HAL
open science

Sur la résolution des équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale

Alexandre Yotopoulos

To cite this version:

Alexandre Yotopoulos. Sur la résolution des équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris Cité, 2021. Français. NNT : 2021UNIP7380 . tel-04212448

HAL Id: tel-04212448

https://theses.hal.science/tel-04212448

Submitted on 20 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris

École doctorale **Sciences Mathématiques de Paris-Centre (ED386)**

Laboratoire IMJ-PRG

Sur la résolution des équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale

Par Alexandre Yotopoulos

Thèse de doctorat de Mathématiques

Dirigée par Isabelle Gallagher

Présentée et soutenue publiquement le 8 juillet 2021

Devant un jury composé de :

M. Michel Broué, PR, Université de Paris, Président du Jury

M. Frédéric Charve, MC, Université de Paris-Est Créteil, Examinateur

Mme Anne-Laure Dalibard, PR, Sorbonne Université, Rapporteuse

Mme Isabelle Gallagher, PR, Université de Paris et ENS Paris, Directrice

M. Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, PR, Université d'Evry, Rapporteur

M. Georges Skandalis, PR, Université de Paris, Examinateur

Titre : Sur la résolution des équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale

Résumé : On étudie les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles, homogènes et incompressibles, en l'absence de viscosité dans une direction. On montre qu'il existe des données initiales arbitrairement grandes générant une solution globale unique, dont la caractéristique est qu'elles sont lentement variables dans la direction où la viscosité est manquante. La difficulté provient de l'absence totale d'effet régularisant dans cette direction.

Mots clefs : équation de Navier-Stokes, théorie de Littlewood-Paley, viscosité anisotrope

Title : Solving the Navier-Stokes equations without vertical viscosity

Abstract : This work concerns the study of the incompressible, inhomogeneous three dimensional Navier-Stokes equations, in the absence of viscosity in one direction. We show that there are arbitrarily large initial data generating a unique global solution ; their main feature is that they are slowly varying in the direction where the viscosity is missing. The difficulty comes from the absence of any regularizing effect in that direction.

Keywords : Navier-Stokes equation, Littlewood-Paley theory, anisotropic viscosity

Février 2020

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont permis d'entreprendre des études de mathématiques et qui m'ont accompagné jusqu'à ce jour.

Je remercie chaleureusement François Chouquet, professeur de philosophie et directeur du Service des Etudiants Empêchés (SEE) et avec lui, Nathalie Cuny secrétaire du SEE. Ce service créé à la fin des années 70, à l'université Paris VII offre aux prisonniers qui le souhaitent la possibilité de poursuivre des études supérieures. Dans les conditions très difficiles qui étaient et sont toujours les miennes, Nathalie Cuny a été un soutien inestimable : s'occuper de mes inscriptions, transmettre mes copies aux enseignants, m'envoyer leurs remarques et leurs corrections m'envoyer aussi les livres qui m'étaient nécessaires.

L'usage d'un ordinateur, qui semblait pourtant indispensable à mes études, m'a été interdit. J'en ai fait plusieurs fois la demande. L'université elle-même a adressé une demande officielle à l'administration pénitentiaire grecque qui a refusé d'y accéder, alors que le Défenseur des Droits (grec) avait pris une position favorable. Sans ordinateur, tout a été très long. Tous mes devoirs étaient manuscrits ! Tout devait passer par le courrier. Ma compagne devait les poster, elle les envoyait à Nathalie Cuny qui les transmettait à chaque enseignant et le retour suivait le même itinéraire... qui n'était pas le plus rapide mais le plus sûr pour éviter des "pertes" ! Sans ordinateur, je me répète, je n'ai pu prendre l'informatique en option. Je remercie encore le professeur François Chouquet qui m'a accepté en philo.

Merci à tous les professeurs qui ont accepté le surcroît de travail que représentaient mes études, celles d'un étudiant en prison, éloigné et avec qui un échange direct était impossible. Ils m'ont guidé, corrigé, procuré livres et articles. Je cite pêle-mêle Véronique Gautheron, Paul Gérardin, Andrzej Zuk, Jean Malifaud et Daniel Meyer et j'en oublie beaucoup.

Et bien sûr, je veux témoigner toute ma reconnaissance à ma

directrice de thèse, Isabelle Gallagher, qui m'a guidé tout au long de nos échanges téléphoniques durant tout d'années. Nous n'avions pas d'autre moyen de communiquer. En fait personne ne peut m'appeler, c'est moi qui dois le faire d'un téléphone à carte dans les couloirs de la prison. Ce ne sont pas les conditions idéales pour parler mathématiques debout, sans prendre de notes et sans tableau pour faire des calculs, au milieu du vacarme d'une prison où tout résonne.

Les mathématiques m'ont sauvé. Les six premiers mois, j'étais à l'isolement total et les mathématiques m'ont sorti de cet enfer que constitue la prison grecque. Je vous suis redevable de m'avoir permis de garder ma dignité humaine et intellectuelle.

Alexandre Yotopoulos.

Je voudrais ajouter quelques mots à ma lettre de remerciements du mois de février 2020.

Je tiens à remercier chaleureusement les professeurs Anne-Laure Dalibard et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset d'avoir accepté de consacrer leur temps à la lecture et à l'examen minutieux de mon travail,comme rapporteurs.Je désire également exprimer ma gratitude aux trois professeurs qui ont eux aussi accepté d'être membres du jury, Michel Broué, Georges Skandalis et Frédéric Charve. Je voudrais enfin remercier ma compagne Maïté pour toute l'aide matérielle qu'elle m'a fournie pendant ces longues années d'études.

Alexandre Yotopoulos

Mai 2021

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
(CNRS – UMR 7586)
Université Paris Diderot (Paris 7)
Bâtiment Sophie Germain - Boîte Courrier 7012
8, place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13
France

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre
Boîte Courrier 290
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction à la résolution des équations de Navier-Stokes . . 9

1.1. Introduction, solutions faibles 9

1.2. Les théorèmes de Fujita- Kato et de Kato 15

1.3. Le théorème de Cannone 22

1.4. Le théorème de Koch-Tataru 25

1.5. Sur l'anisotropie des données initiales 36

2. Résolution des équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale 43

2.1. Introduction et énoncé du résultat 43

2.2. Démonstration du théorème 47

2.3. Démonstration du Lemme 2.2.2 54

2.4. Espaces de Besov anisotropes 57

Bibliographie 59

CHAPITRE 1

INTRODUCTION À LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Cette thèse est consacrée à l'étude des équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale. Ce travail est présenté au chapitre suivant ; ce premier chapitre est dédié à la présentation de nombreux résultats connus sur l'équation avec viscosité isotrope.

1.1. Introduction, solutions faibles

L'équation de Navier-Stokes avec viscosité isotrope s'écrit de la manière suivante :

$$(1.1.1) \qquad \text{(NS)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \, \Delta u = -\nabla p + f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \ , \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \\ \nabla \cdot \ u = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{t=0} = u_0 \ . \end{cases}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, et $p = p(t,x)$ et $u = (u^1, \ldots, u^n)(t,x)$ sont respectivement la pression et le champ de vitesses d'un fluide visqueux incompressible. Le paramètre $\nu > 0$ représente la viscosité du fluide.

L'historique de l'analyse mathématique l'équation de Navier-Stokes commence avec l'article de Jean Leray en 1933-34 et se poursuit jusqu'à aujourd'hui avec une multitude de travaux. On peut donner la définition d'une *solution faible* en se référant à une version revisitée (voir [**9**]).

Définition 1.1.1. — *Pour un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, on dit que u est une solution faible de l'équation de Navier-Stokes sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ avec une donnée initiale u_0 dans la fermeture $\overline{H^1_{0,\sigma}}^{L^2}$ dans L^2 (l'indice σ signifie de divergence nulle) et une force extérieure f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^{-1})$ si et seulement si u appartient à l'espace*

$$C(\mathbb{R}^+, H^{-1}_\sigma) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, \overline{H^1_{0,\sigma}}^{L^2}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^1_{0,\sigma})$$

et, pour tout champ de vecteurs ψ appartenant à $C^1(\mathbb{R}^+, H^1_{0,\sigma})$, le champ de vecteurs u satisfait la condition suivante

(1.1.2)
$$\int_\Omega (u\cdot\psi)(t,x)\,dx + \int_0^t \int_\Omega (\nu\,\nabla u : \nabla\psi - u\otimes u : \nabla\psi - u\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi)(t',x)\,dx\,dt'$$
$$= \int_\Omega u_0(x)\cdot\psi(0,x)\,dx + \int_0^t \langle f(t'),\psi(t')\rangle\,dt'\ ,$$
$$\text{où}\qquad \nabla u : \nabla\psi = \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial u^k}{\partial x_j}\,\frac{\partial \psi^k}{\partial x_j}\qquad \text{et}\qquad u\otimes u : \nabla\psi = \sum_{j,k=1}^d u^j\,u^k\,\frac{\partial\psi^k}{\partial x_j}$$

et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre H^{-1} et H^1.

On a le théorème de Leray, dont nous esquissons la démonstration ci-dessous (en suivant la démarche de [**9**]).

Théorème 1.1.2 **([28])**. — *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou 3, et u_0 un champ de vecteurs dans $\overline{H^1_{0,\sigma}}^{L^2}$. Il existe une solution faible globale de l'équation de Navier-Stokes* (NS) *dans le sens de la Définition* 1.1.1. *De plus, cette solution satisfait l'inégalité d'énergie pour tout $t \geq 0$*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx\,dt' \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx + \int_0^t \langle f(t'),u(t')\rangle\,dt'\ . \tag{1.1.3}$$

Dans la suite on omettra l'indice σ qui indique que les champs de vecteurs sont de divergence nulle.

Définition 1.1.3. — *Une solution de* (NS) *au sens de la Définition* 1.1.1 *qui satisfait en plus l'inégalité d'énergie* (1.1.3) *est appelée solution de Leray de* (NS).

Le résultat suivant s'obtient par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 1.1.4. — *Toute solution de Leray de* (NS) *satisfait*

$$\|u(t)\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2}\,dt' \leq e^{\nu t}\left(\|u_0\|^2_{L^2} + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(t')\|^2_{H^{-1}}\,dt'\right)\ . \tag{1.1.4}$$

Si le domaine Ω satisfait l'inégalité de Poincaré, alors il existe une constante C telle que toute solution de Leray de (NS) *vérifie*

$$\|u(t)\|^2_{L^2} + \nu\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2}\,dt' \leq \|u_0\|^2_{L^2} + \frac{C}{\nu}\int_0^t \|f(t')\|^2_{H^{-1}}\,dt'\ . \tag{1.1.5}$$

Principe de la démonstration du Théorème 1.1.2. Désignant par P_k la famille de projections spectrales associée à l'opérateur de Stokes $\mathbb{P}\Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet (qui joue le rôle d'une suite régularisante, dont la limite quand $k \to \infty$ est le projecteur de Leray $\mathbb{P}$) et par Q l'application bilinéaire de $H_0^1 \times H_0^1 \to H^{-1}$ définie par

$$Q(u,v) = -\nabla \cdot (u \otimes v)\,,$$

on introduit l'équation suivante

(1.1.6)
$$(NS_\kappa) \begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t}(t) = \nu\, P_k\, \Delta u + P_k\, Q(u_k, u_k) + f_k(t)\ , \quad f_k(t) = P_k f(t) \\ \\ u_k(0) = P_k\, u_0\,. \end{cases}$$

Pour des raisons de continuité de P_k et Q et grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, on a une solution u_k de (NS) dans $C^\infty([0,T_k[, P_k\, \overline{H_0^1}^{L^2})$ avec $T_k = +\infty$. Multipliant l'équation (NS) par u_k dans L^2, par une intégration en temps et quelques calculs on montre que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, \overline{H_0^1}^{L^2}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H_0^1) \cap L^{8/n}_{loc}(\mathbb{R}^+, L^4(\Omega))\ .$$

Notons que le dernier résultat provient de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u(t)\|_{L^4} \le \|u(t)\|_{L^2}^{1-n/4}\ \|\nabla u\,(t)\|_{L^2}^{n/4}\,.$$

En particulier la suite $(\Delta u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^{-1})$. Montrons la proposition suivante.

Proposition 1.1.5. — *Il existe un champ de vecteurs u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H_0^1)$ et une sous-suite extraite de (u_k) (que l'on continue à noter (u_k)) telle que, pour tout T positif et tout sous-ensemble compact K de Ω, on a*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,T]\times K} |u_k(t,x) - u(t,x)|^2\, dt\, dx = 0\ .$$

De plus, pour tous champs de vecteurs $\psi \in L^2([0,T], H_0^1)$ et $\phi \in L^2([0,T]\times\Omega)$ on peut écrire

(1.1.7)
$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \int_{[0,T]\times\Omega} (\nabla u_k(t,x) - \nabla u(t,x)) : \nabla\psi(t,x)\ dt\, dx = 0\ , \\ &\lim_{k\to\infty} \int_{[0,T]\times\Omega} (u_k(t,x) - u(t,x))\ \phi(t,x)\ dt\, dx = 0\ . \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $y \in C^1(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \Big|\langle u_k(t), y(t)\rangle - \langle u(t), y(t)\rangle\Big| = 0\ .$$

Démonstration. Il faut démontrer la relative compacité de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^2([0,T]\times K)$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (u_k) est bornée dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ et il existe un entier k_0 tel que

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \ k\geq k_0 \qquad \|u_k - P_{k_0}u_k\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \leq \varepsilon/2\ .$$

Par ailleurs par les inégalités de Gagliardo-Nirenberg et Hölder on a

$$\|P_kQ(u_k,u_k)(t)\|_{H^{-1}} \leq C\ \|\nabla u_k\|_{L^2}^{n/2}\ \|u_k\|_{L^2}^{2-n/2}\ ,$$

donc par l'estimation d'énergie il existe $f_{k_0}\in L^{4/d}([0,T])$ indépendante de $k\geq k_0$ telle que

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \ k\geq k_0 \qquad \left\|\frac{\partial}{\partial t}P_{k_0}u_k(t)\right\|_{L^2} \leq f_{k_0}(t)\ .$$

Pour tout $t\in[0,T]$, la famille $(P_{k_0}u_k)$ est bornée dans H_0^1. Notant L^2_K l'espace des champs de vecteurs L^2 à support dans le compact K, l'injection de H_0^1 dans L^2_K étant compacte, le théorème d'Ascoli implique que la famille $(P_{k_0}u_k)$ est relativement compacte dans l'espace $L^\infty([0,T],L^2_K)$, donc dans l'espace $L^2([0,T]\times K)$. Donc, on peut trouver un recouvrement par un nombre fini de boules de $L^2([0,T]\times K)$ de rayon $\varepsilon/2$ et on a donc l'existence de u.

En particulier, cela implique que u_k converge vers u dans l'espace $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$. La suite (u_k) est bornée dans l'espace $L^2([0,T]\times\Omega)$. Ainsi, comme $\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ est dense dans l'espace $L^2([0,T]\times\Omega)$ et dans $L^2([0,T],H_0^1)$, on a convergence faible dans les espaces $L^2([0,T]\times\Omega)$ et $L^2([0,T],H_0^1)$.

Maintenant, on considère un champ de vecteurs y dans $C^1([0,T],H_0^1)$ et la fonction

$$g_k : t\in[0,T] \longmapsto \langle u_k(t),y(t)\rangle\in\mathbb{R}\ .$$

La suite (g_k) est bornée dans $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$. En plus, on a

$$\left|\frac{\partial g_k}{\partial t}(t)\right| \leq \left|\langle\frac{\partial u_k}{\partial t}(t),y(t)\rangle\right| + \left|\langle u_k(t),\frac{\partial y}{\partial t}(t)\rangle\right|$$

et donc

$$\left|\frac{\partial g_k}{\partial t}(t)\right| \leq \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}(t)\right\|_{H^{-1}} \sup_{t\in[0,T]}\|y(t)\|_{H_0^1} + \|u_k(t)\|_{L^2}\ \sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial y}{\partial t}(t)\right\|_{L^2}\ ,$$

et $((\partial g_k/\partial t)(t))$ est donc une suite bornée dans $L^{4/d}([0,T],\mathbb{R})$, et (g_k) est bornée dans l'espace $C^{1-4/d}([0,T],\mathbb{R})$. D'après le théorème d'Ascoli on peut extraire une suite (g_k) qui converge fortement vers g dans $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$ et l'on sait que (g_k) converge fortement dans l'espace $L^2([0,T])$ vers $\displaystyle\int_\Omega u(t,x)\,y(t,x)\,dx$.

Soit ψ une fonction test dans $C^1(\mathbb{R}^+,H_0^1)$ et u_k une solution de (NS), on a

$$\frac{d}{dt}\langle u_k(t),\psi(t)\rangle = \langle\frac{du_k}{dt}(t),\psi(t)\rangle + \langle u_k(t),\frac{d\psi}{dt}(t)\rangle$$

$$= \nu\,\langle P_k\,\Delta u_k(t),\psi(t)\rangle + \langle P_k\,Q(u_k(t),u_k(t)),\psi(t)\rangle + \langle f_k(t),\psi(t)\rangle + \langle u_k(t),\frac{d\psi}{dt}(t)\rangle\ ,$$

et l'on a

$$\nu \ \langle P_k \, \Delta u_k(t), \psi(t) \rangle = -\nu \ \int_\Omega \nabla u_k(t,x) : \nabla P_k \psi(t,x) \, dx \ ,$$

$$\langle P_k \, Q(u_k(t), u_k(t)), \psi(t) \rangle = \int_\Omega u_k(t,x) \otimes u_k(t,x) : \nabla P_k \psi(t,x) \, dx \quad \text{et}$$

$$\langle u_k(t), \frac{d\psi}{dt}(t) \rangle = \int_\Omega u_k(t,x) \ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) \ dx \ .$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient

$$\int_\Omega u_k(t,x) \cdot \psi(t,x) \ dx$$
$$+ \nu \int_0^t \int_\Omega \Big(\ \nabla u_k : \nabla P_k \ \psi - u_k \otimes u_k : \nabla P_k \psi - u_k \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big)(t',x) \ dx \ dt'$$
$$= \int_\Omega u_k(0,x) \cdot \psi(0,x) \ dx + \int_0^t \langle f_k(t'), \psi(t') \rangle \ dt' \ .$$

Or

$$\lim_{k \to \infty} \ \int_0^t \int_\Omega \nabla u_k : \nabla P_k \ \psi \ dx \, dt' = \lim_{k \to \infty} \ \int_0^t \int_\Omega \nabla u_k : \nabla \psi \ dx \, dt' \ ,$$

puisque

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \|P_k \ \psi(t) - \psi(t)\|_{H_0^1} = 0 \, ,$$

et grâce à la convergence faible de la suite (u_k) vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, on a aussi

$$\lim_{k \to \infty} \ \int_0^t \int_\Omega \nabla u_k : \nabla \psi \ dx \, dt' = \ \int_0^t \int_\Omega \nabla u : \nabla \psi \ dx \, dt' \ .$$

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k(t,x) \cdot \psi(t,x) \ dx = \lim_{k \to \infty} \langle u_k(t), \psi(t) \rangle = \langle u(t), \psi(t) \rangle$$

et par (1.1.7)

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{t \in [0,T]} \Big| \int_\Omega u_k(t,x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) \ dx - \langle u(t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) \rangle \Big| = 0 \ .$$

Pour le terme non linéaire, on a

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^t \int_\Omega (u_k \otimes u_k : \nabla P_k \ \psi)(t',x) \, dt' \, dx = \lim_{k \to \infty} \int_0^t \int_\Omega (u_k \otimes u_k : \nabla \psi)(t',x) \, dt' \, dx \ ,$$

et il faut prouver que

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^t \int_\Omega (u_k \otimes u_k : \nabla \psi)(t',x) \, dt' \, dx = \int_0^t \int_\Omega (u \otimes u : \nabla \psi)(t',x) \, dt' \, dx \ .$$

Soit K_n une suite exhaustive de compacts contenus dans Ω ; alors

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{1}_{K_n} \, \nabla \psi - \nabla \psi\|_{L^2([0,T], L^2(\Omega))} = 0 \ .$$

Puisque la suite $(u_k \otimes u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1([0,T], L^2(\Omega))$, il suffit de prouver que, pour tout compact K de Ω, on a

$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u\|_{L^2([0,T], L^2_K)} = 0 \ ,$$

car alors

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k \otimes u_k - u \otimes u\|_{L^1([0,T],L^2_K)} = 0 \ .$$

Mais, par les inégalités de Gagliardo-Nirenberg et Hölder comme ci-dessus, on a

$$\|u_k - u\|_{L^2([0,T],L^4_K)} \leq C \ \|u_k - u\|^{1-d/4}_{L^2([0,T]\times K)} \ \|\nabla(u_k - u)\|^{d/4}_{L^2([0,T]\times\Omega)}$$

et le résultat suit : u est donc solution de (NS) dans le sens de la Définition 1.1.1.

