



**HAL**  
open science

# Analyse de l'endommagement par fatigue et optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires

Ahmed Yaich

► **To cite this version:**

Ahmed Yaich. Analyse de l'endommagement par fatigue et optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires. Mécanique [physics]. Normandie Université; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2018. Français. NNT : 2018NORMIR05 . tel-04213497

**HAL Id: tel-04213497**

**<https://theses.hal.science/tel-04213497>**

Submitted on 21 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat  
Spécialité Mécanique

Préparée au sein de  
Institut National des Sciences Appliquées de Rouen  
Et  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax

**Analyse de l'endommagement par fatigue et optimisation fiabiliste  
des structures soumises à des vibrations aléatoires**

Présentée et soutenue par  
**Ahmed YAICH**

Thèse soutenue publiquement le (12 mai 2018)  
devant le jury composé de

Mr / Mohamed Slim ABBES	Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie	Président
Mr / Chokri BOURAOUI	Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sousse, Tunisie	Rapporteur
Mr / Walid LARBI	Maitre Conférences HDR au Conservatoire Nationale des Arts et Métiers, Paris	Rapporteur
Mr / Mohamed Najib ICHCHOU	Professeur des Université à l'Ecole Centrale de Lyon	Examineur
Mr / Lassaad WALHA	Maitre Conférences à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie	Directeur de thèse
Mr / Abdelkhalak EL HAMI	Professeur des Université à l'INSA de Rouen	Directeur de thèse
Mr / Mohamed HADDAR	Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie	Co-encadrant
Mr / Tarek MERZOUKI	Maitre Conférences à Université de Versailles	Invité

Thèse dirigée par Mr Abdelkhalak El Hami (LMN) et Mr. Lassaad WALHA (LA2MP)

# Remerciement

A messieurs Walid LARBI et Chokri BOURAOUI qui ont bien voulu se prêter à la tâche de rapporteur, je veux leur exprimer toute ma reconnaissance. Je remercie également Mr. Mohamed Najib ICHCHOU pour avoir fait partie de mon jury. Enfin, je remercie Mr. Mohamed Slim ABBES pour avoir bien voulu présider ma soutenance de thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma sincère reconnaissance à mes encadrants et directeurs de thèse, Mr. Abdelkhalak EL HAMI Professeur à l'INSA de Rouen, Mr. Lassaad WALHA Maitre de conférences à l'ENI de Sfax et Mr. Mohamed HADDAR Professeur à l'ENI de Sfax pour la confiance qu'ils m'ont accordée et pour m'avoir soutenu du début jusqu'à la fin de ma thèse.

J'exprime ma profonde gratitude à Mr. Ghias KHAMANDA maitre de conférences à l'université de Lund Suède et à Mr. Tarek MERZOUKI maitre de conférences à l'Université de Versailles pour leurs confiances qu'ils m'ont accordé, la patience et le partage de leurs compétences scientifiques.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements à mon encadrant Mr. Abdelkhalak EL HAMI pour la précieuse opportunité de travailler à côté d'importantes entreprises tel que la société CEVAA et la société THALES Valence que je remercie pour leurs accueils au sein de leurs locaux.

Au cours de ce travail, j'ai bénéficié d'une ambiance chaleureuse et agréable au sein des laboratoires LA2MP et LMN. Ainsi je salue et remercie l'ensemble des thésards pour les nombreux moments de détente partagés et leur disponibilité permanente.

Je dédie ce travail à mes parents à qui je dois tout ainsi qu'à tous les membres de ma famille. Je le dédie aussi à tous mes amis. Merci pour votre soutien et vos encouragements durant ma thèse.

**Ahmed YAICH**

# Résumé

Cette thèse porte sur l'analyse de l'endommagement par fatigue et optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires. Le but de l'optimisation fiabiliste (Reliability-Based Design Optimization (RBDO)) est de trouver le meilleur compromis entre le coût et la fiabilité. Par conséquent, plusieurs méthodes, telles que la méthode hybride (HM) et la méthode OSF (Optimum Safety Factor), ont été développées pour atteindre cet objectif. Cependant, ces méthodes ont été appliquées uniquement dans des cas statiques et certains cas dynamiques spécifiques. Mais, dans la réalité, les structures sont soumises à des vibrations aléatoires et ces vibrations peuvent provoquer un endommagement par fatigue. Pour estimer la durée de vie de ces structures, des critères de fatigue doivent être appliqués à chaque point. Dans cette thèse, on présente dans un premier temps, la stratégie numérique pour le calcul de l'endommagement par fatigue basée sur la formulation du critère de Sines dans le domaine fréquentiel développé dans notre laboratoire. Ensuite, on propose une extension des méthodes RBDO dans le cas des structures soumises à des vibrations aléatoires en utilisant la stratégie de calcul proposé. Aussi, une méthode hybride robuste (RHM) est ensuite développée afin de résoudre les problèmes de la méthode classique. La dernière partie de cette thèse est consacrée à une application industrielle qui porte sur une étude numérique et expérimentale du banc HALT. Cette étude a permis de modéliser la partie mécanique de ce banc.

# Abstract

This thesis deals with the fatigue damage analysis and reliability-based design optimization of structures under random vibrations. The aim of the Reliability-Based Design Optimization (RBDO) is to find the best compromise between cost and safety. To this end, several methods, such as the hybrid method (HM) and the OSF method (Optimum Safety Factor), have been developed. However, these methods have been applied only in static cases and some specific dynamic ones. But in reality, structures are subject to random vibration and these vibrations can cause fatigue damage. To estimate the life time of these structures, we need to apply the fatigue multiaxial criteria at each point. In this thesis, we present first the numerical strategy for calculating fatigue damage based on the formulation of the Sines criterion in the frequency domain developed in our laboratory. Then, an extension of the RBDO methods is proposed in the case of structures subjected to random vibrations. Also, a robust hybrid method (RHM) is then developed to solve the problems of the classical method. Finally, we present an industrial application which concerns a numerical and experimental study of the HALT chamber.

# Table des matières

Remerciement.....	i
Résumé .....	ii
Abstract.....	iii
Liste des figures.....	5
Liste des tableaux .....	9
Introduction générale .....	11
Chapitre 1 Vibrations Aléatoires .....	14
I. Introduction.....	15
II. Généralité sur les vibrations aléatoires .....	15
II.1 Définitions .....	15
II.2 Propriétés statistiques d'un processus aléatoire.....	16
II.3 Caractérisation des processus aléatoires gaussiens stationnaires ergodiques.	19
III. Définition de la densité spectrale de puissance.....	20
IV. Propriétés statistiques d'un processus aléatoire gaussien .....	21
IV.1 Moments spectraux.....	21
IV.2 Franchissement de seuil.....	22
IV.3 Largeur de la bande d'un processus .....	22
IV.4 Distribution des maximas .....	24
V. Réponse d'un système linéaire à une excitation aléatoire.....	24
V.1 Valeur moyenne et DSP de la réponse .....	24
V.2 Applications.....	25
VI. Conclusion .....	31

Chapitre 2	Analyse de l'endommagement par fatigue des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	32
I.	Introduction.....	33
II.	Endommagement par fatigue uniaxiale des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	34
II.1	Courbe de Wöhler.....	34
II.2	Influence de la contrainte moyenne.....	35
II.3	Loi de cumul de l'endommagement.....	36
II.4	Méthode de Rainflow pour le comptage des cycles.....	36
II.5	Approche spectrale pour le calcul de l'endommagement par fatigue uniaxial.....	39
III.	Endommagement par fatigue multiaxiale des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	44
III.1	Formulation des critères de fatigue multiaxiale.....	44
III.2	Fatigue multiaxiale dans le domaine fréquentiel.....	44
III.3	Application.....	51
IV.	Conclusion.....	53
Chapitre 3	Optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires ...	55
I.	Introduction.....	56
II.	Introduction à la fiabilité en mécanique.....	57
II.1	Notions fondamentales en fiabilité mécanique.....	57
II.2	Méthodes de simulation de Monte Carlo.....	58
II.3	Méthode d'approximation FORM/SORM.....	59
III.	Optimisation des structures.....	61
III.1	Formulation du problème d'optimisation.....	61

III.2	Prise en compte des incertitudes dans l'optimisation.....	63
III.3	Application .....	63
IV.	Optimisation fiabiliste ( <i>Reliability-based design optimization RBDO</i> ).....	66
IV.1	Approche classique.....	68
IV.2	Méthode hybride.....	69
IV.3	Optimum Safety Factor OSF .....	71
IV.4	Méthode hybride robuste ( <i>Robust Hybrid Method RHM</i> ) .....	73
V.	Optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	78
V.1	Description du problème .....	78
V.2	Procédures des méthodes DDO et RBDO .....	79
V.3	Applications.....	80
VI.	Extension des méthodes RBDO pour d'autres domaines d'applications.....	89
VI.1	Optimisation fiabiliste d'un système vibro-acoustique .....	89
VI.2	Optimisation fiabiliste d'un actionneur en alliage à mémoire de forme pour micro-pompe .....	94
VII.	Conclusion.....	102
Chapitre 4	Application industrielle : étude sur le banc HALT.....	104
I.	Introduction.....	105
II.	Présentation du banc HALT.....	106
III.	Modélisation de la partie mécanique de la table .....	107
III.1	Analyse modale .....	108
III.2	Analyse spectrale .....	120
IV.	Conclusion .....	125
	Conclusion générale .....	127



Bibliographie .....	129
Liste des publications .....	144
Annexe A. : Moyennes des DSP recomposé de l'effort pour différents types de chargement .....	145
Annexe B. : Réponse de la table pour une excitation à DSP constante .....	148
Annexe C. : Réponse de la table pour une DSP d'excitation amélioré .....	151

# Liste des figures

Figure 1-1 : Ensemble d'enregistrement d'un processus aléatoire.....	16
Figure 1-2 : Etude à travers le processus aléatoire .....	17
Figure 1-3 : Echantillon d'un signal aléatoire .....	18
Figure 1-4: Densité de probabilité d'un processus gaussien unitaire.....	19
Figure 1-5 : Processus à bande large : Bruit blanc .....	23
Figure 1-6 : Bruit blanc à bande limitée .....	23
Figure 1-7 : DSP d'un processus à bande étroite .....	23
Figure 1-8 : Système linéaire avec une entrée et une sortie .....	24
Figure 1-9 : Oscillateur à un degré de liberté .....	26
Figure 1-10 DSP du résultat en déplacement $u$ .....	26
Figure 1-11 : Organigramme de l'analyse spectrale d'une structure soumise à des vibrations aléatoires.....	27
Figure 1-12 : Géométrie de la poutre.....	28
Figure 1-13 : Réponse en DSP d'accélération de la poutre.....	28
Figure 1-14 : Géométrie de la plaque .....	29
Figure 1-15 : Maillage de la plaque.....	29
Figure 1-16 : Déformées modales de la plaque (a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4 (e) Mode 5 .....	30
Figure 1-17 : DSP des contraintes (a) $\Phi_{sxxsxx}$ (b) $\Phi_{syysyy}$ (c) $\Phi_{sxysxy}$ .....	30
Figure 2-1 : Courbe de Wöhler.....	34
Figure 2-2 : Diagramme de Haigh.....	35
Figure 2-3 : Processus de comptage de Rainflow.....	37
Figure 2-4: Organigramme de l'approche temporelle pour l'étude en fatigue uniaxiale ....	38
Figure 2-5 : Réponse en DSP de contrainte au point A de la poutre .....	43
Figure 2-6 : Implémentation de la stratégie de l'analyse de l'endommagement par fatigue	50
Figure 2-7 : Cartographie de l'endommagement par fatigue du critère de Sines .....	51
Figure 2-8 : Influence de l'épaisseur sur la moyenne de l'endommagement .....	52
Figure 2-9 : Influence du type de l'entaille sur l'endommagement.....	53

Figure 3-1 : Simulation de Monte Carlo.....	59
Figure 3-2 : Passage de l'espace physique vers l'espace normé.....	60
Figure 3-3 : Minimum local et minimum global .....	62
Figure 3-4 : Poutre en flexion.....	64
Figure 3-5 : Algorithme de résolution du problème d'optimisation DDO.....	65
Figure 3-6 : Evolution de la fonction objective .....	65
Figure 3-7 : Evolution de la contrainte d'optimisation .....	66
Figure 3-8 : Algorithme de l'approche classique de l'optimisation fiabiliste .....	69
Figure 3-9 : Espace hybride de conception .....	70
Figure 3-10 : Algorithme de la méthode hybride .....	70
Figure 3-11 : Algorithme de la méthode OSF .....	71
Figure 3-12 : Problème rencontré de la méthode hybride classique présenté dans le HDS	73
Figure 3-13 : RHM dans le HDS .....	74
Figure 3-14 : Algorithme de la méthode RHM .....	74
Figure 3-15 : Algorithme d'optimisation des structures soumises à des vibrations aléatoires .....	78
Figure 3-16: Méthodologie de calcul du volume.....	81
Figure 3-17 : Valeurs de la fonction objective au point initial et au point optimal pour des différents points initiaux.....	86
Figure 3-18 : Influence de l'excitation sur le maximum de l'endommagement au point initial .....	86
Figure 3-19 : Influence de l'excitation sur la fonction objective et l'endommagement maximal au point optimal.....	87
Figure 3-20 : Influence de l'excitation sur les variables de conception au point optimal....	87
Figure 3-21: Schéma des deux plaques supportées et attachées à l'extrémité d'une cavité rectangulaire à parois rigides.....	90
Figure 3-22: Section transversale de l'actionneur en alliage de mémoire de forme (SMA) [120] .....	95
Figure 3-23: Chargement thermique sur les membranes.....	95

Figure 3-24: Modèle 2D avec élément coque.....	96
Figure 3-25: Modèle axisymétrique .....	96
Figure 3-26 : Déplacement en fonction des étapes.....	97
Figure 3-27 : IRHM dans le HDS.....	99
Figure 3-28 : Déplacement de la micro-pompe au point initial et au point optimal.....	102
Figure 4-1 : Table Qualmark .....	106
Figure 4-2: Configuration de l'assemblage [124] .....	107
Figure 4-3 : Photo réelle de la table prise au CEVAA .....	109
Figure 4-4 : Modélisation 3D de la table a) vue de dessous b) vue de dessus .....	109
Figure 4-5: Modèle 2D de la table.....	110
Figure 4-6 : Table suspendue [125].....	113
Figure 4-7: Procédure de recalage du modèle .....	114
Figure 4-8 : Identification des accéléromètres placés sur la table [126] .....	116
Figure 4-9 : Réponse de la table en DSP d'accélération pour une excitation de 5grms suivant l'axe Z : a) groupe 1 b) groupe 2 c) groupe 3 d) groupe 4.....	117
Figure 4-10: Premier déformée modal de la table .....	117
Figure 4-11: Conditions aux limites de la table.....	118
Figure 4-12 : Disposition des marteaux sous la table [124] .....	120
Figure 4-13: Angle d'inclinaison des marteaux par rapport à l'axe Z.....	121
Figure 4-14: Angle d'inclinaison des marteaux par rapport aux l'axes X et Y .....	121
Figure 4-15 : Moyenne des DSP de l'effort injecté après recombinaison (5grms) .....	122
Figure 4-16 : Réponse en DSP d'accélération en un point de la table pour une DSP d'excitation constante.....	123
Figure 4-17 : Proposition d'amélioration de la réponse du modèle .....	124
Figure 4-18 : Réponse en DSP d'accélération en un point de la table pour une DSP d'excitation amélioré.....	125
Figure 4-19 : Perspective .....	126
Figure A- 1: Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 10grms .....	145

Figure A- 2 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 15grms .....	145
Figure A- 3 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 20grms .....	146
Figure A- 4 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 25grms .....	146
Figure A- 5 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 30grms .....	147
Figure B- 1 : Réponse de la table en DSP d'accélération suivant X .....	148
Figure B- 2 : Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Y .....	149
Figure B- 3 : Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Z.....	150
Figure C- 1: Réponse de la table en DSP d'accélération suivant X .....	151
Figure C- 2: Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Y .....	152
Figure C- 3: Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Z.....	153

# Liste des tableaux

Tableau 1-1 : Propriétés mécaniques du matériau de la poutre .....	28
Tableau 1-2 : Déformées modales de la poutre .....	28
Tableau 2-1: Détail de comptage de Rainflow .....	37
Tableau 2-2 : Moyenne de l'endommagement calculé par les différentes méthodes spectrales .....	43
Tableau 2-3: Maximum de l'endommagement près de l'entaille .....	53
Tableau 3-1 : Propriétés mécaniques du matériau de la poutre .....	63
Tableau 3-2: Résultat optimisation DDO pour une poutre en flexion.....	64
Tableau 3-3: Résultats de la méthode DDO .....	82
Tableau 3-4 : Résultats de la méthode hybride.....	83
Tableau 3-5 : Résultat de la méthode RHM .....	83
Tableau 3-6 : Résultats de la méthode OSF .....	84
Tableau 3-7 : Analyse de sensibilité du maximum d'endommagement.....	84
Tableau 3-8 : Différents points initiaux pour la méthode RHM.....	85
Tableau 3-9 : Résultats d'optimisation par les méthodes DDO et RBDO de la poutre en flexion.....	89
Tableau 3-10 : Dimensions et propriétés du système couplé .....	92
Tableau 3-11 : Résultats d'optimisation par les méthodes DDO et RBDO du système couplé acoustique-structurel .....	93
Tableau 3-12: Paramètres de matériau des membranes en NiTi .....	96
Tableau 3-13: Résultats DDO et RBDO du SMA micro-pompe .....	101
Tableau 4-1: Valeurs initiales des caractéristiques matériaux.....	110
Tableau 4-2: Comparaison des déformées modales .....	112
Tableau 4-3: Intervalles des données de matériaux.....	113
Tableau 4-4 : Résultats du problème de recalage en condition libre-libre .....	115

Tableau 4-5: Comparaison des modes expérimentales et numériques (configuration libre-libre) .....	115
Tableau 4-6 : Fréquences propres extraites des essais opérationnels .....	118
Tableau 4-7 : Résultats du problème de recalage du modèle de la table avec ressorts .....	119
Tableau 4-8: Comparaison des modes expérimentaux et numériques (configuration avec ressorts) .....	119
Tableau A- 1: Valeurs théoriques de DSP de l'effort .....	147

# Introduction générale

Lors de la fabrication d'une structure, le comportement mécanique de fonctionnement peut être relativement différent à celui prévu lors de sa conception. En effet, les conditions de réalisation et de fabrication sont liées à des d'incertitudes.

Pour assurer le bon fonctionnement de la structure, il est important de tenir compte de l'incertitude dès la phase de conception. Dans la littérature, plusieurs théories ont été développés afin de traiter les incertitudes. La fiabilité des structures consiste à définir la probabilité de défaillance d'une structure dont les conditions de bon fonctionnement ne soient pas respectées.

L'intégration de l'analyse de fiabilité dans les problèmes d'optimisation constitue une nouvelle discipline introduisant des critères de fiabilité dans la recherche de la configuration optimale des structures, c'est le domaine de l'optimisation fiabiliste (*Reliability-Based Design Optimization RBDO*).

Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été développées afin de résoudre un tel problème de RBDO. Ces approches peuvent être classées en trois groupes :

- Approche mono-niveau,
- Approche à deux niveaux,
- Approche séquentielle découplée.

Le problème d'optimisation, en utilisant ces approches, nécessite un temps de calcul important. En effet, ces approches sont réalisées dans deux espaces séparés : l'espace physique et l'espace normalisé. Pour résoudre ce problème, une méthode efficace appelée méthode hybride est proposée par Kharmanda [1]. Cette méthode est basée sur la résolution simultanée des problèmes d'optimisation et de fiabilité, dans un seul espace, appelé espace hybride de conception. Elle permet de minimiser le temps de calcul par rapport à la méthode classique, mais le problème d'optimisation est toujours plus complexe que la méthode déterministe.

Pour cela, Kharmanda [2] a proposé une méthode basée sur la solution semi-numérique, appelé Optimum Safety Factor (OSF). Cette méthode consiste à calculer des coefficients de



sécurité déterminés à partir d'une analyse de sensibilité de la fonction d'état limite par rapport à chaque variable d'optimisation.

Dans notre environnement quotidien, plusieurs structures sont soumises à des vibrations aléatoires, et ces vibrations peuvent causer un endommagement par fatigue. Durant ces dernières années, plusieurs méthodes ont été élaborées afin de déterminer la durée de vie d'une structure sous des vibrations aléatoires. Généralement, afin de minimiser le temps de calcul, l'analyse de l'endommagement par fatigue est élaborée dans le domaine fréquentiel, par l'utilisation des méthodes spectrales. Ces méthodes nécessitent le calcul des différentes propriétés statistiques des vibrations aléatoires.

Dans cette thèse, notre objectif est de déterminer la meilleure méthodologie à suivre pour l'optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires en considérant l'endommagement par fatigue. Pour cela, ce rapport de thèse est décomposé en quatre chapitres.

Le premier chapitre, est un rappel sur la notion de vibration aléatoire. On définit aussi quelques outils mathématiques tels que la fonction de corrélation et la densité spectrale de puissance. Quelques paramètres statistiques sont présentés par la suite. Ces paramètres sont utilisés ensuite dans l'analyse de l'endommagement par fatigue vibratoire.

Dans le deuxième chapitre, on propose la démarche de l'analyse de l'endommagement par fatigue des structure soumises à des vibrations aléatoires. On peut spécifier deux types d'endommagement par fatigue : fatigue uniaxiale et fatigue multiaxiale. L'objectif de ce chapitre est de déterminer la stratégie de calcul de la moyenne de l'endommagement par fatigue vibratoire multiaxiale dans le domaine fréquentiel. On présente à la fin de ce chapitre une stratégie numérique pour calculer l'endommagement par fatigue multiaxiale basée sur la formulation fréquentielle du critère de Sines développé dans notre laboratoire

Le troisième chapitre est consacré à l'optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires. On introduit les notions de base de la fiabilité et de l'optimisation. On présente par la suite les différentes méthodes d'optimisation fiabiliste. On propose ensuite un couplage de ces méthodes avec l'analyse de l'endommagement par fatigue afin de déterminer

la meilleure conception des structures sous des vibrations aléatoires. Ainsi, une nouvelle méthode d'optimisation fiabiliste appelée *Robust Hybrid Method* est ensuite proposée. On présente finalement, une extension de cette méthode sur des autres domaines d'application pour montrer son efficacité.

Dans le quatrième chapitre, on présente une application industrielle qui porte sur l'étude du banc HALT. Une étude expérimentale et numérique a permis de modéliser la partie mécanique de cette enceinte. Cette étude entre dans le cadre du projet PISTIS. Durant ce projet, j'avais l'opportunité de travailler avec des grandes entreprises telle que CEVAA et THALES VALENCE.

# Chapitre 1

## Vibrations Aléatoires

I.	Introduction.....	15
II.	Généralité sur les vibrations aléatoires .....	15
II.1	Définitions .....	15
II.2	Propriétés statistiques d'un processus aléatoire.....	16
II.3	Caractérisation des processus aléatoires gaussiens stationnaires ergodiques.	19
III.	Définition de la densité spectrale de puissance.....	20
IV.	Propriétés statistiques d'un processus aléatoire gaussien .....	21
IV.1	Moments spectraux.....	21
IV.2	Franchissement de seuil.....	22
IV.3	Largeur de la bande d'un processus .....	22
IV.4	Distribution des maxima .....	24
V.	Réponse d'un système linéaire à une excitation aléatoire.....	24
V.1	Valeur moyenne et DSP de la réponse .....	24
V.2	Applications.....	25
VI.	Conclusion .....	31

## I. Introduction

Depuis plusieurs décennies, les concepteurs incluent dans leur démarche, l'étude du comportement vibratoire des structures. En fait, dans notre vie quotidienne, de nombreuses structures sont soumises à des chargements aléatoires. A titre d'exemple : les turbulences atmosphériques sur les avions, la houle sur les plateformes, les irrégularités de la route sur les véhicules, etc. Ces grandeurs stochastiques peuvent être caractérisées de façon probabiliste grâce à leurs densités de probabilité, leurs moyennes et leurs propriétés statistiques.

Dans ce chapitre, nous définissons dans un premier temps, la notion de processus aléatoires, ainsi que les hypothèses de propriétés stationnaires, ergodiques et gaussiennes. L'étude de ces hypothèses, nous amène à définir plusieurs outils mathématiques tels que les fonctions de corrélation et les densités spectrales. La réponse du système soumis à des chargements aléatoires est ensuite étudiée. Enfin, quelques applications explicatives sont présentées afin de mieux comprendre les différentes notions étudiées dans ce chapitre.

## II. Généralité sur les vibrations aléatoires

### II.1 Définitions

#### II.1.1 Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une quantité dont la valeur instantanée ne peut pas être prédite. La connaissance des valeurs de la variable avant l'instant  $t$  ne permet pas d'en déduire la valeur à cet instant [3]. Par exemple l'enregistrement de la hauteur de la houle en mer peut être assimilé à un historique de la réalisation d'une variable aléatoire.

#### II.1.2 Processus aléatoire

Supposons qu'on enregistre un paramètre caractérisant un phénomène,  $n$  fois en fonction du temps. Prenons à titre d'exemple, l'accélération enregistrée en un point donné sur l'aile d'un avion. Pour chaque trajet, l'accélération mesurée est considérée comme variable aléatoire qui est différente des autres. Si on effectue  $n$  trajets, on obtient autant de courbes ( $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i, \dots$ ,

$\ell_n$ ) différentes. L'ensemble de toutes ces fonctions  $\{\ell(t)\}$  est appelé processus aléatoire (Figure 1-1).

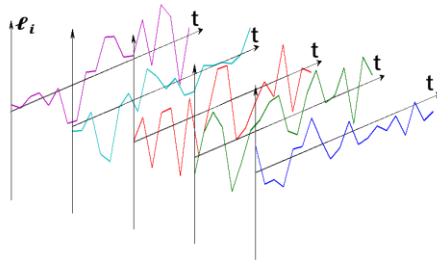


Figure 1-1 : Ensemble d'enregistrement d'un processus aléatoire

## II.2 Propriétés statistiques d'un processus aléatoire

Un processus aléatoire est composé d'un grand nombre de signaux en fonction du temps de très grande durée. Pour cela, l'étude des vibrations serait très lourde si on ne disposait pas d'outils permettant de limiter l'analyse du processus complet à celle d'un nombre très restreint d'échantillons de durée raisonnable. L'étude des propriétés statistiques du processus va nous permettre de définir deux notions très utiles pour cet objectif tel que la stationnarité et l'ergodicité. Les définitions présentées dans ce paragraphe sont extraites des références suivantes : [3] [4] [5].

### II.2.1 Moyenne d'ensemble

Soit  $\{\ell(t)|t \in T\}$  un processus aléatoire. On peut calculer pour ce processus les caractéristiques suivantes :

#### i- Valeur moyenne

La valeur moyenne du processus aléatoire  $\{\ell(t)|t \in T\}$  à l'instant  $t = t_1$  est obtenue en additionnant les valeurs correspondantes à l'instant  $t_1$  de chacun des historiques de l'ensemble et en divisant le résultat par le nombre des historiques (Figure 1-2). Pour un nombre infini de réalisation ( $n$  très grande), la moyenne (espérance mathématique) est définie par l'équation (1).

$$\overline{\ell(t_1)} = [\ell(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t_1) \cdot p(\ell(t_1)) d\ell \quad (1)$$

Avec  $p(\ell(t_1))$  est la densité de probabilité de  $\ell$

On peut définir aussi le moment d'ordre  $n$  du processus. Il est donné par l'équation (2).

$$\overline{\ell^n(t_1)} = [\ell^n(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell^n(t_1) \cdot p(\ell(t_1)) d\ell \quad (2)$$

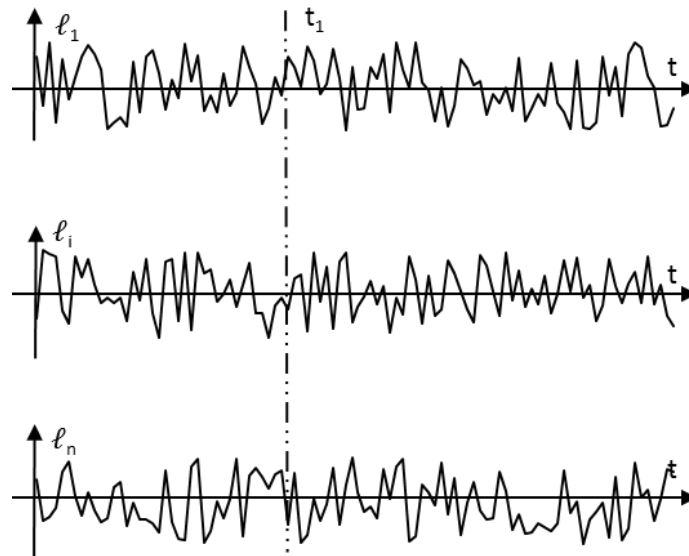


Figure 1-2 : Etude à travers le processus aléatoire

**ii- Variance et écart type**

La variance d'une variable aléatoire est donnée par l'équation (3).

$$V(\ell) = \sigma_\ell^2 = E [(\ell - \bar{\ell})^2] \quad (3)$$

Où  $\sigma_\ell$  est l'écart-type du processus.

**iii- Fonction d'autocorrélation**

La fonction d'autocorrélation est obtenue en additionnant le produit de deux valeurs de chaque historique prises à deux instants différents  $t_1$  et  $t_2 = t_1 + \tau$  et en divisant le résultat par le nombre des historiques. La fonction d'autocorrélation est définie par l'équation (4).

$$R_\ell(t_1, t_1 + \tau) = E[(\ell(t_1)) \cdot (\ell(t_1 + \tau))] \quad (4)$$

**iv- Matrice de covariance**

La matrice de covariance d'un processus aléatoire  $\{\ell(t)|t \in T\}$  est une matrice carrée, symétrique et positive. Elle est donnée aux instants  $t_1$  et  $t_2 = t_1 + \tau$  par l'équation (5).

$$\Sigma_{\ell}(t_1, t_1 + \tau) = E[(\ell(t_1) - \overline{\ell(t_1)}) \cdot (\ell(t_1 + \tau) - \overline{\ell(t_1 + \tau)})] \quad (5)$$

### II.2.2 Moyennes temporelles

#### i- Moyenne

Considérons un échantillon  $\ell(t)$  de durée T d'un enregistrement (Figure 1-3). La moyenne temporelle pour cet échantillon est donnée par l'équation (6).

$$\langle \ell(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ell(t) dt \quad (6)$$



Figure 1-3 : Echantillon d'un signal aléatoire

#### ii- Moments d'ordre n

Comme dans le paragraphe précédent, le moment d'ordre n pour une réalisation du processus est définie par l'équation (7).

$$\langle \ell^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ell^n(t) dt \quad (7)$$

#### iii- Fonction d'autocorrélation temporelle

On définit dans le domaine temporelle la fonction d'autocorrélation  $R_{\ell}(\tau)$  .elle décrit la distribution de l'énergie produite par la série temporelle. La fonction d'autocorrélation temporelle est définie par l'équation (8).

$$R_{\ell}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ell(t) \cdot (\ell(t + \tau)) dt \quad (8)$$

### II.3 Caractérisation des processus aléatoires gaussiens stationnaires ergodiques

Dans ce paragraphe on va définir la notion de stationnarité et d'ergodicité d'un processus aléatoire gaussien. Ces hypothèses permettent de simplifier le problème du calcul de la réponse d'un système mécanique

#### II.3.1 Processus aléatoire gaussien

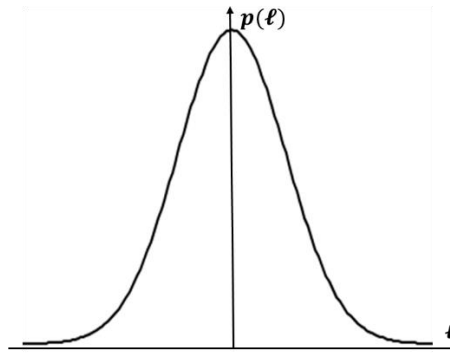


Figure 1-4: Densité de probabilité d'un processus gaussien unitaire

On appelle processus aléatoire gaussien, un processus  $\ell(t)$  tel que l'ensemble des valeurs instantanées de  $\ell(t)$  obéit à la loi de probabilité de la forme présentée par l'équation (9):

$$p(\ell) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ell-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

Avec  $m = E[\ell]$  valeur moyenne,  $\sigma^2 = E[(\ell - m)^2]$ ,  $\sigma$  écart-type.

Dans beaucoup de cas pratiques, la vibration, dans une pièce excitée, est normale et de moyenne nulle. La Figure 1-4 présente la densité de probabilité d'un processus aléatoire gaussien unitaire ( $m=0$  et  $\sigma = 1$ ).

#### II.3.2 Processus aléatoire stationnaire

Un processus aléatoire est dit stationnaire si ses propriétés statistiques d'ensemble sont invariables avec le temps. Les équations (10), (11), (12) et (13) présentent quelques caractéristiques d'un processus aléatoire stationnaire pour tous instant  $t=t_1$  :

$$E[\ell(t_1)] = E[\ell(t_1 + \tau)] \quad (10)$$



$$E[\ell^n(t_1)] = E[\ell^n(t_1 + \tau)] \quad (11)$$

$$\Sigma_\ell(\tau) = \Sigma_\ell(t_1, t_1 + \tau) \quad (12)$$

$$R_\ell(\tau) = R_\ell(t_1, t_1 + \tau) \quad (13)$$

### II.3.3 Processus aléatoire ergodique

Un processus aléatoire stationnaire est dit ergodique si ses propriétés statistiques d'ensemble sont égales aux propriétés temporelles prises sur un échantillon quelconque [6]. Les équations (14), (15) et (16) présentent quelques caractéristiques d'un processus aléatoires stationnaires ergodique Cette propriété est très importante. Elle permet d'évaluer les moyennes d'ensemble d'un processus à partir d'un seul historique.

$$E[\ell] = \langle \ell(t) \rangle \quad (14)$$

$$E[\ell^n] = \langle \ell^n(t) \rangle \quad (15)$$

$$R_\ell(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ell(t) \cdot (\ell(t + \tau)) dt \quad (16)$$

## III. Définition de la densité spectrale de puissance

Considérons un processus aléatoire  $\ell(t)$ , sa transformée de Fourier n'existe pas car le processus  $\ell(t)$  est d'une part aléatoire et d'autre part infinie.

En pratique, la Densité Spectrale de Puissance (DSP) détermine la répartition fréquentielle de l'énergie moyenne du processus. Elle est définie comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (théorème de Wiener-Kintchine). L'équation (17) donne la DSP du signal  $\ell(t)$ .

$$\Phi_{\ell}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\ell}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (17)$$

On utilise parfois la pulsation  $\omega = 2\pi f$  comme variable au lieu de  $f$ . Ainsi pour convertir entre la fréquence  $f$  et la pulsation  $\omega$ , la valeur de DSP doit être changer également comme présenté par l'équation (18) [7] .

$$\Phi_{\ell}(\omega)d\omega = 2\pi\Phi_{\ell}(f)df \quad (18)$$

Si la matrice des DSP  $\Phi_{\ell}(f)$  du processus  $\ell(t)$  est connue et si ce processus est de moyenne nulle alors la fonction d'autocorrélation du processus est obtenue par transformation inverse de Fourier de la DSP (équation (19)).

$$R_{\ell}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\ell}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (19)$$

## IV. Propriétés statistiques d'un processus aléatoire gaussien

Dans ce paragraphe, on présente les principaux paramètres statistiques des processus stochastiques gaussiens. Ces paramètres sont nécessaires à l'analyse en fatigue des structures dans le domaine fréquentiel.

### IV.1 Moments spectraux

Le moment spectral  $m_i$  d'ordre  $i$  d'un processus stationnaire gaussien  $\ell(t)$  est défini par l'équation (20)

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^i \Phi_{\ell}(f) df \quad (20)$$

Ces moments contiennent des informations très importantes ainsi elles permettent d'évaluer de nombreuses caractéristiques du processus tel que par exemple les variances de ce processus et ses dérivées. Pour un processus de moyenne nulle, on peut établir les relations des équations (21), (22) et (23)

$$\sigma_{\ell} = m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\ell}(f) df \quad (21)$$

$$\sigma_{\dot{x}} = m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 \Phi_{\ell}(f) df \quad (22)$$

$$\sigma_{\ddot{x}} = m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^4 \Phi_{\ell}(f) df \quad (23)$$

## IV.2 Franchissement de seuil

A partir des moments spectraux calculés précédemment, des formules analytiques ont été développées afin d'étudier les propriétés statistiques des processus aléatoires gaussiens et stationnaires.

Parmi ces propriétés, nous rapportons celles utiles pour l'étude de la fatigue des structures. L'équation (24) définit le nombre moyen par unité de temps de passage par un niveau  $b$  avec une pente positive :

$$N_b = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\frac{b}{2m_0}} \quad (24)$$

On peut déduire donc le nombre de passage par zéro à pente positive. (Équation (25))

$$N_0 = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (25)$$

On peut définir aussi le nombre moyen de maxima par unité de temps. (Équation (26))

$$N_p = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (26)$$

Les démonstrations de ces propriétés peuvent être trouvées dans des nombreux ouvrages en particulier celle de Rice [8] qui a été le premier à démontrer ces formulations.

## IV.3 Largeur de la bande d'un processus

### IV.3.1 Processus à large bande

Un processus à large bande est un processus aléatoire stationnaire dont sa DSP possède des valeurs significatives sur un grand intervalle de fréquences.

Chaque échantillon d'un processus à large bande a une allure absolument quelconque. La Figure 1-3 présente un exemple d'un échantillon d'un processus à large bande.

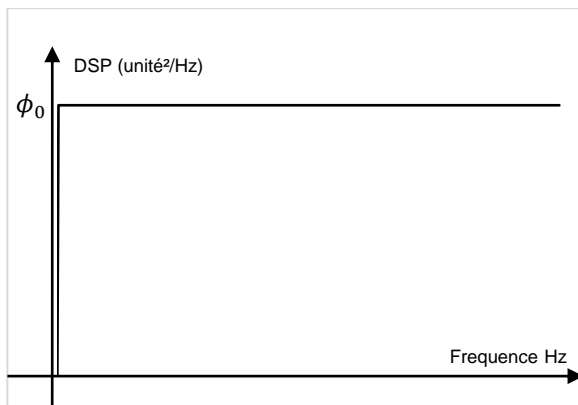


Figure 1-5 : Processus à bande large : Bruit blanc

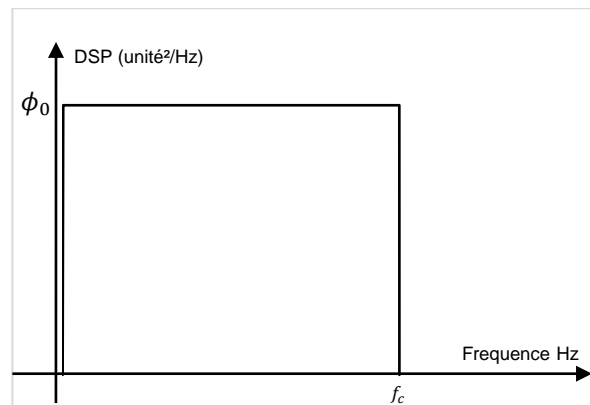


Figure 1-6 : Bruit blanc à bande limitée

Si on assimile la densité spectrale à une constante  $\Phi_0$  dans l'intervalle  $(-\infty < f < \infty)$ , on dit que le signal est un *bruit blanc idéal* (Figure 1-5).

On utilise aussi dans les calculs les *bruits blancs à bande limitée* (Figure 1-6).

### IV.3.2 Processus à bande étroite

Un processus à bande étroite est un processus aléatoire stationnaire dont sa DSP possède des valeurs significatives sur un intervalle de fréquences dont la largeur est petite. ( Figure 1-7)

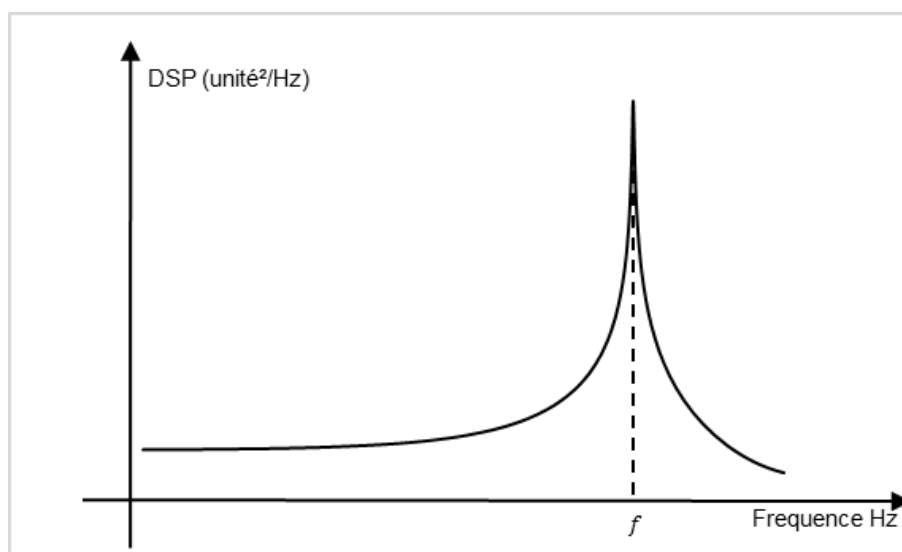


Figure 1-7 : DSP d'un processus à bande étroite

### IV.3.3 Facteur d'irrégularité

A partir des différentes grandeurs citées précédemment, des paramètres donnant des indications sur la largeur de bande du signal ont été développés. Le plus simple est appelé facteur d'irrégularité. Il représente le rapport entre le nombre de passages par zéro à pente positive et le nombre de maxima. Le facteur d'irrégularité est défini par l'équation (27)

$$\gamma = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad (27)$$

### IV.4 Distribution des maxima

La densité de probabilité des maxima du processus  $s(t)$  est une combinaison linéaire d'une distribution gaussienne et d'une distribution de Rayleigh. Elle est donnée par les équations (28)(29).

$$P_{maxima}(s) = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi}m_0} e^{-\frac{s^2}{2(1-\gamma^2)m_0}} + \frac{\gamma s}{m_0} e^{-\frac{s^2}{2m_0}} \Gamma\left(\frac{\gamma s}{\sqrt{2m_0(1-\gamma^2)}}\right) \quad (28)$$

Avec

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \quad (29)$$

La démonstration de cette équation peut être trouvée dans de nombreux ouvrages dont ceux de Cartwright et Longet-Higgins [9], de Lalanne [10] ou encore de Preunont [11].

## V. Réponse d'un système linéaire à une excitation aléatoire

### V.1 Valeur moyenne et DSP de la réponse

Nous étudions maintenant la réponse  $u(t)$  d'un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $g(t)$  soumis à une force aléatoire  $f(t)$  (Figure 1-8).

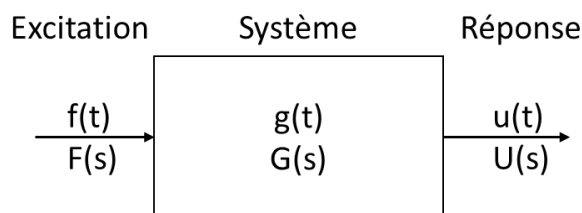


Figure 1-8 : Système linéaire avec une entrée et une sortie

Dans le domaine temporel, la réponse du système mécanique de la Figure 1-8 s'écrit sous la forme d'un produit de convolution (équation (30)) [12] :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (30)$$

Ayant la réponse du système mécanique en déplacement, il est possible d'obtenir l'état de contraintes dans le solide suivant l'équation (31)

$$s(t) = H B u(t) \quad (31)$$

Avec  $H$  est la matrice des coefficients élastiques et  $B$  la matrice gradient des fonctions d'interpolation<sup>1</sup>.

On peut calculer pour ce système la valeur moyenne (équation (32)) et la DSP (équation (33)) de la réponse en contrainte [12] [13].

$$E[s(t)] = H B K^{-1} E[f(t)] \quad (32)$$

$$\Phi_s(f) = H B G(f) \Phi_f(f) G^*(f) B^T H^T \quad (33)$$

Où  $G^*(f)$  est le conjugué transposé de la matrice de transfert du système.

Pour un état de contrainte plane, la matrice des DSP est définie par l'équation (34).

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \Phi_{s_{xx}s_{xx}} & \Phi_{s_{xx}s_{yy}} & \Phi_{s_{xx}s_{xy}} \\ \Phi_{s_{yy}s_{xx}} & \Phi_{s_{yy}s_{yy}} & \Phi_{s_{yy}s_{xy}} \\ \Phi_{s_{xy}s_{xx}} & \Phi_{s_{xy}s_{yy}} & \Phi_{s_{xy}s_{xy}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

## V.2 Applications

### V.2.1 Système à un degré de liberté

Soit le système d'oscillateur à un degré de liberté présenté par la Figure 1-9. Ce système est sollicité par une force extérieure aléatoire  $f(t)$ . L'équation différentielle du mouvement est définie par l'équation (35)

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f(t) \quad (35)$$

---

<sup>1</sup>  $\varepsilon = B u$  et  $s = H \varepsilon$

Où  $m$ ,  $k$  et  $c$  désignent respectivement la masse, la raideur et le coefficient d'amortissement visqueux de l'oscillateur.

