagramme (d, τ) , Λ_ϕ , pente de la droite qui caractérise la vitesse de convergence azimutale, est calculée pour 1000×90 valeurs de $(\sin\theta, \phi_0)$. La figure 2.22(b) montre l’évolution de $\log|\Lambda_\phi|$ en fonction de ces variables $\sin\theta$ et ϕ_0 . Une valeur haute (proche de 0) indique une convergence rapide, et une couleur noire indique au contraire une convergence lente ou pas de convergence. La ligne droite à $\sin\theta = 0.867$ indique la réflexion critique qui sépare les attracteurs de coin (cas sur-critique) et le cas sous-critique. Les deux zones claires où la convergence est la plus rapide sont exactement les mêmes que lors de la formation d’attracteur dans un domaine 2D trapézoïdal. De même, les zones autres bandes de convergences sont les langues d’Arnold associées aux attracteurs de (m, n) plus élevés de la figure 2.13, reproduite ici (figure Fig. 2.22(a)). Il apparaît de cette comparaison un mécanisme de convergence couplée dans les plans verticaux et horizontaux. La formation d’un attracteur dans le plan xz par une réflexion focalisante sur la pente assure une réflexion piégeante dans le plan xy et vice-versa et donc une convergence dans les deux plans.

Ce résultat implique que les prédictions faites avec le modèle 2D restent valides et seront utiles pour obtenir un attracteur : une onde forcée à ω_0 , telle que $\sin\theta$ est dans la zone (1, 1) ou (2, 1), par le plateau qui impose un mouvement en tout point (x_0, y_0) , sera piégée et focalisée sur une infinité d’attracteurs identiques dans tous les plans verticaux qui correspondent à un diamètre du domaine. On s’attend ainsi à un cycle limite invariant par rotation formant un "anneau rectangulaire".

a Influence des conditions initiales

Cette étude ne présente pas de résultat concernant la dépendance de la position du plan de convergence en fonction des conditions initiales. La figure 2.22(b) suggère une faible dépendance

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

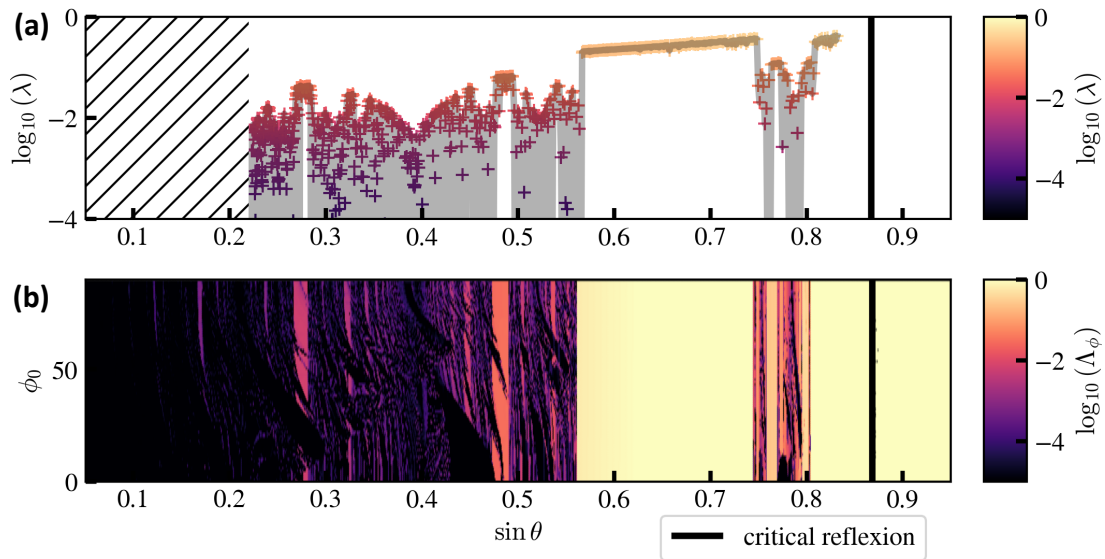


FIGURE 2.22 – (a) Reproduction de la figure 2.13(b), valeur de l'exposant de Lyapunov dans le cas 2D en fonction de $\sin \theta$. Les points résultant du tracé de rayon sont colorés en fonction de la valeur de $\log -\lambda$. La région rayée est la région $\tau > 6$ non explorée, et la ligne noire indique la réflexion critique. (b) Valeur de $\log \Lambda_\phi$ en fonction $\sin \theta$ l'angle de propagation et ϕ_0 l'angle azimutal initial.

en ϕ_0 . Pour aller plus loin, il est possible de calculer l'angle ϕ_∞ que fait le plan de piégeage en fonction des conditions initiales (y_0, ϕ_0) , voir figure 2.19. D'après nos résultats, que montre la figure 2.23(a) celle-ci est plutôt continue mais présente des changements brusques, lorsque la première réflexion passe de piégeante à dépiégeante, mais un piégeage est toujours observé⁹. En cela nos résultats sont proches de la littérature [MAAS 2005] qui étudie le cas d'une paraboïde de révolution comme le montre la figure 2.23(b) qui donne la valeur de ϕ_∞ en fonction des conditions (x_0, ϕ_0) . Cependant, dans cet article qui reprend et étend ses travaux sur les attracteurs, L. R. Maas décrit même la possibilité de ne pas converger pour certains couples (x_0, ϕ_0) , le rayon tournant autour du cône. Cet effet n'a pas pu être reproduit dans nos simulations. Une hypothèse met en cause différence entre les géométries, en effet, la parabole n'a pas une pente constante, ce qui permet pour un rayon d'être sur-critique et sous-critique selon la cote z à laquelle a lieu la réflexion, ce qui pourrait empêcher le piégeage.

⁹. On note encore une fois que ce n'est pas un "vrai" attracteur 3D, c'est plutôt un structure composée d'une infinité d'attracteurs 2D par rotation.

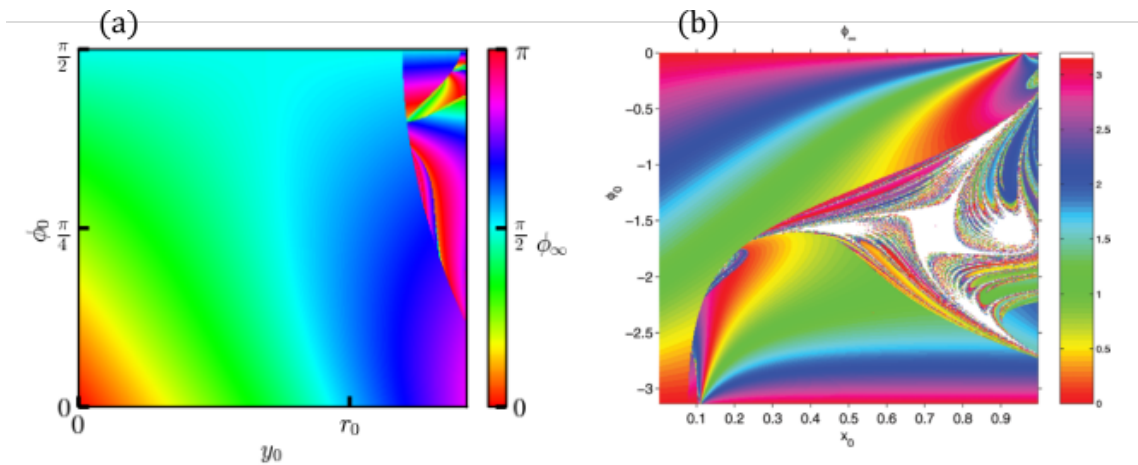


FIGURE 2.23 – (a) ϕ_∞ en fonction des conditions (y_0, ϕ_0) dans le cas du cône tronqué (géométrie expérimentale). (b) Extrait de [MAAS et LAM 1995]. ϕ_∞ en fonction des conditions (x_0, ϕ_0) dans le cas de la paraboïde de révolution telle que $\tau = 0.68$.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de montrer comment la réflexion des ondes internes peut être utilisée pour former des attracteurs, structures sur lesquelles se concentre l'énergie. En développant un algorithme de tracé de rayon, nous avons pu retrouver des résultats bien établis en deux dimensions et surtout étendre l'étude à la géométrie tronconique, géométrie d'intérêt dans cette thèse. Le piégeage en trois dimensions est lié au caractère focalisant en 2D de la réflexion des ondes internes. Il y a ainsi un mécanisme couplé de convergence qui, dans une certaine gamme de paramètres, fait converger tout rayon vers un plan (e_r, e_z) avec un attracteur (m, n) dans ce plan. Nous avons donc maintenant tous les ingrédients (et les valeurs des paramètres) pour pouvoir réaliser les expériences.

CHAPITRE 2. ATTRACTEURS : TRACÉ DE RAYONS

CHAPITRE

3

ATTRACTEURS AXISYMÉTRIQUES :
RÉGIMES LINÉAIRE ET
NON-LINÉAIRE



Attracteurs axisymétriques, vue d'IA

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

L'étude de la géométrie par tracé de rayons a montré la possibilité de former des attracteurs. Une grande partie de ma thèse a consisté à mettre en place l'appareil expérimental puis à les étudier, à faible amplitude dans un premier temps pour éviter les effets non-linéaires et à plus haute amplitude pour les déclencher dans un second temps. La cuve tronconique pouvant être remplie avec un fluide stratifié et/ou mise en rotation, il a été possible d'étudier les ondes internes de gravité, les ondes inertielles ou les ondes gravito-inertielles, combinaison des deux. Cette partie présente les résultats expérimentaux obtenus avec ce système, les paramètres utilisés sont donnés dans le tableau 3.1.

N (rad · s ⁻¹)	f_c (rad · s ⁻¹)	$\sin \theta$	a_0 (mm)
0.0	0.0	/	0, 2, 4, 5, 8, 9, 10
0.0	±1.052	0.31, 0.64, 0.66, 0.68, 0.7, 0.72, 0.75, 0.79, 0.85, 0.92	1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10
0.0	-0.838	0.64	0, 1, 2, 3, 5, 10
0.0	-0.838	Impulsion	10
0.63-0.81	0.0	0.32, 0.49, 0.57, 0.6, 0.64, 0.74, 0.82, 1.5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
1.031	0.0	0.48, 0.61-0.68, 0.72, 0.84	1
0.73	0.0	Impulsion	10
0.77	0.0	0.64	Augmentation de 0 à 10
0.78	0.040	0.64, 0.61	1, 2
0.76	0.076	0.55, 0.61, 0.64	0, 2, 4, 5, 6, 8
0.76	0.152	0.60, 0.63, 0.80	0, 2, 4, 6, 9, 10
0.78	-0.392	0.85, 0.61, 0.41, 0.22	2, 6, 9
0.78	-1.566	0.69, 1.1	1, 2
1.031	0.344	0.58, 0.64-0.68	1, 3, 6, 9

TABLE 3.1 – Paramètres expérimentaux : pulsation de flottabilité N , le paramètre de Coriolis $f_c = 2\Omega$ (les valeurs sont positives pour une rotation horaire), $\sin \theta$ l'angle de propagation donné par la fréquence de forçage et a_0 l'amplitude du forçage.

A Régime linéaire

A.1 Forçage constant

Pour rappel (voir section 1.C.4), l'énergie est injectée dans le système par un plateau en plexiglass qui épouse la forme du haut du cône tronqué de rayon $R(h) = 88 \pm 2$ mm. Deux pistons permettent d'imposer un mouvement de précession au plateau et le forçage peut être décrit en coordonnées cylindriques (r, φ) en $z = h$ par

$$a = a_0 \cdot (r/R) \cdot \cos(\omega_0 t - m\varphi), \quad (3.1)$$

le déplacement vertical du plateau avec a_0 l'amplitude de forçage et $m = -1$ le nombre azimutal, la précession du plateau est horaire.

a Ondes internes de gravité ($N \neq 0, f_c = 0$).

Dans le cadre d'une expérience sur les ondes internes de gravité, une fois la cuve remplie avec la méthode présentée dans la partie 1.C.2 afin d'obtenir une stratification linéaire, et N mesurée avec une sonde conductimétrique, la période de forçage T_0 est choisie au milieu de la région (1,1)

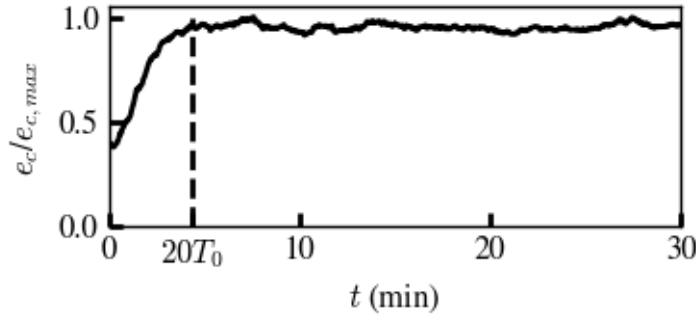


FIGURE 3.1 – Énergie cinétique e_c moyennée sur l'ensemble de la cuve et sur 5 périodes de forçage, en fonction du temps. Le forçage est constant à $a_0 = 1$ mm et à $\omega_0 = 0.486$ rad \cdot s $^{-1}$ dans un milieu stratifié ($f_c = 0$, $N = 0.76$ rad \cdot s $^{-1}$). La ligne pointillée indique pour référence $20T_0 \simeq 4$ min 30. L'énergie est normalisée par son maximum.

du diagramme (voir figure 2.22)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{N \sin \theta_0}. \quad (3.2)$$

Par exemple, pour les figures 3.1 et 3.2, les paramètres sont $N = 0.76 \pm 0.05$ rad \cdot s $^{-1}$, et donc une période de forçage $T_0 = 12.93$ s. Il faut aussi ajouter que cette expérience a été réalisée avec une faible amplitude de forçage, i.e. $a_0 = 1$ mm. La figure 3.1 montre que l'énergie cinétique

$$e_c = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_z^2), \quad (3.3)$$

croît à l'allumage du générateur, puis atteint un palier. Le système atteint le régime stationnaire en un temps d'environ 20 périodes de forçage, soit environ 5 min. Il est à noter que l'énergie est moyennée (ou intégrée) sur l'ensemble de la cuve, puis il lui a été appliqué une moyenne glissante sur 5 périodes de forçage pour gommer la variation au sein d'une période.

La figure 3.2 montre le champ de vitesse v_x dans un plan vertical passant par le centre de la cuve, dans le régime stationnaire après environ $100T_0$. Les quatre panneaux ont une différence de phase relative de 0 , $\pi/2$, π et $3\pi/2$. Le champ de vitesse fait apparaître clairement deux parallélogrammes semblables aux attracteurs 2D présents dans la géométrie trapèze présenté dans le chapitre 2. Sur la figure 3.2, le cycle limite calculé par un algorithme de tracé de rayon (voir section 2.C) a été superposé en traitillé noir. Les deux structures (champ de vitesse et prédiction) se superposent parfaitement, ce qui confirme le piégeage et la focalisation donnés par la technique de tracé de rayon, au moins dans le cas linéaire.

Afin d'une part de maximiser le recouvrement, et d'autre part de vérifier la valeur de N indirectement, le tracé de rayon présenté n'utilise pas la valeur expérimentale, mesurée à $\sin \theta_0 = 0.64$. En effet, comme cela est montré figure 3.3(a), la correspondance avec la répartition de l'énergie cinétique $e_c = (v_x^2 + v_z^2)/2$ n'est pas bonne. La méthode retenue compare un tracé obtenu par tracé de rayon pour plusieurs valeurs de $\sin \theta$ à l'énergie cinétique e_c moyennée sur dix périodes à l'aide d'une grandeur quantitative qui est l'intégrale de e_c le long de la trajectoire du cycle limite, que l'on appellera corrélation

$$C = \int_{\text{attracteur}} \langle e_c \rangle_{5T_0} d\ell. \quad (3.4)$$

En effet, si le cycle limite se superpose bien à l'attracteur obtenu expérimentalement, cette quantité est grande. La figure 3.3(b) montre la première étape, qui la calcule sur un échantillon d'angle entre 0 et $\pi/2$. La valeur de $\sin \theta$ avec le meilleur recouvrement est représenté sur la figure 3.3(c) et on constate bien un meilleur accord. On peut ensuite procéder à des étapes de raffinement

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

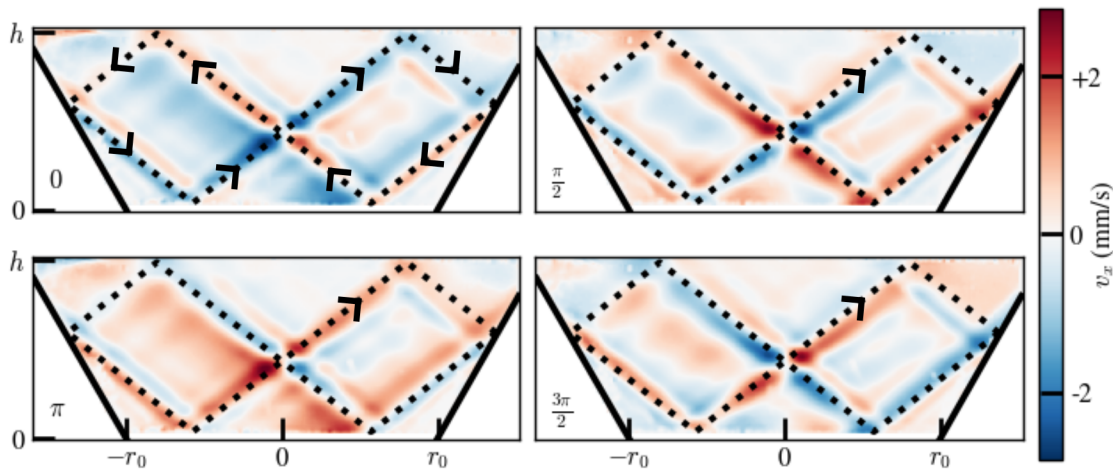


FIGURE 3.2 – Instantanés du champ de vitesse horizontal v_x , dans un plan vertical passant par le centre de la cuve après environ $100T_0$ de forçage constant à $a_0 = 1$ mm d’une onde interne de gravité ($f_c = 0$, $N = 0.76 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), forcée à $\omega_0 = 0.486 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, telle que $\sin \theta = 0.64$. La phase relative par rapport à la première image est indiquée dans le coin inférieur gauche. Les lignes épaisses sont les limites de la cuve tronconique. La ligne traitillée est le cycle limite calculée par l’algorithme de tracé de rayon en maximisant le recouvrement avec l’énergie cinétique (voir fig 3.3). Les flèches indiquent le sens de parcours.

pour confirmer et préciser le résultat. En choisissant le recouvrement maximum, on obtient le tracé présenté sur la figure 3.2 qui correspond à une valeur de $\sin \theta_{exp} = 0.617$. La valeur de la période étant connue au centième près, l’erreur vient principalement de la mesure de la pulsation de flottabilité N . On peut d’ailleurs remarquer avec le champ de vitesse que la stratification est bien linéaire en constatant que les branches de l’attracteur sont bien des segments de droite. Cette mesure indirecte de la stratification donne un erreur relative sur l’angle $(\theta_{exp} - \theta_0)/\theta_0$ de 3.5%, comparable à ce qui est attendu pour N .

La figure 3.2 montre bien une augmentation de l’amplitude de la vitesse lors de la réflexion sur la pente inclinée, comme attendu de la loi de réflexion et déjà montré en 2D. La principale différence observée par rapport aux études sur le sujet [DAVIS 2019] vient de l’interaction au centre de la cuve, qui peut être vue à la fois comme une réflexion sur l’axe de symétrie et comme un croisement de deux faisceaux d’onde. Il apparaît en effet sur la figure 3.2 une augmentation de l’amplitude des bords vers le centre de la cuve. Cet effet est néanmoins attendu du fait de la conservation de l’énergie dans un domaine cylindrique. Il est aussi observé dans ce régime un noeud de vitesse radiale sur l’axe de réflexion.

b Ondes inertielles ($N = 0$, $f_c \neq 0$)

La figure 3.4 montre la même chose pour une onde inertielle de paramètre $f_c = -1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (et $N = 0$) forcée à ω_0 tel que $\omega_0/f_c = 0.768$ et donc $\sin \theta_0 = \sqrt{1 - (\omega_0/f_c)^2} = 0.64$, au milieu de la zone des attracteurs (1,1). Là aussi le cycle limite calculé par l’algorithme de tracé de rayon prédit bien l’attracteur observé expérimentalement. On note dans ce cas que la largeur des branches de l’attracteur est plus grande, et que l’on observe une forte augmentation de l’amplitude de la vitesse à l’approche de l’axe de symétrie/rotation.

Les coupes horizontales présentées figure 3.5 du champ de vitesse horizontal filtré autour de la fréquence de forçage montrent que la structure est 2π -périodique dans la direction azimutale. Cette périodicité correspond au nombre azimutal $m = -1$ du forçage utilisé. La colonne de gauche

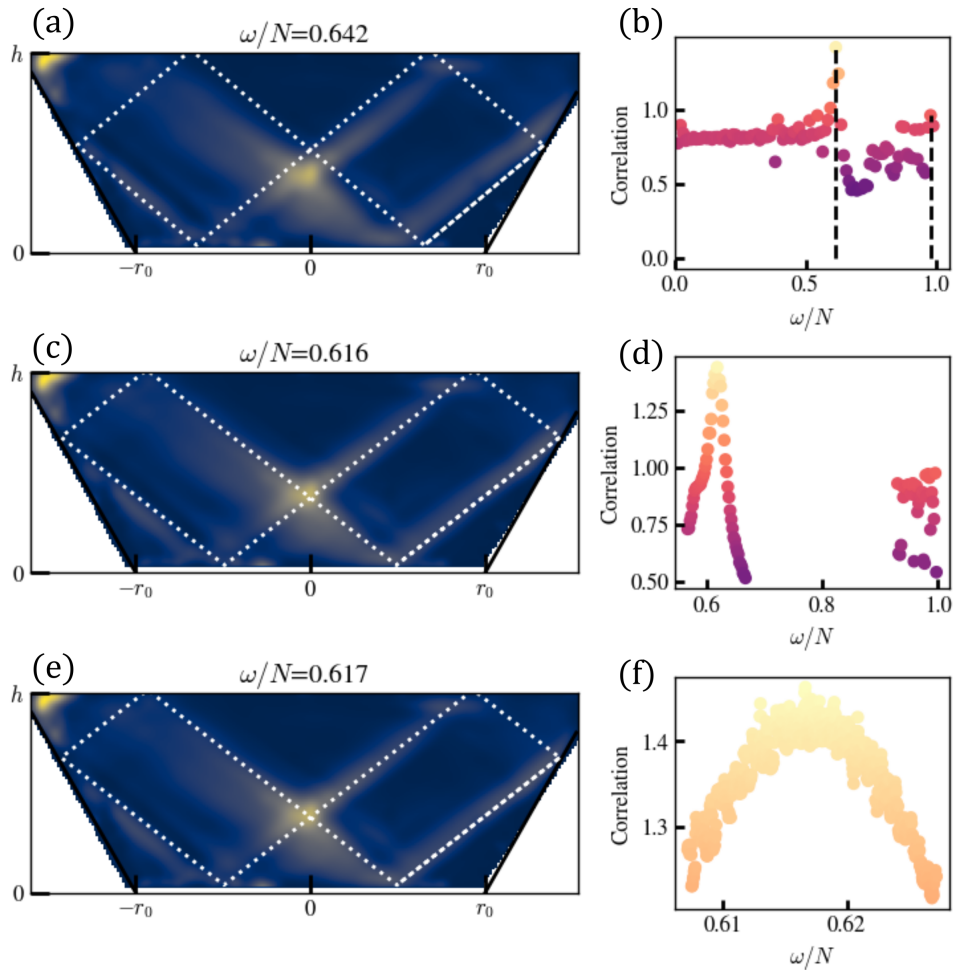


FIGURE 3.3 – (a) Énergie cinétique moyennée sur 10 périodes de forçage dans le régime stationnaire de la figure 3.2. En pointillés blancs est superposé l’attracteur prédit par le cycle limite pour $\sin \theta = 0.64$. (b) Corrélation (intégrale de l’énergie cinétique sur la trajectoire du cycle limite calculé par tracé de rayon) en fonction de $\omega/N = \sin \theta$. Les traits verticaux sont les deux maxima locaux les plus hauts. (c) et (e) Même chose qu’en (a) pour $\sin \theta = 0.616$ et $\sin \theta = 0.617$, maximum de la corrélation après une étape et trois étapes de raffinement. (d) et (f), corrélation calculée lors des étapes de raffinement successives.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMÉTRIQUES

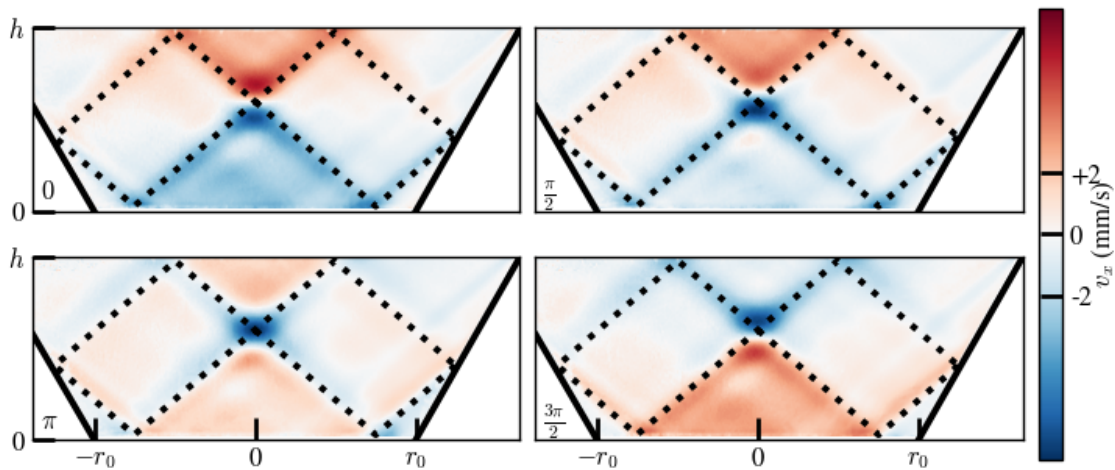


FIGURE 3.4 – Identique à la figure 3.2, pour une onde inertielle d’amplitude $a_0 = 2$ mm, de paramètre $f_c = 1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($N = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), et de fréquence $\omega_0/f_c = 0.767$ telle que $\sin \theta = 0.64$.

donne le champ de vitesse radiale v_r et la colonne de droite le champ de vitesse azimuthal v_ϕ , et chaque ligne est une coupe dans un plan à une hauteur $z = 15$ cm, 20 cm et 25 cm (de bas en haut) du fond de la cuve. Comme attendu v_r et v_ϕ sont déphasées de $\pi/2$ qui correspond à un mouvement horizontal du point bas du forçage au point haut. La structure de l’attracteur tridimensionnel est une collection continuellement déphasée d’attracteurs 2D. Ainsi la direction de la spirale est donnée par la vitesse de phase, qui est dirigée vers le centre si $z > 20$ cm et vers l’extérieur si $z < 20$ cm.

La figure 3.6 montre que toute la structure pivote dans le sens horaire en suivant le forçage, que l’on soit au-dessus ou en dessous de la réflexion. La réflexion sur l’axe se retrouve bien aux alentours de $z = 20$ cm comme on le retrouve sur la figure 3.4 (on rappelle que $h \simeq 30$ cm). On peut aussi observer sur la coupe à la cote $z = 25$ cm la branche de l’attracteur suivant la réflexion sur le plateau. Comme attendu, cette réflexion est en phase avec la branche partant du centre. La branche située entre l’axe et la réflexion en bas peut être observée sur la coupe à la cote $z = 15$ cm, mais à une amplitude plus faible.

c Ondes gravito-inertielles ($N \neq 0, f_c \neq 0$)

Pour observer les cas intermédiaires, la cuve a été remplie avec un fluide stratifié tel que $N = 0.78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, puis mis en rotation afin d’observer des ondes gravito-inertielles, cas intermédiaire entre les ondes internes de gravité et les ondes inertielles. L’expérience a été réalisée à trois vitesses de rotation successives telles que $f_c/N = 0.05$, $f_c/N = 0.5$ et $f_c/N = 2$, et la fréquence de forçage a été modifiée pour rester dans la zone des attracteurs (1,1). Le champ de vitesse obtenu et filtré à la fréquence de forçage est montré figure 3.7. Là encore l’algorithme par tracé de rayon prédit correctement les structures observées. L’effet de la rotation est aussi retrouvé, avec une augmentation de la largeur des branches et l’augmentation forte de l’amplitude de la vitesse radiale au centre.

A.2 Réponse linéaire impulsionnelle

Une méthode pour caractériser de manière plus complète le système dans le régime linéaire est de regarder la fonction de réponse impulsionnelle. Ne pouvant produire un *dirac* tel que décrit

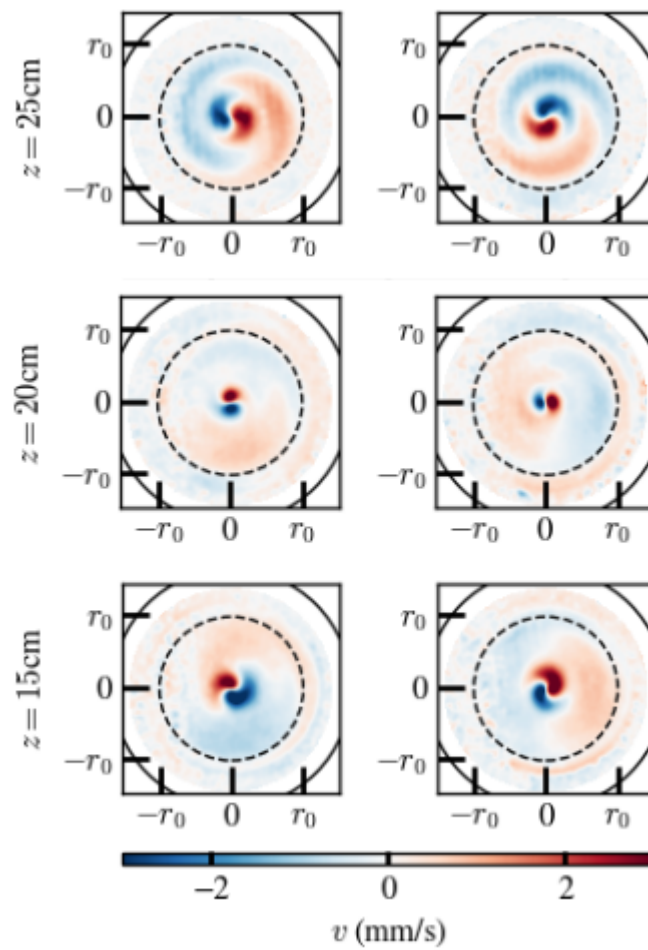


FIGURE 3.5 – Vues horizontales avec un plan laser à $z = 25\text{ cm}$, 20 cm et 15 cm (de haut en bas) montrant v_r (gauche) et v_ϕ (droite). Les paramètres sont $N = 0$, $f_c = -1.05\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_0/f_c = 0.767$ (même expérience que la figure 3.4). Le champ de vitesse est filtré autour de la fréquence de forçage.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

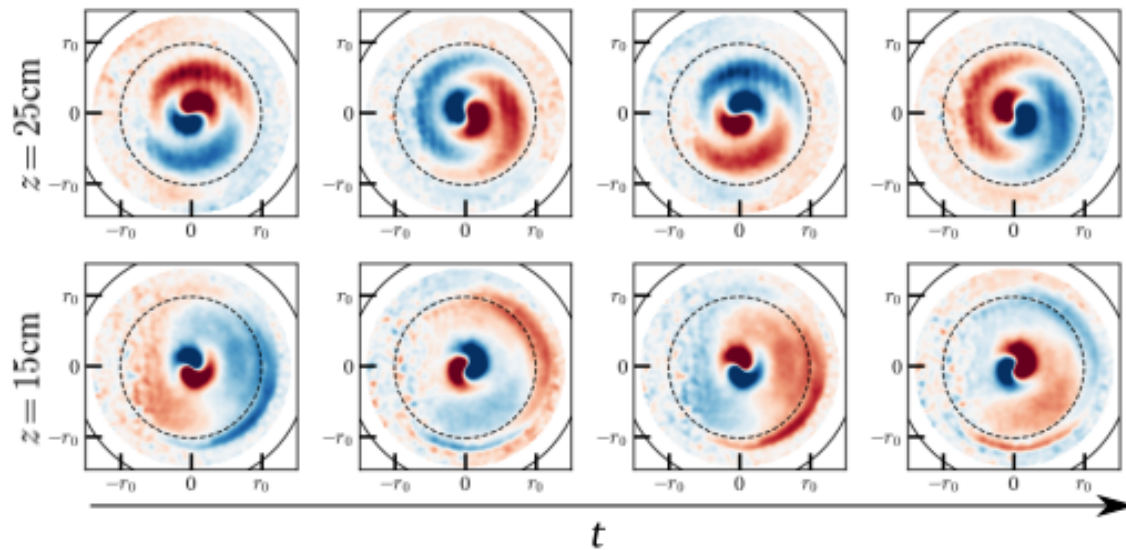


FIGURE 3.6 – Instantanés du champ de vitesse radiale v_r dans une vue horizontale à $z = 25$ cm et 15 cm (de haut en bas). Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 3.5. La différence de phase entre chaque colonne est de $\pi/2$.

en théorie, le signal le plus proche possible est produit : une période unique de forçage, *i.e.* un cosinus de période 5 s et une amplitude $a_0 = 10$ mm. Ce signal permet d'injecter de l'énergie dans le domaine fréquentiel $0 < \omega < N$ de manière significative bien que non uniformément. Le déplacement du plateau et sa transformée de Fourier sont tracés sur la figure 3.8. La pulsation maximale des ondes pouvant se propager dans le domaine est $N = 0.73 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le cas stratifié et $f_c = 0.84 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le cas en rotation, la période caractéristique est alors $T_{\text{car}} \simeq 8$ s. La donnée récoltée, *output* du système, est le champ de vitesse verticale, mesuré ici pendant 5 min $\simeq 38T_{\text{car}}$ après l'impulsion

$$\tilde{e}_c = \left\langle \frac{\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_z^2}{2} \right\rangle, \quad (3.5)$$

où $\langle . \rangle$ désigne la moyenne spatiale sur tout le domaine. La réponse linéaire du système, ou fonction de transfert, est alors la sortie divisée par l'entrée, vitesse du plateau

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{\tilde{e}_c}{(\omega \tilde{a})^2}. \quad (3.6)$$

Dans la description complète du système, il faudrait écrire l'équation de Navier-Stokes pour la vitesse (et la conservation de la densité), et le forçage serait caché dans la condition à la limite de non-pénétrabilité et d'entraînement visqueux sur le plateau. En supposant le système dans le régime linéaire, on élimine le terme advectif, et tous les opérateurs sont représentés par \tilde{H} . Bien qu'il s'agit d'une grosse approximation, cette méthode permet de donner un aperçu de la réponse fréquentielle du système et notamment les plages de fréquences excitables.

Une telle expérience a été menée pour les ondes internes de gravité (sans rotation) et pour les ondes inertielles (sans stratification). \tilde{H} est donnée dans ces deux cas par la figure 3.9(a) et 3.9(b) respectivement que l'on décrira comme *N-case* ($N \neq 0$ and $f_c = 0$) et *f_c-case* ($N = 0$ and $f_c \neq 0$). Il est à noter que dans ce dernier cas, le forçage est rétrograde¹.

1. Des expériences communiquées par Evgeny Ermanyuk semblent montrer que les cas prograde et rétrograde produisent des résultats un peu différents.

