



HAL
open science

Contribution à la surveillance d'un module d'électronique de puissance sous sollicitations actives par mesures thermiques

Imane Sakhraoui

► To cite this version:

Imane Sakhraoui. Contribution à la surveillance d'un module d'électronique de puissance sous sollicitations actives par mesures thermiques. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2018. Français. NNT : 2018INPT0100 . tel-04223298

HAL Id: tel-04223298

<https://theses.hal.science/tel-04223298>

Submitted on 29 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Génie Électrique

Présentée et soutenue par :

Mme IMANE SAKHRAOUI

le lundi 22 octobre 2018

Titre :

Contribution à la surveillance d'un module d'électronique de puissance
sous sollicitations actives par mesures thermiques

Ecole doctorale :

Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEET)

Unité de recherche :

Laboratoire Génie de Productions de l'ENIT (E.N.I.T-L.G.P.)

Directeur(s) de Thèse :

M. FRÉDÉRIC ROTELLA

M. BAPTISTE TRAJIN

Rapporteurs :

M. DIMITRI LEFEBVRE, UNIVERSITE DU HAVRE

M. ZOUBIR KHATIR, IFSTTAR

Membre(s) du jury :

M. ERIC WOIRGARD, UNIVERSITE BORDEAUX 1, Président

M. BAPTISTE TRAJIN, ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TARBES, Membre

M. FRÉDÉRIC ROTELLA, ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TARBES, Membre

Mme KARINE ISOIRD, LAAS TOULOUSE, Membre

À l'âme de ma mère

Qui aurait été fière de voir sa fille devenir «Docteur», je ne saurais exprimer mon grand chagrin en ton absence à quelques mois de ma soutenance. J'aurais aimé que tu sois à mes côtés ce jour. Que ce travail soit une prière pour le repos de ton âme.

À mes très chères tantes

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon grand respect, et ma reconnaissance pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation. J'implore dieu le tout puissant de vous accorder bonne santé et longue vie.

À mon très cher mari Karim

Celui que j'aime plus que tout, et qui m'a soutenue tout au long de cette thèse. Tes prières m'ont toujours accompagné, je t'offre en guise de reconnaissance, ce travail qui, sans ton aide, ta générosité infinie, tes encouragements n'aurait vu le jour.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au laboratoire LGP (Laboratoire Génie de Production) équipe DIDS (Décision et Interaction Dynamique pour les Systèmes) au sein de l'École Nationale d'Ingénieur de Tarbes.

En tout premier lieu, je voudrais manifester toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, M. Frédéric ROTELLA, Professeur des Universités au LGP, pour son apport inestimable, tant scientifiquement qu'humainement, tout au long de ces années de travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour leur soutien et leur encouragement, exprimés avec une grande sagesse.

Mes remerciements s'adresse ensuite à mon co-directeur, M. Baptiste TRAJIN, Maître de Conférences au LGP. Sa rigueur scientifique et son aide ont été précieuses durant cette thèse.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à Mme. Irène Zambetakis, Professeur des Universités à l'IUT de Tarbes, pour son soutien, son aide et ses conseils.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement M. Eric WOIRGARD, Professeur des universités à Bordeaux, qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis également très honorée que M. Dimitri LEFEBVRE, professeur des universités au Laboratoire Groupe de Recherche en Électrotechnique et Automatique du Havre GREAH, M. Zoubir KHATIR, Professeur des universités au groupe de Technologies pour une Electro-Mobilité Avancée TEMA, aient acceptés de juger ce travail en tant que rapporteurs.

Je voudrais également remercier Mme. Karine ISOIRD, Maître de conférence au LAAS, pour nous avoir honorés de leurs présences en acceptant de faire parti des membres du Jury. Enfin, merci à Mme. Christelle SABER, docteur (Safran Tech), d'avoir pu participer au jury de thèse.

Nulle dédicace ne pourrait exprimer mes sentiments et mon profond attachement à mon père, mes deux sœurs et mon frère Sara, Marwa et Khalil, ma nièce Chaima, et mes neveux, soutient indéfectible au travers des (très) nombreuses tempêtes qu'ils ont traversés. Un grand merci particulier à ma belle famille que j'aime.

Comment ne pas citer Linda, Houda et Ghita, mes copines, qui ont eu la lourde responsabilité de me supporter pendant cette période de thèse! Je n'oublierai pas nos discussions sur tout. Ce fut un plaisir.

Ces remerciements seront incomplet sans mentions des professeurs, maîtres de conférences, thésards et stagiaires, que j'ai côtoyé lors de ces années de thèses. Entres autres, et la liste est loin d'être exhaustive, j'adresse toute ma sympathie à Kamal, Ferhat, Mourad, Vepa, Karima, Nesrine, Marwa, Simon, Brahim, Ayoub, Olivier, . . . et al. Ma profonde gratitude va aussi aux personnels de l'ENIT en général et aux membres du laboratoire LGP en particulier pour leur accueil, gentillesse et soutien tout au long de ma thèse. Je remercie en particulier les secrétaires du LGP Cécile, Eliane et surtout Marie.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	1
Abstract	2
Introduction générale	3
1 Comportement et modélisation thermique	6
Introduction	7
1.1 Convertisseurs statiques	8
1.1.1 Constitution d'un convertisseur statique	8
Diodes	8
Thyristors	9
Transistors	9
1.1.2 Structure des convertisseurs statiques	10
1.1.3 Différents types de convertisseurs statiques	10
Conversion alternative-continue	11
Conversion continue-alternative	11
Conversion continue-continue	11
Conversion alternative-alternative	11
1.1.4 Pertes des convertisseurs statiques	12
Principe de fonctionnement	12
Chronogrammes	13
Pertes par conduction	13
Pertes par commutation des diodes	14
Pertes par commutation des transistors	15
1.1.5 Module d'électronique de puissance	16
Différents constituants d'un module d'électronique de puissance	16
Différents modes de défaillances des modules d'électro- nique de puissance	18
1.2 Comportement et modélisation thermiques	19
1.2.1 Loi de Fourier	20
1.2.2 Équation de la chaleur	20
Caractéristiques de l'équation de la chaleur	21
1.2.3 Modes de transfert de chaleur	21
Mode de conduction thermique	21
Mode de convection thermique	22
Mode de rayonnement thermique	23
Synthèse des modes de transfert	24

1.2.4	Discrétisation de l'équation de la chaleur	26
1.2.5	Équivalence thermique-électrique	27
	Base de l'analogie	27
	Analogie électrothermique	28
1.2.6	Modèle thermique	28
	Exemple d'application 2D	28
1.3	Modélisation d'état pour la modélisation thermique	31
1.3.1	Potentiel thermique en un nœud (théorème de Millman)	31
1.3.2	Représentation d'état	32
	Différentes équations	32
	Système d'équation	35
	Synthèse du système d'état	38
1.4	Dispositif expérimental	39
1.4.1	Système d'étude	39
1.4.2	Mise en équations	40
1.4.3	Réponse thermique	42
	Conclusion	43
2	Application des observateurs de fonctionnelle linéaire conti-	
	nus	45
	Introduction	46
2.1	Système dynamique	47
2.1.1	Représentation des systèmes	48
2.1.2	Équation d'état	49
2.2	Fonctions de transfert	49
2.2.1	Détermination des différentes fonctions	49
2.2.2	Principe général d'un observateur	50
2.3	Modèle par transfert	51
2.3.1	Analyse de l'erreur de poursuite	52
2.3.2	Résolution de l'équation de Bezout	52
2.3.3	Méthode de Hörner	53
2.3.4	Exemple d'application	54
	Résultat de simulation	56
2.4	Exemple appliqué sur la plaque chauffante	57
2.4.1	Méthodes d'identification	58
2.4.2	Modèle de Hudzovic	58
2.4.3	Approximation de Padé	59
2.4.4	Construction de l'observateur	60
	Résolution de l'équation de Bezout	60
	Modèle de Hörner	60
	Résultat de simulation	61
2.5	Estimation des variables non mesurées	62
2.5.1	Principe de l'observateur	62
2.5.2	Objectif d'un observateur	62
2.5.3	Observateur de fonctionnelle linéaire	63
2.5.4	Conception d'un observateur de Luenberger	64
	Construction de la matrice T	66

2.6	Application sur la plaque chauffante $2D$ pour un système symétrique	66
2.6.1	Conception d'un observateur minimal	66
2.6.2	Résultats de simulation	69
2.7	Application sur la plaque chauffante $2D$ pour un système non symétrique	71
2.7.1	Exemple 1	72
2.7.2	Exemple 2	72
2.8	Observateur de Luenberger avec des degrés de liberté	74
2.9	Estimation de la dérivée de la température	77
2.9.1	Recherche de l'ordre minimal :	77
2.9.2	Conception de l'observateur minimal	79
2.9.3	Résultats de simulation	79
2.10	Partie expérimentale	80
	Conclusion	81
3	Application des observateurs de fonctionnelle linéaire discrets	82
	Introduction	82
3.1	Équation d'état	83
3.1.1	Système d'état échantillonné	84
3.2	Observateur de fonctionnelle linéaire d'un système d'état échantillonné	85
3.2.1	Conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire	86
3.2.2	Construction de la matrice T	89
3.2.3	Application sur la plaque chauffante $2D$	89
	Conception d'un observateur minimal	90
	Résultats de simulation	92
3.2.4	Discrétisation plus fine de la plaque chauffante $2D$	93
3.3	Échantillonné bloqué de l'OFL continu	96
3.4	Intégration numérique d'un observateur continu	97
3.4.1	Méthode d'Euler	98
3.4.2	Méthodes de Runge-Kutta	99
	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	99
	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	100
3.5	Comparaison entre les différentes techniques	102
3.6	Partie expérimentale	103
	Conclusion	104
4	Application des observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues	105
	Introduction	105
4.1	Observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues	107
4.2	Résultat principal	110
4.3	Conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues	112
4.3.1	Première étape	112
4.3.2	Deuxième étape	113
4.4	Exemple illustratif	115

4.4.1	Recherche de l'ordre minimal	116
4.4.2	Conception de l'observateur du second ordre	117
4.4.3	Conception de l'observateur du troisième ordre	118
4.5	Application sur la plaque chauffante	121
4.5.1	Recherche de l'ordre minimal	122
4.5.2	Conception de l'observateur du troisième ordre	124
4.6	Partie expérimentale	125
	Conclusion	126
	Conclusion générale et perspectives	127

Table des figures

1.1.1	État passant et bloqué d'un interrupteur.	8
1.1.2	Caractéristiques statiques d'une diode	9
1.1.3	Caractéristiques statiques d'un thyristor	9
1.1.4	Caractéristiques statiques d'un transistor bipolaire	9
1.1.5	Caractéristiques statiques d'un transistor MOSFET	10
1.1.6	Typologie des convertisseurs statiques	11
1.1.7	Exemple d'un schéma de convertisseur, onduleur de tension monophasé	12
1.1.8	Chronogramme pour une charge RL	13
1.1.9	Évolution du courant et de la tension d'une diode lors de la commutation au blocage	14
1.1.10	Schéma synoptique des commutations au sein d'un transistor	15
1.1.11	Module d'électronique de puissance avec une seule puce	16
1.2.1	Schéma du transfert de chaleur conductif.	22
1.2.2	Illustration d'échange convectif entre un milieu fluide et une surface.	22
1.2.3	Principe du rayonnement thermique.	23
1.2.4	Section verticale du module.	24
1.2.5	Schéma structurel des comportements.	25
1.2.6	Densité de flux thermique des différents modes de transfert de chaleur en fonction de T_1	26
1.2.7	Système étudié : plaque chauffante.	29
1.2.8	Discretisation surfacique d'une plaque chauffante.	29
1.2.9	Représentation de réseau d'impédances d'une surface élémentaire au bord et à l'intérieur de la plaque	30
1.2.10	Interconnexion des modèles des différentes surfaces élémentaires.	31
1.3.1	Représentation de réseau d'impédances d'un nœud (i, j)	32
1.3.2	Représentation de réseau de résistance au coins de la plaque.	33
1.3.3	Représentation de réseau d'impédances des cotés de la plaque.	34
1.3.4	Représentation de réseau d'impédances à l'intérieur de la plaque.	35
1.3.5	Carte de champ thermique.	39
1.4.1	Système d'étude.	40
1.4.2	Dispositif expérimental.	42
1.4.3	Réponse thermique du système.	43
2.1.1	Schéma général d'un système dynamique.	47
2.1.2	Système dynamique	48
2.2.1	Position des différents éléments.	50
2.2.2	Principe général d'un observateur.	51

2.3.1	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur, avec conditions initiales non nulles.	57
2.4.1	Position des différents éléments.	57
2.4.2	Réponse indicielle de la température en Ca	58
2.4.3	Réponse indicielle de la température en O	58
2.4.4	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur, avec conditions initiales nulles.	61
2.5.1	Principe d'un estimateur.	62
2.6.1	Position des différents éléments.	66
2.6.2	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal pour (2.41), avec conditions initiales nulles.	69
2.6.3	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal pour (2.41), avec conditions initiales non nulles.	70
2.6.4	Position des différents éléments	70
2.6.5	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal d'ordre $q = 2$, pour un modèle d'état d'ordre 9, avec conditions initiales non nulles.	71
2.7.1	Position des différents éléments	72
2.7.2	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal d'ordre $q = 4$, pour un système d'état d'ordre 9, avec conditions initiales non nulles.	72
2.7.3	Position des différents éléments	73
2.7.4	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal d'ordre $q = 13$, pour un modèle d'état d'ordre 121, avec conditions initiales non nulles.	74
2.9.1	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal pour (2.41).	79
2.10.	Mesures expérimentales pour la mise en œuvre d'observateur minimal, pour un modèle d'état d'ordre 16, avec conditions initiales non nulles.	80
3.1.1	Modélisation du processus échantillonné	84
3.1.2	Discrétisation d'un système sous forme d'état	84
3.2.1	Position des différents éléments	89
3.2.2	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal, avec conditions initiales différentes.	93
3.2.3	Position des différents capteurs	94
3.2.4	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal réduit $q = 14$, avec conditions initiales différentes.	95
3.3.1	Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal continu discrétisé réduit $q = 3$, avec conditions initiales différentes.	97
3.4.1	Résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant Euler pour $T_{ech} = 1s$, avec conditions initiales nulles.	99
3.4.2	Résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant RK2 pour $T_{ech} = 1s$, avec conditions initiales nulles.	100
3.4.3	Résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant RK4 pour $T_{ech} = 1s$, avec conditions initiales nulles.	101

3.4.4	Résultat de simulation des erreurs d'estimation pour les différentes méthodes Euler, RK2 et RK4 pour $T_{ech} = 1s$, avec les mêmes conditions initiales non nulles.	101
3.6.1	Résultat d'expérimentale et de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal, pour un modèle d'état d'ordre 16, avec conditions initiales nulles.	104
4.4.1	Les signaux d'entrée et de perturbation utilisés pour la simulation	116
4.4.2	Résultat de simulation pour l'observateur de second ordre.	118
4.4.3	Résultat de simulation de l'observateur d'ordre 3.	120
4.5.1	Position des différents éléments.	121
4.5.2	Résultat de simulation de l'observateur du troisième ordre et le système initial avec conditions initiales non nulle.	125
4.6.1	Résultat d'expérimentale et de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal, pour un modèle d'état d'ordre 16, avec conditions initiales non nulles.	126

Liste des tableaux

1.2.1 Récapitulatif des données.	25
1.2.2 Analogie entre les grandeurs électriques et thermiques.	28
3.5.1 Complexités algorithmiques des différents observateurs.	102

Résumé

La tendance actuelle est d'intégrer des modules de puissance de plus en plus puissants dans des volumes de plus en plus réduits. Cela pose des problèmes, notamment en termes de fiabilité, car lors de leurs cycles de fonctionnement, les interrupteurs à semi-conducteurs et leur environnement immédiat sont soumis à des contraintes électro-thermiques plus sévères. L'augmentation de la fiabilité des modules de puissance passe par la connaissance précise de la température locale, même si elle ne peut être mesurée en certains points qui seraient pertinents. L'objectif principal de cette thèse est de reconstruire des grandeurs non accessibles à la mesure en utilisant des observateurs de fonctionnelle linéaire, qui permettent d'estimer la température en n'importe quel endroit à l'aide des mesures fournies à partir de capteurs thermiques situés en quelques points précis. L'utilisation de cet observateur permet de réduire la dimension du problème considéré. Dans le contexte multi-physique, nous avons développé des méthodologies et des algorithmes permettant la surveillance du comportement électro-thermique des modules d'électronique de puissance. De façon à obtenir des algorithmes d'observation, qui pourraient être mis en œuvre sur une cible embarquée en temps réel comme un processeur de signaux numériques, nous avons proposé la conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire en temps discret de taille réduite. En conséquence, il est nécessaire d'en réduire la taille par rapport au système initial issu du modèle, afin de limiter la complexité du calcul. L'originalité de ces travaux consiste à proposer des méthodes de conception simples des observateurs de fonctionnelle linéaire d'ordre minimal pour des systèmes complexes de grande taille. Notons que dans le cas d'un module d'électronique de puissance, certaines entrées peuvent être mal connues telles que la puissance thermique extraite par le système de refroidissement, ou celle injectée par les éléments annexes du module comme les pistes ou les fils de bonding. Ainsi, une attention toute particulière a été donnée aux observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues. Un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues permet de s'affranchir de cette méconnaissance en traitant ces entrées comme des perturbations non mesurées. Notons que nous avons choisi de présenter des résultats expérimentaux afin d'indiquer la faisabilité pratique des méthodes présentées.

Mots clés

Modules d'électronique de puissance - Électrothermique - Modélisation thermique - représentation d'état - Observateurs de fonctionnelle linéaire - observateurs fonctionnelle linéaire à entrées inconnues.

Abstract

The current trend of integrating powerful power modules into increasingly smaller volumes. This volume leads to new problems, especially in terms of reliability : Indeed, during their operating cycles, the semiconductor switches and their surrounding environment become subject to harshful electrothermal stresses. Thus, increase of reliability of power modules induces the precise knowledge of the local temperature, even if it can not be measured at any location. The main objective of this thesis is to estimate a physical variables in a specific non measured location, using linear functional observers allowing to estimate the temperature at any point by means of measurements provided from thermal sensors located at a few precise points. The use of this observer reduce the dimension of the considered problem. In the multi-physics context, methodologies and algorithms have been developed to allow the monitoring of electrothermal behavior power electronics modules. In order to obtain observation algorithms directly, which could be implemented on a real-time embedded target such as a digital signal processor, the application of a linear observer in the discrete time framework is proposed. Consequently, it is necessary to reduce the size compared to the initial system resulting from the model, in order to limit the calculation complexity. The originality of this work consists in proposing simple design methods for minimal order linear functional observers for large complex systems. Special attention has been given to unknown input linear functional observers. Note that in case of a power electronics module, some inputs may be poorly known such as the thermal power extracted by the cooling system, or that injected by the ancillary elements of the module as chips or bonding wire. An unknown input linear functional observer allows to overcome this lack of knowledge by treating these inputs as unknown data. Note that we chose to present experimental results so as to demonstrate the practical feasibility of the proposed methods.

Keywords

Power electronics modules - Electrothermal - Thermal Modeling - state representation - linear functional observers - unknown input linear functional observers.

Introduction générale

Le mémoire présenté ici s'inscrit dans le cadre du projet Captif (CAP-Teurs innovants Intégrés et logiciels au cœur d'un dispositif d'électronique de puissance). Il vise à développer des méthodologies et des algorithmes permettant la surveillance du comportement électro-thermo-mécanique des modules d'électronique de puissance. Ces modules doivent fonctionner en environnement sévère sous fortes contraintes (forte densité de puissance et haute température principalement, commutations à fréquences élevées, etc . . .), associées à des objectifs de performances élevées comme un rendement électrique optimisé ou une amélioration de la fiabilité du système [1]. Les défis visés par le projet portent sur la mise au point de ces nouveaux modules qui intègrent le traitement de plusieurs types de capteurs comme des capteurs de température et des capteurs électromagnétiques. Notons que l'intérêt principal de ces capteurs physiques est leur faible consommation d'énergie, leur miniaturisation, leur intégration possible au sein du module, ainsi que leur précision. Durant la première phase du projet Captif, l'ensemble des capteurs physiques est développé, puis finalement intégré au sein d'un démonstrateur de faisabilité. Dans la deuxième phase, des techniques de traitement de données sont étudiées et analysées pour le filtrage des informations ainsi que l'estimation des paramètres et variables non mesurables au sein des modules. Dans la dernière phase, un ensemble de capteurs est adapté et intégré dans un dispositif d'électronique de puissance. Pour conclure, l'objectif principal du projet Captif est de construire, pour la première fois, un ensemble de capteurs intégrés au sein d'un module d'électronique de puissance associé à un traitement des informations permettant l'analyse des données multi-physiques. Cela conduit à obtenir des informations pertinentes pour la modélisation, le contrôle et la fiabilité des nouveaux dispositifs de puissance optimisés [2]. Ces travaux s'appuient sur la plateforme PRIMES pour leur composante expérimentale.

Les résultats développés dans ce mémoire sont axés sur le traitement des mesures pour l'estimation et l'observation de grandeurs non mesurables représentant les conditions d'utilisation et l'état de santé des modules d'électronique de puissance. L'intérêt de ces techniques réside dans la possibilité d'observer certaines variables inaccessibles à la mesure et pourtant essentielles à la surveillance du module. Nos travaux consistent à développer et appliquer des méthodes originales d'automatique, et de façon plus précise en observation ou estimation de variables, essentiellement thermiques. L'originalité de ces travaux consiste à proposer des méthodes de conception simples des observateurs de fonctionnelle linéaire d'état d'ordre minimal pour des systèmes complexes de grande taille. À partir de la modélisation physique, appliquée à un assemblage intégré d'électronique de puissance, l'expression de ces modèles sous forme d'état conduit à pouvoir estimer la température en des lieux inaccessibles à la mesure comme le cœur des puces semi-conductrices.

Le premier chapitre est consacré à la présentation statique des différents types de convertisseurs, de leur constituants élémentaires : les interrupteurs de puissance ainsi que les pertes associées. Cela nous permet de définir correctement ce qu'est un module d'électronique de puissance en décrivant les éléments qui le composent. Nous présentons ensuite les différents modes de défaillances rencontrés lors de l'utilisation des modules et les mécanismes de vieillissement, principalement dues aux contraintes thermo-mécaniques. Ainsi, La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des principes physiques pour la compréhension des différents phénomènes thermiques ou électriques intervenant dans un module d'électronique de puissance. Ces principes essentiels conditionnent le comportement électrique des dispositifs semi-conducteur liés à la température du composant. Ces développement conduisent à la proposition d'une méthode de modélisation qui rend compte du comportement électro-thermique d'un gel encapsulant, sous la forme d'une formulation de type espace d'état. Cette approche sert de base aux travaux présentés dans le chapitre suivant.

Afin de concevoir des méthodes de surveillance performantes, il est essentiel d'avoir un maximum d'informations sur le système étudié. Classiquement sur un système, on connaît les entrées qui correspondent aux variables de commandes et qui permettent de piloter le système, et on connaît aussi directement, par la mesure, certaines variables internes du système étudié. Cependant, ces informations ne sont très souvent pas suffisantes pour concevoir des méthodes de surveillance globales. En effet, il est parfois nécessaire de connaître des informations relatives à des variables internes non accessibles à la mesure au sein du système. À titre d'exemple, il suffit de penser à la température au niveau des fils de bonding ou au cœur des puces où il est illusoire de penser y installer un thermocouple. Dans ce mémoire, nous utilisons le formalisme d'état, les variables internes du système correspondent donc aux états thermiques du système. Afin d'obtenir plus d'informations sur les états on peut :

- rajouter des capteurs, quand ceci est physiquement possible. On augmente alors le nombre de mesures. Cependant, rajouter des capteurs implique forcément un coût supplémentaire souvent non négligeable ;
- utiliser des observateurs. Si les variables du système que l'on souhaite construire appartiennent à l'espace d'observabilité du modèle d'état utilisé, on pourra alors toujours estimer analytiquement et numériquement ces variables internes. L'observation présente bien-sûr l'avantage de ne pas nécessiter de capteurs supplémentaires mais engendre un coût calculatoire qu'il conviendra de réduire.

Notons que la notion d'observation de l'état complet d'un modèle existe depuis bien longtemps, mais ne peut être mise en oeuvre sous la forme d'un algorithme rapide. De plus, reconstruire l'état complet d'un système conduit souvent à estimer des variables non pertinentes vis-à-vis de l'objectif recherché. C'est la raison pour laquelle l'observation de l'état partiel, ou d'une fonctionnelle de l'état a été assez rapidement envisagée. Cependant, les algorithmes efficaces de conception de ces observateurs de petite dimension, donc plus

rapides, ne sont apparus que récemment. C'est dans ce cadre que nous développons les résultats présentés dans la suite. Dans cet optique, nous concevons des observateurs de fonctionnelle linéaire, pour reconstruire une grandeur physique locale (la température) qui ne pourrait pas être directement mesurée. En effet, cet observateur permet de reconstruire cette grandeur entièrement à partir des mesures fournies par des capteurs thermiques placés en quelques points distribués dans le système.

Dans le chapitre 3, et de façon à obtenir des algorithmes d'observation directement implantables sur un ordinateur numérique, nous proposons l'application d'un observateur de fonctionnelle linéaire en temps discret. Il permet alors d'estimer la température à partir des mesures échantillonnées-bloquées. L'objectif est de concevoir un observateur de taille réduite qui pourrait fonctionner en temps-réel comme un processeur de signal numérique. Par conséquent, il est nécessaire d'en réduire la taille par rapport au système initial issu du modèle. Les travaux réalisés permettent de définir des algorithmes d'observation de fonctionnelle linéaire de taille minimale.

Dans le chapitre suivant, une attention toute particulière a été donnée aux observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues (OFLEI). En effet, ces observateurs ont été, à l'origine, créés pour s'affranchir des perturbations pouvant affecter le système. Ces perturbations, assimilées à des entrées inconnues ou entrées non mesurées, sont représentées par un terme additif intervenant dans l'équation d'état. Le chapitre 4 détaille alors principalement la construction d'observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues d'ordre minimal, afin de contourner la présence des excitations éventuelles non mesurables. Nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'observateur. La caractéristique principale de notre procédure en est la simplicité de conception. Notons que dans le cas d'un module de puissance, certaines entrées peuvent être mal connues telles que la puissance thermique extraite par le système de refroidissement, ou celle injectée par les éléments annexes du module comme les pistes ou les fils de bonding. Un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues permet de s'affranchir de cette méconnaissance en traitant ces entrées comme des données inconnues.

