



HAL
open science

Combinatoire et géométrie des quotients de l'ordre faible

Doriann Albertin

► **To cite this version:**

Doriann Albertin. Combinatoire et géométrie des quotients de l'ordre faible. Mathématique discrète [cs.DM]. Université Gustave Eiffel, 2022. Français. NNT : 2022UEFL2078 . tel-04212305

HAL Id: tel-04212305

<https://theses.hal.science/tel-04212305v1>

Submitted on 20 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

COMBINATOIRE ET GÉOMÉTRIE DES QUOTIENTS DE L'ORDRE FAIBLE

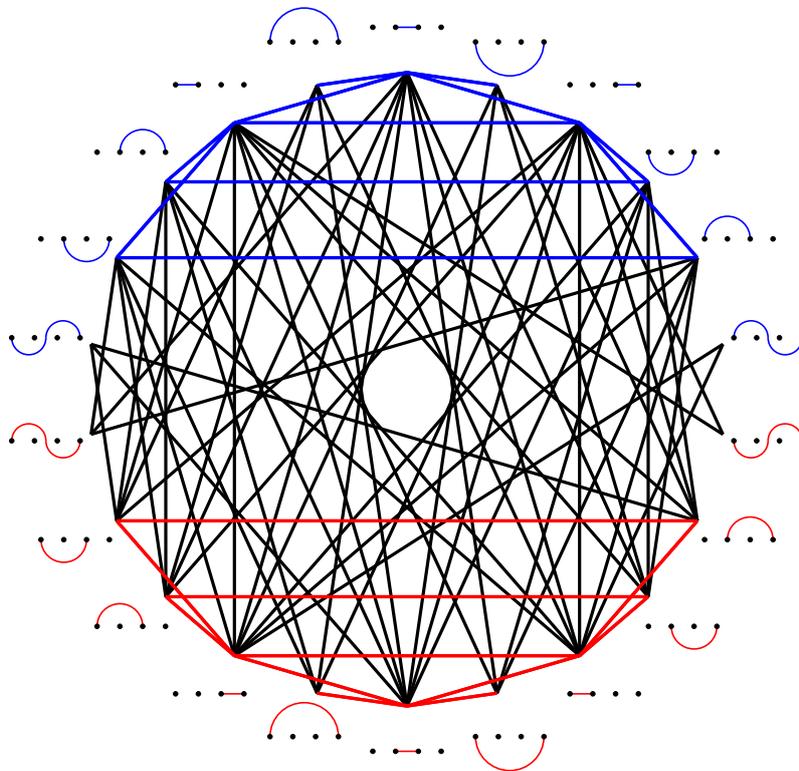
pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Gustave Eiffel
Spécialité Informatique

École Doctorale de Mathématiques et des Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication

Présentée et soutenue publiquement par
Doriann Albertin
le 26 septembre 2022

Devant le jury composé de

Jean-Christophe Aval	Examineur
Emily Barnard	Examinatrice
Frédéric Chapoton	Rapporteur
Jean-Christophe Novelli	Directeur de thèse
Vincent Pilaud	Co-encadrant de thèse
Viviane Pons	Examinatrice
Lionel Pournin	Examineur
Nathan Reading	Rapporteur



Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge
UMR 8049 LIGM
5 boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
1 Préliminaires	11
1.1 Théorie des ordres partiels et des treillis	11
1.1.1 Pré-ordres, relations d'équivalences et ordres	11
1.1.2 Treillis	13
1.1.3 Distributivité et semi-distributivité	15
1.1.4 Congruences de treillis	17
1.2 Ordre faible	19
1.2.1 Définitions et semi-distributivité	19
1.2.2 Arcs et diagrammes d'arcs sans croisements	21
1.2.3 Congruences de l'ordre faible	22
1.2.4 Structure de l'ordre de forçage	24
1.3 Géométrie discrète	27
1.3.1 Polytopes et éventails	27
1.3.2 Cônes de type	31
1.4 Géométrie des quotients de l'ordre faible	33
1.4.1 Géométrie de l'ordre faible	33
1.4.2 Fonctions sous-modulaires	35
1.4.3 Éventails quotients et quotientopes	36
2 Congruences permusylvestres	41
2.1 Permutarbres	41
2.1.1 Une famille de congruences de l'ordre faible	41
2.1.2 Géométrie des congruences permusylvestres	44
2.2 Enlevoèdres	46
2.2.1 Rayons des éventails quotients	46
2.2.2 Les enlevoèdres sont les permusylvèdres	48
2.2.3 Les permusylvèdres sont fortement enlevoèdres	50
2.3 Cône de type des éventails permusylvestres	51
2.3.1 Rayons des éventails permusylvestres	51
2.3.2 Rayons échangeables des éventails permusylvestres	53
2.3.3 Facettes des cônes de type permusylvestres	55
2.3.4 Description dans le cas simplicial	60

3	Complexe canonique	63
3.1	Complexes simpliciaux et représentations canoniques	63
3.1.1	Complexes sup et inf canoniques	63
3.1.2	Complexe canonique	66
3.1.3	Quelques bijections sur les intervalles	69
3.2	Complexes canoniques de l'ordre faible	71
3.2.1	Complexe sup et inf canoniques de l'ordre faible	71
3.2.2	Ordre faible sur les arcs	72
3.2.3	Bidiagrammes d'arcs à semi-croisements	73
3.2.4	SCABs & WOIPs	79
3.2.5	Applications de Kreweras dans les quotients de l'ordre faible	80
	Index	83
	Table des figures	85
	Bibliographie	90

Remerciements

Au terme de trois années bien remplies de travail et de beaucoup d'autres choses, la rédaction de ces lignes est l'occasion de revenir sur les rencontres qui m'ont permis d'arriver là où je suis.

J'aimerais en premier lieu remercier Frédéric Chapoton et Nathan Reading pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Leur lecture minutieuse de ces lignes aura permis d'éliminer de nombreuses typos et imprécisions. Je remercie avec eux l'ensemble des chercheuses qui ont accepté de faire partie de mon jury de soutenance : Jean-Christophe Aval, Emily Barnard, Viviane Pons et Lionel Pournin.

Viendront évidemment compléter ce jury mes deux directeurs de thèse, Jean-Christophe Novelli et Vincent Pilaud, qui méritent leur paragraphe propre. Je leur suis très reconnaissant pour le temps qu'il m'ont consacré, pour le soin qu'ils ont pris à me faire découvrir le monde de la recherche, où les règles sont si peu claires pour qui s'y aventure sans guide. Ils ont su me motiver quand le cœur n'y était plus, me rassurer quand je perdais pied, et m'aiguiller quand j'étais bloqué. Je suis très heureux de l'encadrement que j'ai eu, et je porte encore avec moi les nombreux conseils qu'ils ont pu me donner.

Il m'importe de nommer ici mes co-auteurs : Vincent Pilaud et Julian Ritter, avec qui ce fut un plaisir de collaborer, ainsi que les patients relecteurs de ma thèse : Noémie Cartier, Daniel Tamayo Jiménez, Jean-Christophe Novelli et Vincent Pilaud.

Ma gratitude va à l'ensemble des personnes qui, tout au long de mes études, m'ont fait découvrir la combinatoire et m'ont aiguillé dans cette direction. Je souhaiterais nommer en particulier Nicolas Thiéry, qui le premier m'aura dirigé vers l'équipe combinatoire du LIGM, et son bien connu séminaire du vendredi matin.

Je remercie toute l'équipe qui s'est retrouvée à ces fameux séminaires, pour la patience avec laquelle ils ont su accueillir mes prises de parole plus ou moins improvisées. J'aimerais aussi mentionner les membres du LIGM et en particulier ceux qui m'ont accompagné dans ma double découverte de l'enseignement à la fac et de l'enseignement de l'informatique. Je suis très reconnaissant aux personnels administratifs du LIGM, Corinne, Séverine et Nathalie, pour leur efficacité, leur bonne humeur et les nombreuses fois où elles m'ont sauvé d'une perdition bureaucratique certaine.

J'aimerais également mentionner les chercheuse rencontré-e-s au détour des séminaires parisiens ou des conférences et en particulier Matthieu Josuat-Vergès, Arnau Padrol, Viviane Pons et Lionel Pournin, qui ont toustes fait en sorte que je me sente le bienvenu dans le monde de la recherche.

Merci à toustes mes collègues doctorant-e-s (ou ex-doctorant-e-s) grâce à qui les journées de travail ont pu être rythmées de pauses plus ou moins sérieuses. Merci à Hélène et Maxime pour les séminaires du soir. Merci à toute la team de Jussieu avec Eva, Germain et Chiara, ces jeudis midis vont me manquer. Merci à Daniel pour ma meilleure passe de salsa. Merci à Hugo, Baptiste, Balthazar, Monica, Arthur, Christophe, Arthur et Justine

Quittant le monde de la combinatoire, mes pensées vont à Pierre et Théo et à leur soutien indéfectible.

Quittant enfin le monde académique, je remercie mes proches et amis, celles qui ont supporté de partager mon toit, ma famille, ma compagne Juliette, et bien entendu, mon chat sans qui ces trois années n'auraient été qu'un calvaire.

Introduction

Avant-propos

Cette thèse se situe dans le domaine de la combinatoire et plus précisément au croisement de la combinatoire géométrique avec l'étude de polytopes et de la combinatoire algébrique avec la théorie des ordres et des treillis.

La combinatoire, partie intégrante des mathématiques discrètes, peut se définir comme l'étude des différentes configurations de familles d'objets discrets. Ces familles sont naturellement munies d'une taille et comprennent un nombre fini d'objets d'une taille fixée. Le domaine le plus fondamental de la combinatoire est l'énumération des objets de ces familles par leur taille : la combinatoire énumérative.

On retrace difficilement les origines de la combinatoire, tant certains des problèmes les plus classiques (mais pas nécessairement les plus simples) requièrent très peu de connaissances préalables pour être énoncés. On trouve en effet des problèmes combinatoires dans les manières de paver un carrelage, de fabriquer un collier de perles, de colorer une carte géographique ou de s'asseoir autour d'une table. Pour autant, elle n'est pas étrangère aux théories mathématiques plus avancées, puisqu'elle trouve à la fois des applications et des inspirations dans des domaines comme la théorie des nombres, la théorie des représentations, la physique théorique ou encore la topologie algébrique. Elle connaît en particulier un nouvel essor au siècle dernier avec la montée en force de l'informatique, où les problèmes sont par nature discrets. L'informatique entretient une relation symbiotique avec la combinatoire, puisque la résolution de problèmes discrets permet le développement d'algorithmes et de systèmes informatiques, tandis que l'exploitation de la puissance de calcul des ordinateurs devient également un outil indispensable au combinatoire, afin de parcourir une plus grande masse d'exemples et suggérer, confirmer ou infirmer ses conjectures. Ce travail ne fait pas exception et repose de manière importante sur l'utilisation du logiciel à code source ouvert Sage [Sage]. L'implémentation dans Sage de certains des objets étudiés dans les chapitres à venir a permis d'affiner leur compréhension, d'établir et d'infirmer des conjectures et de construire certaines des figures qui suivront.

Comme souvent en mathématiques, parvenir à observer un même objet depuis deux points de vues différents permet d'en acquérir une compréhension beaucoup plus fine. On peut citer l'exemple bien connu de la somme des n premiers entiers naturels, qui une fois assimilée au nombre de carrés nécessaires au dessin d'un escalier à $n - 1$ marches, se calcule aisément sans même le besoin d'un raisonnement par récurrence. La combinatoire dite bijective est fortement motivée par ce phénomène et une grande partie de ce travail se situe dans cette philosophie : on fera le lien entre des propriétés géométriques de polytopes et des propriétés combinatoires de familles d'objets discrets ou entre des intervalles de quotients de treillis et des familles différemment structurées de ces mêmes objets : les arcs.

Contexte

Ordre faible

Les **permutations** sont probablement l'objet le plus élémentaire de la combinatoire. Une permutation de taille n est une manière d'écrire les entiers naturels de 1 à n les uns à la suite des autres. Les permutations de taille $[n]$ sont donc dénombrées par la **factorielle** de n , qui vaut $n! = n \times \dots \times 1$. Ce point de vue, proche de la combinatoire des mots, est enrichi par la structure algébrique des permutations. Le **groupe symétrique** \mathfrak{S}_n est le groupe des permutations de taille n , muni de la composition des fonctions, en voyant toute permutation comme un cas particulier de fonction de $[n]$ dans $[n]$, où la i^{e} lettre d'une permutation est la valeur sur laquelle elle envoie i . Ces groupes contiennent en un sens tous les groupes finis, puisque tout groupe fini est sous-groupe d'un groupe symétrique. Le groupe symétrique fait partie de la famille des groupes de Coxeter, famille fortement liée à la combinatoire géométrique. On sera régulièrement amené à manipuler des statistiques classiques sur les permutations, comme les **descentes**, qui sont les positions i tels que les lettres aux indices i et $i + 1$ sont dans l'ordre décroissant, où l'**ensemble d'inversions** d'une permutation, ensemble des valeurs qu'elle renverse.

L'objet central de ce travail est l'**ordre faible**. Il s'agit d'un ordre partiel sur les permutations d'une taille fixée, ordonnées par inclusion de leurs ensembles d'inversions. Ces relations peuvent s'interpréter comme des produits à droite des permutations par des permutations particulières, les **transpositions élémentaires**. Ainsi, l'ordre faible contient une partie de la structure de groupe des permutations. Ce sentiment que l'ordre faible est un objet algébrique est renforcé par sa structure de **treillis** : toute partie de celui-ci admet un unique supremum et un unique infimum [GR63 ; Bjö84].

Considérons les $n!$ points de \mathbb{R}^n naturellement associés aux permutations de taille n . Leur enveloppe convexe forme un polytope appelé le **permutoèdre**, dont la structure faciale a pour modèle combinatoire les partitions ordonnées. Ce polytope contient toute la donnée de l'ordre faible, puisqu'en orientant ses arêtes selon une direction bien choisie, on retrouve les relations de couverture de l'ordre faible. De manière duale, en distinguant dans \mathbb{R}^n les familles de points selon l'ordre relatif de leurs coordonnées dans la base canonique, on obtient les chambres d'un éventail, appelé **éventail de tresses**. En un sens précis, l'éventail de tresses est dual au permutoèdre : il est son **éventail normal**. On peut également identifier l'ordre faible dans l'éventail de tresses, puisqu'il est son **poset des régions** [Ede84 ; BEZ90 ; Rea16a].

Treillis de Tamari

La seconde famille préférée du combinatoriste est à multiples facettes. Les familles catalanes, dénombrées par les **nombre de Catalan**, sont de très nombreuses manières de voir les mêmes objets. On pourra citer parmi celles-ci les arbres binaires plans, les chemins de Dyck, les partitions non-croisées, les permutations évitant le motif 132, ou encore les triangulations d'un polygone convexe (voir [Sta08] pour un catalogue plus complet). Cette famille n'a pas la seule propriété d'être très large, mais surtout celle d'apparaître dans des contextes mathématiques très variés. Notre représentant dédié sera dans ce travail les **arbres binaires plans**, dénombrés par leurs nombres de nœuds internes.

Le **treillis de Tamari**, introduit dans [Tam62 ; HT72], est un treillis défini sur une famille catalane, classiquement comme la rotation dans les arbres binaires, qui change une branche gauche en branche droite en préservant l'ordre des trois sous-arbres de la branche. À ce stade, on peut déjà remarquer que l'algorithme d'insertion de [HNT05], qui associe à une permutation un arbre binaire, permet de retrouver le treillis de Tamari à partir de l'ordre faible : le treillis

de Tamari est l'ordre induit par les minimaux des fibres de l'algorithme d'insertion dans l'ordre faible [BW97, Thm. 9.6]. Cette remarque est le point de départ de l'étude des congruences de l'ordre faible, qui généraliseront ce procédé.

De la même manière que pour l'ordre faible, le treillis de Tamari possède des réalisations géométriques naturelles. On commence par étiqueter tous les arbres binaires par un parcours infixe, de sorte que tout nœud porte une étiquette plus grande que celle de son fils gauche, et plus petite que celle de son fils droit. On associe alors à tout arbre binaire T le cône défini par les inégalités $x_i \leq x_j$ pour toute arête $i \rightarrow j$ de T . Les cônes ainsi obtenus forment les chambres d'un éventail : l'**éventail sylvestre**. Cet éventail est aussi l'éventail normal d'un polytope, l'**associaèdre** [SS93 ; Lod04], dont les sommets sont étiquetés par les arbres binaires et les faces par les arbres de Schröder [Sta86, Ex. 1.45]. Comme précédemment, on peut retrouver le treillis de Tamari en orientant le squelette de l'associaèdre.

On peut définir de manière équivalente les chambres de l'éventail sylvestre comme les unions des chambres de l'éventail de tresses associées à des permutations que l'algorithme d'insertion de [HNT05] envoie sur le même arbre, c'est-à-dire associées à des permutations qui sont des extensions linéaires du même arbre. L'éventail sylvestre sera en ce sens notre exemple fondamental dans la construction des éventails quotients.

Treillis semi-distributifs

L'ordre faible et le treillis de Tamari sont deux exemples de **treillis semi-distributifs** finis [Le 94 ; HT72]. Cette propriété admet plusieurs caractérisations. Son nom provient du fait que l'hypothèse de semi-distributivité est une relaxation de la distributivité du supremum et de l'infimum l'un sur l'autre. La manière dont on préfère penser la semi-distributivité est la condition selon laquelle tout élément du treillis peut s'écrire comme le supremum (resp. l'infimum) d'une famille d'éléments du treillis qui soit minimale pour l'inclusion, et minimale (resp. maximale) pour l'ordre du treillis. Cet ensemble est la **représentation sup** (resp. **inf**) **canonique** de l'élément en question. Les éléments qui sont leur propre représentation sup (resp. inf) canonique sont les **sup** (resp. **inf**) **irréductibles**. Tous les éléments d'une représentation sup (resp. inf) canonique sont sup (resp. inf) irréductibles.

Dans [Rea15], N. Reading introduit un complexe simplicial associé à un treillis semi-distributif quelconque encodant la compatibilité des différents sup irréductibles à former une représentation sup canonique : le **complexe sup canonique**. Ses sommets sont les éléments sup irréductibles et ses faces sont les représentations sup canoniques de tous les éléments du treillis. Ce complexe a été étudié en détail dans [Bar19].

Arcs et diagrammes

Les arcs et les diagrammes d'arcs, introduits dans [Rea15], forment la famille d'objets propice à l'étude de la structure de l'ordre faible. Un **arc** est, graphiquement, une ligne courbe monotone selon l'axe des x , qui lie deux points parmi $\{(i, 0) \mid i \in [n]\}$ et serpente entre les points séparant son point de départ de son point d'arrivée, en passant au dessus ou en dessous de chacun. Un **diagramme d'arcs sans croisements** est une collection d'arcs dont les intérieurs sont disjoints et ne partageant ni leur extrémité gauche, ni leur extrémité droite.

N. Reading montre que les permutations sont en bijection avec les diagrammes d'arcs sans croisements et observe que cette bijection envoie les permutations sup irréductibles sur les diagrammes composés d'un unique arc. Il montre alors que la représentation sup canonique d'une permutation σ est juste l'ensemble des permutations sup irréductibles que cette bijection envoie sur un des arcs du diagramme d'arcs sans croisements associé à σ . Le complexe sup canonique

est donc naturellement en bijection avec le **complexe sans croisements**, dont les sommets sont les arcs, et les faces les diagrammes d’arcs sans croisements.

Congruences de treillis

On appelle **congruence de treillis** toute relation d’équivalence sur un treillis qui *respecte* les opérations de supremum et d’infimum, *i.e.*, telle que les opérations de supremum et d’infimum sont bien définies sur les classes de la relation d’équivalence. Les classes de la relation sont alors naturellement munies d’une structure de treillis : le **treillis quotient**. Une congruence de treillis est uniquement déterminée par l’ensemble des sup irréductibles qu’elle **contracte**, c’est-à-dire qui ne sont pas minimaux dans leur classe. N’importe quelle famille de sup irréductibles ne définit pas une congruence. Il faut et suffit qu’elle forme un idéal inférieur dans un poset sur les sup irréductibles appelé **ordre de forçage**. Le complexe sup canonique d’un treillis quotient est alors naturellement le sous-complexe induit par les sup irréductibles non contractés [Rea15].

On s’intéressera principalement aux congruences de l’ordre faible, dont un premier exemple a déjà été donné en filigrane. En effet, les fibres de l’algorithme d’insertion de [HNT05] constituent les classes d’une congruence de l’ordre faible, appelée **congruence sylvestre**, dont le treillis quotient n’est autre que le treillis de Tamari.

Dans [Rea16b], N. Reading conclut le chapitre par une section constituée d’un bestiaire étendu de congruences d’ordres faibles de différents groupes de Coxeter. Il y présente des congruences issues de la géométrie ou dont les classes correspondent à des objets combinatoires classiques. Il y observe en ce sens en introduction que :

Lattice congruences on the weak order “know” a lot of combinatorics and geometry related to Coxeter groups.

C’est dans la filiation de cette idée que se situe ce travail, dont deux résultats principaux font interagir respectivement les congruences de l’ordre faible avec la combinatoire géométrique, et avec les représentations sup et inf canoniques.

N. Reading établit dans [Rea15] non seulement un modèle combinatoire pour le complexe sup canonique de l’ordre faible, mais aussi pour l’ordre de forçage de l’ordre faible, allant dans le sens de cette citation. Il décrit cet ordre sur les arcs plutôt que sur les permutations sup irréductibles et remarque que celui-ci correspond à la simple extension des arcs. On a alors une description combinatoire simple des congruences de l’ordre faible. On exploitera fortement ce modèle combinatoire et on en généralisera l’utilisation à la description des intervalles des quotients de l’ordre faible.

Les deux exemples de treillis que nous avons jusqu’alors considérés se trouvent unifiés comme deux cas particuliers de treillis quotients de l’ordre faible (pour la congruence triviale où les classes sont des singletons, et pour la congruence sylvestre) parmi une famille beaucoup plus grande de treillis. Ce travail concerne l’étude des procédés observés sur l’ordre faible et/ou le treillis de Tamari dans les treillis quotients en général. Il s’appuie en ce sens sur [PS19], où les V. Pilaud et F. Santos construisent le **quotientope** associé à une congruence, dont l’éventail normal est l’**éventail quotient** de [Rea05], obtenu à partir de l’éventail de tresses en fusionnant les chambres associées à des permutations d’une même classe. Cette famille de polytopes interpole entre le cube et le permutoèdre, en passant par l’associaèdre.

Permutarbres

Une famille de congruences qui retiendra particulièrement notre attention est la famille des **congruences permusylvestres**. Ses différentes instances permettent de retrouver des objets classiques comme les arbres binaires (et le treillis de Tamari et l’associaèdre de [SS93; Lod04]),

les permutations (et l'ordre faible et le permutoèdre), les arbres cambriens (et les treillis cambriens et les associaèdres de [HL07 ; LP18]) ou encore les suites binaires (et le treillis booléen et l'hypercube).

Les congruences permusylvestres furent introduites dans [PP18] et généralisent l'algorithme d'insertion sylvestre. Un **permutarbre** est un arbre orienté plan étiqueté par $[n]$ dont chaque nœud interne a un ou deux enfants et un ou deux parents et dont les étiquettes vérifient une condition locale similaire à celle des arbres binaires de recherche. En fixant le nombre d'enfants et de parents de chaque nœud interne, c'est-à-dire en fixant une **décoration**, on peut associer à chaque permutation un permutarbre, de manière non-injective mais surjective, à la manière de l'algorithme d'insertion de [HNT05]. Pour chacune de ces décorations, les fibres de cette surjection forment les classes d'équivalence d'une congruence de treillis : la **congruence permusylvestre** associée à cette décoration. De manière équivalente, les congruences permusylvestres sont exactement celles pour lesquelles l'idéal de l'ordre de forçage (sur les arcs) correspondant aux permutations sup irréductibles contractées est engendré par une famille d'arcs dont les extrémités sont à distance 2 l'une de l'autre. Les treillis quotients associés à ces congruences peuvent être construits en généralisant aux permutarbres la rotation des arbres binaires.

Les éventails quotients des congruences permusylvestres sont les éventails normaux des **permusylvèdres**, qui sont obtenus en enlevant certaines inégalités de la description des facettes du permutoèdre. En ce sens, les congruences permusylvestres sont des **congruences d'enlevoèdre**. On donnera dans ce travail une nouvelle raison de penser que les congruences permusylvestres forment une catégorie à part parmi les congruences de l'ordre faible : ce sont les seules à être des congruences d'enlevoèdre.

Contenu

L'essentiel de cette thèse repose sur les deux publications suivantes :

- D. ALBERTIN, V. PILAUD & J. RITTER. *Removahedral congruences versus permutree congruences*. *The Electronic Journal of Combinatorics* 28.4 (2021), P4.8,
- D. ALBERTIN & V. PILAUD. *The canonical complex of the weak order*. [arXiv:2111.11553](https://arxiv.org/abs/2111.11553) 2021 (à paraître dans Order).

Chacune de ces publications a donné lieu à un exposé à la conférence FPSAC, respectivement en 2021 et en 2022.

Le premier chapitre présente les notions classiques nécessaires à la compréhension de la suite, tandis que les deux chapitres suivants, qui sont indépendants, présentent principalement les résultats des deux publications ci-dessus. On peut se référer à la figure pour savoir quelles parties sont nécessaires à la compréhension de chaque partie. Le chapitre 2 requiert plus de préliminaires que le chapitre 3, l'ordre de ces chapitres respecte la chronologie des articles correspondants.

Chapitre 1 : Préliminaires

Ce chapitre d'ouverture contient le socle mathématique sur lequel repose le reste de la thèse. Le lecteur éclairé pourra omettre la lecture de cette partie et aller y chercher ponctuellement les notations ou définitions dont il aura besoin plus tard en se référant à l'index, qui contient les numéros de pages où sont définies ou employées les différentes notions et notations.

On commence par introduire les bases de la théorie des ordres partiels, en partant des définitions élémentaires de **pré-ordre**, de **relation d'équivalence** et d'**ordre partiel**. On définit les **treillis** puis les **treillis distributifs**, lesquels sont particulièrement contraints et centraux dans l'étude des posets, vu le théorème fondamental des treillis distributifs (Théorème 1.1.29), qui établit que tout treillis distributif est le **treillis des antichaînes** du sous-poset induit par ses sup

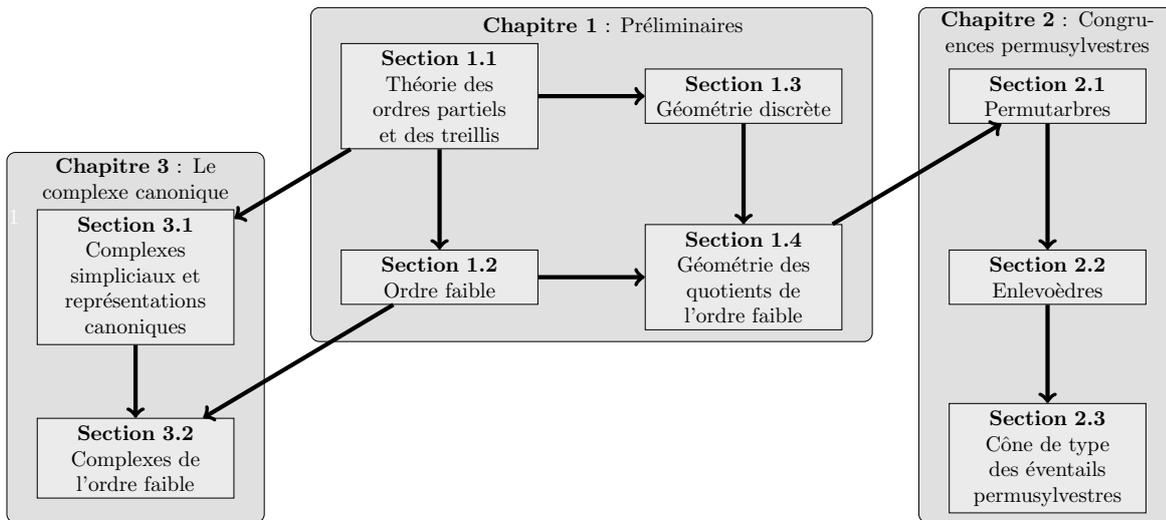


FIGURE 1 – Plan du manuscrit

irréductibles. On introduit ensuite les **treillis semi-distributifs**, qui sont la classe de treillis au centre de ce travail. On en fournit différentes définitions alternatives, comme une relaxation de la condition de distributivité, ou par l'existence des **représentations sup et inf canoniques**, dont on donne alors une méthode de calcul explicite (Propositions 1.1.33 et 1.1.34). On conclut cette brève introduction à la théorie des posets et des treillis par l'étude des congruences des treillis sup ou inf semi-distributifs. On présente les définitions de **congruence de treillis** et de **treillis quotient**, on discute de la structure du **treillis des congruences** et on construit l'**ordre de forçage** sur les sup irréductibles de sorte que le treillis des congruences soit isomorphe au treillis des antichaînes de l'ordre de forçage. Enfin, on décrit les représentations sup et inf canoniques dans les treillis quotients.

Passée cette introduction très générale, on se concentre sur notre treillis favori : l'**ordre faible**. On en donne la définition formelle et les premières propriétés élémentaires, notamment la description de ses relations de couverture. Les sections 1.2.2 et 1.2.3 sont intégralement basées sur les notions et objets développés par N. Reading dans [Rea15]. On y définit les **arcs** et les **diagrammes d'arcs sans croisements**, ces derniers étant en bijection avec les permutations et permettant une description simple des représentations sup et inf canoniques de l'ordre faible. On explore ensuite les liens entre les arcs et les congruences de l'ordre faible. Les arcs étant en bijection avec les permutations sup irréductibles, l'ordre de forçage peut s'écrire sur les arcs et correspond à la simple troncature de ceux-ci. Les idéaux de ce poset fournissent alors un modèle combinatoire des congruences de l'ordre faible. On profite de cette occasion pour mentionner les exemples fondamentaux de congruences de l'ordre faible : les congruences **sylvestre** [HNT05 ; LR98], **cambriennes** [Rea06] et **hypoplaxique** [Nov00]. La dernière partie de cette section se concentre sur les nombreuses symétries de l'ordre de forçage sur les arcs.

La section suivante consiste en l'introduction des bases de la géométrie discrète utiles à cette thèse. On y définit deux objets fondamentaux : les **polytopes** et les **éventails**. Un polytope est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, ou de manière équivalente, l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces ; tandis qu'un éventail est une collection de cône polyédraux dont les faces sont dans la collection et où l'intersection de deux cônes est une face de chacun. Ces deux objets sont naturellement munis d'une structure faciale, qui prend la forme du **treillis**

des faces d'un polytope et du **treillis des cônes** d'un éventail. On peut associer par dualité un éventail à un polytope : son **éventail normal**. Ces deux objets sont fortement corrélés et on conclut cette partie en introduisant le moins classique **cône de type** d'un éventail [McM73], qui décrit l'ensemble des polytopes dont l'éventail normal est l'éventail en question. On rappelle enfin un théorème de [CFZ02] qui nous fournit une méthode de calcul explicite des cônes de type, via l'étude des **inégalités de croisement de mur**. Celles-ci associent à chaque paire de rayons adjacents de l'éventail une inégalité, l'intersection desquelles est le cône de type de l'éventail.

Comme précédemment, on spécialise l'ensemble des définitions de la partie précédente à l'ordre faible. Pour ce faire, on introduit le **permutoèdre** et l'**éventail de tresses**, qui sont le polytope et l'éventail naturellement associés à l'ordre faible. Le permutoèdre est l'enveloppe convexe des $n!$ points naturellement associés aux permutations et l'éventail de tresses est l'éventail normal du permutoèdre, ou de manière équivalente, l'éventail défini par les hyperplans $x_i = x_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Les faces du permutoèdre (et par conséquent les cônes de l'éventail de tresses) sont étiquetées par des objets combinatoires : les **mots tassés** [Zie93]. On décrit ensuite le cône de type de l'éventail de tresses, au moyen des **fonctions sous-modulaires** [Edm70]. On conclut ce premier chapitre par l'étude des **éventails quotients** [Rea05] : à chaque congruence de l'ordre faible, on associe l'éventail dont les cônes maximaux sont les unions des chambres de l'éventail de tresses associées à des permutations d'une même classe. On introduit les **tessons**, qui partitionnent les hyperplans de l'éventail de tresses en morceaux en bijection avec les arcs. L'observation fondamentale pour l'étude des éventails quotients, montrée dans [Rea05], est que les cônes de codimension 1 de l'éventail quotient associé à une congruence sont l'union des tessons associés aux arcs non contractés par la congruence. Enfin, on introduit la famille des **quotientopes** [PS19; PPR20], qui sont des polytopes dont les éventails normaux sont les éventails quotients. Cette famille comprend donc le permutoèdre, l'associaèdre de [SS93; Lod04], les associaèdres cambriens de [HL07; LP18] et le cube, associés respectivement à la **congruence triviale**, à la **congruence sylvestre** [HNT05; LR98], aux **congruences cambriennes** [Rea06] et à la **congruence hypoplaxique** [KT97; Nov00].

Chapitre 2 : Congruence permusylvestres

Le chapitre 2, majoritairement basé sur l'article [APR21], est consacré à l'étude des congruences permusylvestres [PP18], aux spécificités de leurs quotientopes et à la construction du cône de type de l'éventail quotient associé.

On commence par introduire les **permutarbres**, étudiés dans [PP18]. Ce sont des arbres orientés dont les nœuds internes sont étiquetés par $[n]$, ont un ou deux enfants et un ou deux parents et vérifient une condition locale similaire à celle des arbres binaires de recherche. On appelle **décoration** d'un permutarbre le mot de longueur n sur l'alphabet $\{\oplus, \otimes, \ominus, \boxtimes\}$ dont les lettres représentent le nombre d'enfants et de parents de chaque nœud. Les permutarbres décorés respectivement par \oplus^n , \otimes^n , \boxtimes^n correspondent alors aux permutations, aux arbres binaires et aux suites binaires. De manière générale, on s'intéressera aux permutarbres regroupés par décoration. La **congruence permusylvestre** associée à une décoration est alors définie de manière équivalente en généralisant l'algorithme d'insertion de [HNT05], au moyen de règles de réécritures sur les permutations, ou en définissant les classes comme les ensembles de permutations étant les extensions linéaires d'un même permutarbre [PP18]. On donne également une caractérisation de ces congruences en terme d'idéal de l'ordre de forçage sur les arcs. On donne les constructions explicites tirées de [PP18] de l'éventail quotient et du quotientope associés à une congruence permusylvestre, appelés **éventail permusylvestre** et **permusylvèdre**. Notons que les éventails permusylvestres sont tous simpliciaux.

On s'intéresse ensuite aux spécificités des permusylvèdres. Ceux-ci s'obtiennent en enlevant

des inégalités dans la description des facettes du permutoèdre. En ce sens, les congruences permusylvestres sont des **congruences d'enlevoèdres**. On démontre que ce sont les seules congruences à vérifier une telle propriété. Pour arriver à ce théorème, on donne d'abord un critère combinatoire d'appartenance d'un rayon de l'éventail de tresses à un éventail quotient, dont on déduit une caractérisation simple pour les éventails permusylvestres. On remarque au passage que les congruences permusylvestres sont des congruences d'enlevoèdre en un sens plus fort, puisque l'on peut appliquer la même méthode de construction de polytope à partir de n'importe quelle réalisation de l'éventail de tresses (et pas juste du permutoèdre) pour obtenir un polytope dont l'éventail normal est l'éventail permusylvestre. Il existe cependant des réalisations de l'éventail de tresses pour lesquelles les congruences permusylvestres ne sont pas les seules à vérifier cette propriété.

La fin de ce chapitre est consacrée au calcul du cône de type de certains éventails permusylvestres. On commence par affiner notre étude de la structure de ceux-ci en caractérisant et en comptant leurs rayons. On décrit ensuite l'*adjacence* de ces rayons, afin d'invoquer [CFZ02] et d'obtenir les inégalités de croisement de mur définissant le cône de type. On affine notre analyse afin de sélectionner les inégalités de croisement de mur nécessaires à la description du cône de type et on les énumère pour obtenir le nombre de facettes du cône de type d'un éventail permusylvestre. De nos résultats de dénombrement, on déduit une caractérisation des décorations pour lesquelles le cône de type est simplicial, ce qui nous permet, à l'aide d'une proposition de [PPPP19], de donner une description alternative de tous les polytopes du cône de type des éventails permusylvestres en question.

Chapitre 3 : Complexe canonique

Cet ultime chapitre, reposant sur l'article [AP21], s'intéresse à la construction de complexes simpliciaux associés à des treillis, encapsulant leur structure combinatoire. On y présente des idées de [Rea15] pour décrire les éléments d'un treillis semi-distributif et on les généralise pour décrire les intervalles de ce treillis. Durant tout ce chapitre, à la manière de [Bar19], on donne en exemple le comportement particulier des treillis distributifs.

On introduit tout d'abord le **complexe sup canonique** d'un treillis semi-distributif de [Rea15]. Ce complexe décrit les éléments du treillis au moyen de leurs représentations sup canoniques. Plus précisément, ses sommets sont les éléments sup irréductibles du treillis, tandis que ses faces sont les collections de tels éléments qui forment une représentation sup canonique. Ses faces sont donc en bijection avec les éléments du treillis. Ce complexe se comporte bien vis-à-vis des quotients de treillis, au sens où le complexe sup canonique d'un quotient est le sous-complexe du complexe sup canonique du treillis engendré par les éléments sup irréductibles non contractés dans le quotient. Le **complexe inf canonique** est défini de manière analogue et on introduit l'application κ , qui réalise un isomorphisme entre les sommets de ces deux complexes [BTZ21]. On définit les **applications de Kreweras** entre ces deux complexes, bijections réciproques qui échangent la représentation sup canonique d'un élément et sa représentation inf canonique. On démontre qu'étant donnée une congruence, la représentation sup canonique d'un élément est plus grande (dans le treillis des antichaînes) que la représentation sup canonique du minimum de sa classe. Ce résultat sera affiné plus tard dans le cas de l'ordre faible. Passés ces résultats sur les complexes sup et inf canoniques, on introduit l'objet de cette section et de [AP21] : le **complexe canonique**. Il s'agit d'un complexe simplicial sur l'union disjointe des sup irréductibles et des inf irréductibles du treillis, dont les faces sont les unions disjointes d'une représentation sup canonique et d'une représentation inf canonique, de sorte que la première soit plus petite que la seconde. Les faces du complexe canonique sont donc en bijection avec les intervalles du treillis. Les complexes sup et inf canoniques sont naturellement des sous-complexes du complexe cano-

nique. On observe que celui-ci est un **complexe octaédral**, puisqu'il est possible de le plonger sur le squelette d'un octaèdre. On discute enfin de quelques symétries des complexes canoniques et on en déduit des symétries des **polynômes de valence** de [Cha17]. Ces polynômes quadri-variés associés à un poset contiennent un monôme par intervalle I du poset, dont les exposants dénombrent les autres intervalles du poset différant de I seulement à une extrémité et seulement d'une relation de couverture dans le poset.

Suivant un schéma similaire à celui du chapitre 1, on spécialise à l'ordre faible les objets introduits jusqu'ici dans le chapitre 3. L'étude des complexes sup et inf canoniques de l'ordre faible provient de [Rea15]. N. Reading y introduit le **complexe sans croisements**, qui est un complexe simplicial sur les arcs dont les faces sont les diagrammes d'arcs sans croisements. La bijection entre les permutations et les diagrammes d'arcs sans croisements envoie le complexe sup canonique sur le complexe sans croisements. On se concentre dans la suite sur l'objet introduit dans [AP21] pour fournir un modèle combinatoire au complexe canonique de l'ordre faible : les **bidiagrammes d'arcs à semi-croisements**. Il s'agit de la superposition de deux diagrammes d'arcs sans croisements, où seuls certains croisements entre un arc du premier diagramme et un arc du second diagramme sont autorisés. Le **complexe de semi-croisement** est défini comme le complexe simplicial dont les sommets sont deux copies de l'ensemble des arcs et dont les faces sont les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements. Le complexe canonique de l'ordre faible et le complexe de semi-croisement sont isomorphes, en envoyant une permutation irréductible sur l'arc associé. Les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements fournissent donc, au vu de la partie précédente, un modèle combinatoire décrivant tous les intervalles de n'importe quel quotient de l'ordre faible. Les opérations de rotation, de symétrie et l'opération κ sur les arcs induisent des automorphismes du complexe canonique de l'ordre faible. On décrit les diagrammes d'arcs sans croisements correspondant à des singletons dans l'ordre faible. On donne un procédé combinatoire simple réalisant la bijection entre les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements et un objet pré-existant décrivant les intervalles de l'ordre faible : les WOIPs de [CPP19]. Enfin, on donne une méthode combinatoire de calcul des applications de Kreweras dans les quotients de l'ordre faible, qui permettent de passer de la description de la représentation inf canonique du minimum d'une classe à la représentation sup canonique du maximum de cette classe et *vice versa*. Cette construction généralise le complément de Kreweras sur les partitions non-croisées [Kre72].

Perspectives

Tout au long de ce travail, on met en avant des pistes que nous aimerions explorer lors de recherches futures (perspectives 1.2.33, 1.2.34, 2.3.22, 2.3.23, 3.1.22, 3.1.35, 3.2.21, 3.2.18, 3.2.29 et 3.2.30).

On peut mentionner en particulier les perspectives 1.2.33 et 3.1.35, qui suggèrent de poursuivre les études respectives de l'ordre de forçage sur les arcs et des polynômes de valence de l'ordre faible, afin d'obtenir des résultats d'énumération sur l'ordre faible : sur son nombre de congruences et sur son nombre d'intervalles, deux suites encore mal comprises.

Les perspectives 2.3.22 et 3.2.30 représentent plutôt les motivations qui ont mené aux résultats de ce travail. La première pose la question d'une description des cônes de type de tous éventails quotients, là où l'on ne décrit que ceux des éventails permusylvestres. La seconde concerne la construction d'une algèbre de Hopf sur les faces des quotientopes. Un premier pas dans cette direction serait l'exploration de la perspective 3.2.18, c'est-à-dire l'obtention d'une caractérisation des intervalles de l'ordre faible correspondant à une face du quotientope associé à une congruence donnée.

Les autres ouvertures concernent principalement des volontés naturelles de généralisation ou de précision, notamment en posant la question de l'adaptation de nos résultats aux groupes de

Coxeter d'autres types que A, ou à des classes de treillis plus générales que celles considérées.

On énonce également les conjectures 2.2.13 et 3.2.20, que l'on a observées informatiquement.

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit tous les éléments de combinatoire plus ou moins classiques qui seront requis pour la suite, ainsi que les notations que nous utiliserons pour les décrire. Le lecteur averti pourra aisément omettre la lecture de tout ou partie des préliminaires.

1.1 Théorie des ordres partiels et des treillis

Nous présentons ici des objets classiques de la théorie des posets, en allant du plus général au plus spécifique, avec un niveau de structure croissant. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Grä11].

1.1.1 Pré-ordres, relations d'équivalences et ordres

Cette partie est dédiée à la définition et aux premières propriétés de sous-familles des relations binaires.

Définition 1.1.1. Soit E un ensemble fini. Un pré-ordre sur E est une relation binaire \preceq qui est :

- (i) **réflexive**, *i.e.*, $\forall x \in E, x \preceq x$,
- (ii) et **transitive**, *i.e.*, $\forall x, y, z \in E^3, x \preceq y$ et $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

Exemple 1.1.2. Sont des pré-ordres :

- (i) La divisibilité sur toute partie finie de \mathbb{Z}^1 ,
- (ii) Dans un graphe fini orienté, la relation $x \rightarrow y$ si et seulement s'il existe un chemin de x à y .

Définition 1.1.3. Une **relation d'équivalence** sur E est un pré-ordre \equiv sur E qui est **symétrique**, *i.e.*, tel que $\forall x, y \in E^2, x \equiv y \Leftrightarrow y \equiv x$. On appelle **classe d'équivalence** de $x \in E$ (relativement à \equiv) l'ensemble $[x]_{\equiv} := \{y \in E, y \equiv x\}$.

Exemple 1.1.4. Sont des relations d'équivalences :

- (i) L'égalité modulo k pour k entier, sur toute partie finie de \mathbb{N} .
- (ii) Dans un graphe non-orienté, la relation $x \rightarrow y$ si et seulement s'il existe un chemin de x à y .

1. On peut bien entendu définir des pré-ordres sur des ensembles infinis, mais ce n'est pas l'objet ici.

Définition 1.1.5. Un **ordre** ou **poset**² ou relation d'ordre sur E est un pré-ordre \leq sur E qui est **antisymétrique**, *i.e.*, tel que $\forall x, y \in E, x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$. On notera $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$. Pour $x, y \in E^2$, on dit que x **couvre** y lorsque $y < x$ et $\nexists z \in E, y < z < x$. On note alors $y < x$. Un **intervalle** est un sous-ensemble de E de la forme $[x, y] := \{z \in E \mid x \leq z \leq y\}$. Un poset est dit **total** lorsque tous ses éléments sont deux-à-deux comparables. Une **chaîne** dans un poset est un sous-ensemble d'éléments deux à deux comparables. Un poset est **gradué** s'il existe une **fonction de rang** de E dans \mathbb{N} croissant exactement d'une unité le long de n'importe quelle relation de couverture, ou de manière équivalente lorsque toute les chaînes maximales ont même cardinal. Enfin, on dit qu'un élément $x \in E$ est un **majorant** (resp. **minorant**) d'une partie $F \subseteq E$ lorsque $\forall y \in F, y \leq x$ (resp. $x \leq y$).

Exemple 1.1.6. Sont des posets :

- (i) L'ordre naturel sur une partie de \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , qui est total et gradué,
- (ii) La divisibilité sur un intervalle de \mathbb{N} , qui n'est pas totale en général, mais toujours graduée,
- (iii) L'ensemble $\mathcal{P}(n)$ des parties de $[n]$ muni de l'inclusion, qui n'est pas total pour $n \geq 2$ et qui est gradué.