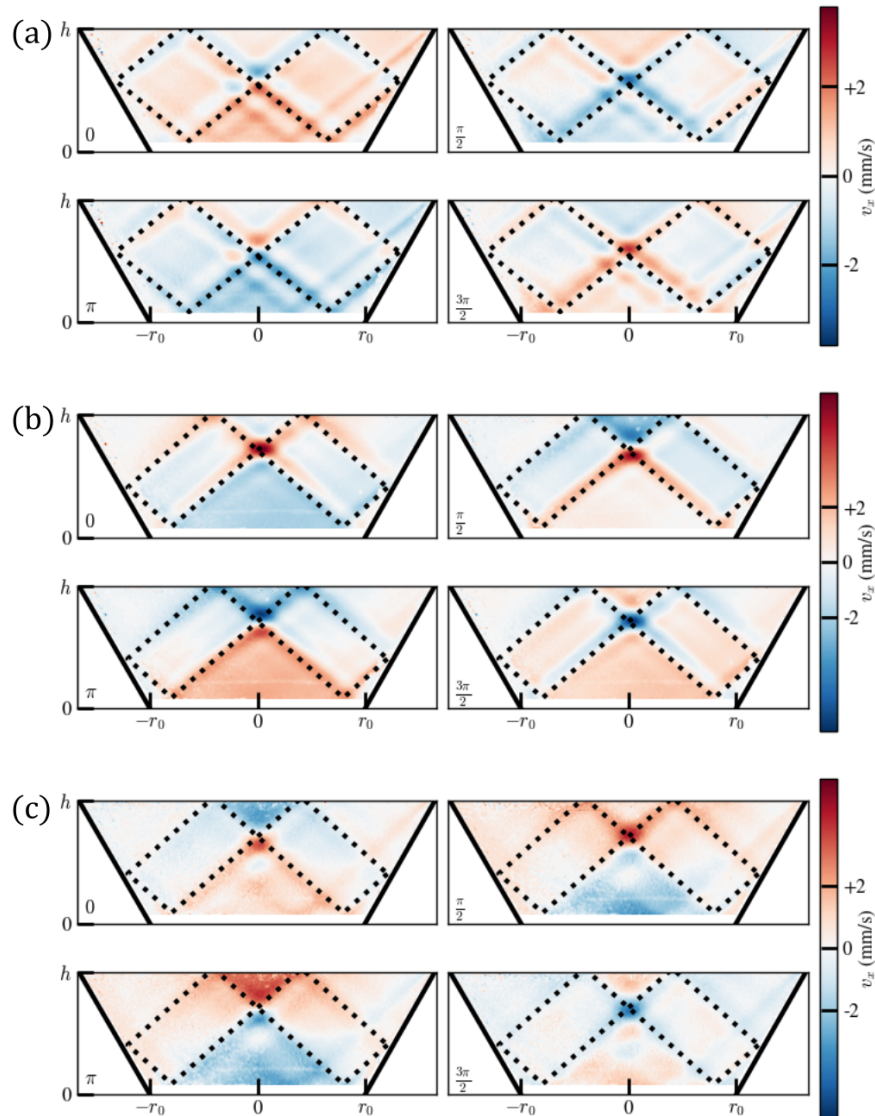


FIGURE 3.7 – Identique à la figure 3.2. Ondes gravito-inertielles dans le régime linéaire $a_0 = 2$ mm. $N = 0.78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) $f_c/N = 0.05$ et $\sin \theta = 0.64$, (b) $f_c/N = 0.5$ et $\sin \theta = 0.66$, (c) $f_c/N = 2$ et $\sin \theta = 0.66$.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMÉTRIQUES

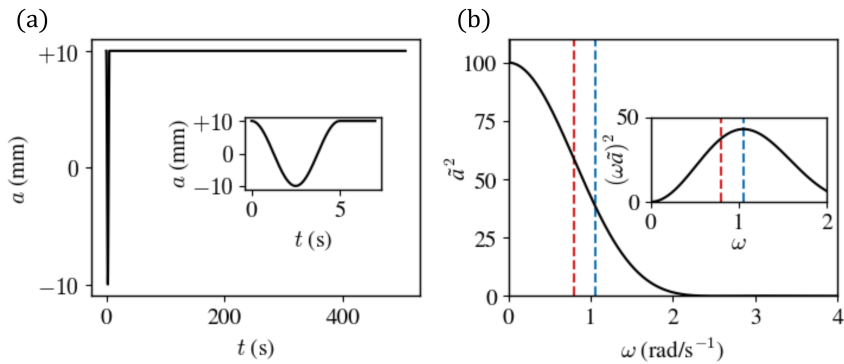


FIGURE 3.8 – Déplacement du plateau lors de l'expérience "impulsion". (a) Déplacement du plateau en fonction du temps au point $(x = R(h), y = 0)$, et zoom sur les premières secondes. (b) Densité spectrale de puissance du déplacement \tilde{a}^2 et de la vitesse $(\omega\tilde{a})^2$. Les lignes pointillées indiquent les valeurs de $N = 0.73 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (rouge) et $f_c = 0.836 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (bleu).

La figure 3.9 montre que dans les deux cas la réponse du système n'est pas monotone et contient des pics, qui sont donc des fréquences privilégiées du système comme cela pourrait être le cas pour un filtre passe-bande par exemple. Afin de caractériser ces pics, le signal temporel de chacun des pixels a été filtré autour de chaque pic présent dans \tilde{H} , ce qui permet d'obtenir les champs de vitesse filtrés à ces fréquences qui sont présentés figure 3.9(c). Deux grandes classes peuvent être facilement distinguées : les ondes stationnaires, ou modes verticaux résonants de la cuve (colonnes du milieu et de droite), et les attracteurs (colonne de gauche). Ces derniers ne sont observés que dans le *N-case*, et on distingue très bien la région de convergence des attracteurs (1-1), avec notamment la forte diminution de la réponse lorsque l'on en sort. Les deux catégories vont être étudiées plus en détails ci-après. Il est à noter que le pic clairement visible à $\omega/f_c = 0.26$ dans le cas des ondes inertielles correspond à un mode de seiche² dans une direction privilégiée, comme le montre le champ de vitesse filtré à cette fréquence oscillant sur la figure 3.10. Aussi, seule la densité spectrale de puissance de v_x présente ce mode, le pic n'étant pas présent dans le spectre de v_z , soulignant le mode de seiche oscillant principalement selon \vec{e}_x .

a Ondes stationnaires

Les modes résonants sont des ondes stationnaires dues à la présence des parois de la cuve, et sont présentés dans l'ordre croissant dans la figure 3.9(c). On s'intéressera plus particulièrement à la vitesse horizontale v_x car (en dehors du mode 1) elle est au moins un ordre de grandeur supérieur à la vitesse verticale v_z . Le mode 1 possède un seul noeud de vitesse horizontale v_x , le mode 2 en possède 2, etc, jusqu'au mode 5 qui peut être observé dans le *N-case*. On peut rapprocher ces modes des résonances globales présentées par Maas dans son article fondateur sur les attracteurs [MAAS et LAM 1995], le mode 1 a en effet une structure s'en approchant avec une limite "coin à coin". Cependant, la première résonance globale, ou attracteur (1-2) qui a un exposant de Lyapunov nul, n'est pas observée dans la réponse linéaire ($\sin \theta = 0.392$). Nous allons donc décrire ces ondes stationnaires comme on pourrait le faire avec la corde de Melde ou le son dans une cavité. On pourra ainsi en première approximation supposer que dans la direction verticale, k_z peut être écrit

$$k_{z,n} = n \frac{\pi}{h}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.7)$$

similaire à toute onde entre deux conditions aux limites qui sont des noeuds distants de h . Dans la direction radiale, la géométrie cylindrique induit plutôt une description par les fonctions de Bessel.

2. Oscillation globale du fluide d'un côté à l'autre, comme dans une baignoire ou un verre que l'on balance.

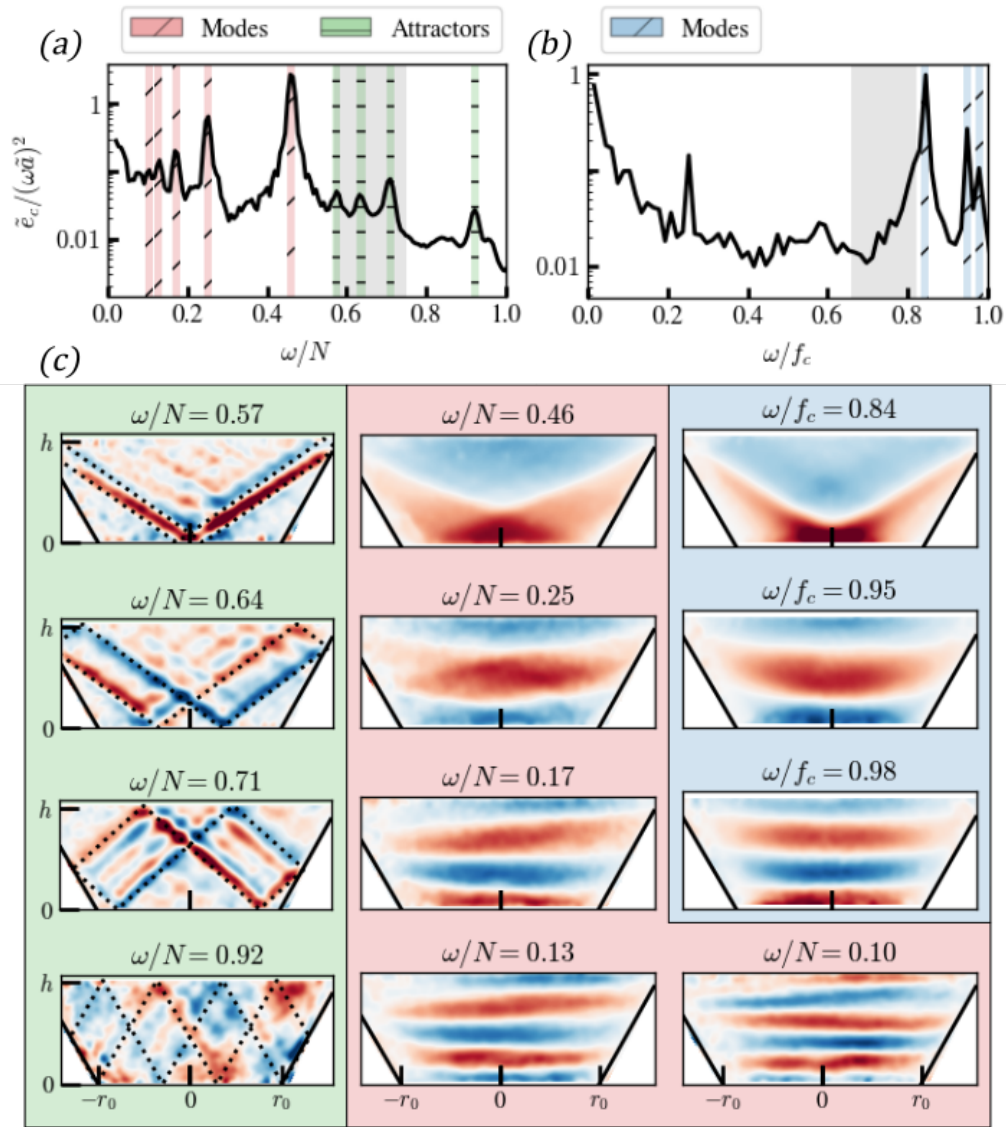


FIGURE 3.9 – Fonction de transfert $\tilde{H} = \tilde{e}_c / (\omega \tilde{a})^2$ dans le N -case (a) et dans le f_c -case (b). La région grisée est la langue d’Arnold, zone des attracteurs (1-1). Les pics sont colorés en fonction du type identifié lors du filtrage de la fréquence en question, la largeur du filtrage est la largeur de la bande, soit $\delta\omega = 0.02N$. (c) Instantanés du champ de vitesse v_x filtré aux pics présents dans (a) et (b), la fréquence de filtrage est donnée au dessus du champ. Les attracteurs présents dans (a) sont en vert, dans la colonne de gauche. Les ondes stationnaires de (a) sont en rouge, au milieu. Les modes de (b) sont en bleu, à droite. Le pic à $\omega/f_c = 0.26$ est filtré et présenté figure 3.10.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMÉTRIQUES

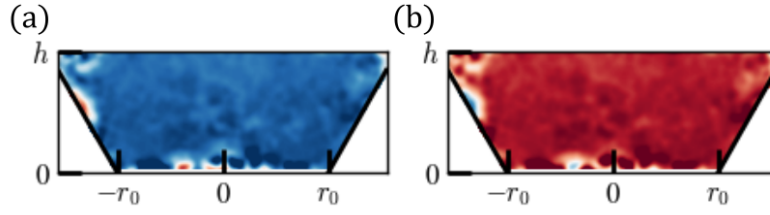


FIGURE 3.10 – Instantanés du champ de vitesse horizontale v_x filtré à $\omega/f_c = 0.26$ correspondant à la figure 3.9(b) à deux instant déphasés de π . (a) La vitesse est principalement dirigée selon $-\vec{e}_x$, (b) selon $+\vec{e}_x$.

Le champ de vitesse ne présente pas de noeud de la vitesse horizontale dans cette direction, une première approximation de la vitesse serait alors

$$v_x(r, \theta, z) = a \cos(k_z z) J_0(k_r r), \quad (3.8)$$

en utilisant une fonction de Bessel d'ordre 0, et $k_r = 2.4/R$, 2.4 étant le premier zéro de la fonction J_0 . Cette première approximation donne de bons résultats pour les ondes inertielles mais n'est pas convaincante pour les ondes internes de gravité. Nous allons donc utiliser la description plus complète détaillée dans la partie 1.B.8, valable dans une géométrie cylindrique. On redonne les expressions avec $p = 1$

$$v_r(r, z, \theta, t) = i \frac{k_z v_{z,0}}{4k_r \omega} [(f_c - 2\omega)J_0(k_r r) + (f_c + 2\omega)J_2(k_r r)] e^{i(\omega t - k_{z,n} z - \theta)} + c.c., \quad (3.9)$$

$$v_z(r, z, \theta, t) = v_{z,0} J_1(k_r r) e^{i(\omega t - k_{z,n} z - \theta)} + c.c. \quad (3.10)$$

La condition d'impénétrabilité est toujours

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_z(R) \sin \alpha - v_r(R) \cos \alpha = 0, \quad (3.11)$$

où $R(z)$ est le rayon du cône à la cote z . k_r est défini par le premier zéro de cette somme de fonctions de Bessel, que l'on note ζ , soit $k_r = \zeta/R$. La géométrie n'étant pas cylindrique mais tronconique, le choix de R est arbitraire, et peut raisonnablement être choisi entre r_0 et $R(h)$, les rayons des deux bases du frustum. En insérant la relation de dispersion des ondes internes de gravité ou des ondes inertielles, le modèle prédit les fréquences auxquelles devraient se trouver ces ondes stationnaires. Pour les ondes internes de gravité

$$\frac{\omega_n^2}{N^2} = \sin^2 \theta = \frac{k_r^2}{k_r^2 + k_{z,n}^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi R}{h \zeta}\right)^2 n^2}, \quad (3.12)$$

et pour les ondes inertielles

$$\frac{\omega_n^2}{f_c^2} = \cos^2 \theta = \frac{k_{z,n}^2}{k_r^2 + k_{z,n}^2} = \frac{n^2}{n^2 + \left(\frac{h \zeta}{\pi R}\right)^2}. \quad (3.13)$$

Les expressions (3.9) et (3.10) sont déphasées de $\pi/2$, la condition d'impénétrabilité ne peut donc être vérifiée seulement si $v_r(R) = 0$ et $v_z(R) = 0$. La première donne $\zeta = 1.84$ pour les ondes internes de gravité et $\zeta = 1.33$ pour les ondes inertielles, la deuxième donne $\zeta = 3.8$ dans les deux cas. Les deux relations (3.12) et (3.13) correspondent aux deux régions colorées de la figure 3.11(a), en rouge dans le N -case et en bleu dans le f_c -case. Les points expérimentaux sont obtenus par

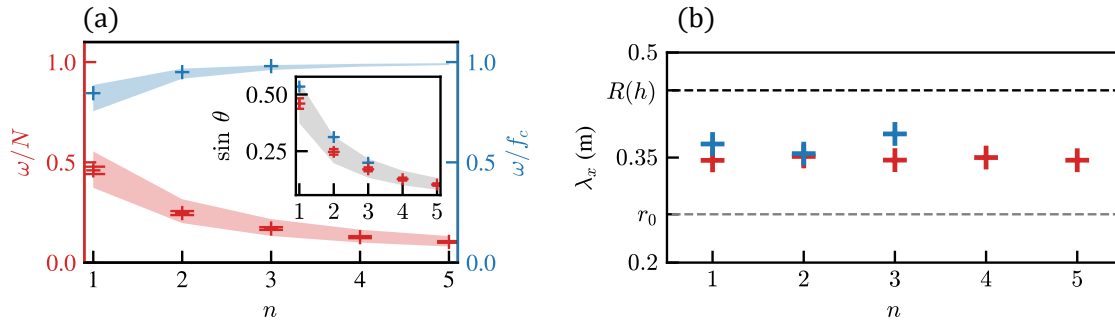


FIGURE 3.11 – (a) Fréquence du mode n . Les points sont les mesures expérimentales, en rouge pour les ondes internes de gravité (N -case) et en bleu pour les ondes inertielles (f_c -case). Les régions colorées sont les domaines prédits par les équations (3.12) et (3.13). (b) Longueur d'onde radiale déduite des expériences. Les lignes pointillées sont les diamètres ($r_0, R(h)$) des deux bases de la cuve.

l'emplacement des pics de la densité spectrale de puissance. Le modèle, représenté par la gamme de couleur présente un bon accord en prenant $\zeta = 1.84$ pour les ondes internes de gravité. Dans l'autre cas, l'accord n'est pas bon et nous avons utilisé $\zeta = 2.4$, premier zéro de la fonction de Bessel J_0 , première idée que nous avons eu. La relation de dispersion des ondes gravito-inertielles permet d'unifier les deux descriptions, comme montré dans l'encart. Une autre façon de comparer les résultats expérimentaux et le modèle consiste à inverser la relation (3.12) pour déduire en chacun des pics de fréquence un rayon effectif du cylindre correspondant à la fonction de Bessel du mode n . Sur la figure 3.11(b), ces diamètres effectifs sont bien compris entre les rayons des bases du cône.

Plusieurs raisons peuvent expliquer que le modèle ne fonctionne que grossièrement. La condition d'imperméabilité a été simplifiée, et la variation du rayon avec la hauteur a été négligée. On notera aussi que la forme de ces modes diffère de celle qui serait attendue dans le cas d'un cylindre. Le cas le plus remarquable est celui du mode $n = 1$, et encore plus pour les ondes inertielles. Cette différence s'explique par la présence de la pente, mais deux effets permettant de le comprendre sont possibles. Le mode $n = 1$ ayant la plus grande longueur d'onde verticale, c'est celui qui "sent" le plus cette différence, alors que pour des valeurs de n plus élevées cet effet ne jouera que sur l'emplacement relatif des noeuds. Une autre explication est la proximité de ce mode $n = 1$ avec la limite de la zone des attracteurs (1-1), plus prononcée dans le f_c -case. L'attracteur limite est une ligne joignant un coin supérieur de la cuve au centre de la base inférieur (proche de $\omega/N = 0.57$ dans la figure 3.9(c)), ressemblant ce qui est observé pour le mode. Cependant, le modèle semble encore décrire correctement l'onde stationnaire.

b Obtention des attracteurs

La figure 3.9 présente aussi clairement, dans le cas des ondes internes de gravité, des attracteurs comme prévu par le tracé de rayon et observé à forçage constant. Les trois premiers attracteurs ($\omega/N = 0.57, 0.64$ et 0.71) sont effectivement présents dans la langue d'Arnold (1,1) prédite par l'algorithme de tracé de rayon $0.582 < \sin \theta < 0.748$ (figure 2.13 et figure 2.22). On constate d'ailleurs que la réponse est plus élevée dans cette zone avec une coupure claire à $\omega/N = 0.75$. Cependant, la réponse associée à ces attracteurs reste un ordre de grandeur inférieure à celle des ondes stationnaires. Un quatrième pic est observé, correspondant à un attracteur (2,1) plus bruité. Sur les champs de vitesse de la figure 3.9(c), le cycle limite obtenu par tracé de rayon montrant là encore un bon accord entre les données expérimentales et la modélisation par trajectoires de rayons. Dans le f_c -case, l'influence des attracteurs est moins claire, avec pour seul indice l'asymé-

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

trie du mode $n = 1$ sur la figure 3.9(b) à $\omega/f_c = 0.85$.

Pour finir, comme dit précédemment et comme montré dans l'encart de la figure 3.11(a), la description dans le N -case, dans le f_c -case ou même dans un cas intermédiaire, peut-être unifiée en utilisant la relation de dispersion totale

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{\omega^2 - f_c^2}{N^2 - f_c^2}}. \quad (3.14)$$

On fera finalement remarquer une différence qui sera importante dans la partie suivante : pour les ondes gravito-inertielles, la région des attracteurs se situe à des fréquences supérieures aux modes d'ondes stationnaires dans le cas où $N > f_c$, mais à des fréquences inférieures si $f_c > N$.

B Régime faiblement non-linéaire

a Image globale

Dans les expériences avec un forçage sinusoïdal continu à amplitude modérée (de 3 mm à 6 mm), il y a génération spontanée de deux ondes secondaires. Ces ondes sont générées à des fréquences ω_1 et ω_2 inférieures à la fréquence de forçage ω_0 , caractérisées par des pics dans les spectres de densité de puissance. Un exemple d'un tel spectre est donné figure 3.12(b) qui représente la densité spectrale de puissance de l'énergie cinétique $\bar{\epsilon}_c$ dans une expérience avec un fluide stratifié sans rotation, filtré sur une fenêtre de $120T_0$ autour de $T = 340T_0$ et moyennée spatialement sur tout le domaine. Ce spectre met en évidence trois pics, dont on peut lire les fréquences associées $\omega_0 = (0.64 \pm 0.01)N$, $\omega_1 = (0.22 \pm 0.01)N$ et $\omega_2 = (0.43 \pm 0.01)N$. Ces fréquences satisfont la condition de résonance de l'instabilité triadique résonante (TRI).

L'amplitude des ondes internes sur l'attracteur est assez élevée pour déclencher des effets non-linéaires et plus spécifiquement de la TRI. C'est cette instabilité qui génère les sous-harmoniques à ω_1 et ω_2 . Sur ce point, les résultats sont similaires à ce qui a été obtenu précédemment dans des domaines bidimensionnels [SCOLAN et al. 2013b]. Le transfert d'énergie entre l'onde primaire et les ondes secondaire est faible, le calcul de l'efficacité de celui-ci par le rapport $\bar{\epsilon}_c(\omega_1)/\bar{\epsilon}_c(\omega_0)$ donne environ 0.05. Cette valeur est faible mais équivalente à ce qui a été rapporté dans d'autres études [BROUZET et al. 2016a; DAVIS 2019], synonyme d'un faible transfert d'énergie. La relation de résonance spatiale semble vérifiée mais avec une faible précision. Il a été montré par [BOURY et al. 2023] que c'était effectivement le cas dans un domaine axisymétrique.

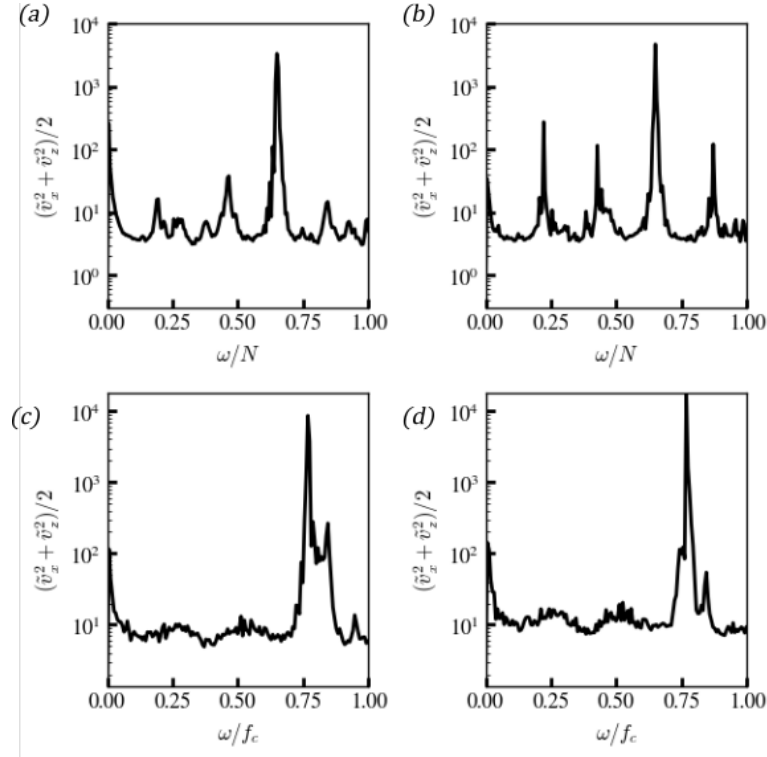


FIGURE 3.12 – Densité spectrale de puissance de l'énergie cinétique $\bar{\epsilon}_c$, calculée sur une fenêtre de $120T_0$ autour de $t = t_{max}/10$ (a) et $9t_{max}/10$ (b) moyennée sur toute la cuve dans le N -case. Les panneaux (a) et (b) correspondent à des coupes verticales dans le diagramme temps-fréquence figure 3.13(a). (c) et (d) sont les équivalents pour la figure 3.13(b) dans le f_c -case.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

b Rotation et stratification

La description faite dans la partie précédente vaut pour les ondes internes de gravité ($f_c = 0$, N -case) suffisamment forcées mais des différences sont visibles, même dans la description qualitative de la TRI dans le cas d'un fluide homogène en rotation (f_c -case). Dans ce cas, le transfert d'énergie est encore plus faible (de l'ordre de 10^{-3}), et aucun pic clair ne semble se distinguer. Les figures 3.13 et 3.12 vont nous permettre de regarder cela en détail.

La figure 3.13(a) montre le diagramme temps-fréquence correspondant à une expérience d'onde interne de gravité (sans rotation), à une amplitude $a_0 = 3$ mm et une pulsation $\omega_0/N = 0.64$. À chaque instant t , la densité spectrale de puissance \tilde{e}_c est calculée à partir de la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse avec une fenêtre de $120T_0$ autour de cet instant. Calculée pour chaque pixel, elle est ensuite moyennée spatialement sur l'ensemble de la cuve afin d'obtenir une information globale. La densité spectrale cumulative est présentée sur la droite de la figure. Pour pouvoir regarder quantitativement l'évolution du spectre, la figure 3.12 présentée précédemment donne la densité spectrale de puissance calculée autour de $t = 80T_0$ et $340T_0$. Ces coupes sont marquées par les traitillés blancs sur la figure 3.13(a).

Similairement, la figure 3.13(b) représente le diagramme temps-fréquence pour une expérience d'ondes inertielles avec une amplitude de forçage $a_0 = 3$ mm et une pulsation $\omega_0/f_c = 0.768$ telle que $\sin \theta = \sqrt{1 - (\omega_0/f_c)^2} = 0.64$, créant le même attracteur que dans l'expérience d'ondes de gravité. L'expérience étant plus courte, les coupes 3.12(c) et 3.12(d) sont autour de $t = 60T_0$ and $110T_0$. Pour remarque, l'échelle de couleur, présentée au-dessus du spectre cumulatif est différente dans les deux cas.

En comparaison de la description faite de la figure 3.12(b), des différences importantes sont observées sur la figure 3.12(d). Au lieu de deux pics fins bien définis, une gamme plus étendue de valeurs du couple (ω_1, ω_2) est observée formant deux bosses plus larges. Cette observation est cohérente avec des résultats précédents obtenus pour les ondes inertielles [BORDES et al. 2012; MORA et al. 2021]. On peut aussi noter le transfert d'énergie plus faible. L'évolution du spectre entre la figure 3.12(c) et la figure 3.12(d) révèle une légère augmentation de l'énergie contenue dans le pic à ω_0 et dans les sous-harmoniques, tandis que le pic à $\omega = \omega_{n=1} = (0.85 \pm 0.01)f_c$ (le premier mode résonant) s'abaisse fortement, indiquant que celui-ci a été généré par l'allumage du forçage et n'est pas entretenu, tout comme celui à $\omega_{n=2}$ qui disparaît.

Une autre différence est le comportement du pic à $\omega = 0$. Celui-ci semble décroître dans le cas des ondes internes de gravité et être *a minima* entretenu dans le cas des ondes inertielles. Pour ces dernières, l'énergie semble donc plutôt se diriger vers le mode géostrophique comme observé par [LE REUN et al. 2019].

Là encore, le champ de vitesse peut être filtré temporellement pour obtenir la structure spatiale associée à ces sous-harmoniques. De manière analogue à ce qui a été fait pour la figure 3.9(c), les données associées aux spectres de la figure 3.12(b) et 3.12(d) sont filtrées à ω_1 et ω_2 pour obtenir les champs présentés sur la figure 3.14. Les motifs obtenus sont différents pour les ondes internes de gravité (a,b) et pour les ondes inertielles (c,d). Dans le cas des ondes inertielles, l'amplitude de la vitesse pour les sous-harmoniques est plus grande au centre de la cuve, et décroît radialement, du fait de la viscosité et de la géométrie cylindrique. Cette structure évoque une génération de ces ondes proche du centre de la cuve et donc de l'axe de symétrie là où l'amplitude de l'attracteur forcé par l'onde primaire à ω_0 est la plus grande.

Au contraire, les sous-harmoniques générées dans le cas des ondes internes de gravité ont une amplitude forte dans toute la cuve. [BROUZET et al. 2016a] distinguaient les résonances locales et globales lors de l'étude d'ondes internes de gravité. Ici, la structure montrée figure 3.14(a) est une onde stationnaire dans un mode résonant de la cuve, qui peut être décrit par un nombre vertical $n = 4$ ainsi qu'un nombre azimutal $m = 0$. Contrairement aux modes présentés dans la section 3.A.2, ce mode pourrait être décrit par une fonction de Bessel d'ordre 1 avec une annulation au centre, de symétrie différente par rapport à l'axe de symétrie. Le mécanisme principal de sélection des sous-harmoniques semble ne pas être le taux de croissance de l'instabilité asso-

B. RÉGIME FAIBLEMENT NON-LINÉAIRE

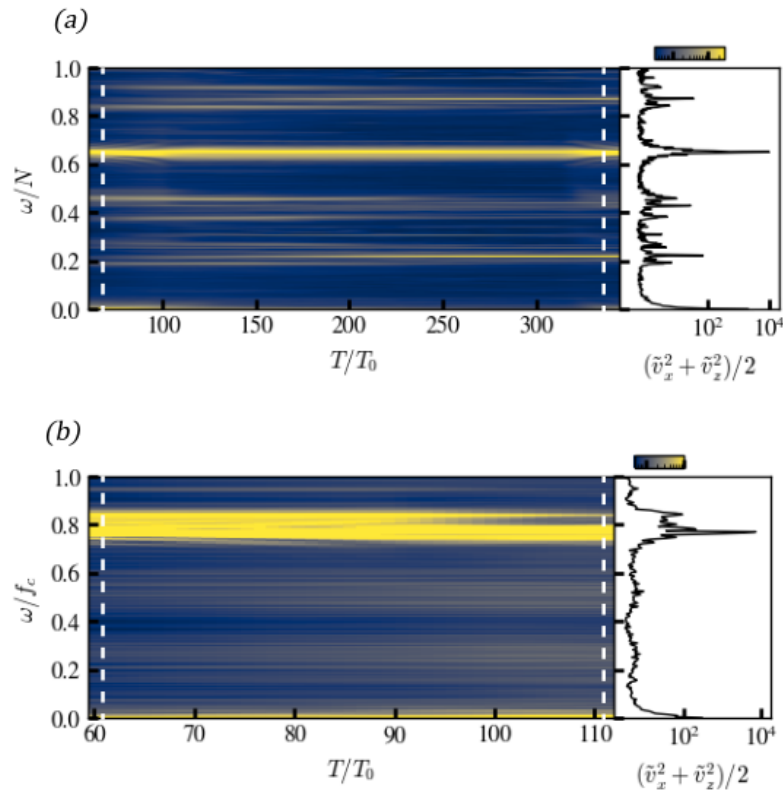


FIGURE 3.13 – Diagramme temps-fréquence des expériences à $\sin \theta = 0.64$ d’amplitude $a_0 = 3$ mm dans le cas de la stratification seule (a) $((N, f_c) = (0.77, 0)$ rad \cdot s $^{-1}$, N -case) et de la rotation seule (b) $((N, f_c) = (0, 1.05)$ rad \cdot s $^{-1}$, f_c -case). Les lignes blanches sont placées à $t = t_{max}/10$ et $9t_{max}/10$. La fenêtre glissante pour la transformée de Fourier est de $120T_0$.

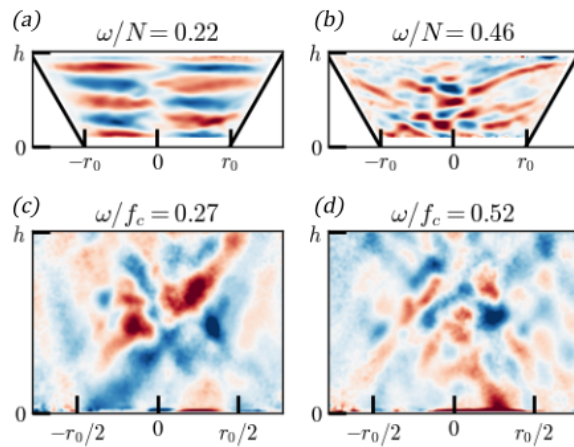


FIGURE 3.14 – Instantanés du champ de vitesse v_x , filtré aux sous-harmoniques générés par TRI. Champ filtré à $\omega_1/N = 0.22$ (a), $\omega_2/N = 0.46$ (b) dans le N -case, et $\omega_1/f_c = 0.27$ (c), $\omega_2/f_c = 0.46$ (d) dans le f_c -case. L’échelle spatiale est différente dans les deux cas. L’amplitude de la vitesse est plus faible dans le cas des ondes inertielles (voir la hauteur des pics sur la figure 3.12).

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

ciée à une fréquence et une longueur d'onde mais l'interaction avec les modes résonants de la cuve pour au moins une des sous-harmoniques ω_1 ou ω_2 . Cette spécificité des ondes internes de gravité est encodée dans la fonction de transfert \tilde{H} présentée précédemment. Il est en effet clair sur la figure 3.9(a) que les modes résonants en ondes stationnaires ont des fréquences plus faibles que les attracteurs (1,1) forcés. La TRI permet alors d'exciter à partir d'un attracteur qui focalise l'énergie ces fréquences plus faibles et facilement excitables en produisant des sous-harmoniques résonantes et donc des pics francs dans le spectre. Au contraire, sur la figure 3.9(b), les modes résonants ont des fréquences plus élevées et ne peuvent donc pas être excités par TRI. La sélection de la fréquence des sous-harmoniques dépend entièrement du taux de croissance de l'instabilité, faible à ces amplitudes modérées ($a_0 = 3$ mm). Une large gamme de couples peut alors croître autour de la fréquence avec le plus haut taux de croissance, produisant ces spectres étalés.

Ce résultat semble confirmé par une étude récente [LANCHON et al. 2023], dans laquelle est montré que lorsque les modes stationnaires sont empêchés, les ondes internes de gravité ont un comportement proche de celui des ondes inertielles.

Il est à noter aussi que, en présence de rotation, une partie de l'énergie peut être transférée au mode géostrophique ($\omega = 0$) lorsque l'amplitude du forçage est suffisamment élevée, ce qui déplace en retour les fréquences des ondes filles, inhibant ainsi la TRI [LE REUN et al. 2019] et pouvant aussi produire ce spectre "en collines".

Le mode résonant choisi lors de la TRI dans le cas des ondes internes de gravité n'est pas celui avec la structure la plus simple (on aurait pu penser au mode $n = 1$ par exemple). Aussi, l'onde complémentaire ne semble pas avoir de structure spatiale simple à décrire, au delà de la forte amplitude près de l'axe de symétrie, où on ne constate d'ailleurs pas d'annulation. Le choix de ce couple ne semble alors pas évident. Sur le diagramme temps-fréquence de cette expérience (figure 3.13(a)), le couple de sous-harmoniques dominant n'est pas le même au début et à la fin de l'expérience, ce qui explique la présence d'au moins trois couples possibles sur le spectre cumulé. Ce changement est clairement visible en comparant les fréquences dominantes des coupes 3.12(a) et 3.12(b). Cependant la structure spatiale est moins évidente lorsque le champ de vitesse est filtré aux deux autres couples possibles $\omega'_1 = 0.19$ et $\omega''_1 = 0.26$. Cela suggère que le mode résonant a un taux de croissance plus faible que ces autres fréquences, mais que sa réponse étant plus grande, il accumule de l'énergie avec le temps jusqu'à devenir le plus gros puits d'énergie. Un résultat similaire a été rapporté récemment dans une étude s'intéressant à l'influence de l'effet de taille finie dans l'interaction entre deux ondes internes de gravité [GRAYSON et al. 2022]. Elle montre une modulation dans les fréquences des sous-harmoniques dans le temps qui est expliquée par la compétition entre le taux de croissance linéaire et le temps de résidence fini des ondes secondaires dans le faisceau de l'onde primaire, ainsi que la variation spatiale de celui-ci, dû à la viscosité notamment. Il semblerait donc, même si un décalage net est plutôt observé ici (comme dans des études précédentes bidimensionnelles [BOURGET 2014; BROUZET et al. 2016c]), que le compromis entre taux de croissance linéaire et interaction avec la cuve soit en accord avec cette étude.

C Au-delà du régime faiblement non-linéaire

C.1 Structure à grande amplitude

La TRI est un phénomène robuste qui peut constituer une première étape vers un transfert d'énergie entre les échelles. Avec l'idée d'obtenir un spectre continu, proche du régime de la turbulence d'onde, ou pourquoi pas du spectre de Munk [MUNK 1966], l'amplitude a_0 a été augmentée jusqu'à 10 mm. En effet, il a été montré en 2D [BROUZET et al. 2016a; DAVIS et al. 2020] que la TRI pouvait remplir le spectre par une succession d'interactions triadiques. Or ce mécanisme n'a jamais été observé dans ce dispositif expérimental, et au plus deux étapes de TRI sont présentes. En réalité, les observations réalisées tendent à montrer l'opposé, une augmentation de l'amplitude de forçage, une fois dépassé le seuil de déclenchement de la TRI, est associé à une augmentation de la longueur d'onde et les sous-harmoniques disparaissent des spectres.

Par exemple, la figure 3.15 montre l'évolution du champ de vitesse (v_x, v_z) lors d'une expérience forçant des ondes internes de gravité (*N-case*) avec une amplitude augmentant linéairement de $a_0 = 0$ mm à $a_0 = 10$ mm en 60 min (soit environ 260 périodes de forçage). Afin d'observer la dissipation de l'énergie, l'amplitude est ensuite diminuée linéairement de façon symétrique. La figure 3.15(a) montre la vitesse horizontale en un point ainsi que l'énergie cinétique moyennée sur la cuve et sur 5 périodes de forçage. L'augmentation de l'énergie cinétique semble parabolique, cohérent avec l'augmentation linéaire de l'amplitude de forçage (et donc de la vitesse *a priori*). Il existe cependant un petit décrochage aux alentours de 45 minutes qui pourrait indiquer l'apparition de non-linéarités. Cette conclusion est accentuée par l'asymétrie de la courbe par rapport au point $t = 60$ min, il semble en effet y avoir deux phases dans la diminution de l'énergie cinétique.