Les activités associées à la surveillance et au pilotage des convertisseurs des systèmes vont ainsi pouvoir utiliser des approches originales pour l'observation de variables par une approche de construction d'une information non mesurable. La finalité des travaux présentés consiste à déterminer, proposer et mettre en œuvre des méthodes pour estimer et observer afin d'optimiser le fonctionnement des convertisseurs.

Notons que nous avons choisi de présenter des résultats expérimentaux dans chacun des chapitres afin d'indiquer la faisabilité pratique des méthodes présentées au cours de ce mémoire.

Chapitre 1

Comportement et modélisation thermique

Sommaire

Introduction	7
1.1 Convertisseurs statiques	8
1.1.1 Constitution d'un convertisseur statique	8
Diodes	8
Thyristors	9
Transistors	9
1.1.2 Structure des convertisseurs statiques	10
1.1.3 Différents types de convertisseurs statiques	10
Conversion alternative-continue	11
Conversion continue-alternative	11
Conversion continue-continue	11
Conversion alternative-alternative	11
1.1.4 Pertes des convertisseurs statiques	12
Principe de fonctionnement	12
Chronogrammes	13
Pertes par conduction	13
Pertes par commutation des diodes	14
Pertes par commutation des transistors	15
1.1.5 Module d'électronique de puissance	16
Différents constituants d'un module d'électronique de puissance	16
Différents modes de défaillances des modules d'électro- nique de puissance	18
1.2 Comportement et modélisation thermiques	19
1.2.1 Loi de Fourier	20
1.2.2 Équation de la chaleur	20
Caractéristiques de l'équation de la chaleur	21
1.2.3 Modes de transfert de chaleur	21
Mode de conduction thermique	21
Mode de convection thermique	22
Mode de rayonnement thermique	23
Synthèse des modes de transfert	24
1.2.4 Discrétisation de l'équation de la chaleur	26

1.2.5	Équivalence thermique-électrique	27
	Base de l'analogie	27
	Analogie électrothermique	28
1.2.6	Modèle thermique	28
	Exemple d'application 2D	28
1.3	Modélisation d'état pour la modélisation thermique	31
1.3.1	Potentiel thermique en un nœud (théorème de Millman)	31
1.3.2	Représentation d'état	32
	Différentes équations	32
	Système d'équation	35
	Synthèse du système d'état	38
1.4	Dispositif expérimental	39
1.4.1	Système d'étude	39
1.4.2	Mise en équations	40
1.4.3	Réponse thermique	42
	Conclusion	43

Introduction

L'émergence conjointe de matériaux grand gap (SiC, GaN) et les techniques d'intégration hybride de nouvelle génération améliorent considérablement les performances des modules d'électroniques de puissance [53]. Ces modules doivent fonctionner en environnement sévère sous fortes contraintes : forte densité de puissance à haute température, commutations à fréquences élevées, . . . etc. Par ailleurs, plusieurs études ont été réalisées afin de satisfaire des objectifs tels que le développement des modules d'électronique de puissance avec une densité de puissance élevée et fonctionnant à haute température [60]. Pour répondre à ce besoin, des améliorations sur le conditionnement des modules sont à apporter notamment grâce à l'utilisation de nouvelles technologies d'interconnexion alternatives, aux fils de liaison (bonding) et à de nouveaux matériaux pouvant supporter des contraintes thermiques élevées. Or, différentes difficultés ont fait obstacle à la réalisation de ces objectifs. En effet, la résistance des différents composants d'un module d'électronique de puissance suppose la maîtrise et la compréhension des différents phénomènes physiques entraînant une défaillance due à un changement de température.

Nous présenterons, dans ce chapitre, un état de l'art des différents convertisseurs statiques, des principaux modes de dégradation des modules d'électronique de puissance conduisant à des défaillances principalement d'origine thermique, en présentant les différents constituants d'un module, et la définition des bases théoriques pour la compréhension des différents phénomènes physiques (thermique, électrique). Ces phénomènes conditionnent le comportement électrique des dispositifs semi-conducteur, liés à la température des composants. Nous indiquons leurs interactions afin de comprendre les phénomènes électrothermiques existants lors du fonctionnement. Ensuite, nous nous attardons sur une étude d'un modèle thermique qui conduira à une représentation d'état.

1.1 Convertisseurs statiques

Les convertisseurs statiques sont utilisés pour permettre de transmettre et transformer un signal électrique d'une source à un récepteur. En effet, les convertisseurs ont permis d'alimenter un grand nombre d'appareils ayant des fonctionnalités toutes différentes. Leur fonction de base [29] est la transformation de l'énergie électrique disponible en une forme appropriée à l'alimentation d'une charge. Cette énergie est disponible soit sous forme alternative soit sous forme continue, la charge peut pareillement nécessiter une alimentation continue ou alternative. Ces convertisseurs statiques sont constitués d'interrupteurs électroniques à base de semi-conducteurs et d'éléments passifs (figure 1.1.1). À l'état passant, l'hypothèse est faite que la chute de tension aux bornes du semi-conducteur est nulle et que le courant est fixé par le reste du dispositif. De même, à l'état bloqué, le courant traversant l'interrupteur est supposé nul et la tension à ses bornes est imposée par l'extérieur.

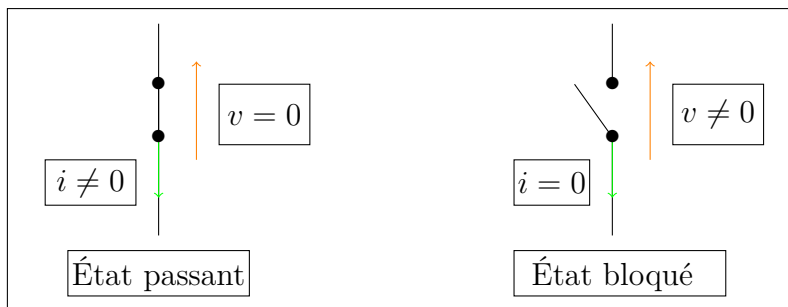


FIGURE 1.1.1 – État passant et bloqué d'un interrupteur.

1.1.1 Constitution d'un convertisseur statique

En introduction, nous présentons les différents types d'interrupteurs. On s'attarde ensuite sur la structure des différents convertisseurs. Au final, une étude des différentes pertes engendrées tant en conduction qu'en commutation des composants semi-conducteurs, avec leurs caractéristiques et leurs imperfections, est présentée.

Parmi ces interrupteurs, nous distinguons les interrupteurs spontanés (diodes), les interrupteurs semi-commandés (thyristors) et les interrupteurs commandés (transistors, MOSFET, IGBT).

Diodes

Ce sont des interrupteurs à deux segments, à amorçage et blocage spontanés. L'état de la diode est déterminé par la source et la charge, son point de fonctionnement étant situé dans un plan i_A/V_{AK} comme illustré sur la figure 1.1.2.

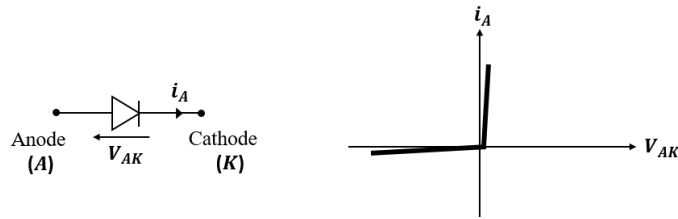


FIGURE 1.1.2 – Caractéristiques statiques d'une diode [73].

Thyristors

Ce sont des interrupteurs à trois segments unidirectionnels et à commande d'amorçage. En plus de l'anode A et la cathode K , le thyristor contient aussi une électrode de déblocage ou gâchette appelée G . Ses caractéristiques statiques sont illustrées sur la figure 1.1.3.

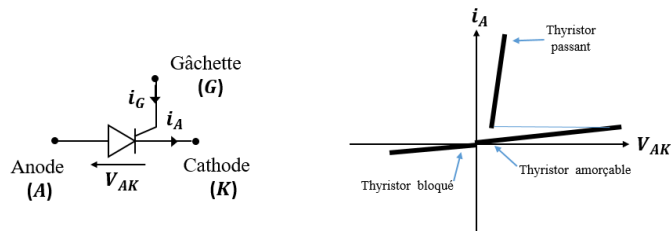


FIGURE 1.1.3 – Caractéristiques statiques d'un thyristor [17].

Transistors

Ce sont des interrupteurs à deux segments (bipolaires), commandés à l'amorçage et au blocage. Les caractéristiques statiques des transistors sont indiquées sur la figure 1.1.4. On peut distinguer trois types de transistor : transistor bipolaire, transistor à effet de champ MOSFET (JFET ou MOS) et transistor IGBT.

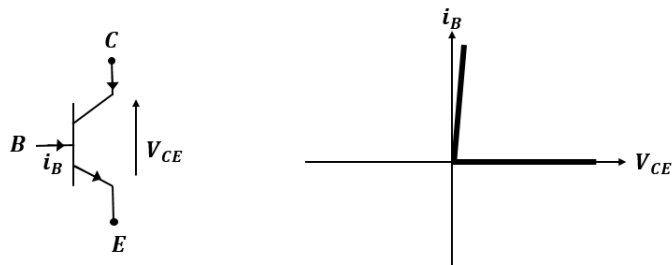


FIGURE 1.1.4 – Caractéristiques statiques d'un transistor bipolaire [24].

L'IGBT a la même caractéristique statique que le transistor bipolaire montré par la figure 1.1.4. Le MOSFET, quant à lui, possède une diode de corps qui modifie sa caractéristique statique, montré par la figure 1.1.5.

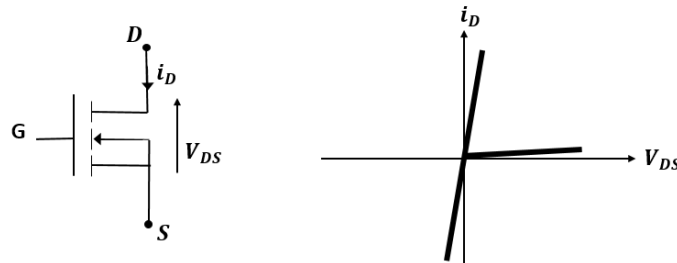


FIGURE 1.1.5 – Caractéristiques statiques d'un transistor MOSFET [24].

1.1.2 Structure des convertisseurs statiques

Dans le but de connaître les différents types de convertisseurs statiques, nous commençons par définir la structure interne des convertisseurs qui dépend de :

- la nature de la source d'entrée et du récepteur (tension ou courant),
- le type des sources d'entrée et du récepteur (alternatif ou continu).

Lors de l'association d'une source et d'un récepteur, il faut distinguer les :

- **Convertisseurs statiques directs**

Ces convertisseurs permettent de relier une source de tension à un récepteur de type source de courant ou une source de courant à un récepteur de type source de tension. Un convertisseur dit "direct" est un convertisseur qui ne nécessite pas d'inclure dans sa structure interne d'éléments de stockage d'énergie (que ce soit un condensateur ou une inductance) capable d'emmagasiner ou de produire de l'énergie électrique [7].

- **Convertisseurs statiques indirects**

Ce type de convertisseur permet de relier une source de tension à un récepteur de type source de tension ou une source de courant à un récepteur de type de source de courant.

Le convertisseur indirect offre un temps de réponse plus long que le convertisseur direct car les éléments de stockage agissent comme des filtres et tout filtre provoque un retard dans le temps de réponse [7].

1.1.3 Différents types de convertisseurs statiques

Un convertisseur statique a pour rôle de transformer l'énergie électrique disponible en une forme appropriée afin d'alimenter une charge [30]. La source

d'énergie disponible peut avoir une forme alternative ou une forme continue. Typiquement, il existe alors quatre familles de convertisseurs permettant de relier directement la source et la charge comme le montre la figure 1.1.6 : hacheur, gradateur, redresseur et onduleur.

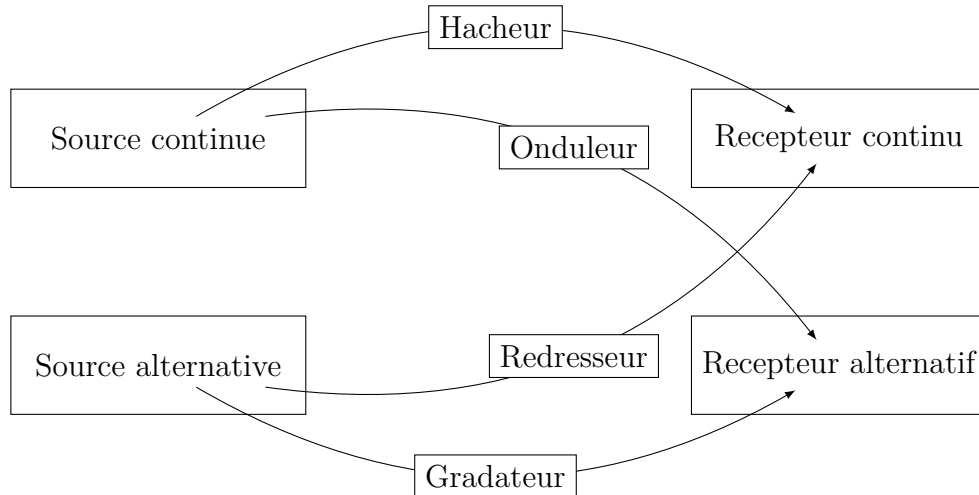


FIGURE 1.1.6 – Typologie des convertisseurs statiques [29].

Conversion alternative-continue

Le convertisseur transformant l'énergie fournie sous forme alternative pour alimenter une charge sous forme continue est appelé redresseur, ces convertisseurs transfèrent l'énergie de la source alternative vers la charge continue et certaines structures sont réversibles.

Conversion continue-alternative

Le convertisseur qui réalise l'interface entre une source continue et une charge alternative est appelé onduleur, ces convertisseurs permettent d'obtenir une tension alternative de valeur efficace et fréquence réglable à partir d'une source de tension continue.

Conversion continue-continue

La conversion d'une énergie sous forme continue vers une alimentation de charge de type continue est assurée par un hacheur, le hacheur règle la tension ou le courant appliqué à la charge et peut être réversible ou non.

Conversion alternative-alternative

Le transfert de l'énergie électrique d'une source alternative afin d'alimenter une charge en alternatif est réalisé à l'aide d'un gradateur. Le gradateur est utilisé pour des applications de type éclairage ou moteur universel car il n'est pas nécessaire pour ces applications de faire varier la fréquence des courants d'alimentation. Ils remplacent alors les transformateurs variables.

1.1.4 Pertes des convertisseurs statiques

L'électronique de conversion d'énergie est basée sur l'utilisation de composants semi-conducteurs jouant le rôle d'interrupteurs. Ces derniers, lors de leur utilisation, dégagent des pertes thermiques correspondant aux diverses phases de leur fonctionnement. On distingue deux types de pertes, chacune correspondant à un état de l'interrupteur. D'une part les pertes par conduction, associées à l'état passant du composant. D'autre part les pertes dynamiques, ou pertes en commutation, associées aux changements d'état de l'interrupteur, c'est-à-dire lors du passage de l'état passant à l'état bloqué et vice-versa. L'étude des commutations au sein des cellules de commutation a fait l'objet de nombreuses études [29, 104].

Pour calculer les pertes d'un convertisseur statique, on prend comme exemple d'application un onduleur de tension monophasé présenté par la figure 1.1.7.

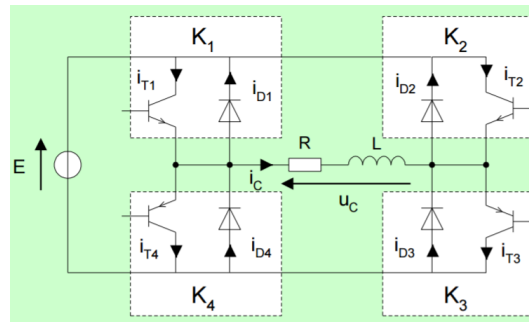


FIGURE 1.1.7 – Exemple d'un schéma de convertisseur, onduleur de tension monophasé [88].

où dans chaque cellule K_i , D_i est la diode i et T_i le transistor i .

Principe de fonctionnement

- **première phase**
 $u_c = E \Rightarrow K_1, K_3$ conduisent,
 $i_c < 0 \Rightarrow D_1, D_3$ conduisent,
 $\Rightarrow i_{D1}(t) = i_{D3}(t) = -i_c(t)$
- **deuxième phase**
 $u_c = E \Rightarrow K_1, K_3$ conduisent,
 $i_c > 0 \Rightarrow T_1, T_3$ conduisent,
 $\Rightarrow i_{T1}(t) = i_{T3}(t) = i_c(t)$
- **troisième phase**
 $u_c = -E \Rightarrow K_2, K_4$ conduisent,
 $i_c > 0 \Rightarrow D_2, D_4$ conduisent,
 $\Rightarrow i_{D2}(t) = i_{D4}(t) = i_c(t)$
- **quatrième phase**
 $u_c = -E \Rightarrow K_2, K_4$ conduisent,

$$i_c < 0 \Rightarrow T_2, T_4 \text{ conduisent,} \\ \Rightarrow i_{T_2}(t) = i_{T_4}(t) = -i_c(t)$$

Chronogrammes

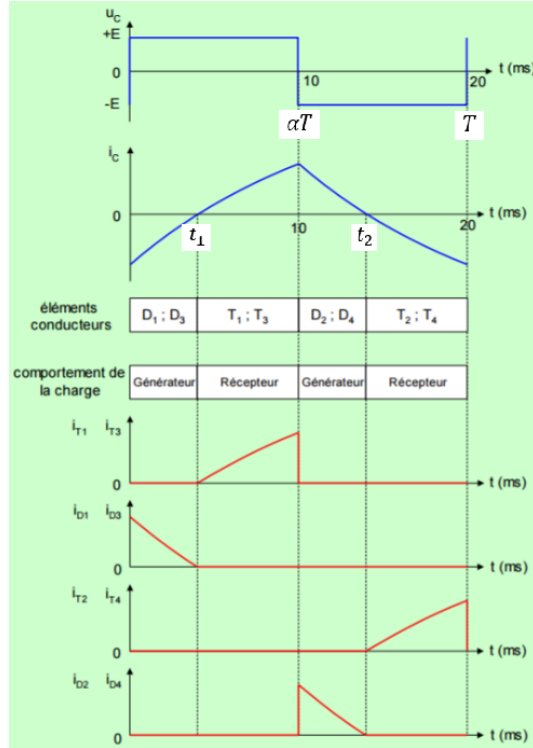


FIGURE 1.1.8 – Chronogramme pour une charge RL .
[88]

Pertes par conduction

Les pertes par conduction sont la dissipation de puissance pendant la conduction.

La puissance dissipée pendant la conduction des transistors T_i sur une période T est définie par [96] :

$$P_{ConT} = \frac{R_{on}}{T} \int_0^{T_{ON}} i_T^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T_{ON}} v_{seuil}(t) i_T(t) dt,$$

où R_{on} est la résistante du transistor. Le second terme correspond aux pertes liées à la tension de seuil du transistor, et T_{ON} la durée de conduction.

La puissance dissipée totale par conduction des transistors est définie par :

$$P_{ConT_{total}} = \frac{2R_{on}}{T} \int_{t_1}^{\alpha T} i_T^2(t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_1}^{\alpha T} v_{CE}(t) i_T(t) dt \\ + \frac{2R_{on}}{T} \int_{t_2}^t i_T^2(t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_2}^t v_{CE}(t) i_T(t) dt, \quad (1.1)$$

L'expression de la puissance dissipée pendant la conduction des diodes sur une période T est définie par :

$$P_{ConD} = \frac{1}{T} \int_0^{T_{ON}} v_d(t) i_D(t) dt + \frac{R_d}{T} \int_0^{T_{ON}} i_D^2(t) dt,$$

où R_d est la résistance interne de la diode, v_d la tension de seuil de la diode, i_D le courant dans la diode, et T_{ON} la durée de conduction de la diode.

La puissance dissipée totale par conduction des diodes est définie par :

$$\begin{aligned} P_{ConD_{total}} &= \frac{2R_d}{T} \int_0^{t_1} i_D^2(t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{t_1} v_D(t) i_D(t) dt \\ &+ \frac{2R_d}{T} \int_{\alpha T}^{t_2} i_D^2(t) dt + \frac{2}{T} \int_{\alpha T}^{t_2} v_D(t) i_D(t) dt, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les pertes totales de conduction sont la somme des pertes :

$$P_{Con} = P_{ConT_{total}} + P_{ConD_{total}}. \quad (1.3)$$

Pour un fonctionnement à haute fréquence, on privilégie les composants uni-polaires, de manière à minimiser les pertes en commutation. Au contraire, pour un fonctionnement en basse fréquence, on préfère utiliser des composants bipolaires qui ont des pertes en conduction relativement faibles [111].

Pertes par commutation des diodes

Imaginons une diode à l'état passant. Elle est traversée par un courant constant I , la tension à ses bornes est alors quasiment nulle. À un instant $t = 0$, le circuit extérieur impose le blocage de la diode. Les formes d'ondes sont décrites par la figure 1.1.9. Idéalement, le courant devrait s'annuler tandis que la tension devrait prendre une valeur négative.

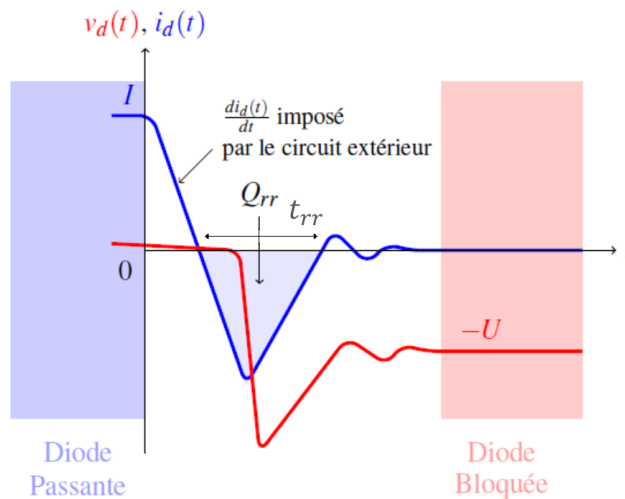


FIGURE 1.1.9 – Évolution du courant et de la tension d'une diode lors de la commutation au blocage [95].

La diode met donc un certain temps (noté t_{rr}) à se bloquer complètement. On peut remarquer qu'elle est traversée par un courant de recouvrement inverse permettant d'évacuer les charges électriques stockées dans la jonction PN à l'état passant. Cette charge électrique (notée Q_{rr}) dépend entre autres de la valeur du courant à l'état passant. Pendant ce temps de recouvrement, la tension aux bornes de la diode va prendre une valeur négative, ce qui a pour effet de créer des pertes dans la diode. On parle alors de pertes par commutation, celles-ci sont proportionnelles à la fréquence de commutation de l'interrupteur f_d .

Les pertes par commutation dans la diode sont données par l'équation suivante :

$$P_{comD} = Q_{rr}Uf_d,$$

avec U est la tension lors du blocage de la diode et f_d la fréquence de la commutation.

Les pertes totales par commutation des diodes sont définies par :

$$P_{com_{D_1, D_2, D_3, D_4}} = 4Q_{rr}Uf_d. \quad (1.4)$$

Pertes par commutation des transistors

L'expression de l'énergie de commutations pour les transistors se calcule en deux fois : à la fermeture et à l'ouverture.

L'énergie dissipée pendant la commutation à la fermeture est définie par :

$$E_{T_{ON}} = \int_{t_{1ON}}^{t_{2ON}} v_{ce}(t)i_c(t) dt,$$

avec t_{1ON} et t_{2ON} sont respectivement le début et la fin de la commutation à la fermeture, figure 1.1.10.

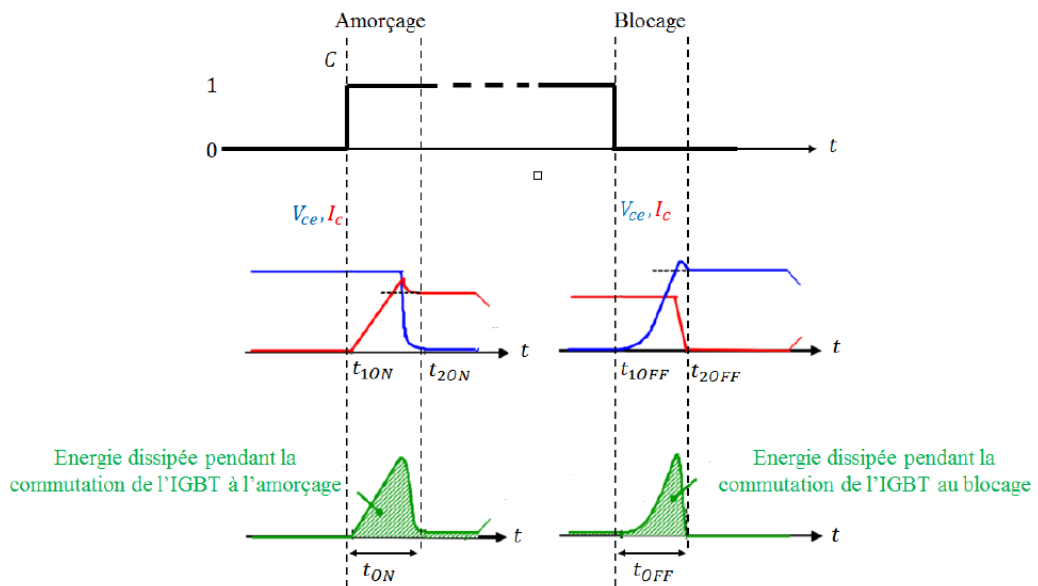


FIGURE 1.1.10 – Schéma synoptique des commutations au sein d'un transistor [4].

L'énergie dissipée pendant la commutation à l'ouverture est définie par :

$$E_{T_{OFF}} = \int_{t_{1OFF}}^{t_{2OFF}} v_{ce}(t) i_c(t) dt,$$

avec t_{1OFF} et t_{2OFF} sont respectivement le début et la fin de la commutation à l'ouverture, (figure 1.1.10).

Les pertes totales de commutation P_{comT} des quatres transistors, sont la somme des pertes à l'amorçage et au blocage multipliée par la fréquence de découpage F_d [36], comme le montre l'expression suivante :

$$P_{comT} = 4(E_{T_{ON}} + E_{T_{OFF}})f_d. \quad (1.5)$$

Les pertes de commutation sont la somme des pertes,

$$P_{comm_{T,D}} = P_{com_{D_1,D_2,D_3,D_4}} + P_{comT}. \quad (1.6)$$

1.1.5 Module d'électronique de puissance

Les modules d'électronique de puissance sont très répandus dans des nombreux domaines, en particulier pour les applications des convertisseurs (un interrupteur bidirectionnel en courant, un onduleur ou un pont redresseur). Un module d'électronique de puissance est un circuit électronique constitué de connexions électriques, de puces semi-conductrices, d'isolants et d'un substrat. Les puces semi-conductrices sont reliées par des fils de bonding et des brasures protégées de l'environnement par un encapsulant (gel silicone) et un boîtier. Le module d'électronique de puissance est monté sur un dissipateur thermique afin d'évacuer la chaleur générée par les composants pendant leur fonctionnement [24]. Ces modules de puissance sont généralement présentés par la figure 1.1.11.