Pour prouver l'inégalité d'énergie, on observe que l'on a, pour tout $t \geq 0$ et tout $v \in H^1_0$

$$\lim_{k\to\infty} \inf \, (u_k(t) \mid v)_{L^2} = (u(t) \mid v)_{L^2} \ .$$

Par densité, on sait que la suite $(u_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement pour tout $t \geq 0$ vers $u(t)$ dans l'espace de Hilbert $\overline{H^1_0}^{L^2}$, d'où l'on tire pour tout $t \geq 0$

$$\|u(t)\|^2_{L^2} \leq \lim_{k\to\infty} \inf \ \|u_k(t)\|^2_{L^2} \ .$$

D'autre part, (u_k) converge faiblement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^1_0)$, donc on a pour tout temps $t \geq 0$

$$\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2} \, dt' \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|^2_{L^2} \, dt' \ ,$$

et l'on obtient donc l'inégalité d'énergie.

Pour prouver la continuité en temps de u à valeurs dans H^{-1} , on utilise le fait que u satisfait (1.1.2) pour ψ indépendant du temps

$$\begin{aligned} \langle u(t'), \psi\rangle - \langle u(t), \psi\rangle = & \int_t^{t'} \langle f(t''), \psi(t'')\rangle \, dt'' \\ & - \int_t^{t'} \int_\Omega (\nu \, \nabla u \, (t'') : -\nabla\psi - u \otimes u \, (t'') : \nabla\psi) \ dx \, dt'' \ . \end{aligned}$$

Comme

$$\|u(t)\|_{L^4} \leq \|u(t)\|^{1-n/4}_{L^2} \ \|\nabla u \, (t)\|^{n/4}_{L^2} \ ,$$

alors u appartient à $L^{8/n}([0,T], L^4(\Omega))$ et (par une inégalité de Young)

$$\begin{aligned} |\langle u(t'), \psi\rangle - \langle u(t), \psi\rangle| \leq & \, |t' - t|^{1-n/4} \ \|u\|^2_{L^{8/n}([0,T],L^4)} \ \|\psi\|_{H^1_0} \\ & + |t' - t|^{1/2} \ (\|f\|_{L^2([0,T],H^{-1})} + \nu \, \|u\|_{L^2([0,T],L^2)}) \ \|\psi\|_{H^1_0} \ , \end{aligned}$$

et le théorème 1.1.2 est démontré. □

Remarque 1.1.6. — *Dans* [**29**], *J Leray démontre qu'en dimensions deux d"espace, les solutions construites ci-dessus sont uniques.*

Dans la suite de ce chapitre on suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou la boîte périodique $\mathbb{T}^n$.

1.2. Les théorèmes de Fujita- Kato et de Kato

Trois décennies plus tard, H. Fujita et T. Kato [**16**] ont introduit des solutions fortes, associées à des valeurs initiales régulières dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ pour $s \geq 1/2$, avec le théorème suivant (que l'on énonce dans l'espace entier pour simplifier, mais la preuve est identique pour des conditions aux limites périodiques). On rappelle que $H^s(\mathbb{R}^n)$ est défini par la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \Big(\int (1+|\xi|)^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$$

en notant $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier. On rappelle aussi la définition de la (semi)-norme associée aux espaces de Sobolev homogènes (qui sont des espaces de Hilbert si $s < n/2$) :

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} := \Big(\int |\xi|^{2s} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.2.1. — 1. *Soit $s > n/2 - 1$. Alors, pour tout champ de vecteurs u_0 dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla \cdot u_0 = 0$, il existe T^* positif et une solution faible unique u dans $C([0,T^*[, H^s(\mathbb{R}^n))$ à l'équation de Navier Stokes* (NS) *sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^n$ telle que $u(0,\cdot) = u_0$. Cette solution est régulière sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^n$.*

2. *Pour tout $u_0 \in H^{n/2-1}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla \cdot u_0 = 0$, il existe T^* positif et une solution faible unique u dans $C([0,T^*[, H^{n/2-1}(\mathbb{R}^n))$ de l'équation* (NS) *sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^n$ telle que $u(0,\cdot) = u_0$. En plus, cette solution peut être choisie telle que, pour tout $T \in]0,T^*[$, on ait*

$$u \in L^2(]0,T^*[, H^{n/2}(\mathbb{R}^n)) \, .$$

Avec cette condition sur la norme $H^{n/2}$, cette solution est unique et régulière sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^n$.

3. *Il existe ε_0 tel que, si $\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}} < \varepsilon_0$, alors le temps d'existence T^* de la solution régulière u donnée par* 1. *ou par* 2. *est égal à l'infini.*

4. *Les solutions régulières données par* 1. *ou par* 2. *satisfont $u(t,\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ pour tout $0 < t < T^*$. Le temps d'existence maximal T^* est fini si et seulement si*

$$\lim_{t \to T^*} \|u\|_{L^\infty} = +\infty \, .$$

Une version revisitée du théorème 1.2.1 est donnée par J. Y. Chemin [**7**]. Pour $n = 2$ ou 3, il écrit f sous la forme $f = \nabla^\perp V$, où $V(t,x)$ désigne le potentiel dont dérive la force extérieure au point x et à l'instant t, avec $\nabla^\perp V$ le vecteur de j-ième coordonnée $\sum_i (\partial/\partial x_i)\, V_j^i$.

Nous allons donner le principe de la démonstration des deux théorèmes qui suivent (énoncés respectivement pour $n = 2$ et pour $n = 3$) et qui sont dûs à [**7**].

Théorème 1.2.2. — *Soit s un réel ≥ 0. Si u_0 est un champ de vitesses sur $\mathbb{R}^2$ à coefficients L^2 et V un potentiel-vecteur de $\mathbb{R}^2$ à coefficients $L^2_{loc}([0,+\infty[,H^s)$, alors le système* (NS) *admet une unique solution dans l'espace $C([0,+\infty[,L^2)\cap C(]0,+\infty[,H^s)\cap L^2_{loc}(]0,+\infty[,H^{s+1})$.*

Théorème 1.2.3. — *Il existe un réel $C_0>0$ tel que si s vérifie $s\geq 1/2$, si les données u_0 et V sont telles que l'on ait*

$$(i)\qquad u_0\in H^{1/2}\quad et\quad V\in L^2([0,+\infty[,H^{1/2})\cap L^2_{loc}(]0,+\infty[,H^s)\ ,$$

$$(ii)\qquad \|u_0\|_{\dot H^{\frac12}}+\nu^{-1/2}(\int_{[0,=\infty[}\|V(t,\cdot)\|^2_{\dot H^{\frac12}}\ dt)^{1/2}\leq C_0\,\nu\ ,$$

alors (NS) *admet une unique solution dans*

$$C([0,+\infty[,H^{1/2})\cap L^2([0,+\infty[,H^{3/2})\cap C(]0,+\infty[,H^s)\cap L^2_{loc}(]0,+\infty[,H^{s+1})\,.$$

Principe de démonstration des deux théorèmes. La méthode utilise la technique de Littlewood-Paley de découpage dyadique de l'espace des fréquences et de la décomposition de Bony d'un produit pour avoir une estimation d'énergie. Il est démontré le lemme suivant qui est très utile.

Lemme 1.2.4. — *Soit s un réel vérifiant $s>n/2+1$. Considérons un potentiel vecteur V dans $L^2_{loc}([0,+\infty[,H^s)$ et u une solution de* (NS) *qui soit dans l'espace $C([0,T^*[,H^s(\mathbb{R}^n))$, l'intervalle $[0,T^*[$ étant l'intervalle maximal de définition de la solution. On a l'alternative*

$$ou\ bien\quad T^*=+\infty\quad ou\ bien\quad u\notin L^2([0,T^*[,H^{n/2})\ .$$

L'estimation d'énergie qui est démontrée dans [**7**] est

$$(1.2.1)\quad \|u(t,\cdot)\|^2_{\dot H^s}\leq \|u_0\|^2_{\dot H^s}\exp(\int_0^T(C^2/2\nu)\ \|u(\tau,\cdot)\|^2_{H^{n/2}}\ d\tau)+$$
$$+\,2\,\nu^{-1}\int_0^T\|u(\tau,\cdot)\|^2_{\dot H^s}\exp\Big(\int_\tau^T(C^2/2\nu)\ \|u(\lambda,\cdot)\|^2_{H^{n/2}}\ d\lambda\Big)\ d\tau\ .$$

Après avoir régularisé la donnée initiale et le potentiel vecteur V en considérant $(v_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H^∞ (respectivement une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2_{loc}([0,+\infty[,H^\infty)$) telle que $v_{0,n}$ tende vers u_0 dans L^2 (respectivement V_n vers V dans $L^2_{loc}([0,+\infty[,L^2)$), on applique le théorème d'existence d'une solution locale en temps pour les systèmes hyperboliques symétriques. Ce qui entraîne que pour T assez petit, la suite (v_n) est une suite bornée de $C([0,T],H^s)$ et ensuite que pour T assez petit, la suite (v_n) est une suite de Cauchy dans $C([0,T],H^{s-1})$. Cette solution v_n est a priori définie sur un intervalle de temps $[0,T_n[$ et le lemme 1.2.4 assure que cette solution existe globalement en temps. Le lemme suivant est démontré dans [**7**].

Lemme 1.2.5. — *Soient q un réel de l'intervalle $[n/2-1,+\infty[$ et T un réel strictement positif. Si (v_n) est une suite de solutions du système* (NS) *sur l'intervalle $[0,T]$ pour les données $v_{0,n}$ et V_n telles que*

(*i*) *la suite $(v_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans l'espace H^q ,*

(*ii*) *la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans l'espace $L^2([0,+T],H^q)$,*

(*iii*) *la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans l'espace $L^2([0,+T],H^{n/2})$,*

alors la suite (v_n) est de Cauchy dans l'espace $C([0,+T],H^q)$.

Grâce à l'inégalité d'énergie

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\nu\int_0^T\|\nabla u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2\,d\tau\le\|u_0\|_{L^2}^2+\frac{1}{\nu}\int_0^T\|V(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2\,d\tau\ ,$$

Le théorème 1.2.2 est donc démontré pour $s=0$. Par un procédé de récurrence, par le lemme 1.2.5 plus l'estimation d'énergie 1.2.1, le théorème 1.2.2 est démontré.

Pour le théorème 1.2.3 en dimension 3, il suffit de le démontrer en supposant que l'on a

$$\|u_0\|_{H^{1/2}}^2+\nu^{-1/2}\Big(\int_0^{+\infty}\|V(\tau,\cdot)\|_{H^{1/2}}^2\,d\tau\Big)^{1/2}\le C_0\,\nu\ . \tag{1.2.2}$$

En régularisant les données u_0 et V comme précédemment, on considère une suite $(v_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de H^∞ (respectivement une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,+\infty[,H^\infty)$) telle que $v_{0,n}$ tende vers u_0 dans $H^{1/2}$ (respectivement V_n vers V dans $L^2([0,+\infty[,H^{1/2})$) et telle que la solution associée vérifie

$$\|v_n\|_{H^{1/2}}+\nu^{-1/2}\Big(\int_0^{+\infty}\|V_n(\tau,\cdot)\|_{H^{1/2}}^2\,d\tau\Big)^{1/2}\le C_0\,\nu\ . \tag{1.2.3}$$

Si v est une solution quelconque du système (NS) avec données u_0 et V vérifiant (1.2.3) et telles que v_0 soit dans H^∞ et V dans $L^2_{loc}([0,+\infty[,H^\infty)$, la solution u est définie sur l'intervalle maximal $[0,T^*[$ et il est démontré que

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^{1/2}}^2+\nu\int_0^T\|u(\tau,\cdot)\|_{H^{3/2}}^2\,d\tau\le\|u_0\|_{H^{1/2}}^2+\frac{1}{\nu}\int_0^{+\infty}\|V(\tau,\cdot)\|_{H^{1/2}}^2\,d\tau\ .$$

Donc, si

$$\|v_0\|_{H^{1/2}}+\nu^{-1/2}\Big(\int_0^{+\infty}\|V(\tau,\cdot)\|_{H^{1/2}}^2\,d\tau\Big)^{1/2}\le\nu/2C\,,$$

alors cette estimation est vraie sur tout intervalle $[0,T^*[$. Le lemme 1.2.4 assure que $T^*=+\infty$ et l'estimation est valable sur tout $\mathbb{R}^+$. En utilisant une récurrence analogue à celle de la preuve du théorème 1.2.2, on obtient le théorème 1.2.3 grâce au lemme 1.2.5. □

Deux décennies après le résultat [**16**], en 1984, T. Kato [**22**] montre l'existence de solutions fortes dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, il démontre les

théorèmes suivants, dans lesquels BC désigne l'ensemble des fonctions bornées et continues et $\mathbb{P}L^p$ le sous-ensemble des éléments de L^p à divergence nulle.

Théorème 1.2.6. — *Soit $u_0 \in \mathbb{P}L^m$. Alors, il existe $T > 0$ et une solution unique u telle que*

$$t^{(1-\frac{m}{q})/2}\, u \in BC([0,T[,\mathbb{P}L^q) \quad \textit{pour} \quad m \le q \le \infty \tag{1.2.4}$$

$$t^{1-\frac{m}{2q}}\, \nabla u \in BC([0,T[,L^q) \quad \textit{pour} \quad m \le q < \infty \tag{1.2.5}$$

avec des valeurs nulles en $t = 0$, sauf si $q = m$ dans (1.2.4) *auquel cas $u(0) = u_0$.*

On a en plus la propriété suivante

$$u \in L^r(]0,T_1[,\mathbb{P}L^q) \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{r} = (1-m/q)/2\ , \quad m < q < \frac{m^2}{m-2}\ . \tag{1.2.6}$$

Théorème 1.2.7. — *Il existe $\lambda > 0$ tel que, si $\|u_0\|_{L^m} \le \lambda$, alors la solution u du Théorème* 1.2.6 *est globale, c'est-à-dire que l'on peut prendre $T = T_1 = +\infty$. En particulier $\|u(t)\|_{L^q}$ décroit comme $t^{-(1-m/q)/2}$ quand $t \to +\infty$, même quand $q = \infty$, et $\|\nabla u(t)\|_{L^q}$ décroit comme $t^{-(1-\frac{m}{2q})}$ même si $q = m$.*

Théorème 1.2.8. — *Dans le cadre du Théorème* 1.2.7 *on a*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|_{L^m}\, dt \to 0 \quad \textit{quand} \quad T \to +\infty\ .$$

Théorème 1.2.9. — *Soit $u_0 \in \mathbb{P}L^m \cap \mathbb{P}L^p$, avec $1 < p < m$. Alors la solution u donnée par le théorème* 1.2.6 *a en plus les propriétés suivantes*

$$u \quad \textit{et} \quad t^{1/2}\,\nabla u \in BC([0,T_2[,L^m \cap L^p) \quad \textit{avec} \quad 0 < T_2 \le T\ .$$

Théorème 1.2.10. — *Il existe $0 < \lambda_1 \le \lambda$ tel que, si $\|u\|_{L^m} \le \lambda_1$, la solution u du théorème* 1.2.9 *est globale et on peut prendre $T = T_1 = T_2 = +\infty$ dans toutes les estimations précédentes (λ_1 sera petit si p est proche de* 1*). De plus, on a pour tout réel fini $q \ge p$*

$$t^{((m/p)-(m/q))/2}\, u \quad \textit{et} \quad t^{((m/p)-(m/q)+1)/2}\,\nabla u \in BC([1,\infty[,L^q) \tag{1.2.7}$$

pourvu que l'exposant de t soit strictement inférieur à 1 *(séparément pour u et ∇u) ; autrement cet exposant doit être remplacé par un nombre arbitraire strictement inférieur à* 1.

Pour la démonstration des trois premiers théorèmes que l'on vient d'énoncer, on écrit (NS) sous la forme abstraite

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) + F(u) = 0 \tag{1.2.8}$$

$$\text{où} \quad A = -\mathbb{P}\,\Delta = -\Delta\,\mathbb{P}\ , \tag{1.2.9}$$

$$F(u) = F(u,u)\ , \qquad F(u,v) = \mathbb{P}\,(u\cdot\nabla v)\ . \tag{1.2.10}$$

On rappelle que $\mathbb{P}$ est la projection orthogonale de L^2 sur $\mathbb{P}L^2$, l'espace des champs de vecteurs de L^2 à divergence nulle. L'opérateur $\mathbb{P}$ est étendu à un

opérateur borné de L^p sur $\mathbb{P}L^p$ avec $1 < p < \infty$. Par ailleurs A est égal à $-\Delta$ et $e^{-t\Delta}$ est l'opérateur de la chaleur. L'équation (1.2.8) sous sa forme intégrale devient

$$u = u_0 + Gu \tag{1.2.11}$$

où

$$u_0(t) = e^{-tA} \ , \qquad G\,u(t) = -\int_0^t e^{-(t-s)\,A}\,F(u(s))\;ds \ .$$

En utilisant les estimations qui se déduisent de l'inégalité de Hölder et de l'effet régularisant du noyau de la chaleur, on obtient, avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $\gamma \leq \alpha + \beta < m$

$$\|G\,u(t)\|_{L^{m/\gamma}} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}\,\|u(s)\|_{L^{m/\alpha}}\,\|\nabla u(s)\|_{L^{m/\beta}}\;ds \ , \tag{1.2.12}$$

$$\|\nabla G\,u(t)\|_{L^{m/\gamma}} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1+\alpha+\beta-\gamma}{2}}\,\|u(s)\|_{L^{m/\alpha}}\,\|\nabla u(s)\|_{L^{m/\beta}}\;ds \ . \tag{1.2.13}$$

On résout l'équation (1.2.11) par récurrence. On pose

$$v_0 = e^{-tA}\,u_0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_0 + G\,v_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \ . \tag{1.2.14}$$

On démontre par récurrence que v_n existe et satisfait les estimations suivantes

$$t^{(1-\delta)/2}\,v_n \in BC([0,\infty[, \mathbb{P}L^{m/\delta}) \quad \text{avec sa norme } \leq K_n \ , \tag{1.2.15}$$

$$t^{1/2}\,\nabla v_n \in BC([0,\infty[, L^m) \quad \text{avec norme } \leq K'_n \tag{1.2.16}$$

et où $0 < \delta < 1$. En plus, les deux fonctions apparaissant dans (1.2.15), (1.2.16) s'annulent en $t = 0$. Ces estimations sont vraies pour $n = 0$ et on peut prendre $K_0 = K'_0 = C\,\|u_0\|_{L^m}$. La continuité en $t = 0$, pour des valeurs nulles des fonctions figurant dans (1.2.15), (1.2.16), se déduisent du fait que l'opérateur $t^{(1-\delta)/2}\,e^{-tA}$ est uniformément borné de $\mathbb{P}L^m$ vers $\mathbb{P}L^{m/\delta}$ et tend uniformément vers 0 quand $t \to 0$, et de même pour l'opérateur $t^{1/2}\,\nabla\,e^{-tA}$ de L^m vers lui-même.

Supposant que (1.2.15) et (1.2.16) sont vraies pour n, on en déduit qu'elles sont vraies pour $n+1$. Le second terme $G\,u_n(t)$ est estimé en norme $L^{m/\delta}$. Par conséquent, la norme recherchée ne doit pas dépasser

$$C\,K_n\,K'_n \int_0^t (t-s)^{-1/2}\,s^{-1+(\delta/2)}\,ds = C\,K_n\,K'_n\,t^{-(1-\delta)/2}$$

et l'on a établi (1.2.15) pour $n+1$ avec $K_{n+1} \leq K_0 + C\,K_n\,K'_n$, où K_n et K'_n peuvent être choisis arbitrairement petits si on choisit un intervalle de temps petit $[0, \tau[$. Il apparaît qu'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que, si $K_0 \leq \lambda$, alors K_n et K'_n sont bornés par une constante K. Ceci est vrai si $\|u_0\|_{L^m}$ est assez petit et les suites (1.2.15) et (1.2.16) sont uniformément bornées, on peut donc prouver leur convergence uniforme sur $]0, \infty[$.

Pour obtenir la limite u dans $BC([0,\infty[, \mathbb{P}L^m)$, on doit estimer la norme L^m de v_n. Pour $m \leq q < \infty$, on estime la norme L^q. En utilisant (1.2.12) et

(1.2.14), on a

$$\|v_{n+1}(t)\|_{L^q} \leq \|v_0(t)\|_{L^q} + C\, K_n\, K'_n \int_0^t (t-s)^{-(1+\delta-\frac{m}{q})/2}\, s^{-(1-(\delta/2))}\, ds \leq K\, t^{-(1-\frac{m}{q})/2}\ .$$

Ainsi la fonction limite est dans l'espace $BC([0,\infty[, L^m)$ (en prenant $q = m$) et u satisfait (1.2.4) pour $m < q < \infty$. De manière similaire, on démontre l'estimation (1.2.5) pour ∇u. Pour la démonstration de (1.2.6), on utilise l'estimation prouvée par Y. Giga [**18**]

$$v_0 \in L^{q,r}(]0,\infty[) =: L^r(]0,\infty[, \mathbb{P}L^q) \ \text{ avec } \ \frac{1}{r} = (1-m/q)/2 \ \text{ et } \ m < q < \frac{m^2}{m-2}\ ,$$

où la norme associée est arbitrairement petite si $\|u_0\|_{L^m}$ est assez petite. En utilisant (1.2.14), on a

$$\|G\, u(t)\|_{L^{m/\gamma}} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{2}}\ Vertu(s)\|_{L^{m/\alpha}}\, \|u(s)\|_{L^{m/\beta}}\ ds\ ,$$

$$\text{et} \qquad \|G\, u(t)\|_{L^q} \leq C \int_0^t (t-s)^{-(1+\frac{m}{q})/2}\ \|u(s)\|^2_{L^q}\ ds\ ,$$

et par l'inégalité de Hardy-Littlewood on obtient

$$\|u\|_{L^{m,r}} \leq \|v_0\|_{L^{m,r}} + C\ \|u\|^2_{L^{m,r}}\ ,$$

où l'intervalle de temps est l'intervalle $]0,T[$ tout entier (avec $T > 0$). Il s'ensuit que $\|u\|_{L^{q,r}}$ peut être estimé à l'aide de $\|v_0\|_{L^{q,r}}$, si ce terme est petit, ce qui est vrai si T est petit. En particulier, si $\|u_0\|_{L^m}$ est suffisamment petit, il en est de même de $\|v_0\|_{L^{m,r}}$, et on peut choisir $T = \infty$.