L'exemple fondamental de poset est, pour nous, celui des permutations munies de l'inclusion de leurs ensembles d'inversions, dit ordre faible droit, voir section 1.2.

Définition 1.1.7. Le **diagramme de Hasse** du poset (E, \leq) est le graphe orienté sur E dont les arêtes sont les relations de couverture (voir figure 1.1). Le **graphe d'incomparabilité** d'un poset (E, \leq) est le graphe sur E dont les arêtes sont les paires d'éléments $\{x, y\}$ de E telles que x et y sont incomparables, *i.e.*, $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$.

On s'intéressera beaucoup dans la suite à un objet dual aux chaînes et à ses interprétations en terme de sous-ensembles clos *vers le bas* ou *vers le haut* :

Définition 1.1.8. Une **antichaîne** dans un poset est un sous-ensemble d'éléments deux à deux incomparables. Un **idéal inférieur** (ou idéal) d'un poset est un sous-ensemble $S \subseteq E$ tel que $\forall s \in S, \forall x \in E, x \leq s \Rightarrow x \in S$. Un **idéal supérieur** (ou filtre) est un sous-ensemble $S \subseteq E$ tel que $\forall s \in S, \forall x \in E, x \geq s \Rightarrow x \in S$. Pour $X \subseteq E$, l'idéal inférieur (resp. supérieur) engendré par X est $\langle X \rangle_{\downarrow}^{\leq} := \{y \in E \mid \exists x \in X, y \leq x\}$ (resp. $\langle X \rangle_{\uparrow}^{\leq} := \{y \in E \mid \exists x \in X, y \geq x\}$). On note de plus $\langle x \rangle_{\downarrow}^{\leq} := \langle \{x\} \rangle_{\downarrow}^{\leq}$ (resp. $\langle x \rangle_{\uparrow}^{\leq} := \langle \{x\} \rangle_{\uparrow}^{\leq}$) et on omettra l'exposant \leq quand le contexte le permet.

Observation 1.1.9. Soit (E, \leq) un poset. Ses antichaînes, ses idéaux inférieurs et ses idéaux supérieurs sont en bijection.

Démonstration. On passe d'un idéal inférieur à un idéal supérieur et *vice versa* en prenant le complémentaire dans E . À une antichaîne A , on associe l'idéal inférieur (resp. supérieur) $\langle A \rangle_{\downarrow}$ (resp. $\langle A \rangle_{\uparrow}$) formé de tous les éléments inférieurs (resp. supérieurs) à au moins un élément de l'antichaîne, de sorte que $\langle A \rangle_{\downarrow} \cap \langle A \rangle_{\uparrow} = A$. L'opération est bijective puisque l'antichaîne d'origine n'est autre que l'ensemble des éléments maximaux (resp. minimaux) de l'idéal inférieur (resp. supérieur). Précisons que ces bijections ne commutent pas : $\langle A \rangle_{\downarrow} \neq {}^c(\langle A \rangle_{\uparrow})$ (sauf pour l'antichaîne vide dans le poset vide). \square

Exemple 1.1.10. On considère le poset dont le diagramme de Hasse est présenté figure 1.1 (gauche). Ses relations de couverture sont exactement les arêtes du diagramme, au nombre de 13. L'intervalle $[3, 9]$ contient 3, 6, 7, 8 et 9, mais l'ensemble $\{1, 3, 4, 7, 9\}$ n'est pas un intervalle. Le

2. De l'anglais *partially ordered set*.

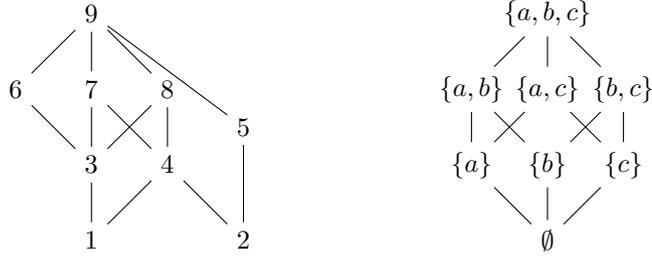


FIGURE 1.1 – Exemple de diagrammes de Hasse d’un poset sur $[9]$ (gauche) et du poset sur les parties de $\{a, b, c\}$ ordonnées par inclusion. Les éléments maximaux sont ceux les plus hauts, par exemple $1 < 3 < 7 < 9$.

poset n’est pas gradué. Ses minima sont 1 et 2 et son maximum 9. Les ensembles $\{5, 6, 7\}$ et $\{2, 3\}$ sont des antichaînes, mais pas $\{2, 6, 7\}$. Les idéaux inférieurs engendrés par ces antichaînes sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $\{1, 2, 3\}$ et les idéaux supérieurs engendrés par ces antichaînes sont $\{5, 6, 7, 9\}$ et $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Exemple 1.1.11. On considère le poset sur les parties de $\{a, b, c\}$ ordonnées par inclusion, dont le diagramme de Hasse est représenté figure 1.1 (droite). Il est gradué par la fonction de rang cardinal. De manière équivalente, toutes ses chaînes maximales sont de longueur 4.

En un sens, tout pré-ordre se décompose de manière unique en une relation d’équivalence (sa composante symétrique) et un poset (sa composante antisymétrique) :

Proposition 1.1.12. Soit (E, \dashv) un pré-ordre. La relation \equiv définie par $x \equiv y \Leftrightarrow x \dashv y$ et $y \dashv x$ est une relation d’équivalence sur E . La relation \leq définie sur les classes de \equiv par $[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} \Leftrightarrow x \dashv y$ est bien définie et est une relation d’ordre. De plus, les relations \equiv et \leq déterminent \dashv : l’application $\dashv \mapsto (\equiv, \leq)$ est injective.

Définition 1.1.13. Soit (E, \leq) un poset et $E' \subseteq E$. Le **poset induit** par E' est le poset $(E', \leq_{E'})$, où $\leq_{E'}$ est la trace de \leq sur $E' \times E'$. Un **sous-poset** de (E, \leq) est un poset (E', \leq') tel que \leq' est une sous-relation de \leq , i.e., tel que $\forall x, y \in E', x \leq' y \Rightarrow x \leq y$. On dit aussi que (E, \leq) est une **extension** de (E', \leq') . Une extension de (E, \leq) qui est totale est une **extension linéaire** de (E, \leq) . Lorsque $E = [n]$, on identifiera un ordre total sur E à une permutation.

Exemple 1.1.14. Les permutations 123456789 et 213468759 sont des extension linéaires du poset de la figure 1.1 (gauche).

1.1.2 Treillis

On ajoute à ce stade un aspect algébrique, en considérant des posets munis de deux lois de compositions internes.

Définition 1.1.15. Soient (E, \leq) un poset et $x, y \in E^2$. Le **supremum**, **sup** ou **join** de x et y est, quand il existe, le plus petit des majorants communs de x et y , noté $x \vee y$. De même, l’**infimum**, **inf** ou **meet** de x et y est, quand il existe, le plus grand des minorants communs de x et y , noté $x \wedge y$. Un **treillis** est un poset dans lequel toute paire d’éléments admet un supremum et un infimum.

Remarque 1.1.16. Une définition équivalente plus algébrique consiste à appeler treillis un triplet (L, \vee, \wedge) , où \vee et \wedge sont associatives, commutatives et vérifient la loi d'absorption

$$\forall a, b \in L^2, a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b).$$

L'ordre sur L se retrouve alors par

$$\forall a, b \in L^2, a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Les lois \vee et \wedge étant commutatives et associatives, on les étend naturellement aux familles d'éléments du treillis de plus de deux éléments.

Remarque 1.1.17. Un treillis fini possède toujours un unique maximum et un unique minimum. Tout poset induit par un intervalle d'un treillis est un treillis.

Exemple 1.1.18. Dans la figure 1.1, le poset induit par $\{3, 6, 7, 8, 9\}$ est un treillis, mais celui induit par $\{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ n'en est pas un. En effet, dans ce poset induit, 3 et 4 n'admettent pas de plus petit majorant et 7 et 8 n'admettent pas de plus grand minorant.

Exemple 1.1.19. L'ensemble $\mathcal{P}(n)$ muni de l'inclusion est un treillis. C'est le **treillis booléen** sur $[n]$ (voir figure 1.1 (droite)). Son supremum est donné par l'union et son infimum par l'intersection.

Exemple 1.1.20. Soit (E, \leq) un poset. L'ensemble des idéaux (inférieurs ou supérieurs) de E ordonnés par l'inclusion est un treillis. Le supremum est donné par l'union et l'infimum par l'intersection. En vertu de l'observation 1.1.9, on appelle **treillis des antichaînes** ce treillis ré-étiqueté avec les antichaînes du poset. Dans ce treillis, l'ordre sur les antichaînes s'écrit formellement :

$$A \leq A' \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists a' \in A', a \leq a'.$$

Cet exemple s'avérera fondamental, notamment à la section 1.1.3 et plus particulièrement au théorème 1.1.29.

Exemple 1.1.21. Le treillis booléen sur $[n]$ est le treillis des antichaînes de l'antichaîne de taille n (*i.e.*, du poset sur $[n]$ sans relations).

Définition 1.1.22. Un **complexe simplicial** est une paire (E, \mathcal{F}) où E est un ensemble et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ vérifie :

- (i) $\forall e \in E, \{e\} \in \mathcal{F}$,
- (ii) $\forall F \subseteq F', F' \in \mathcal{F} \Rightarrow F \in \mathcal{F}$.

En d'autres termes, c'est un idéal inférieur du treillis booléen sur E contenant les atomes $\{e\}$ pour $e \in E$. Les éléments de \mathcal{F} sont les **faces** du complexe et toute face F est de **dimension** $\dim(F) := |F| - 1$. La dimension d'une face correspond à son rang dans le treillis booléen. Pour toute partie $E' \subseteq E$, le sous-complexe simplicial induit par E' est le complexe simplicial $(E', \{F \cap E' \mid F \in \mathcal{F}\})$. Le **f -vecteur** d'un complexe simplicial (E, \mathcal{F}) est le polynôme en une indéterminée $\sum_{F \in \mathcal{F}} x^{\dim(F)}$ qui encode le nombre de faces de chaque dimension dans le complexe.

Exemple 1.1.23. La paire $([4], \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\})$ définit un complexe simplicial. Géométriquement, on pense à ce complexe comme à un triangle, de sommets 1, 2 et 3, avec une arête pendante en 3, d'autre extrémité 4. Précisons que pour un complexe simplicial contenant les trois arêtes passant par trois sommets donnés, il n'est pas garanti que le triangle associé soit dans le complexe. Considérer par exemple le complexe ci-dessus en y ajoutant l'arête $\{2, 4\}$ et observer que $\{2, 3, 4\}$ n'est pas une face du complexe simplicial obtenu.

Exemple 1.1.24. Le **complexe de clique** d'un graphe $G = (V, E)$ est le complexe simplicial sur V dont les faces sont les cliques de G , *i.e.*, les ensembles de sommets induisant un sous-graphe complet.

Définition 1.1.25. Soit L un treillis. On dit que $x \in L$ est **sup irréductible** (resp. **inf irréductible**) lorsqu'il couvre un unique élément x_* (resp. lorsqu'il est couvert par un unique élément x^*). On note $\mathcal{JI}(L)$ (resp. $\mathcal{MI}(L)$) l'ensemble des éléments sup irréductibles (resp. inf irréductibles) de L .

Définition 1.1.26. Une **représentation par sup** (resp. **par inf**) d'un élément x d'un treillis L est un sous ensemble $J \subseteq L$ tel que $x = \bigvee J$ (resp. $M \subseteq L$ tel que $x = \bigwedge M$). Elle est **irredondante** lorsque ôter un élément de la représentation en altère le supremum (resp. l'infimum). Elle est la **représentation sup** (resp. **inf**) **canonique** de x lorsqu'elle est minimale (resp. maximale) parmi les irredondantes dans le treillis des antichaînes (voir exemple 1.1.20). Lorsque la représentation sup (resp. inf) canonique de $x \in L$ existe, on la note $\mathbf{cjr}_L(x)$ ou $\mathbf{cjr}(x)$ (resp. $\mathbf{cmr}_L(x)$ ou $\mathbf{cmr}(x)$).

Remarque 1.1.27. Les sup (resp. inf) irréductibles sont exactement les éléments qui sont leur propre représentation sup (resp. inf) canonique. De plus, tout élément d'une représentation sup (resp. inf) canonique est sup (resp. inf) irréductible.

1.1.3 Distributivité et semi-distributivité

On développe dans cette partie la structure algébrique des treillis, en imposant certaines relations aux opérations de supremum et d'infimum. Les treillis distributifs nous serviront dans la suite d'illustration et sont fondamentaux au titre du théorème 1.1.29, tandis que les treillis semi-distributifs représenteront le cœur de notre objet d'étude.

Définition 1.1.28. Un treillis L est **distributif** lorsque son supremum et son infimum sont distributifs l'un par rapport à l'autre :

$$\forall a, b, c \in L^3, \begin{cases} (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \\ (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c). \end{cases}$$

En pratique, la distributivité de l'une des deux lois équivaut à celle de l'autre. On a par ailleurs une belle caractérisation des treillis distributifs, appelée *théorème fondamental des treillis distributifs* :

Théorème 1.1.29 ([Sta86, Thm. 3.4.1]). *Le treillis des antichaînes de tout poset est distributif. Réciproquement, tout treillis distributif est isomorphe au treillis des antichaînes du sous-poset induit par ses sup irréductibles.*

Remarque 1.1.30. Plus précisément, dans un treillis distributif L , cet isomorphisme envoie dans un sens une antichaîne A sur son supremum $\bigvee A$ et dans l'autre sens un élément x sur l'ensemble $\max(\langle x \rangle_{\downarrow} \cap \mathcal{JI}(L))$ des sup irréductibles maximaux parmi les sup irréductibles dans l'idéal inférieur qu'il engendre. Formulé différemment, un treillis est distributif si et seulement si toute antichaîne de sup irréductibles forme une représentation sup canonique.

On peut alors étiqueter un treillis distributif via cette bijection, en associant à chaque élément x l'ensemble $\mathbf{cjr}(x)$ (voir figure 1.2). Avec cet étiquetage, les sup irréductibles sont exactement les éléments étiquetés par un singleton.

On affinera l'étude des treillis distributifs au fur et à mesure du Chapitre 3, voir les exemples 3.1.4, 3.1.6, 3.1.10 et 3.1.21.

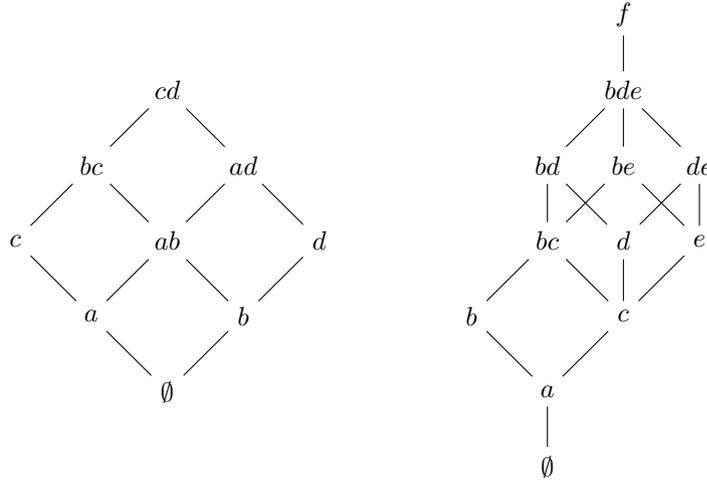


FIGURE 1.2 – Deux exemples de treillis distributifs, étiquetés par leurs représentations sup canoniques.

Exemple 1.1.31. Les treillis booléens sont distributifs. En effet, l'union et l'intersection se distribuent mutuellement.

Définition 1.1.32. Un treillis L est **sup semi-distributif** (resp. **inf semi-distributif**) lorsque pour tous x, y, z dans L , si $x \vee y = x \vee z$ alors $x \vee (y \wedge z) = x \vee y$ (resp. si $x \wedge y = x \wedge z$ alors $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y$). Il est **semi-distributif** lorsqu'il est à la fois sup et inf semi-distributif.

Cette définition de la semi-distributivité a le mérite de justifier le nom de cette famille de treillis, comme amoindrissement des conditions de distributivité. On utilisera cependant plutôt l'une des définitions équivalentes suivantes :

Proposition 1.1.33 ([FN95, Thm. 2.24]). *Soit L un treillis fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le treillis L est sup (resp. inf) semi-distributif.*
- (ii) *Tous les éléments de L admettent une représentation sup (resp. inf) canonique.*
- (iii) *Pour toute relation de couverture $x \triangleleft y$ dans L , l'ensemble*

$$K_{\vee}(x, y) := \{z \in L \mid z \triangleleft x, z \leq y\} = \{z \in L \mid x \vee z = y\}$$

$$\text{(resp. } K_{\wedge}(x, y) := \{z \in L \mid y \triangleleft z, x \leq z\} = \{z \in L \mid y \wedge z = x\})$$

admet un unique minimum $k_{\vee}(x, y)$ (resp. maximum $k_{\wedge}(x, y)$), qui est alors automatiquement sup (resp. inf) irréductible.

Le point (iii) permet même le calcul explicite des représentations canoniques :

Proposition 1.1.34 ([FN95, Thm. 2.56]). *Soit L un treillis sup (resp. inf) semi-distributif et $x \in L$. La représentation sup (resp. inf) canonique de x est donnée par :*

$$\mathbf{cjr}_L(x) = \{k_{\vee}(x', x) \mid x' \triangleleft x\}$$

$$\text{(resp. } \mathbf{cmr}_L(x) = \{k_{\wedge}(x, x') \mid x \triangleleft x'\}).$$

En particulier, la taille de la représentation sup (resp. inf) canonique d'un élément est donnée par son degré entrant (resp. sortant) dans le diagramme de Hasse de L .

Exemple 1.1.35. (i) Les treillis distributifs sont semi-distributifs.

(ii) Dans la figure 1.1, le poset induit par l'intervalle $[3, 9]$ est un treillis, mais n'est pas semi-distributif.

(iii) Dans la figure 3.1, les treillis de la première ligne sont semi-distributifs, mais pas distributifs et ceux de la seconde sont distributifs.

1.1.4 Congruences de treillis

On considère les relations d'équivalence sur les treillis semi-distributifs qui respectent les structures algébriques développées plus tôt. La rédaction de cette partie est grandement inspirée de [Rea16a, Sec. 9-5] et le lecteur en quête de démonstrations ou de détails pourra s'y référer.

Définition 1.1.36. Soit L un treillis. Une **relation de congruence** ou **congruence de treillis** de L est une relation d'équivalence \equiv sur L se comportant bien vis-à-vis des opérations de supremum et d'infimum, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x, x', y, y' \in L, \begin{cases} x \equiv x' \\ y \equiv y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \vee y \equiv x' \vee y' \\ x \wedge y \equiv x' \wedge y' \end{cases}.$$

Proposition 1.1.37 ([Rea16a, Prop. 9-5.2]). *Une relation d'équivalence est une congruence de treillis si et seulement si :*

(i) *Ses classes sont des intervalles du treillis,*

(ii) *Les applications $\pi_{\downarrow}^{\equiv}$ et π_{\uparrow}^{\equiv} qui envoient un élément sur le minimum et le maximum de sa classe, respectivement, préservent toutes deux l'ordre du treillis.*

Définition 1.1.38. Étant donnée une congruence \equiv du treillis L , le **treillis quotient** L/\equiv est le treillis sur les classes de \equiv où l'ordre est donné par $[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} \Leftrightarrow \exists x' \equiv x$ et $y' \equiv y, x' \leq y'$ et le supremum et l'infimum par $[x]_{\equiv} \vee [y]_{\equiv} = [x \vee y]_{\equiv}$ et $[x]_{\equiv} \wedge [y]_{\equiv} = [x \wedge y]_{\equiv}$.

De manière équivalente, le treillis quotient L/\equiv est isomorphe au poset induit par les maxima (resp. minima) des classes de \equiv .

Définition 1.1.39. On munit l'ensemble $\text{con}(L)$ des congruences de L d'une structure de poset, en ordonnant les congruences par raffinement. Plus précisément on a :

$$\equiv \leq \equiv' \Leftrightarrow \forall x, y \in L^2, x \equiv' y \Rightarrow x \equiv y.$$

Proposition 1.1.40 ([FN42]). *Le poset $\text{con}(L)$ est un treillis distributif, que l'on appelle en conséquence **treillis des congruences** de L . Son infimum est donné par l'intersection des classes des congruences, tandis que les classes du supremum de deux congruences sont les ensembles minimaux qui sont des unions de classes de chaque congruence (voir figure 1.3 pour un exemple).*

Définition 1.1.41. On dit qu'une congruence \equiv est **contracte** un sup irréductible (resp. inf irréductible) lorsqu'il est dans la même classe que l'unique élément qu'il couvre (resp. qui le couvre). On note $\mathcal{CJI}(\equiv)$ et $\mathcal{CMI}(\equiv)$ (resp. $\mathcal{UJI}(\equiv)$ et $\mathcal{UMI}(\equiv)$) l'ensemble des sup irréductibles et des inf irréductibles contractés (resp. non contractés) par la congruence \equiv du treillis L .

On note $\text{con}(a, b)$ la congruence minimale contractant la relation de couverture $a < b$. C'est l'intersection de toutes les congruences contractant $a < b$. De plus, on note $\text{con}(j) := \text{con}(j_*, j)$ pour $j \in \mathcal{JI}(L)$.

Théorème 1.1.42 ([Rea16a, Prop. 9-5.12]). *Soit L un treillis semi-distributif. Les deux applications $\equiv \mapsto \mathcal{UJI}(\equiv)$ et $\equiv \mapsto \mathcal{UMI}(\equiv)$ sont injectives.*

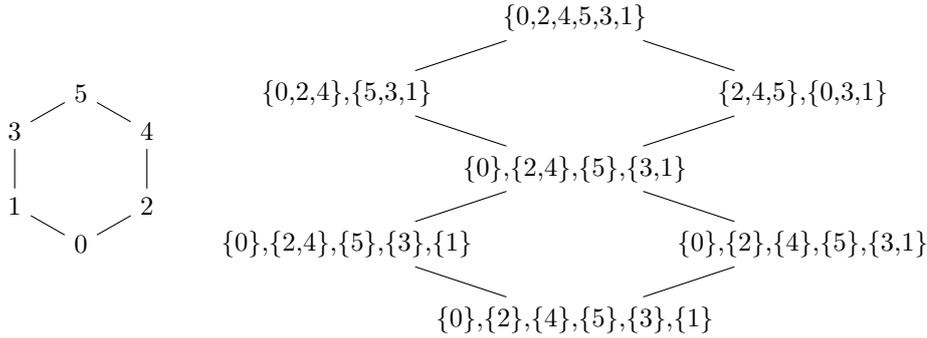


FIGURE 1.3 – Exemple de treillis (gauche) et de son treillis des congruences (droite).

En d'autres termes, une congruence est déterminée par l'ensemble des sup irréductibles (resp. inf irréductibles) qu'elle contracte. On s'intéresse donc à la caractérisation des ensembles d'irréductibles valides, au sens où ils sont l'ensemble des irréductibles contractés par une congruence.

Proposition 1.1.43 ([Rea16a, Prop. 9-5.14.]). *Soient L un treillis et \equiv une congruence de L . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. \equiv est sup irréductible dans $\text{con}(L)$.
2. $\equiv = \text{con}(a, b)$ pour une relation de couverture $a < b$.
3. $\equiv = \text{con}(j)$ pour un sup irréductible j .

On a ainsi une partition des relations de couverture, avec dans chaque classe au moins un sup irréductible.

Définition 1.1.44. On dit qu'un sup irréductible est **forcé** par un autre lorsque la congruence associée est inférieure dans le treillis des congruences, c'est-à-dire que toute congruence qui contracte le premier contracte aussi le second. Cela définit un pré-ordre sur les sup irréductibles. On construit l'ordre de **forçage** \preceq à partir de ce pré-ordre, à la manière de la proposition 1.1.12 :

$$\forall j, j' \in \mathcal{JI}(L)^2, j \preceq j' \Leftrightarrow \text{con}(j) \leq \text{con}(j').$$

Notons qu'ici, en toute rigueur, on devrait écrire $[j] \preceq [j']$ au lieu de $j \preceq j'$. Cependant, le cas qui nous intéressera par la suite est celui où la classe d'un irréductible est toujours de cardinal 1, ce qui légitime l'abus de notation.

On prendra garde au fait que lorsque l'on écrit $j \preceq j'$, cela signifie que j' force j , et pas l'inverse.

Remarque 1.1.45. De la même manière, on pourrait construire un ordre de forçage à partir des inf irréductibles. Les deux ordres résultant sont isomorphes via les applications κ_{\vee} et κ_{\wedge} .

Cet ordre de forçage permet la description des ensembles de sup irréductibles contractés par une congruence :

Théorème 1.1.46 ([Rea16a, Prop. 9-5.16]). *Un ensemble de sup irréductibles définit une congruence de treillis si et seulement s'il s'agit d'un idéal inférieur de l'ordre de forçage.*

Corollaire 1.1.47. *Le treillis des congruences d'un treillis est isomorphe au treillis des anti-chaînes de son ordre de forçage.*

Remarque 1.1.48. Au vu de la proposition 1.1.43, on aurait tout aussi bien pu décrire l'ordre de forçage à partir d'un pré-ordre sur toutes les relations de couverture du treillis d'origine.

Cette nouvelle description des congruences nous permet de considérer les éléments des treillis quotients d'un nouveau point de vue : au moyen de leur représentation sup ou inf canonique.

Théorème 1.1.49 ([Rea16a, Prop. 9-5.29]). *Soit \equiv une congruence du treillis L sup (resp. inf) semi-distributif. Alors :*

- (i) un élément x de L est minimal dans sa classe si et seulement si $\mathbf{cjr}_L(x) \subseteq \mathcal{UJI}(\equiv)$,
- (ii) le treillis quotient L/\equiv est sup (resp. inf) semi-distributif,
- (iii) la représentation sup (resp. inf) canonique d'une classe dans L/\equiv est l'ensemble des classes des éléments de la représentation sup (resp. inf) canonique du minimum (resp. maximum) de la classe dans L . Formellement :

$$\forall \equiv \in \text{con}(L), \forall x \in L, \mathbf{cjr}_{L/\equiv}([x]_{\equiv}) = \{[j]_{\equiv} \mid j \in \mathbf{cjr}_L(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x))\}$$

$$(\text{resp. } \mathbf{cmr}_{L/\equiv}([x]_{\equiv}) = \{[m]_{\equiv} \mid m \in \mathbf{cmr}_L(\pi_{\uparrow}^{\equiv}(x))\}).$$

1.2 Ordre faible

L'ordre faible joue un rôle central dans notre sujet. Il est notre meilleur exemple de treillis semi-distributif et possède de nombreuses propriétés combinatoires et géométriques. Cette section est dédiée à son introduction et à une partie de ses propriétés à la lumière des définitions de la section précédente.

1.2.1 Définitions et semi-distributivité

Définition 1.2.1. On appelle **permutation** de taille $n \in \mathbb{N}$ une bijection de $[n]$ dans lui-même. On note \mathfrak{S}_n leur ensemble, de cardinal $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. On confondra une permutation σ et le mot $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$ sur $[n]$ constitué des images successives de $[n]$. On trouve un exemple à la figure 1.4 qui contient l'ensemble des permutations de tailles 2 à 4. Une **transposition** est une permutation qui échange deux valeurs. On note τ_i la **transposition élémentaire** qui échange i et $i+1$.

Exemple 1.2.2. Les permutations de taille 3 sont au nombre de 6 : 123, 132, 213, 231, 312 et 321. Trois d'entre elles, 132, 321 et 213 sont des transpositions et deux de celles-ci, 132 et 213 sont des transpositions élémentaires.

Afin d'étudier en détail les permutations, on introduit les statistiques suivantes :

Définition 1.2.3. Une **descente** (resp. **montée**) de σ est une position i telle que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ (resp. $\sigma_i < \sigma_{i+1}$). Une **inversion** ou valeur d'inversion de σ est une paire $1 \leq i < j \leq n$ telle que $\sigma_i^{-1} > \sigma_j^{-1}$, c'est-à-dire telle que j apparaît avant i dans σ . Une paire qui n'est pas une inversion est une **version**. On note $\text{inv}(\sigma)$ l'**ensemble d'inversions** de σ .

Exemple 1.2.4. La permutation 452613 a 3 montées : 1, 3 et 5. Son ensemble d'inversions est $\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$.

Proposition 1.2.5 ([GR63]). *Les ensembles d'inversions (resp. de versions) sont exactement les sous-ensembles E de $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ qui sont transitifs (si $(i, j) \in E$ et $(j, k) \in E$ alors $(i, k) \in E$) et dont le complémentaire est transitif (si $(i, j) \notin E$ et $(j, k) \notin E$ alors $(i, k) \notin E$).*

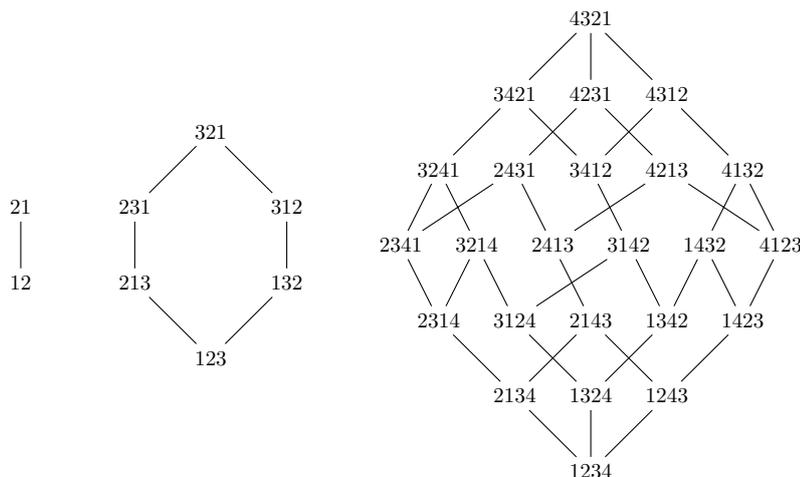


FIGURE 1.4 – Diagramme de Hasse des ordres faibles de taille 2 à 4.

Définition 1.2.6. L'ordre faible (droit) de taille n est le poset $(\mathfrak{S}_n, \leq_{\mathfrak{S}_n})$ des permutations de taille n ordonnées par l'inclusion de leurs ensembles d'inversions :

$$\forall \sigma, \nu \in \mathfrak{S}^2, \sigma \leq_{\mathfrak{S}_n} \nu \Leftrightarrow \text{inv}(\sigma) \subseteq \text{inv}(\nu).$$

Remarque 1.2.7. Il existe également un ordre faible gauche, que nous ne considérerons pas ici. Il peut être défini comme l'image de l'ordre faible droit par l'inversion.

Exemple 1.2.8. $\text{inv}(415236) = \{(1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\} \subseteq \text{inv}(452613)$ et par conséquent $415236 \leq_{S_6} 452613$.

On note id la permutation identité et w_o la permutation renversée $n \dots 321$. La première est la permutation minimale de l'ordre faible, avec un ensemble d'inversions vide, tandis que la deuxième est la permutation maximale de l'ordre faible, avec toutes les paires $1 \leq i < j \leq n$ dans son ensemble d'inversions (voir figure 1.4 pour un exemple complet).

Remarque 1.2.9. Une définition équivalente de l'ordre faible est la suivante. On associe à toute permutation σ l'ensemble des mots sur les **transpositions élémentaires** $\tau_i := (i, i + 1)$ pour $i \in [n - 1]$, dont le produit des lettres donne σ . On dit qu'un tel mot est **réduit** s'il est de longueur minimale. Alors σ est inférieur à ν dans l'ordre faible si et seulement s'il existe un mot réduit décrivant σ qui soit un préfixe d'un mot réduit décrivant ν .

Proposition 1.2.10. Les relations de couverture de l'ordre faible sont exactement les relations de la forme $\sigma < \sigma \cdot \tau_i$ où i est une montée de σ . En d'autres termes, on parcourt une arête montante du diagramme de Hasse de l'ordre faible en échangeant deux valeurs consécutives de sorte à les placer dans l'ordre décroissant (voir figure 1.4).

Corollaire 1.2.11. L'ordre faible est gradué par la taille des ensembles d'inversions. Les sup (resp. inf) irréductibles de l'ordre faible sont les permutations à une seule descente (resp. montée).

Proposition 1.2.12 ([GR63; Bjö84; Le 94]). L'ordre faible droit de taille n est un treillis semi-distributif.

Plus précisément, le sup (resp. inf) de deux permutations σ et ν est la permutation dont l'ensemble d'inversions (resp. de versions) est la clôture transitive de l'union des ensembles d'inversions (resp. de versions) de σ et ν .

1.2.2 Arcs et diagrammes d'arcs sans croisements

On introduit à présent un objet en première apparence indépendant des permutations, qui s'avère fournir un cadre parfaitement adapté à l'étude combinatoire de l'ordre faible, de ses représentations canoniques, de ses quotients et de ses intervalles. Cet objet fut introduit dans [Rea15], à rotation près.

Définition 1.2.13 ([Rea15]). Un **arc** de taille n est un quadruplet (a, b, A, B) avec $1 \leq a < b \leq n$ et $A \sqcup B =]a, b[$. Un arc (a, b, A, B) est **simple** si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ et **mixte** sinon. Deux arcs (a, b, A, B) et (a', b', A', B') se **croisent** lorsqu'il existe $u \neq v$ tels que :

$$u \in (A' \cup \{a', b'\}) \cap (B \cup \{a, b\}),$$

$$\text{et } v \in (A \cup \{a, b\}) \cap (B' \cup \{a', b'\}).$$

Un **diagramme d'arcs sans croisements** ou **NCAD**³ est une collection d'arcs deux à deux sans croisements.

La définition du croisement s'explique très bien par la représentation graphique des arcs. On représente en effet un arc dans un repère avec n points en coordonnées $(i, 0)$ pour $i \in [n]$ par une courbe monotone en l'axe des x , allant du point a jusqu'au point b et passant au dessus des points de A et en dessous des points de B (voir figure 1.8). Deux arcs se croisent si et seulement si leurs représentations graphiques superposées se croisent dans leurs intérieurs, ou ont même extrémité gauche ou droite. De même, un arc est mixte si et seulement si sa représentation graphique croise l'axe des abscisses.

Définition 1.2.14 ([Rea15]). Soit $\alpha = (a, b, A, B)$ un arc. En posant $A = \{a_1 < \dots < a_k\}$ et $B = \{b_1 < \dots < b_\ell\}$, on associe à α :

- une permutation sup irréductible $\sigma_\vee(\alpha) := 1 \dots (a-1) a_1 \dots a_k b a b_1 \dots b_\ell (b+1) \dots n$,
- une permutation inf irréductible $\sigma_\wedge(\alpha) := n \dots (b+1) a_k \dots a_1 a b b_\ell \dots b_1 (a-1) \dots 1$.

Clairement, l'application σ_\vee (resp. σ_\wedge) est une bijection entre les arcs et les permutations à une seule descente (resp. montée). De plus, on associe à toute permutation deux ensembles d'arcs :

Définition 1.2.15 ([Rea15]). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On associe à σ les deux diagrammes d'arcs sans croisements $\delta_\vee(\sigma) := \{\alpha_\vee(\sigma, i) \mid \sigma_i < \sigma_{i+1}\}$ et $\delta_\wedge(\sigma) := \{\alpha_\wedge(\sigma, i) \mid \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$, avec :

$$\alpha_\vee(\sigma, i) := (\sigma_{i+1}, \sigma_i, \{\sigma_j \mid j < i \text{ et } \sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}\}, \{\sigma_j \mid j > i + 1 \text{ et } \sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}\}),$$

$$\alpha_\wedge(\sigma, i) := (\sigma_i, \sigma_{i+1}, \{\sigma_j \mid j < i \text{ et } \sigma_i < \sigma_j < \sigma_{i+1}\}, \{\sigma_j \mid j > i + 1 \text{ et } \sigma_i < \sigma_j < \sigma_{i+1}\}).$$

Ici encore, la représentation graphique est plus éclairante que la définition. Prenons une permutation σ et construisons sa **table de permutation**⁴, composée des points de coordonnées (σ_i, i) pour $i \in [n]$. Traçons ensuite les segments liant (σ_i, i) à $(\sigma_{i+1}, i+1)$ pour $i \in [n-1]$, en rouge lorsque i est une descente et en bleu lorsque i est une montée. Aplatissons ensuite le dessin verticalement, en courbant les segments mais sans créer de croisement. Le résultat est la superposition des ensembles $\delta_\vee(\alpha)$, en rouge, et $\delta_\wedge(\alpha)$, en bleu (voir figure 1.5).

On peut à présent énoncer le premier théorème qui justifie l'introduction des arcs :

3. De l'anglais *Non-Crossing Arc Diagram*.

4. La définition classique de la table de permutation reposerait plutôt sur les points (i, σ_i) pour $i \in [n]$. On s'éloigne de cette convention afin de représenter les arcs en ligne, comme dans [PS19] et non en colonne, comme lorsqu'ils furent définis dans [Rea15]. Cette convention atypique est nécessaire pour la cohérence avec des constructions antérieures ([LR98], [HNT05], [PP18], [CP17], [Pil19]), notamment pour représenter les arbres verticalement et non horizontalement.

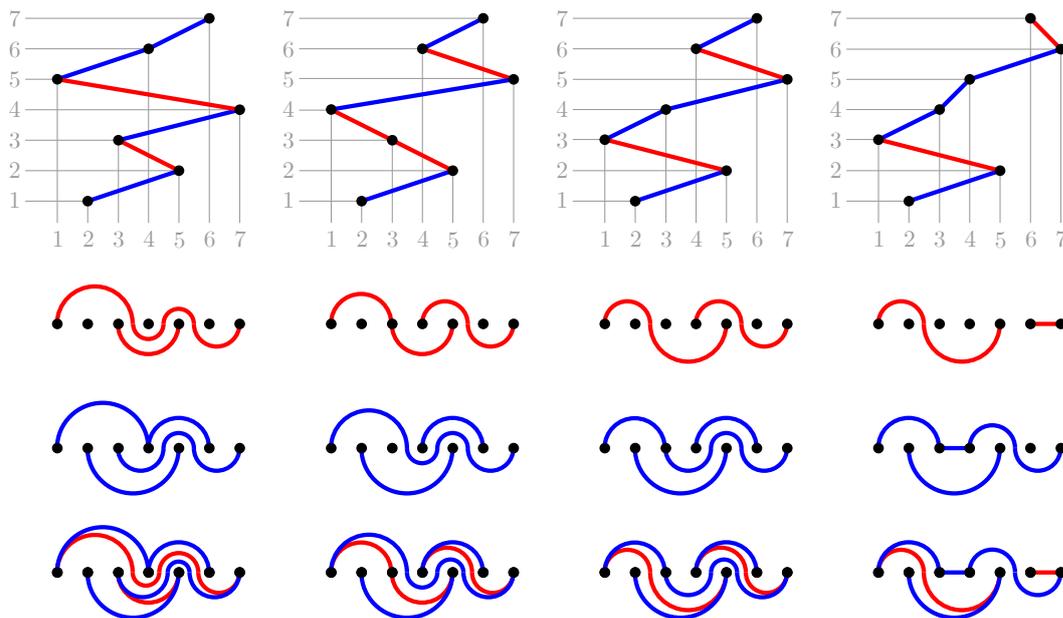


FIGURE 1.5 – NCADs associés aux permutations 2537146, 2531746, 2513746, and 2513476. La première ligne contient la table de permutation, avec les descentes en rouge et les montées en bleu, la seconde l'image de la permutation par δ_\vee , la troisième l'image de la permutation par δ_\wedge et la dernière la superposition des deux. Figure de [AP21].

Théorème 1.2.16 ([Rea15]). *Les applications δ_\vee et δ_\wedge sont deux bijections entre les NCADs et les permutations. De plus, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les représentations canoniques par sup et par inf de σ sont exactement les ensembles de permutations associées aux arcs composant les NCADs de la définition 1.2.15. Formellement :*

$$\begin{aligned} \mathbf{cjr}(\sigma) &= \{\sigma_\vee(\alpha_\vee) \mid \alpha_\vee \in \delta_\vee(\sigma)\}, \\ \mathbf{cmr}(\sigma) &= \{\sigma_\wedge(\alpha_\wedge) \mid \alpha_\wedge \in \delta_\wedge(\sigma)\}. \end{aligned}$$

1.2.3 Congruences de l'ordre faible

Les arcs, en bijection avec les sup irréductibles, fournissent également une belle description des congruences de l'ordre faible. En effet, au vu du théorème 1.1.46, il suffit de décrire l'ordre de forçage sur les arcs pour obtenir une description combinatoire des congruences de l'ordre faible.

Définition 1.2.17. On dit qu'un arc $\alpha := (a, b, A, B)$ est un **sous-arc** de l'arc $\alpha' := (a', b', A', B')$ lorsqu'il est obtenu en *tronquant* celui-ci, ou plus formellement lorsque :

$$a' \leq a < b \leq b' \quad \text{et} \quad A = A' \cap]a, b[\quad \text{et} \quad B = B' \cap]a, b[.$$

Proposition 1.2.18 ([Rea15]). *Soient $\sigma = \sigma_\vee(\alpha)$ et $\sigma' = \sigma_\vee(\alpha')$ des permutations sup irréductibles, avec $\alpha = (a, b, A, B)$ et $\alpha' = (a', b', A', B')$ des arcs. Alors σ force σ' si et seulement si α est un sous-arc de α' (voir figures 1.6 et 1.8).*

Ainsi, le forçage sur les permutations sup irréductibles se traduit par la troncature sur les arcs et les congruences de l'ordre faible sont en bijection avec les idéaux de l'ordre de forçage sur

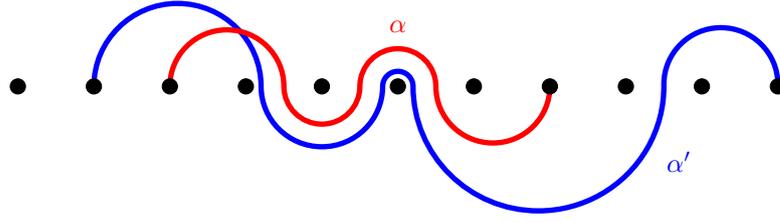


FIGURE 1.6 – L’arc rouge α est un sous-arc de l’arc bleu α' , *i.e.*, la permutation sup irréductible $\sigma_{\vee}(\alpha)$ force la permutation sup irréductible $\sigma_{\vee}(\alpha')$.

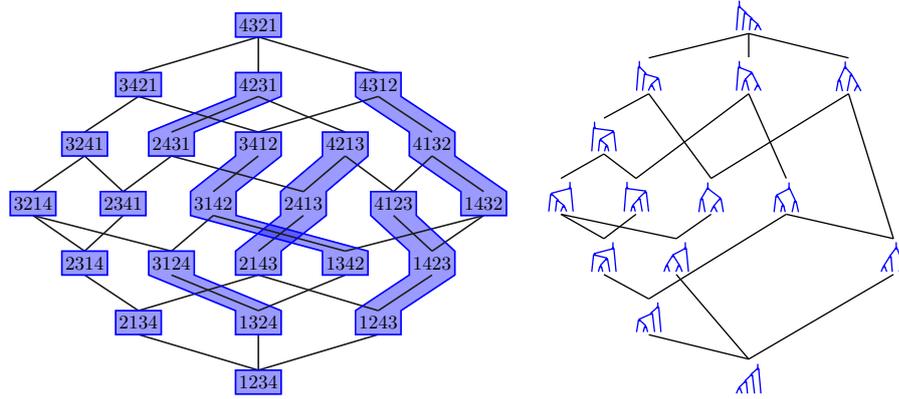


FIGURE 1.7 – Le quotient de l’ordre faible de taille 4 par la congruence sylvestre \equiv_{sylv} (gauche) est le treillis de Tamari (droite). Figure de [PS19].

les arcs, baptisé \mathfrak{F}_n . On appelle ces idéaux des **idéaux d’arcs** et étant donné un idéal d’arcs \mathcal{I} , on note $\equiv_{\mathcal{I}}$ la congruence associée, qui préserve toutes les arêtes associées aux arcs de \mathcal{I} .

On écrira donc par la suite indifféremment l’ordre de forçage \preceq sur les permutations irréductibles ou sur les arcs. Le théorème 1.1.49 se reformule alors pour l’ordre faible :

Corollaire 1.2.19. *Soit \mathcal{I} un idéal d’arcs. Les éléments du treillis quotient $\mathfrak{S}_n/\equiv_{\mathcal{I}}$ sont en bijection avec les NCADs n’utilisant que des arcs de \mathcal{I} .*

Exemple 1.2.20. La **congruence sylvestre** \equiv_{sylv} est définie comme la clôture transitive des relations de la forme $UikVjW \equiv_{\text{sylv}} UkiVjW$ où $i < j < k$ sont des entiers et U, V et W sont des mots sur $[n]$. De manière équivalente, les classes de la congruence sylvestre sont les fibres de l’algorithme d’insertion des permutations dans des arbres binaires de recherche [HNT05 ; LR98]. Les minima des classes sylvestres sont les permutations qui évitent le motif 312 [HNT05] et l’idéal d’arcs associé à \equiv_{sylv} est l’ensemble des arcs de la forme $(a, b,]a, b[, \emptyset)$. On peut vérifier que les NCAD sur cette famille d’arcs sont clairement identifiables aux partitions non-croisées, qui forment également une famille catalane. Le treillis quotient $\mathfrak{S}_n/\equiv_{\text{sylv}}$ est isomorphe au **treillis de Tamari** [Tam62 ; HT72], dont les éléments sont les arbres binaires et les relations de couverture sont les rotations dans les arbres binaires (voir figure 1.7).

