



HAL
open science

Thermodynamique dans les systèmes stationnaires hors équilibre macroscopiques : démons de Maxwell et machines thermiques aléatoires

Marc Lagoin

► **To cite this version:**

Marc Lagoin. Thermodynamique dans les systèmes stationnaires hors équilibre macroscopiques : démons de Maxwell et machines thermiques aléatoires. Physique [physics]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2023. Français. NNT : 2023ENSL0042 . tel-04213353

HAL Id: tel-04213353

<https://theses.hal.science/tel-04213353v1>

Submitted on 21 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivré par

l'École Normale supérieure de Lyon

École doctorale N°52

École doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon

Discipline : Physique

soutenue publiquement le 17/07/2023 par

Marc LAGOIN

Thermodynamique dans les systèmes stationnaires hors équilibre macroscopiques : démons de Maxwell et machines thermiques aléatoires.

devant le jury composé de

CANET, Léonie

CHETRITE, Raphaël

GRANER, François

NAERT, Antoine

GEMINARD, Jean-Christophe

Professeure des universités,

Chargé de recherche CNRS,

Directeur de recherche CNRS,

Maître de conférences,

Directeur de recherche CNRS,

Grenoble Alpes

Nice Sophia-Antipolis

Paris Diderot

Lyon 1

ENS de Lyon

Rapporteure

Rapporteur

Examineur

Directeur

Examineur

Encadrement

Cette thèse a été dirigée et encadrée par Antoine Naert et Jean-Christophe Géminard.

Remerciements

C'est la coutume de les adresser en début de thèse. Cet exercice me semble très difficile et je doute de pouvoir rendre honneur aux personnes qui m'ont apporté au cours de cette aventure.

Pour commencer, je dois remercier Antoine qui m'a pris en thèse, ce qui m'a donné l'opportunité de travailler sur un sujet très intéressant.

Je souhaite aussi remercier Jean-Christophe, c'est grâce à lui que j'ai pu terminer cette thèse. J'admire ton intuition et ton talent et ton humanité. j'ai beaucoup apprécié travailler avec toi. Ensuite, je veux remercier notre grand manitou Stéphane et ses analyses fractales acérées, qui m'a enseigné le traitement du signal, le code et qui s'est toujours montré disponible pour répondre à mes questions, aussi bizarres soient-elles.

Je veux souligner également l'implication précieuse de Franck dans mon travail de thèse. Il a fabriqué avec grand soin les circuits électroniques qui m'étaient nécessaires pour mes expériences et a toujours réalisé très rapidement les très nombreuses modifications que je lui ai demandées tout au long de ces trois ans. Je tiens bien entendu à remercier Erika, Fatiha, Nadine, Nelly, Laurence, Denis et Hervé, qui sont des personnes cruciales pour le fonctionnement du laboratoire et qui m'ont toujours aidé dans mes déboires administratifs.

Pour ce qui est des inspirations scientifiques, je tiens à remercier Jean-Yonnel qui a fait sa thèse antérieurement. Merci à Audrey, et Pascal, pour des discussions conceptuelles très prolifiques, ainsi qu'à Pascal et Jacques pour des discussions d'électroniques très enrichissantes. Merci également à Rémi qui nous a rejoint pour son stage de L3.

Pour la préparation du futur, je vais également remercier Denis et surtout Eric qui m'a permis de trouver un post-doc qui me plaira beaucoup, j'en suis certain. Eric a de plus été une grande source de soutien moral, tout comme Sylvain, et je les en remercie.

Enfin, je vais simplement remercier toutes les personnes du laboratoire qui se sont montrées bienveillantes envers moi pendant ces trois années. Voir l'amphi déborder le jour de ma soutenance m'a beaucoup touché.

Ma thèse fait suite à quatre années d'études au sein de l'ENS de LYON. Je tiens donc particulièrement à remercier en plus David, Pierre, Nicloas, Benjamin, Peter, Marc, Dimitrios, Sébastien, Natalia, Francesca, Correntin, Mickael, Laurent, Patrick, François et Thierry pour les nombreuses heures de cours incroyables que j'ai suivies auprès d'eux. Chacun a un style différent mais vous êtes les sources d'inspiration principales pour l'enseignant que je souhaite devenir.

En traversant la rue pour rejoindre le laboratoire, j'ai en effet pu commencer à enseigner. Je tiens à remercier Christophe qui m'a confié un cours magistral ainsi que Peter qui m'a renouvelé cette confiance les deux années suivantes. Je tiens également à remercier Christian, Jacques et Adrien, les techniciens du département pour leur aide dans la préparation des manips de cours. Enfin, je veux remercier et féliciter mes anciens étudiant.te.s. C'était pour moi un honneur et un privilège de faire partie de votre parcours.

Cependant, je n'aurais certainement pas pu survivre à ces trois ans de thèse sans mes amis qui m'ont soutenu dans l'adversité et aidé à surmonter les nombreux obstacles.

Tout d'abord, Je m'adresse à Gilles et Sabine, les meilleurs professeurs d'anglais, qui sont devenus des amis. Merci beaucoup pour les discussions que nous avons eues sur des sujets aussi variés que l'implication du paradoxe EPR sur la causalité ou la philosophie morale. Merci à toi Sabine pour toutes nos séances de bruit et pour tous tes conseils violonistiques. Me voilà même altiste grâce à toi.

Ensuite, je veux remercier les gens du *Clipper*, et en particulier Thierry et Christelle. Merci pour le soutien moral, les conseils avisés et la belle ambiance. Christelle et Pierre, grâce à leur grand talent, m'ont motivé à improviser au piano et jouer du violon en public dans une atmosphère toujours bienveillante. Cette ambiance sans jugement, on la doit à Thierry, qui est probablement l'une des personnes les plus sages que j'ai rencontré. Comme chacun le sait, ce n'est pas seulement pour le chocolat froid que je revenais dans ton bar.

Enfin, il me faut remercier des amis plus anciens qui m'ont accompagné dans cette aventure. Sans ordre particulier d'importance, je pense à Thomas, Théophile, Victor, Emma, Gaëtan, Loïc, Guillaume, Pablo, François, Laëtitia et les autres. Vous êtes autant de petits miracles qui font que ma vie vaut le coup d'être vécue.

Je souhaite également remercier le CNRS pour ma bourse de thèse, qui m'a bien sûr permis de faire cette thèse... mais aussi d'acheter Domingo, un cheval merveilleux pour qui j'ai la plus grande affection et qui mérite la meilleure des retraites. Hélas, nous étions loin l'un de l'autre pour cette thèse mais j'ai pu compter sur mes parents pour aller le voir régulièrement. Papa, Maman, Camille, merci beaucoup. Merci de toujours me soutenir de votre mieux. Merci également à Newton et Maxwell, mon modèle, qui m'ont inspiré dans cette thèse.

Enfin, merci beaucoup à vous qui lisez ce manuscrit.

Mes derniers mots seront empruntés. Je vous quitte avec trois citations qui résument assez bien mon idéologie morale.

Agis comme si la maxime de ton action devait être érigée par la volonté en loi universelle de la nature. [...] Agis de telle sorte que tu traites l'humanité aussi bien dans ta personne que dans la personne de tout autre toujours en même temps comme une fin et jamais complètement comme moyen.

Emmanuel Kant, *Fondements de la métaphysique des moeurs*

Only in darkness are we revealed. Goodness is not goodness that seeks advantage. Good is good in the final hour, in the deepest pit, without hope, without witness, without reward. Virtue is only virtue in extremis.

Nardole, *Doctor Who*, BBC

Basic stuff first: never be cruel, never be cowardly, and never ever eat pears! Remember hate is always foolish, and love is always wise. Always try to be nice, but never fail to be kind. [...] Laugh hard. Run fast. Be kind.

The Doctor, *Doctor Who*, BBC

Préambule

Ce préambule a été ajouté pour répondre à la demande Raphael Chetrite, qui est un de mes deux rapporteurs. Il détaille les différents articles publiés et en préparation concernant mon travail de thèse.

Pendant ma thèse, j'ai écrit l'article [25] en collaboration avec Antoine Naert et Caroline Crauste-Thieberge. Une version antérieure a également été déposée sur arXiv. Cet article présente une partie des résultats présentés au chapitre 9. Il s'agit du seul article sur mon travail de thèse qui est actuellement publié.

Un second article plus approfondi avec les mêmes collaborateurs est en préparation. Il rassemblera tous les résultats du chapitre 9 ainsi que la mesure de température granulaire modifiée présentée au chapitre 5 et les méthodes de rhéologie présentées au chapitre 6.

Enfin, un article en collaboration avec Adrien Meynard en traitement du signal est prêt à être soumis. Il s'intéresse à la comparaison de l'entropie produite par le démon dans les conditions du chapitre 9 avec l'entropie produite par un démon idéal. Un second article est également en préparation pour généraliser cette étude en étudiant l'influence de la température effective du gaz granulaire.

Concernant le travail réalisé avec Jean-Christophe Géminard, deux articles sont en cours de rédaction. Le premier concerne l'expérience de machine de Szilard et regroupera les résultats des chapitres 11 et 12, ainsi que ceux du chapitre 8 comme matériel supplémentaire. Un second article est en préparation sur le réfrigérateur stochastique présenté au chapitre 13.

Enfin, si le temps me le permet, j'écrirai un article en collaboration avec Pascal Degiovani, Benjamin Roussel et Audrey Steinberger sur le démon de Brillouin présenté au chapitre 10.

And yet, no work has been done, only the intelligence of a very observant and neat-fingered being has been employed.

James Maxwell, *letter to Peter Tait* (1867)[[34](#)]

Table des Matières

I	Introduction	13
1	Un point sur la thermodynamique	17
1.1	État et variables d'état	17
1.2	Thermodynamique d'équilibre	18
1.3	Thermodynamique hors équilibre	19
2	Démons de Maxwell	23
2.1	Principe	23
2.2	Expériences de démons de Maxwell	25
II	Introduction spécifique	29
3	Construire un gaz granulaire	31
3.1	Comment on prépare le gaz granulaire	31
3.2	Comment on sonde le gaz granulaire	32
3.3	Comment perturber le gaz granulaire	34
3.4	Conclusion	35
4	Propriétés historiques des gaz granulaires	37
4.1	Propriétés dynamiques et densité de probabilité	37
4.2	Comment définir la température granulaire	39
4.3	Conclusion	40
5	Mesure de la température granulaire	41
5.1	Principe	41
5.2	Protocole	42
5.3	Résultats	44
5.4	Discussion sur le choix de la température granulaire	46
6	Rhéologie dans un gaz granulaire	47
6.1	Principe	47
6.2	Protocole	49
6.3	Résultats	50
6.4	Conclusion et discussion	51
7	Effet de la rotation de la pale	53
7.1	Montage	53
7.2	Rhéologie dans le référentiel tournant	54
7.3	Conclusion et discussion	56

8	Quand on branche un condensateur au moteur	57
8.1	Montage	57
8.2	L'énergie cinétique est modifiée	58
8.3	Une piste d'explication	59
8.4	Conclusion et discussion	60
III	Démons de Maxwell macroscopiques	61
9	Démon à diode idéale	65
9.1	Principe	66
9.2	Montage	69
9.3	Résultats préliminaires	71
9.4	Rôle de l'asymétrie : dépendance en R	75
9.5	Résultats : rôle de la température kT	80
9.6	Conclusion et discussion	85
10	Démon de Brillouin	87
10.1	Principe	87
10.2	Montage	89
10.3	Résultats	91
10.4	Conclusion et discussion	96
11	La Machine de Szilard macroscopique	97
11.1	Principe	100
11.2	Montage	101
11.3	Résultats	102
11.4	Conclusion et discussion	107
IV	Machines thermiques aléatoires	109
12	Machine de Szilard-Feynman	111
12.1	Principe	111
12.2	Montage	113
12.3	Résultats	115
12.4	Conclusion et discussion	120
13	Le réfrigérateur stochastique	123
13.1	Principe	123
13.2	Mise en œuvre expérimentale de la machine aléatoire	130
13.3	Résultats généraux sur la machine aléatoire	132
13.4	Résultats thermodynamiques sur la machine aléatoire	133
13.5	Résultats statistiques sur la machine aléatoire	137
13.6	Conclusion et discussion	139
14	La machine hybride	141
14.1	Réfrigérateur hybride	141
14.2	Conclusion et discussion. Le moteur hybride	145

V Conclusion

147

Partie I
Introduction

Introduction

No. No, no no no. Line in the sand. Santa Claus does not do the scientific explanation.

The Doctor, *Doctor Who*, BBC

Disposer d'un moyen efficace de manipuler l'énergie, de la stocker, de la rentabiliser, est un enjeu à la fois sociétal et civilisationnel. Le pétrole, qui est probablement la source d'énergie la plus compacte et facile d'utilisation, a suffi à justifier des conflits à l'échelle des pays, des atrocités à l'échelle des peuples et des injustices à l'échelle des individus. Certains affirment qu'il a permis une élévation globale des niveaux de vie des humains. La découverte du potentiel énergétique des atomes a également permis de grandes prouesses technologiques. L'énergie est un concept central en physique. En systèmes dynamiques, on la voit comme un invariant, la "charge conservée" associée à l'invariance par translation temporelle. En thermodynamique, on la voit d'avantage comme une quantité qui se conserve mais qui peut être échangée entre différents systèmes et convertie sous différentes formes. C'est le *premier principe de la thermodynamique*. L'énergie cinétique macroscopique est associée aux masses macroscopiques en mouvement ordonné, la chaleur est associée aux mouvement microscopique désordonné. L'énergie peut également être stockée sous des formes plus exotiques comme l'énergie potentielle correspondant à la position dans un champ de force ou bien comme l'énergie de masse. L'énergie est donc certes un concept important, mais c'est surtout un concept étrange.

Cette étrangeté est encore plus perturbante quand on est confronté à une deuxième propriété. Toutes les formes d'énergie ne se valent pas. En effet, on peut profiter assez facilement de l'énergie chimique, ou de l'énergie potentielle pour produire de l'énergie cinétique, mais la chaleur est une forme d'énergie qui nous est moins disponible à l'échelle macroscopique car elle est facilement perdue dans l'environnement. Cependant, et c'est là un point clé, tous les échanges ou transformations d'énergie à l'échelle macroscopique, notre échelle, s'accompagnent de pertes à l'échelle microscopique sous forme de chaleur. C'est le *second principe de la thermodynamique*. On peut illustrer cette idée par le fait que les édifices macroscopiques sont plus coûteux à construire qu'à détruire : il est bien plus aisé de brûler une forêt que de la réimprimer en 3D atome par atome.

Pourtant, l'énergie perpétuelle est un fantasme qui remonte au moins au début de la mécanique en Grèce antique. À l'époque, le mouvement des planètes était considéré comme perpétuel car les orbites de ces dernières semblaient fermées. On ne se doutait alors pas que les marées dissipaient lentement l'énergie de rotation des astres. C'est par exemple la raison pour laquelle la Lune nous montre toujours la même face : elle a déjà épuisé une partie son énergie cinétique de rotation initiale. Le Soleil lui aussi provoque des marées sur la Terre ce dont a bien conscience un spéléologue averti. Même les trous noirs perdent leur énergie par un processus de radiation. Et chaque respiration nous rapproche un peu plus du moment où toute l'énergie utilisable aura été convertie en chaleur.

Comme l'énergie est un concept mystérieux, et que le second principe de la thermodynamique peut paraître un peu déprimant, un certain nombre de personnes inventent et réalisent des machines à mouvement perpétuel ou avec un rendement "surnuméraire". On citera par exemple le livre *L'effet Dumas Itinéraire d'une invention bannie* aux éditions MAIA par Jean-Christophe Dumas et Nathalie Nguyen. Un ouvrage dont publicité prétend que ses auteurs ont inventé un dispositif "capable de générer, à l'aide d'un courant électrique, plus d'énergie qu'il n'en consomme et de provoquer des bulles de cavitation instantanément" et dans lequel, pour 17 €, "[l'auteur] nous livre sans concession sa vérité à ce sujet, avec preuves à l'appui afin de vulgariser et de confier l'œuvre de sa vie à l'humanité, dans l'espoir qu'un jour, elle sera la clef qui la délivrera de son asservissement au système impitoyable et mortifère dans lequel nous vivons". Par charité épistémique, nous qualifierons toutes ces démarches au mieux d'erreurs de bonne foi dans l'interprétation suite à des erreurs de mesures.

Dans cette thèse, nous ne révolutionnerons pas la thermodynamique et nous ne nous attaquons à aucun des dangers sociétaux que nous venons d'évoquer. Au lieu de cela, nous proposons une mise en œuvre expérimentale de différents modèles jouets expérimentaux permettant d'explicitier des propriétés thermodynamiques mais à l'échelle macroscopique. Les enjeux sont à la fois fondamentaux et pédagogiques. : peut-on faire de la thermodynamique hors de l'équilibre aussi loin de la limite thermodynamique ?

Chapitre 1

Un point sur la thermodynamique

When one relies on sight to perceive the world, it is like trying to stare at the galaxy through a crack in the door.

Kreia, *KOTOR II TSL*, Obsidian Entertainment

La thermodynamique est la partie de la physique qui étudie les échanges d'énergie. Son ambition initiale est de décrire les systèmes à l'échelle macroscopique, c'est à dire à échelle humaine. Pour cela, elle propose de décrire les systèmes à l'aide de quantités mesurables par les humains : la température, la pression, le volume, la masse...

1.1 État et variables d'état

Imaginons l'expérience suivante. Un doctorant souhaite se faire une tasse de thé. Pour cela, il utilise la bouilloire disponible au laboratoire pour faire bouillir un volume $V_I = 1\text{ L}$ d'eau. Débordant de zèle, il dispose une balance tarée sous la bouilloire qui indique $m_I = 1\,000\text{ g}$ et y plonge un thermomètre qui indique $T_I = 100\text{ °C}$. Il prélève la moitié de l'eau et la verse dans une grande tasse $V_F = 0.5\text{ L}$. Il mesure alors que la masse finale est $m_F = 500\text{ g}$ alors que la température finale est $T_F = 100\text{ °C}$. Diviser la quantité d'eau par deux a donc divisé la masse par deux mais pas la température qui est restée inchangée.

Cette expérience indique que la masse et la température sont deux quantités fondamentalement différentes. D'un côté, la masse, comme le volume sont des quantités *extensives*. Elles sont proportionnelles à la quantité de matière mise en jeu. D'un autre côté, la température est une quantité *intensive*, elle ne dépend pas de la quantité de matière. De manière habituelle, on interprète la température comme l'énergie cinétique microscopique moyenne par particule. Dans un litre d'eau, on compte environ $3.3 \cdot 10^{25}$ particules. En enlever aléatoirement la moitié ne change pas l'énergie moyenne par particule.

La quantité de particules dans un seul litre d'eau est absurdement énorme pour que nous puissions partir de la mesure individuelle microscopique pour ensuite remonter aux quantités macroscopiques. Mesurer la position et l'orientation ainsi que les vitesses de chaque particule dans un litre d'eau nécessiterait de réaliser environ $4.0 \cdot 10^{26}$ mesures simultanément. Au delà de la simple impossibilité technologique d'une telle mesure, la place de stockage que nécessiterait ces données pour un seul instant serait d'environ $4.0 \cdot 10^{15}\text{ To}$. Mon disque dur pour l'écriture de cette thèse fait 2 To . On serait donc tenté d'abandonner cette approche naïve. De plus,

intuitivement, on a conscience que donner les valeurs des quantités V , m , T suffit pour décrire l'état de l'eau dans la bouilloire. On appelle *variables d'état* ces quantités non redondantes qui permettent de décrire sans ambiguïté l'état thermodynamique d'un système.

1.2 Thermodynamique d'équilibre

La première approche de la thermodynamique qui a été développée historiquement reposait sur l'observation et l'expérience. C'est la *Thermodynamique phénoménologique*. Elle décrit les différents états d'un système par ses variables d'état, c'est à dire des quantités mesurables par un humain. Elle repose sur deux principes. Le *premier principe* énonce que l'énergie est une quantité conservée qui peut seulement être échangée entre systèmes soit sous forme de travail (d'une force), soit sous forme de chaleur. Le *second principe* énonce qu'on ne peut pas extraire du travail d'une seule source de chaleur. Comme on l'a dit, cette approche ne présuppose aucune information sur le comportement microscopique du système. Elle permet cependant de construire des *machines thermiques*. On les sépare en deux types. D'une part les *moteurs* transforment un *flux d'énergie*, par exemple de chaleur, entre deux sources en un travail récupérable par un opérateur extérieur. D'autre part, les *pompes* (par exemple à chaleur) réalisent un flux (par exemple de chaleur) entre deux réservoirs au prix d'un travail provenant de l'extérieur.

Une approche plus récente est la *Thermodynamique statistique*. Elle s'appuie sur des modèles microscopiques pour déduire l'état macroscopique du système en réalisant des calculs statistiques. On définit comme *macro-état* l'état macroscopique observable par un humain, c'est à dire la donnée de variables d'état du système. Chaque macro-état peut correspondre à un certain nombre d'états microscopiques, appelés *micro-états*. Par exemple, comme l'illustre la figure 1.1, deux aimants discernables mais identiques de moment magnétique \mathbf{m} présentent quatre micro-états différents mais seulement trois macro-états décrits par la valeur de l'aimantation moyenne $\langle \mathbf{m} \rangle$.

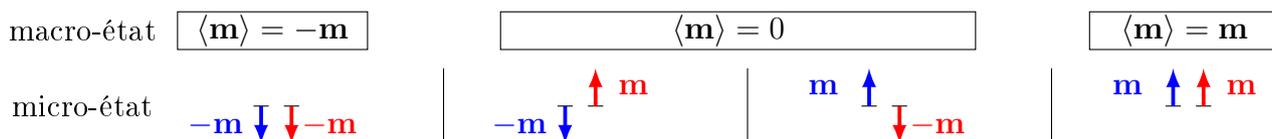


FIGURE 1.1 – Deux aimants discernables mais identiques de moment \mathbf{m} , un système à deux particules possédant 4 micro-états mais seulement 3 macro-états. Par simplicité, la direction de \mathbf{m} est fixée.

La thermodynamique statistique repose également sur des principes : d'abord, on suppose que le système est ergodique, c'est à dire qu'il parcourt tous ses états possibles au cours du temps. Ce principe nous autorise à avoir une approche statistique des probabilités. Ensuite, on suppose que tous les micro-états sont équiprobables. Le macro-état du système à l'équilibre sera donc celui qui est réalisé par le plus grand nombre de micro-états. Par exemple pour nos aimants indépendants, s'ils parcourent toutes leurs configurations de manière équiprobables, l'aimantation que mesurera un observateur est $\langle \mathbf{m} \rangle = 0$. On parle alors d'équilibre thermodynamique. Les postulats de la thermodynamique nous permettent de prédire quel sera l'état d'*équilibre thermodynamique* d'un système. Dans un tel état le système est homogène et ses variables d'états ne varient plus au cours du temps, quelle que soit la durée d'observation.

Cependant, cet état n'est pas forcément atteint par les systèmes réels sur des durées humaines.

Par exemple, dans les conditions normales de température et de pression, les vrais aimants permanents macroscopiques ou le diamant ne sont pas des systèmes dans des états thermodynamiques stables. La thermodynamique prédit en effet que les diamants tendent à devenir du graphite, et que les aimants se démagnétisent. Ce sont des *états métastables*. Il est donc tentant de s'inquiéter car notre technologie électrique/électronique repose presque exclusivement à un point ou à un autre sur l'utilisation d'aimants permanents.

Nous n'avons pas tous vu de vrais diamants, il est vrai, mais nous avons pourtant tous déjà vu au moins une fois des aimants permanents. En effet, si la thermodynamique nous informe sur le "destin" des systèmes, elle ne nous dit presque rien sur le chemin que suivra le système pour l'atteindre. Parfois, comme dans le cas du diamant ou des aimants permanents, le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre thermodynamique est plus long que la durée de vie estimée de notre soleil ou même de l'Univers. On parle alors de *blocage cinétique*. D'ailleurs, un des principaux enjeux de la chimie moderne est de trouver des moyens de dépasser les blocages cinétiques par exemple grâce à la catalyse.

Le XX^{ème} siècle a développé des outils mathématiques permettant de traiter certains systèmes hors de l'équilibre thermodynamique. Ces résultats sont pour la majorité valables pour des systèmes ouverts stationnaires maintenus arbitrairement proches de l'équilibre. Nous allons en présenter quelques uns dans la partie suivante.

1.3 Thermodynamique hors équilibre

Avant tout, précisons qu'un système thermodynamique fermé évolue spontanément vers l'équilibre thermodynamique. A l'exception de certains systèmes chimiques¹, maintenir un système hors de l'équilibre thermodynamique dans un état stationnaire nécessite de lui apporter un flux d'énergie de l'extérieur pour contrebalancer exactement les pertes associées à la dynamique spontanée.

1.3.1 Théorème de fluctuation dissipation en électronique

L'exemple le plus courant de systèmes thermodynamiques hors équilibre que je trouve trop peu souvent discutés sous cet angle sont les circuits électriques. Si un courant circule dans un circuit électrique, cela signifie que ce dernier est par définition hors équilibre. Et en effet, pour que ce courant soit stationnaire, un travail extérieur est nécessaire, qu'il soit fourni par une pile électrochimique ou bien une centrale électromécanique. En cela, tous les résultats d'électronique en régime stationnaire sont des résultats de thermodynamique hors équilibre. Les tensions électriques sont en ce sens des potentiels thermodynamiques tout à fait analogues à des pressions quand la charge est analogue à un volume.

Considérons un circuit passif classique. Une bobine réelle peut être modélisée comme un circuit *RLC* série. L désigne l'inductance de la bobine : à cause de sa forme de solénoïde, elle emmagasine de l'énergie sous forme de champ magnétique quand un courant i la traverse. De plus, les fils conducteurs sont séparés par une couche d'isolant, des charges s'accumulant de part et d'autre de l'isolant. Ceci lui confère une capacité C à stocker de l'énergie également sous forme de champ électrique en accumulant des charges q . Enfin, la bobine est faite d'un

¹Par exemple, si on dissout du sel dans un volume d'eau sans atteindre la limite de solubilité, le système est hors de l'équilibre par défaut de matière.

métal qui s'échauffe au passage du courant, ce qui lui confère également une résistance R qui vient dissiper une partie de l'énergie sous forme de chaleur. On alimente la bobine en imposant une différence de potentiel V entre ses bornes. L'énergie contenue dans le circuit U est :

$$U(q, i) \equiv \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.1)$$

On remarque que R ne stocke pas d'énergie. C'est la partie dissipative de la fonction de réponse. Pour que le circuit soit dans un état stationnaire, $U(q, i)$ doit être stationnaire et il faut que le courant i soit constant. Donc l'énergie apportée par le générateur doit contrebalancer les pertes résistives :

$$d_t U(q, i) = V i - R i^2 = 0 \quad \implies \quad V i = R i^2 \quad (1.2)$$

Si V fluctue mais est stationnaire, on retrouve une relation sur les différents moments de V et i :

$$\langle V(t)i(t') \rangle = \Re \{ \mathcal{A}(t) * \langle i(t)i(t') \rangle \} \quad \text{où} : \quad \mathcal{A}(t) \equiv \frac{R}{2\pi} \int \left\{ 1 + j \left[\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega} \right] \right\} \exp [j\omega t] d\omega \quad (1.3)$$

C'est ce que l'on appelle une relation de *fluctuation dissipation* : elle relie la partie dissipative $\langle R i^2 \rangle$ de la fonction de réponse du système à la corrélation $\langle V i \rangle$ des fluctuations d'énergie dans le système. Un exemple plus commun de ce genre de relation est la loi de Stokes-Einstein qui pour le mouvement brownien relie le coefficient de diffusion d'un colloïde à la viscosité du solvant.

Dans la suite de cette thèse, nous aurons besoin d'un autre type de théorème pour définir la température dans les systèmes hors équilibre. Il s'agit du théorème de fluctuation. Celui qui nous intéresse est souvent appelé SSFT pour *Steady state fluctuation theorem*.

1.3.2 Théorème de fluctuation dans les systèmes stationnaires

Imaginons une petite pale plongée dans un gaz à la température T . Cette dernière subit une force aléatoire de la part des particules du gaz et effectue une marche aléatoire que l'on appelle "mouvement Brownien". On vient maintenant forcer la pale à réaliser une oscillation sinusoïdale à basse fréquence en lui imposant une force sinusoïdale \mathbf{F} à très basse fréquence. Pour assurer ce mouvement stationnaire, un opérateur doit perpétuellement fournir un travail moyen W à la pale pour compenser la perte par dissipation visqueuse sous forme d'un flux de chaleur Q de la pale vers le gaz. On suppose que ce dernier est un thermostat, c'est à dire que sa température T est fixée.

Pour assurer que le mouvement continue de manière stationnaire, l'opérateur doit à chaque période avoir fourni un travail moyen positif qui vient exactement compenser les pertes dues à la viscosité du gaz. Donc en moyenne $\langle W \rangle = \langle Q \rangle$. Cependant, comme la pale possède une vitesse aléatoire $v_0(t)$, la puissance instantanée $\mathcal{P}(t) = v_0(t) \mathbf{F}(t)$ échangée entre l'opérateur et la pale est également aléatoire et peut même présenter des valeurs négatives ! En effet, si souvent l'opérateur doit travailler contre les fluctuations de vitesse, il arrive parfois que ce soit la pale qui donne du travail à l'opérateur. Le théorème de fluctuation nous renseigne sur l'asymétrie de la densité de probabilité de ces événements en fonction de l'échelle temporelle

d'observation et de l'amplitude $k_B T$ des fluctuations. Pour cela, on définit \mathcal{P}_τ , la puissance moyenne donnée par l'opérateur au circuit à l'échelle τ comme :

$$\mathcal{P}_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathcal{P}(s) ds \quad (1.4)$$

Le théorème de fluctuation quantifie l'asymétrie à l'échelle temporelle τ entre la densité de probabilité $\mathbf{p}(\mathcal{P}_\tau = \Phi)$ que l'opérateur fournisse à la pale une puissance Φ , et $\mathbf{p}(\mathcal{P}_\tau = -\Phi)$, la probabilité qu'il reçoive cette même puissance de la part de la pale :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau \Phi} \log \left[\frac{\mathbf{p}(\mathcal{P}_\tau = \Phi)}{\mathbf{p}(\mathcal{P}_\tau = -\Phi)} \right] = \frac{1}{k_B T} \quad (1.5)$$

Ce théorème nous sera utile car il permet de définir une température effective dans un système stationnaire hors équilibre comme la turbulence de jet ou bien un gaz granulaire comme cela a été fait dans [38]. Pour une discussion générale du théorème fluctuation, voir [16] ou [44]. Ces deux théorèmes nous seront très utiles dans la suite de cette thèse. Le théorème de fluctuation nous permet de proposer une définition de la température effective d'une pale macroscopique plongée dans un gaz granulaire hors équilibre, voir chapitre 5. Le théorème de fluctuation dissipation sert de base pour définir la viscosité du gaz granulaire au chapitre 6.

Chapitre 2

Démons de Maxwell

Miracles are like meatballs, because nobody can exactly agree on what they are made of, where they come from, or how often they should appear.

Lemony Snicket, *The Carnivorous Carnival*

Les démons de Maxwell sont initialement une catégorie d'expériences de pensée. Ils ont été imaginés pour tenter de mettre en défaut le second principe de la thermodynamique. En d'autres termes, on souhaite fabriquer une machine qui permet d'extraire du travail à partir d'une unique source de chaleur. Pour cela, comme le dit Maxwell lui-même, il faut être particulièrement rusé, et avoir des doigts agiles :

And yet, no work has been done, only the intelligence of a very observant and neat-fingered being has been employed.

James Maxwell, *letter to Peter Tait* (1867) [34]

Un excellent livre par Leff et Rex sur l'épistémologie du Démon de Maxwell est donné dans la référence [22]. Il détaille bon nombre d'exemples avec les articles historiques à l'appui.

2.1 Principe

L'idée originale de Maxwell suffit à résumer le problème. Imaginons qu'on dispose de deux cellules fermées rigides calorifugées. Une petite porte aux charnières parfaitement huilées permet de passer d'une cellule à l'autre. L'ouverture ou la fermeture de la porte ne coûte aucun travail. Une seule particule peut passer à la fois par la porte. Dans la cellule de gauche on emprisonne un gaz.

Si on ouvre la porte, le second principe impose que le gaz va spontanément se répartir dans les deux compartiments comme indiqué en figure 2.1. La situation d'équilibre thermodynamique est en effet que le gaz remplisse uniformément les deux cellules. C'est la *détente de Joule-Gay-Lussac*. Est-il possible de réaliser la transformation inverse sans exercer de travail depuis l'extérieur ? Oui, mais pas à l'échelle macroscopique.

Imaginons qu'on engage un *démon*, un être qui est capable de n'ouvrir la porte que pour laisser passer les particules que de la cellule de droite vers la cellule de gauche. Une fois un certain temps passé, toutes les particules de gaz se retrouvent dans la cellule de gauche comme indiqué en figure 2.2. On se retrouve donc avec la même situation qu'on avait initialement. Le démon

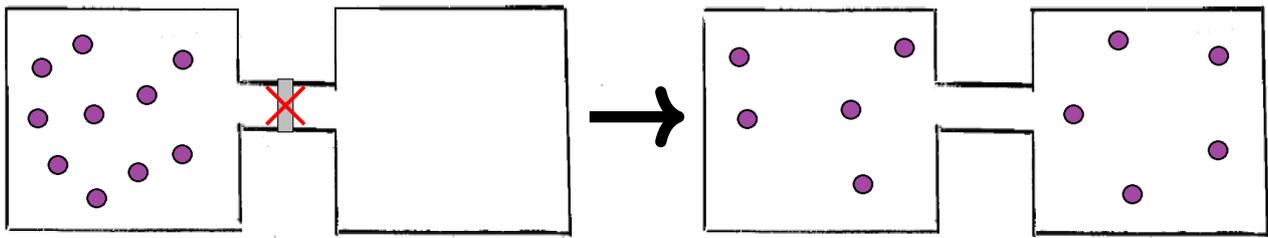


FIGURE 2.1 – Détente de Joule-Gay-Lussac à dix particules. Lorsqu'on ouvre la porte, les particules vont spontanément se répartir uniformément entre les deux cellules.

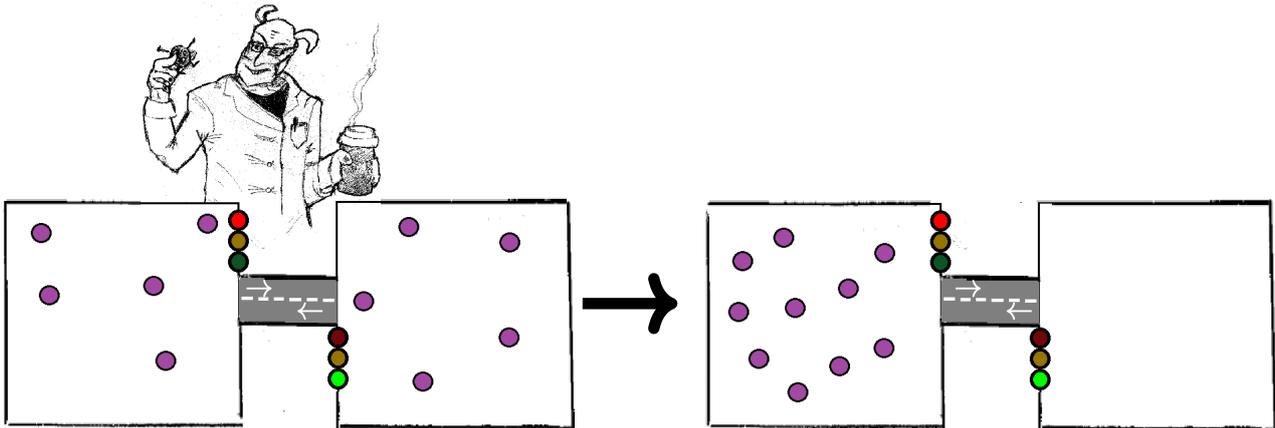


FIGURE 2.2 – Un démon de Maxwell vu comme un agent de circulation. Le démon empêche les particules de gauche d'aller à droite. Les particules de droite peuvent toujours traverser. Au bout d'un moment, toutes les particules sont passées à gauche. A noter : les particules roulent à gauche.

de Maxwell dans notre cas est donc un agent de circulation qui ne laisse aller les particules que de la droite vers la gauche. Le protocole minimal que le démon doit suivre est le suivant :

D'abord, Quand une particule de la cellule de droite se présente devant la porte, le démon mesure sa vitesse. Il cherche à savoir si la particule va venir frapper la porte.

Le démon agit en fonction de la mesure :

Si la particule va frapper la porte, le démon ouvre la porte pour que la particule traverse depuis la droite vers la gauche puis referme la porte après le passage de la particule.

Sinon, le démon garde la porte fermée.

Le démon attend alors l'arrivée devant la porte d'une nouvelle particule de la cellule de droite. et recommence cette boucle.

Dans cette thèse, on définit un *démon de Maxwell* comme un *dispositif qui réalise une mesure à l'échelle microscopique puis rétroagit sur le système de manière à briser la symétrie des fluctuations.*

Le démon de Maxwell a été longtemps une expérience de pensée. Des débats ont eu lieu pour établir s'il constituait une violation du second principe de la thermodynamique. En effet, une

fois les particules retournées dans la cellule de gauche, on peut reproduire la détente et recommencer ce processus de manière cyclique. On peut alors utiliser ces détente pour extraire du travail de ce qui semble être un seule source de chaleur.

Aujourd'hui, le paradoxe apparent a été levé par les travaux de Smolukovski, Brillouin [6], Landauer [27], Bennett [5]. L'argument le plus simple pour lever ce paradoxe est de considérer que le démon possède une température qui doit être maintenue constante par une seconde source de chaleur. Une expérience de Démon de Maxwell est en réalité une machine thermique ditherme. Qu'elle permette l'extraction de travail ne viole donc pas le second principe de la thermodynamique. Depuis une cinquantaine d'années, il est devenu possible de réaliser des mesures à l'échelle microscopique. La question qu'on se pose alors est : comment fabriquer un tel être ?

2.2 Expériences de démons de Maxwell

Le premier exemple d'apparente violation du second principe sont les êtres vivants qui sont capables de maintenir leurs constituants dans un état très ordonné. On peut voir les êtres vivants comme des machines thermodynamiques qui se maintiennent hors de l'équilibre thermodynamique. En effet, pendant que j'écris ce paragraphe, mon corps se maintient à une température interne de 37°C alors que le milieu extérieur est aux alentours de 20°C. Ceci lui coûte un travail issu de la transformation de l'énergie chimique issue de mon alimentation.

De plus, Les organismes vivants fonctionnent avec des mécanismes similaires aux démons de Maxwell [48]. Les animaux ou végétaux possèdent des cellules eucaryotes. Ceci signifie que dans chaque cellule l'information génétique, portée par des molécules d'ADN (pour *acide désoxyribonucléique*) est enfermée dans un compartiment appelé le Noyau. Ce dernier est séparé par une membrane du reste de la cellule et en particulier du cytoplasme de la cellule où cette information est utilisée pour fabriquer des protéines. Tout d'abord une portion d'ADN est transcrite en ARN (pour *acide ribonucléique*) au sein du noyau. L'ARN est une molécule simple brin d'une longueur totale pouvant atteindre quelques centimètres. Pour sortir du noyau, elle passe par le pore nucléaire, un grand complexe moléculaire de quelques nanomètres de diamètre. La traversée du pore aurait un très faible rendement si l'ARN y effectuait une marche aléatoire thermique non biaisée. Le rendement du port nucléaire est en réalité plus élevé [36][49]. Certains le qualifient de *translocation ratchet* [42] : le pore nucléaire rend en effet plus probable pour un ARN déjà engagé dans le pore d'avancer vers le cytoplasme que de reculer vers le noyau ce qui améliore son rendement. C'est là un mécanisme de démon de Maxwell. Ce n'est ici qu'un exemple parmi tant d'autres de démons de Maxwell dans le monde vivant. On pense également à la marche orientée de la kinésine sur les microtubules [4]. D'autres exemples encore sont à chercher du côté des machines moléculaires [4][21][44]. La référence [39] propose une vue d'ensemble du sujet. De nos jours, les nanotechnologies permettent l'étude et le développement de telles machines moléculaires. Dans sa thèse, Bastien Molcrette réalise un pore artificiel comparable capable de translocater des molécules l'ADN [37]. On citera également la rotoxane [46] qui est très prometteuse. De manière générale, j'espère que ma thèse permettra de mieux comprendre le fonctionnement thermodynamique de quelques uns de ces objets passionnants qui permettent le fonctionnement des organismes vivants.

Une seconde illustration expérimentale des démons de Maxwell concerne la manipulation de colloïdes microscopiques. Ce type d'expériences est permis par l'évolution des techniques d'observation et de manipulation [32]. De nos jours, les pinces optiques permettent en effet de

réaliser des démons de Maxwell optiques [17][51]. En particulier, cette technologie a permis de réaliser des machines de Szilard [50] permettant de tester expérimentalement le *principe de Landauer*. Ce théorème, dont on reparlera plus en détail au chapitre 11 indique qu'il y a un coût énergétique intrinsèque à la réalisation d'une mesure [27]. Deux bons articles résument ces concepts sur openscience [2][3].

Une troisième illustration du principe des démons de Maxwell, macroscopique cette fois-ci, sont les démons de Maxwell mécaniques qui fonctionnent avec des roues crantées asymétriques [35], que ce soit dans le milieu de l'horlogerie [52] où certaines montres mécaniques sont capables de se remonter grâce aux mouvements aléatoires du porteur pendant sa journée ou bien dans des expériences où la roue asymétrique est mise en rotation par le mouvement aléatoire de bactéries [13]. On compte aussi de nombreux travaux [11] et quelques réalisations expérimentales [20] où la particule brownienne est remplacée par une pale baignant dans un gaz granulaire. C'est dans la continuité de ce riche historique [40] et quelques idées de la communauté [33] que se situe cette thèse.

Dans cette thèse

But the sad truth is that the truth is sad, and that what you want does not matter. A series of unfortunate events can happen to anyone, no matter what they want.

Lemony Snicket, *The Carnivorous Carnival*

Cette thèse se décompose en cinq parties globalement indépendantes les unes des autres.

En partie I, on présente le dispositif expérimental permettant de réaliser notre particule brownienne dans un gaz granulaire et on présente sur ce système quelques résultats antérieurs à cette thèse qui nous seront utiles par la suite

En partie II, on présente quelques résultats expérimentaux obtenus pendant cette thèse. Ces résultats sont relatifs à la caractérisation du mouvement d'une pale dans un gaz granulaire stationnaire en tant que particule brownienne. Ils sont préliminaires à la fabrication de machines thermiques.

En partie III, on présente trois différentes réalisations expérimentales de démons de Maxwell électromécaniques macroscopiques. Au chapitre 9 on présente un démon de Maxwell purement dissipatif. Dans le chapitre 10, on présente un démon capable de charger indéfiniment un condensateur à partir des fluctuations. Enfin, en chapitre 11, on réalise une machine de Szilard macroscopique. La machine de Szilard est un exemple emblématique de démon de Maxwell.

En partie IV, on présente trois réalisations expérimentales différentes de machines thermiques électromécaniques macroscopiques. Au chapitre 12 on réinterprète le démon de Maxwell comme une machine thermique. Dans le chapitre 13, on fabrique un réfrigérateur aléatoire. Enfin, en chapitre 14, on propose d'utiliser un démon de Maxwell pour construire une machine thermique hybride.

Je conseille de commencer la lecture par les parties I et II mais les grandes parties sont globalement indépendantes. Je conseille vivement de lire le chapitre 11 avant le chapitre 12 car ils ne sont pas indépendants.

Partie II

Introduction spécifique

Chapitre 3

Construire un gaz granulaire

I suppose I'll have to add the force of gravity to my list of enemies.

Lemony Snicket, *The Penultimate Peril*

Dans cette partie, on présente la partie mécanique commune à toutes nos expériences : une pale plongée dans un gaz granulaire.

3.1 Comment on prépare le gaz granulaire

Le gaz granulaire est constitué de quelques centaines de billes enfermées dans un récipient cylindrique et accélérées verticalement par un vibreur. Cet ensemble de billes peut être assimilé à un gaz granulaire stationnaire hors équilibre. Dans ce dernier, on plonge une pale rectangulaire plus grande que les billes qui tiendra lieu de particule brownienne plongée dans ce gaz. Un schéma ainsi qu'une photographie de l'expérience sont présentés en figure 3.1.

Les billes sont en acier inoxydable. Elles mesurent 3 mm de diamètre et pèsent chacune 0.1 g. Elles sont mises en mouvement par un vibreur électromagnétique (B&K 4809) qui fournit une accélération sinusoïdale au récipient. Cette dernière est contrôlée par un générateur de tension sinusoïdale à 40 Hz dont on choisit l'amplitude. Un étage d'amplification en courant est nécessaire. Il est assuré par un amplificateur série BOP 400 W KEPCO. La cellule, le récipient dans lequel les billes sont confinées, est un cylindre creux en verre de 5 cm de diamètre et de hauteur environs 6 cm. La pale elle-même est également faite d'acier inoxydable. Elle mesure $2.0 \times 2.0 \times 0.4 \text{ cm}^3$ et est suspendue au couvercle du cylindre. Elle est libre de tourner autour de l'axe de révolution du cylindre qui coïncide avec un de ses axes propres.

L'état du gaz granulaire est donc fixé par deux paramètres. D'abord le nombre des billes N et l'altitude h du couvercle fixent la densité du gaz granulaire. Ensuite, il y a l'énergie typique des billes qui viennent choquer la pale qui correspond à la "température effective" du gaz granulaire. Cependant, dans cette thèse, on ne s'intéresse pas au gaz granulaire en tant que système physique complexe : on va simplement s'en servir comme source d'énergie et de force aléatoire.

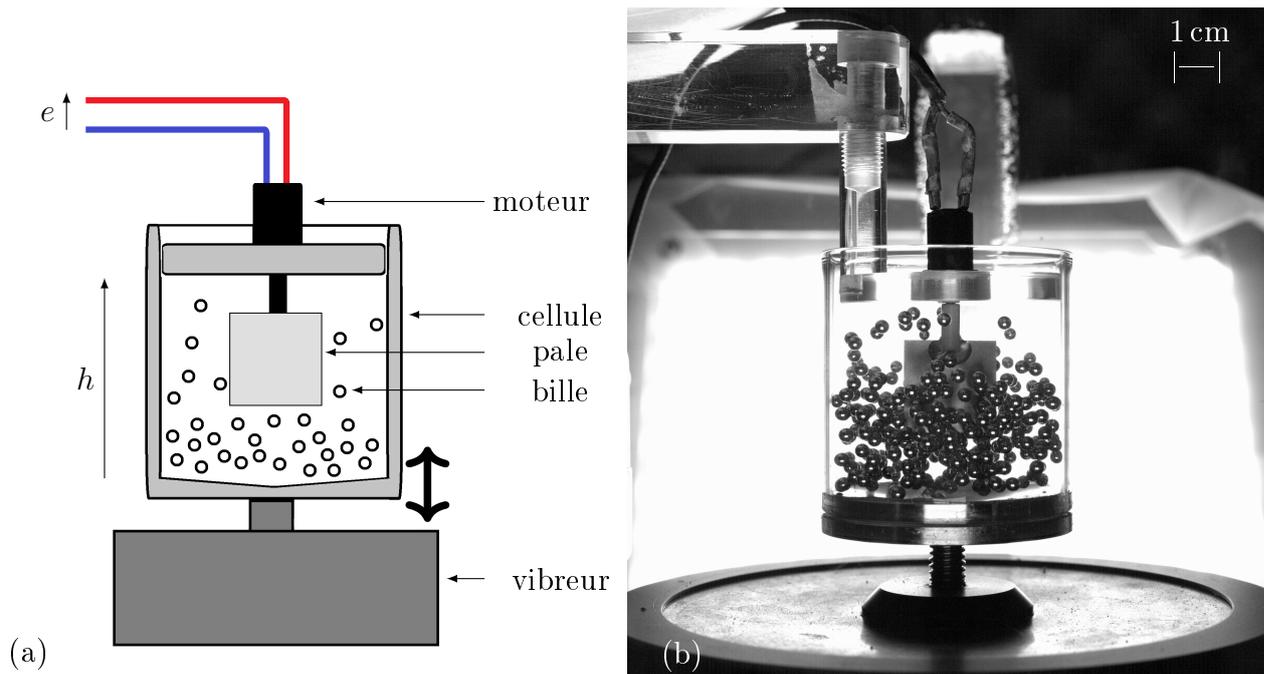


FIGURE 3.1 – Le gaz granulaire. (a) : schéma de la partie mécanique de l'expérience. (b) photographie de la partie mécanique de l'expérience en fonctionnement. Image prise par Marc Lagoin et Audrey Steinberger en collaboration avec Vincent Moncorgé. Temps d'exposition : $300 \mu\text{s}$.

3.2 Comment on sonde le gaz granulaire

On plonge une pale libre de tourner autour d'un axe vertical dans le gaz granulaire. Elle subit alors des chocs aléatoires dont les statistiques dépendent des propriétés du gaz granulaires et se met à tourner de manière aléatoire. Elle fait donc office de particule brownienne plongée dans un réservoir.

Pour pouvoir sonder le mouvement de la pale, on ajoute sur son axe un petit moteur à courant continu (Maxon RE10 118391). Le système {pale+moteur} a donc un moment d'inertie total $J = 3.9 \cdot 10^{-8} \text{ kg m}^2$. Si la pale tourne à une vitesse $\dot{\theta}$, le moteur tourne également à cette vitesse. Une différence de potentiel proportionnelle à la vitesse apparaît alors entre les deux bornes du moteur. C'est l'induction de Lenz-Faraday. En effet, on peut modéliser le moteur à courant continu comme un aimant permanent tournant à la vitesse θ dans un cadre conducteur \mathbf{C} fixe de surface orientée \mathbf{S} . L'aimant produit le champ magnétique constant \mathbf{B} mais le flux magnétique Φ_{LF} à travers le cadre fixe varie au cours du temps. Voir la figure 3.2 pour les notations précises.

L'équation de Maxwell-Faraday (\mathcal{MF}) relie les variations de champ magnétique au champ électrique \mathbf{E} et nous donne alors l'évolution du flux. Si on note $d\mathbf{S}$ l'élément de surface orienté et $d\mathbf{l}$ l'élément de contour orienté :

$$d_t \Phi_{LF}(t) \equiv \iint_{\mathbf{S}} d_t \mathbf{B} d\mathbf{S} \stackrel{(\mathcal{MF})}{=} - \iint_{\mathbf{S}} \text{rot}(\mathbf{E}) d\mathbf{S} \stackrel{(\mathcal{GS})}{=} \int_{\mathbf{C}} \mathbf{E} d\mathbf{l} \equiv e(t) \quad (3.1)$$

où (\mathcal{GS}) correspond au théorème de Green-Stokes sur la surface \mathbf{S} s'appuyant sur le contour \mathbf{C} . Dans notre exemple, $d_t \Phi_{LF}(t) \propto \dot{\theta} \sin(\theta(t))$ mais dans les moteurs réels le cadre est plus

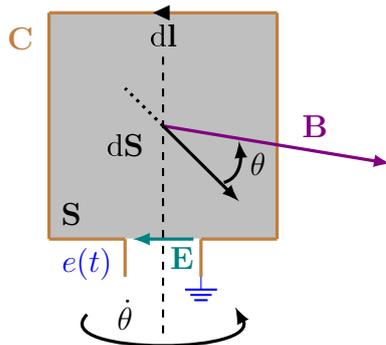


FIGURE 3.2 – Modèle électro-mécanique très simplifié d'un moteur à courant continu.

complexe et optimisé afin d'assurer la proportionnalité. On a alors :

$$e = \alpha \dot{\theta} \quad (3.2)$$

α est une constante qui dépend de la conception du moteur. En particulier, elle dépend du moment de l'aimant permanent, du nombre de spires, *etc.* Pour le confirmer expérimentalement, on force le moteur à tourner à vitesse constante $\dot{\theta}$ que l'on mesure à l'aide d'une fourche optique. Pendant ce temps, on mesure la tension induite e entre les bornes de ce dernier à l'aide d'un voltmètre. L'évolution de $\langle e \rangle$ en fonction de $\langle \dot{\theta} \rangle$ est présentée en figure 3.3.

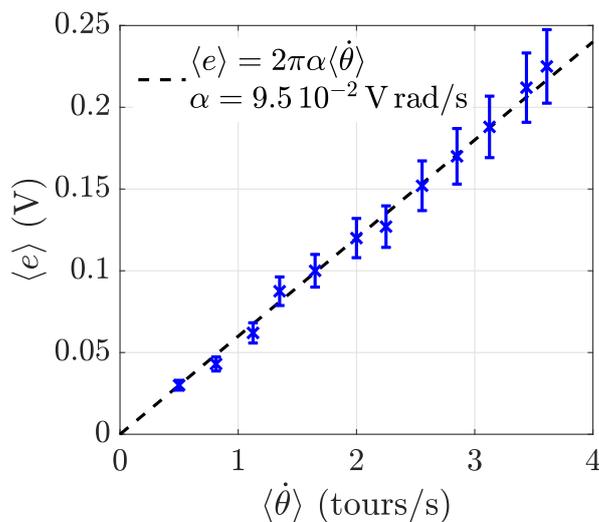


FIGURE 3.3 – Tension moyenne induite quand la rotation moyenne du moteur est forcée. La ligne pointillée noire correspond au modèle $e = \alpha \dot{\theta}$ où α correspond à la valeur constructeur $\alpha = 9.5 \cdot 10^{-2} \text{ V rad/s}$.

On suppose que cette relation est également vraie pour des valeurs instantanées. Ainsi, une mesure de e suffit pour connaître la vitesse de la pale. C'est la façon dont on va en pratique réaliser toutes les mesures de vitesse et d'angle sur la pale.

Électriquement, le moteur se comporte comme une source de tension e . Il possède également une résistance interne $r \approx 115 \Omega$ qui rend compte des pertes résistives dans les bobinages de cuivre du moteur. Enfin, il possède également une inductance $L = 0.92 \text{ mH}$ (valeur constructeur) dont l'influence peut être négligée car tous les temps de la dynamique sont très grands devant le temps $L/R \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Dans la suite, on représentera donc le moteur à courant

continu associé à la pale comme un générateur de Thévenin, c'est à dire une source idéale de tension $e(t) = \alpha \dot{\theta}(t)$ en série avec une résistance interne $r \approx 115 \Omega$ comme en figure 3.4.

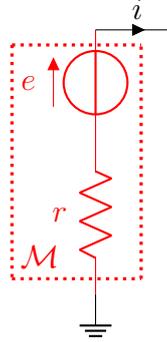


FIGURE 3.4 – Modèle électrique très simplifié d'un moteur à courant continu.

Enfin, l'utilisation d'un moteur à courant continu a également un autre intérêt : la loi de Laplace qui va nous permettre de forcer le moteur en lui imposant un courant.

3.3 Comment perturber le gaz granulaire

Si un courant i parcourt le moteur, un couple induit Γ_{retro} proportionnel au courant apparaît. C'est la loi de Laplace. On peut la démontrer à partir de l'équation de Maxwell-Ampère (\mathcal{MA}) ou de manière plus simple par une approche énergétique. L'idée est que si on lance le moteur à une vitesse initiale $\dot{\theta}_I$, il a une énergie cinétique initiale $E_I = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_I^2$. Maintenant, on branche le moteur sur une résistance r . Au bout d'un certain temps, toute l'énergie cinétique aura été dissipée par la résistance. Donc :

$$E_I - 0 = \int e(t) i(t) dt \stackrel{(3.2)}{=} \int \alpha \dot{\theta}(t) i(t) dt = \int r i^2(t) dt \quad (3.3)$$

Mais cette quantité doit aussi être égale à l'intégrale de la puissance mécanique perdue par le travail de la force induite :

$$E_I - 0 = - \int \dot{\theta}(t) \Gamma_{\text{retro}}(t) dt \quad (3.4)$$

donc on en déduit que, quand un courant i parcourt le moteur, il induit un couple résistant au mouvement :

$$\Gamma_{\text{retro}} = -\alpha i \quad (3.5)$$

Il est important de remarquer que le coefficient α dans cette équation est le même que dans l'équation (3.2) pour des raisons de symétrie. En effet, l'énergie mécanique perdue par la pale à cause du travail du couple induit est égale à l'énergie fournie au circuit électrique :

$$\dot{\theta}(t) \Gamma_{\text{retro}}(t) = -e(t) i(t) \quad (3.6)$$

3.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons vu comment réaliser expérimentalement un gaz granulaire. Une pale plongée dans un tel bain se comporte comme une particule brownienne. De plus, nous avons montré comment on peut utiliser un moteur à courant continu à la fois pour mesurer la vitesse de la pale, mais aussi comment ce moteur nous permet de rétroagir sur le mouvement de cette dernière. Le coefficient de proportionnalité α est le même dans les deux relations.

* * *

Nous allons poursuivre en donnant quelques résultats précédant cette thèse qui caractérisent le gaz granulaire et le mouvement de la pale dans celui-ci.

Chapitre 4

Propriétés historiques des gaz granulaires

If she were a spice, she'd be flour

Louise belcher, *Bob's Burgers*, Fox Broadcasting Company

Dans ce chapitre, on présente les quelques résultats antérieurs à cette thèse qui sont néanmoins importants pour la comprendre.

4.1 Propriétés dynamiques et densité de probabilité

Lorsque l'on plonge la pale dans le gaz granulaire, sa vitesse $\dot{\theta}(t)$ est un processus aléatoire. Il est donc décrit par deux quantités *a priori* indépendantes. D'un côté, il est décrit au sein d'une même réalisation par sa corrélation temporelle, et d'un autre côté par la densité de probabilité de ses valeurs si on réalise plusieurs réalisations.

D'une part, pour caractériser la corrélation temporelle qui décrit la dynamique de la pale au cours d'une même réalisation, on définit la fonction d'autocorrélation de la vitesse $\mathfrak{C}(t, \tau)$ à chaque instant t par :

$$\mathfrak{C}(t, \tau) \equiv \overline{\dot{\theta}(t)\dot{\theta}(t+\tau)} \quad (4.1)$$

où $\overline{\quad}$ désigne la moyenne temporelle.

D'autre part, si l'on reproduit l'expérience, N fois, on va obtenir N réalisations différentes du processus $\dot{\theta}(t)$. On note $\dot{\theta}_n(t)$ chacune de ces réalisations ($n = 1, 2, \dots, N$). Les valeurs prises à un même instant par ces réalisations sont *a priori* indépendantes mais elles partagent une distribution de probabilité $P(\dot{\theta}, t)$ commune. On estimera cette distribution de probabilité par l'histogramme des valeurs des réalisations $\dot{\theta}_n(t)$ à l'instant t . On note $\langle \quad \rangle$ la moyenne sur les réalisations.