Pour ce qui concerne le théorème 1.2.8, puisque $v_0(t) \to 0$ dans L^m, il suffit de le prouver pour Gu. En utilisant (1.2.12) avec $\gamma = 1, \alpha = 1-2k, \beta = 4k$, où k est un nombre positif petit et strictement plus petit que $1/2$, utilisant aussi (1.2.6), on a

$$\|u(\cdot)\|_{L^{m/\alpha}} = \psi \in L^{1/k}(]0,\infty[) \quad \text{et} \quad \|\nabla u(s)\|_{L^{m/\beta}} \leq K\ s^{-(1-2k)} \quad \text{et}$$

$$\|G\, u(t)\|_{L^m} \leq C \int_0^t (t-s)^{-k}\ s^{-(1-2k)}\ \psi(s)\ ds\ .$$

Intégrant sur $[0,T]$, on trouve

$$\int_0^T \|G\, u(t)\|_{L^m}\ dt \leq C \int_0^T (T-s)^{1-k}\ s^{-(1-2k)}\ \psi(s)\ ds\ .$$

On sépare $[0,T]$ en deux sous-intervalles $]0,\tau[$ et $]\tau,T[$. La contribution de $]0,\tau[$ est un $O(T^{1-k})$ quand $T \to \infty$. En utilisant l'inégalité de Hölder, la contribution de $]\tau,T[$ est majorée par le produit de T avec la norme $L^{1/k}$ de ψ évaluée sur $]\tau,T[$. Ainsi, on a

$$\lim_{T\to\infty} \sup \frac{1}{T} \int_0^T \|G\, u(t)\|_{L^m}\ dt \leq C\ \|\psi\|_{L^{1/k}}\ ,$$

où le terme de droite est calculé sur $]\tau,\infty[$ et tend vers 0 quand $\tau \to \infty$ puisque ψ appartient à $L^{1/k}(]0,\infty[)$. Donc, le premier membre est nul, lui aussi.

Pour les théorèmes 1.2.9 et 1.2.10, si on suppose $u_0 \in \mathbb{P}L^m \cap \mathbb{P}L^p$, la solution u est dans l'espace $C([0,T[,\mathbb{P}L^m)$ et on doit évaluer les normes des solutions approximantes v_n dans L^p. On doit montrer que l'on a la propriété

$$\|v_n(t)\|_{L^p} \leq M_n \quad \text{pour} \quad n = 0,1,2\ldots \quad \text{et} \quad t \in [0,T[\ ,$$

et faire une récurrence sur les estimations des constantes M_n. La propriété est vraie pour $n = 0$, si l'on pose $M_0 = C\ \|u_0\|_{L^p}$. Supposant la propriété vraie pour n, on estime le second terme $G\,v_n$ dans L^p. En utilisant (1.2.14), comme on a

$$\|\nabla v_n(s)\|_{L^{m/\beta}} \leq K\ s^{-(1-(\beta/2))}\,,$$

on obtient

$$\|u_{n+1}(t)\|_{L^p} \leq M_0 + C\int_0^t (t-s)^{-\beta/2}\ s^{-(1-(\beta/2))}\ \|v_n(s)\|_{L^p}\ ds \leq M_0 + C\ K\ M_n$$

ce qui conduit à demander

$$M_{n+1} \leq M_0 + C\ K\ M_n\,.$$

Cette inégalité récurrente linéaire a une solution bornée $M_n \leq M$ si $C\ K < 1$ et aboutit à l'estimation recherchée pour la norme L^p de u et l'estimation de ∇u s'obtient via (1.2.14). Ces estimations sont valables pour $t \in [0,T[$, où $u(t) \in L^m$, en supposant $C\ K < 1$, où K est une constante qui borne la norme de v_n et celle de u dans L^m. Si $\|u_0\|_{L^m}$ est suffisamment petit, on peut avoir $C\ K < 1$ avec $T = \infty$.

Il reste à prouver (1.2.7) lorsque $T = \infty$. Puisque $\|v_0\|_{L^q}$ satisfait (1.2.7), il suffit d'estimer $\|G\,u(t)\|_{L^q}$ et ses dérivées en utilisant (1.2.12) et (1.2.14). D'abord, on suppose que $m/p - m/q < 2$ et on choisit $\alpha = m/p$, $\gamma = m/q$ et β assez petit pour que

$$\alpha + \beta - \gamma < 2\,.$$

Puisque $\|u(s)\|_{L^p}$ est borné et

$$\|\nabla u(s)\|_{L^{m/\beta}} \leq K\ s^{-(1-(\beta/2))}\,,$$

on aboutit par (1.2.5) et (1.2.12) à la première estimation de (1.2.7). Si $m/p - m/q \geq 2$, on choisit p' tel que $p < p' < m$ et tel que $m/p' - m/q$ soit inférieur à 2, mais proche. Alors, on peut appliquer le résultat ci-dessus pour conclure que $u(t)$ a le taux de décroissance décrit au théorème 1.2.10. La décroissance de ∇u se démontre de manière analogue. □

Théorème 1.2.11. — *Avec les hypothèses du théorème* 1.2.10*, on a* $\|u(t)\|_{L^p} \to 0$ *quand* $t \to \infty$. *Plus précisément*

$$\|u(t) - v_0(t)\|_{L^p} = O(t^{-\delta/2}) \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty\ , \tag{1.2.17}$$

où $v_0(t) = e^{-tA}\,u_0$ *est le flot de Stokes relatif à la valeur donnée initiale* u_0 *et où* δ *est un nombre positif inférieur ou égal à* $\min(1, m-(m/p), (m/p)-1)$.

Ainsi $\|u(t)\|_{L^p}$ décroit au moins aussi vite que le plus lent de $\|v_0(t)\|_{L^p}$ et de $t^{-\delta/2}$.

Pour démontrer le théorème 1.2.11, sachant que $u_0 \in L^p$ implique que $v_0(t) \to 0$ dans L^p quand $t \to \infty$, il suffit de montrer (1.2.17). On sépare l'intégrale de Gu en l'intégrale sur $]0,1[$ et celle sur $]1,t[$, et on estime chaque terme, en écrivant

$$G_0(t)\, u(t) := G(t)\, u(t)\, \mathbf{1}_{]0,1[}(t)\ , \quad G_1(t)\, u(t) := G(t)\, u(t)\, \mathbf{1}_{]1,t[}(t)$$

et

$$G\, u(t) = G_0\, u(t) + G_1\, u(t)\ .$$

Pour estimer $G_0\, u(t)$, on pose

$$\alpha = \delta + (m/p) - 1\,,\ \beta = 1\,,\ \gamma = m/p\,,$$

avec $\alpha > 0$ et $\alpha + \beta = \delta + (m/p) < m$ par définition de δ. En plus, on sait par le Théorème 1.2.9 que

$$\|u(s)\|_{L^{m/\alpha}} = O(s^{-(1-\delta)/2})$$

pour $s \to 0$ dès que $\alpha < 1$, et est borné quand $s \to 0$ lorsque $\alpha \geq 1$. De plus on a

$$\|\nabla\, u(s)\|_{L^{m/\beta}} = O(s^{-1/2})\,.$$

Ainsi, on a

$$\|G_0\, u(t)\|_{L^p} \leq \int_0^1 (t-s)^{-\delta/2}\, s^{-(1-(\delta/2))}\ ds = 0(t^{-\delta/2})\ .$$

Pour l'estimation de $G_1\, u(t)$, on choisit $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma = m/p$. De nouveau, on écrit

$$\|u(s)\|_{L^{m/\alpha}} = O(s^{-((m/p)-\delta)/2}) \quad \text{et} \quad \|\nabla\, u(s)\|_{L^{m/\beta}} = O(s^{-1/2})$$

quand $s \to \infty$ (voir 1.2.7). Il s'ensuit que

$$\|G_1\, u(t)\|_{L^p} \leq \int_1^t (t-s)^{-\delta/2}\, s^{-(1+(m/p)-\delta)/2}\ ds = 0(t^{-\delta/2})\ .$$

Le théorème suit.

1.3. Le théorème de Cannone

En 1997, la contribution de M. Cannone [**6**] consiste en une formulation plus faible du théorème de Kato qui repose sur l'introduction de l'espace de Besov $\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)$, où $1 \leq q \leq 3$ et $\alpha > 0$: une distribution tempérée $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ appartient à l'espace de Besov $\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)$ si $\lim\limits_{j\to-\infty} \|S_j\, f\|_{L^\infty} = 0$ et si la norme définie ci-dessous est finie :

$$\|v\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)} := \sup_{j\in\mathbb{Z}}\ 2^{-j\alpha}\ \|\Delta_j v\|_{L^q} < \infty\ ,$$

où Δ_j est l'opérateur de convolution avec la fonction ψ_j de la décomposition de Littlewood-Paley qui tronque à des fréquences de taille 2^j (voir la Définition 2.1.1 plus bas pour plus de détails sur cet opérateur, ainsi que l'opérateur de troncature S_j aux fréquences plus petites que 2^j). Les deux lemmes suivants sont classiques et admis. On note $S(t)$ l'extension de la chaleur

$$S(t)f = e^{t\Delta} f \, .$$

Lemme 1.3.1. — *Soit q fixé, $1 \leq q < \infty$ et $\alpha > 0$. Pour toute distribution tempérée f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, les quatre normes qui suivent sont équivalentes*

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \, \|\Delta_j \, f\|_{L^q} \, , \; \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \, \|S_j \, f\|_{L^q} \, , \; \sup_{t\geq 0} t^{\alpha/2} \, \|S(t) \, f\|_{L^q} \, , \; \sup_{t\geq 0} \|S(t) \, f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} \, .$$

Lemme 1.3.2. — *Soient q_1 et q_2 deux constantes fixées vérifiant $3 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ et $\alpha_1 = 1 - (3/q_1)$, $\alpha_2 = 1 - (3/q_2)$. On a les injections continues suivantes*

$$L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha_1}_{q_1,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha_2}_{q_2,\infty}(\mathbb{R}^3) \, .$$

Ces inclusions sont strictes. Ainsi on a

$$|x|^{-1} \in \dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)$$

pour $q > 3$, $\alpha = 1 - (3/q)$ et

$$|x|^{-1} \notin L^3(\mathbb{R}^3) \, .$$

Le théorème de Cannone est le suivant. Nous ne le démontrerons pas ici mais donnerons les ingrédients principaux.

Théorème 1.3.3. — *Soit q fixé, avec $3 < q \leq 6$ et $\alpha = \alpha(q) = 1 - (3/q)$. Il existe une constante absolue $\delta > 0$ pour laquelle, si $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, $\|u_0\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} < \delta$ et $\nabla \cdot v_0 = 0$ (au sens des distributions), l'équation* (NS) *admet une solution globale* forte *dans $C([0,\infty[, L^3(\mathbb{R}^3))$. De plus, cette solution est la seule qui vérifie*

$$u \in C([0,\infty[, L^3(\mathbb{R}^3)) \, , \; t^{\alpha/2} \, u \in C([0,\infty[, L^q(\mathbb{R}^3)) \quad \textit{et} \quad \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} \, \|u(t)\|_{L^q} = 0 \, .$$

Remarque 1.3.4. — *On entend ici par solution* forte *une solution au sens intégral, que certains auteurs appellent aussi, empruntant à l'anglais, solution* mild.

La preuve du théorème passe par les trois lemmes suivants. Avant de les énoncer, on introduit l'espace de Banach G qui est constitué des fonctions $v(t,x)$ telles que

$$v(t,x) \in C([0,\infty[, L^3(\mathbb{R}^3)) \, , \; t^{\alpha/2} \, v(t,x) \in C([0,\infty[, L^q(\mathbb{R}^3)) \\ \text{et} \quad \lim_{t\to 0} t^{\alpha/2} \, \|v(t,x)\|_{L^q} = 0 \, ,$$

espace que l'on munit de la norme

$$\|v\|_G = \sup_{t>0} \|v(t)\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \, \|v(t,x)\|_{L^q} \, .$$

Cette définition a un sens puisque l'espace $L^3(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continûment dans $\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}$.

Lemme 1.3.5. — *Si $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, alors $S(t)\, u_0 \in G$.*

Lemme 1.3.6. — *L'opération bilinéaire $B(v,u)(t)$ définie par*

$$B : (v,u) \in G \times G \longmapsto B(v,u)(t) = -\int_0^t \mathbb{P}\, S(t-s)\ \nabla \cdot (v \otimes u)(s)\, ds\ \ \in G$$

est bicontinue.

Lemme 1.3.7. — *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $B : X \times X \to X$ un opérateur bilinéaire continu : il existe une constante $\eta \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$*

$$B(x_1, x_2) \leq \eta \|x_1\|\ \|x_2\|\ .$$

Alors, pour tout $y \in X$ tel que $4\eta\ \|y\| < 1$, l'équation $x = y + B(x,x)$ a une solution x dans X . De plus, cette solution est la seule telle que

$$\|x\| \leq (1 - \sqrt{1 - 4\eta\|y\|})/2\eta\ .$$

Il faut noter que la condition $\|u_0\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} < \delta$ est satisfaite dans le cas particulier d'une fonction u_0 assez oscillante. Par exemple, on considère $u_0 \neq 0$ appartenant à $L^3(\mathbb{R}^3)$. Si l'on multiplie u_0 par une exponentielle $w_k = \exp(ix \cdot k)$, pour $k \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\lim_{|k| \to \infty} \|w_k\, u_0\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} = 0\,,$$

tandis que

$$\lim_{|k| \to \infty} \|w_k\, u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} = \|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\,.$$

On observe bien que la condition de petitesse $\|w_k\, u_0\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} < \delta$ est vérifiée pourvu que l'on choisisse une fréquence k assez grande.

On sait que Leray s'est intéressé aux solutions auto-similaires de la forme

$$u(t,x) = \lambda(t)\, U(\lambda(t)\, x)\,,$$

où $\lambda(t)$ est une fonction scalaire positive et $U(x)$ un champ de vecteurs de divergence nulle ; une telle $u(t,x)$ est une solution autosimilaire des équations (NS) si, pour tout $\lambda > 0$, on a l'égalité

$$u(t,x) = \lambda\, u(\lambda^2\, t, \lambda\, x)\,.$$

Si l'on choisit $\lambda = 1/\sqrt{t}$, on trouve

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, U(\frac{x}{\sqrt{t}})\ ,$$

avec

$$U(x) = u(1,x)\ \ \text{champ de vecteurs de divergence nulle.}$$

Théorème 1.3.8. — *Soit* $3 < q < 6$ *et* $\alpha = \alpha(q) = 1 - (3/q)$. *Il existe une constante* $\delta > 0$ *telle que, si* u_0 *appartient à* $\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)$ *et vérifie* $\|u_0\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)} < \delta$, *et* $\nabla \cdot u_0 = 0$ *(au sens des distributions), ainsi que* $u_0(x) = \lambda\, u_0(\lambda\, x)$ *pour tout* $\lambda > 0$, *alors il existe une solution globale forte (au sens de la Remarque* 1.3.4*) des équations* (NS) *qui s'écrit sous la forme*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} U(\frac{x}{\sqrt{t}}) \quad \text{où} \quad U \in \dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$$

est telle que

$$U(x) = S(1)\, u_0 + W(x)\,,$$

$$\text{avec} \;\; W \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \;\; \text{si} \;\; 3 < q < 4 \;\; \text{et} \;\; W \in L^3(\mathbb{R}^3) \;\; \text{si} \;\; 4 \le q < 6\ .$$

La valeur initiale u_0 *est prise au moins au sens faible des distributions.*

Enfin, il y a une seule solution $u(t,x)$ *telle que*

$$U \in \dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)\,,$$

et pour laquelle $\|U\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)} + \|U\|_{L^q} \le R$, *où* $R = R(\|u_0\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^3)})$ *est une constante donnée.*

Ajoutons encore que Nečas, Rusziska et Sverak [**31**] ont démontré en 1996 que l'unique solution $U \in L^3(\mathbb{R}^3)$ est $U = 0$ et que, en 1998, Tsai [**36**] a montré que la seule solution $U \in C_0(\mathbb{R}^3)$ est $U = 0$.

1.4. Le théorème de Koch-Tataru

1.4.1. L'espace BMO^{-1}**.** — En l'an 2000 dans [**23**], H. Koch et D. Tataru ont obtenu un résultat optimal qui établit quel est l'espace le plus large dans lequel existent les solutions globales et les solutions locales. Si

$$\phi(x) = \pi^{-n/2}\; e^{-|x|^2}$$

et

$$\phi_t(x) = \frac{\pi^{-n/2}}{t^n}\; e^{-(|x|/t)^2}\,,$$

on définit la norme BMO d'une distribution tempérée f sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{x,R>0} \Big(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \int_0^R t|\nabla(\phi_{\sqrt{4t}} * f)|^2\; dt\, dy \Big)^{1/2} < \infty\ .$$

Si w est solution, pour la valeur intiale f, de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} w - \Delta w = 0$$

alors

$$w(t) = f * \phi_{\sqrt{4t}}$$

et l'on a

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x,R>0} \Big(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \int_0^{R^2} |\nabla w|^2 \, dt \, dy \Big)^{1/2}$$

On définit la norme BMO^{-1}

$$\|f\|_{BMO^{-1}} = \sup_{x,R>0} \Big(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \int_0^{R^2} |w|^2 \, dt \, dy \Big)^{1/2} .$$

Le théorème suivant donne une caractérisation de l'espace BMO^{-1}.

Théorème 1.4.1. — *Soit h une distribution tempérée. Alors h est dans BMO^{-1} si et seulement si existent des $f^i \in BMO$ tels que $h = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x_i}$.*

Sa preuve est basée sur le lemme suivant.

Lemme 1.4.2. — *Soit $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, qui est homogène de degré 0 . Alors, on a*

$$\|m(D_x) f\|_{BMO^{-1}} \leq C \, \|f\|_{BMO^{-1}} .$$

Démonstration du Lemme 1.4.2. Soit $f \in BMO^{-1}$ et soit g l'extension de la chaleur générée par f. On doit montrer que l'on a, si $T = m(D_x)$ et si $Q(x,R) = B(x,R) \times]0, R^2[$,

$$\frac{1}{|B(x,R)|} \|T\, g\|^2_{L^2(Q(x,R))} \leq C \, \|f\|^2_{BMO^{-1}} ,$$

ce qui se ramène, par invariance d'échelle et de translation, à montrer

$$\|T\, g\|_{L^2(Q(0,1))} \leq C \, \|f\|_{BMO^{-1}} . \tag{1.4.1}$$

On a

$$|g(x,t)| \leq C\, t^{-1/2} \, \|f\|_{BMO^{-1}} .$$

Il suffit de montrer (1.4.1) pour $x = 0$ et $t = 1$, ce qui est une conséquence du fait que le noyau de la chaleur appartient pour $t = 1$ à l'espace de Schwartz. Pour $0 < t \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} T\, g(t) = T\, S(t)\, f &= T\, (S(t) - S(1))\, f + T\, S(1) f \\ &= T\, (S(t) - S(1))\, f + \int_1^\infty T\, \Delta S(s) \; f(s)\, ds \\ &= T\, (\mathbf{1} - S(1-t))\, g(t) + \int_1^\infty T\, \Delta S(\frac{s}{2}) \; g(\frac{s}{2})\, ds . \end{aligned}$$

Les opérateurs $T\,(\mathbf{1} - S(1-t))$ sont bornés dans L^2 et leur noyaux k_t sont uniformément bornés, on a

$$|k_t(x)| \leq C \, |x|^{-n-2} .$$

Pour le premier terme, on peut donc écrire

$$\left\| T\left(\mathbf{1} - S(1-t)\, g(t)\right) \right\|_{L^2(B(0,1))} \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|g(t)\|_{L^2(B(x,1))}$$

uniformément en $t \in]0,1[$. Pour le second terme, on peut utiliser (1.4.1) afin d'obtenir la borne L^∞. On a

$$\left\| \int_1^\infty T\,\Delta S(\frac{s}{2})\; v(\frac{s}{2})\, ds \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_1^\infty \frac{1}{s}\; \|g(\frac{s}{2})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\, ds \leq C\, \|f\|_{BMO^{-1}}\ ,$$

puisque le noyau k_t de $T\,\Delta S(t)$ vérifie $\|k(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\; t^{-1}$. □

Démonstration du théorème 1.4.1. Soit f^i dans BMO pour $1 \leq i \leq n$. Soit g^i l'extension correspondante de la chaleur. Alors, on a par définition de BMO

$$\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{Q(x,R)} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial g^i}{\partial x_i}\right|^2 dx\; dt \leq \sum_i \|f^i\|^2_{BMO}\ .$$

Ceci implique $\nabla \cdot f \in BMO^{-1}$. Inversement si h est dans BMO^{-1}, alors, posant

$$R_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\,\Delta^{-1}$$

et

$$h_{i,j} := R_{i,j}\, h\,,$$

on a $h_{i,j} \in BMO^{-1}$. Pour tout i, il existe f^i tel que $\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j} = h_{i,j}$ puisque $\dfrac{\partial h_{i,j}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial h_{k,j}}{\partial x_i}$. On a $f^i \in BMO$ par construction et $h = \displaystyle\sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x_i}$. Le résultat est démontré. □

1.4.2. Le théorème de Koch et Tataru. — On rappelle la notation

$$Q(x,R) = B(x,R)\times]0,R^2[\,.$$

On introduit les espaces fonctionnels X et Y de fonctions définies dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+$ via les normes

$$\|f\|_X = \sup_t \left(t^{1/2}\, \|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) + \sup_{x,R>0} \left(\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{Q(x,R)} |f(t,y)|^2\; dt\, dy\right)^{1/2} \quad \text{et}$$

$$\|u\|_Y = \sup_t \left(t\, \|f(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) + \sup_{x,R>0} \left(\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{Q(x,R)} |f(t,y)|\; dt\, dy\right)\,.$$

On définit BMO_R comme étant l'espace construit sur le modèle de l'espace BMO en se restreignant à considérer les boules de rayon inférieur ou égal à R. De même, on définit X_R, Y_R et BMO_R^{-1}. Si v est dans BMO_1, on dit que v est dans VMO si et seulement si $\|v\|_{BMO_R} \to 0$ quand $R \to 0$. On appelle ainsi VMO^{-1} la fermeture de la classe de Schwartz dans $BMO^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Le résultat principal de [**23**] est le suivant.