Exemple 1.2.21. Pour une signature $\varepsilon \in \{-, +\}^n$, la **congruence ε -cambrienne** [Rea06] est définie comme la clôture transitive des relations de la forme $UikVjW \equiv_{\varepsilon} UkiVjW$ si $\varepsilon_j = -$ et $UjVikW \equiv_{\varepsilon} UjVkiW$ si $\varepsilon_j = +$, où $i < j < k$ sont des entiers et U, V et W sont des mots sur $[n]$. L’idéal d’arcs associé à \equiv_{ε} est l’ensemble des arcs qui ne passent pas en dessous d’un

point i avec $\varepsilon_i = -$ ni au dessus d'un point i avec $\varepsilon_i = +$. Le treillis quotient $\mathfrak{S}_n/\equiv_\varepsilon$ est le **treillis ε -cambrien** [Rea06].

Exemple 1.2.22. La **congruence hypoplaxique** \equiv_{hypo} est définie [KT97] comme la clôture transitive des relations de la forme $UikVjW \equiv_{\text{hypo}} UkiVjW$ et $UjVikW \equiv_{\text{hypo}} UjVkiW$ où $i < j < k$ sont des entiers et U, V et W sont des mots sur $[n]$. De manière équivalente, les classes de la congruence hypoplaxique sont les fibres de l'application qui associe à une permutation son ensemble de reculs (*i.e.*, descentes de son inverse) [Nov00]. Les minima des classes hypoplaxiques sont les permutations qui évitent les motifs 312 et 231 et l'idéal d'arcs associé à \equiv_{hypo} est $\mathcal{UIT}(\equiv_{\text{hypo}}) = \{(i, i+1, \emptyset, \emptyset) \mid i \in [n-1]\}$. Le treillis quotient $\mathfrak{S}_n/\equiv_{\text{hypo}}$ est isomorphe au treillis booléen.

Remarque 1.2.23. Dans le cas de l'ordre faible, il est aisé d'identifier quel arc (ou sup irréductible) est associé à une relation de couverture par la proposition 1.1.43. En effet, une relation de couverture échangeant les valeurs a et b correspond à un arc allant de a à b , passant au dessus de $c \in]a, b[$ si et seulement si c apparaît à gauche de a dans les permutations impliquées dans la relation de couverture.

Remarque 1.2.24. Dans la suite, on se concentre sur les congruences **essentiels** de l'ordre faible, c'est-à-dire dont l'idéal d'arcs contient tous les arcs **essentiels** (ou **basiques**) $(i, i+1, \emptyset, \emptyset)$ pour $i \in [n-1]$. Cela équivaut à ce que l'identité soit seule dans sa classe [Rea04, Thm. 6.9] Si \equiv est une congruence qui n'est pas essentielle car forçant l'arc $(i, i+1, \emptyset, \emptyset)$, alors le treillis quotient \mathfrak{S}_n/\equiv est isomorphe au produit cartésien de treillis $\mathfrak{S}_i/\equiv' \times \mathfrak{S}_{n-i}/\equiv''$ où \equiv' et \equiv'' sont les restrictions de \equiv à $[i]$ et $[i+1, n]$.

1.2.4 Structure de l'ordre de forçage

Nous nous intéressons ici aux nombreuses symétries du poset \mathfrak{F}_n , représenté à la figure 1.8. Cette partie, plus anecdotique, n'est pas invoquée plus tard dans ce travail, mais contient des (modestes) résultats non-publiés.

Observons tout d'abord qu'il existe au plus quatre manières d'étendre un arc $\alpha = (a, b, A, B)$. On peut choisir de l'étendre à gauche ou à droite, ajoutant l'ancienne extrémité à A (extension par au dessus) ou à B (extension par en dessous). Les arcs couvrant α sont donc les 0, 2 ou 4 arcs bien définis parmi $(a-1, b, A \cup \{a\}, B)$, $(a-1, b, A, B \cup \{a\})$, $(a, b+1, A \cup \{b\}, B)$ et $(a, b+1, A, B \cup \{b\})$.

Dans le diagramme de Hasse de \mathfrak{F}_n , le degré sortant d'un arc qui n'est pas maximal, *i.e.*, qui n'est pas de la forme $(i, i+1, \emptyset, \emptyset)$, est toujours 2, tandis que le degré rentrant d'un arc (a, b, A, B) est $2(\mathbb{1}_{a \neq 1} + \mathbb{1}_{b \neq n})$.

Définition 1.2.25. Soit $\alpha \triangleleft \alpha'$ une relation de couverture de \mathfrak{F}_n . On dit que cette relation est **de type 1** lorsque $\sigma_\vee(\alpha) \leq_{\mathfrak{S}_n} \sigma_\vee(\alpha')$ est une relation de l'ordre faible et qu'elle est **de type 2** lorsque $\sigma_\vee(\alpha)^{-1} \leq_{\mathfrak{S}_n} \sigma_\vee(\alpha')^{-1}$ est une relation de couverture de l'ordre faible. On note \mathfrak{F}_n^1 (resp. \mathfrak{F}_n^2) le sous-poset de \mathfrak{F}_n engendré par les relations de type 1 (resp. 2).

Proposition 1.2.26. Une relation de couverture de l'ordre de forçage est soit de type 1, soit de type 2.

Plus précisément, les extensions à gauche en dessous et à droite au dessus sont de type 1, tandis que les extensions à gauche au dessus et à droite en dessous sont de type 2 (voir figure 1.8).

Démonstration. Soit $\alpha = (a, b, A, B)$ un arc avec $A = \{a_1 < \dots < a_k\}$ et $B = \{b_1 < \dots < b_\ell\}$. Rappelons de la définition 1.2.14 que $\sigma_\vee(\alpha) = 1 \dots (a-1) a_1 \dots a_k b a b_1 \dots b_\ell (b+1) \dots n$ et examinons les quatre types de relations de couverture de l'ordre de forçage $\alpha \triangleleft \alpha'$.

- À gauche en dessous, *i.e.*, $\alpha' = (a - 1, b, A, B \cup \{a\})$.
Alors $\sigma_{\vee}(\alpha') = 1 \dots (a - 2) a_1 \dots a_k b (a - 1) a b_1 \dots b_{\ell} (b + 1) \dots n$ est obtenue à partir de $\sigma_{\vee}(\alpha)$ en échangeant $k + 1$ fois la valeur $a - 1$ avec son voisin de droite, toujours inférieur à $a - 1$. On a donc bien $\sigma_{\vee}(\alpha) \leq_{\mathfrak{S}_n} \sigma_{\vee}(\alpha')$.
- À droite au dessus, *i.e.*, $\alpha' = (a, b + 1, A \cup \{b\}, B)$.
Alors $\sigma_{\vee}(\alpha') = 1 \dots (a - 1) a_1 \dots a_k b (b + 1) a b_1 \dots b_{\ell} (b + 2) \dots n$ est obtenue à partir de $\sigma_{\vee}(\alpha)$ en échangeant $\ell + 1$ fois la valeur $b + 1$ avec son voisin de gauche, toujours plus supérieur à $b + 1$. On a donc bien $\sigma_{\vee}(\alpha) \leq_{\mathfrak{S}_n} \sigma_{\vee}(\alpha')$.
- À gauche au dessus, *i.e.*, $\alpha' = (a - 1, b, A \cup \{a\}, B)$.
Alors $\sigma_{\vee}(\alpha') = 1 \dots (a - 2) a a_1 \dots a_k b (a - 1) b_1 \dots b_{\ell} (b + 1) \dots n$ est obtenue à partir de $\sigma_{\vee}(\alpha)$ en échangeant les valeurs $a - 1$ et a , renversées dans $\sigma_{\vee}(\alpha')$. On a donc bien $\sigma_{\vee}(\alpha)^{-1} \leq_{\mathfrak{S}_n} \sigma_{\vee}(\alpha')^{-1}$.
- À droite en dessous, *i.e.*, $\alpha' = (a, b + 1, A, B \cup \{b\})$.
Alors $\sigma_{\vee}(\alpha') = 1 \dots (a - 1) a_1 \dots a_k (b + 1) a b_1 \dots b_{\ell} b (b + 2) \dots n$ est obtenue à partir de $\sigma_{\vee}(\alpha)$ en échangeant les valeurs b et $b + 1$, renversées dans $\sigma_{\vee}(\alpha')$. On a donc bien $\sigma_{\vee}(\alpha)^{-1} \leq_{\mathfrak{S}_n} \sigma_{\vee}(\alpha')^{-1}$. \square

Cette proposition nous permet dans la suite de nous concentrer sur les arcs, plus simples à manipuler que les permutations. Le type des relations de couverture, ou arêtes de l'ordre de forçage sont maintenant identifiés combinatoirement selon le type d'extension de l'arc concerné. Il s'ensuit les corollaires suivants :

Corollaire 1.2.27. *Les posets \mathfrak{F}_n^1 et \mathfrak{F}_n^2 sont isomorphes via l'involution $(a, b, A, B) \mapsto (a, b, B, A)$, qui correspond à la symétrie d'axe horizontal des arcs.*

Corollaire 1.2.28. *La symétrie centrale des arcs est un automorphisme de $\mathfrak{F}_n, \mathfrak{F}_n^1$ et \mathfrak{F}_n^2 . Sur les permutations à une seule descente, cette symétrie correspond à l'involution de Schützenberger [SF99, p. 427], qui associe à σ la permutation renversée dont on a complété chaque lettre à $n + 1$: $\text{Sh}(\sigma) := (n + 1 - \sigma_{n+1-i})_{i=1}^n$.*

Démonstration. Toujours avec la définition 1.2.14, on vérifie aisément que la symétrie centrale d'un arc correspond à l'involution de Schützenberger sur les permutations. La proposition 1.2.26 permet de conclure, puisqu'elle montre l'invariance par symétrie centrale des types de relations de couverture. \square

Corollaire 1.2.29. *La symétrie d'axe vertical des arcs est un automorphisme de \mathfrak{F}_n qui échange \mathfrak{F}_n^1 et \mathfrak{F}_n^2 .*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 1.2.27 et du corollaire 1.2.28. \square

Définition 1.2.30. Le poset-grille de taille $m \times n$ est le poset sur $[m] \times [n]$ dont les relations sont données par $(i, j) \leq (i', j') \Leftrightarrow i \leq i'$ et $j \leq j'$.

Corollaire 1.2.31. *Les maxima des composantes connexes de \mathfrak{F}_n^1 sont les arcs de la forme (a, b, A, B) avec $a + 1 \in A \cup \{b\}$ et $b - 1 \in \{a\} \cup B$ et une classe ayant tel maximum est isomorphe au poset-grille de taille $(a - 1) \times (n - b)$.*

Démonstration. Au vu de la caractérisation des arêtes de l'ordre de forçage, un arc α sans arêtes sortante de type 1 est un arc qui soit ne peut plus être contracté, soit ne se contracte que le long d'arêtes de type 2 et donc qui a la forme annoncée.

Tous les arcs de la composante connexe de α dans \mathfrak{F}_n^1 sont ceux obtenu en étendant au plus $a - 1$ fois α à gauche par au dessus et au plus $n - b$ fois α à droite par en dessous. \square

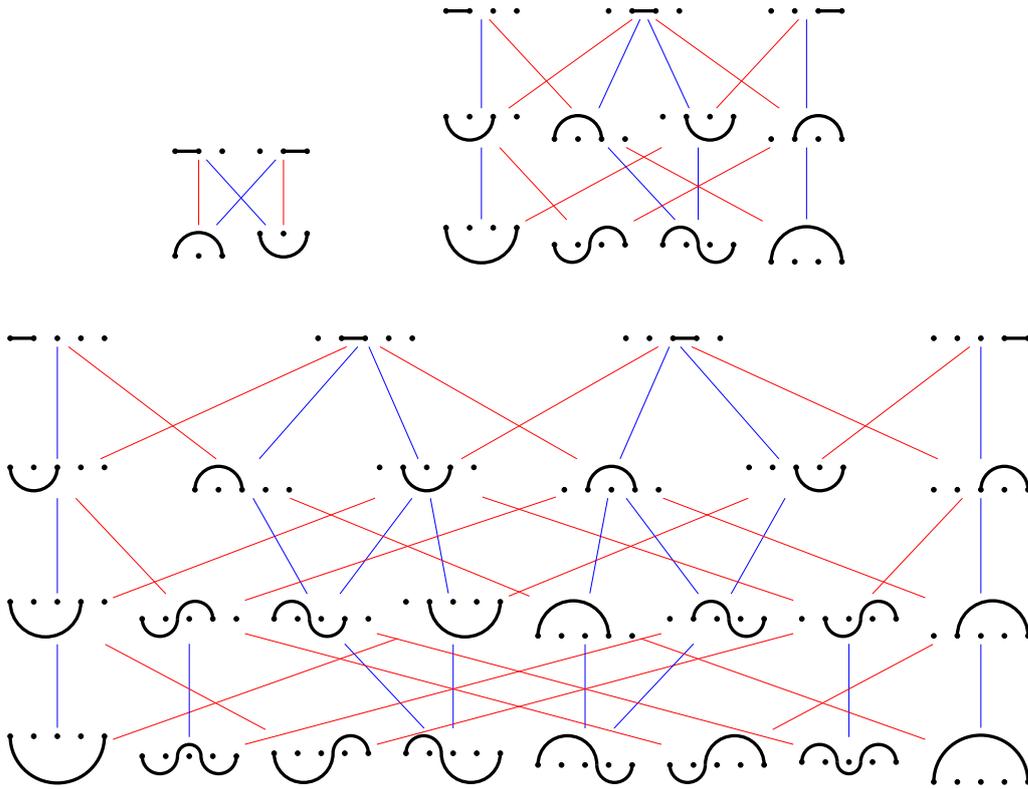


FIGURE 1.8 – Ordres de forçages de taille 3 (en haut à gauche), 4 (en haut à droite) et 5 (en bas). Les arêtes rouges (resp. bleues) correspondent aux relations de type 1 (resp. 2) de la définition 1.2.25.

Une proposition symétrique existe naturellement pour les composantes connexes de \mathfrak{F}_n^2 .

On donne quelques résultats énumératifs :

Proposition 1.2.32. (i) Les arcs de taille n sont comptés par les nombres eulériens (suite A000295 de [OEIS]), i.e., $E_n = 2^n - n - 1$.

(ii) Les relations de couverture de l'ordre de forçage de taille n sont comptées par le quadruple des nombres eulériens $4E_{n-1}$.

(iii) Les arcs mixtes de taille n sont comptés par $2^n - 2 - n(n-1)$ (double de la suite A002662 de [OEIS]).

Démonstration. La définition des nombres eulériens, comme nombre de permutations à une seule descente et la bijection de celles-ci avec les arcs donne (i). On peut associer à un arc α de taille n quatre relations de couverture de taille $n+1$: toutes celles dont l'élément supérieur à même forme que α , avec un point excédentaire à gauche ou à droite, d'où (ii). Nous n'avons pas d'intuition combinatoire pour démontrer (iii), mais un simple calcul donne le résultat, en retranchant des

nombre eulérien le nombre d'arcs mixtes :

$$\begin{aligned}
 \#\{\text{arcs mixtes}\} &= E_n - \#\{\text{arcs simples}\} \\
 &= E_n - \#\{(a, b,]a, b[, \emptyset) \mid 1 \leq a < b \leq n\} - \#\{(a, b, \emptyset,]a, b]) \mid 1 \leq a < b \leq n\} \\
 &= E_n - 2 \binom{n}{2} \\
 &= 2^n - 2 - n(n-1). \quad \square
 \end{aligned}$$

On conclut par quelques motivations de ces résultats.

Perspective 1.2.33. *Que peut-on déduire de ces résultats de symétrie et d'énumération sur l'ordre de forçage de l'ordre faible ? En particulier, pourrait-on calculer ou estimer le nombre d'idéaux supérieurs de l'ordre de forçage, i.e., le nombre de congruences de l'ordre faible (suite A091687 de [OEIS]), ou le nombre d'idéaux supérieurs contenant tous les arcs maximaux, i.e., le nombre de congruences essentielles de l'ordre faible (suite A330039 de [OEIS]) ?*

Perspective 1.2.34. *L'ordre de forçage sur les arcs pour les groupes de Coxeter de type B est décrit dans [PPR20, Def. 113]. Sa définition est plus technique et le poset semble moins structuré : il n'est par exemple pas gradué. Certaines des propriétés observées pour le forçage en type A se traduisent-elles sur celui en type B ? Et qu'en est-il des autres groupes de Coxeter ?*

1.3 Géométrie discrète

Dans cette section, on rappelle d'abord les définitions classiques de théorie des polytopes et de leurs éventails normaux (on pourra se référer à [Zie93] pour plus de détails). On s'intéresse ensuite aux cônes de type des polytopes et à un moyen de les calculer.

1.3.1 Polytopes et éventails

On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Définition 1.3.1. Un **hyperplan** linéaire $H \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de codimension 1, i.e., un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x | h \rangle = c\}$, paramétré par le vecteur h non-nul et le scalaire c . On dit que h est une **normale** ou un **vecteur normal** de l'hyperplan ou d'une partie de l'hyperplan. Un tel hyperplan H définit deux demi-espaces (fermés) $H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x | h \rangle \geq c\}$ et $H^- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x | h \rangle \leq c\}$. Un **hyperplan support** d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est un hyperplan H qui rencontre X (i.e., $H \cap X \neq \emptyset$) et tel que X est compris dans l'un des deux demi-espaces définis par H .

Définition 1.3.2. Un **polytope** P est défini de manière équivalente comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, ou comme l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Ses **faces** sont elles-même des polytopes : lui-même, le vide et ses intersections avec ses hyperplans support. La **dimension** d'une face est la dimension de l'espace affine qu'elle engendre et ses faces de dimension 0 (resp. dimension 1, codimension⁵ 1) sont ses **sommets** (resp. **arêtes**, **facettes**). Un polytope de dimension d est **simple** lorsque chacun de ses sommets est contenu dans exactement d facettes et **simplicial** lorsque chacune de ses facettes contient d sommets.

5. Ici, la codimension se calcule à partir de la dimension du polytope et non celle de l'espace ambiant.

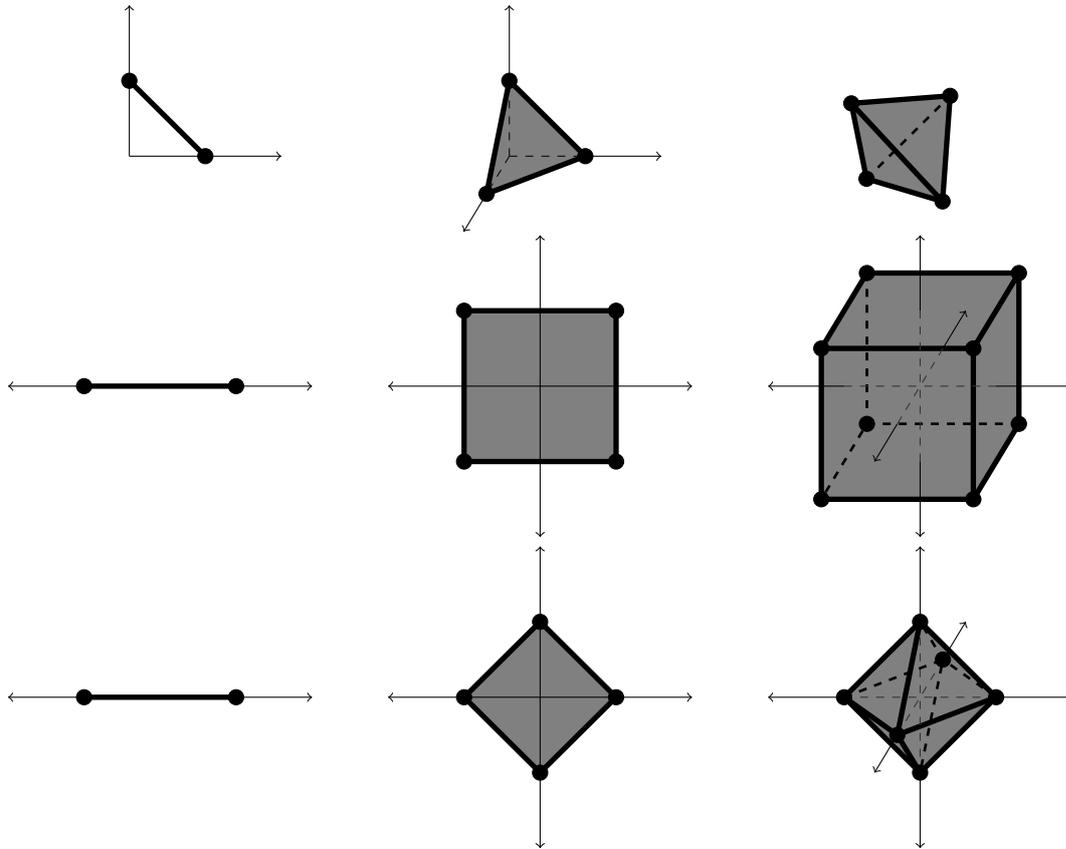


FIGURE 1.9 – De haut en bas, simplexes, cubes et octaèdres de dimension 1 à 3.

Exemple 1.3.3. Dans \mathbb{R}^n , l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique est un polytope simplicial de dimension $n - 1$, appelé **simplexe standard** Δ_n . Il engendre l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in [n]} x_i = 1\}$. Ses faces sont exactement les simplexes standards des sous-espaces engendrés par un sous-ensemble de la base canonique. En particulier, ses sommets sont les vecteurs de la base canonique.

De manière plus générale, on appelle **simplexe** tout polytope image d'un simplexe standard par une application affine, ou de manière équivalente l'enveloppe convexe de n'importe quel ensemble de points affinement indépendants.

Observation 1.3.4. Un polytope est **simplicial** si et seulement si toutes ses faces sont des simplexes. Les simplexes sont avec les polygones les seuls polytopes simples et simpliciaux (voir figure 1.9, première ligne).

Notons que les simplexes standards ne sont pas de **dimension pleine**, *i.e.*, leur dimension n'est pas celle de l'espace dans lequel ils vivent.

Exemple 1.3.5. Dans \mathbb{R}^n , l'enveloppe convexe des vecteurs à coordonnées toutes dans $\{-1, +1\}$ est un polytope, appelé (**hyper**)**cube standard** \square_n . Les cubes sont des polytopes simples, mais pas simpliciaux (voir figure 1.9, deuxième ligne).

Exemple 1.3.6. Dans \mathbb{R}^n , l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique et de leurs opposés est un polytope, appelé **octaèdre standard** \diamond_n . Les octaèdres sont des polytopes simpliciaux, mais pas simples (voir figure 1.9, troisième ligne).

Définition 1.3.7. Les faces d'un polytope ordonnées par l'inclusion forment un treillis, que l'on appelle **treillis des faces** du polytope (voir figure 1.10).

Le treillis des faces peut être interprété comme le poset induit au treillis booléen sur l'ensemble des sommets du polytope par les ensembles de sommets qui correspondent à une face. Cela ne suffit cependant pas pour montrer qu'il s'agit bel et bien d'un treillis.

Exemple 1.3.8. Le treillis des faces d'un simplexe est un treillis booléen : tout ensemble de points définit bien une face. Le treillis des faces du cube \square_3 est donné en figure 1.10 (haut).

Définition 1.3.9. On dit que deux polytopes ont **même type combinatoire** lorsque leurs treillis des faces sont isomorphes.

Définition 1.3.10. Soit \mathbf{R} une partie finie de \mathbb{R}^n . Le **cône (polyédral)** engendré par l'ensemble \mathbf{R} est $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{R} := \{\sum_{r \in \mathbf{R}} \lambda_r r \mid \forall r \in \mathbf{R}, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. De manière équivalente, un cône de \mathbb{R}^n peut être défini comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces linéaires fermés. Ses **faces** sont elles-mêmes des cônes : lui-même et ses intersections avec ses hyperplans support. La **dimension** d'une face est la dimension de l'espace qu'elle engendre et les faces de dimension 1 (resp. codimension 1) sont ses **rayons** (resp. **facettes**). Un vecteur dans un cône de dimension 1 en est un **représentant**. Un cône est **simplicial** lorsque des représentants de ses rayons forment une famille libre.

Un **éventail** \mathcal{F} est une collection de cônes polyédraux close pour l'application qui consiste à prendre une face et telle que l'intersection de deux cônes de la famille est une face de chacun d'eux (si F est une face de $C \in \mathcal{F}$, alors $F \in \mathcal{F}$; et si $C, C' \in \mathcal{F}^2$ alors $C \cap C'$ est une face de C et de C'). Les **chambres** (resp. **murs**, **rayons**) de \mathcal{F} sont ses cônes de codimension 0 (resp. codimension 1, dimension 1). Un éventail est **simplicial** lorsque tous ses cônes le sont, **complet** lorsque ceux-ci couvrent l'espace ambiant, **essentiel** s'il contient le cône trivial $\{0\}$. Le **support** d'un éventail est l'union de ses cônes, et on dit que l'éventail \mathcal{G} est **plus fin** que \mathcal{F} (ou que \mathcal{G} **raffine** \mathcal{F} , ou que \mathcal{F} est **plus grossier** que \mathcal{G}) lorsqu'ils ont même support et que tout cône de \mathcal{F} est une union de cônes de \mathcal{G} .

D'une certaine manière, les éventails sont une représentation duale des polytopes :

Définition 1.3.11. Soit P un polytope. Le **cône normal** d'une face F de P est défini de manière équivalente comme le cône des normales des hyperplans supports de F , ou comme l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^n$ tels que la fonctionnelle $\langle \cdot | v \rangle$ est maximisée sur F dans P . L'**éventail normal** de P est la collection des cônes normaux de ses faces.

Exemple 1.3.12. Soit P un polytope de dimension pleine. Le cône normal à P est le cône trivial 0 et le cône normal à la face vide est l'espace tout entier.

Remarque 1.3.13. L'éventail normal d'un polytope simple est simplicial.

Définition 1.3.14. Les cônes d'un éventail ordonnés par l'inclusion forment un poset. Ce poset est un treillis si et seulement si l'éventail admet un cône maximal. Dans le cas où il s'agit de l'éventail normal d'un polytope, on l'appelle **treillis des cônes** de l'éventail ou du polytope (voir figure 1.10 (bas)).

Le treillis des cônes peut être interprété comme le poset induit au treillis booléen sur l'ensemble des rayons de l'éventail par les ensembles de rayons qui engendrent un cône de l'éventail.

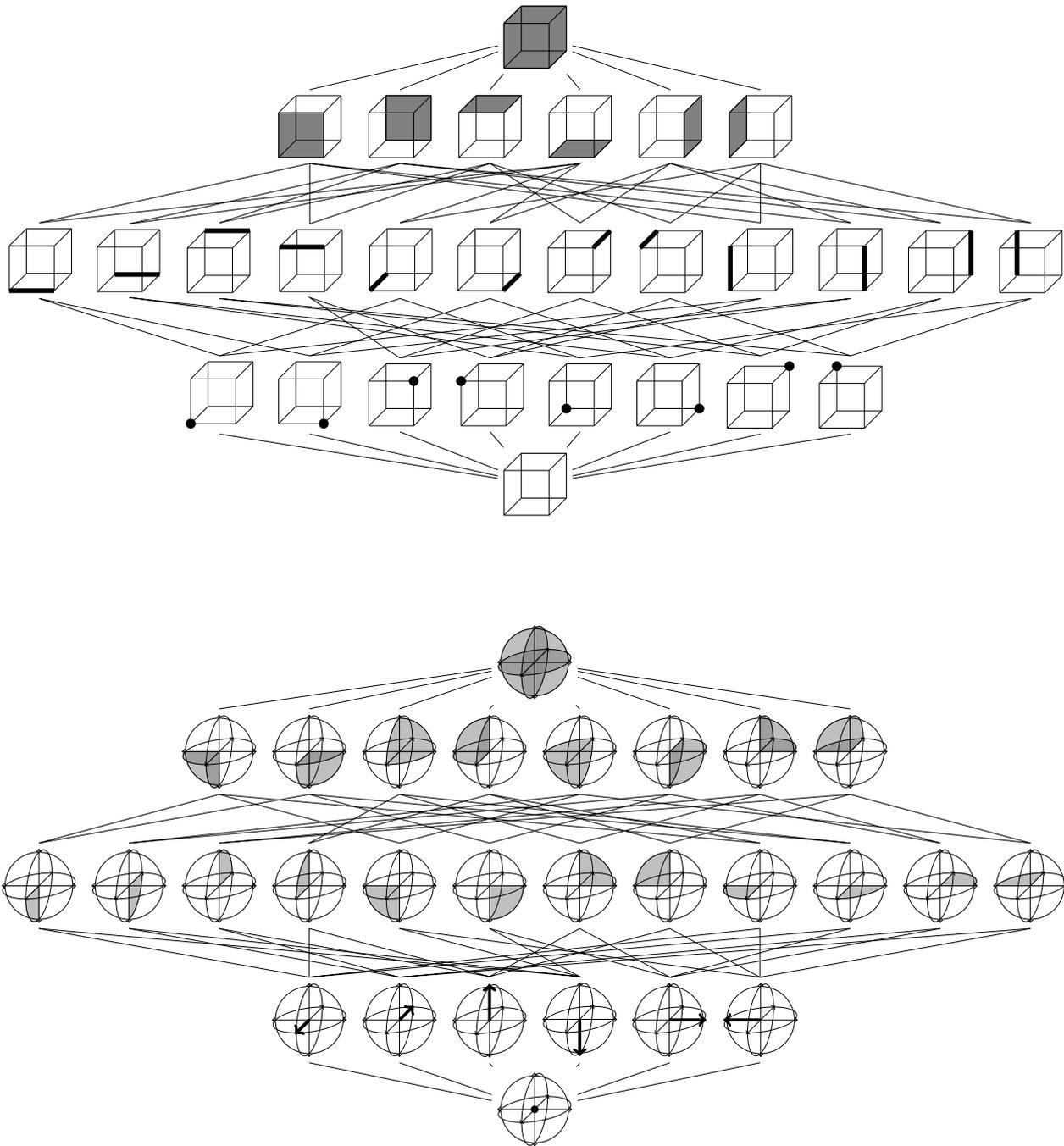


FIGURE 1.10 – Treillis des faces du cube de dimension 3 (haut) et treillis des cônes de son éventail normal (bas). Plier cette feuille en deux horizontalement enverrait précisément l'un de ces graphes sur l'autre.

Proposition 1.3.15. *Le treillis des faces d'un polytope est le dual treillis des cônes de son éventail normal (voir figure 1.10).*

Corollaire 1.3.16. *Un polytope est simple si et seulement si son éventail normal est simplicial.*

1.3.2 Cônes de type

Ainsi, deux polytopes ont même type combinatoire si et seulement si leurs éventails ont même type combinatoire. Fort heureusement, il reste encore des nuances plus subtiles à explorer. L'objet d'étude de cette partie, introduit dans [McM73], permet de considérer l'ensemble des polytopes ayant un même éventail normal. On regarde en un sens la fibre de l'application qui envoie un polytope sur son éventail normal.

Définition 1.3.17 ([McM73]). Soient \mathcal{F} un éventail et \mathbf{R} un ensemble de représentants de ses rayons. Le **cône de type** de \mathcal{F} est l'ensemble $\text{TC}(\mathcal{F})$ des fonctions dites **de hauteur** $h : \mathbf{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que le polytope $P_h^{\mathcal{F}} := \bigcap_{r \in \mathbf{R}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle r \mid x \rangle \leq h_r\}$ admet \mathcal{F} comme éventail normal.

Notons que tout polytope P ayant \mathcal{F} comme éventail normal s'écrit sous la forme $P_h^{\mathcal{F}}$ pour un h bien choisi, puisque toutes les facettes de P sont normales à un rayon de \mathcal{F} .

Exemple 1.3.18. Partons de l'exemple d'un hexagone régulier. Son éventail normal \mathcal{F} a 6 rayons, 6 chambres bidimensionnelles et deux cônes triviaux \mathbb{R}^2 et $\{0\}$. Le choix de la fonction h spécifie à quelles distances de l'origine on place des hyperplans dans la description de $P_h^{\mathcal{F}}$. Un choix malheureux peut conduire à altérer le cône de type du polytope (voir figure 1.11).

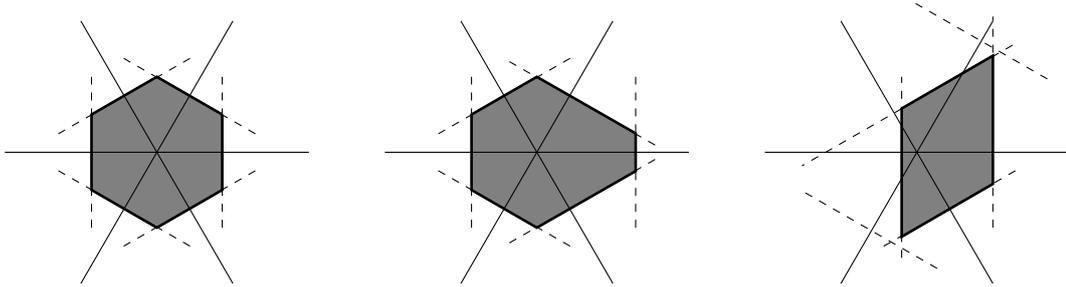


FIGURE 1.11 – Trois polytopes $P_h^{\mathcal{F}}$ pour des fonctions de hauteur différentes, relativement à l'éventail normal de l'hexagone régulier \mathcal{F} . La première fonction permet de retrouver l'hexagone régulier, la seconde diffère seulement en une hauteur légèrement augmentée, tandis que la troisième est radicalement différente et le polytope associé n'a pas même type combinatoire. La troisième est la seule hors du cône de type de l'éventail.

Exemple 1.3.19. La fonction de hauteur du permutoèdre de taille n de la définition 1.4.1 est la fonction $h_{\circ}^n : I \mapsto n|I|(n - |I|)/2$.

Observons que le cône de type est bien un cône, au sens où il est stable par dilatation. De plus, il est convexe, car stable par somme de Minkowski. Il s'avère que c'est aussi un cône polyédral, comme en atteste la proposition suivante, qui nous permet aussi et surtout un calcul explicite du cône de type d'un éventail simplicial essentiel et complet. Il s'agit d'une reformulation de la régularité des triangulations de configurations de vecteurs, introduite avec la théorie des polytopes secondaires (voir [GKZ08 ; DLRS10]).

Définition 1.3.20. Soient \mathcal{F} un éventail simplicial, essentiel et complet de \mathbb{R}^n , et $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{R}$ et $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{S}$ une paire de chambres adjacentes dans \mathcal{F} , *i.e.*, partageant un mur, avec $\mathbf{R} \setminus \{\mathbf{r}\} = \mathbf{S} \setminus \{\mathbf{s}\}$. On dit qu'une fonction de hauteur h vérifie l'**inégalité de croisement de mur** associée à cette paire lorsque

$$\alpha h_{\mathbf{r}} + \beta h_{\mathbf{s}} + \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{R} \cap \mathbf{S}} \gamma_{\mathbf{t}} h_{\mathbf{t}} > 0,$$

où

$$\alpha \mathbf{r} + \beta \mathbf{s} + \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{R} \cap \mathbf{S}} \gamma_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = 0$$

est l'unique relation vérifiée par les vecteurs de $\mathbf{R} \cup \mathbf{S}$ avec $\alpha + \beta = 2$.

Proposition 1.3.21 ([CFZ02, Lem. 2.1]). *Soit \mathcal{F} un éventail simplicial, essentiel et complet de \mathbb{R}^n . Le cône de type $\mathbf{TC}(\mathcal{F})$ est exactement l'ensemble des fonctions de hauteur qui vérifient toutes les inégalités de croisement de murs de \mathcal{F} .*

En particulier, le cône de type d'un éventail est l'intersection d'autant de demi-espaces que de murs dans l'éventail. Notons que cette valeur n'est qu'une borne. Un enjeu sera plus tard de trouver la description des facettes du cône de type dans des cas bien particuliers, voir propositions 1.4.11 et 2.3.14.

Exemple 1.3.22. Reprenons l'exemple de l'éventail normal de l'hexagone régulier. Appelons-le \mathcal{B}_3 , numérotions ses rayons de 1 à 6 dans le sens horaire et prenons des représentants unitaires de ces rayons. Cet éventail a six paires de chambres adjacentes, qui définissent six inégalités de croisement de mur :

$$\begin{aligned} h_6 + h_2 &> h_1, \\ h_1 + h_3 &> h_2, \\ h_2 + h_4 &> h_3, \\ h_3 + h_5 &> h_4, \\ h_4 + h_6 &> h_5, \\ h_5 + h_1 &> h_6. \end{aligned}$$

On peut vérifier qu'aucune de ces inégalités n'est impliquée par les autres, c'est-à-dire qu'elle définissent toutes une facette du cône de type. La proposition 1.3.21 garantit qu'on obtient toutes les facettes du cône de type de cette manière. Ce cône de type vit dans \mathbb{R}^6 , mais a un espace linéal de dimension 2 *i.e.*, s'écrit comme une somme $L + C$, où L est un espace vectoriel maximal pour cette écriture de dimension 2 et C est un cône. En quotientant par cet espace linéal L , on obtient un cône polyédral pointé dont une section est un polytope en dimension 3 représentée figure 1.13.

Ici, les hypothèses d'essentialité et de complétude sont nécessaires, puisque l'éventail normal d'un polytope de dimension pleine est essentiel et complet. Cependant, nous allons généraliser légèrement ce résultat pour qu'il inclue les éventails non-simpliciaux :

Proposition 1.3.23 ([APR21, Prop. 4]). *Soit \mathcal{F} un éventail essentiel et complet de \mathbb{R}^n . Le cône de type $\mathbf{TC}(\mathcal{F})$ est exactement l'ensemble des fonctions de hauteur qui vérifient toutes les inégalités de croisement de murs généralisées de \mathcal{F} , où les **inégalités de croisement de murs généralisées** sont :*

(i) *Pour toute chambre $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{R}$ et toute relation $\sum_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}} \gamma_{\mathbf{r}} \mathbf{r} = 0$, l'égalité $\sum_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}} \gamma_{\mathbf{r}} h_{\mathbf{r}} = 0$.*

(ii) Pour toute paire de chambres adjacentes $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{R}$ et $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{S}$, pour tout choix de $\mathbf{r} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S}$ et de $\mathbf{s} \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{R}$ et pour toute relation $\alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{s} + \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{R} \cap \mathbf{S}} \gamma_{\mathbf{t}}\mathbf{t} = 0$ avec $\alpha + \beta = 2$, l'inégalité $\alpha h_{\mathbf{r}} + \beta h_{\mathbf{s}} + \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{R} \cap \mathbf{S}} \gamma_{\mathbf{t}} h_{\mathbf{t}} > 0$.

Observons que dans cette proposition, les égalités (item (i)) n'adviennent que dans des chambres qui ne sont pas simpliciales et les inégalités (item (ii)) sont exactement les inégalités de croisement de murs classiques lorsque les chambres sont simpliciales.

La proposition 1.3.23 est une reformulation de la régularité des subdivisions polyédrales de configurations de vecteurs [GKZ08]. On peut trouver un analogue affine dans [DLRS10, Thm. 2.3.20] et la traduction entre les configurations de points et les configurations de vecteurs dans [DLRS10, Sec. 2.5.2]

Ainsi, le cône de type d'un éventail essentiel et complet est un cône polyédral ouvert. On appelle cône de type fermé d'un éventail \mathcal{F} la clôture $\overline{\mathbb{TC}}(\mathcal{F})$ de son cône de type, décrite par une version large des inégalités de la proposition 1.3.23.

Remarque 1.3.24. Le cône de type d'un éventail simplicial complet de \mathbb{R}^n ayant N rayons a un espace linéal de dimension n , correspondant aux translations du polytope dans \mathbb{R}^n . En particulier, il est simplicial lorsqu'il a exactement $N - n$ facettes.

Les éventails simpliciaux dont le cône de type est simplicial ont cette particularité que l'ensemble des polytopes qui les réalisent est aisément caractérisé :

Proposition 1.3.25 ([PPPP19, Cor. 1.11]). *Soit \mathcal{F} un éventail essentiel complet et simplicial dans \mathbb{R}^n , de cône de type simplicial. Soit K la matrice de taille $(N - n) \times N$ dont les lignes sont les normales unitaires des facettes de $\mathbb{TC}(\mathcal{F})$. Alors les réalisations polytopales de \mathcal{F} sont exactement les*

$$\{z \in \mathbb{R}_{>0}^N \mid Kz = u\}$$

pour u parcourant $\mathbb{R}_{>0}^{N-n}$.

1.4 Géométrie des quotients de l'ordre faible

Dans la continuité de la section 1.2, on enrichit ici la structure de l'ordre faible de géométrie. Une fois l'ordre faible réalisé en un polytope, le permutoèdre, on décrit l'éventail associé, l'éventail de tresses et son cône de type. Enfin, on réalise également par un polytope les quotients de l'ordre faible, vivant dans l'adhérence du cône de type de l'éventail de tresses.

1.4.1 Géométrie de l'ordre faible

Définition 1.4.1. Le **permutoèdre** de taille n est le polytope Π_n défini de manière équivalente comme :

- (i) l'enveloppe convexe des $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
- (ii) l'intersection de l'hyperplan $\mathbb{H}_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in [n]} x_i = \binom{n+1}{2}\}$ avec les demi-espaces $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} x_i \geq \binom{|I|+1}{2}\}$ pour I **sous-ensemble propre** de $[n]$, i.e., $\emptyset \subsetneq I \subsetneq [n]$.

Avant de poursuivre l'introduction des notions géométriques, décrivons brièvement les faces du permutoèdre de manière combinatoire.

Définition 1.4.2. Un **mot tassé** est un mot m sur \mathbb{N}^* tel que si i est une lettre de m , alors tous les $1 \leq j < i$ sont aussi des lettres de m .

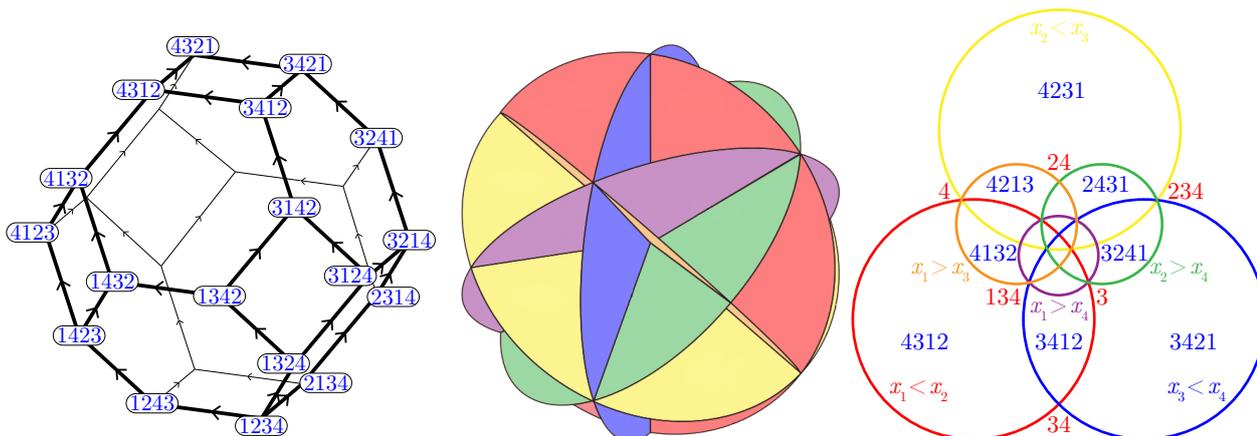


FIGURE 1.12 – Permutoèdre de taille 4 (gauche) orienté comme dans la proposition 1.4.6, éventails de tresses de taille 4 (milieu) et projection stéréographique de ce dernier sur le plan (droite). On utilisera de manière répétée cette projection stéréographique dans les figures à suivre. Figure de [PS19].

Les mots tassés de longueur n sont naturellement en bijection avec les partitions ensemblistes ordonnées de $[n]$. En effet, on associe à un tel mot tassé m la partition dont la k^{e} part est l'ensemble des indices de la lettre k dans m . On jongle dans la proposition suivante entre les deux objets.

Proposition 1.4.3 ([Zie93, Ex. 0.10]). *Les mots tassés de longueur n sont en bijection avec les faces du permutoèdre de taille n . Plus précisément, à un mot tassé m de maximum k , on associe la face de dimension $k - 1$ dont les sommets sont toutes les permutations σ telles que $m_i < m_j \Rightarrow \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$. Le treillis des faces du permutoèdre est isomorphe au treillis des partitions ordonnées de n ordonnées par raffinement.*

Définition 1.4.4. L'éventail de tresses de taille n est l'éventail \mathcal{B}_n vivant dans l'hyperplan \mathbb{H}_n dont les chambres sont les composantes connexes du complémentaire de l'union des hyperplans $H_{ab} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_a = x_b\}$ pour $1 \leq a < b \leq n$. Ses chambres sont en bijection avec les permutations et on note $C(\sigma) := \{x \in \mathbb{H}_n \mid x_{\sigma_1} \leq \dots \leq x_{\sigma_n}\}$ celle associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Ses rayons sont en bijection avec les bipartitions ordonnées de $[n]$, c'est-à-dire les paires (I, J) avec $I \sqcup J = [n]$, ou de manière équivalente avec les sous-ensembles propres de $\emptyset \subsetneq I \subsetneq [n]$. On note $C(I) := \{x \in \mathbb{H}_n \mid x_{i_1} = \dots = x_{i_k} \leq x_{j_1} = \dots = x_{j_\ell}\}$ le rayon associé à cette bipartition avec $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_\ell\}$, et $\mathbf{r}(I) := |I|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_I = |I|\mathbf{1}_{c_I} - |^c I|\mathbf{1}_I$ un représentant de ce rayon. Les rayons qui composent la chambre $C(\sigma)$ sont exactement les $C(\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\})$ pour $k \in [n - 1]$.

De manière plus générale, les cônes de l'éventail de tresses de dimension k sont en bijection avec les mots tassés de maximum $n - k$ et avec les partitions ensemblistes ordonnées à $n - k$ parts.