En pratique, on n'a pas accès à ces valeurs théoriques. On a donc recours à des estimateurs. On estime la moyenne temporelle d'un signal $\dot{\theta}_1$ de longueur T par :

$$\overline{\dot{\theta}_1} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_1(t) dt \quad (4.2)$$

et on estime la moyenne sur les réalisations de $\dot{\theta}(t)$ par :

$$\langle \dot{\theta}(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \dot{\theta}_n(t) \quad (4.3)$$

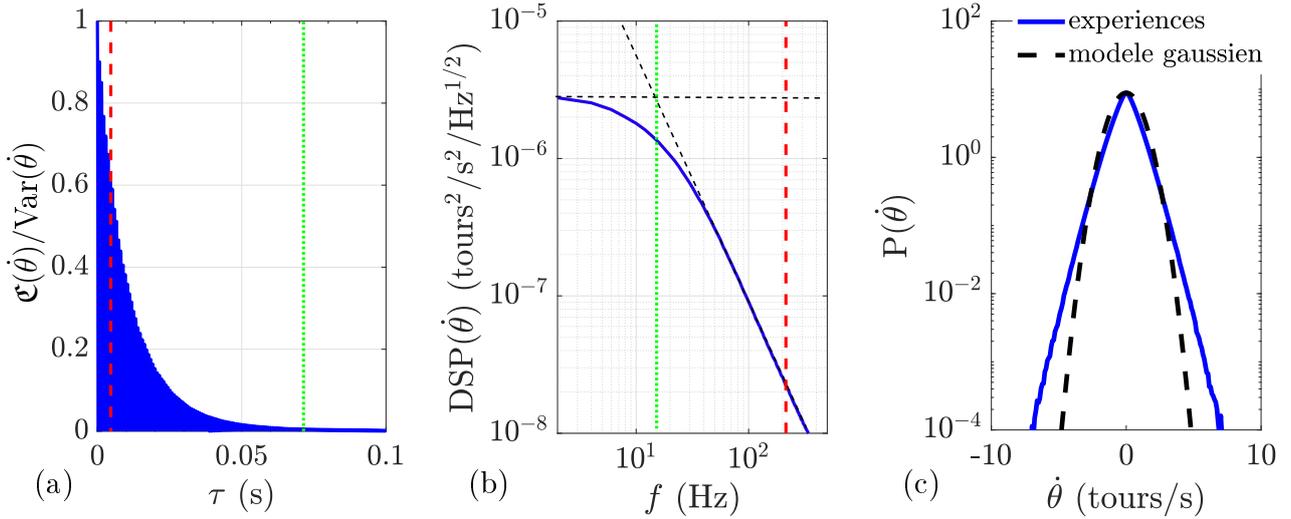


FIGURE 4.1 – Propriétés du gaz granulaire (a) : auto-corrélation de la vitesse de la pale plongée gaz granulaire. (b) : densité spectrale de puissance (DSP) de la vitesse de la pale. La ligne pointillée rouge correspond au temps $\tau = \int \mathfrak{C}(\dot{\theta})/\text{Var}(\dot{\theta})d\tau$. La ligne pointillée verte correspond au temps de changement de régime de la DSP. (c) : Histogramme des fluctuations de vitesse de la pale pour deux heures d’acquisition à 16 384 Hz. En ligne pointillée noire, une gaussienne ayant la même moyenne et la même variance.

On supposera par la suite que $\dot{\theta}(t)$ est un processus aléatoire stationnaire. Ceci signifie que ni sa fonction d’autocorrélation ni sa moyenne sur les réalisations ne dépendent du temps. De plus, on suppose que ce processus est pseudo-ergodique. Ceci signifie que $\dot{\theta}$ parcourt suffisamment l’ensemble de ses valeurs au cours du temps pour que ses moyennes temporelles soient égales à sa moyenne d’ensemble :

$$\forall n, \forall t \quad \langle \dot{\theta}(t) \rangle \equiv \overline{\dot{\theta}_n(t)} \equiv \langle \dot{\theta} \rangle \quad (4.4)$$

La figure 4.1 montre une estimation de $\mathfrak{C}(t, \tau)$. Pour un signal stationnaire, cette quantité ne dépend que du décalage τ .

De plus ce processus étant pseudo-ergodique et stationnaire, on estimera sa distribution de probabilité $P(\dot{\theta})$ par l’histogramme d’une réalisation $\dot{\theta}_n(t)$. Une estimation de cette quantité est proposée en figure 4.1. L’histogramme est proche d’une gaussienne, sauf au voisinage de zéro où les frottements solides dans le moteur ne sont pas négligeables.

4.1.1 Probabilité des fluctuations de vitesse de la pale

On dispose d’un modèle pour la forme des histogrammes. Ce dernier considère que les chocs entre la pale et les billes sont suffisamment espacés pour que le mouvement de cette dernière soit totalement amorti entre deux chocs successifs. Puis on estime la densité de probabilité par histogramme temporel sur une réalisation. Puisque la vitesse décroît de manière exponentielle entre les chocs, la pale a une probabilité exponentielle d’être dans la tranche de vitesse $\dot{\theta}$ et $\dot{\theta} + d\dot{\theta}$. Un modèle est proposé dans la référence [8] :

$$P(\dot{\theta}) = \frac{\tau^*}{\tau^\zeta} \frac{1}{|\dot{\theta}|} \frac{\int_{\dot{\theta}}^{+\infty} \dot{\theta}_0^2 \exp \left[-(\dot{\theta}_0/\dot{\theta}_c)^\mu \right] d\dot{\theta}_0}{\int_0^{+\infty} \dot{\theta}_0^2 \exp \left[-(\dot{\theta}_0/\dot{\theta}_c)^\mu \right] d\dot{\theta}_0} \quad (4.5)$$

où τ^ζ est le temps typique entre deux chocs sur la pale, τ^* est le temps d'amortissement visqueux dû aux frottements entre chocs. $\dot{\theta}_c$ est la vitesse initiale résultant d'un choc sur la pale à l'arrêt. μ est un exposant dont la valeur est estimée à 1.45 à partir des distributions de probabilité expérimentales.

4.1.2 Dynamique des fluctuations de vitesse de la pale

On considère une pale de module d'inertie J tournant à la vitesse $\dot{\theta}$ autour d'un axe \mathbf{z} dans le référentiel du laboratoire. Elle est heurtée par une particule de masse m se déplaçant à la vitesse v avec une incidence ϕ par rapport à la normale à la pale. Ce faisant, elle exerce un couple Γ avec un bras de levier l sur la pale :

$$\Gamma = -2mv_0 \cos(\phi) \mathbf{z} = -2m(v - l\dot{\theta}) \cos(\phi) \mathbf{z} \quad (4.6)$$

$v_0 = (v - l\dot{\theta})$ est la vitesse de la bille dans le référentiel propre à la pale. L'équation du mouvement de la pale est alors :

$$Jd_t\dot{\theta} = -2ml \cos(\phi) \dot{\theta} - 2m \cos(\phi) v \quad (4.7)$$

On reconnaît un terme de forçage aléatoire et un terme d'amortissement visqueux linéaire. Dans sa thèse, Jean-Yonnel Chastaing [8][9] montre expérimentalement que dans le cas d'un gaz granulaire, la dynamique de la pale peut être assimilée à un mouvement brownien. C'est à dire le mouvement aléatoire d'une particule colloïdale dans un solvant. Ce résultat était prédit par des simulations numériques dans [11]. On suppose que la dynamique de la pale est régie par une équation de Langevin :

$$Jd_t\dot{\theta}(t) = -\gamma \dot{\theta}(t) + \Gamma_{\text{rand}}(t) \quad \text{avec : } \langle \Gamma_{\text{rand}}(t) \Gamma_{\text{rand}}(t') \rangle \propto \delta(t - t') \quad (4.8)$$

où Γ_{rand} désigne le couple aléatoire exercée par les chocs des grains sur la pale.

4.2 Comment définir la température granulaire

Dans l'article, [38], Antoine Naert montre à partir de [16] comment on peut définir une grandeur intensive homogène à une énergie à partir de l'asymétrie des échanges avec un réservoir. Cette quantité est une proposition pour définir la température dans un système stationnaire hors équilibre à partir du théorème de fluctuation.

Dans sa thèse, Jean-Yonnel Chastaing [8][9] développe sur la façon de définir cette quantité à partir de la fonction de réponse du système en appliquant un théorème fluctuation dissipation [9].

Dans la présente thèse, en chapitre 5, on propose une nouvelle méthode reprenant le théorème de fluctuation de [38] pour mesurer cette température kT puis on discute de l'intérêt de cette quantité.

Si l'on reproduit le système précédant pour avoir deux gaz granulaires dans chacun desquels plonge une pale associée à un moteur à courant continu, on obtient deux sources de tensions aléatoires e_1 et e_2 . On peut les faire échanger de l'énergie sous forme de courant électrique au

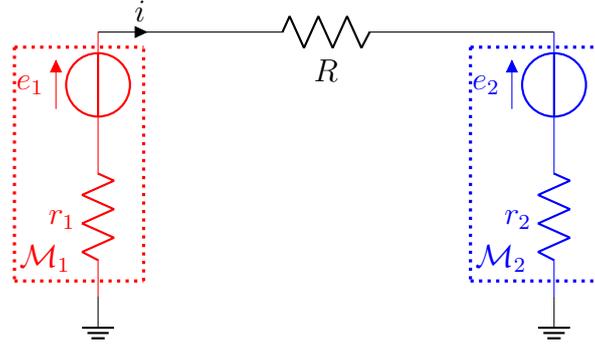


FIGURE 4.2 – Montage pour le couplage de deux particules browniennes macroscopiques.

travers d'une résistance. Le schéma est représenté en figure 4.2

Dans [8][26][38], le flux d'énergie d'un système à l'autre $\Phi = e_1 i - e_2 i$ est estimé par :

$$\Phi = \frac{e_1^2 - e_2^2}{r_1 + r_2 + R} \quad (4.9)$$

Si $\langle e_1 \rangle = 0$ et $\langle e_2 \rangle = 0$, alors le flux moyen entre les deux bains est :

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{r_1 + r_2 + R} (\text{Var}(e_1) - \text{Var}(e_2)) \quad (4.10)$$

Si les pales ont les mêmes modules d'inertie J , et si les moteurs ont les mêmes coefficients α , alors l'énergie cinétique de chaque moteur est :

$$E_c^{(1)} = \frac{J}{2\alpha^2} \text{Var}(e_1) \quad E_c^{(2)} = \frac{J}{2\alpha^2} \text{Var}(e_2) \quad (4.11)$$

Donc le flux moyen est proportionnel à la différence d'énergie cinétique entre les deux pales :

$$\langle \Phi \rangle = \frac{2\alpha^2}{J(r_1 + r_2 + R)} (E_c^{(1)} - E_c^{(2)}) \quad (4.12)$$

Il semble donc que l'énergie cinétique des pales est ce qui oriente le flux d'énergie d'un réservoir à l'autre et que $\text{Var}(e)$ est un candidat pertinent pour une mesure de la température.

4.3 Conclusion

Comme nous venons de le voir, on peut définir une température à partir des fluctuations de la pale. Le gaz granulaire se comporte donc comme une source de chaleur pour la pale. Cette dernière se comporte comme une particule brownienne en contact avec un thermostat. Nous allons donc pouvoir nous servir de ce type de particules macroscopiques pour fabriquer des démons de Maxwell et des machines thermiques.

* * *

Cependant, avant de passer à ces études à proprement parler, il nous reste à présenter quelques résultats préliminaires sur le comportement du gaz granulaire et de la pale quand on agit sur celle-ci.

Chapitre 5

Mesure de la température granulaire

To believe in an ideal, is to be willing to betray it. It is something no Sith or Jedi has ever truly learned.

Kreia, *KOTOR II TSL*, Obsidian Entertainment

Dans ce chapitre, on présente une façon de mesurer la température granulaire améliorée par rapport à celles présentées dans [9]. En perturbant le système à différentes amplitudes, on va estimer la valeur de la température effective quand le système n'est pas perturbé. Pour définir la température, on s'inspire du théorème de fluctuation 1.3.2 qui relie les probabilités de donner ou recevoir de la puissance à la différence des températures entre deux thermostats.

5.1 Principe

Pour réaliser cette mesure, nous allons utiliser la pale pour brasser le gaz granulaire à une fréquence faible tout en mesurant les fluctuations de puissance échangée entre la pale et le gaz granulaire. Pour cela, il suffit d'imposer un courant dans le moteur (donc un couple $-\alpha i(t)$). On souhaite ne pas briser la symétrie des forces agissant sur la pale. On choisit donc un couple oscillant à basse fréquence. Le schéma de cette expérience est présenté en figure 5.1.

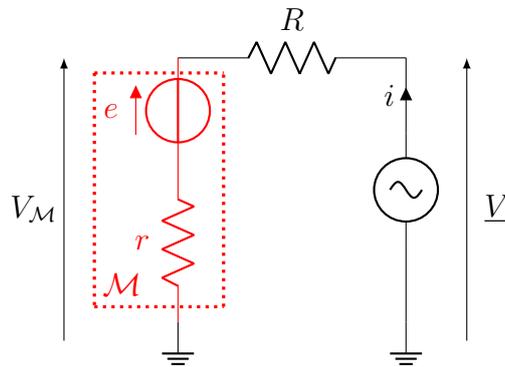


FIGURE 5.1 – Schéma électrique permettant la mesure de la température granulaire. Le courant i est sinusoïdal d'amplitude \underline{i} et de fréquence $f = 7 \text{ Hz}$: $i(t) = \underline{i} \sin(2\pi ft)$.

Le cadre \mathcal{M} représente le moteur à courant continu associé à la pale baignant dans le gaz granulaire dont on souhaite déterminer la température. Le générateur impose un courant sinusoïdal d'amplitude \underline{i} à la fréquence 3 Hz, petite devant le temps d'amortissement de la

dynamique de la pale. On mesure les tensions V_M et \underline{V} à l'aide d'une carte d'acquisition 32 bits à une fréquence d'échantillonnage de 16384 Hz. Ces deux mesures permettent grâce à la résistance R de remonter à la tension e induite par la vitesse de la pale, ainsi que le courant i qui traverse le moteur. On définit alors la puissance donnée par le circuit au gaz comme :

$$\mathcal{P}(t) \equiv e(t) i(t) = -\dot{\theta}(t) \alpha i \sin(2\pi ft) \quad (5.1)$$

$\mathcal{P}(t)$ est définie positive quand le circuit donne de l'énergie au gaz granulaire, et donc en moyenne $\mathcal{P}(t) > 0$. Cette quantité est définie à toutes les fréquences. On définit de même comme \mathcal{P}_τ la puissance échangée à l'échelle τ :

$$\mathcal{P}_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathcal{P}(s) ds \quad (5.2)$$

Le théorème de fluctuation quantifie l'asymétrie à l'échelle temporelle τ entre la probabilité $P(\mathcal{P}_\tau = \Phi)$ que le gaz granulaire fournisse au circuit une puissance Φ , et $P(\mathcal{P}_\tau = -\Phi)$, la probabilité qu'il reçoive cette même puissance de la part du circuit :

$$\log \left[\frac{P(\mathcal{P}_\tau = \Phi)}{P(\mathcal{P}_\tau = -\Phi)} \right] = \exp \left[\frac{\tau \Phi}{\mathcal{E}_\tau} \right] \quad (5.3)$$

La constante \mathcal{E}_τ représente l'énergie typique du gaz granulaire qui est liée à la température du gaz granulaire.

5.2 Protocole

Utiliser le théorème de fluctuation est contraignant car il demande d'estimer des densités de probabilités. Cependant, si par bonheur $\mathcal{P}_\tau(t)$ est une variable aléatoire gaussienne, elle est totalement déterminée par sa moyenne $\langle \mathcal{P}_\tau \rangle$ et par sa variance $\text{Var}(\mathcal{P}_\tau)$. On peut alors estimer \mathcal{E}_τ de façon très simple :

$$\mathcal{E}_\tau \equiv \frac{\tau \text{Var}(\mathcal{P}_\tau)}{2 \langle \mathcal{P}_\tau \rangle} \quad (5.4)$$

La convergence de ce rapport est discuté dans [1]. En pratique, si on a suffisamment de points et que la variance est définie, le théorème central limite nous assure qu'aux grands τ la distribution de \mathcal{P}_τ devient gaussienne. En figure 5.2(a), on montre l'évolution de la forme des histogrammes de \mathcal{P}_τ en fonction de τ . On remarque que si l'histogramme pour $\tau = 10^{-2}$ s n'est clairement pas une gaussienne, il s'en rapproche pour $\tau \approx 1$ s.

En figure 5.2(b), on représente l'évolution de \mathcal{E}_τ en fonction de τ . On remarque en effet que cette quantité converge pour $\tau \approx 1$ s vers une sorte de plateau. Par contre, pour $\tau > 10$ s, la valeur diminue. On attribue cet écart à une mauvaise estimation due au manque de statistiques quand τ n'est plus petite devant la durée d'acquisition. En effet, plus on moyenne sur des longues durées, moins il reste d'évènements où la puissance moyenne donnée est négative. Quand nous mesurons la valeur de ce plateau, on prendra seulement les échelles pour lesquelles le rapport $P(\mathcal{P}_\tau < 0)/P(\mathcal{P}_\tau > 0) < 1/10\,000$. On appelle τ^F l'échelle maximale sur laquelle on réalisera la mesure. On s'assure ainsi d'avoir suffisamment d'évènements négatifs.

Pour estimer à partir de quelle échelle la densité de probabilité devient gaussienne, on utilise les moments d'ordre 3 et 4 de la variable centrée réduite. Pour \mathcal{P}_τ :

$$\text{Skewness}(\mathcal{P}_\tau) \equiv \left\langle \left(\frac{\mathcal{P}_\tau - \langle \mathcal{P}_\tau \rangle}{\sqrt{\text{Var}(\mathcal{P}_\tau)}} \right)^3 \right\rangle \quad \text{Kurtosis}(\mathcal{P}_\tau) \equiv \left\langle \left(\frac{\mathcal{P}_\tau - \langle \mathcal{P}_\tau \rangle}{\sqrt{\text{Var}(\mathcal{P}_\tau)}} \right)^4 \right\rangle \quad (5.5)$$

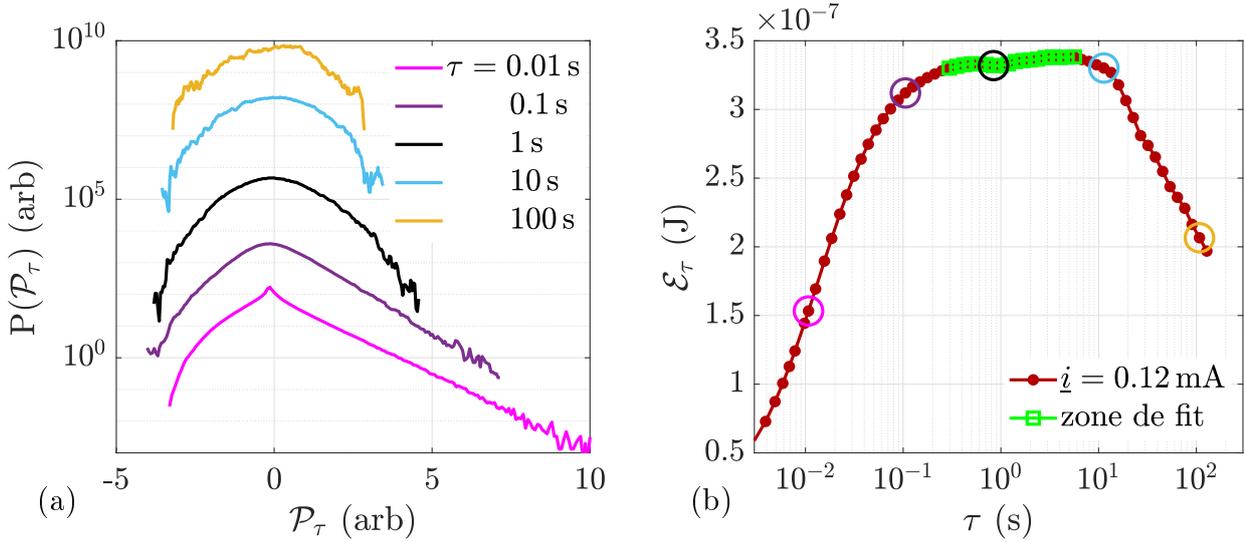


FIGURE 5.2 – Puissance échangée à l'échelle τ pour une amplitude de courant $i = 0.12$ mA. (a) : histogrammes de la puissance échangée entre le circuit et le gaz granulaire pour différentes échelles τ . Les unités sont arbitraires. (b) : Évolution de la quantité $\mathcal{E}_\tau \equiv \tau \text{Var}(\mathcal{P}_\tau) / (2\langle \mathcal{P}_\tau \rangle)$ en fonction de l'échelle τ . Les cercles colorés correspondent aux τ pour lesquelles l'histogramme correspondant est mesuré.

Si la densité de probabilité de \mathcal{P}_τ est symétrique par rapport à sa moyenne, alors $\text{Skewness}(\mathcal{P}_\tau) = 0$. Si elle est gaussienne, alors $\text{Kurtosis}(\mathcal{P}_\tau) = 3$. τ^I , la première échelle que nous considérerons est telle que $\text{Kurtosis}(\mathcal{P}_\tau) - 3 < 0.5$. On mesure ainsi \mathcal{E}_∞ la moyenne de \mathcal{E}_τ sur cet intervalle :

$$\mathcal{E}_\infty = \langle \mathcal{E}_\tau \rangle_{\tau \in [\tau^I, \tau^F]} \quad (5.6)$$

Ce critère permet de réaliser la mesure de \mathcal{E}_∞ pour différentes valeurs de i . Les différents moments pour différentes valeurs de i sont représentées en figure 5.3. On remarque que quelque soit i , la densité de probabilité se rapproche d'une gaussienne quand τ augmente. Les différentes valeurs de \mathcal{E}_τ ainsi que les valeurs de \mathcal{E}_∞ en fonction de l'amplitude du courant i sont présentées en figure 5.4.

On remarque que la valeur de \mathcal{E}_∞ dépend de l'amplitude du courant. En effet, \mathcal{E}_∞ représente une énergie typique de la pale, et on n'est pas surpris qu'elle augmente comme i^2 . On estime la température granulaire kT comme le minimum de cette parabole $\mathcal{E}_\infty(i)$:

$$\mathcal{E}_\infty(i > i_0) = \mathfrak{L} (i - i_0)^2 + kT \quad (5.7)$$

Où \mathfrak{L} est une constante positive. Le décalage i_0 correspond approximativement au courant nécessaire pour vaincre le frottement solide du moteur. Notre interprétation est que pour $i < i_0$, le courant est trop faible pour influencer de manière notable la pale. Son énergie est kT et provient principalement du gaz granulaire. Pour $i > i_0$, le courant met en mouvement la pale, ce qui ajoute une énergie $\propto (i - i_0)^2$ à l'énergie de la pale. Le modèle complet est donc :

$$\mathcal{E}_\infty(i) = kT + \begin{cases} \mathfrak{L} (i - i_0)^2 & \text{si } i > i_0 \\ 0 & \text{si } i < i_0 \end{cases} \quad (5.8)$$

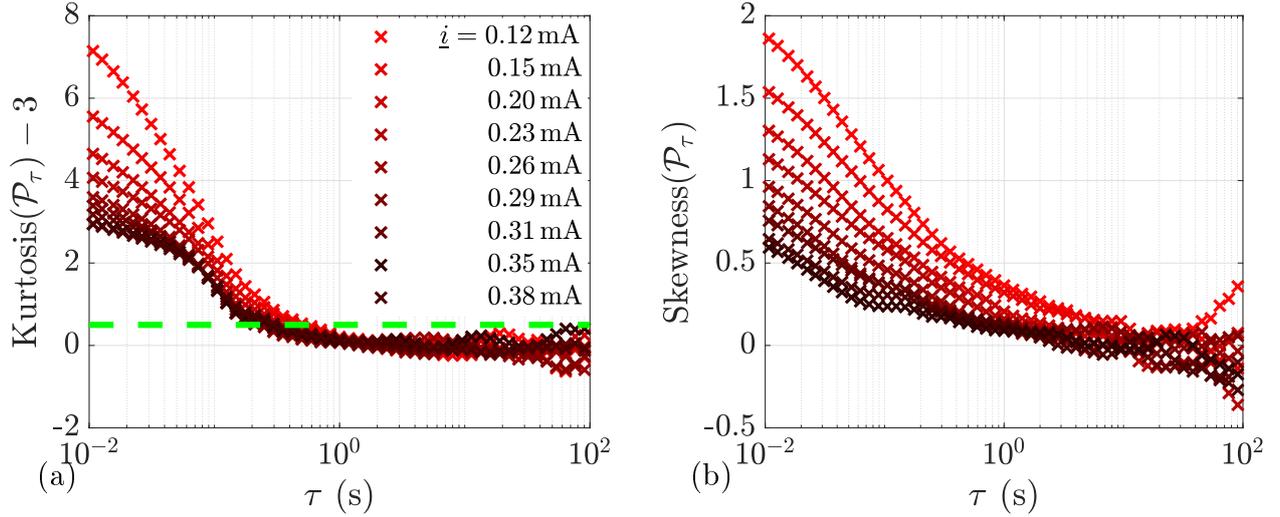


FIGURE 5.3 – Moments 3 et 4 de la puissance échangée \mathcal{P}_τ à l'échelle τ . (a) : Kurtosis de \mathcal{P}_τ en fonction de l'échelle τ . Dans le cas où \mathcal{P}_τ est gaussienne la Kurtosis vaut 3. La ligne pointillée à l'ordonnée 0.5 indique le seuil en dessous duquel on considèrera que la distribution de \mathcal{P}_τ est gaussienne. (b) : Asymétrie de \mathcal{P}_τ en fonction de l'échelle τ . Si la distribution de probabilité est symétrique, cette quantité vaut 0.

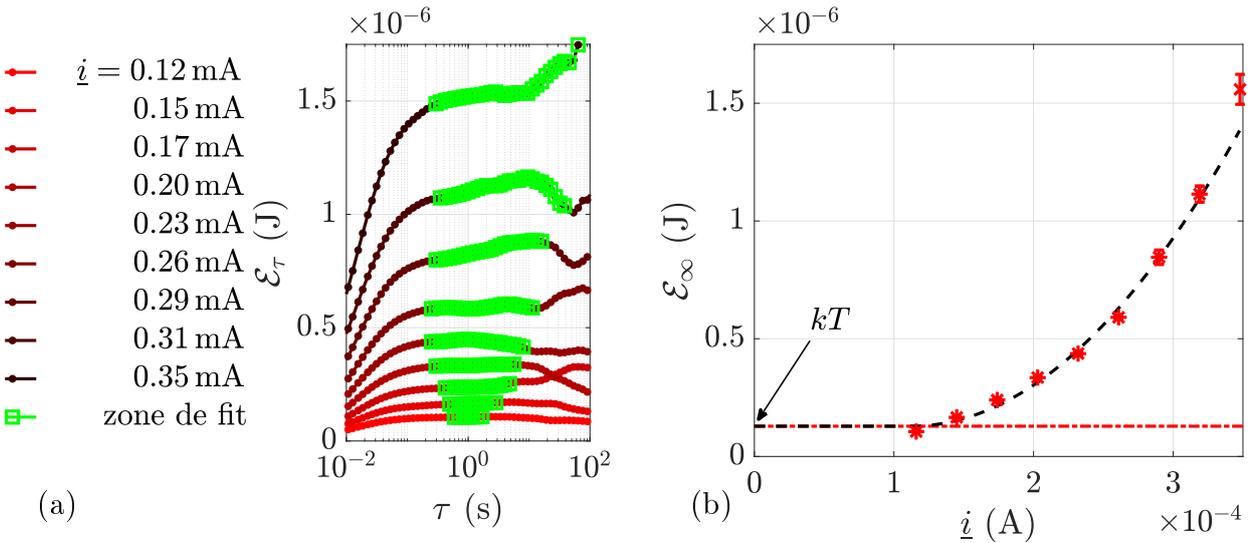


FIGURE 5.4 – (a) : Évolution de l'énergie $\mathcal{E}_\tau \equiv \tau \text{Var}(\mathcal{P}_\tau) / (2\langle \mathcal{P}_\tau \rangle)$ en fonction de l'échelle τ pour différentes amplitudes de courant d'excitation i . (b) : Évolution des valeurs \mathcal{E}_∞ plateaux de \mathcal{E}_τ en fonction de l'amplitude du courant d'excitation i . En pointillés noirs, le fit pour déterminer la valeur minimale de cette énergie, kT , pour $i = 0$.

5.3 Résultats

Maintenant qu'on est capable d'estimer cette énergie typique kT , on se demande comment elle dépend de la façon de préparer le gaz granulaire. Dans un premier temps, on fixe N , le nombre de billes ainsi que h , l'altitude de la pale. En figure 5.5, on représente kT en fonction de $\langle E_c \rangle$ l'énergie cinétique moyenne de la pale. On fait varier cette dernière en changeant l'accélération des billes.

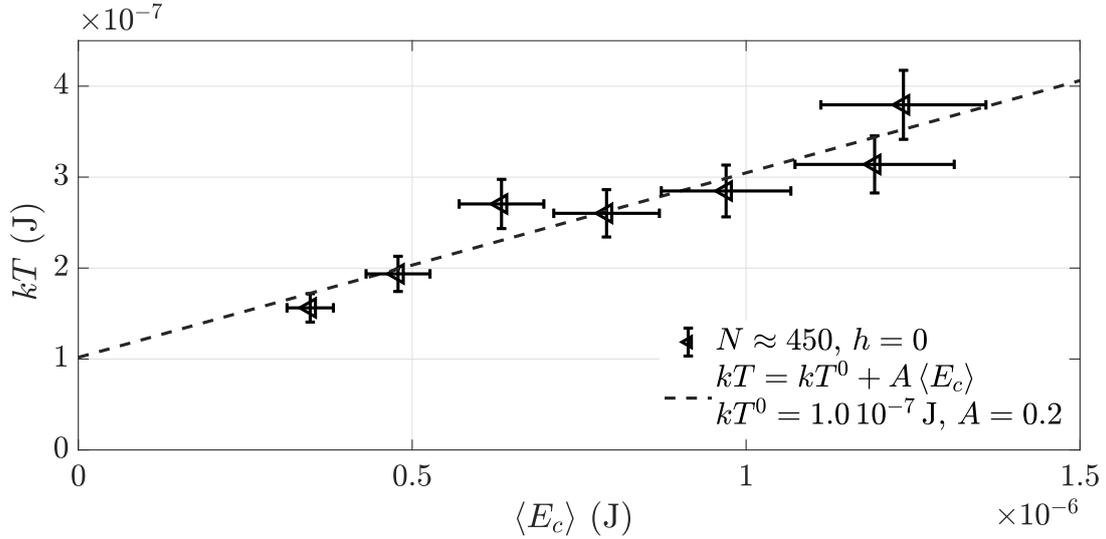


FIGURE 5.5 – Évolution de la température kT mesurée par le protocole 5.2 en fonction de l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ pour un gaz granulaire comportant $N \approx 450$ billes dans lequel la pale associée au moteur plonge à une altitude de référence $h = 0$. En ligne pointillée, un fit affine.

On observe que kT évolue linéairement avec $\langle E_c \rangle$ mais avec un offset $kT^0 \equiv kT(\langle E_c \rangle = 0) \neq 0$:

$$kT = kT^0 + A \langle E_c \rangle \quad (5.9)$$

En figure 5.6, on représente la même courbe pour différents gaz granulaires. L'offset kT^0 pourrait être une constante. Son estimation dépend peu du nombre de billes dans le gaz granulaire ou de l'altitude de la pale. Par contre, la pente A semble dépendre à la fois de N et de h .

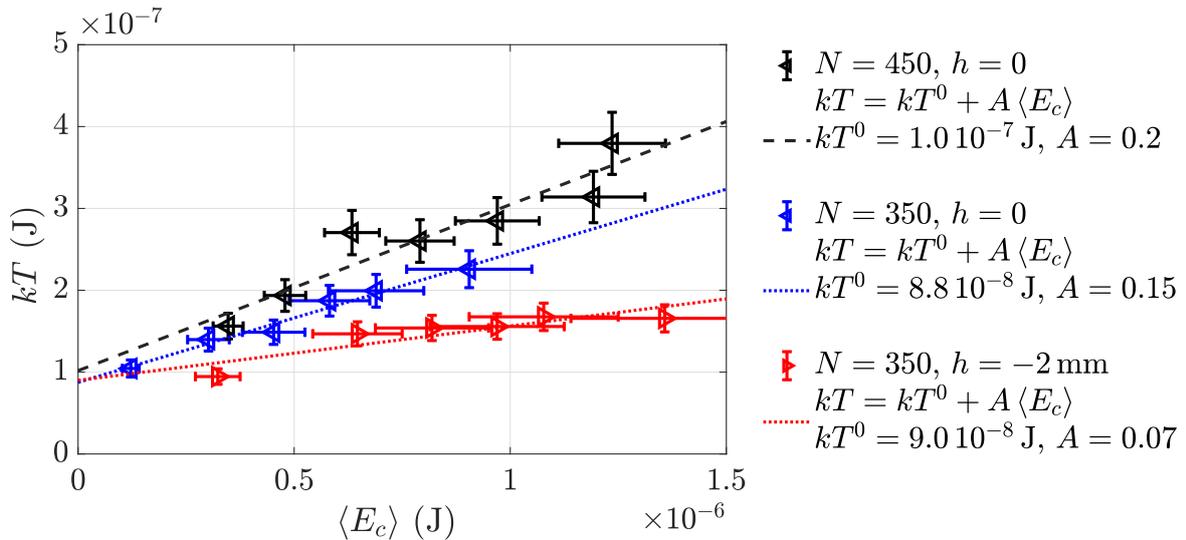


FIGURE 5.6 – Évolution de la température kT mesurée par le protocole 5.2 en fonction de l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ pour différents gaz granulaires. Le paramètre N correspond au nombre de billes. Le paramètre h représente l'altitude de la pale dans le gaz. On choisit comme référence par la suite la valeur $h = 0$. En ligne pointillée, fit affine effectué sur les données de la couleur correspondante.

Enfin, dans tous les cas, il semble qu'il y ait une bijection entre kT et $\langle E_c \rangle$. Ce sont simplement deux thermomètres avec des graduations différentes. On peut donc en choisir arbitrairement une de ces deux quantités pour décrire l'état thermodynamique de la pale plongée dans le gaz granulaire en plus de N et de h . Y a-t-il un choix plus judicieux ?

5.4 Discussion sur le choix de la température granulaire

D'une part, la mesure de kT présente un intérêt fondamental car elle découle directement de l'entropie et d'un théorème de thermodynamique utilisé hors équilibre. Cependant, la mesure de cette quantité est ardue. D'une part elle demande une analyse multi-échelle de la puissance échangée et nécessite plusieurs acquisitions pour différents courants \dot{z} . On ajoute également ici que la mesure de \mathcal{E}_∞ dépend également de la fréquence f choisie pour le courant i proportionnellement à la fonction de transfert du moteur.

D'autre part, $\langle E_c \rangle$ est une quantité dont la mesure est très simple et peut être faite avec une bonne précision sur des signaux de durée assez courte. De plus, si on imagine que la pale est microscopique, on a envie de définir la température de la pale par son énergie cinétique moyenne. C'est donc une quantité plus intuitive que kT .

Enfin, si l'on branche deux de ces pales à des températures différentes en reliant leurs moteurs par une résistance, le flux échangé est proportionnel à la différence des énergies cinétiques [26][38]. Ainsi, si l'on choisit deux gaz tels que les kT sont différentes mais les $\langle E_c \rangle$ sont égales, le flux moyen échangé sera nul. Or intuitivement, on voudrait définir la différence de température proportionnellement à ce flux.

* * *

On considère donc dans cette thèse que l'énergie cinétique est une quantité plus commode et plus intuitive pour définir expérimentalement la température thermodynamique de la pale que kT . Il y a cependant une bijection entre ces deux quantités. Décrire l'état du gaz par kT ou par $\langle E_c \rangle$ est un choix pourvu qu'on fournisse également l'altitude h et le nombre de billes N .

$$kT = kT^0 + A_{[N, h]} \langle E_c \rangle \quad \text{avec : } kT^0 = 9 \cdot 10^{-8} \text{ J} \quad (5.10)$$

Au chapitre 9, le gaz granulaire est composé de $N = 450$ billes, la pale est à l'altitude de référence $h = 0$. donc $A = 0.2$ d'après la figure 5.6. Pour coller au mieux avec l'article correspondant [25], on y utilisera majoritairement kT sauf dans les modèles. Pour les autres chapitres, on utilisera le triplet $(\langle E_c \rangle, N, h)$ pour décrire le gaz granulaire.

Pour tous les autres chapitres, par défaut, le gaz granulaire est composé de $N = 350$ billes, la pale est à l'altitude de référence $h = 0$. donc $A = 0.15$. C'est en particulier ce gaz qui nous sert de source chaude en partie IV.

Pour tous les chapitres de la partie IV, deux gaz granulaires sont utilisés simultanément. Le gaz granulaire de la source chaude H est composé de $N = 350$ billes, la pale est à l'altitude de référence $h = 0$. Donc $A = 0.15$ d'après la figure 5.6.

Le gaz granulaire de la source froide F est composé de $N = 350$ billes, la pale est à l'altitude de référence $h = -2$ mm. Donc $A = 0.07$ d'après la figure 5.6.

Chapitre 6

Rhéologie dans un gaz granulaire

There's no point in being grown up if you can't act childish sometimes.

The Doctor, *Doctor Who*, BBC

Dans ce chapitre, on suppose que la vitesse de la pale suit une équation de Langevin. Sous cette hypothèse, on présente comment mesurer le coefficient de diffusion et la viscosité. Rappelons que, sauf mention contraire (c'est à dire sauf au chapitre 10), on considère des signaux stationnaires et pseudo-ergodiques. On notera donc $\langle \rangle$ la moyenne temporelle.

6.1 Principe

On va ici expliquer comment se servir d'une étude multi-échelle des incréments des positions de la pale pour faire de la rhéologie du gaz granulaire en supposant que la dynamique de la pale est régie par une équation de Langevin. Ce qui suit repose notamment sur les références [28] et [43].

6.1.1 Équation de Langevin

Dire que la vitesse de la pale suit une équation de Langevin signifie qu'on peut modéliser son évolution par une équation du type :

$$J d_t \dot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} + \Gamma_{\text{rand}}(t) \quad \text{avec : } \langle \Gamma_{\text{rand}}(t) \Gamma_{\text{rand}}(t') \rangle \equiv 2D\gamma^2 \delta(t' - t) \quad (6.1)$$

Le membre de gauche correspond à la variation de moment cinétique: $J > 0$, en kg m^2 désigne le *module d'inertie* de la pale pour tourner à la vitesse $\dot{\theta}$. Le membre de droite comporte deux termes. D'abord $-\gamma \dot{\theta}$ un couple qui tend toujours à freiner la rotation de la pale proportionnellement à sa vitesse. On appelle $\gamma > 0$, en $\text{kg m}^2/\text{s}$, un *coefficient d'amortissement visqueux*. Ensuite, le terme $\Gamma_{\text{rand}}(t)$ est aléatoire. Il est la source d'énergie. Sa variance est en lien avec D , en tours^2/s , que l'on appelle le *coefficient de diffusion*. Pour l'instant, cette équation n'est qu'une seconde loi de Newton avec un forçage aléatoire. Cependant, dire que cette équation est une équation de Langevin revient à supposer que ce forçage aléatoire est un *bruit blanc*, ou un *bruit delta-corrélé*, c'est à dire que son autocorrélation est $\langle \Gamma_{\text{rand}}(t) \Gamma_{\text{rand}}(t') \rangle \propto \delta(t' - t)$ où δ désigne ici la distribution de Dirac. En pratique, on supposera que c'est le cas du moment que le temps de corrélation de la vitesse est grand devant le temps de corrélation du bruit.

Mathématiquement, cette condition s'écrit, pour un signal de moyenne nulle :

$$\tau^* \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \dot{\theta}(t) \dot{\theta}(t + \tau) \rangle}{\langle \dot{\theta}^2(t) \rangle} d\tau \gg \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \Gamma_{\text{rand}}(t) \Gamma_{\text{rand}}(t + \tau) \rangle}{\langle \Gamma_{\text{rand}}^2(t) \rangle} d\tau \equiv \tau^\zeta \quad (6.2)$$

Il faut noter que les moyennes temporelles sont prises sur t , et l'intégrale est prise sur τ ce qui nous donne bien une quantité homogène à un temps.

Expérimentalement, on estime $\tau^* \approx 12$ ms et $\tau^\zeta \approx 1$ ms. On fera donc l'hypothèse que la force aléatoire correspond à un bruit blanc normalisé $\zeta(t)$:

$$d_t \dot{\theta} = -\nu \dot{\theta} + q \zeta(t) \quad \text{avec : } \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle \equiv \delta(t' - t) \quad (6.3)$$

On a ici posé deux paramètres. $q \equiv \nu \sqrt{2D}$, en $\text{kg m}^2 / \sqrt{\text{s}}$ qui quantifie l'amplitude de la source du mouvement et $\nu \equiv \gamma / J$, homogène à une fréquence que l'on interprétera comme une fréquence de coupure. On l'appellera par la suite *taux visqueux*. C'est une quantité qui caractérise la viscosité du gaz granulaire que l'on va chercher à déterminer par une méthode d'analyse multi-échelle.

6.1.2 Second moments des incréments

On définit $\delta_\tau \theta$ les incréments de la position à l'échelle de temps τ :

$$\delta_\tau \theta(t) = \theta(t + \tau) - \theta(t) \quad (6.4)$$

De manière habituelle, on définit également $Q_n(\tau) \equiv \langle \delta_\tau \theta^n(t) \rangle$ le moment d'ordre n de ces incréments. En particulier, on s'intéressera au second moment des incréments de la position à l'échelle τ défini comme :

$$Q_2(\tau) \equiv \langle \delta_\tau \theta^2(t) \rangle \quad (6.5)$$

La moyenne étant prise sur les différents t , Q_2 est donc une fonction de l'échelle τ . Cette quantité désigne l'aire typique parcourue par la particule pendant la durée τ . Si on travaillait avec de la diffusion de particules colorées dans un solvant, on pourrait directement l'interpréter comme l'aire de la surface colorée en fonction de la durée d'observation.

On montre en particulier pour une équation de Langevin telle que l'équation (6.1) que le comportement de Q_2 est :

$$Q_2 = \left(V_0^2 - \frac{q}{2\nu} \right) \frac{(1 - e^{-\nu\tau})^2}{\nu^2} + \frac{q}{\nu^2} \tau - \frac{q}{\nu^3} (1 - e^{-\nu\tau}) \quad (6.6)$$

où V_0 est une constante. Cette quantité fait apparaître le rapport entre l'échelle temporelle τ et le taux visqueux ν . On peut en fonction de la valeur du rapport développer cette expression dans deux cas limites :

Si $\nu\tau \gg 1$:

$$\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_t = \frac{q}{\nu^2} \tau + \frac{V_0^2}{\nu^2} - \frac{3}{2} \frac{q}{\nu^3} = 2D\tau + \mathcal{O}(1) \quad (6.7)$$

où D est le coefficient de diffusion déjà introduit. On parle d'un régime diffusif.

Si $\nu\tau \ll 1$:

$$\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_t = V_0^2 \tau^2 + \mathcal{O}((\nu\tau)^3) \quad (6.8)$$

où V_0 est une constante qui correspond à l'amplitude typique de la vitesse entre deux chocs. On parle d'un régime balistique.

Les asymptotes de ces deux régimes se croisent en $\tau = V_0^2/(2D)$ qui doit également correspondre à $\tau = 1/\nu$. Nous venons de déterminer une façon de mesurer $\nu \equiv \gamma/J$, c'est à dire la viscosité du gaz à partir de la mesure du second moment des incréments sur une trajectoire de la pale.

6.2 Protocole

Nous réalisons des acquisitions de $e(t)$ à la fréquence d'échantillonnage $f_{ec} = 16384$ Hz pendant une durée totale T correspondant à quelques milliers de seconde. On a donc accès à des échelles temporelles $\tau \in [1/f_{ec}, T] \approx [10^{-4} \text{ s}, 10^2 \text{ s}]$. Cependant, on souhaite étudier les fluctuations à des échelles supérieures au temps de corrélation du bruit τ^ζ donc $\tau > 10^{-3}$ s. Pour chaque échelle τ , on dispose de $T - \tau$ valeurs de $\delta_\tau \theta$ pour réaliser la moyenne temporelle. On considère que si $(T - \tau)/\tau < 100$, nos statistiques ne sont plus représentatives. On devra donc se limiter à $\tau < T/100 = 10$ s. On estime donc la quantité $Q_2(\tau)$ par :

$$Q_2(\tau) \equiv \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (\theta(t) - \theta(t + \tau))^2 dt \quad (6.9)$$

L'estimation de Q_2 est représentée en fonction de τ en figure 6.1.

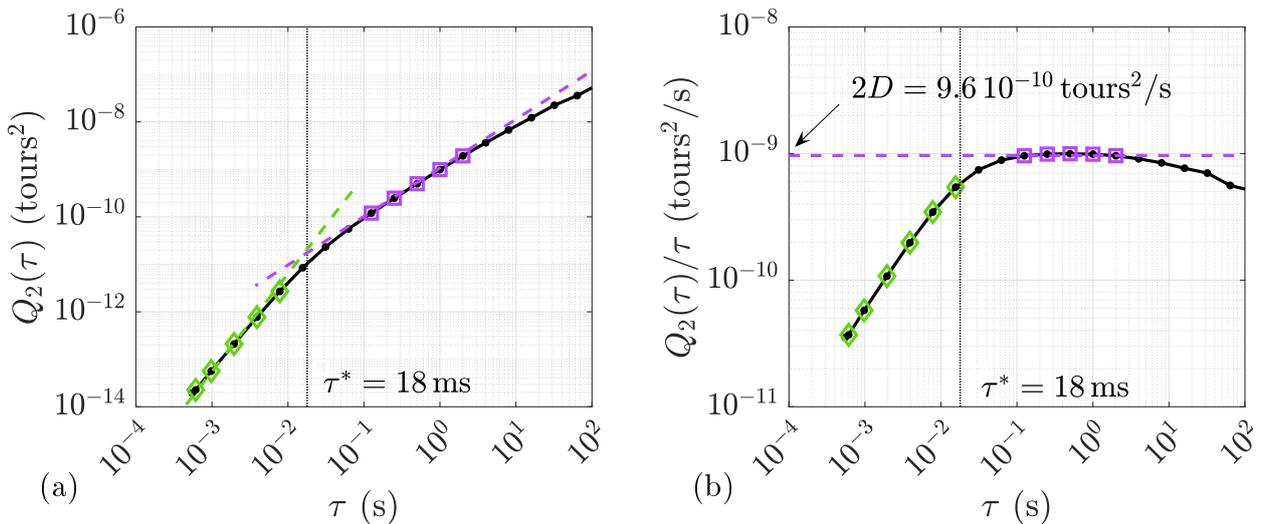


FIGURE 6.1 – Étude des fluctuations de la pale. (a) : second moment des incréments à l'échelle τ de la position angulaire de la pale en fonction de l'échelle τ . Les diamants verts correspondent aux points de fit pour le régime balistique où $Q_2(\theta) = V_0^2 \tau^2$. Les carrés correspondent aux points de fit pour le régime diffusif où $Q_2(\theta) = 2D\tau$. En lignes pointillées, les fits sur les domaines concernés. Elles se croisent pour $\tau = \tau^*$ correspondant au temps visqueux d'amortissement de la dynamique de la pale. (b) : même figure normalisée par l'échelle pour mettre en évidence la mesure de D , le coefficient de diffusion.

On remarque en effet deux comportements différents en fonction de l'échelle.

Pour $\tau \in [10^{-1}, 10]$, $Q_2 \propto \tau$ qui correspond au régime balistique et pour $\tau \approx 10^{-3}$, on observe le régime diffusif. Pour plus de précision, on travaille sur la quantité normalisée par l'échelle Q_2/τ . D est estimé par la moyenne prise sur le plateau. V_0 correspond à la pente de la zone linéaire en τ . On détermine alors $\nu \equiv V_0^2/(2D)$. Cette valeur correspond quantitativement au temps de corrélation de la vitesse τ^* .

6.3 Résultats

Le protocole précédent nous donne accès à deux quantités qui caractérisent l'état du gaz granulaire : D qui caractérise la dispersion des trajectoires et ν qui caractérise la viscosité effective du gaz granulaire. Notre façon de contrôler l'état du gaz granulaire est principalement d'en fixer la température granulaire ou l'énergie cinétique moyenne en ajustant l'amplitude de l'accélération du vibreur. On présente l'évolution de ces quantités en fonction de la température granulaire.

6.3.1 Coefficient de diffusion et confrontation E_c vs kT

D'abord, il y a le coefficient de diffusion D dont l'évolution en fonction de la température du gaz granulaire est représentée figure 6.2.

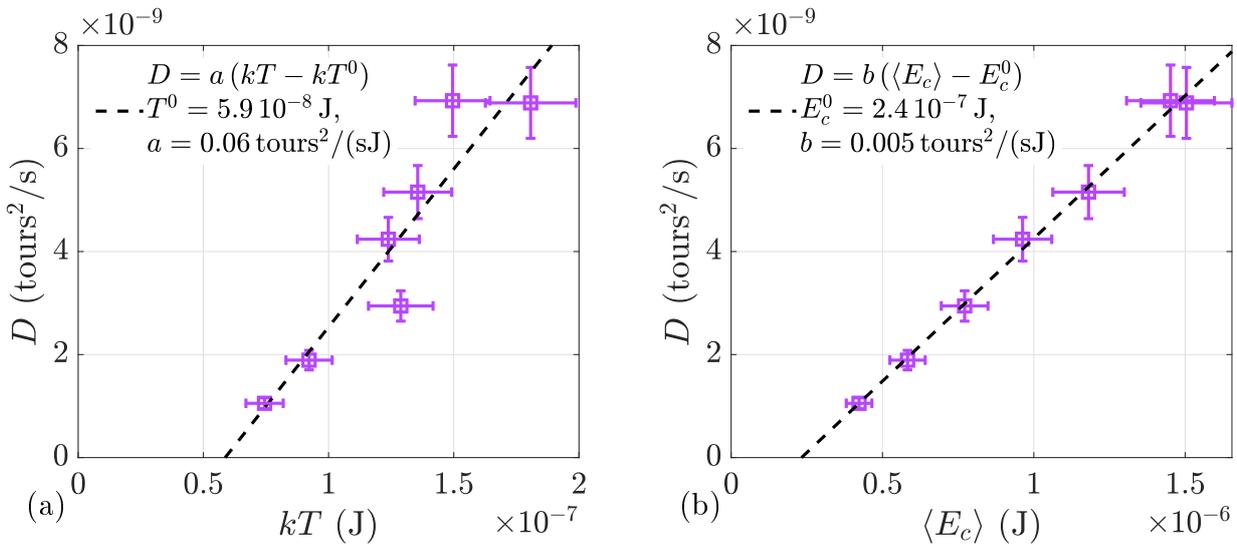


FIGURE 6.2 – Evolution du coefficient de diffusion en fonction de la température pour un gaz granulaire à $N \approx 350$ billes et $h = 0$. (a) : D en fonction de kT , la température granulaire estimée. (b) : D en fonction de $\langle E_c \rangle$, l'énergie cinétique de la pale. En noir, un fit affine.

On remarque dans les deux cas que l'évolution de D est compatible avec un modèle de type :

$$D \propto (kT - kT^0) \quad D \propto (\langle E_c \rangle - E_c^0) \quad (6.10)$$

C'est ce qu'on appellerait une relation de type Einstein dont le zéro est décalé. On pense que ce décalage est fortement lié à l'altitude h de la pale. Il appelle à une étude plus poussée qui n'est pas l'objet ici.

On note cependant que le modèle semble bien meilleur pour $D \propto (\langle E_c \rangle - E_c^0)$. On est donc tenté de conclure que $\langle E_c \rangle$ est une meilleure définition de la température du gaz granulaire comme proposé dans le chapitre 5. Dans la suite, on utilisera principalement cette définition de la température de la pale car elle est à la fois plus facile à mesurer et directement liée de manière très simple aux fluctuations de la vitesse de la pale.

6.3.2 Taux visqueux et équation d'état

On dispose également de la mesure de ν , le taux visqueux en fonction de l'énergie cinétique moyenne de la pale.

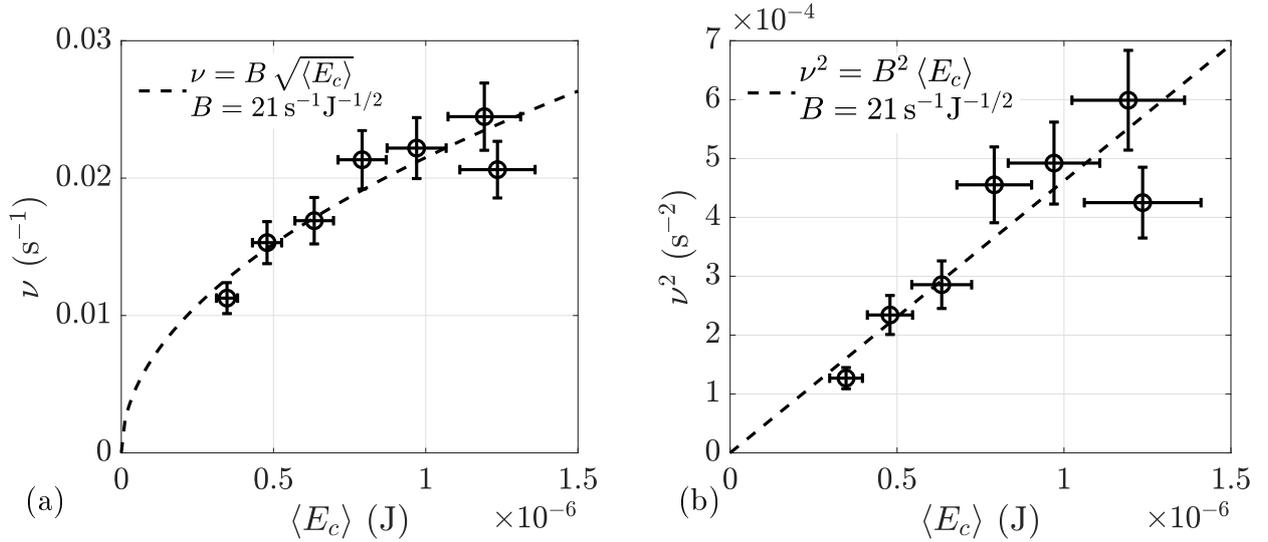


FIGURE 6.3 – Évolution de la viscosité en fonction de l'énergie cinétique pour un gaz granulaire à $N \approx 350$ billes et $h = -2 \text{ mm}$. (a) : $\nu \equiv \gamma/J$ en fonction de $\langle E_c \rangle$, l'énergie cinétique de la pale. (b) : ν en fonction de $\langle E_c \rangle$. En noir, un fit affine.

On remarque que ν^2 est directement proportionnel à $\langle E_c \rangle$. On propose donc le modèle suivant :

$$\nu = B \sqrt{\langle E_c \rangle} \quad (6.11)$$

Où $B = 21 \text{ s}^{-1} \text{ J}^{-1/2}$ est une constante de la température du gaz granulaire. Elle dépend probablement du nombre de billes N ainsi que de l'altitude h à laquelle est plongée la pale. Ce type de relation est plutôt inattendu car il correspond à la relation que l'on trouve pour la viscosité d'un gaz parfait : $\nu \propto \sqrt{T}$ où T serait la température du gaz parfait en K. Il serait intéressant de poursuivre cette étude plus loin en faisant varier N et h . Une telle étude serait intéressante mais nous avons préféré nous concentrer sur d'autres travaux que je présente par la suite.

6.4 Conclusion et discussion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment une étude des fluctuations à différentes échelles permettait de mesurer le coefficient de diffusion et le taux visqueux, c'est à dire deux quantités qui renvoient à des propriétés du gaz granulaire. D'une part, une étude de l'évolution du coefficient de diffusion en fonction de la préparation du gaz granulaire nous encourage à définir la température granulaire comme l'énergie cinétique moyenne des fluctuations de la pale. D'autre part, l'évolution du taux visqueux en fonction de l'énergie cinétique de la pale est tout à fait compatible avec une loi d'évolution de gaz parfait.

Les deux résultats de cette étude mériteraient d'être approfondis en s'interrogeant sur la dépendance de ces relations vis-a-vis d'autres paramètres du gaz granulaire comme le nombre de grains ou l'altitude à laquelle plonge la pale. Mais nous laisserons pour cela la main aux spécialistes des milieux granulaires. Ce qui nous intéresse dans ces expériences c'est d'être capable de définir l'état de la pale baignant dans un gaz granulaire par une variable intensive de manière univoque, une définition pleinement remplie par kT ou $\langle E_c \rangle$.

Chapitre 7

Effet de la rotation de la pale

It is such a quiet thing, to fall. But far more terrible is to admit it.

Kreia, *KOTOR II TSL*, Obsidian Entertainment

Dans la suite de ce travail, on va chercher à briser la symétrie des fluctuations de la pale ce qui induira un mouvement biaisé de cette dernière. D'une façon très analogue à l'effet Doppler, la rotation de la pale à une vitesse moyenne devrait changer la distribution de vitesse des chocs sur la pale. En effet, les chocs contre la rotation seront vécus comme plus violents par la pale alors que ceux dans le sens de la rotation seront moins importants. La conséquence théorique de cette rotation est de modifier la variance des vitesses vues par la pale, c'est à dire l'énergie moyenne transférée à la pale. On se demande donc comment les propriétés rhéologiques du gaz granulaire dépendent de la vitesse moyenne de rotation de la pale.

7.1 Montage

Pour étudier cette problématique, on a besoin de pouvoir imposer une rotation moyenne constante à la pale dans le gaz granulaire. Pour faire cela, il faut fixer la valeur de la tension induite $\langle e \rangle$. Une façon simple de procéder est d'utiliser un générateur de tension continue que l'on branche directement au moteur. Le schéma correspondant est présenté en figure 7.1.

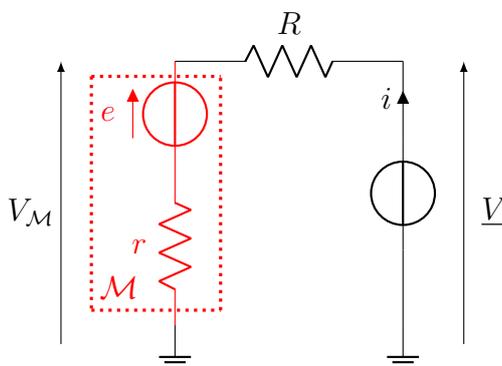


FIGURE 7.1 – Schéma électrique permettant de faire tourner le moteur à vitesse constante. Le générateur de tension impose une tension constante \underline{V} .

La tension constante \underline{V} est fournie par un générateur de tension continue. Le cadre \mathcal{M} représente le moteur à courant continu associé à la pale baignant dans le gaz granulaire. Les

tensions V_M et \underline{V} sont mesurées à l'aide d'une carte d'acquisition 32 bits. On quantifiera \underline{V} en unités de σ qui correspond à l'écart-type de e :

$$\sigma \equiv \text{Var}(e) \quad (7.1)$$

La résistance R nous donne accès au courant i ainsi qu'à la tension e . Le moteur assure que la vitesse de la pale est $\dot{\theta} = e/\alpha$ donc :

$$\langle \dot{\theta} \rangle \propto \underline{V}/\alpha \quad (7.2)$$

Pour changer la vitesse moyenne, on modifie donc simplement la tension de consigne \underline{V} . La température effective du gaz granulaire reste fixée. Les trajectoires correspondantes sont présentées en figure 7.2. Cette figure confirme la proportionnalité, à ceci près que le fit présente une ordonnée à l'origine faible mais non nulle. Cette constante correspond à un biais dans les trajectoires que l'on attribue à une légère asymétrie géométrique de la pale.