Théorème 1.4.3. — *Les équations de Navier-Stokes* (NS) *ont une solution globale unique, petite dans X pour toute valeur initiale u_0 telle que $\nabla \cdot u_0 = 0$ et que u_0 soit petite dans BMO^{-1} .*

En outre il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $R > 0$, les équations de Navier-Stokes (NS) *ont une solution unique, petite dans chaque X_R , qui existe jusqu'en $t = R^2$, pour toute valeur initiale u_0 telle que $\|\nabla u_0\|_{BMO_R^{-1}} \leq \varepsilon$.*

En particulier, pour tout $u_0 \in VMO^{-1}$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$, il existe une solution locale unique.

Démonstration du théorème. Si $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur asscié à l'opérateur de la chaleur et $\mathcal{V}$ est cet opérateur pour l'équation de la chaleur inhomogène, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{avec} \quad u(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \mathcal{V}\ f\ ,$$

alors

$$\mathcal{V}\ f(t) = \int_0^t S(s)\ f(t-s)\ ds \quad \text{ou} \quad \mathcal{V}\ f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n \times]0,t[} \frac{e^{-|y|^2/4s}}{(4\pi s)^{n/2}}\ f(x-y,t-s)\ dy\, ds\ .$$

Les solutions de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0$$

sont donc de la forme

$$u(x,t) = (S(t)\ u_0)(x) + \mathcal{V}\ f(x,t)\ .$$

Pour tout multiplicateur de Fourier $m \in L^\infty$, on sait que $m(D_x)\ u = \mathcal{F}^{-1}(m\ \mathcal{F}u)$ est borné dans L^2 . On rappelle que $\mathbb{P}$ est l'opérateur qui projette sur les champs de vecteurs de divergence nulle ; celui-ci s'écrit en variables de Fourier à travers la matrice de terme général

$$m(\eta) = \delta_{i,j} - \frac{\eta_i\ \eta_j}{|\eta|^2} \quad \text{avec} \quad \delta_{i,j} = 1 \ \text{ ou } \ 0 \ \text{ selon que } \ i = j \ \text{ ou } \ i \neq j\ ,$$

et m satisfait, pour tout multi-indice α , à la condition

$$\sup_{\eta \neq 0} \left(|\eta|^\alpha \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha}\, m(\eta) \right| \right) \leq C\ .$$

L'opérateur $m(D_x)$ est un opérateur intégral singulier et, pour ϕ défini au Paragraphe 1.4.1, on a

$$|(\mathbb{P}\ \phi)(x)| \leq C\ (1 + |x|)^{-n}\ ,$$

et donc, pour le noyau $K_t(x) = \mathbb{P}\ \phi_{\sqrt{4t}}$ de $\mathbb{P}\ S(t)$, on a

$$|K_t(x)| \leq C\ (\sqrt{t} + |x|)^{-n}\ .$$

De même pour le noyau de $\mathbb{P}\ \nabla S(t)$, on peut montrer que

$$| \mathbb{P}\nabla\phi_{\sqrt{4t}}(x)| \leq C\ (\sqrt{t}+|x|)^{-n-1}\ , \tag{1.4.2}$$

$$| \mathbb{P}(\delta_0 - \phi_{\sqrt{4t}}(x)| \leq C\ t\ |x|^{-n-2}\ . \tag{1.4.3}$$

Pour $a \in C^\infty$ et à support compact dans $B(0,1)$, on considère $S(-t)\, a(t^{1/2}D_x)$. Son noyau est une fonction k_t de la classe de Schwartz vérifiant

$$|k_t(x)| \leq C_N\, t^{-n/2}\ (1+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^{-N} \quad \text{pour tout} \quad N \geq 1\ . \tag{1.4.4}$$

Pour démontrer le théorème on va utiliser une méthode du point fixe comme pour le théorème de Cannone ci-dessus. On écrit l'équation sous la forme

$$u(x,t) = S(t)\ u_0(x) - (\mathcal{V}\,\nabla\mathbb{P}N(u))(x,t) \quad \text{avec} \quad N(u) = u \otimes u\ .$$

Partant de données initiales petites, on effectuera l'argument de point fixe dans X afin d'obtenir la solution.

On s'appuie sur deux affirmations, dont on va démontrer la seconde.

1. *L'opérateur N applique X dans Y.*
2. *L'opérateur $\mathcal{V}\nabla\mathbb{P}$ applique Y dans X.*

Pour le deuxième énoncé, on doit prouver que

$$|\mathcal{V}\nabla\mathbb{P}f(x,t)| \leq C\ t^{-1/2}\ \|f\|_Y \quad \text{et} \quad \|\mathcal{V}\nabla\mathbb{P}f\|^2_{L^2(Q(x,R))} \leq C\ |B(x,R)|\ \|f\|^2_Y\ .$$

Par les invariances d'échelle et de translation, il suffit de montrer que

$$|\mathcal{V}\nabla\mathbb{P}f(0,1)| \leq C\ \|f\|_{Y_1} \quad \text{et} \tag{1.4.5}$$

$$\|\mathcal{V}\nabla\mathbb{P}f\|_{L^2(Q(0,1))} \leq C\ \|f\|_{Y_1}\ . \tag{1.4.6}$$

Soit χ la fonction caractéristique de l'ensemble $B(0,2)\times[0,1]$, et écrivons $f = \chi\, f + (1-\chi)\, f$. Il suit de (1.4.2) que le noyau k de $\mathcal{V}\,\nabla\mathbb{P}$ satisfait

$$|k(x,t)| \leq C\ (\sqrt{t}+|x|)^{-n-1}\ , \tag{1.4.7}$$

et l'on a l'estimation (meilleure que celle recherchée)

$$\|\mathcal{V}\nabla\mathbb{P}(1-\chi)\, f\|_{L^\infty(Q(0,1))} \leq C\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{Q(x,1)} |f|\ dx\, dt\ .$$

Il suffit donc de considérer χf et donc supposer dorénavant que le support de f est dans $B(0,2)\times[0,1]$. Dans ce cas l'estimation (1.4.5) découle de la borne du noyau donnée en (1.4.7). Si le support de f est dans $B(0,2)\times[0,1/2]$, on peut en effet utiliser la borne L^1 de f associée à la borne sur le noyau loin de 0. Si le support de f est dans $B(0,2)\times[1/2,1]$, on peut utiliser la borne L^∞ de f associée à l'intégrabilité du noyau en 0.

On démontre enfin l'estimation suivante, plus forte que (1.4.6)

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\mathcal{V}f|^2\ dx\, dt \leq \|f\|_Y\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})}$$

où l'on a supprimé la restriction sur le support de f et utilisé que $\mathbb{P}$ est un opérateur borné sur L^2 qui commute avec $\nabla\mathcal{V}$. Soit $a \in C_0^\infty$ avec $a(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $a(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 2$. On considère le multiplicateur $A_t = a(t^{1/2} D_x)$ qui tronque les fréquences supérieures à $t^{-1/2}$. Alors, pour $t \leq 1$, on a

$$\|(1 - A_t)\, g\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ t^{1/2}\, \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

et donc

$$\|\mathcal{V}\nabla(1-A_t)\, f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times]0,1[)} \leq C \int_0^1 \|(1-A_t\, f)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)}\, dt \leq C\, \|f\|_Y\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times]0,1[)}\ .$$

Il reste à décrire $A_t f$. Soit $k_t(x)$ le noyau de $S(-t)\, A_t$. D'après (1.4.4), on a pour tout $N \geq 1$ l'estimation

$$|k_t(x)| \leq C_N\, t^{-n/2}\, (1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}})^{-N}\ .$$

On a, en particulier

$$\|k_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad \text{et} \quad \|S(-t)\, A_t f\|_Y \leq C\|f\|_Y$$

ainsi que

$$\|S(-t)\, A_t f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Si $w(t) = S(-t)\, A_t\, f(t)$ alors $v(t) = \nabla\mathcal{V} A_T f$ peut s'écrire

$$v(t) = \nabla S(t) \int_0^t w(s)\ ds\ .$$

Il faut donc montrer que

$$\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times]0,1[)} \leq C\ \|w\|_Y\ \|w\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times]0,1[)}\ .$$

Après une série de calculs d'intégrales, on arrive à

$$\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times]0,1[)} \leq \int_0^1 \|w(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left\|(S(2s) - S(2)) \int_0^s w(\vartheta)\ d\vartheta\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} ds\ .$$

Pour obtenir (1.4.7), on montre que

$$\left\|S(2t) \int_0^t w(\vartheta)\ d\vartheta\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \|w\|_Y\ .$$

On a

$$\frac{1}{|B(x,R)|} \left\| \int_0^{R^2} w(\vartheta)\ d\vartheta\right\|_{L^1(B(x,R))} \leq \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{Q(x,R)} |w(x,t)|\ dx\, dt \leq \|w\|_Y\ .$$

L'opérateur $S(2t)$ a un noyau $k(x)$ de la forme

$$k(x) = C_n\ t^{-n/2}\ e^{-|x|^2/8t}\ .$$

Il agit donc comme un opérateur moyennisant sur l'échelle donnée par $\sqrt{t}$. Ainsi, en appliquant l'intégrale ci-dessus sur une maille cubique de taille $\sqrt{t}$ on obtient

$$\left\|S(2t) \int_0^t w(\vartheta)\ d\vartheta\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \|w\|_Y \sum_{q\in\mathbb{Z}^n} e^{-|q|^2} \leq C\ \|w\|_Y\ .$$

Le théorème est démontré. $\square$

D'autres espaces fonctionnels

Pour $p > n$, l'espace inhomogène $B^{-1+(n/p)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ xpeut aussi être défini via l'extension de la chaleur : la distribution tempérée u appartient à $B^{-1+(n/p)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si son extension de la chaleur v satisfait

$$\|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\ t^{-(1-(n/p))/2} \quad \text{pour} \quad t \in]0,1]\ .$$

Soit $R \leq 1$. Alors, on a

$$\Big(\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{Q(x,R)} |v|^2\,dx\,dt\Big)^{1/2} \leq |B(x,R)|^{-n/p}\Big(\int_0^{R^2} \|v(t)\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dt\Big)^{1/2}$$
$$\leq \sqrt{\frac{p}{n}}\ |B(x,R)|^{-n/p} \sup_{0<t\leq R^2}\ \Big(t^{-(1-(n/p))/2}\ \|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)\ .$$

De plus, d'après l'inégalité de Young et l'estimation du noyau, on a

$$(4\pi t)^{(1-n/p)/2}\ \|v(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

d'où

$$L^n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{-1+(n/p)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow BMO^{-1}\ .$$

Les espaces de Morrey M^p_q pour $1 \leq q \leq n$ sont définis comme les sous-espaces de $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ constitués des fonctions u telles que

$$\sup_{x,R\leq 1}\Big[R^{n/p}\ \Big(\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} |u|^q\ dx\Big)^{1/q}\Big] < \infty\ .$$

On a $M^p_p = L^p_{unif}(\mathbb{R}^n)$ et $u \in M^n_1$ si et seulement si $u \in L^1_{unif}(\mathbb{R}^n)$ et $u \in B^{-1}_{\infty,\infty}$. On a donc $M^n_q \subset BMO^{-1}$ pour $1 < q \leq n$.

1.4.3. Sur l'espaces des données initiales produisant des solutions globales. — En 2004, P. Auscher, S. Dubois et P. Tchamitchian [**1**] ont proposé le problème de déterminer la topologie sur l'espace des fonctions conditions initiales pour que celles-ci produisent de bonnes solutions. Ils citent T. Kawanago [**24**], qui a montré que l'espace des données initiales $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ qui produisent une solution globale $u \in C([0,\infty[, L^3(\mathbb{R}^3))$, et vérifient en outre $\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L^3} = 0$, est un ouvert de la topologie de $L^3(\mathbb{R}^3)$. Kawanago observe encore que si u satisfait l'inégalité d'énergie, alors la propriété de décroissance est vraie et il n'est pas nécessaire de la supposer.

Gallagher, Iftimie et Planchon [**17**] ont montré le caractère superflu de l'hypothèse de décroissance de la solution, établissant que celle-ci est toujours vérifée.

Auscher et al introduisent les espaces définis ci-dessous. D'abord C (ou C_∞) est l'espace des fonctions $u(t,x)$ définies sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{C}^3$ telles que

$$N_\infty(u) := \sup_{t>0} (\sqrt{t}\,\|u(t)\|_{L^\infty}) < \infty$$

$$\text{et} \quad N_C(u) := \Big(\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|Q|}\int_0^{l_Q^2}\int_Q |u(t,x)|^2\,dx\,dt\Big)^{1/2} < \infty\ ,$$

où $\mathcal{Q}$ est l'ensemble de tous les cubes Q dans $\mathbb{R}^3$ dont les côtés sont parallèles aux axes, de longueur l_Q et de mesure $|Q|$.

De manière analogue, étant donné $T \in]0,\infty[$, soit C_T l'espace des fonctions $u(t,x)$ définies sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{C}^3$ telles que

$$N_{\infty,T}(u) = \sup_{T>t>0} (\sqrt{t}\,\|u(t)\|_{L^\infty}) < \infty$$

$$\text{et} \quad N_{C,T}(u) := \Big(\sup_{Q\in\mathcal{Q}\,,\,l_Q\le\sqrt{T}} \frac{1}{|Q|}\int_0^{l_Q^2}\int_Q |u(t,x)|^2\,dx\,dt\Big)^{1/2} < \infty\ .$$

Enfin, l'espace C_0 (respectivement $C_{0,T}$) est le sous-espace fermé dans C (dans C_T) des fonctions $u(t,x)$ telles que $\lim_{T'\to 0}\|u|_{C_{T'}} = 0$.

On rappelle, comme vu au paragraphe précédent, que si $u_0 \in BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$ est assez petit et de divergence nulle, alors il existe une solution $u \in C$ de l'équation intégrale de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^3$ avec valeur initiale u_0, qui s'écrit

$$u(t) = e^{t\,\Delta}\,u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\,\Delta}\,\mathbb{P}\,\nabla\cdot(u(s)\otimes u(s))\,ds\ , \tag{1.4.8}$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray qui projette sur les champs de vecteurs de divergence nulle.

Si u_0 est une distribution de divergence nulle appartenant à VMO^{-1}, alors il existe $T>0$ et $u \in C_{0,T}$ qui résout la même équation dans $]0,T[\times\mathbb{R}^3$, avec T dépendant de u_0, en particulier $T=\infty$ quand u_0 est assez petit.

Définition 1.4.4. — *On définit l'ensemble E de toutes les données $u_0 \in VMO^{-1}$ qui produisent une solution globale de (1.4.8) appartenant, aussi grand que soit le temps T, à l'intersection $\bigcap_{T>0} C_{0,T}$.*

Le résultat suivant est dû à [**1**], nous en donnons le principe de démonstation ci-dessous.

Théorème 1.4.5. — *i) Si $u_0 \in E$ et si u est une solution associée à u_0, alors $u \in C_0$ et*

$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t}\,\|u(t)\|_{L^\infty}) + \lim_{t\to\infty}\|u(t+\cdot)\|_C = 0\,.$$

ii) Il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $v_0 \in BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$ avec $\|u_0-v_0\|_{BMO^{-1}} \le \varepsilon$, l'équation de Navier-Stokes avec donnée v_0 a une solution globale v dans C.

De plus, l'application $v_0 \mapsto v$, définie de la boule $B(u_0, \varepsilon)$ dans BMO^{-1} vers l'espace C est analytique *en u_0 au sens de la définition ci-dessous.*

Définition 1.4.6. — *On dit qu'une application ϕ, définie d'un sous-espace ouvert Ω d'un espace de Banach F vers un autre espace de Banach $\mathcal{F}$, est* analytique *en $f_0 \in \Omega$ quand il existe $\varepsilon > 0$ et une suite L_k, $k \geq 1$ d'opérateurs k-linéaires bornés, chacun défini de F^k vers $\mathcal{F}$, tels que*

$$B(f_0, \varepsilon) \subset \Omega \quad \textit{et} \quad \phi(g_0) = \phi(f_0) + \sum_{k=1}^{\infty} L_k\,(g_0 - f_0, \ldots, g_0 - f_0) \quad \textit{avec} \quad g_0 \in B(f_0, \varepsilon)\,,$$

la série étant normalement convergente dans $\mathcal{F}$ pour un tel g_0.

La preuve de ce théoréme repose sur la stratégie de [**17**], qui passe par une série de lemmes. On écrit

$$u_0 = f_0 + g_0$$

avec $f_0 \in VMO^{-1} \cap L^2$ et g_0 assez petit dans VMO^{-1}, de telle sorte qu'il existe une solution g de l'équation intégrale de Navier-Stokes (1.4.8) vérifiant $\|g\|_C \leq \varepsilon$. On écrit alors

$$u = f + g\,.$$

Le résultat clef est le suivant, qui suit d'une estimation de type énergie sur f.

Lemme 1.4.7. — *On a*

$$\lim_{T \to \infty} \Big(\frac{1}{T} \int_1^T \|f(t)\|^4_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\, dt \Big) = 0\ .$$

En effet par ce résultat on conclut que pour un temps assez grand t_0, $f(t_0)$ est petit dans VMO^{-1} (qui contient $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$). Comme on peut montrer que ăg reste petit pour tout temps dans BMO^{-1}, alors ău est petit au temps t_0 et on peut alors appliquer le théorème de Koch et Tataru vu au paragraphe précédent pour obtenir le comportement asymptotique de la solution.

Le reste de la démonstration suit assez facilement des énoncés suivants. On rappelle la définition

$$B(f, g) := \int_0^t e^{(t-s)\,\Delta}\, \mathbb{P}\, \nabla \cdot\ (f(s) \otimes g(s))\, ds\,.$$

Lemme 1.4.8. — *(Estimation de Koch et Tataru) Il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tous $f, g \in C$, on ait*

$$\|B(f, g)\|_C \leq A\, \|f\|_c\, \|g\|_C\ .$$

On définit un opérateur linéaire $L_{a,b}$ par

$$L_{a,b}(f)(t) := \int_0^t e^{(t-s)\,\Delta}\, \mathbb{P}\, \nabla \cdot\ (a(s) \otimes f(s) + f(s) \otimes a(s))\, ds\ ,$$

on a donc $L_{a,b}(f) = B(a,f) + B(f,b)$. Alors l'opérateur $L_{u,u}$ est linéaire continu sur C. Définissant $S\,w_0 := (e^{t\Delta}w_0)_{t>0}$, on a

$$w = S\,w_0 - L_{u,u}(w) + B(w,w)\,. \tag{1.4.9}$$

Lemme 1.4.9. — *Le spectre de $L_{u,u}$ dans C est $\{0\}$.*

Lemme 1.4.10. — *Soit $\mathcal{F}$ un espace de Banach, L un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{F}$ et B un opérateur bilinéaire continu sur $\mathcal{F}$, au sens où l'on a*

$$\|B\| = \sup_{\{f,g\in\mathcal{F}|\ \|f\|_{\mathcal{F}}=\|g\|_{\mathcal{F}}=1\}} \|B(f,g)\|_{\mathcal{F}} < \infty\ .$$

Alors, si $\mathbf{1}+L$ est inversible, pour tout $z\in\mathcal{F}$ tel que

$$\|(\mathbf{1}+L)^{-1}z\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{4\,\|B\|\|(\mathbf{1}+L)^{-1}\|}\ , \tag{1.4.10}$$

existe une solution $w\in\mathcal{F}$ de l'équation $w = z - L(w) + B(w,w)$.

En outre, il existe pour tout $k\ge 1$ un opérateur k-linéaire continu T_k sur $\mathcal{F}^k$ vérifiant

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(z,\dots,z)\,,$$

et ces séries convergent normalement sous la condition (1.4.10).