Le figure 3.15(b) montre l'évolution de la structure spatiale de l'attracteur à différents instants. Autour de $t = 15$ min, soit $a_0 = 2.5$ mm, on retrouve la structure de l'attracteur linéaire présenté figure 3.2. À $t = 30$ min, la structure est encore similaire mais l'amplitude est environ deux fois plus importante. On observe ensuite à $t = 45$ min et $t = 60$ min, l'élargissement des branches de l'attracteur. Cependant, la vitesse maximale, atteinte par le fluide au centre de la cuve, n'augmente plus signe d'une forte dissipation de l'énergie. La vitesse sur les autres branches de l'attracteur continue elle à augmenter, ce qui explique l'augmentation continue de l'énergie cinétique. Ensuite, avec la diminution de l'amplitude de forçage, la largeur de ces branches diminue. Il est notable que les attracteurs au début et à la fin sont différents, nettement dans leur forme. Cela est dû à deux phénomènes : l'apparition d'une couche mélangée en haut de la cuve, visible sur la dernière figure par l'emplacement de la réflexion en haut qui n'est pas sur le plateau, et à la diminution de la fréquence de flottabilité N . Ces deux quantités jouent sur les paramètres H et $\sin \theta$ du modèle présenté dans la partie 2 et changent la forme de l'attracteur. Là encore deux responsables sont possibles, le plateau peut mélanger de façon importante une couche de 1 cm à forte amplitude, et le déferlement des ondes du fait du grand forçage.

La figure 3.16 présente des résultats similaires obtenus cette fois dans des expériences à forçage constant dans un fluide homogène en rotation (*f_c-case*). La colonne de gauche montre le champ de vitesse horizontal v_x en $t = T_0$ et $t = T_0 + T_0/4$ pour trois expériences à $a_0 = 3$ mm, $a_0 = 6$ mm et $a_0 = 9$ mm. Les deux colonnes de droite montrent les champs de vitesse horizontale v_x et verticale v_z dans une reproduction des expériences précédentes avec une caméra rapprochée pour augmenter la résolution. Ces figures montrent que les résultats obtenus pour les ondes internes de gravité sont aussi valables pour les ondes inertielles, et que ces résultats sont bien reproductibles. À forte amplitude, il serait même difficile de reconnaître un attracteur avec la figure 3.16(i) seule. On observe aussi une différence entre les instants T_0 et $T_0 + T_0/4$, sur laquelle nous reviendrons plus tard. L'avantage des ondes inertielles est que contrairement à une stratification qui peut être mélangée irréversiblement, la table tournante reste en rotation quelque soit leur amplitude. C'est pourquoi nous les utiliserons pour étudier plus en profondeur l'interaction sur l'axe de symétrie.

Ces résultats sont aussi valables pour les ondes gravito-inertielles comme le montre la figure 3.17, sur laquelle on observe aussi clairement l'effet du mélange.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMÉTRIQUES

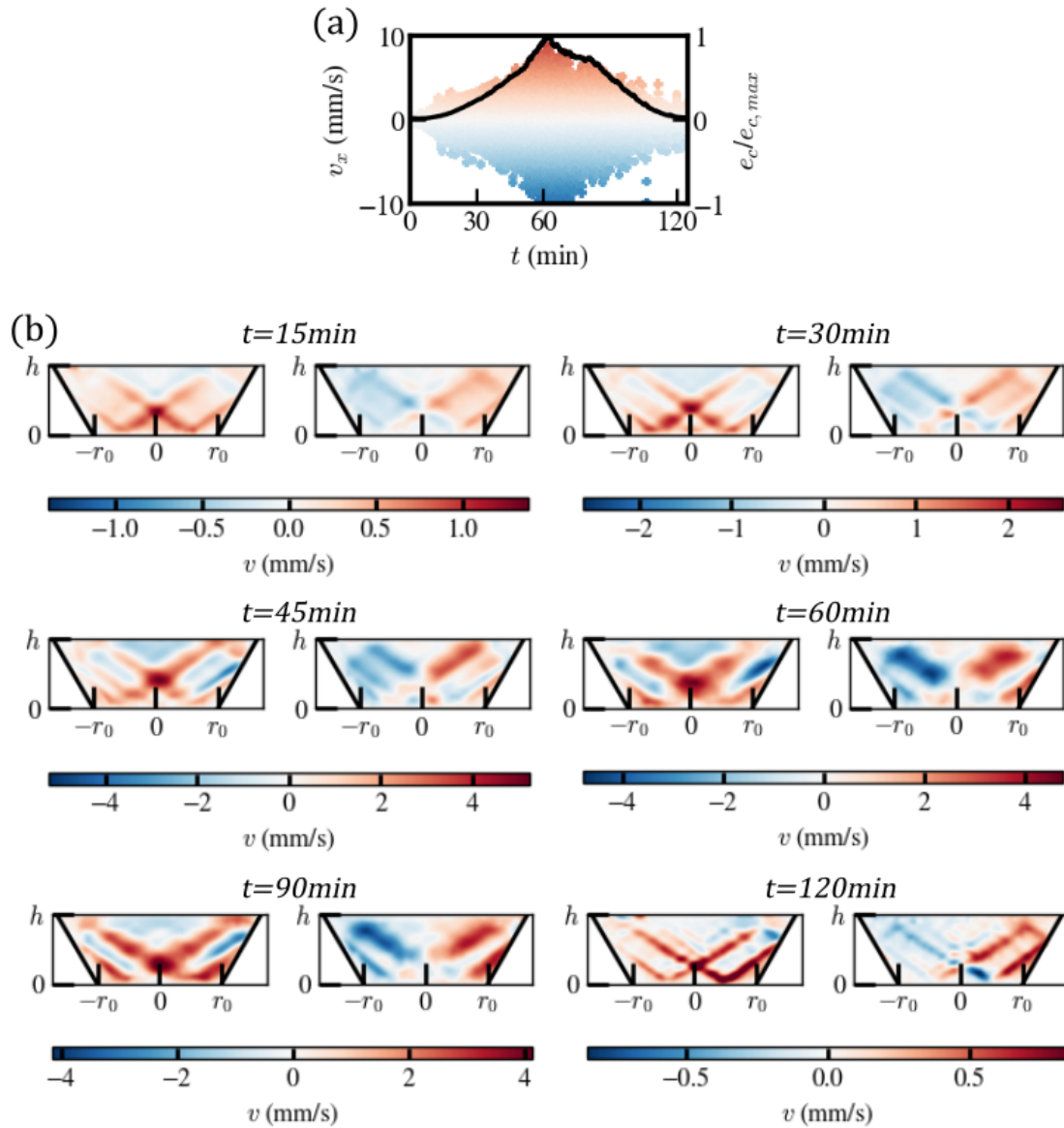


FIGURE 3.15 – *N-case*, expérience avec une augmentation linéaire de l’amplitude de 0 à 10 mm en $60 \text{ min} = 260T_0$, puis diminution linéaire. (a) Évolution temporelle de la vitesse verticale en un point (couleur) et de l’énergie cinétique e_c (noir) moyennée sur l’ensemble de la cuve et normalisée par sa valeur maximale. (b) Instantanés du champ de vitesse horizontal (v_x , à gauche) et vertical (v_z , à droite) à différents instants.

C. AU-DELÀ DU RÉGIME FAIBLEMENT NON-LINÉAIRE

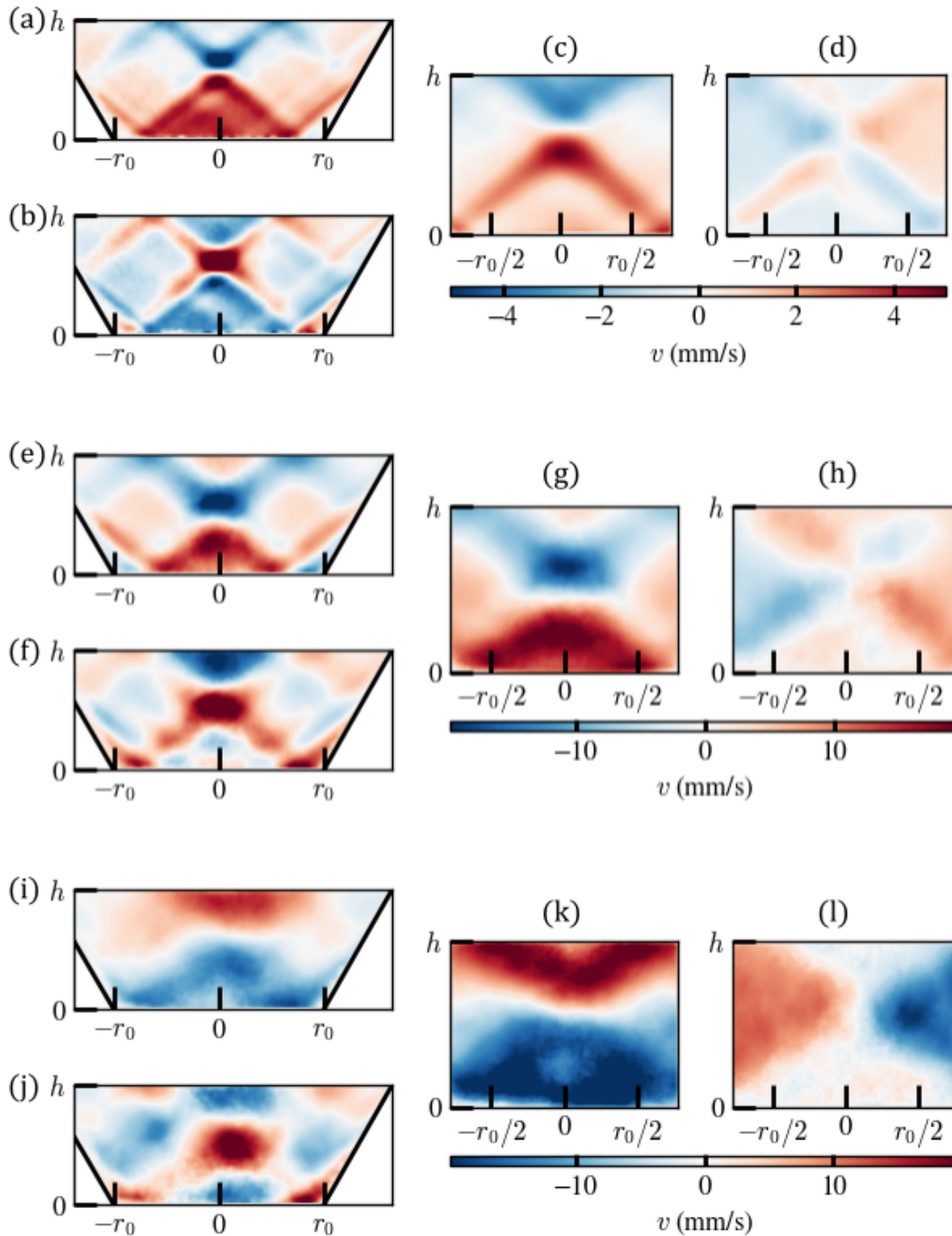


FIGURE 3.16 – f_c -case. Instantanés du champ de vitesse pour des ondes inertielles de paramètre de Coriolis $f_c = 1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ forcées à amplitude constante avec une période $T_0 = 7.81 \text{ s}$. (a-d) $a_0 = 3 \text{ mm}$; (e-h) $a_0 = 6 \text{ mm}$; (i-l) $a_0 = 9 \text{ mm}$. (d), (h) et (l) sont des champs de vitesse verticale v_z , les autres des champs de vitesse horizontale v_x . (a) et (b) sont déphasés de $\pi/4$ (respectivement (e) et (f), (i) et (j)). Les expériences (c)(d); (g)(h); (k)(l) ont été filmées plus proche de l'axe.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMETRIQUES

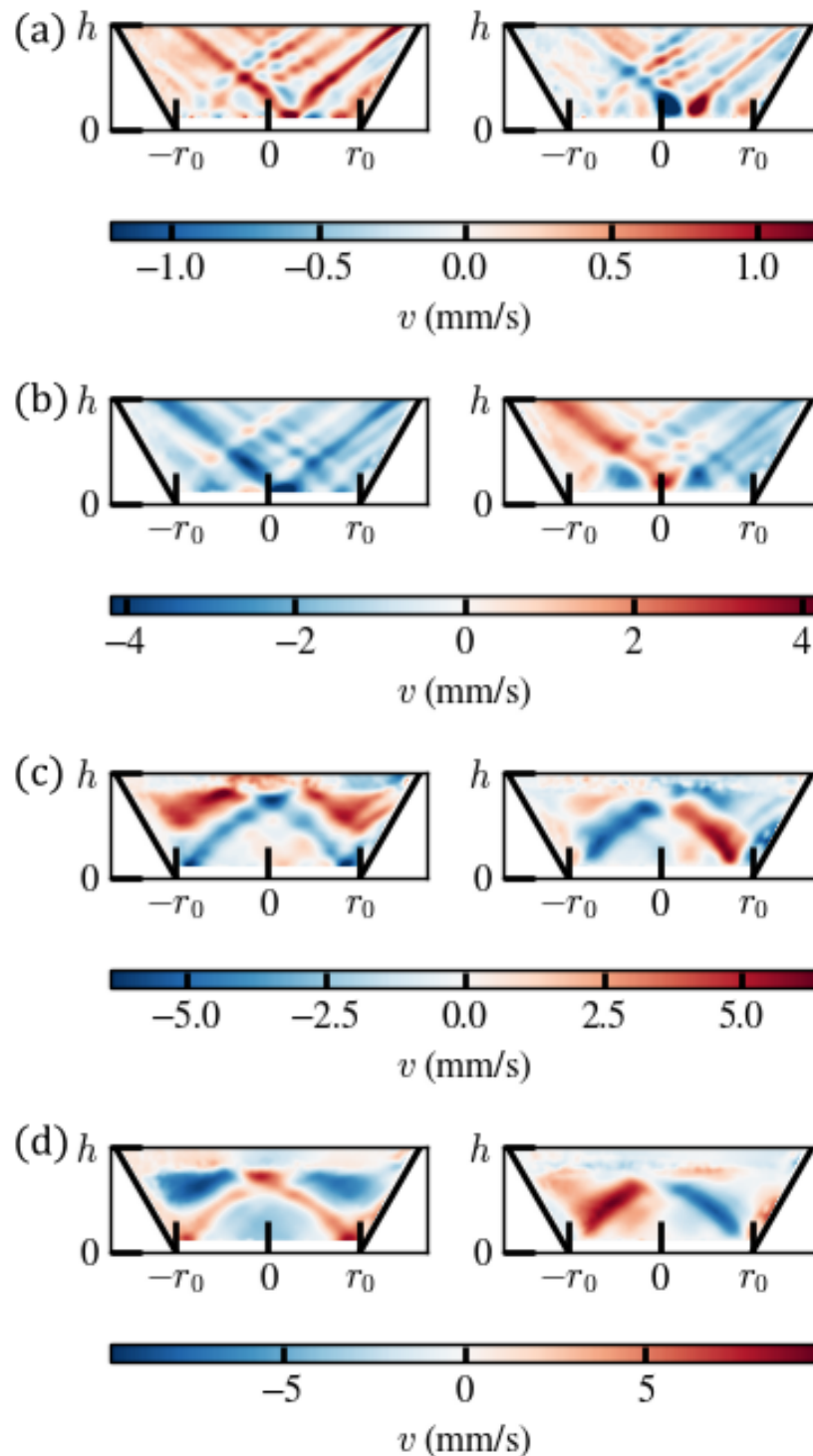


FIGURE 3.17 – Instantanés du champ de vitesse horizontale (v_x à gauche) et vertical (v_z). Les expériences sont réalisées dans un fluide stratifié ($N = 0.74 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) en rotation ($f_c/N = 0.33$) à forçage constant. (a) $a_0 = 1$ mm. (b) $a_0 = 3$ mm. (c) $a_0 = 6$ mm. (d) $a_0 = 9$ mm.

C. AU-DELÀ DU RÉGIME FAIBLEMENT NON-LINÉAIRE

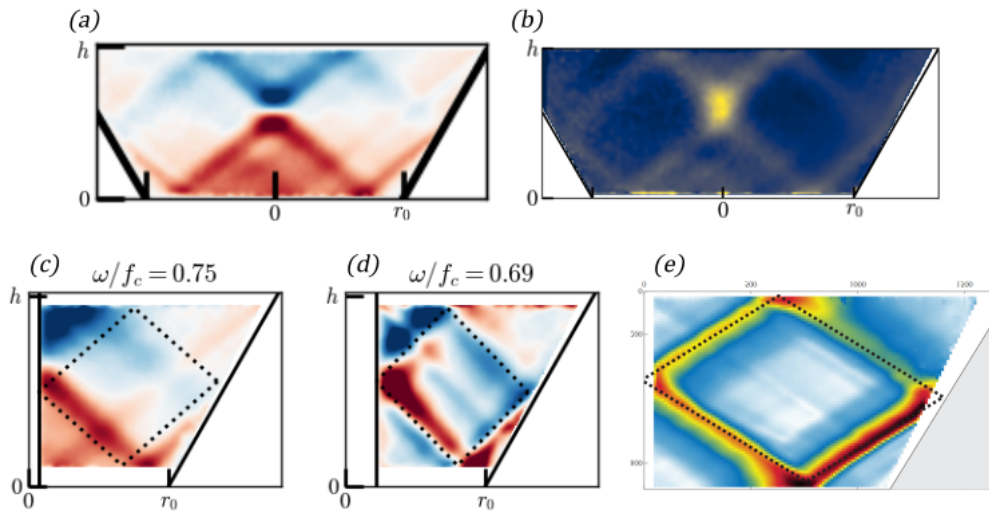


FIGURE 3.18 – Instantané du champ de vitesse v_x dans un fluide homogène en rotation (f_c -case, ondes inertielles) à $f_c = -1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (a) et l'énergie cinétique correspondante moyennée sur dix périodes de forçage (b). (c) Un cylindre de diamètre 2 cm a été placé au centre de la cuve. (d) Le diamètre du cylindre ajouté est de 11 cm. Le champ de vitesse est filtré à la fréquence de forçage dans chaque cas. (e) Visualisation par PIV de la norme de la vitesse moyennée sur une période de forçage pour une expérience d'ondes internes de gravité en quasi-2D. La figure a été retournée pour faciliter la comparaison. Extrait de [DAVIS 2019].

Nous avons donc observé dans tous les cas qu'une augmentation de l'amplitude résulte en l'augmentation de la largeur des branches de l'attracteur et l'augmentation de la longueur d'onde à l'intérieur de ces branches. Ces deux phénomènes n'étaient pas observés dans le cas bidimensionnel, amenant à pointer comme principal coupable de ces différences l'interaction sur l'axe de symétrie/rotation où l'amplitude de la vitesse est la plus grande.

C.2 Interaction sur l'axe

Pour confirmer cette intuition et regarder en détail l'effet de la réflexion sur l'axe de symétrie, un tube (un cylindre) solide est placé au centre de la cuve, empêchant la divergence de l'amplitude sur l'axe et l'interaction des ondes arrivant de toutes les directions. Deux cylindres ont été utilisés, de diamètres $d = 2 \text{ cm}$ et 11 cm pour sonder l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique de l'interaction sur l'axe. Les trois expériences (sans tube, avec le petit diamètre et le gros) ont été réalisées en rotation sans stratification ($f_c = 1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $N = 0$). Afin d'éviter les effets mentionnés précédemment, l'amplitude de forçage a_0 a été restreinte à 1 mm pour l'expérience sans tube et avec le petit diamètre et à 2 mm pour l'expérience avec le plus grand. De même, la fréquence de forçage a été adaptée du fait du changement de la géométrie (paramètre L du trapèze 2), afin de rester au centre de la zone des attracteurs (1,1), on a donc dans le même ordre ω_0/f_c qui vaut 0.77 ($d = 0 \text{ cm}$), 0.75 ($d = 2 \text{ cm}$) et 0.69 ($d = 11 \text{ cm}$). Par ailleurs, le tracé de rayon superposé sur les figures montre un clair décalage lors de la réflexion sur l'axe.

La figure 3.18 montre le champ de vitesse horizontal v_x , filtré aux fréquences de forçage respectives avec la même largeur $\delta\omega/f_c = 0.05$ dans les trois expériences. L'ajout du cylindre de 2 cm ne change pas la structure de l'attracteur, contrairement à l'ajout du plus gros. Qualitativement, la largeur des branches de l'attracteur diminue quand le diamètre passe de 2 cm à 11 cm et la longueur d'onde à l'intérieur de l'enveloppe de chaque branche diminue aussi. Habituellement, la largeur d'une branche est donnée par l'équilibre entre la focalisation à la réflexion sur la pente

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMMÉTRIQUES

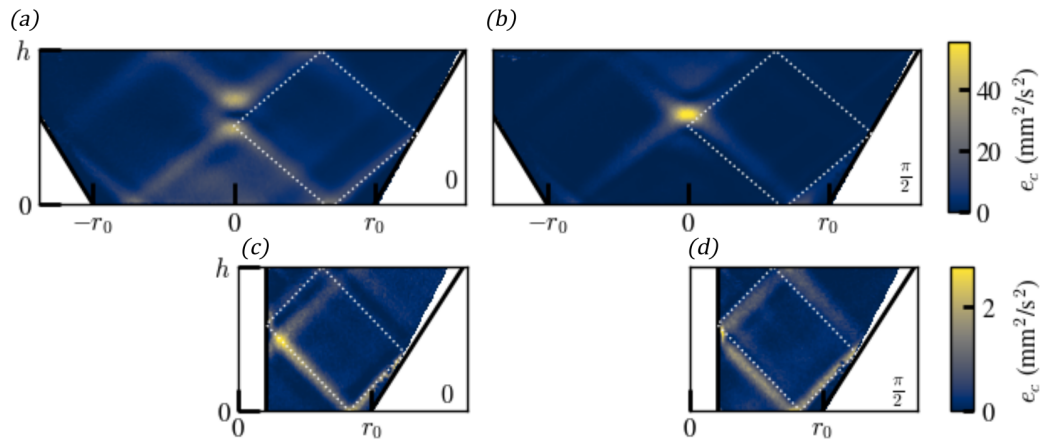


FIGURE 3.19 – Instantanés de l'énergie cinétique e_c dans le régime stationnaire avec $f_c = -1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, sans cylindre (a-b) et avec un cylindre de 11 cm de diamètre au centre (c-d), filtrée à leur fréquence de forçage respective. (b) et (d) sont déphasées de $\pi/2$ par rapport à (a) et (c) respectivement. La ligne blanche traitillée est le cycle limite donné par l'algorithme de tracé de rayons à $\omega_0/f_c = 0.767$ et $\omega_0/f_c = 0.69$ respectivement.

qui a tendance à la diminuer, et la dissipation visqueuse qui à l'inverse l'augmente [HAZEWINKEL et al. 2008]. Ainsi, cet équilibre ne devrait pas être influencé par la présence du tube au centre. Le fait que l'on observe une différence souligne l'importance de cette réflexion sur l'axe de rotation.

Dans les expériences en 2D, la réflexion sur un mur vertical ou horizontal sont parfaitement équivalente [DAVIS et al. 2019] (voir figure 3.18(e)), et on a vu ici que la réflexion sur l'axe était différente. La figure 3.19 montre des instantanés de l'énergie cinétique e_c à deux instants successifs et déphasés de $\pi/2$. Il est clair sur la figure 3.19(a) que le cycle limite calculé par tracé de rayon pour $\cos \theta = \omega_0/f_c = 0.767$ ($\sin \theta_0 = 0.64$) est parfaitement aligné et superposé avec le maximum de l'énergie cinétique obtenue expérimentalement de la réflexion sur la pente à la réflexion sur l'axe. Après ce point, la prédiction reste bien parallèle mais décalée par rapport à l'énergie cinétique. Un quart de période plus tard, sur la figure 3.19(b), une grande partie de l'énergie est localisée au centre de la cuve, les branches de l'attracteur ont disparu et ne suivent plus la prédiction. L'évolution temporelle de l'énergie cinétique dans le régime stationnaire est une oscillation entre ces deux états. La zone de mouvement intense semble être décalée vers le haut par rapport à la prévision faite par tracé de rayons. Le phénomène, même si présent, semble moins visible sur les champs montrés figures 3.19(c) et 3.19(d) dans le cas du tube de diamètre 11 cm.

Ces deux états peuvent être clairement identifiés sur la figure 3.20(a) qui montre le profil de l'énergie cinétique e_c le long d'une coupe verticale à 1 cm à droite de l'axe de rotation pour l'expérience sans cylindre. Les courbes pointillée et traitillée correspondent respectivement aux vues instantanées de la figure 3.19(a) et 3.19(b). La courbe pleine présente sur la même figure la moyenne sur 50 période de forçage de l'énergie cinétique qui est une enveloppe des deux courbes précédentes. Cette vue confirme les observations faites sur la figure 3.19.

La figure 3.20(b) montre la différence entre les profils moyens de l'expérience avec la cuve entière et celle avec le cylindre de 11 cm au centre. L'augmentation forte de l'énergie cinétique aux alentours de $z = 12 \text{ cm}$ dans les deux cas correspond au bon accord avec la prédiction du cycle limite avant la réflexion. La zone d'interaction est cependant plus grande dans le cas sans le tube. Les figures 3.18, 3.19 et 3.20 sont des indices que la réflexion sur l'axe affecte effectivement l'attracteur. Des expériences avec des tubes de différents diamètres montrent que ceux-ci doivent être suffisamment gros pour empêcher cette interaction au centre, avec une taille caractéristique de 10 cm.

C. AU-DELÀ DU RÉGIME FAIBLEMENT NON-LINÉAIRE

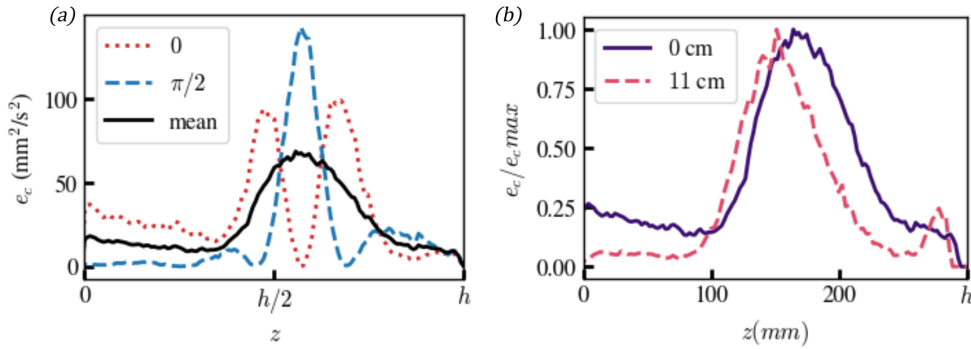


FIGURE 3.20 – (a) Profil le long d’une coupe verticale de l’énergie cinétique e_c dans une expérience d’ondes inertielles ($f_c = -1.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), 1 cm à côté du milieu de la cuve. La ligne pointillée et la ligne traitillée sont des profils instantanés déphasés de $\pi/2$. La ligne continue est le profil moyenné sur $50T_0$. (b) Profil le long d’une coupe verticale de l’énergie cinétique normalisée $e_c/e_{c,max}$ moyennée dans une situation sans cylindre (ligne pleine) et avec un tube de diamètre 11 cm (ligne traitillée).

Conclusion

La convergence vers une collection d’attracteurs 2D organisés sur un tore anguleux a été prédite à l’aide d’un algorithme de tracé de rayons pour une gamme de paramètres et notamment pour la fréquence de forçage. Armé de cette connaissance, des expériences utilisant un forçage continu sinusoïdal ont montré l’existence d’une telle structure dans le cas où le forçage est faible. Ce résultat est d’ailleurs valable pour des ondes internes de gravité comme pour des ondes inertielles ou encore des ondes gravito-inertielles, combinaison des deux. Dans une vue verticale, coupe (e_r, e_z) , des attracteurs $(1,1)$ sont observés et les vues verticales montrent une structure suivant la symétrie $m = -1$ du forçage. La réponse linéaire du système à une impulsion révèle qu’en plus de ces attracteurs, des ondes stationnaires sont facilement excitées. Celles-ci se révèlent bien modélisées par des modes de la cuve.

En augmentant l’amplitude de forçage, il a été possible de déclencher une l’instabilité de résonance triadique (TRI) grâce à la focalisation des ondes sur l’attracteur. Des différences ont été observées dans le déclenchement de cette instabilité pour les ondes internes de gravité et les ondes inertielles. Dans le premier cas, une des ondes secondaire excitée se trouve être un mode de résonance, et le spectre de la vitesse montre trois pics bien définis. Dans le second cas ce mécanisme n’est pas possible, les fréquences des modes étant plus élevées que la zone des attracteur $(1,1)$, le spectre présente alors un ensemble de couples possibles pour les ondes secondaires.

Le mécanisme de l’interaction sur l’axe reste mal compris, les expériences suggèrent que la convergence vers l’axe de symétrie provoque du mélange et dissipe fortement l’énergie. Une disparition de la structure de l’attracteur est observée à forte amplitude de forçage dans le cas des ondes inertielles. Cependant, à faible amplitude, il est possible de retrouver un comportement proche de ce qui est observé en 2D par l’ajout d’un cylindre au centre de la cuve d’un diamètre d’environ 10 cm sur lequel les ondes se reflètent et évite l’interaction au centre.

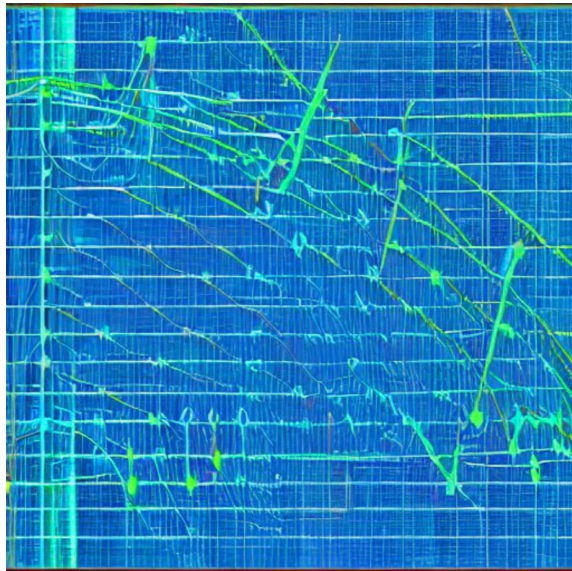
Contrairement à une étude antérieure en deux dimensions [DAVIS et al. 2020] ou dans d’autres dispositifs [LANCHON et al. 2023; RODDA et al. 2022; SAVARO et al. 2020], le régime de la turbulence d’onde n’a pas été observé, ni même un début de cascade de TRI. L’énergie n’est dissipée par TRI seulement à amplitude moyenne, à fortes amplitudes, c’est la turbulence et le déferlement au centre de la cuve qui la dissipent.

CHAPITRE 3. ATTRACTEURS AXISYMÉTRIQUES

CHAPITRE

4

INSTABILITÉ D'UN MODE D'ONDES
INTERNES DE GRAVITÉ DANS UNE
STRATIFICATION NON-UNIFORME



Instabilité d'un mode, vue d'IA

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

Ce chapitre est la synthèse d'expériences réalisées conjointement avec Dheeraj Varma lors de son post-doc au laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon (2021-2023) ainsi que d'un travail pratique long de M2 d'Adria Rospars en novembre 2021. Une grande partie de ce chapitre est traduite et modifiée de l'article soumis : Varma D., Pacary C., Dauxois T., Joubaud S., *Experimental study of superharmonic internal wave resonant triads in finite-depth non-uniform stratifications* [VARMA et al. 2023a].

Comme nous l'avons vu, les expériences de laboratoire ne sont pas d'extension infinie, et les conditions aux limites peuvent faire apparaître des modes stationnaires (voir figure 3.9). De même, la profondeur moyenne des océans (3.8 km) représente 0.06% du rayon de la Terre, les ondes internes qui peuvent se propager sur plusieurs centaines de kilomètres seront donc affectées par cette profondeur finie. La description en ondes planes utilisée dans le chapitre 1 (partie 1.B.2) n'est donc pas toujours la meilleure représentation de ces ondes. On parlera plutôt ici de la propagation de modes, ayant une structure verticale fixée. Nous allons commencer par décrire cette structure. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que les ondes internes de gravité, $f_c = 2\Omega = 0$.

A Modes d'ondes internes de gravité

A.1 Structure Verticale

L'équation (1.36) obtenue précédemment décrit la partie perturbative d'un écoulement bidimensionnel, non visqueux, incompressible, non rotatif, dans l'approximation de Boussinesq, dans un milieu stratifié décrit par la pulsation de flottabilité $N(z)$ pour lequel les termes non-linéaires ont été négligés

$$\partial_{tt}^2 \Delta \psi^L = -N(z)^2 \partial_{xx}^2 \psi^L, \quad (4.1)$$

où $\psi^L(x, z, t)$ est la fonction courant solution de ce problème linéaire, le champ de vitesse étant donné par $(v_x^L, v_z^L) = (-\partial_z \psi^L, \partial_x \psi^L)$. Pour étudier la propagation de modes, la fonction courant est décomposée comme une somme d'ondes planes dans la direction horizontale possédant une certaine structure stationnaire $S(z)$, un mode, dans la direction verticale

$$\psi^L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{0,n}}{2} S_n(z) e^{i(k_{x,n}x - \omega_0 t)} + c.c., \quad (4.2)$$

où $c.c.$ dénote le complexe conjugué, en supposant les amplitudes $\psi_{0,n}$ constantes et $k_{x,n}$ le vecteur d'onde horizontal. La structure du mode, sa forme, $S_n(z)$ satisfait l'équation

$$\frac{d^2 S_n}{dz^2} + \frac{k_{x,n}^2 (N(z)^2 - \omega_0^2)}{\omega_0^2} S_n = 0, \quad (4.3)$$

ainsi que les conditions aux limites ($v_z = \partial_x \psi$ est nulle aux bords)

$$S_n(z=0) = S_n(z=H) = 0, \quad (4.4)$$

où H est la profondeur de la colonne de fluide. Dans le cas où la stratification est uniforme ($N = N_0$), on peut écrire

$$S_n(z) = \sin(k_{z,n}z), \quad (4.5)$$

$$k_{z,n}^2 = \frac{k_{x,n}^2 (N_0^2 - \omega_0^2)}{\omega_0^2} = \left(n \frac{\pi}{H}\right)^2, \quad (4.6)$$

en ayant prit $\max_z(S_n) = 1$. Cette dernière équation nous donne la relation de dispersion usuelle $\omega_0 = \sin \theta$ où θ est l'angle que fait le vecteur d'onde avec la verticale

$$\sin^2 \theta = \frac{k_{x,n}^2}{k_{x,n}^2 + k_{z,n}^2}, \quad (4.7)$$

A. MODES D'ONDES INTERNES DE GRAVITÉ

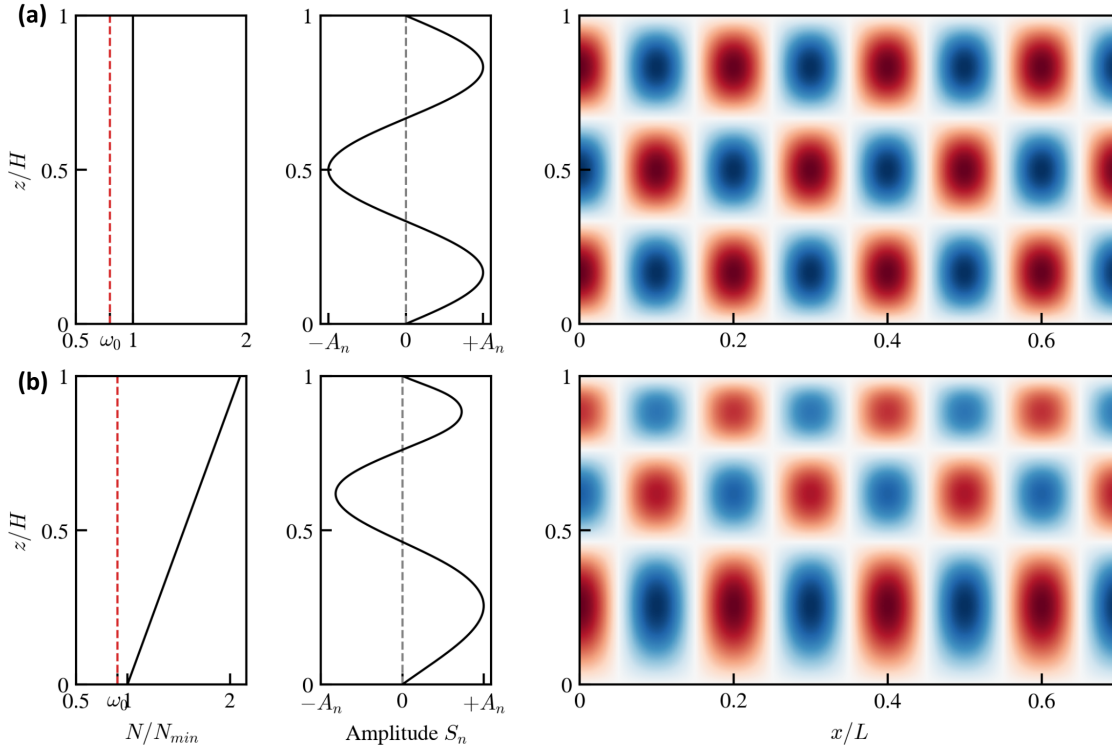


FIGURE 4.1 – (a) Mode-3 se propageant dans une stratification uniforme $N = N_{min}$ (gauche), structure verticale de la fonction d’onde (milieu) et amplitude de la fonction d’onde dans une cuve rectangulaire à un instant t . (b) Cas où la pulsation de flottabilité N varie linéairement avec la profondeur.

mais aussi la structure verticale des modes quantifiés

$$S_n = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{H} z\right). \quad (4.8)$$

C’est cette structure d’onde stationnaire que nous avons utilisée dans la partie 3.A.2.a pour décrire la structure verticale des modes dans la cuve tronconique remplie avec une stratification uniforme. Le numéro de mode, n , s’interprète comme le nombre d’extrema de la structure verticale de la fonction d’onde, et on parle alors de mode- n . Le cas $n = 3$ est illustré figure 4.1.