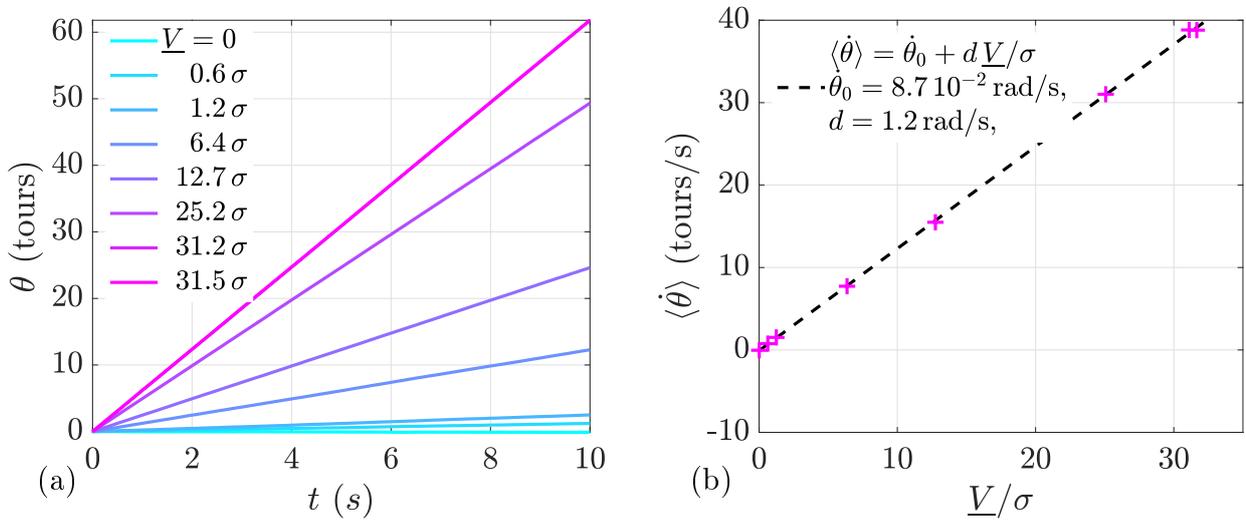


FIGURE 7.2 – (a) : trajectoires de la pale au cours du temps lorsque le moteur est obligé de tourner à une vitesse moyenne par un générateur de tension imposant la tension constante $e \approx \underline{V}$. Les différentes couleurs correspondent à différentes valeurs de \underline{V} . (b) : vitesse moyenne de la pale en fonction de la tension de consigne \underline{V} . σ désigne l'écart-type des fluctuations libres de la pale. En ligne pointillée, un fit affine.

7.2 Rhéologie dans le référentiel tournant

Au chapitre 6, on a montré comment mesurer la viscosité du gaz granulaire dans le cas d'une particule décrite par une équation de Langevin dont la vitesse moyenne est nulle. Pour pouvoir appliquer ces résultats, on va se positionner dans le référentiel tournant. On indexera les quantités dans le référentiel tournant par des 0.

$$\dot{\theta}_0(t) = \dot{\theta}(t) - \langle \dot{\theta} \rangle t \quad e_0(t) = e(t) - \langle e \rangle t \quad (7.3)$$

On redéfinira donc si besoin d'estimateur de Q_2 comme :

$$Q_2(\tau) \equiv \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} (\theta_0(t) - \theta_0(t+\tau))^2 dt = \text{Var}(\delta_\tau \theta) \quad (7.4)$$

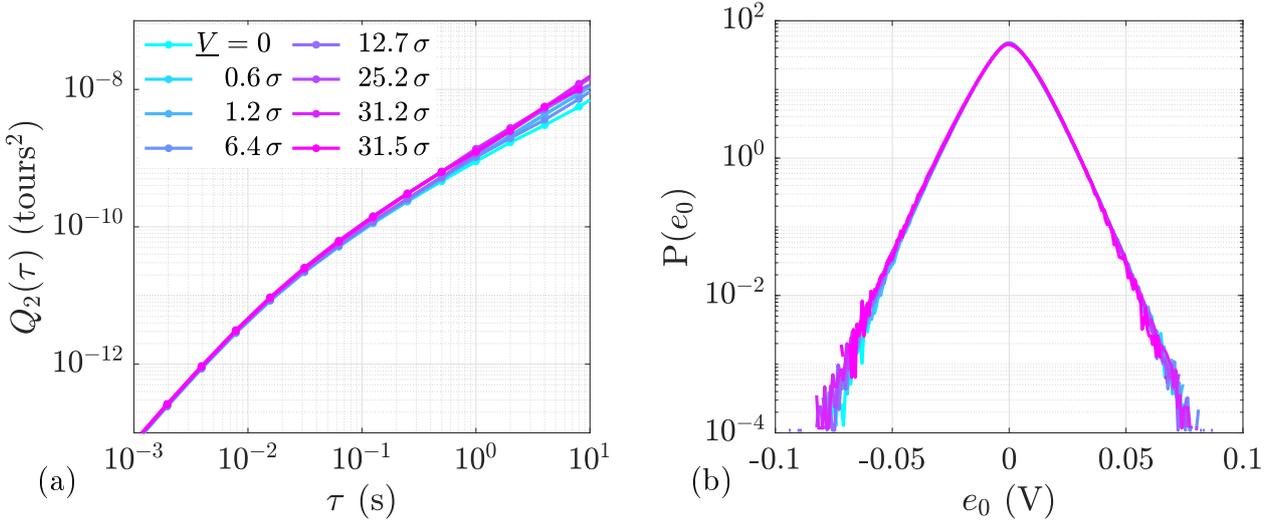


FIGURE 7.3 – Étude des fluctuations de la pale. (a) : second moment des incréments à l'échelle τ de la position angulaire de la pale en fonction de l'échelle τ . (b) : histogrammes réduits de la tension $e_0 = e - \langle e \rangle$. Les différentes couleurs correspondent à différentes tensions \underline{V} .

Ces quantités centrées sont présentées en figure 7.3. Même pour des vitesses moyennes de l'ordre de trente fois la valeur de l'écart-type des vitesses, on ne voit pas à l'œil nu de grandes différences sur les quantités centrées. Par contre, en figure 7.4, on présente l'évolution de la viscosité perçue par la pale en fonction de la vitesse moyenne de la pale. On remarque que le taux visqueux diminue avec la vitesse de rotation moyenne. Certains diraient que le gaz granulaire se comporte comme la crème fouettée, d'autres parleraient d'un fluide rhéo-fluidifiant.

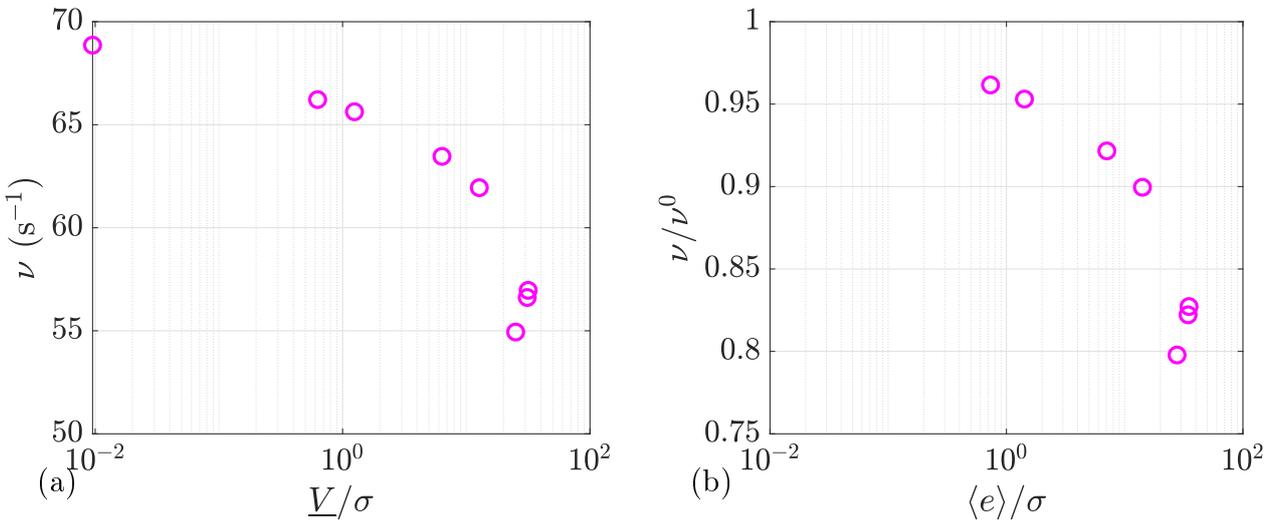


FIGURE 7.4 – Evolution du taux d'amortissement visqueux pour une pale tournant dans un gaz granulaire (a) : taux d'amortissement en fonction de la tension de consigne \underline{V} (b) : taux d'amortissement en fonction de la vitesse de rotation de la pale. Comme $e = \alpha \dot{\theta}$, $\langle e \rangle / \sigma$ correspond à la vitesse moyenne de la pale $\langle e \rangle / \alpha$ normalisée par σ / α , l'écart-type de ses fluctuations.

On remarque cependant que la variation relative de la viscosité est assez faible. Pour une vitesse moyenne égale à l'écart-type de ses fluctuations, on remarque que le taux visqueux n'a

diminué que de seulement 4% par rapport à sa valeur sans brassage, ce qui correspond environ à l'erreur relative sur la mesure de ν . Par la suite, on considèrera le résultat suivant :

Tant que la vitesse moyenne est inférieure à l'écart-type de ses fluctuations, on considère que le gaz granulaire n'est pas perturbé par le mouvement de la pale.

7.3 Conclusion et discussion

Nous venons d'étudier l'impact du brassage du gaz granulaire par une pale à une vitesse moyenne constante. L'influence sur le gaz est bien réelle et tend à diminuer la viscosité du gaz granulaire sur la pale. Cependant, cette différence est très faible tant que la pale brasse le gaz à une vitesse moyenne grande devant l'écart-type des fluctuations de vitesse de la pale.

* * *

Dans cette thèse, on considèrera que, si la vitesse moyenne de la pale est inférieure à l'écart-type des fluctuations de vitesse de la pale, le gaz n'est pas perturbé par ce mouvement.

Chapitre 8

Quand on branche un condensateur au moteur

Be careful of charity and kindness, lest you do more harm with open hands than a clenched fist.

Kreia, *KOTOR II TSL*, Obsidian Entertainment

Dans cette thèse, nous souhaitons stocker de l'énergie électrique pour la réinvestir de manière différée au moment opportun. Une façon pratique de stocker de l'énergie est d'utiliser un condensateur. C'est un composant électrique qui stocke l'énergie électro-magnétique sous forme de charges séparées et donc de champ électrique. Dans cette partie, on se demande ce qui se produit lorsque l'on branche le moteur à un condensateur de capacité C .

8.1 Montage

Pour étudier cette problématique, on utilise le schéma présenté en figure 8.1.

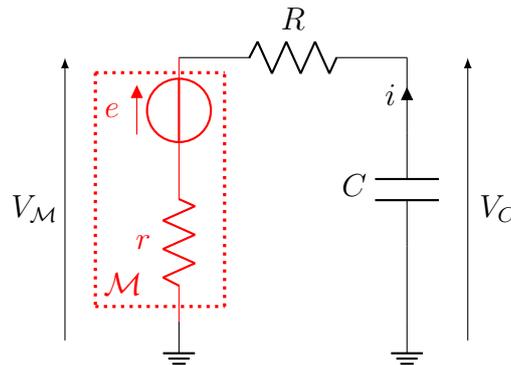


FIGURE 8.1 – Schéma électrique du moteur branché sur un condensateur de capacité C au travers d'une résistance R .

Le cadre \mathcal{M} représente le moteur à courant continu associé à la pale baignant dans le gaz granulaire. Les tensions V_M et V_C sont mesurées à l'aide d'une carte d'acquisition 32 bits et permettent grâce à la résistance R de remonter au courant i et la tension e . Les fluctuations de e sont présentées en figure 8.2 sous forme d'histogrammes pour différentes valeurs de C .

On remarque que la largeur des histogrammes de e dépend fortement de la valeur de la capacité C . Elle diminue lorsque la capacité augmente. Par la suite, on étudie l'évolution de $\langle E_c \rangle$, l'énergie cinétique moyenne de la pale en fonction de C .

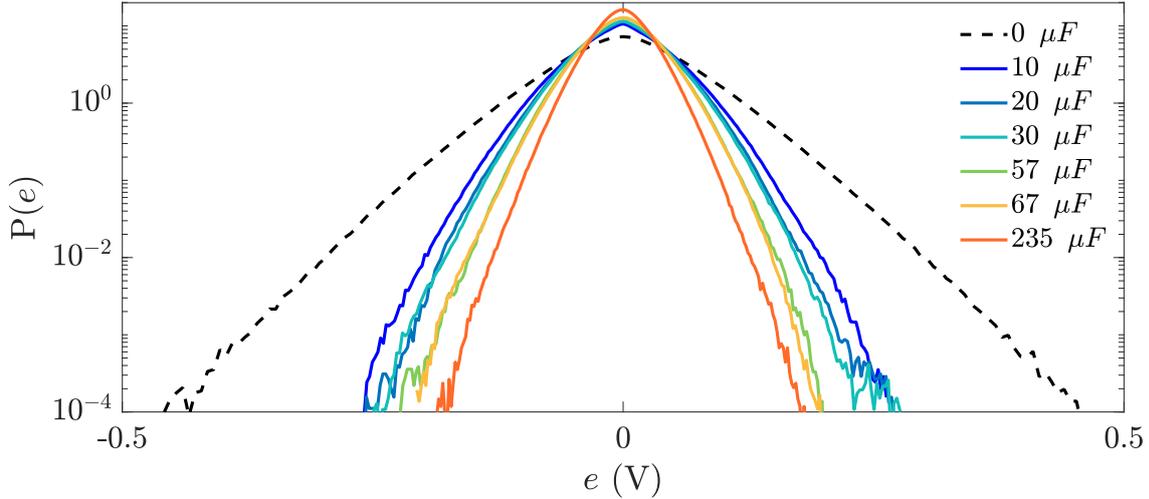


FIGURE 8.2 – Histogrammes normalisés de la tension e pour différentes valeurs de la capacité C . En ligne pointillée le cas où le moteur n'est pas branché au condensateur.

8.2 L'énergie cinétique est modifiée

Rappelons que la conséquence du courant i sur la rotation de la pale est d'ajouter par force de Laplace un couple $-\alpha i(t)$ dans l'équation du mouvement. On doit donc relier ce courant à la vitesse en étudiant la partie électrique du montage. Dans cette partie, on considèrera des signaux stationnaires et on utilisera la transformée de Fourier $A(\omega)$ à la pulsation ω définie pour un signal temporel $A(t)$ comme :

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp[-j\omega t] dt \quad A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp[+j\omega t] d\omega \quad (8.1)$$

Le courant dans un condensateur est lié à la variation de la tension V_C stockée. Dans un même temps, on a la loi d'Ohm. Donc :

$$R_{tot} i(t) = V_c(t) - e(t) = C d_t V_C \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \frac{j\omega C}{1 + j\omega R_{tot} C} e(\omega) = \frac{\alpha C}{1 + j\omega R_{tot} C} j\omega \dot{\theta}(\omega) \quad (8.2)$$

Si on reprend l'équation de Langevin (6.1) en ajoutant le couple induit $-\alpha i$, on obtient :

$$\left(J + \frac{C\alpha^2}{1 + j\omega R_{tot} C} \right) j\omega \dot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} + \gamma J \sqrt{2D} \quad (8.3)$$

Dans le cas idéal où $R_{tot} \rightarrow 0$, l'ajout de la capacité devrait simplement augmenter le module d'inertie effectif de la pale de $C\alpha^2$, voir . Il a été montré que l'énergie cinétique de la pale évolue de manière inversement proportionnelle avec J , voir [8]. On s'attend donc à ce que l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c^{[C]} \rangle$ diminue avec C . On présente cette évolution en figure 8.3.

On remarque bien que $\langle E_c^{[C]} \rangle$ diminue avec C . Pour $C \neq 0$, les points expérimentaux sont compatibles avec le modèle :

$$\frac{1}{\langle E_c^{[C]} \rangle} = \left(\frac{1}{2} + 6 \frac{\alpha^2}{J} C \right) \frac{1}{\langle E_c^{[0]} \rangle} \quad (8.4)$$

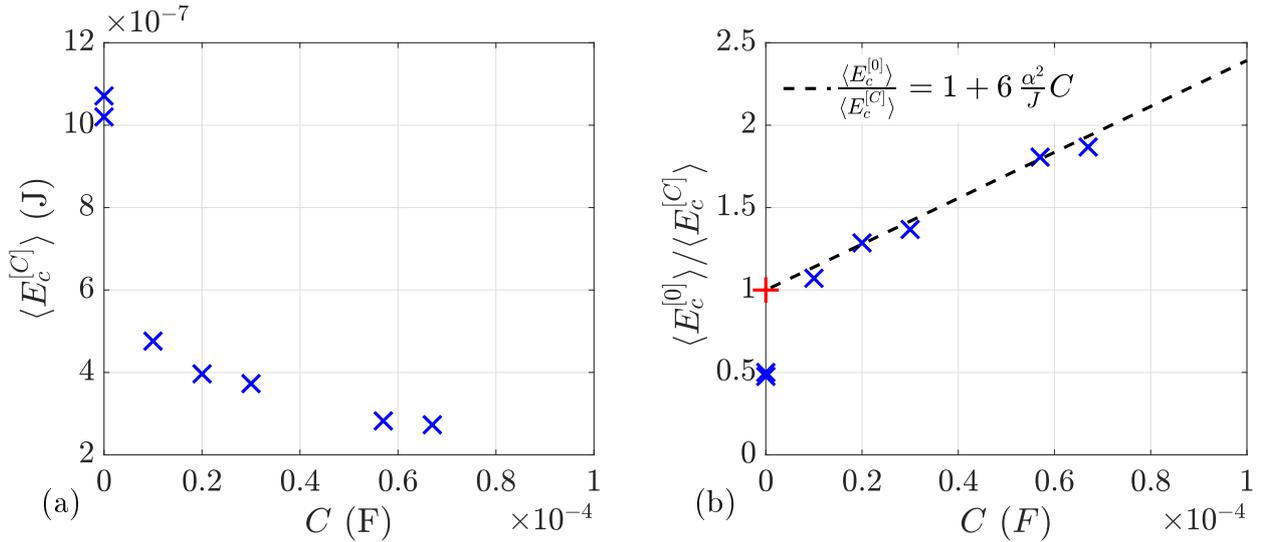


FIGURE 8.3 – Évolution de l'énergie cinétique de la pale quand le condensateur est branché sur le moteur (a) : Énergie cinétique moyenne $\langle E_c^{[C]} \rangle$ en fonction de C (b) : même figure en représentant $1/\langle E_c^{[C]} \rangle$ normalisée par $\langle E_c^{[0]} \rangle$, l'énergie cinétique de la pale libre. La ligne pointillée noire est un modèle linéaire. Le + correspond à la valeur $\langle E_c^{[0]} \rangle/2$.

Si le coefficient 6 restera mystérieux, on a bien su identifier la dépendance en $\alpha^2 C/J$ de $\langle E_c^{[C]} \rangle$. Cependant, dans la limite $C \rightarrow 0$, $\langle E_c^{[C]} \rangle$ tend vers $\langle E_c^{[0]} \rangle/2$ et non pas vers l'énergie cinétique de la pale libre que l'on note $\langle E_c^{[0]} \rangle$. Nous avons une piste pour expliquer cette dépendance, mais elle demande d'adopter un point de vue énergétique.

8.3 Une piste d'explication

Ici, on propose un point de vue complémentaire pour modéliser l'évolution de $\langle E_c^{[C]} \rangle$ que l'on observe en figure 8.3. On doit justifier l'ordonnée à l'origine de ce modèle (8.4). On propose pour cela une approche énergétique. Quand le moteur est branché au condensateur, il y a deux énergies en jeu. D'une part, U_C est l'énergie potentielle emmagasinée dans un condensateur de capacité C renfermant la tension V_C . D'autre part, $E_c^{[C]}$, l'énergie cinétique d'une pale de moment d'inertie J en rotation à la vitesse $\dot{\theta} = e/\alpha$:

$$U_C \equiv \frac{1}{2} C V_c^2 \quad E_c^{[C]} \equiv \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{J}{\alpha^2} e^2 \quad (8.5)$$

L'énergie totale de la pale, $\mathcal{E} \equiv U_C + E_c^{[C]}$ est :

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2} C V_c^2 + \frac{1}{2} \frac{J}{\alpha^2} e^2 \quad (8.6)$$

Notre système a donc un hamiltonien comprenant deux degrés de liberté *a priori* indépendants entre lesquels l'énergie totale doit être équitablement partagée en moyenne.

$$\langle \mathcal{E} \rangle = 2 \langle E_c^{[C]} \rangle = 2 \langle U_C \rangle \approx kT \quad (8.7)$$

Dans le cas où le moteur n'est pas branché, l'énergie totale correspond à cette énergie : $\langle \mathcal{E} \rangle \equiv E_c^{[0]}$. Donc, quand on s'approche de 0, on aura $\langle E_c^{[C \rightarrow 0]} \rangle \equiv \langle E_c^{[0]} \rangle/2$. D'une certaine façon, il

Il y a une rupture conceptuelle entre le cas où le moteur est branché à une capacité $C \rightarrow 0$ et le cas où le moteur est libre. Cette observation n'est pas surprenante. En effet, dans le cas d'un système mécanique dont l'énergie totale est fixée à une certaine valeur kT , si on libère des articulations dans le système, l'énergie cinétique dans un seul degré de liberté est divisée par le nombre d'articulations au total.

8.4 Conclusion et discussion

Brancher un condensateur sur le moteur a donc un grand impact sur les fluctuations de la vitesse. Peu importe la valeur de C , il divise par deux l'énergie cinétique de la pale par rapport au cas libre. Nous avons également pu proposer un modèle du changement de moment d'inertie effectif de la pale causé par la dynamique couplée entre la partie mécanique et électrique du système. Nous avons ainsi pu décrire la dépendance de l'énergie cinétique de la pale en fonction de la valeur de la capacité dans le circuit.

* * *

Cette étude est suffisante pour les besoins de cette thèse. Cependant, il serait intéressant de trouver l'origine du facteur 6 présent dans le modèle 8.4.

Partie III

Démons de Maxwell macroscopiques

Introduction à la partie

One may tolerate a world of demons for the sake of an angel.

Jeanne-Antoinette Poisson, *Doctor Who*, BBC

Pour ces expériences, on cherche à construire un démon de Maxwell à l'échelle macroscopique. On rappelle qu'un démon de Maxwell est un dispositif qui va réaliser des mesures à l'échelle d'une particule brownienne, et agir sur cette particule afin de briser la symétrie des fluctuations et induire un mouvement biaisé.

Le démon doit donc expérimentalement réaliser ses mesures et agir à une période très courte devant le temps typique de la dynamique de la particule. Son action dépend de la mesure de manière à briser la symétrie des fluctuations dynamiques de la particule.

On va prendre le système {moteur+pale}, cette dernière étant plongée dans un gaz granulaire comme particule brownienne. Par induction, le moteur assure une équivalence entre tension induite e et vitesse de la pale $\dot{\theta}$. C'est l'induction de Lenz-Faraday.

$$e = \alpha \dot{\theta} \quad (3.2)$$

Cependant, si un courant i parcourt le moteur, un couple induit Γ_{retro} proportionnel au courant apparaît. C'est la loi de Laplace.

$$\Gamma_{\text{retro}} = -\alpha i \quad (3.5)$$

Le signe "-" signifie que le couple induit s'oppose à la rotation du moteur. C'est ce qu'on appelle généralement la loi de modération de Lenz. Pour des raisons de symétrie, le facteur $\alpha = 9.5 \cdot 10^{-3} \text{ Vs/rad}$ est commun à ces deux relations et est fixé à la construction du moteur.

Ce qui importe ici, c'est que le moteur permet de réaliser à la fois une mesure électrique de la vitesse de la pale mais également de rétroagir sur son mouvement. Dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen, la seconde loi de Newton nous donne le mouvement de la pale modifié :

$$J d_t \dot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} - \alpha i [\dot{\theta}] + \Gamma_{\text{rand}}[\dot{\theta}] \quad (8.8)$$

Les crochets " $[\dot{\theta}]$ " sont là pour rappeler la dépendance entre $\dot{\theta}$ et i . La force aléatoire des grains sur la pale dépend de la température granulaire. Dans le référentiel du laboratoire, cette force se décompose en un terme aléatoire symétrique et de moyenne nulle $\Gamma_{\text{rand}}[\dot{\theta}]$ et un terme d'amortissement visqueux de coefficient d'amortissement γ .

Réaliser un démon revient donc à construire un circuit électrique qui brise la symétrie entre courant et vitesse. S'il fonctionne, on doit observer une rotation moyenne de la pale. Dans la suite de cette partie, on va proposer trois démons électriques différents :

- 9 Un démon très simple et purement dissipatif.
- 10 Un démon un peu plus élaboré capable d'extraire du travail.
- 11 Un démon très élaboré qui permet d'explorer la richesse des machines de Szilárd.

Chapitre 9

Démon à diode idéale

If you are allergic to a thing, it is best not to put that thing in your mouth, particularly if the thing is cats.

Lemony Snicket, *The Wide Window*

L'expérience du cliquet de Feynman est à l'origine une expérience de pensée proposée par Feynmann pour illustrer son cours de thermodynamique statistique [18]. Le principe en est reproduit et adapté en figure 9.1 :

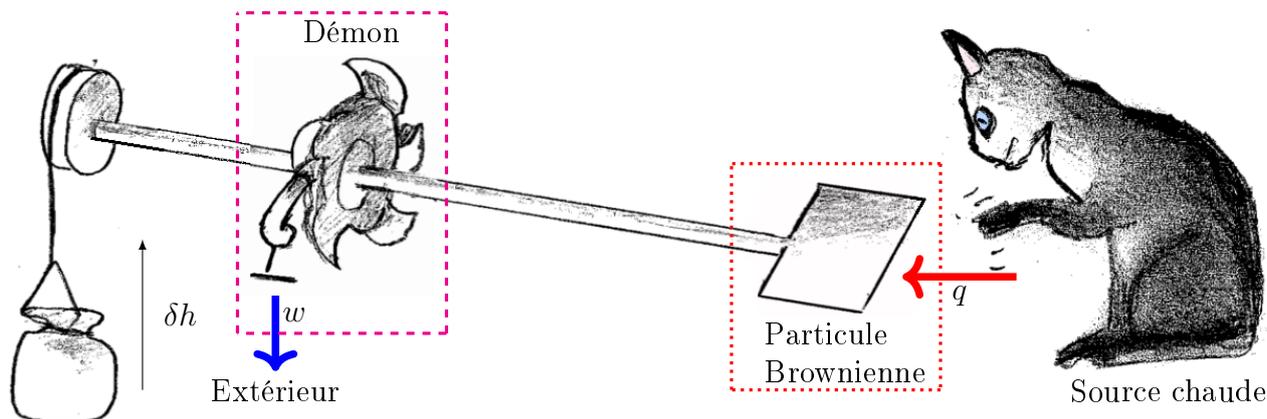


FIGURE 9.1 – Schéma de l'expérience de pensée. La pale subit une force aléatoire depuis la source chaude ce qui lui donne une rotation aléatoire. Mais le cliquet empêche la roue crantée de tourner dans un sens : la pale tourne alors en moyenne et la masse monte. Deux flux sont importants dans ce dispositif : la chaleur q donnée à la pale par la source chaude, et w le flux de chaleur du démon vers l'extérieur. La chatte (nommée Maxwell) est présente pour rappeler que la source chaude n'a pas besoin d'être un thermostat à l'équilibre pour cette expérience. En effet, une source de force aléatoire, comme un chat joueur ou un gaz granulaire, est suffisante pour faire fonctionner le dispositif pourvu que cette source ait une variance et soit stationnaire.

La particule brownienne est une pale plongée dans un gaz. Une roue crantée est montée sur l'axe de la pale. Mais, cette dernière est munie d'un cliquet qui en empêche la rotation dans le sens horaire. Ainsi, les fluctuations dans le sens anti-horaire sont les seules permises et la pale a une rotation moyenne dans le sens anti-horaire. On peut alors profiter de cette rotation moyenne pour extraire un travail, par exemple en soulevant un poids. Mais comment réaliser ce démon expérimentalement ?

Toute l'astuce repose dans la réversibilité des équations (3.2) et (3.5). Si on monte un moteur à courant continu sur l'axe d'une pale, on peut en théorie produire deux comportements limite :

Si on court-circuite le moteur, le courant est très grand, la rétroaction bloque le moteur. La pale est alors bloquée et ne peut pas tourner.

Si on laisse le moteur débranché (ce qui sera notre état de référence), il n'y a aucune rétroaction et la pale est libre de tourner.

Une façon de réaliser un démon de maxwell serait donc de plonger l'ensemble {pale+moteur} dans une source de force aléatoire. On va court-circuiter le moteur lorsque la vitesse de la pale, c'est à dire la tension e , est positive et laisser ouvert le circuit lorsque cette dernière est négative. Une *diode idéale* peut réaliser cette fonction.

Pour nos expériences, on fait le choix d'un gaz granulaire comme source chaude. En effet, il a été montré que la pale plongée dans un gaz granulaire est analogue à une particule brownienne plongée dans un thermostat à une température effective de l'ordre de $kT_H \approx 10^{-7}$ J (voir chapitre 5), valeur bien supérieure à la température ambiante $kT \approx 10^{-21}$ J. Cette haute température effective donne un accès facile à la mesure des fluctuations des quantités étudiées.

9.1 Principe

9.1.1 Démon à diode idéale

Une réalisation possible du démon revient simplement à brancher une diode idéale sur le moteur comme indiqué en figure 9.2.

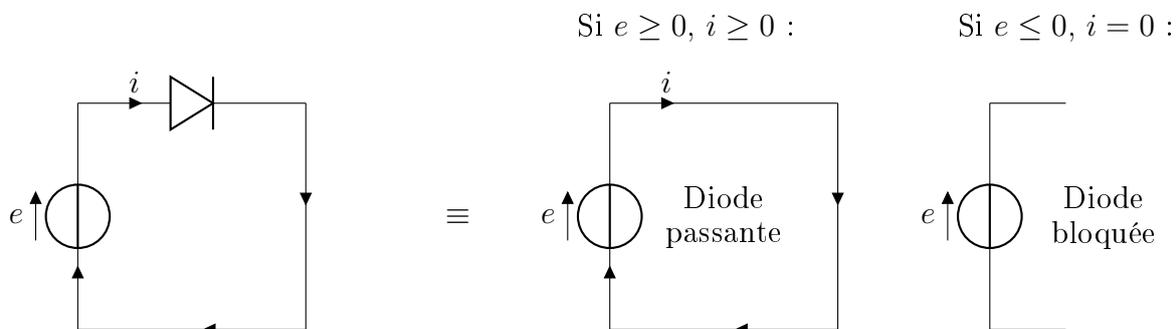


FIGURE 9.2 – Schéma électrique d'un démon idéal fonctionnant grâce à une diode idéale.

En effet, deux cas sont à considérer : D'abord, si la pale reçoit un choc tel qu'elle devrait tourner dans le sens horaire $\dot{\theta} \geq 0$, c'est à dire $e \geq 0$, alors la diode est passante, et un courant i parcourt le circuit. Ce courant est très grand du fait de la résistance faible des fils. Donc le couple instantané qui freine la pale est très grand et la pale ne peut pas tourner. En pratique, cela signifie que la pale ne peut pas tourner dans le sens horaire. Par contre, si la pale tourne dans le sens anti-horaire $\dot{\theta} \leq 0$, c'est à dire $e \leq 0$, alors la diode est bloquée, $i = 0$, et la pale est libre de tourner.

Cependant, ce modèle est peu réaliste. En effet, dans une situation où la diode idéale se ferme, le moteur envoie une impulsion démesurée à la pale ce qui va fortement venir modifier

les propriétés statistiques de son mouvement. Heureusement, le courant i ne peut pas être infini en pratique car il est limité par la résistance totale dans le circuit. Cette résistance peut provenir des fils, du moteur associé à la pale (pertes cuivre) ou bien d'un dipôle que l'on vient brancher dans le circuit.

9.1.2 Vers un démon plus réaliste

Pour prendre en compte l'aspect résistif dans le circuit, on propose de modéliser le moteur comme un générateur de Thévenin, c'est à dire une source idéale de tension e munie d'une résistance interne r . On regroupe la résistance des fils et la résistance interne du moteur dans ce terme. Et pour être un peu plus général encore, on va placer une charge R purement résistive en série avec le moteur. Le nouveau circuit modèle est représenté en figure 9.3.

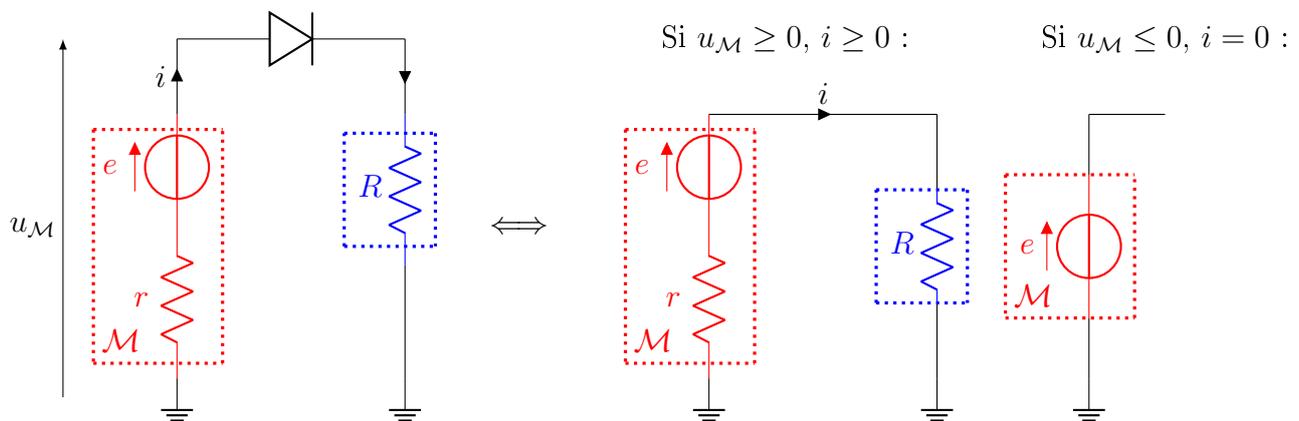


FIGURE 9.3 – Schéma électrique d'un démon à diode idéale plus réaliste.

Il faut noter qu'on a deux nouvelles équations dans ce système :

$$u_M = Ri \quad u_M = e - ri \quad (9.1)$$

Cette diode peut être vue comme un système qui interdit les courants négatifs $i < 0$ et remplace ces derniers par des zéros. La mesure se fait à présent sur le courant instantané et non sur la vitesse instantanée. Cette modification change-t-elle le fonctionnement de la diode idéale ?

Si la diode est bloquée ($i = 0$), alors $u_M \equiv e = \alpha \dot{\theta}$ donc on garde la même condition de bascule, c'est à dire que la diode devient passante si $\dot{\theta} \geq 0$. Donc pas de changement en partant d'une diode bloquée.

Si la diode est passante ($i > 0$), alors $i = u_M/R = e/R - r/R i > 0$. Auquel cas, le changement d'état de la diode est décalé à la vitesse $0 < ri < \dot{\theta}$. La diode va changer d'état pour une vitesse faible mais pas forcément nulle.

Donc, du moment que la diode est sensible au signe de i , la résistance des fils va provoquer une petite erreur sur la détection du zéro en vitesse quand la diode passe de l'état passant ($i > 0$) à l'état bloqué ($i = 0$). La diode va donc parfois interdire des tensions e très faibles. Expérimentalement, cela revient à laisser parfois la pale libre lorsque elle a une vitesse positive très faible. Comme ces évènements apportent une faible puissance, on va supposer par la suite que ce démon plus réaliste discrimine très bien le sens de la vitesse. Si le démon fonctionne, on s'attend à voir la pale subir une rotation moyenne.

9.1.3 Point de vue thermodynamique

Si l'on cherche à réinterpréter cette expérience du point de vue de la thermodynamique, il y a deux flux d'énergie mis en jeu. D'une part, la source chaude, le moteur introduit de l'énergie dans le circuit. Par analogie avec une machine thermodynamique, on va appeler *chaleur* q cette énergie instantanée. D'autre part, le dipole de résistance R pourrait représenter n'importe quel dipole, par exemple un moteur, une batterie à charger... ou plus simplement une lampe, un filament chauffé par effet joules. On appellera donc w , l'énergie instantanée consommée par ce dipôle. On note avec un point " \dot{q} " et " \dot{w} " les puissances associées. Elles sont données à chaque instant par :

$$\dot{q}(t) \equiv e(t)i(t) \quad \dot{w}(t) \equiv Ri^2(t) \quad (9.2)$$

On peut même définir un rapport de transformation de ce système :

$$\eta(t) \equiv \frac{\dot{w}(t)}{\dot{q}(t)} \quad (9.3)$$

On peut abusivement l'appeler rendement instantané de notre système. Pour une définition plus habituelle du rendement thermodynamique, on utilise la notation $\hat{\eta}$:

$$\hat{\eta} \equiv \frac{\langle \dot{w} \rangle}{\langle \dot{q} \rangle} \quad (9.4)$$

9.1.4 Un mot sur la dynamique de la pale

Une fois le moteur branché au démon tel que sur la figure 9.3, l'équation du mouvement de la pale est modifié :

$$Jd_t\dot{\theta} = \Gamma_{\text{retro}}[\dot{\theta}] + \Gamma_{\text{rand}}[\dot{\theta}_0] = -\alpha i[\dot{\theta}] + \Gamma_{\text{rand}}[\dot{\theta}_0]$$

Rappelons que, expérimentalement, le temps de corrélation de la vitesse $\tau^* = 18$ ms est grand devant la durée typique entre deux chocs $\tau^\zeta \approx 3$ ms. Le couple aléatoire résultant $\Gamma_{\text{rand}}[\dot{\theta}_0]$ peut être représenté par un bruit blanc dans le référentiel propre de la pale. Dans le référentiel du laboratoire, il devient un bruit blanc de variance $2D\gamma^2$ et un amortissement fluide linéaire de coefficient γ :

$$\Gamma_{\text{rand}}[\dot{\theta}_0] = -\gamma\dot{\theta} + \gamma\sqrt{2D}\zeta(t) \quad \text{avec : } \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = 1\delta(\tau) \quad (9.5)$$

L'équation du mouvement de la pale est alors une équation de Langevin modifiée :

$$Jd_t\dot{\theta} = \Gamma_{\text{retro}}[\dot{\theta}] - \gamma\dot{\theta} + \gamma\sqrt{2D}\zeta(t) \quad (9.6)$$

Avec $\Gamma_{\text{retro}}[\dot{\theta}] \equiv -\alpha i$. Or, si on note $R_{\text{tot}} = r + R$, le démon impose en fait $i = e/R_{\text{tot}}$ si $\dot{\theta} > 0$ et 0 si non :

$$\Gamma_{\text{retro}}[\dot{\theta}] = -\frac{\alpha^2}{R_{\text{tot}}}\mathcal{S}_{[\dot{\theta}]} \quad \text{avec : } \mathcal{S}_{[\dot{\theta}]} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\theta} > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

Donc, on peut proposer l'équation du mouvement de la pale suivante :

$$Jd_t\dot{\theta} = -\left(\gamma + \frac{\alpha^2}{R_{\text{tot}}}\mathcal{S}_{[\dot{\theta}]}\right)\dot{\theta} + \gamma\sqrt{2D}\zeta(t) \quad (9.8)$$

Le démon que nous proposons montre un frottement fluide différent en fonction du sens de rotation de la pale. Cette asymétrie est d'autant plus grande que la résistance totale est faible. L'équation (9.8) fait apparaître un certain nombre de paramètres dont on va rappeler ici le rôle :

D'abord, J en ($\text{kg m}^2/\text{s}$), l'inertie de la pale, et α en (Vs/rad), le facteur de conversion du moteur. Ce sont des quantités constantes qui sont fixées par la construction du système expérimental.

Ensuite, le paramètre R_{tot} qui correspond à la résistance totale dans le circuit du démon et contrôle la brisure de symétrie. On choisit ce paramètre en choisissant le dipôle.

Enfin, les paramètres γ et D dépendent de la préparation du gaz granulaire, et en particulier de sa température effective.

On peut définir V_0 comme une constante qui représente la vitesse typique de la pale. On peut alors définir la viscosité du fluide comme :

9.2 Montage

Le circuit du démon qui a été retenu est paradoxalement très simple à imaginer¹ : pour réaliser une diode idéale, il suffit de mesurer souvent une différence de tension de part et d'autre d'une résistance et ouvrir un interrupteur dès que l'on mesure un changement de signe de cette tension. L'analogie avec le Démon de Maxwell original qui vient ouvrir une porte si une particule a la vitesse souhaitée semble évident [33][34]. Pour notre application, un couple comparateur/interrupteur suffit. Le schéma du circuit réel utilisé est présenté en figure 9.4.

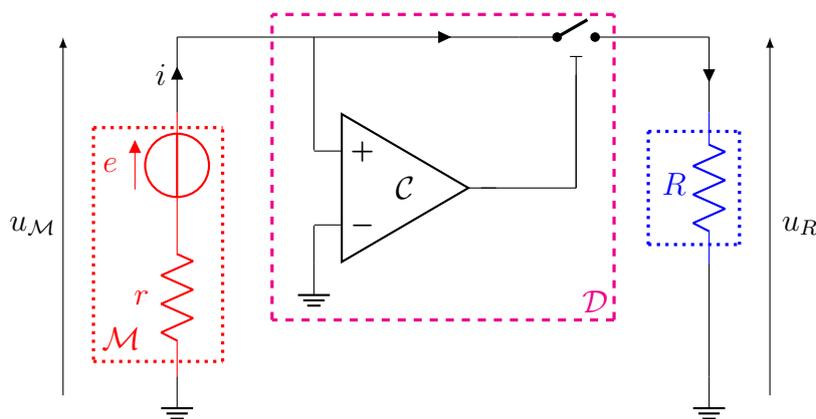


FIGURE 9.4 – Schéma expérimental du démon de Maxwell. Le cadre M modélise le moteur à courant continu comme un générateur de Thévenin : une source idéale de tension $e \equiv \alpha \dot{\theta}$ proportionnelle à la vitesse de la pale, et une résistance interne r . Le démon est le circuit D . L'élément C correspond à un comparateur analogique. Il compare les deux tensions V^+ à sa borne $+$ et V^- à sa borne $-$ et ouvre l'interrupteur si $V^+ - V^- > 0 (\pm 2 \text{ mV})$, soit ici si $u_M > 0 \pm 2 \text{ mV}$, l'interrupteur est ouvert. La comparaison est réalisée toutes les $20 \mu\text{s}$, sachant que le temps de corrélation de la vitesse de la pale est $\tau^* = 18 \text{ ms}$. La résistance R permet les mesures du courant i grâce à la mesure des tensions u_M et u_R .

¹Remarquons qu'une diode classique (jonction PN) au silicium possède un seuil de 0.6 V . Cela signifie qu'il faut dépasser une tension $u_M \approx 600 \text{ mV}$ pour autoriser le passage du courant. Cependant, les valeurs typiques des tensions avec lesquelles on travaille dans les gaz granulaires sont de l'ordre de $u_M \approx 50 \text{ mV}$. C'est pourquoi nous avons dû réaliser nous même un circuit qui fasse le travail d'une diode idéale même à faibles tensions. Cependant, de nombreux circuits usuels ne conviennent pas car on utilise souvent des diodes en tension sans continuité du courant. Or, nous avons besoin que le courant qui passe dans la résistance traverse également le moteur. Ceci exclut un certain nombre de montages reposant sur des amplificateurs opérationnels comme la "diode sans seuil".

Le cadre \mathcal{M} représente le moteur associé à la pale plongée dans le gaz granulaire. Le cadre \mathcal{D} représente la diode idéale. Il s'agit en réalité d'un interrupteur qui est commandé par la sortie logique d'un comparateur \mathcal{C} dont la borne + est placée au potentiel $u_{\mathcal{M}}$, la borne - est placée à la masse. La résistance R a un rôle double : d'une part, elle assure que la mesure du signe de la tension $u_{\mathcal{M}}$ est une mesure du signe du courant $i = u_{\mathcal{M}}/R$. Mais elle sert également à mesurer la puissance disponible pour un dipôle d'impédance R .

Les amplificateurs opérationnels ne sont pas optimisés pour fonctionner en saturation, On les préférera pour faire de l'amplification linéaire. Pour effectuer la comparaison, qui est une opération non linéaire, nous avons donc choisi d'utiliser un composant optimisé pour réaliser ce genre de tâches : le comparateur analogique \mathcal{C} . Il présente une très faible hystérésis temporelle et réalise une comparaison toutes les $20 \mu\text{s}$, période faible devant le temps de corrélation de la vitesse $\tau^* = 18 \text{ m s}$ ou devant le temps typique entre deux chocs sur la pale $\tau^s = 3 \text{ ms}$. De plus, ce composant présente une faible hystérésis en tension ($\pm 2 \text{ mV}$) c'est à dire qu'une fois fermé, $u_{\mathcal{M}} > 0$, il ne fait s'ouvrir l'interrupteur que si $u_{\mathcal{M}} < -2 \text{ mV}$. À l'inverse, l'interrupteur ouvert ne se ferme que si $u_{\mathcal{M}} > 2 \text{ mV}$. C'est un "défaut" de ce composant électronique qui est tout à notre avantage puisqu'il assure $Ri > u_{\mathcal{M}} > 2 \text{ mV} > 0$. Le démon ne laissera jamais passer de courant négatif. L'interrupteur quant à lui obéit à des niveaux logiques $0 - 5 \text{ V}$. Il se ferme en 20 ns . Une fois fermé, il possède une résistance d'environ 2.5Ω que l'on ajoute dans la contribution à R_{tot} . Une fois ouvert, sa résistance est supérieure à $1 \text{ G}\Omega$. Pour information, notre carte d'acquisition à une impédance d'entrée de $1 \text{ M}\Omega$.

On mesure les tensions $u_{\mathcal{M}}(t)$ et $u_R(t)$ à l'aide d'une carte d'acquisition. Ces deux tensions permettent d'avoir accès au courant $i(t) = u_R(t)/R$ et à la tension $e(t) = u_{\mathcal{M}}(t) + Ri(t)$ c'est à dire la vitesse de la pale $\dot{\theta}(t) = e(t)/\alpha$, mais aussi les puissances $\dot{q}(t) = e(t)i(t)$ et $\dot{w}(t) = Ri^2(t)$, ... Les résistances R et r sont mesurées à l'ohmmètre. Pour r , on doit débrancher et immobiliser la pale puis on mesure à l'ohmmètre la résistance aux bornes du moteur. En pratique, on mesure : $r \approx 113 \Omega$. On compte deux paramètres de contrôle dans cette expérience. D'une part, la résistance R qui quantifie l'asymétrie sur les fluctuations de vitesse imposée par le démon. D'autre part la température granulaire qui fixe la variance des fluctuations libre de vitesse.

Le gaz granulaire lui-même est produit comme expliqué au chapitre 3. Il est constitué de 330 billes d'acier inoxydable dans une cellule cylindrique de 5 cm de diamètre. Les billes sont mises en mouvement par un vibreur vertical à 40 Hz . Modifier l'amplitude de la vibration à volume et nombre de billes constant revient à changer la température effective du gaz granulaire. C'est ce qu'on choisit de faire en pratique pour fixer la température effective du gaz granulaire, ce qui revient à fixer l'énergie cinétique moyenne de la pale.

Une objection qui peut être faite à ce choix de source de chaleur est que le gaz granulaire et ses trois cent particules sont très loin de la limite thermodynamique. On se demande : le démon fonctionne-t-il ? Puis : le mouvement de la pale induit par le démon va-t-il modifier notablement les propriétés statistiques du gaz granulaire ?

Pour ce qui suit, nous présentons trois études complémentaires avec ce même système expérimental :

9.3 D'abord, nous choisissons la valeur typique $R = 200 \Omega$ pour vérifier que le démon fonctionne et nous mettons en évidence les différentes mesures réalisables sur cette machine.

9.4 Ensuite, on étudie la dépendance en R des différentes propriétés dynamiques et statis-

tiques de ce système : que se passe-t-il lorsque l'on modifie l'asymétrie imposée par le démon ?

9.5 Enfin, on étudie la dépendance en température effective des différentes propriétés dynamiques et statistiques de ce système : quelle est l'influence de la largeur de la distribution des vitesses ?

Avant toute chose, il faut vérifier que le démon fonctionne et induit un mouvement moyen de la pale. Fixons $R = 200 \Omega$, regardons le comportement de la pale, et voyons si la pale tourne, et si oui, voyons si le gaz est perturbé.

9.3 Résultats préliminaires

9.3.1 Vitesse moyenne

Pour voir si le démon fonctionne, il nous faut nous intéresser à la dynamique de la pale. On va donc comparer le cas $R = 200 \Omega$ au cas sans démon pour lequel la pale fluctue librement. Les trajectoires temporelles $\theta(t)$ sont présentées en figure 9.5. On définit :

$$\theta(t) \equiv \frac{1}{\alpha} \int_0^t e(s) ds \quad \text{avec : } \theta(0) \equiv 0 \quad (9.9)$$

Ainsi, on fait le choix que toutes les trajectoires partent de 0, ce qui facilite la comparaison.

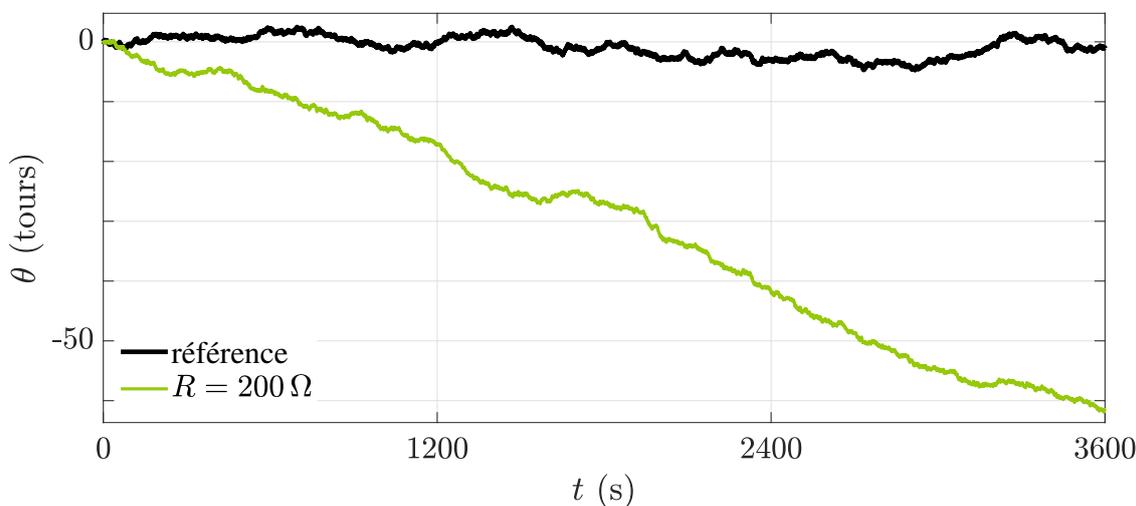


FIGURE 9.5 – Trajectoires de la pale au cours du temps pendant une heure à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. En noir, la référence, c'est à dire une trajectoire de la pale fluctuant librement sous les impacts du gaz granulaire sans dérive donc sans vitesse moyenne. En vert, trajectoire de la pale branchée par le démon à une résistance de 200Ω lorsque la vitesse angulaire est positive : $\dot{\theta} > 0$. La valeur à l'origine pour chaque trajectoire est choisie $\theta(t = 0) = 0$.

Dans le cas sans démon, on observe que la position de la pale fluctue autour de sa valeur moyenne $\langle \dot{\theta} \rangle \approx 0$. Par contre, en présence du démon ($R = 200 \Omega$), on remarque que la position de la pale fluctue autour d'une pente moyenne. La vitesse moyenne est $\langle \dot{\theta} \rangle \approx -5.8$ tours/min ≈ -0.096 tours/s. Le démon laisse libres les fluctuations négatives, mais freine les fluctuations positives de vitesse. On peut donc dire que le démon fonctionne.

9.3.2 Le démon perturbe peu le gaz granulaire

Au chapitre 7, on a étudié l'influence d'une pale tournant à vitesse constante dans le gaz granulaire sur les propriétés de ce dernier. On avait conclu que, tant que la vitesse de la pale est faible devant l'écart type des fluctuations libres de vitesse σ_H , le gaz granulaire n'était pas significativement affecté par la rotation moyenne de la pale. Dans cette expérience, $\langle \dot{\theta} \rangle = 0.096$ tours/s, alors que l'écart type des fluctuations est $\sigma_H = 5.5$ tours/s. Nous sommes donc clairement dans le cas où le mouvement de la pale ne perturbe que très peu le gaz granulaire.

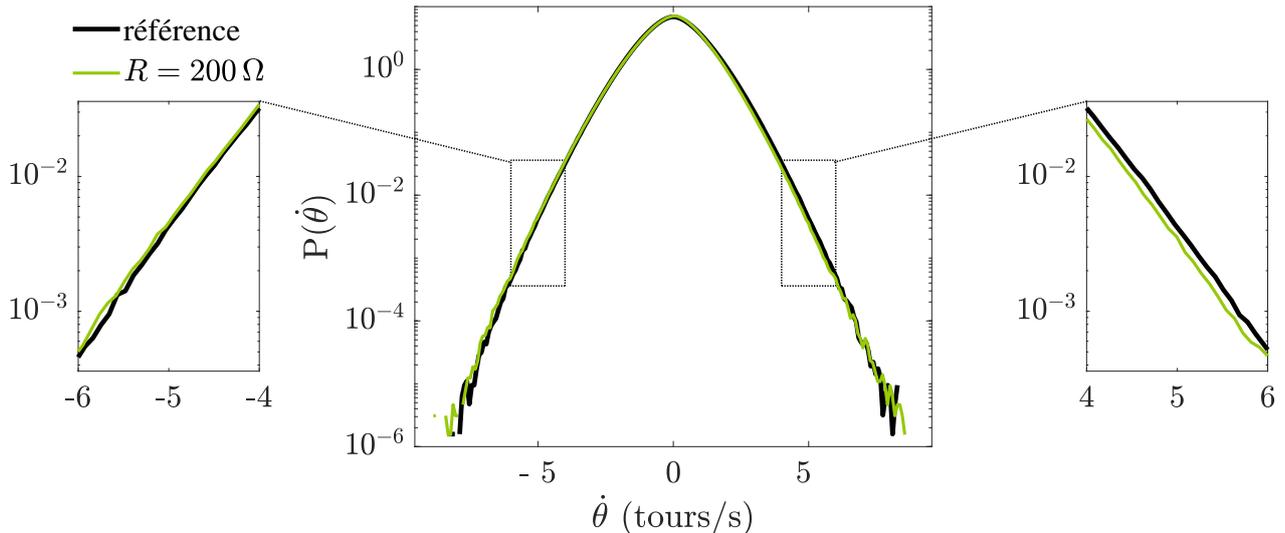


FIGURE 9.6 – Histogrammes normalisés de la vitesse de la pale $\dot{\theta}$ dans le référentiel du laboratoire pour deux heures d'acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. En noir, la référence et en vert avec le démon. Les encarts sont des agrandissements de la zone encadrée correspondante. Le démon freine les valeurs de vitesse $\dot{\theta} > 0$ qui sont alors moins probables que dans le cas de référence sans démon. Par contre elles sont indiscernables dans le cas $\dot{\theta} < 0$, où la pale est libre.

Sur la figure 9.6, on remarque que les histogrammes sont très peu modifiés par le démon. Cependant, en comparant les ailes des histogrammes pour les mêmes intervalles de vitesse, on remarque une asymétrie de l'histogramme à $R = 200 \Omega$ lorsque le circuit est fermé. En effet, pour $\dot{\theta} < 0$, où la pale est libre, les histogrammes sans et avec démon sont superposés. Par contre, pour $\dot{\theta} > 0$, où le démon freine la pale, les probabilités d'avoir une même vitesse est plus faible dans le cas avec démon. Cette légère asymétrie est suffisante pour expliquer la faible vitesse de rotation de la pale. Qu'en est-il des propriétés des fluctuations ?

9.3.3 Fluctuations de vitesse

On se demande quelles sont les fluctuations dans le référentiel tournant où la vitesse moyenne de la pale est nulle : $\theta_0(t) \equiv \theta(t) - \langle \dot{\theta} \rangle t$. On étudie les incréments à l'échelle τ : $\delta_\tau \theta_0(t) = \theta_0(t + \tau) - \theta_0(t)$. Le second moment des incréments est alors $\mathcal{Q}_2 \equiv \langle \delta_\tau \theta_0^2 \rangle = \text{Var}(\delta_\tau \theta)$. Cette quantité représente l'aire typique de la zone parcourue par la particule dans son espace des phases. On les représente en figure 9.7.

D'abord, on remarque que les deux courbes avec et sans démons sont presque indiscernables.

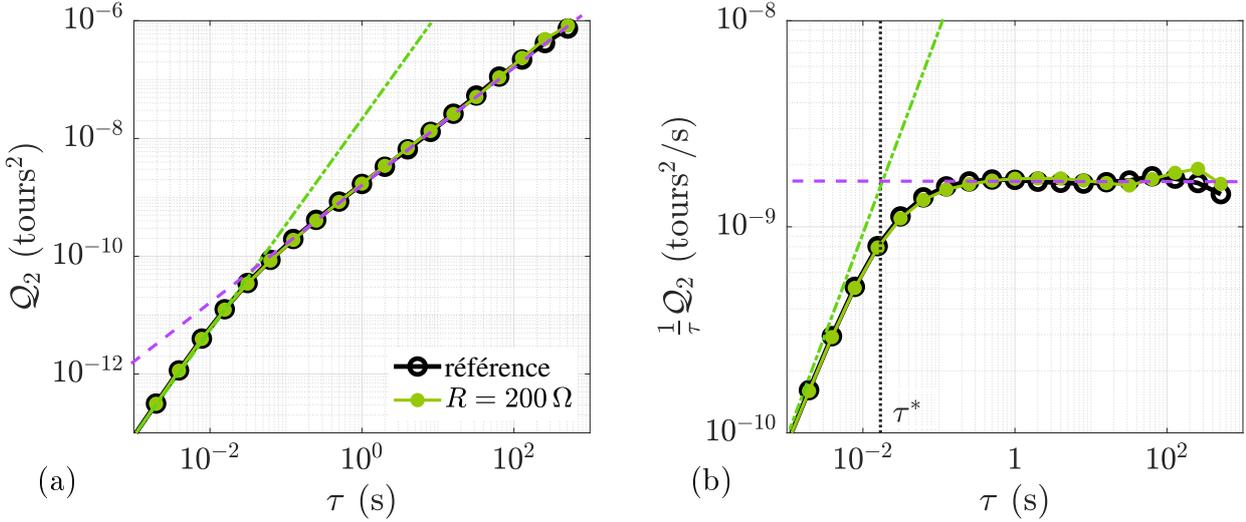


FIGURE 9.7 – Comparaison des fluctuations avec et sans démon : second moment des incréments $\mathcal{Q}_2 \equiv \text{Var} \{ \theta(t + \tau) - \theta(t) \}$ à l'échelle τ dans le référentiel tournant, en fonction de l'échelle τ pour deux heures d'acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. (a) : \mathcal{Q}_2 en fonction de τ . En pointillés verts, une droite de pente 2, correspondant au régime balistique. En pointillés violets, une droite de pente 1 correspondant au régime diffusif. L'échelle τ^* est le temps de corrélation de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ et correspond au temps typique de changement de régime. (b) : même figure mais normalisée par l'échelle, c'est à dire \mathcal{Q}_2/τ en fonction de τ .