Ces trois derniers lemmes permettent de résoudre (1.4.9) pour w_0 assez petit dans BMO^{-1}. Nous n'entrerons pas dans les détails ici. □

1.4.4. Optimalité du résultat de Koch et Tataru. — Dans [**1**], les auteurs montrent l'optimalité du résultat de Koch et Tataru, au sens suivant.

On suppose donnés un espace de Banach F, dans lequel se trouve la condition initiale u_0, et un espace de Banach $\mathcal{F}$, auquel appartient la solution u que l'on construit. Il sont tous les deux critiques, c'est-à-dire invariants par les transformations laissant invariantes les équations de Navier-Stokes

$$\text{pour tous}\quad \lambda>0\quad\text{et}\quad x_0\in\mathbb{R}^3 \qquad \|\lambda\,u_0\,(\lambda\,\cdot - x_0)\|_F = \|u_0\|_F\ , \tag{1.4.11}$$

$$\text{pour tous}\quad \lambda>0\quad\text{et}\quad x_0\in\mathbb{R}^3 \qquad \|\lambda\,u\,(\lambda^2\,\cdot, \lambda\,\cdot - x_0)\|_{\mathcal{F}} = \|u\|_{\mathcal{F}}\ . \tag{1.4.12}$$

En outre, le semi-groupe associé à l'équation de la chaleur envoie continûment F sur $\mathcal{F}$ et il existe une constante K telle que

$$\|S\,u_0\|_{\mathcal{F}} \le K\ \|u_0\|_F\ . \tag{1.4.13}$$

On suppose aussi que l'espace $\mathcal{F}$ s'injecte continûment dans l'espace $L^2_C([0,\infty[\times\mathbb{R}^3)$, qui est celui formé par les fonctions définies sur $[0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ qui sont de plus de carré intégrable sur tout compact de $[0,\infty[\times\mathbb{R}^3$. D'après

le travail de Koch et Tataru [**23**], ceci permet d'assurer l'existence d'une constante K pour laquelle on a, pour tout $f \in \mathcal{F}$

$$\Big(\int_0^1 \int_{Q_0} |f(t,x)|^2 \, dx \, dt\Big)^{1/2} \leq K \, \|f\|_{\mathcal{F}} \, ,$$

où Q_0 est le cube unité $[0,1[^3$. Par (1.4.12), on tire de cette inégalité (l_Q est le côté de Q)

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_0^{l_Q^2} \int_Q |f(t,x)|^2 \, dx \, dt\Big)^{1/2} \leq K \, \|f\|_{\mathcal{F}}$$

et l'on a, pour tout $f \in \mathcal{F}$

$$N_C(f) \leq K \, \|f\|_{\mathcal{F}} \, . \tag{1.4.14}$$

On fait enfin l'hypothèse de continuité de B sur $\mathcal{F}$

$$\|B\| = \sup_{\{f,g \in \mathcal{F} \,|\, \|f\|_{\mathcal{F}} = \|g\|_{\mathcal{F}} = 1\}} \|B(f,g)\|_{\mathcal{F}} < \infty \, . \tag{1.4.15}$$

Lorsque les hypothèses (1.4.11) à (1.4.15) sont satisfaites, le lemme 1.4.10 s'applique et assure qu'il existe une solution globale dans $\mathcal{F}$ des équations (1.4.8) pour une donnée initiale u_0 assez petite dans F .

De plus, si l'espace F vérifie la propriété

$$\text{pour tout} \quad u_0 \in F \quad \text{on a} \quad \lim_{T \to 0} \|S \, u_0\|_{\mathcal{F}_T} = 0 \, , \tag{1.4.16}$$

où $\mathcal{F}_T$ est l'espace des restrictions à $[0,T[\times\mathbb{R}^3$ des éléments de $\mathcal{F}$, alors, pour toute donnée initiale u_0 , il existe une solution locale.

Remarque 1.4.11. — *Ce schéma s'applique aux choix $F = \dot{H}^{\frac{1}{2}}$ ou $F = L^3$, ou encore F est égal à la fermeture de $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ est la classe de Schwartz) dans $\dot{B}^{s_p}_{p,q}$, avec*

$$s_p = -1 + 3/p \, , \, 1 \leq q < \infty \, , \, 1 \leq q \leq \infty \, .$$

L'optimalité du résultat de Koch et Tataru réside en ce que, si (1.4.13) *et* (1.4.14) *sont satisfaits*

$$\textit{pour tout} \quad u_0 \in F \quad \textit{on a} \quad N_C(S \, u_0) \leq C \, \|u_0\|_F \, ,$$

ainsi que dans le fait que

$$N_C(S \, u_0) < \infty \qquad \textit{équivaut à} \qquad u_0 \in BMO^{-1} \, .$$

Tout F du type décrit ci-dessus s'injecte continûment dans BMO^{-1} .

Les résultats suivants sont démontrés dans [**1**].

Lemme 1.4.12. — *Soit F un espace de Banach qui s'injecte continûment dans l'espace VMO^{-1} . Soit $\mathcal{F}$ un autre espace de Banach, pour lequel* (1.4.13) *est vérifié. Et soit E l'espace introduit à la définition* 1.4.4. *Pour toute paire de solutions globales u et v de* (1.4.8) *dans C_0 associées aux données $u_0, v_0 \in F \cap E$, on suppose que l'opérateur $L_{u,v}$ est continu sur $\mathcal{F}$ et de spectre réduit*

à $\{0\}$. *Soit* $u_0 \in E \cap F$ *et soit* $u \in C_0$ *la solution de* (1.4.8) *déterminée par* u_0 . *Alors*

i) en fait, u *appartient à* $\mathcal{F}$ *;*

ii) il existe $\varepsilon > 0$ *tel que tout* $v_0 \in F$ *satisfaisant* $\|u_0 - v_0\|_{BMO^{-1}} < \varepsilon$ *détermine une solution globale* $v \in \mathcal{F}$ *de* (1.4.8). *En outre, l'application* $v_0 \mapsto v$, *de* $F \cap B_{BMO^{-1}}(u_0, \varepsilon)$ *dans* $\mathcal{F}$, *est analytique en* u_0 .

L'espace $\mathcal{F}$ le plus naturel est l'espace des fonctions continues $f(t,x)$, à valeurs dans F pour tout $t > 0$ qui vérifient $\lim_{t\to\infty} \|f(t)\|_F = 0$, espace que l'on note aussi $C_0([0,\infty[, F)$.

Théorème 1.4.13. — *Soit* $u_0 \in E \cap F$, *où* F *est l'un des trois espaces cités à la remarque* 1.4.11 *et soit* $u \in C_0$ *la solution de* (1.4.8) *de condition initiale* u_0 .

On a $u \in C_0([0,\infty[, F)$, *et il existe* $\varepsilon > 0$, *dépendant de* u_0, *tel que tout* $v_0 \in F$ *satisfaisant* $\|u_0 - v_0\|_{BMO^{-1}} < \varepsilon$ *appartienne aussi à* E *et détermine une solution globale* $v \in C_0([0,\infty[, F)$ *de* (1.4.8). *De plus, l'application* $v_0 \mapsto v$, *de* $F \cap B_{BMO^{-1}}(u_0, \varepsilon)$ *sur* $C_0([0,\infty[, F)$, *est analytique en* u_0 .

1.5. Sur l'anisotropie des données initiales

Le rôle de l'anisotropie spectrale dans la résolution de l'équation de Navier-Stokes en dimension 3 est étudié notamment dans l'article de J.Y.Chemin, I.Gallagher et C.Mullaert [**11**]. Ces auteurs introduisentl'ensemble $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs éléments de $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ qui sont à divergence nulle et engendrent des solutions globales régulières de (NS). D'après Fujita et Kato [**16**], l'ensemble $\mathcal{G}$ contient une boule de rayon strictement positif. Il existe un rayon critique ρ_c pour lequel, toute donnée initiale u_0 telle que $\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \rho_c$ engendre une solution globale régulière. Puis W.Rusin et V.Sverak [**35**] ont démontré que le complémentaire $\mathcal{G}^c$ de $\mathcal{G}$ dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ a la propriété que l'ensemble

$$\mathcal{G}^c \cap \{u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \mid \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \rho_c\}$$

est non vide et compact, aux translations et dilatations près.

J.Y.Chemin, I.Gallagher et P.Zhang [**12**] ont montré que tout point $u_0 \in \mathcal{G}$ est le centre d'un segment de droite $I \subset \mathcal{G}$ dont la longueur mesurée dans la norme $\dot{C}^{-1} = \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ est arbitrairement grande. Notons que cet espace $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ est en fait l'espace dans lequel s'injecte tout espace de Banach de distributions tempérées invariant d'échelle, voir [**30**] — si l'on veut définir une notion de «grande» donnée initiale pour (NS), c'est donc dans $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ qu'il convient de la mesurer.

Pour tout $u_0 \in \mathcal{G}$, il y a donc des perturbations arbitrairement grandes (au sens de $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$) de u_0 qui engendrent des solutions globales. Ces perturbations sont fortement anisotropes.

Nous alons détailler les résultats de [**11**] et [**12**] ci-dessous.

Remarque 1.5.1. — *Etudiant une situation* anisotrope *dans* $\mathbb{R}^3$, *on écrit* $x_{\mathrm{h}} := (x_1\,,\,x_2)$ *pour les variables* horizontales. *De même on note* u^{h} *pour les composantes horizontales d'un champ de vecteurs* u, *et les opérateurs de dérivation, divergence, Laplacien etc en deux dimensions seront notés avec un indice* h.

On introduit les normes (avec les espaces associés où ces normes existent et sont finies)

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{h}},L^q_{\mathrm{v}}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2_h}\big(\int_{\mathbb{R}_v}|f(x_{\mathrm{h}},x_3)|^q\,dx_3\big)^{p/q}\,dx_{\mathrm{h}}\Big)^{1/p}\ ,$$

$$\|f\|_{\dot{H}^{s,\sigma}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi_h|^{2s}\,|\xi_3|^{2\sigma}\,|\mathcal{F}f(\xi_h,\xi_3)|^2\,d\xi_h\,d\xi_3\Big)^{1/2}\ .$$

Observons que l'espace $\dot{H}^{s,\sigma}$ est un espace de Hilbert si $s<1$ et $\sigma<1/2$. La norme suivante, ainsi que l'espace correspondant, sont également utiles

$$\|f\|_{\dot{H}^{s_1,s_2,s_3}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi_1|^{2s_1}\,|\xi_2|^{2s_2}\,|\xi_3|^{2s_3}\,|\mathcal{F}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|^2\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\Big)^{1/2}\ .$$

C'est un espace de Hilbert si les s_i sont $<1/2$ pour $i=1,2,3$. Le théorème suivant, dû à [**11**], est facile à démontrer. Une preuve figure ci-dessous.

Théorème 1.5.2. — *Il existe une constante* c_0 *telle que, si* $(u_{\varepsilon,0})_\varepsilon$ *est une famille (indexée par* ε*) de champs de vecteurs à divergence nulle dans* $\dot{H}^{\frac12}$, *vérifiant*

$$\forall\xi\in\mathrm{Supp}(\mathcal{F}u_{\varepsilon,0})\qquad \textit{ou bien}\quad |\xi_h|\le\varepsilon\,|\xi_3|\quad \textit{ou bien}\quad |\xi_3|\le\varepsilon\,|\xi_h|\ , \tag{1.5.1}$$

alors

$$\varepsilon^4\,\|u_{\varepsilon,0}\|_{\dot{H}^{\frac12}}\le c_0\qquad\Longrightarrow\qquad u_{\varepsilon,0}\in\mathcal{G}\ .$$

Pour démontrer le théorème 1.5.2, on s'appuie sur le théorème suivant, dû à Iftimie [**21**], ainsi que d'un corollaire – ces deux résultats sont admis.

Théorème 1.5.3. — *Il existe une constante* ε_0 *pour laquelle l'énoncé qui suit est vrai :*

étant donné, pour $i=1,2,3$, *les réels* s_i *vérifiant* $s_1+s_2+s_3=1/2$ *et* $-1/2<s_i<1/2$, *tout champ de vecteurs* u_0 *de divergence nulle de* $\dot{H}^{s_1,s_2,s_3}$ *qui est de norme inférieure à* ε_0 *produit une solution globale régulière* u *de* (NS).

Corollaire 1.5.4. — *Il existe une constante ε_0 pour laquelle l'énoncé qui suit est vrai :*

étant donné $s \in]0, 1/2[$, tout champ de vecteurs u_0 de divergence nulle de $\dot{H}^{s,(1/2)-s}$ qui est de norme inférieure à ε_0 produit une solution globale régulière u de (NS).

Preuve du théorème 1.5.2. On écrit la décomposition $u_0 = v_0 + w_0$ où

$$v_0 = \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathbf{1}_{\{|\xi_h|<\varepsilon\,|\xi_3|\}}\mathcal{F}u_0(\xi)\Big) \qquad \text{et} \qquad w_0 = \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathbf{1}_{\{|\xi_3|<\varepsilon\,|\xi_h|\}}\mathcal{F}u_0(\xi)\Big)\,.$$

Si $s \in]0, 1/2[$, on a

$$\begin{aligned}
\|v_0\|^2_{\dot{H}^{s,(1/2)-s}} &= \int_{\{|\xi_3|<\varepsilon\,|\xi_h|\}} |\xi_h|^{2s}\,|\xi_3|^{1-2s}\,|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \varepsilon^{1-2s}\int |\xi_h|\,|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \varepsilon^{2s}\,\|u_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\ ,
\end{aligned}$$

puisque $s < 1/2$. De même, puisque $s > 0$

$$\begin{aligned}
\|w_0\|^2_{\dot{H}^{s,(1/2)-s}} &= \int_{\{|\xi_h|<\varepsilon\,|\xi_3|\}} |\xi_h|^{2s}\,|\xi_3|^{1-2s}\,|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \varepsilon^{2s}\int |\xi_3|\,|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \varepsilon^{2s}\,\|u_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\ .
\end{aligned}$$

Pour $s = 1/4$ on a donc l'inégalité

$$\|u_0\|^2_{\dot{H}^{1/4,1/4}} \leq \varepsilon^{1/4}\,\|u_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\ ,$$

et le résultat suit du corollaire précédent. □

Le théorème qui suit montre que si la donnée initiale varie lentement dans une direction, alors elle génère une solution globale, qui, pour parler de manière lâche, correspond au cas où le support de la donnée initiale dans l'espace de Fourier est contenu dans la région $\{|\xi_3| < \varepsilon\,|\xi_h|\}$. De plus, ajouter à toute donnée intiale dans $\mathcal{G}$ une autre donnée à variation lente engendre toujours une solution globale.

Théorème 1.5.5. — *Soit $v_0^{\mathrm{h}} = (v_0^1, v_0^2)$ un champ de vecteurs horizontal et régulier, de divergence nulle sur $\mathbb{R}^3$ (on prend v_0^{h} dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, ses dérivées sont dans l'espace $L^2(\mathbb{R}_{\mathrm{v}}, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$). Soit w_0 un champ de vecteurs régulier de divergence nulle sur $\mathbb{R}^3$.*

Il existe un $\varepsilon_0 > 0$, qui dépend des normes de v_0^{h} et de w_0 , et vérifie, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$:

les données initiales suivantes sont dans $\mathcal{G}$

$$v_{\varepsilon,0}(x) = (v_0^{\mathrm{h}} + \varepsilon\, w_0^h, w_0^3)(x_{\mathrm{h}}, x_3)\ .$$

De plus, si, pour tout $x_{\rm h} \in \mathbb{R}^2$ *, on a* $v_0^{\rm h}(x_{\rm h}, 0) = w_0^3(x_{\rm h}, 0) = 0$ *et si* u_0 *est dans* $\mathcal{G}$ *, alors il existe un nombre* ε_0' *qui dépend de* u_0 *et des normes de* $v_0^{\rm h}$ *et* w_0 *, tel que, si* $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0'$ *, la donnée initiale* $u_{\varepsilon,0} = u_0 + v_{\varepsilon,0}$ *appartient à* $\mathcal{G}$ *.*

La preuve de ce théorème est donnée dans [**10**] et [**12**].

On mentionne encore l'inégalité suivante (prouvée dans [**10**])

$$\text{pour tout } \ u_0 \in \mathcal{S} \ \text{ de la forme } \ u_0 : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto u_0(x) = \varphi(x_{\rm h})\ \varphi(x_3)$$

$$\text{on a} \qquad \| \ u_{\varepsilon,0}\|_{\dot{C}^{-1}} \geq \frac{1}{2}\, \|\varphi\|_{\dot{C}^{-1}(\mathbb{R}^2)}\ \| \ \varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ ;$$

cette inégalité implique que $v_{\varepsilon,0}$ peut être choisi arbitrairement grand dans $\dot{C}^{-1}$.

Le résultat suivant est dû à [**11**].

Théorème 1.5.6. — *Soit* $(v_{\varepsilon,0})_\varepsilon$ *une famille de champs de vecteurs réguliers de divergence nulle, uniformément bornés dans* $L^\infty(\mathbb{R}, \dot{H}^s(\mathbb{R}^2))$ *, où l'on suppose* $s \geq -1$ *, et tels que la famille* $(\sqrt{\varepsilon}\, v_{\varepsilon,0})_\varepsilon$ *soit uniformément bornée dans* $L^2(\mathbb{R}_{x_3}, \dot{H}^s(\mathbb{R}^2))$ *pour* $s \geq -1$ *, satisfaisant de plus*

$$\text{pour tout } \ \varepsilon \in]0,1[\ \text{ et pour tout } \ \xi \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F} v_{\varepsilon,0}) \qquad |\xi_3| \leq \varepsilon\ |\xi_h| \ .$$

Alors, il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *, la donnée* $v_{\varepsilon,0}$ *appartient à* $\mathcal{G}$ *.*

En outre, si u_0 *appartient à* $\mathcal{G}$ *, on peut trouver des constantes* c_0 *et* ε_0' *telles que, si* $\|v_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} \leq c_0$ *, alors, pour tout* $\varepsilon \leq \varepsilon_0'$ *, la donnée initiale* $u_{\varepsilon,0} = u_0 + v_{\varepsilon,0}$ *appartient à* $\mathcal{G}$ *.*

Ce dernier théorème se démontre en décomposant la donnée initiale comme suit. On note $\mathbb{P}_{\rm h} = \mathrm{Id} - \nabla_{\rm h}\Delta_{\rm h}^{-1}\mathrm{div}_{\rm h}$ le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs horizontaux de divergence nulle.

Proposition 1.5.7. — *Soit* $v_{\varepsilon,0}$ *un champ de vecteurs de divergence nulle qui vérifie*

$$\text{pour tout } \ \varepsilon \in]0,1[\ \text{ et pour tout } \ \xi \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F} v_{\varepsilon,0}) \qquad |\xi_3| \leq \varepsilon\ |\xi_{\rm h}| \ .$$

Alors, on peut trouver deux champs de vecteurs de divergence nulle $(v_{\varepsilon,0}^{\rm h}, 0)$ *et* $w_{\varepsilon,0}$ *de spectre inclus dans dans celui de* $v_{\varepsilon,0}$ *et tels que*

$$v_{\varepsilon,0} = (\overline{v}_{\varepsilon,0}^{\rm h}, 0) + w_{\varepsilon,0} \quad \text{où} \ \ \overline{v}_{\varepsilon,0}^{\rm h} = \mathbb{P}_{\rm h}(v_{\varepsilon,0}^{\rm h}) \ \ \text{et} \ \ |\mathcal{F} w_{\varepsilon,0}^{\rm h}| \leq \varepsilon\ |\mathcal{F} w_{\varepsilon,0}^3| \ .$$

On construit une solution approximante en suivant [**11**].

On cherche une solution approchée u_ε^{app} sous la forme

$$u_\varepsilon^{app} = u + v_\varepsilon^{app}\,, \quad v_\varepsilon^{app} = (\overline{v}_\varepsilon^{\rm h}, 0) + w_\varepsilon$$

où u est l'unique solution globale associée à u_0 et $\overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon$ la solution de l'équation (NS) bi-dimensionnelle pour x_3 donné et fixé :

$$(1.5.2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\,\overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon + \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon \cdot \nabla^{\mathrm{h}}\overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon - \Delta_{\mathrm{h}}\overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon = -\nabla^{\mathrm{h}}\overline{p}_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \ , \\ \nabla \cdot \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon = 0 \qquad \text{et} \qquad (\overline{v}^{\mathrm{h}}_{\varepsilon\,|t=0} = \overline{v}^{\mathrm{h}}_{\varepsilon,0}(\cdot, x_3) \ , \end{cases}$$

alors que w_ε est solution de l'équation linéaire de type transport-diffusion

$$(1.5.3)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\, w_\varepsilon + \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon \cdot \nabla^{\mathrm{h}} w_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon = -\nabla q_\varepsilon \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot w_\varepsilon = 0 \qquad \text{et} \qquad (w_\varepsilon)_{|t=0} = w_{\varepsilon,0} \ . \end{cases}$$

Ces champs de vecteurs satisfont aux propriétés du lemme suivant.

Lemme 1.5.8. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.5.6*, la famille* (u^{app}_ε) *est uniformément bornée dans* $L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ *et* $(\nabla u^{app}_\varepsilon)$ *est uniformément bornée dans l'espace* $L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty_v\ L^2_h)$.