Dans le cas où la pulsation de flottabilité dépend de la profondeur ($N(z)$), dont on dira que la stratification est non-uniforme car la masse volumique ne varie plus linéairement avec la profondeur¹, il faut résoudre analytiquement ou numériquement l’équation (4.3) pour obtenir la structure des modes se propageant dans cette stratification non-uniforme. La figure 4.1(b) montre la solution de cette équation dans le cas d’une pulsation de flottabilité variant linéairement avec la profondeur. Le mode-3 montré possède une structure similaire au cas où la stratification est uniforme avec deux noeuds de la fonction d’onde (la vitesse horizontale, dérivée de la fonction d’onde en possède trois) mais la position de ces noeuds ainsi que l’amplitude des ventres est modifiée. Par ailleurs, la relation de dispersion n’est valable que localement, et le vecteur d’onde vertical devient aussi une notion locale (et d’autant moins bien définie lorsque $N(z)$ varie beaucoup dans une longueur d’onde, approximation WKB). Sur la figure 4.1(b), il serait possible trois longueurs

1. Le terme non-uniforme est choisi par rapport au terme non-linéaire pour la distinguer d’éventuels effets non-linéaires dus à une forte amplitude des ondes.

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

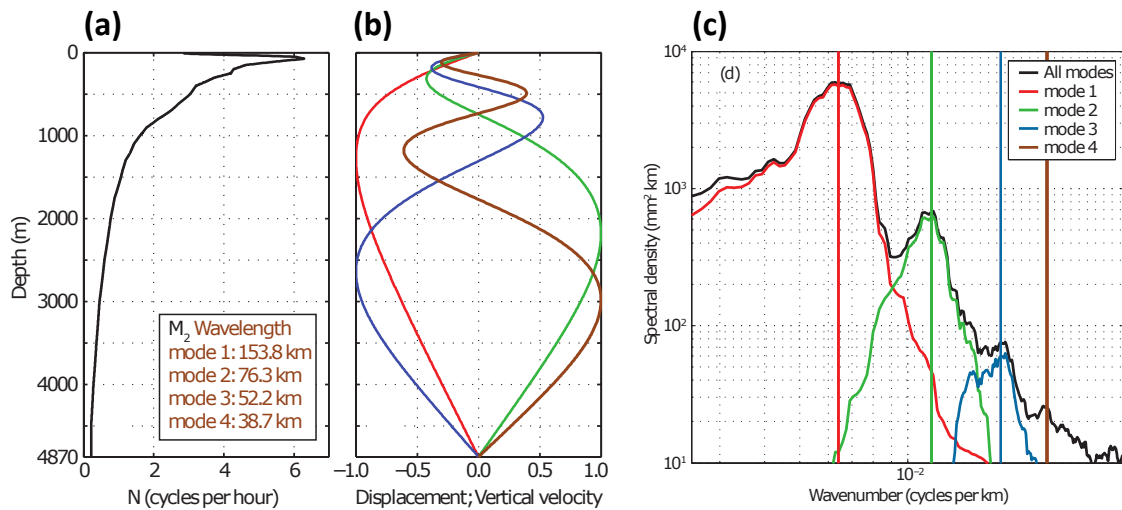


FIGURE 4.2 – (a) Profil de fréquence de flottabilité aux coordonnées (25.5 °N, 195 °E) (au large d’Hawaï) de la base de données du *World Ocean Atlas*. (b) Structures modales baroclines normalisées pour déplacement et la vitesse verticale. Les quatre modes baroclines sont des solutions de l’équation (4.3) à la fréquence des marées M_2 . Les longueurs d’onde horizontales des modes 1 à 4 des marées internes M_2 sont données dans l’insert. (c) Spectre spatial de l’océan à la fréquence de la marée M_2 duquel a été filtré les basses fréquences ($\lambda > 1000$ km), calculé le long de *TOPEX/Poseidon-Jason-1-Jason-2 (T/P-J1-J2) track 249*. Les lignes rouges, vertes et bleues indiquent respectivement les spectres des composantes obtenues avec un filtre passe-bande pour les modes 1 ([100 – 500]km), 2 ([60 – 120]km) et 3 ([45 – 65]km). Les lignes verticales indiquent les maxima des modes 1 (160 km), 2 (80 km), 3 (52 km) et 4 (40 km) des marées internes M_2 . Extraites de [ZHAO et al. 2012].

d’ondes verticales à partir des trois ventres de la fonction d’onde. Il n’y a alors plus de relation directe entre le vecteur d’onde k_z et le numéro du mode n .

La figure 4.2 montre la variation de N dans l’océan et la structure des modes correspondants. La stratification dans l’océan n’est pas uniforme, le profil semble plutôt exponentiel et on voit dans les 100 premiers mètres la thermocline où la densité varie rapidement. Les modes ne sont donc pas non plus de la forme $\sin(nk_z)$. Cependant, hors de la thermocline, l’évolution de N étant monotone et assez lente, les structures verticales ressemblent donc à des fonctions trigonométriques déformées : les variations sont plus rapides et l’amplitude moins grande lorsque N est plus grand.

[ZHAO et al. 2012] utilisent l’information sur les modes pour détecter les ondes internes de gravité dans certaines parties de l’océan, générées par la topographie sous-marine à la fréquence de la marée diurne M_2 . Il est ainsi possible de décomposer le spectre spatial en ces différents modes, et ainsi mesurer leur importance, leur direction et comment ils sont dissipés.

On pourrait faire l’analogie avec un ressort plus raide qui à même énergie oscille plus vite et à une moins grande amplitude. Ces modes ont été calculés pour une oscillation à la fréquence de la marée M_2 (de période 12h, soit $\omega_0 \simeq 0.1$ cycle par heure), et sont donc bien propagatifs sur toute la colonne d’eau. En effet, s’il existe une profondeur z_e telle que $\omega_0 > N(z_e)$, alors une onde interne ne peut plus se propager : elle est évanescente. La figure 4.3 montre ainsi la différence entre un mode-1 se propageant dans une stratification uniforme, et dans une stratification non-uniforme telle que $\omega_0 > N_{min}$. La structure avec un ventre est bien conservée mais elle est fortement distordue. L’onde est bien évanescente dans la zone où $N < \omega_0$. Dans ce cas là encore, la définition d’un vecteur d’onde vertical ne peut se faire que localement.

A. MODES D'ONDES INTERNES DE GRAVITÉ

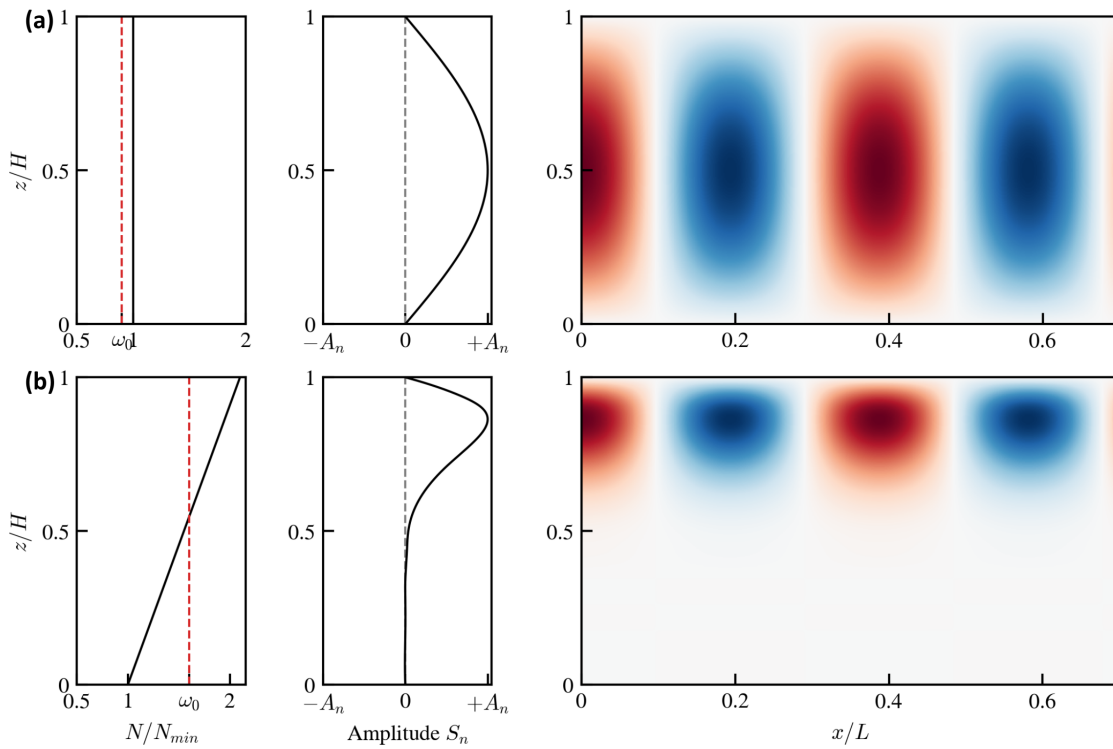


FIGURE 4.3 – (a) Mode-1 se propageant dans une stratification uniforme $N = N_{min}$ (gauche), structure verticale de la fonction d’onde (milieu) et amplitude de la fonction d’onde dans une cuve rectangulaire à un instant t . (b) Cas où la pulsation de flottabilité N varie linéairement avec la profondeur et la pulsation de forçage $\omega_0 > N_{min}$.

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

A.2 Motivation

Les ondes internes générées dans des régions spatialement localisées de l'océan en raison de la marée sur la topographie du fond génèrent une gamme de modes verticaux à la fréquence de la marée. Les modes de nombre n élevé (donc de petite longueur d'onde) se dissipent localement sous les forts effets de cisaillement provoquant une forte dissipation par viscosité ou même par des instabilité et du mélange. Les modes de nombre n faible peuvent se propager loin de leurs sites de génération [GARRETT et KUNZE 2007], transportant à la fois de l'énergie et de la quantité de mouvement. Plusieurs mécanismes sont alors possibles pour transférer l'énergie aux petites échelles : la diffusion par la topographie du fond de l'océan [JOHNSTON et MERRIFIELD 2003] et les plateaux continentaux [KUNZE et SMITH 2004], l'interaction avec les courants, des instabilités induites par la flottabilité et le cisaillement [ST. LAURENT et GARRETT 2002] ou finalement les interactions onde-onde, telles que les interactions de triade résonante [SARKAR et SCOTTI 2017; STAQUET et SOMMERIA 2002; TABAEI et al. 2005; VARMA et al. 2023b].

La plupart des études sur les interactions triadiques résonantes se sont concentrées sur l'instabilité triadique résonante [DAUXOIS et al. 2018; DAVIS et ACRIVOS 1967; FAN et AKYLAS 2021; STAQUET et SOMMERIA 2002; VARMA et al. 2023b] dans une stratification uniforme, où une onde primaire à ω_0 devient instable en excitant deux ondes filles à des fréquences subharmoniques ($< \omega_0$). [DAVIS et ACRIVOS 1967] a observé qu'une onde interne de mode-1, forcée au-delà d'un seuil d'amplitude, succombe à une instabilité subharmonique avec des fréquences d'ondes filles sensiblement différentes de la moitié de la fréquence de l'onde primaire [DAVIS et ACRIVOS 1967]. Il est aussi possible que deux ondes internes excitent une troisième onde à l'endroit de leur superposition, mécanisme de la résonance triadique super-harmonique en quelque sorte inverse au mécanisme subharmonique. Dans une étude théorique des triades résonantes d'ondes internes super-harmoniques, considérant une stratification uniforme de profondeur finie, [THORPE 1966] a identifié les conditions dans lesquelles deux modes m et n à la fréquence ω_0 sont en résonance triadique avec le mode $|m - n|$ à la fréquence $2\omega_0$. Les fréquences de résonance identifiées théoriquement par [THORPE 1966] auxquelles se produit la résonance triadique super-harmonique ont été validées par des simulations numériques [VARMA et al. 2020] et par des expériences en laboratoire [HUSSEINI et al. 2020]. [HUSSEINI et al. 2020] ont également saisi l'évolution spatiale initiale des modes d'ondes internes dans la triade résonante pour être quantitativement en bon accord avec les équations d'évolution de l'amplitude en incorporant les effets visqueux. L'excitation des super-harmoniques dues aux interactions résonantes a également été observée dans une étude expérimentale plus récente avec une géométrie confinée axisymétrique pour une stratification uniforme [BOURY et al. 2021].

La génération de super-harmoniques dans une stratification non uniforme fait l'objet d'une attention récente, que ce soit théoriquement [GURURAJ et GUHA 2022; VARMA et MATHUR 2017; WUNSCH 2015, 2017], expérimentalement [DOBRA et al. 2022; GHAEMSAIDI et al. 2016; WUNSCH et al. 2015] ou numériquement [BAKER et SUTHERLAND 2020; DIAMESSIS et al. 2014; GAYEN et SARKAR 2014; SUTHERLAND 2016; SUTHERLAND et DHALI WAL 2022; VARMA et al. 2020] du fait de leur importance géophysique. L'apport de cette étude est l'observation expérimentale d'une interaction super-harmonique résultant de l'interaction de modes dans un milieu stratifié non-uniformement. Dans une stratification non uniforme, une onde interne primaire auto-interagissant à la fréquence ω_0 pourrait également exciter une onde secondaire à la fréquence $2\omega_0$, ce qui est inhibé dans une stratification uniforme. En effet, [SUTHERLAND 2016] ont effectué des simulations numériques dans ce cadre et observé que même des modes individuels isolés peuvent générer des super-harmoniques en raison d'interactions résonantes entre triades. Dans le cadre théorique faiblement non linéaire, des études théoriques indépendantes menées par [VARMA et MATHUR 2017] et [WUNSCH 2017] ont identifié les conditions nécessaires à ce phénomène dans des stratifications non uniformes de type océanique. [VARMA et MATHUR 2017] a aussi envisagé l'excitation à partir de deux modes différents à une fréquence donnée ω_0 , d'un troisième mode à la fréquence super-harmonique $2\omega_0$.

A.3 Auto-interaction

De manière analogue à la partie 1.B.6, il faut prendre en compte les termes jacobiens afin d'obtenir les termes d'interaction. Il résulte de ces termes quadratiques la somme et la différence des modes précédents. On considère ici que seule l'onde primaire est présente initialement, ces termes quadratiques peuvent donc résulter en un mode super-harmonique à la fréquence $\omega_0 + \omega_0 = 2\omega_0$ de structure \bar{h}_{mn} et une onde stationnaire ($\omega_0 - \omega_0 = 0$) de structure \bar{g}_{mn}

$$\psi^{NL} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{h}_{mn}(z) e^{i[(k_m+k_n)x-2\omega_0 t]} + \bar{g}_{mn}(z) e^{i[(k_m-k_n)x]} + c.c. . \quad (4.9)$$

La structure $\bar{h}_{mn}(z)$ de l'onde super-harmonique est régie par l'équation

$$\frac{d^2 \bar{h}_{mn}}{dz^2} + (k_m + k_n)^2 \frac{N^2(z) - 4\omega_0^2}{4\omega_0^2} \bar{h}_{mn} = \bar{C}_{mn}(z) \quad (4.10)$$

et $\bar{h}_{mn}(z)$ vérifie aussi les conditions aux limites $\bar{h}_{mn}(z=0) = \bar{h}_{mn}(z=H) = 0$. Le terme de forçage $\bar{C}_{mn}(z)$ est une fonction qui dépend de la structure de l'onde primaire $S(z)$, des vecteurs d'ondes horizontaux k_x , du profil de stratification $N(z)$ et la fréquence de forçage ω_0 . Il existe une équation similaire pour \bar{g}_{mn} . Plus de détails sur la forme des fonctions analytiques, leurs simplifications et les dérivations détaillées, valables pour toute stratification arbitraire $N(z)$ peuvent être trouvés dans [VARMA et MATHUR 2017] que nous nous abstenons de montrer ici.

Pour une stratification non uniforme $N(z)$, une combinaison modale, (m, n) et une fréquence ω_0 données, $\bar{h}_{mn}(z)$ est calculé numériquement en résolvant l'équation (4.10) avec les conditions aux limites comme un problème de valeur aux limites à l'aide de la fonction Matlab intégrée `bvp4c`. Lorsque les modes (m, n) à ω_0 forment une triade résonante avec le mode- p à $2\omega_0$, l'amplitude \bar{h}_{mn} diverge [VARMA et MATHUR 2017]. Cette méthode permet d'identifier les fréquences de forçage ω_0 pour lesquelles la résonance a lieu. Pour une stratification uniforme $N(z) = N_0$, Le nombre p de l'onde super-harmonique à $2\omega_0$ satisfait la condition $p = |m - n|$ [THORPE 1966]. Une telle condition n'est pas nécessairement vraie pour une stratification non uniforme, comme le montre une étude théorique de [VARMA et MATHUR 2017].

A.4 Objectif

La propagation de modes d'onde interne de gravité peut engendrer trois types d'instabilité triadique : La superposition de deux modes (m, n) à ω_0 provoque un mode- p à la fréquence $2\omega_0$, un mode- n isolé à ω_0 génère un mode- p à la fréquence $2\omega_0$ ou un mode- n isolé à ω_0 engendre deux ondes sous-harmoniques telles que $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

$$\begin{aligned} \text{mode } n, (\omega_0) + \text{mode } m, (\omega_0) &\rightarrow \text{mode } p, (2\omega_0) \quad \text{super - harmonique de superposition} \\ \text{mode } n, (\omega_0) &\rightarrow \text{mode } p, (2\omega_0) \quad \text{super - harmonique d'un mode seul} \\ \text{mode } n, (\omega_0) &\rightarrow \text{mode } p, (\omega_1) + \text{mode } q, (\omega_2) \quad \text{sous - harmonique} \end{aligned}$$

[VARMA et al. 2020] a effectué des simulations numériques en considérant un profil de stratification non uniforme de type océanique avec une pycnocline, pour montrer l'auto-interaction du mode-3 à la fréquence de résonance et autour de celle-ci, ce qui entraîne l'excitation du mode-1 super-harmonique. Les simulations numériques de [BAKER et SUTHERLAND 2020] ont montré une auto-interaction non linéaire d'une marée interne de mode-1 dans une stratification non uniforme pour exciter des super-harmoniques de mode-1. Dans des simulations numériques plus récentes réalisées par [SUTHERLAND et DHALI WAL 2022] avec un forçage non linéaire plus important, on a observé une cascade super-harmonique d'énergie du mode-1 primaire vers les harmoniques supérieures du mode-1.

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

Nous regarderons chacune des facettes de l'interaction triadique résonante résultant d'interactions non linéaires de modes d'ondes internes dans un milieu stratifié non uniforme de profondeur finie dans deux parties : super-harmonique (divisée entre l'interaction mode-3 - mode-4, et l'auto-interaction) et sous-harmonique.

B Mise en place expérimentale

Les expériences ont été réalisées dans un réservoir acrylique mince et long de 4 m de long, 0.17 m de large et 0.4 m de haut, composé de 5 éléments de 0.8 m de long, comme le montre la figure 4.4. Le rapport d'aspect de la cuve permet de considérer le déplacement comme bidimensionnel. Sa longueur permet de ne pas avoir d'onde réfléchie pendant un temps suffisant à l'acquisition.

La stratification non-uniforme utilisée a été choisie telle que $N(z)$ est linéaire en z (ce qui était pour nous la plus simple des non-uniformités). La non-linéarité est caractérisée par un coefficient rapport de la pulsation de flottabilité en haut et en bas de la cuve $\beta = N_{max}/N_{min}$. Celle-ci s'écrit

$$\frac{N(z)}{N_{min}} = 1 + (\beta - 1) \frac{z}{H}, \quad (4.11)$$

soit une variation cubique de la masse volumique $\rho_b(z)$. La figure 4.5 montre le profil de N considéré dans l'équation (4.11) dans un colonne d'eau de hauteur H .

La méthode du double bac modifiée [ECONOMIDOU et HUNT 2009; HILL 2002; OSTER 1965] (voir partie 1.C.2) a été utilisée pour mettre en place une telle stratification sur une profondeur de $H = 0.325$ m. Après le remplissage, le profil vertical de densité a été mesuré par une sonde de conductivité-température (CT) à déplacement vertical calibrée à l'aide d'échantillons de densité connus. Un profil linéaire $N(z)$ comme défini par l'équation (4.11) a été ajusté à la stratification mesurée en utilisant la méthode des moindres carrés pour obtenir β et N_{min} . L'erreur expérimentale dans la mesure de β est estimée à environ 3% – 5%. Cette erreur est liée à la présence de petites

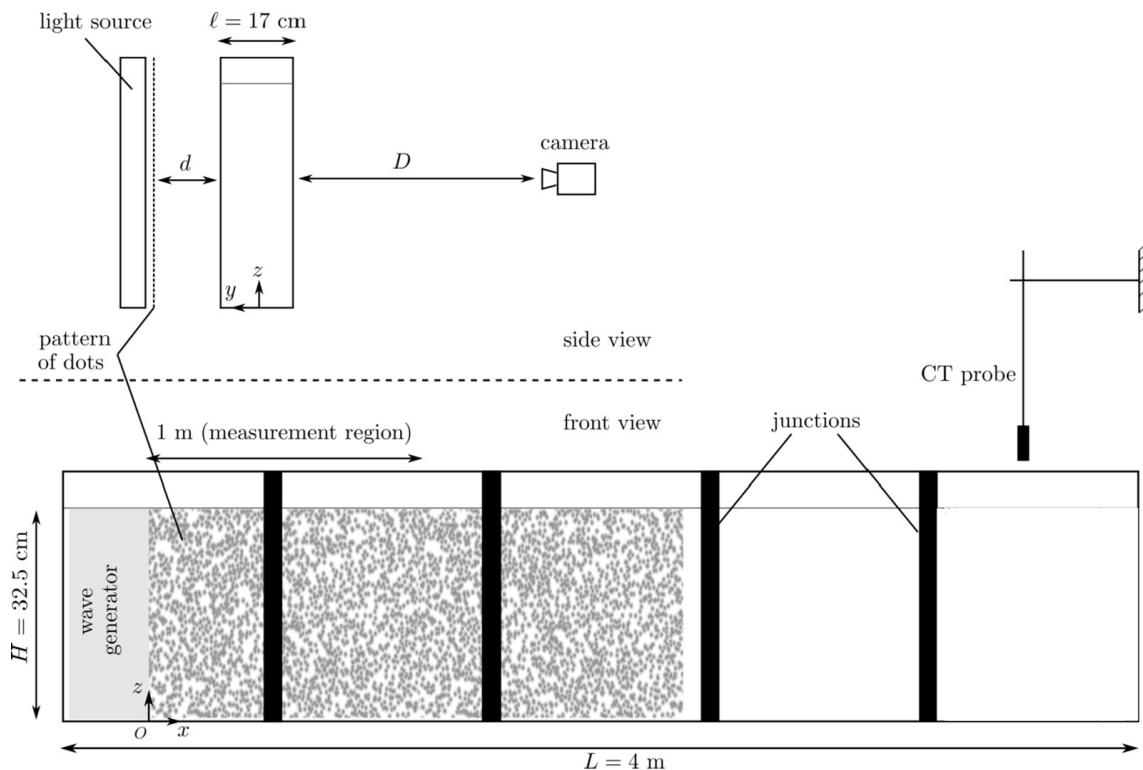


FIGURE 4.4 – Schéma du dispositif expérimental. Un motif de points aléatoire rétroéclairé est observé à travers la cuve, remplie avec la stratification désirée mesurée par une sonde conductivité-température (CT), par une caméra. Les ondes sont générées avec le générateur GOAL en $x = 0$. Extrait de [HUSSEINI et al. 2020].

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

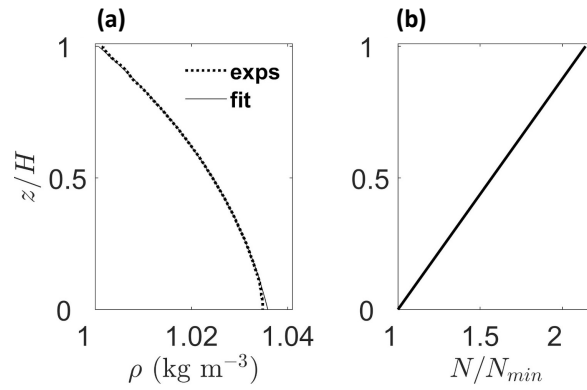


FIGURE 4.5 – (a) Exemple de profil de masse volumique mesuré (ligne pointillée) et ajusté selon l'équation (4.11) (ligne continue). (b) Le profil linéaire de $N(z)$ ajusté avec $\beta = 2.1$. Extrait de [VARMA et al. 2023a].

couches mixtes (environ 3 mm) à la surface libre et au fond du réservoir ainsi qu'à la sensibilité au bruit de la méthode d'ajustement.

Pour toutes les expériences réalisées, $N(z = 0) = N_{min}$ a toujours été fixé à $N_{min} = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, et β a été varié pour changer la force de la non-linéarité ($\beta = 1$ correspondant à une masse volumique variant linéairement avec la profondeur). Un profil de densité mesuré représentatif ainsi que le profil de densité ajusté correspondant à un $N(z)$ linéaire sont illustrés figure 4.5.

Le générateur d'ondes interne comprend 50 plaques de 6.5 mm d'épaisseur, chacune étant entraînée indépendamment par un moteur (générateur GOAL, voir partie 1.C.4). Les plaques oscillent toutes horizontalement à la fréquence de forçage ω_0 avec une amplitude constante. Cette amplitude est déterminée pour chaque plaque par le profil vertical du champ de déplacement horizontal. La vitesse horizontale est donnée par la fonction d'onde, $v_x = -\partial_z \psi$, de laquelle on peut obtenir le champ de déplacement Γ_x

$$\Gamma_x(x = 0, z, t) = \left(A_n \frac{dS_n}{dz} + A_m \frac{dS_m}{dz} \right) \cos \omega_0 t. \quad (4.12)$$

Le forçage est ainsi somme des modes verticaux m et n avec des amplitudes A_m et A_n , oscillant en phase en $x = 0$, position du générateur. La figure 4.6 montre un mode-3, un mode-4 et leur superposition dans le cas d'une stratification uniforme dont la structure est donnée par l'équation (4.5).

Lorsque la stratification est non-uniforme, l'équation (4.3) est résolue numériquement à partir du profil de masse volumique mesuré et de la fréquence de forçage voulue ω_0 . L'équation (4.12) permet alors d'obtenir le profil de déplacement, qui est discrétisé sur 50 valeurs et envoyé au générateur. La figure 4.7 montre la structure des modes 3 et 4 pour la stratification mesurée avec $\beta = 2.1$ (figure 4.5). On constate que comme sur la figure 4.2(b), les modes sont des cosinus déformés avec des variations plus lentes et une amplitude plus grande là où N est le plus faible (en bas de la cuve ici).

Pour les expériences réalisées sur la superposition de deux modes, A_m et A_n ont été fixées à 5 mm. Pour l'auto-interaction, $A_n = 10$ mm a été utilisé. Le tableau 4.1 présente tous les détails des expériences réalisées en faisant varier β à des fréquences résonantes et non résonantes. Les fréquences de résonance $\omega_{res}^{th}/N_{min}$ présentées ont été obtenues en examinant numériquement la divergence de l'amplitude super-harmonique \bar{h}_{mn} pour une combinaison de modes (m, n) donné et le profil de stratification mesuré.

La technique de Schlieren synthétique [DALZIEL et al. 2000] (voir partie 1.C.5.b) est utilisée pour mesurer les gradients de densité horizontaux ($\partial_x \rho'$) et verticaux ($\partial_z \rho'$). Une caméra CCD AVT Pike F-505 d'une résolution de 2452×2054 pixels, placée à 2.8 m du réservoir capture des images

B. MISE EN PLACE EXPÉRIMENTALE

Stratification	Modes primaires	β	$\omega_{res}^{th}/N_{min}$	mode p à $2\omega_0$
$N(z)$ linéaire, eq. (4.11)	(3,4)	1.3	0.5703	1
	(3,4)	1.6	0.6729	1
	(3,4)	1.8	0.7451	1
	(3,4)	2.1	0.8571	1
	(3,4)	2.2	0.8953	1
$N(z)$ linéaire, eq. (4.11)	(3,4)	2.1	0.6743	2
$N(z)$ linéaire, eq. (4.11)	3	2.1	0.8326	1
	4	3	1.2368	1
Type océan, eq. (4.17)	(3,4)	3	1.3705	1
Type océan, eq. (4.17)	3	3	0.6842	2

TABLE 4.1 – Valeurs des paramètres pour toutes les expériences réalisées dans le cadre de la génération d’harmoniques.

à une fréquence de 6 Hz du motif aléatoire de points rétro-éclairé placé derrière le réservoir à une distance de $d = 0.125$ m. Pour chacune des images capturées, le déplacement apparent des points est mesuré par l’algorithme CIV (voir partie 1.C.5.c). Le résultat final est une mesure quantitative du champ de gradient de la partie perturbative de la masse volumique $\nabla\rho'$ dans un domaine de $1 \text{ m} \times 32.5 \text{ cm}$.

La superposition de modes ainsi que leur auto-interaction ont été étudiées seulement pour les modes verticaux 3 et 4. La raison de ce choix de combinaison modale $(m, n) = (3, 4)$ est liée aux limitations expérimentales de la longueur du réservoir, des vitesses de groupe des modes et d’une fenêtre temporelle suffisante pour l’analyse. Les modes 1 et 2 ont des vitesses de groupe plus élevées que les modes supérieurs ($m > 2$), et sont donc plus rapidement réfléchis à l’extrémité de la cuve. L’analyse a été effectuée dans la fenêtre temporelle pendant laquelle un régime stationnaire d’amplitude constante est atteint, mais avant que l’onde réfléchie ne revienne dans la région de visualisation.

Le profil de stratification non-uniforme considéré est un profil linéaire $N(z)$ dont la pente est spécifiée par $(\beta - 1)$. Selon la fréquence de forçage $\omega_0 < N_{min}$ ou $\omega_0 > N_{min}$, les modes d’ondes internes peuvent se propager entièrement ou partiellement dans la colonne verticale de fluide. Toutes les séries d’expériences réalisées avec différentes valeurs de β et de fréquences de forçage sont indiquées dans le tableau 4.1.

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

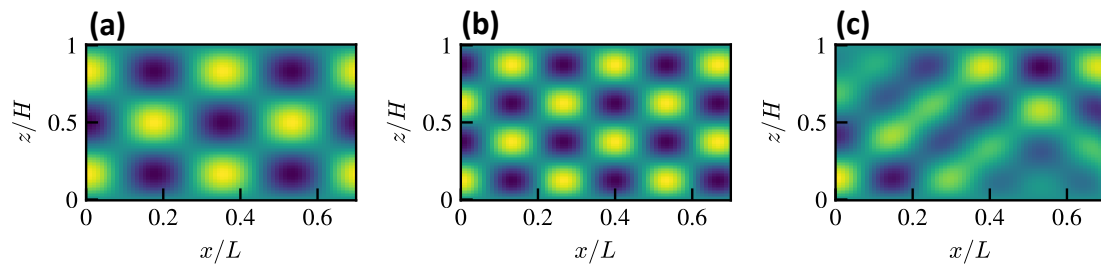


FIGURE 4.6 – Champs de vitesse synthétique d'un mode-3 (a), d'un mode-4 (b) et de leur superposition (c), calculés pour $N = Cste$, $\omega/N = 0.6$.

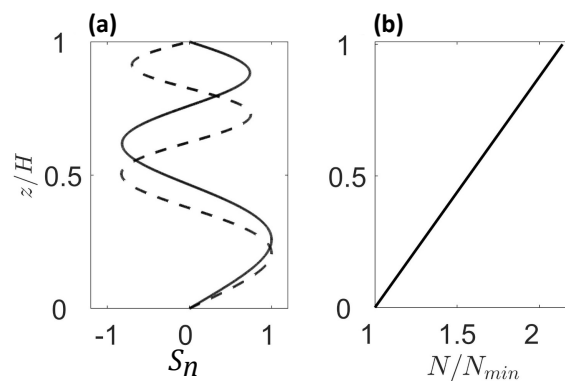


FIGURE 4.7 – Profils $S_3(z)$ et $S_4(z)$ solutions de l'équation (4.3) pour le mode-3 (courbe pleine) et le mode-4 (courbe en pointillés) correspondant à la stratification (b) avec $\beta = 2.1$ (figure 4.5) et $\omega_0/N_{min} = 0.9$.

C Génération d'une harmonique

Cette section présente les résultats obtenus pour la génération d'une harmonique par interaction résonante d'un mode avec lui-même ou avec un autre. Le but est de montrer la différence entre ce qui est attendu pour une stratification uniforme et ce que l'on peut observer avec une stratification non-uniforme comme exposé précédemment et récapitulé dans le tableau 4.2.

Stratification	Linéaire	Non-linéaire
$N(z)$	N_0	$N_{min}(1 + (\beta - 1)z/H)$
Superposition (n, m)	Harmonique $p = n - m $	Harmonique p quelconque
Mode isolé n	/	Harmonique p quelconque

TABLE 4.2 – Différence dans la génération d'une harmonique à $2\omega_0$ à partir d'un champ de vitesse forcé à ω_0 entre une stratification linéaire ou non.

C.1 Interaction entre deux modes

L'interaction intermodale de deux modes d'ondes internes (m, n) à la fréquence ω_0 dans une stratification uniforme ne peut aboutir qu'à l'excitation du mode- $(p = |m - n|)$ à la fréquence super-harmonique $2\omega_0$ [THORPE 1966]. Mais pour une stratification non uniforme, ce critère spécifique du mode- p excité à la fréquence super-harmonique $2\omega_0$ satisfaisant $p = |m - n|$ n'est pas nécessaire, comme le montre l'étude théorique de [VARMA et MATHUR 2017]. Cela peut se comprendre par la perte de l'équivalence entre la numérotation du mode et le vecteur d'onde vertical, qui n'est plus défini que localement. En effet, dans le cas d'une stratification uniforme, le vecteur d'onde associé à un mode- n est $k_{z,n} = n\pi/H$. La relation $p = |m - n|$ est alors directement issue de la relation de résonance spatiale $k_{z,p} = k_{z,n} - k_{z,m}$, ce qui n'est plus le cas dans une stratification non-uniforme.

a Mode-1 super-harmonique

C'est le cas usuel où $p = 4 - 3 = 1$, le calcul de \bar{h}_{34} donné par (4.10) permet de déterminer la fréquence de résonance $\omega_{res}(1, \beta)$ qui dépend du paramètre caractérisant la stratification β . L'évolution de ω_{res} en fonction de β est montré figure 4.8 pour une gamme continue de valeurs de β variant de 1 à 2.5. Dans la limite de $\beta = 1$, qui correspond à une stratification uniforme ($N(z) = N_{min} = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), le résultat $\omega_{res}/N_{min} = 0.4841$ est identique à l'étude dans le cas linéaire [HUSSEINI et al. 2020]. La fréquence de résonance augmente de façon monotone avec la valeur de β , mais la fréquence harmonique $2\omega_{res}$ reste inférieure à $N_{max} = \beta N_{min}$ de sorte que le mode correspondant est propagatif au moins proche de la surface. On voit d'ailleurs que pour $\beta > 1.5$, $2\omega_{res} > N_{min}$ et donc que le mode correspondant est partiellement évanescent.

Dans les expériences, une combinaison des modes 3 et 4 ($A_3 = A_4 = 5 \text{ mm}$) a été forcée pour diverses valeurs de la fréquence de forçage ω_0 . Prenons pour exemple le cas $\beta = 2.1$, l'amplitude du terme super-harmonique dans l'équation (4.10), c'est-à-dire $\bar{h}_{34}(z)$, diverge à $\omega_{res}^{th}/N_{min} = 0.8571$, ce qui correspond au mode super-harmonique 1 excité à la fréquence $2\omega_{res}^{th}/N_{min}$. Les modes 3 et 4 sont forcés à $\omega_0 = \omega_{res}^{th} = 0.8571 N_{min}$ a priori proche de la résonance. La figure 4.9 montre un instantané du champ de gradient de densité horizontal à $t = 20T_0$, où $T_0 = 2\pi/\omega_{res}$. Le champ filtré à la fréquence de forçage (figure 4.9(b)) présente une structure spatiale correspondant bien à une superposition du mode-3 et du mode-4, forcé à partir de $x = 0$. La figure 4.9(c) montre le champ filtré à la fréquence super-harmonique $2\omega_{res}$ pour la même expérience, qui présente une structure verticale de mode-1. Celui-ci ne se propage que partiellement dans la colonne de fluide lorsque $1 < 2\omega_{res}/N_{min} < \beta$. Cette observation

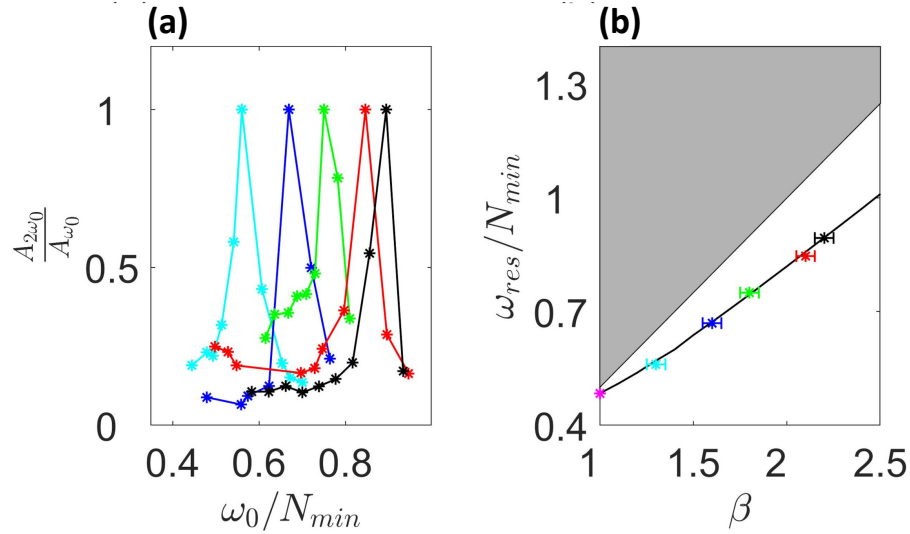


FIGURE 4.8 – (a) Intensité normalisée à 1 de la résonance mesurée par le rapport entre l’amplitude de la super-harmonique $A_{2\omega_0}$ et l’amplitude de forçage A_{ω_0} . Chaque couleur correspond à une stratification β différente. Chaque point représente une fréquence de forçage ω_0 . (b) Variation continue de la fréquence de résonance théorique avec β (courbe pleine), correspondant à l’excitation du mode-1 super-harmonique. Les fréquences de forçage pour lesquelles le mode super-harmonique serait totalement évanescent ($2\omega_0/N_{min} > \beta$) sont grisées. Les points expérimentaux sont superposés. Extrait de [VARMA et al. 2023a].

expérimentale valide la prédiction théorique de l’interaction résonante triadique du mode-3 et du mode-4 à $\omega_{res}/N_{min} = 0.8571$ pour $\beta = 2.1$ excitant un mode super-harmonique 1.