Proposition 1.4.5. *L'éventail de tresses est l'éventail extérieur normal du permutoèdre.*

Le permutoèdre comme l'éventail de tresses enchâssent la structure de l'ordre faible, comme le montrent les deux propositions suivantes.

Proposition 1.4.6. *Le diagramme de Hasse de l'ordre faible est isomorphe au graphe du permutaoèdre orienté par la direction $(2i - n - 1)_{i=1}^n = (-n + 1, -n + 3, \dots, n - 3, n - 1)$ (voir figure 1.12).*

Proposition 1.4.7. *Sélectionnons une chambre B (arbitraire) de l'éventail de tresses. Le poset des chambres ordonnées par l'inclusion des ensembles d'hyperplans séparant les chambres de B est isomorphe à l'ordre faible. C'est le **poset des régions** de l'éventail [Ede84 ; BEZ90].*

On s'intéresse à une généralisation classique des permutaoèdres :

Définition 1.4.8 ([Edm70], [PRW08], [Pos09]). Les **permutaoèdres déformés**, **permutaoèdres généralisés** ou **polymatroïdes** sont les polytopes dont l'éventail normal est plus grossier que l'éventail de tresses, c'est-à-dire que les chambres de leur éventail normal sont des unions de chambres de l'éventail de tresses.

De manière équivalente, les permutaoèdres déformés sont les polytopes dont toutes les arêtes sont dans une des directions $e_i - e_j$ pour une paire $i, j \in [n]^2$. Moralement, on peut les voir comme les polytopes que l'on obtient à partir d'un permutaoèdre en déplaçant ses facettes sans en changer la normale et sans dépasser un sommet, ou en déplaçant ses sommets sans changer les directions des arêtes.

1.4.2 Fonctions sous-modulaires

Définition 1.4.9 ([Edm70 ; PRW08 ; Pos09]). Une **fonction sous-modulaire** est une fonction $h : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les **inégalités sous-modulaires** :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(n)^2, h(A \cup B) + h(A \cap B) \leq h(A) + h(B),$$

avec la convention que $h(\emptyset) = h([n]) = 0$. On dit qu'une fonction sous-modulaire est **stricte** lorsqu'elle vérifie les versions strictes des inégalités sous-modulaires pour $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

Les fonctions sous-modulaires strictes fournissent une description combinatoire du cône de type de l'éventail de tresses :

Proposition 1.4.10 ([Edm70] & [Pos09]). *Les fonctions de hauteur du cône de type de l'éventail de tresses sont exactement les fonctions sous-modulaires strictes.*

Démonstration. Rappelons que les rayons de l'éventail de tresses de taille n sont naturellement étiquetés par les sous-ensembles propres de $[n]$ et que leurs représentants sont les $\mathbf{r}(A) := |A|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_A$ pour $\emptyset \subsetneq A \subsetneq [n]$. Il suffit alors de vérifier que les inégalités de croisement de mur de la proposition 1.3.21 associées à ces représentants sont exactement les inégalités sous-modulaires. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) &= |A|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_A + |B|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_B, \\ &= |A \cup B|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_{A \cup B} + |A \cap B|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_{A \cap B}, \\ &= \mathbf{r}(A \cup B) + \mathbf{r}(A \cap B), \end{aligned}$$

et si les rayons $C(A)$ et $C(B)$ définissent une paire de chambres adjacentes, alors $C(A \cup B)$ et $C(A \cap B)$ sont bien des rayons de ces deux chambres. \square

Cependant, les inégalités sous-modulaires ne sont pas sans redondance en général.

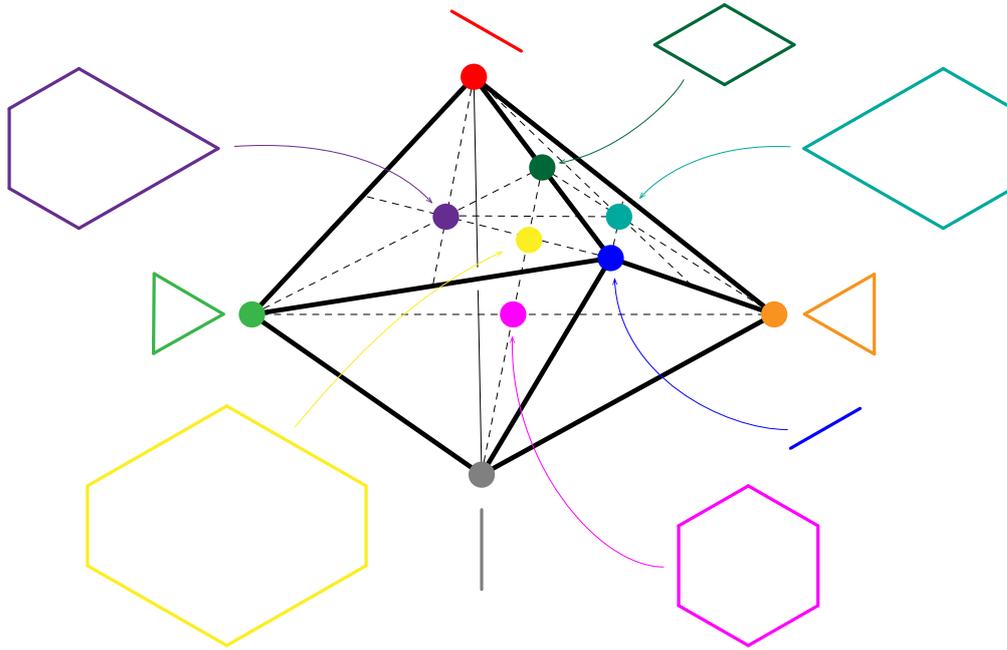


FIGURE 1.13 – Section du cône de type de \mathcal{B}_3 . Chaque point coloré correspond à une fonction de hauteur et à un polytope $P_h^{\mathcal{B}_3}$ représenté à côté. Seuls deux des points sont effectivement dans le cône de type (le jaune et le rose), puisque celui-ci est un cône ouvert. Tous correspondent à des fonctions sous-modulaires et donc à des permutoèdres généralisés. Figure de [PPR20].

Proposition 1.4.11. *Les fonctions sous-modulaires sont exactement déterminées par les inégalités sous-modulaires de la forme*

$$h(A \cup B) + h(A \cap B) \leq h(A) + h(B)$$

pour A et B des parties non-triviales de $[n]$ et $|A \setminus B| = |B \setminus A| = 1$. De plus, toutes ces inégalités sont nécessaires à la définition des fonctions sous-modulaires. En d'autres termes, ces inégalités définissent les facettes du cône de type de l'éventail de tresses.

En particulier, le cône de type de l'éventail de tresses a $2^{n-2} \binom{n}{2}$ facettes.

Les fonctions sous-modulaires généralisent les fonctions sous-modulaires strictes au même sens que les permutoèdres déformés généralisent les permutoèdres :

Proposition 1.4.12 ([Edm70]). *Les permutoèdres généralisés sont exactement les $P_h^{\mathcal{B}_n}$ pour h une fonction sous-modulaire de taille n .*

Ainsi, les fonctions sous-modulaires forment l'adhérence du cône de type de l'éventail de tresses.

1.4.3 Éventails quotients et quotientopes

On présente ici les quotientopes, une famille de polytopes indexée par les congruences de l'ordre faible, introduite dans [PS19] et placée dans la filiation directe de l'étude des éventails quotients.

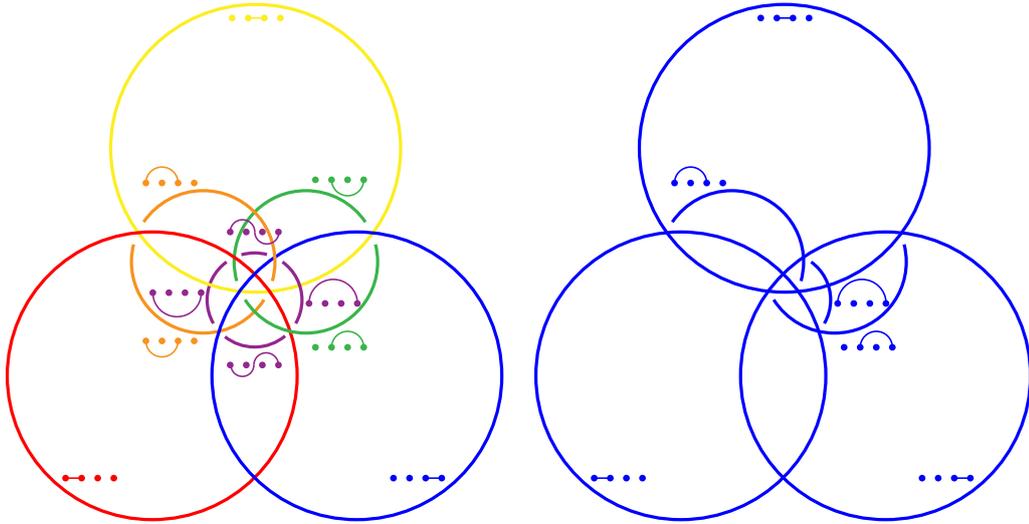


FIGURE 1.14 – Éventail de tresses (gauche) dont les murs sont découpés en tessons et éventail quotient associé à la congruence sylvestre (droite). Figure de [PS19].

Définition 1.4.13 ([Rea05]). Soit \equiv une congruence de l'ordre faible. L'éventail quotient associé à \equiv est \mathcal{B}_n^{\equiv} , le raffinement de l'éventail de tresses \mathcal{B}_n dont les chambres sont les unions de chambres associées à des permutations d'une même classe (voir figure 1.14).

Ainsi, dans la construction d'un éventail quotient, on *abat* des murs entre les chambres pour construire des chambres plus grandes. Mais l'unité de mesure adaptée à l'étude des éventails quotient n'est pas le mur, mais un nouvel objet, introduit dans [Rea03] dans le cadre général de l'étude des posets de régions (voir figure 1.14).

Observons que l'éventail quotient associé à une congruence est essentiel si et seulement si la congruence est essentielle.

Définition 1.4.14 ([Rea03]). Soient $1 \leq a < b \leq n$ et $A, B \subset]a, b[$ tels que $A \sqcup B =]a, b[$. Le tesson $\Sigma(a, b, A, B)$ est le cône polyédral

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall c \in A, d \in B, x_c \leq x_a = x_b \leq x_d\}.$$

On note Σ_n leur ensemble.

Ainsi, les tessons sont un découpage des hyperplans de l'éventail de tresses. Chaque hyperplan H_{ab} est découpé en 2^{b-a-1} tessons.

Les tessons sont clairement en bijection avec les arcs (définition 1.2.13) et cette bijection n'est pas fortuite. On confondra aisément les trois points de vues : combinatoire des permutations avec les arcs, combinatoire des posets avec les permutations à une descente ou une montée et géométrie avec les tessons. On munit naturellement les tessons de l'ordre de forçage des arcs. De la même manière, on parlera sans retenue de tesson simple ou mixte, faisant référence à la définition 1.2.13.

Théorème 1.4.15 ([Rea16a, Prop. 9-8.3 & Cor. 9-8.8]). Soit \equiv une congruence de l'éventail de tresses \mathcal{B}_n . Les chambres de l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} sont les composantes connexes du complémentaires de l'union des tessons correspondant à l'idéal $\mathcal{UIT}(\equiv)$ des arcs non contractés par \equiv .

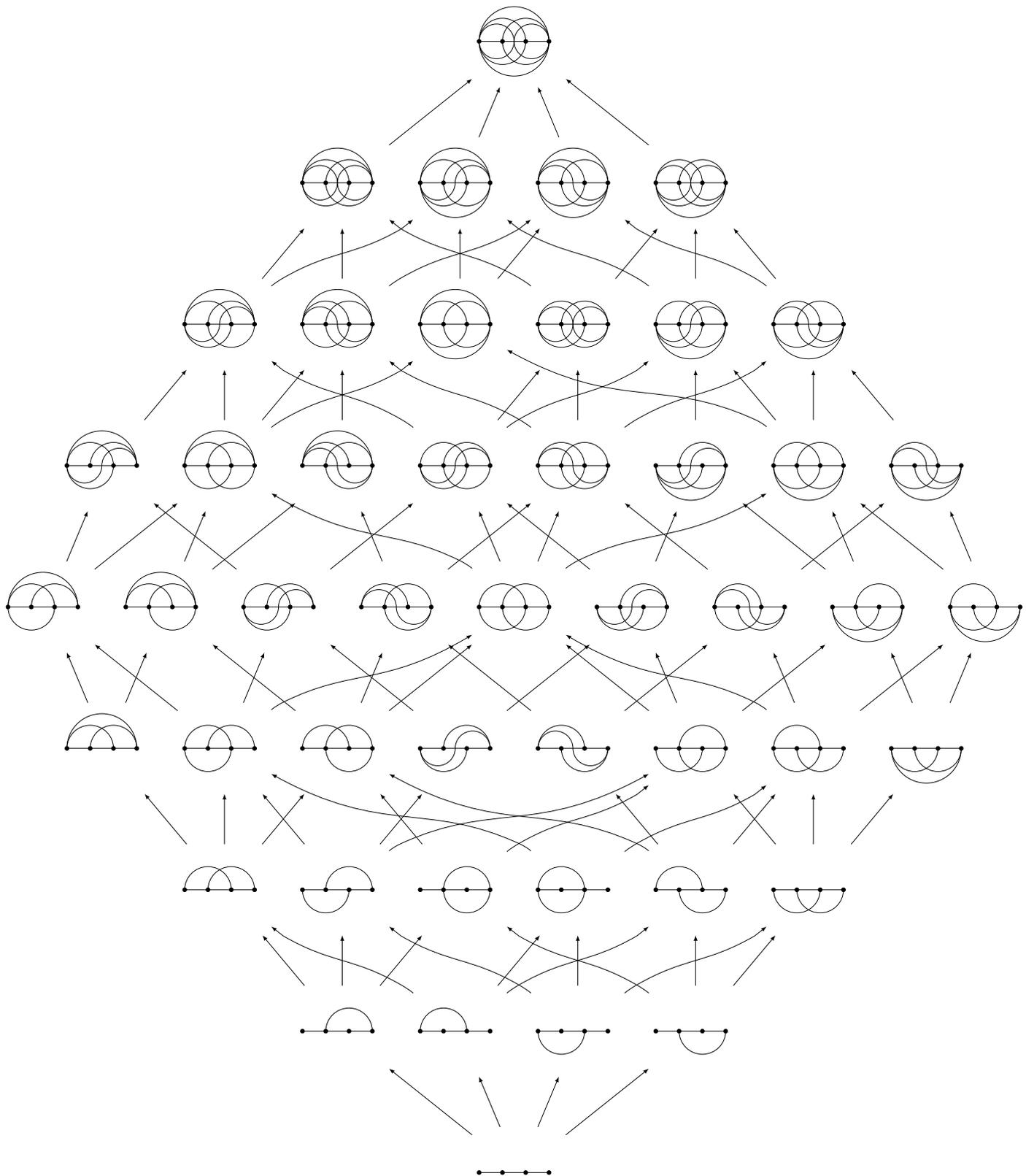


FIGURE 1.15 – Treillis de tous les idéaux d’arcs essentiels de taille 4 ordonnés par inclusion, ou, de manière équivalente, de toutes les congruences essentielles de l’ordre faible de taille 4 ordonnées par raffinement. Figure de [PS19].

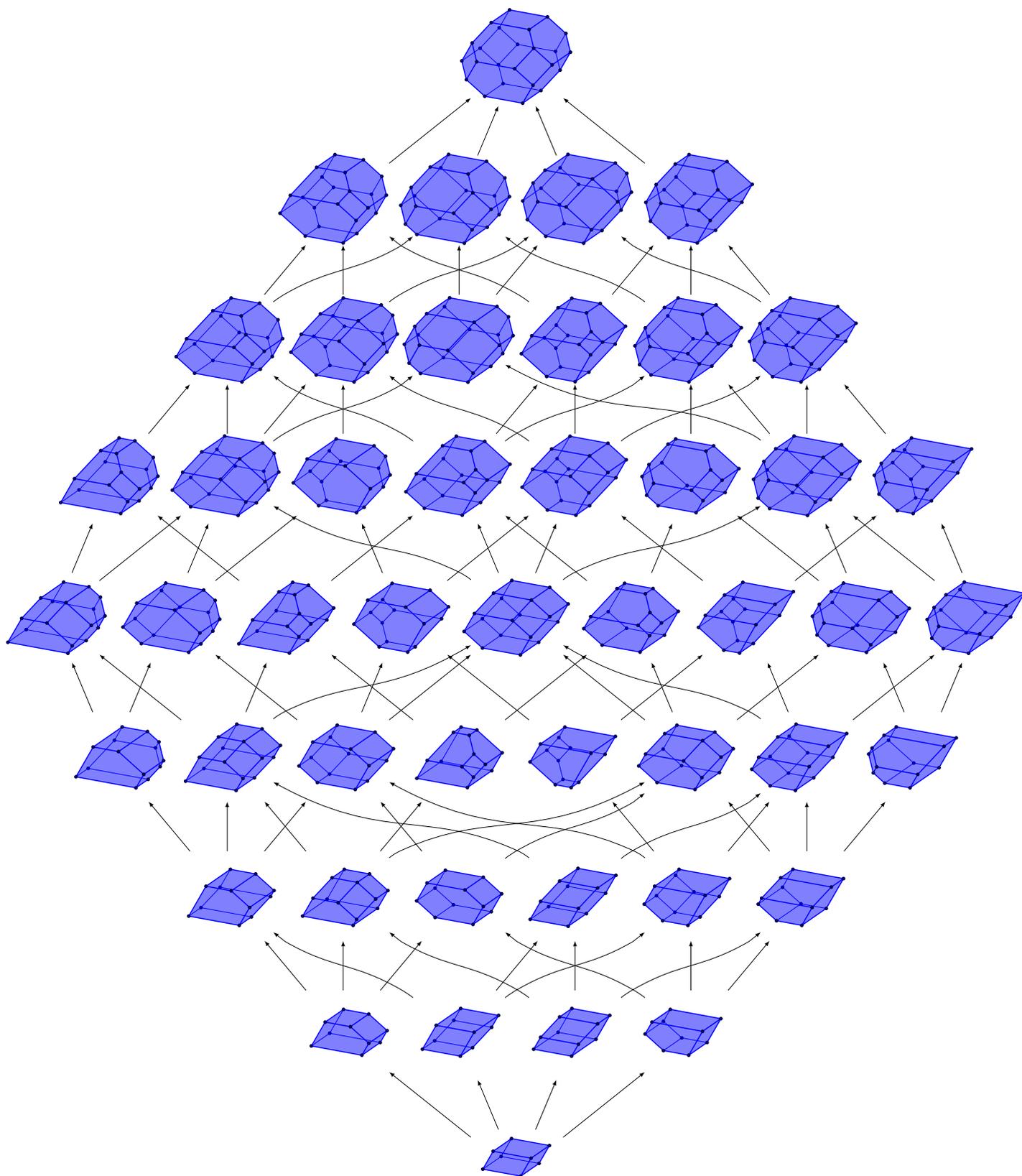


FIGURE 1.16 – Treillis de tous les quotientopes de taille 4, ordonnés par raffinement de leur congruence, ou, de manière équivalente, de leur éventail quotient (voir page d'en face). Figure de [PS19].

Théorème 1.4.16 ([PS19, Thm. 2]). *Pour toute congruence de treillis de l'ordre faible \equiv , l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} est l'éventail normal d'un polytope.*

La démonstration de ce théorème dans [PS19] implique la construction d'un polytope explicite dont l'éventail normal est celui désiré. C'est ce candidat qui est appelé **quotientope** et noté Q_{\equiv} (voir figure 1.16). Il s'agit de construire une fonction de hauteur qui vérifie les inégalités de croisement de mur de l'éventail quotient. Une construction à partir de sommes de Minkowski peut être trouvée dans [PPR20], qui est plus satisfaisante puisqu'elle permet une généralisation à d'autres arrangements d'hyperplans.

Dans la suite, on commettra un abus de langage en appelant quotientope et en notant Q_{\equiv} tout polytope réalisant l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} .

On retrouve des analogues des propositions 1.4.6 et 1.4.7 :

Proposition 1.4.17 ([PS19, Cor. 10]). *Soit \equiv une congruence de \mathfrak{S}_n . Le diagramme de Hasse du treillis quotient \mathfrak{S}_n/\equiv est isomorphe au graphe du quotientope Q_{\equiv} orienté par la direction $(2i - n - 1)_{i=1}^n = (-n + 1, -n + 3, \dots, n - 3, n - 1)$.*

Exemple 1.4.18. Le quotientope $Q_{\equiv_{\text{triv}}}$ associé à la congruence triviale (où chaque permutation est seule dans sa classe) est naturellement le permutoèdre. Le quotientope $Q_{\equiv_{\text{sy1v}}}$ associé à la congruence sylvestre (exemple 1.2.20) est l'associaèdre de [SS93; Lod04]. Le quotientope $Q_{\equiv_{\varepsilon}}$ associé à la congruence ε -cambrienne (exemple 1.2.21) est l'associaèdre de [HL07; LP18]. Le quotientope $Q_{\equiv_{\text{hypo}}}$ associé à la congruence hypoplaxique (exemple 1.2.22) est le cube.

Congruences permusylvestres

On étudie dans ce chapitre la position privilégiée qu’occupent les congruences permusylvestres au sein des congruences de l’ordre faible.

2.1 Permutarbres

Cette section introduit l’objet de ce chapitre : les permutarbres, introduits dans [PP18] afin de fournir un objet interpolant entre les permutations et les suites binaires, en passant par les arbres binaires, entre autres. La structure de cette partie est grandement inspirée de [APR21, sec. 2.4].

2.1.1 Une famille de congruences de l’ordre faible

On s’intéresse ici aux premières définitions et résultats concernant la combinatoire des permutarbres et leur interprétation comme des classes de permutations, définissant des congruences de l’ordre faible (voir Sections 1.1.4 et 1.2.3).

Définition 2.1.1. Dans un arbre orienté T , on appelle **parents** (resp. **enfants**) d’un nœud i ses voisins le long d’une arête sortante (resp. entrante) et **sous-arbre ascendant** (resp. **descendant**) les composantes connexes contenant ses parents (resp. enfants) dans $T \setminus \{i\}$.

Un **permutarbre**¹ de taille n est un arbre planaire orienté d’ensemble de nœuds internes $[n]$, tel que :

- (i) tout nœud interne a un ou deux parents et un ou deux enfants,
- (ii) si un nœud i a deux parents (resp. enfants), tous les nœuds du sous-arbre ascendant (resp. descendant) gauche sont inférieurs à i et tous les nœuds du sous-arbre ascendant (resp. descendant) droit sont supérieurs à i .

La **décoration** d’un permutarbre T est le mot $\delta(T)$ de longueur n , où $\delta(T)_i$ est \oplus , \otimes , \otimes ou \otimes selon si le nœud i a un parent et un enfant, deux parents et un enfant, un parent et deux enfants, ou deux parents et deux enfants. On dit que T est un δ -permutarbre.

Dans les représentations graphiques, on orientera toujours les arêtes de bas en haut et on inscrira les nœuds internes de gauche à droite. On tracera une demi-droite rouge en dessous

1. Traduit de l’anglais *permutree*, baptisés ainsi car ils généralisent les arbres binaires et les permutations, voir exemple 2.1.3.

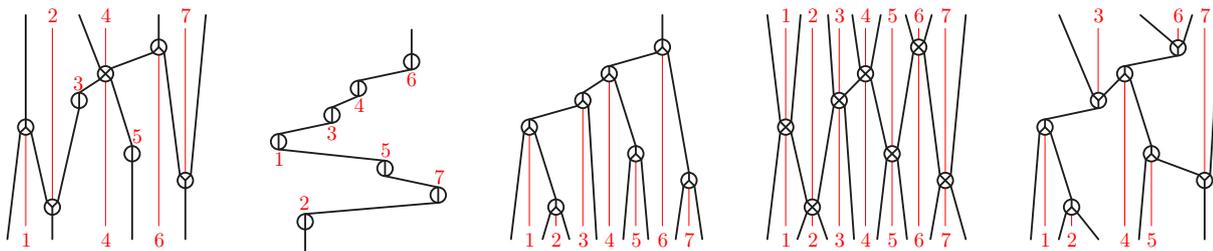


FIGURE 2.1 – Cinq exemples de permutarbres. Le premier est générique, tandis que les suivants correspondent respectivement à une permutation, un arbre binaire, une suite binaire et un arbre cambrien. Figure de [PP18].

de chaque nœud de $\delta^-(T) := \{i \in [n] \mid \delta(T)_i \in \{\ominus, \otimes\}\}$ (resp. au dessus de chaque nœud de $\delta^+(T) := \{i \in [n] \mid \delta(T)_i \in \{\oplus, \otimes\}\}$), pour appuyer que nos conventions de dessin et la condition (ii) empêchent toute arête du permutarbre de passer en dessous (resp. au dessus) d'un nœud de $\delta^-(T)$ (resp. $\delta^+(T)$). Des exemples de permutarbres ainsi représentés sont en figure 2.1.

Exemple 2.1.2. Dans la figure 2.1, les décorations des permutarbres sont $\otimes \oplus \ominus \otimes \oplus \ominus \oplus$, \oplus^7 , \otimes^7 , \otimes^7 et $\otimes \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus$.

Exemple 2.1.3. On s'intéressera de manière générale à l'ensemble des δ -permutarbres pour une décoration δ donnée. Ces familles comprennent :

- (i) Les \oplus^n -permutarbres, en bijection avec les permutations de taille n .
- (ii) Les \otimes^n -permutarbres, en bijection avec les arbres binaires sur n nœuds internes.
- (iii) Les δ -permutarbres, pour $\delta \in \{\oplus, \ominus\}^n$, en bijection avec les arbres cambriens de [Rea06].
- (iv) Les \otimes^n -permutarbres, en bijection avec les suites binaires de longueur $n-1$, *i.e.*, $\{-1, +1\}^n$.

Remarque 2.1.4. Dans l'étude des δ -permutarbres, avec $\delta \in \{\oplus, \otimes, \oplus, \otimes\}^n$ fixé, les valeurs de δ_1 et δ_n n'ont aucune influence sur la famille de permutarbres, dans leur nombre ou leur combinatoire. On pourra donc toujours se ramener sans perte de généralité à des décorations dont la première et la dernière lettre sont \oplus .

Définition 2.1.5. Une **coupe** dans un permutarbre T est une bipartition $I \sqcup J = [n]$ définie par les deux parties connexes de $T \setminus \{i \rightarrow j\}$, la forêt obtenue par suppression de l'arête $i \rightarrow j$ de T , avec $i \in I$ et $j \in J$.

On peut alors étendre la notion de rotation des arbres binaires aux permutarbres :

Définition 2.1.6. Soient T un permutarbre, $i \rightarrow j$ une arête de T , D le sous-arbre descendant de i le plus à droite et U les sous-arbre ascendant de j le plus à gauche. On construit S à partir de T en renversant l'arête $i \rightarrow j$, en attachant le sous-arbre U à i et le sous-arbre D à j . S est l'arbre obtenu à partir de T par **rotation** de l'arête $i \rightarrow j$.

Proposition 2.1.7 ([PP18, Prop. 30]). *Le résultat de la rotation de l'arête $i \rightarrow j$ dans le permutarbre T est un permutarbre S , qui a mêmes coupes que T à l'exception de celle engendrée par l'arête liant i à j .*

Définition 2.1.8. On dit que la rotation d'une arête $i \rightarrow j$ est **croissante** lorsque $i < j$. On appelle **graphe de rotation** le graphe orienté sur les δ -permutarbres dont les arêtes sont les rotations croissantes.

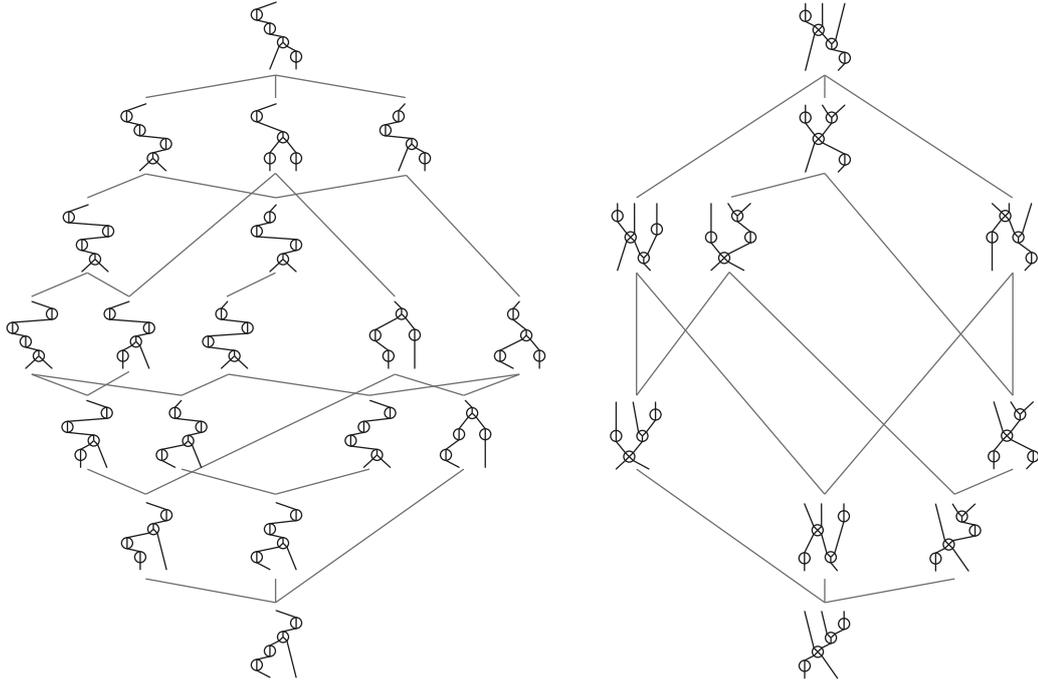


FIGURE 2.2 – Treillis permusylvestres associés aux décorations $\oplus \oplus \ominus \oplus$ (gauche) et $\oplus \otimes \oplus \otimes \oplus$ (droite). Figure de [PP18].

Proposition 2.1.9 ([PP18, Prop. 32]). *Le graphe de rotation des δ -permutarbres est le diagramme de Hasse d'un treillis, que l'on baptise **treillis δ -permusylvestre** (voir Figure 2.2).*

Remarque 2.1.10. Soit $\delta \in \{\oplus, \ominus, \otimes, \oplus\}^n$ une décoration. Les relations de couverture du treillis δ -permusylvestre correspondent aux rotations dans les permutarbres. Comme chaque permutarbre a n nœuds internes, il a $n - 1$ arêtes internes et par conséquent le diagramme de Hasse du treillis δ -permusylvestre est $(n - 1)$ -régulier.

Exemple 2.1.11. Parcourant à nouveau une partie de l'exemple 2.1.3, on identifie parmi les treillis δ -permusylvestres des treillis bien connus :

- (i) l'ordre faible pour $\delta = \oplus^n$,
- (ii) le treillis de Tamari, induit par les rotations sur les arbres binaires (voir [Tam62 ; HT72]), pour $\delta = \ominus^n$,
- (iii) les treillis cambriens de type A pour $\delta \in \{\otimes, \oplus\}^n$ [Rea06 ; Rea04 ; CP17],
- (iv) le treillis booléen pour $\delta = \otimes^n$.

Il s'avère que l'étude des treillis permusylvestres tombe entièrement sous la coupe de la théorie exposée en section précédente, en vertu de la proposition suivante :

Proposition 2.1.12 ([PP18, Prop. 32]). *Les treillis permusylvestres sont des quotients de l'ordre faible.*

Généralisant les congruences sylvestre et hypoplaxique, les congruences permusylvestres admettent plusieurs caractérisations, à l'image des exemples 1.2.20 et 1.2.22 :

Proposition 2.1.13. Soit $\delta \in \{\circlearrowleft, \circlearrowright, \otimes, \boxtimes\}^n$ une décoration et \equiv_δ la congruence associée. Elle est définie de manière équivalente comme :

- (i) La relation d'équivalence dont les classes sont les ensembles d'extensions linéaires des δ -permutarbres.
- (ii) La clôture transitive des règles de réécriture $UikVjW \equiv_\delta UkiVjW$ pour $j \in \delta^-$ et $UjVikW \equiv_\delta UjVkiW$ pour $j \in \delta^+$, pour $i < j < k$ des entiers et U, V, W des mots sur $[n]$.
- (iii) La relation d'équivalence dont les classes sont les fibres d'un algorithme d'insertion qui généralise ceux des exemples 1.2.20 et 1.2.22. On peut se référer à [PP18, Sec. 2.2 & Fig. 6] pour plus de détails.
- (iv) La congruence associée à l'idéal supérieur $\mathcal{CJI}(\equiv_\delta)$ de l'ordre de forçage \mathfrak{F}_n engendré par les arcs $(a-1, a+1, \{a\}, \emptyset)$ pour $1 < a < n$ dans δ^+ et $(a-1, a+1, \emptyset, \{a\})$ pour $1 < a < n$ dans δ^- [APR21, Prop. 18] (voir figure 2.3).

Démonstration. L'équivalence des trois premières conditions est démontrée dans [PP18]. On s'attache à montrer que les conditions (ii) et (iv) sont équivalentes. Observons simplement que dans les règles de réécriture, les deux permutations forment une relation de couverture de l'ordre faible et que le tessou séparant les deux chambres correspondantes est bien un tessou de la forme $\Sigma(a-1, a+1, A, B)$. \square

2.1.2 Géométrie des congruences permusylvestres

Nous l'avons déjà vu, les congruences permusylvestres forment une famille particulière parmi les congruences de l'ordre faible. On décrit ici une construction *ad hoc* des quotientopes associés, qui joueront un rôle particulier dans la suite. Cette construction diffère de celle d'origine de [PS19], mais livre bien un polytope dont l'éventail normal est l'éventail quotient de la congruence permusylvestre correspondante.

Définition 2.1.14. Soit $\delta \in \{\circlearrowleft, \circlearrowright, \otimes, \boxtimes\}^n$. L'éventail δ -permusylvestre est défini par ses cônes maximaux :

$$C(T) := \left\{ x \in \mathbb{H} \mid \forall i \rightarrow_T j, x_i \leq x_j \right\} = \frac{n+1}{2} \mathbb{1} + \mathbb{R}_{\geq 0} \left\{ \sum_{j \in J} \frac{e_j}{|J|} - \sum_{i \in I} \frac{e_i}{|I|} \mid I \sqcup J = [n] \text{ coupe de } T \right\},$$

où T parcourt l'ensemble des δ -permutarbres (voir figure 2.4).

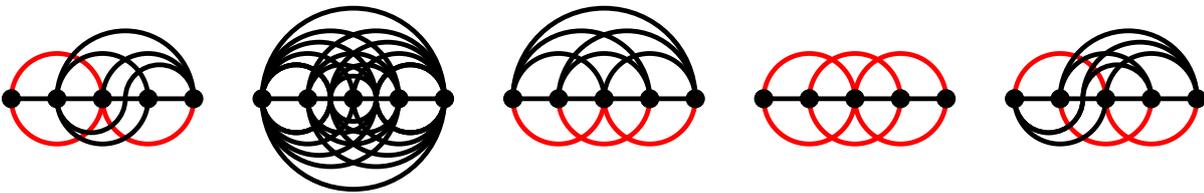


FIGURE 2.3 – Cinq exemples d'idéaux d'arcs non contractés $\mathcal{UJI}(\equiv_\delta)$ de congruences permusylvestres (en noir). Le premier est générique, tandis que les décorations des suivants correspondent respectivement aux permutations, arbres binaires, suites binaires et à une classe d'arbres cambriens. Les arcs rouges sont les générateurs des idéaux d'arcs contractés par les congruences $\mathcal{CJI}(\equiv_\delta)$.

Proposition 2.1.15. *Soit $\delta \in \{\oplus, \otimes, \otimes, \otimes\}^n$. L'éventail δ -permusylvestre est exactement l'éventail quotient $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$ associé à la congruence δ -permusylvestre \equiv_δ . Ainsi, ses chambres sont en bijection avec les δ -permutarbres. La chambre correspondant à un permutarbre est l'union des chambres de l'éventail de tresses associées à des permutations qui sont une extension linéaire de ce permutarbre.*

Exemple 2.1.16. On retrouve parmi les éventails δ -permusylvestres des éventails bien connus :

- (i) l'éventail de tresses lorsque $\delta = \oplus^n$,
- (ii) l'éventail sylvestre pour $\delta = \otimes^n$,
- (iii) les éventails cambriens de [RS09] pour $\delta \in \{\otimes, \otimes\}^n$,
- (iv) l'éventail défini par les hyperplans $x_i = x_{i+1}$ pour $i \in [n-1]$ pour $\delta = \otimes^n$.

La remarque 2.1.10 se reformule sur les éventails permusylvestres :

Remarque 2.1.17. Les éventails δ -permusylvestres sont simpliciaux.

Convoquons le souvenir de la description des facettes du permutoèdre : définition 1.4.1 (ii). Les inégalités dans cette description comprennent toutes celles de la définition suivante :

Définition 2.1.18. Soit $\delta \in \{\oplus, \otimes, \otimes, \otimes\}^n$. Le δ -permusylvèdre² est le polytope défini par l'intersection des demi-espaces :

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} x_i \geq \binom{|I|+1}{2} \right\},$$

pour $\emptyset \subsetneq I \subsetneq [n]$ tel que $I \sqcup {}^c I$ est une coupe d'un δ -permutarbre (voir figure 2.4).

Théorème 2.1.19 ([PP18, Thm. 40]). *Soit $\delta \in \{\oplus, \otimes, \otimes, \otimes\}^n$. L'éventail δ -permusylvestre est l'éventail normal du δ -permusylvèdre.*

En d'autres termes, les permusylvèdres sont des quotientopes associés aux congruences permusylvestres.

Exemple 2.1.20. On retrouve parmi les permusylvèdres des polytopes bien connus :

- (i) le permutoèdre lorsque $\delta = \oplus^n$,
- (ii) l'associaèdre de [SS93 ; Lod04] lorsque $\delta = \otimes^n$,
- (iii) les associaèdres de [HL07 ; LP18] pour $\delta \in \{\otimes, \otimes\}^n$,
- (iv) le cube pour $\delta = \otimes^n$.

On fournit enfin une description des sommets des permusylvèdres :

Proposition 2.1.21 ([PP18, Thm. 40]). *Le sommet du δ -permusylvèdre correspondant à un δ -permutarbre T est le point $a(T)$ de coordonnées :*

$$a(T)_i = \begin{cases} 1 + d & \text{si } \delta_i = \oplus, \\ 1 + d + \underline{\ell} \underline{r} & \text{si } \delta_i = \otimes, \\ 1 + d - \bar{\ell} \bar{r} & \text{si } \delta_i = \otimes, \\ 1 + d + \underline{\ell} \underline{r} - \bar{\ell} \bar{r} & \text{si } \delta_i = \otimes, \end{cases}$$

où d est le nombre de descendants de i dans T , $\underline{\ell}$ et \underline{r} sont les tailles des sous-arbres descendants gauche et droit de i dans T et $\bar{\ell}$ et \bar{r} sont les tailles des sous-arbres ascendants gauche et droit de i dans T .

2. Traduit de l'anglais *permutreehedron*

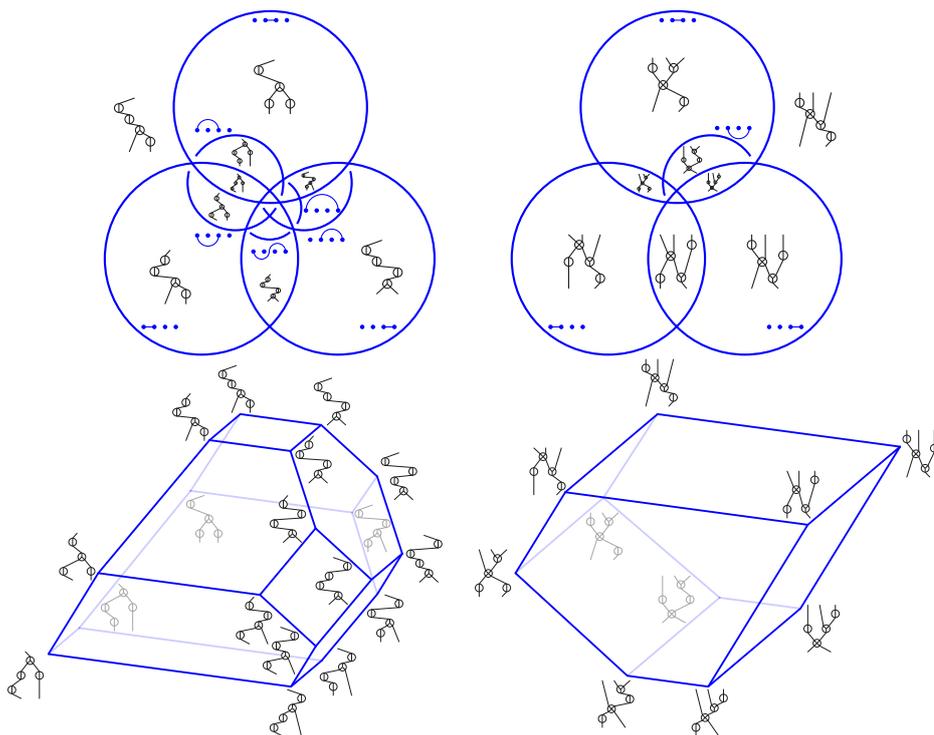


FIGURE 2.4 – Deux éventails permusylvestres (haut) et les permusylvèdres associés (bas). Les décorations sont celles de la figure 2.2 : $\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}$ (gauche) et $\textcircled{\circ}\textcircled{\otimes}\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}$ (droite). Figure de [APR21] et [PP18].

2.2 Enlevoèdres

Les permusylvèdres ont été construits à la fin de la partie précédente de telle sorte que la description de leurs facettes est comprise dans la description des facettes du permutoèdre. On dira qu'un polytope construit de cette manière est un **enlevoèdre** [Pil17] et qu'une congruence réalisable par un enlevoèdre est une **congruence d'enlevoèdre**.

Dans cette partie, après avoir étudié les ensembles de rayons préservés dans les éventails quotients, on caractérise les quotientopes qui sont des enlevoèdres. Enfin, on remarque que le lien entre les enlevoèdres et les permusylvèdres est encore plus fort, en s'intéressant à toutes les réalisations de l'éventail de tresses.

2.2.1 Rayons des éventails quotients

De manière générale, un éventail quotient contient un sous-ensemble des rayons de l'éventail d'origine. On s'intéresse ici à la caractérisation de ce sous-ensemble dans le cas de l'éventail de tresses \mathcal{B}_n .

Dans [PS19], on trouve le critère suivant décrivant l'ensemble des tessons contenant un rayon donné :

Proposition 2.2.1 ([PS19, Lem. 5]). *Soit I un sous-ensemble strict de $[n]$. Les tessons qui contiennent le rayon $\mathbf{r}(I)$ sont exactement les tessons $\Sigma(a, b, A, B)$ tels que $\{a, b\} \subseteq I$ et $A \subseteq I$,*

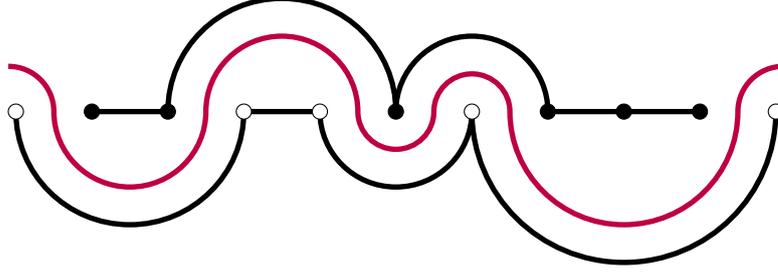


FIGURE 2.5 – Ensemble des arcs (en noir) correspondant aux tessons contenant dans leur intérieur le rayon $\mathbf{r}(1, 4, 5, 7, 11)$ pour $n = 11$. Les points correspondant aux indices du rayon sont représentés en blanc. Les arcs correspondant aux tessons contenant le rayon au sens large sont exactement ceux forcés par les arcs représentés, ou encore ceux qui ne croisent pas le pseudo-arc représenté en violet.

ou bien tels que $\{a, b\} \subseteq {}^c I$ et $B \subseteq {}^c I$.

On affine cette proposition, en s'intéressant aux intérieurs relatifs des tessons :

Lemme 2.2.2 ([APR21, Lem. 22]). *Soit I un sous-ensemble propre de $[n]$. Les tessons qui contiennent le rayon $\mathbf{r}(I)$ dans leur intérieur relatif sont exactement les $n - 2$ tessons :*

$$\Sigma_I := \{\Sigma(a, b, \emptyset,]a, b[\mid a, b \in I \text{ et }]a, b[\cap I = \emptyset\} \sqcup \{\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset \mid a, b \notin I \text{ et }]a, b[\subseteq I\}.$$

Graphiquement, les arcs associés aux tessons de cette famille sont ceux contenus dans le demi-plan inférieur (resp. supérieur) liant deux points consécutifs de I (resp. $[n] \setminus I$). Ce lemme est illustré figure 2.5.

Démonstration. Rappelons que $\mathbf{r}(I) = |I|\mathbf{1} - n\mathbf{1}_I$. Par conséquent un point x du rayon vérifie $x_i < x_j$ pour $i \in I$ et $j \notin I$. De plus, l'intérieur relatif du tesson $\Sigma(a, b, A, B)$ est :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall c \in A, d \in B, x_c < x_a = x_b < x_d\}.$$

Ainsi, le rayon $\mathbf{r}(I)$ vérifie ces relations si et seulement si $a, b \in I, A = \emptyset$ et $B =]a, b[$, ou bien $a, b \notin I, A =]a, b[$ et $B = \emptyset$. \square

Un corollaire immédiat mais qui s'avérera utile est le suivant :

Corollaire 2.2.3. *Un tesson mixte ne contient aucun rayon dans son intérieur relatif.*

On peut alors décrire les rayons des éventails quotients :

Lemme 2.2.4. *Soient \equiv une congruence de treillis de l'ordre faible et I un sous-ensemble propre de $[n]$. Le rayon $\mathbf{r}(I)$ est un rayon de \mathcal{B}_n^{\equiv} si et seulement si $\Sigma_I \subseteq \mathcal{UJI}(\equiv)$.*

Ce lemme est à rapprocher de la remarque 1.2.24 sur les congruences essentielles. Il peut se déduire de [Rea05, Prop. 5.10] ou de [Rea11, Prop. 7.7] et est démontré intégralement et proprement dans [Rit21, Prop. 2.2.5]. On se contente ici d'éléments de démonstration.