On définit u_ε comme étant la solution associée à la donnée initiale $u_0 + v_{\varepsilon,0}$, dont le temps de vie est a priori fini et dépend de ε et on introduit $R_\varepsilon = u_\varepsilon - u^{app}_\varepsilon$.

Lemme 1.5.9. — *Pour tout* $\delta > 0$*, il existe* $\varepsilon(\delta)$ *et* $c(\delta)$ *tels que, pour* $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$*, si*

$$\|v_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L^2_h} \leq c(\delta)\,,$$

alors le champ de vecteurs $R_\varepsilon = u_\varepsilon - u^{app}_\varepsilon$ *satisfait l'équation*

$$(1.5.4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\, R_\varepsilon + R_\varepsilon \cdot \nabla R_\varepsilon - \Delta R_\varepsilon + u^{app}_\varepsilon \cdot \nabla R_\varepsilon + R_\varepsilon \cdot \nabla u^{app}_\varepsilon = F_\varepsilon - \nabla \tilde{q}_\varepsilon \ , \\ \nabla \cdot R_\varepsilon = 0 \quad \textit{et} \quad (R_\varepsilon)_{|t=0} = 0 \quad \textit{avec} \quad \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \delta \ . \end{cases}$$

Supposant ces deux lemmes établis, la preuve du théorème 1.5.6 en découle, en suivant la démarche de [**11**], qui passe par une estimation d'énergie dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ à travers (1.5.4) et utilise le fait que le terme de force est petit et la donnée initiale nulle. Ceci entraîne que R_ε est unique et uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{3/2})$.

Proposition 1.5.10. — *Avec les hypothèses du théorème* 1.5.6*, pour tout réel* $s > -1$ *et pour tout* $\alpha = (\alpha_h, \alpha_3) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ *, il existe une constante* $\overline{c}$ *telle que le champ de vecteurs* $\overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon$ *satisfait à estimation qui suit*

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\, \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon(t) \right\|^2_{L^\infty_{\mathrm{v}}\, \dot{H}^s_{\mathrm{h}}} + \sup_{x_3 \in \mathbb{R}} \int_0^t \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\, \nabla^{\mathrm{h}} \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon(t') \right\|^2_{\dot{H}^s_{\mathrm{h}}} dt' + \\ \varepsilon \left(\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\, \nabla^{\mathrm{h}} \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon(t) \right\|^2_{L^2_{\mathrm{v}}\, \dot{H}^s_{\mathrm{h}}} + \int_0^t \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\, \overline{v}^{\mathrm{h}}_\varepsilon(t') \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} dt' \right) \leq \overline{c}\ \varepsilon^{2\alpha_3} \ .$$

Proposition 1.5.11. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.5.6*, les familles* w_ε^3 *et* $\varepsilon^{-1} w_\varepsilon^{\mathrm{h}}$ *sont, pour tout* $s \geq 0$ *, uniformément bornées dans l'espace* $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty_{\mathrm{v}} \dot{H}^s_{\mathrm{h}}) \cap L^2(\mathbb{R}^+, L^\infty_{\mathrm{v}} \dot{H}^s_{\mathrm{h}})$ *. De plus, pour tout* $s \geq 0$ *et tout* $\alpha = (\alpha_h, \alpha_3) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ *, la famille* $\varepsilon^{(1/2)-\alpha_3} \partial^\alpha \overline{w}_\varepsilon / \partial x^\alpha$ *est uniformément bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2_{\mathrm{v}} \dot{H}^s_{\mathrm{h}}) \cap L^2(\mathbb{R}^+, L^2_{\mathrm{v}} \dot{H}^s_{\mathrm{h}})$ *.*

On a l'estimation suivante du reste $R_\varepsilon = u_\varepsilon - u_\varepsilon^{app}$: en soustrayant l'équation vérifiée par u_ε^{app} de celle vérifiée par u_ε , on trouve

$$F_\varepsilon = (\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{v}_\varepsilon^{\mathrm{h}}, \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{p}_\varepsilon) + w_3 \partial_3 v_\varepsilon^{app} + u \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla u \ ,$$

que l'on décompose en $F_\varepsilon = G_\varepsilon + H_\varepsilon$, où

$$G_\varepsilon = (\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \overline{v}_\varepsilon^{\mathrm{h}}, \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{p}_\varepsilon) + w_3 \partial_3 v_\varepsilon^{app} \qquad \text{et} \qquad H_\varepsilon = u \cdot \nabla v_\varepsilon^{app} + v_\varepsilon^{app} \cdot \nabla u \ .$$

Proposition 1.5.12. — *Il existe une constante positive* C *telle que*

$$\textit{pour tout} \quad \varepsilon \in]0,1[\qquad \textit{on a} \quad \|G_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq C \ \varepsilon^{1/2} \ .$$

Soit $\delta > 0$ *fixé. Il existe des constantes* $\varepsilon(\delta)$ *et* $c(\delta)$ *telles que, si*$\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$ *et* $\|v_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L^2_{\mathrm{h}}} \leq c(\delta)$ *, alors on a*

$$\|H_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \leq \delta \ .$$

Enfin la conclusion provient du résultat suivant.

Proposition 1.5.13. — *Pour tout* $\delta > 0$ *donné, il existe des constantes positives* $\varepsilon(\delta)$ *et* $c(\delta)$ *telles que, pour tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon(\delta)]$ *, si* $\|u_{\varepsilon,0}(\cdot, 0)\|_{L^2_h} \leq c(\delta)$ *, alors on a*

$$\|v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2_{\mathrm{h}}(\mathbb{R}^2))} + \|\nabla^{\mathrm{h}} v_\varepsilon^{app}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2_{\mathrm{h}}(\mathbb{R}^2))} \leq \delta \ .$$

Nous verrons une implémentation de la stratégie précédente, dans le cas d'une viscosité anisotrope, au chapitre suivant.

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES SANS VISCOSITÉ VERTICALE

2.1. Introduction et énoncé du résultat

On s'intéresse ici aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles (NS) dans le cas où la viscosité du fluide est fortement anisotrope : le Laplacien n'agit que dans les coordonnées horizontales : en rappelant la notation

$$\Delta_{\mathrm{h}} := \partial_1^2 + \partial_2^2 \,,$$

le système d'équations s'écrit ainsi

$$(\mathrm{NS})_{\mathrm{h}} \quad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta_{\mathrm{h}} u = -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \,. \end{cases}$$

Le domaine spatial Ω sera dans la suite $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}^3$, où $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}})^d$ est le tore d-dimensionnel. Le fait de supposer la viscosité verticale nulle a pour origine l'étude de fluides géophysiques, notamment les océans où la viscosité, dite "turbulente", est souvent beaucoup moins forte dans la variable verticale [**9**].

Rappelons la définition des espaces de Besov isotropes vue au chapitre précédent, ainsi que celle des espaces de Besov anisotropes qui interviennent dans ce chapitre et qui sont modelés sur ceux-ci. On note $\xi = (\xi_{\mathrm{h}}, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ avec $\xi_{\mathrm{h}} \in \mathbb{Z}^2$ et $\xi_3 \in \mathbb{R}$ les variables de Fourier sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ (et $\xi_3 \in \mathbb{Z}$ si $\Omega = \mathbb{T}^3$).

Définition 2.1.1 **(Espaces de Besov isotropes)**. — *Soit χ une fonction paire dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$ et $\chi(t) = 0$ pour $|t| > 2$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ on définit les opérateurs de troncature en fréquence*

$$\mathcal{F} S_q f(\xi) := \chi\Big(2^{-q}|\xi|\Big) \mathcal{F} f(\xi) \quad \textit{et} \quad \Delta_q := S_{q+1} - S_q \,.$$

Pour tous p, r dans $[1, \infty]$ et tout s dans $\mathbb{R}$, avec $s < 3/p$ (ou $s \leq 3/p$ si $r = 1$), l'espace de Besov homogène $B^s_{p,r}$ est l'espace des distributions tempérées f telles que et

$$\|f\|_{B^s_{p,r}} := \Big\| 2^{qs} \|\Delta_q f\|_{L(\Omega)} \Big\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} < \infty \,.$$

L'espace de Sobolev $\dot{H}^s$ correspond aux choix $p = r = 2$.

Les espaces de Besov anisotropes employés dans ce chapitre sont de deux types, dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition 2.1.2 **(Espaces de Besov anisotropes)**

Avec les notations de la Définition 2.1.1*, les opérateurs de troncature horizontale sont définis pour $j \in \mathbb{Z}$ par*

$$\mathcal{F}S_j^{\mathrm{h}} f(\xi) := \chi\Big(2^{-j}|\xi_{\mathrm{h}}|\Big)\mathcal{F}f(\xi) \quad \textit{et} \quad \Delta_j^{\mathrm{h}} := S_{j+1}^{\mathrm{h}} - S_j^{\mathrm{h}}\,,$$

et de troncature verticale pour $q \in \mathbb{Z}$ par

$$\mathcal{F}S_q^{\mathrm{v}} f(\xi) := \chi(2^{-q}|\xi_3|)\mathcal{F}f(\xi) \quad \textit{et} \quad \Delta_q^{\mathrm{v}} := S_{q+1}^{\mathrm{v}} - S_q^{\mathrm{v}}\,.$$

Pour tous les $s \leq 2/p$ et $s' \leq 1/p$, l'espace de Besov $\mathcal{B}^{s,s'}$ est l'espace des distributions tempérées f telles que

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{s,s'}} := \sum_{j,q} 2^{js+qs'} \|\Delta_j^{\mathrm{h}} \Delta_q^{\mathrm{v}} f\|_{L^2} < \infty\,,$$

et l'espace de Besov $B^{0,s}$ est l'espace des distributions tempérées f telles que

$$\|f\|_{B^{0,s}} := \sum_q 2^{qs} \|\Delta_q^{\mathrm{v}} f\|_{L^2} < \infty\,.$$

Remarquons que $\mathcal{B}^{0,s}$ s'injecte continûment dans $B^{0,s}$, puisque

$$\sum_q 2^{qs} \|\Delta_q^{\mathrm{v}} f\|_{L^2} \leq \sum_{j,q} 2^{qs} \|\Delta_j^{\mathrm{h}} \Delta_q^{\mathrm{v}} f\|_{L^2}\,. \tag{2.1.1}$$

L'espace de Besov anisotrope $B^{0,\frac{1}{2}}$ apparait naturellement ici car il est modelé sur l'espace $L^2(\mathbb{T}^2; \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$ – qui est un espace naturel puisque $L^2(\mathbb{T}^2)$ est associé à l'équation bidimensionnelle et $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ est invariant d'échelle en dimension trois – tout en étant un espace de Banach (contrairement à $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ par exemple, et donc à $L^2(\mathbb{T}^2; \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$). Cet espace a été introduit par M. Paicu dans [**32**], qui a montré l'existence globale en temps de solutions à $(\mathrm{NS})_{\mathrm{h}}$ pour des données petites (locale en temps à données quelconques) dans $B^{0,\frac{1}{2}}$. Il a également montré l'unicité des solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, B^{0,\frac{1}{2}})$ dont le gradient horizontal est dans $L^2(\mathbb{R}^+, B^{0,\frac{1}{2}})$.

Dans le présent travail on cherche, dans l'esprit des travaux [**10, 11, 12**] rappelés au chapitre précédent, à exhiber des exemples de données initiales qui peuvent être arbitrairement grandes mais pour lesquelles on peut néanmoins démontrer l'existence globale et l'unicité de solutions. Le contexte naturel, suivant ces travaux, est de considérer des données initiales variant lentement dans une direction, et la spécificité de ce chapitre est de supposer que cette direction est la même que celle dans laquelle il n'y a pas de viscosité (la verticale par exemple). Ce travail fait ainsi suite à une série de travaux concernant soit le cas lentement variable, soit l'équation anisotrope (voir par exemple [**3, 4, 8,**

10, 11, 12, 14, 15, 20, 21, 32, 33]). C'est à notre connaissance la première fois que le caractère lentement variable dans une direction, qui permet d'obtenir des solutions globales sans hypothèse de petitesse sur la donnée initiale, est mêlé à l'absence de viscosité dans cette même direction. Cela conduit à être particulièrement vigilant dans les estimations puisqu'aucun effet régularisant n'est possible dans la direction verticale. Le résultat est le suivant.

Théorème 2.1.3. — *Soient* $u_0^{\mathrm{h}} = (u_0^1, u_0^2)$ *et* $w_0 = (w_0^1, w_0^2, w_0^3)$ *deux champs de vecteurs de divergence nulle avec* $(u_0^{\mathrm{h}}, w_0^3)$ *de moyenne horizontale nulle, appartenant à* $\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}} \cap \mathcal{B}^{0,\frac{5}{2}}$ *et tels que*

$$w_0^{\mathrm{h}} = -\nabla^{\mathrm{h}} \Delta_{\mathrm{h}}^{-1} \partial_3 w_0^3 \,, \quad \nabla^{\mathrm{h}} := (\partial_1, \partial_2) \,. \tag{2.1.2}$$

Soit, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$*, le champ de vecteurs de divergence nulle*

$$u_0^{\varepsilon}(x) := (u_0^{\mathrm{h}} + \varepsilon w_0^{\mathrm{h}}, w_0^3)(x_1, x_2, \varepsilon x_3) \,. \tag{2.1.3}$$

Pour ε *assez petit, il existe une unique solution globale* u^{ε} *à* $(\mathrm{NS})_{\mathrm{h}}$ *associée à la donnée initiale* (2.1.3)*, dans l'espace* $L^{\infty}(\mathbb{R}^+, B^{0,\frac{1}{2}})$ *et telle que* $\nabla^{\mathrm{h}} u^{\varepsilon}$ *appartient à* $L^2(\mathbb{R}^+, B^{0,\frac{1}{2}})$.

Remarque 2.1.4. — *Il est démontré dans* [**10**] *qu'une fonction de la forme*

$$h^{\varepsilon}(x) = f(x_{\mathrm{h}}) g(\varepsilon x_3)$$

avec f *et* g *dans la classe de Schwartz, vérifie*

$$\|h^{\varepsilon}\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}} \geq \frac{1}{4} \|f\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}} \|g\|_{L^{\infty}}$$

donc peut être aussi grande que souhaité dans $B^{-1}_{\infty,\infty}$.

Remarque 2.1.5. — *L'hypothèse* (2.1.2) *ne fait pas perdre en généralité : en décomposant un champ de vecteurs horizontal* f^{h} *sous la forme*

$$f^{\mathrm{h}} = \nabla^{\mathrm{h}} \psi + \Phi^{\mathrm{h}} \,, \quad \mathrm{div}_{\mathrm{h}} \Phi^{\mathrm{h}} = 0 \,,$$

on pourrait incorporer à u_0^{h} *la partie de divergence horizontale nulle de* w_0^{h}*. Le caractère périodique en la variable horizontale nous permet d'obtenir de bonnes estimations de régularité sur* w^{h} *à partir d'estimations sur* w^3 *via l'identité*

$$w^{\mathrm{h}} := -\nabla^{\mathrm{h}} \Delta_{\mathrm{h}}^{-1} \partial_3 w^3 \,,$$

car w^3 *est de moyenne horizontale nulle (voir la Section* 2.3*). Dans le cas où* $w_0 \equiv 0$*, la démonstration du Théorème* 2.1.3 *s'étend au cas où la variable horizontale est dans* $\mathbb{R}^2$ *plutôt que* $\mathbb{T}^2$.

Dorénavant on note pour toute fonction f

$$\big[f\big]_{\varepsilon}(x) := f(x_{\mathrm{h}}, \varepsilon x_3) \,.$$

La méthode de démonstration du Théorème 2.1.3, dans l'esprit des travaux précédents sur (NS) anisotrope (voir le chapitre précédent) consiste à chercher la solution u^ε sous la forme

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon_{\rm app} + R^\varepsilon \,, \tag{2.1.4}$$

avec

$$u^\varepsilon_{\rm app} = \Big[u^{\rm h} + \varepsilon w^{\rm h}, w^3\Big]_\varepsilon \,,$$

où pour tout y_3, $u^{\rm h}(\cdot, y_3)$ est solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles avec donnée initiale $u^{\rm h}_0(\cdot, y_3)$:

$$(\mathrm{NS2D})_{y_3} \quad \begin{cases} \partial_t u^{\rm h} + u^{\rm h}\cdot\nabla^{\rm h} u^{\rm h} - \Delta_{\rm h} u^{\rm h} = -\nabla^{\rm h} p_0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{T}^2 \\ \mathrm{div}_{\rm h}\, u^{\rm h} = 0 \\ u^{\rm h}_{|t=0} = u^{\rm h}_0(\cdot, y_3)\,, \end{cases}$$

et w^3 est solution de l'équation linéaire

$$(\mathrm{T}) \quad \begin{cases} \partial_t w^3 + u^{\rm h}\cdot\nabla^{\rm h} w^3 - \Delta_{\rm h} w^3 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\Omega \\ w^3_{|t=0} = w^3_0\,. \end{cases}$$

Notons que la moyenne horizontale est préservée par ces équations. Enfin on pose

$$w^{\rm h} := -\nabla^{\rm h}\Delta_{\rm h}^{-1}\partial_3 w^3\,.$$

Comme rappelé en Remarque 1.1.6, on sait depuis [**29**] que dès que $u^{\rm h}_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$, pour tout y_3 fixé, $u^{\rm h}$ est unique et existe pour tout temps dans l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{T}^2))$. Le champ de vecteurs w existe également de manière unique également pour tout temps (ceci sera précisé en Section 2.3), et l'essentiel du travail consiste donc à résoudre globalement en temps, pour ε suffisamment petit, l'équation (de Navier-Stokes anisotrope perturbée) vérifiée par R^ε.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la Section 2.2 on montre que pour ε suffisamment petit, l'équation vérifiée par R^ε a une solution globale : cette démonstration repose sur des estimations a priori sur la solution approchée $u^\varepsilon_{\rm app}$ qui sont obtenues en Section 2.3 à partir d'estimations sur $(\mathrm{NS2D})_{y_3}$ et sur (T). L'Annexe est consacrée au rappel de résultats classiques concernant les espaces fonctionnels apparaissant dans le présent travail.

Notations. Dans tout ce chapitre et sauf mention du contraire, on notera par C une constante universelle, en particulier indépendante de ε, qui peut changer d'une ligne à l'autre. On notera parfois $a \lesssim b$ si $a \le Cb$. On notera $q \sim q'$ si $q \in [q'-C, q'+C]$.

On notera de manière générique par $(s_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{q\in\mathbb{Z}} s_q^{\frac12} \le 1$ et par $(d_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{q\in\mathbb{Z}} d_q \le 1$.

Enfin si X est un espace fonctionnel sur $\mathbb{T}^2$ et Y un espace fonctionnel sur $\mathbb{R}$, on écrira $X_{\mathrm{h}}Y_{\mathrm{v}} := X(\mathbb{T}^2; Y(\mathbb{R}))$ et de même $Y_{\mathrm{v}}X_{\mathrm{h}} := Y(\mathbb{R}; X(\mathbb{T}^2))$.

2.2. Démonstration du théorème

2.2.1. Principales étapes de la preuve. — En rappelant les notations (2.1.4), écrivons le système d'équations vérifié par R^ε. Notons que w^{h} vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w^{\mathrm{h}} - \Delta_{\mathrm{h}} w^{\mathrm{h}} = -\nabla^{\mathrm{h}} p_1 \,, \quad \text{avec} \quad p_1 := \Delta_{\mathrm{h}}^{-1} \partial_3 (u^{\mathrm{h}} \cdot \nabla^{\mathrm{h}} w^3) \\ w^{\mathrm{h}}_{|t=0} = w^{\mathrm{h}}_0 \,. \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$\partial_t R^\varepsilon + R^\varepsilon \cdot \nabla R^\varepsilon + u^\varepsilon_{\mathrm{app}} \cdot \nabla R^\varepsilon + R^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon_{\mathrm{app}} - \Delta_{\mathrm{h}} R^\varepsilon = -\nabla q_\varepsilon + \varepsilon F^\varepsilon \tag{2.2.1}$$

avec

$$F^\varepsilon := \varepsilon \Big[\Big(w^{\mathrm{h}} \cdot \nabla^{\mathrm{h}} (w^{\mathrm{h}}, 0) + w^3 \partial_3 (w^{\mathrm{h}}, 0) \Big) \Big]_\varepsilon + \Big[\Big(w \cdot \nabla (u^{\mathrm{h}}, w^3) \Big) + \big(u^{\mathrm{h}} \cdot \nabla w^{\mathrm{h}} \big) \Big]_\varepsilon + \Big(0, [\partial_3 (p_0 + \varepsilon p_1)]_\varepsilon \Big) \,,$$

$$q^\varepsilon := p^\varepsilon - \Big[p_0 + \varepsilon p_1 \Big]_\varepsilon \,,$$

et $R^\varepsilon_{|t=0} = 0$. Pour démontrer l'existence globale de R^ε nous allons écrire une estimation a priori sur $\|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+; B^{0,\frac{1}{2}})}$ et $\|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+; B^{0,\frac{1}{2}})}$ (la définition de ces espaces est donnée en Annexe) en omettant l'étape classique de régularisation du système pour justifier les estimations. Par ailleurs comme rappelé dans l'introduction, seule l'existence globale de solutions doit être démontrée puisque l'unicité pour ($\mathrm{NS_h}$) dans notre cadre fonctionnel est une conséquence de [**32**].