La fonction de transfert entre le déplacement  $u$  et l'excitation  $f$  est définie par l'équation (36).

$$G(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j c \omega} \quad (36)$$

L'équation (37) donne la relation entre la DSP de la réponse  $\Phi_u$  en fonction de la DSP de l'excitation  $\Phi_f$ .

$$\Phi_u(\omega) = |G(j\omega)|^2 \Phi_f(\omega) \quad (37)$$

Supposons que la DSP de la force  $\Phi_f$  est un bruit blanc de largeur limitée tel que la fréquence est comprise entre  $1 < \omega < 50$  rad/s. L'équation (38) définit les caractéristiques du système.

$$\begin{cases} m = 3 \text{ Kg} \\ k = 2000 \text{ N.m}^{-1} \\ c = 6 \text{ N.s.m}^{-1} \\ \Phi_f = 1000 \text{ N}^2.(\text{rad.s}^{-1})^{-1} \end{cases} \quad (38)$$

La Figure 1-10 présente la DSP de la réponse  $\Phi_u$ . On remarque que la DSP de la réponse est de bande étroite et présente un pic au fréquence propre du système  $\omega_0$ .

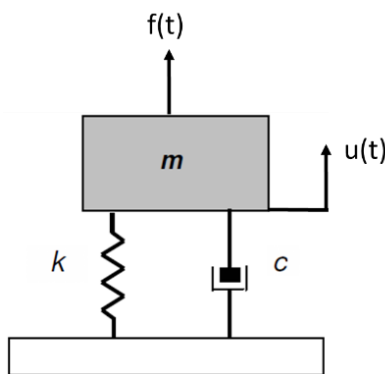


Figure 1-9 : Oscillateur à un degré de liberté

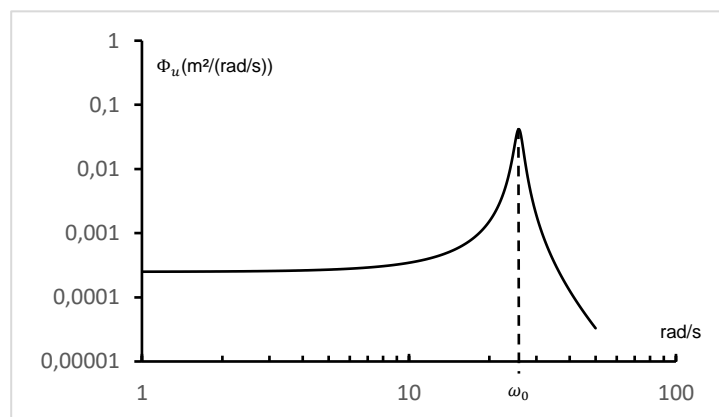


Figure 1-10 DSP du résultat en déplacement  $u$

### V.2.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Un système linéaire à plusieurs degrés de liberté ( $n$  d.d.l avec  $n$  fini) est gouverné par une équation de la forme comme définie dans l'équation (39):

$$M \ddot{\underline{u}} + C \dot{\underline{u}} + K \underline{u} = f \quad (39)$$

Où  $\underline{u}$  est un vecteur qui représente les déplacements structuraux. Les matrices  $M$ ,  $K$  et  $C$  résultent de la discrétisation de la structure par éléments finis.

Preumont [11] a proposé une méthodologie à suivre pour l'analyse spectrale de la réponse d'une pièce soumise à des vibrations aléatoire stationnaire. Cette méthodologie est présentée par l'organigramme de la Figure 1-11.

On considère l'exemple d'une poutre en aluminium 6061 T6 dont les propriétés mécaniques sont présentées dans le Tableau 1-1 . Cette poutre à une section carré de largeur 20 mm et de longueur 300 mm, encastrée d'une coté et libre de l'autre coté comme présenté dans la Figure 1-12. L'exemple est modélisé en deux dimension dans le plan (X,Y). On suppose que cette poutre est soumise à une excitation de base suivant la direction Y (point A). L'excitation est un bruit blanc à bande limité ( $\Phi_a = 1 \text{ g}^2/\text{Hz}$  ;  $f_c = 2000\text{Hz}$  ). Le Tableau 1-2 présente les deux premiers modes propres de la poutre qui sont compris dans la bande d'excitation.

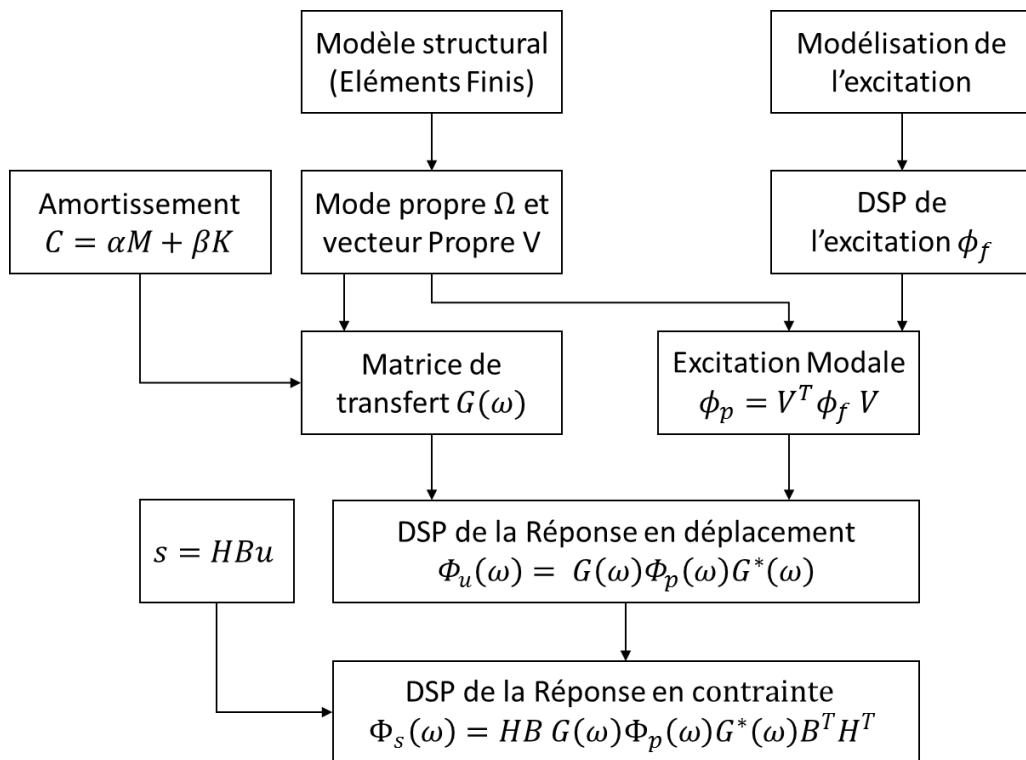


Figure 1-11 : Organigramme de l'analyse spectrale d'une structure soumise à des vibrations aléatoires



Tableau 1-1 : Propriétés mécaniques du matériau de la poutre

Module d'Young (MPa)	Coefficient de poisson	Densité (Kg/m <sup>3</sup> )
69000	0.3	2768

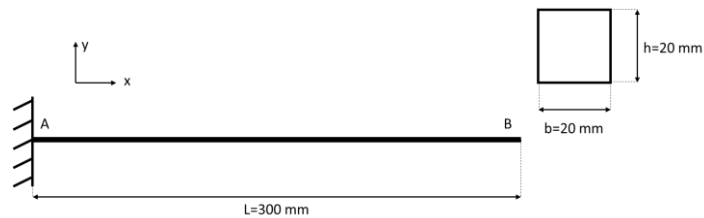


Figure 1-12 : Géométrie de la poutre

Tableau 1-2 : Déformées modales de la poutre

Fréquence propre	Déformée modale
178.28 Hz	
1120.2 Hz	

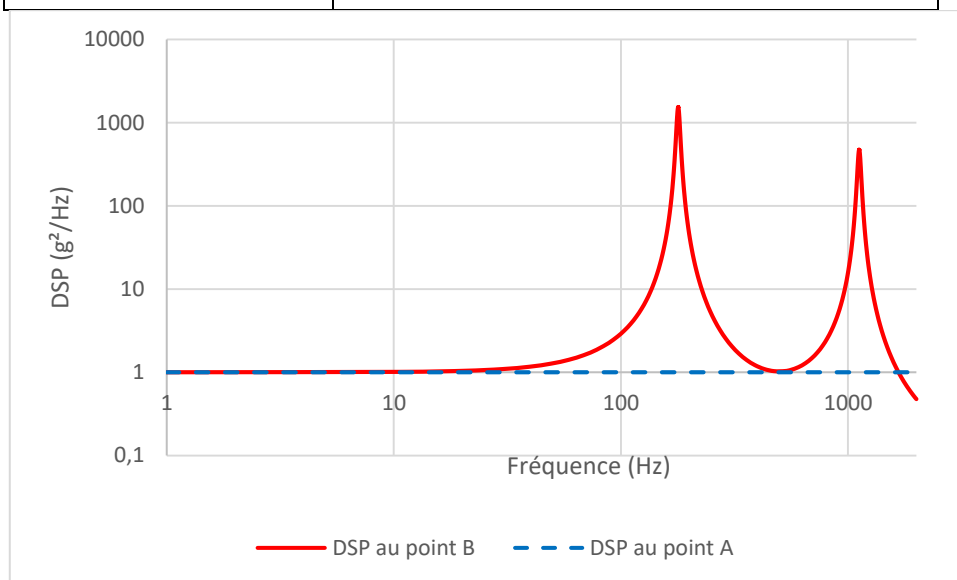


Figure 1-13 : Réponse en DSP d'accélération de la poutre

En utilisant un logiciel de calcul par éléments finis, on peut donc déterminer les DSP de la réponse dans chaque point de la poutre. A titre d'exemple, la Figure 1-13 présente la réponse en DSP d'accélération au point B (voir Figure 1-12) (Courbe rouge continue) comparée avec la

DSP de l'excitation en point A (courbe bleu discontinue). On remarque la présence des deux pics dans la courbe rouge. Ces pics présentent les fréquences de résonance de la poutre.

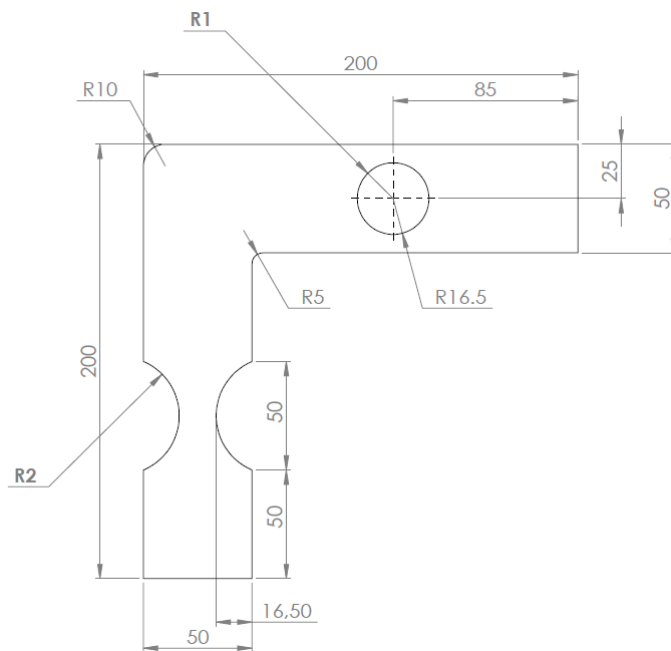


Figure 1-14 : Géométrie de la plaque

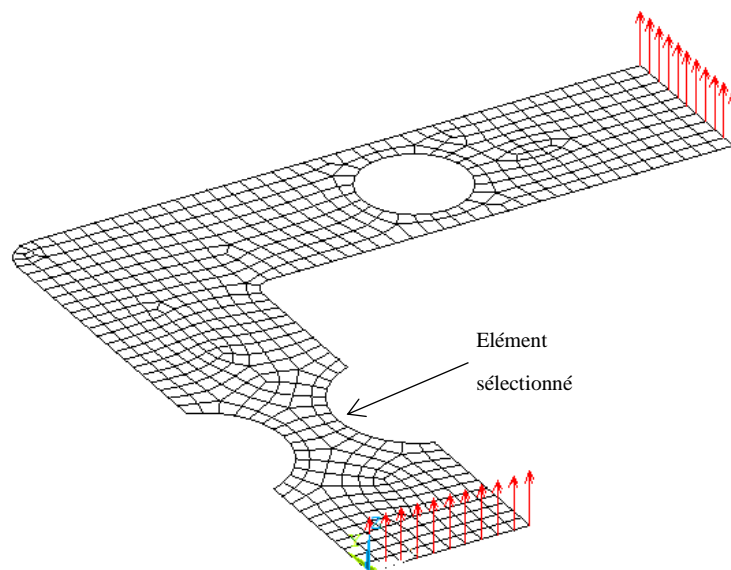


Figure 1-15 : Maillage de la plaque

Considérons maintenant l'exemple d'une éprouvette en acier, en forme de  $L$  dont sa géométrie est définie dans la Figure 1-14. L'éprouvette comporte une entaille arrondie ainsi qu'un trou et est encastrée à ses deux extrémités. L'épaisseur de la plaque est 0.8 mm. Chaque support est soumis à une accélération aléatoire dont sa DSP est un bruit blanc à bande limitée

qui s'exerce dans la direction perpendiculaire au plan de l'éprouvette ( $\Phi_a = 4 (m/s^2)^2/Hz$  ;  $f_c = 400Hz$ ). Les accélérations des deux supports sont totalement indépendantes.

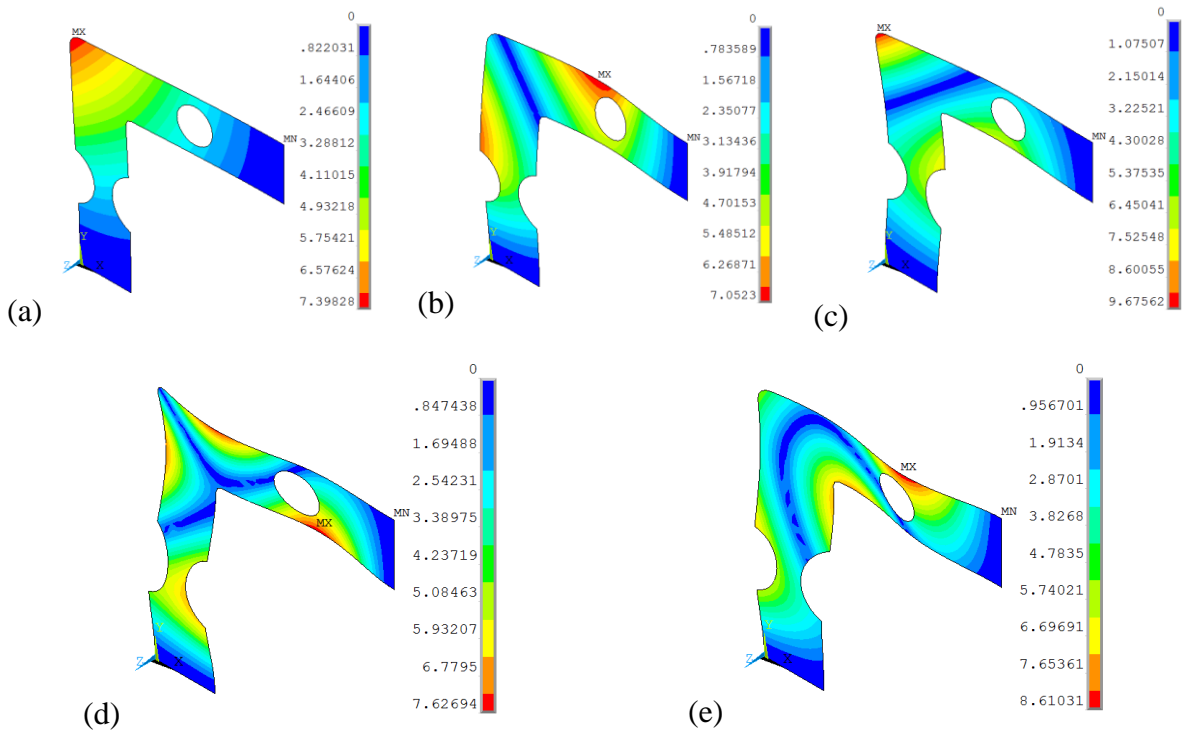


Figure 1-16 : Déformées modales de la plaque (a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4 (e) Mode 5

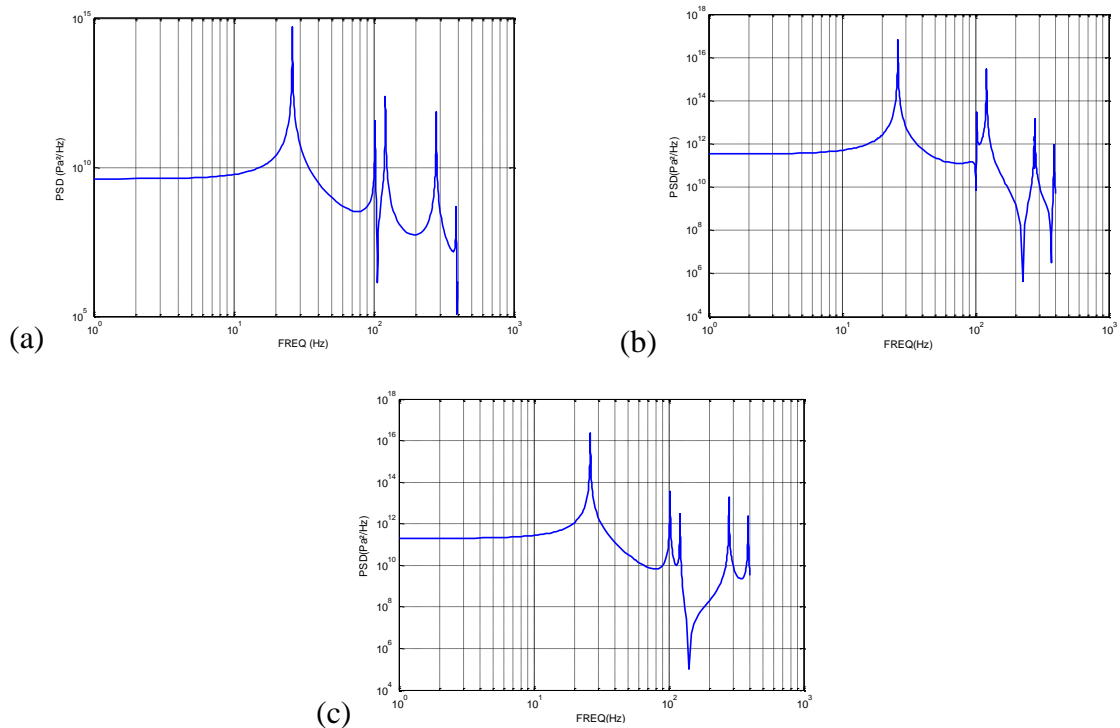


Figure 1-17 : DSP des contraintes (a)  $\Phi_{s_{xx}s_{xx}}$  (b)  $\Phi_{s_{yy}s_{yy}}$  (c)  $\Phi_{s_{xy}s_{xy}}$

La Figure 1-15 présente le modèle éléments finis et les conditions aux limites. Les flèches présentent la direction des vibrations aléatoires à chaque extrémité de la structure. La plaque a été discrétisée en 644 éléments coque. Chaque élément a quatre nœuds avec six degrés de liberté.

La Figure 1-16 présente les cinq premiers modes qui sont compris dans la bande de l'excitation. ( $f_1 = 26.13Hz$ ;  $f_2 = 101.88Hz$ ;  $f_3 = 120.68Hz$ ;  $f_4 = 274.42Hz$ ;  $f_5 = 385.11Hz$ ).

La matrice de la DSP de la contrainte (équation (34)) peut être calculée dans chaque élément en utilisant un code de calcul des vibrations aléatoires. Les DSP  $\Phi_{s_{xx}s_{xx}}$ ,  $\Phi_{s_{yy}s_{yy}}$  et  $\Phi_{s_{xy}s_{xy}}$  des contraintes sont présentés dans la Figure 1-17, dans un élément sélectionné (marqué dans la Figure 1-15).

## VI. Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre, à l'évaluation de la réponse en contrainte d'un système soumis à des excitations aléatoires. Pour cela, nous avons défini dans un premier temps les processus aléatoires ainsi que les hypothèses de propriétés stationnaires, ergodiques et gaussiennes. Puis nous avons défini quelques outils mathématiques tels que les fonctions de corrélation et les densités spectrales.

Nous avons introduit dans la section suivante, les différents paramètres statistiques pour les processus gaussien. L'ensemble de ces paramètres sont utilisés par les méthodes spectrales comme données d'entrée pour le calcul de l'endommagement par fatigue. Des applications numériques sont utilisées à la fin de ce chapitre afin de mieux comprendre les différentes notions citées dans ce chapitre.

# Chapitre 2

## Analyse de l'endommagement par fatigue des structures soumises à des vibrations aléatoires

I.	Introduction.....	33
II.	Endommagement par fatigue uniaxiale des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	34
II.1	Courbe de Wöhler.....	34
II.2	Influence de la contrainte moyenne.....	35
II.3	Loi de cumul de l'endommagement.....	36
II.4	Méthode de Rainflow pour le comptage des cycles.....	36
II.5	Approche spectrale pour le calcul de l'endommagement par fatigue uniaxial... .....	39
III.	Endommagement par fatigue multiaxiale des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	44
III.1	Formulation des critères de fatigue multiaxiale.....	44
III.2	Fatigue multiaxiale dans le domaine fréquentiel.....	44
III.3	Application.....	51
IV.	Conclusion.....	53

## I. Introduction

L'*endommagement par fatigue* peut être définie par la modification des propriétés des matériaux, tenant essentiellement à la formation de fissures et consécutive à l'application répétée de cycle de contrainte. Ces chargements peuvent conduire à la rupture des pièces construites par ces matériaux.

On peut distinguer deux types d'endommagement par fatigue : fatigue uniaxiale due à un chargement simple qui génère des états de contrainte uniaxiaux, et la fatigue multiaxiale due à des états de contrainte multiaxiaux.

L'inconvénient de l'approche temporelle en fatigue vibratoire est le temps de calcul qui représente un vrai problème surtout dans le cas des structures complexes. Afin de minimiser ce temp de calcul, il est possible de prédire la durée de vie d'une structure soumise à des vibrations aléatoires, dans le domaine fréquentiel. Plusieurs études ont été élaborées sur la fatigue vibratoire dans le domaine fréquentiel et le domaine temporel. Citons par exemple les travaux de Pitoiset [14] qui a étudié les méthodes spectrales pour l'analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux. Lambert [12] a travaillé aussi sur l'analyse de l'endommagement par fatigue et le dimensionnement des structures soumises à des vibrations aléatoires. Rognon [15] a présenté dans ces travaux le comportement en fatigue sous environnement vibratoire. Jannoun [16] a travaillé sur la fiabilité des systèmes mécatroniques embarqués dans un environnement vibratoire. Etc.

Ainsi, plusieurs études ont été élaborées sur la fiabilité et l'optimisation des structures sous des vibrations aléatoires avec prise en compte de l'endommagement par fatigue. [17] [18] [19] [20] [21] [22]

Dans ce chapitre, on présente dans un premier temps la démarche de calcul de l'endommagement par fatigue uniaxiale dans le domaine temporel ainsi les méthodes de calcul de fatigue dans le domaine spectral. On présente ensuite les approches utilisées dans le cas des structures soumises à des chargements aléatoires multiaxiaux. Le but est donc de déterminer la

meilleure méthodologie de calcul de l'endommagement par fatigue vibratoire multiaxiale dans le domaine fréquentiel.

## II. Endommagement par fatigue uniaxiale des structures soumises à des vibrations aléatoires

### II.1 Courbe de Wöhler

Les premiers travaux sur des problèmes d'endommagement par fatigue ont commencé vers 1850. Les premiers essais ont été effectués par Wöhler entre 1850 et 1869. Il a travaillé sur les essieux de chemin de fer. Pour déterminer les caractéristiques en fatigue d'un matériau, Wöhler a défini une courbe qui représente l'amplitude de la contrainte  $S_a$  en fonction du nombre de cycle  $N$ . En fait, chaque point de la courbe présente le nombre de cycles nécessaire pour la rupture d'une pièce soumise à un chargement cyclique dont l'amplitude est  $S_a$ . (Figure 2-1)

Cette courbe peut être décomposée en trois parties :

- A-B : zone oligocyclique : où la rupture intervient pour un nombre de cycle qui varie depuis un quart de cycle à  $10^4$ - $10^5$  cycles environ. Ici le niveau de l'amplitude de la contrainte est supérieur à la limite élastique du matériau.
- B-C : zone d'endurance limitée : ici la rupture se produit entre  $10^4$ - $10^7$  cycles. Il y a plusieurs relations liant  $S_a$  et  $N$  pour représenter le phénomène de cette zone.
- C-D : zone d'endurance illimitée : ( $N > 10^7$ ) ici la contrainte ne dépasse pas la limite de fatigue  $S_D$ . Cela est représenté par une asymptote horizontale, à  $S_D$ . En deçà de cette valeur limite, théoriquement, il n'y a pas d'endommagement par fatigue quel que soit le nombre de cycle.

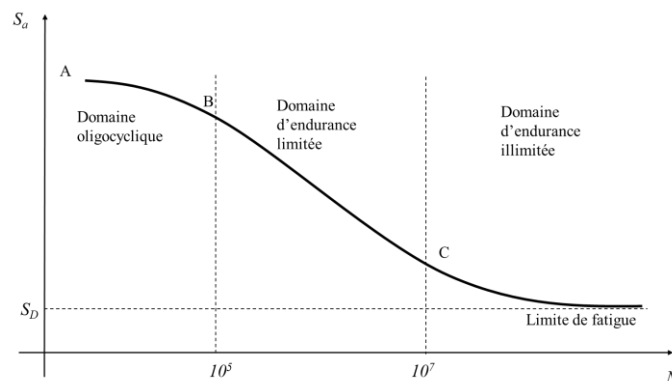


Figure 2-1 : Courbe de Wöhler

Dans la littérature, divers expressions analytiques ont été proposées afin de mettre en équation la courbe de Wöhler. Parmi lesquelles, celle proposée par Basquin en 1910 (équation (40)). Cette représentation est la plus couramment utilisée. Elle est une bonne approximation de la courbe Wöhler dans le domaine d'endurance limité.

$$N (S_a)^m = C \quad (40)$$

Où  $C$  et  $m$  sont des constantes liées au matériau.

## II.2 Influence de la contrainte moyenne

Plusieurs études ont mis en évidence l'effet de la contrainte moyenne sur la durée de vie d'une structure [23] [24] [25]. Différents diagrammes permettent de représenter ce phénomène d'influence de la contrainte moyenne, parmi lesquels, on cite le diagramme de Haigh (Figure 2-2). Ce diagramme représente les courbes de rupture à un nombre de cycle donné. En effet, ce diagramme définit, pour une durée de vie fixée  $N$ , la contrainte admissible  $S_a$  en fonction de la contrainte moyenne  $S_m$ .

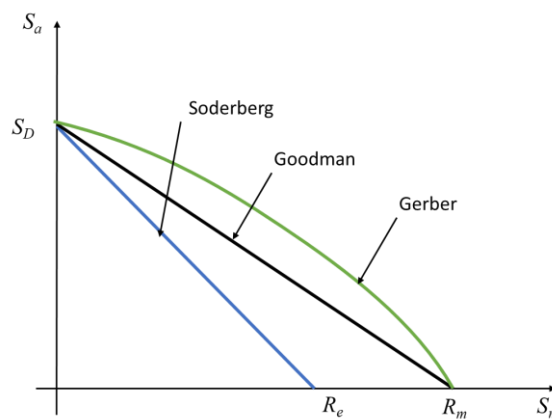


Figure 2-2 : Diagramme de Haigh

Les différentes courbes de ce diagramme sont définies par :

- Soderberg (équation (41))

$$\frac{S_a}{S_D} + \frac{S_m}{R_e} = 1 \quad (41)$$

Avec  $R_e$  est la limite élastique.



- Goodman (équation (42))

$$\frac{S_a}{S_D} + \frac{S_m}{R_m} = 1 \quad (42)$$

Avec  $R_m$  est la résistance à la traction

- Gerber (équation (43))

$$\frac{S_a}{S_D} + \left(\frac{S_m}{R_e}\right)^2 = 1 \quad (43)$$

### II.3 Loi de cumul de l'endommagement

Lorsqu'il s'agit d'un chargement à une amplitude et une moyenne différents, il est nécessaire d'évaluer l'endommagement total produit par l'ensemble de ces chargements. Palmgren [26] a proposé la règle de cumul linéaire de l'endommagement (1921). Miner ensuite a proposé la loi de calcul de l'endommagement cumulé basé sur le cumul linéaire de Palmgren(1945) [26]. La loi de Palmgren-Miner est définie par l'équation (44)

$$D = \sum_{i=1}^p D_i = \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{N_i} \quad (44)$$

Avec  $D_i$  est l'endommagement partiel,  $n_i$  est le nombre de cycle du bloc  $i$  et  $N_i$  est le nombre de cycle à la défaillance qui correspond au chargement  $S_i$  dans la courbe de Wöhler. La rupture s'effectue lorsque  $D=1$ .

### II.4 Méthode de Rainflow pour le comptage des cycles

En réalité, les chargements sont plus complexes qu'un chargement à amplitude constant ou par bloc. Les méthodes de comptage des cycles sont conçues principalement pour l'étude de l'endommagement par fatigue vibratoire. Ces méthodes permettent de décomposer le chargement en cycles élémentaires dont la moyenne et l'amplitude sont connues. Parmi les méthodes les plus utilisées, la méthode de comptage de Rainflow.

Les règles de la méthode de Rainflow sont :

- Le flux est lancé à chaque pic et creux.

- L'écoulement est arrêté par un creux qui est plus négative que celui où l'écoulement à commencer.
- L'écoulement est arrêté par un pic qui est plus positif que celui où l'écoulement à commencer.
- L'écoulement est arrêté lorsqu'il atteint un point qui est déjà humide

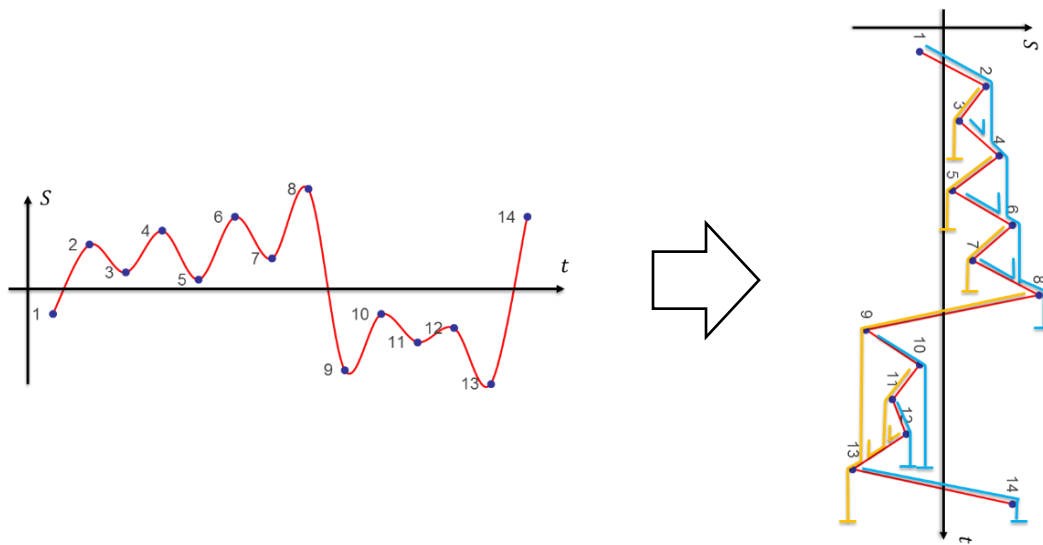


Figure 2-3 : Processus de comptage de Rainflow

Tableau 2-1: Détail de comptage de Rainflow

<b>Demi-cycles des creux :</b>	1-8, 3-3a, 5-5a, 7-7a, 9-10, 11-12 et 13-14
<b>Demi-cycles des crêtes</b>	2-3, 4-5, 6-7, 10-12b, 12-12a et 8-(9)-13
<b>Comptage total :</b>	Cycles complets : 2-3-3a, 4-5-5a, 6-7-7a, 9-10-12b(9) et 11-12-12a(11) Demi-cycles : 1-8, 8-13 et 13-14

Prenons par exemple le chargement présenté dans la Figure 2-3. En appliquant les règles citées ci-dessus, on peut donc compter les cycles. Le Tableau 2-1 présente les détails de comptage des cycles.

Après le comptage des cycles, chacun est défini par une amplitude et une valeur moyenne. En utilisant la loi de Palmgren-Miner (équation (44)) on peut donc déterminer l'endommagement cumulé par ce chargement aléatoire.

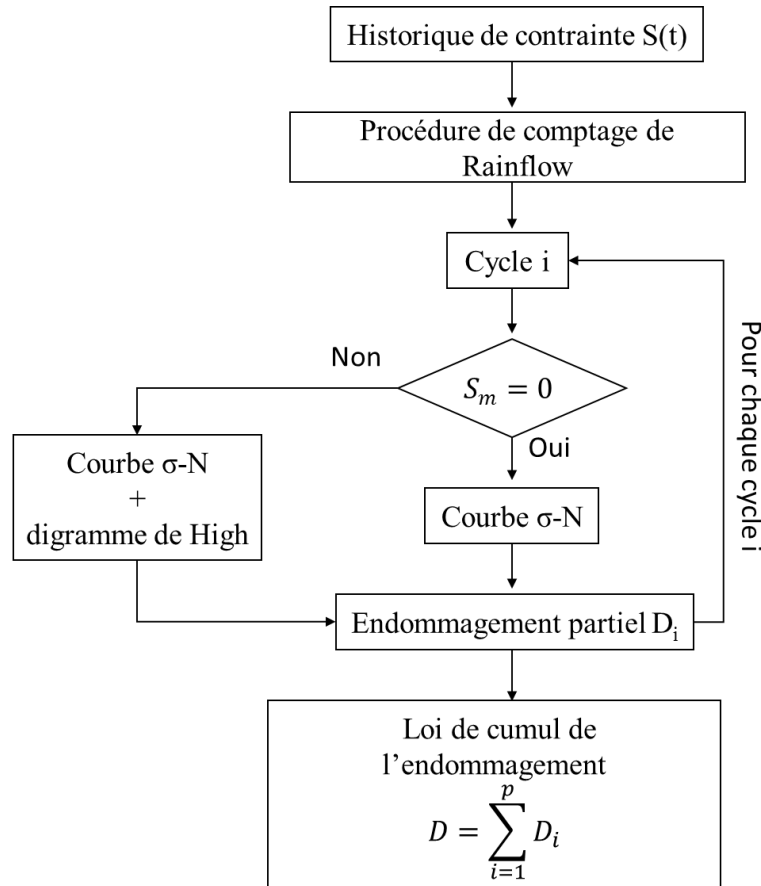


Figure 2-4: Organigramme de l'approche temporelle pour l'étude en fatigue uniaxiale

En conclusion, l'organigramme de la Figure 2-4 présente la méthodologie à suivre pour la détermination de l'endommagement par fatigue dans le domaine temporel. Pour un historique de contrainte  $S(t)$  donné, la première étape est de faire le comptage de Rainflow. Ensuite, on calcule la valeur moyenne et l'amplitude de chaque cycle. Si la valeur moyenne du cycle  $i$  est nulle, on calcule donc l'endommagement partiel  $D_i$  en utilisant la courbe de Wöhler directement. Sinon on doit passer par le digramme de Haigh en plus, afin de prendre en considération la valeur moyenne. Ces étapes sont répétées pour chaque cycle  $i$ . Finalement, en appliquant la loi de Palmgren-Miner, on peut donc déterminer l'endommagement par fatigue causé par ce chargement aléatoire.

## II.5 Approche spectrale pour le calcul de l'endommagement par fatigue uniaxial

Nous avons vu dans les paragraphes précédents la méthodologie de calcul de l'endommagement par fatigue dans le domaine temporel pour une sollicitation quelconque. Cette étude est généralement précédée par un calcul par éléments finis, afin d'obtenir l'historique des contraintes à chaque point de la structure soumise à une excitation donnée. Le grand problème de l'étude temporel est que le temps de calcul est très important pour le calcul de la réponse de la structure à une excitation donnée. En plus, la réponse d'une structure soumise à des vibrations aléatoires est définie par un processus aléatoire. Pour cela, des simulations de Monte-Carlo sont nécessaires afin de générer les propriétés statistiques de la réponse en contrainte aléatoire et déterminer par la suite la moyenne de l'endommagement causé par ce processus stochastique.

La solution est donc de réaliser le calcul de l'endommagement par fatigue dans le domaine fréquentiel en utilisant la Densité Spectrale de Puissance (DSP) des excitations. Dans la littérature, plusieurs études ont montré l'efficacité des approches spectrales par rapport aux approches temporelles de point de vue simplicité et économique [10] [14] [15] [16].

Dans cette partie, les différentes méthodes spectrales pour le calcul de la moyenne de l'endommagement par fatigue uniaxiale sont présentées. Ensuite, une application sur une poutre simple en flexion est proposée afin de comparer ces méthodes.

### II.5.1 Méthodes spectrales de calcul de l'endommagement

En général, une telle méthode spectrale de calcul de la moyenne de l'endommagement par fatigue peut être définie comme présenté dans l'équation (45) [15].

$$E[D] = C^{-1} N_p \int_0^{+\infty} S^m P_a(S) dS \quad (45)$$

Où  $C$  et  $m$  sont les constantes de Basquin,  $N_p$  est le nombre moyenne des maximas et  $P_a(S)$  est la densité de probabilité des amplitudes de contraintes. Il y a principalement deux théories sur lesquelles sont basées les méthodes spectrales : la théorie des vibrations aléatoires

et la théorie basée sur l'algorithme de comptage Rainflow. Rognon [15], dans ces travaux de thèse a fait un benchmark numérique sur ces différentes méthode spectrale.

**i- Méthode de Narrow Band**

Cette méthode est utilisable que dans le cas d'un processus aléatoire en bande étroite (facteur d'irrégularité tend vers un). La moyenne de l'endommagement par la méthode de Narrow-Band est définie par l'équation (46)

$$E[D_{NB}] = C^{-1} 2^{\frac{m}{2}} m_0^{\frac{m-1}{2}} m_2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \quad (46)$$

Avec  $C$  et  $m$  sont les constantes de Basquin,  $m_i$  sont les moments spectraux et  $\Gamma(x)$  est la fonction gamma. (Équation (47))

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} t^{(2x-1)} e^{-t} dt \quad (47)$$

Selon Rychlik [27], la méthode de Narrow-Band est conservative par rapport aux simulations de Monte-Carlo.

**ii- Méthode de Wirshing & Light**

Wirching et Light ont développé le facteur correctif de l'équation (48) en simulant des processus ayant une variété de formes spectrales.

$$\lambda_{WL} = (0,926 - 0,033m) + [1 - (0,926 - 0,033m)] \left(1 - \sqrt{1 - \gamma^2}\right)^{(1,587m - 2,323)} \quad (48)$$

Où  $m$  est la constante de Basquin et  $\gamma$  est le facteur d'irrégularité. La moyenne de de l'endommagement est donc estimée en multipliant celle trouvée par la méthode de Narrow Band par le facteur correctif de l'équation (48). L'équation (49) présente la méthode de Wirshing & Light.

$$E[D_{WL}] = \lambda_{WL} E[D_{NB}] \quad (49)$$

**iii- Méthode de Ortiz & Chen**

La méthode d'Ortiz & Chen consiste à multiplier la moyenne de l'endommagement par fatigue trouvée par la méthode de Narrow- Band par le coefficient dont la formulation est définie par l'équation (50)

$$\lambda_{OC} = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{m_2 m_2}{m_0 m_{2+\frac{2}{m}}} \right]^{\frac{m}{2}} \quad (50)$$

Equation (51) présente la méthode d'Ortiz & Chen.

$$E[D_{OC}] = \lambda_{OC} E[D_{NB}] \quad (51)$$

#### iv- Méthode de Dirlik

Equation (52) présente la densité de probabilité des cycles selon Dirlik. L'approximation de la distribution des amplitudes se fait par la combinaison d'une densité exponentielle et de deux densités de probabilité de Rayleigh.

$$P_a^{DK}(S) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \left[ \frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right] \quad (52)$$

$$\text{Avec } Z = \frac{\sigma}{\sqrt{m_0}} \quad ; \quad x_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad ; \quad R = \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 - D_1^2}$$

$$D_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2} \quad ; \quad D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 - D_1^2}{1 - R} \quad ; \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2 \quad ; \quad Q = \frac{1,25(\gamma - D_3 - D_2 R)}{D_1}$$

La méthode de Dirlik est donc définie par l'équation (53)

$$E[D_{DK}] = C^{-1} N_p \int_0^{+\infty} S^m P_a^{DK}(S) dS \quad (53)$$

#### v- Méthode de Zhao & Baker

Zhao et Baker ont combiné des hypothèses théoriques et des résultats de simulation pour donner une expression de la distribution du cycle en tant que combinaison linéaire des densités de probabilité de Weibull et de Rayleigh. L'équation (54) présente l'approximation de la probabilité de Zhao et Baker. L'équation (55) présente la moyenne de l'endommagement par la méthode de Zhao et Baker

$$P_a^{ZB}(S) = w\alpha\beta S^{\beta-1}e^{-\alpha S^\beta} + (1-w)Se^{-\frac{S^2}{2}} \quad (54)$$

$$\text{Avec } w = \frac{1-\gamma}{1-\Gamma(1+\frac{1}{\beta})\alpha^{-\frac{1}{\beta}}} \quad ; \quad \beta = \begin{cases} 1,1 & \text{si } \gamma \leq 0,9 \\ 1,1 + 9(\gamma - 0,9) & \text{si } \gamma > 0,9 \end{cases} \quad ; \quad \alpha = 8 - 7\gamma$$

$$E[D_{ZB}] = C^{-1}N_p \int_0^{+\infty} S^m P_a^{ZB}(S) dS \quad (55)$$

#### vi- Méthode Single Moment

Cette méthode a été proposée par Larsen et Lutes. Selon Pitoiset [14], cette formulation donne des résultats les plus proches des simulations de Monte-Carlo. L'équation (56) présente la formulation de la méthode Single Moment

$$E[D_{SM}] = C^{-1} 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \quad (56)$$

#### vii- Méthode de Tovo & Benasciutti

L'équation (57) présente la formulation de la méthode de Tovo & Benasciutti. Notons que cette méthode considère que la moyenne de l'endommagement est encadrée dans un intervalle dont la borne supérieure est l'endommagement calculé à partir de la formulation Narrow-band et la borne inférieure l'endommagement calculé à partir de la méthode de comptage des étendues moyennes (range mean conting method).

$$E[D_{BT}] = [b + (1-b)\gamma^{m-1}]\gamma E[D_{NB}] \quad (57)$$

$$\text{Avec } b = \frac{(\gamma_1 - \gamma)[1,112(1+\gamma_1\gamma - (\gamma_1 + \gamma))e^{2,11\gamma} + (\gamma_1 - \gamma)]}{\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{m_1}{\sqrt{m_0 m_2}}$$

### II.5.2 Application

Afin de comparer ces méthodes, une application sur l'estimation de la moyenne de l'endommagement est présentée dans cette partie.

Prenons l'exemple de la poutre étudiée au chapitre 1 (Figure 1-12). La poutre est soumise à une flexion simple. La Figure 2-5 présente la DSP de la contrainte axiale du point A de la

poutre. A partir de cette DSP, on peut calculer les différentes propriétés statistiques du processus. Ces propriétés sont nécessaires pour le calcul de l'endommagement par les différentes méthodes spectrales. Notons  $C=6.73e16$  et  $m=9.25$  les constantes de Basquin de la courbe de Wöhler. Ces valeurs présentent les propriétés en fatigue du matériau. Le Tableau 2-2 présente la moyenne de l'endommagement calculé par les différentes méthodes spectrales. La méthode de Narrow Band n'est pas applicable car la DSP de contrainte présente une bande large ( $\gamma = 0.77$ ). Plusieurs études ont montré que la méthode Single Moment est la plus satisfaisante en la comparant par les simulations de Rainflow [14] [15] [16] .En fait, cette méthode n'utilise qu'un seul moment spectral, et donc elle est plus efficace du point de vue temps de calcul.