Démonstration. Si $\Sigma_I \subseteq \mathcal{UJI}(\equiv)$, alors l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} contient $n - 2$ tessons qui s'intersectent en $\mathbf{r}(I)$, qui est donc bien un rayon de \mathcal{B}_n^{\equiv} . Réciproquement, notons \mathfrak{S}_I l'intervalle formé des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que le cône $C(\sigma)$ contient $\mathbf{r}(I)$ (i.e., telles que $\sigma([|I|]) = I$). Notons \equiv_I la congruence induite par \equiv sur l'intervalle \mathfrak{S}_I . Les tessons basiques de \equiv_I sont exactement ceux de Σ_I et comme ceux-ci ne sont pas tous dans Σ_{\equiv} , on a que \equiv_I n'est pas essentielle et donc $\mathbf{r}(I)$ n'est pas un rayon de \mathcal{B}_n^{\equiv} . \square

2.2.2 Les enlevoèdres sont les permusylvèdres

À présent que les rayons des éventails permusylvestres sont connus, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.5. *Les congruences essentielles d'enlevoèdres sont exactement les congruences permusylvestres.*

Précisons que la contrainte d'essentialité est peu restrictive : vu la discussion de la remarque 1.2.24, les restrictions essentielles d'une congruence d'enlevoèdre quelconque sont des congruences permusylvestres.

Le reste de cette section est dédié à la démonstration du théorème 2.2.5. Le sens indirect découle de la construction des permusylvèdres et du théorème 2.1.19. On s'intéresse donc au sens direct et on considère par l'absurde une congruence d'enlevoèdre essentielle \equiv de l'ordre faible qui ne soit pas permusylvestre. Soit $\mathbf{\Pi}_{\equiv}$ l'antichaîne engendrant l'idéal inférieur $\Sigma_n \setminus \Sigma_{\equiv}$, c'est-à-dire l'ensemble des arcs maximaux pour le forçage, contractés par \equiv .

Lemme 2.2.6. *L'ensemble $\mathbf{\Pi}_{\equiv}$ contient au moins un des tessons de la forme $\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset)$ ou $\Sigma(a, b, \emptyset,]a, b[)$ de longueur au moins 3, i.e., tel que $b - a \geq 3$.*

Démonstration. Comme \equiv est essentielle, $\mathbf{\Pi}_{\equiv}$ ne contient pas de tesson de longueur 1. Puisque \equiv n'est pas permusylvestre, $\mathbf{\Pi}_{\equiv}$ contient au moins un tesson de longueur au moins 3, par la proposition 2.1.13 (iv). On décompose alors $\mathbf{\Pi}_{\equiv}$ en $\mathbf{\Pi}_{\equiv}^{=2}$, ses tessons de longueur 2 et $\mathbf{\Pi}_{\equiv}^{>2}$, ses tessons de longueur au moins 3. Soit δ la décoration telle que $\mathbf{\Pi}_{\equiv\delta} = \mathbf{\Pi}_{\equiv}^{=2}$. Si $\mathbf{\Pi}_{\equiv}^{>2}$ ne contient que des tessons mixtes, alors \equiv et \equiv_{δ} contiennent les mêmes tessons simples et vu le lemme 2.2.4, les éventails quotients \mathcal{B}_n^{\equiv} et $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$ ont les mêmes rayons. Comme \equiv est une congruence d'enlevoèdre, elle a donc même quotientope que \equiv_{δ} , le δ -permusylvèdre. On a donc deux congruences distinctes, l'une raffinant l'autre, réalisées par le même polytope, ce qui est absurde. Donc $\mathbf{\Pi}_{\equiv}^{>2}$ contient au moins un tesson simple. \square

Sans perte de généralité, on peut donc supposer que l'un des générateurs de l'idéal inférieur $\Sigma_n \setminus \Sigma_{\equiv}$ est de la forme $\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset)$ avec $b - a \geq 3$ minimal. On considère les parties de $[n]$ suivantes :

$$I =]a + 1, b[\quad J =]a, b - 1[\quad K = [1, b[\quad L =]a, n] \quad M =]a + 1, b - 1[.$$

Notons que M peut être vide, auquel cas il n'apparaît pas dans les calculs qui suivent. Avant d'énoncer l'argument général qui achèvera la démonstration du théorème 2.2.5, observons ces ensembles sur un exemple :

Exemple 2.2.7. Soit \equiv la congruence de l'ordre faible sur \mathfrak{S}_4 ne contractant que le tesson $\Sigma(1, 4, \{2, 3\}, \emptyset)$. On a :

$$I = \{3\} \quad J = \{2\} \quad K = \{1, 2, 3\} \quad L = \{2, 3, 4\} \quad M = \emptyset.$$

La fonction de hauteur $h_{\circ}^4 : I \mapsto 4|I|(4 - |I|)/2$ du permutoèdre de taille 4 vérifie la relation $h_{\circ}^4(I) + h_{\circ}^4(J) = h_{\circ}^4(K) + h_{\circ}^4(L)$, violant l'inégalité de croisement de mur de la proposition 1.3.23 correspondant à la relation $\mathbf{r}(I) + \mathbf{r}(J) = \mathbf{r}(K) + \mathbf{r}(L)$ entre des rayons de chambres adjacentes de \mathcal{B}_n^{\equiv} . Ainsi, \equiv n'est pas une congruence d'enlevoèdre.

Afin de démontrer que le phénomène observé dans l'exemple se généralise, on donne les trois lemmes suivants.

Lemme 2.2.8. *Les rayons $\mathbf{r}(I)$, $\mathbf{r}(J)$, $\mathbf{r}(K)$, $\mathbf{r}(L)$ et $\mathbf{r}(M)$ font tous partie de l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} .*

Démonstration. D'après le lemme 2.2.2, les seuls tessons non-essentiels contenant ces rayons dans leur intérieur sont :

- (i) $\Sigma(a+1, b,]a+1, b[, \emptyset)$ pour I ,
- (ii) $\Sigma(a, b-1,]a, b-1[, \emptyset)$ pour J ,
- (iii) $\Sigma(a+1, b-1,]a+1, b-1[, \emptyset)$ pour M .

Tous ces arcs forcent $\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset)$, qui est par hypothèse générateur de l'idéal $\mathcal{CJI}(\equiv)$. Par conséquent, aucun de ces tessons n'est contracté par \equiv . Le lemme 2.2.4 permet de conclure. \square

Lemme 2.2.9. *L'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} contient deux chambres distinctes C et D adjacentes le long de l'hyperplan $x_{a+1} = x_{b-1}$ telles que $\mathbf{r}(I) \in C$, $\mathbf{r}(J) \in D$ et $\{\mathbf{r}(K), \mathbf{r}(L), \mathbf{r}(M)\} \subseteq C \cap D$.*

Démonstration. Observons tout d'abord que deux sous-ensembles propres X et Y de $[n]$ définissent deux rayons $\mathbf{r}(X)$ et $\mathbf{r}(Y)$ séparés exactement par les hyperplans $x_a = x_b$ pour $a \in X \setminus Y$ et $b \in Y \setminus X$ et plus précisément par les tessons de la forme $\Sigma(a, b, A, B)$ pour $A \cap B \subseteq X$ et ${}^c(A \cup B) \subseteq Y$. En effet, soit y l'intersection du segment $[\mathbf{r}(X), \mathbf{r}(Y)]$ et de l'hyperplan $x_a = x_b$. On a :

- (i) $k \in X \cap Y \Rightarrow \mathbf{r}(X)_k < 0$ et $\mathbf{r}(Y)_k < 0 \Rightarrow y_k < 0$,
- (ii) de même, $k \in {}^c(X \cup Y) \Rightarrow y_k > 0$,
- (iii) $k \in X \Delta Y \Rightarrow y_k = 0$, puisque y est la combinaison convexe de $\mathbf{r}(X)$ et $\mathbf{r}(Y)$ annihilant y_a et y_b .

Ainsi, y est à l'intersection de la famille de tessons décrite.

Cela implique que lorsque $X \subseteq Y$ alors $\mathbf{r}(X)$ et $\mathbf{r}(Y)$ appartiennent à une même chambre de \mathcal{B}_n (plus précisément à toutes les chambres $C(\sigma)$ pour une permutation σ telle que $\sigma([X]) = X$ et $\sigma([Y]) = Y$). Puisque $M \subseteq I \subseteq K$, $M \subseteq J \subseteq K$, $I \subseteq L$ et $J \subseteq L$, les seuls rayons séparés par un hyperplan sont :

- (i) $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$, séparés par l'hyperplan $x_{a+1} = x_{b-1}$ et plus précisément par le tesson $\Sigma(a+1, b-1,]a+1, b-1[, \emptyset)$ qui est préservé par \equiv ,
- (ii) $\mathbf{r}(K)$ et $\mathbf{r}(L)$, séparés par les hyperplans $x_c = x_d$ pour $c \leq a < b \leq d$ et par les tessons $\Sigma(c, d,]c, d[, \emptyset)$, qui sont forcés par $\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset)$, générateur de $\mathcal{CJI}(\equiv)$. Ainsi, $\mathbf{r}(K)$ et $\mathbf{r}(L)$ appartiennent à la même chambre de l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} .

Ce qui permet de conclure. On fournit une démonstration alternative plus formelle en construisant deux chemins explicites de permutations liant chacune des chambres de l'éventail de tresses appartenant aux deux mêmes chambres adjacentes de l'éventail quotient et reliant des chambres contenant les rayons appropriés. Le premier chemin que l'on construit lie les deux permutations $\sigma = [a+2, \dots, b-1, a+1, \dots, 1, b, \dots, n]$ et $\nu = [a+2, \dots, b-2, b-1, a+1, b, \dots, n, a, \dots, 1]$, en intervertissant à chaque étape deux valeurs $c \leq a$ et $d \geq b$ adjacentes. Lors de chacune de ces transpositions, l'intervalle $]c, d[$ est entièrement à gauche de la transposition et le tesson séparant les deux chambres est donc $\Sigma(c, d,]c, d[, \emptyset)$, contracté par \equiv . Les cônes $C(\sigma)$ et $C(\nu)$ appartiennent donc à une même chambre C de l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} . Cette chambre C contient les rayons $\mathbf{r}(I)$, $\mathbf{r}(K)$, $\mathbf{r}(L)$ et $\mathbf{r}(M)$, puisque les ensembles I et M (resp. K , resp. L) sont des intervalle initiaux de toutes les permutations de la suite (resp. de σ , resp. de ν). De la même manière, les rayons $\mathbf{r}(J)$, $\mathbf{r}(K)$, $\mathbf{r}(L)$ et $\mathbf{r}(M)$ appartiennent à une même chambre D de l'éventail quotient contenant les chambres de l'éventail de tresses associées à des permutations formant un chemin de $\sigma' = [a+2, \dots, b-2, a+1, b-1, a, \dots, 1, b, \dots, n]$ à $\nu' = [a+2, \dots, b-2, a+1, b-1, b, \dots, n, a, \dots, 1]$.

Il suffit enfin de remarquer que le tessou qui sépare les deux chambres $C(\sigma)$ et $C(\sigma')$ adjacentes dans l'éventail de tresses est $\Sigma(a+1, b-1,]a+1, b-1[, \emptyset)$, préservé par \equiv par minimalité de $\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset) \in \mathcal{CJI}(\equiv)$. \square

Lemme 2.2.10. *Rappelons que $h_o : I \mapsto n|I|(n-|I|)/2$ est la fonction de hauteur du permutaèdre classique. On a par un simple calcul :*

- (i) $\mathbf{r}(I) + \mathbf{r}(J) = \mathbf{r}(K) + \mathbf{r}(L) + \mathbf{r}(M)$,
- (ii) $h_o(I) + h_o(J) - h_o(K) - h_o(L) - h_o(M) = na(b-n) + n(1-a) \leq 0$.

Démonstration du théorème 2.2.5. En combinant les lemmes 2.2.8 à 2.2.10, on obtient que la fonction de hauteur h_o du permutaèdre viole l'inégalité de croisement de mur

$$h_o(I) + h_o(J) > h_o(K) + h_o(L) + h_o(M)$$

de la proposition 1.3.23 correspondant à la relation $\mathbf{r}(I) + \mathbf{r}(J) = \mathbf{r}(K) + \mathbf{r}(L) + \mathbf{r}(M)$ entre les rayons des chambres C et D de l'éventail quotient \mathcal{B}_n^{\equiv} . Ainsi, \equiv n'est pas une congruence d'enlevoèdre. \square

Observons qu'il est important ici d'invoquer la proposition 1.3.23, version non-simpliciale de la proposition 1.3.21, car on ne sait a priori pas si \mathcal{B}_n^{\equiv} est simplicial.

2.2.3 Les permusylvèdres sont fortement enlevoèdres

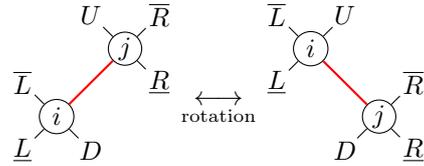
Pour conclure, on montre que les congruences permusylvestres sont des congruences d'enlevoèdre en un sens plus fort. Ceci signifie que l'on obtient un polytope réalisant l'éventail permusylvestre en supprimant des inégalités dans la description par ses facettes de n'importe quel polytope réalisant l'éventail de tresses et pas seulement du permutaèdre.

Proposition 2.2.11. *Soit \mathbf{R} et \mathbf{S} deux familles de rayons définissant deux chambres adjacentes d'un éventail permusylvestre, avec $\mathbf{R} \setminus \mathbf{S} = \{\mathbf{r}(I)\}$ et $\mathbf{S} \setminus \mathbf{R} = \{\mathbf{r}(J)\}$. Alors les rayons $\mathbf{r}(I \cap J)$ et $\mathbf{r}(I \cup J)$ sont aussi des rayons du même éventail permusylvestre et font partie de l'intersection $\mathbf{R} \cap \mathbf{S}$. Ainsi, toutes les inégalités de croisement de mur de l'éventail δ -permusylvestre sont de la forme :*

$$h(I) + h(J) > h(I \cap J) + h(I \cup J),$$

avec la convention habituelle $h(\emptyset) = h([n]) = 0$.

Démonstration. Soient T et S les deux δ -permutarbres dont les chambres $C(T)$ et $C(S)$ sont respectivement engendrées par les rayons de \mathbf{R} et de \mathbf{S} . Soit $i \rightarrow j$ l'arête de T dont la rotation donne le permutarbre S . Quitte à échanger I et J et \mathbf{R} et \mathbf{S} , on peut supposer que $i < j$. Notons $U, D, \underline{L}, \bar{L}, \underline{R}$ et \bar{R} les sous-arbres de T et S illustrés sur la figure ci-contre. Selon les valeurs de δ_i et δ_j , on peut avoir à considérer que $\underline{L}, \bar{L}, \underline{R}$ ou \bar{R} sont vides. Rappelons que les rayons du cône $C(T)$ sont de la forme $|I|1_J - |J|1_I$ pour toute $I \sqcup J$ coupe de T . Comme la seule coupe qui diffère entre T et S est celle correspondant à l'arête $i-j$ par la proposition 2.1.7, on a



$$I = \{i\} \cup D \cup \underline{L} \cup \bar{L} \quad \text{et} \quad J = \{j\} \cup D \cup \underline{R} \cup \bar{R},$$

et donc

$$I \cap J = D \quad \text{et} \quad I \cup J = \{i, j\} \cup D \cup \underline{L} \cup \bar{L} \cup \underline{R} \cup \bar{R} = [n] \setminus U.$$

Cependant, $D \sqcup ([n] \setminus D)$ et $([n] \setminus U) \sqcup U$ sont des coupes des δ -permutarbres T et S , donc les rayons $\mathbf{r}(I \cap J)$ et $\mathbf{r}(I \cup J)$ sont des rayons de l'éventail δ -permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$ et appartiennent à $\mathbf{R} \cap \mathbf{S}$. On a alors que l'unique relation (à dilatation près) parmi les rayons de $\mathbf{R} \cup \mathbf{S}$ est $\mathbf{r}(I) + \mathbf{r}(J) = \mathbf{r}(I \cap J) + \mathbf{r}(I \cup J)$ et on a par conséquent l'inégalité de croisement de mur annoncée. \square

Corollaire 2.2.12. *Pour toute fonction sous-modulaire stricte $h : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ et toute décoration $\delta \in \{\oplus, \otimes, \otimes, \otimes\}^n$, l'éventail δ -permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$ est l'éventail normal du polytope :*

$$\left\{ x \in \mathbb{H} \mid \forall I \in \mathcal{I}_\delta, \sum_{i \in I} x_i \leq h(I) \right\},$$

où \mathcal{I}_δ , caractérisé par le corollaire 2.3.1, contient tous les ensembles d'indices correspondant à des rayons de l'éventail δ -permusylvestre.

En d'autres termes, on obtient un polytope réalisant l'éventail δ -permusylvestre en supprimant des inégalités de la description par ses facettes de n'importe quel polytope réalisant l'éventail de tresses.

Soulignons que contrairement à la section précédente, on ne donne pas de caractérisation de l'ensemble des congruences vérifiant notre propriété pour un permutoèdre déformé. On constate même expérimentalement que l'on n'obtient pas seulement les congruences permusylvestres pour certaines réalisations de l'éventail de tresses. Par exemple pour le **permutoèdre penché** défini comme :

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \emptyset \subsetneq I \subsetneq [n], \sum_{i \in I} x_i \geq 3^{|I|} \right\},$$

on trouve respectivement 4 et 48 congruences d'enlevoèdres en plus des congruences permusylvestres, pour $n = 4$ et 5 . Ces données expérimentales permettent d'énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 2.2.13. *Les congruences d'enlevoèdre associées au permutoèdre penché sont les congruences \equiv telles que l'idéal supérieur $\mathcal{CJI}(\equiv)$ de l'ordre de forçage \mathfrak{F}_n est engendré par des arcs de la forme $(a-1, a+1, \emptyset, \{a\})$ ou de la forme $(a, b,]a, b[, \emptyset)$ avec $b-a \geq 2$.*

2.3 Cône de type des éventails permusylvestres

Dans cette section, on fixe une fois pour toute une décoration $\delta \in \{\oplus, \otimes, \otimes, \otimes\}^n$. On caractérise d'abord les rayons de \mathcal{I}_δ , puis les paires de rayons définissant une inégalité de croisement de mur, ensemble que l'on raffine pour éliminer les redondances et décrire par ses facettes le cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv \delta})$ de l'éventail permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$. On conclut avec une description explicite d'une partie des cônes de types des éventails permusylvestres.

2.3.1 Rayons des éventails permusylvestres

La spécialisation du lemme 2.2.4 aux congruences permusylvestres donne la caractérisation combinatoire suivante :

Corollaire 2.3.1. *Soient $\delta \in \{\oplus, \otimes, \otimes, \otimes\}^n$ une décoration et I un sous-ensemble propre de $[n]$. Le rayon $\mathbf{r}(I)$ est un rayon de l'éventail permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$ si et seulement si pour tous $i < j < k$, si $i, k \in I$ alors $j \notin \delta^- \setminus I$, et si $i, k \notin I$ alors $j \notin \delta^+ \cap I$.*

Graphiquement, cela revient à imposer que les arcs de Σ_I ne passent pas au dessus (resp. en dessous) de décorations de δ^+ (resp. δ^-).

Démonstration. Vu le lemme 2.2.4, il s'agit juste de caractériser les rayons $\mathbf{r}(I)$ pour lesquels l'un des tessons de Σ_I est forcé par un tesson de Σ_δ .

Il suffit donc de remarquer que $i, k \in I$ et $j \in \delta^- \setminus I$ si et seulement si $\Sigma(a, b, \emptyset,]a, b[) \in \Sigma_I \setminus \Sigma_\delta$ avec $a = \max([i, j[\cap I)$ et $b = \min(]j, k] \cap I)$; et que de la même manière $i, j \notin I$ et $k \in \delta^+ \cap I$ si et seulement si $\Sigma(a, b,]a, b[, \emptyset) \in \Sigma_I \setminus \Sigma_\delta$ avec $a = \max([i, j[\setminus I)$ et $b = \min(]j, k] \setminus I)$. \square

Exemple 2.3.2. Reprenons les décorations des figures 2.2 et 2.4. Les rayons de l'éventail associé à la décoration $\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}$ sont les $\mathbf{r}(I)$ pour $I = 1, 2, 3, 4, 12, 13, 23, 34, 123, 134, 234$ et ceux de l'éventail associé à la décoration $\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}$ sont les $\mathbf{r}(I)$ pour $I = 1, 4, 12, 34, 123, 124, 234$.

Exemple 2.3.3. En spécialisant le corollaire 2.3.1 aux décorations classiques, on obtient :

- (i) pour $\delta = \textcircled{\circ}^n$, les rayons de l'éventail de tresses sont tous les sous-ensembles propres de $[n]$,
- (ii) pour $\delta = \textcircled{\otimes}^n$, les rayons de l'éventail sylvestre sont les sous-ensembles stricts de $[n]$ qui sont des intervalles,
- (iii) pour $\delta = \textcircled{\otimes}^n$, les rayons de $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$ sont les intervalles initiaux et finaux de $[n]$.

Corollaire 2.3.4. Soit $\delta \in \{\textcircled{\circ}, \textcircled{\otimes}, \textcircled{\oplus}, \textcircled{\otimes}\}^n$ une décoration. Le nombre $\rho(\delta)$ de rayons de l'éventail δ -permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$ est donné par :

$$\rho(\delta) = n - 1 + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \forall i < k < j, \delta_k \neq \textcircled{\otimes}}} 2^{|\{i < k < j \mid \delta_k = \textcircled{\circ}\}|}.$$

Démonstration. Afin de construire n'importe quel rayon $\mathbf{r}(I)$ de $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$, on procède ainsi :

- (i) On choisit i maximal (resp. j minimal) tel que $[1, i] \subseteq I$ ou $[1, i] \cap I = \emptyset$, selon si $1 \in I$ (resp. $[j, n] \subseteq I$ ou $[j, n] \cap I = \emptyset$, selon si $n \in I$).
- (ii) Pour tous $i < k < j$, puisque $|\{i, i+1\} \cap I| = |\{j-1, j\} \cap I| = 1$ et vu le corollaire 2.3.1, on a $k \in I$ lorsque $k \in \delta^-$ et $k \notin I$ lorsque $k \in \delta^+$. Ainsi, on a une contradiction lorsque $\delta_k = \textcircled{\otimes}$ et deux choix lorsque $\delta_k = \textcircled{\circ}$, d'où la condition de sommation et la puissance de 2.
- (iii) Il reste juste à identifier si 1 et n sont dans I . Observons que si $i+1 < j$, alors l'appartenance de i et j à I est déterminée par l'appartenance de $i+1$ et $j-1$ à I , déjà comptabilisée au point précédent.
- (iv) Enfin, si $i+1 = j$, deux choix de rayon sont possibles : $[1, i]$ et $[j, n]$. La somme élaborée n'en compte qu'un seul pour $i+1 = j$, d'où le terme correctif $n-1$. \square

Exemple 2.3.5. Reprenons les décorations des figures 2.2 et 2.4. On obtient $\rho(\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}\textcircled{\circ}) = 11$ et $\rho(\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}) = 7$.

Exemple 2.3.6. Parcourant à nouveau une partie de l'exemple 2.1.3, on retrouve les suites classiques suivantes :

- (i) lorsque $\delta = \textcircled{\circ}^n$, l'éventail de tresses $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$ a $2^n - 2$ rayons (suite A000918 de [OEIS]),
- (ii) lorsque $\delta = \textcircled{\otimes}^n$, l'éventail sylvestre $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$ a $\binom{n+1}{2} - 1$ rayons (suite A000096 de [OEIS]),
- (iii) lorsque $\delta = \textcircled{\otimes}^n$, l'éventail cubique $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$ a $2n - 2$ rayons.

Un cas particulier du corollaire 2.3.4 nous sera utile plus tard :

Corollaire 2.3.7. Si $\delta \in \{\textcircled{\otimes}, \textcircled{\oplus}, \textcircled{\otimes}\}^n$, alors $\rho(\delta) = n - 1 + |\{1 \leq i < j \leq n \mid \forall i < k < j, \delta_k \neq \textcircled{\otimes}\}|$.

2.3.2 Rayons échangeables des éventails permusylvestres

Afin d'invoquer la proposition 1.3.21, il nous faut identifier les paires de chambres $C = \mathbf{R}\mathbf{R}^+$ et $C' = \mathbf{S}\mathbf{R}^+$ de $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$ telles qu'il existe deux rayons r et s vérifiant $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{S}$ et $s \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{R}$.

La proposition 2.2.11 implique directement que pour deux tels rayons, la relation linéaire entre les rayons de $\mathbf{R} \cup \mathbf{S}$ ne dépend pas de C et C' , mais seulement de r et s . En d'autres termes, si deux paires de chambres différentes opposent r et s , alors elles induisent la même inégalité de croisement de mur. Cette observation va considérablement simplifier la suite et est appelée **propriété d'unique relation d'échange**³ dans [PPPP19]. Deux tels rayons sont dits **échangeables**. Ainsi, pour décrire les inégalités de croisement de murs dans les éventails permusylvestres, il nous suffit d'identifier les paires de rayons échangeables plutôt que l'ensemble des paires de chambres adjacentes le long d'un mur.

Proposition 2.3.8. *Soient I et J deux éléments de \mathcal{I}_δ . Les rayons $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$ sont échangeables dans $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$ si et seulement si, à échange près de I et J :*

- (i) $i := \max(I \setminus J) < \min(J \setminus I) =: j$,
- (ii) $I \setminus J = \{i\}$ ou $\delta_i \neq \mathbf{0}$ et $J \setminus I = \{j\}$ ou $\delta_j \neq \mathbf{0}$,
- (iii) $]i, j[\cap \delta^- \subseteq I \cap J$ et $]i, j[\cap \delta^+ \cap I \cap J = \emptyset$.

Démonstration. Montrons d'abord que les conditions de la proposition sont nécessaires à ce que les rayons $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$ soient des rayons échangeables de $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$. En reprenant les notations de la démonstration de la proposition 2.2.11, rappelons que $I = \{i\} \cup D \cup \underline{L} \cup \overline{L}$ et $J = \{j\} \cup D \cup \underline{R} \cup \overline{R}$. Puisque $\underline{L} \cup \overline{L} < i < j < \underline{R} \cup \overline{R}$, on a bien que $i = \max(I \setminus J)$ et $j = \min(J \setminus I)$, condition (i). De plus, $I \setminus J = \{i\} \cup \underline{L} \cup \overline{L}$ est réduit à $\{i\}$ lorsque $\delta_i = \mathbf{0}$, et $J \setminus I = \{j\} \cup \underline{R} \cup \overline{R}$ est réduit à $\{j\}$ lorsque $\delta_j = \mathbf{0}$, ce qui donne la condition (ii). Enfin, s'il existe $i < k < j$ tel que $k \in \delta^- \setminus (I \cap J)$ (resp. $k \in \delta^+ \cap (I \cap J)$), alors l'arête $i - j$ croise la demi-droite rouge en dessous de k (resp. au dessus de k), ce qui est absurde, d'où la condition (iii).

Réciproquement, soient I et J respectant les conditions du corollaire 2.3.1 et de la proposition 2.3.8. Construisons deux δ -permutarbres T et S , liés par la rotation de l'arête $i - j$ dans le treillis δ -permusylvestre, dont la coupe est $I \sqcup {}^c I$ dans T et $J \sqcup {}^c J$ dans S . Pour ce faire, choisissons un permutarbre arbitraire D (resp. U , resp. L , resp. R) pour la restriction de δ à $I \cap J$ (resp. ${}^c(I \cap J)$, resp. $I \setminus J \setminus \{i\}$, resp. $J \setminus I \setminus \{j\}$). Observons que vu le point (ii) de la proposition 2.3.8, si $\delta_i = \mathbf{0}$ (resp. $\delta_j = \mathbf{0}$), alors L (resp. R) est l'arbre vide et on l'omet dans la suite.

On construit l'arbre T sur $[n]$ à partir d'une arête $i \rightarrow j$ en plaçant :

- D comme sous-arbre descendant (resp. descendant droit) de i si $i \notin \delta^-$ (resp. $i \in \delta^-$),
- U comme sous-arbre ascendant (resp. ascendant gauche) de j si $j \notin \delta^+$ (resp. $j \in \delta^+$),
- L comme sous-arbre descendant (resp. ascendant) gauche de i si $i \in \delta^-$ (resp. $i \notin \delta^-$),
- R comme sous-arbre descendant (resp. ascendant) droit de j si $j \in \delta^-$ (resp. $j \notin \delta^-$).

Cette construction est illustrée à la première colonne de la figure 2.6. Dans cette figure, observons que le sous-arbre R est placé à la même hauteur que le nœud j , puisqu'il peut être un sous-arbre ascendant ou descendant de j selon la décoration δ_j . De plus, cette construction est unique. Par exemple, la connexion de D à l'arête $i - j$ se fait entre la feuille la plus à gauche, la plus haute de D et la feuille inférieure (resp. inférieure droite) de i si $i \notin \delta^-$ (resp. si $i \in \delta^-$).

Montrons que T est bien un δ -permutarbre. Il s'agit bien d'un arbre et il suffit donc de montrer qu'aucune arête de T ne croise une demi-droite rouge en dessous d'un sommet $i \in \delta^-$, ou au dessus d'un sommet $i \in \delta^+$. Comme tous les sommets de L (resp. R) sont inférieurs à i (resp. supérieurs à j) par (i) et puisqu'il n'y a pas de demi-droite rouge au dessus (resp. en

3. *unique exchange relation property* dans le texte.

dessous) des sommets de D (resp. U) entre i et j par (iii), l'arête $i \rightarrow j$ ne croise aucune demi-droite rouge. Considérons à présent une arête $l-l'$ dans $L \cup \{i\}$ avec $l < l'$. Elle ne croise aucune demi-droite rouge provenant d'un sommet $r \in R \cup \{j\}$ car $l' \leq i < j < r$, ni provenant d'un sommet $u \in U$ car on aurait alors $l < u < l'$ avec $l, l' \in I$ et $u \in \delta^- \setminus I$, ce qui contredit le corollaire 2.3.1, ni provenant d'un sommet $d \in D$ car on aurait alors $l < d < l'$ avec $l, l' \notin J$ et $d \in \delta^+ \cap J$, ce qui contredit le corollaire 2.3.1. De la même manière, aucune arête de $D \cup \{i\}$, de $U \cup \{j\}$ ou de $R \cup \{j\}$ ne croise de demi-droite rouge. Ainsi, T est un δ -permutarbre.

Enfin, notons S le δ -permutarbre issu de la rotation de l'arête $i \rightarrow j$ dans T . Observons que l'arête $i \rightarrow j$ engendre la coupe $I \sqcup^c I$ dans T et que l'arête $i \leftarrow j$ engendre la coupe $J \sqcup^c J$ dans S . La proposition 2.1.7 nous permet alors de conclure que les rayons $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$ sont échangeables dans les chambres adjacentes $C(T)$ et $C(S)$, de l'éventail δ -permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$. \square

Exemple 2.3.9. Reprenons les décorations des figures 2.2 et 2.4. Les paires de rayons échangeables de $\mathcal{B}_n^{\equiv \emptyset \emptyset \emptyset}$ sont celles correspondant aux paires d'ensembles : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 34\}$, $\{12, 13\}$, $\{12, 134\}$, $\{12, 23\}$, $\{12, 234\}$, $\{123, 134\}$, $\{123, 234\}$, $\{123, 4\}$, $\{13, 23\}$, $\{13, 34\}$, $\{13, 4\}$, $\{134, 234\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 34\}$, $\{23, 34\}$, $\{23, 4\}$, $\{3, 4\}$, tandis que celles de $\mathcal{B}_n^{\equiv \emptyset \emptyset \emptyset}$ sont celles correspondant aux paires d'ensembles : $\{1, 234\}$, $\{12, 34\}$, $\{12, 4\}$, $\{123, 124\}$, $\{123, 4\}$, $\{124, 34\}$

Exemple 2.3.10. Parcourant à nouveau une partie de l'exemple 2.1.3, on retrouve que les paires de rayons échangeables de $\mathcal{B}_n^{\equiv s}$ sont celles correspondant aux paires $\{I, J\}$ telles que :

- (i) pour $\delta = \mathbb{O}^n$, $I = K \cup \{i\}$ et $J = K \cup \{j\}$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $K \subseteq [n] \setminus \{i, j\}$,
- (ii) pour $\delta = \mathbb{O}^n$, $I = [h, j[$ et $J =]i, k]$ pour $1 \leq h \leq i < j \leq k \leq n$ (ce qui correspond à l'intersection des diagonales $(h-1, j)$ et $(i, k+1)$ d'un $(n+2)$ -gone),
- (iii) pour $\delta = \mathbb{O}^n$, $I = [1, i]$ et $J =]i, n]$ pour $1 \leq i < n$.

Corollaire 2.3.11. *Le nombre $\chi(\delta)$ de paires de rayons échangeables dans l'éventail δ -permusylvestre est :*

$$\chi(\delta) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \forall i < k < j, \delta_k \neq \mathbb{O}}} \Omega(\delta_1 \dots \delta_{i-1})^{\delta_i \neq \mathbb{O}} \cdot 2^{|\{i < k < j \mid \delta_k = \mathbb{O}\}|} \cdot \Omega(\delta_n \dots \delta_{j+1})^{\delta_j \neq \mathbb{O}},$$

où Ω est défini récursivement par $\Omega(\varepsilon) = 0$ et :

$$\Omega(\delta_1 \dots \delta_k) = \begin{cases} 2 \cdot \Omega(\delta_1 \dots \delta_{k-1}) & \text{si } \delta_k = \mathbb{O}, \\ 1 + \Omega(\delta_1 \dots \delta_{k-1}) & \text{si } \delta_k \in \{\mathbb{O}, \mathbb{O}\}, \\ 2 & \text{si } \delta_k = \mathbb{O}. \end{cases}$$

Démonstration. Une paire de rayons échangeables dans l'éventail δ -permusylvestre correspond à une paire d'ensembles d'indices I et J vérifiant les conditions du corollaire 2.3.1 et de la proposition 2.3.8. On construit une telle paire de la manière suivante :

- On choisit d'abord $1 \leq i < j \leq n$, qui vérifieront $i = \max(I \setminus J)$ et $j = \min(J \setminus I)$ pour vérifier la proposition 2.3.8 (i).
- Pour tous $i < k < j$, il est nécessaire d'avoir $k \in I \cap J$ si $k \in \delta^-$, et $k \in {}^c(I \cup J)$ si $k \in \delta^+$ (pour vérifier la proposition 2.1.13 (iii)). C'est impossible dès lors que $\delta_k = \mathbb{O}$ (d'où la condition sur la somme) et laisse deux choix lorsque $\delta_k = \mathbb{O}$ (d'où la puissance de 2).
- Pour tous $k < i$, il est nécessaire d'avoir $k \in I$ si $\delta_i \in \delta^+$, et $k \notin J$ si $\delta_i \in \delta^-$ pour vérifier le corollaire 2.3.1. De plus, si $k \in I \setminus J$ alors $\delta_i \neq \mathbb{O}$ pour vérifier la proposition 2.3.8 (ii). Ainsi, on a :
 - $k \in I \setminus J$ si $\delta_i = \mathbb{O}$,
 - $k \in I \cap J$ ou $k \in I \setminus J$ si $\delta_i = \mathbb{O}$,

- $k \in {}^c(I \cup J)$ ou $k \in I \setminus J$ si $\delta_i = \textcircled{\otimes}$,
 - $k \in I \cap J$ ou $k \in {}^c(I \cap J)$ si $\delta_i = \textcircled{\ominus}$,
- et la fonction Ω encode les choix possibles quant à l'appartenance des éléments de $[1, i[$ à I et J , dans le cas où $\delta_i \neq \textcircled{\otimes}$.
- Pour $j < k$, l'argument est symétrique. □

Exemple 2.3.12. Reprenons les décorations des figures 2.2 et 2.4. On obtient $\chi(\textcircled{\ominus}\textcircled{\ominus}\textcircled{\otimes}\textcircled{\ominus}) = 19$ et $\chi(\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}\textcircled{\otimes}) = 6$.

Exemple 2.3.13. Parcourant à nouveau une partie de l'exemple 2.1.3, on retrouve les suites classiques suivantes :

- (i) lorsque $\delta = \textcircled{\ominus}^n$, l'éventail de tresses a $2^{n-2} \binom{n}{2}$ paires de rayons échangeables (suite A001788 de [OEIS]),
- (ii) lorsque $\delta = \textcircled{\otimes}^n$, l'éventail sylvestre a $\binom{n+2}{4}$ paires de rayons échangeables, ce qui revient à compter les quadruplets de sommets d'un $(n+2)$ -gone (suite A000332 de [OEIS]),
- (iii) lorsque $\delta = \textcircled{\otimes}^n$, l'éventail $\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}}$ a $n-1$ paires de rayons échangeables.

2.3.3 Facettes des cônes de type permusylvestres

Vu la propriété d'échange unique des éventails permusylvestres, chaque paire de rayons échangeables détermine une inégalité de croisement de mur stricte et le cône de type d'un éventail permusylvestre $\mathbb{TC}(\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}\delta})$ est le cône défini par l'intersection des demi-espaces associés à ces inégalités. Cependant, chacune de ces inégalités ne définit pas une facette du cône de type fermé. La caractérisation des paires de rayons échangeables définissant une facette du cône de type est très proche de celle des rayons échangeables, avec une unique modification du point (ii).

Proposition 2.3.14. Soient I et J deux éléments de \mathcal{I}_δ . Les rayons $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$ induisent une inégalité de croisement de mur stricte définissant une facette de $\mathbb{TC}(\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}\delta})$ si et seulement si, à échange près de I et J :

- (i) $i := \max(I \setminus J) < \min(J \setminus I) =: j$,
- (ii) $I \setminus J = \{i\}$ ou $\delta_i = \textcircled{\otimes}$ et $J \setminus I = \{j\}$ ou $\delta_j = \textcircled{\otimes}$,
- (iii) $]i, j[\cap \delta^- \subseteq I \cap J$ et $]i, j[\cap \delta^+ \cap I \cap J = \emptyset$.

Démonstration. Considérons deux rayons échangeables $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$ tels que I et J vérifient les conditions du corollaire 2.3.1 et de la proposition 2.3.8. Montrons qu'ils vérifient la condition (ii) de la proposition 2.3.14 si et seulement s'ils définissent une inégalité de croisement de mur qui décrit une facette du cône de type $\mathbb{TC}(\mathcal{B}_n^{\textcircled{\otimes}\delta})$.

Supposons que I et J ne vérifient pas la proposition 2.3.14 (ii). Comme ils vérifient la proposition 2.3.8 (ii), on a $|I \setminus J| > 1$ et $\delta_i \in \{\textcircled{\otimes}, \textcircled{\otimes}\}$, ou $|J \setminus I| > 1$ et $\delta_j \in \{\textcircled{\otimes}, \textcircled{\otimes}\}$. Sans perte de généralité, on se place dans le premier cas. On pose à nouveau :

$$D := I \cap J, \quad i := \max(I \setminus J), \quad j := \min(I \setminus J), \\ U := {}^c(I \cup J), \quad L := I \setminus J \setminus \{i\}, \quad R := J \setminus I \setminus \{j\}.$$

Pour chacun des sous-ensembles D, U, L et R , on choisit un permutarbre arbitraire et on construit les δ -permutarbres T et S de la même manière que dans la démonstration de la proposition 2.3.8, représentés dans la première colonne de la figure 2.6. Rappelons que la rotation de l'arête $i \rightarrow j$

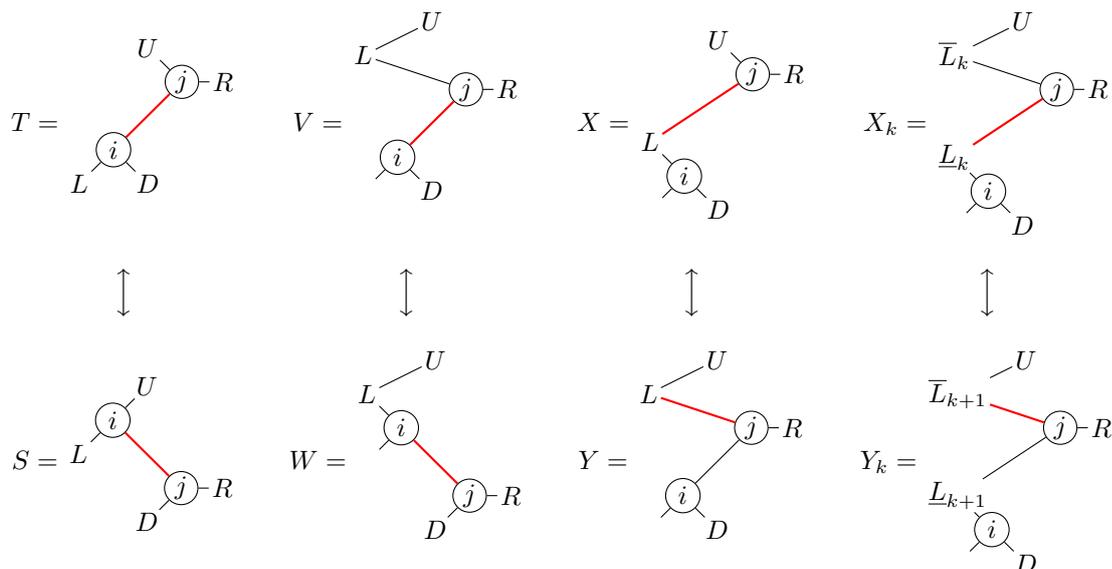


FIGURE 2.6 – Permutarbres de la démonstration de la proposition 2.3.14

dans T résulte en le permutarbre S et que les deux chambres associées dans $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$ échangent les rayons $r(I)$ et $r(J)$. On connaît l'inégalité de croisement de mur associée à cette rotation :

$$h(I) + h(J) > h(I \cap J) + h(I \cup J). \quad (2.1)$$

Considérons les δ -permutarbres V et W de la deuxième colonne de la figure 2.6. Dans l'arbre V (resp. W), la feuille inférieure la plus à droite de L est connectée à j (resp. i) et la feuille supérieure la plus à droite de L est connectée à la feuille de U à laquelle est connecté j dans T . Ceux-ci sont bien des permutarbres car $\delta_i = \oplus$ et sont liés par la rotation de l'arête $i - j$. Cette rotation donne l'inégalité de croisement de mur :

$$h(I') + h(J) > h(I' \cap J) + h(I' \cup J), \quad (2.2)$$

où $I' := \{i\} \cup D = \{i\} \cup (I \cap J)$ (On aurait pu aboutir à la même inégalité en s'assurant que I' et J vérifient le corollaire 2.3.1 et la proposition 2.3.8).

On introduit à présent les δ -permutarbres X et Y de la troisième colonne de la figure 2.6. L'arbre Y est bien un δ -permutarbre, puisqu'il est égal à V , et X est construit de manière duale, donc un raisonnement similaire montre que X est un δ -permutarbre. Considérons la rotation de l'arête joignant L à j dans X . Si i et j sont connectés au même sommet de L , cette rotation résulte en Y . Sinon, cette rotation déplace une partie de L entre j et U et laisse la partie restante de L entre i et j . En effectuant de manière répétée la rotation de l'arête liant la partie restante de L à j , on aboutit au δ -permutarbre Y . Plus formellement, on peut considérer la suite de rotations entre les δ -permutarbres X_k et Y_k représentée en quatrième colonne de la figure 2.6, où à chaque étape on pose $X_{k+1} = Y_k$. Dans ces δ -permutarbres, on a $\underline{L}_k \sqcup \overline{L}_k = L$. De plus, \underline{L}_{k+1} est obtenu à partir de \underline{L}_k en supprimant le nœud connecté à j dans \overline{X}_k et tous ses ancêtres et descendants gauches. Ainsi, en commençant avec $X_0 = X$, on aboutit à $Y_p = Y$ pour un entier p fini. En sommant toutes les inégalités de croisement de mur correspondant aux rotations invoquées entre les X_k et les Y_k , on obtient l'inégalité :

$$h(I) + h(J') > h(I \cap J') + h(I \cup J'), \quad (2.3)$$

où $J' := \{i\} \cup J$.

Enfin, observons que $I' = I \cap J'$ et $J' = I' \cup J$. On en déduit que l'inégalité de croisement de mur (2.1) s'exprime comme la somme des inégalités (2.2) et (2.3). Ainsi, les rayons $\mathbf{r}(I)$ et $\mathbf{r}(J)$, bien qu'échangeables, ne définissent pas une facette du cône de type $\overline{\mathbb{T}\mathbb{C}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\delta})$.

Réciproquement, supposons que I et J vérifient les conditions de la proposition 2.3.14. Pour montrer que l'inégalité de croisement de mur associée à la paire $\{I, J\}$ définit une facette du cône de type $\overline{\mathbb{T}\mathbb{C}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\delta})$, on exhibe un point \mathbf{p} qui vérifient toutes les inégalités de croisement de mur associées à des paires $\{K, L\}$ vérifiant les conditions de la proposition 2.3.14, sauf celle associée à la paire $\{I, J\}$.