Afin d'absorber les termes linéaires dans (2.2.1) nous allons utiliser un argument de type Gronwall, mais dans le contexte des espaces $\tilde{L}^p$ en temps (voir l'Annexe). Une stratégie (voir [**17**] par exemple) est d'écrire une partition de $\mathbb{R}^+$ en intervalles de temps

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{k=0}^{K-1} [t_k, t_{k+1}[\tag{2.2.2}$$

comme dans la Proposition 2.3.1 ci-dessous, qui dépend d'une constante $\bar{C}$ qui sera fixée à la fin. On écrit alors, en suivant [**32**], une estimation d'énergie dans L^2 sur $\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon$ et il vient après intégration sur un intervalle de

temps $[t_k, t_{k+1}]$
(2.2.3)
$$\frac{1}{2}\|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon(t_{k+1})\|_{L^2}^2 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\nabla^{\mathrm{h}}\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2\, dt \leq \frac{1}{2}\|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon(t_k)\|_{L^2}^2$$
$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(R^\varepsilon\cdot\nabla R^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|\, dt$$
$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\cdot\nabla R^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big| + \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(R^\varepsilon\cdot\nabla u_{\mathrm{app}}^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|\Big)\, dt'$$
$$+ \quad \varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}} F^\varepsilon|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|\, dt\,.$$

On note que $R^\varepsilon(t_0) = R^\varepsilon(0) = 0$. Introduisons la notation
$$\tilde{L}_k^r X := \tilde{L}^r([t_k, t_{k+1}]; X)\,.$$
D'après [**32**, Section 4.1] on sait que
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(R^\varepsilon\cdot\nabla R^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big| dt \lesssim 2^{-q} s_q \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}} \|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}_k^\infty B^{0,\frac{1}{2}}} \tag{2.2.4}$$
et d'après [**32**, Section 5.1]
$$\int_{t_0}^{t_1} \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\cdot\nabla R^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big| dt \lesssim 2^{-q} s_q \|R^\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}_k^\infty B^{0,\frac{1}{2}}} \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}}$$
$$\times \Big(\|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}} \|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}_k^\infty B^{0,\frac{1}{2}}} \|\nabla^{\mathrm{h}} u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}} + \|\nabla^{\mathrm{h}} u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}} \|R^\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}_k^\infty B^{0,\frac{1}{2}}}\Big)$$
en rappelant que $(s_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ désigne de manière générique une suite de réels positifs vérifiant
$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} s_q^{\frac{1}{2}} \leq 1\,.$$
Grâce à l'inégalité de Young
$$ab \lesssim a^p + b^{p'}\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{2.2.5}$$
cette dernière inégalité peut s'écrire aussi
(2.2.6)
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\cdot\nabla R^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big| dt \leq 2^{-q} s_q \Big(\frac{1}{8}\|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}}$$
$$+ C\|R^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}_k^\infty B^{0,\frac{1}{2}}} \|\nabla^{\mathrm{h}} u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}_k^2 B^{0,\frac{1}{2}}} (1 + \|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}_k^\infty B^{0,\frac{1}{2}}})\Big)\,.$$

La fin de la démonstration du théorème repose sur les deux lemmes suivants, qui sont démontrés respectivement au Paragraphe 2.2.2 ci-dessous et en Section 2.3.

Lemme 2.2.1. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que sous les hypothèses du Théorème* 2.1.3*, il existe une suite $(s_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs vérifiant $\sum_{q\in\mathbb{Z}} s_q^{\frac{1}{2}} \leq$*

1 *et telle que*

(2.2.7)
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(R^\varepsilon\cdot\nabla u_{\mathrm{app}}^\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}}R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|dt \le 2^{-q}s_q\Big(\frac{1}{8}\|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}}$$
$$+ C\|R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}\Big(\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^2_{\tilde L^2_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}(1+\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^2_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}) + \|\partial_3 u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde L^1_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}\Big)\Big)\,.$$

Lemme 2.2.2. — *Il existe une constante $C>0$ telle que sous les hypothèses du Théorème* 2.1.3*, il existe une suite $(s_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs vérifiant $\sum_{q\in\mathbb{Z}} s_q^{\frac12}\le 1$ et telle que*

$$2^q\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big|(\Delta_q^{\mathrm{v}}F^\varepsilon|\Delta_q^{\mathrm{v}}R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|\,dt \le Cs_q\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}\,. \tag{2.2.8}$$

Retournons à (2.2.3). En rassemblant (2.2.4), (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.8) il vient
$$\frac{2^q}{2}\|\Delta_q^{\mathrm{v}}R^\varepsilon(t_{k+1})\|^2_{L^2} + 2^q\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|\nabla^{\mathrm{h}}\Delta_q^{\mathrm{v}}R^\varepsilon(t)\|^2_{L^2}\,dt \le \frac{2^q}{2}\|\Delta_q^{\mathrm{v}}R^\varepsilon(t_k)\|^2_{L^2}$$
$$+ Cs_q\|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}}\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} + C\varepsilon s_q\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} + \frac{s_q}{4}\|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}}$$
$$+ Cs_q\|R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}\Big(\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^2_{\tilde L^2_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}(1+\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^2_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}) + \|\partial_3 u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde L^1_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}\Big)\,.$$

On a utilisé le fait, rappelé en (2.4.4), que
$$\|\nabla^{\mathrm{h}}a\|_{B^{0,\frac12}} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}^{1,\frac12}}\,.$$

En prenant la racine carrée des deux membres de l'équation et en sommant sur $q\in\mathbb{Z}$ on trouve que
$$\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} + \|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \le C\|R^\varepsilon(t_k)\|_{B^{0,\frac12}}$$
$$+ C\|R^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}\Big(\|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} + C\sqrt{\varepsilon}\Big)$$
$$+ C\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}\Big(\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}(1+\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}) + \|\partial_3 u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^1_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}\Big)\,.$$

Il suffit alors de choisir la partition (2.2.2) grâce à la Proposition 2.3.1 de sorte que
$$\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k\mathcal{B}^{1,\frac12}}(1+\|u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}) \le \frac{1}{4C} =: \frac{1}{\bar C}$$
et de choisir, toujours grâce à la Proposition 2.3.1, ε suffisamment petit pour que
$$\|\partial_3 u_{\mathrm{app}}^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^1_k\mathcal{B}^{1,\frac12}} \le \frac{1}{4C}\,.$$

Alors l'inégalité ci-dessus devient
$$\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} + \|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \le C'\|R^\varepsilon(t_k)\|_{B^{0,\frac12}} + C'\|R^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}}\|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} + C'\varepsilon\,.$$

Soit maintenant T^ε le temps maximal pour lequel

$$\forall t \leq T^\varepsilon\,, \quad \|R^\varepsilon\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty([0,T];B^{0,\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2C'}\,.$$

Alors tant que $t_{k+1} \leq T^\varepsilon$ on a

$$\|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac{1}{2}}} + \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^2_k B^{0,\frac{1}{2}}} \leq 2C'\|R^\varepsilon(t_k)\|_{B^{0,\frac{1}{2}}} + 2C'\varepsilon$$

et comme $\|R^\varepsilon(t_0)\|_{B^{0,\frac{1}{2}}} = 0$, en itérant K fois cette inégalité on trouve (voir [**17, 4**] par exemple) que $T^\varepsilon = \infty$ dès que ε est assez petit, et qu'il existe une constante C_0 (dépendant de u_0^{h} et w_0 via la Proposition 2.3.1) telle que

$$\|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})} + \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})} \lesssim \varepsilon \exp C_0\,.$$

Ceci conclut la démonstration du théorème. □

2.2.2. Démonstration du Lemme 2.2.1. — On commence par noter que comme la divergence de R^ε est nulle

$$\begin{aligned} &-(\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^\varepsilon\cdot\nabla u^\varepsilon_{\mathrm{app}})|\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon)_{L^2} \\ &\quad = \sum_{\ell=1}^{2}(\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,\ell}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})|\partial_\ell\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon)_{L^2} + (\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,3}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})|\partial_3\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon)_{L^2}\,. \end{aligned}$$

On pose

$$I_q := \Big|\sum_{\ell=1}^{2}(\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,\ell}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})|\partial_\ell\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon)_{L^2}\Big| \quad \text{et} \quad J_q := \Big|(\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,3}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})|\partial_3\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon)_{L^2}\Big|\,.$$

Commençons par étudier la contribution de I_q. On a

$$\begin{aligned} 2^q\int_{t_k}^{t_{k+1}} I_q(t)\,dt &\lesssim 2^{\frac{q}{2}}\Big\|\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,\mathrm{h}}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})\Big\|_{L^2_kL^2}2^{\frac{q}{2}}\Big\|\Delta^{\mathrm{v}}_q\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\Big\|_{L^2_kL^2} \\ &\lesssim 2^{\frac{q}{2}}\Big\|\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,\mathrm{h}}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})\Big\|_{L^2_kL^2}d_q\|\nabla^{\mathrm{h}}R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

avec la notation générique présentée dans l'introduction : $(d_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels positifs telle que

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} d_q \leq 1\,.$$

On rappelle aussi la notation $\tilde{L}^r_k X = \tilde{L}^r([t_k,t_{k+1}];X)$. On utilise ensuite la décomposition de Bony en paraproduit et reste (2.4.5) qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} 2^{\frac{q}{2}}\Big\|\Delta^{\mathrm{v}}_q(R^{\varepsilon,\ell}u^\varepsilon_{\mathrm{app}})\Big\|_{L^2_kL^2} &\lesssim 2^{\frac{q}{2}}\sum_{q'\sim q}\|S^{\mathrm{v}}_{q'-1}R^\varepsilon\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^\infty_{\mathrm{v}}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}} \\ &\quad + 2^{\frac{q}{2}}\sum_{q'\sim q}\|S^{\mathrm{v}}_{q'-1}u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^\infty_{\mathrm{v}}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}R^\varepsilon\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}} \\ &\quad + 2^q\sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^q\\ q''\sim q'}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}R^\varepsilon\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}} \\ &=: T^1_{q\mathrm{h}} + T^2_{q\mathrm{h}} + R_{q\mathrm{h}}\,, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Bernstein (2.4.1) dans la dernière inégalité :

$$\left\|\Delta_q^{\mathrm{v}}(R^{\varepsilon,\ell}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}})\right\|_{L^2_kL^2} \lesssim 2^{\frac{q}{2}}\left\|\Delta_q^{\mathrm{v}}(R^{\varepsilon,\ell}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}})\right\|_{L^2_kL^2_{\mathrm{h}}L^1_{\mathrm{v}}}.$$

Estimons chacun des termes en succession. Pour $T^1_{q\mathrm{h}}$ on commence par noter que pour toute fonction a et tout $x_3 \in \mathbb{R}$ on a grâce à l'injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2) \subset L^4(\mathbb{T}^2)$, l'inégalité

$$\begin{aligned}\|a(\cdot,x_3)\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} &\lesssim \|a(\cdot,x_3)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}\\ &\lesssim \|a(\cdot,x_3)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)}\|\nabla^{\mathrm{h}}a(\cdot,x_3)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)}\end{aligned}$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz en x_3 il vient

$$\|a\|_{L^2_{\mathrm{v}}L^4_{\mathrm{h}}} \lesssim \|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\nabla^{\mathrm{h}}a\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}.$$

En utilisant encore l'inégalité de Bernstein (2.4.1)

$$\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}R^{\varepsilon}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^\infty_{\mathrm{v}}} \lesssim 2^{\frac{q''}{2}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}R^{\varepsilon}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}}$$

puis l'inégalité de Minkowski

$$\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}R^{\varepsilon}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}} \leq \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}R^{\varepsilon}\|_{L^4_kL^2_{\mathrm{v}}L^4_{\mathrm{h}}}$$

il vient

$$\begin{aligned}\|S^{\mathrm{v}}_{q'-1}R^{\varepsilon}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^\infty_{\mathrm{v}}} &\lesssim \sum_{2^{q''}\lesssim 2^{q'}} 2^{\frac{q''}{2}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}R^{\varepsilon}\|_{L^4_kL^2_{\mathrm{v}}L^4_{\mathrm{h}}}\\ &\lesssim \sum_{2^{q''}\lesssim 2^{q'}} 2^{\frac{q''}{2}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_kL^2}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}\nabla^{\mathrm{h}}R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_kL^2}\\ &\lesssim \|R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|\nabla^{\mathrm{h}}R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De la même manière on a

$$\begin{aligned}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|_{L^4_kL^4_{\mathrm{h}}L^\infty_{\mathrm{v}}} &\lesssim 2^{\frac{q'}{2}}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kL^2}\|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}\nabla^{\mathrm{h}}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kL^2}\\ &\lesssim d_{q'}\|u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|\nabla^{\mathrm{h}}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

donc il vient finalement

$$T^1_{q\mathrm{h}} \lesssim d_q\|R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|\nabla^{\mathrm{h}}R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|\nabla^{\mathrm{h}}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}},$$

et de manière symétrique

$$T^2_{q\mathrm{h}} \lesssim d_q\|R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|\nabla^{\mathrm{h}}R^{\varepsilon}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^\infty_kB^{0,\frac{1}{2}}}\|\nabla^{\mathrm{h}}u^{\varepsilon}_{\mathrm{app}}\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{L}^2_kB^{0,\frac{1}{2}}}.$$

Enfin un raisonnement analogue permet d'estimer $R_{q\mathrm{h}}$. On écrit en effet

$$\begin{aligned}
R_{q\mathrm{h}} &= 2^q \sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^q\\ q''\sim q'}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^4_k L^4_{\mathrm{h}} L^2_{\mathrm{v}}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'} R^\varepsilon\|_{L^4_k L^4_{\mathrm{h}} L^2_{\mathrm{v}}} \\
&\lesssim \sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^q\\ q''\sim q'}} 2^{q-q''} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^{\frac12}_{L^\infty_k L^2} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''} \nabla^{\mathrm{h}} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^{\frac12}_{L^\infty_k L^2} \\
&\quad \times 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'} R^\varepsilon\|^{\frac12}_{L^\infty_k L^2} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'} \nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^{\frac12}_{L^\infty_k L^2}
\end{aligned}$$

donc par l'inégalité de Young pour les séries

$$R_{q\mathrm{h}} \lesssim d_q \|R^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^{\frac12}_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\nabla^{\mathrm{h}} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^{\frac12}_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} .$$

En conclusion, en retournant à (2.2.9) on obtient

$$2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_q(t)\,dt \lesssim s_q \|R^\varepsilon\|^{\frac12}_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^{\frac32}_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^{\frac12}_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\nabla^{\mathrm{h}} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^{\frac12}_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}}$$

et par l'inégalité de Young (2.2.5) et (2.4.4) on obtient

$$\begin{aligned}
2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_q(t)\,dt &\le \frac{s_q}{100} \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \\
&\quad + C s_q \|R^\varepsilon\|^2_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^2_{\tilde L^2_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^2_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} .
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Étudions à présent la contribution de J_q. On note que par (2.4.1)

$$\|\partial_3 \Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon\|_{L^2} \lesssim 2^q \|\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon\|_{L^2}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} J_q(t)dt &\lesssim 2^{2q} \left\|\Delta^{\mathrm{v}}_q (R^{\varepsilon,3} u^\varepsilon_{\mathrm{app}})\right\|_{L^1_k L^2} \left\|\Delta^{\mathrm{v}}_q R^\varepsilon\right\|_{L^\infty_k L^2} \\
&\lesssim 2^{\frac{3q}{2}} \left\|\Delta^{\mathrm{v}}_q (R^{\varepsilon,3} u^\varepsilon_{\mathrm{app}})\right\|_{L^1_k L^2} d_q \|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} .
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

On procède alors comme ci-dessus en décomposant le premier terme en paraproduit et reste :

$$\begin{aligned}
2^{\frac{3q}{2}} \left\|\Delta^{\mathrm{v}}_q (R^{\varepsilon,3} u^\varepsilon_{\mathrm{app}})\right\|_{L^1_k L^2} &\lesssim 2^{\frac{3q}{2}} \sum_{q'\sim q} \|S^{\mathrm{v}}_{q'-1} R^{\varepsilon,3}\|_{L^\infty_k L^2_{\mathrm{h}} L^\infty_{\mathrm{v}}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^1_k L^\infty_{\mathrm{h}} L^2_{\mathrm{v}}} \\
&\quad + 2^{\frac{3q}{2}} \sum_{q'\sim q} \|S^{\mathrm{v}}_{q'-1} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^2_k L^\infty} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'} R^{\varepsilon,3}\|_{L^2_k L^2} \\
&\quad + 2^{2q} \sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^q\\ q''\sim q'}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q''} u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^1_k L^\infty_{\mathrm{h}} L^2_{\mathrm{v}}} \|\Delta^{\mathrm{v}}_{q'} R^{\varepsilon,3}\|_{L^\infty_k L^2} \\
&=: T^1_{q3} + T^2_{q3} + R_{q3} .
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

On note d'une part que

$$T^1_{q3} \lesssim 2^{\frac{3q}{2}} \sum_{\substack{2^{q''}\lesssim 2^{q'}\\ q'\sim q}} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta^{\rm v}_{q''} R^\varepsilon\|_{L^\infty_k L^2} \|\Delta^{\rm v}_{q'} u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k L^\infty_{\rm h} L^2_{\rm v}}$$

$$\lesssim \|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \sum_{q'\sim q} 2^{\frac{3q'}{2}} \|\Delta^{\rm v}_{q'} u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k L^\infty_{\rm h} L^2_{\rm v}}$$

et d'après (2.4.4) on a donc

$$T^1_{q3} \lesssim d_q \|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\partial_3 u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} \,. \tag{2.2.14}$$

Le second terme de la décomposition peut s'estimer par (2.4.2) :

$$T^2_{q3} \lesssim 2^{\frac{3q}{2}} \sum_{\substack{2^{q''}\lesssim 2^{q'}\\ q'\sim q}} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta^{\rm v}_{q''} u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^2_k L^\infty_{\rm h} L^2_{\rm v}} \|\Delta^{\rm v}_{q'} R^{\varepsilon,3}\|_{L^2_k L^2}$$

$$\lesssim 2^{\frac{q}{2}} \sum_{\substack{2^{q''}\lesssim 2^{q'}\\ q'\sim q}} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta^{\rm v}_{q''} u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^2_k L^\infty_{\rm h} L^2_{\rm v}} \|\Delta^{\rm v}_{q'} \partial_3 R^{\varepsilon,3}\|_{L^2_k L^2}$$

$$\lesssim \|u^\varepsilon_{\rm app}\|_{\tilde L^2_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} 2^{\frac{q}{2}} \sum_{q'\sim q} \|\Delta^{\rm v}_{q'} \nabla^{\rm h} R^\varepsilon\|_{L^2_k L^2}$$

comme ci-dessus et grâce à (2.4.4) et au fait que $\partial_3 R^{\varepsilon,3} = -{\rm div}_{\rm h}\, R^{\varepsilon,{\rm h}}$. Il vient donc

$$T^2_{q3} \lesssim d_q \|u^\varepsilon_{\rm app}\|_{\tilde L^2_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} \|\nabla^{\rm h} R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \,. \tag{2.2.15}$$

Enfin pour le terme de reste on écrit, encore par (2.4.2),

$$R_{q3} \lesssim 2^{2q} \sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^{q}\\ q''\sim q'}} 2^{-q''} \|\Delta^{\rm v}_{q''} \partial_3 u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k L^\infty_{\rm h} L^2_{\rm v}} \|\Delta^{\rm v}_{q'} R^\varepsilon\|_{L^\infty_k L^2}$$

$$\lesssim \sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^{q}\\ q''\sim q'}} 2^{2(q-q'')} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta^{\rm v}_{q''} \partial_3 u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k L^\infty_{\rm h} L^2_{\rm v}} 2^{\frac{q'}{2}} \|\Delta^{\rm v}_{q'} R^\varepsilon\|_{L^\infty_k L^2} \tag{2.2.16}$$

$$\lesssim d_q \|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\partial_3 u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} \,.$$

En insérant (2.2.14)-(2.2.16) dans (2.2.13) il vient

$$2^{\frac{3q}{2}} \big\|\Delta^{\rm v}_q (R^{\varepsilon,3} u^\varepsilon_{\rm app})\big\|_{L^1_k L^2} \lesssim d_q \Big(\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\partial_3 u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} + \|\nabla^{\rm h} R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \|u^\varepsilon_{\rm app}\|_{\tilde L^2_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} \Big)$$

et donc en retournant à (2.2.12)

$$2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} J_q(t)dt \lesssim s_q \Big(\|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \|\partial_3 u^\varepsilon_{\rm app}\|_{L^1_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} + \|\nabla^{\rm h} R^\varepsilon\|_{\tilde L^2_k B^{0,\frac12}} \|u^\varepsilon_{\rm app}\|_{\tilde L^2_k \mathcal{B}^{1,\frac12}} \Big) \|R^\varepsilon\|_{\tilde L^\infty_k B^{0,\frac12}} \,.$$

Finalement il vient

$$
\begin{aligned}
2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} J_q(t)\,dt \leq \frac{s_q}{100} \|\nabla^{\mathrm{h}} R^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}^2_k B^{0,\frac{1}{2}}} \\
+ C s_q \|R^\varepsilon\|^2_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac{1}{2}}} (\|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|^2_{\tilde{L}^2_k \mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}}} + \|\partial_3 u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^1_k \mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}}}) \,.
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

En rassemblant (2.2.11) et (2.2.17), le Lemme 2.2.1 est démontré. □

2.3. Démonstration du Lemme 2.2.2

2.3.1. Estimations sur la solution approchée. — Dans cette section nous démontrons quelques estimations a priori sur $u^\varepsilon_{\mathrm{app}}$, dont nous rappelons la définition :

$$
u^\varepsilon_{\mathrm{app}} = \left[u^{\mathrm{h}} + \varepsilon w^{\mathrm{h}}, w^3\right]_\varepsilon ,
$$

avec u^{h} solution de $(\mathrm{NS2D})_{y_3}$ et w^3 solution de (T) comme définis dans l'introduction, et enfin avec

$$
w^{\mathrm{h}} = -\nabla^{\mathrm{h}} \Delta_{\mathrm{h}}^{-1} \partial_3 w^3 \,. \tag{2.3.1}
$$

Ces estimations ont été utilisées dans la Section 2.2 pour démontrer le Théorème 2.1.3.