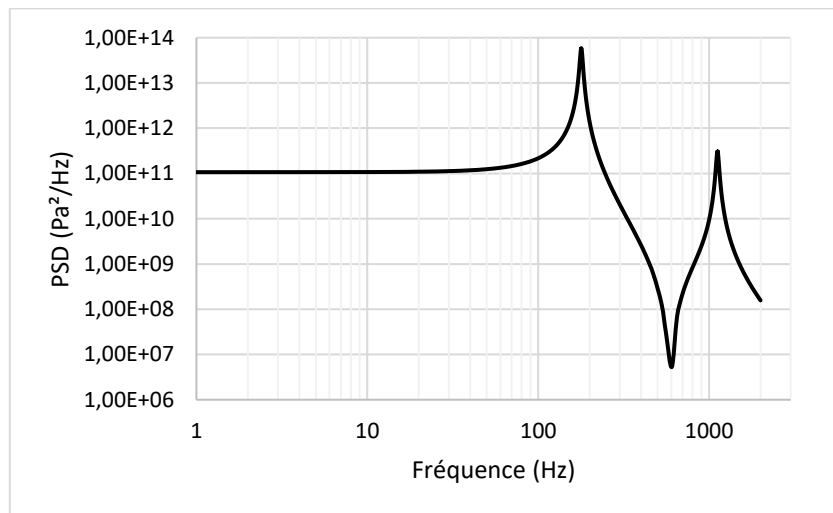


Figure 2-5 : Réponse en DSP de contrainte au point A de la poutre

Tableau 2-2 : Moyenne de l'endommagement calculé par les différentes méthodes spectrales

Méthode spectrale	Moyenne de l'endommagement
Wirshing & Light	0.471
Ortiz & Chen	0.837
Dirlik	0.475
Zhao & Baker	0.481
Single Moment	0.535
Tovo & Benasciutti	0.49



### **III. Endommagement par fatigue multiaxiale des structures soumises à des vibrations aléatoires**

Dans la réalité, les structures sont généralement soumises à des chargements qui induisent des états de contraintes multiaxiaux. Pour cela, de nombreuses approches ont été développées afin de prédire la durée de vie en fatigue multiaxiale [25].

#### **III.1 Formulation des critères de fatigue multiaxiale**

Un tel critère peut être mathématiquement représenté par l'équation (58)

$$g(S_{i,j}(t), T) \leq 1 \quad (58)$$

Avec  $S_{i,j}(t)$  est le tenseur des contraintes en un point de la structure à un instant  $t \in [0, T]$ . Lorsque l'inégalité de l'équation (58) n'est pas satisfaite dans un point de la structure, une fissure de fatigue peut apparaître. On peut distinguer les méthodes de fatigue multiaxiale en trois approches différentes. [25].

- Approche empirique : où la formulation des critères est issue de résultats expérimentaux.
- Approche globale : où les invariants du tenseur de contrainte ou de son dérivateur interviennent dans la formulation.
- Approche critique : où la formulation est basée sur la recherche d'un plan critique.

Weber [25] a étudié dans sa thèse ces différentes méthodes. Cette étude a permis de comparer ces méthodes à l'aide des données constituées de 233 essais de fatigue multiaxiaux.

#### **III.2 Fatigue multiaxiale dans le domaine fréquentiel**

Afin de minimiser le temps de calcul, l'analyse de l'endommagement par fatigue est faite dans le domaine des fréquences. Ceci peut être vu dans de nombreux travaux tels que Pitoiset [28] [29] qui a défini une formulation du critère de Mataka et du critère de Crossland dans le domaine fréquentiel.

Considérons une structure soumise à des chargements gaussiens stationnaires ergodiques. Selon Pitoiset [14], la fissure ne se produit pas avant un certain nombre de répétitions,  $N_e$ , du chargement aléatoire périodique de durée  $T$ , si la moyenne de l'endommagement ne dépasse pas la limite de fatigue (équation (59)).

$$E[g(S_{i,j}(t), T)] \leq 1 \quad (59)$$

Alors, pour calculer la moyenne des dommages dans le domaine fréquentiel, la densité spectrale de puissance des contraintes doit être déterminée à chaque point de la structure.

Selon Weber et al. [30] et Wu et al. [31] le critère de Sines semble donner la meilleure évaluation des dommages soumis à des contraintes aléatoires. Dans cette partie, la stratégie numérique pour le calcul de l'endommagement par fatigue multiaxial est présentée. Cette approche utilise la formulation fréquentielle du critère de Sines développée dans notre laboratoire.

### III.2.1 Formulation et développement

L'objectif principal d'un critère de fatigue multiaxiale est de déterminer le point critique dans une structure. On peut assumer, par de nombreux auteurs, que l'initiation de la fissure est contrôlée par le deuxième invariant du déviateur de tenseur de contrainte. [32] [33] Ceci peut être vu dans le critère de Crossland (équation (60)) et le critère de Sines (équation (61)) où  $J_{2,a}$  est le deuxième invariant du déviateur de tenseur de contrainte.

$$D_{Crossland} = \frac{\sqrt{J_{2,a}} + A \max_{0 \leq t \leq T} \{p(t)\}}{B} \leq 1 \quad (60)$$

$$D_{Sines} = \frac{\sqrt{J_{2,a}} + A E[p(t)]}{B} \leq 1 \quad (61)$$

Où  $p(t)$  est la pression hydrostatique déterminée à partir des contraintes normales  $S_{xx}, S_{yy}$  et  $S_{zz}$  du tenseur de contrainte  $S_{ij}$  (équation (62)).  $A$  et  $B$  sont des constantes liées au matériau. Pour le critère de Sines, elles sont déterminées par la limite d'endurance en traction alternée  $f_1$ , la limite d'endurance en torsion alternée  $t_1$  et la résistance à la reprise  $R_m$  (équations (63)-(64))

$$p(t) = \frac{1}{3} \text{Trace}\{S_{ij}\} \frac{1}{3} (S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}) \quad (62)$$

$$A = \frac{3t_{-1}(R_m + f_{-1})}{f_{-1}R_m} - \sqrt{6} \quad (63)$$

$$B = t_{-1} \quad (64)$$

Notons que le critère de Crossland nécessite le calcul du maximum de la pression hydrostatique alors que le critère de Sines utilise sa moyenne. Cela réduit le temps de calcul de l'endommagement s'il est calculé par le critère de Sines et ça donne presque le même résultat que le critère de Crossland [12] [25].

Considérons maintenant une structure soumise à des chargements gaussiens stationnaires ergodiques. En appliquant l'équation (59), le critère de Sines est donc défini par l'équation (65).

$$E[D_{Sines}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}] + A E[p(t)]}{B} \leq 1 \quad (65)$$

Le problème, maintenant, est de déterminer  $E[\sqrt{J_{2,a}}]$ . En fait, pour un chargement proportionnel,  $\sqrt{J_{2,a}}$  est définie par l'équation (66).

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[ (S_{xx,a} - S_{yy,a})^2 + (S_{yy,a} - S_{zz,a})^2 + (S_{zz,a} - S_{xx,a})^2 + 6(S_{xy,a} - S_{yz,a} - S_{xz,a})^2 \right]} \quad (66)$$

Dans cette expression  $S_{ij,a}$  est définie par l'équation (67).

$$S_{ij,a} = \frac{1}{2} \left( \max_{0 \leq t \leq T} [S_{ij}(t)] - \min_{0 \leq t \leq T} [S_{ij}(t)] \right); i, j = x, y, z \quad (67)$$

Notons que  $\sqrt{J_2(t)}$  présente la racine carrée du second invariant scalaire du déviateur de contrainte. Pour faciliter le calcul, il est important de la relier à une norme euclidienne de cinq dimensions [20] (équations (68)-(71)). Avec  $\|\blacksquare\|$  présente la norme euclidienne.

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{D_{1,a}^2 + D_{2,a}^2 + D_{3,a}^2 + D_{4,a}^2 + D_{5,a}^2} = \|d_a\| \quad (68)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{2}{3} S_{xx} - \frac{1}{3} S_{yy} - \frac{1}{3} S_{zz} \right) \\ D_2 = \frac{1}{2} (S_{yy} - S_{zz}) \\ D_3 = S_{xy} \\ D_4 = S_{yz} \\ D_5 = S_{xz} \end{array} \right. \quad (69)$$

i.e.

$$d(t) = P \cdot s(t) \quad (70)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d(t) = [D_1, D_2, D_3, D_4, D_5]^T \\ s(t) = [S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}]^T \\ P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (71)$$

Pour un chargement non proportionnel, l'équation (67) n'est pas valable. Pour cela, plusieurs approches ont été proposées afin de déterminer  $\sqrt{J_{2,a}}$  telles que Bin li [34] ,Balthazar J.C [35] et Bernasconi A. [36]. Ces définitions sont confrontées aux résultats dans [37] [38] [39] [40] [41].

Bin li et al [34] ont considéré l'ellipse la plus petite de semi-axes  $R_1$  and  $R_2$  circonscrit au trajet de  $\sqrt{J_2(t)}$  afin de prendre en compte la non proportionnalité du chargement. Donc,  $\sqrt{J_{2,a}}$  est approché par  $\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$ .

Avec le même principe, et pour déterminer l'équivalent de  $\sqrt{J_{2,a}}$ , on considère que les semi-axes  $R_1, R_2, R_3, R_4$  et  $R_5$  de l'ellipsoïde de 5 dimensions circonscrit au trajet de  $\sqrt{J_2(t)}$  et orienté dans ces directions principales [21].  $\sqrt{J_{2,a}}$  est définie donc comme l'équation (72)

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \quad (72)$$

Alors, pour un chargement aléatoire, l'estimation de  $\sqrt{J_{2,a}}$  consiste à l'estimation de ses semi-axes  $Ri$ . Ceci est réalisé par l'analyse des principales composantes de la matrice de covariance  $\Sigma_d$  de  $d$ . Elle est définie par l'équation (73)

$$\Sigma_d = E \left[ (d(t) - \bar{d}) \cdot (d(t) - \bar{d})^T \right] \quad (73)$$

$\Sigma_d$  peut être aussi déterminé à partir de la matrice de covariance de contrainte  $\Sigma_s$  (équation (74))

$$\Sigma_d = P \Sigma_s P^T \quad (74)$$

Les covariances de chaque composant sont présentées par les termes diagonaux de la matrice. Les termes hors diagonaux sont les covariances entre chaque composant. Cette matrice est symétrique. Il existe donc une base orthonormée telle que : (équation (75))

$$\Sigma_{\tilde{d}} = A_d \Sigma_d A_d^T = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2) \quad (75)$$

Avec  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4 \geq \sigma_5$

Ainsi, on peut déterminer un vecteur  $\tilde{d}$  relié linéairement avec  $d$  par une transformation orthogonale telle que (équation (76)-(77))

$$\tilde{d}(t) = A_d d(t) \quad (76)$$

Avec

$$\tilde{d}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1(t) \\ \tilde{D}_2(t) \\ \tilde{D}_3(t) \\ \tilde{D}_4(t) \\ \tilde{D}_5(t) \end{bmatrix} \quad (77)$$

Puisque les composantes  $\tilde{D}_i(t)$  sont des processus stationnaires gaussiens, alors on peut estimer la valeur maximale de  $\tilde{D}_i(t) - \bar{\tilde{D}}_i$  par l'application de la théorie de facteur des pics (équation (78)). La théorie du facteur des pics pour un processus aléatoire gaussien stationnaire de moyenne nulle est présentée par l'équation (79) [20] [42].

$$E[\max(\tilde{D}_i(t) - \bar{D}_i)] \approx \sigma_i \left( \sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))}} \right), i = 1 \dots 5 \quad (78)$$

$$E[\max(s)] \approx \sigma_s \left( \sqrt{2 \ln N_p(s(t))} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \ln N_p(s(t))}} \right) \quad (79)$$

Avec  $N_p$  est le nombre moyen des maximas.

Compte tenu des concepts introduits précédemment, les semi-axes du chargement aléatoire peut être caractérisés par l'équation (80)

$$E[R_i] = \frac{1}{2} [E[\max(\tilde{D}_i(t) - \bar{D}_i)] - E[\min(\tilde{D}_i(t) - \bar{D}_i)]] \quad (80)$$

Comme ils ne sont pas corrélés et sont supposés être gaussiens, nous pouvons considérer que:

$$E[\max(\tilde{D}_i(t) - \bar{D}_i)] = -E[\min(\tilde{D}_i(t) - \bar{D}_i)] = E[R_i], i = 1 \dots 5 \quad (81)$$

Alors on a :

$$E[R_i] \approx \sigma_i \left( \sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \ln N_p(\tilde{D}_i(t))}} \right) \quad (82)$$

Ainsi, pour des chargements aléatoires, la moyenne de  $\sqrt{J_{2,a}}$  est définie par l'équation (83)

$$E[\sqrt{J_{2,a}}] = \sqrt{E[R_1]^2 + E[R_2]^2 + E[R_3]^2 + E[R_4]^2 + E[R_5]^2} \quad (83)$$

On peut calculer donc l'endommagement par fatigue en appliquant l'équation (65).

### III.2.2 Stratégie de l'analyse de l'endommagement par fatigue

L'implémentation de la stratégie d'analyse des dommages de fatigue est illustrée à la Figure 2-6. L'algorithme est constitué de deux sous-problèmes : le premier sous-problème consiste à calculer les densités spectrales de puissance des contraintes. D'abord on doit construire le modèle en définissant la géométrie, les propriétés des matériaux et les charges. Ensuite, une

analyse modale est nécessaire pour déterminer les modes normaux du modèle. Nous concluons ce premier sous-problème par l'analyse spectrale pour calculer les DSP des contraintes à chaque élément de la structure.

Pour le deuxième sous-problème, et afin d'évaluer les dommages de fatigue, les DSP calculées sont ensuite introduites dans le logiciel MATLAB pour évaluer la matrice de covariance des contraintes dans un premier temps. Cela nous permet de calculer la matrice de covariance  $\Sigma_d$  à partir des équations ((73)-(74)). La matrice de covariance  $\Sigma_{\tilde{d}}$  et la DSP  $\Phi_{\tilde{d}}$  sont obtenues par la transformation orthogonale de la matrice  $\Sigma_d$ . En utilisant l'équation (26) le nombre de maxima  $N_p$  de chaque paramètre du vecteur  $d$  est calculé. Ensuite, la moyenne de l'amplitude de contrainte de cisaillement  $E[\sqrt{J_{2,a}}]$  est déterminée, en utilisant les équations (82)-(83). Enfin, l'endommagement par fatigue est déterminé à chaque point de la structure en utilisant le critère de Sines [43].

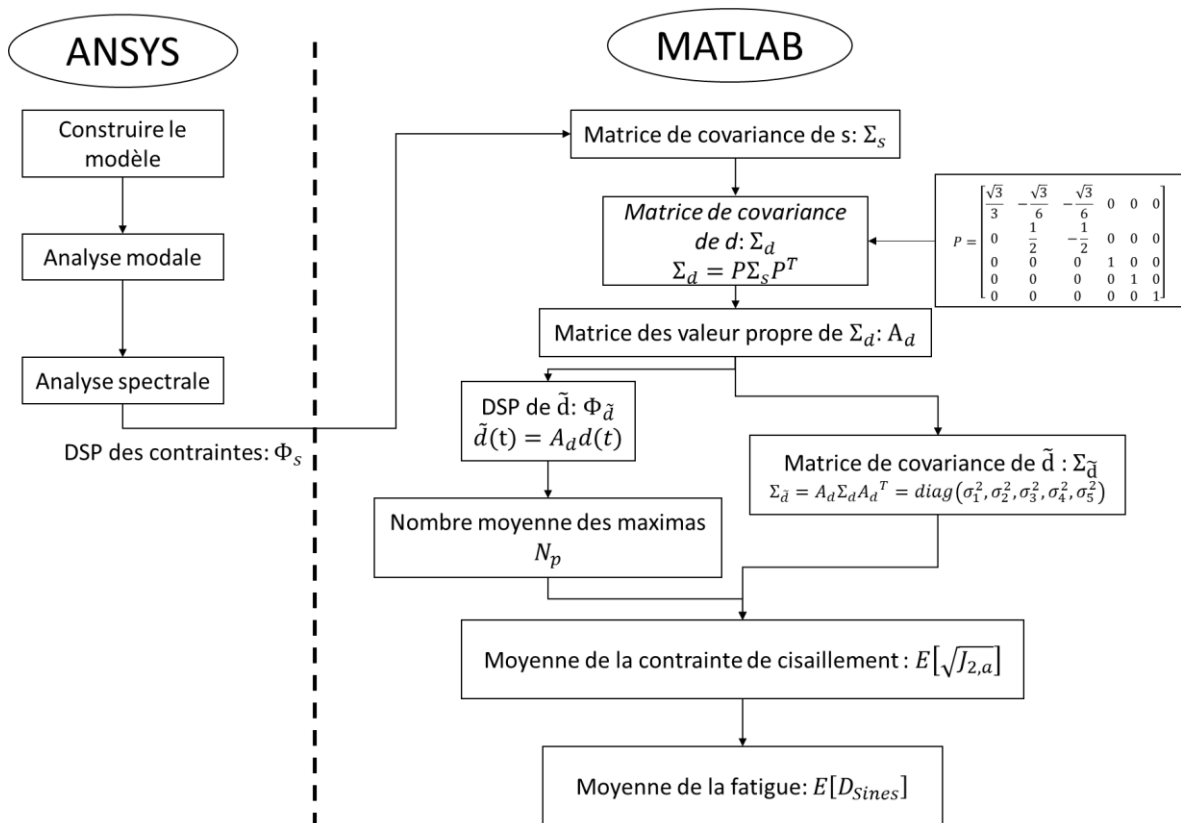


Figure 2-6 : Implémentation de la stratégie de l'analyse de l'endommagement par fatigue

### III.3 Application

Considérons l'exemple de la plaque de la Figure 1-14. Cette plaque est soumise à des vibrations aléatoires induisant des états de contrainte multiaxiale. Cet exemple est le même que celui étudié par Pitoiset [29] où les critères Matake et Crossland sont appliqués.

La Figure 2-7 montre la distribution de l'endommagement calculé par le critère de Sines. Ce résultat est presque similaire à celui fondé par les critères de Crossland et Matake [29]. La petite différence entre les résultats est causée par la précision de maillage. Les différentes procédures ont été implémentées dans MATLAB utilisé comme un post-processeur du logiciel d'éléments finis ANSYS.

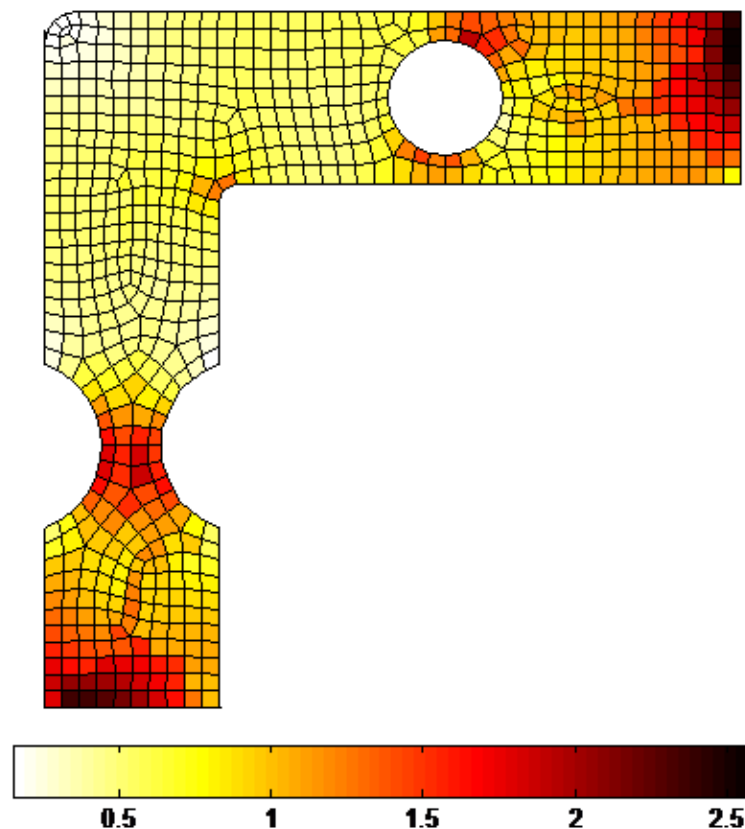


Figure 2-7 : Cartographie de l'endommagement par fatigue du critère de Sines

Le résultat obtenu avec le critère de Sines montre que le maximum de l'endommagement dépasse la limite et l'équation (59) n'est pas vérifiée. L'influence de certains paramètres géométriques sur l'endommagement maximal est donc étudiée. La Figure 2-8 présente la variation de l'endommagement maximal en fonction de l'épaisseur de la plaque. Une brève



analyse de ce résultat indique que l'endommagement diminue par l'augmentation de l'épaisseur. On peut observer qu'il y a des variations brusques de la courbe. Afin d'expliquer ces changements brusques, les variations des quatre premiers modes de la plaque en fonction de l'épaisseur sont également présentées dans la Figure 2-8.

On peut distinguer quatre parties dans la courbe de l'endommagement maximal. On remarque que, à chaque fois une fréquence propre quitte la bande de fréquence de l'excitation, une diminution brusque de la valeur de l'endommagement maximal est présentée.

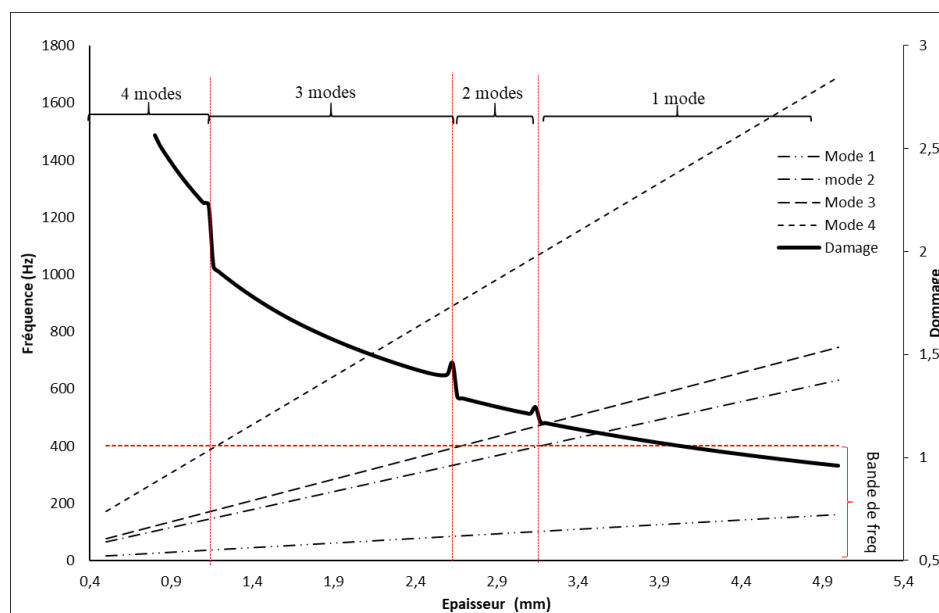


Figure 2-8 : Influence de l'épaisseur sur la moyenne de l'endommagement

Par exemple, pour la première partie, il y a quatre modes de la plaque dans la bande de fréquence de l'excitation. Dans la deuxième partie, le quatrième mode n'est plus dans la bande de fréquence. Donc, il n'y a que trois pics dans les DSP des contraintes dans les trois fréquences de résonance, à chaque point de la plaque.

La Figure 2-9 présente la cartographie des dommages autour de trois types d'entaille : circulaire, triangulaire et rectangulaire. Il faut noter que toutes les configurations ont les mêmes dimensions.

Le Tableau 2-3 présente les valeurs des maximums d'endommagement pour chaque type d'entaille. On remarque que le type d'entaille rectangulaire présente un endommagement maximal autour de l'entaille, comparé aux autres types.

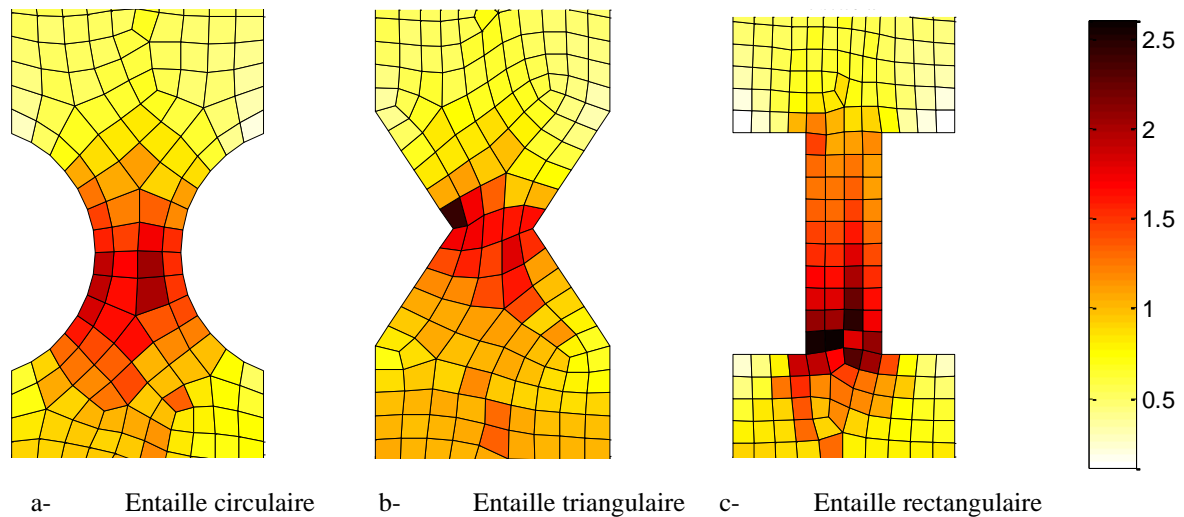


Figure 2-9 : Influence du type de l'entaille sur l'endommagement

En outre, une entaille triangulaire, a un niveau élevé de dommages près de l'angle. Nous pouvons conclure que le type d'entaille circulaire est la meilleure conception de point de vue endommagement par fatigue.

Tableau 2-3: Maximum de l'endommagement près de l'entaille

Type d'entaille	Max Endommagement
Circulaire	2.01
Triangulaire	2.39
Rectangulaire	2.61

#### IV. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'endommagement par fatigue des structures soumises à des vibrations aléatoires. Dans un premier temps, les différentes méthodes de prédiction de l'endommagement par fatigue uniaxiale dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel sont présentées. Pour cela, quelques notions d'endommagement, telles que la courbe de Wöhler, l'influence de la valeur moyenne, la loi de cumul et la méthode de Rainflow sont définies. Ensuite les différentes méthodes spectrales utilisées dans la prédiction de la durée de vie en cas de contrainte multiaxiale sont présentées. Ces méthodes sont appliquées ensuite sur une poutre en flexion simple soumise à des vibrations aléatoires.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on a proposé la stratégie à suivre pour le calcul de l'endommagement par fatigue multiaxiale en utilisant la formulation du critère de Sines dans le domaine fréquentiel. Pour cela, les DSP du tenseur de contraintes doivent être déterminés à chaque point de la structure à partir d'un modèle éléments finis. Cette stratégie permet de générer une cartographie de l'endommagement par fatigue locale à chaque élément de la structure. Une étude paramétrique est enfin présentée afin de déterminer l'influence de la géométrie sur l'endommagement par fatigue.

Les stratégies de calcul de fatigue uniaxiale et de fatigue multiaxiale ont été implémentées dans Matlab qui a été couplé avec le logiciel de calcul par éléments finis Ansys.

L'efficacité et la rapidité de cette stratégie a été vérifiée et peut être couplée avec les méthodes d'optimisation fiabiliste afin d'obtenir la meilleure conception de la structure, ce qui est l'objectif du chapitre 3.

# Chapitre 3

## Optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires

I.	Introduction.....	56
II.	Introduction à la fiabilité en mécanique.....	57
II.1	Notions fondamentales en fiabilité mécanique.....	57
II.2	Méthodes de simulation de Monte Carlo.....	58
II.3	Méthode d'approximation FORM/SORM.....	59
III.	Optimisation des structures.....	61
III.1	Formulation du problème d'optimisation.....	61
III.2	Prise en compte des incertitudes dans l'optimisation.....	63
III.3	Application.....	63
IV.	Optimisation fiabiliste ( <i>Reliability-based design optimization RBDO</i> ).....	66
IV.1	Approche classique.....	68
IV.2	Méthode hybride.....	69
IV.3	Optimum Safety Factor OSF.....	71
IV.4	Méthode hybride robuste ( <i>Robust Hybrid Method RHM</i> ).....	73
V.	Optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires.....	78
V.1	Description du problème.....	78
V.2	Procédures des méthodes DDO et RBDO.....	79
V.3	Applications.....	80
VI.	Extension des méthodes RBDO pour d'autres domaines d'applications.....	89
VI.1	Optimisation fiabiliste d'un système vibro-acoustique.....	89
VI.2	Optimisation fiabiliste d'un actionneur en alliage à mémoire de forme pour micro-pompe.....	94
VII.	Conclusion.....	102

## I. Introduction

La détermination de la conception appropriée d'une structure en mécanique est l'une des préoccupations majeures pour l'ingénieur. L'objectif est donc de trouver la meilleure conception d'une telle pièce qui permet de réduire les coûts et qui, en même temps, satisfaire les performances.

L'augmentation des performances des calculateurs, a permis un développement des techniques d'optimisation numériques. Généralement, l'optimisation des structures peut être modélisée mathématiquement, par un problème de minimisation d'une *fonction objective* sous des *fonctions d'état limite*. Cette problématique est généralement résolue à partir des algorithmes itératifs [44].

A partir de la littérature, les techniques d'optimisation des structures peut être divisées en trois grandes familles :

- Optimisation de la conception : permet d'améliorer le modèle structural dont la forme et la topologie sont fixes. Les variables de conception sont donc les dimensions transversales des composants structuraux telle que par exemple la section d'une poutre ou bien l'épaisseur d'une plaque ...
- Optimisation de forme : permet de modifier la géométrie de la structure avec une topologie fixée. Les variables de conception sont donc des paramètres représentant les frontières du domaine.
- Optimisation de la topologie : permet de contrôler, en plus de la géométrie, la topologie de la pièce. Elle est appelée aussi optimisation de forme généralisée. Elle permet de déterminer la connectivité du domaine ainsi les endroits où est perforée la pièce.

L'optimisation des structures sans prise en compte des incertitudes peut conduire à des états de conception qui ne respectent pas certains critères de fiabilité. Pour cela, plusieurs méthodes d'optimisation fiabiliste ont été développées. L'objectif d'une telle méthode d'optimisation fiabiliste est donc de concevoir des structures qui devraient être à la fois économiques et fiables.

Ces méthodes ont été appliquées dans différents domaines telles que : génie civile [45] , mécanique [46], vibro-acoustique [47], aérodynamique [48] [49], biomécanique [50] [51] ...

Dans ce chapitre, une brève introduction sur la notion de fiabilité est présentée. Dans la deuxième partie on définit la méthodologie de l'optimisation déterministe. On présente par la suite le développement des différentes méthodes d'optimisation fiabiliste RBDO (*Reliability Based Design Optimization*) pour la conception des structures. Une extension de ces méthodes dans le cas des structures soumises à des vibrations aléatoires est proposée ensuite. Une nouvelle méthode appelée *Robust Hybrid Method* est alors développée afin d'améliorer la performance numérique par rapport à la méthode classique. Une extension de cette méthode sur des autres domaines d'application est enfin présentée afin de montrer son efficacité.

## II. Introduction à la fiabilité en mécanique

La norme AFNOR [52] définit la fiabilité par « l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée ... le terme est aussi utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès »

La fiabilité est donc la discipline qui étudie les risques de défaillance d'un tel dispositif dont les paramètres influents sont considérés comme des variables incertains. Dans ce paragraphe, on définit, dans un premier temps, les différentes notions de base de la fiabilité en mécanique. Ensuite, on présente les approches les plus utilisées pour l'évolution de la probabilité de défaillance.

### II.1 Notions fondamentales en fiabilité mécanique

#### II.1.1 Variables de conception

Le vecteur  $X = \{x_i\}_{i=1..n}$  des variables de conception  $x_i$  rassemble les variables aléatoires d'entrée dans un calcul de fiabilité. Chaque variable est caractérisée par une densité de probabilité  $P_i(x_i)$ . Dans ce qui suit, on va supposer que la densité de probabilité des variables de conception est une loi normal caractérisée par une valeur moyenne  $m_i$  et d'un écart type  $\sigma_i$  pour chaque variable  $x_i$ .

### II.1.2 Fonction d'état limite

La fonction d'état limite présente la frontière entre le domaine de défaillance et le domaine de sécurité, on la note par  $G(X)$ . Cette notion est fondamentale à la fois en analyse déterministe et en analyse probabiliste pour définir l'état de la structure. La courbe  $G(X) = 0$  présente la courbe d'état limite. On peut distinguer alors deux cas :

- $G(X) > 0$  : les réalisations des variables conduisent à une situation dans la zone de sécurité.
- $G(X) \leq 0$  : les réalisations des variables conduisent à une situation dans la zone de défaillance.

### II.1.3 Probabilité de défaillance

La probabilité de défaillance  $P_f$  est la probabilité d'avoir une réalisation de variables aléatoire qui donne une fonction d'état limite dans la zone de défaillance (équation (84)). La fiabilité  $F$  est donc complémentaire à la probabilité de défaillance. Elle est définie par l'équation (85)

$$P_f = \text{prob}[G(X) \leq 0] \quad (84)$$

$$F = 1 - P_f \quad (85)$$

L'analyse de la fiabilité des structures se résume par l'étude de la probabilité de défaillance  $P_f$ . Dans la littérature, plusieurs techniques ont été développés afin de déterminer cette probabilité. Parmi ces méthodes on peut distinguer deux catégories les plus utilisées :

- Méthodes de simulation de Monte Carlo.
- Méthodes d'approximation par l'intermédiaire de l'indice de fiabilité.

## II.2 Méthodes de simulation de Monte Carlo.

Ces méthodes sont basées sur l'estimation de la probabilité de défaillance par des simulation de Monte Carlo. C'est la méthode la plus robuste et la plus coûteuse. La méthode de Monte Carlo consiste à générer un grand nombre de tirages aléatoires. La fonction d'état limite évalue pour chaque tirage afin de vérifier si les réalisations des variables conduisent à une situation

dans la zone de sécurité ou bien dans la zone de défaillance (Figure 3-1). La probabilité de défaillance est donc le nombre de simulations défaillantes sur le nombre total des tirages.

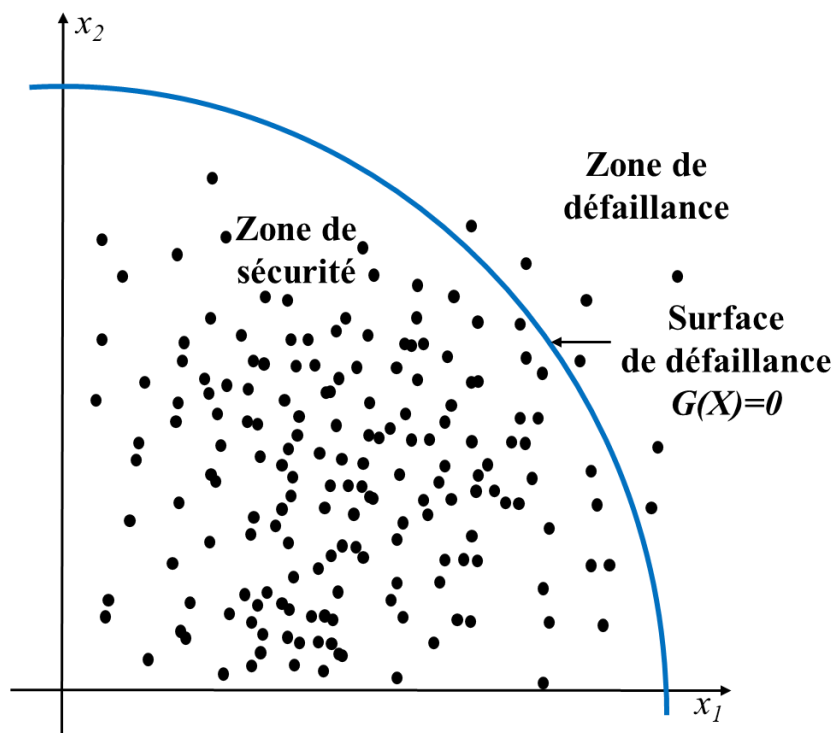


Figure 3-1 : Simulation de Monte Carlo

### II.3 Méthode d'approximation FORM/SORM

Les méthodes FORM/SORM (*First Order Reliability Method / Second Order Reliability Method*) sont les plus connues. Ils sont très efficaces pour la détermination de la probabilité de défaillance. Ces méthodes se décomposent en trois étapes :

- 1- Transformation des variables de l'espace physique vers l'espace normé

Cette étape consiste à transformer le vecteur des variables aléatoires  $X = \{x_i\}$  en un vecteur de variables aléatoires unitaires de moyenne nulle comme montré dans la Figure 3-2.

- 2- Recherche du point conception

La deuxième étape consiste à chercher le point de conception, appelé aussi le point de défaillance la plus probable, (*MPFP : Most Probable Failure Point*). C'est le point du domaine de défaillance la plus proche de l'origine dans l'espace normé (Figure 3-2). En outre, le problème de détermination de la MPFP est défini par l'équation (86).



$$\min_u \sqrt{\sum u_i^2} \tag{86}$$

sous  $H(x, u) \leq 0$

3- Approximation de la probabilité de défaillance

La méthode FORM consiste à remplacer la surface d'état limite dans l'espace normé par un hyperplan tangent au point MPFP ( $P^*$ ). L'approximation de la probabilité de défaillance est donnée par la relation de l'équation (87).

$$P_f = \Phi(-\beta) \tag{87}$$

Avec  $\beta$  est l'indice de fiabilité et  $\Phi(\cdot)$  est la loi de distribution de Gauss unitaire de moyenne nulle.

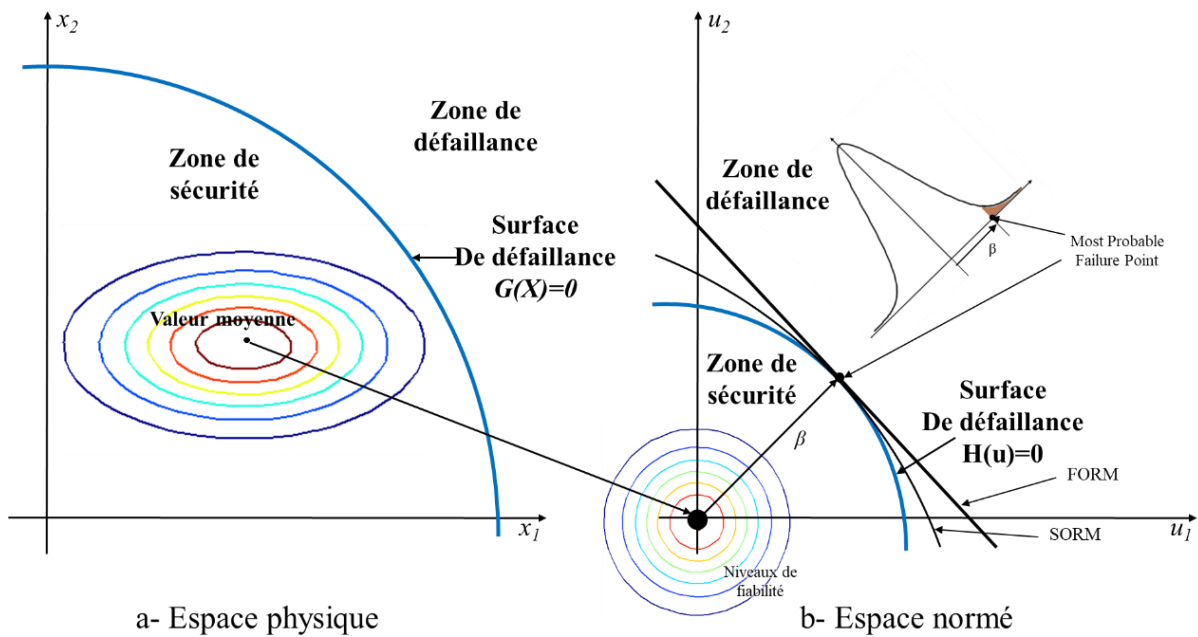


Figure 3-2 : Passage de l'espace physique vers l'espace normé

La méthode SORM consiste à remplacer la surface d'état limite par une hypersurface quadratique tangente. Parmi les méthodes SORM proposées, la probabilité de défaillance peut être définie par l'équation (88). Cette méthode présente une meilleure estimation de la probabilité de défaillance [53]

$$P_f = \Phi(-\beta) \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \kappa_i}} \right) \quad (88)$$

Avec  $\kappa_i$  présentent les courbatures principales de la fonction G et  $\beta$  est l'indice de fiabilité.

### III. Optimisation des structures

#### III.1 Formulation du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation consiste à trouver les paramètres intervenant dans la conception, par la minimisation d'une fonction objective sous des contraintes de performance mécaniques, géométriques et physiques. Le problème d'optimisation est défini par l'équation (89).

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & t. q \begin{cases} g_k(x) \leq 0, k = 1 \dots K \\ h_j(x) = 0, j = 1 \dots J \end{cases} \end{aligned} \quad (89)$$

Avec  $x$  est le vecteur des variables d'optimisation,  $f(x)$  est la fonction objective (appelé aussi fonction coût.),  $g_k(x)$  et  $h_j(x)$  sont respectivement les contraintes d'inégalité et les contraintes d'égalité.

La solution de ce problème est le vecteur des optima noté  $x^*$ . Plusieurs algorithmes de programmation non linéaire permettent de résoudre le problème de l'équation (89). Le principe de la programmation non linéaire (*NLP : Non-Linear Programming*) est de chercher la solution optimale  $x^*$  par la construction d'une suite itérative  $x_i$  à partir d'un point initial  $x_0$ . La différence entre les algorithmes d'optimisation non-linéaire est donc, la façon du passage d'une itération  $i$  à une itération  $i+1$ .

Si la fonction objective  $f$  admet un minimum en  $x^*$ , alors il existe un vecteur  $\{\lambda_k\}_{k=1..K}$  et un vecteur  $\{\mu_j\}_{j=1..J}$  vérifiant les conditions des équations (91) et (92), dite conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [44].  $\lambda_k$  et  $\mu_j$  sont les multiplicateurs de Lagrange. Les conditions KKT utilisent la fonction auxiliaire de Lagrange (Equation (90))

$$\mathcal{L}(x, \lambda_k, \mu_j) = f(x) + \sum_k \lambda_k \cdot g_k(x) + \sum_j \mu_j \cdot h_j(x) \quad (90)$$

- Conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} \lambda_k \geq 0 \\ \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_k, \mu_j) = 0 \\ \lambda_k g_k(x) = 0 \quad \forall k \end{cases} \quad (91)$$

- Conditions du second ordre :

$$\begin{aligned} s^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x, \lambda_k, \mu_j) s &\geq 0 \quad \forall s \neq 0 \\ \text{tel que } [\nabla_x g_k(x), \nabla_x h_j(x)]^T s &= 0 \end{aligned} \quad (92)$$

De nombreux algorithmes ont été développés à partir des conditions de KKT. Parmi lesquelles on peut citer :

- La méthode de région de confiance (*trust-region-reflective*)
- Méthodes de points intérieurs (*interior-point-method*)
- Optimisation quadratique successive (*Sequential Quadratic Programming SQP*)
- Active set
- ...

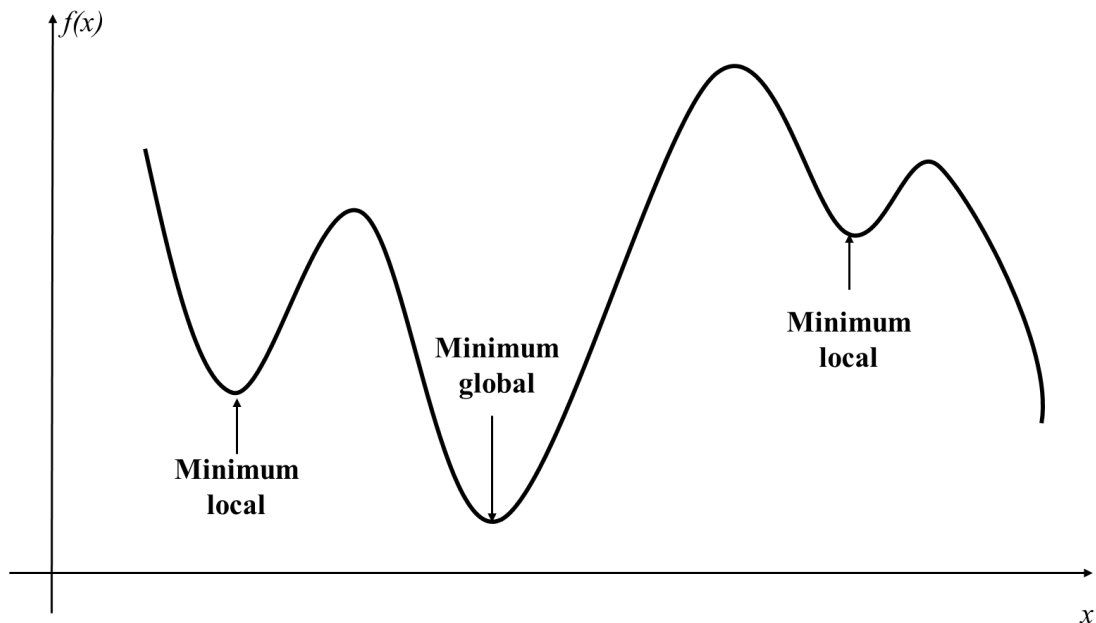


Figure 3-3 : Minimum local et minimum global

En général, les algorithmes d'optimisation convergent vers un minimum local. En fait, le résultat peut être un minimum global, mais il n'y a pas de garantie pour ça. Un minimum local est le point où la valeur de la fonction est inférieure à celle des points voisins. Un minimum global est le point où la valeur de la fonction est inférieure à tous les autres points possibles. La Figure 3-3 présente un exemple d'une fonction à une variable avec des minimums locaux et un minimum global.