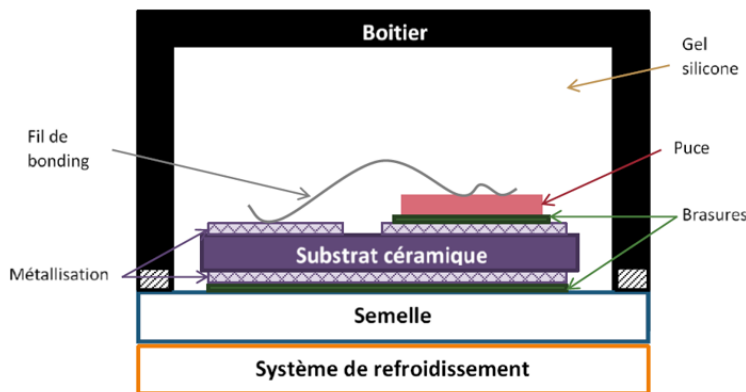


FIGURE 1.1.11 – Module d'électronique de puissance avec une seule puce [39].

Différents constituants d'un module d'électronique de puissance

Nous étudions ici les différents éléments qui constituent un module d'électronique de puissance, leurs rôles et leur assemblage.

- Puces

Les puces semi-conductrices sont les éléments actifs d'un module d'électronique de puissance [60], toutes les puces (diodes, MOSFET, IGBT, thyristor, ...) ont une structure dite verticale, dans laquelle les deux faces de la puce jouent un rôle électrique (assurer la connexion électrique), la majeure partie de la puce ne joue alors qu'un rôle mécanique de support à la zone active.

- Brasures

Des brasures sont utilisées pour assurer l'assemblage entre différents constituants (puce-substrat, substrat-semelle). L'épaisseur de ces brasures comprise entre quelques dizaines et centaines de micromètres. Leur rôle est d'assurer le maintien mécanique des éléments, la bonne circulation du flux thermique, ainsi que la bonne qualité du contact électrique [16]. Ainsi, le choix de la brasure doit satisfaire à plusieurs critères [60] :

- Bonne conductivité thermique pour évacuer la chaleur dissipée au sein des éléments actifs ;
- Faible résistivité électrique afin de faciliter la circulation du courant électrique ;
- Bonne tenue mécanique et bonne mouillabilité entre les différents matériaux de l'alliage et de l'assemblage.

- Substrat

Le substrat est un élément fondamental du module. C'est le support mécanique des puces, le substrat intègre les pistes conductrices et assure une isolation électrique entre les puces semi-conductrices et le support sur lequel le module d'électronique de puissance est fixé.

- Semelles

La semelle est brasée sur la métallisation inférieure du substrat puis assemblée sur le système de refroidissement. Elle assure le maintien mécanique de l'assemblage. Par ailleurs, elle doit avoir de bonnes propriétés mécaniques (rigidité, faible poids, ...) et une bonne conductivité thermique.

- Fils de bonding

Le wire bonding est la technique de connexion la plus utilisée en électronique de puissance, cela est dû au fait que cette technologie peut facilement s'adapter à des changements dans la conception de packaging avec un minimum de modifications des installations et au meilleur coût par connexion [107].

- Gel silicone

Généralement pour l'encapsulation des modules d'électronique de puissance un gel diélectrique silicone est utilisé. Ce gel silicone assure une

protection électrique en renforçant la rigidité électrique du milieu ambiant autour des puces et des différentes métallisations. Il réalise également une protection chimique contre les phénomènes d'oxydation à haute température. Il faut également qu'il n'absorbe pas l'humidité (sous peine de voir sa tenue diélectrique s'effondrer) et qu'il transmette le minimum de contraintes mécaniques à la puce et aux fils de bonding [87].

- **Système de refroidissement**

Un système de refroidissement est utilisé pour assurer de bonnes performances thermiques, un faible poids et un minimum d'interface entre les puces et le refroidisseur, le refroidissement de l'ensemble est en général assuré par un procédé d'échange thermique avec l'extérieur (radiateur, convection forcée, ...).

- **Boîtier**

Le rôle premier du boîtier est la protection : les puces semi-conductrices sont en effet très sensibles à l'humidité et la poussière. Cette protection est assurée mécaniquement par une enceinte close empêchant l'entrée de corps étrangers, le boîtier fournit également les moyens de solidariser le composant au reste du système (système de refroidissement).

Différents modes de défaillances des modules d'électronique de puissance

Comme tous les composants électroniques en fonctionnement, les modules d'électronique de puissance sont soumis à plusieurs mécanismes de dégradation et de vieillissement qui peuvent être soit fonctionnels (liés aux conditions de fonctionnement), soit environnementaux (liés aux actions de l'extérieur). Tous ces mécanismes de dégradations et les modes de défaillances des composants ont été très largement étudiés [16, 38, 72, 86] et le sont encore de nos jours [110, 47, 66].

Les causes de défaillance d'un composant de puissance peuvent être multiples, plus ou moins connues. Elles peuvent provenir de deux sources :

- Causes externes qui peuvent être dues aux contraintes appliquées au composant durant son fonctionnement normal (tension, élévation de température, contraintes environnementales, ...). Dans ce cas on parle de mécanismes de dégradation ou de vieillissement. Généralement, ces mécanismes amènent le composant à fonctionner hors de son aire de sécurité.
- Causes internes qui peuvent être dues aux défauts induits dans le composant durant les différents procédés de fabrication (malformation de l'oxyde de grille, défauts de pureté du cristal de silicium, défaut de réalisation du packaging, ...). Dans ce cas, on parle d'un manque de qualité de composant et donc de mécanismes de très fort vieillissement (vieillissement anormal).

Les défauts issus des procédés de fabrication ne feront qu'accélérer la survenue des défaillances liées aux contraintes appliquées en fonctionnement. Nous allons donc nous concentrer sur la première source de défaillance.

i. Effets du cyclage thermique

La fatigue thermique représente une des causes principales de défaillance des modules. Son impact varie selon le type de sollicitations subi par le module et selon le type de boîtier utilisé. Les composants de moyennes et fortes puissances sont contraints par deux types de cycles thermiques, dits actifs ou passifs [65]. Les mécanismes de vieillissement et de dégradations apparaissant lors du cyclage thermique d'un composant semi-conducteur, leurs assemblages subissent généralement un cyclage thermique actif, induit par les variations des régimes de pertes par conduction et commutation dans les puces [59]. Ce cyclage entraîne un fort gradient de température au sein du composant et engendre des contraintes thermomécaniques à l'ensemble des constituants du module (surtout au niveau des interfaces et au niveau des bonding), alors une fatigue thermique c'est-à-dire des dégradations physiques irréversibles conduisant à terme à la défaillance du composant et de la structure dans laquelle il est inséré. Dans le cas des modules d'électronique de puissance, plusieurs publications ont été écrites pour décrire les conséquences et les causes du cyclage thermique [9, 108, 55].

ii. Corrosion

La corrosion est un phénomène qui peut toucher les différents composants métalliques de l'assemblage des modules d'électronique de puissance. Les métallisations, les fils de bonding peuvent subir des réactions chimiques ou électrochimiques qui conduisent à leur dégradation. La corrosion électrochimique peut apparaître dans un environnement particulier tel que la présence d'humidité dans le boîtier. La corrosion au sein d'un module peut aussi avoir pour origine l'apparition de bulles de gaz au niveau du gel silicone, mais la nature et la source de ces bulles de gaz ne sont pas complètement comprises [15].

iii. Défaillances liées au gel silicone

Les gels silicones sont utilisés pour encapsuler les modules. Grâce à leurs propriétés thermiques, mécaniques, et électriques. Les gels silicones sont utilisés pour protéger les composants et les connexions contre l'humidité ou la pollution. Cependant à haute tension le champ électrique peut devenir localement assez élevé pour induire des décharges partielles dans le gel [41]. De plus, à basse température, la dureté du gel silicone augmente, ce qui induit des contraintes thermomécaniques et engendre des fissurations dans le gel [59]. Le gel devra donc avoir une température de transition vitreuse très basse, de manière à ce qu'il reste suffisamment mou dans le domaine d'utilisation.

1.2 Comportement et modélisation thermiques

Nous avons vu d'une part que les modes de défaillance des modules d'électronique de puissance sont dus à des phénomènes physiques complexes. Afin de

comprendre ces phénomènes nous allons aborder les phénomènes thermiques qui jouent un rôle très important dans les modes de dégradation des modules d'électronique de puissance. Maîtriser ces phénomènes et évaluer leurs conséquences sur la durabilité des modules sont des axes de recherche indispensables pour améliorer la fiabilité des composants [59]. D'autre part, la température est un élément crucial de la durée de vie des composants de puissance, le comportement thermique étant lié au fonctionnement électrique du module d'électronique de puissance. Ainsi, afin d'augmenter la fiabilité des systèmes électroniques et de bien optimiser leur conception thermique, il faut avoir une bonne estimation du comportement électrothermique des composants. Cette partie est consacrée à la description théorique du couplage électrothermique des composants de l'électronique de puissance, en commençons par l'établissement de l'équation de la chaleur basée sur la loi de Fourier [13]. Les conditions limites de convection, de conduction et de rayonnement thermique seront détaillées.

1.2.1 Loi de Fourier

La loi de Fourier [13, 50] a été établie expérimentalement par Joseph Fourier en 1822. Elle exprime la proportionnalité entre le flux de chaleur à travers une surface et l'élévation de la température de part et d'autre de cette surface. La loi de Fourier décrit le phénomène de conductivité thermique, c'est-à-dire la description de la diffusion de la chaleur à travers un matériau, ce qui conduit à un gradient de température. On peut donc décrire la forme de la densité de flux de chaleur qui est proportionnelle au gradient de température [50] par l'équation (1.7) :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (1.7)$$

où λ est la conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$, $\vec{\varphi}$ la densité de flux de chaleur en $W.m^{-2}$, et T la température en K .

1.2.2 Équation de la chaleur

L'expression de la loi de Fourier conduit à l'équation générale de conduction de la chaleur [8, 70]. La loi générale de la chaleur en régime transitoire ramenée à deux dimensions est obtenue par l'application de la loi de conservation de l'énergie pour un domaine donné. Elle permet de déterminer la dynamique de la distribution spatiale de la température dans un système défini. Elle peut-être écrite sous la forme :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + r. \quad (1.8)$$

où ρ est la masse volumique en $kg.m^{-3}$, C_p la capacité thermique massique en $J.kg^{-1}.K^{-1}$, T la température exprimée en K , λ la conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$, et r la chaleur interne produite par le système étudié en $W.m^{-3}$.

Caractéristiques de l'équation de la chaleur

- Invariance par rapport au temps

Il est facile de constater que notre équation n'est pas invariante par renversement du temps, car sa dérivée par rapport au temps est du premier ordre. Cette remarque est fondamentale car elle prouve que le phénomène de diffusion thermique est un phénomène irréversible par essence.

- La linéarité

Notre équation est linéaire, donc on peut par exemple appliquer le théorème de superposition aux solutions. Mais il faut faire attention dans ce cas aux considérations sur les conditions aux limites, qui doivent prendre en compte la superposition.

- Unicité de la solution

Cette équation possède un ensemble de solutions analytiques connues. En effet, les solutions dépendent des conditions aux limites que l'on impose.

1.2.3 Modes de transfert de chaleur

L'équation de la chaleur reflète des phénomènes de transferts linéaires comme le transfert conductif et le transfert convectif [82, 14]. Le transfert radiatif étant non linéaire, il ne répond pas à l'équation de la chaleur. Le potentiel qui provoque le transfert de l'énergie thermique est la température, et si deux points sont à différentes températures, la chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures.

Mode de conduction thermique

La conduction est le moyen par lequel la chaleur circule de proche en proche dans un matériau, ou passe d'un corps à un autre en contact physique direct. Elle concerne surtout les solides, mais aussi les liquides et les gaz pour lesquels elle est souvent négligeable par rapport à la convection ou au rayonnement. Le flux de chaleur s'écoule d'une manière perpendiculaire aux surfaces isothermes du point le plus chaud vers le point le moins chaud. On parlera donc de flux Φ en W ou de densité de flux φ en $W.m^{-2}$.

L'équation (1.9) dite de Fourier donne la relation entre le flux et le gradient de température qui caractérise le transfert thermique par conduction pour un milieu isotrope :

$$\Phi = -\lambda S \text{ grad } T, \quad (1.9)$$

où S est l'aire de la section de passage du flux de chaleur en m^2 .

Le phénomène de conduction est présenté par la figure 1.2.1.

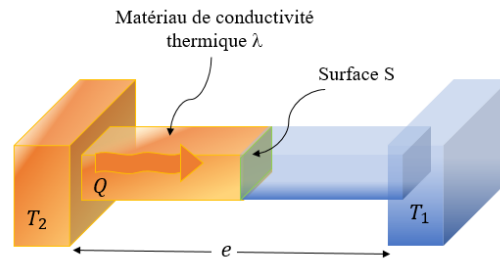


FIGURE 1.2.1 – Schéma du transfert de chaleur conductif.

D'une façon générale le flux conductif $\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$ qui représente le flux thermique au sein d'un système ou entre différents systèmes distants de e est donné par :

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\lambda}{e} S \Delta T, \quad (1.10)$$

Il représente l'énergie thermique transférée à travers le matériau par seconde, et caractérise ainsi la vitesse du transfert thermique. La quantité $\frac{Q}{t}$ se mesure donc en $\frac{\text{Joule}}{\text{seconde}} = \text{watts}$.

L'expression de l'échauffement d'une paroi par conduction est déduite de la relation (1.11).

$$\Delta T = \Phi \frac{e}{\lambda S} = \Phi R_{cd} \quad (1.11)$$

où R_{cd} est la résistance thermique de conduction.

Mode de convection thermique

La convection est un mode d'échange de chaleur qui s'accompagne d'un transfert de masse dans un milieu fluide. Lorsqu'un solide est en contact avec un fluide de température différente, il se met en place un transfert d'énergie par mouvement des molécules dans le fluide, que l'on nomme phénomène de convection décrit par la figure 1.2.2.

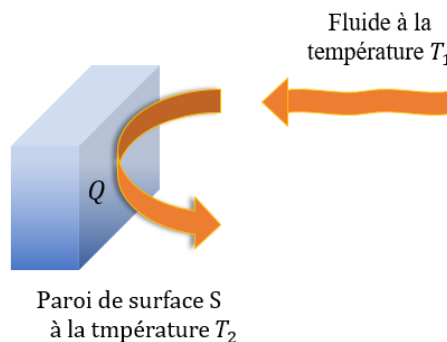


FIGURE 1.2.2 – Illustration d'échange convectif entre un milieu fluide et une surface.

On remarque que le flux de chaleur qui intervient entre une surface chaude et le milieu ambiant (fluide) est proportionnel à l'écart de température présenté entre ces deux milieux. Pour cette raison on introduit un coefficient de proportionnalité h , appelé coefficient d'échange thermique par convection (ou coefficient de convection). On remarquera que ce flux est aussi proportionnel à la surface mise en contact avec le fluide [46] :

$$\Phi = h S (T_2 - T_1), \quad (1.12)$$

où, Φ est le flux de chaleur en W , h le coefficient de convection en $W.m^{-2}.K$, S la surface d'échange entre le solide et le fluide en m^2 , T_2 la température de la surface de la paroi de solide, et T_1 la température du fluide.

Comme pour le mécanisme de conduction, une résistance thermique de convection est déterminée à partir de l'expression (1.12), où la résistance R_{cv} caractérise les échanges thermiques entre la surface du matériau et le fluide avec lequel elle est en contact. Elle dépend de la surface de convection et du coefficient de convection h , sous la forme :

$$R_{cv} = \frac{1}{h S}, \quad (1.13)$$

Mode de rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est l'un des moyens de transfert de chaleur. En effet tout objet ayant une température supérieure émet un rayonnement thermique. Plus la température du corps est élevée plus celui-ci envoie des rayons infrarouges d'ondes plus courtes [111].

Le rayonnement consiste en un échange de chaleur entre deux parois séparées par un milieu transparent comme le montre la figure 1.2.3.

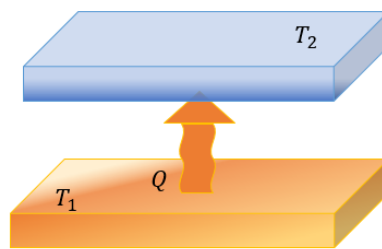


FIGURE 1.2.3 – Principe du rayonnement thermique.

On définit par la loi de Stefan-Boltzmann (1.14) l'énergie transmise par rayonnement dans le vide lorsqu'un corps est à une température T_1 et le milieu qui peut être lointain est à une température T_2 :

$$\Phi = \varepsilon_{12} \sigma_s S (T_1^4 - T_2^4), \quad (1.14)$$

où Φ est le flux de chaleur en W , ε_{12} l'émissivité thermique de la surface rayonnante, sa valeur est comprise entre 0 (surface parfaitement réfléchissante)

et 1 (surface parfaitement absorbante), σ_s la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma_s = 5,67.10^{-8}$ en $W.K^{-4}.m^{-2}$), T_1 la température de la surface rayonnant, et T_2 la température de la surface absorbante. On remarque que le rayonnement est proportionnel à la température et à l'émissivité du matériau.

On peut alors, comme pour les deux autres processus de transfert de chaleur, conduction et convection, associer au rayonnement à travers un système (S, σ_s, T) , une résistance thermique de valeur égale à :

$$R_{ray} = \frac{1}{\varepsilon_{12}\sigma_s S(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)}, \quad (1.15)$$

Le transfert par rayonnement est en général négligé dans les systèmes dont on souhaite traiter la gestion thermique [94, 106]. On s'intéressera particulièrement aux échanges de chaleur par convection vers l'air ou vers tout autre fluide, et à l'écoulement de la chaleur par conduction à travers les différentes couches de l'assemblage.

Synthèse des modes de transfert

Pour présenter les différents modes de transfert entre les composants d'un module d'électronique de puissance, nous faisons une coupe verticale et décrivons schématiquement les composants du module sur la figure 1.2.4.

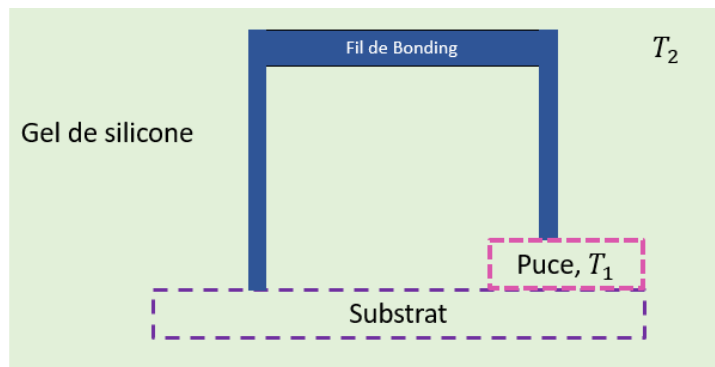


FIGURE 1.2.4 – Section verticale du module.

La figure 1.2.5, décrit les liens entre les divers composants et le milieu extérieur (gel silicone) et les différents modes de transfert thermique entre chaque élément, avec, Cd : Conduction, Cv : Convection et R : Rayonnement

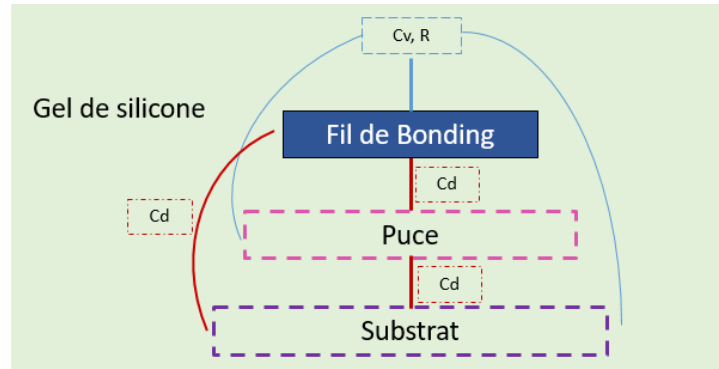


FIGURE 1.2.5 – Schéma structurel des comportements.

Notre objectif est de calculer la densité de flux thermique pour chaque mode de transfert, afin d'évaluer sa variation en fonction de la température T_1 de la plaque. À partir des différentes données présentées dans le tableau 1.2.1 :

Données	Valeurs numériques
Conductivité thermique	$\lambda = 10W.m^{-1}.K^{-1}$
Coefficient de convection	$h = 10^5W.m^{-2}.K$
Constante de Stefan. Boltzmann	$\sigma_s = 5,67.10^{-8}W.m^{-2}.K^{-4}$
Épaisseur	$e = 0,1.10^{-2}m$
Température de convection	$T_2 = 20^\circ C = 293,15K$

TABLEAU 1.2.1 – Récapitulatif des données.

On peut estimer :

- La densité de flux thermique par conduction :

$$\varphi = \frac{\lambda}{e}(T_1 - T_2) = \frac{10}{10^{-3}} \cdot (T_1 - 293,15) = 10^4 T_1 - 293,15 \times 10^4,$$
- La densité de flux thermique par convection :

$$\varphi = h(T_1 - T_2) = 10^5 \cdot (T_1 - 293,15) = 10^5 T_1 - 293,15 \times 10^5,$$
- La densité de flux thermique par rayonnement en considérant que les deux corps sont noirs, $\varepsilon_{12} = 1$:

$$\varphi = \varepsilon_{12}\sigma_s(T_1^4 - T_2^4) = 1 \cdot (5,67 \times 10^{-8}) \cdot (T_1^4 - 293,15^4) = 5,67 \times 10^{-8} T_1^4 - 418,73,$$

La figure 1.2.6 montre les courbes des différents modes de transfert de chaleur en fonction de la température T_1 :

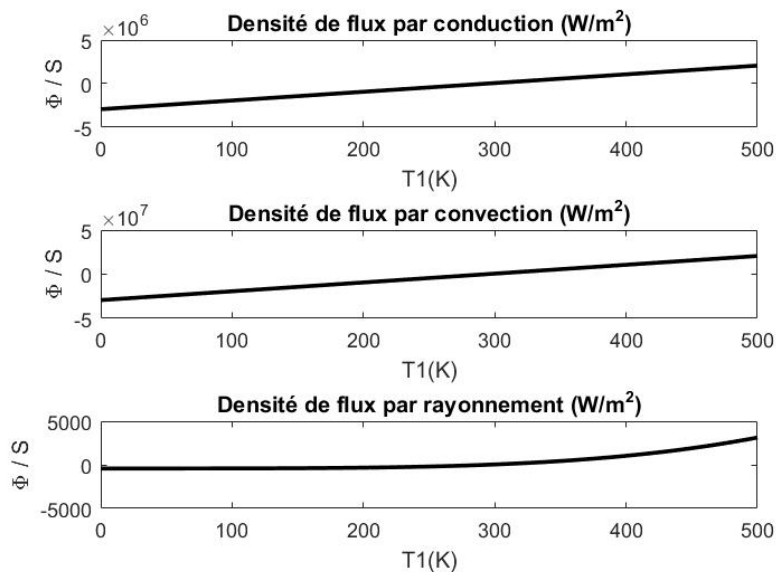


FIGURE 1.2.6 – Densité de flux thermique des différents modes de transfert de chaleur en fonction de T_1 .

La valeur de la densité de flux par rayonnement est plus petite que la densité de flux par conduction et par convection, ce qui nous permet de valider l'hypothèse que, le transfert par rayonnement est négligeable par rapport à la conduction et la convection.

1.2.4 Discrétisation de l'équation de la chaleur

L'équation générale de la chaleur [8, 70] est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à l'espace et du premier ordre par rapport au temps, elle exprime une relation entre la fonction température T et les variables x, y et t . La solution mathématique de cette équation admet en principe une infinité de solutions, pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tout point de l'espace.

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 [22] pour approximer les dérivées secondes en espace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{x+dx} - 2T_x + T_{x-dx}}{dx^2}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{y+dy} - 2T_y + T_{y-dy}}{dy^2}, \quad (1.17)$$

Remplaçons (1.16), (1.17) dans (1.8), nous trouvons :

$$\rho C_p \frac{dT(x, y, t)}{dt} = \lambda \left(\frac{T_{x+dx} - 2T_x + T_{x-dx}}{dx^2} + \frac{T_{y+dy} - 2T_y + T_{y-dy}}{dy^2} \right) + r,$$

Multiplions par la surface S , nous avons :

$$\begin{aligned} \rho C_p S \frac{dT(x, y, t)}{dt} &= \frac{\lambda S}{dx^2} (T_{x+dx} - 2T_x + T_{x-dx}) + \frac{\lambda S}{dy^2} (T_{y+dy} - 2T_y + T_{y-dy}) + r S, \\ &= \frac{\lambda S}{dx^2} (T_{x+dx} - T_x) + \frac{\lambda S}{dx^2} (T_{x-dx} - T_x) \\ &\quad + \frac{\lambda S}{dy^2} (T_{y+dy} - T_y) + \frac{\lambda S}{dy^2} (T_{y-dy} - T_y) + r S, \end{aligned}$$

Multiplions par $dx dy$, on a :

$$\begin{aligned} \rho C_p S dx dy \frac{dT(x, y, t)}{dt} &= \frac{\lambda S dy}{dx} (T_{x+dx} - T_x) + \frac{\lambda S dy}{dx} (T_{x-dx} - T_x) \\ &\quad + \frac{\lambda S dx}{dy} (T_{y+dy} - T_y) + \frac{\lambda S dx}{dy} (T_{y-dy} - T_y) + r S dx dy, \end{aligned}$$

où $dV = S dx dy$, $R_{th_x} = \frac{\lambda S}{dx}$, $R_{th_y} = \frac{\lambda S}{dy}$, $C_{th} = \rho C_p dV$ et $(r S dx dy)$ est la chaleur interne.