Pour ce faire, on introduit quelques notations. Rappelons que l'on note $\mathcal{P}(A) := \{X \subseteq A\}$ l'ensemble des parties de A . On définit $\nabla(A, B) := \mathcal{P}(A \cup B) \setminus (\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B))$ pour tous ensembles A et B . Pour toute paire $\{A, B\}$ telle que $A \setminus B \neq \emptyset \neq B \setminus A$, on a :

- $A \cup B$ est l'élément maximal de $\nabla(A, B)$ pour l'inclusion,
 - A et B sont les sous-ensembles maximaux de $A \cup B$ pour l'inclusion à ne pas être dans $\nabla(A, B)$,
 - les paires dans $\nabla(A, B)$ sont exactement les paires $\{a, b\}$ telles que $a \in A \setminus B$ et $b \in B \setminus A$.
- Cela implique que pour deux paires d'ensembles $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$ vérifiant $A \setminus B \neq \emptyset \neq B \setminus A$ et $C \setminus D \neq \emptyset \neq D \setminus C$,
- si $\nabla(A, B) = \nabla(C, D)$ alors $\{A, B\} = \{C, D\}$,
 - si $\nabla(A, B) \subseteq \nabla(C, D)$ alors $A \cup B \subseteq C \cup D$, et à échange près de C et D , $A \setminus B \subseteq C \setminus D$ et $B \setminus A \subseteq D \setminus C$.

On note $(\mathbf{g}_M)_{M \in \mathcal{I}_\delta}$ la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_\delta}$ indexée par l'ensemble \mathcal{I}_δ des rayons de l'éventail $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$. Posons $\mathbf{n}(I, J) := \mathbf{g}_I + \mathbf{g}_J - \mathbf{g}_{I \cap J} - \mathbf{g}_{I \cup J}$ le vecteur normal de l'inégalité de croisement de mur associée à la paire $\{I, J\}$. Notre point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_\delta}$ doit vérifier $\langle \mathbf{p} | \mathbf{n}(I, J) \rangle < 0$ et $\langle \mathbf{p} | \mathbf{n}(K, L) \rangle \geq 0$ pour toute paire $\{K, L\}$ distincte de $\{I, J\}$ et vérifiant les conditions de la proposition 2.3.14. On définit les trois vecteurs suivants :

$$\mathbf{x} := - \sum_{M \in \mathcal{I}_\delta} |\mathcal{P}(M) \setminus \nabla(I, J)| \mathbf{g}_M, \quad \mathbf{y} := - \sum_{M \in \mathcal{I}_\delta} |\mathcal{P}(M) \cap \nabla(I, J)| \mathbf{g}_M, \quad \mathbf{z} := - \mathbf{n}(I, J),$$

et on considère le point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_\delta}$ défini par :

$$\mathbf{p} := \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} + \mathbf{z},$$

où λ et μ désignent des scalaires arbitraires tels que $0 < \mu |\nabla(I, J)| < \langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle$ et $\lambda > |\langle \mathbf{z} | \mathbf{n}(K, L) \rangle|$ pour toute paire d'ensembles d'indices $\{K, L\}$ vérifiant les conditions de la proposition 2.3.14. On montre que ce point vérifie les inégalités souhaitées.

Soit $\{K, L\}$ une paire d'ensembles d'indices vérifiant les conditions de la proposition 2.3.14. Observons que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \mathbf{n}(K, L) \rangle &= \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_L - \mathbf{x}_{K \cap L} - \mathbf{x}_{K \cup L} \\ &= -|\mathcal{P}(K) \setminus \nabla(I, J)| - |\mathcal{P}(L) \setminus \nabla(I, J)| \\ &\quad + |\mathcal{P}(K \cap L) \setminus \nabla(I, J)| + |\mathcal{P}(K \cup L) \setminus \nabla(I, J)| \\ &= |\nabla(K, L) \setminus \nabla(I, J)|, \end{aligned}$$

par inclusion-exclusion. De la même manière,

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{n}(K, L) \rangle = |\nabla(K, L) \cap \nabla(I, J)|.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{z} | \mathbf{n}(K, L) \rangle &= -\langle \mathbf{n}(I, J) | \mathbf{n}(K, L) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{g}_I + \mathbf{g}_J - \mathbf{g}_{I \cap J} - \mathbf{g}_{I \cup J} | \mathbf{g}_K + \mathbf{g}_L - \mathbf{g}_{K \cap L} - \mathbf{g}_{K \cup L} \rangle\end{aligned}$$

est une somme signée de symboles de Kronecker $\mathbf{1}_{X=Y}$ où X parcourt $\{I, J, I \cap J, I \cup J\}$ et Y parcourt $\{K, L, K \cap L, K \cup L\}$.

On conclut la démonstration au moyen du lemme suivant :

Lemme 2.3.15. *Si $\nabla(K, L) \not\subseteq \nabla(I, J)$, alors $\{I, J, I \cap J, I \cup J\}$ et $\{K, L, K \cap L, K \cup L\}$ sont disjoints.*

On a alors que

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{n}(I, J) \rangle = \mu |\nabla(I, J)| - \langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle < 0$$

puisque $\mu |\nabla(I, J)| < \langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle$, tandis que

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{n}(K, L) \rangle = \lambda |\nabla(K, L) \setminus \nabla(I, J)| + \mu |\nabla(K, L) \cap \nabla(I, J)| - \langle \mathbf{z} | \mathbf{n}(K, L) \rangle \geq 0$$

pour toute autre paire $\{K, L\}$ vérifiant les conditions de la proposition 2.3.14. En effet :

- si $\nabla(K, L) \not\subseteq \nabla(I, J)$, alors $\lambda |\nabla(K, L) \setminus \nabla(I, J)| \geq \lambda$, et donc $\lambda |\nabla(K, L) \setminus \nabla(I, J)| - \langle \mathbf{z} | \mathbf{n}(K, L) \rangle > 0$ et $\mu |\nabla(K, L) \cap \nabla(I, J)| \geq 0$,
- si $\nabla(K, L) \subseteq \nabla(I, J)$, alors $\lambda |\nabla(K, L) \setminus \nabla(I, J)| = 0$ tandis que $\mu |\nabla(K, L) \cap \nabla(I, J)| > \mu$ et $\langle \mathbf{z} | \mathbf{n}(K, L) \rangle = 0$. \square

Démonstration du lemme 2.3.15. À échange près de I et J (resp. K et L), on suppose que $i := \max(I \setminus J) < \min(J \setminus I) =: j$ (resp. $k := \max(K \setminus L) < \min(L \setminus K) =: l$). Comme observé précédemment, l'inclusion $\nabla(K, L) \subseteq \nabla(I, J)$ implique les inclusions $K \setminus L \subseteq I \setminus J$ et $L \setminus K \subseteq J \setminus I$, de telle sorte que $k \leq i < j \leq l$. Il s'avère que les conditions de la proposition 2.3.14 forcent que $K \setminus L = I \setminus J$, $L \setminus K = J \setminus I$, $k = i$ et $l = j$. En effet :

- si $I \setminus J = \{i\}$, alors $K \setminus L = \{i\}$ puisque $\emptyset \subsetneq K \setminus L \subseteq I \setminus J$,
- si $\delta_i = \otimes$, alors $K \setminus L = I \setminus J = [1, i]$, puisque sinon $i \in]k, l[\cap \delta^- \cap \delta^+$.

Un argument symétrique permet d'avoir $L \setminus K = J \setminus I$. Observons à présent que :

- si $I \cap J = K \cap L$, alors $I = (I \cap J) \cup (I \setminus J) = (K \cap L) \cup (K \setminus L) = K$ et de la même manière, $J = L$,
- si $I \cup J = K \cup L$, alors $I = (I \cup J) \setminus (J \setminus I) = (K \cup L) \setminus (L \setminus K) = K$ et de la même manière, $J = L$,
- si $I = K$, alors $J = (J \setminus I) \cup (I \setminus (I \setminus J)) = (L \setminus K) \cup (K \setminus (K \setminus L)) = L$,
- de la même manière, si $J = L$ alors $I = K$.

Dans ces quatre cas, on obtient $I = K$ et $J = L$, ce qui contredit l'hypothèse $\nabla(K, L) \neq \nabla(I, J)$.

Enfin, on observe que :

- $I \notin \{L, K \cap L, K \cup L\}$ puisque $i \in I \setminus L$ et $j \in L \setminus I$,
- de la même manière, $J \notin \{K, K \cap L, K \cup L\}$,
- de la même manière, $K \notin \{J, I \cap J, I \cup J\}$,
- de la même manière, $L \notin \{I, I \cap J, I \cup J\}$,
- $I \cup J \neq K \cap L$ car $i \in I \setminus L$,
- de la même manière, $I \cap J \neq K \cup L$.

On a bien vérifié que les ensembles $\{I, J, I \cap J, I \cup J\}$ et $\{K, L, K \cap L, K \cup L\}$ sont disjoints, ce qui termine la démonstration. \square

Exemple 2.3.16. Reprenons les décorations des figures 2.2 et 2.4. Les facettes de $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\circ\circ\circ\circ})$ sont celles correspondant aux paires d'ensembles : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{12, 13\}$, $\{12, 23\}$, $\{123, 134\}$, $\{123, 234\}$, $\{13, 23\}$, $\{13, 34\}$, $\{134, 234\}$, $\{2, 3\}$, $\{23, 34\}$, $\{3, 4\}$, tandis que celles de $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\circ\circ\circ\circ})$ sont celles correspondant aux paires d'ensembles : $\{1, 234\}$, $\{12, 4\}$, $\{123, 124\}$, $\{124, 34\}$

Exemple 2.3.17. Parcourant à nouveau une partie de l'exemple 2.1.3, on retrouve que les paires de rayons définissant une facette de $\mathcal{B}_n^{\equiv\delta}$ sont :

- (i) pour $\delta = \mathbb{O}^n$ ou $\delta = \mathbb{X}^n$, toutes les paires de rayons échangeables,
- (ii) pour $\delta = \mathbb{A}^n$, les paires correspondant aux ensembles d'indice $([i, j[, [i, j])$ pour $1 \leq i < j \leq n$ (ce qui correspond aux diagonales adjacentes $(i - 1, j)$ et $(i, j + 1)$ d'un $(n + 2)$ -gone).

Remarque 2.3.18. Observons qu'en combinant la caractérisation du corollaire 2.3.1 et la condition de la proposition 2.3.14 (ii), on obtient :

- $[1, i[\subseteq I \setminus J$ lorsque $\delta_i = \mathbb{X}$,
- $[1, i[\subseteq {}^c(I \cup J)$ lorsque $\delta_i = \mathbb{A}$,
- $[1, i[\subseteq I \cap J$ lorsque $\delta_i = \mathbb{Y}$;
- $]j, n] \subseteq J \setminus I$ lorsque $\delta_j = \mathbb{X}$,
- $]j, n] \subseteq {}^c(I \cup J)$ lorsque $\delta_j = \mathbb{A}$,
- $]j, n] \subseteq I \cap J$ lorsque $\delta_j = \mathbb{Y}$.

En particulier, $I \setminus J$ vaut soit $\{i\}$, soit $[1, i]$ et $J \setminus I$ vaut soit $\{j\}$, soit $[j, n]$. Cette propriété est nécessaire mais pas suffisante, puisque $[1, 2]$ et $[3]$ ne définissent pas une facette de $\mathcal{B}_n^{\equiv\circ^3}$.

On peut alors adapter la démonstration du corollaire 2.3.11 pour obtenir un nouveau résultat de comptage, conséquence de la proposition 2.3.14 :

Corollaire 2.3.19. *Le nombre $\phi(\delta)$ de facettes du cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\delta})$ de l'éventail δ -permut-sylvestre est :*

$$\phi(\delta) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \forall i < k < j, \delta_k \neq \mathbb{X}}} \Omega(\delta_1 \dots \delta_{i-1})^{\delta_i = \mathbb{O}} \cdot 2^{|\{i < k < j \mid \delta_k = \mathbb{O}\}|} \cdot \Omega(\delta_n \dots \delta_{j+1})^{\delta_j = \mathbb{O}},$$

où Ω est défini récursivement comme au corollaire 2.3.11 par $\Omega(\varepsilon) = 0$ et :

$$\Omega(\delta_1 \dots \delta_k) = \begin{cases} 2 \cdot \Omega(\delta_1 \dots \delta_{k-1}) & \text{si } \delta_k = \mathbb{O}, \\ 1 + \Omega(\delta_1 \dots \delta_{k-1}) & \text{si } \delta_k \in \{\mathbb{A}, \mathbb{Y}\}, \\ 2 & \text{si } \delta_k = \mathbb{X}. \end{cases}$$

Exemple 2.3.20. Reprenons les décorations des figures 2.2 et 2.4. On obtient $\phi(\mathbb{O}\mathbb{O}\mathbb{A}\mathbb{O}) = 12$ et $\phi(\mathbb{O}\mathbb{X}\mathbb{Y}\mathbb{O}) = 4$.

Exemple 2.3.21. Parcourant à nouveau une partie de l'exemple 2.1.3, on retrouve les suites classiques suivantes :

- (i) lorsque $\delta = \mathbb{O}^n$, le cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\mathbb{O}^n})$ a $2^{n-2} \binom{n}{2}$ facettes (toutes les paires de rayons échangeables définissent une facette et on retrouve la suite A001788 de [OEIS]),
- (ii) lorsque $\delta = \mathbb{A}^n$, le cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\mathbb{A}^n})$ a $\binom{n}{2}$ facettes, ce qui revient à compter les quadruplets de sommets d'un $(n + 2)$ -gone de la forme $(i - 1, i, j, j + 1)$ (suite A000217 de [OEIS]),
- (iii) lorsque $\delta = \mathbb{X}^n$, le cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv\mathbb{X}^n})$ a $n - 1$ facettes.

On souhaiterait naturellement étendre nos résultats.

Perspective 2.3.22. *Peut-on décrire les facettes, ou à défaut les paires de rayons échangeables, du cône de type de n'importe quel éventail quotient de l'éventail de tresses en généralisant les outils de cette partie ?*

Une question connexe, sensiblement plus compliquée, est celle des rayons du cône de type.

Perspective 2.3.23. *Peut-on donner une description des rayons des cônes de type des éventails permusylvestres ? Ou des éventails quotients de l'ordre faible en général ?*

2.3.4 Description dans le cas simplicial

La proposition 1.3.25 permet l'expression concise du cône de type d'un éventail essentiel complet et simplicial dès lors que son cône de type est lui aussi simplicial. Dans cette partie, on exploite les résultats de comptage de la partie précédente pour caractériser les décorations δ telles que l'éventail δ -permusylvestre a un cône de type simplicial et on spécialise la proposition 1.3.25 dans le cadre du calcul de ces cônes de type.

Un cas particulier du corollaire 2.3.19 est le suivant :

Corollaire 2.3.24. *Si $\delta \in \{\otimes, \oplus, \otimes\}^n$, alors $\phi(\delta) = |\{1 \leq i < j \leq n \mid \forall i < k < j, \delta_k \neq \otimes\}|$.*

Combiné avec le corollaire 2.3.4, il donne l'observation suivante :

Corollaire 2.3.25. *Le cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\otimes\delta})$ est simplicial si et seulement si $\delta_k \neq \oplus$ pour tous $k \in]1, n[$.*

Démonstration. Le cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\otimes\delta})$ est simplicial si et seulement si le nombre $\rho(\delta)$ de rayons de $\mathcal{B}_n^{\otimes\delta}$ et le nombre $\phi(\delta)$ de facettes de $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\otimes\delta})$ vérifient l'équation $\rho(\delta) = \phi(\delta) + n - 1$. En invoquant les corollaires 2.3.4 et 2.3.19, on a l'égalité $\rho(\delta) = \phi(\delta) + n - 1$ si et seulement si $\psi(i, j) := \Omega(\delta_1 \dots \delta_{i-1})^{\delta_i = \oplus} \cdot \Omega(\delta_n \dots \delta_{j+1})^{\delta_j = \oplus}$ vaut toujours 1 dans la formule de $\phi(\delta)$. C'est bien le cas dès lors que $\delta_k \neq \oplus$ pour tous $k \in]1, n[$. Réciproquement, si $\delta_k = \oplus$ pour un $k \in]1, n[$ fixé, alors $\psi(k-1, k) \geq 2$ et le cône de type n'est pas simplicial. \square

En appliquant la proposition 1.3.25, on obtient les réalisations suivantes des éventails δ -permusylvestres dans l'espace cinématique de [AH+18] lorsque $\delta \in \{\otimes, \oplus, \otimes\}^n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\delta_1 = \delta_n = \otimes$, puisque les décorations extrémales sont sans conséquence dans toutes nos constructions.

Afin d'alléger les notations dans la suite, on pose :

$$\mathfrak{F} := \{1 \leq i < j \leq n \mid \forall i < k < j, \delta_k \neq \otimes\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R} := \{0, 1\} \times [n]^2 \times \{0, 1\},$$

et on définit $p_{i,j}^\varepsilon$ et $q_{i,j}^\varepsilon$ pour $\{i, j\} \in \mathfrak{F}$ et $\varepsilon \in \{+, -\}$ par :

$$p_{i,j}^\varepsilon = \begin{cases} \min(\{j\} \cup (]i, j[\cap \delta^\varepsilon)) - 1 & \text{si } i \in \delta^\varepsilon, \\ i - 1 & \text{si } i \notin \delta^\varepsilon, \end{cases}$$

$$q_{i,j}^\varepsilon = \begin{cases} \max(\{i\} \cup (]i, j[\cap \delta^\varepsilon)) + 1 & \text{si } i \in \delta^\varepsilon, \\ j - 1 & \text{si } i \notin \delta^\varepsilon. \end{cases}$$

Corollaire 2.3.26. *Soit $\delta \in \{\otimes, \oplus, \otimes\}^n$ avec $\delta_1 = \delta_n = \otimes$. Alors, en employant les notations introduites ci-dessus, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathfrak{F}}$, le polytope $Q_\delta(\mathbf{u})$ constitué des points $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathfrak{R}}$ vérifiant :*

- $z_{\ell,p,q,r} = 0$ lorsque $(p, q) \notin \mathfrak{F}$,
- $z_{\ell,p,q,r} = z_{\ell',p,q,r'}$ lorsque $p+1 \neq q$,

— et pour tous $(i, j) \in \mathfrak{F}$,

$$\mathbf{z}_{1, p_{i,j}^+, q_{i,j}^-, 0} + \mathbf{z}_{0, p_{i,j}^-, q_{i,j}^+, 1} - \mathbf{z}_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-}, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}} - \mathbf{z}_{\mathbb{1}_{i \in \delta^+}, p_{i,j+1}^+, q_{i-1,j}^+, \mathbb{1}_{j \in \delta^+}} = \mathbf{u}_{i,j}$$

est un δ -permusylvèdre, c'est-à-dire que son éventail normal est l'éventail δ -permusylvestre $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$. De plus, les polytopes $Q_\delta(\mathbf{u})$ pour $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathfrak{F}}$ décrivent l'ensemble des δ -permusylvestres, ou alternativement, l'ensemble des réalisations polytopales de l'éventail $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$, le cône de type $\text{TC}(\mathcal{B}_n^{\equiv \delta})$.

Démonstration. Au vu des corollaires 2.3.4 et 2.3.19, on peut paramétrer :

- (i) les rayons de l'éventail $\mathcal{B}_n^{\equiv \delta}$ par \mathfrak{A} en identifiant $(0, p, q, 0)$, $(1, p, q, 0)$, $(0, p, q, 1)$ et $(1, p, q, 1)$ lorsque $p + 1 \neq q$, et en ignorant $(0, p, q, 0)$, $(1, p, q, 0)$, $(0, p, q, 1)$ et $(1, p, q, 1)$ lorsque $(p, q) \notin \mathfrak{F}$,
- (ii) les facettes du cône de type $\overline{\text{TC}}(\mathcal{B}_n^{\equiv \delta})$ par \mathfrak{F} .

Plus explicitement, on associe à tout quadruplet $(\ell, p, q, r) \in \mathfrak{A}$ l'ensemble $R_{\ell, p, q, r} \subseteq [n]$ défini par :

- si $(p, q) \notin \mathfrak{F}$, alors $R_{0, p, q, 0} := R_{1, p, q, 0} := R_{0, p, q, 1} := \emptyset$ et $R_{1, p, q, 1} := [n]$,
- si $p + 1 = q$, alors $R_{0, p, q, 0} := \emptyset$, $R_{1, p, q, 0} := [1, p]$, $R_{0, p, q, 1} := [q, n]$ et $R_{1, p, q, 1} := [n]$,
- si $(p, q) \in \mathfrak{F}$ et $p + 1 \neq q$, alors $R_{0, p, q, 0} := R_{1, p, q, 0} := R_{0, p, q, 1} := R_{1, p, q, 1} := R$, où R est l'unique sous-ensemble propre de $[n]$ vérifiant les conditions du corollaire 2.3.1 et tel que i soit la dernière position (resp. j soit la première position) telle que $[1, i]$ (resp. $[j, n]$) soit entièrement dans R ou dans ${}^c R$. L'unicité d'un tel R se déduit de la démonstration du corollaire 2.3.4.

À présent, on associe à toute paire $(i, j) \in \mathfrak{F}$ la paire $(I_{i,j}, J_{i,j})$ de sous-ensembles propres de $[n]$ vérifiant les conditions du corollaire 2.3.1 et de la proposition 2.3.14 et telle que $\max(I_{i,j} \setminus J_{i,j}) = i$ et $\min(J_{i,j} \setminus I_{i,j}) = j$. L'unicité d'une telle paire se déduit de la remarque 2.3.18.

Montrons à présent que :

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= R_{1, p_{i,j}^+, q_{i,j}^-, 0}, & J_{i,j} &= R_{0, p_{i,j}^-, q_{i,j}^+, 1}, \\ I_{i,j} \cap J_{i,j} &= R_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-}, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}} & \text{et} & \quad I_{i,j} \cup J_{i,j} = R_{\mathbb{1}_{i \in \delta^+}, p_{i,j+1}^+, q_{i-1,j}^+, \mathbb{1}_{j \in \delta^+}}, \end{aligned}$$

ce qui conclura la démonstration par les propositions 1.3.25 et 2.2.11. Rappelons que vu la proposition 2.3.14 (iii), on a $]i, j[\cap \delta^- \subseteq I_{i,j}$ et $]i, j[\cap \delta^+ \subseteq {}^c I_{i,j}$. De plus, par la remarque 2.3.18, on a :

- si $i \in \delta^+$, alors $[1, i] \subseteq I_{i,j}$ et la plus grande position p telle que $[1, p] \subseteq I_{i,j}$ est celle précédant l'élément minimal de $]i, j[\cap \delta^+$, ou j si cet ensemble est vide,
- sinon, alors $[1, i[\subseteq {}^c I_{i,j}$, tandis que $i \in I_{i,j}$, de sorte que la plus grande position p telle que $[1, p] \subseteq {}^c I_{i,j}$ est $i - 1$.

La position $p_{i,j}^+$ est donc bien la plus grande position p telle que $[1, p]$ est entièrement dans $I_{i,j}$ ou dans ${}^c I_{i,j}$. Un argument symétrique permet d'obtenir que $q_{i,j}^-$ est la position minimale q telle que $[q, n]$ est entièrement dans $I_{i,j}$ ou dans ${}^c I_{i,j}$. On a donc $1 \leq p_{i,j}^+ \leq q_{i,j}^- \leq n$ et lorsque $k \in]p_{i,j}^+, q_{i,j}^-[$ alors $\delta_j \neq \otimes$, puisque $i - 1 \leq p_{i,j}^+$ avec égalité si et seulement si $i \notin \delta^+$ et $q_{i,j}^- \leq j + 1$ avec égalité si et seulement si $j \notin \delta^-$. Ainsi, $(p_{i,j}^+, q_{i,j}^-) \in \mathfrak{F}$.

Observons que si $i \notin \delta^+$, alors $p_{i,j}^+ = i - 1$ tandis que $q_{i,j}^- \geq i + 1$, de sorte que $p_{i,j}^+ + 1 < q_{i,j}^-$. On a donc que :

- si $p_{i,j}^+ + 1 = q_{i,j}^-$, alors $i \in \delta^+$ et $[1, i] \subseteq I_{i,j}$ et donc $I_{i,j} = [1, p_{i,j}^+] = R_{1, p_{i,j}^+, q_{i,j}^-, 0}$,
- si $p_{i,j}^+ + 1 < q_{i,j}^-$ alors $I_{i,j} = R_{1, p_{i,j}^+, q_{i,j}^-, 0}$, puisque ces deux ensembles sont entièrement déterminés par $p_{i,j}^+$ et $q_{i,j}^-$.

On a ainsi démontré que $I_{i,j} = R_{1,p_{i,j}^+,q_{i,j}^-,\emptyset}$. Par un argument symétrique, on a $J_{i,j} = R_{0,p_{i,j}^-,q_{i,j}^+,1}$.

Pour l'intersection, observons d'abord que si $I_{i,j} \cap J_{i,j} = \emptyset$, alors $i, j \in \delta^-$ par la remarque 2.3.18, tandis que $]i, j[\subseteq \delta^+$ par la proposition 2.3.14 (iii). Ainsi, on a $p_{i,j+1}^- = j - 1$ et $q_{i-1,j}^- = i + 1$, ce qui implique qu'ou bien $p_{i,j+1}^- + 1 = q_{i-1,j}^-$, ou bien $p_{i,j+1}^- \not\leq q_{i-1,j}^-$ et donc $(p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-) \notin \mathfrak{F}$. Comme $i, j \in \delta^-$, on a dans tous les cas que $R_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}} = \emptyset = I_{i,j} \cap I_{i,j}$.

Supposons à présent que $I_{i,j} \cap I_{i,j} \neq \emptyset$. Par la remarque 2.3.18, on a :

- si $i \in \delta^+$, alors $[1, i] \subseteq {}^c I_{i,j} \cap I_{i,j}$ et la plus grande position p telle que $[1, p] \subseteq {}^c I_{i,j} \cap I_{i,j}$ est celle précédant l'élément minimum de $]i, j[\cap \delta^-$, ou $j + 1$ si cet ensemble est vide,
- sinon, alors $[1, i[\subseteq I_{i,j} \cap I_{i,j}$, tandis que $i \notin I_{i,j} \cap I_{i,j}$ de telle sorte que la plus grande position p telle que $[1, p] \subseteq I_{i,j} \cap I_{i,j}$ est $i - 1$.

La position $p_{i,j+1}^-$ est donc bien la plus grande position p telle que $[1, p]$ est entièrement inclus dans $I_{i,j} \cap J_{i,j}$ ou dans ${}^c I_{i,j} \cap J_{i,j}$. Un argument symétrique permet d'obtenir que $q_{i-1,j}^-$ est la position minimum q telle que $[q, n]$ est entièrement dans $I_{i,j} \cap J_{i,j}$ ou dans ${}^c I_{i,j} \cap J_{i,j}$. Comme précédemment, cela garantit que $(p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-) \in \mathfrak{F}$.

On distingue enfin trois cas de figure :

- si $p_{i,j+1}^- = q_{i-1,j}^-$ et $[1, i[I_{i,j} \cap J_{i,j}$, alors par la remarque 2.3.18, $i \in \delta^+$ et $j \in \delta^-$, de telle sorte que $I_{i,j} \cap J_{i,j} = [1, p_{i,j+1}^-] = R_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}}$,
- si $p_{i,j+1}^- + 1 = q_{i-1,j}^-$ et $[1, i] \subseteq {}^c I_{i,j} \cap J_{i,j}$, alors par la remarque 2.3.18, $i \in \delta^-$ et $j \in \delta^+$, de telle sorte que $I_{i,j} \cap J_{i,j} = [1, p_{i,j+1}^-] = R_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}}$,
- si $p_{i,j+1}^- + 1 < q_{i-1,j}^-$, alors $I_{i,j} \cap J_{i,j} = R_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}}$, puisque ces deux ensembles sont entièrement déterminés par $p_{i,j+1}^-$ et $q_{i-1,j}^-$.

On a ainsi démontré que $I_{i,j} \cap J_{i,j} = R_{\mathbb{1}_{i \notin \delta^-, p_{i,j+1}^-, q_{i-1,j}^-, \mathbb{1}_{j \notin \delta^-}}$. Par un argument symétrique, on a $I_{i,j} \cup J_{i,j} = R_{\mathbb{1}_{i \in \delta^+, p_{i,j+1}^+, q_{i-1,j}^+, \mathbb{1}_{j \in \delta^+}}}$. \square

Exemple 2.3.27. En spécialisant la construction du corollaire 2.3.26, on obtient :

- Pour $\delta = \otimes \otimes^{n-2} \otimes$:

$$p_{i,j}^- = \begin{cases} j - 1 & \text{si } i = 1, \\ i - 1 & \text{si } i \neq 1, \end{cases}, \quad p_{i,j}^+ = i, \quad q_{i,j}^- = \begin{cases} i + 1 & \text{si } j = n, \\ j + 1 & \text{si } j \neq n, \end{cases}, \quad q_{i,j}^+ = j,$$

de sorte que le polytope $Q_\delta(\mathbf{u})$ est équivalent à l'**associaèdre cinématique** de [AH+18] :

$$\left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\binom{0,n+1}{2}} \mid \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \binom{[n]}{2}, \quad \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{y}_{i,j} = 0 \text{ si } i + 1 = j, \\ \mathbf{y}_{0,n+1} = 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_{i,j+1} + \mathbf{y}_{i-1,j} - \mathbf{y}_{i-1,j+1} - \mathbf{y}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j} \end{array} \right\}$$

en envoyant $\mathbf{z}_{1,j-1,j,0}$ sur $\mathbf{y}_{0,j}$, $\mathbf{z}_{0,i,i+1,1}$ sur $\mathbf{y}_{i,n+1}$ et $\mathbf{z}_{\ell,i,j,r}$ sur $\mathbf{y}_{i,j}$ pour tous $\ell, r \in \{0, 1\}$ et $i, j \in [n]^2$ tels que $i + 1 \neq j$.

- Pour $\delta = \otimes^n$:

$$p_{i,j}^- = p_{i,j}^+ = i \quad \text{et} \quad q_{i,j}^- = q_{i,j}^+ = j,$$

de sorte que le polytope $Q_\delta(\mathbf{u})$ est équivalent au **cube cinématique** :

$$\left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\{0,1\} \times [n-1]} \mid \mathbf{y} \geq 0 \text{ et } \forall i \in [n-1], \mathbf{y}_{0,i} + \mathbf{y}_{1,i} = \mathbf{u}_{i,i+1} \right\}$$

en envoyant $\mathbf{z}_{0,i,i+1,1}$ sur $\mathbf{y}_{0,i}$ et $\mathbf{z}_{1,i,i+1,0}$ sur $\mathbf{y}_{1,i}$.

Complexe canonique

Ce chapitre, basé sur l'article [AP21], présente un nouveau complexe simplicial associé à un treillis semi-distributif fini, le complexe canonique, qui englobe des complexes simpliciaux déjà connus : les complexes sup et inf canoniques. Ces complexes capturent respectivement la donnée des intervalles du treillis et de ses éléments, et se comportent particulièrement bien vis-à-vis des quotients du treillis. On étudiera dans un deuxième temps un modèle combinatoire *ad hoc* de ces complexes dans le cadre spécifique de l'ordre faible sur les permutations.

3.1 Complexes simpliciaux et représentations canoniques

On introduit dans cette partie les complexes sup et inf canoniques et le complexe canonique, et on étudie leurs relations entre eux et vis-à-vis du treillis, de ses congruences et de ses intervalles.

3.1.1 Complexes sup et inf canoniques

La proposition 1.1.33 (ii) permet l'introduction d'un objet topologique décrivant la *compatibilité* entre les sup (resp. inf) irréductibles quant à la constitution d'une représentation sup (resp. inf) canonique. Il est introduit dans [Rea15] dans le cadre de l'étude de l'ordre faible (voir section 1.2), puis étudié dans un cadre plus général dans [Bar19].

Définition 3.1.1. Soit L un treillis. Le **complexe sup canonique** (resp. **complexe inf canonique**) est le complexe simplicial $\mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L)$ (resp. $\mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$) sur les sup (resp. inf) irréductibles dont les faces sont les représentations sup (resp. inf) canoniques dans L (voir figure 3.1).

En vertu de la proposition 1.1.33, si L est sup (resp. inf) semi-distributif, les faces du complexe sup (resp. inf) canonique sont en bijection avec les éléments de L .

Ces bijections sont claires dans le sens allant des faces d'un des deux complexes vers les éléments du treillis (\vee ou \wedge , selon). L'autre sens est donné par la proposition 1.1.34.

En reprenant les notations de cette proposition, on peut, dans un treillis sup (resp. inf) semi-distributif, associer à un élément inf irréductible m (resp. sup irréductible j) l'élément sup irréductible $\kappa_\vee(m) := k_\vee(m, m^*)$ (resp. inf irréductible $\kappa_\wedge(j) := k_\wedge(j^*, j)$). Dans le cas où L est semi-distributif, les complexes sup et inf canoniques coexistent et κ_\vee et κ_\wedge sont des bijections réciproques entre $\mathcal{JI}(L)$ et $\mathcal{MI}(L)$ qui transportent la structure des complexes simpliciaux :

Proposition 3.1.2 ([Bar19, Thm. 2 & Coro. 5]). *Soit L un treillis semi-distributif. Alors :*

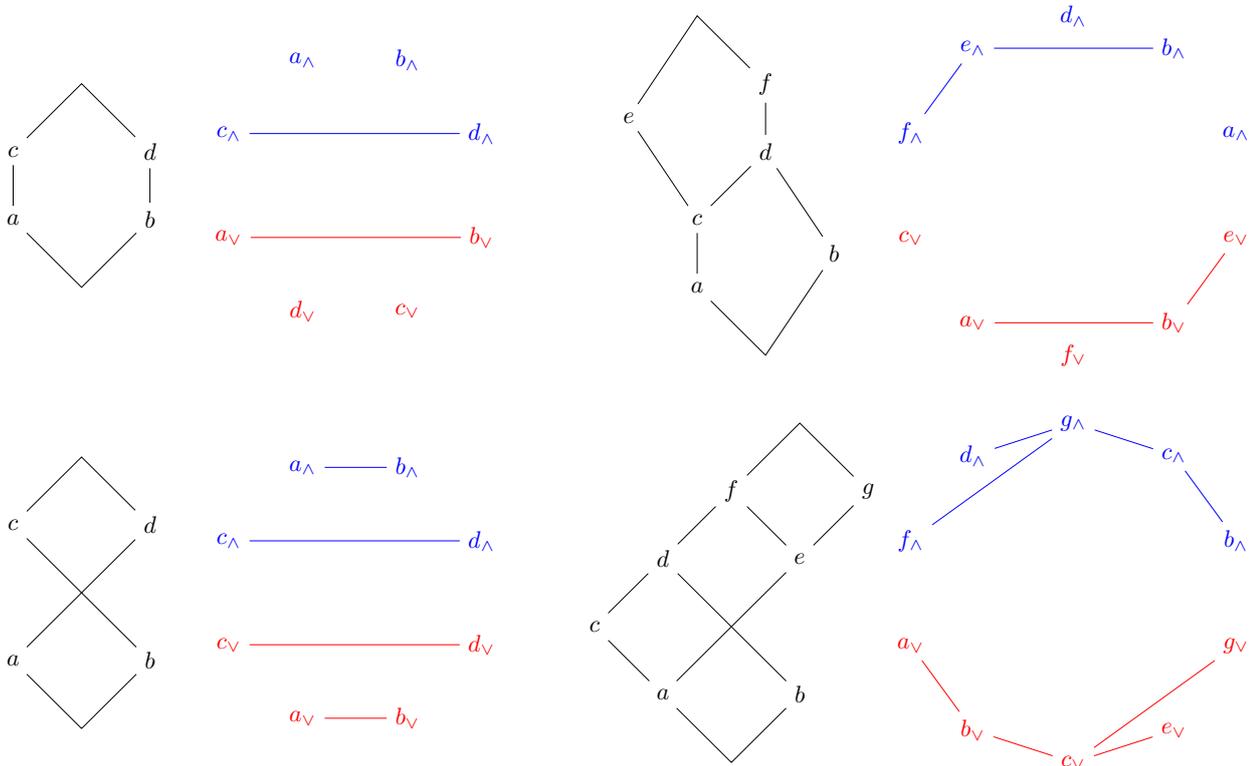


FIGURE 3.1 – Quatre treillis semi-distributifs et leurs complexes sup et inf canoniques correspondants, respectivement en rouge en dessous et en bleu au dessus. Seuls sont étiquetés les éléments sup ou inf irréductibles, et on note dans les complexes x_\vee (resp. x_\wedge) l'élément x lorsqu'il est vu comme un sup (resp. inf) irréductible.

- (i) Les complexes $\mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L)$ et $\mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$ sont **drapeaux**, c'est-à-dire que leurs non-faces minimales sont des arêtes, ou de manière équivalente, qu'ils sont le complexe de clique de leur squelette.
- (ii) Les applications κ_\vee et κ_\wedge induisent des isomorphismes de complexes simpliciaux réciproques entre $\mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L)$ et $\mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$.

Moralement, le fait pour un complexe d'être drapeau revient à ce que l'on puisse simplement le représenter au moyen de ses faces de dimension au plus 1. Tout triangle apparaissant dans ce dessin est une face du complexe, tout tétraèdre dont les 6 arêtes sont des faces du complexe est une face du complexe, et ainsi de suite.

Remarque 3.1.3. En pratique, le théorème 2 de [Bar19] établit que le complexe sup (resp. inf) canonique d'un treillis est drapeau si et seulement si ce treillis est sup (resp. inf) semi-distributif, ce qui ajoute une entrée au catalogue de définitions alternatives de la semi-distributivité de la proposition 1.1.33.

Exemple 3.1.4. Affinons la remarque 1.1.30. Soient L un treillis distributif, et P son poset induit par ses sup irréductibles. Pour toute antichaîne A de P , on note :

$$j_A := \{x \in P \mid \exists y \in A, x \leq y\} \quad \text{et} \quad m^A := \{x \in P \mid \forall y \in A, x \not\leq y\}.$$

En d'autres termes, A est l'ensemble des éléments maximaux de l'idéal inférieur j_A , et l'ensemble des éléments minimaux de l'idéal supérieur ${}^c m^A$. Pour $y \in P$, on écrit $j_y := j_{\{y\}}$ et $m^y := m^{\{y\}}$ pour alléger les notations. Alors,

- les sup (resp. inf) irréductibles de L sont les idéaux inférieurs j_y (resp. m^y) pour $y \in P$,
- l'application κ_\vee (resp. κ_\wedge) est donnée par $\kappa_\vee(m^y) = j_y$ (resp. $\kappa_\wedge(j_y) = m^y$),
- les représentations sup canoniques de j_A et inf canoniques de m^A sont données par :

$$\mathbf{cjr}(j_A) = \{j_y \mid y \in A\} \quad \text{et} \quad \mathbf{cmr}(m^A) = \{m^y \mid y \in A\},$$

- les complexes sup et inf canoniques $\mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(L)$ et $\mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(L)$ sont tous les deux isomorphes au complexe de clique du graphe d'incomparabilité de P .

Voir [Bar19, Ex. 19].

Définition 3.1.5. Soit L un treillis semi-distributif. Les **applications de Kreweras** sont les applications réciproques $\eta_\vee : \mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(L) \rightarrow \mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(L)$ et $\eta_\wedge : \mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(L) \rightarrow \mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(L)$ qui échangent les représentations sup et inf canoniques du treillis :

$$\eta_\vee(M) := \mathbf{cjr} \left(\bigwedge M \right) \quad \text{et} \quad \eta_\wedge(J) := \mathbf{cmr} \left(\bigvee J \right).$$

Précisons que certains auteurs, comme dans [BTZ21], appellent applications de Kreweras les compositions $\eta_\vee \circ \kappa_\wedge$ et $\eta_\wedge \circ \kappa_\vee$. Les applications de Kreweras dans le treillis de Tamari (exemple 1.2.20) correspondent au complément de Kreweras sur les partitions non-croisées [Kre72], d'où cette dénomination.

Exemple 3.1.6. Reprenons les notations de l'exemple 3.1.4. Pour toute antichaîne A de P , on note $\text{row}_\vee(A)$ les éléments maximaux de m^A et $\text{row}_\wedge(A)$ les éléments minimaux de ${}^c j_A$. En d'autres termes, $m^A = j_{\text{row}_\vee(A)}$ et $j_A = m^{\text{row}_\wedge(A)}$. Vu l'exemple 3.1.4, les applications de Kreweras sont données par :

$$\eta_\vee(\{m^y \mid y \in A\}) = \{j_y \mid y \in \text{row}_\vee(A)\} \quad \text{et} \quad \eta_\wedge(\{j_y \mid y \in A\}) = \{m^y \mid y \in \text{row}_\wedge(A)\}.$$

Voir [Bar19, Rem. 32].

Le théorème 1.1.49 sur les représentations canoniques dans les quotients se reformule sur le complexe sup canonique :

Proposition 3.1.7. Soit \equiv une congruence du treillis L sup (resp. inf) semi-distributif. Le complexe sup (resp. inf) canonique $\mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(L/\equiv)$ (resp. $\mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(L/\equiv)$) du quotient L/\equiv est isomorphe au sous-complexe $\mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(\equiv)$ (resp. $\mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(\equiv)$) du complexe sup (resp. inf) canonique de L induit par $\mathcal{UJI}(\equiv)$ (resp. $\mathcal{UMI}(\equiv)$).

On travaillera donc de préférence avec les sous-complexes $\mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(\equiv)$ et $\mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(\equiv)$ plutôt qu'avec les complexes $\mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(L/\equiv)$ et $\mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(L/\equiv)$. Dans le cas semi-distributif, les ensembles $\mathcal{UJI}(\equiv)$ et $\mathcal{UMI}(\equiv)$ et les complexes $\mathcal{C}_\vee \mathcal{C}(\equiv)$ et $\mathcal{C}_\wedge \mathcal{C}(\equiv)$ sont liés par les applications κ_\vee et κ_\wedge .

Afin de s'intéresser aux applications de Kreweras des treillis quotients d'un treillis semi-distributif L , on introduit les notations suivantes :

Définition 3.1.8. Soient \equiv une congruence du treillis semi-distributif L et $I = \mathcal{UJI}(\equiv)$. Les applications de Kreweras du treillis quotient L/\equiv , η_\vee^I et η_\wedge^I sont données par :

$$\eta_\vee^I = \mathbf{cjr} \circ \pi_{\downarrow}^{\equiv} \circ \mathbf{cmr}^{-1} \quad \text{et} \quad \eta_\wedge^I = \mathbf{cmr} \circ \pi_{\uparrow}^{\equiv} \circ \mathbf{cjr}^{-1},$$

de telle sorte que pour toute classe $[x, y]$ de \equiv , $\eta_\vee^I(\mathbf{cmr}(x)) = \mathbf{cjr}(y)$ et $\eta_\wedge^I(\mathbf{cjr}(y)) = \mathbf{cmr}(x)$.

Proposition 3.1.9. *Soient L un treillis semi-distributif et \equiv une congruence de treillis de L . Alors $\mathcal{UJI}(\equiv) = \kappa_{\vee}(\mathcal{UMI}(\equiv))$ et $\mathcal{UMI}(\equiv) = \kappa_{\wedge}(\mathcal{UJI}(\equiv))$. Ainsi, les applications κ_{\vee} et κ_{\wedge} induisent des isomorphismes réciproques entre les complexes simpliciaux $\mathcal{C}_{\vee}\mathcal{C}(\equiv)$ et $\mathcal{C}_{\wedge}\mathcal{C}(\equiv)$.*

Démonstration. Soient $m \in \mathcal{MI}(L)$ et $j = \kappa_{\vee}(m)$. Par définition, $m \vee j = m^*$ et $m \vee j_{\star} = m$. Ainsi, si $j \equiv j_{\star}$ alors $m = m \vee j_{\star} \equiv m \vee j = m^*$. En d'autres termes, $\kappa_{\vee}(\mathcal{UMI}(\equiv)) \subseteq \mathcal{UJI}(\equiv)$. Symétriquement, on a $\kappa_{\wedge}(\mathcal{UJI}(\equiv)) \subseteq \mathcal{UMI}(\equiv)$. Comme κ_{\vee} et κ_{\wedge} sont des bijections réciproques, on a égalité.

L'isomorphisme de complexes se déduit alors de la proposition 3.1.2 (ii). \square

Exemple 3.1.10. Reprenons les notations de l'exemple 3.1.4. Dans le treillis distributif L , il n'y a aucun forçage. Ainsi, tout sous-ensemble de sup (resp. inf) irréductible de L définit une congruence de L . Plus précisément, tout sous-ensemble Y de P définit une congruence \equiv_Y avec :

$$\mathcal{UJI}(\equiv_Y) = \{j_y \mid y \in Y\} \quad \text{et} \quad \mathcal{UMI}(\equiv_Y) = \{m^y \mid y \in Y\}.$$

Le treillis quotient L/\equiv_Y est distributif et isomorphe au treillis des antichaînes du poset induit à P par Y .