Proposition 2.3.1. — *Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ dépendant de $\|(u^{\mathrm{h}}_0, w^3_0)\|_{\mathcal{B}^{0,\frac{5}{2}} \cap \mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}}$ telles que*

$$
\|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})} + \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})} + \|\partial_3 u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})} + \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})} \leq C_1
$$

et

$$
\|\partial_3 u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})} \leq \varepsilon\, C_2 \,.
$$

Enfin pour tout $\bar{C} > 0$ il existe $K > 1$ et des temps $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = \infty$ tels que

$$
\mathbb{R}^+ = \bigcup_{k=0}^{K-1} [t_k, t_{k+1}[\quad \textit{et} \quad \forall \varepsilon \in]0,1[\,,\ \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})} (1 + \|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})}) \leq \frac{1}{\bar{C}} \,.
$$

Démonstration. — Par la Proposition 3.1 de [**3**] on sait que pour tout $s \in]-2,1[$ donné et pour tout $\frac{1}{2} \leq s' \leq \frac{7}{2}$ on a

$$
\forall r \in [1,\infty]\,, \quad \|u^{\mathrm{h}}\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{s+\frac{2}{r},s'})} \lesssim C \,, \tag{2.3.2}
$$

où C dépend de $\|u^{\mathrm{h}}_0\|_{\mathcal{B}^{s,s'} \cap \mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}}$. Par ailleurs la Proposition 3.5 et le Lemme 3.6 de [**3**] impliquent que pour tout $s \in]-2,0]$ et tout $s' \geq \frac{1}{2}$

$$
\|w^3\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{s+\frac{2}{r},s'})} \lesssim C \,, \tag{2.3.3}
$$

où C dépend des normes de u^{h}_0 et w^3_0 dans $\mathcal{B}^{s,s'} \cap \mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}$ (notons que ces estimations correspondent au choix de paramètre $\beta = 0$ dans la Proposition 3.5 de [**3**], qui est valable pour tout $\beta \geq 0$ avec des constantes uniformes en β).

Concernant w^{h} on utilise (2.3.1) : comme la moyenne horizontale de w^3 est nulle, pour tout $s \in]-2,0]$, pour tout $s' \geq -\frac{1}{2}$ et pour tout $r \in [1,\infty]$ on a

$$\begin{aligned} \|w^{\mathrm{h}}\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{s+\frac{2}{r},s'})} &\lesssim \|\partial_3 w^3\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{s+\frac{2}{r}-1,s'})} \\ &\lesssim \|\partial_3 w^3\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{s+\frac{2}{r},s'})} \\ &\leq C\,, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

où C dépend des normes de u_0^{h} et w_0^3 dans $\mathcal{B}^{s,s'+1} \cap \mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}$. On a utilisé ci-dessus que si une fonction f définie sur $\mathbb{T}^2$ est de moyenne horizontale nulle, alors

$$\forall s' \in \mathbb{R}\,, \quad s_1 \leq s_2 \Longrightarrow \|f\|_{\mathcal{B}^{s_1,s'}} \leq \|f\|_{\mathcal{B}^{s_2,s'}}\,.$$

La première estimation de la Proposition 2.3.1 provient alors simplement du fait que par définition de $u^\varepsilon_{\mathrm{app}}$, pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$\|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\sigma,\frac{1}{2}})} = \|(u^{\mathrm{h}} + \varepsilon w^{\mathrm{h}}, w^3)\|_{\tilde{L}^r(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\sigma,\frac{1}{2}})}\,,$$

ainsi que de l'injection continue de $\mathcal{B}^{\sigma,\frac{1}{2}}$ dans $B^{\sigma,\frac{1}{2}}$ rappelée dans (2.1.1).

Pour la seconde estimation de la Proposition 2.3.1 on applique (2.3.2)-(2.3.4) à $s = -1$, $s' = 3/2$ et $r = 1$. De la définition de $u^\varepsilon_{\mathrm{app}}$ on a en effet que

$$\|\partial_3 u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})} = \varepsilon \|\partial_3(u^{\mathrm{h}} + \varepsilon w^{\mathrm{h}}, w^3)\|_{\tilde{L}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})}\,, \tag{2.3.5}$$

ce qui termine la démonstration grâce à (2.3.2)-(2.3.4).

Enfin le dernier résultat de la proposition provient du fait que

$$\|u^\varepsilon_{\mathrm{app}}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})} = \|(u^{\mathrm{h}} + \varepsilon w^{\mathrm{h}}, w^3)\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac{1}{2}})}$$

et l'on peut donc découper l'intervalle d'intégration en temps de sorte à rendre les normes en temps arbitrairement petites, indépendamment de ε. La proposition est démontrée. □

2.3.2. Estimations sur la pression. —

Proposition 2.3.2. — *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1.3*, il existe une constante C telles que l'on ait les résultats suivants. D'une part*

$$\left\|[\partial_3 p_0]_\varepsilon\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})} \leq C\,,$$

et d'autre part

$$\left\|[\nabla^{\mathrm{h}} p_1]_\varepsilon\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})} \leq C\,.$$

Démonstration. — On a par définition

$$\partial_3 p_0 = \partial_3 \sum_{i,j=1}^{2} \partial_i \partial_j (-\Delta_{\mathrm{h}})^{-1}(u^i u^j)\,.$$

On rappelle la loi de produit énoncée dans (2.4.6)

$$\|ab\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})} \lesssim \|a\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\|b\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}$$

ainsi que le fait rappelé dans (2.1.1) que $\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}$ s'injecte de manière continue dans $B^{0,\frac{1}{2}}$. Comme l'opérateur $\partial_i\partial_j(-\Delta_{\rm h})^{-1}$ est un multiplicateur de Fourier d'ordre 0 si $i,j\in\{1,2\}$, il vient d'après (2.3.2)

$$\begin{aligned}\Big\|[\partial_3 p_0]_\varepsilon\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})} &= \|\partial_3 p_0\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})}\\ &\lesssim \|\partial_3 u^{\rm h}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\|u^{\rm h}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\\ &\le C\,,\end{aligned}$$

où C dépend de $\|u_0^{\rm h}\|_{\mathcal{B}^{-\frac{1}{2},\frac{3}{2}}\cap\mathcal{B}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}$. Par ailleurs on a par définition

$$p_1=\sum_{i=1}^{2}\partial_i\partial_3(-\Delta_{\rm h})^{-1}(u^iw^3)$$

donc pour tout $j\in\{1,2\}$ on peut écrire

$$\partial_j p_1=\partial_3\sum_{i=1}^{2}\partial_i\partial_j(-\Delta_{\rm h})^{-1}(u^iw^3)$$

qui s'estime en utilisant (2.3.2)-(2.3.4), puisque

$$\begin{aligned}\Big\|[\partial_j p_1]_\varepsilon\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})} &= \|\partial_j p_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}})}\\ &\lesssim \Big(\|\partial_3 u^{\rm h}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\|w^3\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\\ &\quad+\|\partial_3 w^3\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\|u^{\rm h}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})}\Big)\,.\end{aligned}$$

La Proposition 2.3.2 est démontrée. □

2.3.3. Démonstration du Lemme 2.2.2. — Rappelons que

$$\begin{aligned}F^\varepsilon := \varepsilon\Big[\Big(w^{\rm h}\cdot\nabla^{\rm h}(w^{\rm h},0)+w^3\partial_3(w^{\rm h},0)\Big)\Big]_\varepsilon+\Big[\Big(w\cdot\nabla(u^{\rm h},w^3)\Big)+(u^{\rm h}\cdot\nabla^{\rm h}w^{\rm h})\Big]_\varepsilon\\ +\Big(0,[\partial_3(p_0+\varepsilon p_1)]_\varepsilon\Big)\,,\end{aligned}$$

et commençons par les termes relatifs à la pression, qui s'estiment grâce à la Proposition 2.3.2. On écrit en effet d'une part

$$\begin{aligned}2^q\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big|(\Delta_q^{\rm v}(0,[\partial_3p_0]_\varepsilon)|\Delta_q^{\rm v}R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|dt &\le C\|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac{1}{2}}}d_q2^{\frac{q}{2}}\|\Delta_q^{\rm v}[\partial_3p_0]_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+;L^2)}\\ &\le Cs_q\|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac{1}{2}}}\Big\|[\partial_3p_0]_\varepsilon\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac{1}{2}})}\\ &\le Cs_q\|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

et d'autre part on remarque que

$$\varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big|(\Delta_q^{\rm v}(0,[\partial_3p_1]_\varepsilon)|\Delta_q^{\rm v}R^\varepsilon)_{L^2}(t)\Big|\,dt=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big|(\Delta_q^{\rm v}\partial_3[p_1]_\varepsilon|\Delta_q^{\rm v}R^{\varepsilon,3})_{L^2}\Big|\,dt\,.$$

Après une intégration par parties il vient donc

$$\varepsilon \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(0,[\partial_3 p_1]_\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\right| dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|(\Delta_q^{\mathrm{v}}[p_1]_\varepsilon|\partial_3 \Delta_q^{\mathrm{v}} R^{\varepsilon,3})_{L^2}\right| dt\,.$$

Comme R^ε est de divergence nulle, une nouvelle intégration par parties donne

$$\varepsilon \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(0,[\partial_3 p_1]_\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\right| dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|(\Delta_q^{\mathrm{v}}\nabla^{\mathrm{h}}[p_1]_\varepsilon|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^{\varepsilon,\mathrm{h}})_{L^2}\right| dt$$

et l'on conclut alors comme ci-dessus grâce à la Proposition 2.3.2 que

$$\begin{aligned}\varepsilon 2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|(\Delta_q^{\mathrm{v}}(0,[\partial_3 p_1]_\varepsilon)|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^\varepsilon)_{L^2}(t)\right| dt &= 2^q \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|(\Delta_q^{\mathrm{v}}\nabla^{\mathrm{h}}[p_1]_\varepsilon|\Delta_q^{\mathrm{v}} R^{\varepsilon,\mathrm{h}})_{L^2}\right| dt \\ &\leq C s_q \|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac12}} \left\|\nabla^{\mathrm{h}}[p_1]_\varepsilon\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac12})} \\ &\leq C s_q \|R^\varepsilon\|_{\tilde{L}^\infty_k B^{0,\frac12}}\,.\end{aligned}$$

Il reste à étudier les termes bilinéaires. Là encore des lois de produit rappelées en (2.4.6) donnent le résultat aisément puisque pour toute fonction a et tout champ de vecteurs horizontal b^{h}, grâce à l'injection continue de $\mathcal{B}^{0,\frac12}$ dans $B^{0,\frac12}$, on a

$$\begin{aligned}\|b^{\mathrm{h}}\cdot\nabla^{\mathrm{h}} a\|_{L^1(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac12})} &\leq \|b^{\mathrm{h}}\cdot\nabla^{\mathrm{h}} a\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac12})} \\ &\lesssim \|b^{\mathrm{h}}\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac12})}\|\nabla^{\mathrm{h}} a\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac12})}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|w^3\partial_3 a\|_{L^1(\mathbb{R}^+;B^{0,\frac12})} &\leq \|w^3\partial_3 a\|_{L^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac12})} \\ &\lesssim \|w^3\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{1,\frac12})}\|a\|_{\tilde{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathcal{B}^{0,\frac32})}\,.\end{aligned}$$

On conclut grâce à (2.3.2)-(2.3.4). Le Lemme 2.2.2 est démontré. □

2.4. Espaces de Besov anisotropes

Dans cette Annexe nous rappellons quelques propriétés utiles sur les espaces de Besov anisotropes, dont la définition est donnée en introduction (voir les Définitions 2.1.1 et 2.1.2).

Rappelons tout d'abord les inégalités de Bernstein anisotropes (voir [**14, 32**]) :

- si le support de la transformée de Fourier d'une fonction a définie sur $\mathbb{R}$ est inclus dans $2^q\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est une boule de $\mathbb{R}$ centrée en 0, alors pour tous $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty$,

$$\|\partial_{x_3}^\alpha a\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \lesssim 2^{q(|\alpha|+(1/p_2-1/p_1))}\|a\|_{L^{p_2}(\mathbb{R})}\,. \tag{2.4.1}$$

- si le support de la transformée de Fourier d'une fonction a définie sur $\mathbb{R}$ est inclus dans $2^q\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est une couronne de $\mathbb{R}$ centrée en 0 alors

$$\|a\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \lesssim 2^{-q}\|\partial_3 a\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})}\,. \tag{2.4.2}$$

- si le support de la transformée de Fourier d'une fonction a définie sur $\mathbb{T}^2$ est inclus dans $2^j\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est une boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en 0, alors pour tous $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty$,

$$\|a\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim 2^{2j(1/p_2-1/p_1)}\|a\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{2.4.3}$$

Il n'est alors pas difficile de montrer, en utilisant (2.4.3), que

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qs}\|\nabla^{\mathrm{h}}\Delta_q^{\mathrm{v}}a\|_{L^2} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qs}\|\Delta_q^{\mathrm{v}}a\|_{L^\infty_{\mathrm{h}}L^2_{\mathrm{v}}} \lesssim \|a\|_{\mathcal{B}^{1,s}}\,. \tag{2.4.4}$$

Les espaces donnés par la norme suivante, introduits dans [**13**], sont utilisés de manière constante dans ce texte :

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\tilde{L}^r([0;T];\mathcal{B}^{\sigma,s})} &:= \sum_{j,q} 2^{js+qs'}\|\Delta_j^{\mathrm{h}}\Delta_q^{\mathrm{v}}f\|_{L^r([0;T];L^2)}\\
\|a\|_{\tilde{L}^r([0;T];\mathcal{B}^{0,s})} &:= \sum_{q} 2^{qs}\|\Delta_j^{\mathrm{h}}\Delta_q^{\mathrm{v}}f\|_{L^r([0;T];L^2)}\,.
\end{aligned}$$

Enfin présentons l'algorithme de paraproduit de J.-M. Bony [**5**] (dans la direction verticale) : le produit de deux distributions a, b, quand il est défini, peut se décomposer en

$$ab = S^{\mathrm{v}}_{q-1}a\,\Delta^{\mathrm{v}}_q b + S^{\mathrm{v}}_{q-1}b\,\Delta^{\mathrm{v}}_q a + \sum_{q\sim q'}\Delta^{\mathrm{v}}_q a\,\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}b$$

et ainsi en particulier

$$\Delta^{\mathrm{v}}_q(ab) = \sum_{q'\sim q} S^{\mathrm{v}}_{q'-1}a\,\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}b + \sum_{q'\sim q} S^{\mathrm{v}}_{q'-1}b\,\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}a + \sum_{\substack{2^{q'}\gtrsim 2^q\\ q''\sim q'}}\Delta^{\mathrm{v}}_{q''}a\,\Delta^{\mathrm{v}}_{q'}b\,. \tag{2.4.5}$$

Cette décomposition, avec (2.4.1), permet de démontrer les lois de produit suivantes (voir par exemple [**3**]) : pour tout $s \geq 1/2$,

$$\begin{aligned}
\|ab\|_{\mathcal{B}^{1,s}} &\lesssim \|a\|_{\mathcal{B}^{1,s}}\|b\|_{\mathcal{B}^{1,s}}\\
\|ab\|_{\mathcal{B}^{0,s}} &\lesssim \|a\|_{\mathcal{B}^{\frac{1}{2},s}}\|b\|_{\mathcal{B}^{\frac{1}{2},s}}\\
\|ab\|_{\mathcal{B}^{0,s}} &\lesssim \|a\|_{\mathcal{B}^{1,s}}\|b\|_{\mathcal{B}^{0,s}}\,.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Auscher, S. Dubois, et P. Tchamitchian, On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space, *Journal de Mathématiaques Pures et Appliquées*, **83** 673–697, 2004.

[2] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **343**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et I. Gallagher, On the stability of global solutions to the three dimensional Navier-Stokes equations, *à paraître dans le Journal de l'École polytechnique.*

[4] H. Bahouri et I. Gallagher, On the stability in weak topology of the set of global solutions to the Navier-Stokes equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **209**, 2013, pages 569-629.

[5] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'École Normale Supérieure,* **14**, 1981, pages 209-246.

[6] Marco Cannone, A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **13**(3) :515–541, 1997.

[7] J.-Y. Chemin, Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1992, pages 20-28.

[8] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, Fluids with anisotropic viscosity, *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, **34**, 2000, pages 315-335.

[9] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, *Mathematical geophysics. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **32** The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[10] J.-Y. Chemin et I. Gallagher, Large, global solutions to the Navier-Stokes equations, slowly varying in one direction, *Transactions of the American Mathematical Society* **362**, 2010, pages 2859-2873.

[11] J.-Y. Chemin, I. Gallagher et C. Mullaert, The role of spectral anisotropy in the resolution of the three-dimensional Navier-Stokes equations, "Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs", *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* Birkhauser **84**, 2013, pages 53-79.

[12] J.-Y. Chemin, I. Gallagher et P. Zhang, Sums of large global solutions to the incompressible Navier-Stokes equations, to appear in *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

[13] J.-Y. Chemin et N. Lerner. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, 1995, pages 314-328.

[14] J.-Y. Chemin et P. Zhang, On the global wellposedness to the 3-D incompressible anisotropic Navier-Stokes equations, *Communications in Mathematical Physics*, **272**, 2007, pages 529-566.

[15] J.-Y. Chemin et P. Zhang, Remarks on the global solutions of 3-D Navier-Stokes system with one slow variable, *Comm. Partial Differential Equations* **40**, 2015 no. 5, 878-896.

[16] H. Fujita et T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 1964, pages 269-315.

[17] I. Gallagher, D. Iftimie et F. Planchon, Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations, *Annales de l'Institut Fourier*, **53**, 2003, pages 1387-1424.

[18] Y. Giga, Regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes system, *Nonlinear functional analysis and its applications, Part 1* (Berkeley, Calif., 1983), 449–453, Proc. Sympos. Pure Math., 45, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[19] Y. Giga et T. Miyakawa, Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem, *Archiv for Rational Mechanics and Analysis*, **89** (1985), 267-281.

[20] G. Gui et P. Zhang, Stability to the global large solutions of 3-D Navier-Stokes equations, *Advances in Mathematics* **225**, 2010, pages 1248-1284.

[21] D. Iftimie, The resolution of the Navier-Stokes equations in anisotropic spaces, *Revista Matemática Iberoamericana* **15**, 1999, no. 1, 1-36.

[22] T. Kato, Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$ avec applications to weak solutions, *Mathematische Zeitschrift*, **187**, 1984, pages 471-480 .

[23] H. Koch et D. Tataru, Well-posedness for the Navier-Stokes equations, *Advances in Mathematics*, **157**, 2001, pages 22-35.

[24] T. Kawanago, Stability estimate for strong solutions of the Navier ?Stokes system and its applications, *Electron. J. Differential Equations* **15** (1998) 1 ?23.

[25] O. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Second English edition, revised and enlarged. T Mathematics and its Applications, Vol. 2 Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris 1969 xviii+224 pp.

[26] P.-G. Lemarié-Rieusset, Recent developments in the Navier-Stokes problem, *Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, 2002.

[27] P.-G. Lemarié-Rieusset, The Navier–Stokes problem in the 21st century, *Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, 2016.

[28] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, **63**, 1933, pages 193-248.

[29] J. Leray, Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **12**, 1933, pages 1-82.

[30] Y. Meyer, *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, Current developments in mathematics, International Press, Boston, MA, 1997.

[31] J. Necas, M. Ruzicka, et V. Sverák, On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations, *Acta Math.*, **176** (2) :283–294, 1996.

[32] M. Paicu, Équation anisotrope de Navier-Stokes dans des espaces critiques, *Revista Matemática Iberoamericana,* **21**, 2005, pages 179-235.

[33] M. Paicu et Z. Zhang, Global well-posedness for 3D Navier-Stokes equations with ill-prepared initial data, *J. Inst. Math. Jussieu*, **13**, 2014, no. 2, 395-411.

[34] F. Planchon, Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^3$, *Revista Matemática Iberoamericana*, **14**, 1998, pages 71-93.

[35] W. Rusin et V. Sverák, Minimal initial data for potential Navier-Stokes singularities, *J. Funct. Anal.*, 260(3) :879–891, 2011.

[36] T.-P. Tsai, Tai-Peng On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates. Arch. Rational Mech. Anal. 143 (1998), no. 1, 29–51.

[37] F. Weissler, The Navier-Stokes Initial Value Problem in L^p, *Archiv for Rational Mechanics and Analysis*, **74**, 1980, pages 219-230.