Alors la formule finale est exprimée par :

$$\begin{aligned} C_{th} \frac{dT(x, y, t)}{dt} &= \frac{1}{R_{th_x}} (T_{x+dx} - T_x) + \frac{1}{R_{th_x}} (T_{x-dx} - T_x) \\ &\quad + \frac{1}{R_{th_y}} (T_{y+dy} - T_y) + \frac{1}{R_{th_y}} (T_{y-dy} - T_y) + r dV. \end{aligned}$$

1.2.5 Équivalence thermique-électrique

Le comportement thermique est lié au fonctionnement électrique du module d'électronique de puissance, où les propriétés électriques des semi-conducteurs sont affectées par la variation de la température. Pour pouvoir modéliser, grâce à un modèle équivalent électrique, le comportement thermique d'un système, il est nécessaire de connaître les liens entre le domaine électrique et le domaine thermique, de plus il faut connaître comment définir les grandeurs que nous allons utiliser. À partir de ces grandeurs, nous pouvons définir les modèles que nous utiliserons par la suite.

Base de l'analogie

La modélisation que nous proposons met principalement en œuvre les systèmes équivalents électriques. Pour chaque domaine physique considéré, un modèle équivalent électrique est proposé. Celui-ci permet de définir le comportement du matériau à travers les outils classiques d'étude des circuits (lois de Kirchoff, théorème de Millman).

La loi de Fourier (1.7) [13, 50, 93] postule que dans un corps homogène où il y a une dissipation de puissance sous forme de chaleur, le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. On peut alors utiliser l'analogie entre la loi d'Ohm décrivant le courant électrique (1.18) dans un système

électrique et l'intégrale de l'équation de la chaleur (hypothèse de Fourier).

$$\vec{J} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V, \quad (1.18)$$

où σ est la conductivité électrique en S/m et V le potentiel en V .

Analogie électrothermique

Cette analogie électrique–thermique nous conduit à mettre en relation les différentes grandeurs présentées par le tableau (1.2.2) [51] :

Domaine thermique			Domaine électrique		
Paramètres	Nota.	Unités	Paramètres	Nota.	Unités
Échauffement	ΔT	K	Différence de potentiel	ΔV	V
Flux thermique	Q	W	Courant électrique	I	A
Résistance thermique	R_{th}	K/W	Résistance	R	Ω
Capacité thermique	C_{th}	J/K	Capacité	C	F
Conductivité thermique	λ	$W/m/K$	Conductivité électrique	σ	S/m

TABLEAU 1.2.2 – Analogie entre les grandeurs électriques et thermiques.

Cette analogie va nous permettre d'obtenir un modèle électrique équivalent au modèle thermique issu de l'équation de la chaleur, afin de décrire le comportement thermique du modèle en utilisant les outils classiques d'étude des circuits.

1.2.6 Modèle thermique

Pour déterminer la température de fonctionnement en quelques points d'un composant du module d'électronique de puissance, il faut disposer d'un modèle thermique qui nécessite des temps de calcul réduits et un nombre restreint de paramètres. Cette partie est consacrée à l'étude d'un modèle thermique 2D.

Le choix d'un modèle 2D est proposé afin de limiter la taille des matrices, et donc de pouvoir détailler les démarches de modélisation et d'estimation. L'utilisation du système d'étude 2D ne remet ni en cause la modélisation ni les techniques d'observation qui seront développées ultérieurement.

L'exemple choisi, une plaque chauffée en 1 point peut correspondre à une coupe horizontale du module d'électronique de puissance au niveau du substrat, avec comme hypothèse que la seule source de puissance thermique soit la puce semi-conductrice.

Exemple d'application 2D

Nous cherchons à simuler le comportement électro-thermomécanique d'une plaque de surface $(30 \times 30)mm$ (système), qui représente une coupe d'un composant du module d'électronique de puissance.

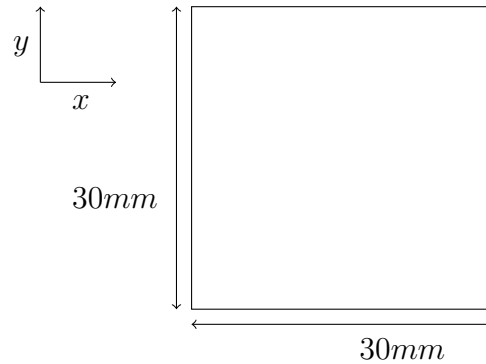


FIGURE 1.2.7 – Système étudié : plaque chauffante.

Pour vérifier la justesse de l'estimation qu'on va produire, nous allons simuler l'ensemble de la plaque afin de suivre l'évolution thermique de toute la plaque chauffante, nous considérons que dans une surface élémentaire suffisamment petite, les grandeurs évaluées peuvent être considérées constantes. Cette simulation va être réalisée par discrétisation spatiale. À partir de cette discrétisation nous avons un modèle pour chaque élément. On calcule alors les grandeurs évaluées pour les nœuds positionnés aux centres de chacun des surfaces élémentaires, comme le montre la figure 1.2.8.

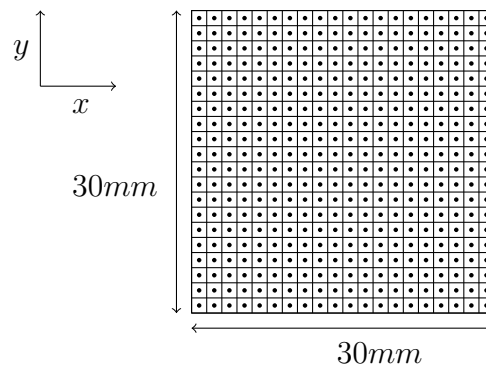


FIGURE 1.2.8 – Discrétisation surfacique d'une plaque chauffante.

La simulation est donc réalisée en juxtaposant les modèles associés aux différentes surfaces élémentaires, chaque surface élémentaire est associée à ses voisines. Chaque surface élémentaire est donc représentée par un réseau d'impédances traduisant la conduction entre le nœud (au centre) et les bords de cette surface. Le stockage d'énergie thermique dans une surface élémentaire est modélisé par une capacité thermique C_{th} connectée entre le nœud représentant la surface et la masse. Cette capacité thermique C_{th} permet de faire apparaître le régime transitoire du comportement thermique du système. Cependant, nous distinguons deux représentations des résistances dans une surface élémentaire suivant qu'elle est au bord de la plaque, ou non, figure 1.2.9.

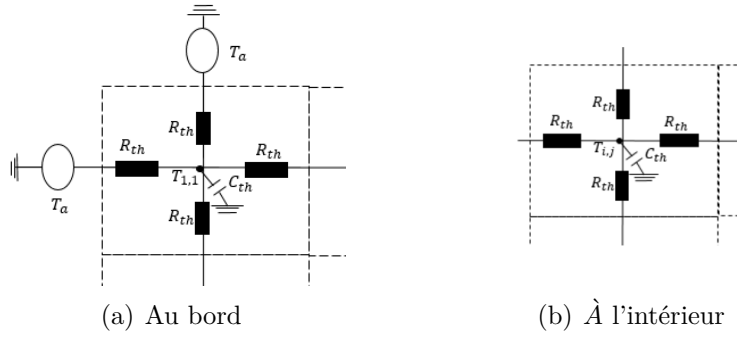


FIGURE 1.2.9 – Représentation de réseau d'impédances d'une surface élémentaire au bord et à l'intérieur de la plaque [35].

Les impédances reliant chaque nœud aux limites du surface élémentaire qu'ils représentent incluent une résistance thermique R_{th} , cette résistance thermique R_{th} quantifie l'opposition à un flux de chaleur entre deux isothermes. Selon le type de transfert thermique, elle représente la conduction thermique R_{cd} ou de la convection thermique R_{cv} .

La capacité thermique C_{th} correspond, à la capacité de stockage d'énergie thermique dans une surface de matériaux. Elle dépend de sa masse volumique ρ , de son volume V_c et de la capacité thermique massique du matériau C_p .

$$C_{th} = \rho C_p V_c \quad (1.19)$$

Compte tenu la répartition uniforme des conditions de température aux limites (température de chauffe dans des endroits choisis, coefficient de convection identique sur tous les bords) qui sont définies comme des sources de température (équivalente à des sources de tension), les éléments des bords sont directement connectés à une source de température ambiante T_a à travers une résistance R_{cv} modélisant la convection sur ses bords, les autres éléments sont connectés entre-eux à travers une résistance R_{cd} modélisant la conduction. Comme le montre la figure 1.2.10, chaque surface élémentaire est associée à ses surfaces élémentaires voisines (les traits pointillés permettent d'étendre le modèle aux autres surfaces élémentaires du système), avec une concaténation de chaque surface avec sa voisine.

Par ailleurs, on injecte une puissance thermique P_{th} au milieu de la plaque, pour traduire une source thermique sur ce système. La figure 1.2.10 présente le modèle thermique associé dans le domaine électrique.

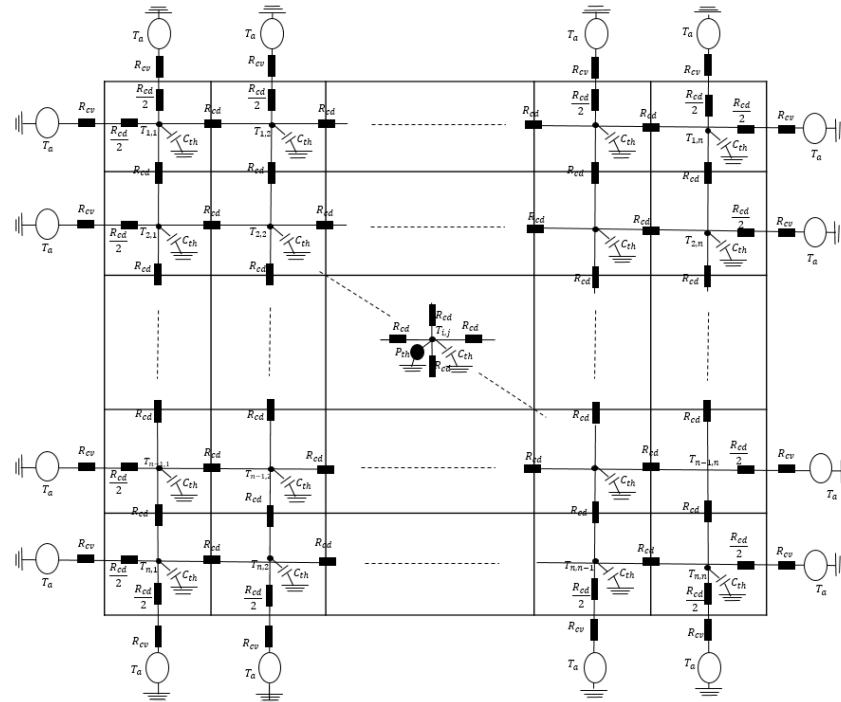


FIGURE 1.2.10 – Interconnexion des modèles des différentes surfaces élémentaires.

1.3 Modélisation d'état pour la modélisation thermique

La mise en équation de chaque nœud d'une surface élémentaire se fait selon le théorème de Millman [69], qui nous conduit à un modèle sous la forme d'une équation d'état. Cette partie est consacrée à la description de l'obtention de la modélisation d'état pour la modélisation thermique. Nous commençons par l'établissement du théorème de Millman sur chaque nœud afin d'arriver à cette représentation d'état du système.

1.3.1 Potentiel thermique en un nœud (théorème de Millman)

L'étude du comportement thermique de la plaque est représenté par la figure 1.2.7, où nous avons choisi une discrétisation spatiale de n^2 surfaces élémentaires, avec une puissance thermique P_{th} injectée en un point intérieur de la surface.

Le théorème de Millman [69] est une forme particulière de la loi des nœuds exprimé en termes de potentiel. Le modèle thermique équivalent au modèle électrique nous permet, d'exprimer la température $T_{i,j}$ d'un nœud (i, j) en fonction des températures de ses voisins et des résistances thermiques $R_{th_{i,j}}$ exprimées par les résistances thermiques des différents modes de transfert de chaleur (figure 1.3.1), comme le montre l'équation :

$$T_{i,j} = \frac{\frac{T_{i-1,j}}{R_{th_{i-1,j}}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{th_{i+1,j}}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{th_{i,j-1}}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{th_{i,j+1}}} + P_{th}}{\frac{1}{R_{th_{i-1,j}}} + \frac{1}{R_{th_{i+1,j}}} + \frac{1}{R_{th_{i,j-1}}} + \frac{1}{R_{th_{i,j+1}}} + pC_{th_{i,j}}}, (i,j) \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \quad (1.20)$$

où p représente l'opérateur de dérivation ($p = \frac{d}{dt}$).

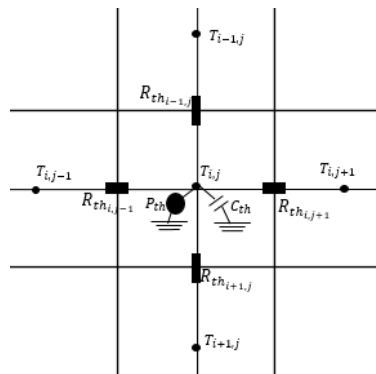


FIGURE 1.3.1 – Représentation de réseau d'impédances d'un nœud (i, j) .

Nous avons simplifié notre étude en supposant que toutes les capacités C_{th} de chaque surface élémentaire sont identiques. En réalité, cela ne serait pas le cas puisque ces capacités dépendent du matériau ou de la discrétisation. De même les résistances qui ne sont pas forcément identiques en fonction de la position (i, j) dans chaque élément. Cependant, la représentation simplifiée ne restreint absolument pas la généralité des méthodes que nous allons utiliser.

1.3.2 Représentation d'état

Différentes équations

Le modèle étudié correspond à un élément $2D$ incluant une puissance thermique P_{th} au milieu de la surface modélisée par une source de courant équivalente. Ce modèle permet de déterminer les températures aux nœuds, en tenant compte des phénomènes de transfert thermique avec les milieux environnants.

Pour une discrétisation spatiale de n^2 surfaces élémentaires, le système modélisé fait apparaître trois types de surfaces élémentaires dans un espace $2D$:

- **Type 1** : Les surfaces élémentaires aux coins de la plaque, (figure 1.3.2).

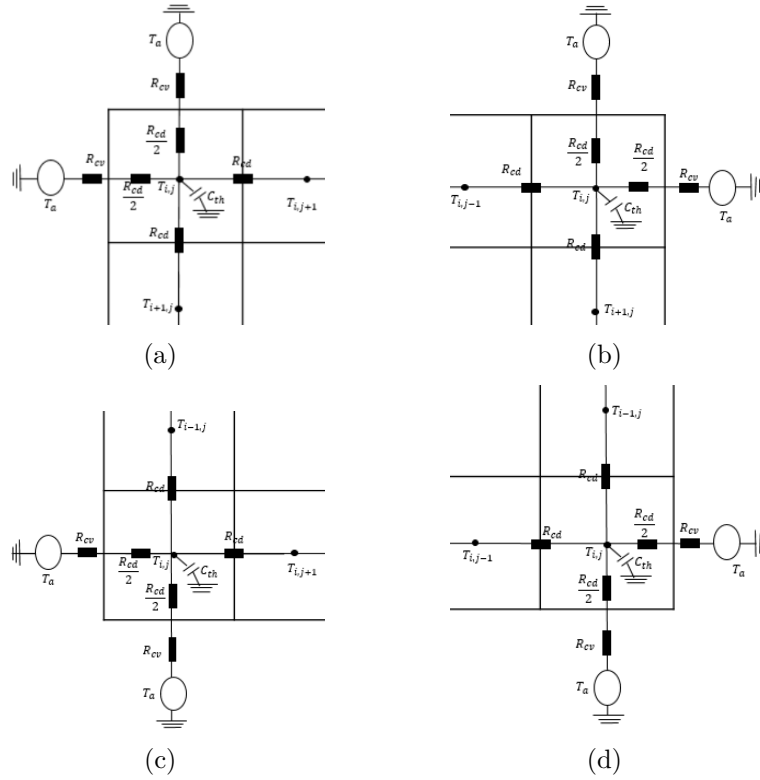


FIGURE 1.3.2 – Représentation de réseau de résistance au coins de la plaque.

Les expressions de la température des nœuds présentés par les figures 1.3.2 (a), (b), (c), (d) définis à l'aide du théorème de Millman sont données respectivement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) : } T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = j = 1, \\ \text{(b) : } T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = 1, j = n, \\ \text{(c) : } T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = n, j = 1, \\ \text{(d) : } T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = j = n, \end{array} \right. \quad (1.21)$$

- **Type 2** : Les surfaces élémentaires sur les bords, (figure 1.3.3).

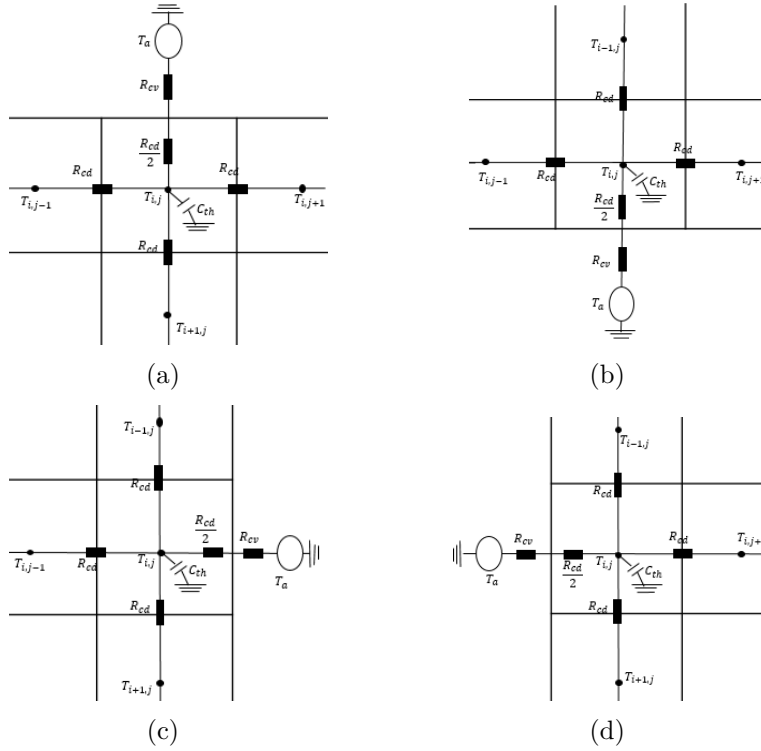


FIGURE 1.3.3 – Représentation de réseau d'impédances des cotés de la plaque.

Les expressions de la température des nœuds présentés par les figures 1.3.3 (a), (b), (c), (d) définis à l'aide du théorème de Millman sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{(a) : } T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = 1, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\
 \text{(b) : } T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, j = n, i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\
 \text{(c) : } T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = n, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\
 \text{(d) : } T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, j = 1, i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket,
 \end{array} \right. \quad (1.22)$$

- **Type 3** : Les surfaces internes reliée, (figure 1.3.4).

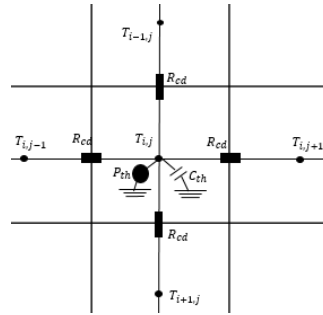


FIGURE 1.3.4 – Représentation de réseau d'impédances à l'intérieur de la plaque.

L'expression de la température de ce nœud défini à l'aide du théorème de Millman est donnée par, pour $i, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

$$T_{i,j} = \frac{\frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + P_{th}}{\frac{4}{R_{cd}} + pC_{th}}, \quad (1.23)$$

Système d'équation

Le système d'équation (1.24) résume la modélisation spatiale de la surface 2D :

$$\left\{ \begin{array}{l}
T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = j = 1, \\
T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = 1, j = n, \\
T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = n, j = 1, \\
T_{i,j} = \frac{\frac{2T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}}}{\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = j = n, \\
T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = 1, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\
T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, j = n, i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\
T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, i = n, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\
T_{i,j} = \frac{\frac{T_a}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}}}{\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, j = 1, i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\
T_{i,j} = \frac{\frac{T_{i-1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1,j}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j-1}}{R_{cd}} + \frac{T_{i,j+1}}{R_{cd}} + P_{th}}{\frac{4}{R_{cd}} + pC_{th}}, (i, j) \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket,
\end{array} \right. \quad (1.24)$$

En utilisant l'opérateur de dérivation p , le problème se résume à un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre (1.25).

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j+1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1,j} + \frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad i = j = 1, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j-1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1,j} + \frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad i = 1, j = n, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j+1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i-1,j} + \frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad i = n, j = 1, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{2}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j-1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i-1,j} + \frac{2}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad i = j = n, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j-1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j+1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1,j} + \frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad i = 1, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j-1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j+1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i-1,j} + \frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad j = n, i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j-1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i-1,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1,j} + \frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad i = n, j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \left(\frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} + \frac{3}{R_{cd}} \right) T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j+1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i-1,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1,j} + \frac{1}{\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}} T_a, \\
\quad j = 1, i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\
C_{th}\dot{T}_{i,j} = - \frac{4}{R_{cd}} T_{i,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i-1,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1,j} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j-1} + \frac{1}{R_{cd}} T_{i,j+1} + P_{th}, \\
\quad (i, j) \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket,
\end{array} \right. \quad (1.25)$$

En définissant le vecteur T des températures $T_{i,j}$, ce système se pose sous la forme matricielle (1.26).

$$C_{th}\dot{T} = A_{th}T + B_{th}u_{th} \quad (1.26)$$

où les différentes matrices qui le composent sont :

- C_{th} : Matrice des capacités thermiques. C'est une matrice diagonale où les termes correspondent aux capacités thermiques des surfaces élémentaires.
- A_{th} : Matrice des résistances thermiques, c'est une matrice creuse.
- B_{th} : Conductances entre les nœuds et les conditions aux limites.
- u_{th} : Excitation du système, $u_{th} = [T_a \ P_{th}]^T$.

Synthèse du système d'état

Afin de suivre le mécanisme de construction du système d'état, nous choisissons une discrétisation par différences finies de la plaque chauffante exprimée en modèle d'état d'ordre 25, où la puissance thermique est injectée à l'intérieur de la plaque.

On arrive sur une représentation d'état de la forme (1.26) définie par :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & d & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & d & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & d & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & d & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & d & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & d & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & c & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} f & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g \\ 0 & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}$$

où $a = -1.40$, $b = 6.9 \times 10^{-3}$, $c = -0.71$, $d = -0.027$, $f = 1.38$ et $g = 0.69$.

On peut remarquer de cette présentation que la matrice A est creuse.

La figure 1.3.5 montre la cartographie de la dissipation du champ thermique, pour un système d'ordre 25 avec une puissance thermique injectée au milieu de la plaque.

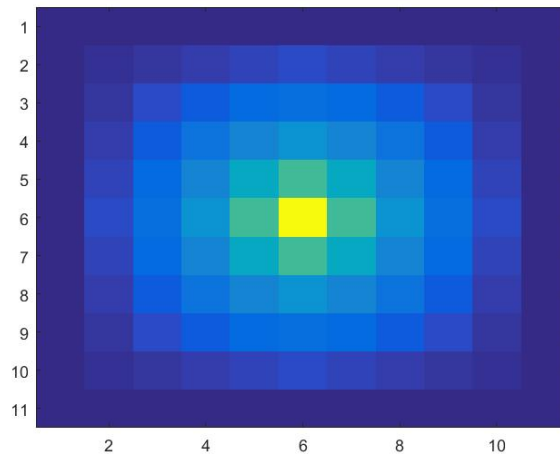


FIGURE 1.3.5 – Carte de champ thermique.

1.4 Dispositif expérimental

Cette étude s'intéresse à la modélisation multiphysique et à la simulation en régimes transitoire et permanent des gels encapsulants des modules d'électronique de puissance. Avec, cet élément passif du packaging apparaît comme un organe peu étudié sensible aux effets thermiques et électriques. Les travaux présentés ici proposent une modélisation thermique du matériau, une représentation d'état du comportement thermique est établie, permettant une simulation en régime transitoire du comportement du matériau. Cette méthode de simulation du comportement du gel permet d'établir rapidement les températures du gel.

1.4.1 Système d'étude

Afin de simplifier la problématique et de mettre en avant la démarche de modélisation, nous traiterons le cas d'un barreau mono-dimensionnel de gel silicone. Les phénomènes thermiques intervenant selon des directions différentes de la dimension principale du barreau seront négligés. Ainsi, le barreau sera considéré comme thermiquement isolé en dehors de sa dimension principale.

Le système considéré est donc constitué d'un cylindre de longueur $L_0 = 16 \cdot 10^{-2} m$ à température ambiante de $295 K$ et de section circulaire de diamètre $d = 1 \cdot 10^{-2} m$. Pour établir le modèle, le système est échantillonné en $n = 16$ volumes élémentaires de pas $\Delta x = 1 \cdot 10^{-2} m$ dans lesquels les grandeurs physiques sont considérées constantes (figure 1.4.1).

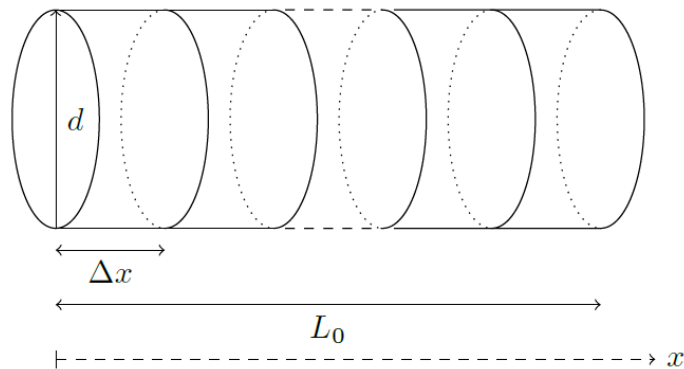


FIGURE 1.4.1 – Système d'étude.

Les conditions limites thermiques sont donc définies sur les deux bases orthogonales à la longueur principale du barreau. Une des base est définie en convection avec l'air à température ambiante T_a . La condition limite thermique sur la base opposée est définie comme une température de chauffe T_h . Cette température correspond à la température de fonctionnement d'un composant semi-conducteur en régime permanent dans un module de puissance. Elle est choisie de manière à être inférieure à la température limite d'utilisation du gel silicone.