Avec la même stratification (la même journée), des expériences sont également réalisées à plusieurs autres fréquences de forçage afin d’identifier le véritable pic de résonance dans les conditions expérimentales. Pour pouvoir comparer le transfert d’énergie, on rapporte l’intensité du pic super-harmonique à celle du forçage $A_{2\omega_0}/A_{\omega_0}$, ce qui permet d’éliminer le changement d’efficacité du générateur en fonction de la fréquence. C’est le maxima de cette intensité relative qui permet de déterminer la fréquence de résonance expérimentale ω_{res} . Répétée pour divers profils de stratification avec des valeurs de β dans la plage $1 < \beta < 2.5$, cette mesure permet de confirmer quantitativement et de manière très satisfaisante la courbe théorique $\omega_{res}(1, \beta)$ en ajoutant les points expérimentaux sur la figure 4.8.

b Mode-2 super-harmonique

Dans une stratification non-uniforme de profondeur finie, il n’est pas nécessaire que le mode super-harmonique excité par l’interaction résonante de (m, n) à la fréquence ω_0 soit le mode $|m - n|$ [VARMA et MATHUR 2017]. C’est la non-linéarité de la stratification qui permet cette interaction. Pour une stratification correspondant à une valeur donnée de β , d’autres modes que celui-ci pourraient également être excités par interaction triadique résonante super-harmonique. Pour explorer cette possibilité, des expériences ont également été réalisées autour de la fréquence de résonance théorique du mode- $p = 2$, $\omega_{res}^{th}(2, \beta)/N_{min}$ à laquelle les modes 3 et 4 à ω_{res}/N_{min} interagiraient de manière résonante pour exciter un mode super-harmonique 2 à $2\omega_{res}/N_{min}$.

Pour la même stratification $\beta = 2.1$ (figure 4.5), cette résonance a lieu pour $\omega_{res}^{th}(2, 2.1)/N_{min} = 0.6743$. Des expériences ont donc été réalisées en forçant le mode-3 et le mode-4 autour de cette fréquence. La figure 4.10 montre le champ de gradient de densité horizontal instantané à $t = 20T_0$ tel qu’il est forcé par le générateur d’ondes à partir de $x = 0$. Le

C. GÉNÉRATION D'UNE HARMONIQUE

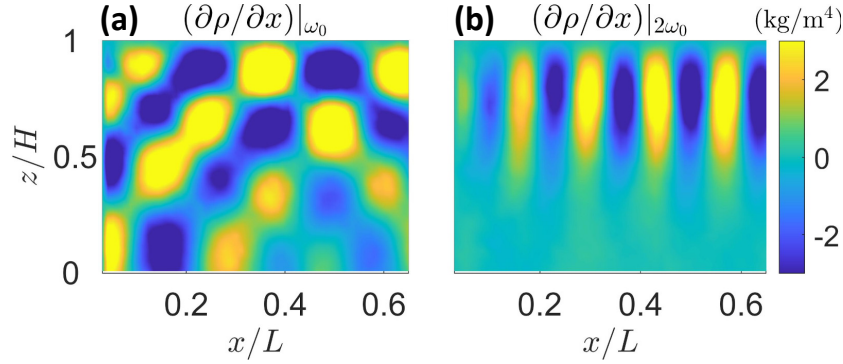


FIGURE 4.9 – Gradient horizontal de densité pour l'interaction de superposition $(m, n, p) = (3, 4, 1)$ où les modes sont forcés à la fréquence de résonance théorique $\omega_{res}^{th} = 0.8571$ pour $\beta = 2.1$. (a) Filtré à la fréquence de forçage et (b) filtré à la fréquence super-harmonique. Ces instantanés sont pris à $t = 20T_0$, où $T_0 = 2\pi/\omega_{res}^{th}$. Extraite de [VARMA et al. 2023a].

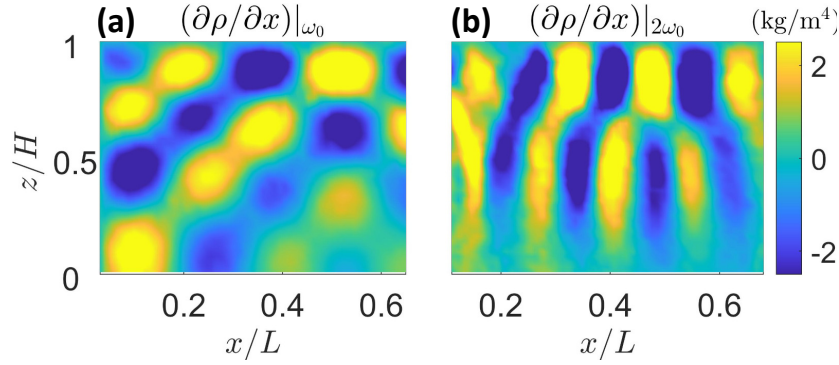


FIGURE 4.10 – Idem que la figure 4.9 pour $(m, n, p) = (3, 4, 2)$. Extrait de [VARMA et al. 2023a].

champ filtré à la fréquence de forçage résonante $\omega_{res}/N_{min} = 0.6743$ représenté figure 4.10(b) montre que le champ d'ondes primaires est bien composé des modes de forçage, mode-3 et mode-4. Lorsque le champ est filtré à la fréquence super-harmonique (figure 4.10(c)) une structure de mode-2 est observée, de plus en plus clairement à mesure que l'on s'éloigne du générateur d'ondes. Ainsi, l'interaction résonante des modes 3 et 4 excite un mode super-harmonique 2, ce qui n'était pas possible dans le cas d'une stratification uniforme.

En résumé, on a vu dans cette partie que

$$n = 3(\omega_{res}(1, \beta)) + m = 4(\omega_{res}(1, \beta)) \rightarrow p = 1(2\omega_{res}(1, \beta)) \quad (4.13)$$

est une interaction possible quelle que soit la stratification et que

$$n = 3(\omega_{res}(2, \beta)) + m = 4(\omega_{res}(2, \beta)) \rightarrow p = 2(2\omega_{res}(2, \beta)) \quad (4.14)$$

est aussi possible, et peut être observé seulement lorsque la stratification n'est pas uniforme.

C.2 Auto-Interaction

Une autre particularité de la propagation de mode dans une stratification non-uniforme, est que un mode peut interagir avec lui-même. Mathématiquement, la non-linéarité de $N(z)$ fait que

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

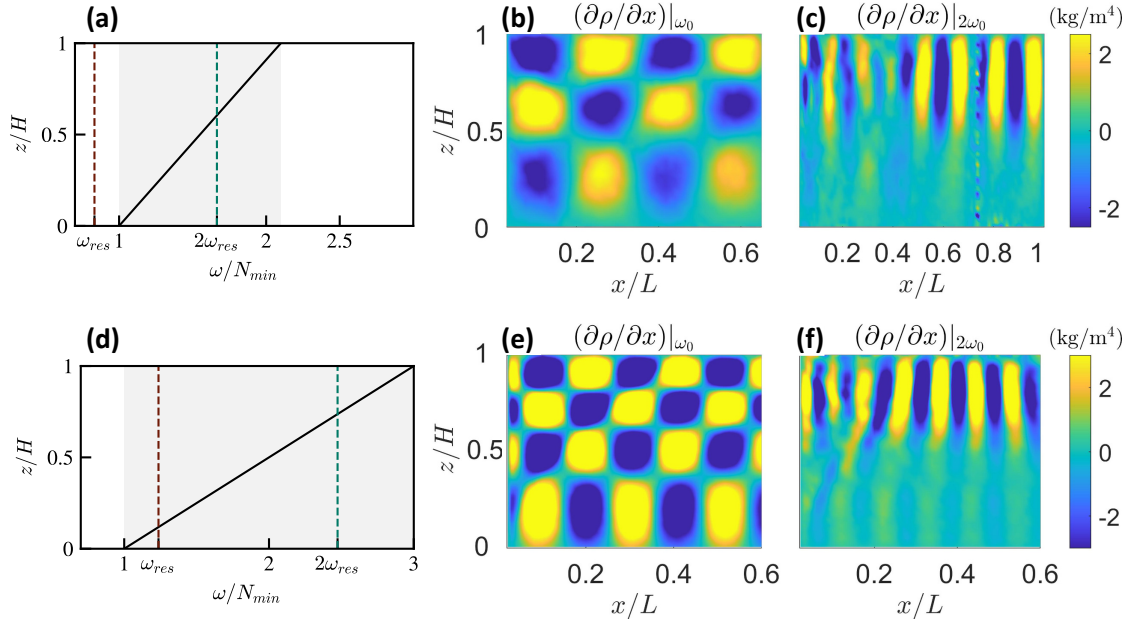


FIGURE 4.11 – (a) et (d) La ligne continue noire donne la variation de N en fonction de la profondeur. Les lignes pointillées indiquent la fréquence $\omega_{res}^t h$ et la super-harmonique. La zone grisée marque une propagation partielle. Gradient horizontal de densité pour l’auto-interaction $(n, p) = (3, 1)$ où le mode-3 est forcé à la fréquence de résonance théorique ω_{res}^{th} pour $\beta = 2.1$. (b) Filtré à la fréquence de forçage et (c) filtré à la fréquence super-harmonique. (e) et (f), idem pour $(n, p) = (4, 2)$ et $\beta = 3$. Ces instantanés sont pris à $t = 20T_0$, où $T_0 = 2\pi/\omega_{res}^{th}$. Modifiée de [VARMA et al. 2023a].

les ondes planes ou les modes guidés ne sont plus solutions du problème non-linéaire. Ainsi l’auto-interaction d’un mode à une fréquence ω_0 pourrait également entraîner l’excitation résonnante d’un mode super-harmonique à ω_0 qui est inhibé dans le cas d’une stratification uniforme ($N(z) = N_0$) [THORPE 1966]. Des expériences ont été réalisées en forçant un seul mode-3 ou un seul mode-4 dans des stratifications similaires à celles de la partie précédente. Du fait des contraintes sur la structure spatiale des modes qui peuvent être générés, il existe aussi une fréquence de résonance $\omega_{res}^{th}(p, \beta)$, dépendant du mode généré p et de la stratification β , à laquelle l’auto-interaction est résonnante. De manière équivalente à la partie précédente, celle-ci peut être calculée en regardant la divergence de l’amplitude \bar{h}_{nn}^{max} . En particulier, pour le même profil de stratification $\beta = 2.1$, on obtient $\omega_{res}^{th}(1, 2.1)/N_{min} = 0.8326$ pour le mode- $n = 3$.

La figure 4.11 montre le champ du gradient de densité horizontal obtenu par Schlieren en forçant en $x = 0$ un mode vertical $n = 3$ à une amplitude $A_3 = 10$ mm à $\omega_0 = \omega_{res}^{th}$. Le champ filtré panneau (b) montre clairement une structure de mode-3, et le panneau (c) l’onde super-harmonique générée sous la forme d’un mode- $p = 1$ qui ne se propage que partiellement.

L’expérience montrée 4.11(d-f) est un mode- $n = 4$ forcé dans une stratification caractérisée pour $\beta = 3$. Dans ce cas, la fréquence de résonance théorique vaut $\omega_{res}^{th}(4, 3)/N_{min} = 1.2368$. Là encore, les champs filtrés à la fréquence de forçage (4.11(d), ω_0) et à la fréquence super-harmonique (4.11(e), $2\omega_0$) révèlent respectivement la structure du mode-4 de forçage (qui est encore bien visible dans le champ brut) et le mode-1 super-harmonique. Ces deux expériences montrent donc qu’un mode vertical d’ondes internes de gravité peut auto-interagir pour générer un mode super-harmonique. C’est une confirmation expérimentale d’un phénomène prédit théoriquement, soit

C. GÉNÉRATION D'UNE HARMONIQUE

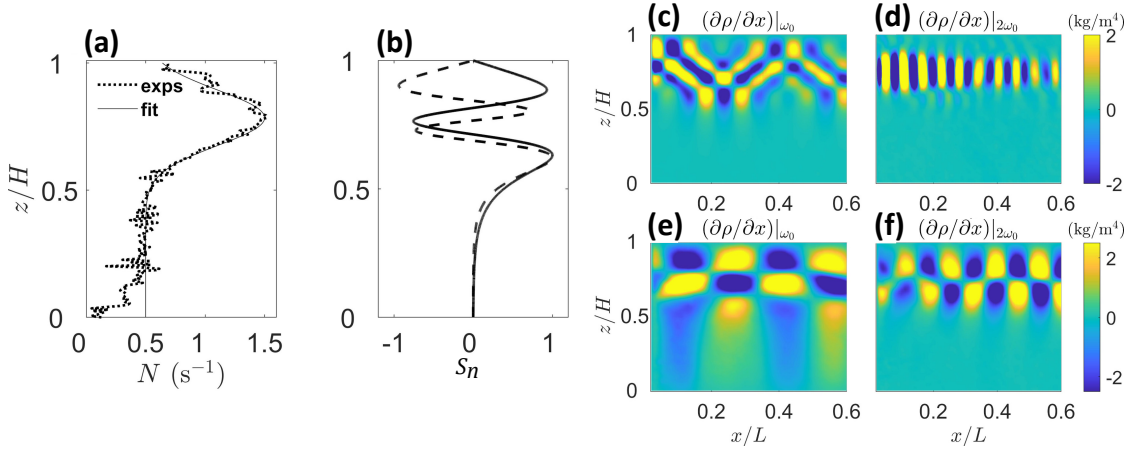


FIGURE 4.12 – (a) Profil de stratification mesuré (ligne pointillée) et ajusté (ligne continue) selon l'équation (4.17) avec $\beta = 3$. (b) Structure verticale calculée pour les modes 3 (courbe pleine) et 4 (courbe en pointillés) avec $\beta = 3$ et $\omega_0/N_{min} = 1.3705$. (c) et (d) Gradient horizontal de densité pour l'interaction de superposition $(m, n, p) = (3, 4, 1)$ où les modes sont forcés à la fréquence de résonance théorique $\omega_{res}^{th} = 1.3705$ pour $\beta = 3$, filtré à la fréquence de forçage (c) et à la fréquence super-harmonique (d). (e) et (f) Gradient horizontal de densité pour l'auto-interaction $(n, p) = (3, 2)$ où le mode est forcé à la fréquence de résonance théorique $\omega_{res}^{th} = 0.6842$ pour $\beta = 3$, filtré à la fréquence de forçage (e) et à la fréquence super-harmonique (f). Modifiée de [VARMA et al. 2023a].

en résumé

$$n = 3(\omega_{res}(1, \beta \neq 1)) \rightarrow p = 1(2\omega_{res}(1, \beta)) \quad (4.15)$$

et

$$n = 4(\omega_{res}(1, \beta \neq 1)) \rightarrow p = 1(2\omega_{res}(1, \beta)). \quad (4.16)$$

C.3 Influence d'une pycnocline

Une stratification non-uniforme idéalisée de type océanique avec une pycnocline a été pris en compte dans plusieurs études antérieures relatives à l'océan [GRISOARD et al. 2011; GURURAJ et GUHA 2022; MATHUR et al. 2014; VARMA et MATHUR 2017; VARMA et al. 2020]. Ce profil $N_{oc}(z)$ est défini par

$$\frac{N_{oc}(z)}{N_{min}} = 1 + (\beta - 1) \exp\left(-\frac{(z - z_c)^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.17)$$

où N_{min} représente la stratification uniforme de l'océan profond et z_c le centre de la pycnocline dont la largeur caractéristique est σ . Les formes de mode pour une telle stratification prennent une forme sinusoïdale dans l'océan profond uniformément stratifié, et contiennent des échelles de longueur verticale plus petites dans la région de la pycnocline. Les expériences discutées ci-après ont été réalisées avec les paramètres $\beta = 3$, $z_c/H = 0.8$ et $\sigma/H = 0.15$. La ligne en pointillé de la figure 4.12(a) montre le profil de stratification mesuré dans le réservoir et la ligne continue est le profil $N_{oc}(z)$ ajusté pour $\beta = 3$ et $N_{min} = 0.5$. Les formes des modes de l'onde primaire, le mode-3 et le mode-4 correspondant à la fréquence de forçage de $\omega_0/N_{min} = 1.3705$ sont représentées sur la figure 4.12(b). Comme dans les sections précédentes, nous considérons l'interaction intermodale de superposition des modes 3 et 4 et l'auto-interaction du mode-3.

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

a Interaction de superposition

Pour le profil de stratification non uniforme considéré (figure 4.12), le mode-3 et le mode-4 interagissent pour exciter un mode-1 super-harmonique, de manière résonante à la fréquence $\omega_{res}/N_{min} = 1.3705$. Des modes sont donc forcés autour de cette fréquence pour observer l'interaction. La figure 4.12 montre le champ filtré à la fréquence super-harmonique $2\omega_{res}$. Celui-ci est constitué d'une structure verticale de mode-1 piégée dans la région de la pycnocline.

b Auto-interaction

En utilisant le même profil de stratification, des expériences ont été réalisées pour l'auto-interaction résonante du mode-3 excitant une onde interne super-harmonique de mode-2, à la fréquence de résonance correspondante $\omega_{res}/N_{min} = 0.6842$. Le champ d'ondes observé à la fréquence super-harmonique $2\omega_{res}$ (figure 4.12) présente une structure spatiale de mode-2 elle aussi piégée dans la région de la pycnocline. Cette interaction est un deuxième exemple dans lequel le mode- p super-harmonique est différent de $|m - n|$, autorisé par la non-linéarité de la stratification.

D Instabilité triadique résonante (sous-harmonique)

Dans le chapitre 3, nous avons déjà vu la TRI apparaître lorsque les ondes gravito-inertielles étaient forcées à haute amplitude, caractérisées par l'apparition dans les spectres de deux fréquences ω_1 et ω_2 inférieures à la fréquence de forçage ω_0 . L'idée du projet réalisé par Adria Rospars [ROSPARS 2021], encadré par Dheeraj Varma, Sylvain Joubaud et moi-même, était de regarder si cette interaction existait dans une stratification non-uniforme, et les différences éventuelles avec les observations faites dans le cadre d'une stratification uniforme. Les résultats présentes ici ne sont pas inclus dans [VARMA et al. 2023a].

D.1 Étude d'une expérience

Ces expériences ont été réalisées dans le même dispositif expérimental (voir partie 4.B), en utilisant une stratification où N varie linéairement avec la profondeur comme décrit par l'équation (4.11) de paramètres $N_0 = N_{min}$ et $N_1 = N_{max} = \beta N_0$. Nous allons commencer par présenter les résultats d'une série d'expériences pour montrer le phénomène. Dans cette série d'expériences, la stratification a été réalisée telle que $N_0 = 0.6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $N_1 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $\beta = 1.66$. Un mode-1 est ensuite généré avec une amplitude A_{ω_0} en $x = 0$, et le gradient de densité perturbatif est mesuré par Schlieren et traité *via* CIV.

a Observations

Dans les expériences réalisées dans une stratification uniforme, l'instabilité se déclenchait plus facilement lorsque la fréquence de forçage était proche de la pulsation de flottabilité $N(z) = N_0$, typiquement $\omega_0/N_0 \gtrsim 0.9$ [JOUBAUD et al. 2012]. Un tel critère ne peut pas bien être défini ici, cependant les expériences ont montré que la TRI apparaissait plus aisément à des hautes fréquences, un mode-1 est donc forcé à $\omega_0 = 1.5N_0 = 0.9N_1$.

La figure 4.13 présente la transformée de Fourier du gradient de densité $TF(\partial_x \rho)^2 + TF(\partial_z \rho)^2$ (que l'on note par analogie avec le chapitre précédent $\tilde{\epsilon}_c$), pour trois amplitudes de forçage différentes : $A_{\omega_0} = 5 \text{ mm}$, 7.5 mm et 10 mm . Dans les trois cas, on observe un pic à la fréquence de forçage, situé entre N_0 et N_1 . Pour des amplitudes suffisamment grandes, on observe deux pics plutôt larges ($\delta\omega = 1.1\omega_0$) centrés sur deux fréquences ω_1 et ω_2 inférieures à ω_0 et symétriques autour de $\omega_0/2$, de sorte qu'elles vérifient la condition de résonance $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Cette condi-

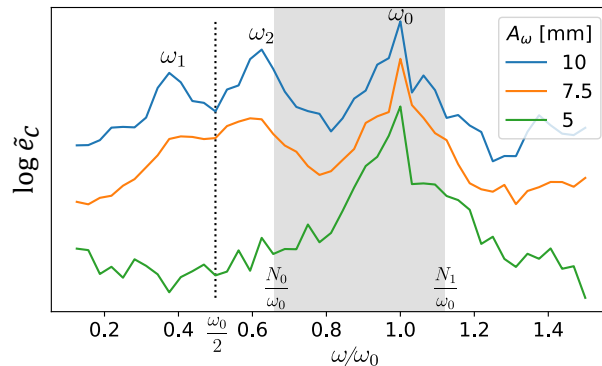


FIGURE 4.13 – Amplitude des coefficients de Fourier du gradient de densité (échelle logarithmique) en fonction de la fréquence pour différentes amplitudes de forçage (mm). Les courbes sont décalées pour une meilleure lisibilité. La région grise correspond à la plage sur laquelle varie N . Extraite de [ROSPARS 2021].

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

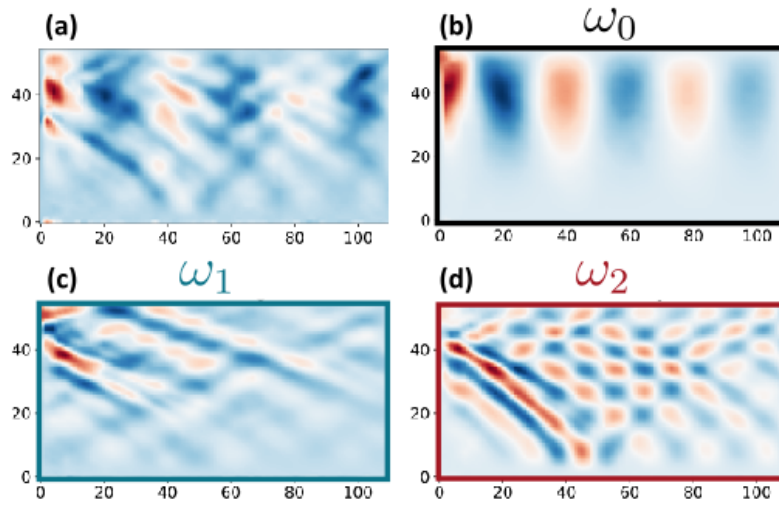


FIGURE 4.14 – Gradient horizontal de densité. (a) Instantané du champ à $t = 34T_0$ et champs filtrés à ω_0 (b), ω_1 (c) et ω_2 (d). L'échelle de couleur est relative à chaque image pour pouvoir observer les structures. Modifiée de [ROSPARS 2021].

tion semble bien vérifiée malgré la faible résolution spectrale, due aux mêmes contraintes de régime stationnaire et de réflexion de l'onde primaire que précédemment.

Cette expérience montre déjà qu'il est possible d'obtenir de la TRI dans une stratification non-uniforme. Comme dans le formalisme précédent, où l'on a calculé l'interaction entre deux modes pour en donner un troisième (équation (4.10)), et où l'on a observé cette interaction, on peut s'attendre à la génération de modes p et q aux fréquences ω_1 et ω_2 . Le signal de l'expérience d'amplitude $A_{\omega_0} = 10$ mm est donc filtré autour des fréquences d'intérêt afin d'obtenir la structure spatiale associée à chacune.

La figure 4.14 montre donc le gradient de densité horizontal filtré à ω_0 , ω_1 et ω_2 . Le champ filtré à la fréquence de forçage montre bien un mode-1, qui n'est que partiellement propagatif car $N_0 < \omega_0 < N_1$. Les champs filtrés aux sous-harmoniques présentent, à proximité du générateur, une structure plus proche d'un faisceau d'ondes planes que d'un mode. Les deux structures ne sont cependant pas symétriques, l'onde générée à ω_1 est surtout présente proche du générateur quand celle générée à ω_2 se propage dans toute la cuve. Il semble même qu'à une certaine distance du générateur, cette dernière prenne la forme d'un mode- $q = 7$. Cette asymétrie était d'ailleurs déjà visible sur la figure 4.13 où le deuxième pic est plus grand que le premier. On peut aussi noter que ces ondes se propagent bien sur toute la hauteur de la cuve et que la structure du mode-8 semble proche d'un cosinus.

b Filtrage de Hilbert

Pour comprendre l'asymétrie entre les deux sous-harmoniques, le signal est décomposé par transformée de Hilbert (voir partie 1.C.6.b). Ce type de filtrage permet de séparer les différentes composantes du vecteur d'onde. Dans ce cas, l'onde est décomposée selon les quatre cadrans tels que (i) $k_x < 0$ et $k_z < 0$, (ii) $k_x > 0$ et $k_z > 0$, (iii) $k_x > 0$ et $k_z < 0$, (iv) $k_x < 0$ et $k_z > 0$. Par exemple, cette méthode appliquée à la figure 1.14 permettrait de séparer les quatre branches de la croix. On avait d'ailleurs montré dans cette partie 1.B.3 que les vitesses de groupe et de phase étaient orthogonales et que dans le cas des ondes internes leur projection selon \vec{e}_x était de même signe (la vitesse de groupe a donc la même direction selon \vec{e}_x et une direction opposée selon \vec{e}_z par rapport au vecteur d'onde). Pour reprendre les conventions de la figure 1.14, on indiquera la

D. INSTABILITÉ TRIADIQUE RÉSONANTE (SOUS-HARMONIQUE)

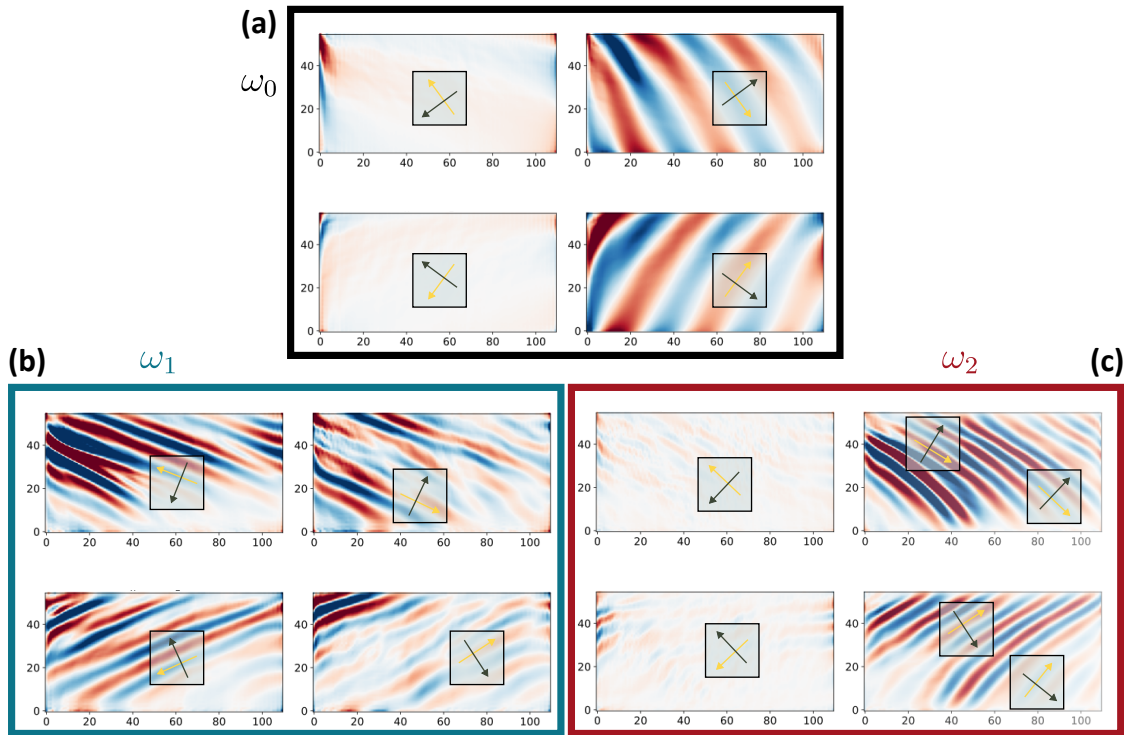


FIGURE 4.15 – Gradient de densité horizontal filtré aux fréquences ω_0 (a), ω_1 (b) et ω_2 (c) correspondant à la figure 4.14, décomposé selon la direction du vecteur d'onde. Les directions du vecteur d'onde et de la vitesse de groupe sont respectivement représentés par une flèche sombre et une flèche claire dans les encadrés. Pour chacune des fréquences, le cadran (i) est en haut à gauche, (ii) en haut à droite, (iii) en bas à gauche et (iv) en bas à droite. L'échelle de couleur est relative pour chaque encadré. Modifiée de [ROSPARS 2021].

vitesse de phase (ou \vec{k}) par une flèche sombre et la vitesse de groupe par une flèche claire.

Cette décomposition effectuée pour les champs filtrés aux fréquences ω_0 , ω_1 et ω_2 sur la figure 4.15. Celle-ci montre que les ondes à ω_0 et ω_2 se propagent exclusivement selon la direction $+\vec{e}_x$ alors que l'onde générée à ω_1 se propage dans toutes directions. Cependant, l'amplitude de cette dernière est plus importante lorsque la vitesse de groupe a pour direction $(-\vec{e}_x, +\vec{e}_z)$. Les sous harmoniques sont donc générées dans deux directions opposées. L'onde générée dans le sens de la cuve a alors une zone d'interaction plus grande avec l'onde primaire², d'où une amplitude plus importante sur le spectre de la figure 4.13.

Le champ filtré à ω_2 montre aussi le problème de la définition du vecteur d'onde. ω_2 étant proche de N_0 , celle-ci est très affectée par le changement de stratification proche du bas de la cuve. Cela se voit à la courbure observée des rayons où à deux cotes z différentes correspondent deux vecteurs d'ondes différents $\vec{k}_z(z)$. Il semble cependant que celui-ci ne dépende pas de x .

La norme des vecteurs d'ondes émis par la TRI est plus grande que celle de l'onde primaire, l'instabilité participe donc bien à transférer de l'énergie vers des petites échelles.

2. elle peut continuer de croître tout le long de sa propagation alors que l'autre va se réfléchir rapidement sur le générateur, et ne pourra donc plus grandir ensuite

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

D.2 Variation des paramètres

Pour compléter l'étude précédente, des expériences ont été réalisées avec un mode-3 dans une stratification caractérisée par $\beta = 1.66$ et $N_0 = 0.75$, et deux fréquences de forçage ont été utilisées : $\omega_0 = N_0$, complètement propagative, mais verticale en bas de la cuve et $\omega = 1.25N_0$ partiellement propagative. Le résumé des expériences est donné dans le tableau 4.3, on nommera ces deux nouvelles expériences M2 et M3, et l'expérience précédente M1.

Nom	Stratification	Mode primaire	$N_0 = N_{min}$	β	ω_0/N_0
M1	$N(z)$ linéaire, eq. (4.11)	1	0.6	1.66	1.5
M2	$N(z)$ linéaire, eq. (4.11)	3	0.75	1.66	1
M3	$N(z)$ linéaire, eq. (4.11)	3	0.75	1.66	1.25

TABLE 4.3 – Valeurs des paramètres pour les expériences réalisées dans l'étude de la TRI sous-harmonique.

a Forme des sous-harmoniques

La densité de puissance spectrale correspondant à ces deux fréquences de forçage est présentée sur la figure 4.16. Pour les deux fréquences de forçage, des pics sont présents à deux fréquences ω_1 et ω_2 respectant la condition de résonance. L'asymétrie de hauteur entre ces pics est moins marquée que sur la figure 4.13. Plusieurs autres pics sont présents ici, avec une amplitude inférieure aux sous-harmoniques, en particulier aux fréquences $\omega_{01} = \omega_0 + \omega_1$ et $\omega_{02} = \omega_0 + \omega_2$, liés à la superposition de l'onde primaire et des deux ondes secondaires. On constate aussi la présence d'un pic harmonique à $2\omega_0$ dont la faible amplitude montre que l'on est pas à la fréquence de résonance de l'auto-interaction comme présenté partie 4.C.2.

Les champs filtrés temporellement aux fréquences ω_0 , ω_1 et ω_2 sont montrés sur la figure 4.17. Le mode-3 primaire est bien visible pour l'onde forcée à $\omega_0 = N_0$ alors qu'elle ne l'est pas pour $\omega_0 = 1.25N_0$. Il est possible que la forme du mode n'ait pas bien été adaptée pour que celui-ci puisse se propager correctement. Cependant, une onde est tout de même émise et se propage dans la partie où $\omega_0 < N(z)$.

Dans les deux expériences, c'est cette fois l'onde à ω_1 qui est émise dans la direction $+\vec{e}_x$, mais il ne semble possible dans aucun cas de définir un mode. Tout au plus, on peut l'imaginer lors de

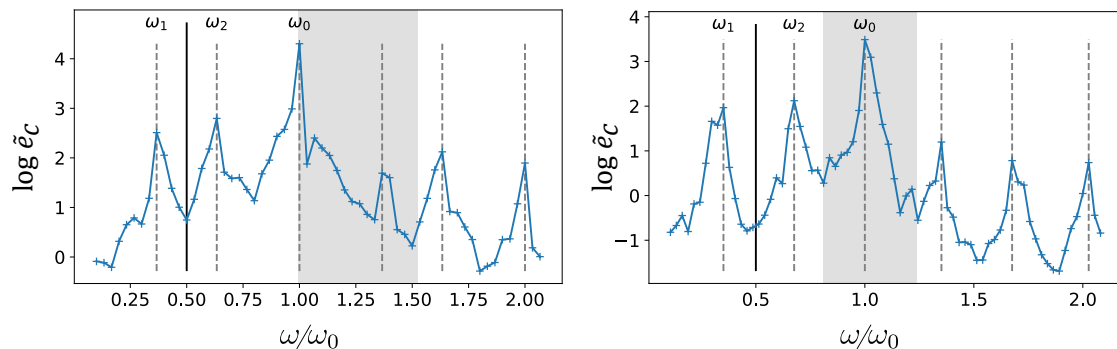


FIGURE 4.16 – Amplitude des coefficients de Fourier du gradient de densité (échelle logarithmique) en fonction de la fréquence obtenue pour $\beta = 1$ et deux fréquences de forçage $\omega_0/N_0 = 1$ (M2) (a) et $\omega_0/N_0 = 1.25$ (M3) (b). La région grise correspond à la plage sur laquelle varie N . Extraite de [ROSPARS 2021].

D. INSTABILITÉ TRIADIQUE RÉSONANTE (SOUS-HARMONIQUE)

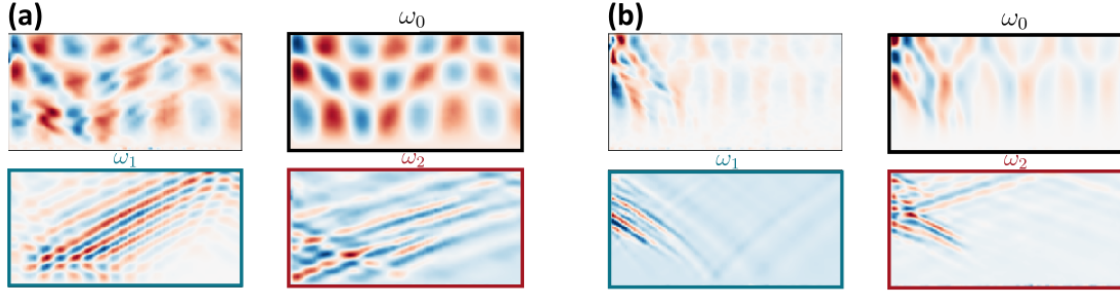


FIGURE 4.17 – Gradient horizontal de densité instantané et filtrés à ω_0 , ω_1 et ω_2 de la même manière qu'à la figure 4.14 pour $\omega_0/N_0 = 1$ (M_2) (a) et $\omega_0/N_0 = 1.25$ (M_3) (b). L'échelle de couleur est relative à chaque image. Modifiée de [ROSPARS 2021].

la superposition de deux faisceau pour le champ filtré à ω_1 dans le cas $\omega_0 = N_0$, qui donnerait $q = 13$.