Dans chaque cas, on remarque deux comportements asymptotiques différents. D'abord, pour les petites échelles, on voit un régime balistique où $\mathcal{Q}_2 = V_0^2 \tau^2$. Pour les grandes échelles, on observe clairement un régime diffusif où $\mathcal{Q}_2 = 2D\tau$. D désigne le coefficient de diffusion, et V_0 une vitesse typique de la pale après un choc.

Ce type de comportement est tout à fait compatible avec un mouvement brownien de la pale décrit par une équation de Langevin classique. L'intersection entre ces deux régimes se fait au temps : $2D/V_0^2 = J/\tilde{\gamma}$. Ce temps visqueux correspond quantitativement au temps de corrélation de la vitesse $\tau^* \approx 18$ ms permet de mesurer le coefficient de viscosité effectif $\tilde{\gamma}$ dans le référentiel tournant. On déduit de cette observation que l'on peut décrire le comportement de la pale dans le référentiel tournant par une équation de Langevin tout à fait classique :

$$Jd_t \dot{\theta}_0 = -\tilde{\gamma} \dot{\theta}_0 + \tilde{\gamma} \sqrt{2D} \zeta \quad \text{avec : } \langle \zeta(t) \zeta(t + \tau) \rangle = 1 \delta(\tau) \quad (9.10)$$

C'est un résultat plutôt surprenant : on a vu que le démon donne un coefficient de viscosité différent en fonction du signe de la vitesse de la pale $\dot{\theta}$ ce qui donne une vitesse moyenne $\langle \dot{\theta} \rangle \neq 0$. Rappelons l'équation de Langevin modifiée (9.8) que nous avons proposée pour décrire la vitesse dans le référentiel du laboratoire :

$$Jd_t \dot{\theta} = - \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{R_{tot}} \mathcal{S}_{[\dot{\theta}]} \right) \dot{\theta} + \gamma \sqrt{2D} \zeta \quad \text{avec : } \langle \zeta(t) \zeta(t + \tau) \rangle = 1 \delta(\tau)$$

Cette différence de viscosité est en effet ce que l'on observe au vue de l'asymétrie des histogrammes de vitesse introduite par le démon. Cependant, une fois passé dans le référentiel tournant, à l'ordre deux, les fluctuations sont identiques à celles d'une particule brownienne pourvue d'un coefficient visqueux effectif $\tilde{\gamma}$. A l'ordre deux, *tout se passe comme si* on avait simplement rajouté un couple constant $F \equiv \langle \dot{\theta} \rangle \tilde{\gamma} / J$ dans cette l'équation de base :

$$Jd_t \dot{\theta} = -\tilde{\gamma} \dot{\theta} + \tilde{\gamma} \sqrt{2D} \zeta + F \quad \text{avec : } \langle \zeta(t) \zeta(t + \tau) \rangle = 1 \delta(\tau) \quad (9.11)$$

Il reste à voir quelle est l'évolution de ces nouveaux paramètres D , $\tilde{\gamma}$ et F en fonction de la résistance R et de la température, *i.e.* $Var(e)$. C'est ce qu'on verra en parties 9.4.1 et 9.6.

Mais avant cela, on souhaite aborder cette expérience sous l'angle de la thermodynamique.

9.3.4 Point de vue thermodynamique

Comme on l'a présenté en section 9.1.3, à partir des mesures de $i(t)$ et $e(t)$, on peut exprimer $\dot{q}(t) = e(t)i(t)$, le flux instantané de chaleur provenant du gaz granulaire ainsi que $\dot{w}(t) = Ri^2(t)$, la puissance instantanée investie dans le dipôle R . On peut même proposer un rendement instantané $\eta(t) = \dot{w}(t)/\dot{q}(t)$. A partir des valeurs instantanées, on peut également étudier les densités de probabilité de ces grandeurs. Les histogrammes de ces grandeurs sont présentés en figure 9.8.

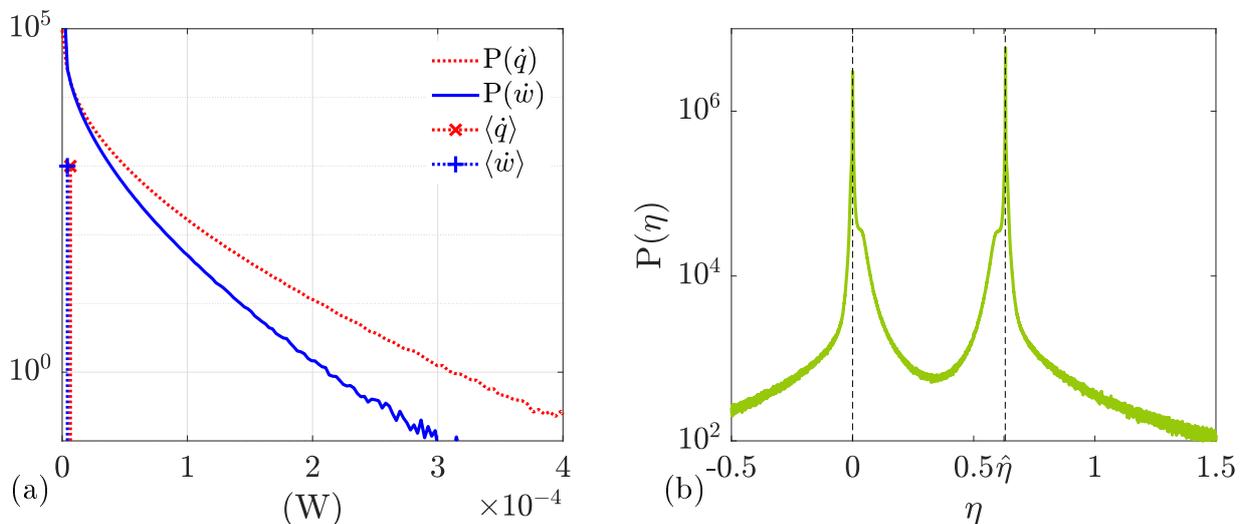


FIGURE 9.8 – Histogrammes normalisés des quantités thermodynamiques instantanées mises en jeu par le démon à $R = 200 \Omega$ pour deux heures d'acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. (a) : histogrammes normalisés de la puissance \dot{q} arrachée au gaz granulaire (en bleu), ainsi que de celle dissipée par la résistance \dot{w} (en rouge). Les valeurs moyennes de ces quantités : $\langle \dot{w} \rangle \approx 4.2 \cdot 10^{-6} \text{ W}$, et $\langle \dot{q} \rangle \approx 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ W}$ sont indiquées par des pointillés verticaux. (b) : histogramme normalisé du rendement instantané, c'est à dire $\eta(t) \equiv \dot{w}(t)/\dot{q}(t)$. Les traits pointillés correspondent aux deux maxima : l'un en 0 et l'autre en $\hat{\eta} \equiv \langle \dot{w} \rangle / \langle \dot{q} \rangle \approx 63\%$.

Sur les histogrammes des puissances, on remarque que 0 est la valeur la plus probable pour les deux puissances. la probabilité de \dot{q} est plus grande que celle de \dot{w} pour une valeur donnée, ce qui est plutôt cohérent : ces deux quantités sont corrélées et on ne peut pas extraire d'avantage d'énergie que celle donnée par la source chaude. D'ailleurs la chaleur moyenne $\langle \dot{q} \rangle = 6.6 \mu\text{W}$ est supérieure à l'énergie moyenne utilisée par le dipôle $\langle \dot{w} \rangle = 4.2 \mu\text{W}$. On peut alors définir le rendement moyen : $\hat{\eta} = \langle \dot{w} \rangle / \langle \dot{q} \rangle = 0.63$.

Sur l'histogramme du rendement instantané $\eta(t)$, on remarque également deux maxima, un en 0 et un en $\hat{\eta} = 63\%$ qui correspond quantitativement à la valeur du rendement moyen. Le maximum en 0 correspond au cas où le démon bloque le courant dans le circuit $i = 0$. Le second maximum correspond au rendement moyen quand le circuit est fermé. On pourra expliquer sa valeur quand on aura étudié sa dépendance en R dans la prochaine partie.

Conclusion préliminaire

Dans cette partie, nous avons construit un démon de Maxwell. Il est capable d'imposer une rotation moyenne à la pale. Nous avons mis en évidence la brisure de symétrie de probabilité des vitesses. Nous avons également vu qu'il ne semblait pas perturber beaucoup le gaz granulaire. Nous avons déduit qu'à l'ordre deux, l'influence du démon était de changer la viscosité effective en plus d'imposer une vitesse moyenne. Nous avons également défini des quantités thermodynamiques sur cette machine et en particulier, le rendement.

Comment ces deux propriétés dépendent-elles de l'asymétrie introduite par le démon au travers de la valeur de la résistance R et de la température granulaire ?

9.4 Rôle de l'asymétrie : dépendance en R

En figure 9.9, on a représenté les trajectoires pour une même température effective $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J soit $\langle E_c \rangle = 1e, 10^{-6}$ J pour différentes valeurs de R .

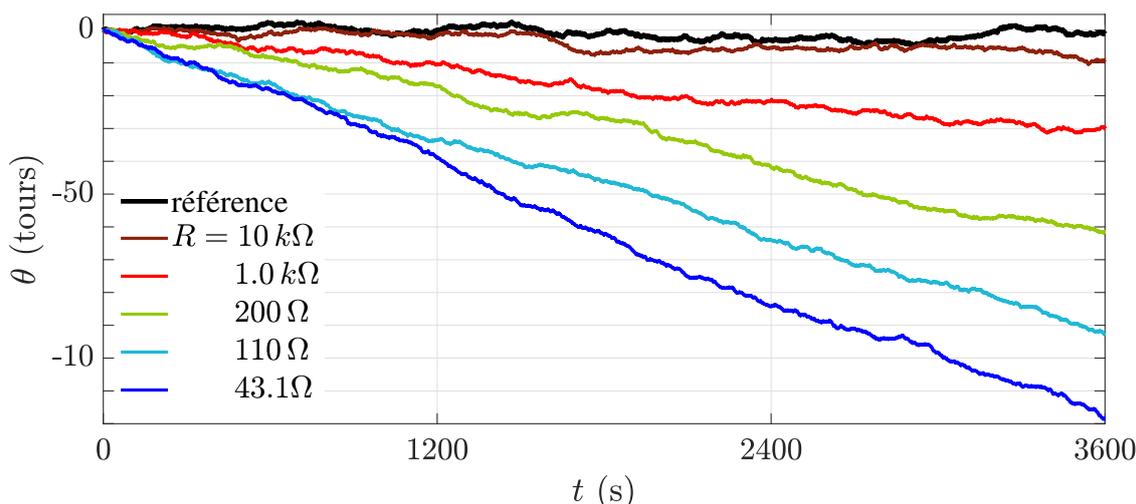


FIGURE 9.9 – Trajectoires de la pale au cours du temps pendant une heure à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J pour différentes valeurs de R . En noir, la référence, c'est à dire une trajectoire de la pale fluctuant librement sous les impacts du gaz granulaire. La valeur à l'origine pour chaque trajectoire est choisie $\theta(t = 0) = 0$.

On remarque que la vitesse de dérive augmente quand on augmente la valeur de la résistance R du dipôle choisi. Cette observation s'explique par l'asymétrie des histogrammes de vitesse induite par le démon. On les présente en figure 9.10. D'abord, la partie $\dot{\theta} < 0$ des histogrammes reste superposée à la référence. Ce n'est pas surprenant puisque il s'agit des événements où la pale est libre. Cependant, on remarque en comparant les ailes de ces histogrammes que sur la partie $\dot{\theta} > 0$, la probabilité d'une vitesse donnée est d'autant moins importante que la résistance R est faible. Cette asymétrie reste faible quelle que soit la résistance du dipôle R .

Les moments d'ordre impair, comme la moyenne ou le coefficient d'asymétrie de la vitesse, permettent de quantifier cette asymétrie. En particulier le *coefficient d'asymétrie* "Skewness()" décrit l'asymétrie de la distribution. On le définit comme le moment d'ordre 3 de la variable

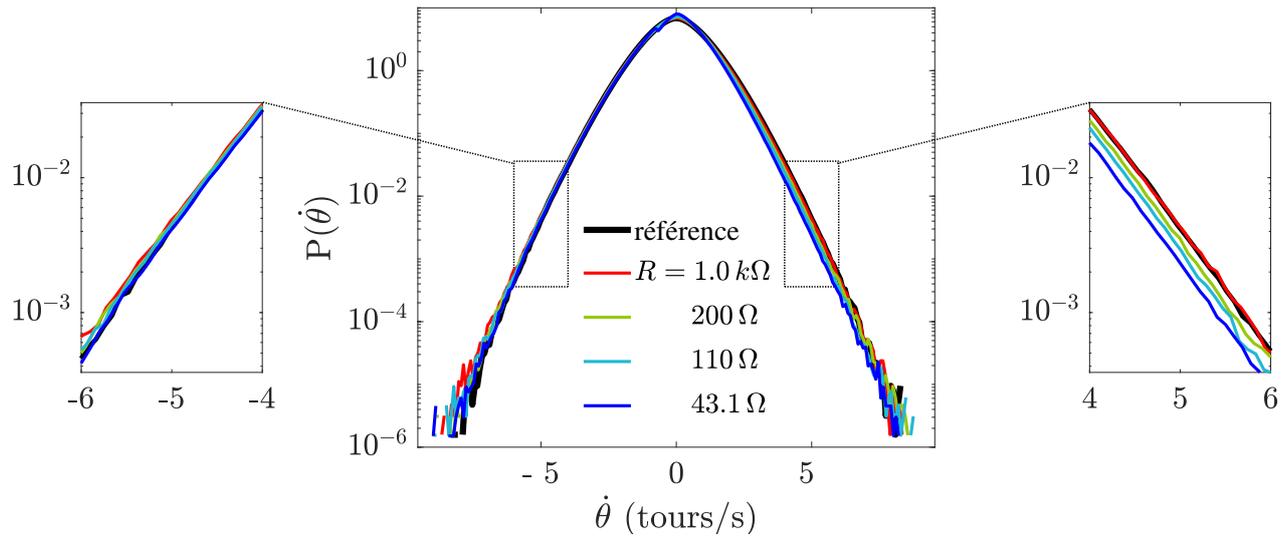


FIGURE 9.10 – Histogrammes normalisés de la vitesse de la pale $\dot{\theta}$ dans le référentiel du laboratoire pour deux heures d’acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J pour différentes valeurs de R (couleurs). En noir, la référence. Les encarts sont des agrandissements de la zone encadrée correspondante. Le démon freine les valeurs de vitesse $\dot{\theta} > 0$ qui sont alors moins probables que dans le cas de référence sans démon. Pour $\dot{\theta} < 0$, la pale est libre.

centrée réduite :

$$\text{Skewness}(\dot{\theta}) \equiv \left\langle \left(\frac{\dot{\theta}(t) - \langle \dot{\theta} \rangle}{\sigma} \right)^3 \right\rangle \quad \text{avec : } \sigma^2 \equiv \left\langle \left(\dot{\theta}(t) - \langle \dot{\theta} \rangle \right)^2 \right\rangle \quad (9.12)$$

Ces deux premiers moments sont représentés en figure 9.11.

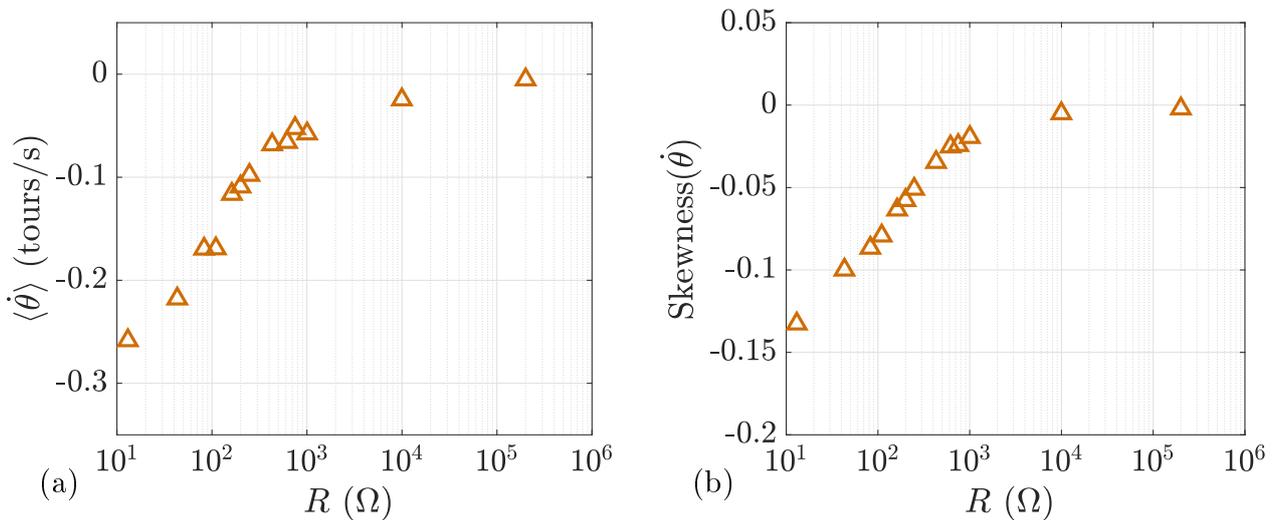


FIGURE 9.11 – Évolution de la moyenne et le coefficient d’asymétrie la vitesse de la pale en fonction de la résistance R à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. (a) : $\langle \dot{\theta} \rangle$ en fonction de R . Les valeurs sont négatives car la pale tourne dans le sens anti-horaire. (b) : $\text{Skewness}(\dot{\theta})$ en fonction de R .

La vitesse moyenne pour de grandes valeurs de R tend vers 0, tout comme le coefficient d’asymétrie. En effet, dans le cas asymptotique $R \rightarrow +\infty$, le courant induit tend vers $i = 0$,

donc le démon n'exerce plus aucune rétroaction sur la pale. On retrouve alors le cas de référence symétrique où la pale est libre de fluctuer indépendamment du sens des fluctuations. Par contre, plus la résistance R est faible, plus i est faible, donc plus la rétroaction est forte et plus la densité de probabilité des vitesses est asymétrique. La vitesse moyenne devient importante tout comme le coefficient d'asymétrie. Le cas asymptotique $R_{tot} = 0$ n'est hélas pas accessible. En effet, même si on arrivait à avoir $R = 0$, le courant dans le circuit resterait limité par la résistance interne du moteur r . Enfin, notons que, même dans cette limite $R = 0$, la vitesse moyenne reste trop faible pour perturber le gaz granulaire car $\langle \dot{\theta} \rangle \ll \sigma$, voir chapitre 7.

Maintenant que l'on a vu l'influence de R sur le mouvement global de la pale, deux questions se posent :

9.4.1 Quelle est l'influence de R sur la dynamique ?

9.4.2 Quelle est l'influence de R sur les grandeurs thermodynamiques (\dot{q} , \dot{w} et η, \dots) ?

9.4.1 Effet de R sur les coefficients dynamiques

Dans la partie précédente 9.3.3, on avait émis l'hypothèse que, jusqu'à l'ordre 2, la dynamique modifiée par le démon prenait la forme de l'équation (9.11). On la reproduit ici en indiquant en indices les dépendances des quantités :

$$Jd_t\dot{\theta} = -\tilde{\gamma}_{[R, kT]}\dot{\theta} + \tilde{\gamma}_{[R, kT]}\sqrt{2D_{[kT]}}\zeta + F_{[R, kT]} \quad \text{avec : } \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = 1\delta(\tau) \quad (9.11)$$

kT représente une éventuelle dépendance en la température granulaire effective, c'est à dire en $\langle E_c \rangle$. R représente une éventuelle dépendance en R . Le terme F correspond à la force qui explique la dérive moyenne.

Tout d'abord, on a vu en figure 9.11(a) que $\langle \dot{\theta} \rangle$ dépend de R . Or, l'équation (9.11) implique que $\langle \dot{\theta} \rangle \propto F/\tilde{\gamma}$. Donc F ou $\tilde{\gamma}$ dépendent de R . Pour élucider cette question, on s'en remet une fois encore à l'étude du second moment des incréments \mathcal{Q}_2 à l'échelle τ . On le présente en figure 9.12 : quelle que soit la valeur de R , on observe les régimes balistiques et diffusif. Toutes les courbes sont superposées ce qui indique un temps visqueux peu dépendant de R . Il correspond encore une fois quantitativement au temps de corrélation de la vitesse τ^* . Or, ce temps visqueux est $1/\tilde{\nu} \equiv J/\tilde{\gamma}$. Il semble donc raisonnable de proposer en première approximation que $\tilde{\gamma}$ ne dépend que très peu de R . La viscosité perçue par la pale lors de ses fluctuations semble peu dépendre de R . Or, la vitesse moyenne de la pale $\langle \dot{\theta} \rangle \propto F/\tilde{\gamma}$ dépend fortement de R . Donc cette dépendance en R provient surtout de la dépendance de F en R . On peut donc simplifier l'équation du mouvement :

$$Jd_t\dot{\theta} = -\tilde{\gamma}_{[kT]}\dot{\theta} + \tilde{\gamma}_{[kT]}\sqrt{2D_{[kT]}}\zeta + F_{[R, kT]} \quad \text{avec : } \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = 1\delta(\tau) \quad (9.13)$$

La dynamique de la pale dans le gaz granulaire est donc dominée par la température effective du gaz granulaire. L'influence de R apparait à l'ordre 2 seulement sur la vitesse moyenne, et pas sur les fluctuations de cette dernière. La dépendance en kT est étudiée en section 9.5 et 9.6.

9.4.2 Effet de R sur les quantités thermodynamiques

On s'intéresse ici aux quantités thermodynamiques et leur dépendance en R . Les deux flux de puissance sont présentés en figure 9.13. Rappelons que \dot{q} désigne la puissance entrant dans le

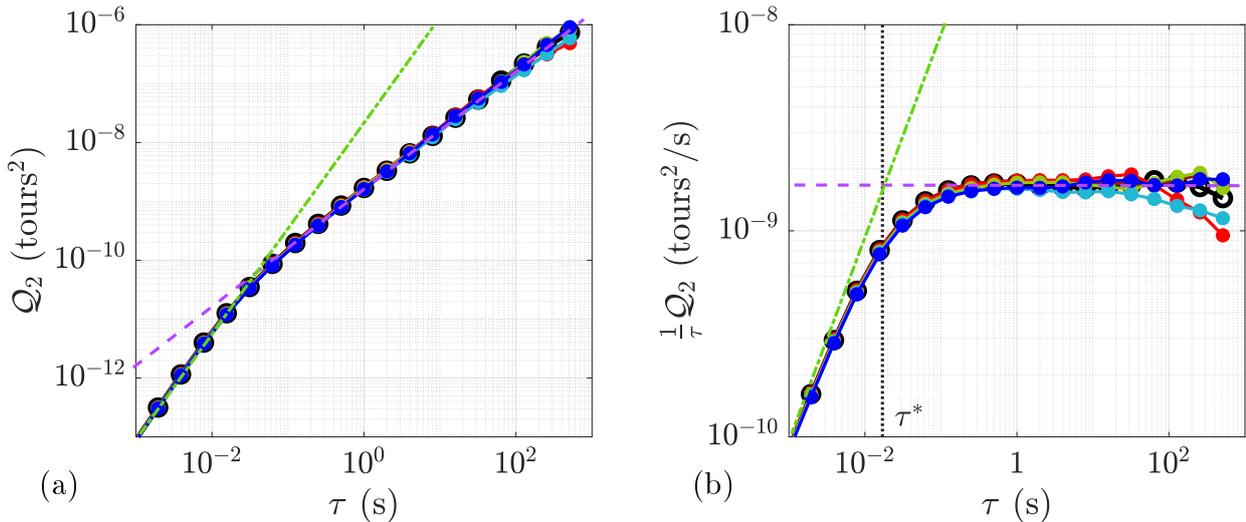


FIGURE 9.12 – Comparaison des fluctuations à l'ordre 2 pour différentes R (même code couleur qu'en figure 9.9). Second moment des incréments Q_2 à l'échelle τ dans le référentiel tournant, en fonction de l'échelle τ pour deux heures d'acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. (a) : Q_2 en fonction de τ . En pointillés verts, une droite de pente 2, correspondant au régime balistique. En pointillés violets, une droite de pente 1 correspondant au régime diffusif. L'échelle τ^* est le temps de corrélation de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ et correspond au temps typique de changement de régime. (b) : même figure mais rapportée l'échelle τ : Q_2/τ en fonction de τ .

circuit extraite au gaz granulaire et \dot{w} désigne la puissance utilisée par le dipôle de résistance R .

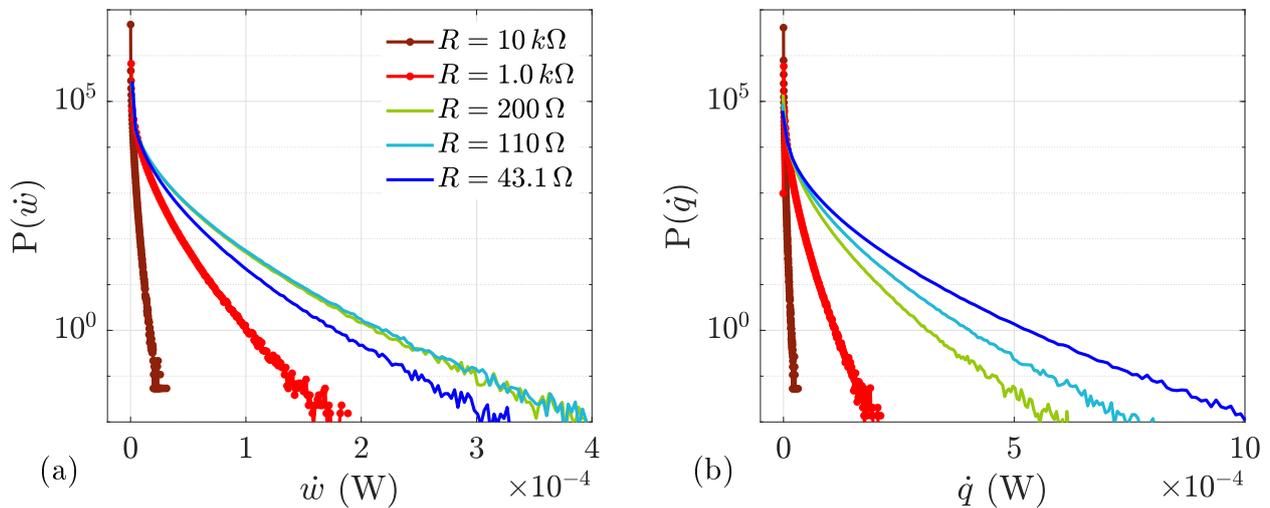


FIGURE 9.13 – Histogrammes normalisés des quantités thermodynamiques instantanées mises en jeu pour différentes valeurs de R et pour deux heures d'acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. (a) : histogrammes normalisés de la puissance \dot{q} arrachée au gaz granulaire, (b) : histogramme de la puissance \dot{w} utilisée par la le dipole (ici dissipée dans R). Même code couleur qu'en figure 9.9 pour les différentes valeurs de R .

On remarque que tous les histogrammes ont leur maximum en 0 et leur forme semble peu dépendre de R . La largeur typique dépend de R . Cette dépendance est monotone en R pour la puissance $\dot{q} = e i$ donnée par le gaz granulaire au circuit seulement. En effet, la largeur typique

de $\dot{w} = Ri^2$ est maximale entre $R = 100 \Omega$ et $R = 200 \Omega$. Comme $\dot{w} > 0$ est une quantité positive, cette propriété doit se répercuter sur les flux moyens $\langle \dot{q} \rangle$ et $\langle \dot{w} \rangle$. Ces derniers, ainsi que le rendement thermodynamique $\hat{\eta} = \langle \dot{q} \rangle / \langle \dot{w} \rangle$ sont présentés en figure 9.14.

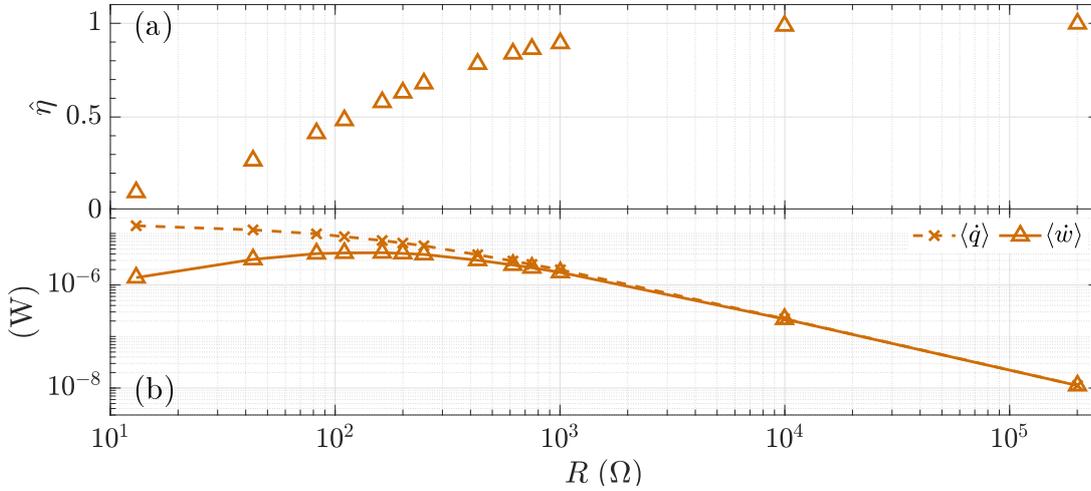


FIGURE 9.14 – Evolution des quantités thermodynamiques en fonction de R pour deux heures d’acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. (a) : le rendement moyen. (b) : les différents flux moyens de puissance entrante (\dot{q}) dans le circuit et sortante (\dot{w}) du dipôle R .

On remarque bien que, si $\langle \dot{q} \rangle$ évolue de manière monotone avec R , ce n’est pas le cas de $\langle \dot{w} \rangle$ qui présente un maximum entre $R = 100 \Omega$ et $R = 200 \Omega$. Les valeurs de ces deux flux semblent coïncider quand $R \rightarrow +\infty$. Le rendement thermodynamique $\hat{\eta}$, qui n’est autre que le rapport de ces deux quantités tend alors vers 1 pour $R \rightarrow +\infty$. En effet, pour $R \rightarrow +\infty$, $i \rightarrow 0$, le démon ne fait plus rien, donc on retrouve le cas symétrique. Les puissances extraites sont alors nulles.

Par contre, le rendement semble tendre vers 0 pour $R \rightarrow 0$ alors que le flux d’énergie arrachée au gaz granulaire est maximal. Un autre point d’intérêt est que la valeur de R pour laquelle le rendement vaut $\hat{\eta} = 1/2$ semble coïncider avec celle du maximum de $\langle \dot{w} \rangle$.

En résumé, d’une part, pour $R \rightarrow 0$, on a beau disposer d’une grande puissance fournie $\langle \dot{q} \rangle$, le rendement est minimal car peu de cette puissance est en réalité utilisé par le dipôle. De plus, pour $R \rightarrow +\infty$, le rendement vaut 1, c’est à dire que toute la puissance fournie est utilisée par le dipôle, même si les valeurs de puissance sont très faibles. Il y a un maximum de puissance investie dans le dipôle entre $R = 100 \Omega$ et $R = 200 \Omega$, qui correspond à la moitié de la puissance fournie par le gaz granulaire. Des modélisations de ces quantités sont décrites en 9.5.4 et sont disponibles en figure 9.19. Le modèle repose sur l’adaptation d’impédance et montre en particulier que la puissance $\langle \dot{w} \rangle$ est maximale pour $R = r = R_{tot}/2 \approx 115 \Omega$.

Voici en figure 9.15 l’histogramme du rendement instantané pour différentes valeurs de R . On remarque le même style de distribution avec deux maxima quelle que soit la valeur de R . La valeur 0 correspond au maximum quand le démon empêche le passage du courant (car $\dot{w} = 0$). Par contre le second maximum est décalé quand on augmente la valeur de R . En fait, la position de ce maximum correspond quantitativement à la valeur du rendement thermodynamique $\hat{\eta}(R) = \langle \dot{w} \rangle / \langle \dot{q} \rangle$. Nous n’avons pas étudié la forme précise de ces distributions.

Maintenant que nous avons étudié comment notre système dépend de l’asymétrie causée par le démon et R , il nous reste à étudier l’influence de la température effective du gaz granulaire qui

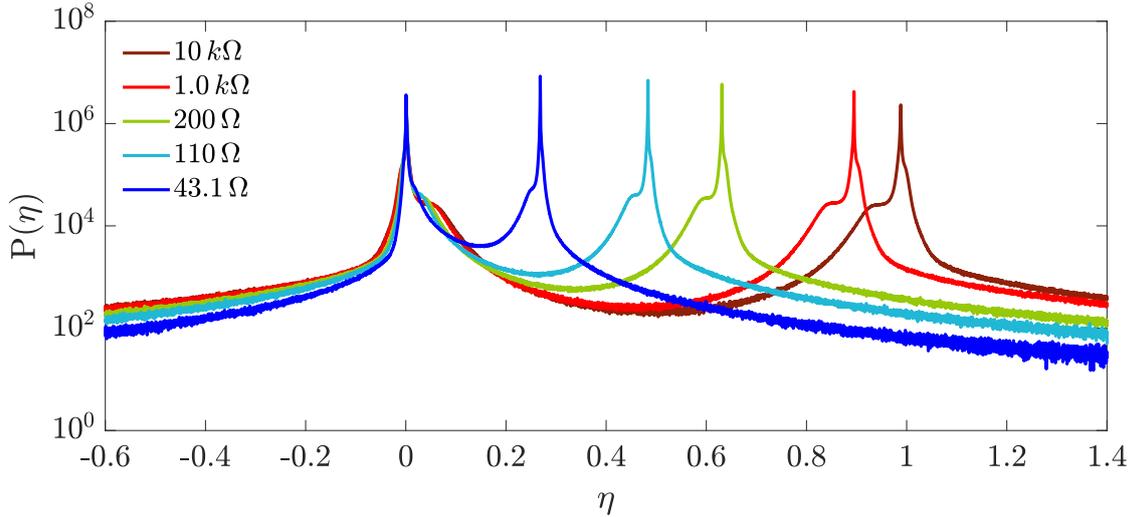


FIGURE 9.15 – Histogrammes normalisés du rendement instantané pour différentes valeurs de R et pour deux heures d'acquisition à la température $kT \approx 1.4 \cdot 10^{-7}$ J. Même code couleur qu'en figure 9.9 pour les différentes valeurs de R . Les maxima à $\eta \neq 0$ correspondent quantitativement à la valeur $\hat{\eta} \equiv \langle \dot{w} \rangle / \langle \dot{q} \rangle$ mesurée pour R correspondante.

nous sert de source chaude sur toutes ces expériences.

9.5 Résultats : rôle de la température kT

9.5.1 Températures en fonction de R

En figure 9.16, on présente l'histogramme des vitesses libres ainsi que l'énergie cinétique associée aux fluctuations pour différentes valeurs de R pour quatre températures différentes. Ces histogrammes représentent les fluctuations de vitesses imposées par le gaz granulaire. La température effective de la pale elle-même peut être rattachée à l'énergie cinétique associée aux fluctuations de vitesse de la pale lorsque cette dernière fluctue librement dans le gaz granulaire :

$$\langle E_c \rangle = \frac{J}{2} \text{Var}(\dot{\theta}) \quad (9.14)$$

Cette quantité est différente de l'énergie cinétique de la pale libre de fluctuer dans le gaz granulaire. On peut interpréter comme une estimation de la température de la pale. Elle dépend de R à cause de l'asymétrie qu'impose le démon, ce que l'on interprète comme une modification du couplage entre la pale et le gaz qui vient donc créer une différence de température effective entre la pale elle-même et le gaz granulaire. Ce couplage semble pourtant faible : quelque soit la valeur de R , les variations de $\langle E_c \rangle$ sont environ quatre fois inférieure à l'écart entre les valeurs moyennes de $\langle E_c \rangle$ pour deux températures du gaz granulaire. On considèrera donc que, malgré l'influence du démon, la température de la pale est assez bien fixée par le gaz granulaire.

9.5.2 Rôle de kT sur la dynamique (vitesse moyenne)

En figure 9.17, on présente l'évolution comparée de la vitesse moyenne et du coefficient d'asymétrie en fonction de R pour différentes températures effectives du gaz granulaire.

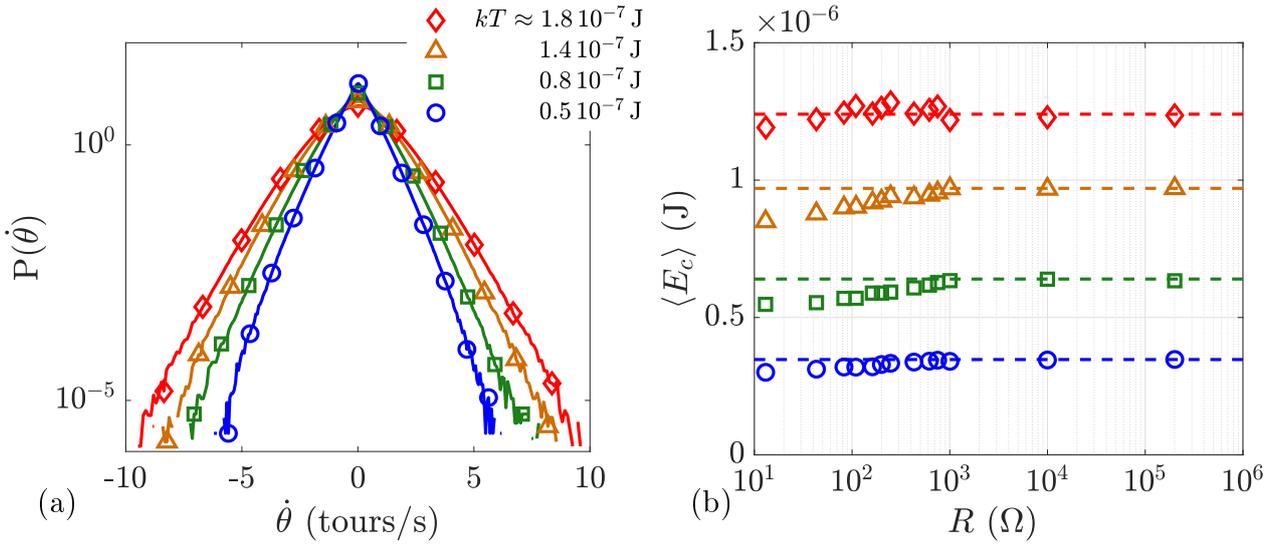


FIGURE 9.16 – Températures choisies pour l'étude. (a) : histogrammes normalisés de la vitesse $\dot{\theta}$ pour quatre températures différentes (b) : Énergie cinétique associée aux fluctuations $\langle E_c \rangle \equiv JVar(\dot{\theta})/2$ en fonction de la résistance R . Les lignes pointillées correspondent à l'énergie cinétique de la pale libre pour chaque température.

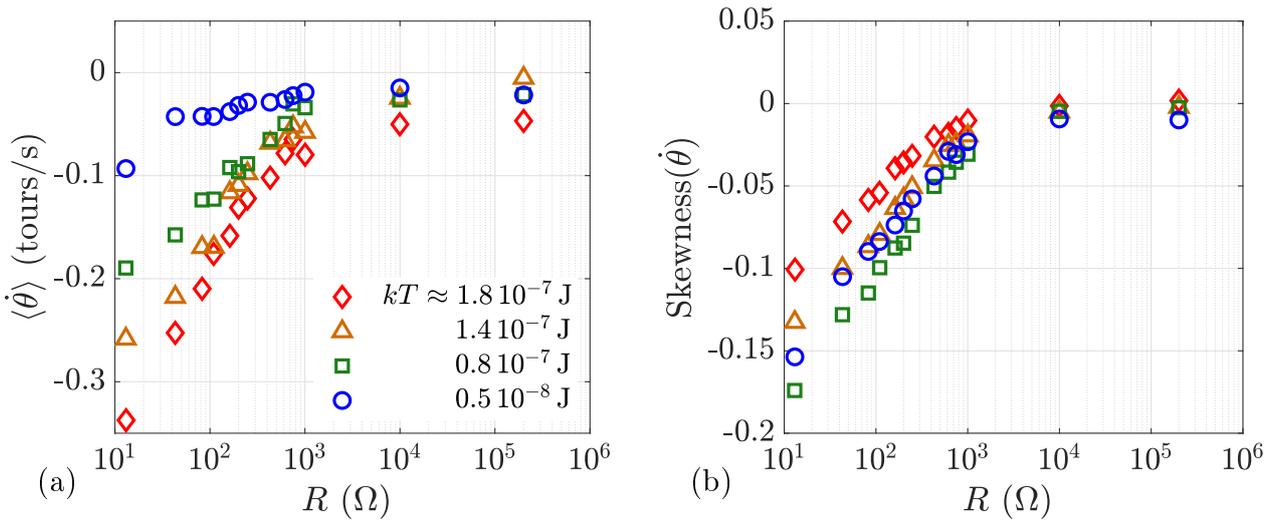


FIGURE 9.17 – Évolution de la moyenne et du coefficient d'asymétrie de la vitesse de la pale en fonction de la résistance R et de la température kT . (a) : vitesse $\langle \dot{\theta} \rangle$ en fonction de R . Les valeurs sont négatives car la pale tourne dans le sens anti-horaire. (b) : Skewness($\dot{\theta}$) en fonction de R .

Comme on pouvait s'y attendre : à R fixé, la vitesse moyenne est d'autant plus grande que la température du gaz est grande car les chocs avec les billes sont en moyenne plus violents. Un phénomène plus étonnant est que la vitesse moyenne pour $R = 1 \text{ M}\Omega$ n'est pas la même pour toutes les températures granulaires. On serait tenté de supposer que la rotation moyenne d'une pale soumise à un bruit symétrique serait uniquement due à une asymétrie de la pale elle-même, que l'on devrait retrouver pour chaque température effective. Une explication proposée est d'invoquer le traitement numérique : plus R est grand, plus le courant est faible et sa mesure difficile. En conséquence, l'estimation de e devient incorrecte.

Le coefficient d'asymétrie ne montre pas de dépendance claire en kT mais dépend clairement de R .

9.5.3 Rôle de kT sur les propriétés thermodynamiques

En figure 9.18, on présente l'évolution des flux de puissance ainsi que du rendement en fonction de R pour différentes températures granulaire kT .

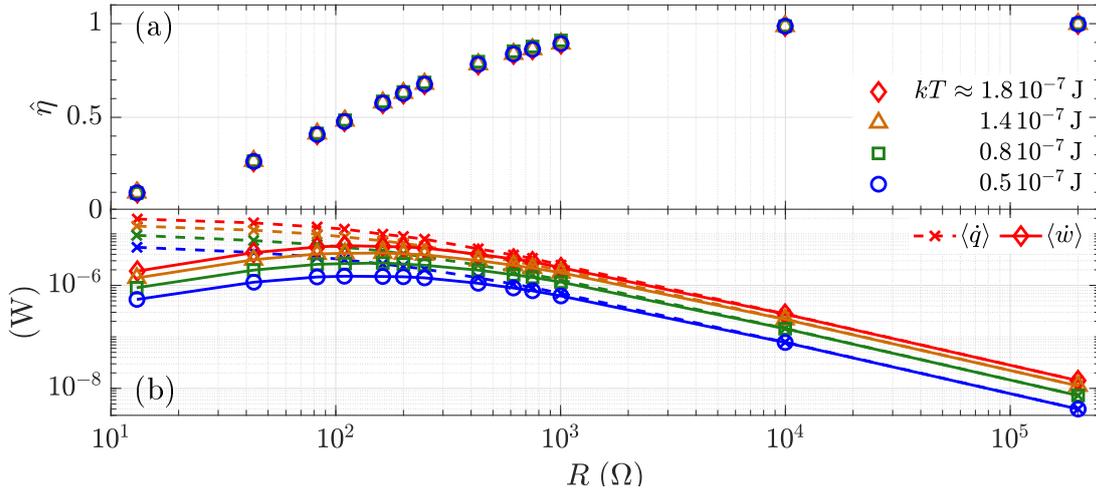


FIGURE 9.18 – Evolution des quantités thermodynamiques en fonction de R pour différentes températures kT pour deux heures d'acquisition. (a) : le rendement moyen. (b) : Flux moyens de puissance entrant (\dot{q}) dans le circuit et sortant (\dot{w}) du dipôle R .

Quelle que soit la température, on observe le même type d'évolution en fonction de R des différentes puissances. En particulier, on retrouve les maxima de $\langle \dot{w} \rangle$ à la même valeur de R . La puissance à R fixée augmente de manière monotone avec kT . En fait, les différentes courbes semblent seulement se traduire verticalement en échelle logarithmique lorsque l'on change la température, ce qui invite à considérer une dépendance homothétique. Par analyse dimensionnelle, on peut supposer une proportionnalité ce qui sera montré dans la partie suivante. Par contre, les rendements thermodynamiques à R donnée mais pour différentes valeurs de kT restent confondus, il semble donc que cette quantité ne dépende pas de la température. Or, rappelons que par définition, il s'agit du rapport des puissances moyennes : $\hat{\eta} \equiv \langle \dot{w} \rangle / \langle \dot{q} \rangle$. Donc on peut en conclure que les puissances possèdent la même dépendance en kT , et que celle-ci est séparable de la dépendance en R .

9.5.4 Adaptation d'impédance, puissance disponible

Ici on cherche à déterminer les dépendances en R et kT des flux de puissance. Reprenons le montage de la figure 9.3. Supposons la diode fermée. On a les relations suivantes :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R_{tot}} \quad \dot{q}(t) \equiv e(t) i(t) = \frac{1}{R_{tot}} e^2(t) \quad \text{et, } \dot{w}(t) \equiv R i^2(t) = \frac{R}{R_{tot}^2} e^2(t) \quad (9.15)$$

Rappelons que $R_{tot} \equiv r + R$ désigne la résistance totale. Si on suppose que la distribution de $e \equiv \alpha \dot{\theta}$ est symétrique, cette équation n'est vraie que la moitié du temps. Durant l'autre moitié du temps, la diode est ouverte, *i.e.* $i(t) = 0$ donc $\dot{q} = 0$ et $\dot{w} = 0$. Pour obtenir les valeurs

moyennes, on peut donc simplement remplacer $e^2(t)$ par $Var(e)/2$. On a donc les modèles suivants :

$$\langle \dot{q} \rangle = \frac{1}{R_{tot}} \frac{Var(e)}{2} \quad \text{et} \quad \langle \dot{w} \rangle = \frac{R}{R_{tot}^2} \frac{Var(e)}{2} \quad \text{donc : } \hat{\eta} = 1 - \frac{R}{R_{tot}} \quad (9.16)$$

D'une part, la dépendance avec la température du gaz granulaire est portée par $Var(e)$, c'est à dire l'énergie cinétique de la pale : $Var(e) = 2\alpha^2 \langle E_c \rangle / J$. D'autre part, $\langle \dot{w} \rangle$, la puissance disponible pour le dipôle R est maximale si l'impédance R de ce dernier est égale à l'impédance du reste du circuit, c'est à dire : $R = R_{tot} - R = r$. Et dans ce cas, le rendement vaut exactement $\hat{\eta} = 1/2$. On a alors adaptation d'impédance.

Pour comparer les dépendances en R , on choisit de normaliser chaque quantité par sa valeur maximale. Ces flux normalisés, ainsi que le modèle, sont représentés en figure 9.19.

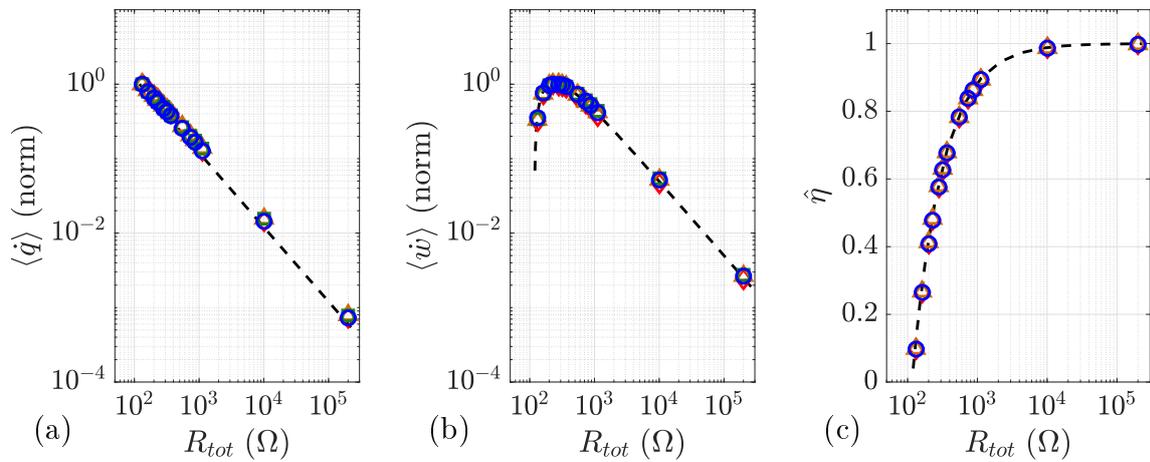


FIGURE 9.19 – modèles des quantités thermodynamiques en fonction de R et de la température kT (même code couleur qu'en figure 9.14). (a) : $\langle \dot{q} \rangle$ en fonction de R . (b) : $\langle \dot{w} \rangle$ en fonction de R . (c) : $\hat{\eta}$ en fonction de R .

D'une part, la normalisation fait coïncider les points à différentes températures effectives pour chaque valeur de R , ce qui valide la proportionnalité de ces flux avec la température. D'autre part, le modèle pour la dépendance en R semble très bien décrire le comportement de notre expérience. Il ne nous reste plus qu'à regarder l'influence de la température granulaire sur la dynamique de la pale. D'abord, nous regarderons son influence sur la vitesse moyenne de la pale.

9.5.5 Modèle : fluctuations asymétriques et vitesse moyenne

On cherche à comprendre comment la vitesse moyenne $\langle \dot{\theta} \rangle$ dépend de R . Pour modéliser cette dépendance, on doit exprimer l'asymétrie causée par le démon sur les incréments de position au grands temps, c'est à dire dans le régime diffusif. Si la pale est libre, cas noté (+), ce qui arrive la moitié du temps, on a l'équation suivante sur les incréments :

$$\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_{(+)} \approx 2D\tau \quad \text{pour : } Jd_t \dot{\theta} = -\gamma_0 \dot{\theta} + \gamma_0 \sqrt{2D} \zeta \quad (9.17)$$

Si le moteur est branché sur une résistance R_{tot} , cas noté (-), ce qui arrive l'autre moitié du temps, le terme visqueux de l'équation de mouvement est modifié :

$$Jd_t \dot{\theta} = -\gamma_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{R_{tot}} \right) \dot{\theta} + \gamma_0 \sqrt{2D} \zeta \equiv -\gamma_{[R]} \dot{\theta} + \gamma_0 \sqrt{2D} \zeta \quad (9.18)$$

donc les incréments sont diminués d'autant :

$$\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_{(-)} \approx 2D'_{[R]} \tau \quad \text{où : } D'_{[R]} = \frac{\gamma_0 D}{\gamma_{[R]}} = \frac{D}{1 + \alpha^2/R_{tot}} \quad (9.19)$$

Si on regarde l'incrément moyen, dans le cas où l'on passe la moitié du temps à tourner dans le sens horaire avec $\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_{(+)}$ et l'autre moitié du temps à tourner dans le sens anti-horaire à $\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_{(-)}$, on a :

$$\langle \delta_\tau \theta^2 \rangle \approx \frac{1}{2} \langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_{(+)} - \frac{1}{2} \langle \delta_\tau \theta^2 \rangle_{(-)} = \frac{2D}{1 + \alpha^2/R_{tot}} \tau \quad (9.20)$$

Pour estimer la vitesse moyenne de la pale sur une heure, on propose $\langle \dot{\theta} \rangle \approx \langle \delta \theta^2 \rangle / \tau$, donc :

$$\langle \dot{\theta} \rangle \propto \sqrt{\frac{2D}{1 + R_{tot}/\alpha^2}} \quad (9.21)$$

En figure 9.20, on a représenté l'évolution de la vitesse moyenne normalisée en fonction de R .

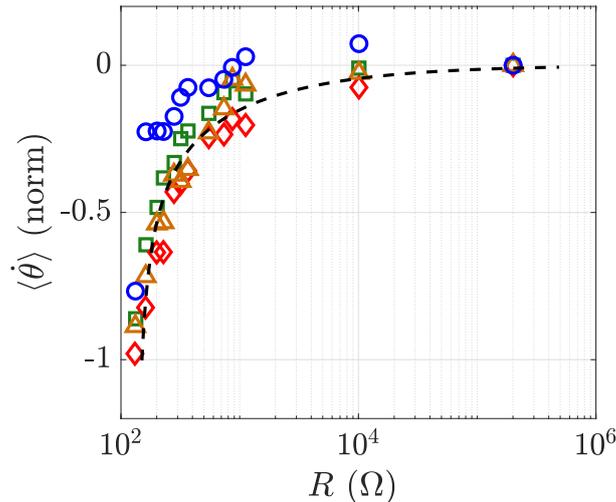


FIGURE 9.20 – vitesse moyenne normalisée par leurs valeurs maximales pour différentes températures (même code couleur qu'en figure 9.14). En pointillés noirs, un fit suivant le modèle de l'équation (9.21)

L'accord avec le modèle est plutôt bon pour les températures supérieures à $0.5 \cdot 10^{-7}$ J.

9.6 Conclusion et discussion

En partie 9.4.1, on a obtenu l'équation (9.13) :

$$Jd_t\dot{\theta} = -\tilde{\gamma}_{[kT]}\dot{\theta} + \tilde{\gamma}_{[kT]}\sqrt{2D_{[kT]}}\zeta + F_{[R,kT]} \quad \text{avec : } \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = 1\delta(\tau) \quad ((9.13))$$

On souhaite mettre en évidence les différentes dépendances en kT . En figure 9.21, on trace en fonction de R et pour différentes valeurs de kT les grandeurs dynamiques : V_0 , la vitesse typique de la pale après un choc, ainsi que le coefficient de diffusion D , et la viscosité $\tilde{\nu} \equiv 2D/V_0^2$ qui nous donne une mesure du temps $1/\tilde{\nu} = J/\tilde{\gamma}$.

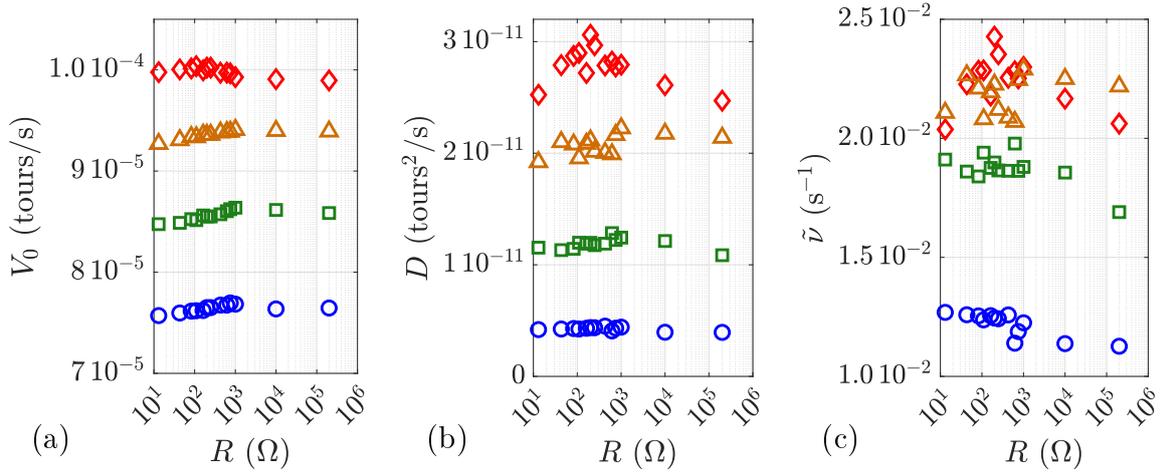


FIGURE 9.21 – Résultats rhéologiques dynamiques en fonction de R et de la température kT (même code couleur qu'en figure 9.14). (a) : Vitesse typique V_0 en fonction de R . (b) : Coefficient de diffusion D en fonction de R . (c) : taux visqueux $\tilde{\nu}$ en fonction de R .

Les valeurs de V_0 et D dépendent de kT . La mesure de D semble assez imprécise quand la température est supérieure à $1.5 \cdot 10^{-7}$ J. L'imprécision sur la mesure de D se retrouve sur la mesure de $\tilde{\nu}$ pour la température $kT \geq 1.5 \cdot 10^{-7}$ J. Cependant, pour les trois autres valeurs de températures, $\tilde{\nu}$ dépend fortement de kT et très peu de R . On peut donc confirmer qu'à l'ordre 2, pour une température $kT \leq 1.5 \cdot 10^{-7}$ J, la dynamique de la particule est cohérente avec l'équation (9.13).

La variation relative de $\tilde{\gamma}$ et D pour une variation de R est en effet assez faible pour pouvoir supposer que ces paramètres ne dépendent que de kT . Pour estimer cette dépendance, on s'en remet donc à l'étude de la section 6.3.1 et 6.3.2. Attention, ici, on ne fait pas la différence entre la température effective kT et l'énergie cinétique moyenne de la pale libre $\langle E_c \rangle$ car c'est cette dernière quantité que l'on utilise pour mesurer la température effective du gaz granulaire. On a alors :

$$D_{[kT]} \propto kT - kT^0 \quad \tilde{\gamma}_{[kT]} \propto \sqrt{kT} \quad (9.22)$$

Pour la dépendance de F , on a montré en section 9.5.5 que :

$$\langle \dot{\theta} \rangle \approx \sqrt{\frac{2D}{1 + R_{tot}/\alpha^2}} \quad \text{donc : } F \approx \tilde{\gamma}\sqrt{2D} \frac{1}{\sqrt{1 + R_{tot}/\alpha^2}} = \tilde{\gamma}\sqrt{2D}\mathfrak{F}_{[R]} \quad (9.23)$$

où on a posé $\mathfrak{F} \equiv F/(2D\tilde{\gamma})$, fonction sans unité qui nous permet d'isoler la dépendance en R :

$$Jd_t\dot{\theta} = -\tilde{\gamma}_{[kT]}\dot{\theta} + \tilde{\gamma}_{[kT]}\sqrt{2D_{[kT]}}\zeta + \tilde{\gamma}_{[kT]}\sqrt{2D_{[kT]}}\mathfrak{F}_{[R]} \quad \text{où : } \begin{cases} D_{[kT]} \propto kT - kT^0 \\ \tilde{\gamma}_{[kT]} \propto \sqrt{kT} \\ \mathfrak{F}_{[R]} \propto \frac{1}{\sqrt{1+R_{tot}/\alpha^2}} \end{cases} \quad (9.24)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle = 1\delta(\tau)$$

Dans ce chapitre, nous avons expliqué le principe du démon de Maxwell que nous avons réalisé. Il s'agit d'un démon de Maxwell électrique qui mesure le sens de rotation de la pale par induction de Lorenz et effectue une contre-réaction sur son mouvement par la force de Laplace. Et en effet, sous son influence, la pale se met à tourner en moyenne. Cette rotation est suffisamment faible pour ne pas perturber notablement le gaz granulaire. A l'ordre deux, la dynamique semble suivre une équation de Langevin à laquelle on ajoute un terme constant pour rendre compte de la dérive moyenne lente induite par la présence du démon, aussi faible soit-elle.