### III.2 Prise en compte des incertitudes dans l'optimisation

Le problème d'optimisation de l'équation (89) ne tient pas en considération l'incertitude des variables de conception. L'utilisation de l'approche d'optimisation déterministe de la conception (*deterministic design optimisation DDO*) dans la conception des structures est de plus en plus courante avec l'avènement de la technologie informatique et le développement de l'analyse par éléments finis. Cette approche consiste à assigner des facteurs de sécurité dans les fonctions de contraintes du problème d'optimisation pour compenser la présence d'incertitudes dans les variables de conception. Le choix de ces facteurs de sécurité est basé sur l'expérience en ingénierie. Plusieurs méthodes et algorithmes ont été développés pour résoudre le problème DDO. [54] [55] [56] [57] [58]

Bien que l'approche DDO offre une conception optimale, on ne peut pas contrôler le niveau de fiabilité [59], car les facteurs de sécurité n'indiquent pas la véritable sécurité d'une conception. Pour cela, l'optimisation fiabiliste de la conception est nécessaire pour obtenir des conceptions optimales et fiables.

### III.3 Application

La Figure 3-4 présente une poutre en flexion soumise à une force concentrée  $F$ . le Tableau 3-1 regroupe les propriétés mécaniques du matériau de la poutre.

Tableau 3-1 : Propriétés mécaniques du matériau de la poutre

Module d'Young (MPa)	Coefficient de poisson	Limite élastique (MPa)
210 000	0.3	235

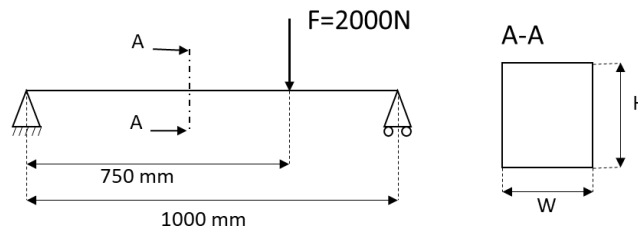


Figure 3-4 : Poutre en flexion

Cet exemple est une application de la méthode d'optimisation déterministe. Il s'agit d'une poutre en acier de forme rectangulaire et de longueur  $L = 1000$  mm. La poutre se repose sur deux supports : un appui double du côté gauche et un appui simple du côté droite. Elle est sollicitée par une force  $F = 2000$  N concentrée au trois quarts de la côté gauche (Figure 3-4).

Le but de ce problème d'optimisation est de minimiser le poids de la poutre sans dépasser la contrainte admissible. Les variables de conception sont la largeur  $W$  et la hauteur  $H$ . Afin de prendre en compte les incertitudes, un coefficient de sécurité est appliqué sur la limite élastique de la poutre. Le choix de ce coefficient est basé sur l'expérience de l'ingénieur. La contrainte maximale dans la poutre ne doit pas donc dépasser 150 MPa et les variables de conception doivent être comprises entre  $10 < W; H < 50$  (mm). Le problème d'optimisation est défini par l'équation (93).

$$\begin{aligned} \min_{H,W} V &= H \times W \times L \\ t. q \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max} \leq 150 \text{ MPa} \\ 10 \leq W; H \leq 50 \end{array} \right. & \end{aligned} \quad (93)$$

Tableau 3-2: Résultat optimisation DDO pour une poutre en flexion

	Valeurs initiales	Point optimal
H(mm)	20	38.73
W(mm)	20	10
$\sigma$ (MPa)	281.25	150
V(mm <sup>3</sup> )	$4 \cdot 10^5$	$3.87 \cdot 10^5$

Le Tableau 3-2 présente les résultats du problème d'optimisation de l'équation (93). L'algorithme de résolution de méthode DDO est présenté dans la Figure 3-5. La résolution du problème est effectuée sur le logiciel de calcul Matlab en utilisant l'algorithme SQP. Le calcul de la contrainte maximale s'effectue par le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS qui a été couplé avec Matlab. Les Figure 3-6 et Figure 3-7 présentent respectivement l'évolution de la fonction objective et de la contrainte d'optimisation  $g(x) = \sigma_{max} - 150$  en fonction des itérations.

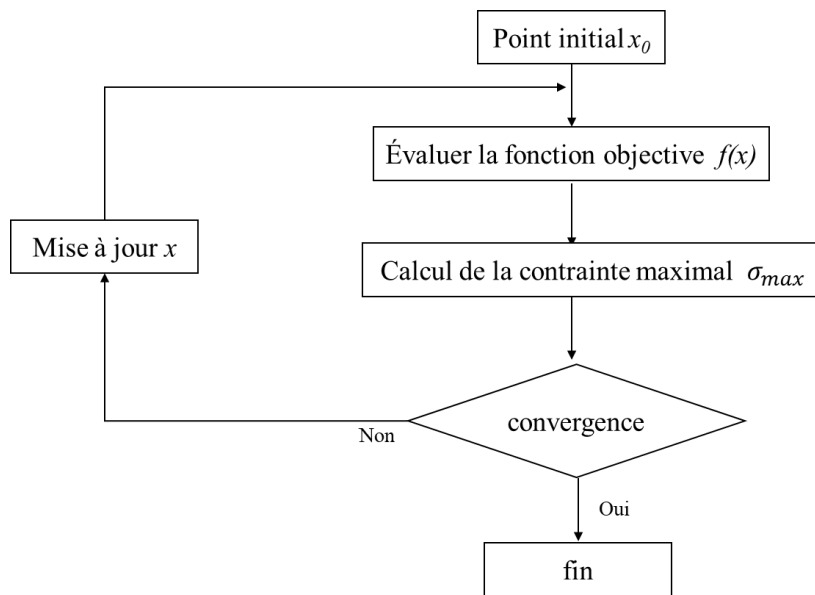


Figure 3-5 : Algorithme de résolution du problème d'optimisation DDO

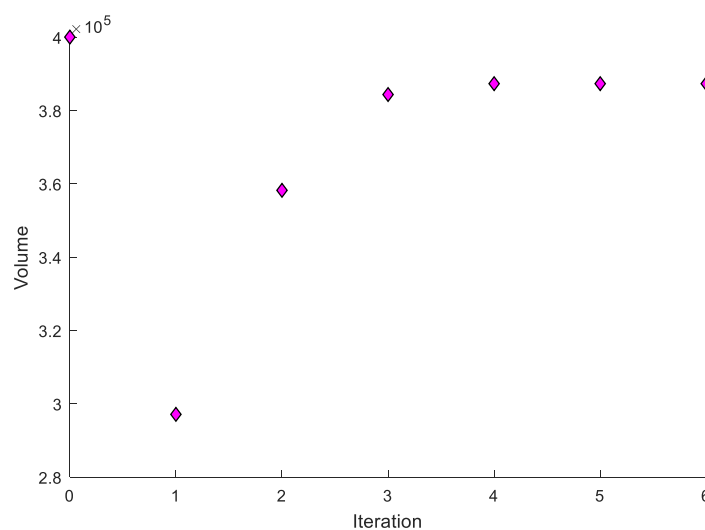


Figure 3-6 : Evolution de la fonction objective

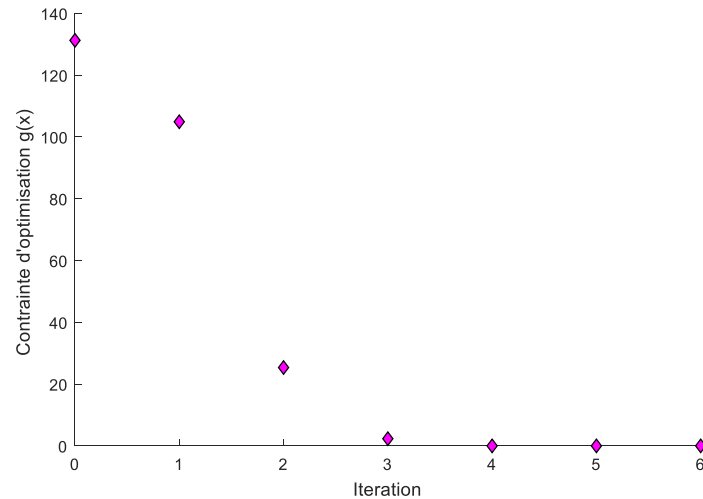


Figure 3-7 : Evolution de la contrainte d'optimisation

#### IV. Optimisation fiabiliste (*Reliability-based design optimization RBDO*)

La minimisation du coût d'une structure mécanique est l'une des préoccupations majeures des concepteurs. En plus, la conception de cette structure doit présenter un niveau de fiabilité bien déterminé. L'objectif de l'optimisation fiabiliste est de concevoir des pièces qui devraient être à la fois économiques et fiables.

Dans l'optimisation déterministe de la conception DDO [58] [60], le but du concepteur est de réduire le coût de la conception sans tenir compte des effets des incertitudes concernant les matériaux, la géométrie et le chargement. La solution optimale résultant peut présenter donc un niveau de fiabilité inappropriée. Par contre, dans l'optimisation fiabilité (*Reliability-based design optimization RBDO*), l'objectif est de réduire la masse de la structure pour avoir une conception améliorée, et aussi un niveau plus élevé de confiance.

Dans la littérature, des nombreuses études sont rapportés dans le domaine de RBDO [61] [62] [63] [64] [65] [66]. Aoues et Chateaneuf [67] ont testé une variété d'approches dans un benchmark constitué de quatre exemples. En fait, ces méthodes demandent un temps de calcul considérable.

Un problème RBDO peut être considéré comme un problème d'optimisation soumis à des contraintes à la fois déterministe et probabiliste qui a une forme générale telle qu'exprimée dans l'équation (94).

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & s. t \begin{cases} P_r[G_i(x, y) \leq 0] \leq P_i^T, k = 1 \dots m \\ h_j(x) \leq 0, j = m + 1 \dots M \end{cases} \end{aligned} \quad (94)$$

Avec  $x$  est le vecteur des variables déterministes de la conception,  $y$  est le vecteur des variables aléatoires.  $P_r[.]$  est l'opérateur de probabilité,  $G_i$  est la fonction de performance,  $P_i^T$  est le niveau de fiabilité cible et  $h_j$  est la contrainte déterministe.

Ici, le calcul de l'indice de fiabilité demande un énorme temps de calcul pour une telle conception. Afin d'améliorer la performance numérique, Kharmanda et al. ont développé une méthode efficace appelée la méthode hybride [1] [68] [69]. Cette méthode consiste à résoudre le problème de fiabilité et d'optimisation simultanément. La solution est réalisée dans un espace hybride de conception (*Hybrid Design Space HSD*) contenant les variables déterministes et aléatoires et elle satisfait un niveau de fiabilité spécifié.

Cette méthode a réduit le temps de calcul mais le problème RBDO devient plus complexe que le problème DDO. Par conséquent, une autre méthode appelée *Optimum Safety Factor (OSF)* a été élaborée [70] [71]. La solution optimale est obtenue en considérant le point de conception et les facteurs de sécurité calculés qui sont calculés à partir de la dérivée de la fonction de contrainte. Cette méthode a permis de réduire le temps de calcul par rapport à la méthode hybride.

L'efficacité de ces méthodes n'a été démontré que pour des cas statiques et des cas dynamiques bien spécifiques. Dans ce paragraphe, une application de ces méthodes est effectuée sur des structures soumises à des vibrations aléatoires et ensuite une méthode hybride robuste (*Robust Hybrid Method RHM*) est proposée [72]. L'efficacité de la nouvelle méthode est enfin démontrée en considérant une application numérique sur un exemple de structure sous vibrations aléatoires. Une extension de cette méthode dans d'autre application est enfin proposée.



#### IV.1 Approche classique

Traditionnellement, la procédure d'optimisation fiabiliste est effectuée dans deux espaces : l'espace physique et l'espace normé [73] [74] [75]. Par conséquent, l'approche classique de RBDO est réalisée par l'intégration des deux problèmes suivants :

##### 1- Problème d'optimisation

Ce problème consiste à minimiser une fonction objective  $f(x)$  sous des contraintes déterministes  $g_k(x)$  ainsi les exigences de fiabilité. Il peut être défini par :

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & t. q \begin{cases} g_k(x) \leq 0, k = 1 \dots K \\ \beta(x, u) \geq \beta_t \end{cases} \end{aligned} \quad (95)$$

Avec  $\beta(x, u)$  est l'indice de fiabilité de la structure et  $\beta_t$  est l'indice de fiabilité cible.

##### 2- Problème de fiabilité

$\beta(x, u)$  est la distance minimale entre la fonction d'état limite  $H(x, u)$  et l'origine dans l'espace normalisé (Figure 3-2). Cet indice est calculé par la résolution de minimisation suivante :

$$\begin{aligned} & \beta = \min d(u) \\ & t. q H(x, u) \leq 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Avec  $d(u)$  est la distance dans l'espace aléatoire normalisé, donné par  $d(u) = \sqrt{\sum u_i^2}$

La Figure 3-8 présente l'algorithme de l'approche classique. On peut remarquer que cette approche demande un grand nombre de calcul numérique, dans les deux espaces. Par conséquence, un temps de calcul important est demandé pour résoudre un tel problème d'optimisation fiabiliste. Pour réduire les effets de cet inconvénient, une approche efficace appelé Méthode Hybride, basée sur la solution simultanée de fiabilité et d'optimisation a été élaborée [1].

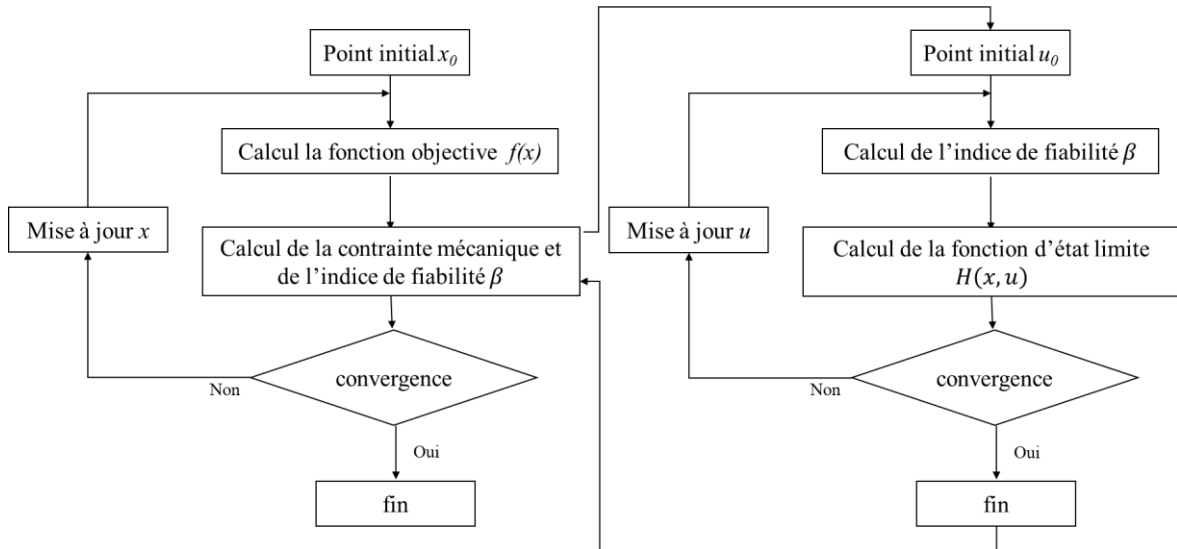


Figure 3-8 : Algorithme de l'approche classique de l'optimisation fiabiliste

## IV.2 Méthode hybride

L'approche hybride consiste à minimiser une nouvelle forme de la fonction objectif  $F(x, y)$  sous les contraintes d'état limite et les contraintes déterministes, ainsi que des contraintes de fiabilité: le problème de la méthode hybride est écrit sous la forme :

$$\min_{x,y} F(x, y) = f(x) \times d_{\beta}(x, y)$$

$$s. t \begin{cases} G(x, y) \leq 0 \\ g_k(x) \leq 0, k = 1 \dots K \\ d_{\beta}(x, y) \geq \beta_t \end{cases} \quad (97)$$

Ici,  $d_{\beta}(x, y)$  présente la distance, dans l'espace hybride, entre le point optimal et le point de conception. La minimisation de la fonction  $F(x,y)$  est effectuée dans l'espace hybride de conception (*Hybrid Design Space HDS*) des variables déterministes  $x$  et des variables aléatoires  $y$ .

Un exemple de HDS est donné dans la Figure 3-9. Pour une distribution normale des variables aléatoires,  $d_{\beta}$  sont représentés par des ellipses, Les niveaux de la fonction objective sont donnés par des courbes bleues, et les niveaux des fonctions de l'état limite sont présentés par les lignes noires. On peut voir deux points importants : la point optimal  $P_x^*$  et le point de défaillance  $P_y^*$  (c à d, le point qui se trouve sur la courbe  $G(x, y)=0$  et  $d_{\beta} = \beta_t$ ). Dans la

littérature, la méthode hybride a efficacement réduit le temps de calcul par rapport à l'approche classique.

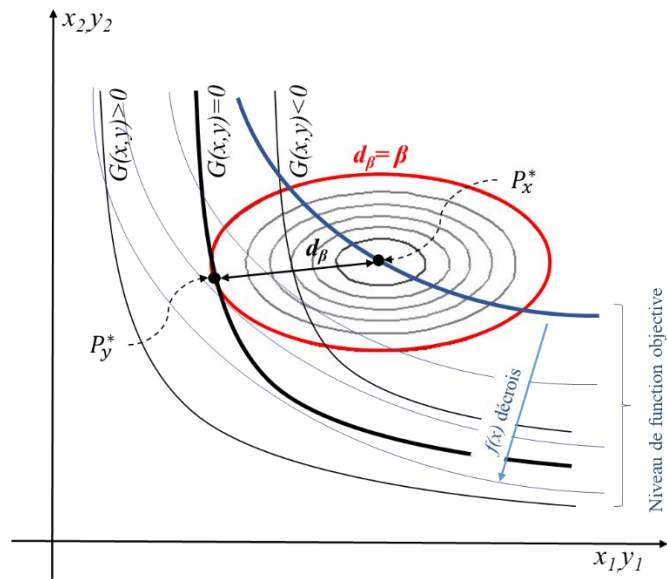


Figure 3-9 : Espace hybride de conception

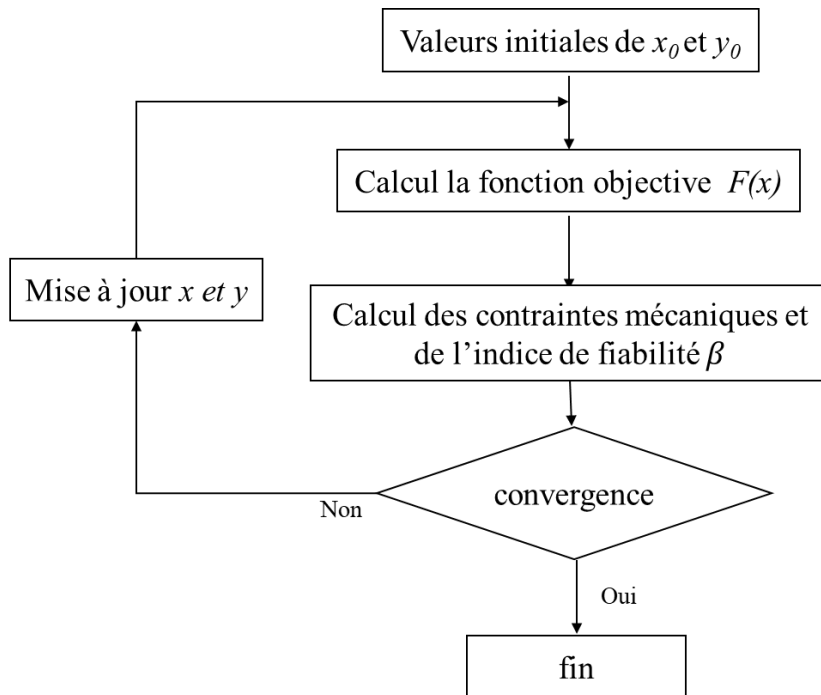


Figure 3-10 : Algorithme de la méthode hybride

La Figure 3-10 présente l'algorithme d'optimisation de la méthode hybride. La première étape est d'entrer les valeurs initiales des variables aléatoires  $y_0$  et des variable déterministe  $x_0$ . La deuxième étape consiste à évaluer la fonction objective  $F(x,y)$ . Ensuite, les contraintes

d'optimisation ainsi que l'indice de fiabilité sont évaluées. Le programme s'arrête s'il y a convergence et toutes les conditions d'optimisation sont vérifiées. Sinon il met à jour le vecteur  $x$  et  $y$  et il répète les opérations à partir de la deuxième étape.

### IV.3 Optimum Safety Factor OSF

Dans l'approche d'optimisation déterministe (DDO), le choix du coefficient de sécurité est basé sur l'expérience de l'ingénierie et la solution obtenue ne peut pas satisfaire le niveau de fiabilité approprié requis. Cependant, lors de la conception d'une nouvelle structure, nous avons besoin habituellement d'un certain contexte expérimental pour proposer des facteurs de sécurité appropriés. Cependant, avec l'approche OSF, la détermination des facteurs de sécurité devrait être indépendante de l'expérience de l'ingénieur.

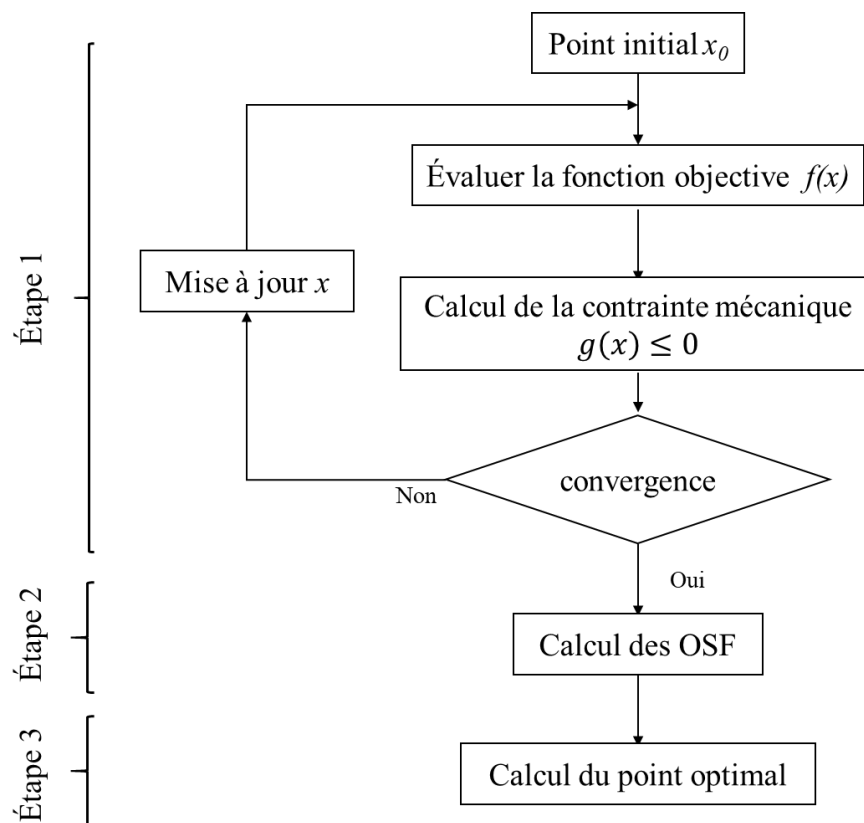


Figure 3-11 : Algorithme de la méthode OSF

Bien que la méthode hybride conduit à améliorer le niveau de fiabilité, l'approche OSF conduit à minimiser le temps de calcul. Elle consiste à utiliser l'analyse de sensibilité combinée à l'analyse de fiabilité afin d'éliminer les inconvénients de la méthode DDO et des méthodes RBDO [2] [76] [77] [78].

L'algorithme de la méthode OSF (Figure 3-11) est composé de trois principales étapes :

i- Détermination du point de conception  $y_i^*$

Nous minimisons ici la fonction objective sous la fonction d'état limite  $G(y)$  et les contraintes déterministes. La solution résultante est conçue par le point de défaillance le plus probable.

ii- Calcul des facteurs de sécurité

En fait, le point de conception  $y_i^*$  est lié au point optimal  $x_i^*$  tel que défini dans l'équation. (98). Nous considérons ici que les valeurs moyennes  $m_i$  de la variable aléatoire sont présentées par la variable déterministe  $x_i^*$  [79].

$$y_i^* = S_f^i x_i^*, i = 1, \dots, n \quad (98)$$

De plus, en général, pour une distribution normale de la variable aléatoire  $y_i$ , nous considérons la transformation dans l'espace normalisé (espace-u) de l'espace physique (espace-x) tel que défini dans l'équation.(99)

$$u_i = \frac{y_i - x_i}{\sigma_i}, i = 1, \dots, n \quad (99)$$

Les facteurs de sécurité peuvent être donc déterminés à partir de  $u_i^*$  montré dans l'équation (100) en combinant les équations (98) et (99).

$$S_f^i = 1 + \gamma_i u_i^*, i = 1, \dots, n \quad (100)$$

Avec  $\gamma_i$  est le coefficient reliant la valeur moyenne et l'écart type.  $\gamma_i = \frac{\sigma_i}{m_i}$

Selon Kharmanda [71], la valeur optimale du vecteur normalisé  $u_i^*$  peut être déterminée à partir des dérivées de la fonction d'état limite au niveau du point de conception comme suit :

$$u_i^* = \pm \beta_t \sqrt{\frac{\left| \frac{\partial G}{\partial y_i} \right|}{\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial G}{\partial y_j} \right|}}, i = 1, \dots, n \quad (101)$$

Avec le signe  $\pm$  dépend du signe du dérivé :

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} > 0 \rightarrow u_i^* > 0 \text{ et } \frac{\partial G}{\partial y_i} < 0 \rightarrow u_i^* < 0, i = 1, \dots, n$$

iii- Calcul de la solution optimale

Dans la dernière étape, pour déterminer la conception optimale, nous incluons les valeurs de facteurs de sécurité calculées dans la valeur de variables de conception.

#### IV.4 Méthode hybride robuste (*Robust Hybrid Method RHM*)

##### IV.4.1 Formulation de la méthode RHM

Comme dit précédemment, l'inconvénient le plus important de la méthode hybride classique est le temps de calcul élevé. En plus de ça, elle n'est pas toujours stable et peut converger vers une solution irréalisable. D'une autre façon, la solution optimale obtenue  $P_x^*$  peut être située dans la région de défaillance ( $G(x^*) > 0$ ) tandis que la distance entre le point optimal et le point de conception  $P_y^*$  donne un niveau de fiabilité acceptable, comme montré dans la Figure 3-12.

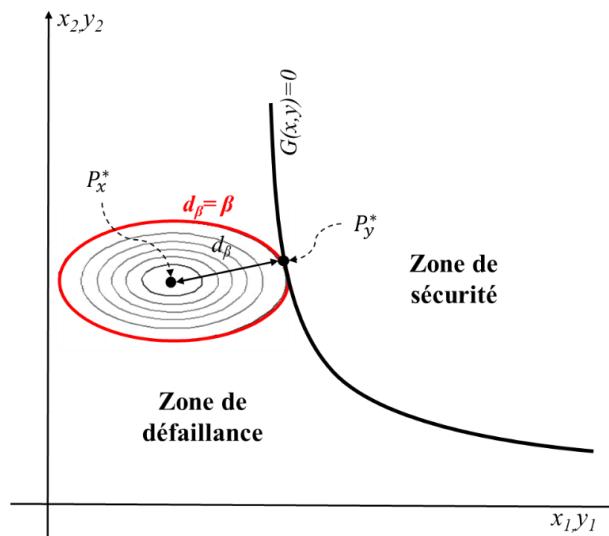


Figure 3-12 : Problème rencontré de la méthode hybride classique présenté dans le HDS

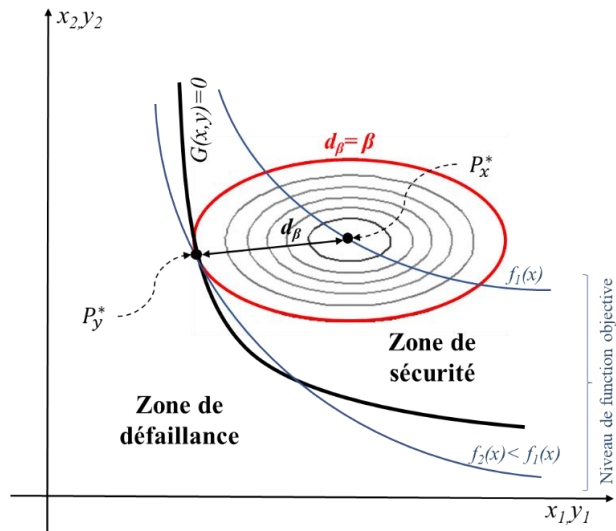


Figure 3-13 : RHM dans le HDS

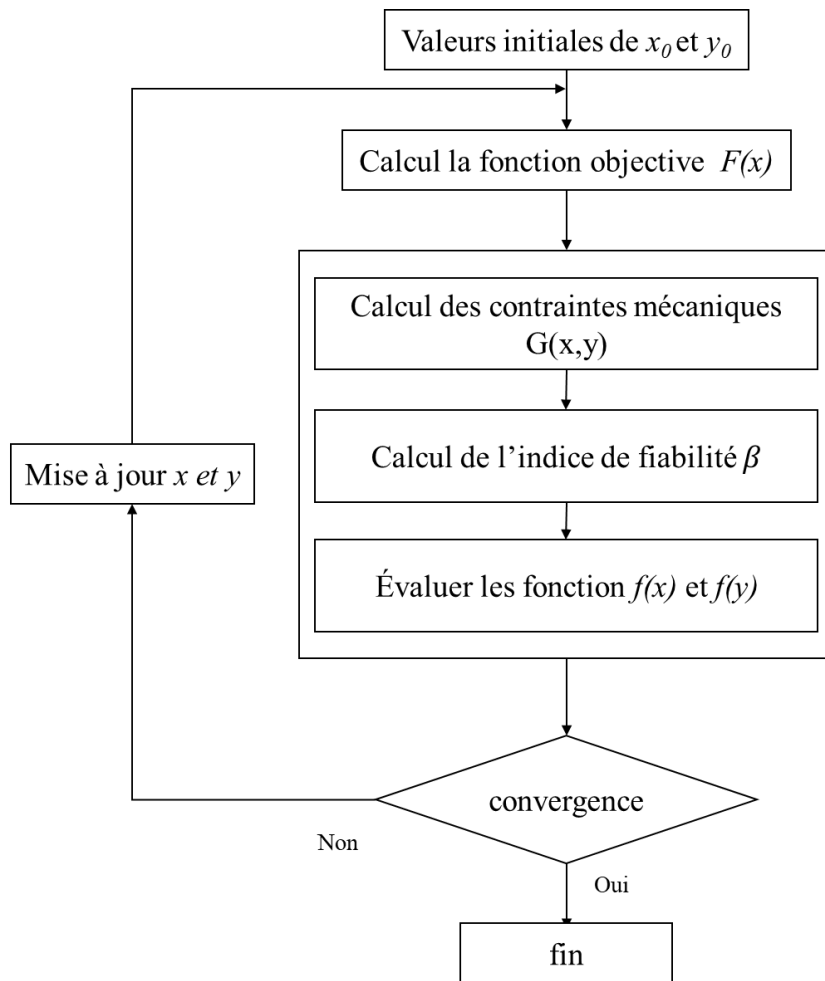


Figure 3-14 : Algorithme de la méthode RHM

Une nouvelle méthode appelée *Robust Hybrid Method* est donc développée afin de résoudre ce problème. Elle consiste à ajouter une autre contrainte, pour forcer l'algorithme d'optimisation à trouver la solution optimale dans la zone de sécurité.

En effet, dans le HDS, afin de garantir la fiabilité des structures sous incertitudes, la valeur de la fonction objective à la solution optimale devrait être supérieure à cette valeur au point de conception. La méthode hybride robuste peut alors être définie par l'équation (102). [72]

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) &= f(x) \times d_{\beta}(x, y) \\ \text{s. t } &\begin{cases} G(x, y) \leq 0 \\ g_k(x) \leq 0, k = 1 \dots K \\ \beta(x, u) \geq \beta_t \\ f(x) \geq f(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (102)$$

La Figure 3-13 présente un exemple de la méthode RHM dans l'espace hybride de conception.  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont deux niveaux de la fonction objective qui se croisent respectivement avec le point optimal  $P_x^*$  et le point de conception  $P_y^*$ . On peut observer que le point optimal  $P_x^*$  est situé dans la zone de sécurité,  $f(x^*) > f(y^*)$  et que le niveau de fiabilité requis est également satisfait ( $d_{\beta} = \beta_t$ )

La méthode proposée, dont son algorithme est présenté dans la Figure 3-14, ne permet pas seulement de forcer l'algorithme d'optimisation dans l'espace de conception hybride, mais elle a également réduit le temps de calcul par rapport à la méthode hybride classique d'une façon efficace.

#### IV.4.2 Condition d'optimalité de la méthode RHM

L'équivalence des conditions d'optimalité entre la méthode hybride et l'approche classique a été vérifiée. Ici, on présente l'équivalence de la méthode RHM et de l'approche classique. Selon les sous-problèmes (95) et (96), l'approche classique consiste à minimiser deux lagrangiens :

$$\min L_1(x, u, \lambda_k, \bar{\lambda}_{\beta}) = f(x) + \bar{\lambda}_{\beta}[\beta_t - \beta(x, u)] + \sum_k \lambda_k g_k(x) \quad (103)$$



$$\min L_2(x, u, \bar{\lambda}_H) = d(u) + \bar{\lambda}_H H(x, u) \quad (104)$$

Avec  $\lambda_k, \bar{\lambda}_\beta$  et  $\bar{\lambda}_H$  sont les multiplicateurs lagrangiens pour respectivement les contraintes, l'indice de fiabilité et la fonction d'état limite avec  $\lambda_k \geq 0, \bar{\lambda}_\beta \geq 0$  et  $\bar{\lambda}_H \geq 0$ . Les conditions d'optimalité sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \bar{\lambda}_\beta \frac{\partial \beta}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_\beta} = \beta_t - \beta(x, u) = 0 \\ \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_k} = g_k(x) = 0 \end{array} \right. \quad (105)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_2}{\partial u_j} = \frac{\partial d}{\partial u_j} + \bar{\lambda}_H \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \\ \frac{\partial L_2}{\partial \bar{\lambda}_H} = H(x, u) = 0 \end{array} \right. \quad (106)$$

Le Lagrangien de la méthode RHM s'écrit :

$$\begin{aligned} L_R(x, y, \lambda) = & f(x) \times d_\beta(x, y) + \lambda_\beta [\beta_t - d_\beta(x, y)] + \lambda_G G(x, y) \\ & + \lambda_f [f(y) - f(x)] + \sum_k \lambda_k g_k(x) \end{aligned} \quad (107)$$

Les conditions d'optimalité de ce lagrangien sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_R}{\partial x_i} = [d_\beta(x, y) - \lambda_f] \frac{\partial f}{\partial x_i} + [f(x) - \lambda_\beta] \frac{\partial d_\beta}{\partial x_i} + \lambda_G \frac{\partial G}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L_R}{\partial y_j} = [f(x) - \lambda_\beta] \frac{\partial d_\beta}{\partial y_j} + \lambda_G \frac{\partial G}{\partial y_j} + \lambda_f \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0 \\ \frac{\partial L_R}{\partial \lambda_\beta} = \beta_t - d_\beta(x, u) = 0 \\ \frac{\partial L_R}{\partial \lambda_G} = G(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L_R}{\partial \lambda_f} = f(y) - f(x) = 0 \\ \frac{\partial L_R}{\partial \lambda_k} = g_k(x) = 0 \end{array} \right. \quad (108)$$

La condition d'optimalité (108) représente la solution optimale par une combinaison linéaire de différents gradients de  $f$ ,  $d_\beta$ ,  $G$ , et  $g_k$ . A la convergence, la distance  $d_\beta$  tend vers l'indice de fiabilité  $\beta$ , qui tend ensuite vers  $\beta_t$  lorsque la contrainte associée est active. En comparant la condition (108) avec les conditions d'optimalité de la formulation classique (équations (105) et (106)), on peut noter que la seule différence dans la direction de recherche se situe dans le terme  $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ .

En fait, deux cas peuvent se produire en fonction du type des paramètres d'optimisation  $x_i$ .

1<sup>er</sup> cas :  $x_i$  est un paramètre déterministe. Dans ce cas, la sensibilité de l'état limite est sous la forme suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \eta \frac{\partial d_\beta}{\partial x_i} \quad (109)$$

Avec

$$\eta = \left\| \frac{\partial H}{\partial u_j} \right\| = \left\| \frac{\partial G}{\partial y_j} \frac{\partial T_j^{-1}(x, u)}{\partial u_j} \right\| \quad (110)$$

Avec  $T_j^{-1}(x, u)$  est l'inverse de la transformation probabiliste.

2<sup>ème</sup> cas :  $x_i$  est un paramètre de distribution de probabilité de la variable aléatoire  $y_i$ . Dans ce cas,  $x_i$  est une variable de probabilité pure et n'a aucun effet sur la fonction d'état limite, et on a par la suite :  $\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0$ . Nous obtenons :

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial y_j} \frac{\partial T_j^{-1}(x, u)}{\partial x_i} & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (111)$$

$$\text{Avec } \frac{\partial G}{\partial y_j} = \eta \frac{\partial d_\beta}{\partial y_j}$$

A partir des équations (109) et (111), on constate que les vecteurs de gradient de  $G$  et  $d_\beta$  sont co-directionnels. Cela signifie qu'il n'y a pas de modification de la direction de recherche. On a donc :

$$\frac{\partial L_R}{\partial x_i} = [d_\beta(x, y) - \lambda_f] \frac{\partial f}{\partial x_i} + [f(x) - \lambda_\beta + \eta \lambda_G] \frac{\partial d_\beta}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad (112)$$

La comparaison des conditions d'optimalité pour les approches RHM et classique donne les relations entre les multiplicateurs lagrangiens dans les deux formulations :

$$\bar{\lambda}_\beta = \frac{\lambda_\beta - f(x) - \eta \lambda_G}{d_\beta(x, y) - \lambda_f} \quad (113)$$

$$\bar{\lambda}_H = \frac{\lambda_G}{f(x) - \lambda_\beta} \quad (114)$$

On peut constater donc que la solution du problème d'optimisation (102) respecte bien les conditions d'optimalité du problème initial où les deux phénomènes ont été séparés. Ainsi, la définition du Lagrangien de la méthode RHM n'introduit aucune modification dans les conditions d'optimalité.

## V. Optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires

### V.1 Description du problème

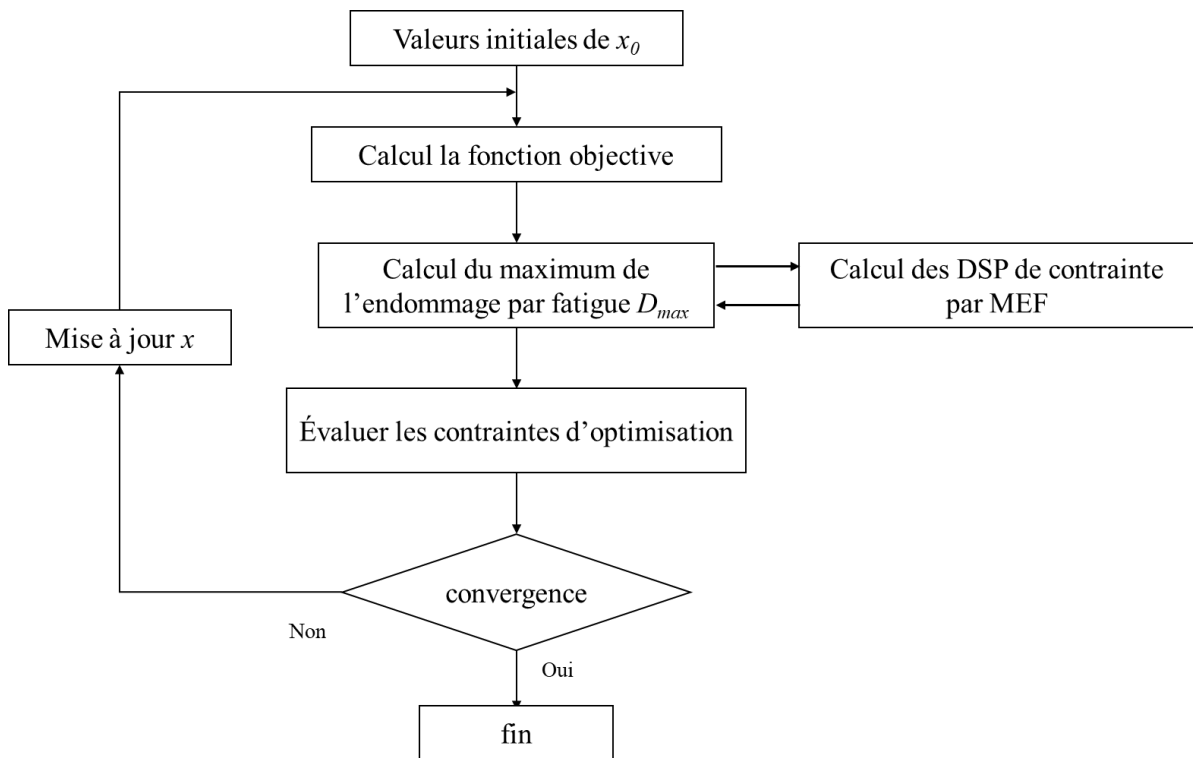


Figure 3-15 : Algorithme d'optimisation des structures soumises à des vibrations aléatoires

Notre objectif maintenant, est de trouver la meilleure conception d'une structure soumise à des vibrations aléatoires. A partir de l'algorithme de la Figure 2-6 on a pu déterminer la moyenne de l'endommagement par fatigue à chaque point de la structure. Ainsi, il n'y a pas prorogation de la fissure que si la condition de l'équation (59) n'est pas vérifié. D'une autre façon, la structure est endommagée si le maximum de fatigue dépasse un.

La Figure 3-15 montre l'algorithme d'optimisation des structures soumises à des vibrations aléatoires, d'une façon générale. La première étape consiste à évaluer la fonction objective à partir des valeurs initiales des variables de conceptions. Ensuite la moyenne de l'endommagement par fatigue est calculée à chaque point de la structure à partir des DSP de contrainte obtenue par la méthode des éléments finis (Figure 1-11). Le maximum de ces valeurs ainsi que les autres contraintes d'optimisation sont évalués ensuite. Le programme s'arrête s'il y a convergence. Sinon une mise à jour des variables de conception et on répète à partir de la deuxième étape.

## V.2 Procédures des méthodes DDO et RBDO

Notons  $x$  le vecteur des variables déterministes de conception et  $y$  le vecteur des variables aléatoires de conception. On peut définir aussi, le point de départ (point initial)  $x_0$ , le point de conception  $y^*$  et le point optimal  $x^*$ .

Dans l'approche DDO, nous considérons un facteur de sécurité global  $S_f$  appliqué à l'endommagement  $D_{max}$  et basé sur l'expérience en ingénierie. Ainsi, la conception optimale de la structure ne doit pas dépasser les valeurs maximales admissibles. Par conséquent, le problème d'optimisation DDO peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ t. q \ D_{max}(x) \leq D_w \end{aligned} \tag{115}$$

La procédure DDO ne tient pas en compte la contrainte de fiabilité. Donc, il y a besoin d'utiliser les méthodes RBDO.