Les vecteurs d'ondes des ondes secondaires sont plus grands que celui de l'onde primaire, ce qui confirme le transfert d'énergie de la grande vers les petites échelles. Il semble cependant là encore difficile de définir un vecteur d'onde, en particulier dans le cas où $\omega_0 = 1.25N_0$. En effet, ω_0 étant plus grande que N_0 , les fréquences des sous-harmoniques sont aussi plus proche de N_0 . La courbure prononcée du faisceau oscillant à ω_1 en bas de la cuve le montre bien.

b Relation de résonance

Comme nous l'avons vu, la notion de vecteur d'onde global n'est pas adaptée à ce problème. Les figures 4.15 et 4.17(a) montrent cependant qu'en se plaçant à une hauteur fixée, il peut être possible de mesurer un vecteur d'onde, ou au moins sa composante horizontale. Par exemple, sur la figure 4.14(b), on peut mesurer avec confiance la composante horizontale k_x au maximum d'amplitude du mode à z_m . En sélectionnant un des cadrans de la figure 4.15 (le cadran (i) du panneau (b) et le cadran (ii) du panneau (c)), la phase varie selon

$$\phi(x, z = z_m) = k_x x + k_z z_m + \phi_0. \quad (4.18)$$

Une régression linéaire donne alors un k_x moyen à la hauteur z_m , mais on peut aussi obtenir une valeur localement

$$k_x(x, z = z_m) = \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}. \quad (4.19)$$

La figure 4.18 montre que, assez loin du générateur, la condition de résonance spatiale est bien respectée selon l'horizontale. La différence peut venir d'un phénomène physique, comme le temps d'établissement des ondes secondaires par exemple, comme de la méthode de mesure, qui moyenne de plus en plus lorsque l'on s'éloigne de $x = 0$. Cette condition est donc en moyenne respectée en $z = z_m$.

La mesure de la composante verticale peut se faire de la même manière, en se fixant cette fois à une position x donnée. Cependant nous avons vu que k_z pouvait dépendre de z , et donc ce qui est mesuré par cette méthode est plus proche de la moyenne de k_z selon z . De même il est plus difficile de déterminer k_z sur la figure 4.14(b), seule une demi-période étant disponible. La structure de mode peut néanmoins servir à définir k_z à ω_0 comme π/H_{eff} , où H_{eff} est la hauteur sur laquelle se propage le mode. Pour être quantitatif, H_{eff} est défini comme la largeur à mi-hauteur, et vaut ici $H_{eff} = 0.35H$. Celle-ci peut être comparée à

$$H_k = \frac{\pi}{k_{z,1} + k_{z,2}}, \quad (4.20)$$

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

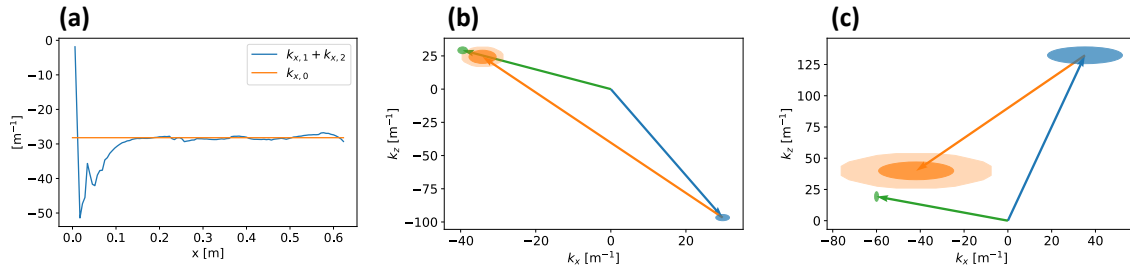


FIGURE 4.18 – (a) Composante verticale des vecteurs d’ondes mesuré pour les champs filtrés à ω_0 , ω_1 et ω_2 dans l’expérience M1. (b) et (c) Condition de résonance spatiale mesurée respectivement pour les expériences M2 et M3. Les ellipses vertes, bleues et oranges correspondent respectivement aux erreurs sur \vec{k}_0 , \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , tandis que l’ellipse claire correspond à l’erreur sur $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$. Extraites de [ROSPARS 2021].

définie avec les vecteurs d’onde des sous-harmoniques. À $x = 30$ cm, on mesure $H_k = 0.27H$, ce qui semble indiquer que la conclusion la plus pertinente est que le vecteur d’onde n’est pas bien défini au niveau global dans une stratification non-uniforme.

Dans les expériences M2 et M3, l’utilisation d’un mode-3 permet de plus facilement mesurer la composante verticale du vecteur d’onde afin de faire une comparaison directe. On utilise donc (4.18) pour déterminer k_x et l’équivalent selon x pour déterminer un k_z moyen dans les trois expériences. Les triades sont tracées figure 4.18(b) et 4.18(c). Pour l’expérience M2, où les fréquences sont éloignées de N_0 (les faisceaux sont presque droits sur la figure 4.17(a)), la relation de résonance spatiale est bien respectée. Pour l’expérience M3, plus affectée, il est difficile de conclure, même avec les erreurs plus importantes.

Conclusion

Ce chapitre a présenté des expériences montrant des résonances triadiques à partir de modes d'ondes internes des stratifications non-uniformes. Trois cas ont été considérés : (i) l'interaction multimodale résultant de la superposition de deux modes différents à la même fréquence, (ii) l'auto-interaction d'un mode isolé et (iii) la génération de sous-harmoniques.

Dans les deux premiers cas, l'excitation d'un mode d'onde interne super-harmonique à deux fois la fréquence de forçage a été observée lorsque celle-ci avait lieu à la fréquence de résonance, en accord avec des prédictions théoriques. La superposition des modes d'ondes internes (m, n) à la fréquence ω_0 entraînant l'excitation d'un mode super-harmonique autre que le mode $|m - n|$ a également été observée dans les expériences, ce qui est inhibé dans le cas d'une stratification uniforme. Une auto-interaction résonante d'un mode isolé excitant un mode super-harmonique d'ondes internes a été observée, ce qui est également uniquement possible pour une stratification non uniforme.

Aussi, des expériences ont été réalisées pour un profil de stratification avec une pycnocline, afin d'étudier à la fois les interactions de superposition et l'auto-interaction dans un cadre plus proche du cadre océanique. Celles-ci confirment les conclusions obtenues avec la stratification précédente.

Dans le cadre de la génération de sous-harmoniques par *TRI*, les expériences montrent premièrement que celle-ci est possible, et qu'alors la condition de résonance temporelle est toujours parfaitement vérifiée. Nous avons aussi observé que ces sous-harmoniques ne sont pas générées comme des modes, mais plutôt en faisceau d'ondes planes se propageant dans des directions opposées.

En essayant de mesurer les composantes des vecteurs d'ondes de ces sous-harmoniques, nous avons montré qu'il est possible de vérifier la condition de résonance spatiale lorsque les faisceaux ne sont pas trop impactés par la non-linéarité. Dans le cas inverse, il est nécessaire de plutôt définir cette notion localement. Des simulations réalisées actuellement de Bruce Sutherland semblent montrer que la force de la non-linéarité β semble aussi changer le taux de croissance de l'instabilité.

CHAPITRE 4. INSTABILITÉ D'UN MODE

CHAPITRE

5

PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

Car le sens - votre cher sens - est lui aussi une chose
fumeuse, un panache, un mouvement en train de se
dispenser dans la vitesse de son émission...

- Bernard Noël, *Onze voies de fait*.



Panache dans un fluide en rotation, vue d'IA

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

Dans les chapitres précédents, la configuration étudiée était celle d'un milieu stratifié de manière stable, c'est à dire plus dense en bas de manière à ce qu'une perturbation provoque un retour à l'équilibre et permette la propagation d'une onde. Ce chapitre se consacre à la dynamique de la configuration instable où le fluide léger est placé sous le fluide dense. Il est alors attendu, à ces échelles macroscopiques, que le premier monte et le second descende. C'est l'expérience commune de la fumée chaude de la cheminée s'élevant dans les airs.

Un panache, c'est la fumée qui s'échappe d'une cheminée, d'une cheminée hydrothermale au fond de l'océan ou un déversement de pétrole d'une réserve sous-marine. Cette définition commune donne une image brute de notre objet d'étude : un fluide se déplaçant dans un autre fluide sous l'effet d'une différence de propriétés physiques. Ces phénomènes sont turbulents et quelque peu imprévisibles, leur description repose donc principalement sur des lois d'échelle et des résultats empiriques expérimentaux ou numériques. Il existe cependant des caractérisations plus précises [HUNT et VAN DEN BREMER 2011]. L'occurrence de panaches dans la nature a inspiré à la fois des études géophysiques sur des données provenant d'éruptions volcaniques et de marées noires, et sur des modèles réduits d'expériences en laboratoire avec des paramètres contrôlés.

Les résultats présentés dans cette partie ont fait l'objet d'une publication conjointe [SUTHERLAND et al. 2021] (Sutherland, Ma, Flynn, Frank, Linden, Lemasquier, Le Bars, **Pacary**, Jamin, Dauxois, Joubaud, *Plumes in rotating fluid and their transformation into tornados*, Journal of Fluid Mechanics). Ce chapitre se concentre principalement sur les expériences que j'ai réalisées au Laboratoire de Physique à l'ENS de Lyon.

A Exposition

En hydrodynamique, un panache est une colonne où la partie verticale d'un fluide se déplace dans un autre sous l'effet de la flottabilité.

L'origine de ce mouvement peut être de la quantité de mouvement : un fluide est injecté ou poussé à partir d'un réservoir et ainsi forcé avec une vitesse initiale, c'est ce qu'on appelle des *jets*. La source du mouvement peut aussi être la flottabilité, le mouvement est alimenté par une différence de densité, on parle alors de panache "flottant" (*buoyant plume*). Il existe évidemment une gamme continue de régimes intermédiaires tels que les panaches forcés et les jets flottants [TURNER 1979].

La différence de densité est due à une différence de température et/ou de composition (salinité de l'eau, présence de poussières, de roches, etc) entre le panache et le milieu ambiant. La flottabilité (comme définie dans le chapitre 1.B.2) est positive lorsque le fluide a tendance à s'élever. La figure 5.1 montre deux exemples de panaches à flottabilité positive.

Dans un environnement uniforme, un tel panache s'élève et, en raison de la viscosité et du mélange turbulent, il entraîne le fluide ambiant. Le fluide ambiant est alors mélangé avec le panache au fur et à mesure de son ascension et la différence de densité entre les deux diminue. Le panache occupe aussi un volume de plus en plus important par conservation de la masse, tandis que la vitesse verticale diminue par conservation de la quantité de mouvement. Ces évolutions peuvent être modélisées par une loi de puissance, comme décrit dans la partie 5.B.1. Bien qu'à l'échelle d'une cheminée son influence ne se fait pas sentir, la Terre est en rotation, et le comportement des plus gros panaches atmosphériques comme océaniques peuvent être modifiés, ce qui a été rapporté dans différentes études de laboratoire [FERNANDO et al. 1998; FRANK et al. 2017; GRIFFITHS et LINDEN 1981; MORTON et al. 1956], et décrit brièvement dans la partie 5.B.3 de ce chapitre.

A.1 L'étude des panaches

La recherche sur les panaches a commencé dans les années 1950 avec un intérêt pour les panaches atmosphériques et en particulier les fumées de cheminée qui sont produites par une source

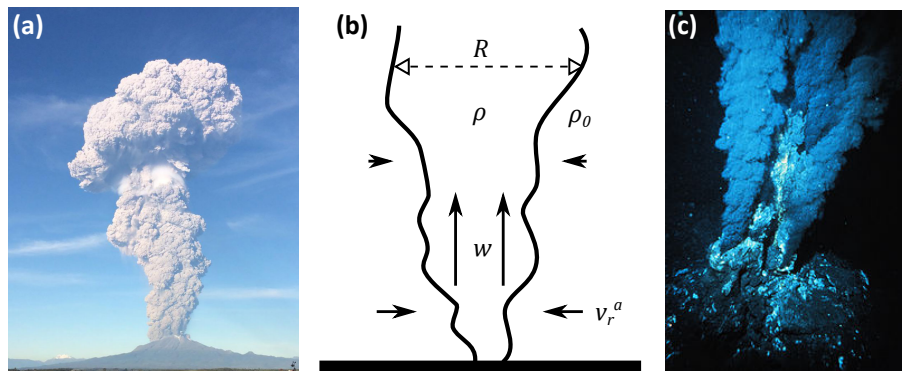


FIGURE 5.1 – (a) Éruption du volcan Calbuco au Chili. Photo : Andiseño Estudio (b) Schéma d'un panache, de rayon $R(z)$, de vitesse ascendante w et de masse volumique ρ dans un milieu ambiant de masse volumique ρ_0 et entraîné avec la vitesse horizontale v_r^a . (c) Cheminée hydrothermale dans l'océan Atlantique, Photo : NOAA.

de chaleur et/ou de vapeur [MORTON 1957, 1958; PRIESTLEY et BALL 1955; SCORER 1959]. Diverses études ont depuis permis d'élargir le domaine, notamment par l'étude de phénomènes géophysiques comme les panaches atmosphériques (les éruptions volcaniques par exemple). Les panaches océaniques sont aussi devenus un sujet important, dont on peut citer en exemple les cheminées hydrothermales [NOAA s. d.].

[WOODS 2010] propose une revue des études de panaches et met en évidence à la fois leur importance géophysique et les propriétés physiques qui la sous-tendent. Prenons par exemple les éruptions volcaniques explosives. L'évolution du mélange de cendres et d'air expulsé à grande vitesse a des conséquences sur l'agriculture ou même sur le climat planétaire. Le jet, initialement poussé par son élan, entraîne de l'air ambiant, ce qui abaisse la densité du mélange. Si la vitesse initiale est suffisamment grande, le panache peut devenir plus léger que l'environnement et s'élever comme un panache flottant [WOODS 1988, 2010]. L'atmosphère étant un milieu stratifié, le nuage volcanique atteindra une altitude où sa densité est égale à celle de l'air et va s'y étaler. Il est alors possible de relier cette altitude, que l'on peut mesurer, à la quantité d'énergie déversée par l'éruption [SPARKS et al. 1997; WOODS 2010].

La plupart des exemples géophysiques concernent les particules transportées par le panache. Des exemples comme les panaches de pierre ponce, les panaches de bulles de CO_2 et les panaches hydrothermaux sont discutés dans [WOODS 2010]. Dernièrement, [HEWITT 2020] a étudié des panaches sous-glaciaires dus à la fonte des glaces. La marée noire de *Deep Water Horizon* (conséquence d'une fuite sous-marine d'une plateforme pétrolière dans le golfe du Mexique) a relancé l'intérêt pour l'étude de la dynamique des panaches. Celle-ci a duré 87 jours, libérant environ 5 millions de barils de pétrole et la même quantité de gaz, parmi lesquels il est estimé que 15 à 30% du pétrole est resté sous la surface. Le bilan de cet événement [LEHR et al. 2010] montre une catastrophe écologique.

Ces panaches de longue durée, ainsi que les panaches hydrothermaux [WOODS et BUSH 1999], ont mis en évidence l'effet de la rotation de la Terre. Comprendre et prévoir la dynamique du panache pourrait permettre d'évaluer l'impact sur les systèmes et de faciliter la récupération ou le brûlage des hydrocarbures en surface.

A.2 Un phénomène étrange

Il existe plusieurs manières de générer de tels panaches, il est possible d'utiliser la température grâce à un chauffage local, ou la salinité en injectant de l'eau salée dans de l'eau douce à travers

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

une buse. Cette dernière méthode permet de plus facilement contrôler les paramètres d'émission afin de reproduire les conditions observées dans la nature. L'ajout d'une rotation à l'aide d'une table tournante pour tenir compte de la rotation de la Terre modifie les lois d'échelle et la dynamique du panache, mais pas sa nature turbulente. De manière surprenante, en réalisant de telles expériences, [FRANK et al. 2017] à Cambridge¹ et [MA et al. 2020] à Edmonton, Alberta² ont vu dans un petit nombre d'expériences (4 sur 200 dans le premier cas, 20% dans le second) le panache turbulent devenir un vortex cohérent. Ce phénomène n'a pas été signalé dans les études car ne faisant pas partie du sujet et était même considéré comme à éviter. Un tel tourbillon cohérent ressemble visuellement à une tornade, ce qui semble plus intéressant³ qu'un "tourbillon colonnaire cohérent", c'est pourquoi de tels événements seront appelés tornades. C'est dans l'objectif de reproduire et de comprendre ce phénomène que les expériences ont été menées lors de la visite de Bruce Sutherland pour une durée de deux mois début 2020.

1. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, UK

2. Departments of Physics, Earth & Atmospheric Sciences and Mechanical Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada

3. Et est plus court.

B Description du phénomène

B.1 Modèle d'un panache

Le modèle utilisé pour décrire l'évolution d'un panache a été présenté par Morton, Taylor et Turner en 1956 [MORTON et al. 1956], dit modèle MTT qui reprend et améliore le modèle de Schmidt⁴. On considère une source ponctuelle dans les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) . On écrit la vitesse verticale du fluide dans le panache $w(r, z)$, et sa densité $\rho(r, z)$, le panache ayant une largeur typique $R(z)$ comme schématisé figure 5.1(b). Le fluide ambiant est décrit par sa densité $\rho_0(z)$ et une vitesse $\vec{v}^a = (v_r^a, v_\phi^a, 0)$. On pose finalement $\rho_{ref} = \rho_0(0)$.

Trois hypothèses sont à la base du modèle :

- La différence de vitesse entre le fluide ambiant et le panache produit des tourbillons à l'interface entre les deux qui mélangent les fluides et induit un entraînement du fluide ambiant vers le panache. Cet entraînement est décrit par un coefficient α tel que $v_r^a = -\alpha|w|$.
- La solution est auto-similaire, c'est à dire que les profils de vitesse ou de densité respectent une loi d'échelle.
- Les variations de densité sont faibles par rapport à la densité typique, c'est l'approximation de Boussinesq que nous avons utilisée lors de l'équation d'évolution d'un fluide stratifié (partie 1.B.2).

Avec ces hypothèses, on peut écrire les équations de conservation des quantités concernées :

1. Conservation de la masse, qui avec l'équation d'incompressibilité devient une équation de conservation du volume. Considérant que le débit est conservé dans le panache, la variation de volume vient du fluide entraîné sur les bords

$$\frac{d}{dz} (\pi R^2 w) = 2\pi R v_r^a. \quad (5.1)$$

2. Conservation de la quantité de mouvement, la seule force qui agit sur le panache et la flottabilité, différence entre la poussée d'Archimède est le poids

$$\frac{d}{dz} (\pi R^2 w \rho * w) = \pi R^2 g (\rho_0 - \rho). \quad (5.2)$$

3. Conservation de la "différence de flottabilité", équivalente à la conservation de la quantité de sel et/ou de la température selon les cas⁵

$$\frac{d}{dz} (\pi R^2 w (\rho_{ref} - \rho)) = 2\pi R v_r^a (\rho_{ref} - \rho_0). \quad (5.3)$$

On utilise alors l'hypothèse d'entraînement ainsi que l'hypothèse de Boussinesq, et on peut réécrire le système

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (R^2 w) = 2\alpha R w, \\ \frac{d}{dz} (R^2 w^2) = R^2 g \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_{ref}}, \\ \frac{d}{dz} (R^2 w (\rho_{ref} - \rho)) = 2\alpha R w (\rho_{ref} - \rho_0). \end{cases} \quad (5.4)$$

4. Publié en 1941 en allemand.

5. On rappelle que pour un fluide à température T et une salinité S , on peut écrire en première approximation $\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0) + \beta(T)(S - S_0)$.

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

La dernière équation peut être transformée en utilisant la première

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(R^2 w (\rho_{ref} - \rho) \right) &= 2\alpha R w (\rho_{ref} - \rho_0) \\ &= (\rho_{ref} - \rho_0) \frac{d}{dz} \left(R^2 w \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left(R^2 w (\rho_{ref} - \rho_0) \right) - R^2 w \frac{d}{dz} (\rho_{ref} - \rho_0), \\ \text{soit } \frac{d}{dz} \left(R^2 w g \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_{ref}} \right) &= R^2 w \frac{g}{\rho_{ref}} \frac{d\rho_0}{dz}, \end{aligned}$$

en ayant fait apparaître le facteur g/ρ_{ref} . On voit d'ailleurs apparaître le facteur $g/\rho_{ref} \frac{d\rho_0}{dz}$, pulsation caractéristique des milieux stratifiés, notée N^2 dans les chapitres précédents. Or dans ce cas, le milieu ambiant est homogène ($\rho_0(z) = \rho_{ref}$), et il y a donc conservation du flux de flottabilité

$$B_0 = R^2 w g \frac{\rho_{ref} - \rho}{\rho_{ref}} = R^2 w g' \quad (5.5)$$

en utilisant la gravité réduite g' due à la poussée d'Archimède. Le système à résoudre est alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (R^2 w) &= 2\alpha R w, \\ \frac{d}{dz} (R^2 w^2) &= \frac{B_0}{w}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Pour résoudre ce système, on injecte dans le système une forme auto-similaire $R^2 w = a_1 (z - z_0)^n$ et $R^2 w^2 = a_2 (z - z_0)^m$, et on obtient

$$\begin{cases} a_1 n (z - z_0)^{n-1} &= 2\alpha \sqrt{a_2} (z - z_0)^{m/2}, \\ a_2 m (z - z_0)^{m-1} &= B_0 \frac{a_1 (z - z_0)^n}{a_2 (z - z_0)^m}. \end{cases} \quad (5.7)$$

En égalisant les exposants et les amplitudes, il est possible de résoudre

$$n = 5/3, m = 4/3 \quad ; \quad a_2 = \left(\frac{9}{10} B_0 \alpha\right)^{2/3}, a_1 = \frac{6\alpha}{5} \left(\frac{9}{10} B_0 \alpha\right)^{1/3}. \quad (5.8)$$

Finalement, on peut remonter aux variables d'origine

$$R = \frac{6\alpha}{5} (z - z_0), \quad w = \frac{5}{6\alpha} \left(\frac{9}{10} \alpha B_0\right)^{1/3} (z - z_0)^{-1/3}, \quad (5.9)$$

et la gravité réduite

$$g' = \frac{B_0}{R^2 w} = \frac{5}{6\alpha} \left(\frac{9}{10} \alpha\right)^{-1/3} B_0^{2/3} (z - z_0)^{-5/3}. \quad (5.10)$$

Conformément à l'intuition, le panache s'élargit et ralentit au cours de son trajet. On a fait ici le calcul pour un panache de fluide léger (chaud par exemple pour l'eau) qui s'élève, la solution serait identique pour un panache de fluide plus dense que l'environnement extérieur, en inversant le sens de l'axe z .

a Note sur la composante radiale

Le développement effectué ne prend pas en compte la structure radiale de l'écoulement qui ne rentre pas en compte dans les bilans. Un modèle qui colle à la présentation est celui du "top hat" ou chapeau supérieur qui fait l'hypothèse que w et g' sont uniformes dans le panache et nuls en

B. DESCRIPTION DU PHÉNOMÈNE

dehors. Cette définition permet de définir facilement R qui est la limite entre le panache et le fluide ambiant. Elle est cependant un peu trop simple car elle ne prend pas en compte ce qui se passe à la frontière, ni le fait que le centre du panache, moins affecté, a une vitesse et une flottabilité plus importantes. Une structure invariante par rotation, déjà proposée par [MORTON et al. 1956], est celle d'une gaussienne telle que

$$w(r, z) = w_c(z)e^{-r^2/R(z)^2}. \quad (5.11)$$

Une première difficulté est la définition de R , qui devient arbitraire ($1/e$) ici, mais ce pourrait être la distance à laquelle $w(R, z)/w(z)$ vaut 10% ou 1%. Deuxièmement, pour pouvoir faire les bilans précédents, il faut intégrer cette gaussienne sur le rayon effectif choisi lorsque l'on fait les bilans. Ce changement revient à changer les quantités w et g' par la valeur au centre w_c et g'_c . Les lois d'échelle sont les mêmes mais il y a un léger changement dans les facteurs, notamment dans la définition de $B_0 = 1/2\pi R^2 w_c g'_c$.

B.2 Source virtuelle et nombre de Richardson

Les trois quantités étudiées g' , R et w sont définies à la source du panache par son rayon R_0 , son débit volumique $Q_0 = \pi R_0^2 w_0$ et la différence de densité entre le fluide injecté et le fluide ambiant donnant la gravité réduite g'_0 . Il est alors possible de définir un nombre sans dimension caractérisant la source

$$Ri_0 = \frac{4}{5\alpha} \frac{g'_0 b_0}{w_0^2} \quad (5.12)$$

qui est le nombre de Richardson (comme défini dans la partie 1.B.2.a) à la source .

Il compare l'énergie cinétique donné par la source à l'énergie potentielle qui pourrait être convertie par la chute libre. Ainsi $Ri_0 \ll 1$ signifie que le fluide est éjecté plus rapidement que la flottabilité ne pourrait l'accélérer : on parle alors plutôt de jet que de panache. $Ri_0 = 1$ est le cas d'un panache dit pur : le fluide est expulsé à la vitesse qu'il aurait naturellement, c'est ce cas qui est décrit par les équations (5.9). La côte z_0 où le rayon s'annule peut alors s'interpréter comme l'origine virtuelle du panache.

Dans les expériences réalisées, les panaches sont pour la plupart "paresseux" (*lazy plumes*), c'est-à-dire injecté à faible vitesse, soit $Ri_0 > 1$. Dans ce cas [HUNT et KAYE 2005], la vitesse w_c augmente initialement en quittant la source et le rayon diminue (voir figure 5.2) car le panache ajuste son flux de quantité de mouvement par rapport à son flux de flottabilité jusqu'à ce que le nombre de Richardson du panache local tende vers l'unité. Cette diminution du flux de flottabilité s'accompagne d'une réduction de l'entraînement pendant cette phase d'accélération.

B.3 Influence de la rotation

Le modèle présenté ne prend pas en compte la rotation du milieu, il décrit donc les premiers moments de l'évolution du panache. L'influence de celle-ci est mesurée par le nombre de Rossby (comme défini dans la partie 1.B.2.a)

$$Ro = \frac{U}{2\Omega L}, \quad (5.13)$$

où U et L sont les échelles caractéristiques de vitesse et de taille et Ω la vitesse de rotation. Le mouvement du panache, qui est un fort mouvement vertical, ainsi que les tourbillons à l'interface du milieu ambiant devraient donc être affectés par la rotation.

Le modèle exposé précédemment montre que le rayon comme la vitesse du fluide varient avec l'évolution du panache, il est donc habituel de définir un nombre de Rossby dépendant de la profondeur [MA et al. 2020]

$$Ro(z) = \frac{w_c(z)}{2\Omega R(z)}, \quad (5.14)$$

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

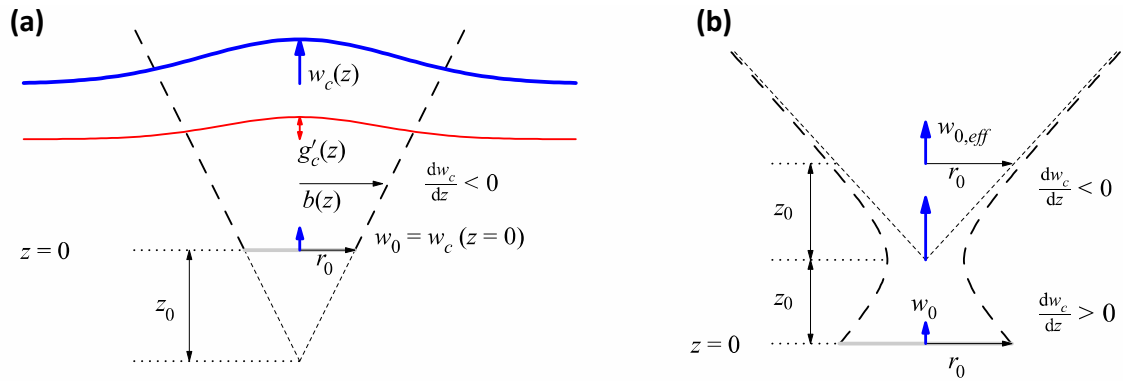


FIGURE 5.2 – Schéma montrant les variables utilisées pour décrire (a) un panache pur ($Ri_0 = 1$) et (b) un panache paresseux ($Ri_0 > 1$) pour une source de rayon R_0 située à $z = 0$. Extrait de [SUTHERLAND et al. 2021].

où l'on a considéré que la vitesse typique du panache comme des tourbillons était w_c la vitesse verticale du centre, et que l'échelle caractéristique était le rayon du panache. En utilisant les lois d'échelles obtenues précédemment (5.9), la variation explicite en z peut être obtenue

$$Ro \propto \frac{B_0^{1/3}}{\Omega} z^{-4/3}, \quad (5.15)$$

plus on s'éloigne de la source, plus le Rossby est faible et plus l'effet de rotation est important. [FERNANDO et al. 1998] ont montré que pour un panache en rotation, il existe une profondeur critique où le rayon R cesse d'augmenter, signifiant une prépondérance de la rotation et la diminution de l'entraînement du milieu ambiant.

La définition précédente ne tient d'ailleurs pas compte de ce fluide ambiant. En effet, par entraînement à l'interface avec le panache, ce fluide acquiert une vitesse radiale (on avait écrit $v_r^a = -\alpha|w_c|$). Pour un fluide ambiant de vitesse \vec{v}^a , la force de Coriolis s'écrit

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v}^a = \rho f_c \left(\alpha|w_c|\vec{e}_\varphi + v_\varphi^a\vec{e}_r \right). \quad (5.16)$$

Ainsi le fluide initialement au repos dans le référentiel tournant est entraîné par le panache, créant une aspiration, qui par l'intermédiaire de la force de Coriolis est transformée en un vortex cyclonique. Celui-ci aura pour effet dans un second temps de réduire l'entraînement. Ce tourbillon se formant au cours du temps augmente localement l'influence de la rotation, et on peut redéfinir le nombre de Rossby localement

$$Ro = \frac{|\mathbf{U}|}{2\Omega R + U_\theta} \quad (5.17)$$

où $\mathbf{U} = (U_\theta, w_c)$ et U_θ est le maximum de la vitesse azimutale. Cette définition met en évidence le rôle du fluide ambiant, en augmentant l'influence de la rotation et en réduisant l'entraînement. La réduction de l'entraînement par l'effet de cette circulation est telle qu'elle peut être annulée, le panache est alors transformé en une colonne.

De cette façon, les effets de la rotation, mesurés par le nombre de Rossby, et de la flottabilité, mesurés par le nombre de Richardson, s'additionnent pour diminuer l'entraînement et laminariser l'écoulement autour du panache, ce qui favorise la formation d'une tornade.

B. DESCRIPTION DU PHÉNOMÈNE

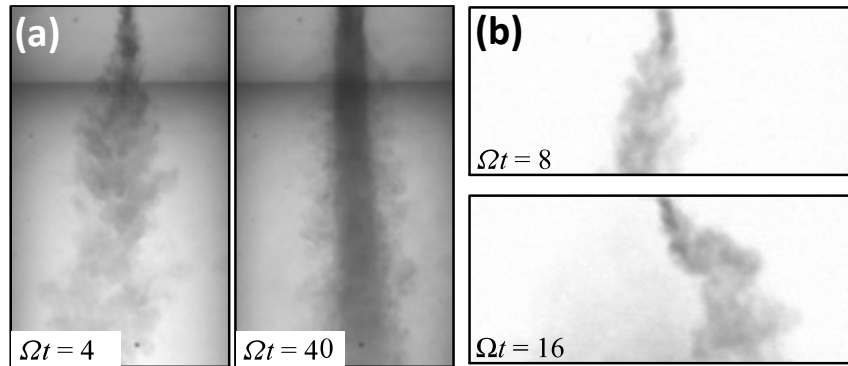


FIGURE 5.3 – Vues latérales d’expériences de panache en rotation dans lesquelles le panache coloré (a) se transforme en tornade (deux premiers panneaux) et (b) est éjecté de l’axe et précesse. Dans les deux cas $\Omega = 0.4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. L’expérience illustrée en (a) a les paramètres donnés par C1 dans le tableau 5.2. Chaque image de (a) montre une zone autour du panache de 30 cm de large, la buse étant située en haut de chaque image. L’expérience illustrée en (b) a les mêmes paramètres que C1, sauf que la gravité réduite à la source, g'_0 est réduite de $4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Dans ces cas, seul l’écoulement jusqu’à une profondeur de 15 cm sous la source est représenté. Le trait noir horizontal en (a) est l’intersection de la surface libre vue d’en bas avec la paroi du réservoir. Extrait de [SUTHERLAND et al. 2021].

a Vorticité

Nous avons vu que l’entraînement du milieu extérieur crée une circulation cyclonique et donc que la vorticité augmente dans le milieu ambiant. Le panache, lui, a un rayon qui varie en fonction de l’altitude, la conservation du moment cinétique impose qu’il soit aussi mis en rotation. Lorsque le rayon rétrécit dans la phase d’accélération d’un panache paresseux, la rotation est cyclonique, puis anti-cyclonique dans la phase d’expansion. Il a été établi expérimentalement qu’un panache crée un tourbillon, une circulation anticyclonique à l’intérieur du panache et une circulation cyclonique autour de celui-ci [FERNANDO et al. 1998; GRIFFITHS et LINDEN 1981; HELFRICH et BATTISTI 1991].

Une autre caractéristique des écoulements à faible Rossby (dominés par la rotation) est d’être quasi-2D, les mouvements non-uniformes selon l’axe de rotation sont fortement inhibés dans ces écoulements. On peut ainsi s’attendre à ce que le mouvement vertical du panache soit empêché. De plus, l’étalement du panache et son ralentissement impliquent une vitesse d’entraînement qui dépend de la hauteur, créant une contrainte verticale ce qui est aussi a priori empêchée. [FRANK et al. 2017] ont effectivement montré qu’un panache dans un fluide en rotation est dévié de la verticale comme illustré figure 5.3(b). Il précesse ensuite autour de la buse avec un angle $30^\circ \pm 11^\circ$, avec une pulsation $\omega \approx -0.4\Omega$, où Ω est la vitesse de rotation de la table tournante. La précession des panaches turbulents a été confirmée par des simulations numériques des effets de la rotation [FABREGAT TOMÀS et al. 2016]. Les auteurs ont constaté que la rotation crée un gradient de pression adverse dans le panache, de sorte que le fluide est dévié de la verticale et qu’il précesse. Le mécanisme régissant la mise en précession est encore à l’étude, il est le résultat de l’interaction entre le panache, la turbulence créée à l’interface, sa rotation interne et celle du milieu environnant générées avant la déviation.

b Stabilité d’un panache

Les premières instabilités observées pour les panaches en rotation sont dues à l’instabilité barocline [FERNANDO et al. 1998; HOGG et STOMMEL 1985]. Dans cette dernière étude, de l’eau salée et

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

colorée est injectée dans de l'eau douce en comparant la situation avec et sans rotation. Il apparaît alors que la rotation change effectivement la dynamique du panache comme décrit précédemment mais que l'instabilité barocline résulte en la formation de deux tourbillons hétéroclines. Ce décrochement de tourbillons (*vortex shedding*) est le signe qu'un panache dans un environnement en rotation n'est pas nécessairement une structure stable.

L'interaction entre les circulations intérieure et extérieure de sens opposés peut résulter en la formation de deux ou trois tourbillons [GRIFFITHS et LINDEN 1981]. Ces instabilités n'apparaissent cependant qu'à long terme et n'influencent donc pas la nature et l'alignement vertical du panache lors de sa formation.

[BATCHELOR 1964] a étudié théoriquement la stabilité d'un tourbillon colonnaire présentant à la fois un écoulement azimutal et axial. Il montre que le paramètre pertinent est le *swirl* q . Celui-ci peut être relié au rapport de la vitesse azimutale maximale à la vitesse radiale maximale $q^* = \frac{U_\theta}{w_c} \sim 0.639q$. Alors, si la rotation est suffisamment rapide ($q > 1,5$, soit $q^* > 0,96$), le tourbillon colonnaire est stable.

B.4 Analyse : l'effet Tornade

La conservation du moment angulaire, ainsi que la déflexion par la force de Coriolis provoquent la mise en rotation du panache et du fluide environnant. Si cette mise en rotation est assez forte, mesurée par le *swirl*, les mouvements verticaux sont inhibés et l'entraînement réduit. Deux possibilités existent alors pour le panache : être dévié de la verticale, réduisant ainsi la composante verticale de la vitesse, ou former une colonne cohérente avec un entraînement réduit et une forte rotation. Ces deux états sont illustrés sur la figure 5.3. C'est cette dernière structure que nous appelons "tornade" du seul fait de l'analogie visuelle.

La nature turbulente du panache n'est *a priori* pas compatible avec une structure tourbillonnaire bien définie et laminaire, un mécanisme est donc nécessaire pour la transition des flux turbulents aux flux laminaires autour du panache. En outre, nous avons vu que, pour se former, le tourbillon colonnaire doit résister à un gradient de pression défavorable créé par la rotation du fluide ambiant qui force le panache à s'incliner. Enfin, la circulation cyclonique doit se développer jusqu'à un point auquel la vitesse azimutale est suffisamment élevée pour satisfaire le critère de stabilité du tourbillon.

Il convient de noter que des mouvements en spirale proches de la source du panache, en direction de celle-ci ont récemment été observés dans une simulation numérique [MARTINS et al. 2020]. Dans cette étude, l'écoulement est laminaire, et dans ce cas la formation d'un tourbillon est possible. La formation de la tornade pourrait être associée à une laminarisation de l'écoulement autour du panache.

Le rôle du fluide ambiant est crucial dans ce phénomène. Il ne s'agit pas seulement d'un réservoir d'eau à entraîner vers le panache, le mouvement radial et la force de Coriolis sont les moteurs de l'accélération azimutale. La rotation cyclonique du fluide ambiant réduit ainsi le nombre de Rossby local autour du panache, ce qui a pour effet de supprimer le mouvement vertical, combiné à la déviation de Coriolis qui réduit le mouvement radial, seule une forte vitesse azimutale reste possible. Autour du panache, cela pourrait conduire à cette laminarisation de l'écoulement et favoriser la formation d'un tourbillon colonnaire cohérent.