Ensuite, nous avons vu en quoi l'asymétrie imposée aux fluctuations par le démon modifie le comportement de la pale. Le démon comporte en effet un dipôle de résistance R qui dissipe l'énergie de rotation de la pale seulement dans un sens. En plus de l'étude dynamique, on a pu définir des grandeurs thermodynamiques en s'intéressant au flux de puissances entrant et sortant dans ce circuit par analogie avec la thermodynamique classique.

Enfin, nous avons étudié l'influence de la température granulaire sur les propriétés du démon. Son influence semble simple sur la thermodynamique du système car elle ne fait que modifier les puissances maximales par une homothétie, et n'a en particulier aucune influence sur le rendement. Nous avons pu proposer des modèles des différentes quantités mise en jeu.

* * *

Il semble que la température granulaire a peu d'influence sur le comportement du système : changer la température ne fait que multiplier relativement les puissances mais n'influence pas le rendement. Ceci peut surprendre car le rendement thermodynamique d'une machine thermique est censé dépendre grandement de la différence de température entre les deux sources en jeu. Le rendement de Carnot est défini comme :

$$\hat{\eta}^{\text{CARNOT}} \equiv 1 - \frac{kT_F}{kT_H} \quad (9.25)$$

Dans notre cas, on contrôle la température de la source chaude $kT_H \approx 10^{-7}$ J. Par contre, la *source froide* dans notre circuit correspondrait au thermostat dans lequel on déverse l'énergie dissipée par la résistance R , c'est à dire la température de la pièce $kT_F \approx 10^{-21}$ J $\approx 10^{-14}$ kT_H . Il est donc cohérent que le rendement lorsque l'on n'extrait aucune puissance soit $\hat{\eta} = 1$. Pour pouvoir voir une influence de la température sur le comportement d'une telle machine, il nous faudrait faire interagir deux gaz granulaires à des températures effectives différentes.

* * *

Une autre objection qui peut être faite à ce système est que l'on n'extrait ici aucun travail car le flux de puissance est dissipé par la résistance. Il serait donc beaucoup plus intéressant d'utiliser un autre dipôle capable de produire un travail, comme un condensateur ou une batterie. C'est ce qu'on va essayer d'implémenter dans le chapitre suivant.

Chapitre 10

Démon de Brillouin

We might take a little while, so do you want me to tell you a story? The Brothers Grimm - lovely fellows, they're on my darts team. According to them, there was this emperor, and he asks this shepherd's boy, "How many seconds in eternity?" And the shepherd's boy says, "There's this mountain of pure diamond. It takes an hour to climb it, and an hour to go around it! Every hundred years, a little bird comes and sharpens its beak on the diamond mountain. And when the entire mountain is chiselled away, the first second of eternity will have passed!" You must think that's a hell of a long time...

... Personally, I think that's a hell of a bird.

The Doctor, *Doctor Who*, BBC

10.1 Principe

Cette expérience est inspirée de discussions avec Audrey Steinberger et Pascal Degiovanni ainsi qu'une idée originale de Benjamin Roussel.

10.1.1 Généralités

Dans ce chapitre, on souhaite modifier le démon de Maxwell précédant pour réaliser un accumulateur d'énergie. Ce montage fait écho à une expérience de pensée proposée par Brillouin [6]. Il proposait d'utiliser le bruit thermique d'une résistance comme source chaude et de rectifier ces fluctuations pour charger un dipôle d'impédance imaginaire (bobine ou condensateur). Nous allons la transposer ici à l'échelle macroscopique.

L'idée générale est d'extraire un maximum possible d'énergie d'une source chaude, comme un ensemble {moteur+pale} plongée dans un gaz granulaire. On va stocker cette énergie simplement sous forme de différence de charges et donc de potentiel V_C dans un condensateur de capacité C . Cependant, on souhaite faire en sorte que le démon ne fasse qu'augmenter la quantité d'énergie stockée dans le condensateur. On la définit comme E_C :

$$E_C = \frac{C}{2}V_C^2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad i(t) = C\frac{d}{dt}V_C(t) \quad (10.1)$$

où i est le courant traversant le condensateur. Si maintenant on utilise une diode qui assure que le courant i ne peut être que positif, la tension V_C et donc l'énergie stockée ne peuvent qu'augmenter. le schéma permettant de réaliser cette expérience est présenté en figure 10.1.

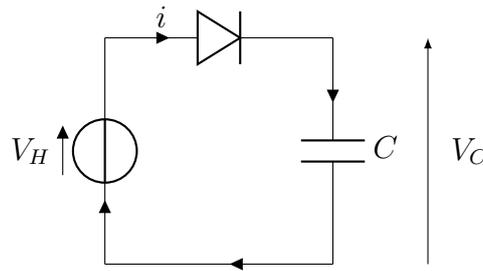


FIGURE 10.1 – Schéma électrique d'un démon idéal fonctionnant grâce à une diode idéale.

Il suffit de mesurer une tension V_H induite par un gaz granulaire. Selon le schémas en figure 10.1, dans le cas idéal, lorsque V_H dépasse la tension préalablement stockée V_C , alors la tension V_C prend cette nouvelle valeur qu'elle conserve jusqu'à ce qu'un nouveau dépassement ait lieu. La tension V_C idéale ne fait donc que prendre la valeur du dernier maximum global de V_H :

$$V_C(t) = \max \{V_H(s)\}_{s \in [0, t]} \quad (10.2)$$

Un exemple de tension V_C attendue pour une mesure de bruit $V_H(t)$ est présenté en figure 10.2.

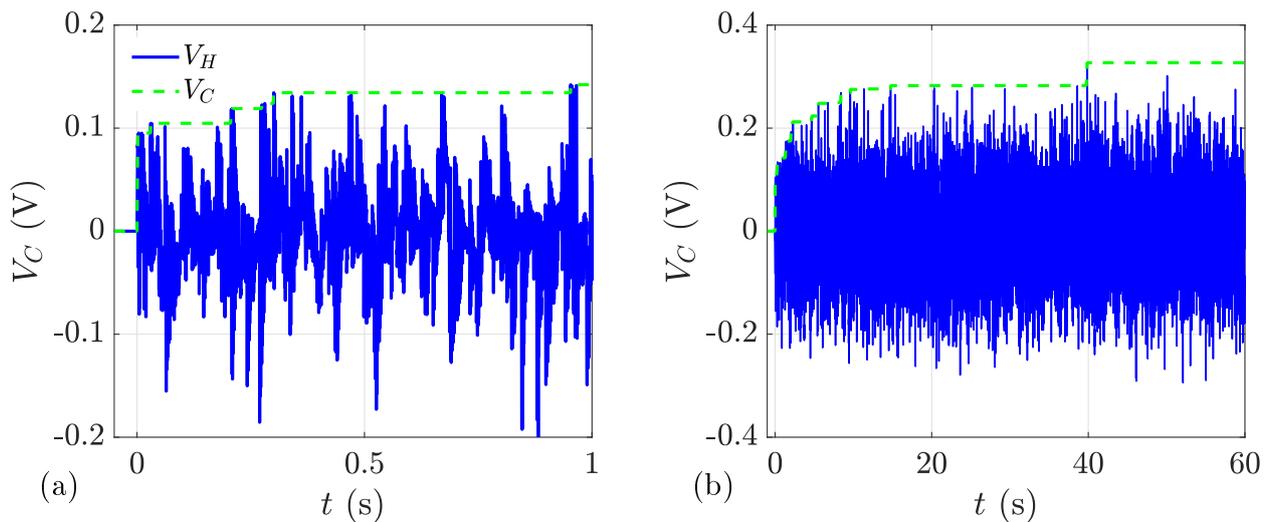


FIGURE 10.2 – Tensions V_C simulée pour une réalisation de la tension V_H mesurée pour un gaz granulaire préparé tel que $\langle E_c \rangle = 8.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. (a) : première seconde d'acquisition. (b) : la première minute de la même acquisition. En ligne pointillée, la tension V_C que prendrait instantanément le système idéal, c'est à dire le dernier maximum global de V_H atteint.

La tension V_C ne fait qu'augmenter et ce à chaque fois que la valeur de la tension V_H dépasse la tension V_C précédente. Par contre, ces évènements se font de plus en plus rares alors que V_C augmente. Ceci est une propriété de la forme de la densité de probabilité de V_H . Si on suppose que cette dernière est centrée et gaussienne, d'écart-type σ_H , on peut écrire sa densité de probabilité \mathbf{p}_H comme :

$$\mathbf{p}_H \equiv \mathfrak{z}_H \exp \left[-\frac{V_H^2}{2\sigma_H^2} \right] \quad (10.3)$$

Où \mathfrak{z}_H est une constante de normalisation telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{p}_H dV_H = 1$. Si de plus on suppose que V_H est tirée à chaque instant de manière indépendante, la probabilité de V_H dépasse le seuil V_C

à l'instant t est :

$$P(V_H \geq V_C) \equiv \int_{V_C}^{+\infty} p_H(V_H) dV_H = \int_{V_C}^{+\infty} \mathfrak{z}_H \exp\left[-\frac{V_H^2}{2\sigma_H^2}\right] dV_H = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}\left[\frac{V_C}{\sigma_H}\right] \quad (10.4)$$

où erf désigne la fonction erreur :

$$\operatorname{erf}[x] \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-s^2] ds \quad (10.5)$$

Cette quantité tendant vers $1/2$ pour $x \rightarrow +\infty$, la probabilité d'obtenir un évènement $V_H \geq V_C$ est d'autant plus faible que V_C augmente.

10.1.2 Analogie mécanique

Cette expérience est analogue à un piston de volume $q = CV_C$ en contact avec une particule brownienne à T_H . Cependant, le démon l'empêche de coulisser dans une direction. Le piston ne fera donc que se comprimer sous les assauts de la particule. On a représenté ce dispositif en figure 10.3 :

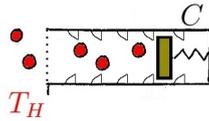


FIGURE 10.3 – Analogie mécanique du montage 10.1

Dans cette expérience, nous travaillons avec les tensions électriques $V_C(t)$ et V_H qui sont des processus aléatoires. Cependant ces deux variables aléatoires ont deux propriétés très différentes :

D'une part, V_H effectue une marche aléatoire de moyenne nulle et de temps de corrélation $\tau^* \approx 18$ ms. Pour des durées de mesure très grandes devant ce temps caractéristique, on peut considérer que ce signal est stationnaire. On supposera qu'il parcourt suffisamment son espace des phases pour que l'on puisse utiliser l'hypothèse ergodique. On estimera donc les différentes quantités moyennées en réalisant une moyenne temporelle.

D'autre part, V_C ne fait qu'augmenter au cours du temps. Il ne peut donc pas parcourir toutes ses valeurs possibles. Il n'est donc certainement pas ergodique. $\langle V_C \rangle$ désignera donc la moyenne sur les réalisations de ce processus aléatoire.

Si une seule réalisation nous donne accès aux probabilités de V_H , ce n'est donc pas le cas de V_C . Pour estimer ces dernières, on reproduira 180 fois chaque expérience en repartant des mêmes conditions initiales : $(V_C(t=0) = 0, \text{ et } i(t=0) = 0)$.

10.2 Montage

Le montage expérimental que nous avons réalisé est présenté en figure 10.4.

Ce montage se décompose en trois éléments. D'abord, la source chaude représentée par le cadre \mathcal{M}_H : le moteur à courant continu associé à une pale baignant dans un gaz granulaire à la température T_H . On le modélise comme un générateur de Thévenin : une source idéale de tension aléatoire e_H , en série avec une résistance interne $r_H \approx 113 \Omega$. Cette source

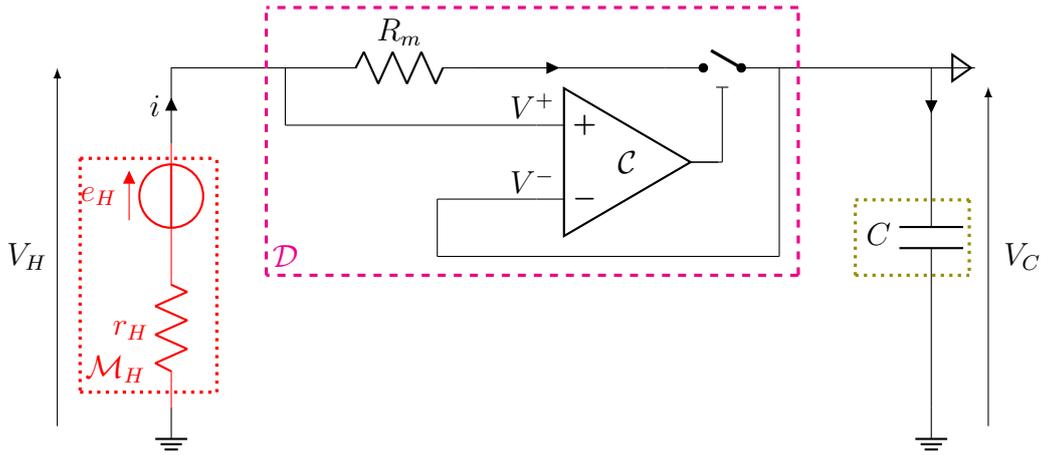


FIGURE 10.4 – Schéma expérimental du démon de Maxwell. Le cadre \mathcal{M}_H modélise le moteur à courant continu comme un générateur de Thévenin : une source idéale de tension $e_H \equiv \alpha\dot{\theta}$ proportionnelle à la vitesse de la pale, et une résistance interne r_H . Le démon est le circuit \mathcal{D} . L'élément \mathcal{C} correspond à un comparateur analogique. Il compare la tension V^+ à la tension de référence V^- . Lorsque $V^+ - V^- \geq 0$, l'interrupteur est fermé et le condensateur C est branché au moteur \mathcal{M}_H . La résistance R_m permet de mesurer le courant $i = (V^+ - V^-)/R_m$. Le triangle pour la mesure de V_C correspond à un suiveur analogique à amplificateurs opérationnels.

peut échanger avec un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$. C'est l'élément qui nous permet de stocker l'énergie. Cet échange entre C et \mathcal{M}_H est conditionné par le démon de Maxwell présenté dans le cadre \mathcal{D} . Il consiste en un interrupteur commandé en tension qui se ferme lorsque $V_H \geq V_C$. Cette comparaison est effectuée par le comparateur analogique \mathcal{C} . Il compare les tensions $V^+ = V_H$ et $V^- = V_C$ mesurées de part et d'autre de la résistance de mesure $R_m \approx 30 \Omega$. Ainsi, l'interrupteur est fermé quand cette différence est telle que $i \geq 0$.

Le comparateur analogique est le même qu'au chapitre 9 et il présente également un hystérésis à la montée et la descente de $\pm 2 \text{ mV}$. Des courants de $i = -0.6 \text{ mA}$ sont autorisés pendant des durées très faibles car le circuit électrique a une dynamique très rapide. En effet, l'interrupteur se ferme en 20 ns , et le comparateur réalise une comparaison toute les $200 \mu\text{s}$. Ces deux temps, ainsi que le temps typique du filtre $RC \approx 1.4 \text{ ms}$, sont très inférieurs au temps typique entre deux chocs sur la pale $\tau^{\zeta} \approx 3 \text{ ms}$ et le temps de corrélation de la vitesse $\tau^* \approx 18 \text{ ms}$. Le circuit électrique devrait bien suivre la dynamique de la pale.

On mesure les deux tensions V_H et V_C à l'aide d'une carte d'acquisition en 32 bits avec une fréquence d'acquisition de 16384 Hz . Pour la mesure de V_C , on a recours à un suiveur analogique à amplificateurs opérationnels. Cet élément est absolument essentiel. Il permet d'empêcher le condensateur de se vider dans la résistance interne de la carte d'acquisition de l'ordre de $1 \text{ M}\Omega$ durant un temps typique d'environ 10 s , trop court pour une acquisition de 2 min . Le suiveur présente en effet une impédance $\approx 1 \text{ GHz}$. La fuite se produirait donc en un temps typique d'environ $30\,000 \text{ s} \approx 3 \text{ h}$ ce qui est beaucoup plus confortable pour réaliser nos mesures.

Comme on l'a expliqué en section 4.1, une étude de $V_C(t)$ qui est un processus aléatoire non stationnaire et non ergodique nécessite de reproduire la mesure pour obtenir différentes réalisations de $V_C(t)$. Pour ce faire, après 120 s d'acquisition, on décharge la capacité dans une résistance de 80Ω pendant dix secondes, durée grande devant le temps de décharge (environ 2 ms). Ainsi, chaque trajectoire est initialisée à $V_C = 0$ lorsque l'on rebranche ce condensateur.

En pratique, cette étape est assurée par un second interrupteur commandé en tension par un signal d'horloge. Pour chaque condition expérimentale à étudier, on fait ainsi 180 réalisations.

10.3 Résultats

En figure 10.5, on représente les premières secondes du fonctionnement du démon.

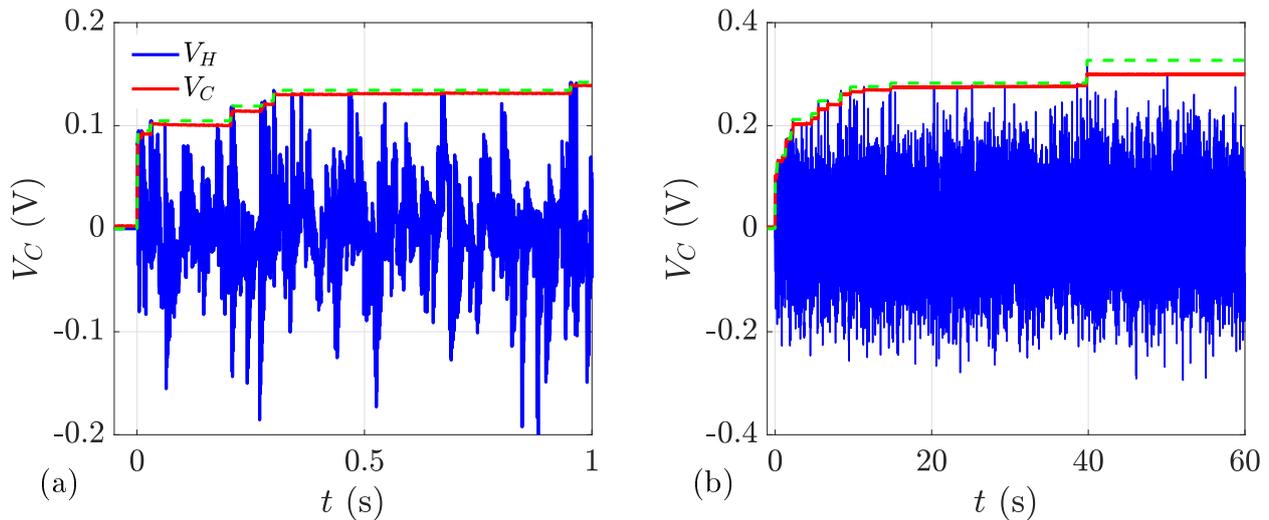


FIGURE 10.5 – Tensions V_C et V_H au cours du temps mesurées pour un gaz granulaire préparé tel que $\langle E_c \rangle = 8.6 \cdot 10^{-7}$ J. (a) : première seconde d'acquisition. (b) : la première minute de la même acquisition. En ligne pointillée, la tension V_C dans le cas du circuit idéal 10.1.

Tout d'abord, on remarque que la tension V_C augmente au cours du temps à partir de l'instant $t = 0$ où l'on branche le moteur. Plus précisément, et comme on l'avait intuité, V_C augmente par paliers lorsque la tension V_H la dépasse. Cette augmentation est conditionnée par la forme de la densité de probabilité de la tension V_H : les évènements à forte tension étant plus rares, il faut attendre de plus en plus de temps pour voir la tension V_C augmenter de nouveau. Le démon fonctionne donc exactement comme prévu.

On remarque cependant qu'après un dépassement, la tension V_C prend une valeur légèrement inférieure à la valeur du pic précédent. Ceci est explicable par la dynamique dans le circuit qui se fait sur une durée typique RC . On peut corriger ce "défaut" en réduisant R_m ou C . Cependant, Si l'on réduit R_m , le démon devient moins efficace dans son fonctionnement car les tensions V_H et V_C à comparer sont très proches. Si l'on réduit C , l'énergie stockée dans le condensateur : $E_C(t) = CV_C^2(t)/2$ est plus faible pour la même tension V_C imposée par le gaz granulaire. Le choix de R_m et C est donc le résultat d'un compromis.

L'énergie stockée E_C peut être extraite quand sa valeur est suffisamment importante. Au chapitre 14, on propose une machine thermique permettant de tirer profit de cette énergie. Pour le reste de ce chapitre, nous allons plutôt nous intéresser aux propriétés statistiques du processus aléatoire qu'est $V_C(t)$.

10.3.1 Statistique de V_C à température fixée.

En figures 10.6, on présente pour une même température du gaz granulaire différentes acquisitions de $V_C(t)$.

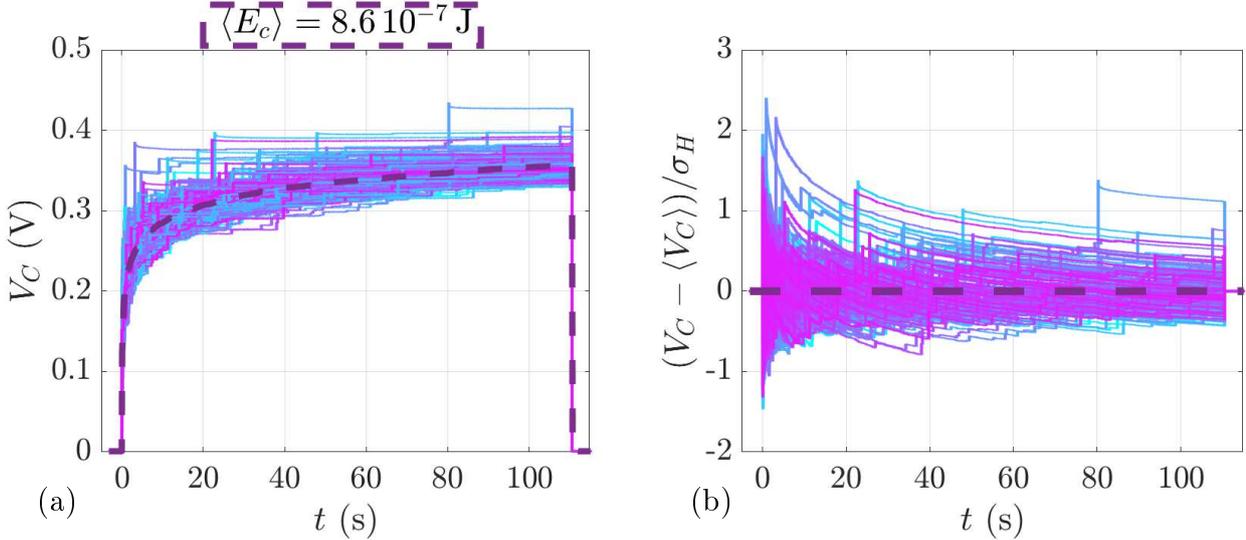


FIGURE 10.6 – $V_C(t)$ pour 180 différentes réalisations pour un gaz granulaire préparé tel que $\langle E_c \rangle = 8.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. (a) : V_C en fonction du temps pour différentes réalisations. (b) : écart par rapport à la tension moyenne pour les différentes réalisations. En tout, il y a 180 réalisations indépendantes représentées chacune par une couleur différente. En ligne pointillée $\langle V_C \rangle(t)$ la moyenne sur les réalisations. Ici, σ_H désigne l'écart type des fluctuations de la pale libre dans le gaz granulaire.

Comme on pouvait s'y attendre, on observe que les différentes réalisations de $V_C(t)$ sont assez différentes. Elles nous permettent de définir la moyenne d'ensemble $\langle V_C \rangle$. On remarque cependant que ces réalisations s'écartent la majorité du temps de moins de $1 \sigma_H$ par rapport à la valeur moyenne.

L'évolution de cette quantité au cours du temps a des interprétations très fondamentales. On est en effet en train de réaliser une transformation isotherme pendant laquelle $V_C(t)$ passe d'une énergie libre faible 0 à une énergie libre plus importante, proportionnelle à V_H^2 . Cette transformation doit s'accompagner d'une création d'entropie \mathcal{S} . On va ici définir cette grandeur au sens de Shannon [47] :

$$\mathcal{S}(t) \equiv - \sum_{x \equiv \frac{V_C(t) - \langle V_C \rangle}{\sigma_H}} \{P(x, t) \log P(x, t)\} \quad (10.6)$$

Cette quantité décrit la dispersion et l'asymétrie [29] de la densité de probabilité de V_C . En figure 10.7, on présente l'évolution de la densité de probabilité associée à V_C au cours du temps, ainsi qu'une estimation de l'entropie de Shannon associée.

Tout d'abord, on remarque qualitativement, pour des durées inférieures à 0.1 s, que la densité de probabilité est très piquée. Au delà de cette durée, la densité de probabilité est beaucoup plus large. La figure 10.7(a) montre l'évolution d'une densité de probabilité au cours de la trajectoire d'une particule. On peut interpréter cette carte comme une carte de potentiel effectif dans laquelle V_C représente la position d'une bille lâchée dans ce potentiel. Plus la densité de probabilité est forte et localisée, plus l'état du système est certain, et donc plus l'entropie de Shannon associée est faible. Le minimum d'entropie étant évidemment l'instant initial car

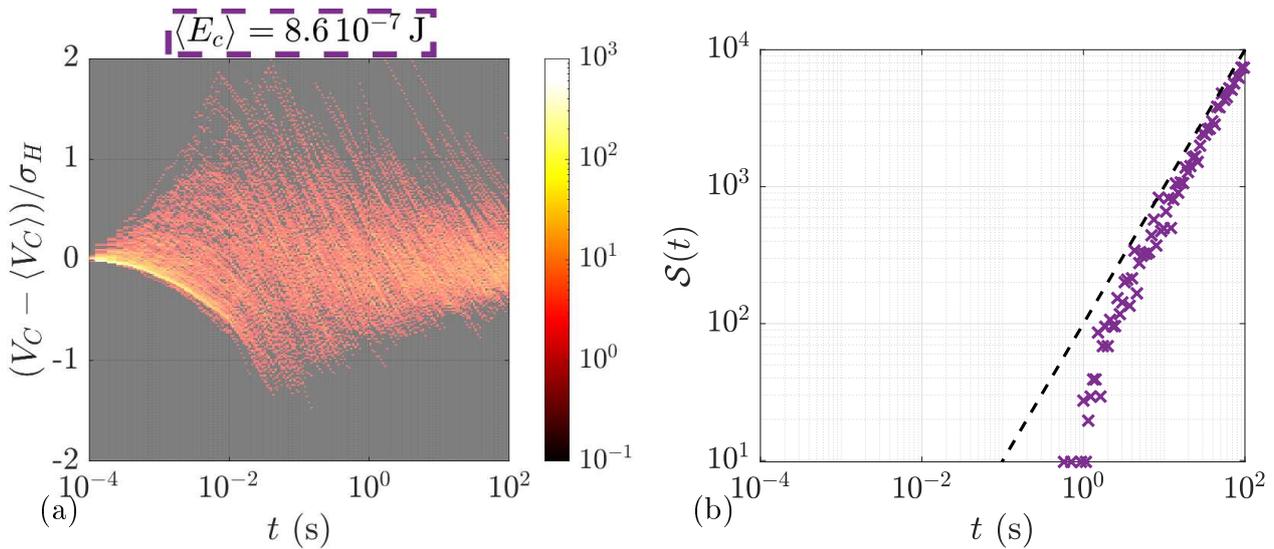


FIGURE 10.7 – (a) : densité de probabilité centrée au cours du temps estimée pour 180 réalisations à $\langle E_c \rangle = 8.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. (b) : Entropie de Shannon associée estimée. La ligne pointillée indique une pente 1.

il est imposé à l'identique pour toutes les réalisations. Au cours de la transformation, et des échanges entre la particule et ce potentiel, la densité de probabilité s'élargit. On a alors peu d'informations sur l'état de la particule, et l'entropie associée augmente. La figure 10.7(b) indique en particulier que l'entropie augmente à taux constant $\mathcal{S}(t) \propto t$ lorsque t dépasse 10 s.

Ce genre de résultat nous invite à un travail plus poussé du point de vue de la théorie des grandes déviations. Mais le temps m'a manqué pour poursuivre. Dans la suite, nous avons voulu étudier l'influence de la température sur le processus aléatoire $V_C(t)$.

10.3.2 Dépendance en température

Nous avons reproduit la même étude que précédemment pour deux autres températures effectives du gaz granulaire. En figure 10.8, on présente les mêmes mesures de réalisations de V_C pour deux températures granulaires différentes. La première, pour $\langle E_c \rangle = 5.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$, et la seconde pour $\langle E_c \rangle = 12.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

On observe que ces dynamiques sont qualitativement très semblables. Quantitativement, on remarque que la valeur moyenne autour de laquelle se distribuent les différentes réalisations atteint des valeurs plus élevées lorsque la température est plus importante.

10.3.3 L'entropie de Shannon dépend de la température

En figure 10.9, on représente l'évolution au cours du temps de la densité de probabilité de l'écart à la valeur moyenne.

On remarque en effet que ces figures sont très semblables et l'évolution de la densité de probabilité semble peu dépendre de la température. En figure 10.10, on compare les entropies estimées créées lors de la transformation. Par contre, on remarque que l'entropie de Shannon dépend peu de la température. En effet, tous les estimateurs convergent vers la même asymptote où l'entropie évolue à taux constant, c'est à dire $\mathcal{S}(t) \propto t$. Cependant, on observe que plus la température est grande, plus l'asymptote est atteinte rapidement.

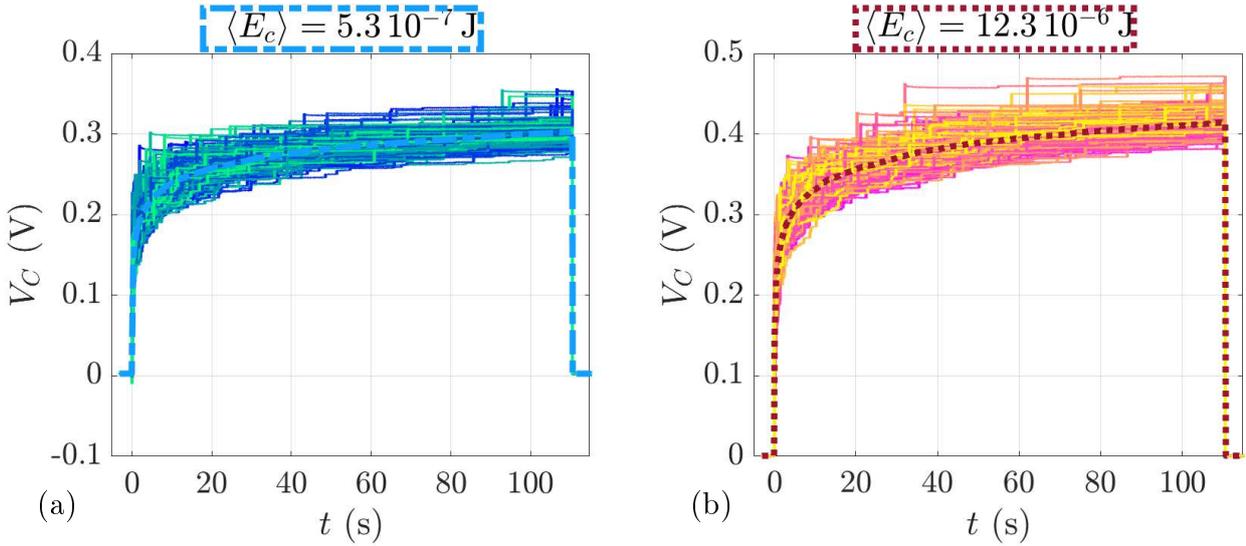


FIGURE 10.8 – $V_C(t)$ pour 180 différentes réalisations pour un gaz granulaire préparé tel que $\langle E_c \rangle = 8.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. (a) : $\langle E_c \rangle = 5.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$ (b) : $\langle E_c \rangle = 12.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

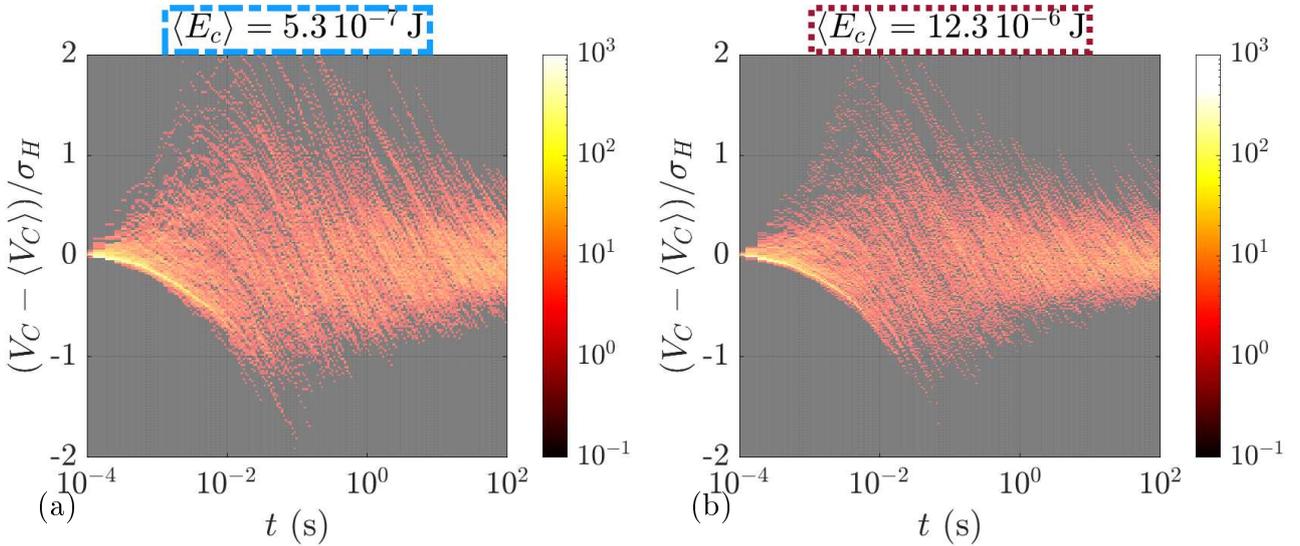


FIGURE 10.9 – Densité de probabilité centrée au cours du temps estimé pour 180 réalisations. (a) : $\langle E_c \rangle = 5.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$ (b) : $\langle E_c \rangle = 12.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

10.3.4 Le processus moyen dépend de la température

En figure 10.11, on présente l'évolution des différents processus moyens $\langle V_C \rangle$ en fonction de la température. On remarque qu'effectivement, la valeur moyenne est d'autant plus élevée après une durée de transformation t donnée que la température est élevée. On pourrait penser par analyse dimensionnelle que ces valeurs sont proportionnelles à l'écart-type σ_H . Cependant, une fois cette normalisation effectuée, voir figure 10.11(b), les courbes moyennes ne se superposent pas. Ceci est une conséquence directe du fait que la densité de probabilité des gaz granulaire n'est pas gaussienne comme on l'avait supposé mais prend une forme du type :

$$p_H(V_H) \propto \exp \left[- \left(\frac{V_H}{\sigma_H} \right)^\mu \right] \quad (10.7)$$

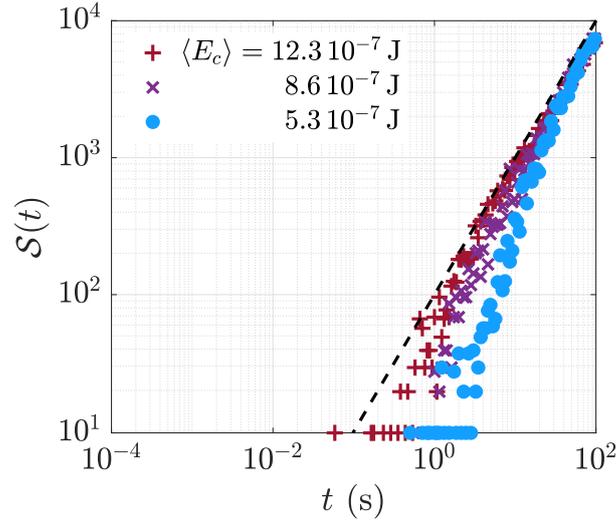


FIGURE 10.10 – Entropie créée estimée au cours du temps pour différentes températures granulaires. La ligne pointillée indique une pente 1.

Avec $\mu \approx 1.45$ au lieu de 2 dans le cas gaussien. En figure 10.11(c), on propose donc de normaliser les courbes de température par $\sigma_H^{\mu/2}$. Les courbes se superposent presque avec ce choix de normalisation. Pour le futur, il serait intéressant de trouver la forme analytique de ces courbes à partir du modèle non gaussien pour la densité de probabilité des vitesses présenté en section 4.1.1.

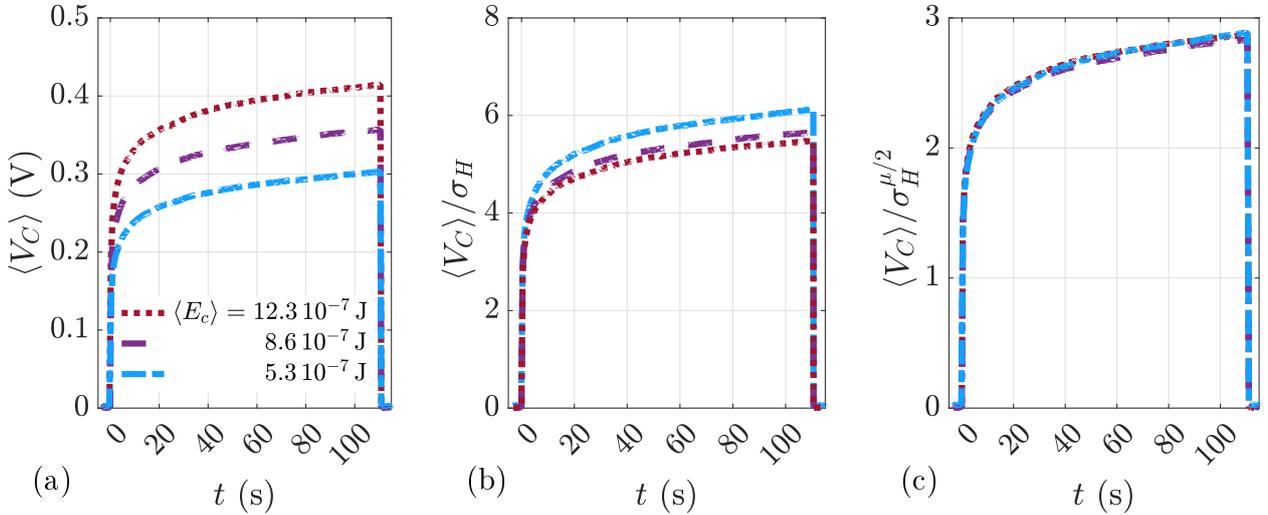


FIGURE 10.11 – Processus moyen $\langle V_C \rangle$ au cours du temps pour différentes températures granulaires. (a) : $\langle V_C \rangle(t)$. (b) : Processus moyen normalisé par σ_H , l'écart-type des fluctuations de V_H . (c) : Processus moyen normalisé $\langle V_C \rangle / \sigma_H^{\mu/2}$ au cours du temps pour différentes températures granulaires. σ_H désigne l'écart type des fluctuations de V_H .

10.4 Conclusion et discussion

Dans ce chapitre, nous avons complexifié le démon de Maxwell que nous avons présenté précédemment en lui permettant de stocker de l'énergie. Cette expérience revient à utiliser les fluctuations de pression rares d'un thermostat pour comprimer un piston au prix d'un échange minimal. Elle permet d'une part de stocker une énergie importante, mais également de perturber de manière infinitésimale le réservoir dans la mesure où le condensateur n'est presque jamais en échange avec le moteur et son gaz granulaire. Non seulement nous avons montré la faisabilité d'une telle expérience de pensée, mais nous avons également traité la tension aux bornes du condensateur comme un processus aléatoire non ergodique dont nous avons étudié la dynamique temporelle. Nous nous avons ainsi pu extraire des comportements moyens et étudier l'évolution au cours du temps de la densité de probabilité des trajectoires.

* * *

Cette étude préliminaire invite à une étude approfondie en terme d'entropie de Shannon au cours de la réalisation du processus. Elle invite également à une modélisation plus subtile du processus moyen qui tient compte du caractère non gaussien de la densité de probabilité des vitesses de la pale plongée dans le gaz granulaire. Dans le chapitre 14, on reprend ce type de système pour proposer une expérience de réfrigérateur ainsi qu'une machine thermique capable en théorie de lancer un moteur.

Chapitre 11

La Machine de Szilard macroscopique

I'm all in favor of the democratic principle that one idiot is as good as one genius, but I draw the line when someone takes the next step and concludes that two idiots are better than one genius.

Leo Szilard

Une machine de Szilard est une façon de réaliser un démon de Maxwell qui permet de mettre en évidence le lien entre entropie, énergie et information. Le principe est le suivant : on dispose d'une source chaude à la température T_H qui échange avec une particule intermédiaire comme un piston par exemple. Un observateur va alors réaliser une mesure sur la particule. Et en fonction de cette mesure il va faire subir à la particule intermédiaire une transformation permettant d'extraire du travail. Enfin, il réinitialise le système en faisant reprendre les échanges entre la particule intermédiaire et la source chaude. La particularité de la machine de Szilard est de prendre en compte un état de mémoire associé au démon. Un exemple d'une telle machine est présenté en figure 11.1.

On choisit comme particule intermédiaire un piston de volume/position q , et de raideur C . On plonge ce piston dans un gaz thermostaté à la température T_H qui sert de source chaude. Les échanges d'énergie entre le piston et le gaz sont dus aux chocs entre le piston et les particules du gaz qui exercent sur ce dernier une pression/force aléatoire V_C . Cette force de rappel et la position correspondante du piston sont donc des grandeurs aléatoires couplées $q = CV_C$. Le piston renferme une "énergie potentielle" $E = CV_C^2/2$. Si d'aventure, la pression du piston dépasse un certain seuil V_S , alors on peut tirer parti de cette énergie potentielle que l'on va extraire. C'est la condition que mesure le démon : $q > CV_S ? \iff V_C > V_S ?$

Si $q < CV_S$, le piston n'a pas emmagasiné suffisamment d'énergie potentielle et on le laisse échanger avec le gaz.

Si $q > CV_S$, on considère que le piston a stocké suffisamment d'énergie pour qu'elle soit utilisée. On va alors lui faire subir trois étapes : d'abord, on bloque le piston et on l'isole de la source chaude. Il contient alors une énergie potentielle $E > CV_S^2/2$. On peut extraire cette énergie potentielle en soulevant une masse, grâce à un système de poulies adéquat par exemple. On vient d'extraire un travail. Pendant cette transformation, la position du piston est devenue inférieure à V_S . On replonge alors le piston dans le gaz de la source chaude pour pouvoir recommencer le processus.

Certains pourraient croire que ce système permet d'extraire du travail à partir d'une seule source de chaleur et évoqueraient une violation du second principe. Cependant, il n'en est

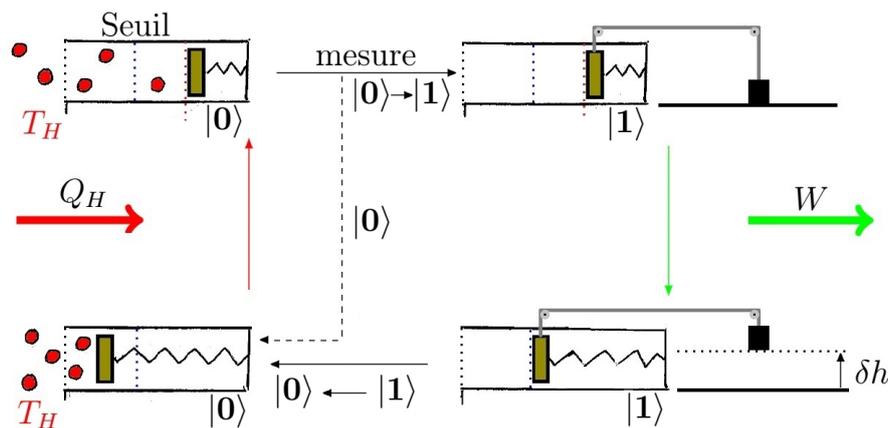


FIGURE 11.1 – Machine de Szilard théorique. On mesure la position d'un piston en contact avec un gaz à température kT_H qui tient lieu de source chaude. Il échange une chaleur Q_H avec le gaz et sa position fluctue. Si la position du piston dépasse un seuil choisi, un démon isole le piston du gaz et en profite pour extraire un certain travail W avant de réinitialiser la machine et de remettre le piston en contact avec la source chaude. Les notations $|\cdot\rangle$ renvoient aux états de la mémoire du démon. $|0\rangle$ quand le piston est à gauche du seuil et $|1\rangle$ quand le piston est à droite du seuil. La ré-initialisation de la mémoire coûte $k_B T \ln(2)$ à l'extérieur du démon (à la température T).

rien : cette machine est simplement un démon de Maxwell. En effet, il s'agit d'un dispositif qui réalise une mesure instantanée sur la particule, et rétroagit de manière à briser la symétrie en fonction du résultat de cette mesure.

Pour retrouver le second principe, il nous faut simplement prendre en compte le démon, et son refroidissement par "une source froide", dans le bilan d'entropie. La question d'identifier cette source n'est pas évidente. Deux points de vue complémentaires sont à considérer.

Vision de Feynmann : référence bruitée

D'après Feynmann, Dans une certaine mesure, on peut considérer que cette source froide est liée à référence que le démon va utiliser pour mesurer la position du piston. Pour mesurer la condition "le seuil est-il dépassé ?", c'est à dire $q > CV_C$?, le démon a en effet besoin de comparer la position mesurée q avec la valeur de référence CV_S . Toute incertitude sur cette référence influence l'efficacité du démon. En effet, si on se trompe sur la valeur de référence et qu'on compare $q > C(V_S - \epsilon)$, la quantité d'énergie extraite sera inférieure à la quantité souhaitée. On détaillera principalement cette vision au chapitre 12.

Cependant, même si la référence du démon était parfaitement bien définie, la mesure effectuée par le démon a en elle-même un coût entropique. C'est la contribution de Szilard à ce problème.

Vision de Szilard : mémoire, information et entropie

Le point de vue de Szilard [5][6][27] est de considérer que si le démon dispose d'une référence absolue CV_S pour la comparaison, il a tout de même besoin d'une mémoire pour se souvenir du

résultat de la mesure. Cette mémoire est à comprendre au sens de la théorie de l'information : réaliser la mesure revient à observer l'état du système puis écrire le résultat de la mesure (qui est corrélé à l'observation) sur un bit d'information. Pour refaire une mesure, le démon doit d'abord effacer le résultat de la mesure précédente. Cette étape consiste plus précisément à décorréler l'état de la mémoire de l'état de la particule. Cette perte d'information sur l'état du système augmente l'entropie globale. Cette vision implique qu'une partie de l'algorithme suivie par le démon doit être indépendante de l'état du système mesuré par le démon. Une machine de Szilard possède donc nécessairement une étape qui est indifférente au résultat de la mesure. La mesure coûte elle-même donc $k_B T \ln(2)$ d'après le principe de Landauer, énergie qui est déversée dans la source froide (à la température T) lorsqu'on réinitialise le système.

Pour fixer les idées, on va expliquer le fonctionnement de la mémoire dans notre machine expérimentale équivalente où le démon mesure l'état de la particule en vérifiant la condition $q > CV_S$? à la période τ_D . Le schéma est présenté en figure 11.2.

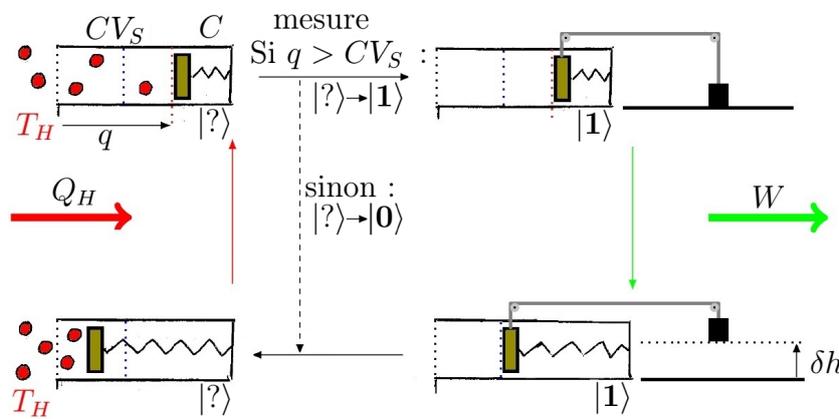


FIGURE 11.2 – Machine de Szilard réelle. On mesure la position d'un piston en contact avec un gaz à température kT_H qui tient lieu de source chaude. Il échange une chaleur Q_H avec le gaz et sa position fluctue. Si la position du piston dépasse un seuil choisi, un démon isole le piston du gaz et en profite pour extraire un certain travail W avant de réinitialiser la machine et de remettre le piston en contact avec la source chaude. Les notations $| \rangle$ renvoient aux états de la mémoire du démon. $|0\rangle$ quand le piston est à gauche du seuil et $|1\rangle$ à droite du seuil. Quel que soit le résultat de la mesure, le démon vide sa mémoire vers l'état neutre $|?\rangle$ qui est indépendant de l'état du système. La réinitialisation de la mémoire coûte $k_B T \ln(2)$.

De manière très schématique, dans notre machine, le démon doit observer la valeur q . Il dispose d'un papier sur lequel il note le résultat de la mesure "OUI" que l'on note $|1\rangle$ si $q > CV_S$ et "NON" que l'on note $|0\rangle$ sinon. Cependant, une fois le papier noirci, le démon ne peut plus écrire dessus et donc ne peut plus réaliser de mesure. Le démon doit donc effacer l'inscription sur le papier avant de pouvoir produire une nouvelle mesure. Effacer le papier signifie prendre l'état de mémoire $|?\rangle$, qui est totalement décorrélé de l'état du système. Cela ne peut avoir lieu que dans une étape du système qui ne dépend pas du résultat de la mesure.

Cette construction est également plus facile à comprendre et à mettre en place expérimentalement. Mais il ne s'agit pas exactement de la vision idéale de Szilard. En effet la vision d'une mémoire comme le voudrait Szilard revient à considérer comme en figure 11.1 une feuille blanche $|0\rangle$ pour l'état $q < CV_S$ et une feuille noircie $|1\rangle$ pour $q > CV_S$. Comme on en parlera dans l'ouverture, ces deux machines ont des taux de production d'entropie différents.

Dans ce chapitre, on se demande comment construire une machine de Szilard du type de la figure 11.2 à l'échelle macroscopique.

11.1 Principe

On propose de réaliser à l'échelle macroscopique une machine de Szilard. Comme particule, on choisit un condensateur de capacité C . On utilise comme précédemment le système {pale+moteur} dont la pale est plongée dans un gaz granulaire à la température T_H comme source chaude. Pour mettre en œuvre l'algorithme d'une machine de Szilard, on va réaliser le cycle suivant : d'abord, on laisse le condensateur échanger librement de l'énergie avec la source chaude tant que cette tension V_C est inférieure à une certaine valeur de référence V_S . V_C est alors une grandeur aléatoire. Si $V_C > V_S$, on extrait l'énergie contenue dans la capacité dans un dipôle. Puis, on recommence un cycle en branchant le condensateur C à nouveau vide aux bornes du moteur. Le condensateur échange ainsi de nouveau avec la source chaude, et le cycle peut recommencer. Si jamais le démon mesure $V_C < V_S$, il laisse le condensateur branché au moteur. On appelle \mathcal{P}_S la puissance extraite à chaque cycle.

On va principalement s'intéresser à deux quantités dans cette étude : la puissance moyenne extraite lors d'un cycle de la machine \dot{W} et la vitesse de rotation de la pale $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}(t) \equiv \frac{e(t)}{\alpha} \quad \dot{W} \equiv \langle \mathcal{P}_S \rangle \quad (11.1)$$

Dans notre machine, définir la valeur moyenne est relié à la période à laquelle le démon réalise la comparaison.

Durée des cycle et estimation de \dot{W}

Expérimentalement, une période est en fait imposée à cet algorithme. Il s'agit de la période $\tau_{\mathcal{D}}$ à laquelle le démon va réaliser sa mesure et agir en conséquence. Toute la dynamique ayant lieu à une échelle temporelle plus petite est nécessairement perdue dans le sens où elle n'est pas prise en compte par le démon. C'est donc la durée pertinente que l'on choisit de considérer comme la durée d'un cycle. En effet : si le seuil n'est pas atteint durant cette période, on considère que l'on a réalisé un cycle en extrayant $\mathcal{P}_S = 0$. Si d'aventure, le seuil est dépassé, on extrait la puissance $\mathcal{P}_S \geq V_S^2/r$. On note T_{tot} la durée totale de l'acquisition. On définit donc comme estimateur de la moyenne :

$$\dot{W} \equiv \langle \mathcal{P}_S \rangle \equiv \frac{1}{T_{tot}/\tau_{\mathcal{D}} + 1} \sum_{k=0}^{T_{tot}/\tau_{\mathcal{D}}} \mathcal{P}_S(t = k\tau_{\mathcal{D}}) \quad (11.2)$$

Et en pratique, on suppose que cette quantité est stationnaire, sur une durée d'acquisition totale $T_{tot} \gg \tau_{\mathcal{D}}$. Cependant, cette mesure de $\dot{W} \equiv \langle \mathcal{P}_S \rangle$ n'est fiable que si la dynamique de la particule qui nous sert de source chaude se fait à une échelle temporelle plus grande que la période de mesure du démon. Expérimentalement, c'est le cas comme on l'explicitera dans la section 11.2.

11.2 Montage

Pour réaliser cette expérience, on propose le montage représenté en figure 11.3 :

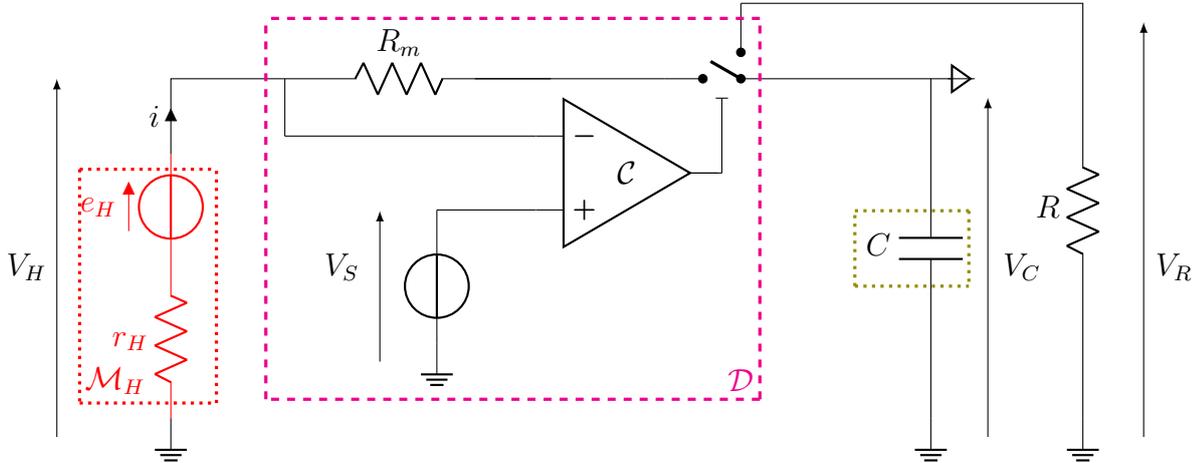


FIGURE 11.3 – Schéma expérimental du démon de Maxwell. Le cadre \mathcal{M} modélise le moteur à courant continu comme un générateur de Thévenin : une source idéale de tension $e \equiv \alpha\dot{\theta}$ proportionnelle à la vitesse de la pale, et une résistance interne r_H . Le démon est le circuit \mathcal{D} . L'élément \mathcal{C} correspond à un comparateur analogique. Il compare les deux tensions V^+ à sa borne + et V^- à sa borne - et ouvre l'interrupteur si $V^+ - V^- > 0 \pm 2\text{ mV}$, soit ici si $V_H > 0 \pm 2\text{ mV}$, l'interrupteur est ouvert. La comparaison est réalisée toutes les $20\ \mu\text{s}$, sachant que le temps de corrélation de la vitesse de la pale est $\tau^* = 18\text{ ms}$.

On peut la décomposer en trois éléments. D'abord, le cadre \mathcal{M}_H désigne le système {moteur+pale} plongé dans un gaz granulaire à la température T_H , c'est à dire la source chaude. On le représente une fois encore comme un générateur de Thévenin (e_H, r_H). Il peut être branché au condensateur de capacité $C = 1.0 \cdot 10^{-5}\text{ F}$ par le démon grâce à un interrupteur commandé en tension. Le démon quant à lui est dans le cadre \mathcal{D} . Il contient le comparateur analogique \mathcal{C} , qui compare la tension V_H avec la tension de seuil V_S qui lui est fournie par un générateur de tension continue. Si $V_H \leq V_S$, l'interrupteur branche le condensateur sur le moteur et ces derniers échangent alors librement de l'énergie. Par contre, si $V_H \geq V_S$, le condensateur est branché sur la résistance R . Celle-ci permet à la fois de mesurer la puissance extraite de bain par le démon mais aussi de ré-initialiser la tension aux bornes de la capacité.

Le comparateur analogique est le même que dans les chapitres 9 et 10. Il possède un hystérésis de 2 mV à la montée et -2 mV à la descente ce qui donne une légère incertitude sur la comparaison. Il présente également un hystérésis temporel. Rappelons que le temps de corrélation de la vitesse est environ $\tau^* \approx 18\text{ ms}$ et que le temps typique entre deux chocs est de l'ordre de $\tau^\zeta \approx 3\text{ ms}$. L'interrupteur se ferme en environ 20 ns et le comparateur réalise une comparaison tous les $\tau_{\mathcal{D}} = 20\ \mu\text{s}$ qui correspond donc à la durée d'un cycle. La durée d'un cycle est donc bien plus faible que tous les temps de la dynamique de la pale, ce qui valide notre estimateur de la puissance moyenne (11.4).

On mesure les tensions $V_H(t)$, $V_S(t)$, $V_C(t)$ et $V_R(t)$ à l'aide d'une carte d'acquisition. Pour la mesure de V_C , on utilise un circuit suiveur à amplificateur opérationnel. La résistance $R_m = 30.1\ \Omega$ est optionnelle mais nous permet de mesurer le courant $i(t) = (V_H(t) - V_C(t))/R_m$ pour remonter à la tension $e_H(t) = V_H(t) + r_H i(t)$. La résistance interne est de l'ordre de

$r = 113 \Omega$, celle de décharge quant à elle vaut $R = 80.0 \Omega$. Ainsi, le temps caractéristique lié à la capacité est $(r + R_m)C = 1.5 \text{ ms}$ lorsque $V_H \leq V_S$ et $RC = 0.8 \text{ ms}$ lorsque $V_H \geq V_S$.

11.3 Résultats

Dans cette expérience, on propose de faire varier deux paramètres. D'abord, on peut choisir le seuil V_S qui contrôle donc la puissance minimale que l'on souhaite extraire. Ensuite, on peut faire varier la température granulaire kT_H qui commande la largeur de distribution des vitesses, c'est à dire la probabilité de dépasser un seuil fixé.

11.3.1 Une température et un seuil V_S

D'abord, on fixe la température ainsi que le seuil. Les trajectoires de la pale et l'histogramme de sa vitesse sont présentés en figure 11.4. On y compare trois valeurs typiques : " $V_S = -\infty$ " correspond au cas où la pale est toujours libre. Le cas " $V_S = +\infty$ " correspond au cas où le condensateur est toujours branché au moteur, il sera notre référence. On appelle $\sigma_C = 63.9 \text{ mV}$ l'écart type des tensions dans ce cas là. On teste la machine pour $V_S = 1.1 \sigma_C \approx \sigma_C$.