Proposition 3.1.11. *Soit \equiv une congruence du treillis sup semi-distributif L . Pour tout $x \in L$, on a $\langle \mathbf{cjr}(x) \rangle_{\downarrow}^L \supseteq \langle \mathbf{cjr}(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x)) \rangle_{\downarrow}^L$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la taille de l'intervalle $[\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x), x]$ dans L (i.e., la taille de sa plus courte chaîne maximale). Lorsque $\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x) = x$, le résultat est immédiat. Sinon, soient $j \in \mathbf{cjr}(x) \setminus \mathcal{UJI}(\equiv)$ et $y = \bigvee \{\mathbf{cjr}(x) \Delta \{j, j_{\star}\}\}$ où Δ est la différence symétrique. Comme $j \equiv j_{\star}$, on a $x \equiv y$ et donc $\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x) = \pi_{\downarrow}^{\equiv}(y)$. Comme la représentation sup canonique de y est strictement incluse dans $\langle \mathbf{cjr}(x) \rangle_{\downarrow}^L$, on a $y < x$ et donc $[\pi_{\downarrow}^{\equiv}(y), y] \subsetneq [\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x), x]$. Par hypothèse de récurrence, on a $\mathbf{cjr}(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(y)) \subseteq \langle \mathbf{cjr}(y) \rangle_{\downarrow}^L$. De plus, $J := \{\mathbf{cjr}(x) \setminus \{j\}\} \cup \mathbf{cjr}(j_{\star})$ est une représentation par sup de y (pas nécessairement canonique), telle que $\mathbf{cjr}(y) \subseteq \langle J \rangle_{\downarrow}^L \subseteq \langle \mathbf{cjr}(x) \rangle_{\downarrow}^L$. On en déduit qu'on a bien $\langle \mathbf{cjr}(x) \rangle_{\downarrow}^L \supseteq \langle \mathbf{cjr}(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x)) \rangle_{\downarrow}^L$. \square

Soulignons que cette propriété est propre à π_{\downarrow} . En effet, une relation $x \leq y$ dans un treillis L n'implique en général rien sur les idéaux engendrés par $\mathbf{cjr}(x)$ et $\mathbf{cjr}(y)$ (considérer par exemple le maximum et le point c du treillis de la figure 3.1 (haut gauche)). La proposition 3.1.11 assure que l'on peut chercher $\mathbf{cjr}(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x))$ parmi les antichaînes d'éléments sup irréductibles de L composées d'éléments de $\mathcal{UJI}(\equiv)$ et sous l'antichaîne $\mathbf{cjr}(x)$ dans le poset des antichaînes de L . Cependant, on ne parvient pas à décrire systématiquement $\mathbf{cjr}(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(x))$, car toutes ces antichaînes ne définissent pas nécessairement une représentation sup canonique dans L .

Une proposition duale existe bien entendu pour les treillis inf semi-distributifs.

3.1.2 Complexe canonique

Définition 3.1.12. Soit L un treillis semi-distributif fini. Le **complexe canonique** $\mathcal{CC}(L)$ est le complexe simplicial sur l'union disjointe $\mathcal{JI}(L) \sqcup \mathcal{MI}(L)$ dont les faces sont les $J \sqcup M$ où $J \in \mathcal{C}_{\vee}\mathcal{C}(L)$ est une représentation sup canonique, $M \in \mathcal{C}_{\wedge}\mathcal{C}(L)$ est une représentation inf canonique, et $\bigvee J \leq \bigwedge M$.

Il s'agit bien d'un complexe simplicial, i.e., tout sous-ensemble d'une face de $\mathcal{CC}(L)$ est une face de $\mathcal{CC}(L)$. En effet, soient $J \sqcup M \in \mathcal{CC}(L)$, $J' \subseteq J$ et $M' \subseteq M$. Comme $\mathcal{C}_{\vee}\mathcal{C}(L)$ et $\mathcal{C}_{\wedge}\mathcal{C}(L)$ sont des complexes simpliciaux, alors $J' \in \mathcal{C}_{\vee}\mathcal{C}(L)$ et $M' \in \mathcal{C}_{\wedge}\mathcal{C}(L)$. Enfin, on a bien, $\bigvee J' \leq \bigvee J \leq \bigwedge M \leq \bigwedge M'$ et donc $J' \sqcup M' \in \mathcal{CC}(L)$.

Insistons sur le fait que l'ensemble de base du complexe canonique est bien l'union disjointe $\mathcal{JI}(L) \sqcup \mathcal{MI}(L)$, c'est-à-dire que lorsqu'un élément de L est à la fois sup irréductible et inf irréductible, deux copies de cet élément sont présentes dans l'ensemble de base de $\mathcal{CC}(L)$. Comme précédemment, tout élément $x \in L$ sera décoré x_\vee ou x_\wedge selon s'il est vu comme sup irréductible ou inf irréductible.

Là où les faces des complexes sup et inf canonique encodent les éléments du treillis, celle du complexe canonique encodent ses intervalles :

Proposition 3.1.13. *Soit L un treillis semi-distributif. Les faces du complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ sont en bijection avec les intervalles de L .*

Démonstration. Dans le sens direct, on envoie une face $J \sqcup M$ de $\mathcal{CC}(L)$ sur la paire $(\bigvee J, \bigwedge M)$ qui forme bien un intervalle par définition du complexe canonique. Dans le sens indirect, on envoie un intervalle $[x, y]$ sur ses représentations sup et inf canoniques : $\mathbf{cjr}(x) \sqcup \mathbf{cmr}(y)$, qui est bien une face du complexe canonique. \square

Définition 3.1.14. On appelle représentation canonique d'un intervalle $[x, y]$ d'un treillis semi-distributif L l'union disjointe $\mathbf{cjr}(x) \sqcup \mathbf{cmr}(y)$.

Le complexe canonique d'un treillis contient naturellement les complexes sup et inf canoniques de ce treillis de la définition 3.1.1.

Proposition 3.1.15. *Soit L un treillis semi-distributif. Le complexe sup (resp. inf) canonique $\mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L)$ (resp. $\mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$) est le sous-complexe du complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ induit par l'ensemble $\mathcal{JI}(L)$ des éléments sup irréductibles (resp. $\mathcal{MI}(L)$ des éléments inf irréductibles).*

Démonstration. En effet, $J \in \mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L) \Leftrightarrow J \sqcup \emptyset \in \mathcal{CC}(L)$ et $M \in \mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L) \Leftrightarrow \emptyset \sqcup M \in \mathcal{CC}(L)$. \square

Proposition 3.1.16. *Soit L un treillis semi-distributif. Le complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ est drapeau.*

Démonstration. Soient $J \in \mathcal{JI}(L)$ et $M \in \mathcal{MI}(L)$ tels que toute paire de $J \sqcup M$ est une arête de $\mathcal{CC}(L)$.

Comme $\mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L)$ et $\mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$ sont des complexes drapeaux (par la proposition 3.1.2 (i)), alors $J \in \mathcal{C}_\vee\mathcal{C}(L)$ et $M \in \mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$. Enfin, pour tous $j \in J$ et $m \in M$, on a $j \leq m$. Ainsi, $\bigvee J$, plus petit majorant de l'ensemble J , est inférieur à tous les éléments de M , qui sont aussi des majorants de J . On a donc bien $\bigvee J \leq \bigwedge M$. \square

Le complexe canonique est donc un complexe simplicial drapeau et comme pour les complexes sup et inf canonique, cela nous permet de les représenter par le graphe de leurs arêtes (voir figure 3.2). La proposition suivante montre qu'il est naturellement muni d'une structure de *complexe octaédral*.

Proposition 3.1.17. *Soit L un treillis semi-distributif. Pour tout $j \in \mathcal{JI}(L)$, la paire $\{j, \kappa_\wedge(j)\}$ n'est pas une arête de $\mathcal{CC}(L)$. Ainsi, pour tout étiquetage $\lambda : \mathcal{JI}(L) \rightarrow [|\mathcal{JI}(L)|]$, l'application qui envoie $j \in \mathcal{JI}(L)$ sur $e_{\lambda(j)}$ et $\kappa_\wedge(j)$ sur $-e_{\lambda(j)}$ définit un plongement du complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ sur le squelette d'un octaèdre de dimension $|\mathcal{JI}(L)|$, i.e., les faces du complexe sont toutes des faces de l'octaèdre sur les sommets desquels on a plongé des éléments irréductibles.*

Démonstration. En effet, vu la définition de κ_\wedge , pour tout $j \in \mathcal{JI}(L)$, on a $j \not\leq \kappa_\wedge(j)$ et donc $(j, \kappa_\wedge(j)) \notin \mathcal{CC}(L)$. \square

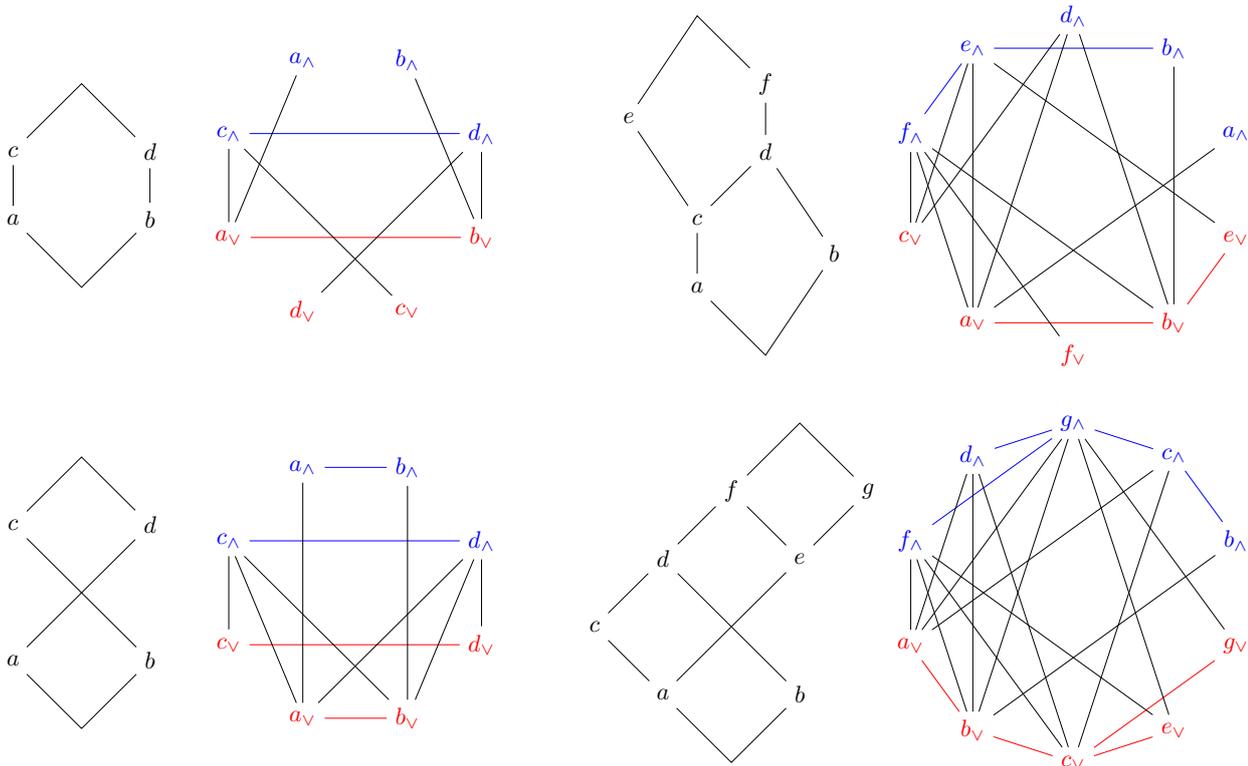


FIGURE 3.2 – Complexes canoniques associés aux quatre même treillis semi-distributifs que dans la figure 3.1. Les sous-complexes sup et inf canoniques sont présentés en rouge et bleu. Les sommets sont disposés de sorte à ce que la symétrie centrale corresponde à l'application κ de la remarque 3.1.19.

Exemple 3.1.18. Dans le cas où L est le treillis booléen sur $[n]$, le complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ est isomorphe au squelette entier de l'octaèdre de dimension n . En effet, le treillis booléen a n éléments sup irréductibles qui sont les singletons. Les n éléments inf irréductibles correspondants sont leurs complémentaires. Les complexes sup et inf canoniques sont complets (toute famille forme une face) et chaque paire $(j, m) \in \mathcal{JI}(L) \times \mathcal{MI}(L)$ forme un intervalle pour peu que l'on n'ait pas pris deux éléments complémentaires.

Remarque 3.1.19. Notons κ l'application sur $\mathcal{JI}(L) \sqcup \mathcal{MI}(L)$ définie par κ_\wedge sur $\mathcal{JI}(L)$ et κ_\vee sur $\mathcal{MI}(L)$. Cette application correspond à la symétrie centrale de l'octaèdre sur le squelette duquel le complexe canonique est plongé dans la proposition précédente. Cette symétrie échange les complexes $\mathcal{CC}(L)$ et $\mathcal{C}_\wedge\mathcal{C}(L)$, mais ne laisse pas le complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ invariant dans son entièreté (voir figure 3.2).

Une conséquence directe de la proposition 3.1.7 est la proposition analogue suivante :

Proposition 3.1.20. Soit \equiv une congruence du treillis L semi-distributif. Le complexe canonique $\mathcal{CC}(L/\equiv)$ du quotient L/\equiv est isomorphe au sous-complexe $\mathcal{CC}(\equiv)$ du complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ de L induit par $\mathcal{UJI}(\equiv) \sqcup \mathcal{UMI}(\equiv)$.

Exemple 3.1.21. Reprenons les notations de l'exemple 3.1.4. On a $j_y \subseteq m^z \Leftrightarrow y \not\leq z$. Ainsi, le complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$ d'un treillis distributif est le complexe de clique du graphe dont l'ensemble de sommets est fait de deux copies P_\vee et P_\wedge de P et dont l'ensemble d'arêtes est l'union de deux copies I_\vee et I_\wedge du graphe d'incomparabilité de P et de l'ensemble des arêtes (y_\vee, z_\wedge) pour $y \not\leq z$ (voir figure 3.2 (bas, droite), en substituant à chaque étiquette bleue l'étiquette x_\wedge , où x_\vee est le sommet diamétralement opposé).

On conclut en mentionnant une extension naturelle de notre travail :

Perspective 3.1.22. *Peut-on construire de la même manière un complexe simplicial décrivant les k -chaînes d'un treillis, pour $k > 2$ fixé ?*

3.1.3 Quelques bijections sur les intervalles

Dans [Cha17], Chapoton introduit les polynômes de valence d'un poset d'intervalles. Il constate et démontre un grand degré de symétrie dans ces polynôme pour le treillis de Tamari de l'exemple 1.2.20. On réintroduit dans cette section ces polynômes quadrivariés pour un treillis quelconque L et on observe ses symétries à mesure que l'on ajoute de la structure sur L : on commence par considérer le cas d'un poset quelconque, puis un poset ayant un antiautomorphisme, un treillis semi-distributif et enfin l'ordre faible.

Définition 3.1.23. Soit P un poset. On associe à tout intervalle $I = [\alpha, \beta]$ de P le monôme $d(\alpha, \beta) := x^{I_a} y^{I_b} z^{I_c} t^{I_d}$ où :

- I_a est le nombre d'éléments couvrant α inférieurs à β ,
- I_b est le nombre d'éléments couvrant β ,
- I_c est le nombre d'éléments couverts par α ,
- I_d est le nombre d'éléments couverts par β , supérieur à α .

Le **polynôme de valence** de P est le polynôme en quatre indéterminées :

$$\mathbb{D}_P(x, y, z, t) := \sum_{\alpha \leq_P \beta} d(\alpha, \beta).$$

Remarque 3.1.24. À proprement parler, il s'agit plutôt d'une généralisation du polynôme de valence classique en deux indéterminées du poset sur les intervalles de P défini par $[\alpha, \beta] \leq [\alpha', \beta']$ lorsque $\alpha \leq_P \alpha'$ et $\beta \leq_P \beta'$. Comme les seuls polynômes que l'on considère sont les quadrivariés de la définition ci-dessus, on s'abstient d'alourdir les notations. On peut se référer à [Cha17] pour plus de détails.

Exemple 3.1.25. En reprenant les treillis en exemple des figures 3.1 et 3.2, on obtient les polynômes de valence suivants (de gauche à droite et de haut en bas) :

- $P_1(x, y, z, t) := 2xyzt + x^2t^2 + 4xyt + 4xzt + y^2 + 4yz + z^2$,
- $P_2(x, y, z, t) := xy^2zt + xyz^2t + x^2yt^2 + x^2zt^2 + x^2yt + xy^2t + 8xyzt + xz^2t + x^2t^2 + xzt^2 + y^2z + yz^2 + 3xyt + 3xzt + y^2 + 4yz + z^2$,
- $P_3(x, y, z, t) := x^2y^2t^2 + x^2z^2t^2 + 2xy^2zt + 2xyz^2t + y^2z^2 + 2x^2yt + 4xyzt + x^2t^2 + 2xzt^2 + 2xyt + 2xzt + y^2 + 4yz + z^2$,
- $P_4(x, y, z, t) := x^2yz^2t^2 + xy^2z^2t + x^2y^2t^2 + 2x^2yzt^2 + x^2z^2t^2 + x^2y^2t + 4xy^2zt + 3xyz^2t + 2x^2yt^2 + 2x^2zt^2 + xyzt^2 + y^2z^2 + x^2yt + xy^2t + 8xyzt + 2xz^2t + x^2t^2 + xzt^2 + 2y^2z + 2yz^2 + 2xyt + 2xzt + y^2 + 3yz + z^2$.

On a les premières propriétés immédiates des polynômes de valence :

Proposition 3.1.26. *Soit L un poset. Le nombre d'intervalles de L vaut $\mathbb{D}_L(1, 1, 1, 1)$.*

Exemple 3.1.27. En appliquant la proposition précédente aux polynômes de l'exemple 3.1.25, on obtient bien respectivement les nombres d'intervalles 17, 31, 26 et 47.

Proposition 3.1.28. *Si le poset L admet un antiautomorphisme, i.e., une application $\iota : L \rightarrow L$ bijective telle que $\alpha \leq_L \beta \Leftrightarrow \iota(\beta) \leq_L \iota(\alpha)$, alors $\mathbb{D}_L(x, y, z, t) = \mathbb{D}_L(t, z, y, x)$.*

Exemple 3.1.29. Les polynômes P_1 , P_2 et P_3 de l'exemple 3.1.25 vérifient bien cette relation. De manière générale, le polynôme de valence de l'ordre faible vérifie cette relation, puisqu'il admet l'antiautomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_n \dots \sigma_1$.

On ajoute à présent de la structure et on suppose que L est un treillis semi-distributif. On a alors une reformulation d'une spécialisation du polynôme de valence :

Proposition 3.1.30. *Soit L un treillis semi-distributif. Alors $\mathbb{D}_L(1, x, x, 1)$ est le f -vecteur du complexe canonique $\mathcal{CC}(L)$. De plus, $\mathbb{D}(1, x, y, 1)$ affine ce f -vecteur en fonction des couleurs des sommets des faces :*

$$\mathbb{D}_L(1, x, y, 1) = \sum_{J \sqcup M \in \mathcal{CC}(L)} x^{|M|} y^{|J|}.$$

Les premières valeurs de ces polynômes pour le cas $L = \mathfrak{S}_n$ sont données remarque 3.2.12.

Exemple 3.1.31. On retrouve cette relation sur les treillis de l'exemple 3.1.25, qui sont tous semi-distributifs. Par exemple, on a $P_1(1, x, y, 1) = x^2 + 6xy + y^2 + 4x + 4y + 1$, où on reconnaît dans les coefficients le décompte de l'arête bleue, les six arêtes noires, l'arête rouge, les quatre sommets bleus, les quatre sommets rouges et la face vide de la figure 3.2 haut, gauche.

On observe une symétrie triple du polynôme de valence, première symétrie inattendue :

Proposition 3.1.32. *Soit L un treillis semi-distributif. Alors*

$$\mathbb{D}_L(x, y, 1, 1) = \mathbb{D}_L(1, y, x, 1) = \mathbb{D}_L(1, 1, x, y).$$

Démonstration. Afin d'obtenir la première égalité, il s'agit de construire une bijection entre les intervalles de L envoyant I sur J avec (I_a, I_b) sur (J_c, J_b) . On considère l'application

$$[\alpha, \beta] \mapsto \left[\bigvee_{m \in \mathbf{cmr}^{(\beta)\downarrow}(\alpha)} \kappa_{\vee}^{(\beta)\downarrow}(m), \beta \right],$$

où $\kappa_{\vee}^{(\beta)\downarrow}$ est l'application κ_{\vee} dans le treillis induit par l'idéal inférieur engendré par β ; et $\mathbf{cmr}^{(\beta)\downarrow}$ est la représentation inf canonique dans ce même treillis. L'application ainsi définie est bien une bijection, puisque l'application $\kappa_{\vee}^{(\beta)\downarrow} : \mathcal{C}_{\lambda} \mathcal{C}(\langle \beta \rangle_{\downarrow}) \rightarrow \mathcal{C}_{\vee} \mathcal{C}(\langle \beta \rangle_{\downarrow})$ est un isomorphisme de complexe simpliciaux.

La seconde égalité s'obtient de manière analogue, à l'aide de l'application $\kappa_{\wedge}^{(\alpha)\uparrow}$. \square

On déduit des propositions 3.1.28 et 3.1.32 le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.33. *Si le treillis semi-distributif L admet un antiautomorphisme, alors les polynômes $\mathbb{D}_L(x, y, 1, 1)$, $\mathbb{D}_L(1, y, x, 1)$ et $\mathbb{D}_L(1, 1, x, y)$ sont identiques et symétriques.*

On s'intéresse enfin au cas précis où $L = \mathfrak{S}_n$ est l'ordre faible.

Proposition 3.1.34. *Les polynômes $\mathbb{D}_{\mathfrak{S}_n}(x, 1, y, 1)$ et $\mathbb{D}_{\mathfrak{S}_n}(1, x, 1, y)$ sont égaux et symétriques.*

Démonstration. Vu la proposition 3.1.28, on a $\mathbb{D}_{\mathfrak{S}_n}(x, 1, y, 1) = \mathbb{D}_{\mathfrak{S}_n}(1, y, 1, x)$ et il suffit de montrer que $\mathbb{D}_{\mathfrak{S}_n}(x, 1, y, 1)$ est symétrique. Pour ce faire, exhibons une bijection entre les intervalles de \mathfrak{S}_n envoyant I sur J de telle manière que $(I_a, I_c) = (J_c, J_a)$. On considère l'application :

$$[\nu, \sigma] \mapsto [\sigma^{-1}\nu, \sigma^{-1}].$$

Écrivons $\nu = \tau_1 \dots \tau_k$ et $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k \tau_{k+1} \dots \tau_\ell$ comme mots réduits sur les transpositions élémentaires. Alors $\sigma^{-1}\nu = \tau_\ell \tau_{\ell-1} \dots \tau_{k+1}$ et $\sigma^{-1} = \tau_\ell \tau_{\ell-1} \dots \tau_1$ par contravariance de l'inversion. Ainsi, l'application invoquée envoie bien un intervalle sur un intervalle.

Observons que I_a correspond au nombre de permutations couvrant ν inférieures à σ , c'est-à-dire au nombre de valeurs possibles de τ_{k+1} dans l'écriture de σ comme un mot réduit prolongeant un mot réduit décrivant ν . De plus, J_c correspond au nombre de permutations couvertes par $\sigma^{-1}\nu$ et on a donc $I_a = J_c$. De la même manière, I_c et J_a décrivent tous deux le nombre de choix pour τ_k et sont égaux. \square

Perspective 3.1.35. *En se concentrant sur le polynôme de valence de l'ordre faible et sur ses propriétés, peut-on obtenir des résultats de structure sur son complexe canonique ? Une bonne compréhension de ce polynôme pourrait permettre de calculer ou d'estimer le nombre d'intervalles de l'ordre faible (suite A007767 de [OEIS]).*

3.2 Complexes canoniques de l'ordre faible

Nous nous intéressons à nouveau au cas particulier de l'ordre faible et de ses quotients. Nous construisons un objet combinatoire *ad hoc* pour décrire les faces de ces complexes canoniques, et présentons un algorithme décrivant leurs faces correspondant aux intervalles réduits à un singleton. Enfin, nous construisons une bijection avec des objets déjà présents dans la littérature décrivant les intervalles de l'ordre faible : les WOIPs de [CPP19].

3.2.1 Complexe sup et inf canoniques de l'ordre faible

On entame cette partie en décrivant précisément les complexes sup et inf canoniques de l'ordre faible, à la lumière des bijections entre diagrammes d'arcs sans croisements et permutations. Pour plus de détails sur cette partie, on peut se référer à [Rea15].

Définition 3.2.1. Le **complexe sans croisements** est le complexe simplicial sur les arcs dont les faces sont les diagrammes d'arcs sans croisements (voir figure 3.3).

Le théorème 1.2.16 se reformule ainsi :

Corollaire 3.2.2. *Les faces de $\mathcal{C}_{\vee\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_n)$ (resp. $\mathcal{C}_{\wedge\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_n)$) sont exactement les collections de sup (resp. inf) irréductibles dont les arcs associés ne se croisent pas, i.e., les NCADs. Par conséquent, le complexe sans croisements est isomorphe au complexe sup canonique (resp. inf canonique) de l'ordre faible (voir figure 3.4).*

Enfin, les applications κ_{\vee} et κ_{\wedge} correspondent dans l'ordre faible à un simple changement de couleur des arcs :

Proposition 3.2.3. *Soit α un arc, alors $\kappa_{\vee}(\sigma_{\wedge}(\alpha)) = \sigma_{\vee}(\alpha)$ et $\kappa_{\wedge}(\sigma_{\vee}(\alpha)) = \sigma_{\wedge}(\alpha)$.*

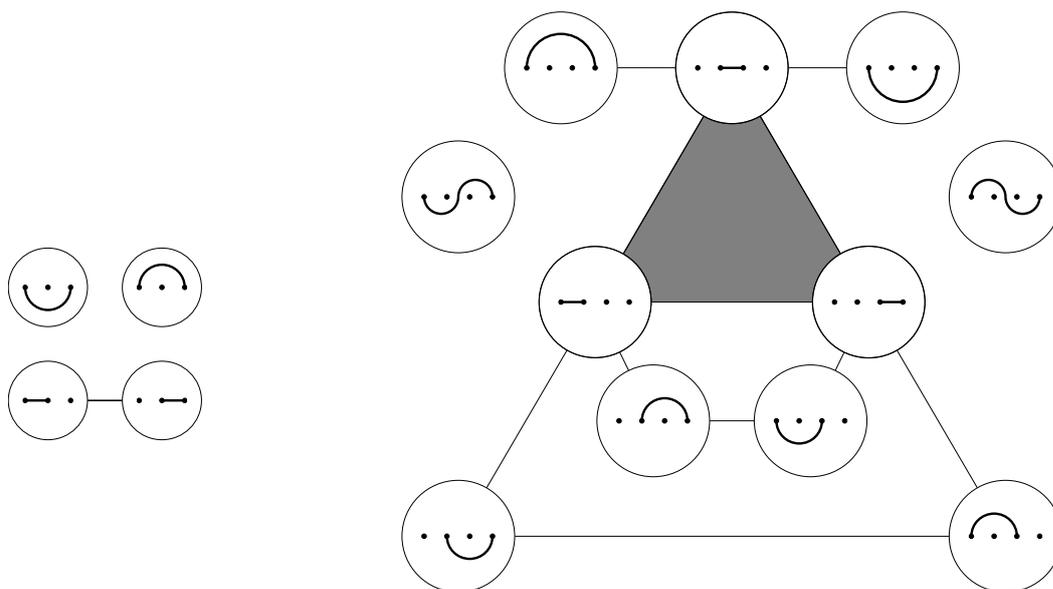


FIGURE 3.3 – Complexes sans croisements de tailles 3 et 4.

3.2.2 Ordre faible sur les arcs

En préambule de l'étude du complexe canonique de l'ordre faible, observons la manière dont l'ordre faible se traduit sur les permutations à une descente (resp. montée), *i.e.*, sur les arcs. Le lemme suivant, simple mais très utile dans la suite, est une conséquence directe de la définition 1.2.14 de σ_{\vee} et σ_{\wedge} :

Lemme 3.2.4. *Soit $\alpha = (a, b, A, B)$ un arc et $1 \leq u < v \leq n$. La paire (u, v) est une inversion de $\sigma_{\vee}(\alpha)$ (resp. $\sigma_{\wedge}(\alpha)$) si et seulement si $u \in B \cup \{a\}$ et $v \in A \cup \{b\}$ (resp. $u \notin A \cup \{a\}$ et $b \notin B \cup \{b\}$).*

Corollaire 3.2.5. *Soient $\alpha = (a, b, A, B)$ et $\alpha' = (a', b', A', B')$ deux arcs de même taille. On a :*

- (i) $\sigma_{\vee}(\alpha) \leq \sigma_{\vee}(\alpha')$ si et seulement si $a \in B' \cup \{a'\}$ et $b \in A' \cup \{b'\}$, et $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$,
- (ii) $\sigma_{\wedge}(\alpha) \leq \sigma_{\wedge}(\alpha')$ si et seulement si $a' \in B \cup \{a\}$ et $b' \in A \cup \{b\}$, et $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$,
- (iii) $\sigma_{\vee}(\alpha) \leq \sigma_{\wedge}(\alpha')$ si et seulement s'il n'existe aucune paire $1 \leq u < v \leq n$ telle que $u \in (A' \cup \{a'\}) \cap (B \cup \{a\})$ et $v \in (A \cup \{b\}) \cap (B' \cup \{b'\})$.

Remarque 3.2.6. Le point (iii) du corollaire précédent peut se reformuler de manière plus intuitive : $\sigma_{\vee}(\alpha) \leq \sigma_{\wedge}(\alpha')$ si et seulement si les arcs α et α' ne se croisent pas, ou s'il se croisent alors que α est *montant* et α' est *descendant*. La formule à vérifier est en effet une relaxation de la formule de croisement de la définition 1.2.13 (voir figure 3.6 ou aucun arc rouge ne croise un arc bleu en ce sens faible).

Remarque 3.2.7. Sur le dessin, la permutation $\sigma_{\vee}(\alpha)$ est inférieure à la permutation $\sigma_{\vee}(\alpha')$ si et seulement si l'arc α est un sous-arc de α' avec une extrémité gauche choisie (faiblement) au dessus de α' et une extrémité droite choisie (faiblement) en dessous de α . L'arc α couvre donc au plus deux arcs : l'arc $(\min(B), b, A \cap]\min(B), b[, B \setminus \{\min(B)\})$ en tronquant à gauche et l'arc $(a, \max(A), A \setminus \{\max(A)\}, B \cap]a, \max(A)[)$ en tronquant à droite. Les arcs qui ne couvrent

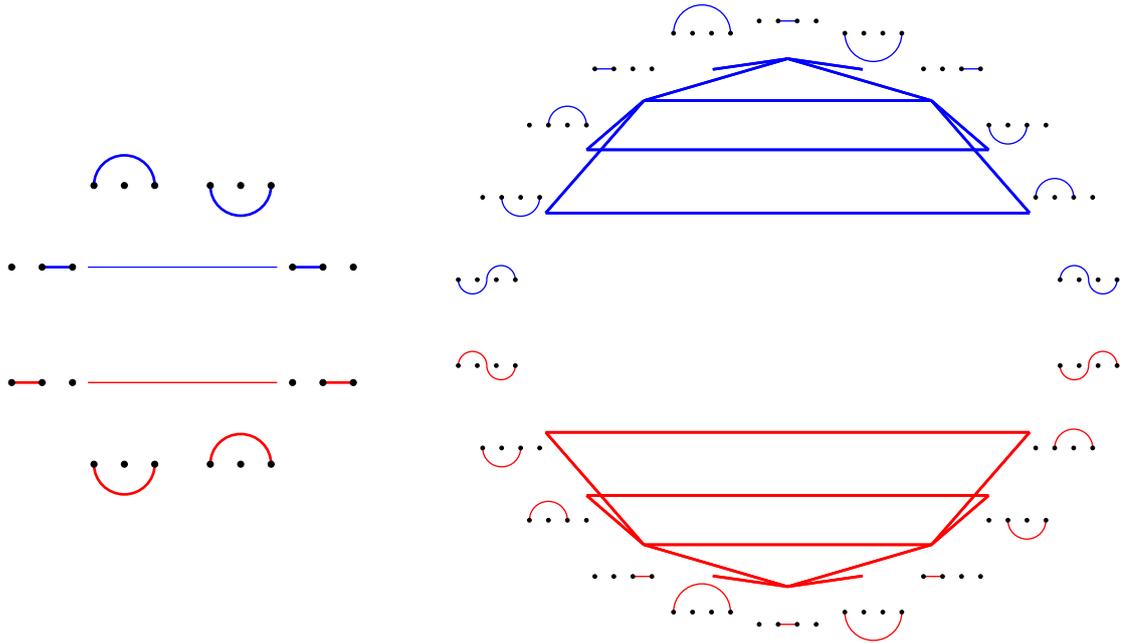


FIGURE 3.4 – Les complexes sup et inf canoniques des ordres faibles de taille 3 et 4, étiquetés par les arcs. La disposition en cercle est à rapprocher de celle des figures 3.2, 3.7 et 3.8. On constate bien que les complexes sup et inf canoniques de l'ordre faible sont isomorphes aux complexes sans croisements de la figure 3.3.

qu'un unique autre arc sont exactement les arcs (a, b, A, B) avec $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ (voir figure 3.5).

Remarque 3.2.8. L'ordre faible sur les arcs peut être construit de deux manières : comme l'ordre induit à l'ordre faible par les sup irréductibles ou comme un sous-ordre de l'ordre de forçage (en sélectionnant les relations de l'ordre faible sur les arcs correspondant bien à des relations de l'ordre de forçage).

Remarque 3.2.9. On fournit quelques résultats d'énumération sur le poset induit par l'ordre faible de taille n sur les arcs. Celui-ci possède :

- (i) $E_n = 2^n - n - 1$ éléments (suite A000295 de [OEIS], voir proposition 1.2.32),
- (ii) $2^{n+1} - n^2 - n - 2$ relations de couverture (suite A324172 de [OEIS], comptant les arcs mixtes de taille $n + 1$, ou les parties de $[n + 1]$ qui croisent leur complémentaire),
- (iii) $n(n + 1)2^{n-2}$ relations (suite A001788 de [OEIS]).

3.2.3 Bidiagrammes d'arcs à semi-croisements

On introduit à présent l'objet central de cette partie :

Définition 3.2.10. Un **bidiagramme d'arcs à semi-croisements** ou **SCAB**¹ est une union disjointe $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$ de diagrammes d'arcs sans croisements telle que pour toute paire d'arcs $\alpha_\vee \in \delta_\vee$

1. De l'anglais *Semi-Crossing Arc Bidiagram*, en référence aux NCADs.

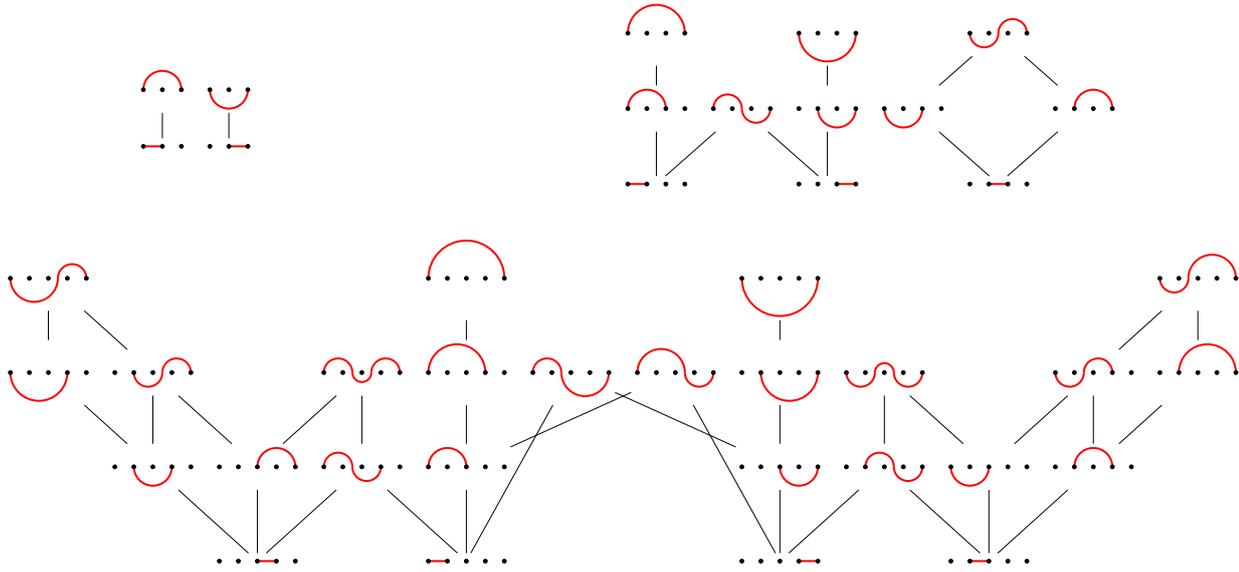


FIGURE 3.5 – Posets induits aux ordres faibles de taille 3 à 5 par leurs sup irréductibles, étiquetés par les arcs correspondants.

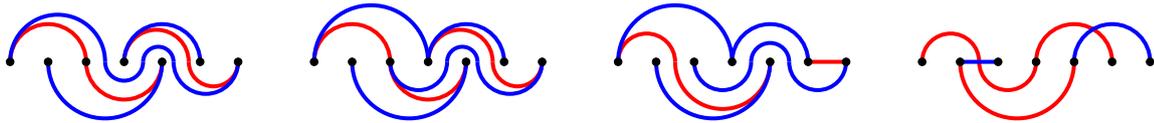


FIGURE 3.6 – Quatre exemples de SCABs correspondant aux intervalles $[2531746, 2531746]$, $[2531746, 2537146]$, $[2513476, 2537146]$ et $[5264137, 6574231]$.

et $\alpha_\wedge \in \delta_\wedge$, on a $\sigma_\vee(\alpha) \leq \sigma_\wedge(\alpha')$ (voir le corollaire 3.2.5 (iii) pour une formulation plus pédestre, la remarque 3.2.6 pour une formulation plus vulgaire et la figure 3.6 pour une famille d'exemples).

Le **complexe de semi-croisement** est le complexe simplicial dont l'ensemble de base contient deux copies α_\vee et α_\wedge de chaque arc α et dont les faces sont les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements (voir figures 3.7 et 3.8).

Notre intérêt pour ce complexe provient du fait qu'il donne une interprétation combinatoire du complexe canonique de l'ordre faible :

Théorème 3.2.11. *L'application $[\sigma, \nu] \mapsto \delta_\vee(\sigma) \sqcup \delta_\wedge(\nu)$ est une bijection entre les intervalles de l'ordre faible \mathfrak{S}_n et les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements. Le complexe canonique de l'ordre faible est donc isomorphe au complexe de semi-croisement.*

Démonstration. D'après le théorème 1.2.16, les applications δ_\vee and δ_\wedge sont deux bijections des permutations dans les diagrammes d'arcs sans croisements. De plus, $\sigma < \nu$ si et seulement si tous les éléments de $\mathbf{cjr}(\sigma)$ sont inférieurs à tous les éléments de $\mathbf{cmr}(\nu)$. Ceci équivaut à dire que chaque arc de $\delta_\vee(\sigma)$ *semi-croise* chaque arc de $\delta_\wedge(\tau)$ par le corollaire 3.2.5 (iii). Ainsi, $[\sigma, \nu] \mapsto \delta_\vee(\sigma) \sqcup \delta_\wedge(\nu)$ est une bijection des intervalles de l'ordre faible aux bidiagrammes d'arcs à semi-croisements. Enfin, $\delta_\vee(\sigma) \sqcup \delta_\wedge(\tau)$ est la représentation canonique de l'intervalle $[\sigma, \tau]$ puisque $\delta_\vee(\sigma)$ est la représentation sup canonique de σ et $\delta_\wedge(\tau)$ est la représentation inf canonique de τ . \square

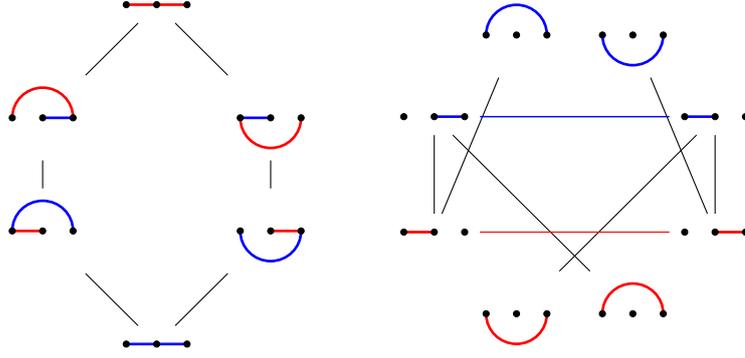


FIGURE 3.7 – L'ordre faible de taille 3 étiqueté par les SCABs correspondant aux singletons (gauche) et son complexe canonique $\mathcal{CC}(\mathfrak{S}_3)$ étiqueté par les arcs (droite).

	0	1		0	1	2		0	1	2	3	
0	1	1		0	1	4	1	0	1	11	11	1
1	1	0		1	4	6	0	1	11	54	24	0
				2	1	0	0	2	11	24	2	0
								3	1	0	0	0

	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4	5	
0	1	26	66	26	1		0	1	57	302	302	57	1
1	26	300	420	80	0		1	57	1340	4145	2505	240	0
2	66	420	320	20	0		2	302	4145	8270	3035	120	0
3	26	80	20	0	0		3	302	2505	3035	562	5	0
4	1	0	0	0	0		4	57	240	120	5	0	0
							5	1	0	0	0	0	0

TABLE 3.1 – Nombres de bidiagrammes d'arcs à semi-croisements $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$ en fonction des quantités $|\delta_\vee|$ et $|\delta_\wedge|$ pour n allant de 2 à 6.

Remarque 3.2.12. On consigne dans la Table 3.1 les nombres de bidiagrammes d'arcs à semi-croisements $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$ en fonction des quantités $|\delta_\vee|$ et $|\delta_\wedge|$ pour n allant de 2 à 6. Ces valeurs correspondent aux coefficients de la spécialisation du polynôme de valence $\mathbb{D}_{\mathfrak{S}_n}(1, x, y, 1)$ de la proposition 3.1.30.

On remarque que :

- les valeurs de la première colonne (resp. ligne) de chaque table correspondent aux intervalles $[\sigma, w_\circ]$ (resp. $[\text{id}, \sigma]$) triés selon le nombre de descentes (resp. montées) de la permutation σ et sont par conséquent comptées par les nombres eulériens (suite A008292 de [OEIS]),
- les valeurs de la dernière ligne (resp. colonne) de chaque table correspondent à l'intervalle $[w_\circ, w_\circ]$ (resp. $[\text{id}, \text{id}]$).

Proposition 3.2.13. Les applications $\kappa \circ \cdot^\dagger$ et $\kappa \circ \cdot^{\leftrightarrow}$ qui a un arc coloré α_\vee ou α_\wedge , i.e., a un élément de $\mathcal{JI}(\mathfrak{S}_n) \sqcup \mathcal{MI}(\mathfrak{S}_n)$, associent l'arc obtenu par symétrie d'axe horizontal (resp. vertical) de l'autre couleur α_\wedge^\dagger ou α_\vee^\dagger (resp. $\alpha_\wedge^{\leftrightarrow}$ ou $\alpha_\vee^{\leftrightarrow}$), induisent deux automorphismes du complexe

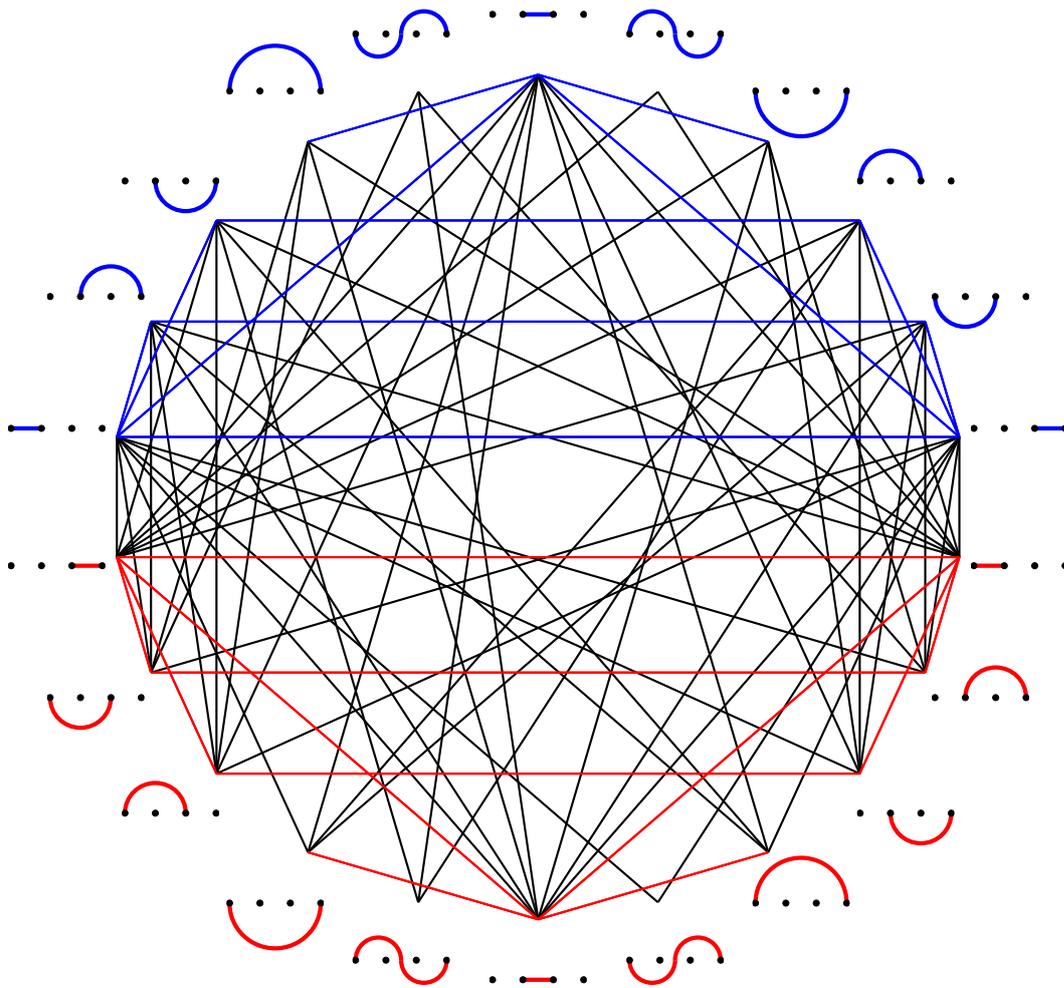


FIGURE 3.8 – Complexe canonique de l'ordre faible de taille 4 étiqueté par les arcs.

canonique $\mathcal{CC}(\mathfrak{S}_n)$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que ces applications envoient une arête sur une arête et une non-arête sur une non-arête. Pour ce faire, observons juste que la condition de semi-croisement de α_\vee et β_\wedge est équivalente à la condition de semi-croisement de β_\vee^\uparrow et α_\wedge^\uparrow , et à la condition de semi-croisement de β_\vee^{\leftarrow} et $\alpha_\wedge^{\leftarrow}$. \square

Corollaire 3.2.14. *La composée des deux applications précédentes qui effectue la symétrie centrale des arcs, induit un automorphisme du complexe canonique $\mathcal{CC}(\mathfrak{S}_n)$ qui fixe les sous-complexes $\mathcal{CV}\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$ et $\mathcal{C}\wedge\mathcal{C}(\mathfrak{S}_n)$.*

Remarque 3.2.15. Les complexes canoniques des ordres faibles de taille 3 et 4 sont présentés aux figures 3.7 et 3.8. Observons que cette dernière n'est pas la même qu'en couverture. La symétrie centrale de la figure 3.8 correspond à l'application κ (i.e., au changement de couleur, voir proposition 3.2.3), et la proposition 3.1.17 prescrit qu'il n'y aura jamais de grande diagonale dans cette représentation. La symétrie d'axe horizontal de la figure en couverture correspond à l'application κ composée avec la symétrie des arcs d'axe vertical. Cela fait apparaître une autre symétrie du complexe, mais l'absence d'arête diagonale y est fortuite.