L'objectif des expériences était donc d'identifier l'ensemble des paramètres pertinents qui conduisent à la formation d'une tornade. Il s'agissait également d'étudier leur reproductibilité afin d'estimer sa résilience et la possibilité de l'observer.

C Mise en œuvre expérimentale

C.1 Dispositif

Les expériences décrites ici ont été réalisées au laboratoire de physique à l'ENS de Lyon. La figure 5.4 montre le dispositif utilisé, et le tableau 5.1 résume les paramètres de l'expérience.

Sur la plateforme PERPET est montée une cuve rectangulaire de dimensions $1 \times 1 \times 0.6 \text{ m}^3$ dans laquelle a été placée un cylindre transparent d'un mètre de diamètre 1 m (voir la partie 1.C.1.b et la figure 1.15). Le cylindre permet de correspondre à la symétrie cylindrique du panache et de minimiser l'effet des angles lorsque le réservoir est en rotation et ainsi obtenir la rotation solide la plus uniforme possible.

Cette cuve est remplie d'eau douce jusqu'à une hauteur d'environ 20 cm, choisie pour éviter l'influence du fond sur le panache et avoir une mise en rotation rapide, tout en évitant 25 cm, moitié du rayon du cylindre pour éviter une éventuelle instabilité inertielle. Les panaches sont formés en injectant de l'eau salée dont la densité est vérifiée à l'aide d'un densimètre. Celle-ci est pompée à partir d'un réservoir placé sur la table tournante par une pompe péristaltique permettant de contrôler le débit volumique Q_0 . À l'autre extrémité de la pompe, l'eau salée est injectée par une buse. Celle-ci est constituée d'un petit trou suivi d'une chambre d'expansion puis d'une petite ouverture de rayon $R_0 = 0.2 \text{ cm}$ recouverte d'une fine maille. La géométrie de la tuyère (également utilisée dans [MA et al. 2020]) ainsi que la grille de sortie garantissent que le flux sortant de la source est bien turbulent [HUNT et LINDEN 2001].

L_T cm	H_0 cm	$ \Omega $ rad · s ⁻¹	Q_0 cm ³ · s ⁻¹	ρ g · cm ⁻³	ρ_0 g · cm ⁻³	
101	21	0-0.5	0.4-2.2	1.066-1.13	1.00	
R_0 cm	w_0 cm · s ⁻¹	B_0 cm ⁴ · s ⁻³	M_0 cm ⁴ · s ⁻²	Re_0	Ro_0	Ri_0
0.2	3-18	8-90	0.6-19	64-344	20-400	0.6-2

TABLE 5.1 – Géométrie et paramètres de l'expérience, comprenant le diamètre du réservoir (L_T), la distance entre la source et le fond du réservoir (H_0), la vitesse de rotation ($|\Omega|$), la masse volumique du du fluide ambiant (ρ_0) et du panache (ρ), le débit volumique de la source (Q_0), le rayon de la buse (R_0), la vitesse initiale d'injection (w_0), le flux de flottabilité associé (B_0) et le flux de quantité de mouvement (M_0), ainsi que les nombres de Reynolds (Re_0), de Rossby (Ro_0) et de Richardson (Ri_0) initiaux. Par "initial" et l'indice $_0$, nous indiquons la valeur à la sortie de la buse.

C.2 Paramètres

La géométrie du réservoir ne pouvait pas changer, et nous avons fixé la buse de manière à ce qu'elle repose entre 2 mm et 3 mm sous la surface libre afin que sa présence ainsi que celle de la surface n'influencent pas trop le panache. Elle a aussi été positionnée près du centre du réservoir. Les paramètres de contrôle étaient donc ceux apparaissant dans les nombres de Richardson et de Rossby : la vitesse d'injection, la différence de densité et la vitesse de rotation.

L'objectif premier étant d'obtenir des tornades, nous avons commencé par des valeurs de paramètres "de base" ($\Omega = -0.3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $Q_0 = 0.72 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho = 1.066 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) pour lesquelles le phénomène a sporadiquement été observé dans les expériences réalisées par [MA et al. 2020].

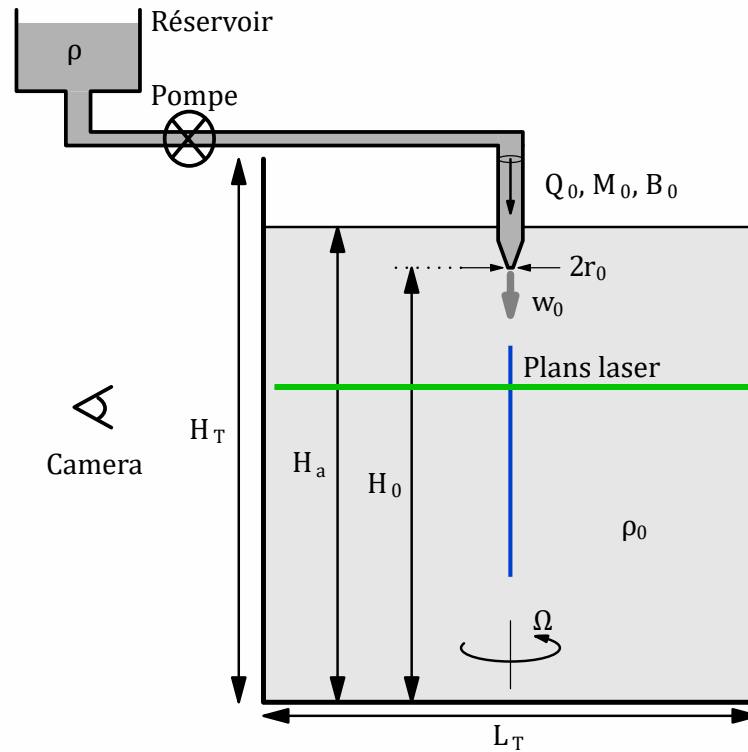


FIGURE 5.4 – Schéma du dispositif expérimental utilisé. Un réservoir cubique en verre d'une hauteur $H_T = 60$ cm et de $L_T = 101$ cm de côté repose sur un plateau tournant à une pulsation Ω . Un cylindre de rayon L_T non représenté est positionné à l'intérieur. Il est rempli d'eau douce jusqu'à une hauteur $H_a = 21$ cm et de sorte que $H_a - H_0$ de l'ordre du centimètre. Une pompe contrôlable pousse l'eau salée de densité ρ d'un réservoir vers la buse avec un débit volumique Q_0 , un flux de flottabilité B_0 et un flux de quantité de mouvement M_0 . La buse a un rayon r_0 et la vitesse initiale du fluide est notée w_0 . Nous prenons l'origine à la buse, l'axe z pointant vers le bas. Modifié de [SUTHERLAND et al. 2021].

C. MISE EN ŒUVRE EXPÉRIMENTALE

Une fois celui-ci reproduit, nous avons continué à explorer l'influence du débit volumique Q_0 et de la rotation Ω en premier lieu, puis de la différence de masse volumique $\Delta\rho$. Une centaine d'expériences ont été réalisées dans ces différentes conditions.

Le débit volumique de la source Q_0 a été produit à l'aide d'une pompe péristaltique (ou pompe à galets), capable de produire un débit contrôlé dans la plage $0.36 - 16.2 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (soit de 20 à $900 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$). Dans la plupart des cas, le débit volumique était limité dans la plage $Ri \geq 1$, soit $0.36 \leq Q_0 \leq 2.6 \text{ (cm}^3 \cdot \text{s}^{-1})$. Les panaches produits étaient des panaches "paresseux" décrits précédemment.

La table tournante est commandée par un programme LabView, utilisé depuis plusieurs années au laboratoire, et sa précision, ainsi que celle du moteur de la table tournante, a été vérifiée [BOURY 2020]. Elle peut produire une rotation dans la plage de 0 – 60 tr/min, mais la vitesse de rotation a été contrainte dans la plage de 0 à 4 tr/min (soit $\Omega = 0 - 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) pour des raisons de sécurité. Ainsi le nombre de Rossby à la source Ro_0 est au début de l'expérience compris entre 20 et 400. Un temps de mise en rotation compris entre 90 minutes et 4 heures a été respecté avant chaque expérience afin que la rotation solide soit atteinte. Le mécanisme principal de mise en rotation est le pompage d'Ekman, donc plus Ω est faible plus le temps de mise en rotation solide est long. Cette période permet aussi de s'assurer que l'écoulement dû à l'expérience précédente a été dissipé.

La différence de densité a premièrement été fixée à $0.066 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ pour correspondre aux expériences modèles. Ce paramètre a été changé une fois pour $0.130 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ afin de doubler l'effet de la gravité. Une différence de densité de $0.028 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a été utilisée deux fois pour reproduire les résultats de l'expérience de [FRANK et al. 2017].

C.3 Mesures

Dans de nombreuses études, les panaches sont visualisés à l'aide d'un colorant injecté dans le panache. Le fluide ambiant jouant un rôle prépondérant dans le phénomène, le but est d'obtenir également le champ de vitesse dans le fluide. Celui-ci est mesuré par PIV (voir partie 1.C) dans un plan vertical (plan (x, z) , traversant la buse) et un plan horizontal (plan (x, y) , 6 cm en dessous de la buse).

Par analogie avec le colorant, et pour pouvoir utiliser l'oeil afin de déterminer si une tornade s'est formée, une forte concentration de traceurs est injectée dans le panache.

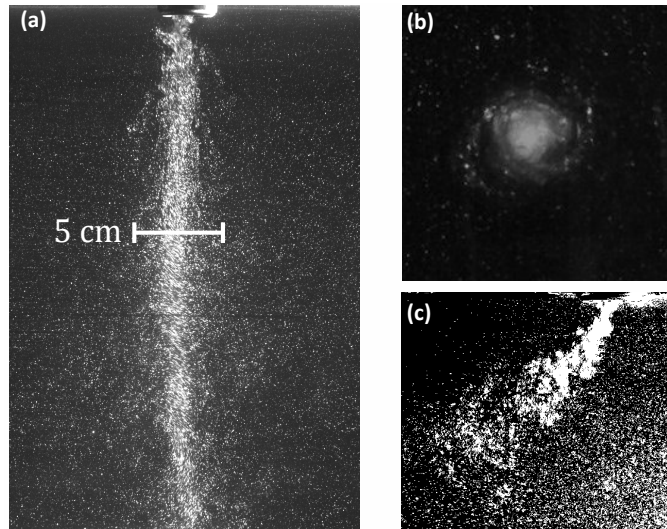


FIGURE 5.5 – (a) Instantané d’une expérience dans laquelle une tornade se forme, vue verticale. La buse d’injection est visible en haut. (b) Coupe horizontale d’une tornade. (c) Cas d’une expérience où le panache est éjecté de l’axe, l’image a été binarisée. Les trois images sont à la même échelle.

D Observation expérimentale

D.1 Observations générales

a Classification

La figure 5.5 montre des images dans deux cas : la formation d’une tornade (5.5(a) et 5.5(b)) et l’éjection du panache hors de l’axe (5.5(c)). La différence claire de comportement permet de classifier facilement une expérience dans l’un des deux cas. L’éjection du panache se fait à partir de quelques millimètres sous la buse d’injection, il est montré ici dans le plan d’observation mais précède autour de l’axe de vertical. Même éjecté, le panache garde une structure turbulente avec un fort mélange, impliquant un contraste moins élevé avec le milieu ambiant, nécessitant la binarisation de l’image à des fins de visualisation.

La figure 5.5(a) montre ce que nous appelons une tornade. La structure est une colonne relativement verticale, beaucoup plus lumineuse que l’environnement. Il y a beaucoup moins de mélange dans le cas de la tornade et le panache garde la même largeur, ce qui signifie que la différence de concentration en particules de PIV entre le panache et le milieu ambiant est quasi-constante au cours de la propagation de la tornade, entraînant ainsi une différence de luminosité importante.

La structure colonnaire possède à la fois une forte rotation et une vitesse verticale lui donnant une forme d’hélice. La rotation du panache est toujours cyclonique, confirmant le mécanisme d’accélération azimutale proposé précédemment. La formation de la colonne prend de 20 à 40 secondes, si une tornade ne s’est pas formée à ce moment, il est très probable que le panache se comporte de manière classique et s’éloigne de l’axe. On peut noter qu’une fois formée, la tornade est assez stable : certaines des tornades ont survécu jusqu’à l’arrêt de la pompe, jusqu’à 3 minutes.

b Statistiques

Avec les paramètres "de base", une tornade a pu être obtenue dans 3 expériences sur 4, alors que pour les mêmes paramètres, aucune n’a pu être observée sur des dizaines d’expériences réalisées

D. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE

à l'IRPHE⁶. En comparant les deux dispositifs, ce haut taux de succès pourrait être expliqué par la régularité de la rotation de la table tournante, le temps d'attente suffisant pour atteindre la rotation solide ou la présence d'un cylindre imbriqué permettant d'adapter la géométrie de la cuve à la rotation et éviter d'éventuelles recirculations. Au total, 102 expériences ont été réalisées. La liste des paramètres des expériences classées comme tornades est donnée dans le tableau 5.2. L'expérience la plus répétée est L11, avec 3 tornades sur 5 répétitions.

La répétabilité imparfaite du phénomène est le signe que

1. Il existe un mécanisme qui sous-tend son apparition.
2. Cette apparition est fortement dépendant des conditions initiales.

Il est donc possible d'explorer l'ensemble des paramètres, en estimant que si au moins une tornade est obtenue, les paramètres correspondants sont adaptés à sa formation. Le taux de réussite est de 60% pour le couple de paramètres le plus testé, de 75% pour le couple "de base". Les autres expériences ont été réalisées entre une et trois fois.

La formation d'une tornade est donc irréversiblement sensible aux bruits : si le panache précresse, il est impossible d'avoir la tornade et si le panache s'éloigne de l'axe, il y a aussi perte de la tornade. L'origine de cette variabilité est inconnue, il est possible que ce soit les turbulences du panache par nature intermittentes qui soit à l'origine de cette variabilité. Le fluide ambiant pouvait aussi ne pas être parfaitement immobile, la rotation du corps solide pas suffisamment atteinte. Cela pouvait également provenir de l'action de la pompe ou une petite bulle d'air formée sur la buse. De plus, des ondes de faible amplitude à la surface du fluide ambiant pouvaient régulièrement être observées, probablement alimentées par un léger choc de la platine à chaque tour.

Une tornade s'est formée dans 6 des 9 expériences répétées avec les paramètres de L10 ($Ri_0 = 5,1$), dans 4 des 8 expériences répétées avec les paramètres de L13 ($Ri_0 = 4,4$), et dans 2 des 3 expériences répétées avec les paramètres de L11 et L19 ($Ri_0 = 9,9$). Dans les expériences réalisées à Cambridge ($Ri_0 = 1$), une tornade n'a été observée que dans 4 expériences sur environ 100. Les expériences suggèrent donc que la formation de tornades est plus probable pour les panaches paresseux.

Même si les paramètres correspondent à la formation de la tornade, celle-ci peut ne pas se produire, et vue l'évolution irréversible, nous le savons au maximum une minute après le début de l'expérience.

D.2 Influence des paramètres

a Diagramme d'existence

En gardant cette dernière considération à l'esprit, nous avons essayé d'explorer l'espace des paramètres pour trouver où une tornade peut se former. La figure 5.6 présente le résultat de la classification. Un cercle indique qu'une tornade s'est formée dans au moins une expérience, un carré qu'elle était marginalement stable, ce qui signifie une durée de vie de l'ordre de 30 secondes, et une croix qu'aucune tornade ne s'est formée. La plupart des points ont été réalisés au moins deux fois.

Sur le diagramme de la figure 5.6, la zone d'existence de la tornade est petite. Des croix apparaissent lorsque la vitesse initiale est trop élevée ou trop faible, et de même pour Ω . Lorsqu'il n'y a pas de rotation, le panache se comporte comme un panache turbulent et aucune tornade ne se forme. Si la vitesse de rotation Ω est trop faible, la rotation a peu d'influence et l'échelle de temps d'augmentation de la vitesse azimutale et de formation de la tornade est trop grand pour que nous puissions la voir. À l'inverse, si Ω est trop élevée, avec un nombre de Rossby comparable à 1, le mouvement vertical est fortement inhibé et le panache est rapidement dévié. C'est pourquoi seul un nombre de Rossby modéré ($20 < Ro_0 < 400$) permet la formation de la tornade.

6. Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre, Unité Mixte de Recherche, CNRS, Université Aix-Marseille.

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

Expt	H_0 (cm)	Ω (rad · s ⁻¹)	w_0 (cm · s ⁻¹)	g'_0 (cm · s ⁻²)	Ro_0	Ri_0	H_f (cm)	U_θ (cm · s ⁻¹)	R_m (cm)
L1	21	0.1	5.7	67	143	5.1	49	1.8	3.1
L2	21	0.1	5.7	130	143	9.9	58	1.5	4.4
L3	21	0.1	11.5	130	286	2.5	69	2.0	4.1
L4*	21	0.1	14.3	130	358	1.6	73	–	–
L5	21	0.2	5.7	67	72	5.1	29	3.0	2.8
L6	21	0.2	14.3	130	179	1.6	43	2.1	4.3
L7*	21	0.2	17.2	130	215	1.1	45	2.7	4.4
L8*	21	0.2	22.9	130	286	0.6	48	1.7	6.1
L9	20	0.3	2.9	67	24	20.3	18	2.0	2.1
L10	21	0.3	5.7	67	48	5.1	21	2.3	2.5
L11	21	0.3	5.7	130	48	9.9	25	1.5	2.5
L12	20	0.3	8.6	67	72	2.3	24	3.3	2.6
L13	21	0.3	8.6	130	72	4.4	28	1.6	4.0
L14	21	0.3	11.5	130	95	2.5	30	2.0	3.4
L15	21	0.3	14.3	130	119	1.6	32	2.5	4.1
L16*	21	0.3	22.9	130	191	0.6	36	1.8	5.3
L17	21	0.4	2.9	67	18	20.3	15	1.6	1.9
L18	21	0.4	5.7	67	36	5.1	17	–	–
L19	21	0.4	5.7	130	36	9.9	20	1.7	2.9
L20	21	0.4	8.6	29	54	1.0	16	1.1	2.5
L21	21	0.4	8.6	130	54	4.4	23	1.3	1.9
L22*	21	0.4	11.5	130	72	2.5	24	1.6	3.9
L23*	21	0.4	14.3	130	90	1.6	26	–	–
L24*	21	0.4	22.9	130	143	0.6	29	1.9	5.1
L25*	21	0.5	22.9	130	115	0.6	24	1.2	3.6
C1	110	0.4	15.5	51	52	1.0	28	-	-

TABLE 5.2 – Paramètres de contrôle des expériences au cours desquelles une tornade a été observée : profondeur du fluide sous la buse (H_0), vitesse de rotation (Ω), vitesse en sortie de la source (w_0), gravité réduite de la source (g'_0), nombre de Rossby de la source (Ro_0), nombre de Richardson de la source (Ri_0), profondeur où la rotation influence directement le panache (H_f). Résultats d'analyse correspondant : vitesse azimuthale maximale de la tornade (U_θ) et le rayon auquel elle est atteinte R_m . Dans les expériences étoilées, la tornade est marginalement stable. L'expérience C1 a été réalisée à Cambridge. Modifié à partir de SUTHERLAND et al. 2021.

D. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE

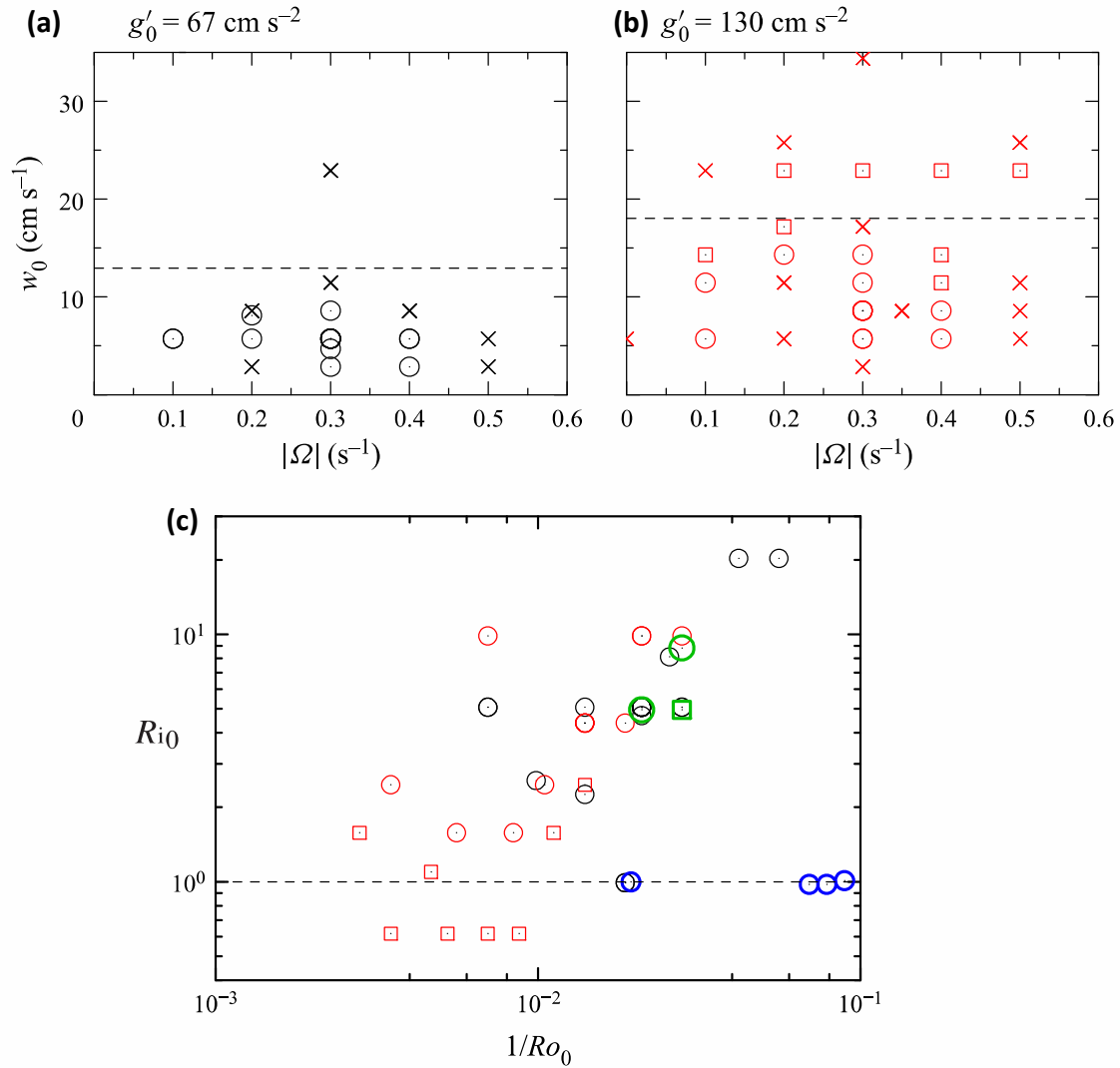


FIGURE 5.6 – Diagramme d’existence de la tornade. Un cercle indique qu’au moins une tornade s’est formée, un carré que la durée de vie de celle-ci a été courte, une croix qu’aucune tornade n’a été observée. (a) et (b) Dans l’espace des paramètres de contrôle (w_0, Ω) pour deux différences de densité différentes. (c) Seulement les cas où une tornade s’est formée, en fonction des nombres sans dimensions caractéristiques (de Rossby et de Richardson) à la source, augmenté des expériences réalisées à Cambridge en bleu et à Edmonton en vert. Extrait de [SUTHERLAND et al. 2021].

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

On constate également que la transformation en tornade se produit seulement $Ri_0 \geq 1$. Plus la vitesse est élevée, plus la différence avec le fluide ambiant au repos est importante, ce qui provoque plus de turbulences autour de la source, aidant l'éjection du panache hors de l'axe proche de celle-ci. Par conséquent, un petit nombre de Richardson, c'est-à-dire une vitesse initiale plus élevée, empêche la formation d'une tornade. Les panaches paresseux ont de plus une rotation cyclonique similaire à celle du fluide ambiant aidant la laminarisation. Il a même été possible d'obtenir des tornades avec paramètres hors du diagramme en démarrant l'expérience au coeur du domaine de stabilité et en augmentant le débit après la formation d'une tornade.

Les symboles carré montrent des tornades marginalement stable, c'est-à-dire ayant commencé à se former mais se déstabilisant entre 5 et 20 s plus tard. Elles correspondent à des nombres de Richardson faibles, et donc une prépondérance de l'inertie sur la flottabilité (les nombres de Reynolds sont aussi les plus élevés, associés à une plus forte turbulence pouvant déstabiliser la structure).

b Champ de vitesse

Comme montré sur la figure 5.5, le fluide ambiant possède des traceurs dans une concentration permettant des mesures de bonne qualité par PIV. La figure 5.7 illustre ce qui se passe dans trois situations. La première colonne est une expérience avec une faible vitesse de rotation et un débit modéré, la colonne centrale une vitesse de rotation et un débit modérés et la colonne de droite une vitesse de rotation modérée et un débit élevé. L'expérience centrale pour laquelle une tornade s'est formée correspond à la figure 5.5(a), la colonne de droite pour laquelle le panache est éjecté correspond à la figure 5.5(c).

Les deux premières rangées représentent les champs de vitesse du fluide environnant verticaux et horizontaux 25 secondes après le début de l'injection. Les trois situations présentent des mouvements verticaux en raison de la nature turbulente du panache, la vitesse la plus élevée étant la plus turbulente. On voit aussi l'entraînement du fluide vers le panache, celui-ci présentant des vitesses plus élevées. La PIV verticale montre clairement que le panache est déjà sorti de l'axe pour cette dernière expérience. La structure de la tornade est également visible sur la PIV verticale pour l'expérience du milieu, du moins près de la source. L'écoulement est laminarisé près de la buse, puis la structure descend vers le fond, ce qui ne s'est pas encore produit sur l'image instantanée.

La différence entre le cas central et les deux autres est également claire sur la PIV horizontale. Une circulation cyclonique est présente dans les trois expériences, cependant, dans le cas central, la région où la vitesse est élevée est davantage confinée. Cela est dû au fait que dans les autres cas, la turbulence mélange le fluide et la quantité de mouvement, ainsi qu'au fait que le panache peut s'écarter de l'axe. Le dernier cas n'est d'ailleurs plus axisymétrique.

Cette différence est encore plus claire dans la troisième rangée, celle-ci montre l'évolution de la vitesse azimutale $u_\theta(t, r)$ moyennée azimutalement. La tornade apparaît comme entourée d'une zone à forte rotation, dont la rayon est fixée après une dizaine de secondes, cohérente dans le temps dont l'amplitude augmente lentement sur toute la durée de l'expérience. L'instant de formation de la tornade détectée à $t \simeq 20$ s à l'œil n'est pas clair sur cette figure qui montre plutôt une formation graduelle. Dans les deux autres cas, cette vitesse présente une amplitude plus faible et une plus grande étendue spatiale, ainsi que de fortes variations, de sorte que l'écart-type est supérieur à la moyenne sur une zone plus grande.

D. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE

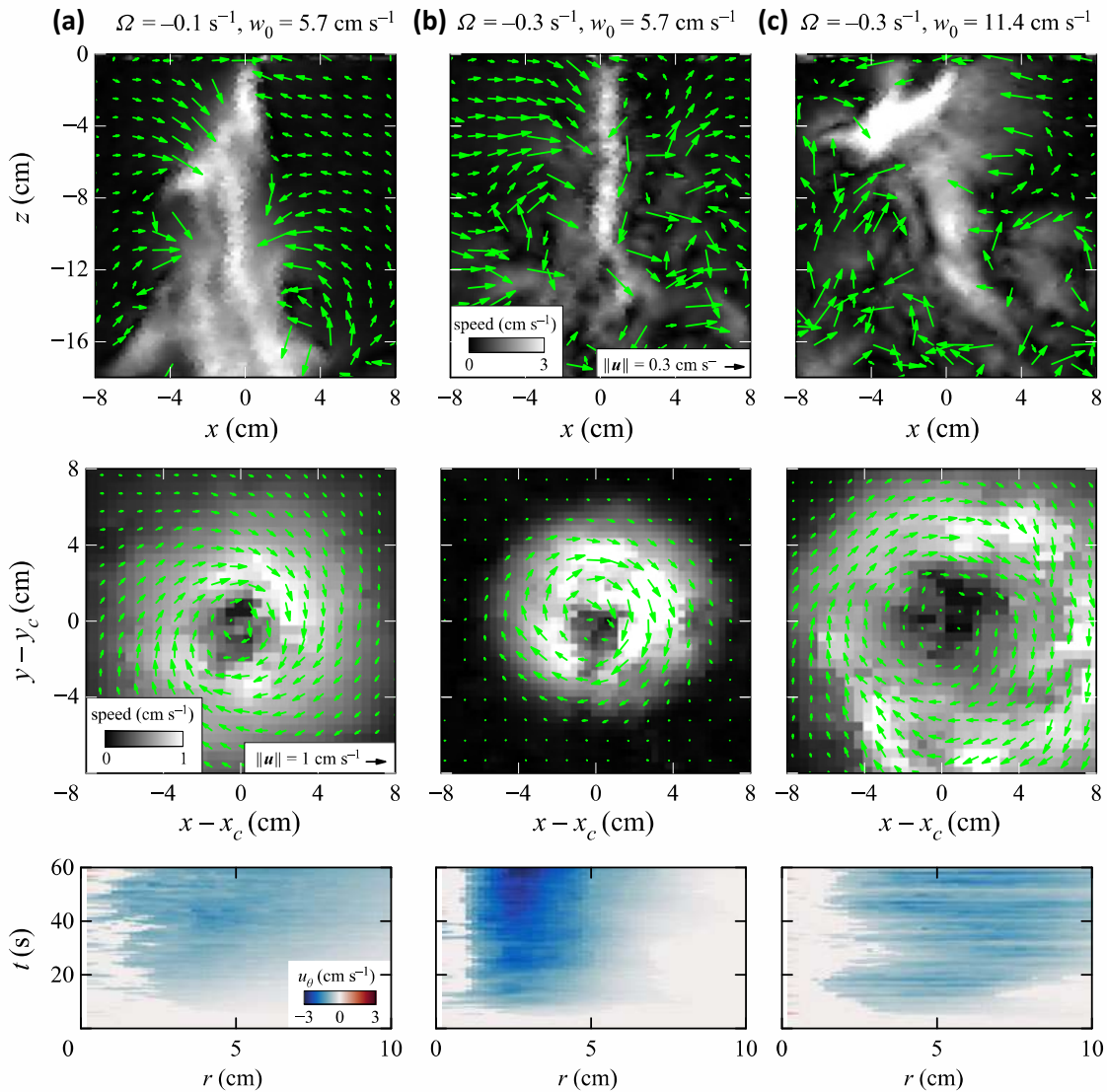


FIGURE 5.7 – Vitesses mesurées à l’aide de la PIV montrant (a) aucune formation de tornade à une faible vitesse de rotation et un débit modéré (colonne de gauche), (b) la formation d’une tornade à une faible vitesse de rotation et un débit modérés (expérience L10, colonne du milieu) et (c) à une vitesse de rotation modérée et un débit important (colonne de droite). Dans toutes les expériences, $H_0 = 21 \text{ cm}$ et $\rho_0 = 1.066 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. La rangée du haut montre le vecteur (flèches vertes) et la norme (échelle grise) de la vitesse dans des coupes verticales à $t = 25 \text{ s}$ après le début d’une expérience. Les flèches ne sont tracées que si leur amplitude est inférieure à $0.6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. La rangée du milieu montre la même chose pour des sections horizontales situées à 6 cm en dessous de la source. Les coordonnées sont centrées autour du centre (x_c, y_c) du panache. La rangée du bas montre l’évolution spatiale et temporelle de la vitesse azimutale $u_\theta(t, r)$ moyennée azimutalement. Pour $0 < r < 1 \text{ cm}$, des valeurs nulles sont attribuées aux données dont l’écart-type dépasse la valeur moyenne. Extraite de [SUTHERLAND et al. 2021].

E Simulations

Les expériences que j'ai réalisées à l'ENS de Lyon lors de la visite de Bruce Sutherland ont permis de dégager les caractéristiques principales du phénomène ainsi que les paramètres permettant la formation de ces tornades. Elles ont ainsi pu servir de base pour la réalisation de simulations numériques afin d'obtenir la vitesse, la densité et la pression en tout point du fluide. Durant et à la suite de sa visite, Bruce Sutherland a réalisé des simulations LES (*Large Eddy Simulation*) en volume fini sur une grille fixe à l'aide du code open-source OpenFOAM.

Le résultat de trois de ces simulations, basées sur les trois expériences présentées figure 5.7 est montré figure 5.8. Les mêmes conclusions peuvent en être tirés : un nombre de Rossby trop haut induit un panache turbulent peu impacté par la rotation, et une rotation plus importante associée à une plus forte vitesse et le panache est rapidement éjecté de l'axe. Ces simulations permettent d'avoir accès au champ de densité qui permet de confirmer la réduction du mélange et la pénétration plus importante du panache lorsqu'une tornade se forme. Le calcul de la vorticité permet de confirmer la forte circulation cyclonique, concentrée dans une petite région dans ce cas.

E.1 Mécanisme

Le schéma 5.9 résume les mécanismes en jeu. Au début, le panache est bien décrit par le modèle MTT, la rotation provoquant la mise en rotation (cyclonique proche de l'injecteur dans le cas d'un panache "paresseux", anticyclonique après la source virtuelle) du panache. Cette mise en rotation, ainsi que l'entraînement différentiel selon l'altitude s'accompagne d'un gradient de pression opposé au mouvement vertical du fluide. Ce gradient augmente avec le temps, et lorsque celui-ci atteint la source, le panache est dévié. Dans le cas où les paramètres sont dans la bonne zone, la mise en rotation cyclonique du fluide ambiant et le panache sont en rotation cyclonique proche de la source, il y a alors un entraînement réduit et un étirement de ce tourbillon, provoquant un laminarisation de l'écoulement et l'annulation du gradient de pression opposé. Ce tourbillon étiré donne lieu à la formation de la colonne en forte rotation appelée tornade.

E.2 Discussion

Des simulations numériques ont été répétées avec les mêmes paramètres d'entrée mais en changeant les fluctuations de bruit à la source ainsi que dans le fluide environnant, ainsi que les conditions limites de fond (avec ou sans glissement). Une tornade s' st formée dans 6 des 10 simulations répétées avec $Ri_0 = 5$, dans 4 des 10 simulations à $Ru_0 = 1.3$ et dans aucune des 10 simulations à $Ri_0 = 1$. Ces résultats confirment ce qui a été observé expérimentalement, à savoir que la formation ou non d'une tornade dépend de manière quelque peu aléatoire de la nature des fluctuations turbulentes entourant le panache lorsqu'il est dévié. Les tornades se forment pour des panaches paresseux ($1 \leq Ri_0 \leq 20$).

Dans notre analyse des panaches rotatifs expérimentaux et simulés, nous avons montré que d'importants mouvements chaotiques verticaux et horizontaux sont induits dans le fluide ambiant entourant le panache. Loin de la source, c' st une conséquence du mouvement vertical dans le panache qui est redirigé vers l'extérieur à des hauteurs où le nombre de Rossby du panache est inférieur à l'unité. La déformation verticale est également induite dans le fluide ambiant près du niveau de la source afin de réduire le cisaillement vertical imposé par l'entraînement radial différentiel en fonction de la hauteur. Cela conduit à une augmentation linéaire dans le temps de la vitesse d'entrée et à une augmentation quadratique correspondante dans le temps de la vitesse azimutale ambiante qui crée une pression négative quartiquement dans le temps, agissant finalement pour dévier le panache de son axe vertical.