1.4.2 Mise en équations

A l'aide de la modélisation par circuit équivalent, la mise en équation du système se fait de manière systématique. On supposera que les résistances thermiques entre deux cellules internes sont toutes identiques, de valeur (R_{cd}). On supposera également que la résistance entre la source chaude et le premier volume est moitié moins importante que celle entre deux cellules internes, donc de valeur ($\frac{R_{cd}}{2}$). Enfin, il en va de même pour la résistance thermique entre le dernier volume et la source froide, à laquelle vient s'ajouter la résistance de convection, donc de valeur ($\frac{R_{cd}}{2} + R_{cv}$). Ainsi si les volumes sont indexés i , on obtient le système d'équations (1.27).

$$\begin{cases} T_1(t) = \frac{\frac{T_2(t)}{R_{cd}} + \frac{2T_h(t)}{R_{cd}}}{\frac{3}{R_{cd}} + pC_{th}}, \\ T_i(t) = \frac{\frac{T_{i-1}(t)}{R_{cd}} + \frac{T_{i+1}(t)}{R_{cd}}}{\frac{2}{R_{cd}} + pC_{th}}, \quad i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\ T_n(t) = \frac{\frac{2T_a(t)}{R_{cd}+2R_{cv}} + \frac{T_{n-1}(t)}{R_{cd}}}{\frac{2}{R_{cd}+2R_{cv}} + \frac{1}{R_{cd}} + pC_{th}}, \end{cases} \quad (1.27)$$

En utilisant l'opérateur de dérivation p , le problème se résume à un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre (1.28).

$$\begin{cases} \dot{T}_1(t) = \frac{1}{C_{th}} \left(\frac{-3}{R_{cd}} T_1(t) + \frac{1}{R_{cd}} T_2(t) \right) + \frac{2}{R_{cd} C_{th}} T_h(t), \\ \dot{T}_i(t) = \frac{1}{C_{th}} \left(\frac{1}{R_{cd}} T_{i-1}(t) - \frac{2}{R_{cd}} T_i(t) + \frac{1}{R_{cd}} T_{i+1}(t) \right), \quad i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\ \dot{T}_n(t) = \frac{1}{C_{th}} \left(\frac{1}{R_{cd}} T_{n-1}(t) - \frac{3R_{cd} + 2R_{cv}}{R_{cd}(R_{cd} + 2R_{cv})} T_n(t) \right) + \frac{2}{(R_{cd} + 2R_{cv}) C_{th}} T_a(t), \end{cases} \quad (1.28)$$

Le système (1.28) s'écrit alors aisément sous forme matricielle d'état (1.29) où $T(t)$ est le vecteur d'état des températures. Notons que la matrice dynamique thermique A_{th} de taille $(n \times n)$ est une matrice creuse. Il en est de même pour la matrice B_{th} de taille $(n \times 2)$ qui ne comporte que deux termes non nuls.

$$\dot{T}(t) = A_{th} T(t) + B_{th} \begin{pmatrix} T_h(t) \\ T_a(t) \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Le dispositif expérimental permet de mesurer la réponse thermique d'un barreau de gel encapsulant d'électronique de puissance soumis à une sollicitation thermique. Le matériau est un gel silicone *Silgel616* coulé puis réticulé dans un tube de verre de diamètre interne $1.10^{-2}m$ sur une longueur de $16.10^{-2}m$. Le tube est alors placé verticalement sur une plaque chauffante régulée en température. Des thermocouples sont insérés dans le gel silicone à différentes positions pour mesurer la température locale. Deux thermocouples mesurent les conditions limites : la température de la plaque chauffante et la température ambiante. La figure 1.4.2 permet de se rendre compte du dispositif expérimental. Enfin, un isolant thermique, composé de polystyrène extrudé est positionné autour du tube. Celui-ci a une conductivité thermique environ dix fois plus faible que le gel silicone, ce qui permet de maximiser le flux thermique dans l'axe de révolution du tube et donc de maximiser le caractère mono-dimensionnel des phénomènes thermiques.

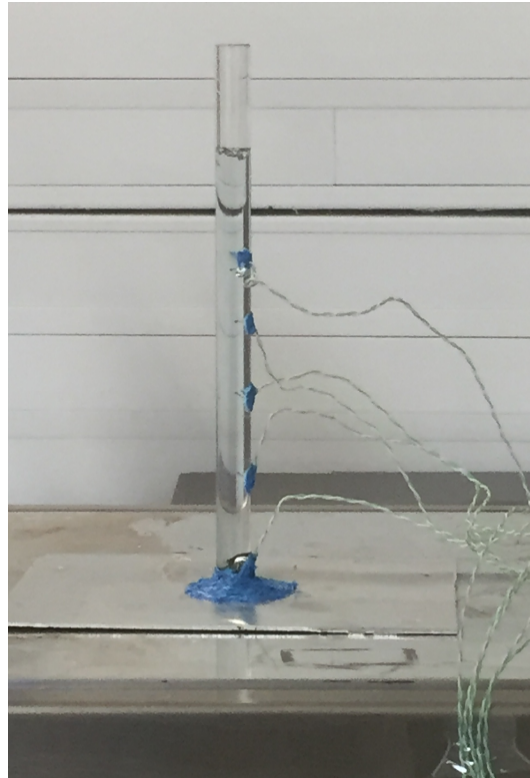


FIGURE 1.4.2 – Dispositif expérimental.

Les propriétés thermiques du matériau et du système ont été extraites de sa documentation fournie par le fabricant ou déterminées expérimentalement :

- conductivité : $\lambda = 0,1 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$,
- chaleur spécifique : $C_p = 80 \text{ W} \cdot (\text{K} \cdot \text{kg})^{-1}$,
- masse volumique : $\rho = 970 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
- coefficient de convection : $h = 70 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

1.4.3 Réponse thermique

Afin de comparer les données expérimentales et simulées, les températures mesurées de la plaque chauffante et de l'air ambiant sont injectées en entrée du modèle thermique. Les températures sont simulées aux mêmes positions que celles mesurées. La figure 1.4.3 permet de comparer les résultats de mesure et de simulation. Les distances indiquées sont mesurées entre la base chauffée du barreau de gel et le thermocouple.

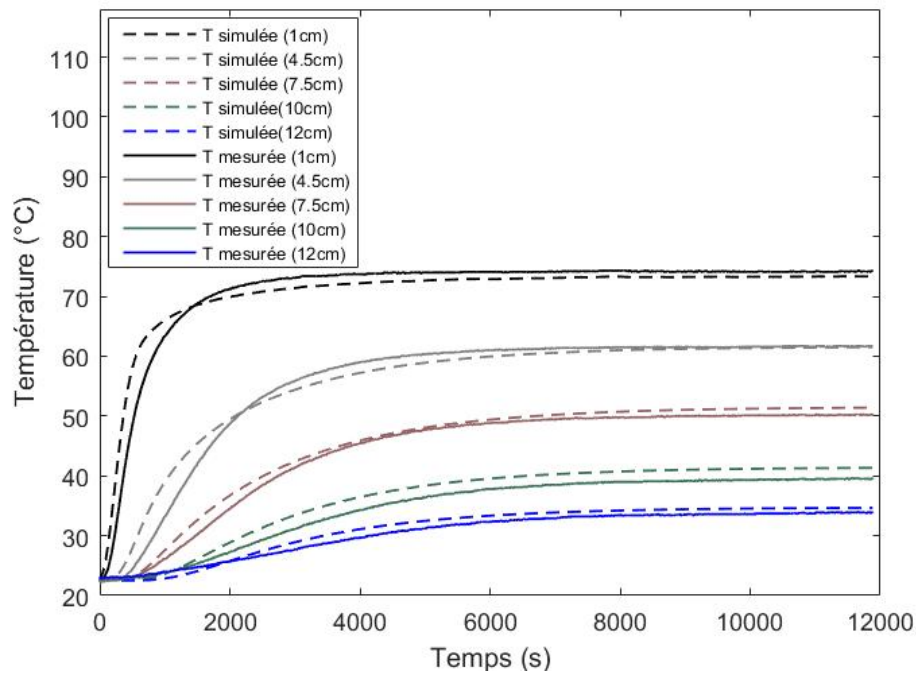


FIGURE 1.4.3 – Réponse thermique du système.

On remarque qu'on a une bonne concordance entre les valeurs des températures en régime permanent. Les écarts constatés sont majoritairement dus à l'imprécision du positionnement des thermocouples dans le gel. On remarque également que les réponses thermiques simulées ont un temps de réponse différent de celui mesuré. Cela peut provenir de plusieurs phénomènes non pris en compte dans la simulation. Les paramètres thermiques du matériaux sont considérés comme constants quelle que soit la température or, la conductivité thermique et la chaleur spécifique sont des paramètres pouvant dépendre de la température [6, 52].

Conclusion

Nous avons commencé ce chapitre introductif en présentant les interrupteurs de puissance, ainsi que les différents types de convertisseurs, et les pertes associées. Nous avons présenté ensuite les modules d'électronique de puissance sur lesquels porte notre étude, où nous avons détaillé la description des différents constituants, et les principaux mécanismes de défaillance que l'on rencontre dans ces modules. Nous avons réalisé un état de l'art des principaux outils théoriques pour appréhender la gestion thermique. La correspondance entre grandeurs thermiques et grandeurs électriques en est un élément essentiel. Une partie était consacrée à la modélisation thermique, en utilisant des modèles équivalents électriques, permettant de prendre en compte le comportement des différents matériaux, en arrivant à une présentation d'état du système. Une dernière partie était consacrée à l'expérimentale afin de valider les résultats de simulation.

Dans le but de reconstruire des grandeurs qui ne sont pas accessibles à la mesure dans un module d'électronique de puissance, nous nous intéressons

dans les chapitres suivants à la conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire afin d'estimer certain de ces grandeurs. Ce type d'observateurs peut s'appliquer à des systèmes dynamiques. À partir des informations disponibles physiquement, comme la position et l'intensité de puissance thermique, et la mesure de la température en certains points qu'on veut obtenir. Toutes les équations de fonctionnement qui serviront de base au dimensionnement d'un observateur ont été rappelées. Cependant il reste à aborder la procédure de conception de ces observateurs. Cet aspect sera abordé dans le chapitre 2.

Chapitre 2

Application des observateurs de fonctionnelle linéaire continu

Sommaire

Introduction	46
2.1 Système dynamique	47
2.1.1 Représentation des systèmes	48
2.1.2 Équation d'état	49
2.2 Fonctions de transfert	49
2.2.1 Détermination des différentes fonctions	49
2.2.2 Principe général d'un observateur	50
2.3 Modèle par transfert	51
2.3.1 Analyse de l'erreur de poursuite	52
2.3.2 Résolution de l'équation de Bezout	52
2.3.3 Méthode de Hörner	53
2.3.4 Exemple d'application	54
Résultat de simulation	56
2.4 Exemple appliqué sur la plaque chauffante	57
2.4.1 Méthodes d'identification	58
2.4.2 Modèle de Hudzovic	58
2.4.3 Approximation de Padé	59
2.4.4 Construction de l'observateur	60
Résolution de l'équation de Bezout	60
Modèle de Hörner	60
Résultat de simulation	61
2.5 Estimation des variables non mesurées	62
2.5.1 Principe de l'observateur	62
2.5.2 Objectif d'un observateur	62
2.5.3 Observateur de fonctionnelle linéaire	63
2.5.4 Conception d'un observateur de Luenberger	64
Construction de la matrice T	66
2.6 Application sur la plaque chauffante $2D$ pour un système symé- trique	66
2.6.1 Conception d'un observateur minimal	66
2.6.2 Résultats de simulation	69
2.7 Application sur la plaque chauffante $2D$ pour un système non symétrique	71

2.7.1	Exemple 1	72
2.7.2	Exemple 2	72
2.8	Observateur de Luenberger avec des degrés de liberté	74
2.9	Estimation de la dérivée de la température	77
2.9.1	Recherche de l'ordre minimal :	77
2.9.2	Conception de l'observateur minimal	79
2.9.3	Résultats de simulation	79
2.10	Partie expérimentale	80
	Conclusion	81

Introduction

Dans la plupart des cas, la dimension du vecteur des mesures est inférieure à celle de l'état. Que ce soit pour des considérations techniques ou économiques, nous ne pouvons donc pas déduire l'état directement à partir des mesures. En tenant compte du fait que, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrée et de mesure, le problème d'observation ou d'estimation de l'état se définit comme la construction d'un système dynamique auxiliaire qui a pour entrées les entrées et les variables du système à estimer et pour sortie l'estimation de l'état. En effet, parmi les variables d'un système dynamique certaines ne sont pas directement accessibles par la mesure où dans la plupart des cas, on ne cherche pas à reconstruire toutes les variables du système. Il est alors préférable, afin d'obtenir un système d'ordre le plus petit possible, de ne pas chercher à reconstruire des informations inutiles, l'observateur a donc pour vocation de reconstruire partiellement ou entièrement l'état du système, selon les exigences de l'utilisateur.

L'objet de ce chapitre, est d'étudier l'intérêt des observateurs de fonctionnelle linéaire (OFL) qui consiste à estimer directement la variable $v(t) = Lx(t)$ sans estimer préalablement entièrement le vecteur d'état $x(t)$, ($v(t)$ est le vecteur estimé). L'estimation de $v(t)$ peut conduire, souvent mais pas toujours, à un observateur de taille inférieure à un observateur de Cumming-Gopinath appelé également observateur réduit permettant de reconstruire, pour un modèle observable, l'état complet du système [18, 34]. Dans cet optique, nous utilisons un observateur de fonctionnelle linéaire destiné à être implémenté sur un calculateur embarqué, pour reconstruire une grandeur physique locale qui ne pourrait pas être directement mesurée en tout point. En effet, cet observateur permet de reconstruire cette grandeur entièrement à partir des mesures fournies par des capteurs thermiques placés en quelques points précis, ainsi de réduire la dimension du problème considéré. L'origine des développements qu'on va proposer remonte, dans leur principe, à l'article [28] où la construction d'un observateur d'état était basée sur la notion de dérivation.

Depuis les travaux précurseurs de Luenberger [56, 57], plusieurs travaux ont proposé des méthodes pour la conception d'observateurs réduits pour estimer des fonctionnelles linéaires. Dans les travaux réalisés par [19], une condition nécessaire et suffisante a été proposée. Quand cette condition d'existence est

assurée, la conception de l'observateur est basée sur l'utilisation des pseudo-inverses et sur une procédure de placement de pôles qui assure la condition de Hurwitz. Les travaux de [100] proposent des conditions d'existence d'un observateur du second ordre pour l'observation d'une fonctionnelle scalaire de l'état. Notre contribution va consister à concevoir une procédure permettant de construire un OFL lorsqu'il est impossible de concevoir un OFL minimum stable, nous allons incrémenter l'ordre jusqu'à ce qu'un OFL stable existe. Nous proposons donc une extension pour les cas où les conditions d'existence établies par [19] et [100] ne sont pas vérifiées pour un OFL minimum.

L'objectif de ce chapitre est de construire un observateur de fonctionnelle linéaire permettant de reconstruire des grandeurs physiques non accessibles à la mesure à partir des mesures fournies par des capteurs thermiques placés en quelques points précis. L'utilisation de cet observateur permet de réduire la dimension du problème considéré. Dans un premier temps, nous nous focaliserons tout d'abord sur la construction d'un observateur linéaire à partir des transferts identifiés expérimentalement. Ensuite, nous allons nous intéresser à la construction des observateurs de fonctionnelle linéaire à partir des modèles d'état, où il faut assurer une bonne convergence de l'observateur à partir des équations fondamentales. Puis, nous proposons une application directe de ce type d'observateur sur notre cas d'étude.

2.1 Système dynamique

Un système dynamique est un ensemble général de composants en interaction, répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés. Son état est affecté par une ou plusieurs variables comme les entrées du système. Le système complet ou un des éléments le composant établit une relation dynamique entre ses grandeurs d'entrée et ses grandeurs de sortie. Les entrées sont constituées de deux ensembles : d'une part les variables qui commandent et dont on a généralement l'entière maîtrise, d'autre part les entrées non maîtrisables qui agissent sur le système mais qui viennent en perturber le fonctionnement, ces derniers sont des perturbations, comme le montre la figure ci-dessous :

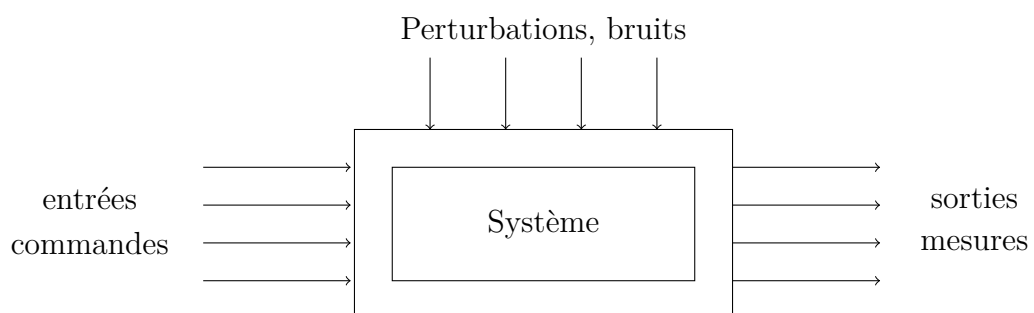


FIGURE 2.1.1 – Schéma général d'un système dynamique.

Un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps, soumis à des consignes ou sollicitations externes, interprétées comme

des informations à reproduire, il traduit la relation entre les entrées et les sorties. Cette relation constitue le modèle.

2.1.1 Représentation des systèmes

Autour d'un point de fonctionnement, les systèmes peuvent être représentés par des modèles linéaires, 3 types de représentation de ces modèles sont possibles :

- La matrice de transfert entrée-sortie : Notée $F(p)$, où p représente l'opérateur de dérivation ($p = \frac{d}{dt}$), est une caractéristique du système qui permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algébrique, la sortie $y(t)$ en fonction de l'entrée $u(t)$ est exprimée par :

$$y(t) = F(p)u(t), \quad (2.1)$$

La fonction de transfert a l'avantage d'être d'utilisation simple, mais cette simplicité est perdue dans le cas de matrice (multi-variable) de transfert. De plus, les conditions initiales ne sont pas facilement prises en compte.

- La forme différentielle entrée-sortie : Elle consiste à écrire l'ensemble des relations algébriques et différentielles qui relient les r variables d'entrées représentées par un vecteur noté $u(t)$, les m variables de sorties représentées par un vecteur noté $y(t)$. On obtient une relation liant les variables d'entrées et de sorties suivante :

$$L(p)y(t) = M(p)u(t), \quad (2.2)$$

- La forme d'état : L'approche que nous retiendrons dans cette thèse est la modélisation du système par équations d'état. Lors de la conception de méthode de commande, il est nécessaire d'utiliser soit la matrice de transfert entrée-sortie, soit la forme d'état. On considère donc le système dynamique de la figure 2.1.2 ayant pour entrées les composantes du vecteur $u(t) \in R^r$ et pour sorties les composantes du vecteur $y(t) \in R^m$.

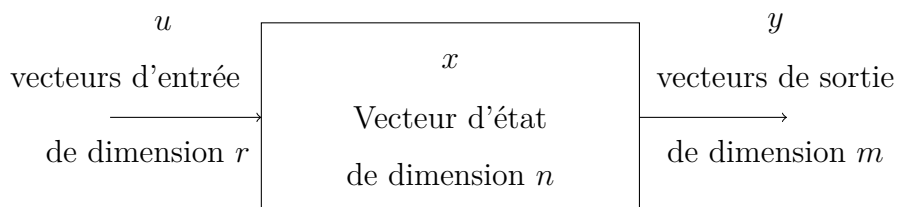


FIGURE 2.1.2 – Système dynamique

L'état d'un système est caractérisé par différentes variables dynamiques appelées variables d'état regroupées dans un unique vecteur appelé vecteur d'état.

Modéliser un système grâce à ses équations d'état consiste à construire un modèle ne faisant intervenir que des équations différentielles d'ordre 1.

2.1.2 Équation d'état

Une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non linéaire mais linéarisée autour d'un point de fonctionnement, continue ou discrète, permet de déterminer l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît l'état à l'instant initial, et le comportement des variables qui influent sur le système. Un système à temps continu linéaire à coefficients constants est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

où pour tout instant t , $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie du système. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, représentent les matrices constantes connues du système. Dans certains travaux, on peut trouver une injection de l'entrée directement dans l'équation de sortie par le terme additif $Du(t)$. Cependant, dans notre étude, nous considérons des systèmes passifs, donc ce terme est nul.

2.2 Fonctions de transfert

Dans le cadre de l'observation des grandeurs qui ne sont pas accessibles à la mesure d'un module complet d'électronique de puissance, les représentations d'états obtenues sont potentiellement de très grande dimension. Dans cette partie, nous intéressons à la construction d'observateurs de fonctionnelle linéaire à partir de transferts identifiés expérimentalement, ce qui permettrait de réduire l'ordre.

2.2.1 Détermination des différentes fonctions

Nous avons simulé le comportement thermique d'une plaque chauffante de surface $30 \times 30 \text{ mm}$, qui peut représenter une coupe horizontale du module d'électronique de puissance au niveau du substrat, comme le montre la figure 2.2.1, les équations d'évolution thermique du système peuvent être représentées à l'aide d'une représentation d'état de l'équation de la chaleur [8, 70].

où S est la source de puissance thermique injectée dans un endroit précis de la plaque, C_a un capteur thermique physique placé dans un endroit voulu dans la plaque, et O le point dont on cherche à estimer la température.

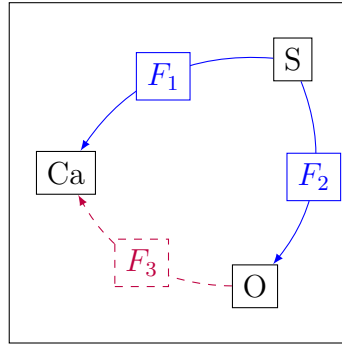


FIGURE 2.2.1 – Position des différents éléments.

Les fonctions $F_1(p)$, $F_2(p)$ et $F_3(p)$, où p représente l'opérateur de dérivation ($p = \frac{d}{dt}$), sont des transferts identifiés, ce qui permettra de réduire l'ordre du modèle, où :

$F_1(p)$ est le transfert défini de la source S vers le capteur Ca , exprimé par :

$$y(t) = F_1(p)u(t), \quad (2.4)$$

$F_2(p)$ le transfert défini de la source S vers le point qu'on cherche à estimer O , exprimé par :

$$v(t) = F_2(p)u(t), \quad (2.5)$$

et $F_3(p)$ le transfert défini du point qu'on cherche à estimer O vers le capteur Ca , exprimé par :

$$F_3(p) = F_1(p) \times F_2^{-1}(p), \quad (2.6)$$

Notre objectif est de construire un observateur de fonctionnelle linéaire à partir de ces transferts identifiés expérimentalement.

2.2.2 Principe général d'un observateur

Dans cette partie, nous allons exprimer le principe général d'un observateur, afin de définir un modèle linéaire par transfert.

On utilise un observateur de fonctionnelle linéaire [56], décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

où $z(t)$ est un vecteur de taille q et $\hat{v}(t)$ un vecteur de taille l . Les matrices F, G, H, P, V et l'ordre q sont déterminés afin que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t) - \hat{v}(t)) = 0$. Où, F est une matrice de Hurwitz, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont toutes à partie réelle strictement négative.

À partir des transferts identifiés dans la figure 2.2.1, nous proposons un observateur de la forme (2.8), exprimé par la figure 2.2.2 :

$$\hat{v}(t) = F_2(p)u(t) + K(p)(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (2.8)$$

où, $y(t), v(t)$ sont exprimés par les formules (2.4) et (2.5).

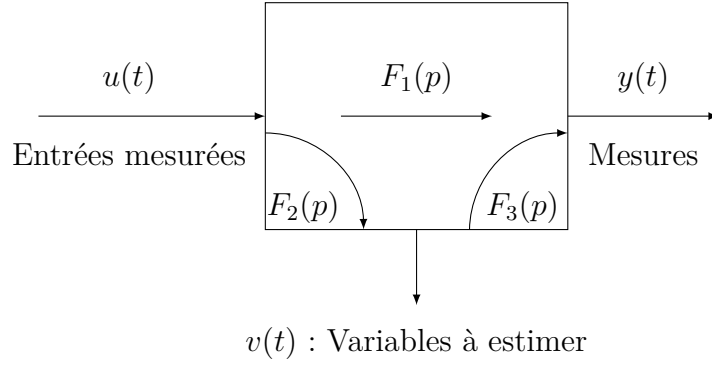


FIGURE 2.2.2 – Principe général d'un observateur.

Le terme correctif $K(p)(y(t) - \hat{y}(t))$ fait apparaître le transfert de correction $K(p)$, relatif à l'erreur de la reconstruction de la sortie.

Puisque : $y(t) = F_3(p)v(t)$, on peut proposer le modèle prédictif : $\hat{y}(t) = F_3(p)\hat{v}(t)$.

Soit :

$$\hat{v}(t) = F_2(p)u(t) + K(p)(y(t) - F_3(p)\hat{v}(t)), \quad (2.9)$$

En assemblant les mêmes termes, nous avons :

$$(1 + K(p)F_3(p)) \hat{v}(t) = F_2(p)u(t) + K(p)y(t), \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est un modèle linéaire par transfert.

Pour réaliser l'observateur linéaire, nous devons déterminer le transfert de correction $K(p)$, à partir des contraintes suivantes. Il faut que :

- le système (2.10) soit asymptotiquement stable.
- le transfert soit réalisable.

2.3 Modèle par transfert

Étant donné le transfert (2.10), où supposons que, $K(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$, $F_3(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ et $F_2(p) = \frac{C(p)}{E(p)}$, donc,

$$\begin{aligned} (1 + K(p)F_3(p)) \hat{v}(t) &= F_2(p)u(t) + K(p)y(t), \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{R(p)}{S(p)} \frac{B(p)}{A(p)}\right) \hat{v}(t) &= \frac{C(p)}{E(p)}u(t) + \frac{R(p)}{S(p)}y(t), \\ \Rightarrow \frac{E(p)S(p)A(p) + E(p)R(p)B(p)}{E(p)S(p)A(p)} \hat{v}(t) &= \frac{C(p)S(p)A(p)}{E(p)S(p)A(p)}u(t) + \frac{R(p)E(p)A(p)}{E(p)S(p)A(p)}y(t), \\ \Rightarrow E(p)(S(p)A(p) + R(p)B(p)) \hat{v}(t) &= C(p)S(p)A(p)u(t) + R(p)E(p)A(p)y(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour déterminer le transfert $K(p)$, nous devons résoudre l'équation de Bezout [21] exprimée par :

$$S(p)A(p) + R(p)B(p) = D(p), \quad (2.12)$$

où, $D(p)$ est un polynôme à stabilité arbitraire, à résoudre par rapport aux coefficients des polynômes $R(p)$ et $S(p)$ de l'équation (2.12).

$$R(p) = r_0 + r_1p + r_2p^2 + \dots + r_np^n \text{ et } S(p) = s_0 + s_1p + s_2p^2 + \dots + s_np^n,$$

2.3.1 Analyse de l'erreur de poursuite

Le système dynamique constituant l'observateur doit assurer que l'erreur de poursuite, définie par $e(t) = v(t) - \hat{v}(t)$, tende asymptotiquement vers 0. Soit :

$$\begin{aligned} e(t) &= v(t) - \hat{v}(t), \\ &= F_2(p)u(t) - (1 + K(p)F_3(p))^{-1} (F_2(p)u(t) + K(p)y(t)), \\ &= (1 + K(p)F_3(p))^{-1} [(1 + K(p)F_3(p)) F_2(p)u(t) - F_2(p)u(t) - K(p)F_1(p)u(t)], \\ &= [1 + K(p)F_1(p)F_2^{-1}(p)]^{-1} [F_2(p) + K(p)F_1(p) - F_2(p) - K(p)F_1(p)] u(t), \end{aligned}$$

Soit :

$$[1 + K(p)F_3(p)] e(t) = 0,$$

Pour que $e(t)$ tende vers 0, il faut que : $(1 + K(p)F_1(p)F_2^{-1}(p))^{-1}$ soit asymptotiquement stable.