En utilisant le problème de la méthode hybride, qui est présenté dans l'équation.(97), la fonction objective devient une multiplication de la fonction  $f(x)$  par la distance dans l'espace hybride de conception entre le point de conception et le point optimal, comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) &= f(x) \times d_{\beta}(x, y) \\ t. q \quad &\begin{cases} D_{max}(y) \leq 1 \\ d_{\beta}(x, y) \geq \beta_t \end{cases} \end{aligned} \quad (116)$$

Pour résoudre les problèmes de la méthode hybride classique, la méthode RHM est ensuite proposée. Elle consiste à ajouter une troisième contrainte au problème d'optimisation. Le problème d'optimisation de la méthode hybride robuste est alors :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) &= f(x) \times d_{\beta}(x, y) \\ t. q \quad &\begin{cases} D_{max}(y) \leq 1 \\ d_{\beta}(x, y) \geq \beta_t \\ f(x) \geq f(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (117)$$

Pour obtenir la solution optimale par la méthode OSF, nous devons déterminer le point de conception comme première étape. Ce point de conception est obtenu en résolvant le problème d'optimisation défini par la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \min_y f(y) \\ t. q \quad D_{max}(y) \leq 1 \end{aligned} \quad (118)$$

Ensuite, on calcule les facteurs de sécurité à partir des dérivées de la fonction d'état limite  $D_{max}$ . La solution optimale est ensuite calculée en divisant les valeurs des points de conception par les facteurs de sécurité calculés.

### V.3 Applications

#### V.3.1 Application d'une structure en fatigue multiaxiale

##### viii- Description du problème

Prenons l'exemple de la plaque soumise à des vibrations aléatoire présenté dans la Figure 1-14 Dans le deuxième chapitre on a pu déterminer la moyenne de l'endommagement par fatigue à chaque point de la pièce (Figure 2-7).

L'objectif maintenant est de minimiser le volume  $V$  de la pièce sous la contrainte de fatigue  $D_{max}$ . En plus de l'état limite de fatigue, la distance  $d_\beta$  devrait être supérieure ou égale à l'indice de fiabilité cible  $\beta_t$ . Dans notre cas,  $\beta_t$  est égal à trois ce qui correspond à une probabilité d'échec presque égale à  $10^{-3}$ . Les variables de calcul sont le rayon du trou  $R_1$ , le rayon de l'entaille  $R_2$  et l'épaisseur  $e$  de la plaque (voir Figure 1-14). Ces variables de conception sont normalement distribuées et le coefficient de variance  $\gamma$  de chaque variable est égal à 0,1.  $m_{R_1}$ ,  $m_{R_2}$  et  $m_e$  sont respectivement les valeurs moyennes de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $e$ .

La fonction objective est exprimée par l'équation (119) Avec  $A_1$  est l'aire des deux rectangles pleins,  $A_2$  est l'aire de la troue,  $A_3$  est l'aire de l'entaille,  $A_4$  et  $A_5$  sont les aires des deux congés (Figure 3-16). Notons que  $A_1$ ,  $A_4$  et  $A_5$  ne dépendent pas des variables de conception. L'équation (120) définit la fonction objective en fonction des variables de conceptions.

$$V = e(A_1 - A_2 - A_3 - A_4 + A_5) \quad (119)$$

$$V = e \cdot A_1 - \pi \cdot e \cdot R_1^2 - 2 \cdot e \cdot R_2^2 \cos^{-1} \left( \frac{8.5}{R_2} \right) + 17 \cdot e \cdot R_2 \sqrt{1 - \left( \frac{8.5}{R_2} \right)^2} - e \cdot A_4 + e \cdot A_5 \quad (120)$$

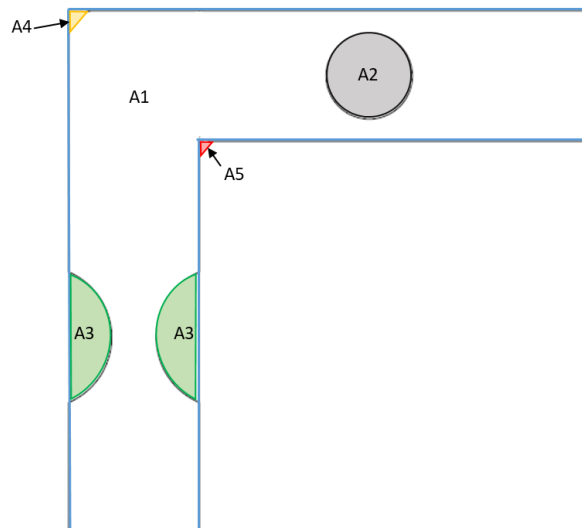


Figure 3-16: Méthodologie de calcul du volume

Pour minimiser le temps de calcul, il est important, s'il y a possibilité, de déterminer les dérivées de la fonction objective par rapport des variables de conception. Equation (121) présente les dérivés de la fonction volume de l'équation (120).

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial R_1} = -2\pi \cdot e R_1 \\ \frac{\partial V}{\partial R_2} = -4 \cdot e \cdot R_2 \cos^{-1} \left( \frac{8.5}{R_2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial e} = A_1 - A_2 - A_3 - A_4 + A_5 \end{cases} \quad (121)$$

**ix- Résultats et discussion**

Dans cette section, nous allons présenter et comparer les résultats des différentes méthodes étudiées précédemment.

Le Tableau 3-3 présente les résultats de la méthode DDO. La solution optimale satisfait la contrainte de l'endommagement par fatigue mais le niveau de fiabilité est inférieur au niveau de fiabilité cible  $\beta_t$

Tableau 3-3: Résultats de la méthode DDO

		<b>Valeurs initiales <math>x_0</math></b>	<b>Point de conception <math>y^*</math></b>	<b>Solution optimale <math>x^*</math></b>
<b>Variable de conception</b>	$R_1$	15	17	16.53
	$R_2$	22	24.12	22.37
	$e$	2	0.96	1.06
<b>Fonction objective</b>	$V$	31 868.82	14 911.01	16 757.96
<b>Contrainte d'optimisation</b>	$D_{max}$	0.137	1	0.799
	$\beta$			1.27

Les résultats de la méthode hybride sont présentés dans le Tableau 3-4. On peut clairement voir que le point optimal résultant est dans le domaine de défaillance ( $D_{max} > 1$ ) alors que la distance entre le point optimal et le point de conception  $\beta$  donne un niveau acceptable de fiabilité.

Tableau 3-4 : Résultats de la méthode hybride

		Valeurs initiales $y_0$	Valeurs initiales $x_0$	Point de conception $y^*$	Solution optimale $x^*$
<b>Variable de conception</b>	$R_1$	16.5	15	16.58	17
	$R_2$	25	22	25.98	26
	$e$	0.8	2	1.17	0.9
<b>Fonction objective</b>	$V$	12357.91	31 868.83	17957.41	13782.28
<b>Contrainte d'optimisation</b>	$D_{max}$	2.564	0.13	1.0001	<b>2.34</b>
	$\beta$		6.23		3

Tableau 3-5 : Résultat de la méthode RHM

		Valeurs initiales $y_0$	Valeurs initiales $x_0$	Point de conception $y^*$	Solution optimale $x^*$
<b>Variable de conception</b>	$R_1$	16.5	16	17	14.16
	$R_2$	25	21	26	21.36
	$e$	0.8	1.5	1.16	1.11
<b>Fonction objective</b>	$V$	12357.91	23905.73	17829.22	17829.22
<b>Contrainte d'optimisation</b>	$D_{max}$	2.56	0.27	1	<b>0.77</b>
	$\beta$		5.05		3

Les résultats de la méthode RHM sont présentés dans le Tableau 3-5. Notez que la solution optimale est dans la zone de sécurité et que le niveau de fiabilité est vérifié. Ce changement a également contribué à minimiser le temps de calcul. En fait, le temps de calcul de la nouvelle formulation est d'environ 8 heures alors que pour la méthode hybride classique, le temps de



calcul est environ 27 heures sans faisable résultat. L'efficacité de cette nouvelle formulation est ensuite montrée.

Le Tableau 3-6 montre les résultats de la méthode OSF. Pour trouver ces résultats, une analyse de sensibilité est nécessaire pour montrer l'influence de divers paramètres sur le maximum de l'endommagement par fatigue. Le Tableau 3-7 définit la sensibilité (dérivée) du maximum du dommages en fonction des différentes variables de conception.

Avec la méthode OSF, le temps de calcul est d'environ 7 heures. Cette méthode a permis de minimiser le temps de calcul par rapport à la méthode DDO et à la méthode hybride. Cependant, il est négligeable par rapport à la méthode hybride robuste. De plus, la valeur de la fonction objective du point optimal obtenue par la méthode hybride robuste est inférieure à celle fondée par la méthode OSF ( $V_{OSF}^* > V_{RHM}^*$ ).

Tableau 3-6 : Résultats de la méthode OSF

		Valeurs initiales $x_0$	Point de conception $y^*$	Variables normés $u^*$	OSF $S_f$	Solution optimale $x^*$
Variable de conception	R <sub>1</sub>	15	17	0.2271	1.023	16.62
	R <sub>2</sub>	22	24.12	0.2009	1.02	23.64
	e	2	0.962	-2.9846	0.7	1.37
Fonction objective	V	31 868.82	14 911.01			21 384.57
Contrainte d'optimisation	$D_{max}$	0.1372	1.0001			0.36
	$\beta$					3

Tableau 3-7 : Analyse de sensibilité du maximum d'endommagement

$\frac{\partial D_{max}}{\partial R_1}$	$\frac{\partial D_{max}}{\partial R_2}$	$\frac{\partial D_{max}}{\partial e}$
0.017	0.013	-2.993

Pour vérifier l'efficacité de la méthode RHM en changeant le point initial, le problème d'optimisation a été résolu avec différents points initiaux. On peut constater que, dans la plupart des cas, l'optimisation RHM converge vers une solution faisable. Le Tableau 3-8 présente les différents points initiaux où le programme a convergé. Notons que ces points sont choisis arbitrairement.

La Figure 3-17 présente les fonctions objectives initiales  $V_{x_0}$  et  $V_{y_0}$  (courbes noires) et les fonctions objectives optimales  $V_x^*$  et  $V_y^*$  (courbes rouges) calculées pour chaque point initial. Une brève analyse de ces résultats montre que le problème d'optimisation RHM converge presque vers le même point optimal (voir la courbe rouge de la Figure 3-17). On peut conclure donc, que la méthode RHM est une méthode efficace et robuste et peut conduire à la même solution optimale en considérant différents points initiaux.

Tableau 3-8 : Différents points initiaux pour la méthode RHM

		Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	Point 5	Point 6
$x_0$	$R_{10}^x$	16	14	16	16	17	16
	$R_{20}^x$	21	26	21	21	21	20
	$e_0^x$	1.5	1.8	1.5	1.5	1.3	0.7
	$V_{x_0}$	23905.73	28010.47	23905.73	23905.73	20583.53	11221.6
	$D_{max}^{x_0}$	0.29	0.32	0.29	0.29	0.41	2.55
$y_0$	$R_{10}^y$	16.5	17	17	16.5	17	15
	$R_{20}^y$	25	24	24	25	23	22
	$e_0^y$	0.8	0.6	0.6	0.8	0.8	1.2
	$V_{y_0}$	12357.91	9308.38	9308.38	12357.91	12501.47	19121.29
	$D_{max}^{y_0}$	2.56	3.74	3.74	2.56	1.75	0.53

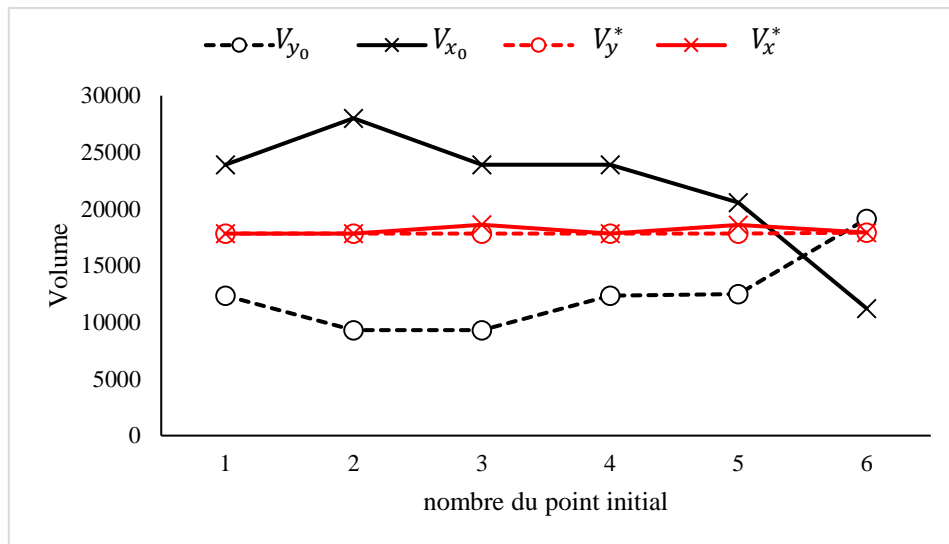


Figure 3-17 : Valeurs de la fonction objective au point initial et au point optimal pour des différents points initiaux

En conséquence, la méthode RHM fournit les meilleurs résultats par rapport aux autres méthodes, pour la résolution d'un problème RBDO des structures soumises à des vibrations aléatoires multiaxiales. Elle peut résoudre les problèmes de fiabilité par rapport au modèle DDO et éviter le défaut de trouver le point optimal dans la zone de défaillance.

Étudions maintenant l'influence de l'excitation sur la solution optimale. Plus précisément, on va étudier l'impact de la valeur du bruit blanc DSP de l'excitation  $\Phi_a$  sur le point optimal.

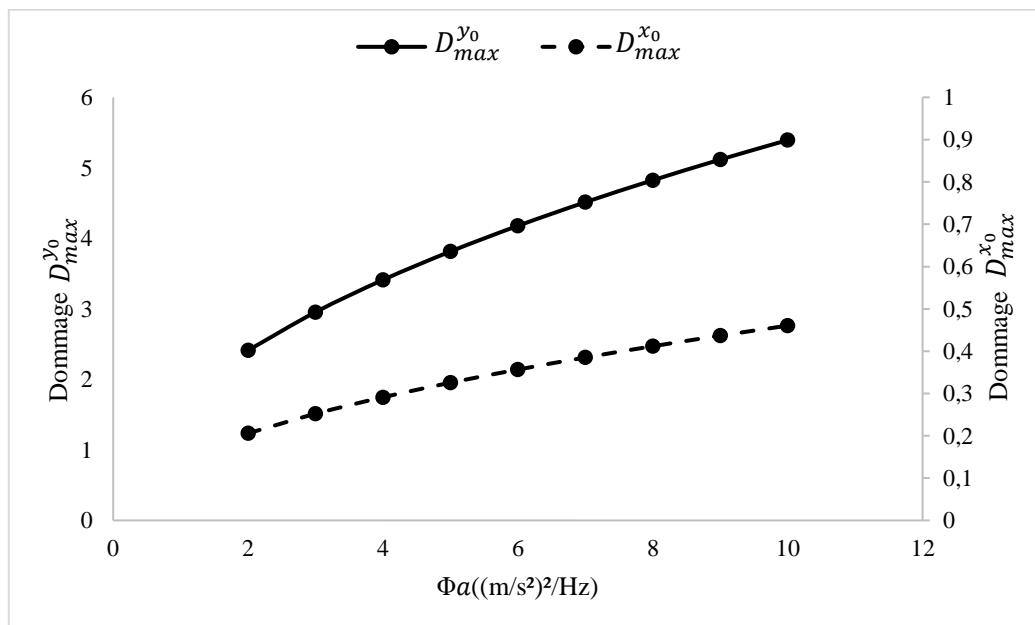


Figure 3-18 : Influence de l'excitation sur le maximum de l'endommagement au point initial

La Figure 3-19 présente la variation du volume et le maximum de l'endommagement par fatigue au point optimal en fonction du DSP de l'excitation. Cette figure montre que le volume optimal de la structure augmente si le DSP de l'excitation augmente. Cependant, on peut observer que les valeurs de l'endommagement au point optimal sont presque les mêmes pour toutes les configurations et ne changent pas si la valeur d'excitation change. Notons qu'à chaque point optimal obtenu, la fiabilité de la conception optimale est respectée  $\beta = \beta_t$ .

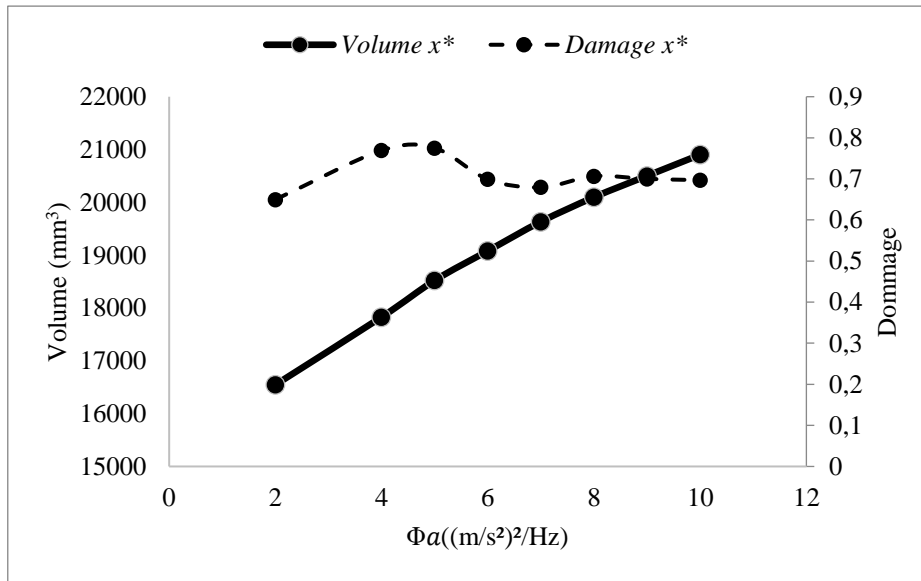


Figure 3-19 : Influence de l'excitation sur la fonction objective et l'endommagement maximal au point optimal

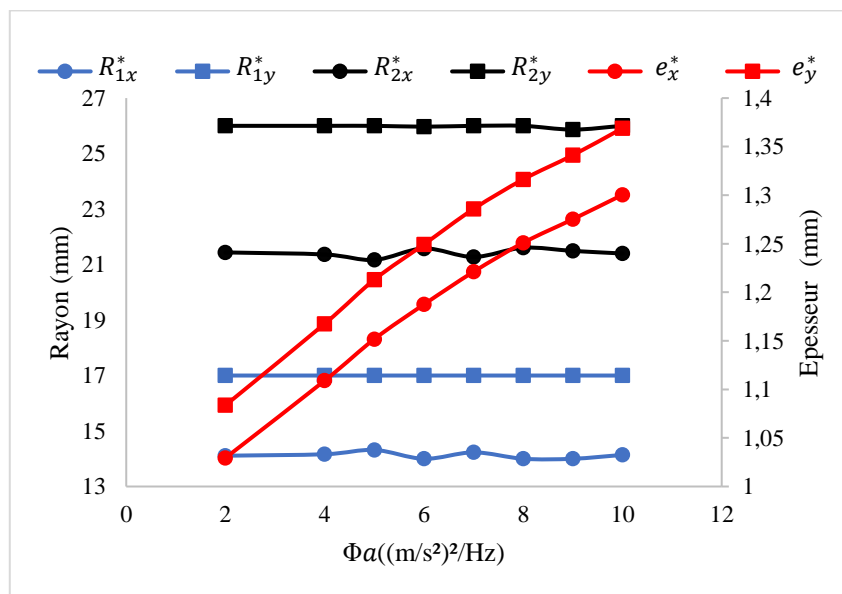


Figure 3-20 : Influence de l'excitation sur les variables de conception au point optimal

La variation des variables de conception en fonction du DSP de l'excitation est présentée dans la Figure 3-20. Les variables de conception au point optimal  $x^*$  sont représentées par des cercles et les variables d'optimisation au point de conception  $y^*$  sont présentées par des carrés, pour chaque variation du DSP de l'excitation. Les lignes bleues présentent la variation du rayon du trou  $R_1$ , les lignes noires présentent la variation du rayon de l'entaille  $R_2$  et les lignes rouges présentent la variation d'épaisseur. On peut observer que les rayons optimaux ne changent pas si la DSP de l'excitation change. Cependant, l'épaisseur optimale de la plaque augmente si la DSP augmente. On peut conclure que la variation de volume pour chaque DSP (voir Figure 3-19) est causée par la variation de l'épaisseur.

### V.3.2 Application d'une structure en fatigue uniaxiale

#### i- Description du problème

Prenons maintenant l'exemple de la poutre en flexion simple présenté dans la Figure 1-12. Dans le chapitre 2 on a calculé l'endommagement par fatigue par différentes méthodes spectrales uniaxiales (Tableau 2-2). Plusieurs études ont montré que la méthode Single Moment est la plus efficace par rapport aux autres méthodes spectrales.

L'objectif est maintenant de trouver la conception optimale de la poutre qui garantit le niveau de fiabilité requis ( $\beta > \beta_t$ ). Les variables de conception sont la largeur  $B$  et la hauteur  $H$  de la section transversale. La fonction objective est le volume  $V$  et la fonction d'état limite est la moyenne des dommages de fatigue calculés par la méthode Single Moment.

De la même façon que l'exemple précédent, on va appliquer les différentes méthodes étudiées afin de comparer entre eux.

#### ii- Résultats et discussion

Le Tableau 3-9 présente la conception optimale obtenue par les différentes méthodes DDO et RBDO. Ces résultats ont montré que la méthode RHM donne des meilleurs résultats par rapport aux autres méthodes, pour des problèmes d'optimisation fiabiliste de structures soumises à des vibrations aléatoires. En fait, la conception optimale obtenue par la méthode DDO ne vérifie pas le niveau de fiabilité requis ( $\beta < \beta_T$ ), la méthode hybride converge vers

un point dans la zone de défaillance ( $D_x^* > 1$ ). En plus le volume obtenu par la méthode RHM est moins que celui obtenue par la méthode OSF, pour un temps de calcul très proche. Ces résultats sont confrontés avec ceux trouvés pour le problème d'optimisation fiabiliste en fatigue multiaxiale.

Tableau 3-9 : Résultats d'optimisation par les méthodes DDO et RBDO de la poutre en flexion

		<b>DDO</b>	<b>OSF</b>	<b>HM</b>	<b>RHM</b>
<b>Point de conception*</b>	$B_y^*$ (cm)	1.68	1.68	1.68	1.68
	$H_y^*$ (cm)	0.5	0.5	0.5	0.55
	$D_y^*$	1	1	1	1
	$V_y^*$ (cm <sup>3</sup> )	25.2	25.2	25.2	28.1
<b>Point Optimal <math>x^*</math></b>	$B_x^*$ (cm)	1.791	1.98	1.46	1.873
	$H_x^*$ (cm)	0.5	0.5	0.5	0.5
	$D_x^*$	0.8	0.55	1.66	0.68
	$V_x^*$ (cm <sup>3</sup> )	26.868	29.73	21.98	28.1
	$\beta$	1.18	3	3	3
	<b>Time (s)</b>	220	91	349	117

## VI. Extension des méthodes RBDO pour d'autres domaines d'applications

### VI.1 Optimisation fiabiliste d'un système vibro-acoustique

Le problème de l'interaction entre des structures vibrantes flexibles et une cavité fermée, est un domaine complexe qui a été le sujet de recherche dans différents domaines tels que les compartiments automobiles, les cabines d'avions, etc. Une excellente revue [80] [81] a été faite pour étudier le comportement vibro-acoustique d'un tel système, tels que l'interaction modale des systèmes couplés acoustique-structurel. Dans [82], les auteurs ont présenté un modèle analytique du système acoustique-structurel dans lequel la réponse couplée a été obtenue à partir des caractéristiques modales des systèmes non couplés. Dammak et al. [83] ont étudié la

réponse vibro-acoustique d'une cabine de véhicule en présence des incertitudes. De nombreux auteurs ont appliqué des techniques numériques telles que la méthode des éléments finis [84] [85] [86] [87], pour déterminer les résonances d'une cavité de forme irrégulière. Dammak et al. [47] ont intégré la méthode OSF combiné au chaos polynomial généralisé dans le système acoustique-structural.

Dans cette application, on propose une formulation analytique d'un système couplé acoustique-structurel. Ce système consiste en deux plaques flexibles couplées à une cavité rectangulaire acoustique. La Figure 3-21 présente un schéma d'une cavité rectangulaire avec 4 parois rigides couplées à deux plaques flexibles simplement supportées sur la surface haute ( $z = L_z$ ) et le fond ( $z = 0$ ). Une force ponctuelle harmonique agit sur la plaque 1 qui fournit la vibration. La plaque vibrante génère une pression acoustique à l'intérieur de la cavité.

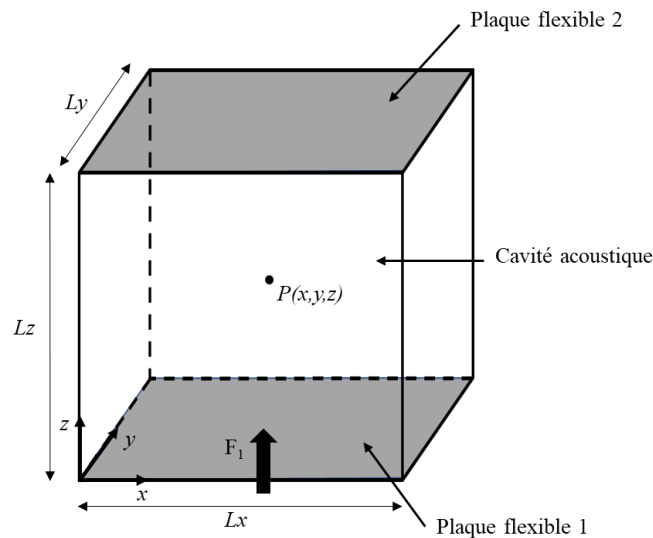


Figure 3-21: Schéma des deux plaques supportées et attachées à l'extrémité d'une cavité rectangulaire à parois rigides

Le déplacement d'un point quelconque sur les plaques flexibles peut être décrit en termes de sommation des facteurs de participation modaux  $u_{i,m}$  et de ses formes de mode  $\phi_m$  [47] [88]

$$u_i(x, y) = \sum_{m=1}^{N_s} \phi_m(x, y) u_{i,m} \quad (122)$$

Avec  $N_s$  est le nombre des modes structuraux.

La pression acoustique à l'intérieur de la cavité peut être décrite en termes de sommation des facteurs de participation modaux acoustiques,  $p_n$ , et de ses formes de mode  $\psi_n$  [47] [88]

$$p(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_a} \psi_n(x, y, z) p_n \quad (123)$$

Avec  $N_a$  est le nombre des modes acoustiques

Les équations du mouvement des deux plaques et de la cavité acoustique peuvent être réarrangées en une matrice comme indiqué dans l'équation (124) [47]

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{1,m}(\omega_{1,m}^2 - \omega_1^2) & [0] & -S_1[C_{1,nm}]^T \\ [0] & \Lambda_{2,m}(\omega_{2,m}^2 - \omega_2^2) & -S_2[C_{2,nm}]^T \\ (-\omega_1^2)S_1[C_{1,nm}]^T & (-\omega_2^2)S_2[C_{2,nm}]^T & \frac{\Lambda_n}{\rho_0 c^2} (2\omega_n^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,m} \\ u_{2,m} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (124)$$

Avec :

$\Lambda_{i,m}$  est la masse modale de la plaque simplement supportée,

$\omega_{i,m}$  sont les fréquences propres d'une plaque rectangulaire simplement supportée

$\omega_n$  sont les fréquences propres d'une cavité acoustique rectangulaire à paroi rigide

$\Lambda_n$  est le volume modal de la cavité rectangulaire

$F_m$  est la force modale agissant sur la plaque 1

$S_1$  et  $S_2$  sont les aires des surfaces de la plaque 1 et de la plaque 2 respectivement

$C_{1,nm}$  et  $C_{2,nm}$  sont les coefficients sans dimension de couplage entre les modes acoustiques et les modes structurels.

Les dimensions et les propriétés du système couplé sont présentés dans le Tableau 3-10.

L'objectif maintenant est de minimiser la masse totale  $M$  des plaques d'aluminium sous la contrainte de pression acoustique  $P_{max}$  ( $P_{max} < 50$ ). Les variables de conception sont l'épaisseur  $h_1$  et  $h_2$  des deux plaques. Ces variables sont normalement distribuées et le coefficient de variance de chaque variable est égal à 0,1,  $m_{h1}$  et  $m_{h2}$  sont respectivement les valeurs moyennes de  $h_1$  et  $h_2$ .



Le Tableau 3-11 présente les résultats trouvés par les différentes méthode DDO et RBDO. La solution optimale obtenue par la méthode DDO, satisfait la contrainte de la pression acoustique mais, le niveau de fiabilité est supérieur au niveau de fiabilité cible.

Tableau 3-10 : Dimensions et propriétés du système couplé

<b>Paramètre</b>	<b>Description</b>	<b>Valeur</b>
$c$	Vitesse du son	344 m/s <sup>2</sup>
$\rho_a$	Densité de l'air	1.21 kg/m <sup>3</sup>
$L_x \times L_y \times L_z$	Dimension de la cavité	0.5 × 0.3 × 1.1 m
$l_x \times l_y \times h$	Dimension de la plaque	0.5 × 0.3 × 0.006
$E$	Module d'Young (plaque)	70 GPa
$\nu$	Coefficient de poisson (plaque)	0.3
$\rho_p$	Densité de la plaque	2700 kg/m <sup>3</sup>
$F_z$	Amplitude de la force	1 N
–	Point d'excitation	0.1 × 0.075 × 0 m
–	Point de mesure	0.125 × 0.15 × 0.875 m
–	Bande de fréquence	[0-400] Hz

On remarque que, pour la méthode OSF, la pression acoustique maximale dans la bande de fréquences 0-400 Hz ne satisfait pas la condition de contrainte ( $P_{max} = 117.91 > 50\text{Pa}$ ) et la masse globale des plaques est de 2.33 kg. En plus, les variables de conception du point optimal, ne sont pas dans l'intervalle requis ( $3\text{mm} \leq h_i \leq 9\text{mm}$ ). On peut conclure donc que la méthode OSF n'est pas stable dans tous les cas.

Il est clair que le point optimal résultant par la méthode hybride est dans le domaine de défaillance ( $P_{max} = 345.99 > 50\text{Pa}$ ) tandis que la distance entre le point optimal et le point de conception, donne un niveau acceptable de fiabilité.

Tableau 3-11 : Résultats d'optimisation par les méthodes DDO et RBDO du système couplé acoustique-structurel

		<b>DDO</b>	<b>OSF</b>	<b>HM</b>	<b>RHM</b>
<b>Point de conception*</b>	$h_{1,y}^*$ (mm)	3	3	8.1	8.1
	$h_{2,y}^*$ (mm)	3.8	3.8	3	3
	$P_{max,y}^*$ (Pa)	50	50	49.99	50
	$M_y^*$ (Kg)	2.73	2.73	4.49	4.49
<b>Point Optimal <math>x^*</math></b>	$h_{1,x}^*$ (mm)	7.1	2.9	6.2	7
	$h_{2,x}^*$ (mm)	3	2.9	3	4.1
	$P_{max,x}^*$ (Pa)	41.67	117.91	345.99	11.27
	$M_x^*$ (Kg)	3.87	2.33	3.73	4.49
	$\beta$	8.59	3	3	3

Il est nécessaire de noter que la solution optimale de la méthode RHM est dans le domaine de la sécurité et le niveau de fiabilité est vérifié. Avec cette modification de la méthode hybride classique, le temps de calcul été réduit de manière efficace. En fait, le temps de calcul du nouveau RHM est d'environ 111.55s tandis que la méthode hybride conventionnelle a fait environ 242.57s sans solution réalisable trouvée pour le même point initial.

## **VI.2 Optimisation fiabiliste d'un actionneur en alliage à mémoire de forme pour micro-pompe**

Au cours des dernières décennies, la technologie du micro-usinage a suscité un intérêt croissant dans divers domaines tels que l'automobile, l'aérospatial, la communication, le médical, le génie civil, la robotique [89-101]. Certains microsystèmes nécessitent un actionneur efficace pour des applications sensibles. Les matériaux intelligents, tels que les céramiques piézoélectriques ou les alliages à mémoire de forme (*Shape Memory Alloy SMA*) ont souvent été pris en compte pour la conception de microcomposants et / ou de micro-dispositifs [102-111]. Les actionneurs SMA sont parmi les micro-appareils les plus utilisés pour réaliser une telle application car ils sont caractérisés par un comportement thermomécanique très spécial.

L'actionneur SMA convertit l'énergie électrique ou thermique d'entrée en une sortie sous forme de mouvement mécanique. Une large gamme d'actionneurs SMA pour micro-pompes et micro-valves a été proposée dans la littérature [108] [112-121] parmi lesquelles, un actionneur composé de deux membranes NiTi est proposé [113] [114] [120]. Ces deux membranes fonctionnent de manière antagoniste et l'actionnement est toujours obtenu par chauffage. Le chauffage d'une membrane donne un déplacement d'actionnement dans une direction (entrée du fluide) où le chauffage de l'autre membrane permet le déplacement d'actionnement opposé (sortie de fluide). Pendant le chauffage de n'importe quelle membrane, l'autre est librement refroidie. Grâce à l'espaceur inséré entre les membranes, les transformations directes et inverses se produisent sous la contrainte de flexion. Le comportement d'une telle SMA micro-pompe a été analysé dans [120].

### **VI.2.1 SMA micro-pompe**

La Figure 3-22 présente la géométrie de la SMA micro-pompe. Elle est constituée de deux membranes NiTi en état martensitique à température ambiante. Initialement, ils ont une forme plate et ensuite ils sont collés ensemble avec un espaceur intermédiaire. La Figure 3-23 montre le chargement appliqué sur les deux membranes. La première étape (0-1) correspond au processus d'orientation des deux membranes NiTi en appliquant une charge mécanique à température ambiante, les membranes sont collées ensemble avec une couronne dans le contour

extérieur, et avec un espaceur intermédiaire. Les étapes 1-3 correspondent respectivement au chauffage et au refroidissement de la membrane supérieure (ligne rouge continue), pendant cette étape la membrane inférieure est librement refroidie (ligne bleue pointillée). Le cycle complet (étapes 0-1, 1-2 et 2-3) est connu comme effet de mémoire de forme (SME). Les étapes 3-5 correspondent au chauffage et au refroidissement de la membrane inférieure tandis que la membrane supérieure est refroidie.

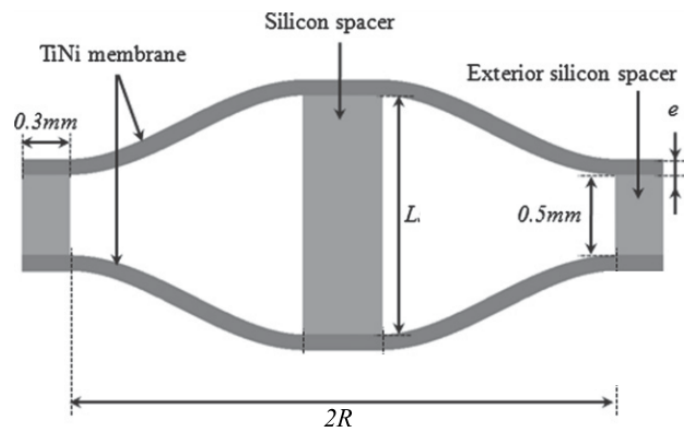


Figure 3-22: Section transversale de l'actionneur en alliage de mémoire de forme (SMA) [120]

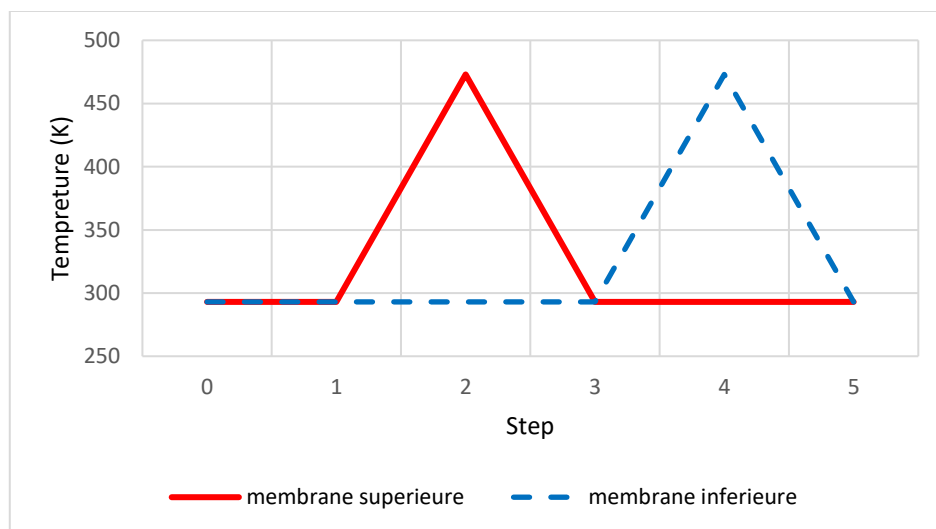


Figure 3-23: Chargement thermique sur les membranes

### VI.2.2 Description du problème

La forme de la SMA micro-pompe est caractérisée par une épaisseur de 0,01 mm et un diamètre de 3 mm. L'espaceur intermédiaire entre les deux membranes est de 1,5 mm de longueur et de 0,5 mm de diamètre. Le Tableau 3-12 présente les propriétés de matériau des deux membranes en NiTi [122]

Tableau 3-12: Paramètres de matériau des membranes en NiTi

<b>E</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>\beta</math></b>	<b>h</b>	<b>R</b>	<b><math>M_f</math></b>	<b><math>\epsilon_L</math></b>
53000MPa	0.36	2.1MPa°K <sup>-1</sup>	1000MPa	50MPa	223°K	0.04

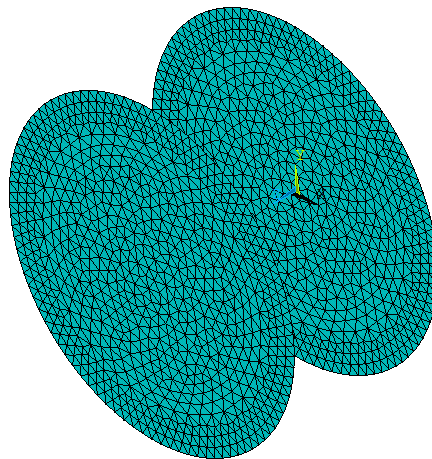


Figure 3-24: Modèle 2D avec élément coque

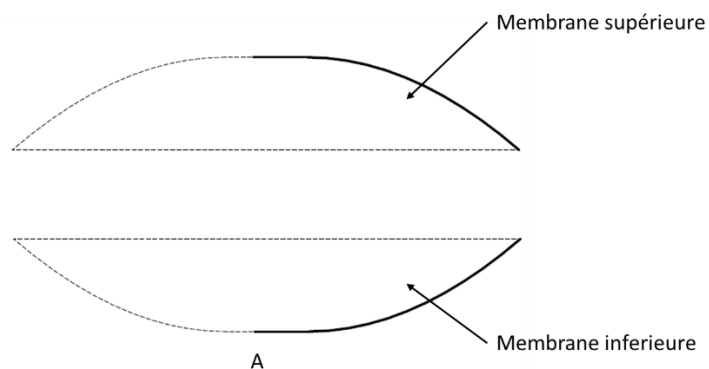


Figure 3-25: Modèle axisymétrique

Les membranes ont été modélisés en utilisant l'élément coque (*shell element*). Chaque élément a trois nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud (Figure 3-24). Afin de minimiser le temps de calcul, les membranes ont été modélisées en utilisant le modèle axisymétrique. Chaque élément a deux nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (Figure 3-25). On suppose que l'espaceur et la couronne extérieure ont un comportement élastique avec une rigidité élevée.

La Figure 3-26 présente une comparaison du déplacement de la micro-pompe au cours des étapes en utilisant le modèle de coque 2d (ligne pointillée rouge) et le modèle axisymétrique (ligne pleine bleue). Le déplacement augmente avec l'augmentation de la température de chauffage. Au cours des étapes de refroidissement 2-3, il semble que l'actionneur commence à se déplacer à une température d'environ 50 ° C.

À partir de la Figure 3-26, les résultats présentent un bon accord pour les deux modèles. Avec ce modèle simplifié, le temps de calcul a été significativement réduit. Pour cela, ce modèle sera utilisé dans le problème d'optimisation.

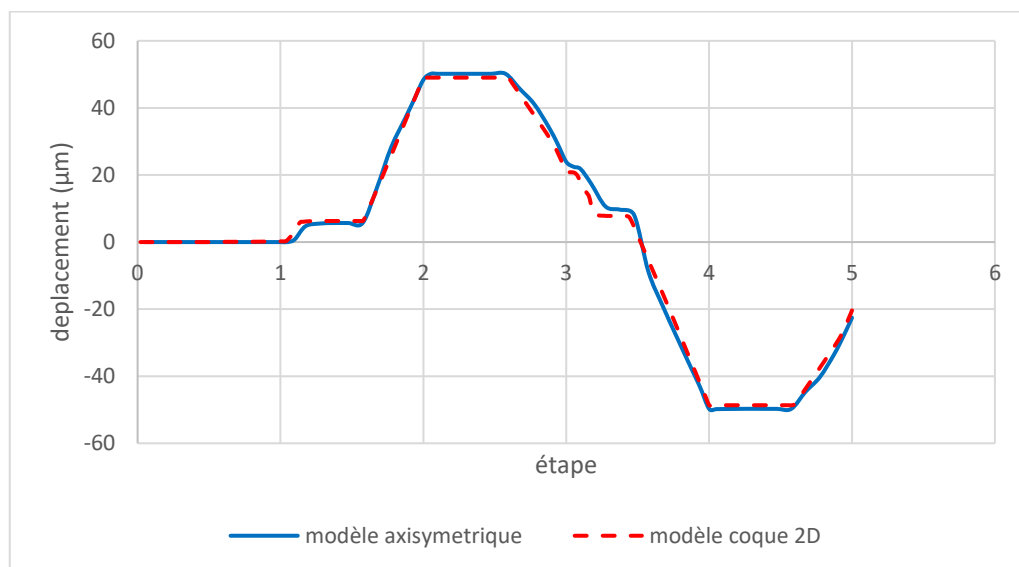


Figure 3-26 : Déplacement en fonction des étapes

L'objectif maintenant est de trouver le meilleur compromis entre le volume occupé par l'actionneur SMA, le maximum de déplacement et la température de chauffage. Notons que, lorsque le matériau SMA est soumis à une contrainte très importante, la plasticité se produit après le domaine élastique de martensite, puis une rupture est induite. Par conséquent, pour

l'analyse de fiabilité du matériau, la contrainte maximale ne doit pas dépasser une limite fixée à  $S_L = 500MPa$  [123].

Les variables de conception sont le rayon de la micro-pompe  $R$ , la longueur d'espaceur  $L$ , l'épaisseur  $e$  des membranes et la température de chauffage  $T$ . (voir Figure 3-22). Ces variables de conception sont normalement distribuées et le coefficient de variance  $\gamma = \frac{\sigma}{m}$  de chaque variable est égal à 0,1.  $m_R, m_L, m_e$  et  $m_T$  sont respectivement les valeurs moyennes de  $R, L, e$  et  $T$ .

### VI.2.3 DDO et RBDO

Notons  $x = \{x_i\}_{i=1,2,3,4}$  le vecteur des variables déterministes  $R, L, e$  et  $T$  présenté par ces moyennes ( $x = \{m_R, m_L, m_e, m_T\}$ ) et  $y$  le vecteur des variables aléatoires ( $y = \{R, L, e, T\}$ ). On définit aussi: le point de départ  $x_0 = \{x_{i0}\}_{i=1,2,3,4} = \{R_0, L_0, e_0, T_0\}$ , le point de conception  $y^* = \{y_i^*\}_{i=1,2,3,4} = \{R_y^*, L_y^*, e_y^*, T_y^*\}$  et le point optimal  $x^* = \{x_i^*\}_{i=1,2,3,4} = \{R_x^*, L_x^*, e_x^*, T_x^*\}$ .

La fonction objective du problème d'optimisation est définie par l'équation (125) avec  $D_{max}$  est le maximum du déplacement.  $T$  est la température de chauffage appliquée sur les deux membranes (étape 2 et étape 4).  $V$  est le volume occupé par la micro-pompe. Il peut être déterminé en utilisant les variables géométriques  $R, L$  et  $e$ . Ici, le volume est supposé être le cylindre contenant l'actionneur. Il peut être calculé par l'équation (126)

$$f(x) = \frac{V \cdot T}{D_{max}} \quad (125)$$

$$V = \pi R^2 \times (L + 2e) \quad (126)$$

Problème DDO :

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & s. t \ S_{max}(x) \leq S_w = \frac{S_L}{S} = 350MPa \end{aligned} \quad (127)$$

Problème de la méthode hybride

$$\min_{x,y} F(x, y) = f(x) \times d_\beta(x, y) \quad (128)$$

$$s. t \begin{cases} S_{max}(y) \leq S_L \\ d_\beta(x, y) \geq \beta_t \end{cases}$$

Problème de la méthode RHM

$$\min_{x,y} F(x, y) = f(x) \times d_\beta(x, y)$$

$$s. t \begin{cases} S_{max}(y) \leq S_L \\ d_\beta(x, y) \geq \beta_t \\ f(x) \geq f(y) \end{cases} \quad (129)$$

### VI.2.4 Improved Robust Hybrid Method

Dans certains cas de problèmes d'optimisation, la fonction objective du point optimal est inférieure à la fonction objective du point de conception ( $f(x^*) < f(y^*)$ ). Le RHM classique ne prend pas en compte ces cas, mais il peut au contraire converger vers une solution irréalisable, où le point optimal est situé dans la région défailante. Une méthode RHM améliorée (*Improved Robust Hybrid Method IRHM*) est donc proposée pour résoudre ce problème.