Pour les panaches paresseux, la déformation verticale près de la source entraîne une augmentation linéaire dans le temps de la vorticité, augmentant le *swirl* qui a le potentiel de laminariser

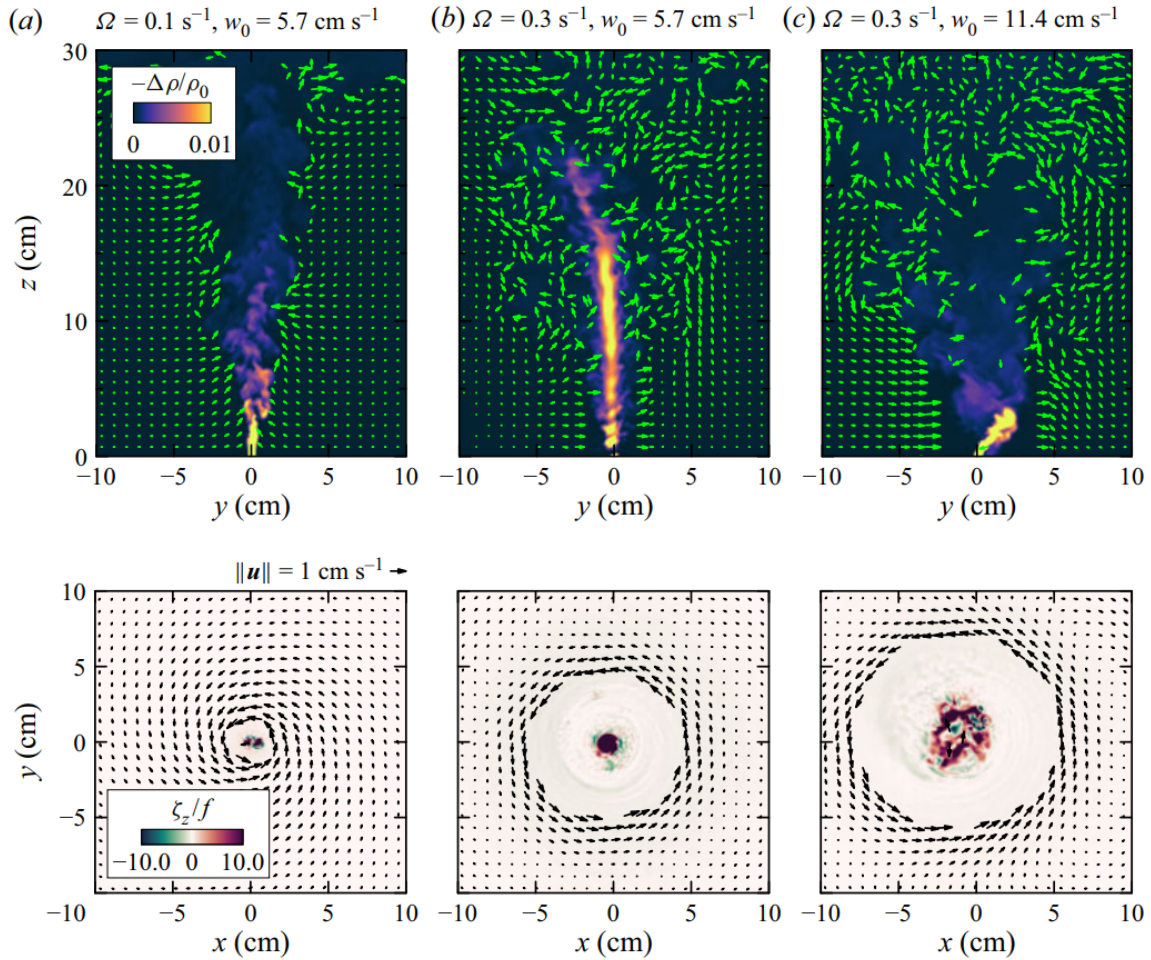


FIGURE 5.8 – (a), (b) et (c) Instantanés à $t = 25 \text{ s}$ des champ de vitesse (flèches) et de gravité réduite (échelle de couleur) pour trois simulations correspondant aux expériences de la figure 5.7(a), (b) et (c) respectivement. La rangée du bas présente la vitesse horizontale (flèches) et la composante verticale de la vorticité ξ_z (couleur) dans un plan horizontal à $z = 2 \text{ cm}$ (proche de l’origine virtuelle z_0). Les flèches ne sont représentées que si l’amplitude de la vitesse est inférieure à $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Extrait de [SUTHERLAND et al. 2021].

CHAPITRE 5. PANACHES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

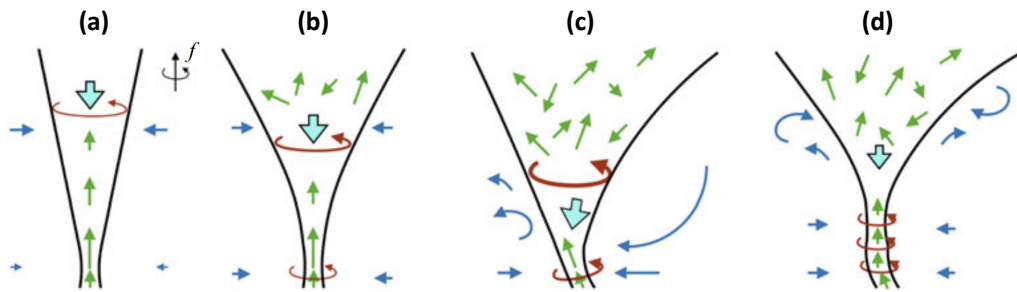


FIGURE 5.9 – Schéma montrant l'évolution du panache (lignes noires pour les bords, flèches vertes pour la vitesse à l'intérieur du panache et flèches bleues pour le fluide ambiant à l'extérieur du panache, la grande flèche bleu clair représente le gradient de pression) : (a) À mesure que la vorticité s'accumule dans le panache loin au-dessus de la source (flèche rouge), un gradient de pression se développe (flèche cyan); (b) Le panache s'élargit à mesure que la pression opposée descend vers la source et que le tourbillon se développe dans le fluide ambiant entourant le panache. (c) Si le gradient de pression devient trop fort, le panache finit par dévier de la verticale. (d) Dans certaines circonstances, l'étirement vertical du tourbillon peut augmenter suffisamment la vorticité à proximité de la source pour laminariser l'écoulement, ce qui entraîne la formation d'une tornade. Extraite de [SUTHERLAND et al. 2021].

l'écoulement et de transformer le panache en tornade. Le temps nécessaire à la déviation du panache et à la formation d'une tornade est de l'ordre d'une demi-période de rotation.

Une limite inférieure pour le nombre de Rossby de la source est $Ro_0 \simeq 10$. En théorie, il n'y a pas de limite supérieure au nombre de Rossby de la source, à l'exception des limites imposées par la taille du domaine et par l'écoulement ambiant indépendant du panache qui peut le faire dévier avant une demi-période de rotation.

La formation de la tornade est décidée par la comparaison de deux temps caractéristiques : l'augmentation du gradient de pression, et l'augmentation de la vorticité, tout en prenant en compte le temps caractéristique des fluctuations turbulentes, pouvant dévier le panache quels que soient les paramètres.

Conclusion

Nous avons étudié expérimentalement la transformation d'un panache en tornade sous l'action de la rotation et du fluide environnant. Nous avons montré que cela peut se produire dans une région de l'espace des paramètres Ω , Q_0 et ρ . Même si une tornade est attendue en fonction de la valeur des paramètres, elle peut ne pas se produire en raison de la variation turbulente aléatoire autour du panache causée par la nature turbulente du panache. Ceci explique pourquoi une vitesse trop élevée inhibe le phénomène par le biais d'une turbulence plus forte. Une rotation trop importante inhibe également le processus car une rotation élevée empêche le mouvement vertical et favorise donc la déviation du panache près de la source.

Nous avons esquissé un mécanisme pour la formation de la tornade via l'augmentation de la vitesse azimutale par l'entraînement radial, la déviation de Coriolis et la conservation de la quantité de mouvement qui augmentent le nombre de Rossby local conduisant à la laminarisation de l'écoulement. Des simulations ont permis de mettre en évidence une compétition entre le temps de déflexion et celui de laminarisation. Les résultats ont été publiés par [SUTHERLAND et al. 2021].

Prenons l'exemple du panache de pétrole de l'accident de Deepwater Horizon en 2010. Des estimations ont été faites pour le débit volumique de la source, $Q_0 \simeq 0.2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, et le flux de flottabilité $B_0 = 1 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-3}$, émanant d'un tuyau de rayon $r_0 = 0.238 \text{ m}$ [SOCOLOFSKY et al. 2011], soit $Ri_0 = 12$: le panache était modérément paresseux. Cependant, le nombre de Rossby de la source était $Ro_0 = 6 \times 10^4$, et il est donc probable que les courants de fond et l'action de l'eau de mer ont eu un impact sur le panache avant que la rotation ne rentre en jeu.

Dans les expériences et les simulations présentées ici, le fluide ambiant avait une densité uniforme. Cependant, la formation de tornades a également été observée dans des expériences de laboratoire d'un panache rotatif impactant vers le bas une interface de densité dans un fluide bicouche [MA 2018] (dans la section 5.2.2). Alors que le panache initialement turbulent s'étendait à l'interface parce que l'entraînement turbulent a réduit sa densité, la cas tornade a pu pénétrer efficacement à travers l'interface et se propager de façon presque ininterrompue du fait de l'annulation de l'entraînement, et transporter un fluide presque non dilué. Avec des conditions suffisamment calmes et si les panaches sont suffisamment paresseux, cela pourrait avoir des implications importantes pour le transport vertical des polluants provenant des effluents rejetés en profondeur ainsi que des nutriments et de la chaleur libérés par les cheminées géothermiques abyssales.

CONCLUSION

Parmi la multitude d'études sur les milieux stratifiés et/ou tournants, cette thèse a porté sur les ondes internes gravito-inertielles, et sur les panaches paresseux en rotation. Le coeur de celle-ci, l'étude des ondes gravito-inertielles, est la continuité du travail de nombreux doctorants, une fusion entre les travaux de Géraldine Davis sur les résonances dans une cavité bidimensionnelle, ceux de Grimaud Pillet sur le tracé de rayon en trois dimensions et ceux de Samuel Boury sur les ondes gravito-inertielles dans une géométrie cylindrique pour ne citer que les trois derniers.

Les résultats obtenus sont décrits ci-après, chapitre par chapitre.

Étude par tracé de rayon

La description des ondes gravito-inertielles par la trajectoire des faisceaux d'onde, ou leurs caractéristiques nous a permis de quantifier la convergence vers les attracteurs. Le diagramme d'existence, dit diagramme (d, τ) , a été introduit pour l'étudier dans la géométrie trapèze 2D. Nous avons développé une méthode par tracé de rayons qui reproduit ces résultats. Adaptée à la 3D et à la cuve tronconique, elle nous indique qu'il est possible de former un attracteur dans cette géométrie. On peut ainsi définir une gamme de fréquences à utiliser expérimentalement pour les obtenir. L'attracteur alors formé serait plutôt une collection infinie d'attracteurs 2D, chacun obtenu par rotation autour de l'axe de symétrie.

Cette technique pourrait être généralisée pour étudier la convergence dans d'autres géométries, notamment afin d'obtenir de véritables attracteurs 3D (ce qui pourrait être le cas dans une géométrie elliptique, piste explorée par Benjamin Favier et Stéphane Le Dizès à l'IRPHE).

Attracteurs axisymétriques : Régimes linéaire et non-linéaire

La formation d'attracteurs dans le régime linéaire a été observée dans la gamme de fréquence prévue par le tracé de rayon. Les attracteurs sont apparus dans le cas des ondes internes de gravité, des ondes inertielles et des ondes gravito-inertielles. La réponse impulsionnelle du système montre deux types de structures pouvant exister dans la cuve. D'un côté, les attracteurs pour lesquels la zone de convergence décrite dans le régime linéaire est retrouvée. D'un autre, des ondes stationnaires, ou modes verticaux, sont observés.

Dans le régime faiblement non-linéaire, les expériences à amplitude constante font apparaître une instabilité triadique résonante (TRI), grâce à la focalisation de l'énergie par l'attracteur et à la convergence vers le centre de la cuve. Cette instabilité bien connue [DAUXOIS et al. 2018]

se déclenche différemment pour les ondes internes de gravité et les ondes inertielles. Les sous-harmoniques, dans le cas des ondes internes de gravité sont des ondes stationnaires, modes de résonance de la cuve.

Malgré nos tentatives, le mécanisme d'interaction sur l'axe de symétrie reste incompris. Les expériences suggèrent que la convergence déclenche du mélange (dans le cas où $N \neq 0$) et détruit la structure de l'attracteur. Cependant, à de faibles amplitudes, un comportement plus proche du cas 2D peut être retrouvé en ajoutant un cylindre de diamètre suffisant au centre du domaine pour que l'onde s'y réfléchisse. Un l'élargissement de la zone de convergence, avec des vitesses plus importantes, est observé.

Les données montrent également une forte composante géostrophique ($\omega = 0$) sans que les contributions du forçage et du transfert de l'énergie par cascade inverse puissent être distinguées. Contrairement à une étude précédente dans le cas bidimensionnel [DAVIS et al. 2020], aucune turbulence d'ondes n'a été observée, ni même les prémices d'une cascade de TRI. L'énergie est dissipée par les interactions entre ondes seulement à amplitude moyenne, mais par la turbulence et le déferlement à grande amplitude.

Instabilité d'un mode en stratification non-linéaire

L'observation de la propagation de modes dans une stratification non-linéaire confirme des prédictions théoriques : L'interaction par superposition d'un mode-3 et d'un mode-4 génère selon la fréquence de forçage un mode-1 ou un mode-2 au double de celle-ci. Dans une stratification linéaire seulement le mode-1 aurait pu être observé.

Nous reportons aussi la première preuve expérimentale d'une prédiction théorique récente : Un mode (3 ou 4 ici) peut interagir avec lui-même pour générer une super-harmonique, ce qui n'est pas possible dans une stratification linéaire.

Finalement, nous avons pu observer, dans une stratification non-linéaire, la déstabilisation par TRI d'un mode, résultant en deux faisceaux d'ondes planes dans deux directions opposées dont la fréquence vérifie la condition de résonance. D'autres études sont en cours pour quantifier l'importance des non-linéarités et leur effet sur le taux de croissance des sous-harmoniques.

Panaches dans un fluide en rotation

La transformation d'un panache en tornade sous l'action de la rotation et du fluide environnant est possible dans une région de l'espace des paramètres Ω , Q_0 et ρ . Même si une tornade est attendue en fonction de la valeur des paramètres, elle peut ne pas se produire en raison de la variation turbulente aléatoire autour du panache causée par la nature turbulente du panache. Une vitesse d'injection trop élevée inhibe ainsi le phénomène par le biais d'une turbulence plus forte. Une rotation trop importante défavorise le processus en favorisant la déviation du panache près de la source.

Nous avons esquissé un mécanisme pour la formation de la tornade via l'augmentation de la vitesse azimutale par l'entraînement radial, la déviation de Coriolis et la conservation de la quantité de mouvement qui augmentent le nombre de Rossby local conduisant à la laminarisation de l'écoulement. Des simulations ont permis de mettre en évidence une compétition entre le temps de déflexion et celui de laminarisation.

BIBLIOGRAPHIE

- AKSNES, D. et al. (2019). "Multi-decadal warming of Atlantic water and associated decline of dissolved oxygen in a deep fjord". In : *Estuarine, Coastal and Shelf Science* 228, p. 106392.
- AUDOLY, V. (2021). "Etude expérimentale d'attracteurs d'ondes internes 3D". Stage de M1 dirigé par Joubaud, Sylvain et Pacary, Corentin Physique Lyon, École normale supérieure 2021. Thèse de doct.
- BAKER, L. et B. SUTHERLAND (2020). "The evolution of superharmonics excited by internal tides in non-uniform stratification". In : *Journal of Fluid Mechanics* 891.
- BARAFFE, I. et al. (2023). "A study of convective core overshooting as a function of stellar mass based on two-dimensional hydrodynamical simulations". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 519.4, p. 5333-5344.
- BATCHELOR, G. (1964). "Axial flow in trailing line vortices". In : *Journal of Fluid Mechanics* 20.4, p. 645-658.
- BECKEBANZE, F. et al. (2018). "Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction". In : *Journal of Fluid Mechanics* 841, p. 614-635.
- BOEHRER, B. et M. SCHULTZE (2008). "Stratification of lakes". In : *Reviews of Geophysics* 46.2.
- BOLTON, D. (1980). "The computation of equivalent potential temperature". In : *Monthly weather review* 108.7, p. 1046-1053.
- BORDES, G. et al. (2012). "Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid". In : *Physics of Fluids* 24.1, p. 014105.
- BOURGET, B. (2014). "Ondes internes, de l'instabilité au mélange. Approche expérimentale". Thèse de doctorat. Thèse de doct.
- BOURY, S. (2020). "Energy and Buoyancy Transport by Inertia-Gravity Waves in Non-Linear Stratifications. Application to the Ocean". Thèse de doct.
- BOURY, S. et al. (2021). "Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor". In : *Journal of Fluid Mechanics* 926.
- BOURY, S. et al. (2023). "Triadic resonant instability in confined and unconfined axisymmetric geometries". In : *Journal of Fluid Mechanics* 957, A20.
- BOUSSINESQ, J. (1903). *Théorie Analytique de la chaleur*, Vol 2. Gauthier-Villars.
- BROUZET, C. (2016). "Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing". Thèse de doct. Université de Lyon.

BIBLIOGRAPHIE

- BROUZET, C. et al. (2016a). "Energy cascade in internal-wave attractors". In : EPL (Europhysics Letters) 113.4, p. 44001.
- BROUZET, C. et al. (2016b). "Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations". In : Journal of Fluid Mechanics 793, p. 109-131.
- (2016c). "Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations". In : Journal of Fluid Mechanics 793, p. 109-131.
- BRUNET, M. et al. (2019). "Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor". In : Physical Review Fluids 4.3, p. 034801.
- CACCHIONE, D. et C. WUNSCH (1974). "Experimental study of internal waves over a slope". In : Journal of Fluid Mechanics 66.2, p. 223-239.
- CALKINS, M. et al. (2010). "Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry". In : Physics of Fluids 22.8, p. 086602.
- COUSTON, L. et al. (2017). "Dynamics of mixed convective–stably-stratified fluids". In : Physical Review Fluids 2.9, p. 094804.
- DALZIEL, S. et al. (2000). "Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren'". In : Experiments in fluids 28.4, p. 322-335.
- DAUXOIS, T. et W. YOUNG (1999). "Near-critical reflection of internal waves". In : Journal of Fluid Mechanics 390, p. 271-295.
- DAUXOIS, T. et al. (2018). "Instabilities of internal gravity wave beams". In : Annual Review of Fluid Mechanics 50, p. 131-156.
- DAVIS, G. (2019). "Attracteurs d'ondes internes de gravité : des résonances en cascade". Thèse de doctorat. Thèse de doct.
- DAVIS, G. et al. (2019). "Energy budget in internal wave attractor experiments". In : Journal of Fluid Mechanics 880, p. 743-763.
- DAVIS, G. et al. (2020). "Succession of resonances to achieve internal wave turbulence". In : Physical Review Letters 124.20, p. 204502.
- DAVIS, R. et A. ACRIVOS (1967). "The stability of oscillatory internal waves". In : Journal of Fluid Mechanics 30.4, p. 723-736.
- DIAMESSIS, P. et al. (2014). "Nonlinear generation of harmonics through the interaction of an internal wave beam with a model oceanic pycnocline". In : Dynamics of Atmospheres and Oceans 66, p. 110-137.
- DOBRA, T. et al. (2022). "A hierarchical decomposition of internal wave fields". In : Journal of Fluid Mechanics 934.
- ECONOMIDOU, M. et G. HUNT (2009). "Density stratified environments : the double-tank method". In : Experiments in fluids 46.3, p. 453-466.
- EKMANN, V. (1904). "On dead water". In : Sci. Results Norw. Polar Expedi. 1893-96 5.15, p. 152.
- ERIKSEN, C. (1982). "Observations of internal wave reflection off sloping bottoms". In : Journal of Geophysical Research : Oceans 87.C1, p. 525-538.
- FABREGAT TOMÀS, A. et al. (2016). "Effects of rotation on turbulent buoyant plumes in stratified environments". In : Journal of Geophysical Research : Oceans 121.8, p. 5397-5417.
- FAN, B. et T. AKYLAS (2021). "Instabilities of finite-width internal wave beams : from Floquet analysis to PSI". In : Journal of Fluid Mechanics 913.
- FARRAR, T. et al. (2007). "Sea surface temperature signatures of oceanic internal waves in low wind-s". In : Journal of Geophysical Research 112.C6.
- FERNANDO, H. et al. (1998). "Development of a point plume in the presence of background rotation". In : Physics of Fluids 10.9, p. 2369-2383.
- FINCHAM, A. et G. DELERCE (2000). "Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms". In : Experiments in Fluids 29.1, S013-S022.
- FORTUIN, J. (1960). "Theory and application of two supplementary methods of constructing density gradient columns". In : Journal of polymer science 44.144, p. 505-515.
- FRANK, D. et al. (2017). "Anticyclonic precession of a plume in a rotating environment". In : Geophysical Research Letters 44.18, p. 9400-9407.

- GARCIA, J. et J. MELLADO (2014). "The two-layer structure of the entrainment zone in the convective boundary layer". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 71.6, p. 1935-1955.
- GARRETT, C. et E. KUNZE (2007). "Internal tide generation in the deep ocean". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 39, p. 57-87.
- GAYEN, B. et S. SARKAR (2014). "PSI to turbulence during internal wave beam refraction through the upper ocean pycnocline". In : *Geophysical Research Letters* 41.24, p. 8953-8960.
- GERKEMA, T. et J. ZIMMERMAN (2008). "An introduction to internal waves". In : *Lecture Notes, Royal NIOZ, Texel* 207.
- GHAEMSAIDI, S. et al. (2016). "Nonlinear internal wave penetration via parametric subharmonic instability". In : *Physics of Fluids* 28.1, p. 011703.
- GOSTIAUX, L. et al. (2006). "Quantitative laboratory observations of internal wave reflection on ascending slopes". In : *Physics of Fluids* 18.5, p. 056602.
- GRAY, D. et A. GIORGINI (1976). "The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases". In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 19.5, p. 545-551.
- GRAYSON, K. et al. (2022). "The long view of triadic resonance instability in finite-width internal gravity wave beams". In : *arXiv preprint arXiv :2205.14734*.
- GRIFFITHS, R. et P. LINDEN (1981). "The stability of vortices in a rotating, stratified fluid". In : *Journal of Fluid Mechanics* 105, p. 283-316.
- GRISOUARD, N. et al. (2011). "Generation of internal solitary waves in a pycnocline by an internal wave beam : a numerical study". In : *Journal of Fluid Mechanics* 676, p. 491-513.
- GURURAJ, S. et A. GUHA (2022). "Resonant and near-resonant internal wave triads for non-uniform stratifications. Part 2. Vertically bounded domain with mild-slope bathymetry". In : *Journal of Fluid Mechanics* 943.
- HASSELMANN, K. (1967). "A criterion for nonlinear wave stability". In : *Journal of Fluid Mechanics* 30.4, p. 737-739.
- HAZEWINKEL, J. et al. (2008). "Observations on the wavenumber spectrum and evolution of an internal wave attractor". In : *Journal of Fluid Mechanics* 598, p. 373-382.
- HE, J. et al. (2022). "Internal shear layers in librating spherical shells : the case of periodic characteristic paths". In : *Journal of Fluid Mechanics* 939.
- HELFRICH, K. et T. BATTISTI (1991). "Experiments on baroclinic vortex shedding from hydrothermal plumes". In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 96.C7, p. 12511-12518.
- HEWITT, I. (2020). "Subglacial Plumes". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 52, p. 145-169.
- HILL, D. (2002). "General density gradients in general domains : the "two-tank" method revisited". In : *Experiments in fluids* 32.4, p. 434-440.
- HOFSTADTER, D. (1981). "Strange attractors : mathematical patterns delicately poised between order and chaos". In : *Scientific American* 245.5, p. 22-43.
- HOGG, N. et H. STOMMEL (1985). "The heton, an elementary interaction between discrete baroclinic geostrophic vortices, and its implications concerning eddy heat-flow". In : *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 397.1812, p. 1-20.
- HUNT, G. et N. KAYE (2005). "Lazy plumes". In : *Journal of Fluid Mechanics* 533, p. 329.
- HUNT, G. et P. LINDEN (2001). "Steady-state flows in an enclosure ventilated by buoyancy forces assisted by wind". In : *Journal of Fluid Mechanics* 426, p. 355.
- HUNT, G. et T. VAN DEN BREMER (2011). "Classical plume theory : 1937-2010 and beyond". In : *IMA journal of applied mathematics* 76.3, p. 424-448.
- HURLEY, D. (1970). "Internal waves in a wedge-shaped region". In : *Journal of Fluid Mechanics* 43.1, p. 97-120.
- HUSSEINI, P. (2019). "Interactions non-linéaires d'ondes internes de gravité et mélange en milieu stratifié". Thèse de doct. Université de Lyon.
- HUSSEINI, P. et al. (2020). "Experimental study on superharmonic wave generation by resonant interaction between internal wave modes". In : *Physical Review Fluids* 5.7, p. 074804.

BIBLIOGRAPHIE

- JACKSON, C. et al. (2013). "Nonlinear internal waves in synthetic aperture radar imagery". In : *Oceanography* 26.2, p. 68-79.
- JOHNSTON, S. et M. MERRIFIELD (2003). "Internal tide scattering at seamounts, ridges, and islands". In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 108.C6.
- JOUBAUD, S. et al. (2012). "Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids". In : *Physics of Fluids* 24.4, p. 041703.
- KOUDELLA, C. et C. STAQUET (2006). "Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave". In : *Journal of Fluid Mechanics* 548, p. 165-196.
- KUNZE, E. et L. SMITH (2004). "The role of small-scale topography in turbulent mixing of the global ocean". In : *Oceanography* 17.1, p. 55-64.
- LANCHON, N. et al. (2023). "Internal wave turbulence in a stratified fluid with and without eigenmodes of the experimental domain". In : *Physical Review Fluids* 8.5, p. 054802.
- LAVERGNE, C. de et al. (2019). "Toward global maps of internal tide energy sinks". In : *Ocean Modelling* 137, p. 52-75.
- LE REUN, T. et al. (2019). "Experimental study of the nonlinear saturation of the elliptical instability : inertial wave turbulence versus geostrophic turbulence". In : *Journal of Fluid Mechanics* 879, p. 296-326.
- LECOANET, D. et al. (2021). "Surface manifestation of stochastically excited internal gravity waves". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 508.1, p. 132-143.
- LEHR, B. et al. (2010). "Oil budget calculator—Deepwater Horizon, technical documentation : A report to the National Incident Command". In : *Coastal Response Res. Cent.*
- LI, G. et al. (2020). "Increasing ocean stratification over the past half-century". In : *Nature Climate Change* 10.12, p. 1116-1123.
- MA, Y. (2018). "Plumes in two-layer stratified fluid with and without background rotation". In : *Environmental Fluid Mechanics* 20.1, p. 103-122.
- MA, Y. et al. (2020). "Plumes in a rotating two-layer stratified fluid". In : *Environmental Fluid Mechanics* 20.1, p. 103-122.
- MAAS, L. (2005). "Wave attractors : linear yet nonlinear". In : *International Journal of Bifurcation and Chaos* 15.09, p. 2757-2782.
- MAAS, L. et F. LAM (1995). "Geometric focusing of internal waves". In : *Journal of Fluid Mechanics* 300, p. 1-41.
- MAAS, L. et al. (1997). "Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid". In : *Nature* 388.6642, p. 557.
- MACKINNON, J. et al. (2017). "Climate process team on internal wave-driven ocean mixing". In : *Bulletin of the American Meteorological Society* 98.11, p. 2429-2454.
- MAGAARD, L. (1962). "Zur Berechnung interner Wellen in Meeresräumen mit nicht-ebenen Böden bei einer speziellen Dichteverteilung". In : *Kieler Meeresforschungen* 18.2, p. 161-183.
- (1968). "Ein Beitrag zur Theorie der internen Wellen als Störungen geostrophischer Strömungen". In : *Deutsche Hydrografische Zeitschrift* 21.6, p. 241-278.
- MANDERS, A. et L. MAAS (2004). "On the three-dimensional structure of the inertial wave field in a rectangular basin with one sloping boundary". In : *Fluid dynamics research* 35.1, p. 1.
- MARQUET, P. et B. STEVENS (2022). "On moist potential temperatures and their ability to characterize differences in the properties of air parcels". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 79.4, p. 1089-1103.
- MARTINS, F. et al. (2020). "Vorticity transport in laminar steady rotating plumes". In : *Physics of Fluids* 32.4, p. 043604.
- MATHIS, S. et al. (2008). "Angular momentum transport in the Sun's radiative zone by gravito-inertial waves". In : *Helioseismology, Asteroseismology, and MHD Connections*, p. 101-118.
- MATHUR, M. et al. (2014). "Topographic scattering of the low-mode internal tide in the deep ocean". In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 119.4, p. 2165-2182.
- MAURER, P. (2017). "Approche expérimentale de la dynamique non-linéaire d'ondes internes en rotation". Thèse de doct. Université de Lyon.

BIBLIOGRAPHIE

- MAURER, P. et al. (2016). "Generation and stability of inertia-gravity waves". In : Journal of Fluid Mechanics 808, p. 539-561.
- MAYELL, P. et G. SHEARD (2021). "Buoyancy-driven flows beyond the Boussinesq approximation : A brief review". In : International Communications in Heat and Mass Transfer 125, p. 105316.
- MERCIER, M. et al. (2008). "Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform". In : Physics of Fluids 20.8, p. 086601.
- MERCIER, M. et al. (2010). "New wave generation". In : Journal of Fluid Mechanics 657, p. 308-334.
- MERCIER, M. et al. (2011). "Resurrecting dead-water phenomenon". In : Nonlinear Processes in Geophysics 18.2, p. 193-208.
- MORA, D. et al. (2021). "Three-dimensionality of the triadic resonance instability of a plane inertial wave". In : Physical Review Fluids 6.7, p. 074801.
- MORTON, B. (1957). "Buoyant plumes in a moist atmosphere". In : Journal of Fluid Mechanics 2.2, p. 127-144.
- (1958). "The ascent of turbulent forced plumes in a calm atmosphere". In : Int. J. Air Poll 1, p. 184-197.
- MORTON, B. et al. (1956). "Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources". In : Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 234.1196, p. 1-23.
- MUNK, W. (1966). "Abyssal recipes". In : Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts. T. 13. 4. Elsevier, p. 707-730.
- NOAA (s. d.). History of hydrothermal plume studies at PMEL.
- OGILVIE, G. (2005). "Wave attractors and the asymptotic dissipation rate of tidal disturbances". In : Journal of Fluid Mechanics 543, p. 19-44.
- OSTER, G. (1965). "Density gradients". In : Scientific American 213.2, p. 70-79.
- PHILLIPS, O. (1963). "Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves". In : The Physics of Fluids 6.4, p. 513-520.
- (1966). The dynamics of the upper ocean. Cambridge UP.
- PILLET, G. (2018). "Attracteurs d'ondes internes à trois dimensions : analyse par tracés de rayons et étude expérimentale". Thèse de doct.
- PILLET, G. et al. (2018). "Internal wave attractors in three-dimensional geometries : trapping by oblique reflection". In : Journal of Fluid Mechanics 845, p. 203-225.
- POLLMANN, F. (2020). "Global characterization of the ocean's internal wave spectrum". In : Journal of Physical Oceanography 50.7, p. 1871-1891.
- POLZIN, K. (2009). "An abyssal recipe". In : Ocean Modelling 30.4, p. 298-309.
- PRIESTLEY, C. et F. BALL (1955). "Continuous convection from an isolated source of heat". In : Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 81.348, p. 144-157.
- RODDA, C. et al. (2022). "Experimental observations of internal wave turbulence transition in a stratified fluid". In : Physical Review Fluids 7.9, p. 094802.
- ROSPARS, A. (2021). "Triadic Resonance in Internal Waves : Case of a Non-Linear Stratification". Rapport de TP dirigé par Joubaud, Sylvain et Pacary, Corentin et Varma, Dheeraj Physique Lyon, École normale supérieure 2021. Thèse de doct.
- SARKAR, S. et A. SCOTTI (2017). "From topographic internal gravity waves to turbulence". In : Annual Review of Fluid Mechanics 49, p. 195-220.
- SAVARO, C. et al. (2020). "Generation of weakly nonlinear turbulence of internal gravity waves in the Coriolis facility". In : Physical Review Fluids 5.7, p. 073801.
- SCOLAN, H. et al. (2013a). "Nonlinear fate of internal wave attractors". In : Physical review letters 110.23, p. 234501.
- (2013b). "Nonlinear fate of internal wave attractors". In : Physical review letters 110.23, p. 234501.
- SCORER, R. (1959). "The behaviour of chimney plumes". In : Int. four. of Air Pollution 1.3, p. 198.

- SIDERY, T. et al. (2008). "Waves and instabilities in dissipative rotating superfluid neutron stars". In : Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 385.1, p. 335-348.
- SOCOLOFSKY, S. et al. (2011). "Formation dynamics of subsurface hydrocarbon intrusions following the Deepwater Horizon blowout". In : Geophysical Research Letters 38.9.
- SPARKS, R. et al. (1997). Volcanic Plumes. New York :Wiley.
- SPIEGEL, E. et G. VERONIS (1960). "On the Boussinesq approximation for a compressible fluid." In : Astrophysical Journal 131, p. 442.
- ST. LAURENT, L. et C. GARRETT (2002). "The role of internal tides in mixing the deep ocean". In : Journal of Physical Oceanography 32.10, p. 2882-2899.
- STAQUET, C. et J. SOMMERIA (2002). "Internal gravity waves : from instabilities to turbulence". In : Annual Review of Fluid Mechanics 34.1, p. 559-593.
- SUTHERLAND, B. (2010). Internal gravity waves. Cambridge university press.
- (2016). "Excitation of superharmonics by internal modes in non-uniformly stratified fluid". In : Journal of Fluid Mechanics 793, p. 335-352.
- SUTHERLAND, B. et M. DHALIWAL (2022). "The nonlinear evolution of internal tides. Part 1 : the superharmonic cascade". In : Journal of Fluid Mechanics 948, A21.
- SUTHERLAND, B. et al. (2021). "Plumes in rotating fluid and their transformation into tornados". In : Journal of Fluid Mechanics 924, A15.
- TABAEI, A. et al. (2005). "Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams". In : Journal of Fluid Mechanics 526, p. 217-243.
- THORPE, S. (1966). "On wave interactions in a stratified fluid". In : Journal of Fluid Mechanics 24.4, p. 737-751.
- TURNER, J. (1979). Buoyancy effects in fluids. Cambridge university press.
- VAN HOOLST, T. et al. (2008). "The librations, shape, and icy shell of Europa". In : Icarus 195.1, p. 386-399.
- VARMA, D. et M. MATHUR (2017). "Internal wave resonant triads in finite-depth non-uniform stratifications". In : Journal of Fluid Mechanics 824, p. 286-311.
- VARMA, D. et al. (2020). "Spontaneous superharmonic internal wave excitation by modal interactions in uniform and nonuniform stratifications". In : Dynamics of Atmospheres and Oceans 91, p. 101159.
- VARMA, D. et al. (2023a). "Experimental study of superharmonic internal wave resonant triads in finite-depth non-uniform stratifications". In : Submitted.
- VARMA, D. et al. (2023b). "Instabilities in internal gravity waves". In : Mathematics in Engineering 5.1, p. 1-34.
- WEAST, RC et MJ ASTLE (1981). "CRC Handbook of Chemistry and Physics 61st edition". In : Chemical Rubber Co.
- WOODS, A. (1988). "The fluid dynamics and thermodynamics of eruption columns". In : Bulletin of Volcanology 50.3, p. 169-193.
- (2010). "Turbulent plumes in nature". In : Annual Review of Fluid Mechanics 42, p. 391-412.
- WOODS, A. et J. BUSH (1999). "Dimensions and dynamics of megaplumes". In : Journal of Geophysical Research : Oceans 104.C9, p. 20495-20507.
- WUNSCH, C. et R. FERRARI (2004). "Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans". In : Annual Review of Fluid Mechanics 36, p. 281-314.
- WUNSCH, S. (2015). "Nonlinear harmonic generation by diurnal tides". In : Dynamics of Atmospheres and Oceans 71, p. 91-97.
- (2017). "Harmonic generation by nonlinear self-interaction of a single internal wave mode". In : Journal of Fluid Mechanics 828, p. 630-647.
- WUNSCH, S. et al. (2015). "Experimental study of nonlinear harmonic generation by internal waves incident on a pycnocline". In : Experiments in Fluids 56.5, p. 1-14.
- ZHAO, Z. et al. (2012). "Mapping low-mode internal tides from multisatellite altimetry". In : Oceanography 25.2, p. 42-51.

Résumé

Les ondes gravito-inertielles se propagent dans les milieux stratifiés et/ou en rotation. Elles ont une importance dans le contexte géophysique, notamment dans l'océan, par leur capacité à transporter et dissiper l'énergie.

Leur relation de dispersion, liant fréquence et angle de propagation, cause lors de la réflexion sur une pente inclinée, la focalisation d'un faisceau d'onde et l'apparition de structures, appelées attracteurs, sur lesquelles l'énergie est concentrée. Nous étudions numériquement par tracé de rayons les conditions de formation de ces attracteurs, déjà bien étudiées en deux dimensions, dans une géométrie tridimensionnelle, restreinte au cas axisymétrique. Une étude expérimentale confirme la formation de ces attracteurs dans le régime linéaire.

Dans le régime faiblement non-linéaire, l'instabilité triadique résonnante est observée, mettant en évidence des différences entre un fluide stratifié au repos et un fluide homogène en rotation, celles-ci étant dues à la possibilité d'interaction avec des modes d'ondes stationnaires. La présence de l'axe de symétrie, augmentant la dissipation dans le système, empêche l'apparition d'une cascade d'énergie de type turbulence d'ondes.

Le rôle d'une stratification non-linéaire dans la formation de modes verticaux super-harmoniques est étudiée par superposition et auto-interaction de modes.

Une dernière partie s'intéresse à la dynamique de panaches dans un milieu uniforme en rotation. Sous certaines conditions, celui-ci n'est plus dévié de son axe mais est laminarisé pour former un tourbillon cylindrique, tel une tornade, pouvant avoir des conséquences sur le transport par ces panaches.

Abstract

Inertia-gravity waves propagate in stratified and/or rotating media and are of great importance in the geophysical context, particularly in the ocean, due to the transport and the dissipation of the energy injected by tidal forces, and to maintain its stratification. Their peculiar dispersion relation, linking frequency and propagation angle, also makes them an interesting object of study.

This relation causes, during the reflection on an inclined slope, the focusing of a wave beam and the rise of structures, called attractors, on which the energy is concentrated. We study numerically by ray tracing the conditions of formation of these attractors, already well studied in two dimensions, in a three-dimensional geometry, restricted to the axisymmetric case.

An experimental study confirms the formation of these attractors, and their use to reach the weakly non-linear regime. In particular, the resonant triadic instability is observed, with differences between a stratified fluid at rest and a homogeneous rotating fluid, due to the possibility of interaction with standing wave modes. The presence of the axis of symmetry increases the dissipation in the system and prevents the occurrence of a wave turbulence type of energy cascade.

In the ocean, waves can propagate in the form of vertical propagative modes and the stratification is non-linear. With such a stratification in the laboratory, a mode can interact with itself to form a wave with double the frequency.

A final section looks at the dynamics of plumes in a uniform rotating ambient fluid. Under certain conditions, the plume is no longer deviated from its axis but is laminarised to form a cylindrical vortex, like a tornado, which could have consequences for the transport by these plumes.