De plus,

$$\begin{cases} [1 + K(p)F_1(p)F_2^{-1}(p)]^{-1} F_2(p) = \frac{A(p)S(p)}{D(p)} F_2(p), \\ [1 + K(p)F_1(p)F_2^{-1}(p)]^{-1} K(p) = \frac{A(p)R(p)}{D(p)}, \end{cases} \quad (2.13)$$

doivent être causaux.

2.3.2 Résolution de l'équation de Bezout

La résolution de l'équation de Bezout consiste à développer le système linéaire résultant de l'identité des facteurs des puissances de p de chaque membre de (2.12). On écrit les égalités des termes en p^n , puis en p^{n-1} , et ainsi de suite jusqu'à p^0 . Il en résulte un système à résoudre par rapport au vecteur des coefficients s_i et r_i .

Soit l'exemple à résoudre :

$$(a_0 + a_1p + a_2p^2)(s_1p + s_2p^2) + (b_0 + b_1p + b_2p^2)(r_0 + r_1p + r_2p^2) = (d_0 + d_1p + d_2p^2 + d_3p^3 + d_4p^4),$$

On est conduit à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

Pour obtenir, un système carré, il faut que les degrés des polynômes s'y prête. L'unicité est assurée en minimisant le degré de $R(p)$ [21]. On a alors, $n_r = n_a - 1$ et $n_s = n_b - 1$.

Une fois l'équation de Bezout résolue, on peut déterminer le transfert $K(p)$. Pour un objectif final de construire un observateur linéaire, nous utilisons l'algorithme de Hörner appliqué sur le transfert (2.11).

2.3.3 Méthode de Hörner

Soit le modèle identifié défini par (2.11),

$$(2.11) \Rightarrow \hat{v}(t) = \frac{C(p)S(p)A(p)}{E(p)(S(p)A(p) + R(p)B(p))}u(t) + \frac{R(p)E(p)A(p)}{E(p)(S(p)A(p) + R(p)B(p))}y(t),$$

$$\hat{v}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} e_i p^i}{\sum_{i=0}^m g_i p^i}u(t) + \frac{\sum_{i=0}^{n_2} f_i p^i}{\sum_{i=0}^m g_i p^i}y(t),$$

Le degré du dénominateur est nécessairement supérieur au degré du numérateur pour que l'observateur soit réalisable, donc $m \geq n_1, m \geq n_2$.

$$\hat{v}(t) = \frac{e_0 + e_1 p + \dots + e_{n_1-1} p^{n_1-1} + e_{n_1} p^{n_1}}{g_0 + g_1 p + \dots + g_{m-1} p^{m-1} + g_m p^m}u(t) + \frac{f_0 + f_1 p + \dots + f_{n_2-1} p^{n_2-1} + f_{n_2} p^{n_2}}{g_0 + g_1 p + \dots + g_{m-1} p^{m-1} + g_m p^m}y(t),$$

Pour écrire plus simplement l'algorithme de Hörner [12], il faut que $m = n_1 = n_2$. Nous devons ajouter au numérateurs des termes en $e_{n_1+1} p^{n_1+1}$, puis $e_{n_1+2} p^{n_1+2}$ et ainsi de suite jusqu'à $e_m p^m$, avec $e_{n_1+1} = e_{n_1+2} = \dots = e_m = 0$ pour le premier numérateur, et la même chose pour le deuxième numérateur. Nous devons ajouter des termes en $f_{n_2+1} p^{n_2+1}$, puis $f_{n_2+2} p^{n_2+2}$ et ainsi de suite jusqu'à $f_m p^m$, avec : $f_{n_2+1} = f_{n_2+2} = \dots = f_m = 0$.

Alors :

$$\hat{v}(t) = \frac{\frac{e_0}{g_m p^m} + \frac{e_1}{g_m p^{m-1}} + \dots + \frac{e_{n_1}}{g_m p^{n_1}} + \dots + \frac{e_m}{g_m}}{\frac{g_0}{g_m p^m} + \frac{g_1}{g_m p^{m-1}} + \dots + \frac{g_{m-1}}{g_m p} + 1}u(t) + \frac{\frac{f_0}{g_m p^m} + \frac{f_1}{g_m p^{m-1}} + \dots + \frac{f_{n_2}}{g_m p^{n_2}} + \dots + \frac{f_m}{g_m}}{\frac{g_0}{g_m p^m} + \frac{g_1}{g_m p^{m-1}} + \dots + \frac{g_{m-1}}{g_m p} + 1}y(t).$$

$$\left(1 + \frac{g_{m-1}}{g_m p} + \dots + \frac{g_1}{g_m p^{m-1}} + \frac{g_0}{g_m p^m}\right) \hat{v}(t) = \left(\frac{e_m}{g_m} + \frac{e_{m-1}}{g_m p} + \dots + \frac{e_1}{g_m p^{m-1}} + \frac{e_0}{g_m p^m}\right) u(t)$$

$$+ \left(\frac{f_m}{g_m} + \frac{f_{m-1}}{g_m p} + \dots + \frac{f_1}{g_m p^{m-1}} + \frac{f_0}{g_m p^m}\right) y(t),$$

$$\hat{v}(t) = \left(\frac{e_m}{g_m} + \frac{e_{m-1}}{g_m p} + \dots + \frac{e_1}{g_m p^{m-1}} + \frac{e_0}{g_m p^m}\right) u(t) + \left(\frac{f_m}{g_m} + \frac{f_{m-1}}{g_m p} + \dots + \frac{f_1}{g_m p^{m-1}} + \frac{f_0}{g_m p^m}\right) y(t)$$

$$- \left(\frac{g_{m-1}}{g_m p} + \frac{g_{m-2}}{g_m p^2} + \dots + \frac{g_1}{g_m p^{m-1}} + \frac{g_0}{g_m p^m}\right) \hat{v}(t),$$

$$\hat{v}(t) = \frac{e_m}{g_m}u(t) + \frac{f_m}{g_m}y(t) + \frac{1}{p}\left(\frac{e_{m-1}}{g_m}u(t) + \frac{f_{m-1}}{g_m}y(t) - \frac{g_{m-1}}{g_m}\hat{v}(t) + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{e_1}{g_m}u(t) + \frac{f_1}{g_m}y(t) - \frac{g_1}{g_m}\hat{v}(t) + \frac{1}{p}\left(\frac{e_0}{g_m}u(t) + \frac{f_0}{g_m}y(t) - \frac{g_0}{g_m}\hat{v}(t)\right)\dots\right)\right).$$

L'objectif de l'algorithme de Hörner est de minimiser le nombre d'opérations, les calculs étant organisés de façon récursive suivant :

$$\hat{v}(t) = \frac{e_m}{g_m}u(t) + \frac{f_m}{g_m}y(t) + z_1(t), \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = \frac{e_{m-1}}{g_m}u(t) + \frac{f_{m-1}}{g_m}y(t) - \frac{g_{m-1}}{g_m}\hat{v}(t) + z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = \frac{e_{m-2}}{g_m}u(t) + \frac{f_{m-2}}{g_m}y(t) - \frac{g_{m-2}}{g_m}\hat{v}(t) + z_3(t), \\ \vdots \\ \dot{z}_{m-1}(t) = \frac{e_1}{g_m}u(t) + \frac{f_1}{g_m}y(t) - \frac{g_1}{g_m}\hat{v}(t) + z_m(t), \\ \dot{z}_m(t) = \frac{e_0}{g_m}u(t) + \frac{f_0}{g_m}y(t) - \frac{g_0}{g_m}\hat{v}(t), \end{array} \right. \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.15) dans (2.16), nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = \left(\frac{e_{m-1}}{g_m} - \frac{g_{m-1}e_m}{g_m g_m} \right) u(t) + \left(\frac{f_{m-1}}{g_m} - \frac{g_{m-1}f_m}{g_m g_m} \right) y(t) - \frac{g_{m-1}}{g_m}z_1(t) + z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = \left(\frac{e_{m-2}}{g_m} - \frac{g_{m-2}e_m}{g_m g_m} \right) u(t) + \left(\frac{f_{m-2}}{g_m} - \frac{g_{m-2}f_m}{g_m g_m} \right) y(t) - \frac{g_{m-2}}{g_m}z_1(t) + z_3(t), \\ \vdots \\ \dot{z}_{m-1}(t) = \left(\frac{e_1}{g_m} - \frac{g_1e_m}{g_m g_m} \right) u(t) + \left(\frac{f_1}{g_m} - \frac{g_1f_m}{g_m g_m} \right) y(t) - \frac{g_1}{g_m}z_1(t) + z_m(t), \\ \dot{z}_m(t) = \left(\frac{e_0}{g_m} - \frac{g_0e_m}{g_m g_m} \right) u(t) + \left(\frac{f_0}{g_m} - \frac{g_0f_m}{g_m g_m} \right) y(t) - \frac{g_0}{g_m}z_1(t). \end{array} \right. \quad (2.17)$$

De (2.15) et (2.17) on obtient l'observateur de Luenberger exprimé par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t), \end{cases}$$

2.3.4 Exemple d'application

Pour vérifier la justesse des résultats de simulation de la réalisation de l'observateur, on va essayer de l'appliquer sur un modèle de transfert simple, puis sur la plaque chauffante de notre système.

Supposons que, $F_1(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $F_2(p) = \frac{1}{p+2} = \frac{C(p)}{E(p)}$, donc,

$$F_3(p) = F_1(p)F_2^{-1}(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Commençons par le transfert (2.10), nous devons trouver le transfert identifié par $K(p)$ suivant la procédure exprimée en 2.3.2 (Résolution de l'équation de Bezout), tel que : $n_r = n_a - 1 = 1$, et $n_s = n_a + n_b - 1 = 2$.

$$\begin{cases} R(p) = r_1p + r_0 \\ S(p) = s_2p^2 + s_1p + s_0 \\ A(p) = (p+1)^2 \\ \quad = a_2p^2 + a_1p + a_0 \\ B(p) = p+2 \\ \quad = b_1p + b_0 \end{cases}$$

$$S(p)A(p) + R(p)B(p) = (s_0a_0 + r_0b_0) + (s_0a_1 + s_1a_0 + r_0b_1 + r_1b_0)p + (s_0a_2 + s_1a_1 + s_2a_0 + r_1a_1 + s_2a_1)p^2 + (s_1a_2 + s_2a_1)p^3 + s_2a_2p^4$$

Supposons que : $D(p) = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 = d_4p^4 + d_3p^3 + d_2p^2 + d_1p + d_0$, nous trouvons,

$$S(p)A(p) + R(p)B(p) = D(p) \Rightarrow s_2a_2p^4 + (s_1a_2 + s_2a_1)p^3 + (s_0a_2 + s_1a_1 + s_2a_0 + r_1b_1)p^2 + (s_0a_1 + s_1a_0 + r_0b_1 + r_1b_0)p + (s_0a_0 + r_0b_0) = d_4p^4 + d_3p^3 + d_2p^2 + d_1p + d_0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

Nous arrivons à définir $K(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = \frac{-6.661 \times 10^{-16}p + 4.441 \times 10^{-16}}{p^2 + 2p + 1}$.
Passons à l'algorithme de Hörner, nous trouvons :

$$(2.11) \Rightarrow \hat{v}(t) = \frac{C(p)S(p)A(p)}{E(p)(S(p)A(p) + R(p)B(p))}u(t) + \frac{R(p)E(p)A(p)}{E(p)(S(p)A(p) + R(p)B(p))}y(t)$$

$$\hat{v}(t) = \frac{\sum_{i=0}^4 e_i p^i}{\sum_{i=0}^5 g_i p^i}u(t) + \frac{\sum_{i=0}^4 f_i p^i}{\sum_{i=0}^5 g_i p^i}y(t)$$

Nous devons ajouter un degré au numérateurs pour que l'algorithme de Hörner soit réalisable. Alors :

$$\hat{v}(t) = \frac{\frac{e_0}{g_5 p^5} + \frac{e_1}{g_5 p^4} + \dots + \frac{e_4}{g_5 p} + \frac{e_5}{g_5}}{\frac{g_0}{g_5 p^5} + \frac{g_1}{g_5 p^4} + \dots + \frac{g_4}{g_5 p} + 1}u(t) + \frac{\frac{f_0}{g_5 p^5} + \frac{f_1}{g_5 p^4} + \dots + \frac{f_4}{g_5 p} + \frac{f_5}{g_5}}{\frac{g_0}{g_5 p^5} + \frac{g_1}{g_5 p^4} + \dots + \frac{g_4}{g_5 p} + 1}y(t)$$

tel que, $e_5 = f_5 = 0$ et $g_5 = 1$, donc,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{g_4}{p} + \dots + \frac{g_1}{p^4} + \frac{g_0}{p^5}\right) \hat{v}(t) &= \left(e_5 + \frac{e_4}{p} + \dots + \frac{e_1}{p^4} + \frac{e_0}{p^5}\right) u(t) \\ &\quad + \left(f_5 + \frac{f_4}{p} + \dots + \frac{f_1}{p^4} + \frac{f_0}{p^5}\right) y(t) \\ \hat{v}(t) &= \left(e_5 + \frac{e_4}{p} + \dots + \frac{e_1}{p^4} + \frac{e_0}{p^5}\right) u(t) + \left(f_5 + \frac{f_4}{p} + \dots + \frac{f_1}{p^4} + \frac{f_0}{p^5}\right) y(t) \\ &\quad - \left(\frac{g_4}{p} + \frac{g_3}{p^2} + \dots + \frac{g_1}{p^4} + \frac{g_0}{p^5}\right) \hat{v}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= e_5 u(t) + f_5 y(t) + \frac{1}{p}(e_4 u(t) + f_4 y(t) - g_4 \hat{v}(t) + \\ &\dots + \frac{1}{p}(e_1 u(t) + f_1 y(t) - g_1 \hat{v}(t) + \frac{1}{p}(e_0 u(t) + f_0 y(t) - g_0 \hat{v}(t)) \dots) \\ &\Rightarrow \hat{v}(t) = e_5 u(t) + f_5 y(t) + z_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = (e_4 - g_4 e_5) u(t) + (f_4 - g_4 f_5) y(t) - g_4 z_1(t) + z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = (e_3 - g_3 e_5) u(t) + (f_3 - g_3 f_5) y(t) - g_3 z_1(t) + z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = (e_2 - g_2 e_5) u(t) + (f_2 - g_2 f_5) y(t) - g_2 z_1(t) + z_4(t) \\ \dot{z}_4(t) = (e_1 - g_1 e_5) u(t) + (f_1 - g_1 f_5) y(t) - g_1 z_1(t) + z_5(t) \\ \dot{z}_5(t) = (e_0 - g_0 e_5) u(t) + (f_0 - g_0 f_5) y(t) - g_0 z_1(t) \end{cases}$$

L'observateur linéaire est exprimé par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t), \end{cases}$$

tel que :

$$F = \begin{pmatrix} -g_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} e_4 - g_4 e_5 \\ e_3 - g_3 e_5 \\ e_2 - g_2 e_5 \\ e_1 - g_1 e_5 \\ e_0 - g_0 e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$H = \begin{pmatrix} f_4 - g_4 f_5 \\ f_3 - g_3 f_5 \\ f_2 - g_2 f_5 \\ f_1 - g_1 f_5 \\ f_0 - g_0 f_5 \end{pmatrix} = 10^{-16} \times \begin{pmatrix} -6.66 \\ -22.20 \\ -15.54 \\ 8.88 \\ 8.88 \end{pmatrix}, P = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), V = \frac{f_5}{g_5} = 0.$$

Les valeurs propres de F sont : $\{-2, -1, -1, -1, -1\}$. La conception de cet observateur est terminée.

Résultat de simulation

La figure 2.3.1, montre le résultat de simulation de l'observateur conçu, et le système initial exprimé par le transfert $F_2(p)$.

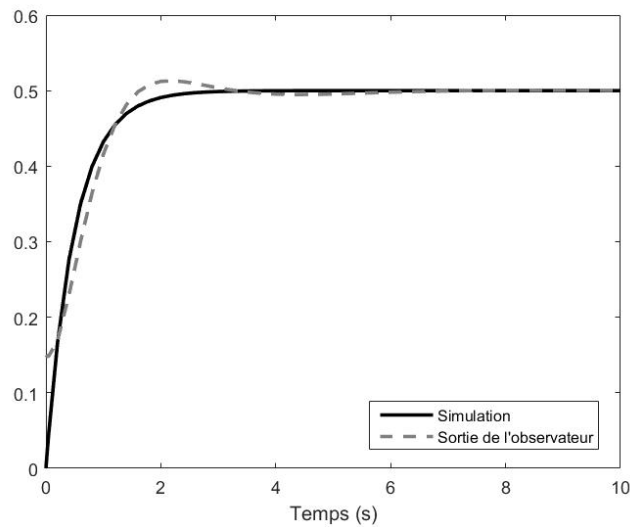


FIGURE 2.3.1 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur, avec conditions initiales non nulles.

Nous remarquons que la fonction estimée converge asymptotiquement vers sa vraie valeur. De plus, l'observateur est conçu avec une vitesse de convergence asymptotique arbitraire due aux valeurs propres de F . Pour la clarté de l'exemple, nous avons choisi des transferts identifiés simples pour vérifier la convergence asymptotique de l'observateur.

2.4 Exemple appliqué sur la plaque chauffante

Nous effectuons dans cette partie une modélisation du système où nous simulons le comportement thermique d'une plaque chauffante, traduite par des transferts identifiés expérimentalement par les positions du capteur Ca et du point qu'on cherche à observer O , comme le montre la figure 2.4.1, à travers des méthodes d'identification, toujours dans le but de construire un observateur linéaire d'ordre réduit.

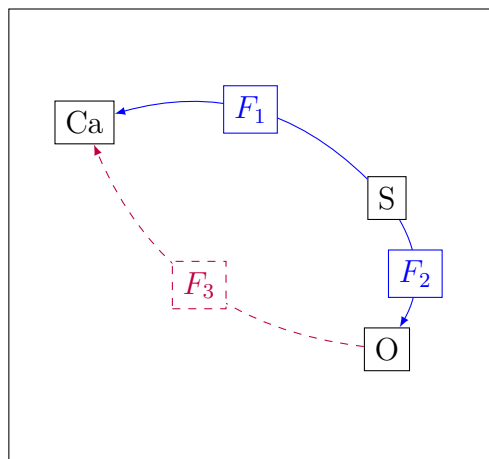


FIGURE 2.4.1 – Position des différents éléments.

L'évolution de la température du capteur et du point qu'on cherche à estimer est présentée par les figures 2.4.2 et 2.4.3, sous forme des réponses indicelles.

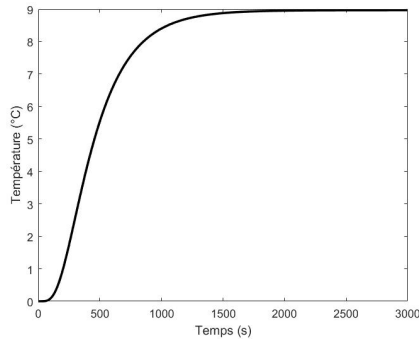


FIGURE 2.4.2 – Réponse indicelle de la température en Ca

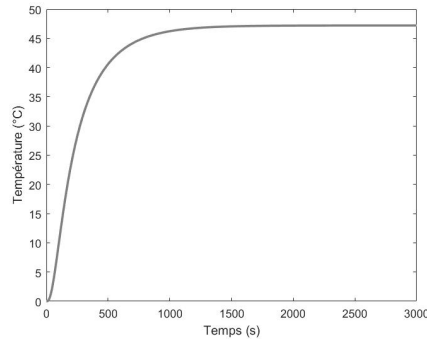


FIGURE 2.4.3 – Réponse indicelle de la température en O

On remarque que ces réponses indicelles n'ont pas de dépassement, ce qui va conduire à utiliser des méthodes d'identification élémentaires de modèles de type Hudzovic [45].

2.4.1 Méthodes d'identification

L'identification de modèles vise à remplacer le modèle initial complexe par un modèle simplifié dont le comportement est toujours représentatif de celui du système initial, l'identification de modèle, a pour but de trouver un modèle dont le vecteur d'état est plus petit que celui du modèle de grande dimension.

L'objectif de ce paragraphe, est de définir les différentes techniques permettant l'identification paramétrique de modèles simples, depuis les modèles du premier ordre jusqu'aux modèles de Strejc [91, 92] ou de Hudzovic [45]. Ces identifications sont menées à partir de l'une des deux expériences fondamentales qui sont : Le relevé de la réponse indicelle et celui de la réponse fréquentielle.

Le choix entre ces deux techniques est souvent guidé par des considérations pratiques sur le système. Après une étude et des simulations avec les deux modèles, notre choix s'est orienté vers le modèle de Hudzovic qui donne des meilleurs résultats par rapport au modèle de Strejc [91, 92].

2.4.2 Modèle de Hudzovic

Un modèle de Hudzovic [45] a pour transfert :

$$F(p) = \frac{e^{-T_{RP}}}{\prod_{k=0}^{n-1} (1 + \tau_k p)}, \quad (2.19)$$

où les constantes suivent la progression : $k = 0$ à $n - 1$,

$$\tau_k = \frac{\tau}{1 - k \frac{\rho}{n-1}}, \quad (2.20)$$

les paramètres n, τ, ρ et T_R des modèles (2.19) peuvent être obtenus, à partir d'une réponse indicielle apériodique, le principe consistant à tracer la tangente au point d'inflexion pour relever les grandeurs t_0, δ et δT_a .

La méthode repose sur l'utilisation des trois abaques obtenus par P. Hudzovic, où la procédure de l'identification se déroule de la façon suivante [76] :

- À l'aide de l'abaque 1, $\rho^2 = f(\delta, n)$, on sélectionne des couples candidats (n, ρ^2) , donc des valeurs possibles de (n, ρ) .
- Pour chaque couple (n, ρ^2) , l'abaque 2, $\rho^2 = f(\delta, n)$ permet d'obtenir des valeurs candidates de T_u , sachant que : $T_u(n) < T_t$ (cela permet d'écartier des ordres trop grands).
- Pour chaque couple (n, ρ) , l'abaque 3, $\rho^2 = f(\frac{\tau}{T_a}, n)$ fournit alors des valeurs candidates de τ .
- Pour chaque valeur de n , on calcule le temps de retard, $T_r(n) = T_t - T_u(n)$.

Lorsque plusieurs modèles sont envisageables, on choisit l'ordre n qui conduit au retard le plus faible. On appliquant la procédure expliquée ci-dessus sur notre modèle, on peut conclure que, en ce qui concerne la plaque chauffante :

$$F_1(p) = \frac{0.89}{3.77 \times 10^4 p^2 + 388.5p + 1} e^{-93.3p} \quad (2.21)$$

$$F_2(p) = \frac{4.72}{249p + 1} e^{-19p} \quad (2.22)$$

Une fois $F_1(p), F_2(p)$ définis, $F_3(p) = F_1(p)F_2^{-1}(p)$

$$F_3(p) = \frac{223.3p + 0.89}{1.78 \times 10^5 p^2 + 1834p + 4.72} e^{-74.3p} \quad (2.23)$$

Pour éliminer le retard présenté dans le modèle de Hudzovic, et qui peut influencer sur les résultats qu'on va produire, on utilise une approximation qui aide à remplacer ce retard par une fraction rationnelle, c'est l'approximation de Padé.

2.4.3 Approximation de Padé

Soit le retard du modèle de Hudzovic, présenté par : $e^{-T_{RP}}$, on appliquant l'approximation de Padé [11], on trouve :

$$e^{-T_{RP}} = \frac{1 - \frac{T_{RP}}{2}}{1 + \frac{T_{RP}}{2}}, \quad (2.24)$$

Donc, les fonctions de transfert $F_1(p), F_2(p), F_3(p)$, exprimées en éliminant le retard sont :

$$F_1(p) = \frac{-0.89p + 0.019}{3.77 \times 10^4 p^3 + 1197p^2 + 9.32p + 0.021}, \quad (2.25)$$

$$F_2(p) = \frac{-4.72p + 0.49}{249p^2 + 27.21p + 0.10}, \quad (2.26)$$

$$F_3(p) = \frac{-223.3p^2 + 5.11p + 0.024}{1.78 \times 10^5 p^3 + 6628p^2 + 54.09p + 0.127}, \quad (2.27)$$

2.4.4 Construction de l'observateur

Une fois les transferts sont identifiés, nous commençons la procédure de construction de l'observateur.

Résolution de l'équation de Bezout

Nous devons trouver le transfert identifié par $K(p)$, à partir des transferts (2.26), (2.27).

$$n_r = n_a - 1 = 2, \quad n_s = n_a + n_b - 1 = 4.$$

$$S(p)A(p) + R(p)B(p) = D(p) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{pmatrix}$$

Nous arrivons à définir :

$$K(p) = \frac{-3,25 \times 10^{-9} p^2 + 5,82 \times 10^{-11} p + 2,27 \times 10^{-13}}{p^4 + 0,10 p^3 + 0,0043 p^2 + 7,80 \times 10^{-5} p + 5,25 \times 10^{-7}}$$

Modèle de Hörner

Passons à l'algorithme de Hörner, nous trouvons l'observateur linéaire exprimé par :

$$F = \begin{pmatrix} -0.20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.68 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.36 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.52 \times 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4.44 \times 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.41 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.20 \times 10^{-13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.58 \times 10^{-16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -8.40 \times 10^5 \\ 1.19 \times 10^4 \\ 6.11 \times 10^3 \\ 2.22 \times 10^2 \\ -0,31 \\ -0,14 \\ -2.62 \times 10^{-3} \\ -1,62 \times 10^{-5} \\ -3,31 \times 10^{-8} \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,14 \\ -0,010 \\ 4.86 \times 10^{-4} \\ 1,76 \times 10^{-6} \\ -8,06 \times 10^{-8} \\ -7,85 \times 10^{-10} \\ -2,63 \times 10^{-12} \\ -3,04 \times 10^{-15} \end{pmatrix}, P = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), V = 0.$$

Résultat de simulation

La figure (2.4.4), montre le résultat de simulation de l'observateur conçu, et le système initial exprimé par le transfert $F_2(p)$.