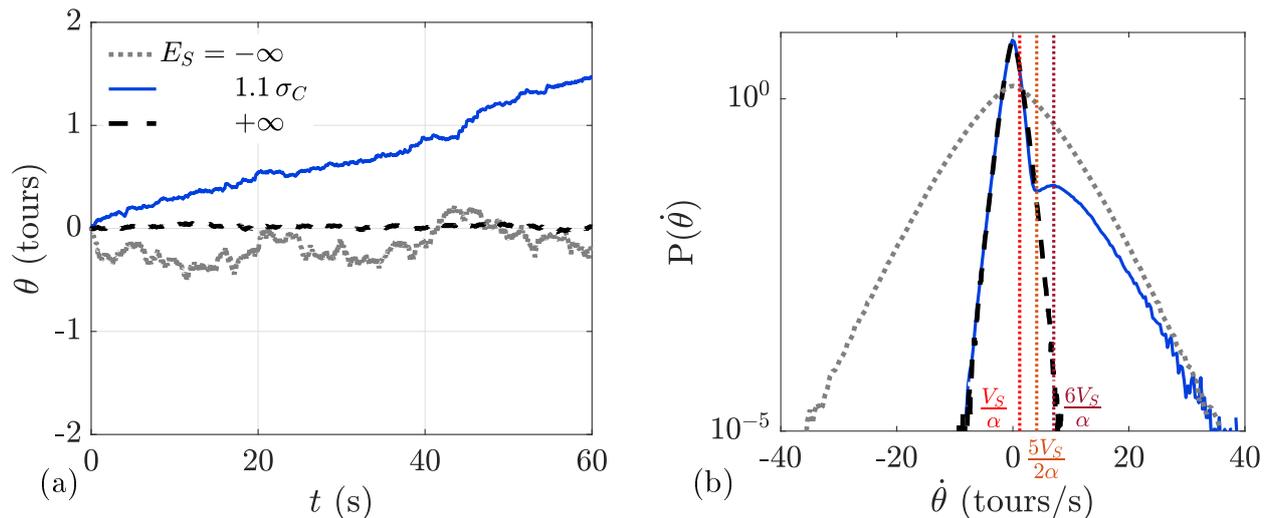


FIGURE 11.4 – (a) : trajectoires de la pale au cours du temps. (b) : histogrammes normalisés de la vitesse de la pale. En lignes noires, les cas symétriques qui nous servent de références : En tirets, $V_S = -\infty$ correspond aux cas où le moteur est toujours débranché, en pointillés $V_S = +\infty$ correspond aux cas où le moteur est toujours branché au condensateur. En bleu, le cas où le démon laisse libre les fluctuations $V_H > V_S$ mais branche le moteur à la capacité lorsque $V_H < V_S$. σ_C désigne l'écart-type des fluctuations de la tension dans le cas $V_S = +\infty$.

On remarque d'abord en figure 11.4(a) que dans les cas de référence, la pale exécute déjà un mouvement biaisé dans le sens anti-horaire. Ceci est particulièrement visible pour $V_S = +\infty$ où les fluctuations sont faibles mais on mesure pour les deux références la même vitesse moyenne $\langle \dot{\theta}_\infty \rangle = -4.59 \cdot 10^{-2} \text{ tours/s}$ soit -2.76 tours/min . Ceci est dû à une légère asymétrie géométrique de la pale. Par contre, pour $V_S \approx \sigma_C$, on voit que la pale tourne dans le sens horaire à une vitesse moyenne $\langle \dot{\theta} \rangle = 18.83 \cdot 10^{-2} \text{ tours/s}$ soit 11.27 tours/min . Non seulement, la symétrie est brisée, mais suffisante pour compenser largement l'asymétrie géométrique intrinsèque de la pale. On retirera par la suite cette vitesse de dérive à toutes les mesures.

L'asymétrie créée par ce démon est visible sur la figure 11.4(b). On remarque qu'en dessous du seuil, c'est à dire $\dot{\theta} \leq V_S/\alpha$, le moteur étant branché sur la capacité, les fluctuations de la vitesse de la pale sont comparables à la référence $-\infty$ alors qu'elles correspondent d'avantage à celles à $+\infty$ pour $\dot{\theta} \gg V_S/\alpha$. La forme de l'histogramme aux environs de $V_S \approx \sigma_C$ est complexe : il présente un minimum vers $\dot{\theta} \equiv 3.5 \sigma_C/\alpha$ et un maximum à $\dot{\theta} \equiv 6 \sigma_C/\alpha$. Nous n'avons pas pu modéliser la forme de cet histogramme proche de σ_C/α .

Pour ce qui est de la puissance extraite, on la définit à chaque cycle comme

$$\mathcal{P}_S(t) = \frac{1}{\tau_{\mathcal{D}}} \int_t^{t+\tau_{\mathcal{D}}} \frac{1}{R} V_R(s)^2 ds \quad (11.3)$$

La puissance extraite vaut donc bien 0 lorsque $V_H \leq V_S$ et correspond à l'énergie perdue par le condensateur lorsque $V_H \geq V_S$ car dans ce cas $V_C = V_R$. Dans cette expérience, on extrait $\dot{W} = 3.36 \cdot 10^{-7} \text{ W}$. La chaleur moyenne arrachée à la source chaude est $Q_H \equiv \langle e_{Hi} \rangle = 719 \cdot 10^{-7} \text{ W}$. Ce qui nous donne un rendement assez faible d'environ 0.5%.

A présent, on peut se demander comment les comportements de la pale, de la puissance moyenne et de la vitesse moyenne dépendent de la valeur du seuil V_S .

11.3.2 Une température mais différents seuils V_S

Dans cette partie, on garde la température fixée mais on fait varier le seuil. Les trajectoires de la pale et l'histogramme de la vitesse correspondante sont présentés en figure 11.5. A noter que l'on travaille à présent sur les quantités centrées c'est à dire en enlevant la vitesse de dérive due à l'asymétrie géométrique de la pale.

On constate sur la figure 11.4(a) que l'influence de V_S sur la vitesse moyenne n'est pas linéaire. La vitesse moyenne pour $V_S > \sigma_C$ est très faible. Sur l'histogramme en figure 11.4(b), on remarque en effet que l'asymétrie diminue qualitativement lorsque l'on augmente le seuil à mesure que les dépassements du seuil sont de moins en moins nombreux. L'asymétrie est maximale dans le cas $V_S = 0$, auquel cas la pale passe la moitié du temps freinée car le moteur est branché au condensateur et l'autre moitié du temps libre. La vitesse moyenne ainsi que la puissance moyenne sont disponibles en figure 11.6.

On confirme grâce à la figure 11.6(a) que la vitesse moyenne augmente lorsque V_S diminue comme l'asymétrie des histogrammes le laissait présager. Par contre, la figure 11.6(b) montre que la puissance extraite par la machine n'a pas une évolution monotone en fonction du seuil. En effet, la puissance extraite montre un maximum pour $V_S \approx \sigma_C$. Pour expliquer qualitativement l'existence de ce maximum, on peut faire une rapide analyse asymptotique. D'abord, reprenons la définition de \dot{W} de l'équation (11.4). On peut la simplifier comme :

$$\dot{W} \propto f_{1\mathbb{1}} \times \mathcal{P}_S \quad (11.4)$$

C'est à dire que la puissance moyenne extraite est le produit entre, d'une part, la valeur typique de la puissance à chaque fois que le seuil est dépassé \mathcal{P}_S par, d'autre part, la fréquence typique $f_{1\mathbb{1}}$ à laquelle le seuil est dépassé. Il paraît évident que la puissance extraite à chaque passage du seuil augmente avec la valeur du seuil : $\mathcal{P}_S \approx V_S^2/R$. Par contre, la fréquence à laquelle le seuil est franchi diminue avec la valeur du seuil. En effet, comme le montrent les

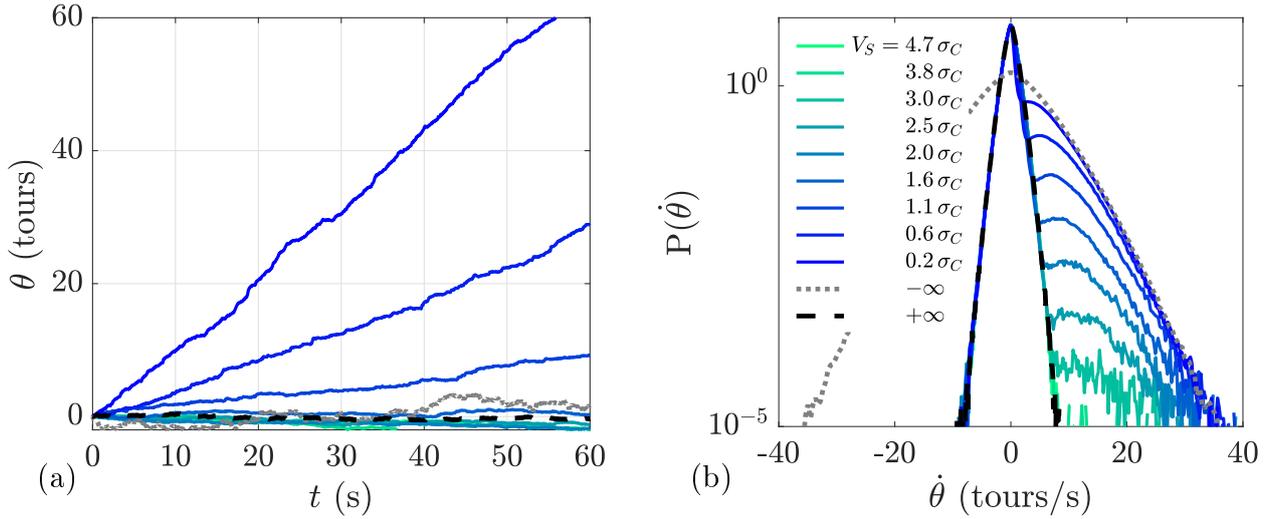


FIGURE 11.5 – (a) : Trajectoires centrées de la pale au cours du temps pour différents seuils V_S . (b) : Histogrammes centrés normalisés de la vitesse de la pale pour différents seuils V_S . En lignes pointillées, les cas symétriques qui nous servent de références : $V_S = -\infty$ correspond aux cas où le moteur est toujours débranché, $V_S = +\infty$ correspond aux cas où le moteur est toujours branché sur le condensateur. En couleurs, les cas où le démon laisse libre les fluctuations $V_H > V_S$ mais branche le moteur à la capacité lorsque $V_H < V_S$. σ_C désigne l'écart-type des fluctuations de la tension dans le cas $V_S = +\infty$.

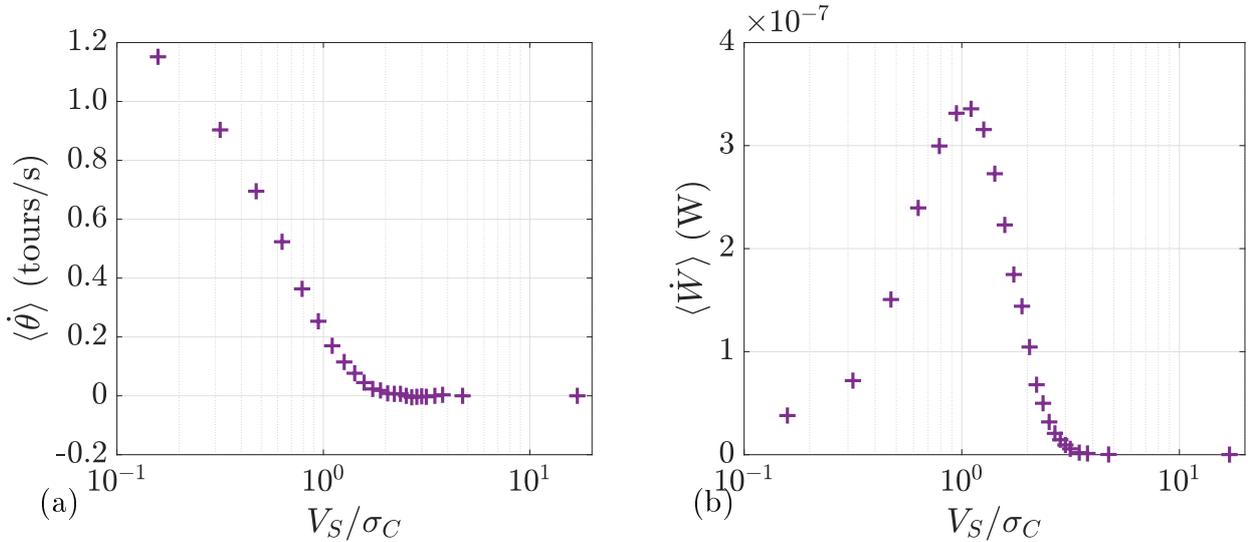


FIGURE 11.6 – (a) : Vitesse moyenne centrée pour différents seuils V_S , c'est à dire après avoir retiré la dérive des courbes de référence $V_S = -\infty$. (b) : Puissance extraite pour différents seuils V_S . Les seuils sont normalisés par σ_C , l'écart-type des fluctuations de la tension dans le cas $V_S = +\infty$.

histogrammes, observer une grande valeur de vitesse est moins probable qu'observer une valeur plus faible. En effet, d'une part, $V_S = 0$, alors, la fréquence est maximale, mais on extrairait approximativement $\mathcal{P}_S = 0$ donc on s'attend à observer $\dot{W}(V_S = 0) \rightarrow 0$. D'autre part, pour $V_S \rightarrow +\infty$, on extrairait une puissance infinie si jamais le démon déclenche mais cela ne se produit jamais donc $\dot{W}(V_S \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$.

On propose un modèle un peu plus élaboré prenant en compte la forme de la distribution en section 11.3.4. Mais avant cela, nous allons étudier également l'influence de la température sur le comportement de la machine.

11.3.3 différentes températures

En figure 11.7, on montre la vitesse moyenne centrée $\langle \dot{\theta} \rangle$ et la puissance extraite \dot{W} en fonction du seuil V_S pour différentes valeurs de la température granulaire indiquée par l'énergie cinétique de la pale $\langle E_c \rangle \equiv J\sigma_C^2/(2\alpha^2)$.

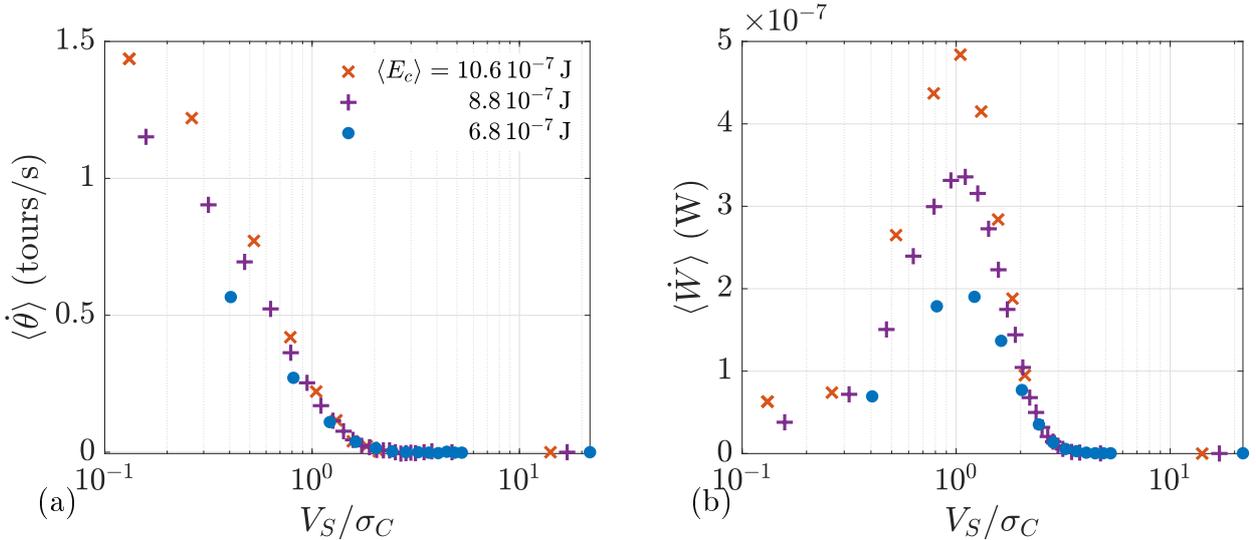


FIGURE 11.7 – (a) : Vitesse moyenne pour différents seuils V_S . (b) : Puissance extraite pour différents seuils V_S . Les seuils sont normalisés par σ_C , l'écart-type des fluctuations de la tension dans le cas $V_S = +\infty$.

On remarque d'abord que les dépendances en V_S ont des formes assez similaires pour les différentes températures. Une vitesse typique de la pale serait σ_C/α . On imagine donc que la vitesse moyenne à V_S donnée évolue comme $\sigma_C = \sqrt{kT_H}$. Une puissance typique investie dans le circuit serait σ_C^2/R donc on s'attend à ce que la puissance moyenne évolue proportionnellement à kT_H . On propose donc de diviser chaque quantité par la grandeur typique correspondante. Le résultat est présenté en figure 11.8. Une fois ainsi normalisées, les courbes pour différentes températures se superposent. On peut donc en déduire une séparation des variables :

$$\langle \dot{\theta} \rangle_{[V_S, kT_H]} \propto \mathbf{f}_{[V_S]} \sqrt{kT_H} \quad \text{et} \quad \langle \dot{W} \rangle_{[V_S, kT_H]} \propto \mathbf{g}_{[V_S]} kT_H \quad (11.5)$$

où kT_H désigne la température vue comme l'énergie cinétique du gaz granulaire. Maintenant que l'on a séparé la dépendance en température, on peut proposer un modèle pour la dépendance en V_S . Il est également présenté en figure 11.8 et est très bon.

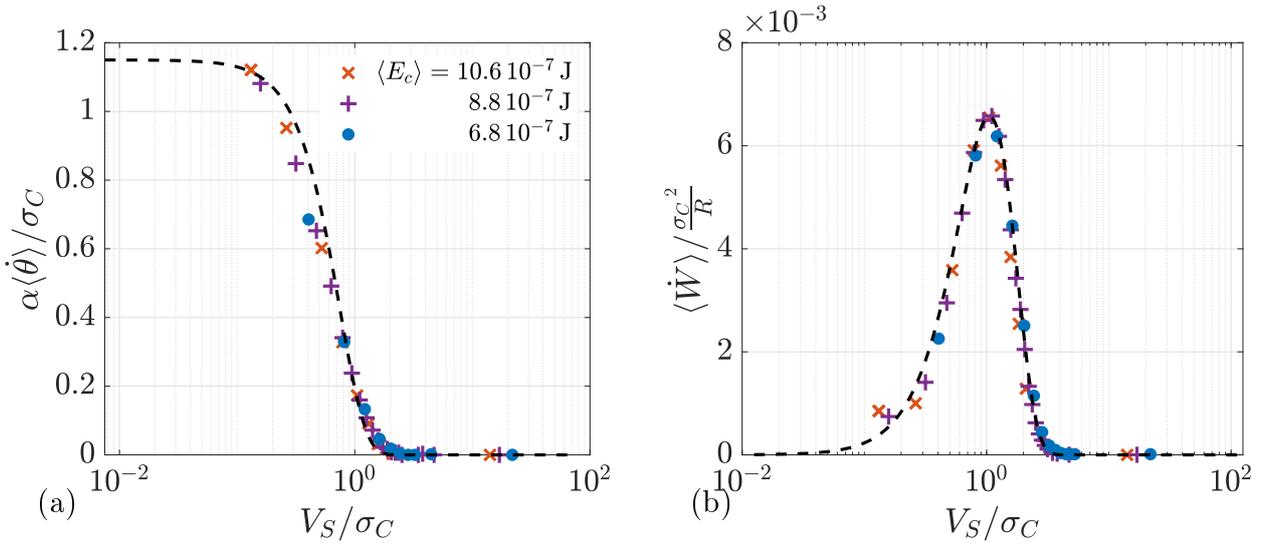


FIGURE 11.8 – (a) : Vitesse moyenne normalisée pour différents seuils V_S et différentes températures. (b) : Puissance extraite normalisée pour différents seuils V_S et différentes températures. Les seuils sont normalisés par σ_C , l'écart-type des fluctuations de la tension dans le cas $V_S = +\infty$. La ligne pointillée noire correspond au modèle de la section 11.3.4.

11.3.4 Modèle

Comme on l'a dit, il nous faut tenir compte de la forme de la densité de probabilité pour déduire la dépendance en V_S . Si on suppose que la puissance est tirée de manière aléatoire à une fréquence f très inférieure au temps de moyenne, alors la puissance moyenne vaut :

$$\dot{W}(V_S) = f P(V_H \geq V_S) \mathcal{P}_S(V_S) + (1 - f) 0 \quad (11.6)$$

En effet, pour chaque tirage, si $V_H = V_C > V_S$, la puissance extraite vaut $\mathcal{P}_S(e) = e_H^2/(2C)$, ce qui arrive avec la probabilité $P(V_H \geq V_S)$. Si non, la puissance extraite est 0. Par simplicité, on propose un modèle gaussien pour les probabilité de V_H dans le cas libre indicé " ∞ " et " C " dans le cas où le moteur est toujours branché au le condensateur. On propose donc une densité de probabilité \mathbf{p} de la forme :

$$P(V_H) \equiv \mathbf{p}(V_H)dV_H \quad \mathbf{p}(V_H) = \begin{cases} \mathfrak{z} \exp\left[-\frac{V_H^2}{2\sigma_C^2}\right] & \text{si } V_H < V_S \\ \mathfrak{z} \exp\left[-\frac{V_H^2}{2\sigma_\infty^2}\right] & \text{si } V_H > V_S \end{cases} \quad (11.7)$$

où \mathfrak{z} est une constante de normalisation telle que $\int \mathbf{p}(V_H)dV_H = 1$. Les constantes σ sont les écart-types des densités de référence :

$$\mathbf{p}_C(V_H) = \mathfrak{z}_C \exp\left[\frac{-V_H^2}{2\sigma_C^2}\right] \quad \text{et, } \mathbf{p}_\infty(V_H) = \mathfrak{z}_\infty \exp\left[\frac{-V_H^2}{2\sigma_\infty^2}\right] \quad (11.8)$$

où \mathfrak{z}_C et \mathfrak{z}_∞ sont également des facteurs de normalisation. On peut alors calculer les quantités moyennes correspondantes. D'abord :

$$P(V_H \geq V_S) = \mathfrak{z} \int_{V_S}^{+\infty} \mathbf{p}(s)ds = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left[\frac{V_S}{\sigma_C}\right]\right) \quad (11.9)$$

Donc, en rajoutant la dépendance en température, on obtient :

$$\dot{W}_{[V_S, kT_H]} \propto \left(1 - \operatorname{erf}\left[\frac{V_S}{\sigma_C}\right]\right) kT_H \quad (11.10)$$

On peut également estimer la vitesse moyenne $\langle \dot{\theta} \rangle = \langle e_H \rangle / \alpha \approx \langle V_H \rangle / \alpha$. Donc :

$$\langle e \rangle = \mathfrak{z} \int_{-\infty}^{V_S} \exp \left[-\frac{e^2}{2\sigma_C^2} \right] de + \mathfrak{z} \int_{-\infty}^{V_S} \exp \left[-\frac{e^2}{2\sigma_\infty^2} \right] de \propto \sigma_C (1 + \Xi) \exp \left[-\frac{V_S^2}{2\sigma_C^2} \right] \quad (11.11)$$

Où $\Xi \equiv \sigma_\infty / \sigma_C$ dépend de C . Notre estimation de la vitesse moyenne est donc :

$$\langle \dot{\theta} \rangle_{[V_S, kT_H]} \propto (1 + \Xi) \exp \left[-\frac{V_S^2}{2\sigma_C^2} \right] \sqrt{kT_H} \quad (11.12)$$

C'est le modèle que l'on a représenté en lignes pointillées sur les figures 11.8(a) et 11.8(b). Les deux modèles sont en très bon accord avec les données expérimentales. Une amélioration possible serait de tenir compte de la forme non gaussienne des distributions de vitesses mais le modèle permet d'ores et déjà de bien comprendre les mesures expérimentales et de rendre compte des différentes tendances.

11.4 Conclusion et discussion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé expérimentalement une machine de Szilard à l'échelle macroscopique. De plus, nous avons choisi de ne pas nous arrêter à l'étude du cas $V_S = 0$ mais avons produit une étude en fonction de la valeur du seuil des deux quantités pertinentes pour notre système : la vitesse moyenne de la pale et la puissance moyenne extraite par un dipôle. D'une part la vitesse moyenne diminue quand le seuil augmente à mesure que la distribution des vitesses devient symétrique. Par contre la puissance extraite n'évolue pas de manière monotone et admet un maximum quand la valeur du seuil est $V_S = \sigma_C$ c'est à dire l'écart-type des fluctuations de la tension quand le condensateur est toujours branché au moteur. Nous avons également pu étudier la dépendance de ces quantités avec la température effective du gaz granulaire : Il s'agit d'une simple homothétie car seule la "puissance disponible" apportée par le bain semble compter. Nous avons également pu modéliser la dépendance en le seuil et la température de la vitesse moyenne et de la puissance avec de très bons résultats même dans l'hypothèse de distributions gaussiennes.

* * *

Notre machine s'éloigne de la version idéale proposée par Szilard. En effet, dans notre machine, le choix du comparateur analogique qui est le cœur de notre démon impose qu'une mesure est en réalité exécutée par le démon chaque $\tau_D \approx 20 \mu s$. L'entropie créée dans notre machine est à taux constant. Si on la fait fonctionner pendant la durée T_{tot} , l'entropie créée à l'extérieur est $kT \ln(2) T_{tot} / \tau_D$ alors que l'entropie créée dans le schéma par une machine de Szilard idéale serait $k_B T \ln(2) N$ où N est le nombre de cycles d'extractions ayant eu lieu pendant T_{tot} . En effet la vision d'une mémoire comme le voudrait Szilard revient à considérer comme en figure 11.1 une feuille blanche $|0\rangle$ pour l'état $q < CV_S$ et une feuille noircie $|1\rangle$ pour $q > CV_S$. Le coût entropique n'est alors payé que lors de la ré-initialisation $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$. Cependant, on peut comparer ces deux coûts entropiques dans notre machine en considérant sur une réalisation qu'une machine de Szilard idéale est la même machine mais qui produit $k_B T \ln(2)$ uniquement lorsque l'interrupteur est refermé par le démon. Le fonctionnement de notre machine a donc un coût entropique plus élevé que la machine idéale qui ne mesure que lorsque le seuil dépassé.

On peut estimer cette différence dans un cas typique, on choisit $V_S = 1.1 \sigma_C$ pendant 10 min d'acquisition. On utilise pour cela un traitement numérique pour détecter les décharges du condensateur dans la résistance R . On compte $N = 18\,212$ ouvertures de l'interrupteur. Par contre, comme $\tau_D \approx 20 \mu\text{s}$, notre machine a en réalité fait environs 30 000 000 de cycles. Notre machine produirait donc environs 1 600 fois plus d'entropie que la machine idéale.

Quoi qu'il en soit, notre démon vide cette entropie dans un réservoir de faible température $T \approx 300\text{K}$ donc : $k_B T \ln(2) \approx 10^{-21}\text{J}$. Cette perte est donc très faible devant les autres énergies mises en jeu dans le système et n'aura donc pas une influence prépondérante sur le rendement d'une telle machine macroscopique.

* * *

Dans le chapitre suivant, nous utilisons le même système expérimental sous l'angle du démon de Maxwell comme vu par Feynman. En particulier, on va se poser la question : quelle est l'influence de la température du démon sur son fonctionnement ? Pour cela, nous allons faire fluctuer la tension de référence du seuil autour de sa valeur moyenne V_S .

A scientist's aim in a discussion with his colleagues is not to persuade, but to clarify.

Don't lie if you don't have to.

We turned the switch, saw the flashes, watched for ten minutes, then switched everything off and went home. That night I knew the world was headed for sorrow.

Leo Szilard

Partie IV

Machines thermiques aléatoires

Chapitre 12

Machine de Szilard-Feynman

12.1 Principe

The world is dynamic mess of jiggling things if you look at it right.

Richard Feynmann

Au chapitre 11, nous avons proposé une expérience de machine de Szilard qui est un exemple classique de démon de Maxwell. En effet, cette machine réalise une mesure et rétroagit sur le système pour en briser la symétrie. Nous avons également identifié le rôle de la valeur du seuil utilisée comme référence durant la mesure. Dans cette partie, on souhaite reprendre la vision de Feynman du démon de Maxwell, c'est à dire que nous allons considérer que le démon possède lui même une température. On rappelle en figure 12.1 le dessin de cette expérience de pensée :

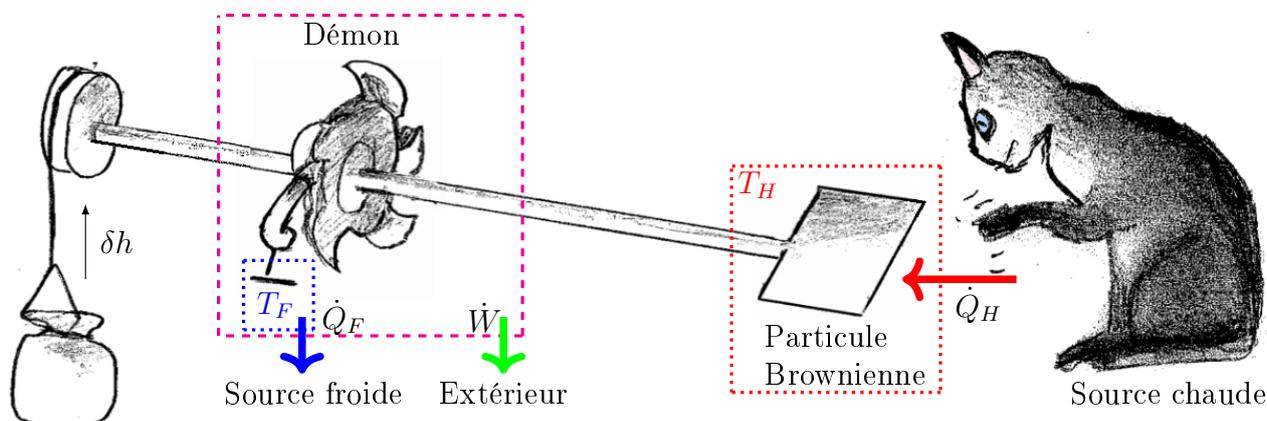


FIGURE 12.1 – Schéma de l'expérience de pensée. La pale subit une force aléatoire depuis la source chaude ce qui lui donne une rotation aléatoire. Mais le cliquet empêche la roue crantée de tourner dans un sens : la pale tourne alors en moyenne et la masse monte. Deux flux sont importants dans ce dispositif : la chaleur \dot{Q}_H donnée à la pale par la source chaude, et \dot{W} le flux de chaleur du démon vers l'extérieur. L'échange entre la pale et la source chaude définit pour la pale une température T_H . Pour rester efficace, le cliquet doit être maintenu à une température constante T_F inférieure à T_H , en échangeant un flux \dot{Q}_F avec une source froide. La chatte (nommée Maxwell) est présente pour rappeler que la source chaude n'a pas besoin d'être un thermostat à l'équilibre pour cette expérience : un bruit stationnaire de moyenne nulle et variance finie suffit.

D'après l'analyse de Feynman, pour calculer l'efficacité de cette machine thermique, il faut prendre en compte la température T_F du démon lui-même. Pour fixer cette température, le démon doit échanger avec une source froide analogue à un thermostat. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 11 avec la machine de Szilard, définir une source froide associée au démon a un double intérêt. D'une part le démon doit à chaque mesure y déverser le coût entropique élémentaire de mesure. D'autre part, et c'est là la vision de Feynman, cette source froide fixe les fluctuations de la référence utilisée par le démon pour la mesure. C'est cette dernière fonction de la source froide que nous allons étudier ici.

Imaginons le système décrit par Feynmann : la pale qui échange avec la source chaude. Si on enlève le démon, elle est libre, et elle ne tourne pas en moyenne. Elle possède des fluctuations de vitesse dont la variance est de l'ordre de kT_H . C'est à dire $\langle \dot{\theta}^2(t) \rangle \propto kT_H$. On ajoute le démon. Le rôle du cliquet est de comparer la vitesse de rotation de la pale à un seuil puis agir en conséquences. Cette référence de vitesse $\dot{\theta}_S \equiv V_S/\alpha$ correspond par exemple à la vitesse du support du cliquet. Si ce dernier a une température non nulle kT_F , le support a lui aussi une vitesse fluctuante de moyenne nulle et de variance $\propto kT_F$. cette vitesse aléatoire du support vient bruite la valeur du seuil. Ainsi, on pourrait écrire la vitesse bruitée du support comme une variable aléatoire $\dot{\theta}^+(t)$. Le démon compare ainsi la vitesse de la pale $\dot{\theta}(t)$, à sa vitesse de référence $\dot{\theta}^+(t)$ que l'on peut représenter comme :

$$\dot{\theta}^+(t) \equiv \dot{\theta}_S + \frac{1}{\alpha} \mathbf{b}(t) \quad \text{avec : } \langle \mathbf{b}^2(t) \rangle \equiv b^2 \propto kT_F \text{ et, } \langle \mathbf{b}(t) \rangle = 0 \quad (12.1)$$

La valeur de la référence vaut $\dot{\theta}_S$ en moyenne mais est bruitée par un bruit $\mathbf{b}(t)$ de variance $\propto kT_F$. Dans notre expérience, le démon fonctionne en comparant des tensions électriques, et le moteur assure l'équivalence $e_H(t) = \alpha \dot{\theta}(t)$. On va donc par la suite utiliser le facteur α pour faire correspondre au seuil en vitesse $\dot{\theta}^+(t)$, un seuil en tensions $V^+(t) \equiv \dot{\theta}^+(t)/\alpha$. On découpe ce dernier en deux termes : le seuil de référence $V_S \equiv \dot{\theta}_S/\alpha$ qui correspond à la valeur moyenne du seuil, auquel on ajoute un bruit aléatoire symétrique $\mathbf{b}(t)$ d'écart-type b dépendant de kT_F . C'est à dire :

$$V^+(t) \equiv V_S + \mathbf{b}(t) \quad \text{avec : } \langle \mathbf{b}^2(t) \rangle \equiv b^2 \propto kT_F \text{ et, } \langle \mathbf{b}(t) \rangle = 0 \quad (12.2)$$

b^2 est donc à l'image de la température de la référence. $V^+(t)$ est donc bien elle-même une variable aléatoire de variance $\langle (\mathbf{b})^2(t) \rangle \propto kT_F$. La question que pose le démon au système lors de la mesure est donc :

"Quel est le signe de la différence $\alpha \dot{\theta}(t) - V^+(t)$?"

A priori, les variables aléatoires $\dot{\theta}(t)$ et $V^+(t)$ sont décorrélées. En particulier, on peut montrer que l'efficacité du démon dépend de la différence de température : $(T_F - T_H)/T_H$. En effet, si le démon et la pale ont la même température, le démon se trompe la moitié du temps et la pale ne tournera plus en moyenne.

Dans ce chapitre, on reprend notre machine de Szilard comme démon de Maxwell auquel on impose un seuil électrique aléatoire. Puis, on s'intéresse à l'impact de ce dernier sur la dynamique de la pale.

12.2 Montage

Le schéma expérimental principal que l'on utilise pour cette expérience est celui de la machine de Szilard modifiée. Il est présenté en figure 12.2.

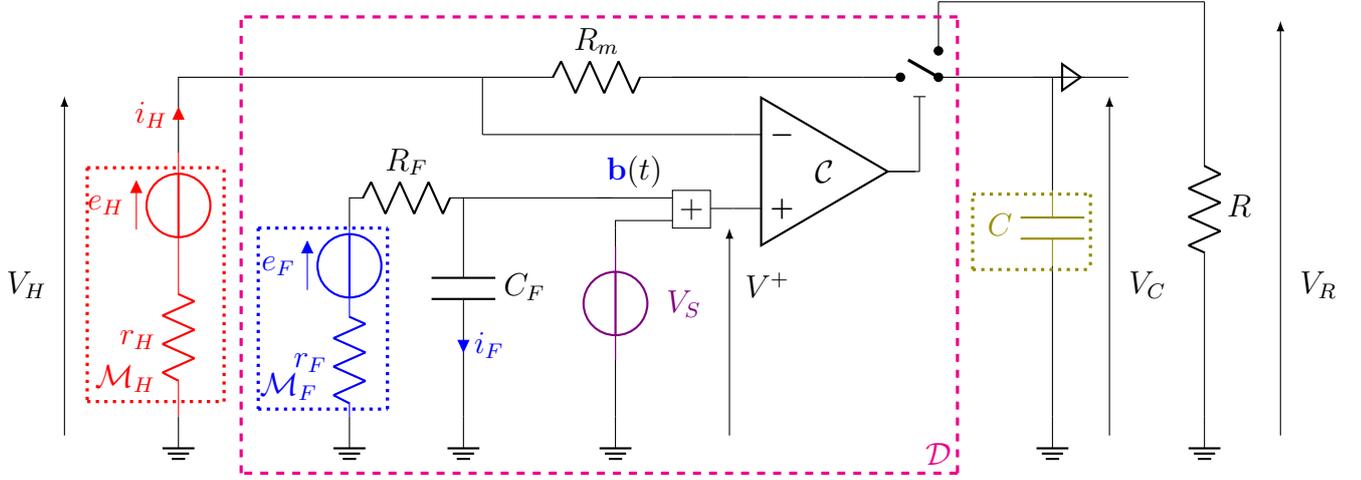


FIGURE 12.2 – Schéma expérimental d'une machine de Szilard avec un seuil bruité par un gaz granulaire. Les cadres \mathcal{M}_H et \mathcal{M}_F modélisent les moteurs dont la pale plonge dans un gaz granulaire, aux températures T_H et T_F respectivement. Le démon est le circuit \mathcal{D} . L'élément + est un additionneur à amplificateurs opérationnels et \mathcal{C} correspond à un comparateur analogique. Il compare la tension V_H à la tension de référence V^+ . Cette tension est une référence constante V_S bruitée par les fluctuations de $\mathbf{b}(t)$ issu de e_F . Le filtre (R_F, C_F) est symétrique au filtre (R_m, C) et permet de préparer les deux sources de manière comparable.

Ce schéma combine deux sources de tension pour produire le signal de référence bruité $V^+(t)$. La première est la tension continue V_S , il s'agit de la valeur de la référence du démon : le seuil à dépasser. Elle est fixée par un générateur de tension continue. La seconde tension est un bruit aléatoire $\mathbf{b}(t)$ issue du mouvement d'une pale plongeant dans un gaz granulaire à la température T_F reliée à un moteur \mathcal{M}_F . C'est notre source froide. Cependant, si l'on branche directement le moteur \mathcal{M}_F au comparateur analogique \mathcal{C} , aucun courant n'y circule pour freiner la pale et les fluctuations de vitesses de la pale sont bien plus grandes que celle de e_H lors du fonctionnement. On remarque en effet que la majorité du temps, c'est à dire quand $V_H < V^+$, le moteur \mathcal{M}_H est branché à un filtre $(R_m = 30 \Omega, C = 10 \mu\text{F})$, ce qui divise au moins par deux sa variance, comme indiqué au chapitre 8. Ainsi, pour que la vitesse de la pale à T_F ait des fluctuations comparables à celles du gaz à T_H , on choisit de relier le moteur \mathcal{M}_F lui aussi à un filtre (R_F, C_F) . On utilise un additionneur non inverseur à amplificateurs opérationnels pour ajouter ces deux tensions et obtenir la tension seuil bruité $V^+(t)$:

$$V^+(t) = V_S + \mathbf{b}(t) \quad (12.3)$$

Le temps de réponse de cet additionneur est de l'ordre de $100 \mu\text{s}$. On a donc dû choisir le temps de réponse du filtre (R_F, C_F) pour être plus grand que le temps de réponse de l'additionneur, c'est à dire $R_F C_F > 0.1 \text{ ms}$. On choisit de prendre $(R_F = 10.250 \text{ k}\Omega, C_F = 100 \text{ nF})$. Le temps caractéristique ainsi obtenu est $R_F C_F \approx 1 \text{ ms}$, ce qui correspond bien au critère ci-dessus. Pour ce qui est de la dynamique des vitesses, $R_F C_F$ ainsi choisi est petit devant le temps de corrélation typique de la vitesse d'une pale plongée dans un gaz granulaire qui est d'environ 18 ms . On peut donc en déduire que le filtrage ainsi obtenu va diminuer la variance des fluctuations comme on le souhaitait mais sans impacter grandement la dynamique de ces dernières.

Par la suite, on souhaitera également par curiosité voir l'influence d'un bruit ayant un temps de corrélation plus court que celui de la dynamique de la pale. Pour cela, on branchera simplement un générateur de bruit blanc à la borne + du comparateur analogique \mathcal{C} . Le montage est présenté en figure 12.3.

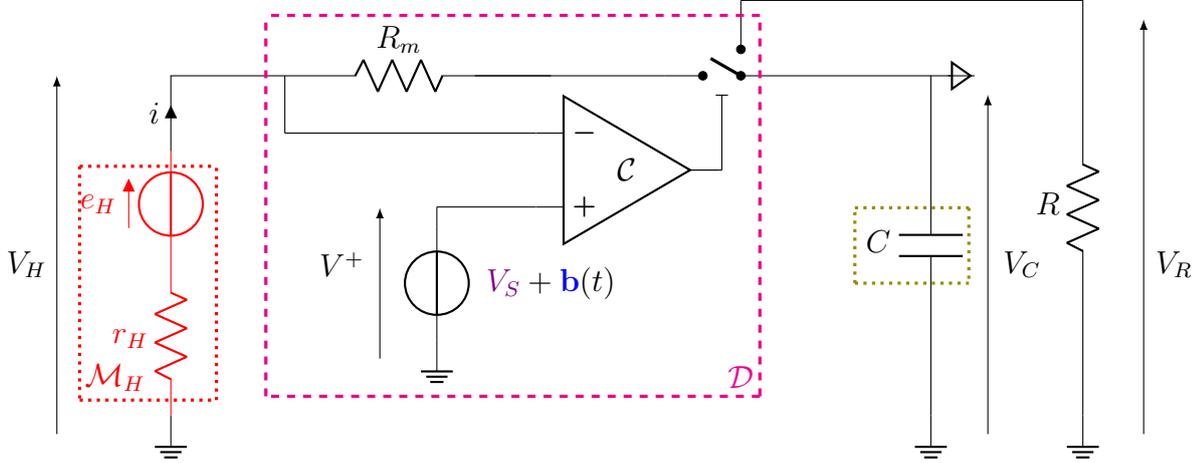


FIGURE 12.3 – Schéma expérimental du démon de Maxwell avec un seuil bruité. Le cadre \mathcal{M}_H modélise le moteur à courant continu comme un générateur de Thévenin : une source idéale de tension $e_H \equiv \alpha \dot{\theta}$ proportionnelle à la vitesse de la pale, et une résistance interne r_H . Le démon est le circuit \mathcal{D} . L'élément \mathcal{C} correspond à un comparateur analogique. Il compare la tension V_H à la tension de référence $V^+(t)$. Cette dernière est une valeur constante V_S bruitée par un bruit blanc synthétique $\mathbf{b}(t)$ sur l'intervalle $[0 \text{ Hz} ; 20 \text{ kHz}]$, de variance b^2 .

Il est un peu abusif d'appeler le bruit V^+ ainsi construit "bruit blanc". Un bruit blanc est un signal aléatoire théorique dont la densité spectrale de puissance est constante sur toutes les fréquences, ce qui signifie qu'il est delta-corrélé. Un tel signal ne peut pas être produit par une source réelle car il suppose une énergie infinie. Cependant, la plupart des générateurs actuels peuvent produire une bonne approximation de bruit blanc sur une certaine bande de fréquences. Le bruit blanc que nous avons choisi a pour paramètres de consigne : $\text{Var}(V^+) = b^2$, $\langle V^+ \rangle = V_S$ et comme bande de fréquences l'intervalle $[0 \text{ Hz} ; 20 \text{ kHz}]$. Son temps de corrélation est de $50 \mu\text{s}$ et est donc bien inférieur au temps de corrélation de la vitesse de la pale baignant dans la source chaude. Il nous permettra d'explorer l'influence du temps de corrélation du bruit sur le comportement du démon.

Dans la suite de cette expérience, on définit la température des gaz granulaires par rapport aux écart-types des fluctuations de tensions induites quand le moteur est toujours branché au condensateur associé. Pour la source chaude, on note cette dernière σ_H et on identifiera ainsi la température granulaire T_H à l'énergie cinétique moyenne de la pale E_H , c'est à dire :

$$E_H = \frac{J}{2\alpha^2} \sigma_H^2 \quad (12.4)$$

Cette dernière est contrôlée par l'accélération donnée aux billes du gaz granulaire correspondant.

Dans cette expérience, on fixe la température de la source chaude à $E_H = 7.8 \cdot 10^{-7} \text{ J}$, ainsi que les valeurs des composants C , C_F , R_m , R , et R_F . Les grandeurs variables sont la valeur du seuil V_S ainsi que l'écart-type du bruit $V^+(t)$ noté b . Le paramètre b est réglé soit directe-

ment sur le générateur dans le cas *bruit blanc* (schéma 12.3), soit en réglant T_F , en réglant l'accélération du gaz granulaire froid dans le cas du *gaz granulaire* (schéma 12.2).

12.3 Résultats

Tout d'abord on souhaite mettre en évidence l'influence de l'écart-type b du bruit $\mathbf{b}(t)$ sur la dynamique de la pale. On présente les histogrammes des signaux de commande bruités $V^+(t)$ en figure 12.4. Ils sont obtenus en ajoutant le bruit $\mathbf{b}(t)$ à la température T_F à une tension continue $V_S = 1.1 \sigma_H$, σ_H étant la valeur de l'écart-type de la tension e_H pour $V_S \rightarrow +\infty$ c'est à dire quand le moteur \mathcal{M}_H est toujours branché au condensateur C .

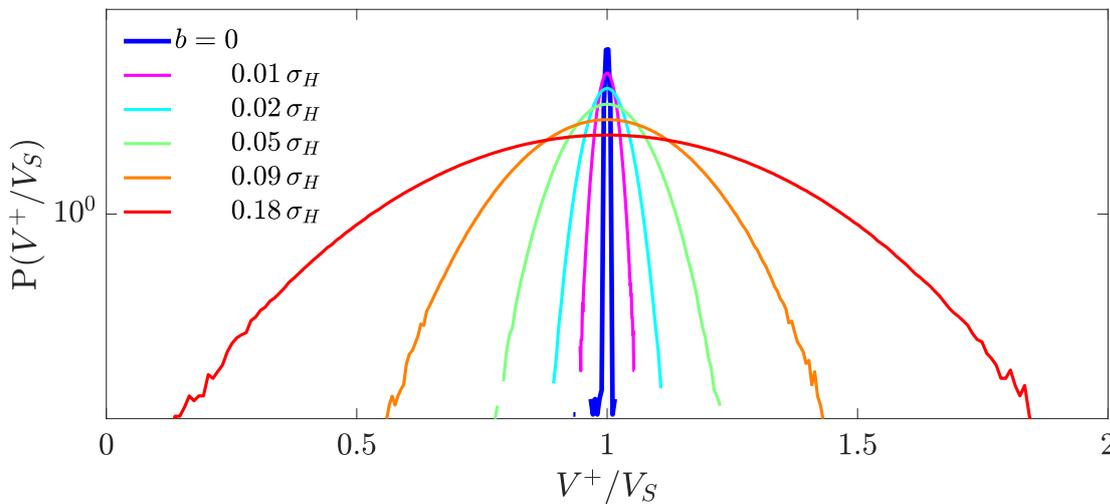


FIGURE 12.4 – Histogrammes normalisés de la tension mesurée V^+ à $V_S = 1.1 \sigma_H$ pour différentes valeurs de l'écart-type b pour 30 min d'acquisition. Le bruit est généré par le mouvement d'une pale dans un gaz granulaire de température T_F . σ_H désigne l'écart-type des fluctuations de tension e_H liées à la source chaude quand le moteur \mathcal{M}_H est toujours branché sur la capacité C , c'est à dire pour $V_S \rightarrow +\infty$.

A noter simplement qu'on ne dépasse pas $b = 0.18 \sigma_H$ pour que la tension V_S soit toujours positive. Les trajectoires et les histogrammes de la vitesse correspondante sont représentés en figure 12.5.

Tout d'abord, on remarque que les pentes moyennes des trajectoires dépendent de b , l'écart-type des fluctuations de la référence. On remarque en particulier que pour les grandes valeurs de b , la vitesse moyenne des trajectoires est d'autant plus grande que b est grand. Ceci indique que plus b est grand, plus la symétrie est brisée. C'est en effet visible sur les histogrammes de la vitesse de la pale : la probabilité d'observer une même vitesse $\dot{\theta} > 0$ est d'autant plus grande que b est grand. On pouvait avoir qualitativement intuition de ce résultat : parfois la réalisation du seuil est telle que $V^+(t) < V_H(t) < V_S$ le démon libère alors la pale pour une valeur de vitesse inférieure au seuil moyen.

On va donc faire l'hypothèse suivante : "Lorsque le démon a un seuil bruité comme référence, il se comporte comme s'il voyait un seuil constant \tilde{V}_S inférieur". Un exemple est donné en figure 12.6. Dans ce qui suit, on teste cette hypothèse et on essaye de définir ce nouveau seuil effectif \tilde{V}_S .

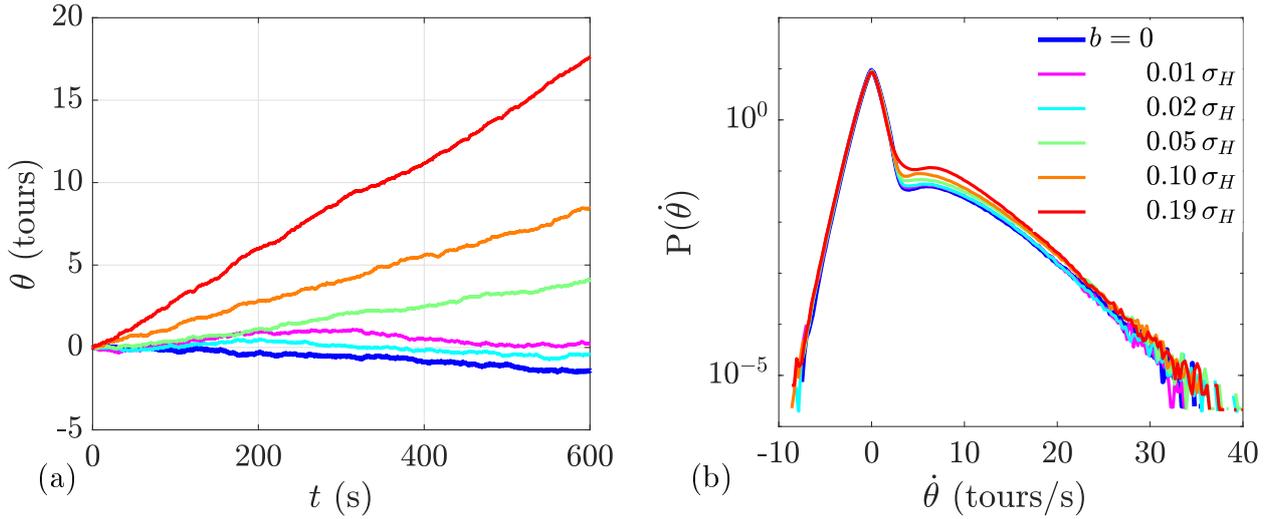


FIGURE 12.5 – (a) : trajectoires de la pale au cours du temps. (b) : histogrammes normalisés de la vitesse de la pale pour 30 min d’acquisition. Les différentes couleurs correspondent à différentes valeurs d’écart-type b de la tension de référence V^+ , centrée en $V_S = 1.1\sigma_H$.

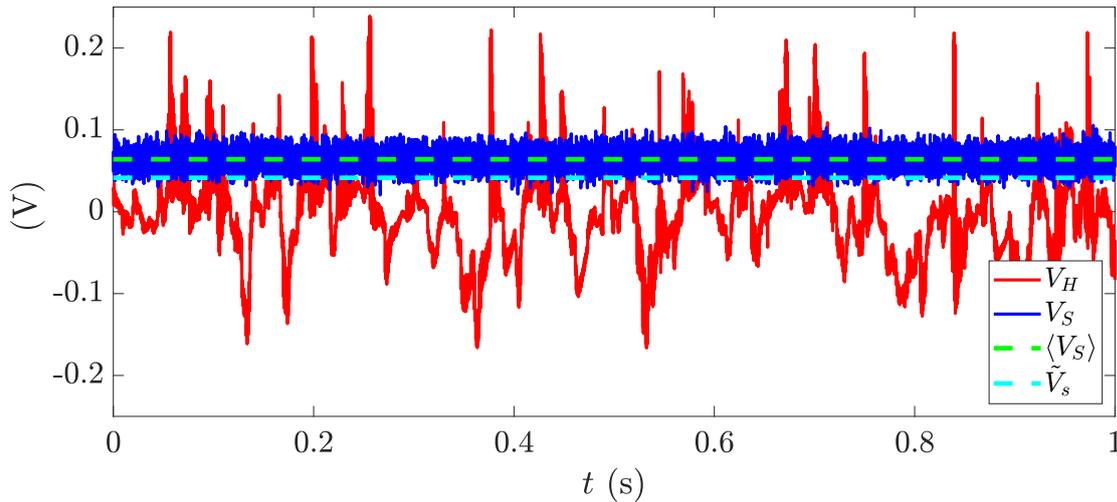


FIGURE 12.6 – Un exemple de réalisation de V_H qui est comparé à V_S . V_S est généré par un générateur de bruit blanc. En pointillés verts, la valeur moyenne du seuil, en pointillés cyan, la valeur du seuil effectif \tilde{V}_S .

12.3.1 Vitesse moyenne et seuil effectif

La vitesse moyenne de la pale est une quantité qui évolue de manière monotone avec la valeur du seuil. En effet, comme on l’a étudié au chapitre 11, $\langle \dot{\theta} \rangle$ décroît quand le seuil de référence V_S augmente. C’est donc une quantité toute trouvée pour déterminer l’expression de \tilde{V}_S . En figure 12.7, on présente l’évolution de la vitesse moyenne en fonction de l’écart-type du bruit pour différents bruits et différentes valeurs du seuil moyen V_S .

D’abord, en figure 12.7(a) on remarque que la vitesse moyenne augmente avec b quelle que soit le bruit choisi. Donc, le seuil effectif \tilde{V}_S décroît avec b . Par ailleurs, toujours en figure 12.7(a), on remarque que la vitesse moyenne augmente plus fortement avec b pour le bruit blanc que

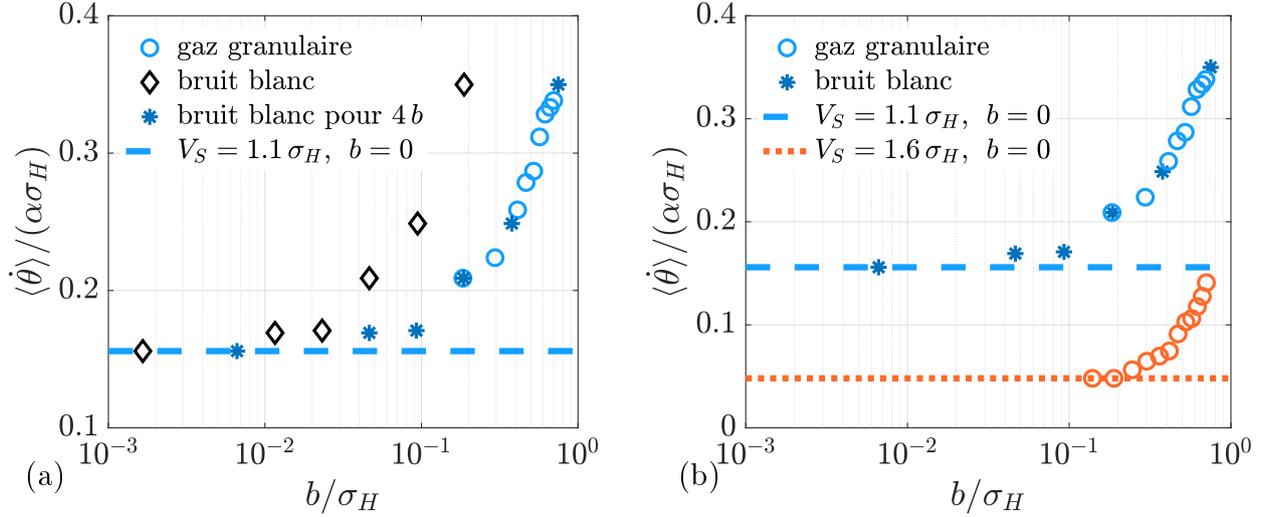


FIGURE 12.7 – Vitesse moyenne normalisée de la pale en fonction de l'écart-type de la tension de référence b . (a) : Vitesses moyennes pour $V_S = 1.1 \sigma_H$ pour le bruit blanc et le bruit issu du gaz granulaire en fonction de b , l'écart-type de la tension de référence. (b) : Vitesses moyennes pour $V_S = 1.1 \sigma_H$ et $V_S = 1.6 \sigma_H$ pour le bruit blanc et le bruit issu du gaz granulaire en fonction de b . Les lignes pointillées désignent les valeurs correspondant à une tension de référence non bruitée ($b = 0$). Les cercles à un bruit issu d'un gaz granulaire et les soleils et les diamants correspondent à un bruit blanc. Les étoiles en particulier représentent la vitesse moyenne en fonction de $\tilde{b} = 4b$. Les couleurs correspondent à différents seuils V_S .

dans le cas où le bruit est issu du gaz granulaire. La principale différence entre ces deux bruits est leur temps de corrélation. Pour obtenir la même vitesse moyenne qu'avec le gaz granulaire d'écart-type b , il faut prendre un bruit blanc d'écart-type $b/4$. Nous attribuons cette propriété à la différence d'échelles temporelles dans la dynamique de $V^+(t)$ d'une part et de $\dot{\theta}(t)$ d'autre part. On notera $\chi^* \equiv \tau^b/\tau^*$ le rapport du temps de corrélation du bruit τ^b par celui de la vitesse du gaz granulaire τ^* . Rappelons que le bruit blanc a un temps de corrélation d'environ $\tau^b \approx 50 \mu\text{s}$, soit environ $1/\chi^* = 24$ fois plus petit que le temps de corrélation de la vitesse de la pale. Notre modèle devra prendre en compte cette propriété. Enfin, comme le montre la figure 12.7(b), le seuil effectif \tilde{V}_S que nous proposons devra dépendre également du seuil réel moyen V_S , ce qui n'a rien de surprenant.

En prenant en compte ces trois propriétés, le modèle le plus simple que nous pouvons proposer est :

$$\tilde{V}_S [V_S, b, \chi^*] = V_S - \mathfrak{A}_{[\chi^*]} b \quad \text{où : } \mathfrak{A}_{[\chi^*]} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \chi^* \approx 1 \\ 4 & \text{si } \chi^* = 1/24 \end{cases} \quad (12.5)$$

En figure 12.8, on compare $\langle \dot{\theta} \rangle$ en fonction de \tilde{V}_S pour deux seuils moyens avec la courbe maîtresse $\langle \dot{\theta} \rangle(V_S)$ et son modèle que l'on a trouvé en section 11.3.4.