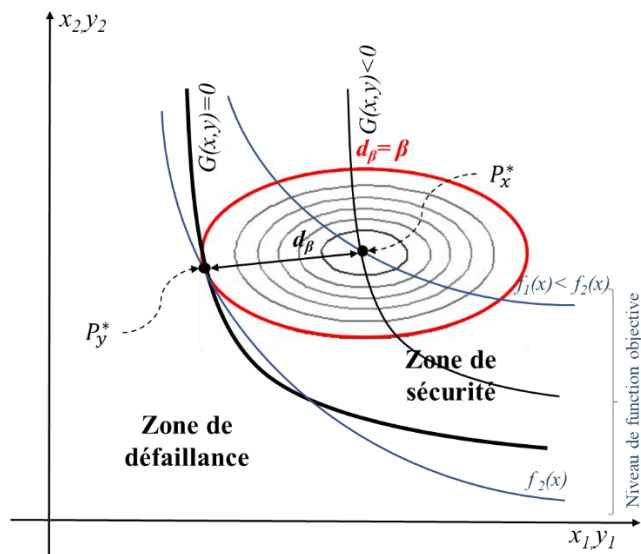


Figure 3-27 : IRHM dans le HDS

En fait, pour être plus général, la contrainte ajoutée dans le problème d'optimisation doit être liée à la fonction d'état limite au lieu de la fonction objective. La Méthode IRHM peut alors être définie par :



$$\min_{x,y} F(x, y) = f(x) \times d_{\beta}(x, y)$$

$$s. t \begin{cases} G(x, y) \leq 0 \\ g_k(x) \leq 0, k = 1 \dots K \\ \beta(x, u) \geq \beta_t \\ G(x) \leq G(y) \end{cases} \quad (130)$$

La Figure 3-27 montre un exemple de l'IRHM présenté dans l'espace hybride de conception.  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont deux niveaux de la fonction objective qui se croisent respectivement avec le point optimal  $P_x^*$  et le point de conception  $P_y^*$ . On peut observer que le point optimal  $P_x^*$  est situé dans la zone de sécurité et  $f(x^*) < f(y^*)$  et que le niveau de fiabilité requis est également satisfait ( $d_{\beta} = \beta_t$ ).

Pour l'exemple de la micro-pompe, le problème de l'IRHM s'écrit :

$$\min_{x,y} F(x, y) = f(x) \times d_{\beta}(x, y)$$

$$s. t \begin{cases} S_{max}(y) \leq S_L \\ d_{\beta}(x, y) \geq \beta_t \\ S_{max}(x) \leq S_{max}(y) \end{cases} \quad (131)$$

### VI.2.5 Résultat et discussion

Le Tableau 3-13 présente les résultats obtenus par les différentes méthodes d'optimisation étudié. La solution optimale de la méthode DDO satisfait la contrainte d'optimisation mais le niveau de fiabilité est beaucoup plus important que le niveau de fiabilité cible  $\beta_t$ .

On peut voir que le point optimal résultant de la méthode hybride est dans le domaine de défaillance ( $S_{max} > 500\text{MPa}$ ). L'algorithme n'a pas convergé et aucune solution n'a été trouvée.

Notons que le point optimal de la méthode RHM est aussi dans le domaine de la rupture, ainsi que celui obtenu, alors que la fonction objective optimale  $f(x^*)$  est supérieure à la fonction objective du point de conception  $f(y^*)$ .

La solution optimale de la méthode IRHM est dans la zone de sécurité et le niveau de fiabilité est vérifié. L'amélioration de la méthode RHM a également contribué à minimiser le temps de calcul.

Tableau 3-13: Résultats DDO et RBDO du SMA micro-pompe

		<b>DDO</b>	<b>HM</b>	<b>RHM</b>	<b>IRHM</b>
<b>Point de conception*</b>	$R_y^*$ (mm)	1.983	2.37	1.69	1.913
	$L_y^*$ (mm)	2.99	2.72	3.92	3.83
	$e_y^*$ (mm)	0.018	0.0304	0.01	0.013
	$T_y^*$ (°K)	372.992	372.11	383.74	368.76
	$V_y^*$ (mm <sup>3</sup> )	37.54	49.05	35.41	44.32
	$D_{max,y}^*$ (μm)	412.83	299.25	568.69	509.9
	$f_y^*$	33.9	60.99	23.89	32.05
	$S_{max,y}^*$ (MPa)	499.5	499.99	499.3	496.5
<b>Point Optimal <math>x^*</math></b>	$R_x^*$ (mm)	2.022	1.503	1.53	1.909
	$L_x^*$ (mm)	2.99	2.39	5.47	3.78
	$e_x^*$ (mm)	0.01	0.026	0.01	0.01
	$T_x^*$ (°K)	373.001	374.76	387.07	372.99
	$V_x^*$ (mm <sup>3</sup> )	38.6	17.36	40.49	43.33
	$D_{max,x}^*$ (μm)	380.83	200.32	701.15	412.18
	$f_x^*$	37.8	32.47	22.35	39.21
	$S_{max,x}^*$ (MPa)	339.01	<b>781.06</b>	<b>811.8</b>	<b>429.6</b>
	<b><math>\beta</math></b>	<b>8.65</b>	<b>6.15</b>	<b>3.03</b>	<b>3.02</b>

La Figure 3-28 présente le déplacement de la micro-pompe au point initial (courbe bleu) et au point optimal (trait rouge). On peut observer que, avec la conception optimale, la course maximale de l'actionneur SMA est beaucoup plus élevée que celle de la conception initiale.

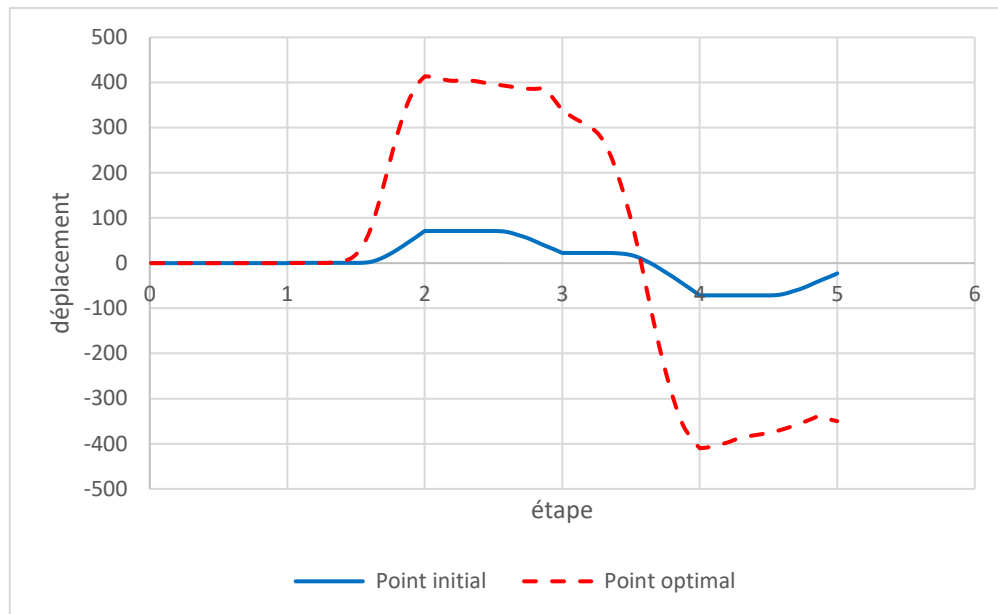


Figure 3-28 : Déplacement de la micro-pompe au point initial et au point optimal

## VII. Conclusion

Dans ce chapitre, notre objectif est de développer une méthode efficace qui nous permet d'obtenir une conception optimale des structures soumises à des vibrations aléatoires qui garantit un niveau de fiabilité structurel requis en considération avec l'endommagement par fatigue.

Dans une première partie, nous avons rappelé les notions fondamentales de la fiabilité ainsi que la méthodologie de l'optimisation en mécanique.

Dans la seconde partie, on a cité les différentes méthodes d'optimisation fiabiliste. Nous avons montré au début que la mise en œuvre de la méthode DDO est facile. Ainsi elle peut garantir une conception optimale, mais on ne peut pas contrôler le niveau de fiabilité. Ensuite, les méthodes RBDO telles que la méthode hybride et la méthode OSF ont été appliquées. En comparant avec la méthode DDO, le modèle RBDO respecte un niveau de fiabilité requis. En utilisant la méthode hybride, l'algorithme peut converger vers un point optimal dans la région de défaillance et le résultat est ensuite rejeté. Pour ce faire, une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) est donc proposée.

Dans une troisième partie, on a proposé la stratégie à suivre pour l'optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires. Une application sur une structure en fatigue multiaxiale ainsi qu'une application en fatigue uniaxiale ont montré que la solution optimale trouvée par la méthode RHM est plus fiable que la méthode hybride classique et la méthode DDO. En utilisant la méthode RHM, la fonction objective obtenue est inférieure à celle obtenue par la méthode OSF. De plus, le temps de calcul du RHM est presque le même que celui de la méthode OSF. L'efficacité de la nouvelle méthode est ensuite démontrée.

Une extension de cette méthode pour d'autre domaine d'application est proposée dans la dernière partie de ce chapitre. Une application sur les systèmes couplés acoustique-structurel a permis de valider les conclusions précédentes. Aussi, une deuxième application sur les SMA micro pompe a permis de développer une amélioration de la méthode RHM dans le cas où la fonction objective du point optimal est inférieure à la fonction objective au point de conception. Cette application a montré que la solution optimale fondée par la méthode IRHM est plus fiable que la DDO et les autres méthodes RBDO.

# Chapitre 4

## Application industrielle : étude sur le banc HALT

I.	Introduction.....	105
II.	Présentation du banc HALT.....	106
III.	Modélisation de la partie mécanique de la table.....	107
III.1	Analyse modale.....	108
III.2	Analyse spectrale.....	120
IV.	Conclusion.....	125

## I. Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude numérique et expérimentale du banc HALT. Cette étude entre dans le cadre du projet PISTIS, un des projets proposés par la *Normandie AeroEspace (NAE)*<sup>2</sup>. Les objectifs de ce projet sont la proposition d'une mise à jour du guide FIDES ainsi que le développement des méthodes et des outils qui permet de contrer la chute de l'espérance de vie des composants électroniques.

Il y a plusieurs sociétés telles que VALEO, THALES ... qui fabriquent des pièces utilisées dans des conditions extrêmes (haute température, chocs mécaniques sévères, vibrations élevées, taux d'humidité élevés ...). Afin d'améliorer la performance et pour éviter la défaillance de ces pièces dans les conditions de travail, des tests qui poussent à leurs limites de défaillance sont faites, dans le but de découvrir leur faiblesse.

Ces types de tests doivent être effectués dans une chambre qui assure toutes les conditions extrêmes. Certaines sociétés sont spécialisées dans la fabrication de ces types de chambre. Parmi lesquelles on peut citer la société QualMark, celle-ci est spécialisée dans le domaine de l'équipement de test de fiabilité. En effet, les systèmes de chambre fabriqués par QualMark permettent aux industries d'exécuter des tests de fatigue aggravés et accélérés avec des systèmes intégrés HALT (Highly Accelerated Life Test) et HASS (High Accelerated Stress Screen).

Dans notre cas, la chambre étudiée est de type HALT QUALMARK Typhoon 3. L'objectif principal de cette étude est de modéliser la partie mécanique de cette enceinte. Dans ce chapitre, on va présenter en premier temps, le banc HALT. Ensuite, on va discuter la méthodologie à suivre pour atteindre cet objectif.

---

<sup>2</sup> Normandie AeroEspace, est le réseau normand des acteurs du domaine aéronautique, spatial, défense et sécurité, participant aux grands projets de demain. <http://www.nae.fr>

## II. Présentation du banc HALT

Le rôle principal de la chambre Qualmark (Figure 4-1) est de tester la fiabilité d'un produit en le brisant afin de détecter les défauts introduits au cours du processus de fabrication. Ceci est fait en utilisant les méthodes HALT et HASS.

L'enceinte est constituée d'une table de travail « multicouches » suspendue par quatre ressorts permettant à la fois d'amortir et d'isoler les vibrations afin de ne pas les communiquer à l'environnement extérieur, tout en gardant les mouvements sur les 6 degrés de libertés. La table est sollicitée aux vibrations produites par 10 marteaux pneumatiques fixés au-dessous.

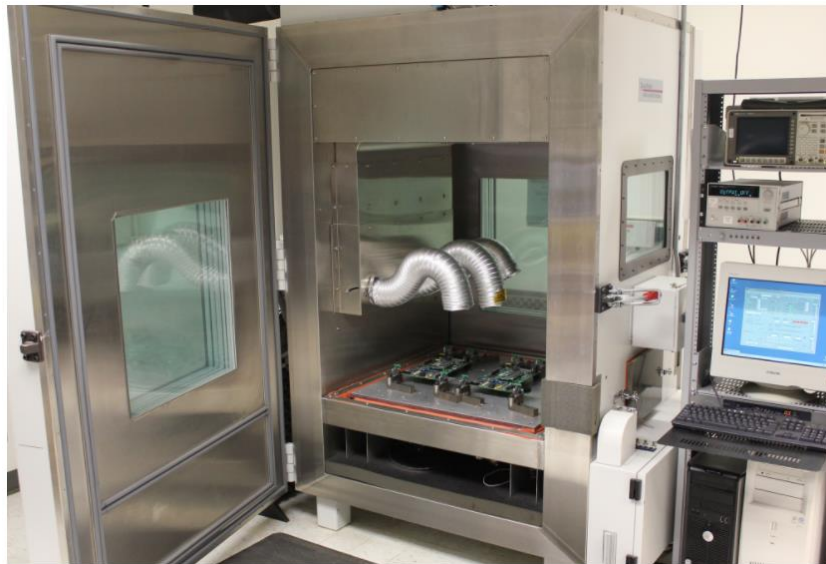


Figure 4-1 : Table Qualmark

La partie mécanique de la table est constituée d'un assemblage vissé. Cet assemblage repose sur 4 ressorts fixés d'un côté au raidisseur et de l'autre côté à la structure de la machine.

La plaque supérieure est en aluminium, elle comporte 81 inserts permettant de fixer le matériel de bridage et les ensembles de pièces à tester. Sur le pourtour de la table, une jupe en élastomère est utilisée pour isoler l'enceinte de test et l'espace technique. Juste au-dessous, une plaque en matériau composite assure une bonne isolation thermique. Une pièce en acier, se trouve en bas de la table est installée pour rigidifier les 2 premières plaques et assurer la fixation des marteaux pneumatiques et des ressorts. La liaison entre les différentes couches est assurée par des vis (Figure 4-2).

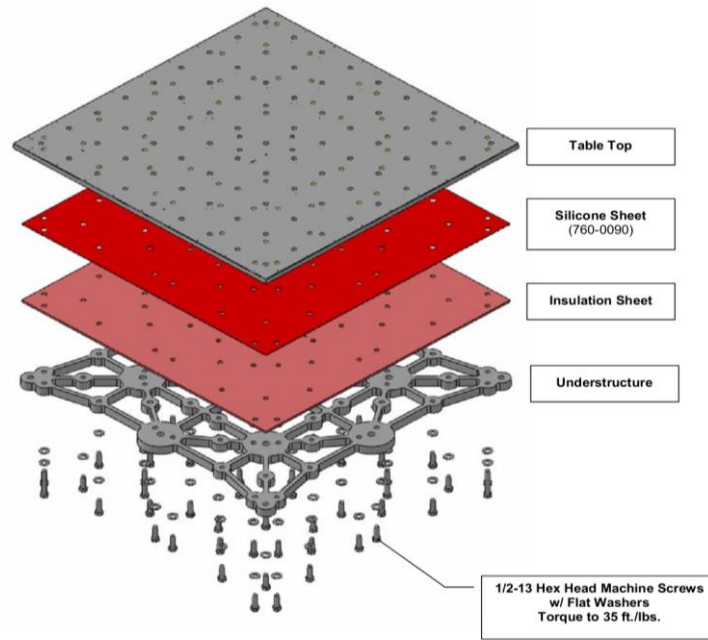


Figure 4-2: Configuration de l'assemblage [124]

### III. Modélisation de la partie mécanique de la table

La réalisation des tests de fiabilité sur la machine QualMark est parfois très couteuse. Cela est dû au manque de connaissance des sollicitations de la table et aux mauvaises détections des défauts aléatoires. Dans le but d'éviter ces problèmes, la modélisation de la table demeure une nécessité.

Le but principal de cette étude est donc de bien modéliser les excitations transmises aux pièces superposées sur la table pour connaître la quantité d'énergie fournie à chaque point du système (Table + pièce).

L'étude peut être divisée en deux grande parties : la première partie consiste à faire l'analyse modale de la table afin de recalibrer le modèle numérique par rapport à la réalité. La deuxième partie s'intéresse à l'analyse spectrale. Dans cette partie, on cherche à déterminer la DSP des marteaux pour que la réponse du modèle soit le plus proche du réel.

Notons que des essais expérimentaux ont été réalisés par la société CEVAA. Ces derniers se font en trois étapes. La première consiste à faire des essais opérationnels sur le banc HALT sur le site THALES VALENCE. La deuxième s'intéresse sur l'analyse modale expérimentale



réalisée sur la table seul en condition libre-libre sur le site de CEVAA. La troisième étape concerne la détermination des efforts opérationnels à partir de mesure FRF et des accélérations opérationnelles, sur le site de CEVAA.

### **III.1 Analyse modale**

#### **III.1.1 Configuration libre-libre**

Afin de réaliser le recalage du modèle numérique, une analyse modale expérimentale a été réalisée sur la table en condition libre-libre par la société CEVAA. [125]

Pour trouver les modes propres de la table numériquement, on doit passer par les étapes suivantes :

##### **i- Modélisation de la géométrie**

La table est constituée d'un assemblage multicouche vissé. Le plateau supérieur est une plaque en aluminium de forme carrée de 914.4 mm de côté et de 16 mm d'épaisseur. Il comporte 81 inserts permettant de fixer le matériel à tester sur la table, espacées de 101.6 mm.

Au-dessous, une plaque isolante en matériaux composite, permet d'isoler la nervure rapportée de la plaque supérieure pour limiter la déformation de l'ensemble. La plaque de matériaux composites a des dimensions d'environ 884.4 x 884.4 mm et fait 6 mm d'épaisseur.

Entre la plaque supérieure et la couche de composite se trouve une couche de silicone de même dimension que la composite et d'épaisseur 3 mm.

La nervure est une pièce en aluminium d'un pouce d'épaisseur soit 25,4 mm. Sa forme très particulière a été reproduite à l'aide de mesures directes et de Dessin Assisté par Ordinateur.

La Figure 4-3 présente une photo réelle de la table prise au CEVAA. Suite à une visite du site de CEVAA, on a pu modéliser une version 3D de la table à partir de mesures, photos, relevés, schémas ainsi que la documentation trouvée sur le site du constructeur Qualmark. La Figure 4-4 présente le modèle 3d de la table.

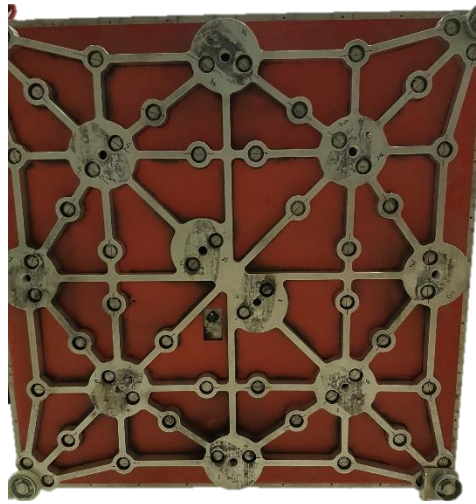
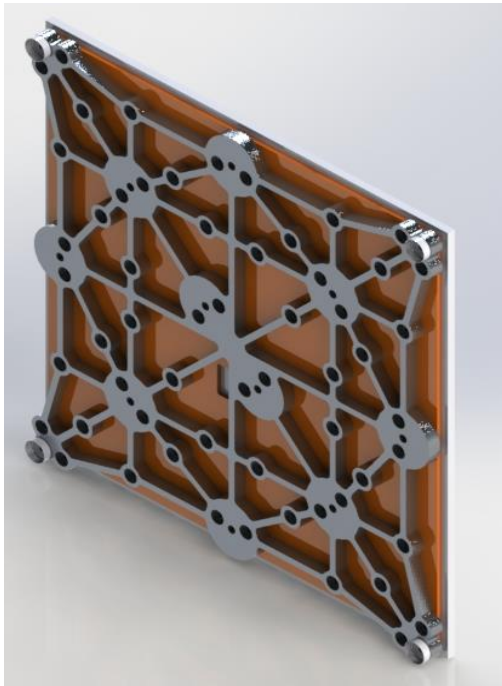


Figure 4-3 : Photo réelle de la table prise au CEVAA

a)



b)

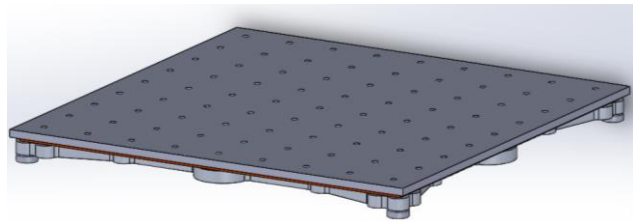


Figure 4-4 : Modélisation 3D de la table a) vue de dessous b) vue de dessus

La table est portée par 4 ressorts de compression identiques fixés au 4 coins. Selon une étude, ces ressorts sont de raideur  $16.5\text{N/mm}$  et de longueur sous la charge de la table est égale à  $65\text{mm}$ .

#### ii- Caractéristiques matériaux

N'ayant pas obtenu d'information claire, ni de données chiffrées on a choisi les valeurs initiales des caractéristiques matériaux à partir d'une recherche bibliographique. Le Tableau

4-1 présente les valeurs initiales des caractéristiques des matériaux. Ces valeurs seront changées lors du recalage du modèle pour s'approcher de l'expérimentale. La couche supérieure et la nervure sont en aluminium, la couche intermédiaire coté nervure est en epoxy-glass fiber. La couche intermédiaire coté plaque supérieure est une « *Reinforced Silica Thermal Insulation Sheet* » et est vendue généralement en épaisseur 3 mm (comme celle utilisée dans la table). Elle est à base de Silica (SiO<sub>2</sub>) renforcé par des fibres de verre ou des fibres d'aluminium .... Elle est utilisée pour isoler et protéger les éléments au-dessous de la table, des chocs thermiques.

Tableau 4-1: Valeurs initiales des caractéristiques matériaux

	<b>Aluminium</b>	<b>Reinforced Silica</b>	<b>Epoxy-glass fiber</b>
<b>Module d'Young (GPa)</b>	82	65	14
<b>Coef. de Poisson</b>	0.335	0.275	0.36
<b>Densité (kg/m<sup>3</sup>)</b>	2500	1900	2084

### iii- Conditions limites

Dans cette partie, on va supposer que la table est libre de tous les côtés.

### iv- Choix du type de maillage de la table

Une modélisation très fidèle à la réalité est coûteuse en termes de temps de calcul. Dans notre cas, le modèle qui va être utilisé pour le problème de recalage demande de refaire le calcul par éléments finis une centaine de fois jusqu'à trouver la meilleure configuration.

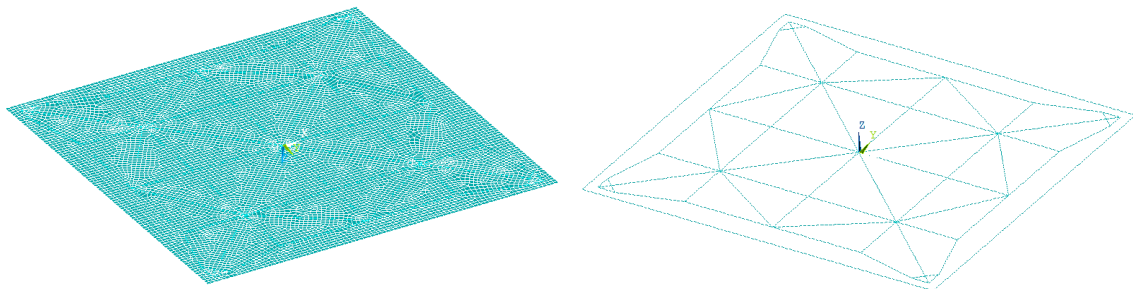


Figure 4-5: Modèle 2D de la table

Pour cette raison, le modèle de la table est présenté en deux dimensions. Afin que le modèle soit le plus proche du réel, la table est modélisée à l'aide d'éléments de type coque SHELL181 (2D) avec plusieurs couches pour la modélisation des plaques : Top, Epoxy et Silicone, et d'autres de type poutre BEAM188 (1D) pour la modélisation de la nervure (Figure 4-5).

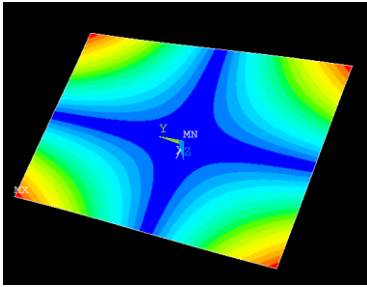
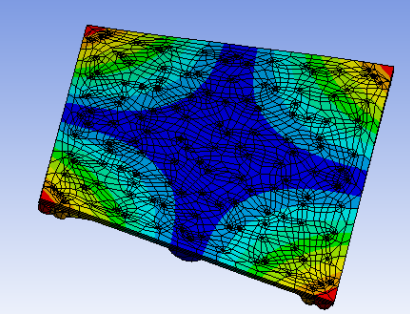
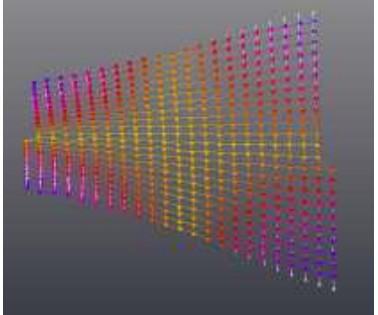
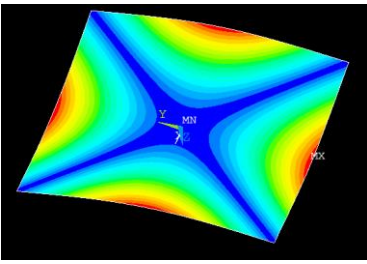
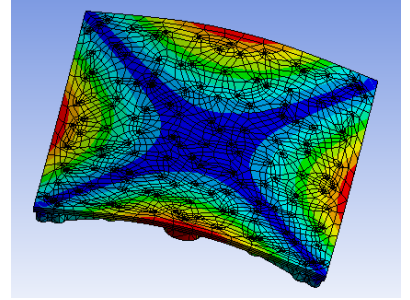
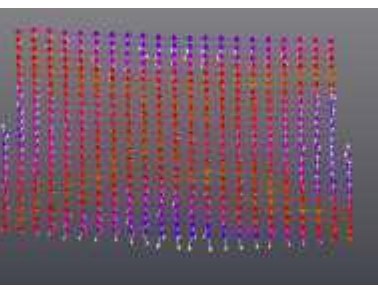
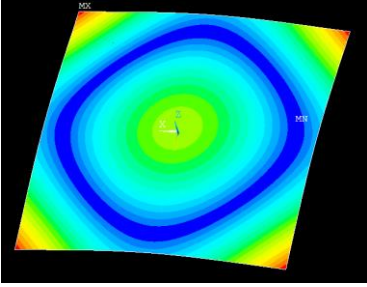
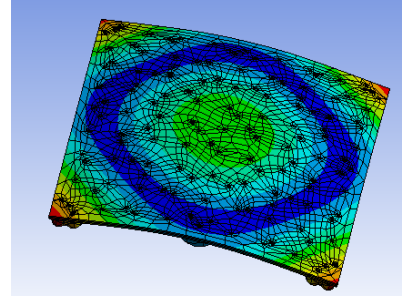
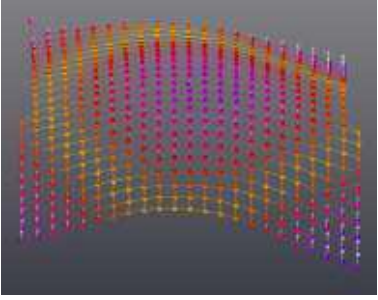
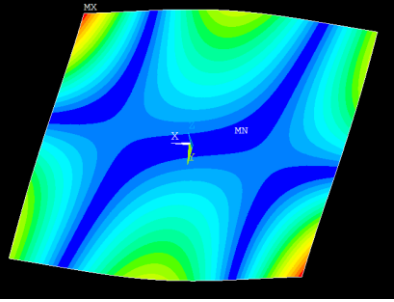
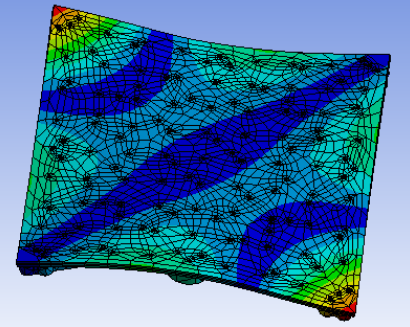
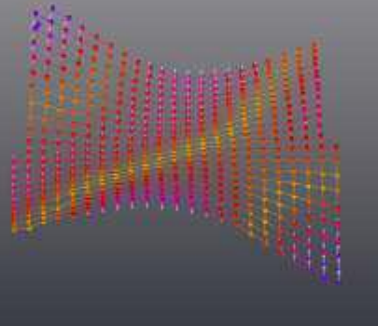
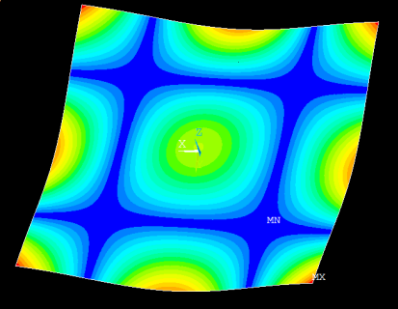
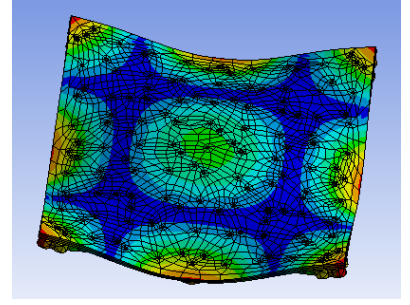
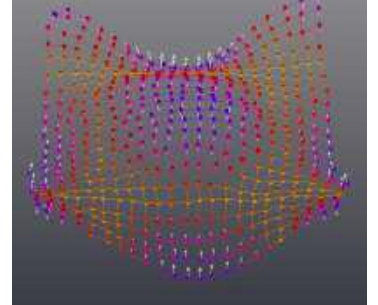
Un modèle en 3D a été fait aussi afin de comparer les déformées modales avec l'expérimentale. Le Tableau 4-2 présente les 6 premiers déformées modales trouvés numériquement et expérimentalement.

**v- Recalage du modèle numérique**

La différence entre l'expérimentale et le modèle numérique peut être due par différentes causes tel que par exemple :

- Incertitudes géométries : dues aux tolérances de fabrications et de mesures. En fait, la plupart des dimensions de la table sont prise sur le site de la société CEVAA en utilisant des éléments de mesure qui peut présenter un peu d'erreur (pied à colis ; mètre rubans ; règle ...).
- Incertitudes sur les caractéristiques des matériaux : en fait, dans notre cas, les données des matériaux ne sont pas connues. Une étude bibliographique est faite pour trouver les valeurs à introduire dans le modèle.
- Les conditions aux limites dans les essais expérimentaux : pour des contraintes expérimentales de mesure, la plaque est suspendue à un palan au moyen de deux crochets et deux gros sandows. Aussi, deux petits sandows sont rajoutés en bas de la plaque, afin de limiter les grands déplacements de la table comme il est montré sur la Figure 4-6.
- Le vieillissement de la table peut influencer aussi sur ses caractéristiques mécaniques et donc sur les modes propres.

Tableau 4-2: Comparaison des déformées modales

Mode	Configuration 2D	Configuration 3D	Expérimentale
1			
2			
3			
4-5			
6			

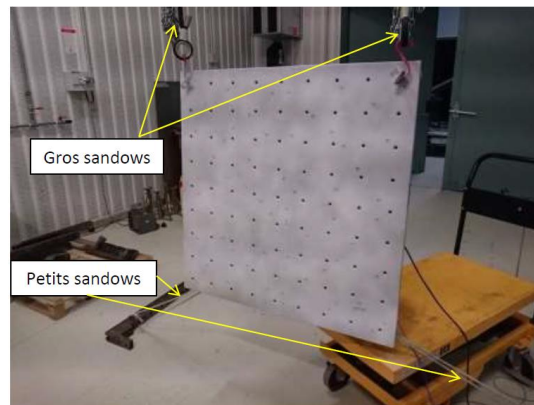


Figure 4-6 : Table suspendue [125]

Dans le calcul modal, les paramètres qui influent fortement sur les modes propres, sont les propriétés des matériaux. On a donc estimé les variations que pouvaient subir ces valeurs et on les a encadrées afin de fournir des données à mon fichier de commande. Le Tableau 4-3 présente les valeurs basses et hautes des propriétés des matériaux prises en compte pour le problème de recalage. Ces différents paramètres ont été prises à partir du CES EduPack 2016.

Tableau 4-3: Intervalles des données de matériaux

Matériau	Nom de la variable	Valeur basse	Valeur Haute	Unité
Aluminium	Densité	2500	2900	Kg/m <sup>3</sup>
	Module d'Young	68	82	GPa
	Coef.de poisson	0.325	0.335	
Reinforced Silica	Densité	1500	2000	Kg/m <sup>3</sup>
	Module d'Young	60	75	GPa
	Coef.de poisson	0.18	0.27	
Epoxy	Densité	1900	2100	Kg/m <sup>3</sup>
	Module d'Young	12	14	GPa
	Coef.de poisson	0.32	0.36	

Notre objectif ici, est de minimiser l'erreur des modes numériques avec celle trouvé expérimentalement tout en restant dans les intervalles des matériaux du Tableau 4-3.

Mathématiquement, soit  $M^{exp} = \{M_i^{exp}\}$  un vecteur comportant les modes propres calculés expérimentalement et soit  $M^{num} = \{M_i^{num}\}$  un vecteur comportant les modes propres calculés numériquement. L'erreur est définie pour chaque mode par :

$$E_i = \frac{|M_i^{num} - M_i^{exp}|}{M_i^{exp}} \quad (132)$$

Le problème de recalage est donc de minimiser le maximum de l'erreur entre les modes. Ça peut être mathématiquement définie par :

$$\min \left( \max_i (E_i) \right); i = 1 \dots N$$

$$t. q: \begin{cases} d_{j,min} \leq d_j \leq d_{j,max} \\ E_{j,min} \leq E_j \leq E_{j,max} \\ v_{j,min} \leq v_j \leq v_{j,max} \end{cases}; j = 1 \dots 3 \quad (133)$$

Où  $d_j$ ,  $E_j$  et  $v_j$  sont respectivement la densité, le module d'Young et le coefficient de poisson du matériau  $j$ .  $N$  présente le nombre de modes dans la bande de fréquence étudiée.

L'organigramme de la Figure 4-7 présente la procédure de calcul de ce problème. L'initiation des données de matériaux est faite sur Matlab. Ensuite, un calcul numérique des modes propres est réalisé le logiciel d'éléments finis Ansys. En fait, cette interface Matlab-Ansys permet d'introduire les données de matériaux dans Ansys afin de calculer les modes propres. Le résultat trouvé est ensuite récupéré par Matlab dans le but d'estimer l'erreur entre les modes numériques et expérimentaux.

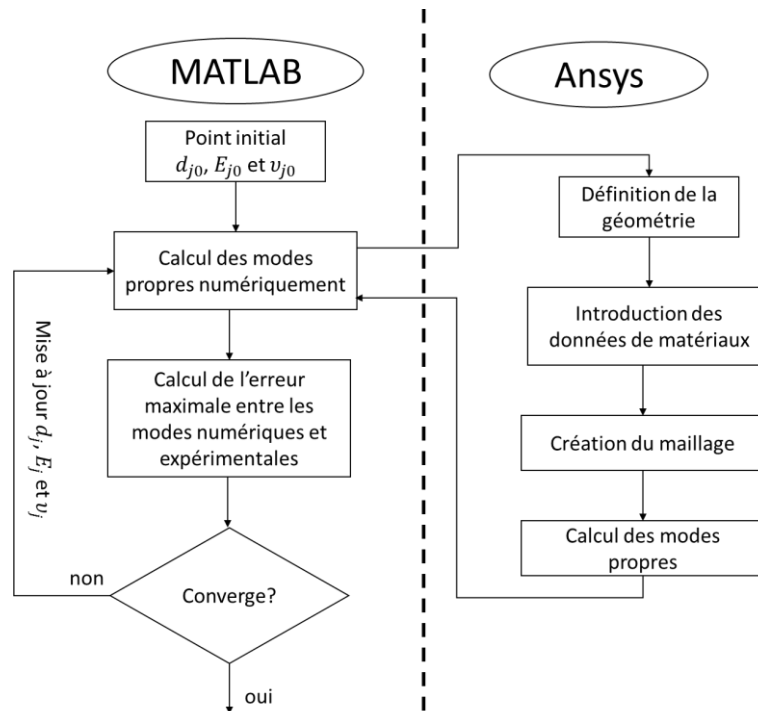


Figure 4-7: Procédure de recalage du modèle

Le Tableau 4-4 présente les données de matériaux trouvés après la simulation du problème. Ces valeurs donnent un minimum de l'erreur entre l'étude expérimentale et le modèle numérique en condition libre-libre.

Tableau 4-4 : Résultats du problème de recalage en condition libre-libre

	<b>Aluminium</b>	<b>Reinforced Silica</b>	<b>Epoxy-glass fiber</b>
<b>Module d'Young GPa</b>	81	66.9	12.6
<b>Coef. de Poisson</b>	0.335	0.18	0.32
<b>Densité (kg/m<sup>3</sup>)</b>	2709.4	1600	1900

Le Tableau 4-5 présente les dix premiers modes propres trouvés numériquement et expérimentalement ainsi que l'erreur pour chaque mode.

Tableau 4-5: Comparaison des modes expérimentales et numériques (configuration libre-libre)

	<b>Expérimentale (Hz)</b>	<b>Numérique (Hz)</b>	<b>Erreur (%)</b>
<b>Mode 1</b>	82,47	75,8	8,09
<b>Mode 2</b>	152,6	119,16	21,9
<b>Mode 3</b>	158,96	139,97	11,94
<b>Mode 4</b>	191,15	200,05	4,65
<b>Mode 5</b>	191,15	200,05	4,65
<b>Mode 6</b>	296,12	359,57	21,42
<b>Mode 7</b>	324,16	359,68	10,95
<b>Mode 8</b>	326,81	359,68	10,05
<b>Mode 9</b>	377,85	420,04	11,16
<b>Mode 10</b>	382,94	433,4	13,17

On remarque que les modes 2 et 6 présentent un maximum d'erreur entre l'expérimentale et le numérique. Mais cette erreur n'aura pas de grande influence sur la réponse de la table puisque, selon la figure 6 du rapport d'essai n° 17-0009\_B\_rev-0 [125], le taux de participation est de 1% environ. En plus, expérimentalement, le mode 2 n'était pas détecté facilement ce qui peut influencer sur la valeur trouvée.



### III.1.2 Configuration avec ressorts

Après le recalage du modèle avec la configuration libre-libre, une autre étude est faite sur le modèle de la table avec les ressorts afin de vérifier les résultats trouvés avec la configuration libre-libre.

D'après les essais opérationnels sur le banc HALT réalisés sur le site de THALES VALENCE [126], les modes propres sont extraits à partir de la réponse en DSP d'accélération en quelques points de la table. La Figure 4-8 montre les emplacements des accéléromètres sur la table. Ils sont numérotés de 1 à 11. Ces accéléromètres permettent de mesurer l'accélération suivant les trois directions X, Y et Z.

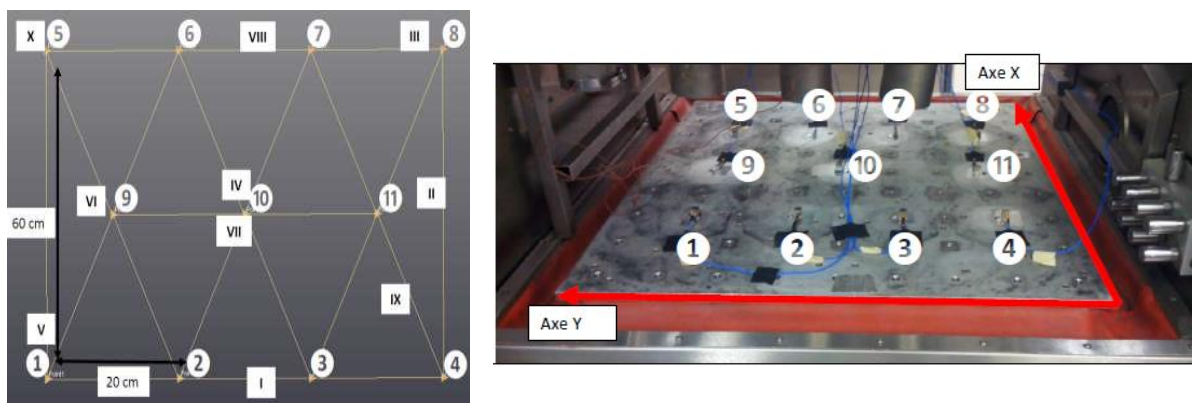


Figure 4-8 : Identification des accéléromètres placés sur la table [126]

Pour des raisons de symétrie, les réponses en DSP sont divisées en quatre groupes :

- Groupe 1 : Point 10 + point de contrôle
- Groupe 2 : Points 9 et 11
- Groupe 3 : Points 2, 3, 6 et 7
- Groupe 4 : Points 1,4, 5 et 8

Notons que le point de contrôle est l'accéléromètre placé par le constructeur. Ce point est confondu au point 10 mais sous la table. La Figure 4-9 présente la réponse en DSP d'accélération suivant l'axe Z (perpendiculaire à la table) dans les différents points de mesure pour une excitation de 5 grms. Chaque pic présente une fréquence de résonance. Les premiers pics présentent les modes de corps rigide.

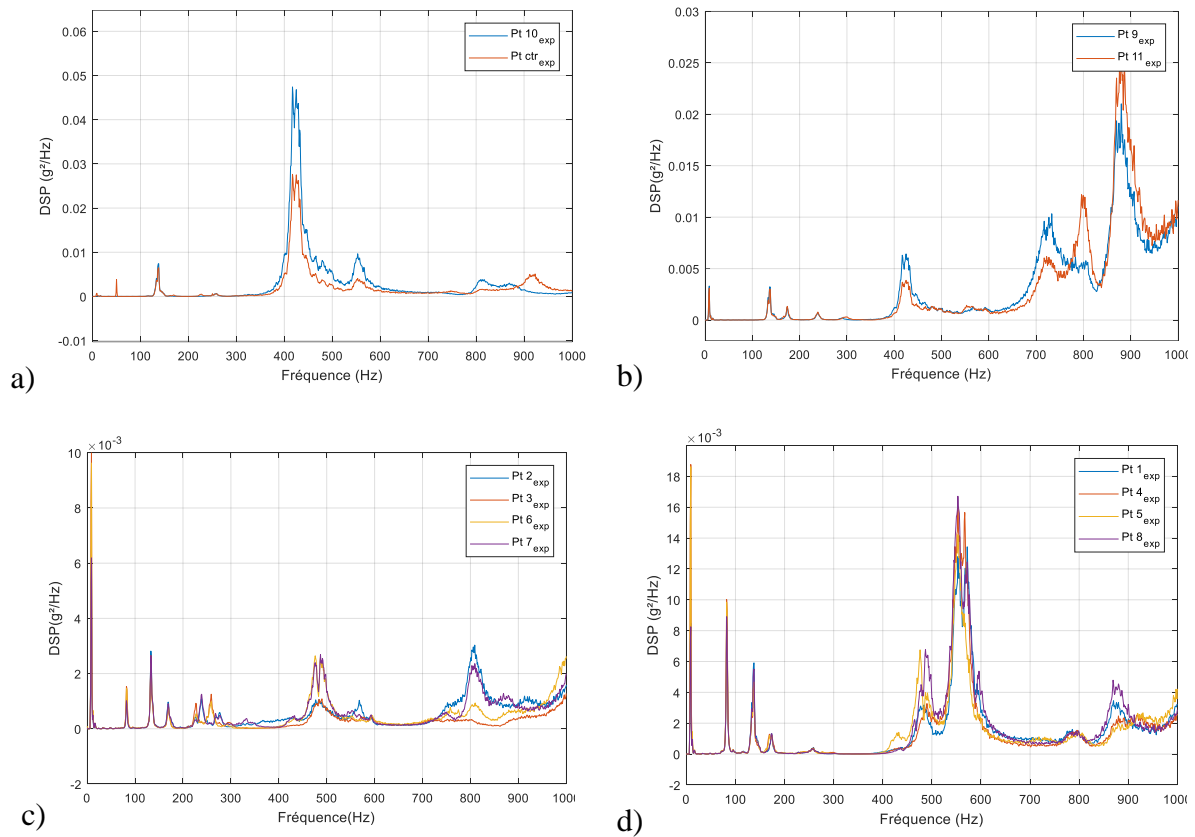


Figure 4-9 : Réponse de la table en DSP d'accélération pour une excitation de 5grms suivant l'axe Z : a) groupe 1 b) groupe 2 c) groupe 3 d) groupe 4

Pour vérifier les modes numériques, il faut voir que présente chaque pic. Prenons par exemple le 1<sup>er</sup> mode (Figure 4-10), pour ce mode il y a un pic aux points 2, 3, 6 et 7 et un pic plus important aux points 1, 4, 5 et 8. Ce mode n'est pas détectable aux points 9, 10 et 11. En revenant à la Figure 4-9, on trouve que ce mode correspond à la fréquence propre  $F_{1exp}=81\text{Hz}$ . Afin de vérifier tous les modes, cette méthodologie est faite pour chaque pic de la réponse de la table. Le Tableau 4-6 présente les valeurs des fréquences propres extraites des courbes de la Figure 4-9.