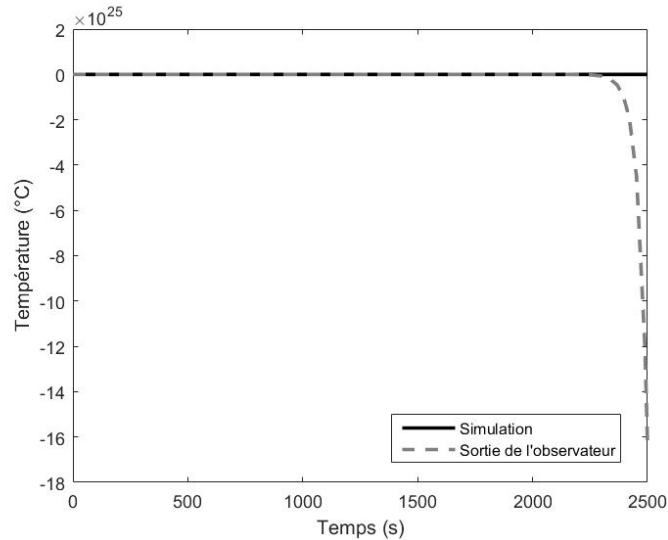


FIGURE 2.4.4 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur, avec conditions initiales nulles.

Nous avons choisi de construire un observateur linéaire à partir des transferts identifiés simples pour vérifier la convergence asymptotique entre la température simulée, et celle estimée, ce qui permet de réduire l'ordre du système

initial. Par contre, nous constatons que cette procédure ne marche pas sur le cas de notre étude, et y a une divergence entre la température simulée et estimée. Alors que cette méthode pratique fonctionne comme l'a montré l'exemple simple traité précédemment, quelques éléments de principe sont à souligner pour expliquer la faible performance obtenue dans notre cas pratique :

- la présence de retards purs dans les modèles identifiés conduit à des zéros instables.
- il n'est pas normal de trouver des pôles distincts entre $F_1(p)$ et $F_2(p)$. On devrait donc forcer des valeurs sur les modèles identifiés.

Les travaux futurs seront menés pour contourner ces inconvénients. C'est la raison pour laquelle nous orientons nos travaux sur l'observation à partir de la matrice d'état.

2.5 Estimation des variables non mesurées

2.5.1 Principe de l'observateur

Comme dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrées et de sorties, il est nécessaire, à partir de ces informations, de reconstruire l'état du modèle choisi. Un constructeur d'état ou estimateur est un système ayant comme entrées les entrées et les sorties du processus réel et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus, comme le montre la figure 2.5.1.

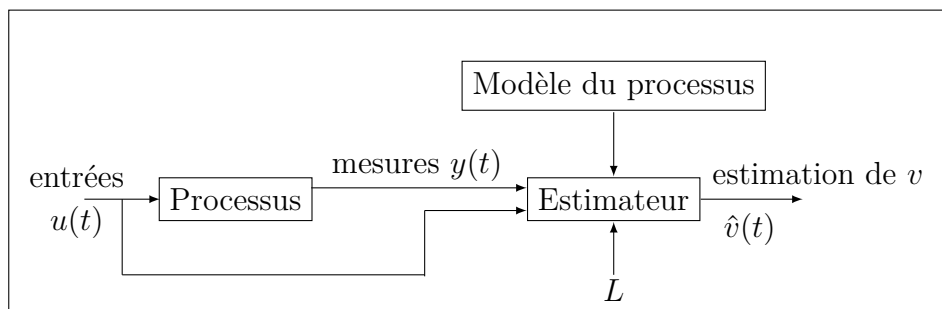


FIGURE 2.5.1 – Principe d'un estimateur.

Sous l'hypothèse de linéarité du modèle du processus, la structure de base de l'estimateur est toujours la même. Dans le cas où ce modèle est un modèle déterministe, le reconstituteur d'état sera appelé observateur, dans le cas de système bruités, on parle alors de filtre de Kalman [75].

2.5.2 Objectif d'un observateur

Comme l'état n'est en général pas accessible, la complexité de la réalisabilité technique ainsi que des coûts pour l'implantation de plusieurs capteurs peuvent réduire considérablement le nombre d'états mesurés. On peut alors considérer que la dimension du vecteur d'état est supérieure à celle du vecteur de sortie

($n > m$). Cette considération signifie que pour tout instant t , le vecteur $x(t)$ ne peut pas être complètement mesuré. Cependant, l'état peut être reconstruit à l'aide d'un observateur qui consiste à estimer cet état. Cette estimation est réalisée par un système dynamique dont la sortie sera précisément $\hat{v}(t)$ et l'entrée sera constituée de l'ensemble des informations disponibles, c'est-à-dire $u(t)$ et $y(t)$ réalisées par les différents capteurs. Ainsi, un dimensionnement de l'observateur doit permettre une estimation précise et rapide de la valeur des composantes du vecteur d'état $x(t)$.

Soit, de façon plus générale, le système dynamique défini par (2.3), dont l'état $x(t)$ est estimé (ou reconstruit) par un système dynamique appelé observateur. Certaines méthodes de commande ne nécessitent pas forcément de reconstruire toutes les variables du système, il est alors préférable, afin d'obtenir un système d'ordre le plus petit possible, de ne pas chercher à reconstruire des informations inutiles donc seule une partie de l'état doit être estimée afin de satisfaire aux besoins. Dans cette partie nous développerons donc cette approche particulière des observateurs, nous présenterons l'observateur de fonctionnelles linéaires pour reconstruire la température dans des points précis non accessibles à la mesure.

2.5.3 Observateur de fonctionnelle linéaire

Nous nous intéressons à l'observation de fonctionnelles linéaires pour reconstruire la température locale d'une plaque chauffante qui ne pourrait pas être mesurée sans estimer préalablement entièrement le vecteur d'état $x(t)$.

Depuis les travaux précurseurs de Luenberger [56, 57] plusieurs travaux ont proposé des méthodes pour la conception d'observateurs réduits pour estimer des fonctionnelles linéaires [3, 19, 67, 89, 100, 70, 71, 74], mais ces travaux montrent un ordre d'observateur élevé du système par rapport au observateurs de fonctionnelle linéaire.

L'objectif est donc de chercher à estimer au moins asymptotiquement, à partir des informations mesurées sur le système, à savoir les entrées $u(t)$ et les mesures $y(t)$ réalisées par les différents capteurs, un vecteur de la forme :

$$v(t) = Lx(t), \quad (2.28)$$

où L est une matrice de taille ($l \times n$) fixée par l'utilisateur. Pour obtenir $v(t)$ on utilise un observateur de fonctionnelle linéaire ou observateur de Luenberger [56], décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t), \end{cases} \quad (2.29)$$

où $z(t)$ est un vecteur de taille q et $\hat{v}(t)$ un vecteur de taille l , qui estime asymptotiquement $v(t) = Lx(t)$, les matrices F, G, H, P, V et l'ordre q sont déterminés afin que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t) - \hat{v}(t)) = 0$

Pour que l'observateur soit utilisable, il est nécessaire que cette erreur tende vers 0 quand t tend vers l'infini. Lorsque cette propriété est satisfaite, l'observateur est dit asymptotique, mais il est évident que c'est une propriété nécessaire

au fonctionnement correct d'un observateur, et si q est minimal, nous obtenons un OFL minimal.

D'après [56] et [57], un OFL existe si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$F \text{ est une matrice de Hurwitz} \quad (2.30)$$

$$TA - FT = HC \quad (2.31)$$

$$L = PT + VC \quad (2.32)$$

$$G = TB \quad (2.33)$$

F est une matrice de Hurwitz, c'est à dire que ses valeurs propres sont toutes à partie réelle strictement négative, et T est une matrice constante telle que, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (z(t) - Tx(t)) = 0$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) \\ &= Fz(t) + Gu(t) + Hy(t) - TAx(t) - TBu(t) \\ &= F\varepsilon(t) + (G - TB)u(t) + (FT - TA + HC)x(t) \end{aligned}$$

Maintenant, en introduisant l'erreur de reconstruction $e(t) = v(t) - \hat{v}(t)$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} e(t) &= Lx(t) - Pz(t) - Vy(t) \\ &= (L - PT - VC)x(t) - P\varepsilon(t) \end{aligned}$$

Si $L = PT + VC$, les conditions qui conduisent à $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$ qui assurent également $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$, donc une reconstruction asymptotique de la fonctionnelle linéaire $v(t)$.

Afin de concevoir un observateur rapide et implémentable sur un calculateur embarqué, nous devons rechercher l'ordre minimum d'un observateur de fonctionnelle linéaire, donc il existe de nombreuses méthodes qui permettent, dans certains cas particuliers, de résoudre le problème de la conception d'un observateur d'ordre minimal q où la matrice F possède des valeurs propres fixées a priori [68, 101]. Cependant, le problème de la conception d'un observateur asymptotique de taille la plus petite possible n'a pas encore de solution complète [80].

2.5.4 Conception d'un observateur de Luenberger

L'une des caractéristiques majeures de la technique de conception que nous allons présenter réside dans la résolution d'un système linéaire. Définissons q comme le plus petit entier tel que,

$$\text{rang } \Sigma_q = \text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ LA^q \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

où :

$$\Sigma_q = \begin{pmatrix} C \\ L \\ CA \\ LA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \\ LA^{q-1} \\ CA^q \end{pmatrix},$$

Après q dérivation de $v(t) = Lx(t)$, on obtient :

$$v^{(q)}(t) = LA^q x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i B u^{(q-1-i)}(t), \quad (2.35)$$

D'après (2.34), il existe donc une combinaison linéaire, Γ_i , pour $i \in \llbracket 0; q \rrbracket$, et Λ_i , pour $i \in \llbracket 0; q-1 \rrbracket$, tel le que :

$$LA^q = \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^i, \quad (2.36)$$

Alors :

$$v^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^i x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i B u^{(q-1-i)}(t), \quad (2.37)$$

La deuxième étape consiste à éliminer l'état $x(t)$ pour faire apparaître $v(t)$ et $y(t)$ et leurs dérivées. Pour se faire, on utilise les dérivées de $v(t) = Lx(t)$ et de $y(t) = Cx(t)$ [78].

En remplaçant les expressions de $v^{(i)}(t)$, $i \in \llbracket 0; q-1 \rrbracket$, et de $y^{(i)}(t)$, $i \in \llbracket 0; q \rrbracket$ dans celle de $v^{(q)}(t)$ et en regroupant les termes on obtient une relation de la forme :

$$v^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i v^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Phi_i u^{(i)}(t), \quad (2.38)$$

où, pour $i \in \llbracket 0; q-2 \rrbracket$

$$\Phi_i = \left[LA^{q-1-i} - \sum_{j=i+1}^q \Gamma_j CA^{j-i-1} - \sum_{j=i+1}^{q-1} \Lambda_j LA^{j-i-1} \right] B, \quad (2.39)$$

et,

$$\Phi_{q-1} = [L - \Gamma_q C] B,$$

La troisième étape consiste à réaliser la relation (2.38), c'est-à-dire à construire une équation d'état du premier ordre qui traduit cette relation. L'équation différentielle (2.38) peut être réalisée en tant que système observable d'espace d'état d'ordre q , en utilisant des techniques de réalisation d'équations différentielles comme l'algorithme de Horner [77, 49] utilisé précédemment.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & & \Lambda_0 \\ I_l & \ddots & \Lambda_1 \\ & \ddots & 0 \\ & & I_l & \Lambda_{q-1} \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{q-1} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \Gamma_0 + \Lambda_0 \Gamma_q \\ \Gamma_1 + \Lambda_1 \Gamma_q \\ \vdots \\ \Gamma_{q-1} + \Lambda_{q-1} \Gamma_q \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I_l] z(t) + \Gamma_q y(t) \end{cases} \quad (2.40)$$

où z est l'état de l'observateur, et \hat{v} l'estimation de v .

Lorsque la matrice F est une matrice de Hurwitz, on obtient un observateur asymptotique de la fonctionnelle linéaire $Lx(t)$. Dans le cas contraire ou si les valeurs propres de la matrice ne conviennent pas, il convient d'augmenter l'ordre q et réitérer la réalisation à un ordre plus élevé. [80, 99].

Construction de la matrice T

Dans ce paragraphe nous allons montrer une matrice T qui satisfait aux relations nécessaires que doit vérifier un observateur de fonctionnelle linéaire.

Des calculs triviaux soulignent que (2.31) et (2.32) sont vérifiés. Lorsque F est une matrice de Hurwitz, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un observateur de fonctionnelle linéaire (2.28) pour le système (2.3) sont vérifiés. La suffisance est directement déduite de l'observabilité de l'observateur (2.40) obtenu [31].

2.6 Application sur la plaque chauffante 2D pour un système symétrique

2.6.1 Conception d'un observateur minimal

Dans cette section [83], l'observateur de fonctionnelle linéaire est appliqué à l'estimation de la température de la plaque chauffante. Afin de suivre le mécanisme de construction de l'observateur, nous choisissons une discrétisation par différences finies de la plaque chauffante qui est exprimée en modèle d'état d'ordre 9, comme le montre la figure 2.6.1, où S est la surface où la puissance thermique est injectée, Ca un capteur thermique physique placé dans un endroit voulu dans la plaque, traduit par la matrice C , qui est de rang plein en ligne, et O le point qu'on cherche à estimer traduit par la matrice L .

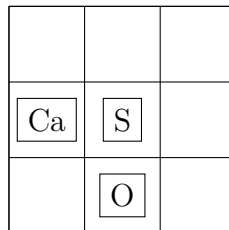


FIGURE 2.6.1 – Position des différents éléments.

D'après la modélisation thermique de la plaque chauffante, on arrive sur une représentation d'état de la forme (2.3) définie par :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} a & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & c & b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & d & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b & c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} f & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ 0 & g \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \\
 C &= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), L = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

où, $a = -1.40$, $b = 6.9 \times 10^{-3}$, $c = -0.71$, $d = -0.027$, $f = 1.38$ et $g = 0.69$.

Les matrices C , L et la position du coefficient g en deuxième colonne de B sont liées aux positions de Ca , O et S .

Les étapes suivantes illustrent la procédure de conception d'un observateur minimal :

• **Recherche de l'ordre minimal :**

Itération 1 : Test pour l'observateur minimum. Comme,

$$CA = (b \ 0 \ 0 \ c \ a \ 0 \ a \ 0 \ 0)$$

$$LA = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ b \ 0 \ b \ c \ b)$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_1) = 3$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ LA \end{pmatrix} = 4$.

\Rightarrow l'observateur minimum du premier ordre n'est pas réalisable.

Itération 2 : Test pour l'observateur minimal, $q=2$. Comme,

$$CA^2 = 10^{-5} \times (-1470 \ 9.64 \ 0 \ 51176.6 \ -516.01 \ 4.82 \ -1470 \ 9.64 \ 0)$$

$$LA^2 = 10^{-5} \times (0 \ 4.82 \ 0 \ 9.64 \ 516.01 \ 9.64 \ -1.78 \ 4.52 \ -1.78)$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_2) = 5$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_2 \\ LA^2 \end{pmatrix} = 6$.

\Rightarrow l'observateur minimal du second ordre n'est pas réalisable.

Itération 3 : Test pour l'observateur minimal, $q=3$. Comme,

$$CA^3 = 10^{-4} \times (241.87 \ -2.06 \ 0.01 \ -3662.95 \ 36.98 \ -0.70 \ 241.87 \ -2.06 \ 0.01)$$

$$LA^3 = 10^{-7} \times (0.062 \ -0.29 \ 0.062 \ -0.62 \ 1.42 \ -0.62 \ 1.97 \ -3.51 \ 1.97)$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_3) = 7$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_3 \\ LA^3 \end{pmatrix} = 7$.

\Rightarrow L'observateur candidat minimal du troisième ordre est réalisable.

Il faut vérifier que F est une matrice Hurwitz :

$$LA^3\Sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} 0.71 & -0.71 & 2.51 & -2.51 & 2.83 & -2.83 & 1 \end{pmatrix}$$

où Σ_3^\dagger est la pseudo inverse de Σ_3 .

Donc, $\Lambda_0 = -0.71, \Lambda_1 = -2.51, \Lambda_2 = -2.83$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.71 \\ 1 & 0 & -2.51 \\ 0 & 1 & -2.83 \end{pmatrix}$$

Toutes les valeurs propres de F sont de partie réelle strictement négatives $\{-0.71, -0.71, -1.40\}$, donc c'est une matrice de Hurwitz. Cela signifie que l'observateur d'ordre $q = 3$ est asymptotiquement convergent.

• **Conception de l'observateur minimal d'ordre $q = 3$:**

D'après, $LA^3\Sigma_3^\dagger$, on a : $\Gamma_0 = 0.71, \Gamma_1 = 2.51, \Gamma_2 = 2.83, \Gamma_3 = 1$

De (2.40), nous obtenons,

$$G = \begin{pmatrix} 1.43 \times 10^{-14} & 7.75 \times 10^{-16} \\ 1.15 \times 10^{-13} & 4.88 \times 10^{-16} \\ 7.02 \times 10^{-14} & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 5.66 \times 10^{-14} \\ 1.18 \times 10^{-13} \\ 5.06 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ and } V = 1$$

Compte tenu des ordres des grandeurs des coefficients des matrices G et H , on pourra approcher leurs valeurs par :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = 1$$

On peut remarquer que le résultat obtenu vérifie l'hypothèse physique, que le système est symétrique, donc la sortie de l'observateur conduit à une température estimée en position O égale à celle en position Ca .

La conception de cet observateur est terminée et la procédure peut être arrêtée. Néanmoins les pôles sont fixes. Si les pôles $\{-0.71, -0.71, -1.40\}$ ne sont pas convenables, nous devons augmenter l'ordre de l'observateur q et réitérer la réalisation de l'observateur à un ordre plus élevé, cette augmentation d'ordre induit l'apparition des degrés de liberté pour fixer arbitrairement la dynamique de l'observateur [99]. Nous détaillons cette procédure de conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire en augmentant l'ordre de l'observateur par la suite.

2.6.2 Résultats de simulation

La figure 2.6.2, montre le résultat de simulation de l'observateur conçu, sur le système initial.

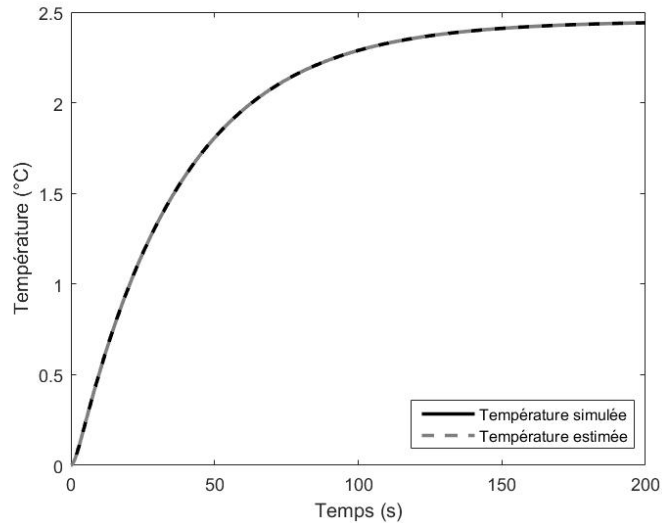


FIGURE 2.6.2 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal pour (2.41), avec conditions initiales nulles.

On remarque que les conditions initiales sont nulles. En effet, on supposera que le système est à l'équilibre thermique avec le milieu ambiant et que la puissance thermique $P_{th} = 0$, pour $t < 0$.

La courbe de la température simulée et de la température observée sont identiques. On peut remarquer que le résultat obtenu vérifie l'hypothèse physique précédente : comme le problème thermique est symétrique, la sortie de l'observateur conduit à une température estimée en position O égale à celle en position Ca .

Afin de tester la robustesse de l'observateur, on a également réalisé une simulation avec des conditions initiales non nulles entre le système et la sortie de l'observateur, qui seront les conditions initiales causées par chaque nouveau changement de consigne. En pratique, cela peut correspondre à une modification du flux de température ou de la température ambiante pendant l'expérience, la figure 2.6.3 montre le résultat de simulation.

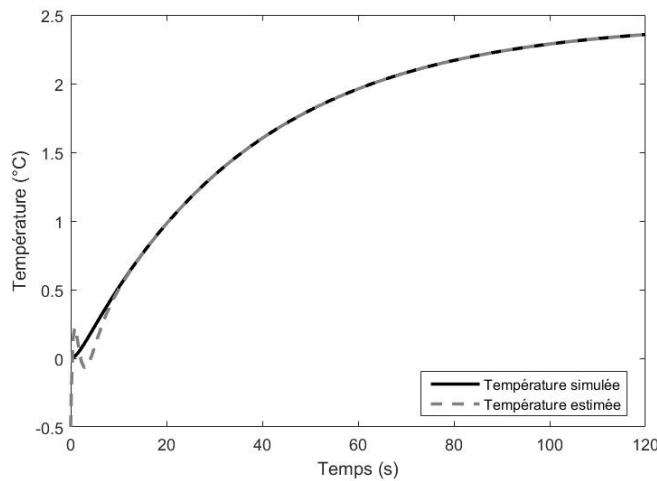


FIGURE 2.6.3 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal pour (2.41), avec conditions initiales non nulles.

On remarque que la température estimée converge vers la température simulée. ce qui nous permet de conclure que cet observateur est apte à estimer la température quelles que soient les conditions initiales avec une réponse rapide.

Afin de montrer la variation de l'ordre de l'observateur en fonction de la position des différents capteurs, nous proposons l'étude d'un autre exemple symétrique, où nous gardons la même discrétisation des différences finies exprimée par un modèle d'état d'ordre 9 comme le montre la figure 2.6.4, où les positions de S , Ca et O sont modifiées.

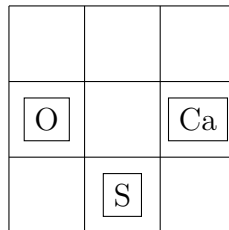


FIGURE 2.6.4 – Position des différents éléments

La procédure de conception de l'observateur donnée dans la section 3.2.3 est effectuée sur le système dans la figure 2.6.4. On obtient un observateur de fonctionnelle linéaire d'ordre réduit $q = 2$, défini par (2.42).

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1,003 \\ 1 & -2,11 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 1,43 \times 10^{-14} & 0 \\ 3,66 \times 10^{-15} & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -8.65 \times 10^{-15} \\ -1.33 \times 10^{-14} \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) = (0 \quad 1) z(t) + y(t) \end{cases} \quad (2.42)$$

Comme dans l'exemple précédent, les équations de l'observateur peuvent être approchées par (2.43), et le résultat de la simulation est donné par

la figure 2.6.5.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1,003 \\ 1 & -2,11 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} z(t) + y(t) \end{cases} \quad (2.43)$$

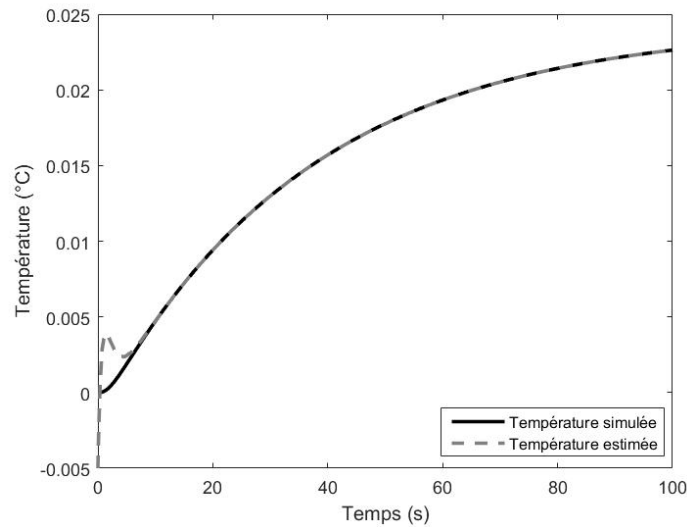


FIGURE 2.6.5 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal d'ordre $q = 2$, pour un modèle d'état d'ordre 9, avec conditions initiales non nulles.

2.7 Application sur la plaque chauffante 2D pour un système non symétrique

L'étude précédente a présenté un cas simple où le résultat peut se déduire en utilisant une analyse physique. Afin de montrer d'une façon plus générale la capacité de l'observateur dans l'estimation de la température, nous proposons dans ce paragraphe l'étude d'autres exemples, où dans le premier exemple nous choisissons la même discrétisation par différences finies qui conduit à un modèle d'état d'ordre 9 comme le montre la figure 2.7.1, et dans le deuxième exemple une discrétisation plus fine traduite par un modèle d'état d'ordre 121 comme le montre la figure 2.7.3, où les positions du capteur et le point qu'on cherche à observer sont choisis de manière à avoir un cas non-symétrique.

2.7.1 Exemple 1

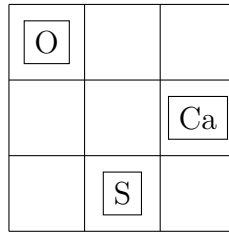


FIGURE 2.7.1 – Position des différents éléments

La procédure de conception de l'observateur donnée dans la section 3.2.3 est effectuée sur le système dans la figure 2.7.1. On obtient un observateur de fonctionnelle linéaire d'ordre réduit $q = 4$, défini par (2.44).

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1,006 \\ 1 & 0 & 0 & -4,25 \\ 0 & 1 & 0 & -6,49 \\ 0 & 0 & 1 & -4,23 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0,99 & -2,32 \times 10^{-7} \\ 3,49 & 5,57 \times 10^{-14} \\ 3,93 & 0 \\ 1,38 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0,0099 \\ 0,034 \\ 0,039 \\ 0,013 \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 1) z(t) - (-8,31 \times 10^{-10}) y(t) \end{cases} \quad (2.44)$$

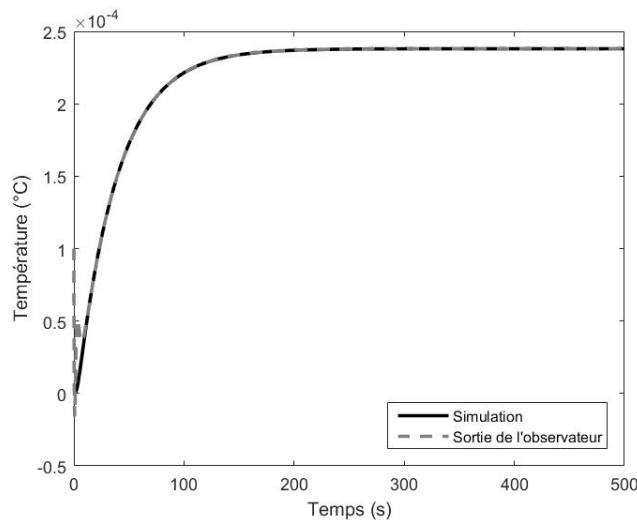


FIGURE 2.7.2 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal d'ordre $q = 4$, pour un système d'état d'ordre 9, avec conditions initiales non nulles.