L'accord entre le modèle issu de la courbe maîtresse et les points expérimentaux pour un seuil effectif est très bon. Ceci tend à valider que le bruit sur la valeur de référence a pour conséquence d'imposer un seuil effectif \tilde{V}_S au démon. Ce seuil peut être modélisé en supposant $kT_F \approx Jb^2/(2\alpha^2)$:

$$\tilde{V}_S [V_S, kT_F, \chi^*] = V_S - \mathfrak{A}_{[\chi^*]} \sqrt{\frac{2}{J}} \alpha \sqrt{kT_F} \quad \text{où : } \mathfrak{A}_{[\chi^*]} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \chi^* \approx 1 \\ 4 & \text{si } \chi^* = 1/24 \end{cases} \quad (12.6)$$

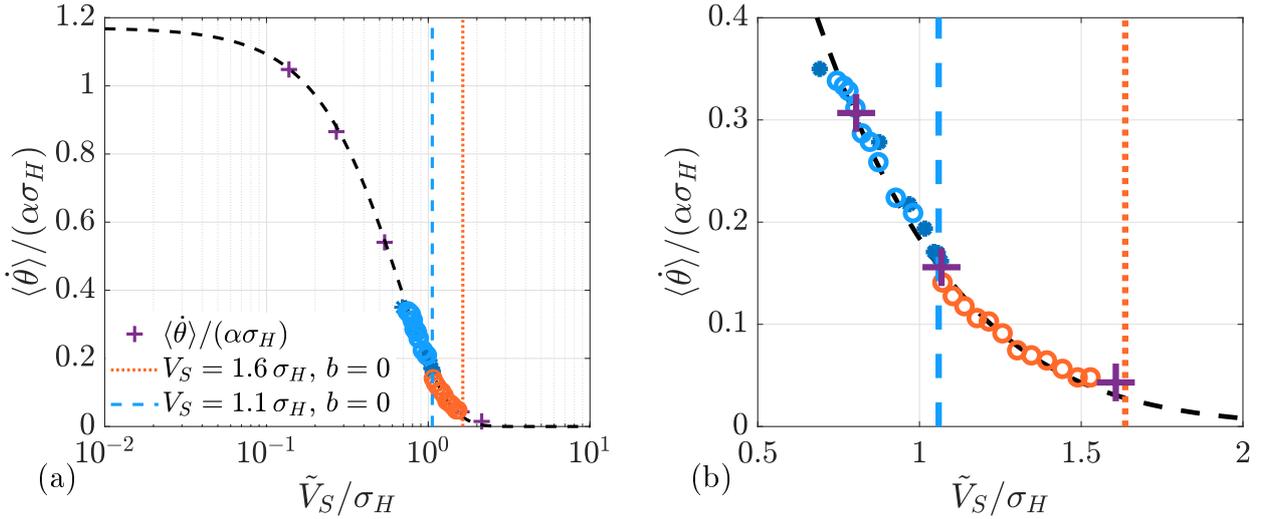


FIGURE 12.8 – vitesse moyenne en fonction du seuil effectif. (a) : Vitesse moyenne normalisée de la pale en fonction de l'écart-type de la tension de référence effective \tilde{V}_S . Les "+" correspondent aux points expérimentaux à $b = 0$ pour différents V_S , et la ligne pointillée noire représente le modèle correspondant déterminé en section 11.3.4. Les soleils correspondent à un bruit blanc, les cercles à un bruit issu d'un gaz granulaire. Les couleurs correspondent à différents seuils V_S indiqués par les lignes verticales à $b = 0$. (b) agrandissement de (a).

Ce modèle fonctionne bien pour prédire la vitesse moyenne. Cependant, il reste une quantité que nous n'avons pas regardée : la puissance moyenne extraite \dot{W} .

12.3.2 Puissance

Contrairement à la vitesse moyenne de la pale, la puissance moyenne extraite n'évolue pas de manière monotone avec le seuil. L'évolution de cette quantité en fonction de l'écart-type du bruit est représentée en figure 12.9.

D'une part, on remarque pour le seuil moyen $V_S = 1.1 \sigma_H$ que la puissance n'évolue pas de manière monotone avec b dans le cas du bruit blanc. En effet, on trouve un maximum vers $b = \sigma_H/10$. D'autre part, \dot{W} décroît avec b pour $V_S = 1.1 \sigma_H$ mais augmente avec b pour $V_S = 1.6 \sigma_H$. Si l'on essaye tout de même de proposer un seuil effectif \tilde{V}_S comme précédemment, on obtient la figure 12.10. Les points expérimentaux ne se superposent pas du tout à la courbe maîtresse issue de l'expérience et du modèle de la section 11.3.4 auquel on fait pourtant confiance. On doit donc en conclure que l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée : si le seuil effectif \tilde{V}_S proposé semble bien décrire comment le bruit sur la référence du démon vient modifier la vitesse moyenne de la pale, il ne décrit pas convenablement l'évolution de la puissance extraite. Ceci peut s'expliquer par l'ordre de ces deux quantités : la vitesse moyenne est une grandeur d'ordre 1 surtout sensible à la moyenne du seuil alors que la puissance extraite, une quantité d'ordre 2, est plus sensible au bruit sur le seuil.

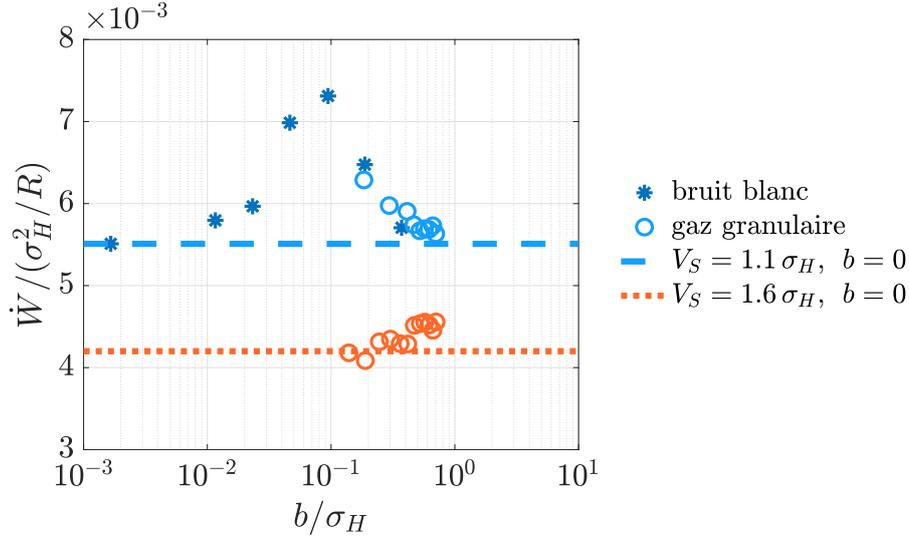


FIGURE 12.9 – (a) : Puissance moyenne extraite normalisée de la pale en fonction de b , l'écart-type de la tension de référence, *i.e.* la température froide, pour différents bruits et différents seuils moyens $V_S = 1.1\sigma_H$ et $V_S = 1.6\sigma_H$. Les lignes pointillées désignent les valeurs correspondant à une tension de référence non bruitée ($b = 0$). Les cercles à un bruit issu d'un gaz granulaire et les soleils correspondent à un bruit blanc. Les couleurs correspondent à différents seuils V_S . En bleu : $V_S = 1.1\sigma$, en orange, $V_S = 1.6V_S$.

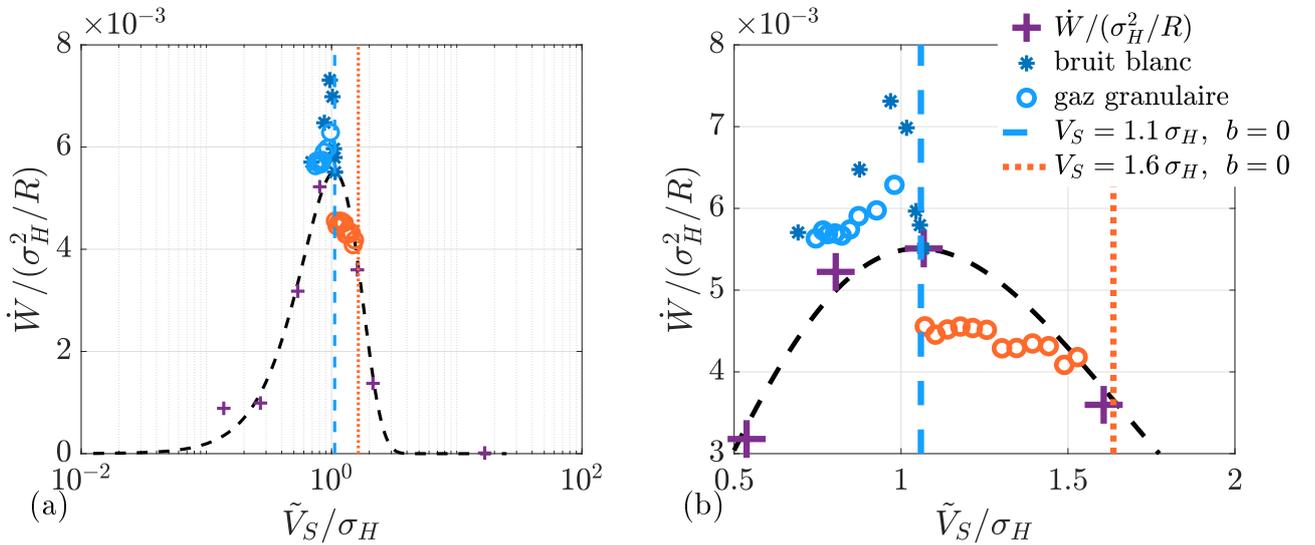


FIGURE 12.10 – Puissance moyenne extraite en fonction du seuil effectif. (a) : puissance moyenne extraite normalisée en fonction de l'écart-type de la tension de référence effective \tilde{V}_S . Les "x" correspondent aux points expérimentaux à $b = 0$ pour différents V_S , et la ligne pointillée noire représente le modèle correspondant déterminé en section 11.3.4. Les soleils correspondent à un bruit blanc, les cercles à un bruit issu d'un gaz granulaire. Les couleurs correspondent à différents seuils V_S indiquées par les lignes verticales pour $b = 0$. (b) agrandissement de (a). Les couleurs correspondent à différents seuils V_S . En bleu : $V_S = 1.1\sigma$, en orange, $V_S = 1.6V_S$.

12.4 Conclusion et discussion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le rôle de la température du démon dans une expérience de démon de Maxwell. Pour cela, nous avons repris la machine de Szilard que nous avons fabriquée, tout en ajoutant un bruit sur la référence du démon modélisant la température non nulle du démon. Nous avons observé que l'ajout de ce bruit a une réelle influence sur la dynamique brownienne de la pale ainsi que sur la puissance moyenne extraite du système. Nous avons également tenté de rendre compte de l'influence de ce bruit en proposant un nouveau seuil effectif. Ce dernier dépend de la température du démon, de la valeur de la référence, mais aussi du rapport de temps de corrélation : d'une part le temps inertiel de la particule brownienne et d'autre part le temps de corrélation du bruit sur la référence du démon. Le seuil effectif que nous avons proposé comme une fonction affine fonctionne très bien pour prédire la vitesse moyenne de la particule brownienne. Par contre, ce seuil effectif s'est montré trop simpliste pour modéliser l'influence de la température du démon sur la puissance extraite.

* * *

Pour poursuivre cette étude, Il serait très intéressant d'étudier en détail l'influence du temps de corrélation du bruit sur la dynamique. L'influence du seuil moyen est elle aussi importante et est à élucider. Enfin, et surtout, il paraît judicieux d'essayer de comprendre mieux l'influence du bruit sur la puissance extraite de manière plus générale et établir un modèle analytique serait également bienvenu.

Religion is a culture of faith; science is a culture of doubt.

The first principle is that you must not fool yourself and you are the easiest person to fool.

If you thought that science was certain - well, that is just an error on your part.

Study hard what interests you the most in the most undisciplined, irreverent and original manner possible.

You have no responsibility to live up to what other people think you ought to accomplish. I have no responsibility to be like they expect me to be. It's their mistake, not my failing.

The highest forms of understanding we can achieve are laughter and human compassion.

Richard Feynmann

Proposition de Modèle

Dans cette partie, je fais part d'une piste de calcul qui semble ne pas fonctionner pour modéliser l'influence du démon. Le résultat va à l'encontre du bon sens ce qui me fait penser que les hypothèses pour ce calcul doivent être trop osées.

Le démon compare la tension $V_H(t)$ à la valeur du seuil bruité $V^+(t)$. Supposons que ces deux variables aléatoires ont des densités de probabilité \mathbf{p}_H et \mathbf{p}_F gaussiennes :

$$\mathbf{p}_H(V_H) \equiv \mathfrak{z}_H \exp\left[-\frac{V_H^2}{2\sigma_H^2}\right] \quad \text{et, } \mathbf{p}_F(V^+) \equiv \mathfrak{z}_F \exp\left[-\frac{(V^+ - V_S)^2}{2\sigma_F^2}\right] \quad (12.7)$$

où \mathfrak{z}_H et \mathfrak{z}_F sont des constantes de normalisation telle que $\int \mathbf{p}(V_H)dV_H = 1$ et $\int \mathbf{p}(V^+)dV^+ = 1$. Les écart-types σ sont tels que $\sigma_H^2 \propto kT_H$ et $\sigma_F^2 \propto kT_F$. Si on suppose l'indépendance de ces évènements, la probabilité que le démon déclenche est :

$$\begin{aligned} P(V_H \geq V^+) &= P(V^+) P(V_H) \\ &= \mathfrak{z}_F \mathfrak{z}_H \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(V^+ - V_S)^2}{2\sigma_F^2}\right] \int_{V^+}^{+\infty} \exp\left[-\frac{V_H^2}{2\sigma_H^2}\right] dV_H \right\} dV^+ \\ &= \mathfrak{z}_H \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(V^+ - V_S)^2}{2\sigma_F^2}\right] \left(\frac{1}{2} - \operatorname{erf}\left[\frac{V^+}{\sigma_H}\right]\right) \right\} dV^+ \\ &= \frac{1}{2} - \mathfrak{z}_H \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(V^+ - V_S)^2}{2\sigma_F^2}\right] \operatorname{erf}\left[\frac{V^+}{\sigma_H}\right] dV^+ \end{aligned} \quad (12.8)$$

Poursuivre ce calcul est difficile dans le cas général. Par contre, le cas $V_S = 0$ est intéressant et facile à calculer. La fonction est en effet impaire alors que le facteur gaussien est une fonction paire donc l'intégrale du produit est nulle. Donc :

$$P(V_H \geq V^+) = \frac{1}{2} \quad (12.9)$$

Pour trouver la proportion de faux positifs, il suffit de diviser cette grandeur par la probabilité de dépasser un seuil non bruité :

$$P(V_H \geq V_S) = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}\left[\frac{V_S}{\sigma_H}\right] \quad (12.10)$$

C'est à dire $1/2$ pour $V_S = 0$. La probabilité d'observer un faux positif est :

$$P(\text{Faux Positif}) = P(V_H \geq V^+) / P(V_H \geq V_S) = 1 \quad (12.11)$$

Ce résultat paraît étrange : le démon ferait autant de faux positifs que de bons positifs quelle que soit la valeur de l'écart-type du bruit σ_F ... Ce résultat me semble très douteux.

Le bon sens nous dit que le résultat doit dépendre de σ_F .

Si $\sigma_F = 0$, le démon ne devrait jamais se tromper.

Si $\sigma_F > \sigma_H$, le démon devrait se tromper une fois sur deux.

Donc soit il y a une erreur dans le calcul, soit les hypothèses sont abusives.

Chapitre 13

Le réfrigérateur stochastique

Open your refrigerator door, and you summon forth more light than the total amount enjoyed by most households in the 18th century. The world at night, for much of history, was a very dark place indeed.

Bill Bryson : *At Home: A Short History of Private Life*

Pour cette expérience, on souhaite réaliser une machine thermique mettant en jeu un échange médié entre deux particules uniques dans deux réservoirs différents.

13.1 Principe

Comme schématisé en figure 13.1 une machine thermique se décompose en trois éléments : deux sources de flux (souvent de chaleur) et une source de travail qui interagissent par le biais d'un système judicieusement choisi, le *fluide caloporteur*. Ce fluide subit des transformations suivant un chemin thermodynamique fermé que l'on appelle *cycle thermodynamique*. En chaque étape du cycle, le fluide caloporteur échange de l'énergie avec une source choisie en fonction de son propre état thermodynamique (T, P, \dots). Ce dernier peut être modifié en tirant parti de l'équation d'état de ce fluide. Fabriquer une machine thermique revient donc à choisir les différentes étapes du cycle thermodynamique en fonction du sens des flux d'énergie souhaités. Certaines de ces étapes peuvent nécessiter un apport d'énergie extérieur sous forme de travail. Dans la suite, on choisit comme système la particule caloporteuse. On note Q les flux de chaleur et W le travail fourni par un opérateur extérieur. Il seront positifs lorsque l'énergie de la particule de fluide caloporteur augmente.

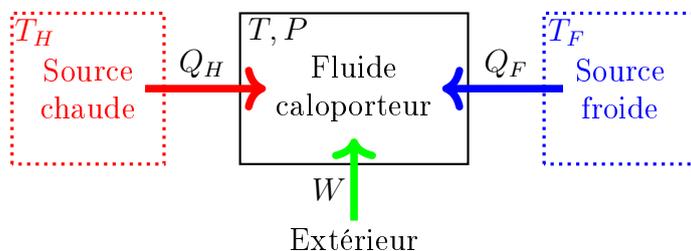


FIGURE 13.1 – Schéma de principe d'une machine thermique.

Un exemple de plus en plus courant est le climatiseur/réfrigérateur dont voici le principe. La source froide est l'intérieur du bâtiment qui a pour potentiel thermodynamique une température T_F que l'on souhaite abaisser. La source chaude est l'extérieur du bâtiment et a pour

potentiel thermodynamique une température $T_H > T_F$. Si jamais on laisse échanger directement la source froide avec la source chaude, un flux apparaît. Il déverse l'énergie depuis le potentiel élevé T_H vers le potentiel plus faible T_F . La source chaude réchauffe la source froide : $Q_F < 0$. C'est le sens thermodynamique spontané. Pour réaliser un flux inverse $Q_F > 0$, c'est à dire refroidir la source froide, il faudrait la mettre en contact avec un système de potentiel thermodynamique inférieur. On passe donc par l'intermédiaire d'un fluide caloporteur.

Le fluide caloporteur peut être une certaine quantité de gaz décrite par deux potentiels thermodynamiques : sa température T et sa pression P . Ces deux quantités sont liées par une *équation d'état* dépendante du choix du fluide. Cela signifie que pour une énergie totale fixée, plusieurs couples (P, T) sont possibles. Par exemple, pour une mole de gaz parfait, on a : $PV = n\mathfrak{R}T$, où V est le volume occupé par le gaz, n sa quantité de matière et \mathfrak{R} une constante. C'est cette équation d'état qui permet de réaliser le flux inverse. En effet, si l'on augmente le volume du gaz en réalisant une détente adiabatique, on fait diminuer la température du gaz. Partons d'un gaz parfait à la température T_H . On peut très bien choisir le volume après détente pour que la nouvelle température du gaz soit inférieure à T_F . Si on met alors en contact la particule de fluide après détente et la source froide, cette dernière donnera spontanément de l'énergie au gaz détendu. C'est l'étape de thermalisation à T_F . L'étape de détente adiabatique est donc cruciale car c'est elle qui permet de faire passer la température de la particule fluide en dessous de T_F , et donc de prendre de l'énergie à la source froide : c'est l'effet réfrigérateur.

Les étapes suivantes (compression adiabatique et thermalisation à T_H) sont simplement présentes pour venir fermer le cycle thermodynamique. On va donc comprimer le gaz pour lui rendre son volume et sa pression initiale, puis le remettre en contact avec la source chaude pour lui redonner la température T_H . Cependant, la cette étape demande un apport de travail extérieur (il a fallu comprimer le gaz à pression constante). Un exemple est présenté en figure 13.2

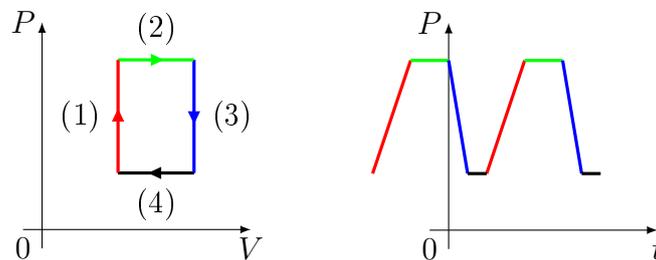


FIGURE 13.2 – Une machine thermodynamique théorique. A gauche, un cycle thermodynamique tracé dans un diagramme de Clapeyron. Le cycle comporte deux étapes isochores (1) et (3) ainsi que deux étapes isobare : la détente (2) et la compression (4). A droite une trace temporelle de l'évolution de la pression pendant deux cycles.

Dans la plupart des systèmes macroscopiques, le nombre important de particules mises en jeu lors des échanges assure que les potentiels thermodynamiques mis en jeu sont déterministes voire constants. En effet, le grand nombre de particules en jeu à l'échelle macroscopique font tendre vers 0 l'amplitude des fluctuations statistiques des quantités thermodynamiques. C'est la limite thermodynamique. Cependant, cette propriété n'est certainement plus vraie à l'échelle des molécules uniques. Que se passerait-il si l'on pouvait isoler comme source froide une particule unique baignant dans un thermostat à T_F , et la faire échanger avec comme source chaude une particule unique baignant dans un thermostat à $T_H > T_F$. Chaque particule serait alors seulement sensible à une réalisation de la statistique des vitesses. Le cycle réalisé par la machine serait alors aléatoire.

Peut-on réaliser un flux inverse en forçant des transformations cycliques sur une troisième particule qui joue le rôle de fluide caloporteur ? Peut-on construire un réfrigérateur si loin de la limite thermodynamique ?

13.1.1 Particules uniques dans les gaz granulaires

Nous utilisons le même système électromécanique que précédemment. On prend donc deux ensembles { pale+moteur }. Chaque pale baigne dans un bain granulaire à sa propre température. Elles représentent ainsi deux particules uniques baignant chacune dans un thermostat à deux températures différentes. On indice H les quantités relatives au bain chaud, et F celles relatives au bain froid. Ainsi, on appelle kT_H la température du gaz chaud. On la définit ici comme l'énergie cinétique moyenne de la pale lorsque le moteur est branché à la capacité.

La vitesse de rotation d'une pale correspond à une tension e aux bornes du moteur. Cette grandeur est aléatoire mais sa valeur va déterminer le sens des échanges. Si l'on branche directement un bain sur l'autre, on obtient un courant fluctuant en moyenne proportionnel à $T_H - T_F > 0$ qui va du chaud vers le froid. Les flux entrant dans le circuit sont alors en moyenne $Q_H > 0$ et $Q_F < 0$ et $W = 0$.

On souhaiterait ici réaliser un flux inverse, c'est à dire $Q_F > 0$ tout en conservant $T_H > T_F$. On cherche à réaliser un climatiseur (ou un réfrigérateur). Il nous faut donc construire une particule intermédiaire de fluide caloporteur, avec une fonction d'état qui nous permette d'abaisser son potentiel pour assurer un échange $Q_F > 0$. Il faut aussi qu'on soit capable de stocker de l'information/énergie dans cette particule. Une façon électrique de réaliser ce système est d'utiliser la particule suivante : une capacité variable. Elle est caractérisée par trois variables : V_C , la tension aux bornes de la capacité, q la charge stockée et C_{tot} sa capacité totale. Son équation d'état est $q = C_{tot}V_C$. Elle stocke donc une énergie potentielle $E = C_{tot}\frac{V_C^2}{2}$. Certaines de ces variables sont couplées par l'équation d'état comme $q = C_{tot}V_C$ si bien que deux d'entre elles suffiraient pour décrire définir totalement l'état thermodynamique du condensateur. Nous choisissons ici d'utiliser la tension et la capacité. Cependant, pour les calculs de flux, il est commode d'avoir l'énergie à chaque étape, nous écrirons l'état du condensateur par le triplet : (V_C, C_{tot}, E) .

13.1.2 Transformations sur la particule fluide : iso-capacité

On a déjà assimilé les systèmes {moteur+pale baignant} dans un gaz granulaire à des particules browniennes en contact avec un thermostat à une température donnée. Ce sont également des sources de tensions proportionnelles à la vitesse de la pale. Si on branche une capacité sur le moteur, la charge ainsi ajoutée modifie l'inertie de la particule brownienne. Les fluctuations de vitesses de la pale restent symétriques et on peut toujours utiliser la variance de la force électromotrice pour définir une température effective à cette particule. On définit donc la température d'un des thermostats comme l'énergie typique de la pale une fois branchée à la charge.

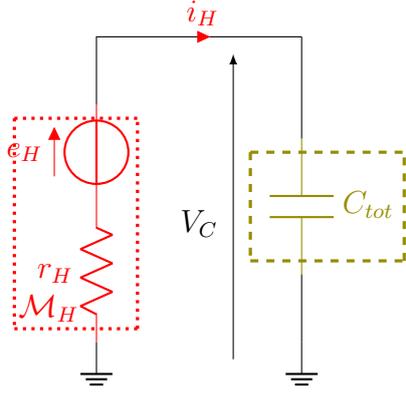


FIGURE 13.3 – Schémas de principe de la transformation iso-capacité.

Si on branche comme en figure 13.3 la capacité sur un moteur, la tension aux borne de la capacité correspond à la vitesse instantanée d’une particule en contact avec un thermostat. il y a alors échange d’énergie entre la particule et le thermostat granulaire. On appellera Q_H (avec l’indice correspondant au bain concerné) le flux d’énergie total entrant et on nommera cette étape *iso-capacité*, ces transformations où la particule caloporteuse est branchée sur l’un des moteurs. Cette étape revient donc simplement à imposer la tension V_H aux bornes du condensateur.

On note $V_H \equiv e_H - r_H i_H$, pour le bain chaud. Si on part d’un condensateur dans l’état $(V_i, C, \frac{C}{2} V_i^2)$, cette étape est :

$$\left(V_i, C, \frac{C}{2} V_i^2 \right) \xrightarrow{(1)} \left(V_H, C, E_H \equiv \frac{C}{2} V_H^2 \right) \tag{13.1}$$

13.1.3 Transformations sur la particule fluide : iso-charges

Pour réaliser la seconde transformation utile pour notre réfrigérateur, nous avons allons fabriquer une particule de fluide caloporteur de capacité variable. Celle-ci peut passer de la capacité C à la capacité C' à charge constante. Ce faisant, la tension aux bornes de cette particule est modifiée ce qui nous permet de réaliser le flux inverse.

Dilatation isotherme

Partons initialement d’un condensateur (V_i, C) , il renferme une charge $q_i = CV_i$. On dispose également d’une autre capacité $(V_2 = 0, C_2)$ qui renferme une charge nulle $q_2 = 0C$. Comme représenté en figure 13.1.3, ces deux condensateurs peuvent être reliés par un interrupteur. L’interrupteur et les fils offrent une résistance totale r . Notons $C \equiv C_1$ et $C' \equiv C_1 + C_2$.

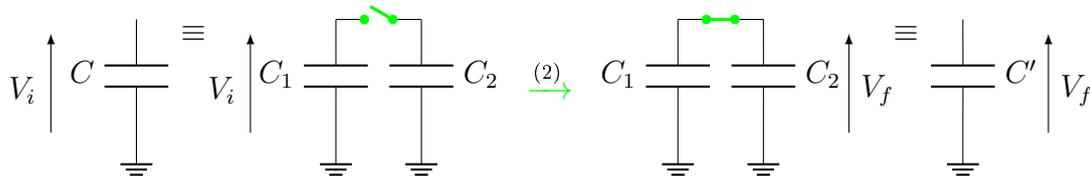


FIGURE 13.4 – Schémas de principe de la détente iso-charge.

On ferme l’interrupteur le nouvel état stationnaire est atteint après un temps caractéristique rC' . Comme la résistance des câbles r est très faible, l’état stationnaire est en pratique presque instantanément atteint. Dans ce régime, on trouve la même tension V_f aux bornes de chaque condensateur. Comme la charge totale est conservée lors de cette transformation, on a : $CV_i = C'V_f$. Donc la tension finale est $V_f = CV_i/C'$. L’énergie en fin d’étape est alors $E_2 = \frac{C}{C'} \frac{C}{2} V_i^2$.

D'un point de vue thermodynamique, si on considère que notre système est l'ensemble des deux condensateurs, on vient de réaliser la transformation :

$$\left(V_i, C, \frac{C}{2} V_i^2 \right) \xrightarrow{(2)} \left(V_2 \equiv \frac{C}{C'} V_i, C', E_2 \equiv \frac{C}{C'} \frac{C}{2} V_i^2 \right) \quad (13.2)$$

Cette transformation¹ iso- q revient donc à augmenter la capacité de la particule fluide à charge constante ce qui diminue son potentiel thermodynamique, c'est à dire le potentiel V_C . C'est là l'étape qui nous permettra d'inverser le flux Q_F .

Compression isotherme

Pour réaliser la transformation inverse, il faut remonter les charges qui étaient initialement dans la capacité |1| et vider les charges de la capacité |2|. C'est ce que l'on appelle *compression iso-charge*.

$$\left(V_i, C', \frac{C'}{2} V_i^2 \right) \xrightarrow{(4)} (V_f, C, E_f) \quad (13.3)$$

Une façon élégante de réaliser cette étape serait d'ajouter une source de courant dans le circuit en série avec les deux condensateurs pour imposer le courant adéquat. Cependant, la réalisation pratique s'est montrée trop complexe à implémenter.

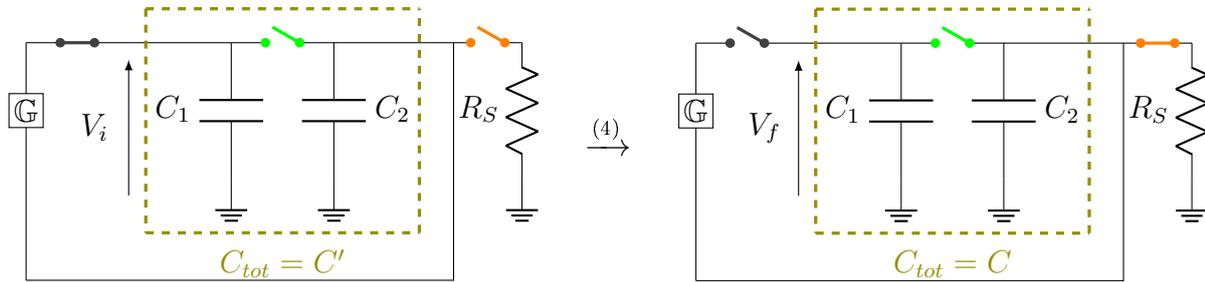


FIGURE 13.5 – Schémas de principe de la compression iso-charge.

Pour réaliser cette étape, la méthode que nous avons choisie est beaucoup plus simple. On la présente en figure 13.5. D'abord, on débranche les deux capacités l'une de l'autre, puis, on impose à la capacité |1|, de capacité $C = C_1$ la tension $V_f = \frac{C'}{C} \times V_i$ puis on laisse le condensateur |2| se décharger au travers d'une résistance R_S . On revient donc bien à l'état avant détente. Cette transformation est également iso-charge en principe : en effet, il y a autant de charges ajoutées au condensateur |1| que de charges retirées au condensateur |2|. Pour la réalisation de la machine, on utilisera un amplificateur non inverseur pour jouer ce rôle. Il multiplie par un facteur \mathbb{G} la tension aux bornes du condensateur |2| et l'impose au condensateur |1| : $V_f = \mathbb{G} V_i$. L'énergie de la particule caloporteuse en fin d'étape est donc : $E_f = \mathbb{G}^2 \frac{C_1}{2} V_i^2$. En pratique, on essaye d'obtenir $\mathbb{G} \approx \frac{C'}{C}$, mais par précaution, on garde \mathbb{G} comme un paramètre de la machine. Cette étape coûte à un opérateur extérieur l'énergie W qui sera détaillée plus loin.

¹Il est intéressant de noter que la détente iso- q ne conserve pas l'énergie. En effet, L'énergie initiale est $E_i = \frac{C}{2} V_i^2$ alors que l'énergie finale est $E_2 = \frac{C^2}{2C'} V_i^2$. L'énergie manquante $C_2 \frac{C}{2C'} V_i^2$ est dissipée dans la résistance r des fils.

13.1.4 Le cycle complet du réfrigérateur stochastique

Voici en figure 13.6 le cycle que nous allons faire subir à notre particule caloporteuse. L'état de la particule caloporteuse est indiquée par le triplet (V_f, C_f, E_f) à la fin de chaque étape. On rappelle que l'on note $C = C_1$ et $C' \equiv C_1 + C_2$.

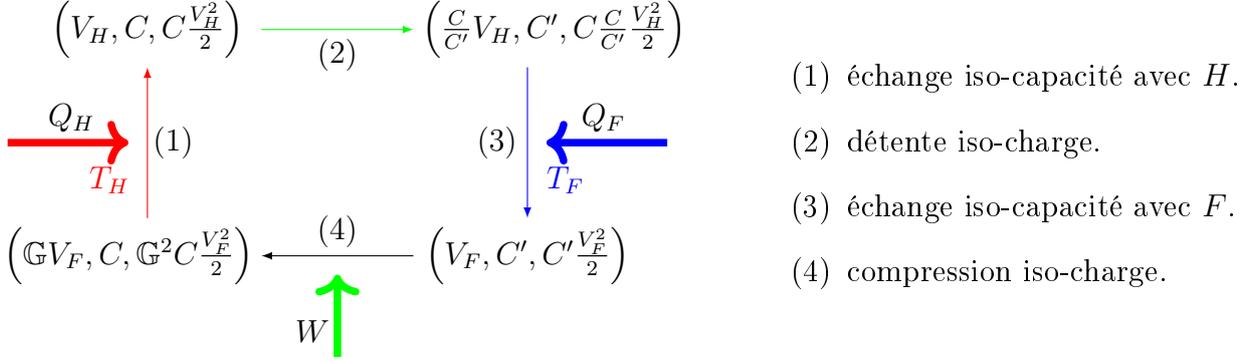


FIGURE 13.6 – Cycle thermodynamique complet.

Les tensions V_F et V_H sont aléatoires avec pour condition $\langle V_H^2 \rangle > \langle V_F^2 \rangle$. Le cycle total est donc lui-même aléatoire et donne lieu à des échanges Q_F , Q_H , et W aléatoires. Expérimentalement, on est capable de faire varier les deux températures T_F et T_H ainsi que les capacités C et C' .

13.1.5 Définition des flux énergétiques

La convention que nous choisissons est de définir comme positifs les flux entrant dans la particule caloporteuse. Donc, un flux positif signifie que l'énergie de la particule augmente, et que l'énergie de la source diminue. On définit les flux d'énergie au cours de chaque cycle avec des lettres minuscules q_H , q_F , w pour garder les majuscules pour les flux moyennés sur de nombreux cycles.

$q_H \equiv E_H - E_4 = \frac{C}{2} V_H^2 - \frac{C}{2} \mathbb{G}^2 V_F^2$, la chaleur transférée depuis la source chaude H vers la particule caloporteuse.

$q_F \equiv E_F - E_2 = \frac{C'}{2} V_F^2 - \frac{C'}{2} \left(\frac{C}{C'}\right)^2 V_H^2$, la chaleur transférée depuis la source froide F vers la particule caloporteuse.

$w \equiv E_4 - E_F = \frac{C}{2} \mathbb{G}^2 V_F^2 - \frac{C}{2} V_F^2$, le travail extérieur apporté pour réaliser la compression.

Ces quantités sont également des variables aléatoires. Chaque cycle est une réalisation du triplet (q_H, q_F, w) . Un cycle sera réfrigérateur si $q_F > 0$. Il sera moteur si $w < 0$ (ce qui n'arrive presque jamais dans notre machine). Disposer d'une machine dont chaque cycle est aléatoire est embêtant pour des applications industrielles. Qui voudrait une machine dont le comportement change fondamentalement à chaque exécution ? Le vivant par exemple...

Si les flux à chaque cycles (q_H, q_F, w) sont aléatoires et imprévisibles, ce n'est pas le cas pour les valeurs moyennes de ces flux. On note ces flux moyens avec des lettres majuscules. Le triplet $(Q_H \equiv \langle q_H \rangle, Q_F \equiv \langle q_F \rangle, W \equiv \langle w \rangle)$ est quant à lui déterministe et dépend des températures par les variances des tensions. Par exemple, $W \equiv \langle w \rangle = C \langle V_F^2 \rangle / 2 (\mathbb{G}^2 - 1) \propto T_F$.

et $Q_F = C\langle V_H^2 \rangle / 2 (C/C' - C'/C \langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle)$. Avoir un réfrigérateur en moyenne ($Q_F > 0$) nécessite donc de choisir :

$$\langle V_F^2 \rangle > \frac{C}{C'} \langle V_H^2 \rangle \quad (13.4)$$

On peut d'ores et déjà proposer un modèle pour le fonctionnement moyen de notre machine aléatoire.

13.1.6 Modèle

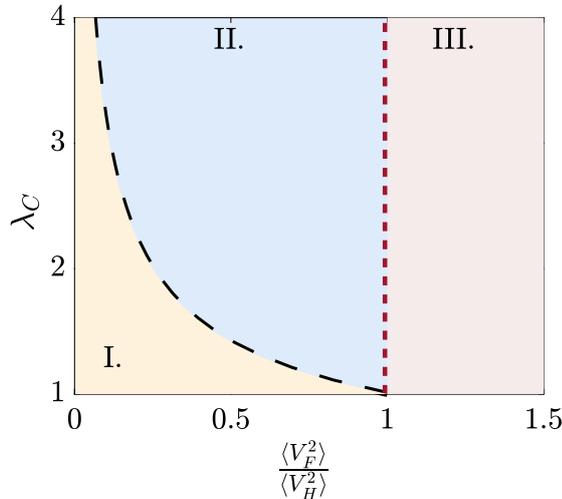
Les différents flux ne dépendent que de trois paramètres : $E_H \equiv C\langle V_H^2 \rangle / 2$, qui correspond à l'énergie typique de la source chaude H , $\lambda_C \equiv C'/C$ le rapport de détente pour faire l'étape (2) et \mathbb{G} , le rapport de compression pour l'étape (4). Il reste comme variable la température de la source froide que l'on choisit de normaliser comme $x \equiv \langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle = 1/\lambda_C E_F/E_H$, on trouve les modèles suivants :

$$Q_H = \langle E_H \rangle (1 - \mathbb{G}^2 x) \quad Q_F = \langle E_H \rangle (\lambda_C x - 1/\lambda_C) \quad W = \langle E_H \rangle (\mathbb{G}^2 - \lambda_C) x \quad (13.5)$$

À noter que la somme $W + Q_H + Q_F$ est constante et correspond à l'énergie perdue lors de l'étape (2) :

$$W + Q_H + Q_F = \langle E_2 \rangle - \langle E_H \rangle = \langle E_H \rangle (1 - 1/\lambda_C) \quad (13.6)$$

De ces équations, on peut déduire différents régimes en fonction des paramètres λ_C et x . Ils sont cartographiés en figure 13.7.



- I. $\lambda_c^2 \langle V_H^2 \rangle < \langle V_F^2 \rangle$, $Q_F < 0$.
- II. $\lambda_c^2 \langle V_H^2 \rangle > \langle V_F^2 \rangle$, $Q_F < 0$.
- III. $\lambda_c^2 \langle V_H^2 \rangle > \langle V_F^2 \rangle$, $Q_F < 0$ mais $\langle V_F^2 \rangle > \langle V_H^2 \rangle$.

FIGURE 13.7 – Diagramme des différents régimes.

Le régime III. à $\langle V_H^2 \rangle < \langle V_F^2 \rangle$ n'est pas intéressant pour nous car la source froide y est plus chaude que la source chaude elle même.

Le régime II. est celui où la machine fonctionne en moyenne comme un réfrigérateur au coût de W .

Le régime I. est celui où la machine ne permet que de diminuer le flux spontané moyen $Q_F < 0$.

Maintenant que nous avons étudié le principe de cette machine, nous allons présenter comment réaliser le réfrigérateur stochastique expérimentalement.

13.2 Mise en œuvre expérimentale de la machine aléatoire

Voici en figure 13.8, le schéma expérimental de notre machine thermique aléatoire.

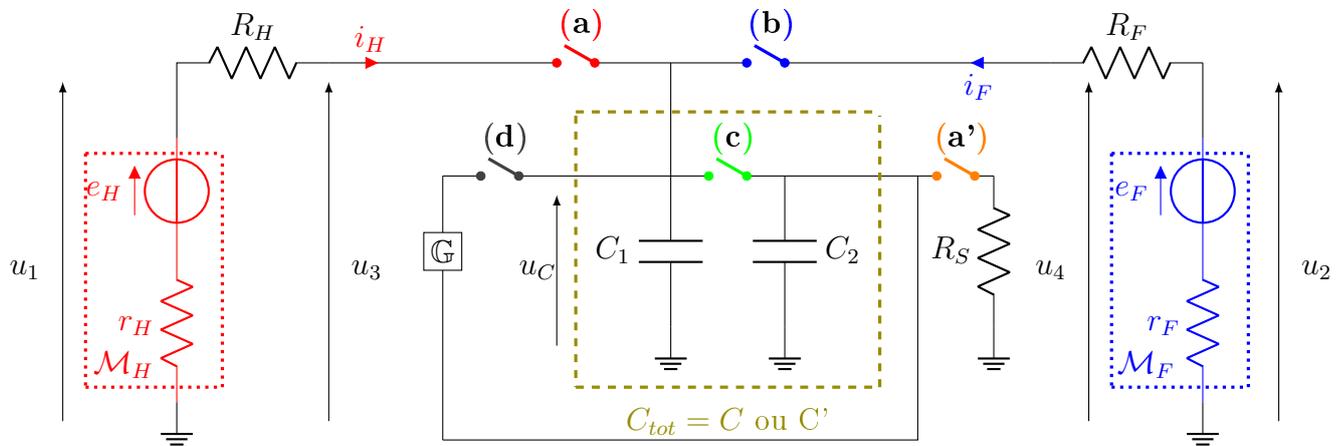


FIGURE 13.8 – Schéma expérimental de la machine thermique aléatoire. Les cadres \mathcal{M}_H et \mathcal{M}_F désignent les particules pale+moteur respectivement plongées dans leurs gaz granulaires H et F . Dans le cadre olive (---), la particule de fluide caloporteur avec sa capacité variable C_{tot} . Le cadre \mathbb{G} désigne un amplificateur à AO de gain \mathbb{G} . Les différentes étapes du cycle sont accomplies en changeant l'état des différents interrupteurs (a), (b), (c), (d) et (a'). On mesure les tensions u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_C qui permettent de mesurer les grandeurs V_H , V_F , et V_C . Les résistances R_H et R_F sont présentes pour permettre les mesures de courants i_H et i_F .

On utilise cinq relais (a), (b), (c), (d) et (a') pour modifier le circuit en fonction de l'étape souhaitée. Les interrupteurs (a) et (b) permettent respectivement de brancher la particule caloporteuse sur la source chaude H ou la source froide F respectivement. L'interrupteur (c) permet de modifier la capacité de la particule caloporteuse entre $C = C_1$ quand il est ouvert et $C' = C_1 + C_2$ quand il est fermé. Les interrupteurs (d) permettent quand à eux de réaliser l'étape de remontée des charges de la capacité [2] vers la capacité [1]. Enfin, (a') permet de décharger la capacité [2] au travers de la résistance R_S .

Pour que nous puissions réaliser des cycles périodiquement, ces relais sont commandés par trois sources de tensions fournissant une tension de commande binaire u_5 , u_6 et u_7 qui vaut 0 (0V) ou 1 (10V). Elles sont fournies par trois générateurs d'impulsion basse fréquence avec une horloge commune. Le tableau 13.1 montre l'état des interrupteurs en fonction des tensions de commande à différentes étapes du cycle².

Un cycle total dure 2 secondes. Les étapes (1) et (3) durent 450ms. L'étape (2) dure environ 200ms et L'étape (4) dure 150ms. Ces durées ont été choisies pour être très grandes devant tous les temps de relaxation du système ainsi que de la fréquence d'échantillonnage : $f_{ec} = 16\,384\text{Hz}$. De plus, les phases relatives des signaux u_5 , u_6 et u_7 sont choisies de manière à avoir environ 100ms d'attente entre chaque étape du cycle. Cette attente permet à la fois de mesurer la tension V_C en fin d'étape, et de vérifier qu'il n'y a pas de fuite de courant dans

²A noter que le fait que seulement trois tensions de commande sont nécessaires grâce à deux astuces : d'une part, u_5 commande soit l'interrupteur (a) soit l'interrupteur (b) en fonction de la tension de commande u_6 . D'autre part on réalise la fermeture de (a') en même temps que celle de (a) puisque (c) est ouvert durant l'étape (1).

Étape	(a)	(b)	(c)	(d)	(a')	u_5	u_6	u_7	C_{tot}	
(1)	1	0	0	0	1	1	0	0	C	(1) échange iso-capacité avec H .
(2)	0	0	1	0	0	0	1	0	C'	(2) détente iso-charge.
(3)	0	1	1	0	0	1	1	0	C'	(3) échange iso-capacité avec F .
(4)	0	0	0	1	0	0	0	1	C	(4) compression iso-charge.

TABLEAU 13.1 – Table logique des états pris par les interrupteurs en fonction des étapes du cycle et tensions de commande correspondantes. **1** signifie interrupteur fermé ou niveau logique haut, 0 signifie interrupteur ouvert ou niveau logique bas.

notre circuit, c'est à dire que les condensateurs isolés conservent la charge.

La mesure de la tension u_C donne la valeur du potentiel V_C . Pour éviter que la capacité se décharge dans le $1 M\Omega$ de la carte d'acquisition, un suiveur est ajouté en amont de la carte pour l'acquisition de V_C . Connaissant C et C_2 (mesurée au RLC -mètre au préalable) nous avons accès à une mesure de l'énergie stockée dans la particule caloporteuse à chaque instant du cycle. Comme ce sont également des paramètres du modèle, on a besoin de mesurer le gain \mathbb{G} (mesuré à l'ohmmètre) et également E_H et E_F mesurées à partir des variances de V_F et V_H estimées lors des étapes (1) et (3) du cycle. Chaque valeur de V_C est mesurée en faisant une moyenne temporelle sur 50 ms entre deux transformations. Les cycles ainsi que les valeurs V_H , V_2 , V_F et V_4 pour chacun des cycles sont extraits automatiquement par une analyse conjointe de $V_C(t)$ et des tensions de commande u_5 , u_6 et u_7 .

13.3 Résultats généraux sur la machine aléatoire

Nous venons de présenter le principe et la mise en œuvre expérimentale de la machine aléatoire. Dans cette partie, nous présentons les résultats de mesures obtenus sur cette machine.

13.3.1 La machine réalise des cycles

En figure 13.9, on montre une trace temporelle de la tension V_C . On y représente deux cycles typiques exécutés par la machine aléatoire.

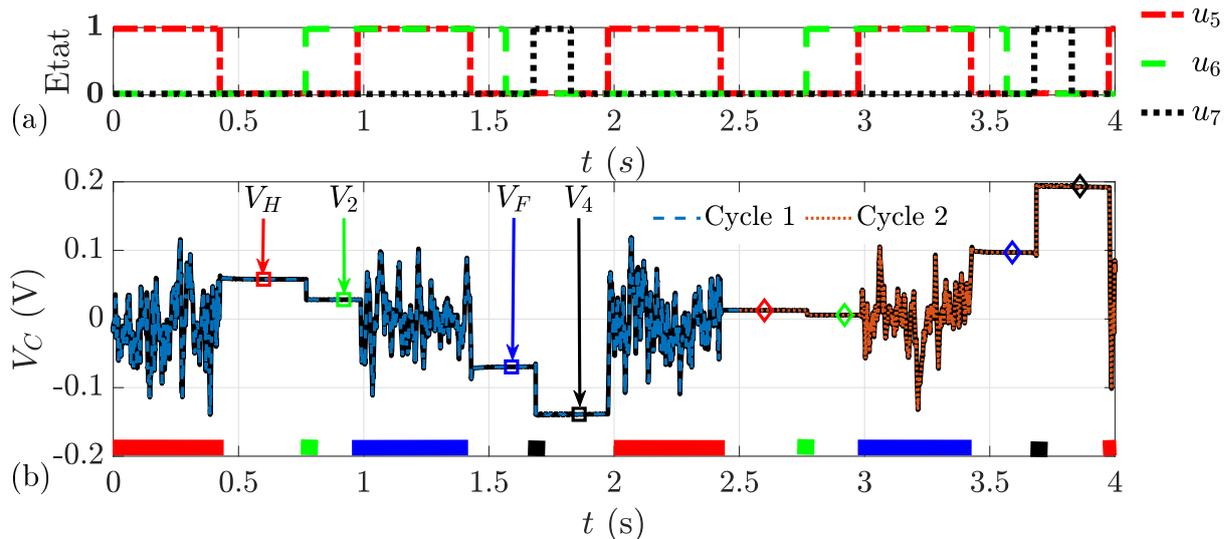


FIGURE 13.9 – (a) : trace temporelle des tensions u_5 , u_6 et u_7 pour deux cycles typiques de la machine aléatoire. (b) : tension V_C mesurée au cours du temps pendant deux cycles de la machine aléatoire. En rouge, cycle 1, en bleu, cycle 2. Les paramètres de cette mesure sont $C' = 2C$, $C = 10 \mu F$, $\mathbb{G} = 2$, et $E_F/E_H = 0.87$.

Les cycles ont effectivement les durées souhaitées avec suffisamment de temps entre deux étapes pour avoir des mesures précises de V_C pour chaque étape. En fin d'étape (2), on remarque que la tension V_C est divisée par un facteur 2 qui correspond au rapport de capacités $\lambda_C = C'/C$. En fin d'étape (4), V_C est multipliée par un facteur $\mathbb{G} \approx 2$. On peut donc valider le schéma : notre machine fonctionne comme prévu.

D'autre part, on remarque avec ces deux cycles le caractère aléatoire de la machine : le premier cycle semble prendre autant de valeurs positives que négatives en fin d'étape (V_H, V_2, V_F, V_4) alors que le second cycle voit se réaliser uniquement des valeurs de tension positives en fin d'étapes. Les cycles ne seront donc pas identiques.

13.3.2 Les cycles sont aléatoires

En figure 13.10, on présente les deux cycles tracés sur la figure 13.9 mais dans une représentation en espace des phases et en énergie.

La représentation en figure 13.10(a) correspond à une représentation dans l'espace des phases pour notre système. Il correspond à la représentation habituelle en thermodynamique car il donne l'évolution d'une quantité intensive V_C en fonction de la quantité extensive conjuguée q .

Dans l'espace des phases, chaque droite oblique correspond à une étape iso-capacité donnée, la pente étant directement égale à C_{tot} . Les droites verticales quant à elles, correspondent aux étapes iso-charges (2) et (4).

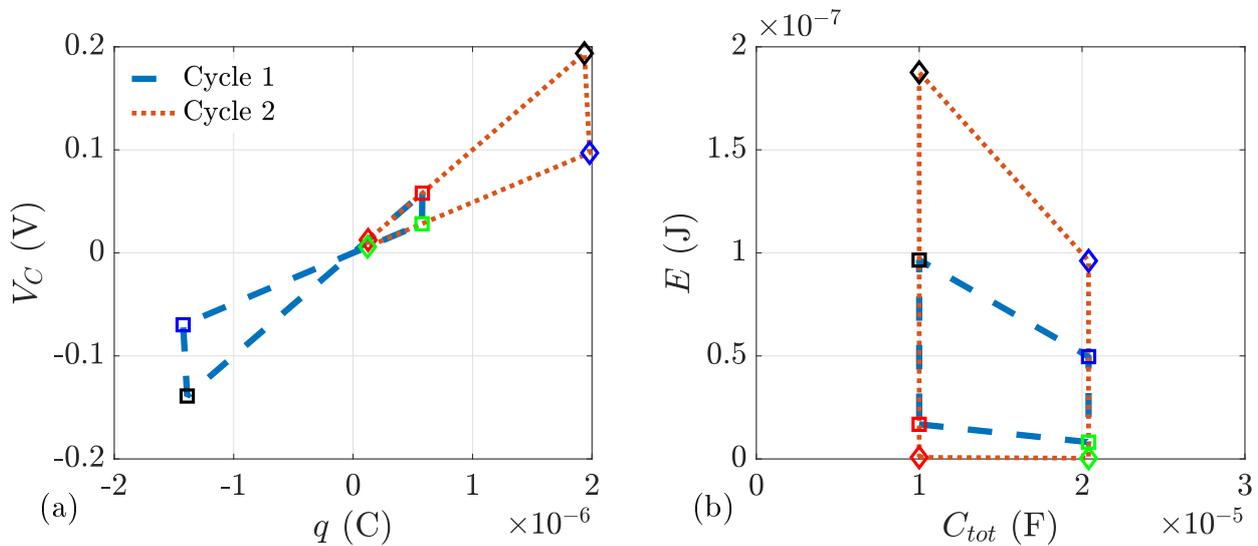


FIGURE 13.10 – cycles thermodynamiques parcourus par la machine aléatoire. En rouge, cycle 1, en bleu, cycle 2. (a) : le cycle dans l'espace des phases : tension V_C en fonction de la charge q . (b) : l'énergie stockée dans la particule caloporteuse en fonction de la capacité de la particule caloporteuse.

La représentation en figure 13.10(b), donne directement l'énergie à chaque étape en fonction de la capacité. les étapes (1) et (3) sont des droites verticales, et les étapes (2) et (4), étapes de compression et dilatation correspondent aux autres portions de droite. On a bien des cycles aléatoires. Mais que dire des cycles moyens suivis par la particule caloporteuse ?

Pour trouver le cycle moyen, les cycles dans l'espace des phases qui se moyennent à 0 ne sont pas une bonne piste. En effet, la moyenne de la tension est $\langle V_C \rangle = 0$ quelle que soit l'étape, il en est donc de même pour la charge moyenne $\langle q \rangle = 0$. La moyenne des cycles donne donc un cycle d'aire nulle qui ne permet pas d'extraire les flux moyens. Par contre, les cycles en énergie ne se moyennent pas à 0. On va donc les utiliser pour construire le cycle moyen dans l'espace des phases dans la partie suivante.

13.4 Résultats thermodynamiques sur la machine aléatoire

13.4.1 Cycle énergétique moyen

La figure 13.11 montre la moyenne sur 900 cycles énergétiques. Ce cycle moyen fait apparaître les différents flux moyens Q_H , Q_F et W . Il est décrit dans le sens anti-horaire donc $Q_H < 0$, $Q_F > 0$ et $W > 0$. Puisqu'elle transfère en moyenne de l'énergie de la source froide vers la source chaude, notre machine est donc en moyenne un réfrigérateur !

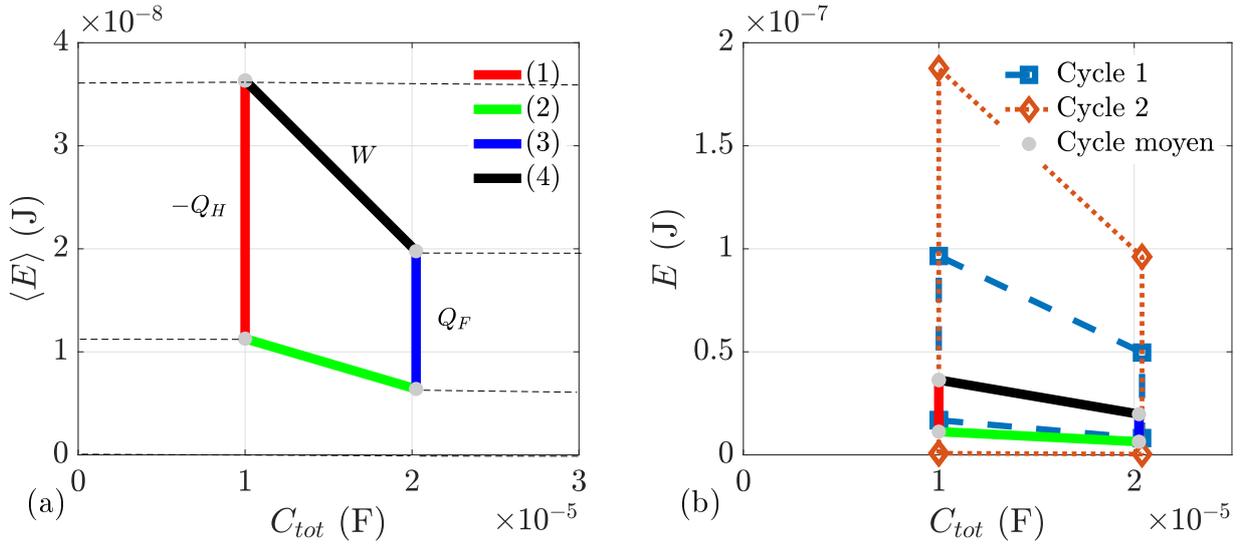


FIGURE 13.11 – L'énergie stockée dans la particule caloporteuse en fonction de la capacité de la particule caloporteuse. (a) : cycle moyen avec les étapes moyennes correspondantes. (b) : même figure en ajoutant deux cycles typiques de la machine aléatoire.

13.4.2 Reconstruction du cycle thermodynamique

Connaissant les énergies à chaque étapes du cycle moyen, ainsi que les valeurs des capacités C_{tot} , on peut réutiliser la double définition de l'énergie :

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2C_{tot}} \langle q^2 \rangle = \frac{C_{tot}}{2} \langle V_C^2 \rangle \quad (13.7)$$

On définit alors les tensions et charges typiques par étape du cycle par un tilde :

$$\tilde{q} \equiv \sqrt{2C_{tot}} \langle E \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{V}_C \equiv \sqrt{\frac{2}{C_{tot}}} \langle E \rangle \quad (13.8)$$

En figure 13.12, on montre le cycle thermodynamique moyen. On y retrouve également le sens des différents flux. Le cycle est décrit dans le sens anti-horaire ce qui indique un travail positif $W > 0$. Comment ces flux dépendent-ils du rapport de températures ? Comment cela se compare-t-il aux modèles ?

13.4.3 Généralisation

Pour répondre à cette question, nous avons réalisé plusieurs séries de mesures. On a fixé le rapport $\lambda_C = C'/C$ et le gain \mathbb{G} en conséquence, c'est à dire $\mathbb{G} \approx \lambda_C$, ainsi que la température effective et donc l'énergie typique du bain chaud $\langle E_H \rangle$. Ces mesures ainsi que les prédictions des modèles sont présentés en figure 13.13 : On remarque plusieurs choses : d'abord, on distingue trois régimes différents.

Si $\frac{\langle V_F^2 \rangle}{\langle V_H^2 \rangle} < 1/\lambda_C$, alors $Q_H > 0$, $Q_F < 0$, les flux correspondent au sens spontané thermodynamique, du chaud vers le froid. La machine ne fait que diminuer l'amplitude de ce flux spontané, au prix d'un travail $W > 0$.

Si $1 > \frac{\langle V_F^2 \rangle}{\langle V_H^2 \rangle} > 1/\lambda_C$, alors $Q_H < 0$, $Q_F > 0$, On a un flux inverse. La machine est un réfrigérateur : la source chaude est réchauffée alors que la source froide est refroidie au prix d'un travail $W > 0$.