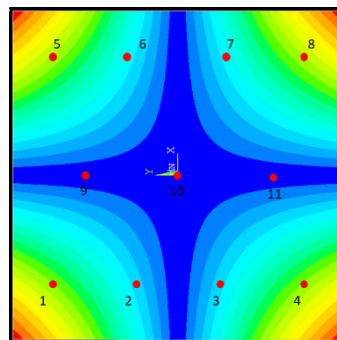


Figure 4-10: Premier déformée modal de la table

Tableau 4-6 : Fréquences propres extraites des essais opérationnels

	Fréquence (Hz)
Fréquence 1	82
Fréquence 2	138
Fréquence 3	226
Fréquence 4	239
Fréquence 5	417
Fréquence 6	425
Fréquence 7	476
Fréquence 8	722
Fréquence 9	812
Fréquence 10	869
Fréquence 11	919

Numériquement, la modélisation de la table est effectuée à l'aide d'éléments de type coque SHELL181 (2D) avec plusieurs couches pour la modélisation des différentes couches et d'autres de type poutre BEAM188 (1D) pour la modélisation de la nervure. L'élément COMBIN14 (1D) est également utilisé pour modéliser les ressorts.

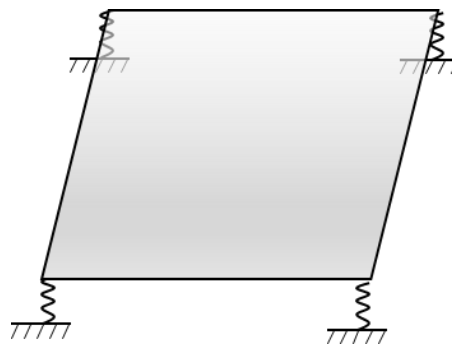


Figure 4-11: Conditions aux limites de la table

La table est portée par 4 ressorts de compression identiques fixés au 4 coins. Une étude précédente faite dans le cadre d'un projet de fin d'étude par Mattieu ANDRIEU [127], a montré que ces ressorts ont une raideur de 16.5N/mm et de longueur sous la charge de la table est d'environ 65mm. Les éléments modélisant les ressorts sont encastrés d'un côté, (tous les degrés

de libertés sont égaux à zéro) et de l'autre côté, les nœuds des ressorts sont liés aux nœuds de la table partageant ainsi les degrés de libertés (Figure 4-11)

Tableau 4-7 : Résultats du problème de recalage du modèle de la table avec ressorts

	<b>Aluminium</b>	<b>Reinforced Silica</b>	<b>Epoxy-glass fiber</b>
<b>Module d'Young (GPa)</b>	82	75	13.9
<b>Coef. de Poisson</b>	0.335	0.18	0.32
<b>Densité (kg/m<sup>3</sup>)</b>	2500	1500	1900

Tableau 4-8: Comparaison des modes expérimentaux et numériques (configuration avec ressorts)

	<b>Expérimental (Hz)</b>	<b>Numérique (Hz)</b>	<b>Erreur (%)</b>
<b>Mode 1</b>	82	82.3	0.4
<b>Mode 2</b>	–	127.7	–
<b>Mode 3</b>	138	151.1	9.5
<b>Mode 4</b>	226	214.9	4.9
<b>Mode 5</b>	239	214.9	10.06
<b>Mode 6</b>	417	386.09	7.4
<b>Mode 7</b>	425	386.4	9.07
<b>Mode 8</b>	425	386.4	9.07
<b>Mode 9</b>	–	450.4	–
<b>Mode 10</b>	476	465.5	2.19
<b>Mode 11</b>	722	658.2	8.8
<b>Mode 12</b>	722	658.2	8.8
<b>Mode 13</b>	812	742.6	8.5
<b>Mode 14</b>	869	746.8	14.06
<b>Mode 15</b>	919	813.8	11.4
<b>Mode 16</b>	919	813.8	11.4
<b>Mode 17</b>	–	946.1	–
<b>Mode 18</b>	–	1002.5	–

Le Tableau 4-7 présente les nouvelles propriétés des matériaux après recalage du modèle de la table avec ressorts, en utilisant l’algorithme de la Figure 4-7

Le Tableau 4-8 présente les fréquences propres trouvées numériquement sur la bande de fréquence [1-1024] Hz. Ce tableau montre aussi l’erreur relative entre le modèle numérique et l’expérimentale à chaque fréquence de résonance. Notons que les modes 2,9,17 et 18 n’ont pas été détecté expérimentalement. On remarque que les résultats du recalage du modèle ont été amélioré par rapport à l’étude en condition libre-libre. Ce modèle est utilisé par la suite pour l’analyse spectrale afin de déterminer la réponse de la table aux excitations des vérins.

### III.2 Analyse spectrale

Après trouver la meilleure configuration du modèle de la table qui donne les bons modes propres, on peut passer maintenant à la modélisation des excitations des vérins afin de trouver la réponse en DSP de la table. Cette étude est faite sur la bande de fréquence [0-1024Hz]. Les résultats montrés dans ce paragraphe sont pour une excitation de 5grms. La méthodologie est la même pour les autres types d’excitation (10,20,25 et 30 grms).

#### III.2.1 Modélisation des efforts

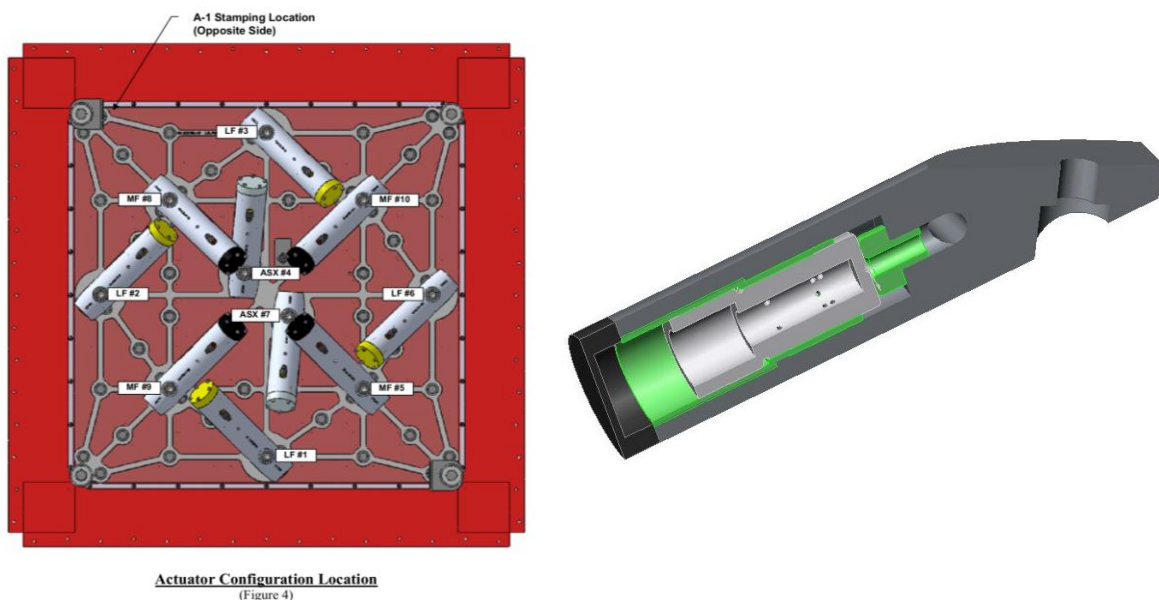


Figure 4-12 : Disposition des marteaux sous la table [124]

L’excitation est réalisée par 10 marteaux pneumatiques (Figure 4-12). Chaque marteau a une direction spécifique. Cette distribution permet d’avoir un chargement quasi-uniforme sur toute

la table. Tous les vérins fait une inclinaison de  $60^\circ$  par rapport à l'axe perpendiculaire à la table comme montré dans la Figure 4-13. Les vérins jaunes et noirs (Figure 4-12) ont une inclinaison de  $45^\circ$  par rapport au axes X et Y comme montré dans la Figure 4-14:

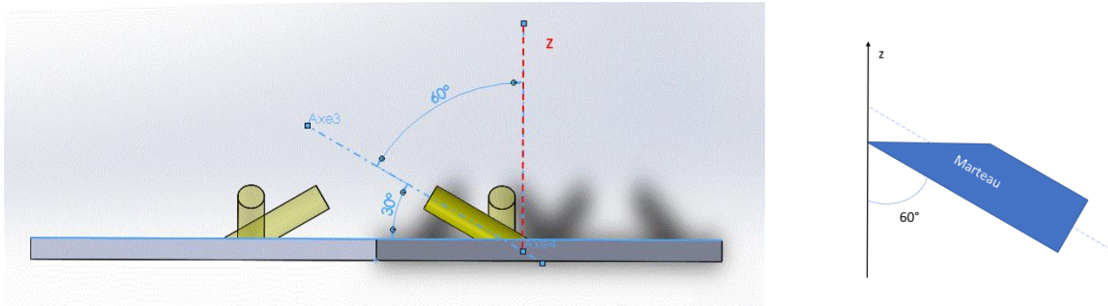


Figure 4-13: Angle d'inclinaison des marteaux par rapport à l'axe Z

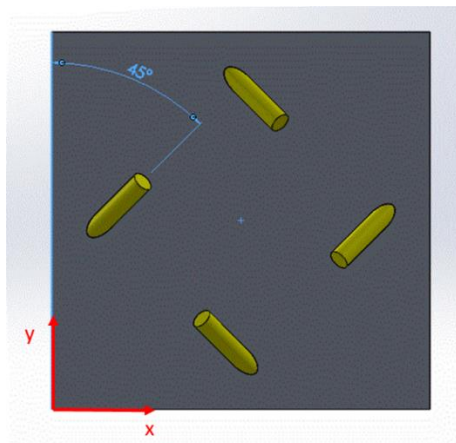


Figure 4-14: Angle d'inclinaison des marteaux par rapport aux l'axes X et Y

### III.2.2 Détermination des efforts des vérins

Afin d'obtenir un ordre de grandeur des spectres des efforts opérationnels injectés, des mesures de FRF ont été réalisées sur la table en condition libre-libre. Celles-ci ont été menées au sein de la société CEVAA [128]. A partir des mesures effectuées sur la table opérationnelle, la société CEVAA a proposé, par une routine Octave, des ordres de grandeur des efforts opérationnels injectés dans la table.

Selon le rapport [128], l'effort injecté est supposé le même pour chaque marteau. Etant donné que les mesures ont été réalisées sur 11 accéléromètres 3D, nous sommes en possession de 33 spectres d'accélérations. Par conséquent, un spectre d'effort est calculé pour chaque spectre.

Une moyenne du module des 33 efforts trouvés est effectuée pour chaque ligne fréquentielle. L'effort peut être déterminé par l'équation (134):

$$\alpha_{P_{i,j}} = \left( \sum_{k=1}^{10} H_{P_{i,j}/M_k} \right) F \quad (134)$$

Où  $\alpha_{P_{i,j}}$  est le niveau d'accélération au niveau de l'accéléromètre  $P_i$  et dans la direction considérée.  $H_{P_{i,j}/M_k}$  est la fonction de transfert (accélération au niveau de l'accéléromètre  $P_i$  sur l'effort au marteau  $M_k$ ).  $F$  est le spectre des efforts injectés.

La Figure 4-15 présente la Moyenne des DSP de l'effort injecté après recomposition (courbe bleue). C'est la moyenne de 33 spectres calculés. Les DSP des efforts des autres types de chargement sont présentés dans l'Annexe A

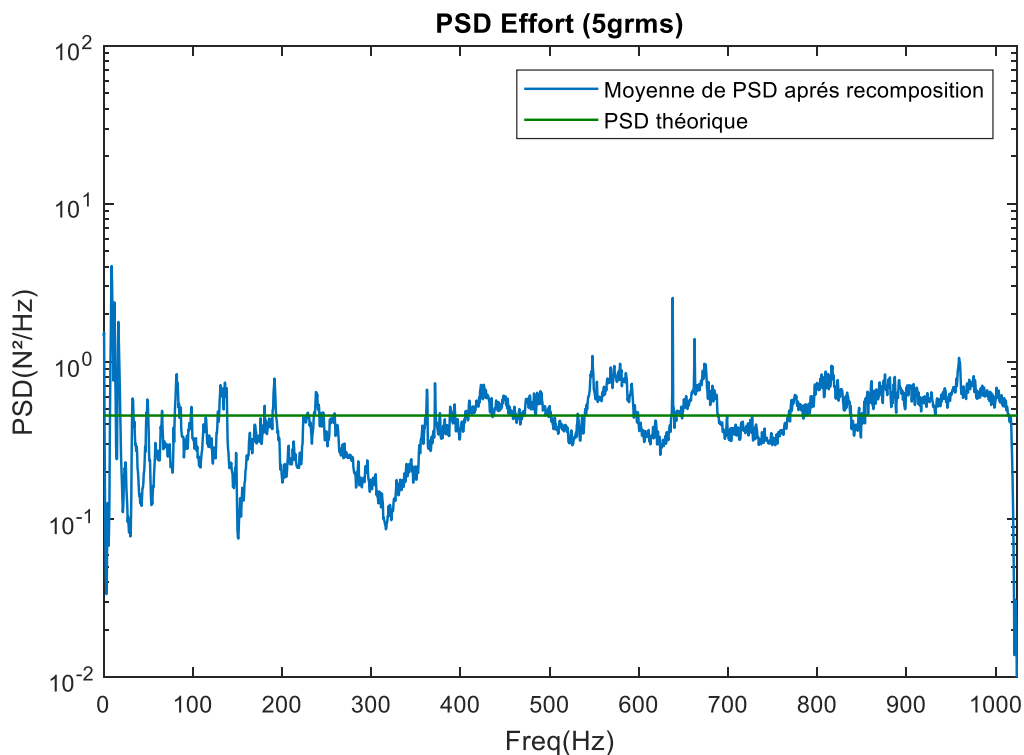


Figure 4-15 : Moyenne des DSP de l'effort injecté après recomposition (5grms)

Dans un premier temps, on suppose que la DSP de l'excitation est une constante (bruit blanc). Cette DSP est présentée par la courbe verte de la Figure 4-15

Ensuite, on propose une méthodologie pour la détermination de l'effort qu'on doit injecter dans le modèle pour que les résultats numériques s'approchent de la réalité.

### III.2.3 Réponse de la table à une DSP d'excitation constante

Après simulation du modèle numérique, la réponse en DSP des accélérations peut être déterminée dans chaque point de la table. Dans les mesures opérationnelles de la table, les accéléromètres sont placés et numérotés sur la table comme montré dans la Figure 4-8:

Pour comparer les résultats numériques avec celle trouvés expérimentalement, les DSP d'accélérations sont calculés aux points où les accéléromètres sont placés.

La Figure 4-16 présente une comparaison entre les DSP d'accélérations opérationnelles mesurées (courbes bleues) et les DSP d'accélérations numériques (courbes vertes) dans les directions X, Y et Z, en un point de la table. Les résultats des autres points sont présentés dans Annexe B

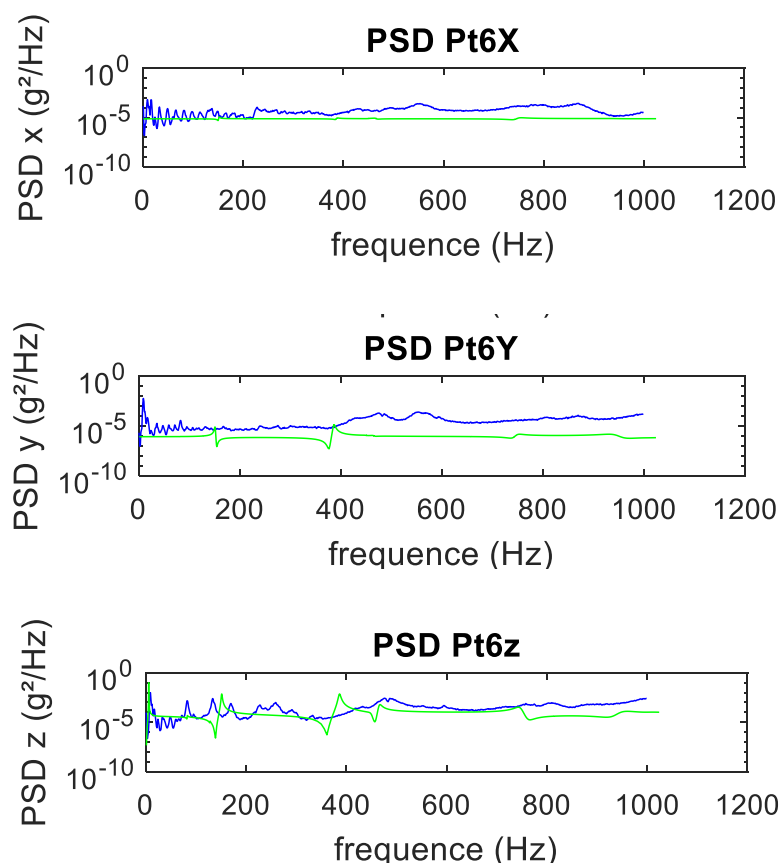


Figure 4-16 : Réponse en DSP d'accélération en un point de la table pour une DSP d'excitation constante

On constate que, au-delà de 400Hz les niveaux sont globalement respectés mais quelques écarts sont visibles. L'écart trouvé peut être expliqué par les approximations faites au cours de



la démarche d'étude (matériaux, géométrie, effort injecté, ...). En plus, la DSP de l'effort est supposé constante et pareil pour tous les vérins, alors que réellement ce n'est pas le cas.

On remarque aussi que la participation des modes ainsi que le niveau des DSP sont plus importants suivant la direction Z que les direction X et Y.

### III.2.4 Amélioration de la réponse du modèle par la détermination du spectre de DSP d'excitation

Dans le paragraphe précédent, on a supposé que la DSP de l'excitation est constante sur toute la bande de fréquence. Cette supposition a donné des résultats plus ou moins loin de la réalité, surtout pour les basse fréquence ( $f < 400\text{Hz}$ )

L'idée est donc de trouver la meilleure valeur de la DSP de l'effort  $\Phi_F$  injecter dans le modèle EF, à chaque fréquence  $f$ , afin de minimiser l'erreur entre les DSP d'accélération numérique et les DSP d'accélération mesurées (Figure 4-17).

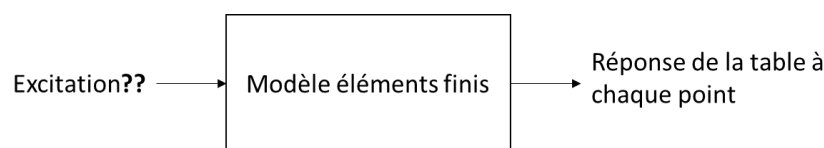


Figure 4-17 : Proposition d'amélioration de la réponse du modèle

Le problème peut être mathématiquement présenté par :

$$\begin{aligned} \min_{\Phi_F} F(f, \Phi_F, Pt_i) &= \text{erreur}(f, \Phi_F, Pt_i) ; \quad i = 1..11 \\ &= \frac{|\Phi_{a\text{Num}}(f, \Phi_F, Pt_i) - \Phi_{a\text{Exp}}(f, \Phi_F, Pt_i)|}{\Phi_{a\text{Exp}}(f, \Phi_F, Pt_i)} \end{aligned} \quad (135)$$

Avec  $f$  : fréquence ;  $\Phi_F$  DSP de l'excitation ;  $\Phi_{a\text{Num}}$  DSP d'accélération au point  $i$  calculé numériquement à partir du modèle éléments finis ;  $\Phi_{a\text{Exp}}$  DSP d'accélération mesuré au point  $i$ .

La Figure 4-18 présente la réponse en DSP d'accélération en un point de la table pour une excitation amélioré. L'Annexe C présente une comparaison entre les résultats numériques (courbes vertes) et les mesures expérimentales (courbes bleues) de la réponse de la table après amélioration de l'excitation. On constate que la corrélation est très bonne en basses fréquences (sous les 400 Hz). Au-delà, les niveaux globaux sont respectés mais quelques écarts sont

visibles. On constate que cette méthodologie a permis de créer le spectre de DSP de l'excitation qui donne une bonne corrélation entre le modèle numérique et les résultats expérimentaux

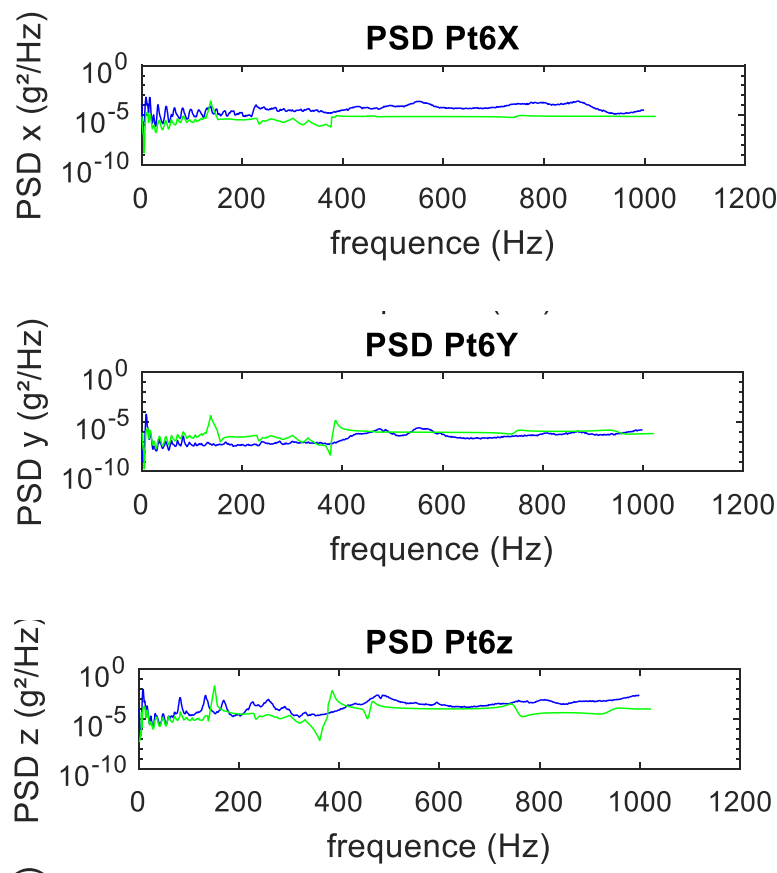


Figure 4-18 : Réponse en DSP d'accélération en un point de la table pour une DSP d'excitation amélioré

#### IV. Conclusion

Dans ce chapitre, on a pu concevoir un modèle de la partie mécanique de la table QualMark de type THYPHON 3. Ce modèle a permis de déterminer l'effort transmis aux pièces superposées sur la table pour des tests de fiabilité HALT.

Dans un premier temps, un recalage du modèle à partir de l'analyse modale de la table en condition libre-libre ainsi en condition opérationnelle (avec ressort) est proposé. Cette méthode a permis de déterminer les meilleurs paramètres de matériaux qui minimisent l'erreur entre les fréquences propres numériques et expérimentaux.

Ensuite, une analyse spectrale a permis de calculer la réponse en DSP d'accélération en tout point de la table. Au début, l'excitation est supposée un bruit blanc (DSP constante). Ensuite,

avec une méthode de recalage du modèle numérique, on a pu déterminer les DSP de l'excitation qui minimise l'erreur entre les accélérations numériques et expérimentaux à chaque fréquence  $f$ .

Avec ce modèle, on peut introduire donc les efforts trouvés numériquement dans le modèle des pièces superposées sur la table afin d'étudier sa fiabilité. L'organigramme de la Figure 4-19 présente le processus de calcul numérique de l'endommagement par fatigue d'une pièce superposée sur la table. La première étape consiste à modéliser la pièce (géométrie, matériau, ...). Ensuite on introduit les conditions aux limites. Ici, les efforts injectés à la pièce sont les réponses en DSP d'accélération calculés à partir de la modélisation de la table. Ces DSP sont calculées aux points dans lesquels la pièce sera fixé sur la table. Après une analyse spectrale, on détermine les DSP de contraintes dans chaque point de la pièce. Ces DSP seront introduites ensuite dans le logiciel de calcul MATLAB afin de calculer l'endommagement par fatigue dans chaque point de la pièce afin de déterminer les zones de défaillance.

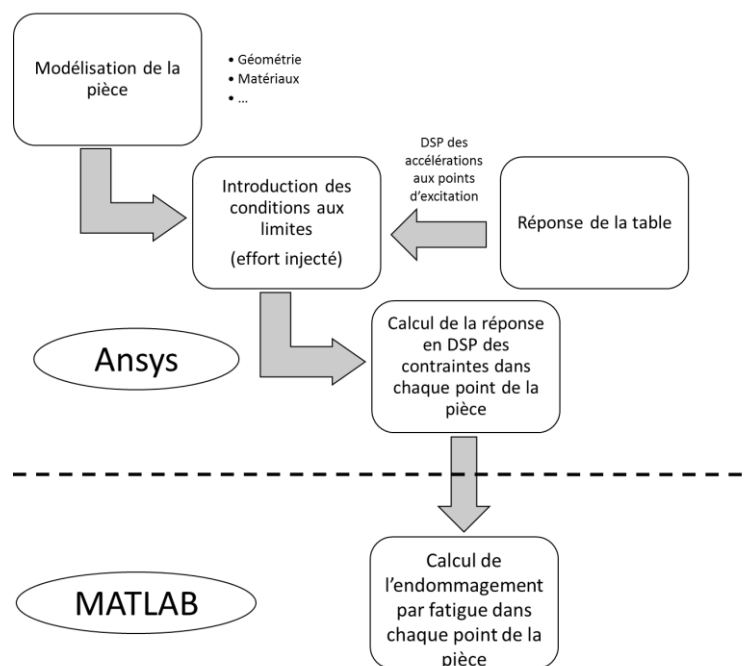


Figure 4-19 : Perspective

# Conclusion générale

L'objectif principal de cette thèse est l'analyse de l'endommagement par fatigue et l'optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires. Une méthodologie d'optimisation fiabiliste a été proposée. Cette méthodologie permet de trouver la meilleure conception en dynamique des structures qui garantit un niveau de fiabilité cible.

Dans le premier chapitre, une bibliographie sur les différentes notions et les hypothèses des vibrations aléatoires a été présenté. De même, la réponse dynamique d'un système soumis à des excitations aléatoires a été étudiée. Quelques outils mathématiques, tels que la densité spectrale de puissance et les moments spectraux, sont exposés aussi dans ce chapitre. Ces outils sont nécessaires pour l'analyse de l'endommagement par fatigue dans le domaine fréquentiel.

Les différentes méthodes de prédiction de l'endommagement par fatigue dû aux vibrations aléatoires dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine spectral, ont été présentés dans le deuxième chapitre.

Ensuite, nous avons déterminé, d'une manière efficace, l'endommagement par fatigue par l'application du critère Sines dans le domaine fréquentiel. Cette méthodologie permet de fournir une cartographie de fatigue locaux dans chaque élément du modèle éléments finis. Une étude paramétrique est utilisée pour déterminer l'influence de la géométrie sur l'endommagement par fatigue. La stratégie de calcul décrite dans ce chapitre a été implémentée dans MATLAB qui est utilisé comme post-processeur du logiciel d'éléments finis ANSYS.

Notre objectif dans le troisième chapitre, était de développer une méthode efficace qui nous permet d'obtenir la meilleure conception des structures soumises à des vibrations aléatoires. Cette conception doit garantir le niveau de fiabilité requis. Pour cela, on a démontré d'abord que la méthode DDO est facile à mettre en œuvre et qu'elle peut garantir une conception optimale, alors que le niveau de fiabilité n'est pas contrôlé. Ensuite, les méthodes RBDO telles que la méthode OSF et la méthode hybride ont été appliquées tout en garantissant un niveau de fiabilité donné, comparé avec la méthode DDO. Le point optimal obtenu par la méthode hybride peut être donné dans la région de défaillance et le résultat est ensuite rejeté. Une nouvelle

méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) a été donc proposée pour résoudre ce problème. Son efficacité est montrée par des applications sur des structures soumises à des vibrations aléatoires. Dans la dernière partie de ce chapitre, une extension de cette méthode pour d'autre domaine d'application a été proposée.

La dernière partie de cette thèse a été consacrée à une application industrielle sur la table Qualmark. Le but de cette étude était de modéliser la partie mécanique de cette enceinte par la modélisation des effort transmis aux pièces superposées sur la table. Une analyse modale expérimentale a permis de faire le recalage du modèle numérique. Une analyse spectrale a été proposée ensuite, afin de déterminer la réponse en DSP à chaque point de la table.

Globalement, on peut dire que les résultats numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux. Généralement, les essais de fiabilité sur cette table sont parfois très coûteux. Avec le modèle développé numériquement dans ce chapitre, on peut donc minimiser les couts de ces essais.

Comme perspective à ce travail de recherche, je propose :

- Extension des méthodes RBDO proposées pour d'autres lois de distribution des variables aléatoires, telles que la loi de Gumbull, loi log-normal, loi de Weibull, etc.
- Couplage des méthodes d'optimisation fiabiliste avec les méta-modèles (Krigage, surface de réponse, ...), pour des cas de structures complexes afin de créer un modèle mathématique explicite.
- La validation du modèle numérique du banc HALT développé dans cette thèse par des essais de fiabilité sur des pièces placées sur la table.
- Une amélioration de la conception de ces pièces en appliquant les différentes méthodes RBDO développées.

# Bibliographie

- [1] G. Kharmanda, A. Mohamed et M. Lemaire, «Efficient reliability based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis,» *Struct Multidiscip Optim*, vol. 24, pp. 233-245, 2002.
- [2] G. Kharmanda, N. Olhoff et A. El-Hami, «Optimum values of structural safety factors for a predefined reliability level with extension to multiple limit states,» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 27, p. 421–434, 2004.
- [3] C. Lalanne, *Random Vibration: Mechanical Vibration and Shock Analysis*, troisième éd., vol. 3, London: ISTE;Wiley, 2014.
- [4] J. Plusquellec, «Vibrations - Vibrations aléatoires,» *Techniques de l'Ingénieur*, 10 avril 2004.
- [5] D. Arzelier, *Signaux aléatoires*, INSA: Cours INSA Toulouse, 2004.
- [6] A. Coubat et R. J. Gibert, «Vibrations aléatoires des structures :Notions fondamentales,» *LA HOUILLE BLANCHE*, pp. 193-199, 1988.
- [7] H. P. Gavin, *Random Processes, Correlation, and Power Spectral Density*, États-Unis: Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, 2016.
- [8] S. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, *Bell System Technical Journal*, 1945.
- [9] D. Cartwright et M. Longuet Higgins, «The statistical distribution of the maxima of a random function,» *Proceedings of the royal society of London series a-mathematical and physical sciences*, vol. 237, n° 11209, pp. 212-232, 1956.

- [10] C. Lalanne, *Mechanical Vibration & shock Analysis: Fatigue Damage*, vol. IV, London: ISTE;Wiley, 2014.
- [11] A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1990.
- [12] S. Lambert, *Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires*, Rouen: thèse à l'INSA de Rouen, 2007.
- [13] A. de Lima, S. Lambert, D. Rade, E. Pagnacco et L. Khalij, «Fatigue reliability analysis of viscoelastic structures subjected to random loads,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 43, pp. 305-318, 2014.
- [14] X. Pitoiset, «Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métallique sous chargements aléatoires multiaxiaux,» thèse à l'Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, 2001.
- [15] H. Rognon, «Comportement en fatigue sous environnement vibratoire: prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales,» École Centrale Paris, Paris, 2013.
- [16] M. Jannoun, «Fiabilité des structures en vibrations aléatoires- Application aux systèmes mécatroniques embarqués,» thèse Normandie Université, Rouen France, 2017.
- [17] G. Kharmanda, S. Lambert, N. Kourdi , A. Daboul et A. El Hami, «Reliability-Based Topology Optimization for Different Engineering Applications,» *International Journal of CAD/CAM*, vol. 7, n° 11, pp. 61-69, 2007.
- [18] S. Lambert, L. Khalij, A. El Hami et E. Pagnacco, «Optimisation of structures subject to white noise random excitations considering fatigue life.,» chez

*International Conference on Degradation, Damage, Fatigue, and Accelerated Life Models in Reliability Testing, ALT 2006, Angers, France, 2006.*

- [19] S. Lambert, E. Pagnacco, L. Khalij , E. Souza de Cursi et A. El Hami, «Global optimisation of randomly excited structures with damage constraints,» chez *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, DINAME 2007, Brazil , 2007.*
- [20] S. Lambert, E. Pagnacco et L. Khalij, «A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects,» *International Journal of Fatigue*, pp. 463-474, 2010.
- [21] E. Pagnacco, S. Lambert, L. Khalij et D. Rade, «Design optimisation of linear structures subjected to dynamic random loads with respect to fatigue life,» *International Journal of Fatigue*, n° %143, pp. 168-177, 2012.
- [22] F. Li, G. Meng, L. Sha et L. Zhou, «Robust optimization design for fatigue life,» *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, n° %110, p. 1186–1190, 2011.
- [23] J. Rice et D. Tracey, «On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields,» *Art, Materials Science*, vol. 17, pp. 201-217, 1969.
- [24] J. Hancock et A. Mackenzie, «On the Mechanism of Ductile Failure in High-Strength Steels Subjected to Multiaxial Stress-States,» *Journal of Mechanics and Physics*, vol. 24, pp. 147-169, 1976.
- [25] B. Weber, «Fatigue Multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque,» thèse de L'INSA de Lyon, Lyon, 1999.
- [26] A. Fatemi et L. Yang, «Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials,» *International Journal of Fatigue*, vol. 20, pp. 9-34, 1998.



- [27] I. Richlik, «On the 'narrow-band' approximation for expected fatigue damage,» *Probabilistic Probabilistic*, vol. 8, pp. 1-4, 1993.
- [28] X. Pitoiset et A. Preumont, «Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures,» *International Journal of Fatigue*, pp. 541-550, 2000.
- [29] X. Pitoiset, I. Rychlik et A. Preumont, «Spectral methods to estimate local multiaxial fatigue failure for structures undergoing random vibrations,» *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, pp. 715-727, 2001.
- [30] B. Weber, F. Labesse-Jied et J. Robert, «Comparison of multiaxial high cycle fatigue criteria and their application to fatigue design of structures,» chez *Sixth international conference on biaxial/multiaxial Fatigue and Fracture*, Lisbon, 2001.
- [31] B. Wu, L. Ferraton, C. Robin, G. Mesmacque et D. Zakarzewski, «Application de critère de fatigue multiaxiale aux structures en alliage d'aluminium,» chez *Conference of G2RT, TILT conference*, 2003.
- [32] B. Crossland, «Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel,» *Proceeding of international conferance on fatigue of metals*, pp. 138-49, 1956.
- [33] G. Sines, «Behaviour of metals under complex static and alternating stress.,» *McGraw-Hill*, pp. 145-69, 1959.
- [34] B. Li et M. Freitas, «A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading,» *Journal of Mechanical design*, pp. 558-563, 2002.
- [35] J. Balthazar et L. Malcher, A review on the main approaches for determination of the multiaxial high cycle fatigue strength, Brazil: Marcilio Alves & da costa Mattos, 2007.

- [36] A. Bernasconi, «Efficient Algorithms for Calculation of Shear Stress Amplitude and Amplitude of the Second Invariant of the Stress Deviator in Fatigue Criteria Applications,» *International Journal of Fatigue*, vol. 24, pp. 649-657, 2002.
- [37] J. Papuga, Mapping of Fatigue Damages Program Shell of FE-Calculation, Prague: Thesis, Faculty of Mechanical, 2005.
- [38] A. Cristofori, L. Susmel et A. Tovo, «A Stress Invariant Based Criterion to Estimate Fatigue Damage under Multiaxial Loading,» *International Journal of Fatigue*, vol. 30, pp. 1646-1658, 2008.
- [39] J. Liu et H. Zenner, «Fatigue Limit of Ductile Metals under Multiaxial Loading,» *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture 6 International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, vol. 31, pp. 147-164, 2003.
- [40] C. Gonçalves, J. Araujo et E. Mamiya, «A Simple Multiaxial Fatigue Criterion for Metals,» *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 32, pp. 963-968, 2004.
- [41] N. Zouain, E. Mamiya et F. Comes, «Using Enclosing Ellipsoids in Multiaxial Fatigue Strength Criteria,» *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 25, pp. 51-71, 2006.
- [42] A. G. Davenport, «Note on the distribution of largest values of random function with application to gust loading,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 28, pp. 187-196, 1964.
- [43] A. Yaich, A. El Hami, L. Walha et Haddar M, «Local multiaxial fatigue damage estimation for structures under random vibrations,» *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 132, pp. 1-7, 2017.
- [44] R. Fletcher, Practical methods of optimization, USA: John Wiley and Sons, 1987.

- [45] I. Kusano, A. Baldomir, J. A. Jurado et S. Hernández, «Reliability based design optimization of long-span bridges considering flutter,» *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 135, pp. 149-162, 2014.
- [46] A. Makhloufi, Y. Aoues et A. El Hami, «Reliability based design optimization of wire bonding in power microelectronic devices,» *Microsystem Technologies*, vol. 22, p. 2737–2748, 2016.
- [47] K. Dammak, A. El Hami, S. Koubaa, L. Walha et M. Haddar, «Reliability based design optimization of coupled acoustic-structure system using generalized polynomial chaos,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 134, pp. 75-84, 2017.
- [48] R. El Maani, A. Makhloufi, B. Radi et A. El Hami, «Reliability-based design optimization with frequency constraints using a new safest point approach,» *Engineering Optimization*, vol. 0, pp. 1-18, 2018.
- [49] R. El Maani, «Étude basée sur l'optimisation fiabiliste en aérodynamique,» thèse à l'INSA de Rouen, Rouen France, 2016.
- [50] G. Kharmanda et A. El Hami, *Reliability in Biomechanics*, UK: Wiley & ISTE, 2016.
- [51] G. Kharmanda et A. El Hami, *Biomechanics: Optimization, Uncertainties and Reliability*, UK: Wiley & ISTE, 2017.
- [52] Norme NF X 60-500: Terminologie relative à la fiabilité, maintenabilité, disponibilité, 1988.
- [53] K. Breitung, «Asymptotic approximations for multinormal integrals,» *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 357-366, 1989.

- [54] J. S. Arora, Introduction to optimum design. Second Edition, California: Elsevier, 2004.
- [55] M. A. Bhatti, Practical optimization methods with mathematical applications, New York: Springer-Verlag, 2000.
- [56] K. Lange, Optimization, New York: Springer-Verlag, 2004.
- [57] K. Pedregal, Introduction to optimization, New York: Springer-Verlag, 2004.
- [58] R. Haftaka et Z. Gurdal, Elements of structural optimisation, Dordrecht: Kluwer Academic Publications, 1991.
- [59] R. Grandhi et L. Wang, «Reliability-based structural optimization using improved tow-point adaptive nonlinear approximations,» *Finite Elem Anal Des*, vol. 29, pp. 35-48, 1998.
- [60] J. Arora, Introduction to optimum design, New York: McGraw-Hill, 1989.
- [61] J. Stevenson, Reliability analysis and optimum design of structural systems with applications to rigid frames. Division of Solid Mechanics and Structures, Cleveland, Ohio: 14, Case Western Reserve University, 1967.
- [62] F. Moses, «Structural system reliability and optimization,» *Comput Struct*, vol. 7, pp. 283-290, 1977.
- [63] Y. Feng et F. Moses, «A method of structural optimization based on structural system reliability,» *J Struct Mech*, vol. 14, pp. 437-453, 1986.
- [64] S. Chandu et R. Grandhi, «General purpose procedure for reliability structural optimization under parametric uncertainties,» *Adv Eng Softw*, vol. 23, pp. 7-14, 1995.
- [65] X. Du et W. Chen, «Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design,» *J Mech Des*, vol. 126, pp. 225-233, 2004.

- [66] G. Steenackers, R. Versluys, M. Runacres et P. Guillaume, «Reliability-based design optimization of computation-intensive models making use of response surface models,» *Qual Reliab Eng Int*, vol. 27, pp. 555-568, 2011.
- [67] Y. Aoues et A. Chateauneuf, «Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization,» *Struct Multidisc Optim*, vol. 41, pp. 277-294, 2010.
- [68] G. Kharmanda, A. Mohamed et M. Lemaire, «New hybrid formulation for reliability-based optimization of structures,» chez *Cheng G, Gu Y, Wang Y (eds) Proc. The Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-4)*, Dalian, China, 2001.
- [69] G. Kharmanda, S. Sharabaty, H. Ibrahim, A. Makhloufi et A. El-Hami, «Reliability-based design optimization using semi-numerical methods for different engineering applications,» *INT J CAD/CAM*, vol. 9, pp. 1-16, 2009.
- [70] G. Kharmanda, «Numerical and semi-numerical methods for reliability-based design optimization,» chez *Structural design optimization considering uncertainties*, Taylor & Francis e-Library, 2008, pp. 189-216.
- [71] G. Kharmanda, M. Ibrahim, A. Abo Al-kheer, F. Guerin et A. El-Hami, «Reliability-based design optimization of shank chisel plough using optimum safety factor strategy,» *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 109, pp. 162-171, 2014.
- [72] A. Yaich, G. Kharmanda, A. El Hami, L. Walha et M. Haddar, «Reliability Based Design Optimization for multiaxial fatigue damage analysis using Robust Hybrid Method,» *Journal of Mechanics*, vol. 44, pp. 1-16, 2017.
- [73] M. Lemaire, «Fiabilité des structures,» Paris, HERMES-LAVOISIER, 2005, p. 506.

- [74] D. M. Frangopol et S. Hendawi, «Incorporation of corrosion effects in reliability based design optimisation of composite hybrid plate girders,» *Structural Safety*, vol. 16, pp. 145-169, 1994.
- [75] A. S. Barakat, A. I. H. Malkawi et R. H. Tahat, «Reliability Based Design optimization of laterally loaded piles,» *Structural Safety*, vol. 7, pp. 45-64, 1999.
- [76] G. Kharmanda et N. Olhoff, «An Optimum Safety Factor Approach for Reliability-Based Optimal Design,» chez *Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO-5*, Lido Di Jesolo, Italy, 2003.
- [77] G. Kharmanda, A. Mohamed et M. Lemaire, «Integration of reliability-based design optimization within CAD and FE models,» chez *Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 453-462.
- [78] G. Kharmanda et N. Olhoff, «Extension of optimum safety factor method to nonlinear reliability-based design optimization,» *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 43, pp. 367-380, 2007.
- [79] R. H. Lopez, D. Lemosse, E. S. Cursi, J. E. Rojas et A. El-Hami, «An Approach for the Reliability Based Design Optimization of Laminated Composite Plates,» *Engineering Optimization*, vol. 43, n° 110, pp. 1079-1094, 2011.
- [80] L. F. Peretti et E. H. Dowell, «Asymptotic modal-analysis of a rectangular acoustic cavity excited by wall vibration.,» *AIAA Journal*, vol. 30, pp. 1991-1998, 1992.
- [81] K. S. Sum et J. Pan, «On acoustic and structural modal cross-couplings in plate-cavity systems.,» *J Acoust Soc Am*, vol. 107, pp. 2021-2038, 2000.
- [82] E. H. Dowell, G. F. Gorman et D. A. Smith, «Acoustoelasticity: general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including

- comparisons with experiment.,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 52, pp. 519-549, 1977.
- [83] K. Dammak, S. Koubaa, A. El hami, L. Walha et M. Haddar, «Numerical modelling of vibro-acoustic problem in presence of uncertainty: Application to a vehicle cabin,» *Applied Acoustics*, 2017.
- [84] M. PETYT, J. LEA et G. H. KOOPMANN, «A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 45, pp. 495-502, 1976.
- [85] T. SHUKU et K. ISHIHARA, «The analysis of the acoustic field in irregularity shaped rooms by the finite element method,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 29, pp. 67-76, 1973.
- [86] M. S. Abbes, S. Bouaziz, F. Chaari, M. Maatar et M. Haddar, «An acoustic-structural interaction modelling for the evaluation of a gearbox-radiation noise,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, pp. 569-577, 2007.
- [87] A. Akrouf, C. Karra, L. Hammami et M. Haddar, «Viscothermal fluid effects on vibro-acoustic behaviour of double elastic panels,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, pp. 764-773, 2007.
- [88] C. Q. Howard et B. S. Cazzolato, *Acoustic Analyses Using Matlab and Ansys*, Boca Raton: CRC Press, 2015.
- [89] M. Frotscher, F. Kahleyss, T. Simon, D. Biermann et G. Eggeler, «Achieving small structures in thin NiTi sheets for medical applications with water jet and micromachining: a comparison,» *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 20, pp. 776-782, 2011.