On caractérise à présent les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements correspondant à des singletons. Comme observé à la figure 3.6, ces SCABs sont, vu comme des graphes, des chemins. On définit donc la **source** $s(\alpha)$ et la **cible** $t(\alpha)$ d'un arc $\alpha := (a, b, A, B)$ dans un bidiagramme d'arcs à semi-croisements $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$ par $s(\alpha) = b$ et $t(\alpha) = a$ si $\alpha \in \delta_\vee$, et $s(\alpha) = a$ et $t(\alpha) = b$ si $\alpha \in \delta_\wedge$.

Proposition 3.2.16. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout bidiagramme d'arcs à semi-croisements $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$:*

- (i) $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge = \delta_\vee(\sigma) \sqcup \delta_\wedge(\sigma)$ pour une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
- (ii) il existe un étiquetage $\alpha_1 = (a_1, b_1, A_1, B_1), \dots, \alpha_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1})$ de $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$ tel que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ et $a_i \notin B_j$ pour $1 \leq i < j \leq n-1$.

Si ces conditions sont vérifiées, alors les arcs de $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$ n'engendrent aucun croisements dans leurs intérieurs.

Démonstration. Dans le sens direct, l'arc α_i vaut $\alpha_\vee(\sigma, i)$ si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ et $\alpha_\wedge(\sigma, i)$ si $\sigma_i < \sigma_{i+1}$. Dans le sens indirect, la permutation σ est donnée par $s(\alpha_1)t(\alpha_1) \dots t(\alpha_{n-1})$. \square

On décrit à présent les SCABs correspondant aux intervalles faciaux du permutoèdre de la définition 1.4.1. De manière générale, la recherche d'une caractérisation des SCAB des intervalles correspondant aux faces d'un quotientope associé à une congruence non-triviale de l'ordre faible est ouverte.

Proposition 3.2.17. *Soit m un mot tassé de taille n .*

- Pour tout $i \in [n-1]$, s'il existe une paire $a < b$ telle que $m_a + 1 = m_b = i + 1$, alors en choisissant a minimal et b maximal vérifiant cette condition, on définit :

$$\alpha_i := (a, b, \{k \in]a, b[\mid m_k \leq m_a\}, \{k \in]a, b[\mid m_k \geq m_b\}).$$

- Pour tout $j \in [n-1]$, s'il existe une paire $a < b$ telle que $m_a = m_b + 1 = j + 1$, alors en choisissant a minimal et b maximal vérifiant cette condition, on définit :

$$\beta_j := (a, b, \{k \in]a, b[\mid m_k \leq m_b\}, \{k \in]a, b[\mid m_k \geq m_a\}).$$

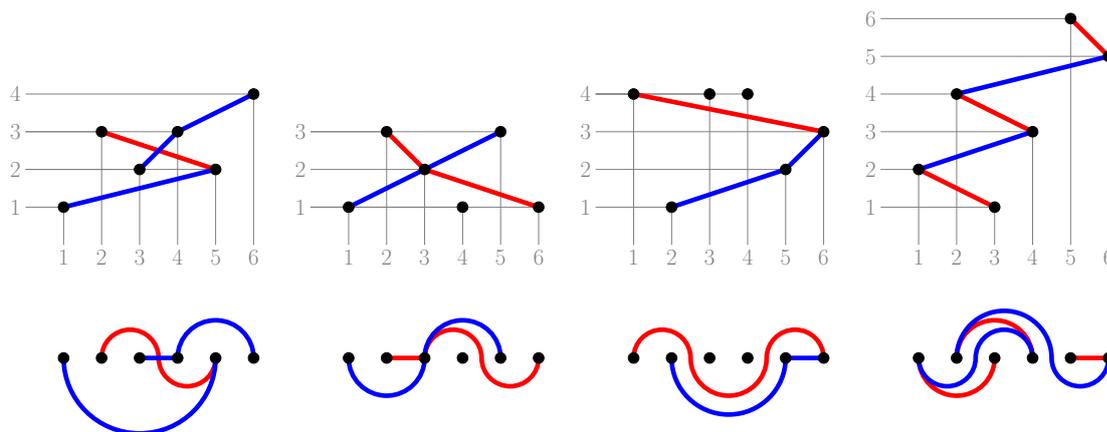


FIGURE 3.9 – Représentation graphique de la proposition 3.2.17. Pour un mot tassé m (ici $m = 132324, 132131, 414423, 241365$ de gauche à droite), on construit la table de m à la manière d’une table de permutation $\{(m_i, i) \mid i \in [n]\}$. On trace ensuite au plus deux arcs entre chaque paire de niveaux consécutifs, en joignant des points de gauche à droite et de droite à gauche avec des segments de pente minimale. Enfin, on *aplatit* le dessin pour obtenir le SCAB de l’intervalle de la face correspondant à m .

Alors le SCAB associé à la face du permutaoèdre de mot tassé m est :

$$\{\alpha_i \mid \exists a < b, m_a + 1 = m_b = i + 1\} \sqcup \{\beta_j \mid \exists a < b, m_a = m_b + 1 = j + 1\}.$$

Des exemples de cette bijection sont représentés figure 3.9.

Démonstration. La face du permutaoèdre associée au mot tassé m est celle dont les sommets forment l’intervalle $[\sigma, \nu]$, où σ est la permutation dont les premières valeurs sont les positions des 1 dans m classées par ordre croissant, puis les positions des 2 dans m classées par ordre croissant et ainsi de suite. On vérifie aisément que le diagramme d’arc sans croisements associé à cette permutation par sa représentation sup canonique (*i.e.*, par l’étude de ses descente) est le premier ensemble d’arcs de l’union disjointe suggérée par l’énoncé. Le raisonnement pour ν est symétrique. \square

On se trouve en général incapables de généraliser cette caractérisation.

Perspective 3.2.18. *Étant donnée une congruence de l’ordre faible, peut-on trouver un critère simple identifiant les intervalles du treillis quotient correspondant à des faces du quotientope associé ?*

Enfin, puisque d’après la proposition 3.2.3 l’application κ correspond pour l’ordre faible au changement de couleur des arcs, on a la description suivante du complexe canonique des quotients de l’ordre faible :

Proposition 3.2.19. *Soit I un idéal de l’ordre de forçage. Le complexe canonique du treillis quotient $\mathfrak{S}_n / \equiv_I$ est isomorphe au sous-complexe du complexe de semi-croisement induit par l’ensemble $\{\alpha_\vee \mid \alpha \in I\} \sqcup \{\alpha_\wedge \mid \alpha \in I\}$.*

On présente une conjecture généralisant la proposition 3.2.16, testée informatiquement sur tous les quotients des ordres faibles de taille au plus 5 :

Conjecture 3.2.20. *Dans un treillis quotient de \mathfrak{S}_n , un SCAB correspondant à un singleton (i.e., à une classe de la congruence sous-jacente) ne contient aucun semi-croisement.*

Perspective 3.2.21. *Les arcs de type B ont été introduits dans [PPR20] et E. Barnard, N. Reading et A. M. Tharp sont en train de développer les diagrammes d'arcs sans croisements de type B et D. Peut-on construire avec ces outils un modèle combinatoire de bidiagrammes d'arcs à semi-croisements en type B ou D ?*

3.2.4 SCABs & WOIPs

Avant d'aller plus loin, nous décrivons combinatoirement les bijections naturelles entre les bidiagrammes d'arcs à semi-croisements et un autre objet introduit dans [CPP19] décrivant les intervalles de l'ordre faible : les WOIPs².

Définition 3.2.22. Soient $P = ([n], \triangleleft)$ un poset et $u < v \in [n]$. Si $u \triangleleft v$, on dit que la relation est **croissante** et on écrit $u \triangleleft v$. Si $v \triangleleft u$, on dit que la relation est **décroissante** et on écrit $u \triangleright v$. En omettant les relations reflexives, on pourra écrire le poset comme l'union disjointe de ses relations décroissantes et de ses relations croissantes : $P = \triangleright \sqcup \triangleleft$.

Proposition 3.2.23 ([BW91, Thm. 6.8]&[CPP19, Prop. 26]). *Soit \triangleleft un poset sur $[n]$. Sont équivalentes :*

- (i) *les extensions linéaires de \triangleleft forment un intervalle $[\sigma, \nu]$ de l'ordre faible,*
- (ii) *il existe deux permutations σ et ν telles que $\sigma \leq_{\mathfrak{S}_n} \nu$ et que les relations croissantes (resp. décroissantes) de \triangleleft sont les versions de ν (resp. inversions de σ),*
- (iii) *pour tout triplet $1 \leq a < b < c \leq n$, $a \triangleleft c \Rightarrow a \triangleleft b$ ou $b \triangleleft c$ et $a \triangleright c \Rightarrow a \triangleright b$ ou $b \triangleright c$.*

*On appelle un tel poset un **WOIP**.*

Afin de construire les bijections avec nos objets, nous introduisons les éléments suivants, illustrés à la figure 3.10 (gauche et milieu).

Définition 3.2.24. Soit $\alpha = (a, b, A, B)$ un arc. On note $\text{inc}(\alpha)$ (resp. $\text{dec}(\alpha)$) l'ensemble des relations (u, v) (resp. (v, u)) pour $u < v$, $u \in A \cup \{a\}$ et $v \in B \cup \{b\}$. Soit δ un NCAD, on note $\text{inc}(\delta)$ (resp. $\text{dec}(\delta)$) la clôture transitive de l'union des ensembles de relations $\{\text{inc}(\alpha_\wedge) \mid \alpha_\wedge \in \delta\}$ (resp. $\{\text{dec}(\alpha_\vee) \mid \alpha_\vee \in \delta\}$). Enfin, à un SCAB $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge$, on associe le poset $\text{dec}(\delta_\vee) \sqcup \text{inc}(\delta_\wedge)$ dont $\text{dec}(\delta_\vee)$ est la partie décroissante et $\text{inc}(\delta_\wedge)$ est la partie croissante, à la manière de la définition 3.2.22 (ce n'est pas immédiat qu'il s'agit d'un poset, voir proposition 3.2.25).

Dans l'autre sens, soit $\triangleright \sqcup \triangleleft$ un WOIP, dont \triangleright est la partie décroissante et \triangleleft la partie croissante. Une relation de couverture croissante (resp. décroissante) $a \triangleleft b$ (resp. $a \triangleright b$) est dite **maximale** s'il n'existe pas de relation de couverture $a' \triangleleft b$ (resp. $a' \triangleright b$) avec $a' < a$ ou $a \triangleleft b'$ (resp. $a \triangleright b'$) avec $b < b'$. À toute relation de couverture croissante (resp. décroissante) maximale $a \triangleleft b$ (resp. $a \triangleright b$), on associe l'arc $\alpha(a \triangleleft b) = (a, b,]a, b[\cap \langle b \rangle_\downarrow,]a, b[\cap \langle a \rangle_\uparrow)$ (resp. $\alpha(a \triangleright b) = (a, b,]a, b[\cap \langle a \rangle_\downarrow,]a, b[\cap \langle b \rangle_\uparrow)$). On note $\delta(\triangleleft)$ (resp. $\delta(\triangleright)$) l'ensemble des $\alpha(a \triangleleft b)$ (resp. $\alpha(a \triangleright b)$) pour toutes les relations de couverture maximales croissantes $a \triangleleft b$. (resp. décroissantes $a \triangleright b$). Enfin, au WOIP $\triangleright \sqcup \triangleleft$, on associe l'union disjointe $\delta(\triangleright) \sqcup \delta(\triangleleft)$.

Proposition 3.2.25. *Les applications $\delta_\vee \sqcup \delta_\wedge \mapsto \text{dec}(\delta_\vee) \sqcup \text{inc}(\delta_\wedge)$ et $\triangleright \sqcup \triangleleft \mapsto \delta(\triangleright) \sqcup \delta(\triangleleft)$ sont des bijections réciproques entre les WOIPs et les SCABs.*

2. De l'anglais **Weak Order Interval Posets**.

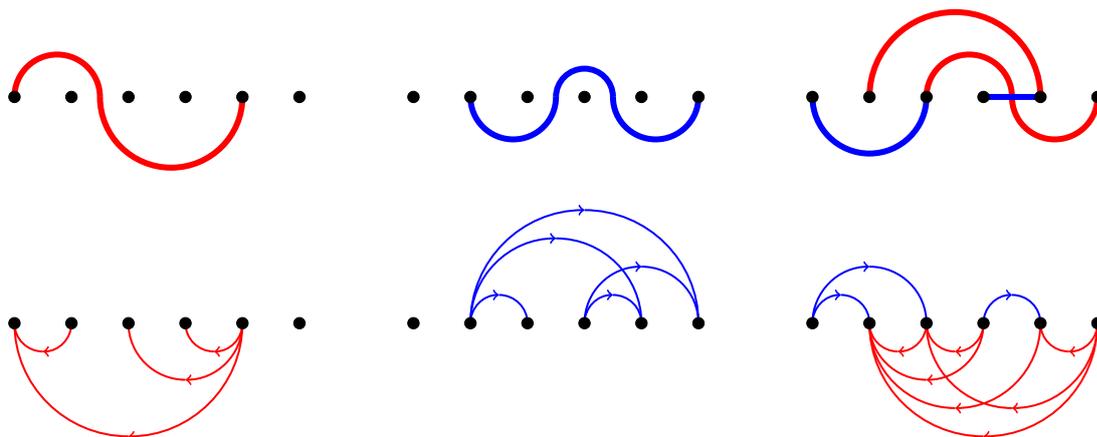


FIGURE 3.10 – La bijection entre les SCABs (haut) et les WOIPs (bas). On représente un WOIP \triangleleft par des arcs joignant $a < b$ par au dessus (resp. en dessous) en bleu (resp. rouge) lorsque $a \triangleleft b$ (resp. $a \triangleright b$).

Démonstration. Soient $[\sigma, \nu]$ un intervalle de \mathfrak{S}_n et $\delta_\nu \sqcup \delta_\lambda$ le SCAB correspondant. D'après le lemme 3.2.4, pour tout arc α_ν , les relations décroissantes composant $\text{dec}(\alpha_\nu)$ sont exactement les inversions de $\sigma_\nu(\alpha_\nu)$. Ainsi, les relations décroissantes de $\text{dec}(\delta_\nu)$ sont exactement les inversions de $\sigma = \vee \{\sigma_\nu(\alpha_\nu) \mid \alpha_\nu \in \delta_\nu\}$. En effet, d'après la proposition 1.2.12, l'ensemble d'inversions d'un supremum de permutations est la clôture transitive de l'union des ensembles d'inversions des permutations. De manière analogue, les relations croissantes composant $\text{inc}(\delta_\lambda)$ sont les versions de $\nu = \wedge \{\sigma_\lambda(\alpha_\lambda) \mid \alpha_\lambda \in \delta_\lambda\}$. Ainsi, grâce à la proposition 3.2.23 (ii), $\text{dec}(\delta_\nu) \sqcup \text{inc}(\delta_\lambda)$ est le WOIP de l'intervalle $[\sigma, \nu]$. Enfin, pour montrer que les deux applications sont bien inverses mutuelles, observons que les relations (a, b) dans $\text{inc}(\delta_\lambda)$ engendrées par les extrémités des arcs (a, b, A, B) de δ_λ sont exactement les relations de couverture maximales de $\text{inc}(\delta_\lambda)$. L'observation duale pour $\text{dec}(\delta_\nu)$ permet de conclure. \square

3.2.5 Applications de Kreweras dans les quotients de l'ordre faible

On décrit enfin les applications de Kreweras (voir définition 3.1.5) dans tous les quotients de l'ordre faible au moyen de bidiagrammes d'arcs à semi-croisements. Pour ce faire, étant donnée une congruence, on relie la représentation sup canonique d'une permutation à celle de la permutation minimale de sa classe, comme illustré figure 3.12.

Proposition 3.2.26. *Soient I un idéal inférieur de l'ordre de forçage et σ une permutation. On note X l'intersection de I et de l'idéal inférieur engendré par les arcs du NCAD $\delta_\nu(\sigma)$ dans l'ordre faible sur les arcs (i.e., l'ordre de la figure 3.5). On note Y l'ensemble des arcs (a, b, A, B) de X tels qu'il existe $a < p < b$ tel que les deux arcs $(a, p, A \cap]a, p[, B \cap]a, p[)$ et $(p, b, A \cap]p, b[, B \cap]p, b[)$ sont tous deux dans X . Alors le NCAD $\delta_\nu(\pi_{\downarrow}^{\equiv I}(\sigma))$ est composé de tous les éléments maximaux de $X \setminus Y$ dans l'ordre faible sur les arcs.*

Démonstration. Au vu du théorème 1.1.49 et de la proposition 3.1.7, $\delta_\nu(\pi_{\downarrow}^{\equiv I}(\sigma))$ est un NCAD dont les arcs sont compris dans X . Plus précisément, il s'agit de la collection d'arcs de X maximisant le supremum de la collection de permutations correspondantes. Ainsi, un arc de Y ne peut pas apparaître dans $\delta_\nu(\pi_{\downarrow}^{\equiv I}(\sigma))$ puisque d'après le lemme 3.2.4, pour tout arc (a, b, A, B)

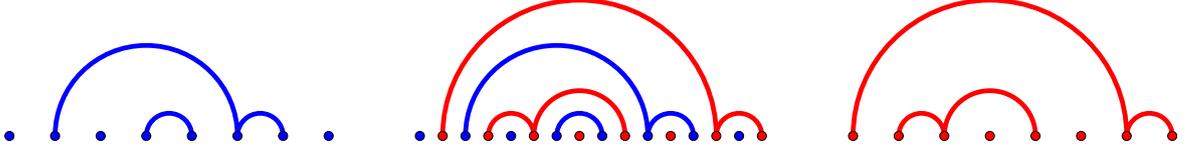


FIGURE 3.11 – Exemple d'application du complément de Kreweras sur une partition non-croisée.

et $a < p < b$,

$$\sigma_{\vee}(a, b, A, B) \leq \sigma_{\vee}(a, p, A \cap]a, p[, B \cap]a, p]) \vee \sigma_{\vee}(p, b, A \cap]p, b[, B \cap]p, b]).$$

Enfin, sous couvert que deux éléments incomparables de $X \setminus Y$ ne se croisent pas, les éléments maximaux de $X \setminus Y$ forment un NCAD, qui vérifie bien la condition de maximalité recherchée. Reste donc juste à montrer que deux éléments incomparables de $X \setminus Y$ ne se croisent pas. Soient $\alpha = (a, b, A, B)$ et $\alpha' = (a', b', A', B')$ deux arcs de X incomparables et se croisant. Sans perte de généralité, on prend $u < v$ tels que $u \in (A \cup \{a\}) \cap (B' \cup \{a'\})$ et $v \in (A' \cup \{b'\}) \cap (B \cup \{b\})$. Quitte à faire un bon choix de u et v , on peut supposer que α et α' se suivent sur $]u, v[$, i.e., que $A \cap]u, v[= A' \cap]u, v[$ et $B \cap]u, v[= B' \cap]u, v[$. Comme α et α' sont incomparables, on a $u \neq a$ ou $v \neq b$. Par hypothèse, α et α' sont inférieurs respectivement à des arcs $\beta = (c, d, C, D)$ et $\beta' = (c', d', C', D')$ dans $\mathbf{cjr}(\sigma)$ et ces deux arcs ne se croisent pas. Observons alors que :

- En faisant une disjonction de cas sur la position de u :
 - Si $u = a'$, puisque $a \neq a'$, on a $u \in A \subset C$ et $u \in D' \cup \{c'\}$. Ainsi, $u \in C \cap (D' \cup \{c'\})$.
 - Si $u \in A \cap B'$, alors $u \in C \cap D'$.
- En faisant une disjonction de cas sur la position de v :
 - Si $v = b'$, puisque $b \neq b'$, on a $v \in B \subset D$ et $v \in C' \cup \{d'\}$. Ainsi, $v \in D \cap (C' \cup \{d'\})$.
 - Si $v \in A' \cap B$, alors $v \in C' \cap D$.

Ainsi, si $u \neq a$ et $v \neq b$, alors β et β' se croisent, ce qui est absurde. On en déduit que parmi ces trois arcs

$$(a, u, A \cap]a, u[, B \cap]a, u]), \quad (u, v, A' \cap]u, v[, B' \cap]u, v]) \quad \text{et} \quad (v, b, A \cap]v, b[, B \cap]v, b]),$$

exactement deux sont non-triviaux, dont le deuxième. De plus, le premier et le troisième sont dans X car α est dans X et le deuxième est dans X car α' est dans X . Ainsi, α est dans Y , ce qui conclut. \square

Corollaire 3.2.27. *La proposition 3.2.26 fournit un algorithme pour le calcul des compléments de Kreweras dans les quotients de l'ordre faible agissant uniquement sur les arcs et diagrammes, plutôt que sur les permutations (voir figure 3.12).*

Exemple 3.2.28. Revenons à l'exemple 1.2.20 de la congruence sylvestre. Rappelons que l'idéal d'arcs correspondant est celui contenant tous les arcs simples de la forme $(a, b,]a, b[, \emptyset)$. L'algorithme décrit en proposition 3.2.26 correspond au complément de Kreweras sur les partitions non-croisées [Kre72]. Représentant une partition non-croisée par des arcs liant les points d'une même part, son complément de Kreweras est obtenu en créant une copie de l'ensemble des points vers la droite, en quinconce, en en liant tous les points d'une même composante connexe du demi-plan privé des arcs de la partition d'origine (voir figure 3.11).

On aimerait pouvoir généraliser la proposition 3.2.26 à des treillis plus généraux, voire à tous les treillis semi-distributifs. Cependant, le rôle joué par l'ensemble Y dans la proposition est spécifique à l'ordre faible et son équivalent dans un treillis quelconque n'est pas encore clair.

2314				
3142				
2143				
4312				

FIGURE 3.12 – Exemples de calcul de $\delta_{\vee}(\pi_{\downarrow}^{\equiv}(\sigma))$ et $\eta_{\vee}^I(\delta_{\wedge})$ dans la congruence triviale, la congruence hypoplaxique, la congruence sylvestre et une congruence générique.

Perspective 3.2.29. *Peut-on décrire un algorithme qui permette le calcul des applications de Kreweras dans un cas plus général ?*

On conclut ce chapitre en présentant la motivation qui nous a amenés à étudier les applications de Kreweras dans l'ordre faible.

Perspective 3.2.30. *Peut-on construire une algèbre de Hopf sur les faces des quotientopes ? De manière cohérente avec le monoïde des permutodres déformés de [AA17] ou avec l'algèbre des diagrammes d'arcs sans croisements décorés de [Pil19] ?*

Index

- [·], 11
- \vee, \wedge , 13
- \triangleleft , 12

- antichaîne, 12
- application
 - de Kreweras, 65
- arête, 27
- arc, 21
 - essentiel, 24

- bidiagramme d'arcs à semi-croisements, 73

- cône
 - de type, 31
- chambre, 29
- $\mathcal{C}\sqrt{\mathcal{C}}()$, $\mathcal{C}\wedge\mathcal{C}()$, 63
- $\mathcal{C}\mathcal{J}\mathcal{I}()$, $\mathcal{C}\mathcal{M}\mathcal{I}()$, 17
- cjr**, **cmr**, 15
- complexe
 - canonique, 66
 - de clique, 15
 - de semi-croisement, 73
 - drapeau, 63, 67
 - inf canonique, 63
 - sans croisements, 21, 71
 - simplicial, 14
 - sup canonique, 63
- con, 17
- cône, 29
- cône
 - normal, 29
- congruence
 - ambrienne, 23
 - d'enlevoèdre, 46
 - de treillis, 17
 - essentielle, 24
 - hypoplaxique, 24
 - sylvestre, 23

- contraction, 17
- coupe, 42
- croisement, 21
- cube, 28

- dec, 79
- descente, 19
- diagramme
 - de Hasse, 12
- diagramme d'arcs
 - sans croisements, 21
- dimension, 27, 29
 - pleine, 28

- enlevoèdre, 46
- ensemble d'inversions, 19
- espace
 - linéal, 32
- η , 65
- éventail, 29
 - complet, 29
 - de tresses, 34
 - essentiel, 29
 - normal, 29
 - permusylvestre, 44
 - plus fin, plus grossier, 29
 - quotient, 37
 - simplicial, 29
- extension, 13
 - linéaire, 13

- face, 14, 27, 29
- facette, 27, 29
- fonction
 - de hauteur, 31
 - sous-modulaire, 35
 - stricte, 35
- forçage, 18

- graphe d'incomparabilité, 12
- H , 33
- H_{ij} , 34
- hyperplan, 27
 - support, 27
- ideal
 - inférieur, 12
 - supérieur, 12
- inégalité
 - de croisement de mur, 32
 - généralisée, 32
 - sous-modulaire, 35
- inc, 79
- inf irréductible, 15
- intervalle, 12
- inversion, 19, 72
- $\mathcal{JI}(), \mathcal{MI}()$, 15
- $K_{\vee}, K_{\wedge}, k_{\vee}, k_{\wedge}$, 16
- $\kappa_{\vee}, \kappa_{\wedge}$, 63
- majorant, 12
- minorant, 12
- mixte, 21
- montée, 19
- mot
 - réduit, 20
 - tassé, 33
- NCAD, 21
- octaèdre, 28
- ordre
 - total, 12
- ordre faible, 20
- \mathcal{P} , 12
- permusylvèdre, 45
- permutarbre, 41
- permutation, 19
- permutoèdre, 33
 - déformé, 35
- $\pi_{\downarrow}^{\equiv}$, 17
- π_{\uparrow}^{\equiv} , 17
- polytope, 27
 - simple, 27
 - simplicial, 27
- poset, 12
 - des régions, 35
 - gradué, 12
 - induit, 13
- pré-ordre, 11
- quotientope, 40
- $r(I)$, 34
- rayon, 29
- relation
 - d'équivalence, 11
 - antisymétrique, 12
 - croissante, 79
 - décroissante, 79
 - de couverture, 12
 - maximale, 79
- représentant, 29
- représentation
 - inf canonique, 15
 - sup canonique, 15
- représentation canonique, 67
- SCAB, 73
- $\sigma_{\vee}, \sigma_{\wedge}$, 21
- simplexe, 28
- simplicial, 29
- sommet, 27
- sous-arc, 22
- sous-ensemble propre, 33
- sous-poset, 13
- sup irréductible, 15
- tesson, 37
- transposition, 19
 - élémentaire, 19, 20
- treillis, 13
 - booléen, 14
 - des antichaînes, 14
 - des cônes, 29
 - des congruences, 17
 - des faces, 29
 - distributif, 15
 - quotient, 17
- type combinatoire, 29
- $\mathcal{UJI}(), \mathcal{UMI}()$, 17
- version, 19

Table des figures

1	Plan du manuscrit	6
1.1	Exemples de posets	13
1.2	Exemples de treillis distributifs	16
1.3	Exemple de treillis de congruence	18
1.4	Ordres faibles de tailles 2 à 4	20
1.5	Construction graphique des NCADs et SCABs	22
1.6	Exemple d'une relation de forçage sur les arcs	23
1.7	Le treillis de Tamari de taille 4 comme quotient de l'ordre faible.	23
1.8	Ordres de forçages sur les arcs	26
1.9	Exemples de polytopes	28
1.10	Treillis des faces du cube et treillis des cônes de son éventail	30
1.11	Exemples de fonctions de hauteur dans et hors d'un cône de type	31
1.12	Permutoèdre Π_4 et éventails de tresses \mathcal{B}_4	34
1.13	Section du cône de type de \mathcal{B}_3	36
1.14	Exemple d'éventail quotient.	37
1.15	Treillis des congruences de \mathfrak{S}_4	38
1.16	Tous les quotientopes de taille 4.	39
2.1	Exemples de permutarbres	42
2.2	Exemples de treillis permusylvestres.	43
2.3	Exemples d'idéaux d'arcs de congruences permusylvestres	44
2.4	Exemples d'éventails permusylvestre et de permusylvèdre	46
2.5	Famille des tessons contenant un arc dans leur intérieur	47
2.6	Permutarbres de la démonstration de la proposition 2.3.14	56
3.1	Exemples de complexes sup et inf canoniques	64
3.2	Exemples de complexes canoniques	68
3.3	Complexes sans croisements de tailles 3 et 4	72
3.4	Complexes sup et inf canoniques de \mathfrak{S}_3 et \mathfrak{S}_4 sur les arcs	73
3.5	Ordres faibles sur les arcs	74
3.6	Exemples de SCABs	74
3.7	Complexe canonique de l'ordre faible de taille 3	75
3.8	Complexe canonique de l'ordre faible de taille 4	76
3.9	Exemple de SCABs faciaux	78
3.10	Exemples de la bijection entre WOIPs et SCABs	80
3.11	Complément de Kreweras classique	81
3.12	Exemple de calcul de $\eta_V^L(\delta_V)$	82

Bibliographie

- [AA17] M. AGUIAR et F. ARDILA. *Hopf monoids and generalized permutahedra*. *arXiv pre-print arXiv :1709.07504* (2017) (cf. p. 82).
- [AP21] D. ALBERTIN et V. PILAUD. *The canonical complex of the weak order*. *arXiv:2111.11553*. 2021 (cf. p. 8, 9, 22, 63).
- [APR21] D. ALBERTIN, V. PILAUD et J. RITTER. *Removahedral congruences versus permutree congruences*. *The Electronic Journal of Combinatorics* 28.4 (2021), P4.8 (cf. p. 7, 32, 41, 44, 46, 47).
- [AH+18] N. ARKANI-HAMED, Y. BAI, S. HE et G. YAN. *Scattering forms and the positive geometry of kinematics, color and the worldsheet*. *Journal of High Energy Physics* 2018.5 (2018), p. 1-78 (cf. p. 60, 62).
- [Bar19] E. BARNARD. *The canonical join complex*. *Electron. J. Combin.* 26.1 (2019), # 1.24, 25 (cf. p. 3, 8, 63, 64, 65).
- [BTZ21] E. BARNARD, G. TODOROV et S. ZHU. *Dynamical combinatorics and torsion classes*. *Journal of Pure and Applied Algebra* 225.9 (2021), p. 106642 (cf. p. 8, 65).
- [Bjö84] A. BJÖRNER. *Orderings of Coxeter groups*. *Contemp. Math* 34 (1984), p. 175-195 (cf. p. 2, 20).
- [BEZ90] A. BJÖRNER, P. H. EDELMAN et G. M. ZIEGLER. *Hyperplane arrangements with a lattice of regions*. *Discrete & computational geometry* 5.3 (1990), p. 263-288 (cf. p. 2, 35).
- [BW91] A. BJÖRNER et M. L. WACHS. *Permutation statistics and linear extensions of posets*. *J. Combin. Theory Ser. A* 58.1 (1991), p. 85-114 (cf. p. 79).
- [BW97] A. BJÖRNER et M. L. WACHS. *Shellable nonpure complexes and posets. II*. *Transactions of the American Mathematical Society* (1997), p. 3945-3975 (cf. p. 3).
- [CFZ02] F. CHAPOTON, S. FOMIN et A. ZELEVINSKY. *Polytopal realizations of generalized associahedra*. *Canadian Mathematical Bulletin* 45.4 (2002), p. 537-566 (cf. p. 7, 8, 32).
- [Cha17] F. CHAPOTON. *Une note sur les intervalles de Tamari* (2017). *arXiv:1711.05027* (cf. p. 9, 69).
- [CP17] G. CHATEL et V. PILAUD. *Cambrian Hopf algebras*. *Advances in Mathematics* 311 (2017), p. 598-633 (cf. p. 21, 43).
- [CPP19] G. CHATEL, V. PILAUD et V. PONS. *The weak order on integer posets*. *Algebraic Combinatorics* 2.1 (2019), p. 1-48 (cf. p. 9, 71, 79).

- [DLRS10] J. DE LOERA, J. RAMBAU et F. SANTOS. *Triangulations : structures for algorithms and applications*. T. 25. Springer Science & Business Media, 2010 (cf. p. 31, 33).
- [Ede84] P. H. EDELMAN. *A partial order on the regions of \mathbb{R}^n dissected by hyperplanes*. *Transactions of the American Mathematical Society* 283.2 (1984), p. 617-631 (cf. p. 2, 35).
- [Edm70] J. EDMONDS. *Submodular functions, matroids, and certain polyhedra*, *Combinatorial Structures and Their Applications*, R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schonheim, eds. New York (1970), p. 69-87 (cf. p. 7, 35, 36).
- [FN95] R. FREESE et J. B. NATION. *Free lattices*. *Mathematical Surveys and Monographs* 75 (1995), p. 93-106 (cf. p. 16).
- [FN42] N. FUNAYAMA et T. NAKAYAMA. 109. *On the Distributivity of a Lattice of Lattice-congruences*. *Proceedings of the Imperial Academy* 18.9 (1942), p. 553-554 (cf. p. 17).
- [GKZ08] I. GELFAND, M. KAPRANOV et A. V. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Reprint of the 1994 edition. *Modern Birkhäuser Classics*. 2008 (cf. p. 31, 33).
- [Grä11] G. GRÄTZER. *Lattice theory : foundation*. Springer Science & Business Media, 2011 (cf. p. 11).
- [GR63] G.-T. GUILBAUD et P. ROSENSTIEHL. *Analyse algébrique d'un scrutin*. *Mathématiques et Sciences humaines* 4 (1963), p. 9-33 (cf. p. 2, 19, 20).
- [HNT05] F. HIVERT, J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON. *The algebra of binary search trees*. *Theoret. Comput. Sci.* 339.1 (2005), p. 129-165 (cf. p. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 21, 23).
- [HL07] C. HOHLWEG et C. E. LANGE. *Realizations of the associahedron and cyclohedron*. *Discrete & Computational Geometry* 37.4 (2007), p. 517-543 (cf. p. 5, 7, 40, 45).
- [HT72] S. HUANG et D. TAMARI. *Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 13.1 (1972), p. 7-13 (cf. p. 2, 3, 23, 43).
- [Kre72] G. KREWERAS. *Sur les partitions non croisées d'un cycle*. *Discrete mathematics* 1.4 (1972), p. 333-350 (cf. p. 9, 65, 81).
- [KT97] D. KROB et J.-Y. THIBON. *Noncommutative symmetric functions IV : Quantum linear groups and Hecke algebras at $q=0$* . *Journal of Algebraic Combinatorics* 6.4 (1997), p. 339-376 (cf. p. 7, 24).
- [LP18] C. LANGE et V. PILAUD. *Associahedra via spines*. *Combinatorica* 38.2 (2018), p. 443-486 (cf. p. 5, 7, 40, 45).
- [Le 94] C. LE CONTE DE POLY-BARBUT. *Sur les treillis de Coxeter finis*. *Math. Inform. Sci. Humaines* 125 (1994), p. 41-57 (cf. p. 3, 20).
- [Lod04] J.-L. LODAY. *Realization of the Stasheff polytope*. *Arch. Math* 83 (2004), p. 267-278 (cf. p. 3, 4, 7, 40, 45).
- [LR98] J.-L. LODAY et M. O. RONCO. *Hopf algebra of the planar binary trees*. *Adv. Math.* 139.2 (1998), p. 293-309 (cf. p. 6, 7, 21, 23).
- [McM73] P. MCMULLEN. *Representations of polytopes and polyhedral sets*. *Geometriae dedicata* 2.1 (1973), p. 83-99 (cf. p. 7, 31).
- [Nov00] J.-C. NOVELLI. *On the hypoplactic monoid*. *Discrete Mathematics* 217.1-3 (2000), p. 315-336 (cf. p. 6, 7, 24).

- [PPR20] A. PADROL, V. PILAUD et J. RITTER. *Shard polytopes* (2020). [arXiv:2007.01008](https://arxiv.org/abs/2007.01008) (cf. p. 7, 27, 36, 40, 79).
- [PPPP19] A. PADROL, Y. PALU, V. PILAUD et P.-G. PLAMONDON. *Associahedra for finite type cluster algebras and minimal relations between g-vectors* (2019). [arXiv:1906.06861](https://arxiv.org/abs/1906.06861) (cf. p. 8, 33, 53).
- [Pil17] V. PILAUD. *Which nestohedra are removalahedra ?* *Revista Colombiana de Matemáticas* 51.1 (2017), p. 21-42 (cf. p. 46).
- [Pil19] V. PILAUD. *Hopf algebras on decorated noncrossing arc diagrams*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 161 (2019), p. 486-507 (cf. p. 21, 82).
- [PP18] V. PILAUD et V. PONS. *Permutrees*. *Algebraic Combinatorics* 1.2 (2018), p. 173-224 (cf. p. 5, 7, 21, 41, 42, 43, 44, 45, 46).
- [PS19] V. PILAUD et F. SANTOS. *Quotientopes*. *Bulletin of the London Mathematical Society* 51.3 (2019), p. 406-420 (cf. p. 4, 7, 21, 23, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 44, 46).
- [Pos09] A. POSTNIKOV. *Permutohedra, associahedra, and beyond*. *International Mathematics Research Notices* 2009.6 (2009), p. 1026-1106 (cf. p. 35).
- [PRW08] A. POSTNIKOV, V. REINER et L. K. WILLIAMS. *Faces of generalized permutohedra*. *Doc. Math.* 13 (2008), p. 207-273 (cf. p. 35).
- [Rea03] N. READING. *Lattice and order properties of the poset of regions in a hyperplane arrangement*. *Algebra Universalis* 50.2 (2003), p. 179-205 (cf. p. 37).
- [Rea04] N. READING. *Lattice congruences of the weak order*. *Order* 21.4 (2004), p. 315-344 (cf. p. 24, 43).
- [Rea05] N. READING. *Lattice congruences, fans and Hopf algebras*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 110.2 (2005), p. 237-273 (cf. p. 4, 7, 37, 47).
- [Rea06] N. READING. *Cambrian Lattices*. *Adv. Math.* 205.2 (2006), p. 313-353 (cf. p. 6, 7, 23, 24, 42, 43).
- [Rea11] N. READING. *Noncrossing partitions and the shard intersection order*. *Journal of Algebraic Combinatorics* 33.4 (2011), p. 483-530 (cf. p. 47).
- [Rea15] N. READING. *Noncrossing arc diagrams and canonical join representations*. *SIAM J. Discrete Math.* 29.2 (2015), p. 736-750 (cf. p. 3, 4, 6, 8, 9, 21, 22, 63, 71).
- [Rea16b] N. READING. *Finite Coxeter groups and the weak order*. *Lattice theory : special topics and applications. Vol. 2*. Birkhäuser/Springer, Cham, 2016, p. 489-561 (cf. p. 4).
- [Rea16a] N. READING. *Lattice theory of the poset of regions*. *Lattice theory : special topics and applications. Vol. 2*. Birkhäuser/Springer, Cham, 2016, p. 399-487 (cf. p. 2, 17, 18, 19, 37).
- [RS09] N. READING et D. E. SPEYER. *Cambrian fans*. *Journal of the European Mathematical Society* 11.2 (2009), p. 407-447 (cf. p. 45).
- [Rit21] J. RITTER. *Shard polytopes and quotientopes for lattice congruences of the weak order*. Thèse de doct. Institut Polytechnique de Paris, 2021 (cf. p. 47).
- [SS93] S. SHNIDER et S. STERNBERG. *Quantum groups from coalgebras to Drinfeld algebras*. *International Press* (1993) (cf. p. 3, 4, 7, 40, 45).
- [Sta86] R. P. STANLEY. *Enumerative combinatorics*, Wadsworth Publ. Co., Belmont, CA 1 (1986) (cf. p. 3, 15).
- [Sta08] R. P. STANLEY. *Catalan addendum*. 2008 (cf. p. 2).

- [SF99] R. P. STANLEY et S. FOMIN. *Enumerative combinatorics. Vol. 2, volume 62 of. Cambridge Studies in Advanced Mathematics* (1999) (cf. p. 25).
- [Tam62] D. TAMARI. *The algebra of bracketings and their enumeration. Nieuw Arch. Wisk* 3.10 (1962), p. 131-146 (cf. p. 2, 23, 43).
- [OEIS] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <http://oeis.org>. 2010 (cf. p. 26, 27, 52, 55, 59, 71, 73, 75).
- [Sage] THE SAGE DEVELOPERS. *Sage Mathematics Software*. <http://www.sagemath.org>. 2016 (cf. p. 1).
- [Zie93] G. M. ZIEGLER. *Lectures on Polytopes*. 1993 (cf. p. 7, 27, 34).

Résumé

Combinatoire et géométrie des treillis quotients de l'ordre faible

Mots clés : treillis, semi-distributivité, représentation canonique, complexe canonique, congruence de treillis, permutation, ordre faible, permutoèdre, diagramme d'arcs, arbre binaire, treillis de Tamari, associaèdre, permutarbre, éventail quotient, quotientope, cône de type.

Les **treillis** sont des posets où toute famille d'éléments admet un supremum et un infimum. Un treillis est **sup semi-distributif** dès lors que tout élément s'écrit de manière unique comme le supremum d'une antichaîne minimale pour l'inclusion et minimale dans le treillis. Cette antichaîne est la **représentation sup canonique** de cet élément. Un élément qui est sa propre représentation sup canonique est appelé **sup irréductible**. Le **complexe sup canonique** d'un treillis sup semi-distributif est le complexe simplicial dont les faces sont les ensembles de sup irréductibles qui forment une représentation sup canonique. Cette thèse introduit le **complexe canonique** d'un treillis (sup et inf) semi-distributif, qui contient les complexes sup et inf canoniques et encode tous les intervalles du treillis. Ces complexes sont compatibles avec les treillis quotients, au sens où le complexe canonique d'un quotient est le sous-complexe du complexe canonique du treillis engendré par les sup et inf irréductibles non contractés dans le quotient.

L'**ordre faible** sur les permutations est un exemple fondamental de treillis semi-distributif, central dans cette thèse. On utilise fortement le modèle combinatoire des **arcs** et des **diagrammes d'arcs sans croisements** développé par N. Reading pour décrire les sup irréductibles et les représentations sup canoniques de l'ordre faible. On montre que le complexe canonique de l'ordre faible est isomorphe au **complexe de semi-croisement** sur les arcs. On s'intéresse ensuite aux quotients de l'ordre faible, comme le classique **treillis de Tamari** obtenu par la **congruence sylvestre**, et les **treillis permusylvestres** de V. Pilaud et V. Pons qui interpolent entre l'ordre faible, le treillis de Tamari et le treillis booléen. Ces treillis ont été réalisés comme graphes des **permusylvèdres**, qui généralisent l'**associaèdre** de J.-L. Loday. Ces polytopes sont des **enlevoèdres**, puisqu'ils sont obtenus en supprimant des inégalités de la description des facettes du **permutoèdre**. Cette thèse montre que parmi tous les treillis quotients de l'ordre faible, seuls les treillis permusylvestres peuvent se réaliser comme enlevoèdres, ce qui justifie la nécessité des constructions alternatives pour tous les **quotientopes**. Ceci amène à la description des **cônes de type** des éventails permusylvestres.

Abstract

Combinatorics and geometry of lattice quotients of the weak order

Keywords : lattice, semi-distributivity, canonical representation, canonical complex, lattice congruence, permutation, weak order, permutohedron, arc diagram, binary tree, Tamari lattice, associahedron, permutree, quotient fan, quotientope, type cone.

Lattices are posets where any family of elements admits a join and a meet. A lattice is **join semi-distributive** when every element is uniquely written as the join of an antichain minimal for the inclusion and minimal in the lattice. This antichain is the **canonical join representation** of this element. An element that is its own canonical join representation is called **join irreducible**. The **canonical join complex** of a join semi-distributive lattice is the simplicial complex whose faces are the sets of join irreducibles which form a canonical join representation. This thesis introduces the **canonical complex** of a (join and meet) semi-distributive lattice, which contains the canonical join and meet complexes and encodes all the intervals of the lattice. These complexes are compatible with lattice quotients, in the sense that the canonical complex of a quotient is the subcomplex of the canonical complex of the lattice generated by the join- and meet irreducibles that are not contracted in the quotient.

The **weak order** on permutations is a fundamental example of a semi-distributive lattice, central in this thesis. We extensively use the combinatorial model of **arcs** and **non-crossing arc diagrams** developed by N. Reading to describe the join irreducibles and canonical join representations of the weak order. We show that the canonical complex of the weak order is isomorphic to the **semi-crossing complex** on arcs. We then focus on quotients of the weak order, such as the classical **Tamari lattice** obtained by the **sylvester congruence**, and the **permutree lattices** of V. Pilaud and V. Pons that interpolate between the weak order, the Tamari lattice and the boolean lattice. These lattices were realized as graphs of the **permutreehedra**, generalizing J.-L. Loday's **associahedron**. These polytopes are **removahedra** as they are obtained by removing inequalities from the facet description of the **permutohedron**. This thesis shows that the permutree lattices are the only lattice quotients of the weak order that can be realized as removahedra, which justifies the need for alternative constructions for all **quotientopes**. This leads to the description of the **type cones** of permutree fans.