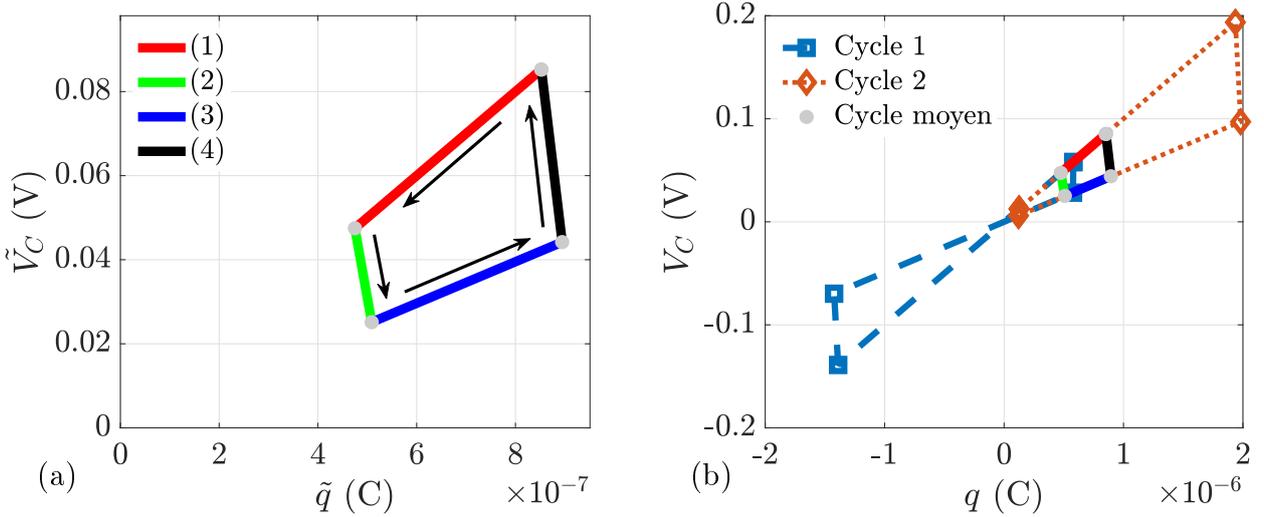


FIGURE 13.12 – le cycle dans l'espace des phases : tension V_C en fonction de la charge q . (a) : cycle moyen avec les étapes moyennes correspondantes. (b) : même figure en ajoutant deux cycles de la machine aléatoire.

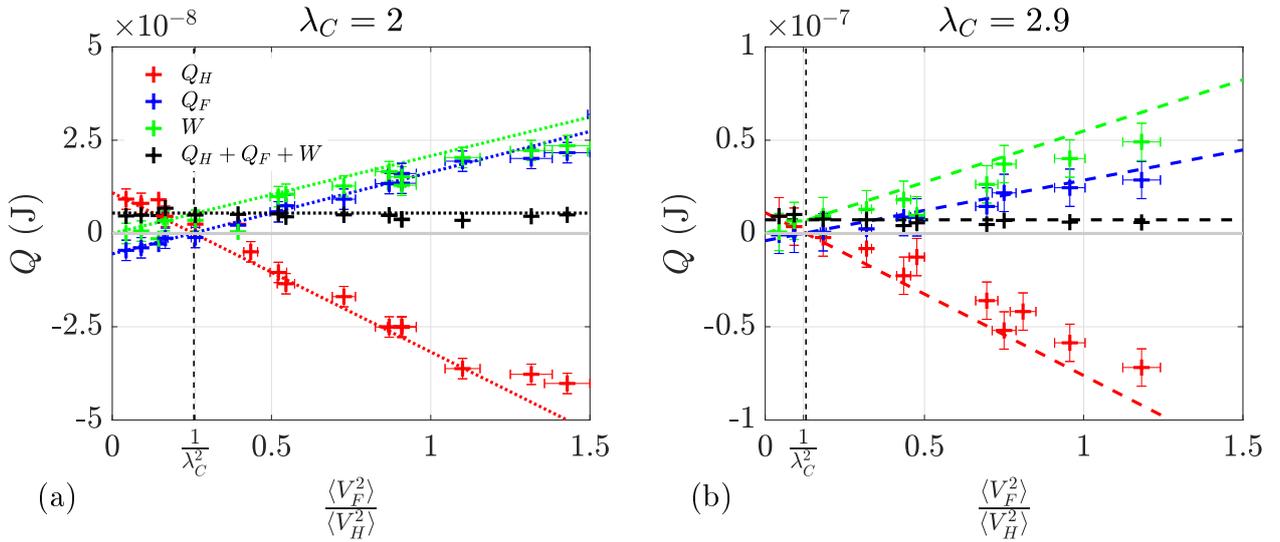
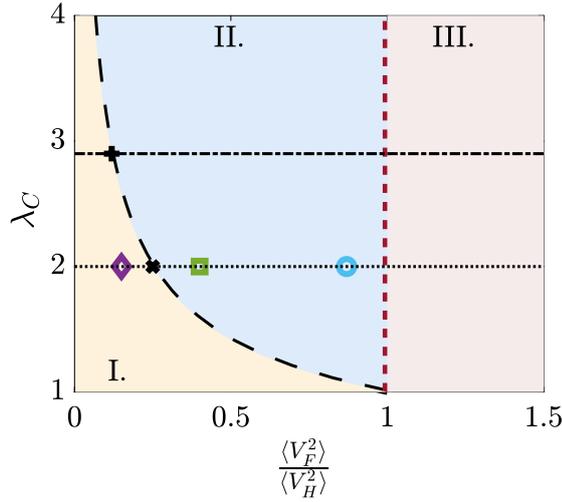


FIGURE 13.13 – flux énergétiques (définis positifs si) entrant dans la particule caloporteuse en fonction du rapport des variances $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle$ qui correspond approximativement au rapport des températures granulaires T_F / T_H . En couleur, les différents flux. En ligne pointillée, les modèles proposés en section 13.1.6 sans paramètres ajustables. Les barres d'erreur correspondent à deux écart-types de la mesure sur 900 cycles. (a) : évolution des flux pour un rapport de capacité égal à $C'/C = 2$. (b) : idem pour un rapport de capacité $C'/C \approx 2.9$.

Si $\frac{\langle V_F^2 \rangle}{\langle V_H^2 \rangle} > 1$, la source F est plus chaude que la source H elle-même : $T_F > T_H$. Les flux sont dans le sens thermodynamique spontané $Q_H < 0$, la source F , plus chaude est refroidie et réchauffe la source H plus froide. On fournit le travail W pour augmenter le flux spontané.

L'accord avec le modèle est très bon. On peut valider le diagramme des régimes que l'on avait présenté en section 13.1.6. On reprend en figure 13.14 ce diagramme en indiquant les coupes que l'on a explorées par la mesure pendant les expériences.



- I. Réfrigérateur impuissant : W diminue le flux thermodynamique spontané.
- II. Réfrigérateur : W permet d'inverser le flux thermodynamique.
- III. Chauffage : W permet d'augmenter le flux thermodynamique spontané

FIGURE 13.14 – Visualisation des paramètres des mesures. Les lignes horizontales noires correspondent aux campagnes de mesure à λ_C fixé en variant $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle$. Les deux coupes $\lambda_C = 2$ et $\lambda_C = 2.9$ sont présentées en figure 13.13. Les points de couleur correspondent aux points de mesure pour les figures 13.17. Le cercle bleu en $\lambda_C = 2$, $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle = 0.87$ correspond également aux paramètres des figures 13.9 à 13.12.

Avant de passer à une analyse statistique, il y a une dernière quantité que l'on souhaite proposer : le rendement ou efficacité de notre réfrigérateur.

13.4.4 Rendement thermodynamique ou efficacité

Plaçons nous dans le cas réfrigérateur, c'est à dire :

$$\frac{1}{\lambda_C^2} < \frac{\langle V_F^2 \rangle}{\langle V_H^2 \rangle} < 1 \quad (13.9)$$

La définition habituelle du *rendement thermodynamique* est de diviser la moyenne du *flux souhaité* par la moyenne du *flux coûteux pour l'opérateur*. Dans notre cas, la moyenne du *flux souhaité* est Q_F , alors que le *flux coûteux pour l'opérateur* est en moyenne W . Donc on définit le rendement thermodynamique $\tilde{\eta}$ de notre machine comme le rapport entre le flux moyen d'énergie arrachée à la source froide divisée par le travail extérieur dépensé :

$$\tilde{\eta} = \frac{Q_F}{W} \quad (13.10)$$

En figure 13.15 on présente l'évolution du rendement en fonction de $\frac{\langle V_F^2 \rangle}{\langle V_H^2 \rangle}$ pour différents rapports de capacité. L'accord au modèle est de nouveau très bon. On remarque que la valeur du rendement dépend fortement à la fois de l'écart en température, mais également du paramètre λ_C . Cependant, comme nous l'avons dit, notre machine est aléatoire donc chaque cycle connaît des flux q_H , q_F , et w différents. Et on pourrait définir alors un rendement à chaque cycle η comme :

$$\eta = \frac{q_F}{w} \quad (13.11)$$

Dans la partie suivante, on s'intéresse aux statistiques de ce type de quantités.

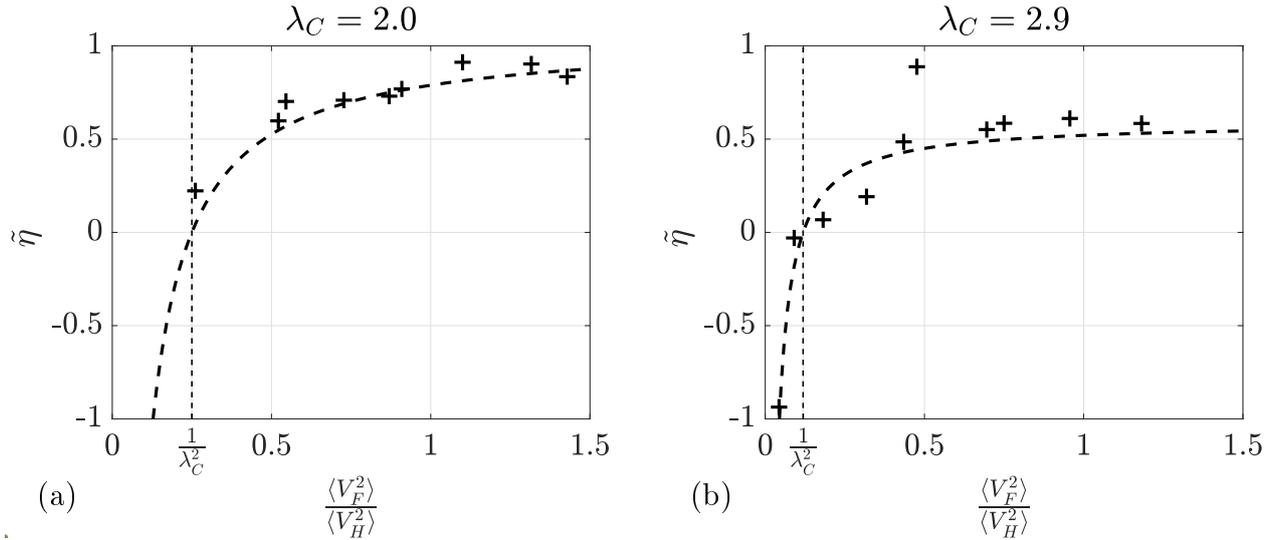


FIGURE 13.15 – rendement du réfrigérateur en fonction du rapport des variances $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle$ qui correspond approximativement au rapport des températures granulaires T_F/T_H . En ligne pointillée, le modèle proposé en section 13.1.6, équation (13.5) sans paramètres ajustables. (a) : évolution pour un rapport de capacité égal à $\lambda_C = 2$. (b) : évolution pour un rapport de capacité environs $\lambda_C \equiv C'/C \approx 2.9$.

13.5 Résultats statistiques sur la machine aléatoire

L'histogramme du rendement par cycle η est donné en figure 13.16. Cet histogramme est très asymétrique et son maximum est en 1, et non pas sa valeur moyenne $\tilde{\eta} \approx 0.6$. Des valeurs négatives sont représentées, ce qui peut surprendre, mais cela signifie simplement que parfois la machine effectue un cycle où elle ne fonctionne pas en réfrigérateur.

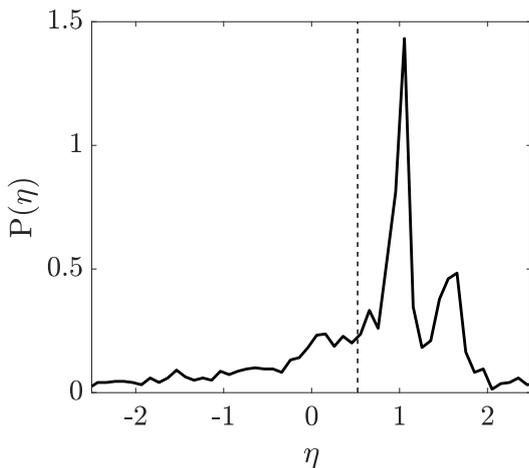


FIGURE 13.16 – Histogramme de l'efficacité du réfrigérateur stochastique. Calcul pour 2700 cycles. La ligne pointillée noire correspond à la valeur moyenne de l'efficacité. Les paramètres de la mesure sont : $\lambda_C = 2$, $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle \approx 0.87$.

On s'intéresse aux histogrammes des flux à chaque cycle q_H , q_F et w , notamment proche de la frontière entre les régimes II. et I. en figure 13.17. On remarque que la forme des histogrammes reste semblable. Ils sont asymétriques et 0 est la valeur la plus probable. Le signe du flux moyen semble donc dû à l'asymétrie des fluctuations, pas à la valeur la plus exprimée. De plus, plus on s'approche de la frontière $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle = 1/\lambda_C^2$, plus les histogrammes semblent symétriques. La traversée de cette frontière opère une inversion de l'asymétrie des histogrammes.

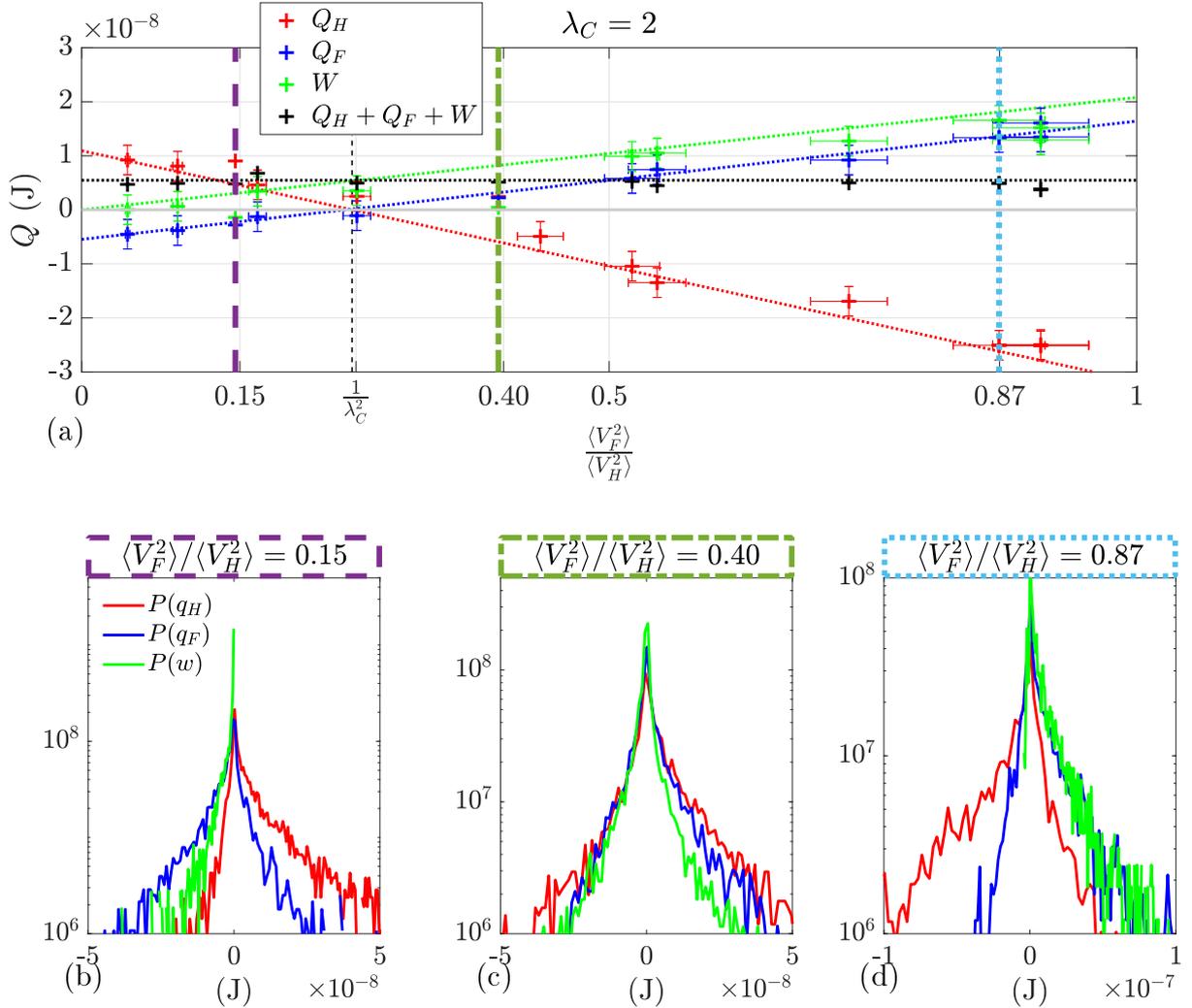


FIGURE 13.17 – histogrammes des différents flux énergétiques pour un rapport de capacité $\lambda_C = 2$ et pour différentes valeurs du rapport des variances $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle$. En couleur, les différents flux. Ces histogrammes sont calculés sur 2700 cycles. (a) reprise de la figure 13.13 en indiquant les rapports $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle$ choisis. (b) histogrammes pour $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle = 0.15$ c'est à dire dans le régime où le flux n'est pas inversé : $Q_F < 0$. (c) histogrammes pour $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle = 0.40$ c'est à dire dans le régime réfrigérateur où le flux est à peine inversé : $Q_F = 0^+$. (d) histogrammes pour $\langle V_F^2 \rangle / \langle V_H^2 \rangle = 0.87$ c'est à dire dans le régime réfrigérateur où le flux est clairement inversé : $Q_F > 0$.

13.6 Conclusion et discussion

Avant de conclure, on propose de réinterpréter notre machine aléatoire comme une machine mécanique aléatoire.

Notre particule caloporteuse est décrite par trois variables thermodynamique (V_C , q , C_{tot}) dont seule la charge q est une grandeur extensive. Il a pour équation d'état $q = C_{tot}V_C$. Un système mécanique ayant une équation d'état similaire est un piston muni d'un ressort. Il possède comme variables thermodynamiques : son volume V , extensif, la raideur du ressort κ , et la pression P . On peut proposer la correspondance suivante :

$$q \longleftrightarrow V \quad V_C \longleftrightarrow P \quad C_{tot} \longleftrightarrow \kappa \quad (13.12)$$

Dans cette analogie, le cycle mécanique est représenté en figure 13.18.

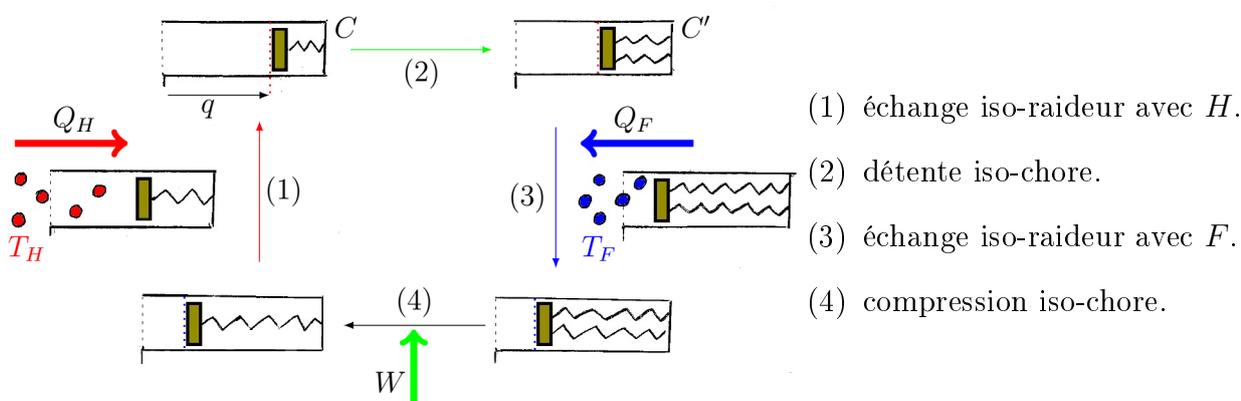


FIGURE 13.18 – Cycle mécanique équivalent.

On contrôle les températures effectives des deux gaz donc le volume V et la raideur κ , pour faire faire des cycles en pression à notre réfrigérateur stochastique. Les étapes iso-charges (2) et (4) se font donc à volume constant en modifiant la raideur du ressort. On parle d'étape *isochore*. Les étapes iso-capacités (1) et (3) se font alors à raideur constante mais volume variable. Ce type de cycle ressemble à un cycle de Stirling isochore. C'est un cycle en pression comportant deux isochores et deux isothermes.

Nous avons utilisé la thermodynamique pour réaliser une machine thermique fonctionnant avec trois particules. L'une d'elle est une particule caloporteuse électronique : une capacité variable sur laquelle on effectue des cycles thermodynamiques afin de réaliser un modèle de réfrigérateur. Comme dans des systèmes nanoscopiques sensibles aux fluctuations, le potentiel perçu par la particule caloporteuse est aléatoire et la température décrit seulement la variance de ces fluctuations. Ainsi, notre machine est une machine dont chaque cycle est aléatoire ce qui vient poser de nouveaux modèles pour des mécanismes de molécules uniques comme les moteurs moléculaires pourtant courants dans le monde du vivant. Modéliser la forme des différents histogrammes dans cette machine aléatoire et comment leur forme change avec le rapport des températures serait une piste pour poursuivre ce travail.

Chapitre 14

La machine hybride

*This is a haiku
Haikus don't have to make sense
Refrigerator*

Source anonyme

Pour cette expérience, on souhaite une fois de plus réaliser une machine thermodynamique. Comme on l'a vu précédemment, les cycles du réfrigérateur stochastique étaient aléatoires et le fonctionnement dans le régime souhaité à chaque cycle n'était pas assuré. En effet, durant certains cycles le flux de chaleur n'allait pas dans le sens moyen. Ceci est dû au fait que les tensions après échange avec un gaz granulaire étaient aléatoires mais ne reflétaient la température du thermostat granulaire qu'en moyenne.

Cependant, forts de nos expériences de démons de Maxwell, notamment le chapitre 10, nous sommes *a priori* capables de sélectionner le sens du flux à chaque instant. Dans ce chapitre, nous proposons donc une expérience hybride : mi machine thermique, et mi démon de Maxwell. Son but est de tirer un échange maximal entre deux thermostats à chaque cycle. On peut donc en théorie construire un réfrigérateur à chaque cycle.

On peut également prendre le problème inverse : brancher la source froide à la source chaude ne permet pas de faire tourner un moteur car la puissance à chaque cycle est très faible. Cependant, on propose ici une solution afin d'obtenir une grande puissance qui nous permettrait par exemple de lancer un moteur comme on le discutera en ouverture.

14.1 Réfrigérateur hybride

14.1.1 Principe

L'idée est donc d'utiliser un démon de Maxwell pour contrôler le sens du courant entre deux thermostats granulaires. Pour cela, on prend deux particules {pale+moteur} immergés dans des gaz granulaires à différentes températures : les sources H et F . On utilise de nouveau un condensateur de capacité C comme particule caloporteuse. Cette fois-ci, C est unique et fixée. On va utiliser une source pour charger le condensateur que l'on forcera à se décharger dans la seconde source. Le principe est présenté en figure 14.1.

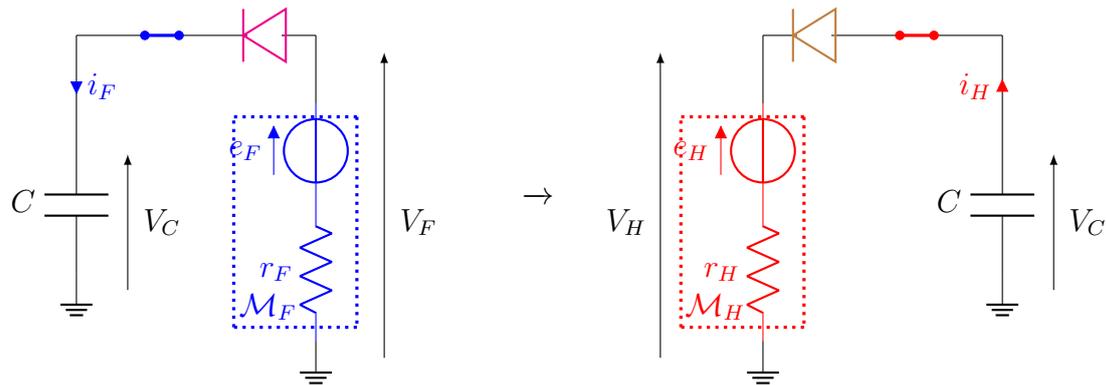


FIGURE 14.1 – Schémas de principe du réfrigérateur hybride.

Ici, on utilise deux démons pour forcer le flux de chaleur q_F de façon à extraire un maximum de chaleur de la source froide à chaque cycle. On déverse alors l'énergie stockée dans une autre source sous la forme d'un flux $q_H = -q_F$. Le schéma de principe est présenté en figure 14.1.

Pendant la première étape, on impose $i_F > 0$ ce qui impose le flux prélevé à la source froide $q_F = V_F i_F > 0$, et qui nous assure d'avoir un réfrigérateur. Ensuite, il faut vider l'énergie du condensateur, pour cela, on le branche à la seconde source H . On impose $i_H > 0$ le flux reçu par la source froide est alors $q_H = V_H i_H < 0$. On peut alors recommencer le cycle. Le schéma de principe complet est donné en figure 14.2.

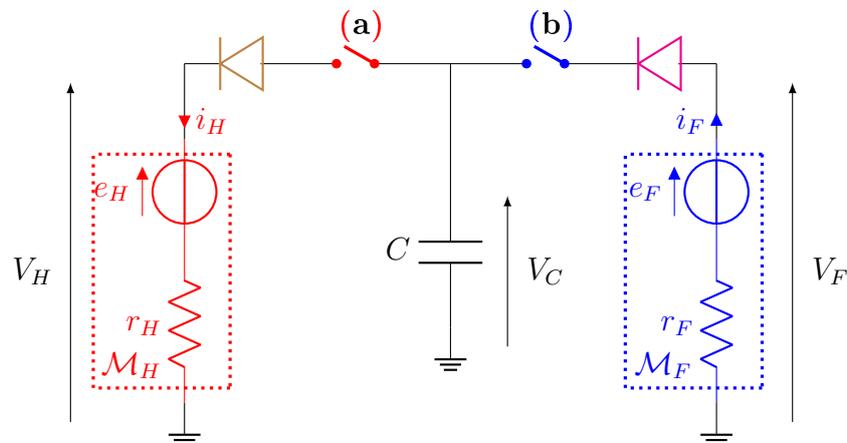


FIGURE 14.2 – Schémas complet de principe du réfrigérateur hybride

Deux choix sont possibles pour réaliser cette machine. D'une part, on peut décider de la valeur V_C à atteindre avant de basculer l'interrupteur. Dans ce cas là, la valeur du flux est fixée pour chaque cycle et $Q_F = \langle q_F \rangle = q_F$, mais l'atteindre prend une durée aléatoire à chaque cycle. Cependant, étant donné la forme des histogrammes de V_F , plus on souhaite une tension importante, plus il faut attendre longtemps que cet évènement soit réalisé, et que V_C atteigne cette valeur. De plus, cette démarche demande un ajout de complexité au montage. D'autre part, on peut également décider de fixer la durée des cycles. V_C prendra la valeur maximale atteinte par V_F durant la durée fixée où elle est branchée. V_C est alors une variable aléatoire tirée à chaque cycle. Le flux imposé à chaque cycle q_F est également une variable aléatoire. Ce protocole est plus simple à réaliser expérimentalement et c'est celui que l'on choisit.

14.1.2 Montage

Le montage de la machine hybride en configuration réfrigérateur est représenté en figure 14.3.

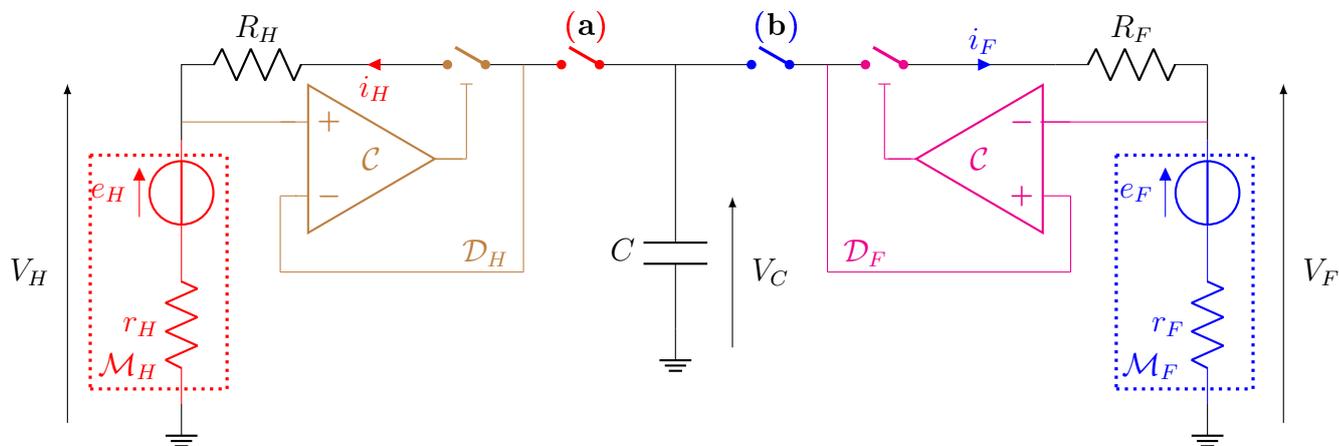


FIGURE 14.3 – Schéma électrique de la machine hybride.

La source froide est représentée par le cadre \mathcal{M}_F : le moteur à courant continu associé à une pale baignant dans un gaz granulaire à la température T_F . On le modélise comme un générateur de Thévenin : une source idéale de tension aléatoire e_F , en série avec une résistance interne $r_F \approx 113\Omega$. Cette source peut échanger avec un condensateur de capacité $C = 20\mu\text{F}$. C'est l'élément qui nous permet de stocker l'énergie. Cet échange entre C et \mathcal{M}_F est conditionné par le démon de Maxwell \mathcal{D}_F . Il consiste en un interrupteur commandé en tension qui se ferme lorsque $V_H \geq V_C$. Cette comparaison est effectuée par les comparateurs analogiques \mathcal{C} . On a déjà détaillé leur fonctionnement par exemple au chapitre 10.

Pour vider l'énergie du condensateur, on utilise le second démon, \mathcal{D}_H , capable d'imposer un courant i_H vers le moteur \mathcal{M}_H lié à la source chaude. Les interrupteurs (a) et (b) permettent respectivement de brancher la particule caloporteuse sur la source chaude H ou la source froide F . Le basculement a lieu en deux temps toutes les $T = 10\text{s}$ et est commandé par deux signaux logiques u_5 et u_6 fournis par un GBF , voir figure 14.1.

Étape	(a)	(b)	u_5	u_6
(1)	0	1	1	1
	0	0	0	0
(2)	1	0	1	0
	0	0	0	0

(1) échange iso-capacité avec F .

(2) échange iso-capacité avec H .

TABLEAU 14.1 – Table logique des états pris par les interrupteurs en fonction des étapes du cycle et tensions de commande correspondantes. **1** signifie "interrupteur fermé" ou niveau logique haut, **0** signifie "interrupteur ouvert" ou niveau logique bas.

14.1.3 Résultats

En figure 14.4, on présente une trace temporelle de la tension V_C stockée dans le condensateur pour deux cycles, ainsi que les signaux de commande u_5 , et u_6 correspondants.

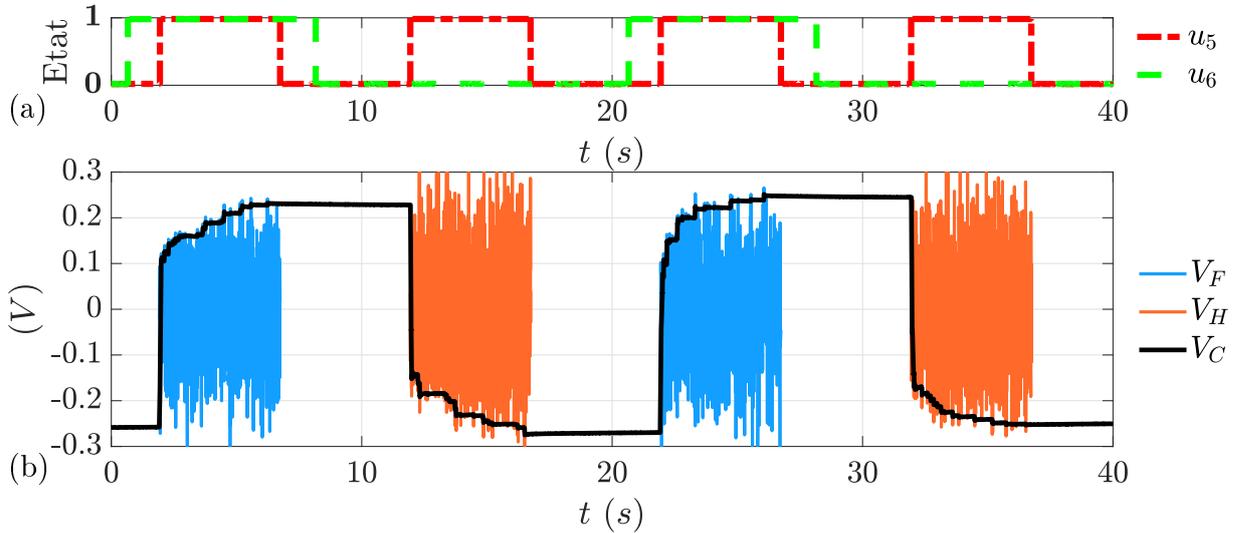


FIGURE 14.4 – Deux cycles du réfrigérateur hybride aléatoire. (a) : trace temporelle des tensions u_5 et u_6 pour deux cycles. (b) : tension V_C mesurée au cours du temps pendant deux cycles de la machine aléatoire. En rouge, la tension V_H quand le condensateur est branché au bain H , en bleu, la tension V_F quand le condensateur est branché au bain F . Les paramètres de cette mesure sont $C = 20 \mu F$, et $E_F/E_H = 0.83$.

On remarque que les cycles ont le comportement souhaité : 5 s de charge auprès de F , 5 s d'attente, 5 s de décharge auprès de H , et enfin 5 s d'attente avant de commencer un nouveau cycle.

Au cours du premier cycle de la figure 14.4 par exemple, la tension stockée au départ, en $t = 0$ est $V_C = -258 \text{ mV}$. Après échange avec F , en $t = 10 \text{ s}$, elle vaut $V_C = 229 \text{ mV}$, ce qui donne donc une énergie totale arrachée à la source froide : $q_F = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. La tension finale après échange avec H vaut $V_C = -271 \text{ mV}$, Le flux d'énergie donnée à la source chaude vaut donc $q_H = 2.1 \cdot 10^{-7} \text{ J}$. Les valeurs moyennes $Q_F = \langle q_F \rangle$ et $Q_H = \langle q_H \rangle$ de ces flux sont : $Q_F = -Q_H = 8.2 \cdot 10^{-8} \text{ J}$.

Le flux souhaité est Q_F . Cependant, il est difficile d'identifier le travail fourni pour réaliser ces cycles. On peut considérer que le flux coûteux dans cette machine est le coût entropique des mesures de chaque démon, ce qui donnerait un rendement thermodynamique de l'ordre de 10^{18} . On va plutôt considérer que l'on touche ici aux limites de la définition classique de cette quantité.

14.2 Conclusion et discussion. Le moteur hybride

Nous venons de voir que l'on peut améliorer les machines thermiques en ajoutant un démon de maxwell pour orienter les flux. Ce faisant, on fabrique une machine hybride.

* * *

Cette expérience peut également permettre de réaliser un moteur. On cherchera à sélectionner des potentiels très élevés provenant de la source chaude H , et déverser l'énergie stockée dans la source froide tout en profitant du courant ainsi induit pour faire tourner un moteur placé sur le chemin. On recherche donc en fait à avoir un flux dans le sens spontané mais grand. Le principe de circuit est présenté en figure 14.5.

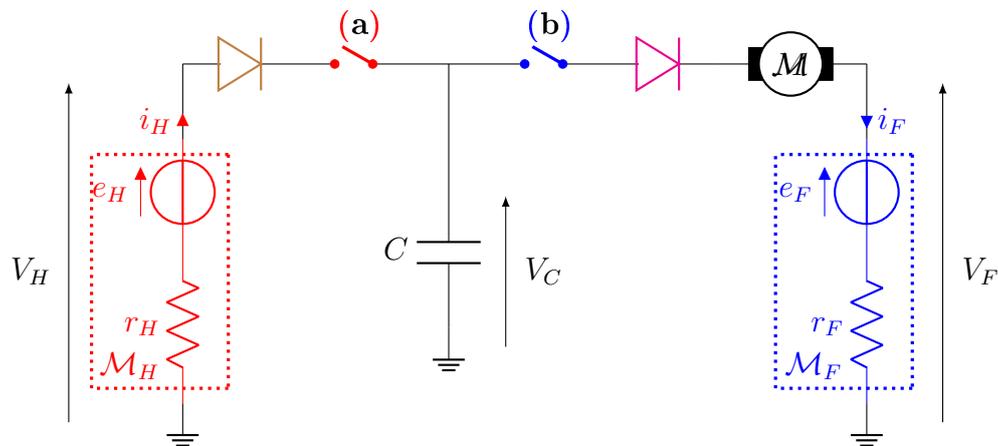


FIGURE 14.5 – Schéma de principe du moteur hybride.

En effet, les moteurs réels sont sujets à des frottements solides. Il faut alors que la puissance qu'on leur apporte dépasse un certain seuil pour lancer le mouvement. L'intérêt de ce montage serait de développer une grande puissance instantanée qui pourrait lancer éventuellement un moteur de montre. Hélas, le temps nous a manqué pour réaliser plus de test sur ce montage.

Partie V
Conclusion

Conclusion

Don't repeat yourself. It's not only repetitive, it's redundant, and people have heard it before.

Lemony Snicket, *Who Could That Be at This Hour?*

Dans cette thèse, nous avons utilisé une pale baignant dans un gaz granulaire comme s'il s'agissait d'une particule brownienne plongée dans un bain thermostaté. Avec cette particule, nous avons alors pu nous inspirer de différentes expériences de pensée pour les transposer à l'échelle macroscopique. Dans un premier temps, nous avons réalisé des démons de Maxwell, c'est à dire des systèmes qui réalisent une mesure et rétroagissent sur le système en fonction de cette dernière pour briser la symétrie des fluctuations. Le premier démon présenté faisait tourner la pale en perturbant peu le gaz granulaire. Cependant, ce démon étant purement dissipatif, il ne permettait pas facilement de montrer l'extraction d'un travail. Nous avons donc développé un démon capable de stocker de l'énergie potentielle dans un condensateur. Ce dernier rappelle une version macroscopique d'une expérience de pensée de Brillouin. Ce montage est très prometteur et promet de nombreuses applications fondamentales. Par exemple, nous avons modifié légèrement ce montage pour réaliser une seconde expérience classique assimilable à un démon de Maxwell : la machine de Szilard qui permet également d'extraire un travail et d'explorer les flux d'entropie associée au fonctionnement du démon.

Dans un second temps, nous avons choisi de changer de point de vue sur les démons de Maxwell. Comme le montrait Feynman, on peut considérer que le démon a lui même une température qui influence sur la précision de sa mesure. Nous avons donc repris notre machine de Szilard mais avec un seuil de référence bruité et étudié comment son comportement en était modifié. Nous avons également cherché à réaliser une vraie machine ditherme macroscopique entre deux particules browniennes. Pour cela, nous avons réalisé un circuit de capacité variable qui servait de fluide caloporteur dans l'échange entre les deux particules. Nous avons ainsi pu réaliser un réfrigérateur. Comme il ne compte que deux particules, les fluctuations sont importantes et nous avons vu que son cycle thermodynamique était aléatoire ce qui est peu commun à l'échelle macroscopique à cause de la limite thermodynamique. C'est un très mauvais réfrigérateur pour les applications commerciales, mais le montage reste très prometteur pour des applications fondamentales notamment pour comprendre les machines moléculaires intervenant dans le monde vivant. Enfin, nous avons proposé comme ouverture d'utiliser un démon de Maxwell pour construire une machine hybride capable de réaliser des cycles réfrigérateurs de manière très efficace. Cette machine hybride est prometteuse car elle permet de fournir une grande puissance instantanée une fois par cycle.

Dans cette thèse nous avons surtout travaillé à ramener à l'échelle macroscopique des phénomènes microscopiques pour qu'ils soient plus faciles à mesurer et étudier. Nous avons donc eu le privilège de faire de la thermodynamique hors équilibre mais surtout de la thermodynamique dans des systèmes extrêmement loin de la limite thermodynamique. Nous avons pourtant pu

modéliser bon nombre de ces résultats de manière très simple. Cette approche nous pousse à questionner à quel point il est possible d'explorer les limites à donner aux hypothèses des théorèmes de la thermodynamique.

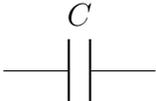
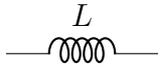
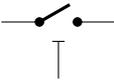
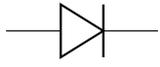
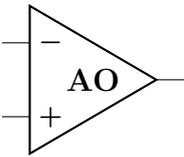
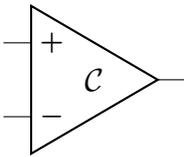
L'utilisation des gaz granulaires comme source de bruit pour fabriquer des particules brownienne et en particulier l'astuce d'utiliser l'induction dans un moteur à courant continu pour mesurer sa vitesse autant que pour rétroagir me semble être un outil inestimable pour tester beaucoup de résultats fondamentaux de thermodynamique. Elle permet aussi de tester des machines thermiques à quelques particules ce qui pourrait apporter beaucoup à la compréhension des machines moléculaires en biophysique.

Pour poursuivre ces travaux, plusieurs pistes sont possibles. D'abord, on peut imaginer approfondir les résultats obtenus au chapitre 10 et appliquer la théorie des grandes déviations à la charge aléatoire du condensateur. De même, on pourrait pousser plus loin les analyses dans différents chapitres. Tous les démons dans cette thèse réalisaient comme mesure des comparaisons analogiques sur des quantités directement mesurables du système (tensions). Nous pourrions imaginer fabriquer un démon qui sélectionne les fluctuations sur un critère plus abstrait comme la puissance instantané ou le rendement. Par exemple, on peut imaginer un démon qui extrait du travail d'une source uniquement lorsque le rendement estimé est proche de 1. Les microcontrôleurs sont un outil tout trouvé pour mettre en œuvre de tels protocoles.

Annexe

Notations électriques

Composants simples

 Résistance R	 Condensateur de capacité C
 Bobine d'inductance L	 Interrupteur commandé en tension
 Diode idéale	 Moteur
 Amplificateur opérationnel ou AO	 Comparateur analogique

Abréviations

Abréviations	Schéma détaillé
Additionneur non inverseur à AO	
Amplificateur à AO	
Suiveur à AO	

Pour plus d'informations, voir [23]

Ergodicité et valeurs moyennes

De manière générale, soit un processus aléatoire $X(t)$ réel. Supposons que l'on dispose de N réalisations de ce processus indicées par l'entier $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Chaque réalisation $X_n(t)$ a une extension infinie. Rappelons qu'on définit l'intercorrélation entre deux signaux réels A et B comme :

$$\mathfrak{C}_{A,B}(t, \tau) \equiv \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(t+s)B(t+s-\tau)ds \quad (14.1)$$

Dire que les $X_n(t)$ sont des réalisations d'un même bruit $X(t)$ signifie deux propriétés : d'une part, les X_n doivent avoir la même densité de probabilité $\mathfrak{p}(t)$ à chaque instant t :

$$\forall n, P(X_n(t) = x) \equiv \mathfrak{p}(t)(x)dx \quad (14.2)$$

D'autre part, les $X_n(t)$ ont les mêmes propriétés dynamiques, c'est à dire que leur fonction d'intercorrélation $\mathfrak{C}_{n,m}(t, \tau)$ se réduit à la fonction d'autocorrélation $\mathfrak{C}_n(t, \tau)$ de X_n :

$$\forall n, m, \mathfrak{C}_{n,m}(t, \tau) = \mathfrak{C}_n(t, \tau) \equiv \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_n(t+s)X_n(t+s-\tau)ds \quad (14.3)$$

Il y a alors deux façons totalement différentes de définir une valeur moyenne du processus aléatoire $X(t)$. La première est la notion de moyenne d'ensemble que l'on notera $\langle X \rangle(t)$, qui correspond à un signal aléatoire défini à chaque instant. La seconde est la moyenne temporelle. Elle donne un nombre \overline{X}_n qui dépend *a priori* de la réalisation n . On définit ainsi les estimateurs suivants pour ces deux moyennes différentes :

$$\langle X \rangle(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n(t) \quad \text{et} : \overline{X}_n \equiv \frac{1}{T} \int_0^T X_n(t)dt \quad (14.4)$$

On appelle *ergodique* un processus aléatoire $X(t)$ qui remplit les deux conditions suivantes (hypothèse d'ergodicité faible de Birkhoff) [53] :

$X(t)$ est stationnaire, c'est à dire que sa densité de probabilité ne dépend pas de l'instant t considéré : $\forall n, \forall t, P(X_n(t) = x) \equiv \mathfrak{p}(x)dx$.

$X(t)$ parcourt durant T suffisamment de ses valeurs possibles.

Si $X(t)$ est un signal ergodique, la moyenne temporelle \overline{X}_n est égale à la moyenne d'ensemble sur les réalisations $\langle X(t) \rangle$. Pour les signaux supposés ergodiques, on notera indifféremment $\langle X \rangle$ ces deux moyennes :

$$\langle X(t) \rangle = \overline{X}_n \equiv \langle X \rangle \quad (14.5)$$

Pour plus de détails, voir [19] et [30]

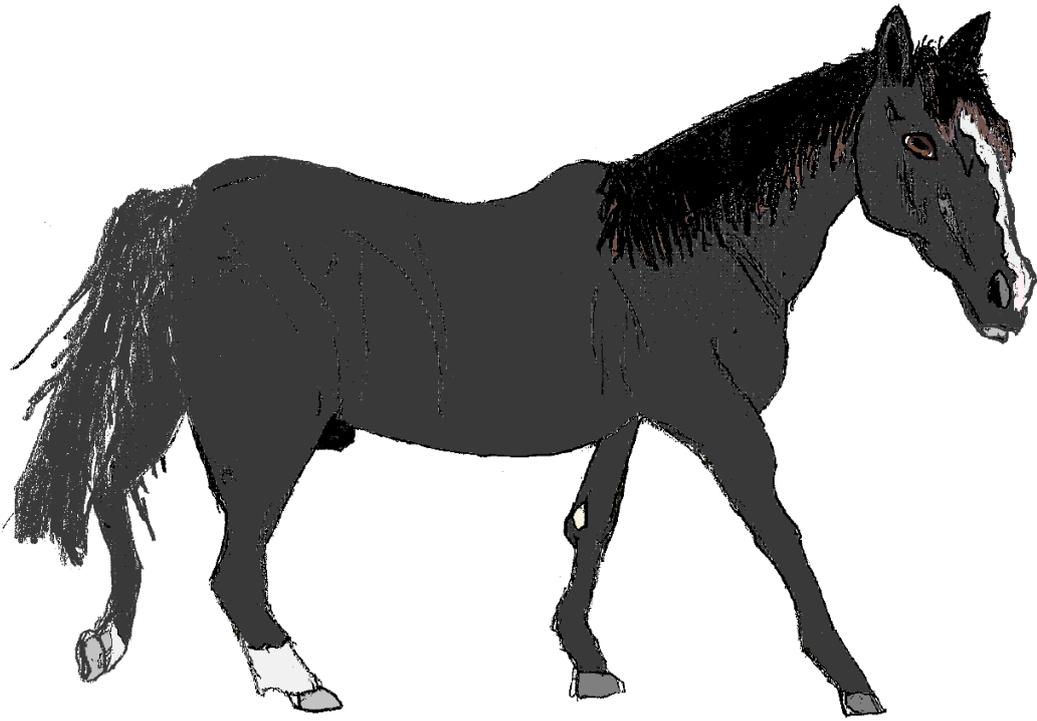
Bibliographie

- [1] Benjamin Apffel, Antoine Naert, and Sébastien Aumaître. Probing dissipative processes in stationary out-of-equilibrium systems through the fluctuations of injected power. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2019(1):013209, jan 2019.
- [2] Jean Argouarc’h. Information-entropy equivalence, maxwell’s demon and the information paradox. *Entropy: Thermodynamics / Energy / Environment / Economy*, 2(Issue 3), 2021.
- [3] Jean Argouarc’h. Paradox of entropy: a bit of information without energy. *Entropy: Thermodynamics / Energy / Environment / Economy*, 3(Issue 1), 2022.
- [4] R Dean Astumian and Imre Derényi. Fluctuation driven transport and models of molecular motors and pumps. *European biophysics journal*, 27(5), 1998.
- [5] Charles H Bennett. Notes on landauer’s principle, reversible computation, and maxwell’s demon. *Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, 34(3):501–510, 2003.
- [6] Léon Brillouin. Can the rectifier become a thermodynamical demon? *Physical Review*, 78(5):627, 1950.
- [7] Herbert B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, 2nd e. 1985.
- [8] J-Y Chastaing, J-C Géminard, and A Naert. Experimental study of energy exchanges between two coupled granular gases. *Physical Review E*, 94(6):062110, 2016.
- [9] JY Chastaing, JC Géminard, and Antoine Naert. Two methods to measure granular gas temperature. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(7):073212, 2017.
- [10] Giulio Costantini, Umberto Marini Bettolo Marconi, and Andrea Puglisi. Granular brownian ratchet model. *Physical Review E*, 75(6):061124, 2007.
- [11] Giulio Costantini, Andrea Puglisi, and Umberto Marini Bettolo Marconi. Granular ratchets. *The European Physical Journal Special Topics*, 179(1):197–206, 2009.
- [12] Leticia F Cugliandolo. The effective temperature. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(48):483001, 2011.
- [13] Roberto Di Leonardo, Luca Angelani, Dario Dell’Arciprete, Giancarlo Ruocco, Valerio Iebba, Serena Schippa, Maria Pia Conte, Francesco Mecarini, Francesco De Angelis, and Enzo Di Fabrizio. Bacterial ratchet motors. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(21):9541–9545, 2010.

- [14] Peter Eshuis, Ko van der Weele, Detlef Lohse, and Devaraj van der Meer. Experimental realization of a rotational ratchet in a granular gas. *Physical review letters*, 104(24):248001, 2010.
- [15] Massimiliano Esposito and Christian Van den Broeck. Second law and landauer principle far from equilibrium. *Europhysics Letters*, 95(4):40004, 2011.
- [16] Denis J Evans, Ezechiel Godert David Cohen, and Gary P Morriss. Probability of second law violations in shearing steady states. *Physical review letters*, 71(15):2401, 1993.
- [17] Luc P Faucheux, LS Bourdieu, PD Kaplan, and Albert J Libchaber. Optical thermal ratchet. *Physical review letters*, 74(9):1504, 1995.
- [18] R. Feynman. The feynman lectures on physics. *Addison- , Reading, MA*, 1(46), 1963.
- [19] Giovanni Gallavotti. Ergodicity, ensembles, irreversibility in boltzmann and beyond. *Journal of Statistical Physics*, 78:1571–1589, 1995.
- [20] Andrea Gnoli, Alberto Petri, Fergal Dalton, Giorgio Pontuale, Giacomo Gradenigo, Alessandro Sarracino, and Andrea Puglisi. Brownian ratchet in a thermal bath driven by coulomb friction. *Physical review letters*, 110(12):120601, 2013.
- [21] Christophe Goupil, Henni Ouerdane, Eric Herbert, Clémence Goupil, and Yves Dâangelo. Thermodynamics of metabolic energy conversion under muscle load. *New Journal of Physics*, 21(2):023021, 2019.
- [22] Andrew F. Rex Harvey Leff. Maxwell’s demon 2 entropy, classical and quantum information, computing 1st edition.
- [23] Paul Horowitz and Winfield Hill. *The art of electronics; 3rd ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [24] Sylvain Joubaud, Detlef Lohse, and Devaraj Van Der Meer. Fluctuation theorems for an asymmetric rotor in a granular gas. *Physical review letters*, 108(21):210604, 2012.
- [25] M Lagoin, C Crauste-Thibierge, and A Naert. Human-scale brownian ratchet: A historical thought experiment. *Physical Review Letters*, 129(12):120606, 2022.
- [26] Mona Lameche and Antoine Naert. Statistical properties of the heat flux between two nonequilibrium steady-state thermostats. *Physical Review E*, 103(4):042143, 2021.
- [27] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5(3):183–191, 1961.
- [28] Tongcang Li and Mark G Raizen. Brownian motion at short time scales. *Annalen der Physik*, 525(4):281–295, 2013.
- [29] Jianhua Lin. Divergence measures based on the shannon entropy. *IEEE Transactions on Information theory*, 37(1):145–151, 1991.
- [30] George W Mackey. Ergodic theory and its significance for statistical mechanics and probability theory. *Advances in Mathematics*, 12(2):178–268, 1974.
- [31] Marcelo O Magnasco and Gustavo Stolovitzky. Feynman’s ratchet and pawl. *Journal of statistical physics*, 93:615–632, 1998.

- [32] Ignacio A Martínez, Édgar Roldán, Luis Dinis, and Raúl A Rica. Colloidal heat engines: a review. *Soft matter*, 13(1):22–36, 2017.
- [33] Koji Maruyama, Franco Nori, and Vlatko Vedral. Colloquium: The physics of maxwell’s demon and information. *Reviews of Modern Physics*, 81(1):1, 2009.
- [34] James Clerk Maxwell. Letter to peter g. *Tait. Letter*, 1867.
- [35] Patrick Meurs, Christian Van den Broeck, and A Garcia. Rectification of thermal fluctuations in ideal gases. *Physical Review E*, 70(5):051109, 2004.
- [36] Joshua S. Mincer and Sanford M. Simon. Simulations of nuclear pore transport yield mechanistic insights and quantitative predictions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(31):E351–E358, 2011.
- [37] Bastien Molcrette, Léa Chazot-Franguiadakis, François Liénard, Zsombor Balassy, Céline Freton, Christophe Grangeasse, and Fabien Montel. Experimental study of a nanoscale translocation ratchet. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 119(30):e2202527119, 2022.
- [38] Antoine Naert. Experimental study of work exchange with a granular gas: the viewpoint of the fluctuation theorem. *Europhysics Letters*, 97(2):20010, 2012.
- [39] Andrea Parmeggiani, Frank Jülicher, Armand Ajdari, and Jacques Prost. Energy transduction of isothermal ratchets: Generic aspects and specific examples close to and far from equilibrium. *Physical Review E*, 60(2):2127, 1999.
- [40] JMR Parrondo and B Jiménez de Cisneros. Energetics of brownian motors: a review. *Applied Physics A*, 75:179–191, 2002.
- [41] Juan MR Parrondo and Pep Español. Criticism of feynman’s analysis of the ratchet as an engine. *American Journal of Physics*, 64(9):1125–1130, 1996.
- [42] Charles S Peskin, Garrett M Odell, and George F Oster. Cellular motions and thermal fluctuations: the brownian ratchet. *Biophysical journal*, 65(1):316–324, 1993.
- [43] Peter N Pusey. Brownian motion goes ballistic. *Science*, 332(6031):802–803, 2011.
- [44] Udo Seifert. Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines. *Reports on progress in physics*, 75(12):126001, 2012.
- [45] Ken Sekimoto. Langevin equation and thermodynamics. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 130:17–27, 1998.
- [46] Viviana Serreli, Chin-Fa Lee, Euan R Kay, and David A Leigh. A molecular information ratchet. *Nature*, 445(7127):523–527, 2007.
- [47] Claude Elwood Shannon. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE mobile computing and communications review*, 5(1):3–55, 2001.
- [48] Sanford M Simon, Charles S Peskin, and George F Oster. What drives the translocation of proteins? *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 89(9):3770–3774, 1992.
- [49] Murray Stewart. Ratcheting mrna out of the nucleus. *Molecular Cell*, 25(3):327–330, 2007.

- [50] Leo Szilard. On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings. *Behavioral Science*, 9(4):301–310, 1964.
- [51] Shoichi Toyabe, Takahiro Sagawa, Masahito Ueda, Eiro Muneyuki, and Masaki Sano. Experimental demonstration of information-to-energy conversion and validation of the generalized jarzynski equality. *Nature physics*, 6(12):988–992, 2010.
- [52] Longhan Xie, Carmen G Menet, Ho Ching, and Ruxu Du. The automatic winding device of a mechanical watch movement and its application in energy harvesting. *Journal of Mechanical Design*, 131(7), 2009.
- [53] David Yunis. The birkhoff ergodic theorem with applications. *The University of Chicago*. *Disponvel em: <http://math.uchicago.edu/may/REU2017/REUPapers/Yunis.pdf>*, 2017.



Domingo



Newton



Maxwell



Noether

Résumé :

Grâce à l'évolution des techniques d'observation et de manipulation à l'échelle microscopique, de nombreuses expériences de thermodynamique hors de l'équilibre ont vu le jour depuis 1950. Ces expériences ont permis de mettre en évidence et de tester expérimentalement de nombreux théorèmes de thermodynamique comme le principe de Landauer. Cependant, sonder dynamiquement des comportements à l'échelle microscopique demande un lourd travail d'instrumentation.

Dans cette thèse, on propose de transposer les comportements microscopiques à l'échelle macroscopique. Pour cela, on propose de remplacer la particule brownienne microscopique par une pale plongée dans un gaz granulaire dont on sonde le mouvement par induction électromécanique.

On utilise alors ce montage ingénieux pour réaliser expérimentalement plusieurs machines. Ces dernières sont loin de la limite thermodynamique ce qui permet de grandes fluctuations des quantités observables. D'une part, on réalise des démons de Maxwell, dont une machine de Szilard. D'autre part, on construit un réfrigérateur à deux particules.

Ces expériences permettent de tester les limites d'application des théorèmes et d'ouvrir de nouvelles perspectives.

Abstract:

Since 1950, many out of equilibrium experiments have been proposed due to the evolution of both monitoring and observation methods at the microscopical scale. These experiments have allowed researchers to test many fundamental thermodynamics theorems such as the Landauer principle. However, such experiments tend to require savvy experimental setups.

In this thesis, we transpose microscopical behaviours at the macroscopical scale. To that end, we choose to use a blade immersed in a granular gas as the Brownian particle. We then use electromechanical induction to probe the blade motion.

Using this ingenious probe, we experimentally realise thermodynamical machines far from the thermodynamic limit where the observable quantities show wide fluctuations. On the one hand, we build several Maxwell's demons, such as the famous Szilard engine. On the other hand, we build a two-particle refrigerator.

This work allows us to test limits of theorems and paves the way for future fundamental developments.

**Laboratoire de Physique de
l'École Normale Supérieure de Lyon**
46 allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07
FRANCE

**École Doctorale de Physique et
d'astrophysique
de l'université de Lyon - ED 52**
7 avenue Jean Capelle
69621 VILLEURBANNE
FRANCE