- [90] M. Kohl, E. Just, W. Pfleging et S. Miyazaki, «Sma microgripper with integrated antagonism,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 83, pp. 208-213, 2000.
- [91] A. Nisar, N. Afzulpurkar, B. Mahaisavariya et A. Tuantranont, «Mems-based micropumps in drug delivery and biomedical applications,» *Sensors and Actuators B: Chemical*, vol. 130, pp. 917-942, 2008.
- [92] B. Jodway et M. Hülsmann, «A comparative study of root canal preparation with NiTi-TEE and k3 rotary Ni-Ti instruments,» *International Endodontic Journal*, vol. 39, pp. 71-80, 2006.
- [93] G. Song, N. Ma et H. -N. Li, «Applications of shape memory alloys in civil structures,» *Engineering Structures*, vol. 114, pp. 1266-1274, 2006.
- [94] J. Mohd Jani, M. Leary, A. Subic et M. A. Gibson, «A review of shape memory alloy research, applications and opportunities,» *Materials and Design*, vol. 56, p. 1078–1113, 2014.
- [95] J. Mohd Jani, M. Leary et A. Subic, «Shape Memory Alloys in Automotive Applications,» *Applied Mechanics and Materials*, vol. 663, pp. 248-253, 2014.
- [96] F. Butera, A. Coda et G. Vergani, «Shape memory actuators for automotive applications,» *Nanotec IT newsletter. Roma: AIRI/nanotec IT*, pp. 6-12, 2007.
- [97] C. Bil, K. Massey et E. Abdullah , «Wing morphing control with shape memory alloy actuators,» *Intell Mater Syst Struct*, vol. 24, pp. 879-898, 2013.
- [98] M. Kheirikhah, S. Rabiee et M. Edalat, «A Review of Shape Memory Alloy Actuators in Robotics,» chez *Ruiz-del-Solar J., Chown E., Plöger P.G. (eds) RoboCup 2010: Robot Soccer World Cup XIV. RoboCup 2010*, J. Ruiz-del-Solar, E. Chown et P. Plöger, Édts., Berlin Heidelberg, Springer, 2011, pp. 206-217.



- [99] L. Petrini et F. Migliavacca, «Biomedical applications of shape memory alloys,» *Journal of Metallurgy*, vol. 2011, p. 15 pages, 2011.
- [100] L. Sun, W. M. Huang, Z. Ding, Y. Zhao, C. C. Wang, H. Purnawali et C. Tang, «Stimulus-responsive shape memory materials: A review,» *Materials and Design*, vol. 33, pp. 577-640, 2012.
- [101] M. Kohl, *Shape memory microactuators*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [102] W. Huang, Q. Liu, L. He et J. Yeo, «Micro NiTi–Si cantilever with three stable positions,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 114, pp. 118-122, 2004.
- [103] A. Johnson, «Vacuum-deposited thin shape memory film: characterization and applications in microdevices,» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 1, p. 34, 1991.
- [104] B. Hoxhold et S. Bittgenbach, «Batch fabrication of micro grippers with integrated actuators,» *Microsystem Technologies*, vol. 14, pp. 1917-1924, 2008.
- [105] J. K. Paik, E. Hawkes et R. J. Wood, «A novel low-profile shape memory alloy torsional actuator,» *Smart Materials and Structures*, vol. 19, p. 125014 (9pp), 2010.
- [106] Y. Bellouard, «Shape memory alloys for microsystems: a review from a material research perspective,» *Materials Science and Engineering: A*, vol. 481, pp. 582-589, 2008.
- [107] M. Tomozawa, H. Kim et S. Miyazaki, «Shape memory behavior and internal structure of Ti–Ni–Cu shape memory alloy thin films and their application for microactuators,» *Acta Materialia*, vol. 57, pp. 441-452, 2009.
- [108] J. Busch et A. Johnson, «Shape-memory alloys micro-actuator,» *US Patent*, vol. 5, p. 914, 1991.

- [109] R. Wolf et A. Heuer, «Tini (shape memory) films silicon for mems applications,» *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 4, pp. 206-212, 1995.
- [110] B. Kuila et M. Stamm, «Block copolymer small molecule supramolecular assembly in thin film: a novel tool for surface patterning of different functional nanomaterials,» *Journal of Materials Chemistry*, vol. 21, pp. 14127-14134, 2011.
- [111] M. Ehmann, S. Thienhaus et A. Ludwig, «Micro-to nanostructured devices for the characterization of scaling effects in shape-memory thin films,» *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 21, pp. 1264-1269, 2010.
- [112] M. Kohl, K. Skrobaneck et S. Miyazaki, «Development of stress-optimised shape memory microvalves,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 72, pp. 243-250, 1999.
- [113] W. Benard, H. Kahn, A. Heuer et M. Huff, «Thin film shape memory alloy actuated micropumps,» *Journal of microelectromechanical systems MEMS*, vol. 1, pp. 245-251, 1998.
- [114] W. Benard, H. Kahn, A. Heuer et M. Huff, «A titanium-nickel shape memory alloy actuated micropump,» *International Conference on Solid State Sensors and Actuators*, vol. 1, pp. 361-364, 1997.
- [115] E. Makino, T. Mitsuya et T. Shibata, «Fabrication of TiNi shape memory micropump,» *Sensors and Actuators A*, vol. 88, pp. 256-262, 2001.
- [116] C. Ray, C. Sloan, A. Johnson, J. Busch et B. Petty, «A silicon-based shape memory alloy microvalve,» *Materials Research Society Symposium Proceedings*, vol. 276, pp. 161-166, 1992.
- [117] B. Fan, G. Song, F. Hussain et Y. c. Shu, «Shape-memory micropumps,» *Materials Transactions*, vol. 43, pp. 1037-1044, 2002.

- [118] F. Sassa, Y. Al-Zain, T. Ginoza, S. Miyazaki et H. Suzuki, «Miniaturized shape memory alloy pumps for stepping microfluidic transport,» *Sensors and Actuators B: Chemical*, vol. 165, pp. 157-163, 2012.
- [119] D. Xu, L. Wang, G. Ding, Y. Zhou, A. Yu et B. Cai, «Characteristics and fabrication of NiTi/Si diaphragm micropump,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 93, pp. 87-92, 2001.
- [120] T. Merzouki, A. Duval et T. Ben Zineb, «Finite Element analysis of a shape memory alloy actuator for a micropump,» *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 27, p. 112–126, 2012.
- [121] I. Gui et C. Ren, «Exploration and evaluation of embedded shape memory alloy (sma) microvalves for high aspect ratio microchannels,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 168, pp. 155-161, 2011.
- [122] P. Bisegna, F. Caselli, S. Marfia et E. Sacco, «A new SMA shell element based on the corotational formulation,» *Computational Mechanics*, vol. 54, pp. 1315-1329, 2014.
- [123] W. Huang, «Modified shape memory alloy (sma) model for sma wire based actuator design,» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 10, p. 221–231, 1999.
- [124] QualMark Corporation documentation, MB ELECTRONIQUE.
- [125] CEVAA, «Rapport d'essais n°17-0009\_B\_rev\_0: Analyse modale expérimentale sur table de banc HALT,» PISTIS, 2017.
- [126] CEVAA, «Rap\_17-0009-rev-0-PISTIS-HALT: Essais opérationnels sur banc HALT sur site THALES VALENCE,» Valence, 2017.

- [127] M. Andrieu, «Modélisation du comportement mécanique des structures mécatroniques soumises à des chargements vibratoires.,» PFE CNAM, Rouen, 2013.
- [128] CEVAA, «Rap\_17-0009\_C-rev-0 : Déterminatin d'efforts opérationnels à partir de mesures de FRF et d'accélérationnelles sur banc HALT,» Rouen, 2017.

# Liste des publications

## Publication scientifique

A. Yaich, A. El Hami, L. Walha et Haddar M, «Local multiaxial fatigue damage estimation for structures under random vibrations,» Finite Elements in Analysis and Design, vol. 132, pp. 1-7, 2017

A. Yaich, G. Kharmanda, A. El Hami, L. Walha et M. Haddar, «Reliability Based Design Optimization for multiaxial fatigue damage analysis using Robust Hybrid Method,» Journal of Mechanics, vol. 44, pp. 1-16, 2017

## Congrès et Workshop

A. Yaich, A. El Hami, L. Walha et M Haddar « Analyse de l'endommagement par fatigue vibratoire et modélisation numérique de l'excitation du banc » Normandy Reliability Technology Workshop NRTW'17, Juin 2017, Rouen France

A. Yaich, A. El Hami, L. Walha et M Haddar “Integration of the reliability based optimization into the uniaxial fatigue damage of structures under random vibrations” ICAV'2018, Mars 2018, Hammamet Tunisie

A. Yaich, A. El Hami, L. Walha et M Haddar “Fatigue damage estimation of structures under multiaxial random vibrations” CMSM'2017, Mars 2017, Hammamet Tunisie

A. Yaich, A. El Hami, L. Walha et M Haddar “Determination of the stresses Power Spectral Densities of a structures subject to random vibrations” ICAV'2016 , Mars 2016, Hammamet Tunisie

## Annexe A. : Moyennes des DSP recomposé de l'effort pour différents types de chargement

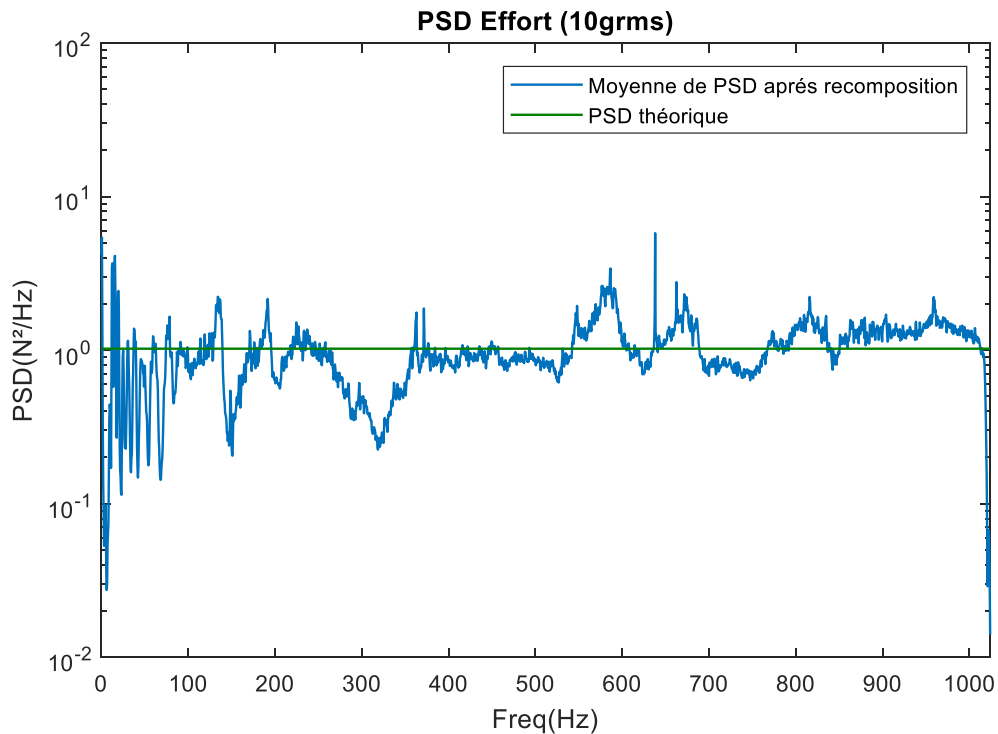


Figure A- 1: Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 10grms

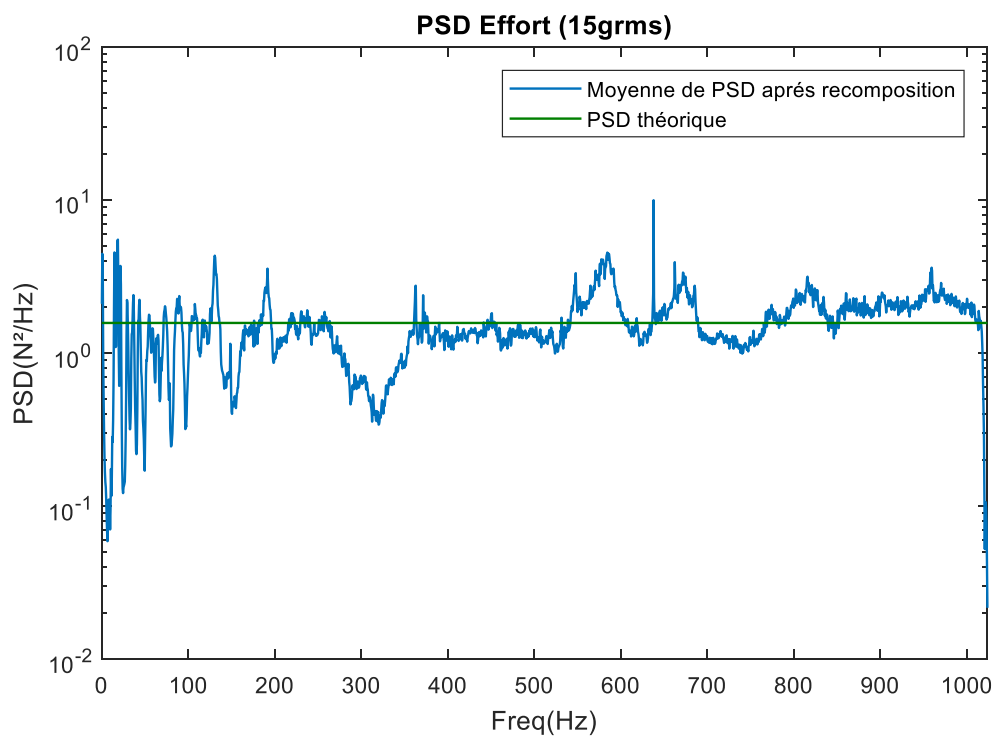


Figure A- 2 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 15grms

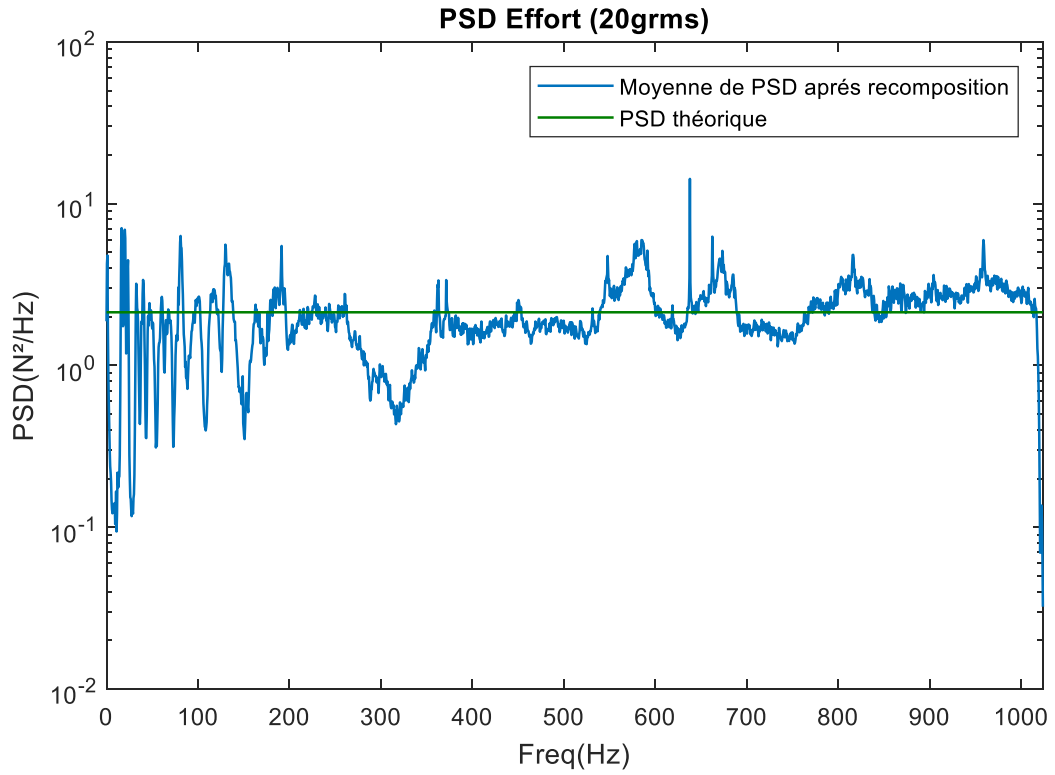


Figure A- 3 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 20grms

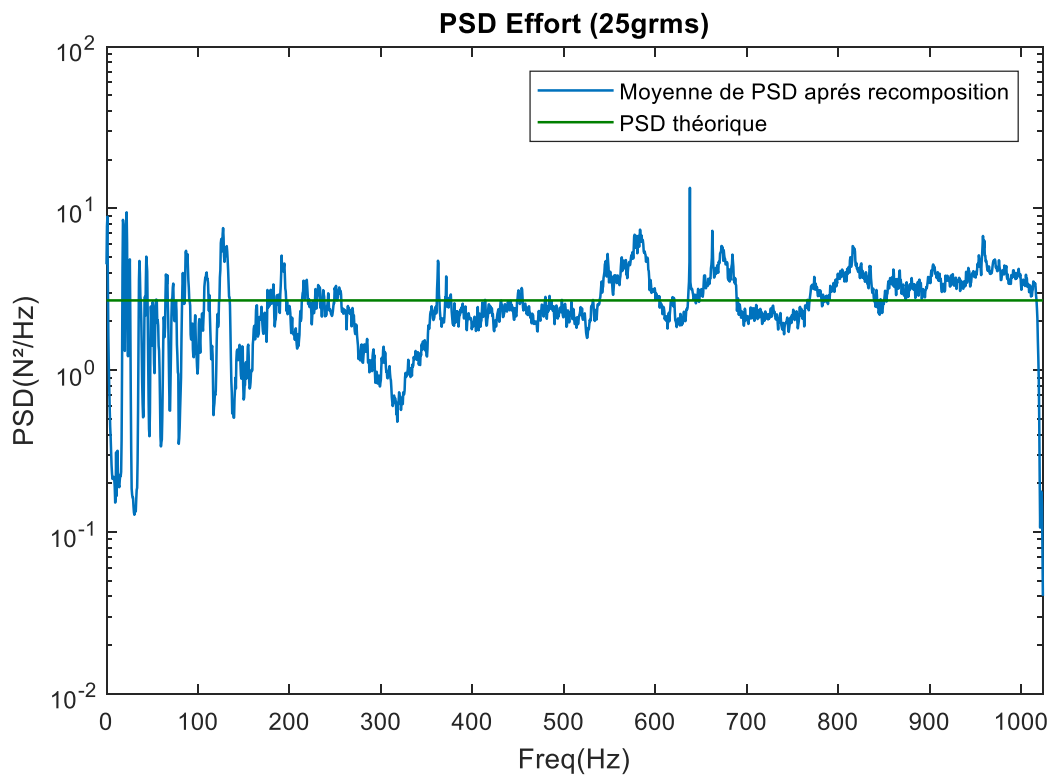


Figure A- 4 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 25grms

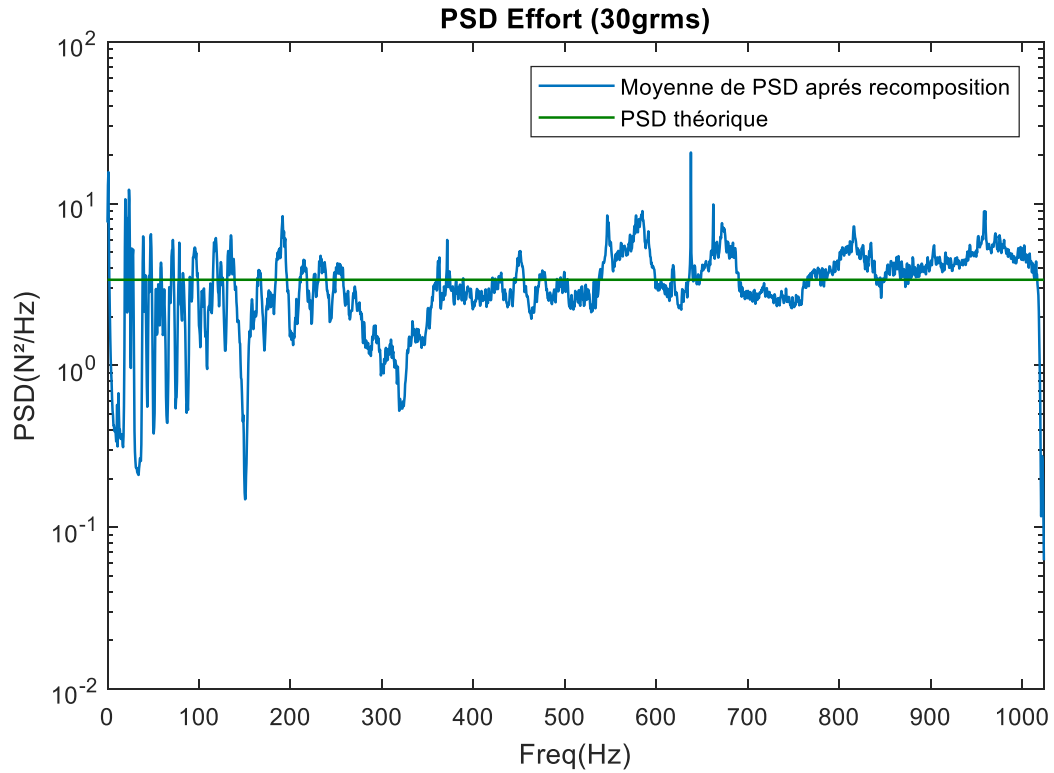


Figure A- 5 : Moyenne de DSP d'effort pour un chargement 30grms

Le tableau suivant présente les valeurs théoriques de DSP de l'effort injecté par chaque marteau, pour chaque type d'utilisation, sur la bande de fréquence [0-1024Hz].

Tableau A- 1: Valeurs théoriques de DSP de l'effort

Type d'utilisation	DSP effort injecté (N²/Hz)
5grms	0.455
10grms	1.021
15grms	1.573
20grms	2.131
25grms	2.697
30grms	3.386



## Annexe B. : Réponse de la table pour une excitation à DSP constante

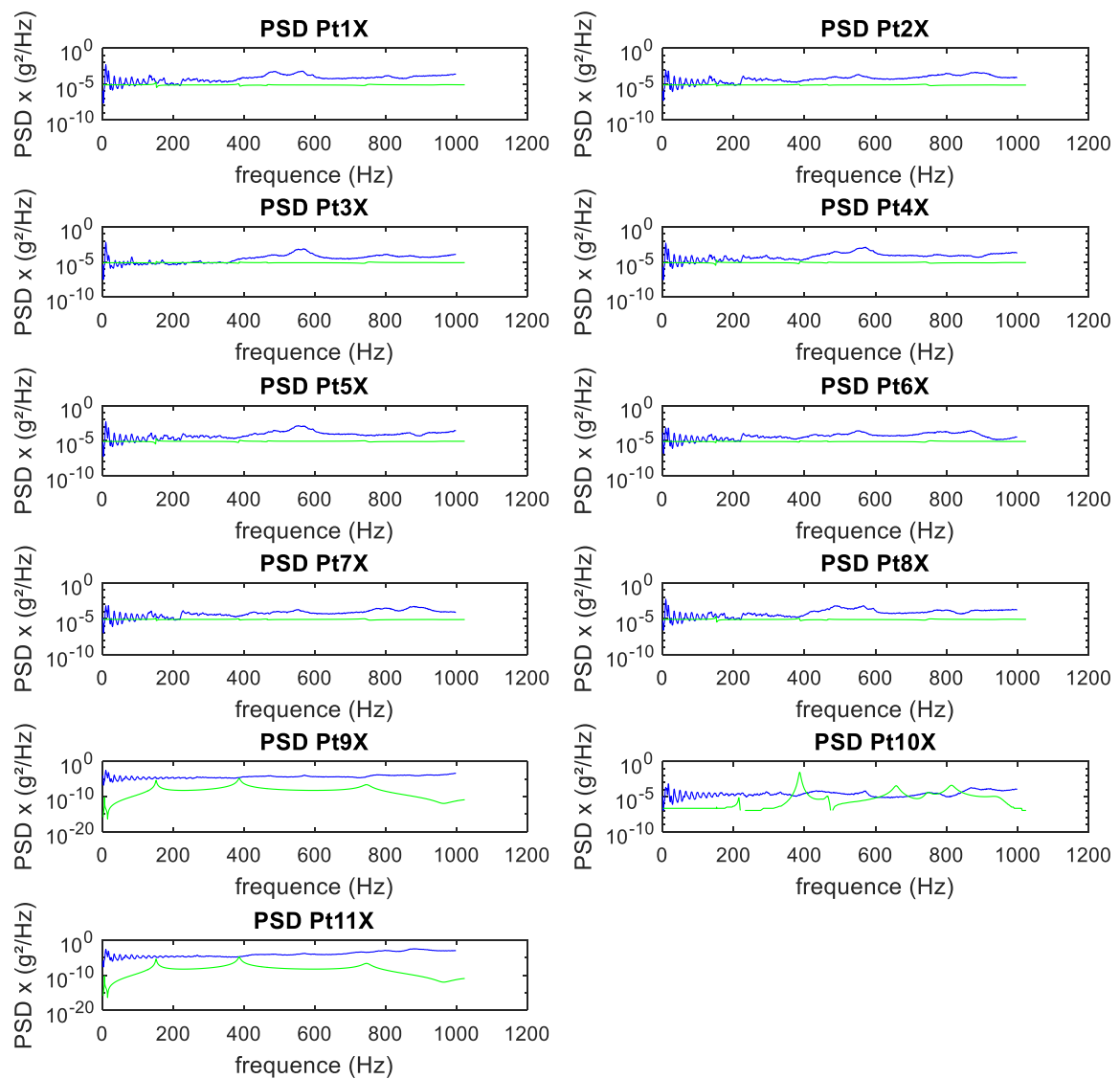


Figure B- 1 : Réponse de la table en DSP d'accélération suivant X

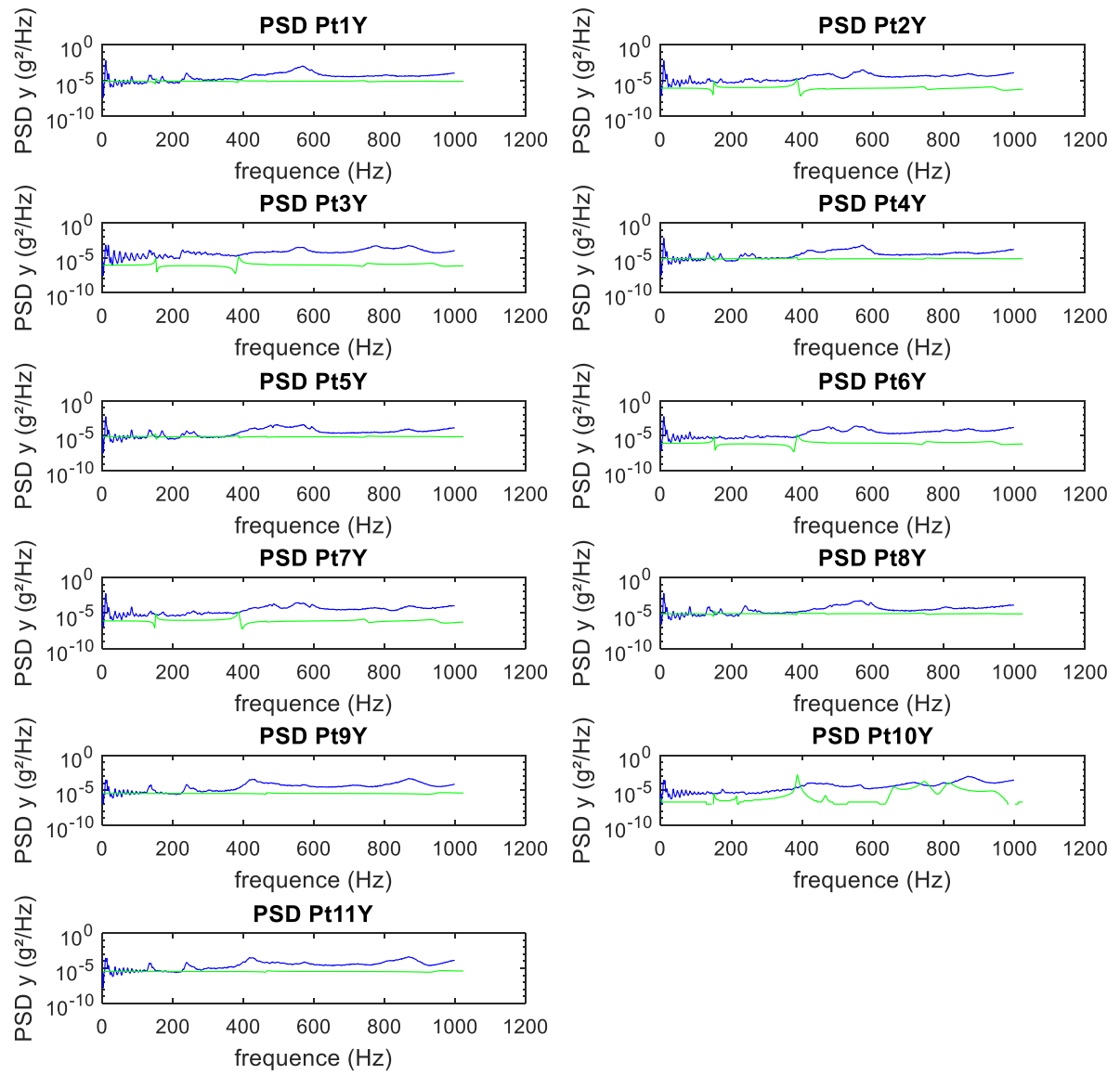


Figure B- 2 : Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Y

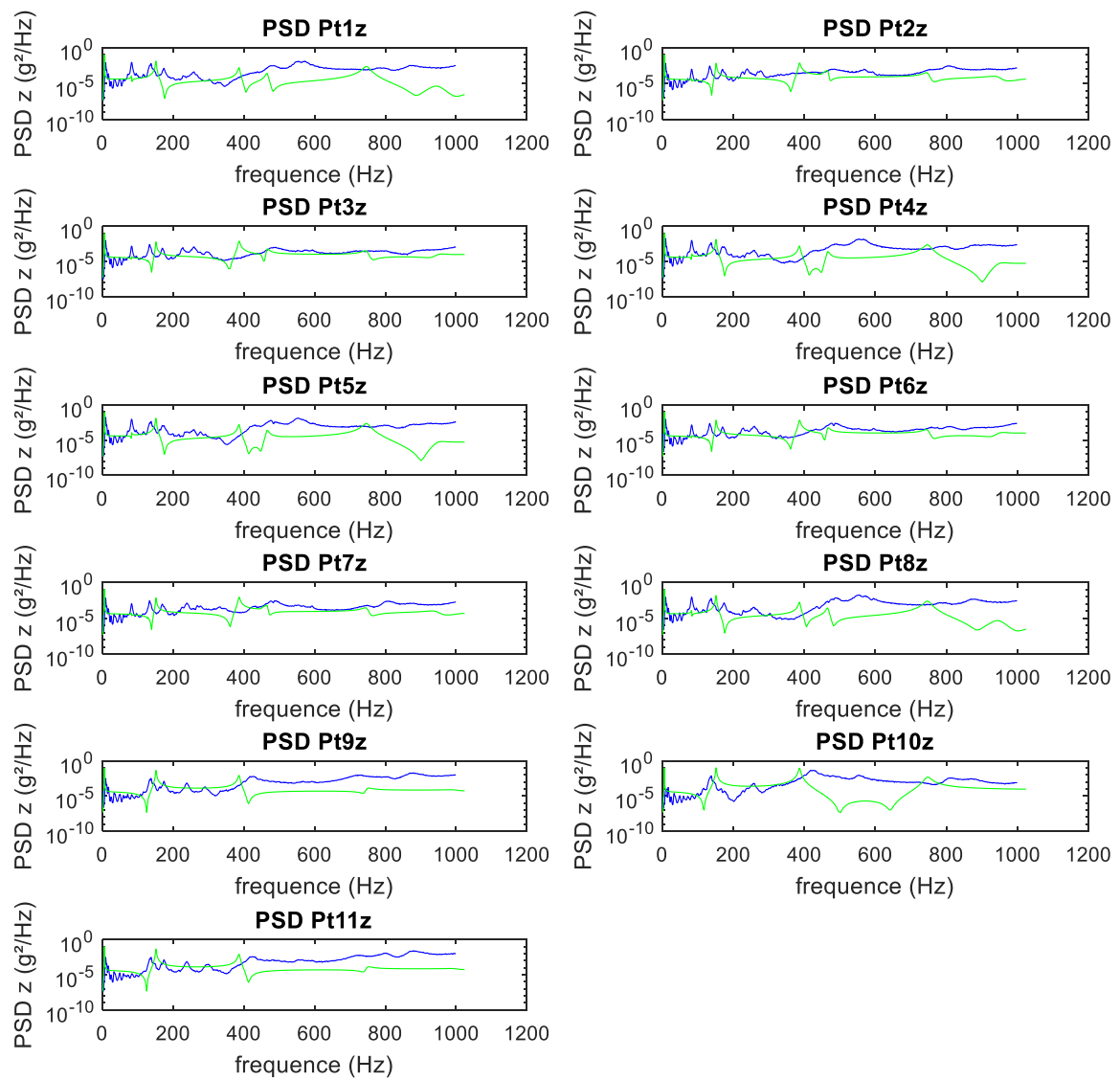


Figure B- 3 : Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Z

# Annexe C. : Réponse de la table pour une DSP d'excitation amélioré

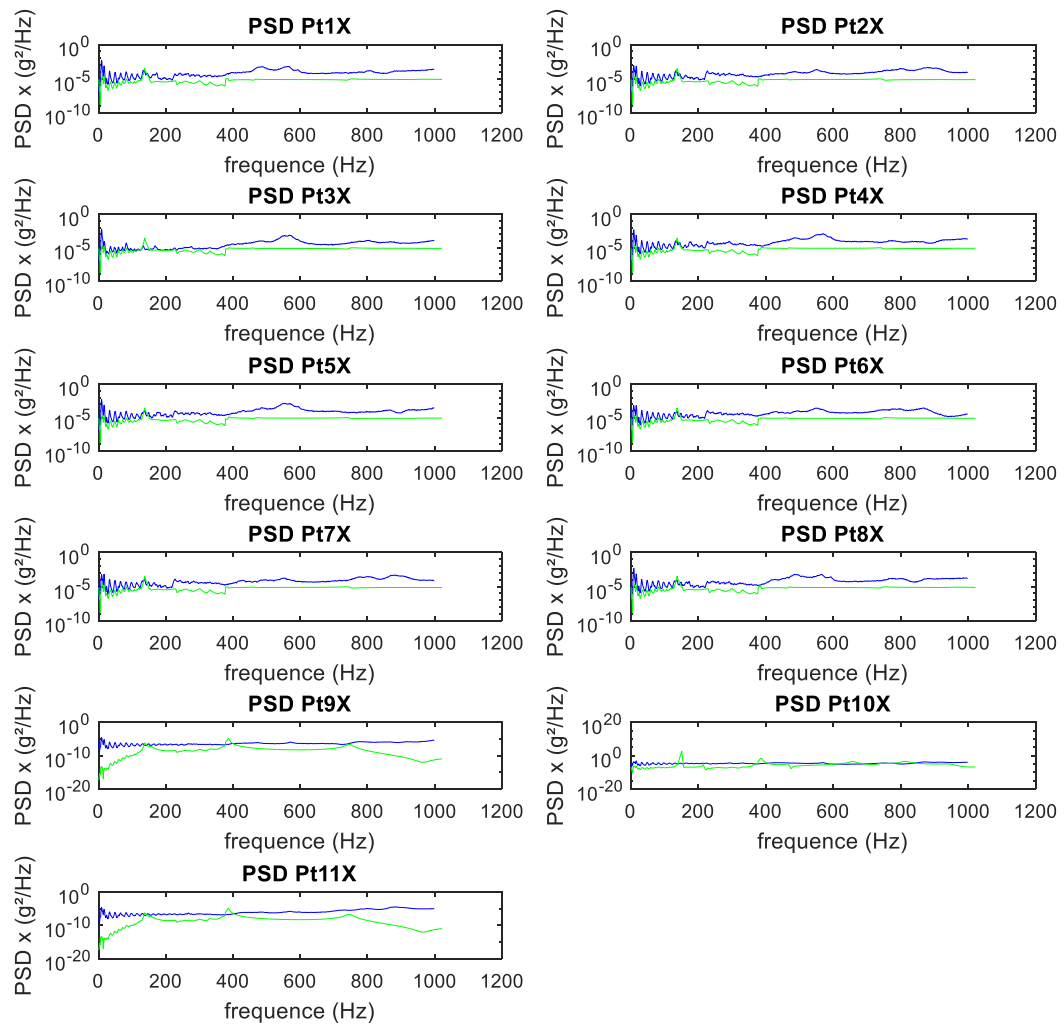


Figure C- 1: Réponse de la table en DSP d'accélération suivant X

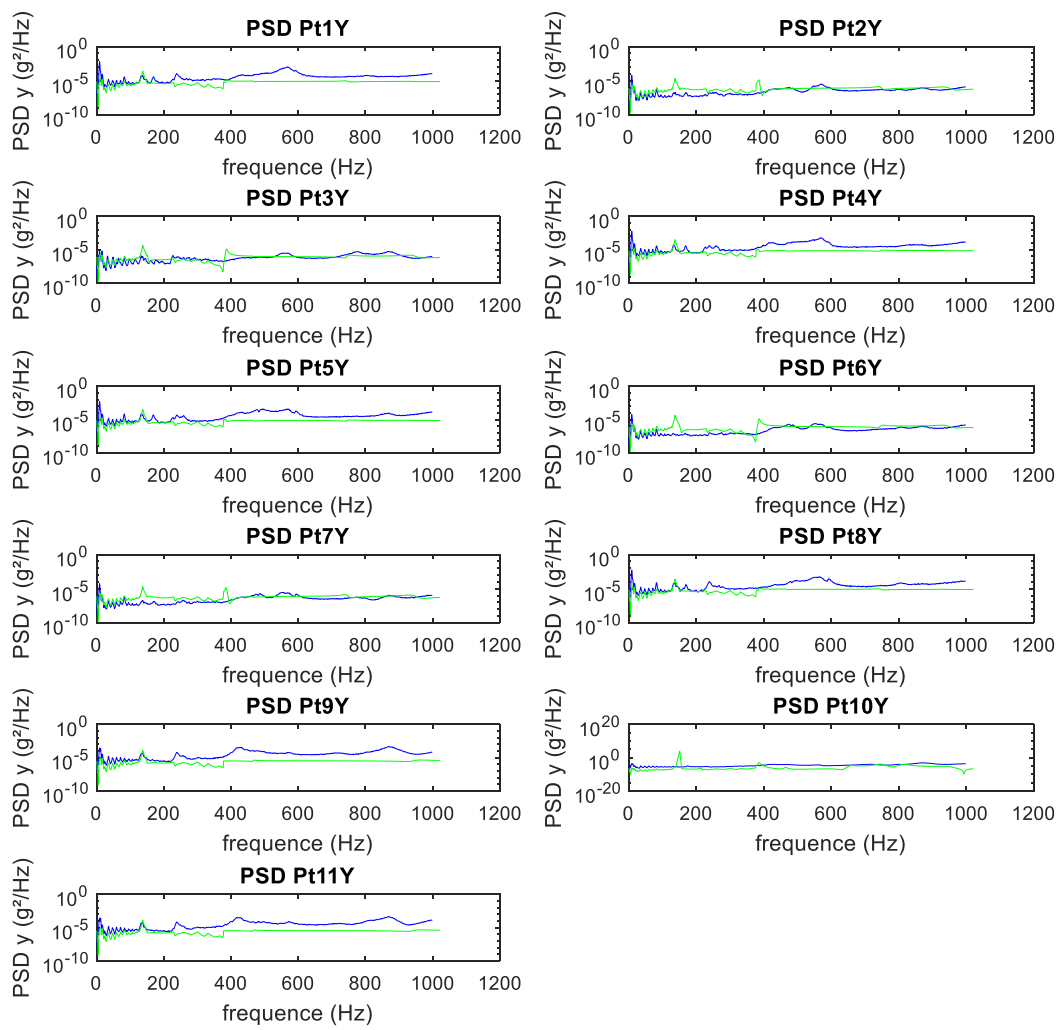


Figure C- 2: Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Y

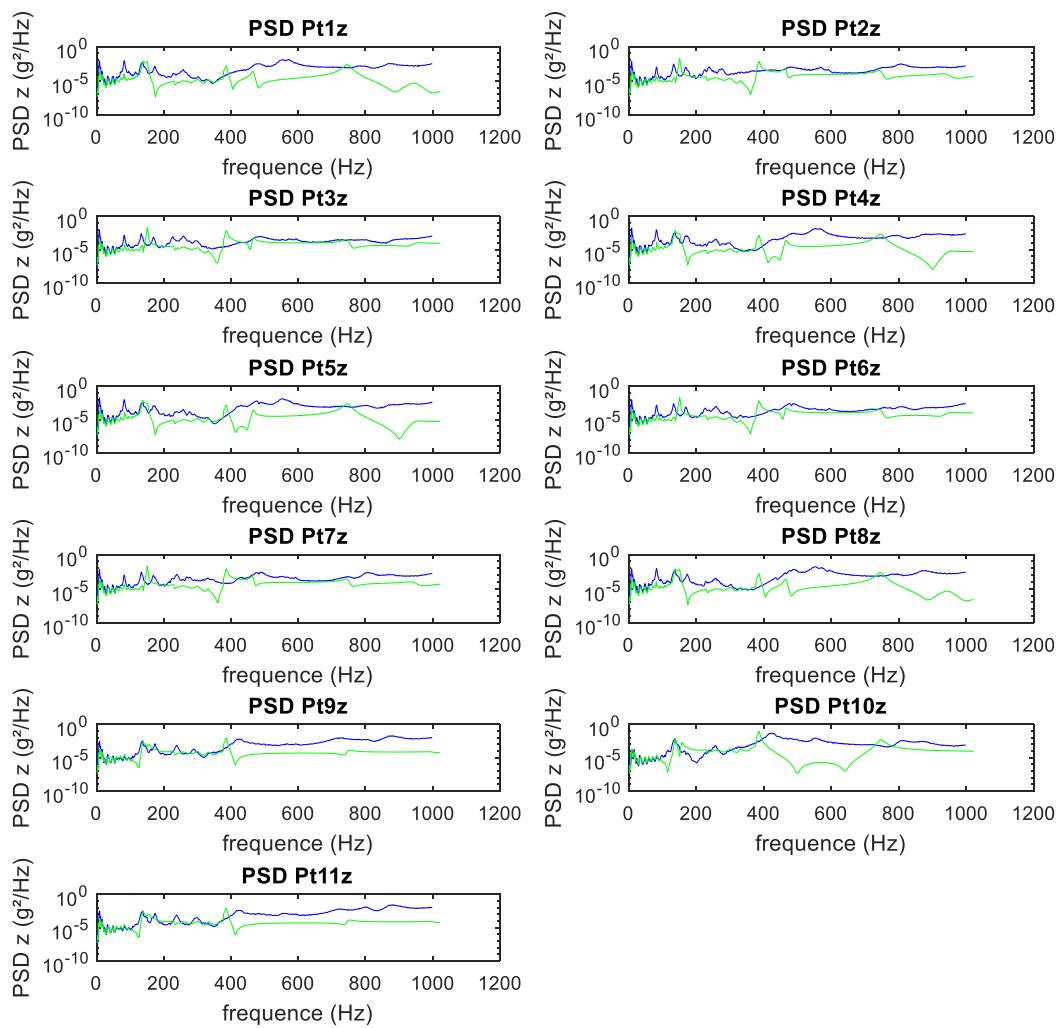


Figure C- 3: Réponse de la table en DSP d'accélération suivant Z