On remarque que la température estimée converge vers la température simulée.

2.7.2 Exemple 2

Dans le but d'affiner les résultats trouvés ci-dessus, considérons un modèle de système avec une discrétisation plus précise avec une décomposition de la surface initiale en (11×11) surfaces élémentaires conduisant

à un modèle d'espace d'état d'ordre 121, où la position du capteur et le point estimé sont choisis afin d'assurer un système non-symétrique. Un observateur d'ordre $q = 13$ est conçu selon la procédure donnée dans la section 3.2.3.

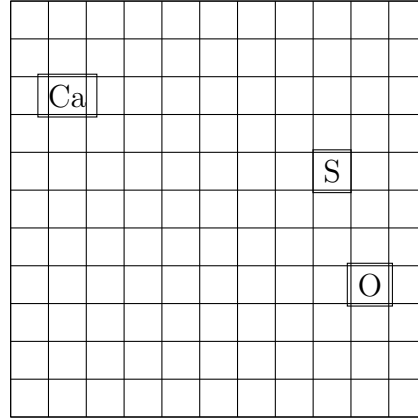


FIGURE 2.7.3 – Position des différents éléments

La procédure proposée dans les pages précédentes conduit à l'observateur :

$$\hat{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.46 \times 10^{-13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.49 \times 10^{-10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.66 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.15 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.01 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.57 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.86 \times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.77 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -12.93 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11.14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5.17 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} -1.42 \times 10^{-12} & 1.18 \times 10^{-12} \\ -8.65 \times 10^{-11} & 1.10 \times 10^{-10} \\ -1.12 \times 10^{-8} & 2.50 \times 10^{-9} \\ -6.51 \times 10^{-7} & 1.56 \times 10^{-8} \\ -1.96 \times 10^{-5} & 4.58 \times 10^{-8} \\ -3.19 \times 10^{-4} & 7.39 \times 10^{-8} \\ -2.66 \times 10^{-3} & 6.74 \times 10^{-8} \\ -1.03 \times 10^{-2} & 3.25 \times 10^{-8} \\ -2.10 \times 10^{-2} & 6.46 \times 10^{-9} \\ -0.023 & 0 \\ -0.012 & 0 \\ -0.0028 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -3.12 \times 10^{-14} \\ -2.91 \times 10^{-11} \\ -5.63 \times 10^{-9} \\ -4.44 \times 10^{-7} \\ -1.73 \times 10^{-5} \\ -3.52 \times 10^{-4} \\ -3.62 \times 10^{-3} \\ -1.74 \times 10^{-2} \\ -4.51 \times 10^{-2} \\ -6.74 \times 10^{-2} \\ -5.82 \times 10^{-2} \\ -2.70 \times 10^{-2} \\ -5.19 \times 10^{-3} \end{pmatrix} y(t)$$

$$\hat{v}(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) z(t) + 1.6 y(t)$$

La convergence asymptotique de la température simulée et la température estimée est vérifiée. Cette étude souligne l'avantage d'un observateur de fonctionnelle linéaire par rapport à un observateur réduit d'ordre

$n - l = 120$.

Le résultat de simulation est donné par la figure 2.7.4. On peut conclure que l'observateur estime avec précision la température d'un point désiré, quelles que soient les conditions initiales.

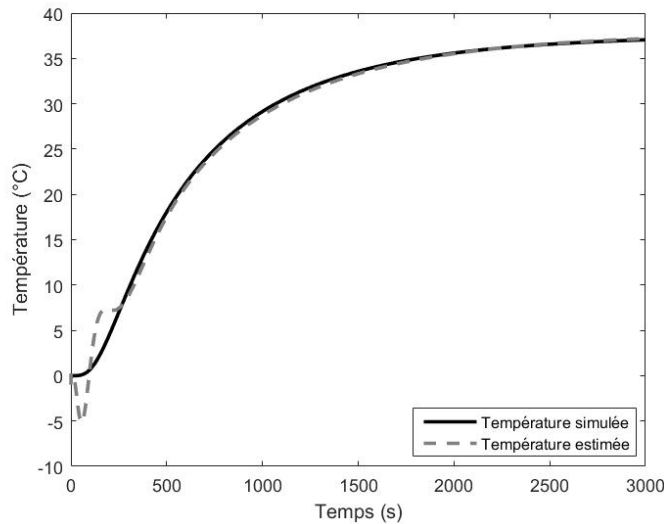


FIGURE 2.7.4 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal d'ordre $q = 13$, pour un modèle d'état d'ordre 121, avec conditions initiales non nulles.

Les courbes de la température estimée et celle simulée sont identiques, on remarque que l'application de ce type d'observateur montre une réduction pertinente de l'ordre de l'observateur, avec une estimation précise de la température.

2.8 Observateur de Luenberger avec des degrés de liberté

Soit q l'ordre de l'observateur défini par (2.34), notre objectif est d'augmenter cet ordre à $(q + 1)$ et réitérer la procédure de réalisation de l'observateur. À cet effet, nous devons ajouter deux autres ensembles de lignes dans (2.34) comme le montre la formule (2.45).

$$\text{rang } \Sigma_{q+1} = \text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_{q+1} \\ LA^{q+1} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

où :

$$\Sigma_{q+1} = \begin{pmatrix} C \\ L \\ CA \\ LA \\ \vdots \\ CA^q \\ LA^q \\ CA^{q+1} \end{pmatrix}$$

Auparavant, montrons le résultat suivant :

Théorème . Si (2.34) est vérifiée, alors (2.45) l'est également.

Démonstration. Si (2.36) est vérifiée, alors

$$\begin{aligned} LA^{q+1} &= \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^{i+1} + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^{i+1}, \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} \Gamma_i CA^i + \sum_{i=0}^q \Lambda_i LA^i, \end{aligned}$$

soit (2.45). □

Ainsi lorsque les conditions de réalisabilité de l'observateur sont assurées, elles le restent par augmentation d'ordre.

La conception de l'observateur utilise les $(q + 1)$ dérivations successives de $v(t) = Lx(t)$, on obtient :

$$v^{(q+1)}(t) = LA^{q+1}x(t) + \sum_{i=0}^q LA^i Bu^{(q-i)}(t) \quad (2.46)$$

De Σ_{q+1} , il existe une décomposition éventuellement non unique exprimée par :

$$\begin{aligned} LA^{q+1} &= \sum_{i=0}^{q+1} \Gamma_i CA^i + \sum_{i=0}^q \Lambda_i LA^i \\ &= \Gamma_0 C + \Lambda_0 L + \dots + \Gamma_{q-1} CA^{q-1} + \Lambda_{q-1} LA^{q-1} + \Gamma_q CA^q + \Lambda_q LA^q + \Gamma_{q+1} CA^{q+1} \end{aligned} \quad (2.47)$$

De la décomposition linéaire (2.36), nous avons :

$$\begin{aligned} LA^q &= \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^i \\ &= \Gamma_0 C + \Lambda_0 L + \dots + \Gamma_{q-1} CA^{q-1} + \Lambda_{q-1} LA^{q-1} + \Gamma_q CA^q \end{aligned} \quad (2.48)$$

Lorsque $\text{rang } \Sigma_q = r_q < m_q$, où $m_q = (q + 1)m + ql$, on peut déjà extraire r_q lignes linéairement indépendantes de Σ_q , et avoir comme cela $(m_q - r_q)$ degrés de libertés qui correspondent aux lignes de Σ_q linéairement dépendantes des autres lignes que l'on regroupe dans Σ_q^* .

À titre d'exemple, nous choisissons un cas particulier, où CA^q est linéairement dépendant des lignes précédentes, et :

$$\Sigma_q^* = \begin{pmatrix} C \\ L \\ CA \\ LA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \\ LA^{q-1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, Γ_q apparaît comme le vecteur des degrés de libertés. D'autre part, dans :

$$LA^q = N\Sigma_q^*, \quad N \text{ est unique.}$$

$$\text{où, } N = [\Upsilon_0 \quad \Theta_0 \quad \Upsilon_1 \quad \Theta_1 \quad \dots \quad \Upsilon_{q-1} \quad \Theta_{q-1}],$$

$$CA^q = P\Sigma_q^*, \quad P \text{ est unique.}$$

$$\text{où, } P = [\Pi_0 \quad \Delta_0 \quad \Pi_1 \quad \Delta_1 \quad \dots \quad \Pi_{q-1} \quad \Delta_{q-1}],$$

Les matrices $\Upsilon_i, \Theta_i, P_i$ et Δ_i sont uniques. Par conséquent en comparant et identifiant les décompositions, nous avons :

$$\begin{aligned} LA^q &= M\Sigma_q^* + \Gamma_q CA^q \\ \rightarrow N\Sigma_q^* &= M\Sigma_q^* + \Gamma_q P\Sigma_q^* \\ \rightarrow M &= N - \Gamma_q P \end{aligned}$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \Upsilon_0 - \Gamma_q \Pi_0, \\ \Lambda_0 = \Theta_0 - \Gamma_q \Delta_0, \\ \Gamma_1 = \Upsilon_1 - \Gamma_q \Pi_1, \\ \Lambda_1 = \Theta_1 - \Gamma_q \Delta_1, \\ \vdots \\ \Gamma_{q-1} = \Upsilon_{q-1} - \Gamma_q \Pi_{q-1}, \\ \Lambda_{q-1} = \Theta_{q-1} - \Gamma_q \Delta_{q-1}, \end{array} \right. \quad (2.49)$$

où, Γ_q est arbitraire.

Pour ces valeurs, nous obtenons la matrice dynamique de l'observateur d'ordre $(q+1)$, en fonction du degré de liberté Γ_q défini par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & \Theta_0 - \Gamma_q \Delta_0 \\ 1 & \ddots & \Theta_1 - \Gamma_q \Delta_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \Theta_{q-1} - \Gamma_q \Delta_{q-1} \end{pmatrix}$$

Lorsque la matrice F est une matrice de Hurwitz, on obtient un observateur

asymptotique de la fonctionnelle linéaire $Lx(t)$, mais cette fois-ci où l'on dispose de degrés de libertés pour en fixer quelques éléments.

2.9 Estimation de la dérivée de la température

Comme tous les composants électroniques en fonctionnement, les modules d'électronique de puissance sont soumis à plusieurs mécanismes de dégradation et de vieillissement qui conduisent à l'apparition des défauts au niveau de ses composants. Parmi ces défauts, la variation de la température est un bon indicateur de l'état de santé du module [86]. Dans le but de pouvoir faire une surveillance plus sensible au niveau des modules d'électronique de puissance, nous proposons de concevoir un estimateur de la dérivée de la température, exprimée par un vecteur de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= L\dot{x}(t) \\ &= LAx(t) + LBu(t)\end{aligned}\tag{2.50}$$

Un observateur de fonctionnelle linéaire est utilisé pour obtenir $\dot{v}(t)$, son équation d'état est exprimée par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t), \end{cases}\tag{2.51}$$

où les matrices le définissant sont choisies cette fois telles que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{v}(t) = L_1x(t)$.

Supposons que : $LA = L_1$, et suivant la même démarche détaillée dans la section 3.2.1, nous arrivons à construire un observateur de fonctionnelle linéaire afin de construire un estimateur de la dérivée de la température exprimée sous la forme d'équation (2.51).

Pour illustrer l'approche de conception proposée, considérons le même exemple en 3.2.3 donné par (2.41).

Supposons que : $L_1 = LA$, les étapes suivantes illustrent la procédure de conception d'un observateur minimal :

2.9.1 Recherche de l'ordre minimal :

Itération 1 : Test pour l'observateur minimum. Comme,

$$CA = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c & b & 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1A = \begin{pmatrix} 0 & 4.82 \times 10^{-5} & 0 & 9.64 \times 10^{-5} & -5.2 \times 10^{-3} & 9.64 \times 10^{-5} \\ -1.47 \times 10^{-2} & 0.51 & 0.014 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_1) = 3$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ L_1A \end{pmatrix} = 4$.

\Rightarrow l'observateur minimum du premier ordre n'est pas réalisable.

Itération 2 : Test pour l'observateur minimal, $q=2$. Comme,

$$CA^2 = \begin{pmatrix} -0.014 & 9.64 \times 10^{-5} & 0 & 0.51 & -5.16 \times 10^{-3} & -2.06 \times 10^{-4} \\ 4.82 \times 10^{-5} & -0.014 & 9.64 \times 10^{-5} & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$L_1A^2 = \begin{pmatrix} 10^{-6} & -7.03 \times 10^{-5} & 10^{-6} & -2.06 \times 10^{-4} & 3.7 \times 10^{-3} \\ -2.06 \times 10^{-4} & 0.024 & -0.36 & 0.024 & \end{pmatrix}$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_2) = 5$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_2 \\ L_1A^2 \end{pmatrix} = 6$.

\Rightarrow l'observateur minimal du second ordre n'est pas réalisable.

Itération 3 : Test pour l'observateur minimal, $q=3$. Comme,

$$CA^3 = \begin{pmatrix} 0.024 & -2.06 \times 10^{-4} & 10^{-6} & -0.36 & 3.69 \times 10^{-3} \\ -7.03 \times 10^{-5} & 0.024 & -2.06 \times 10^{-4} & 10^{-6} & \end{pmatrix}$$

$$L_1A^3 = \begin{pmatrix} -3.33 \times 10^{-6} & 7.60 \times 10^{-5} & -3.33 \times 10^{-6} & 3.41 \times 10^{-4} \\ -2.6 \times 10^{-3} & 3.41 \times 10^{-4} & -0.036 & 0.26 & -0.036 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_3) = 7$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_3 \\ L_1A^3 \end{pmatrix} = 8$.

\Rightarrow L'observateur minimal du troisième ordre n'est pas réalisable.

Itération 4 : Test pour l'observateur minimal, $q=4$. Comme,

$$CA^4 = \begin{pmatrix} -0.036 & 3.41 \times 10^{-4} & -3.33 \times 10^{-6} & 0.26 & -2.64 \times 10^{-3} \\ 7.60 \times 10^{-5} & -0.036 & 3.41 \times 10^{-4} & -3.33 \times 10^{-6} & \end{pmatrix}$$

$$L_1A^4 = \begin{pmatrix} 7.57 \times 10^{-6} & -7.28 \times 10^{-5} & 7.57 \times 10^{-6} & -5.16 \times 10^{-4} \\ 1.90 \times 10^{-3} & -5.16 \times 10^{-4} & 0.053 & -0.18 & 0.053 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_4) = 8$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_4 \\ L_1A^4 \end{pmatrix} = 8$.

\Rightarrow L'observateur minimal du quatrième ordre est réalisable.

Il faut vérifier que F est une matrice Hurwitz :

D'après (2.34), il existe une combinaison linéaire, Γ_i , pour $i \in \llbracket 0; q \rrbracket$, et Λ_i , pour $i \in \llbracket 0; q - 1 \rrbracket$, tel que :

$$L_1A^4\Sigma_4^\dagger = \begin{pmatrix} -0.027 & -0.25 & -0.86 & -1.62 & -2.80 & -3.53 \\ -3.07 & -3.19 & -1.07 & & & \end{pmatrix}$$

où Σ_4^\dagger est la pseudo inverse de Σ_4 .

On en déduit que, $\Lambda_0 = -0.25, \Lambda_1 = -1.62, \Lambda_2 = -3.53$ et $\Lambda_3 = -3.19$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.25 \\ 1 & 0 & 0 & -1.62 \\ 0 & 1 & 0 & -3.53 \\ 0 & 0 & 1 & -3.19 \end{pmatrix}$$

Toutes les valeurs propres de F sont à partie réelle strictement négatives $\{-0.35, -0.71, -0.71, -1.40\}$, donc c'est une matrice de Hurwitz. Cela signifie que l'observateur d'ordre $q = 4$ est asymptotiquement convergent.

2.9.2 Conception de l'observateur minimal

D'après, $L_1 A^4 \Sigma_4^\dagger$, on a : $\Gamma_0 = -0.027, \Gamma_1 = -0.86, \Gamma_2 = -2.80, \Gamma_3 = -3.07, \Gamma_4 = -1.07$

De (2.40), nous obtenons,

$$G = \begin{pmatrix} -0.151 & 6.78 \times 10^{-3} \\ -0.051 & 1.91 \times 10^{-2} \\ -0.414 & 1.69 \times 10^{-2} \\ -0.266 & 4.82 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.87 \\ 0.98 \\ 0.34 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = 1.07.$$

La conception de cet observateur est terminée et la procédure peut être arrêtée.

2.9.3 Résultats de simulation

La figure 2.9.1, montre le résultat de simulation de l'observateur conçu, et le système initial.

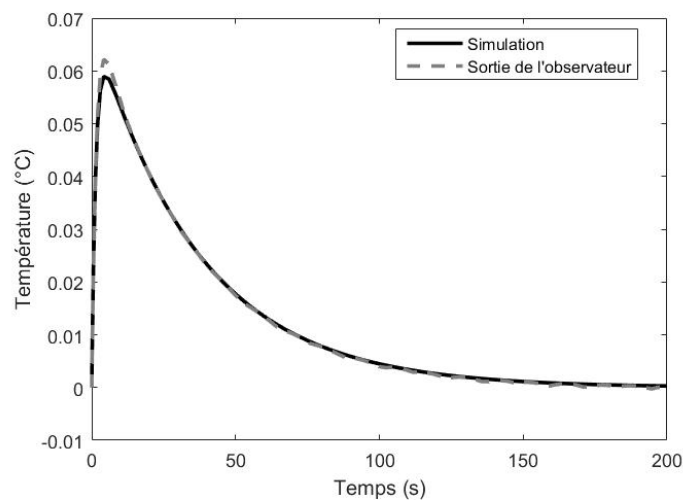


FIGURE 2.9.1 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal pour (2.41).

La courbe de la dérivée de la température simulée et de la dérivée de la température observée sont similaires. L'application d'un observateur de fonctionnelle linéaire nous permet de faire une surveillance plus sensible au niveau de la plaque chauffante avec une sensibilité à l'apparition d'un défaut accrue.

2.10 Partie expérimentale

Dans cette partie nous allons présenter les résultats de mesures expérimentales à partir de la modélisation thermique du barreau de gel de silicone présenté dans le chapitre 1. Pour valider ces résultats, une observation est faite avec des données expérimentales réelles mesurées sur le système, dans le but de valider la procédure de conception de l'observateur de fonctionnelle linéaire continu.

Nous traitons le cas d'un barreau mono-dimensionnel de gel encapsulant (détaillé dans le chapitre 1), où nous avons choisi une discrétisation par différence finie avec 16 surfaces élémentaires. Nous avons construit un observateur de fonctionnelle linéaire continu afin d'estimer la température :

- Exemple : nous avons choisi de construire la température la plus chaude, où nous prenons la température la plus froide comme capteur. La figure 2.10.1 montre le résultat de simulation de l'observateur conçu à partir des mesures expérimentales, où nous obtenons un ordre $q = 8$ pour un modèle d'état initial d'ordre 16. Les conditions initiales de l'observateur sont réglées par $z(t = 0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -5 \ 30]$.

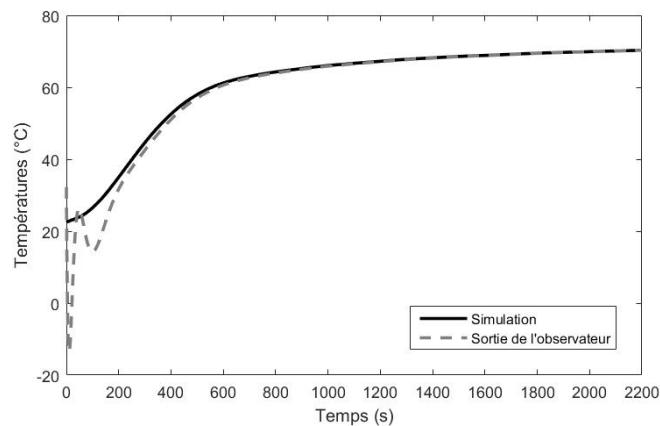


FIGURE 2.10.1 – Mesures expérimentales pour la mise en œuvre d'observateur minimal, pour un modèle d'état d'ordre 16, avec conditions initiales non nulles.

On remarque que la sortie de l'observateur converge vers $v(t) = Lx(t)$ avec un taux de décroissance donné par le choix du degré de liberté apparu lors de la construction de l'observateur et l'obtention des valeurs propres de F .

Conclusion

Dans le cadre de l'observation de la température d'un module complet d'électronique de puissance, les représentations d'états sont potentiellement de très grande dimension. Nous nous sommes intéressés à la construction d'observateurs linéaires à partir de modèles linéaires de transferts identifiés expérimentalement, ce qui permet d'en réduire l'ordre pour être implémentable sur calculateur embarqué temps-réel. Cependant, cette démarche ne s'applique pas sur notre cas d'étude. Nous nous sommes donc réorientés vers une procédure de conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire à partir d'une représentation d'état pour estimer la température en n'importe quel point désiré en utilisant les mesures et la connaissance des entrées. Ce type d'observateur induit une réduction pertinente de l'ordre des observateurs par rapport à la dimension initiale du système. Nous avons démontré que l'observateur était capable d'estimer avec précision l'évolution de la température d'un point désiré, quelles que soient les conditions initiales. De plus, l'ordre de l'observateur est lié aux positions relatives des points d'intérêt et à la dimension de la représentation de l'espace d'état du système.

Nous avons montré dans ce chapitre un certain nombre d'éléments comme la démarche simple de la conception de ces observateurs, la mise en évidence des degrés de liberté permettant d'en fixer par exemple les dynamiques, la possibilité de filtrer les mesures afin d'augmenter l'efficacité de ces observateurs, concevoir des observateurs de dérivées des variables à estimer, et enfin un exemple expérimental est présenté afin de valider les résultats de simulation.

Le but de la conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire d'ordre minimal est de pouvoir être implémenté sur calculateur numérique embarqué. Pour cela, il est nécessaire, pour une application temps-réel de discrétiser cet observateur afin de minimiser le nombre d'opérations élémentaires effectuées par le calculateur à chaque nouvel échantillon acquis pour estimer la température, cet aspect sera abordé dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Application des observateurs de fonctionnelle linéaire discrets

Sommaire

Introduction	82
3.1 Équation d'état	83
3.1.1 Système d'état échantillonné	84
3.2 Observateur de fonctionnelle linéaire d'un système d'état échantillonné	85
3.2.1 Conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire	86
3.2.2 Construction de la matrice T	89
3.2.3 Application sur la plaque chauffante $2D$	89
Conception d'un observateur minimal	90
Résultats de simulation	92
3.2.4 Discrétisation plus fine de la plaque chauffante $2D$	93
3.3 Échantillonné bloqué de l'OFL continu	96
3.4 Intégration numérique d'un observateur continu	97
3.4.1 Méthode d'Euler	98
3.4.2 Méthodes de Runge-Kutta	99
Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	99
Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	100
3.5 Comparaison entre les différentes techniques	102
3.6 Partie expérimentale	103
Conclusion	104

Introduction

Le problème de l'observation du vecteur d'état d'un système linéaire invariant a fait l'objet de nombreuses recherches [3, 19, 101] depuis l'apparition du travail origine de Luenberger [56, 57]. Des algorithmes de conception d'un observateur d'ordre réduit pouvant donner une estimation de l'ensemble du vecteur d'état ou d'une fonctionnelle linéaire ont été rapportés dans de nombreux articles [25, 64] et dans le livre [68]. Le problème des observateurs est de reconstruire (ou d'estimer) l'état ou une combinaison linéaire des états du système en utilisant les mesures d'entrée et de sortie.

Le principal problème rencontré dans la conception d'observateurs de fonctionnelle linéaire est de trouver une méthode qui résout l'équation de Sylvester à partir des conditions d'existence et de stabilité [31, 99, 101, 103, 105]. Les équations matricielles inter-connectées ont généralement un nombre infini de solutions et chaque méthode de résolution tente d'optimiser certains critères et de satisfaire les critères de la robustesse et de performance. Ces méthodologies nécessitaient inévitablement de résoudre ces équations. L'approche directe est la seule méthode qui ne nécessite pas de résoudre les équations de Sylvester pour trouver les paramètres de l'observateur [78]. Elle est basée sur des opérations algébriques linéaires dans un espace d'état et conduit à la réalisation d'un observateur fonctionnel avec un taux de convergence asymptotique afin d'estimer une fonction unique des états d'un système LTI (Linear Time-Invariant).

Aujourd'hui, la plupart des systèmes de contrôle utilisent des ordinateurs et des convertisseurs analogiques-numériques, ce qui rend justifiable la mise en œuvre d'un algorithme permettant d'observer en certains instants des variables internes non mesurées. Ces algorithmes peuvent être construits soit par l'utilisation de la représentation de systèmes à temps discret et la construction d'observateurs discret, soit par la discrétisation numérique de l'observateur continu construit à partir de la représentation en temps continu comme cela a été proposé dans les chapitres précédents. Dans ce chapitre, nous présentons, dans une première partie, la discrétisation temporelle du système d'état continu représentatif du comportement thermique du système. Cette discrétisation est utilisée dans la deuxième partie pour une approche directe de la reconstruction de la fonction linéaire des états pour les systèmes linéaires à temps discret à grande échelle, de telle sorte que l'ordre minimum possible de l'observateur soit atteint. Un exemple d'application à la plaque chauffante est proposé à la fin de cette partie. Une troisième partie est consacrée à échantillonner-bloquer un observateur de fonctionnelle linéaire continu, afin de construire un observateur à temps discret. Une quatrième partie présente la résolution numérique de l'observateur linéaire continu qui sera implémenté par des algorithmes classiques. Une dernière partie sera consacrée pour faire une comparaison entre les différents types d'observateurs présentés pour valider le meilleur choix.

3.1 Équation d'état

Considérons le système linéaire invariant (LTI) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où pour tout instant $t \in \mathbb{R}^+$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de mesures du système. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, représentent les matrices constantes connues du système.

Afin de construire un observateur de fonctionnelle linéaire pour un système d'état discret, nous allons discrétiser le système d'état (3.1), en utilisant une modélisation de l'échantillonner-bloqueur, on obtient l'équation en temps

discret exprimée par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \\ y_k = C_d x_k, \end{cases} \quad (3.2)$$

En notant que $x_k = x(t_k)$.

où t_k est le k ^{ième} instant d'échantillonnage. Dans le cas d'un échantillonnage périodique, on a $t_k = kT_{ech}$ où $k \in \mathbb{N}$ et T_{ech} est la période d'échantillonnage.

Le plus souvent, la modélisation discrète en temps s'effectue suivant une approche entrée-sortie comme le montre la figure 3.1.1.

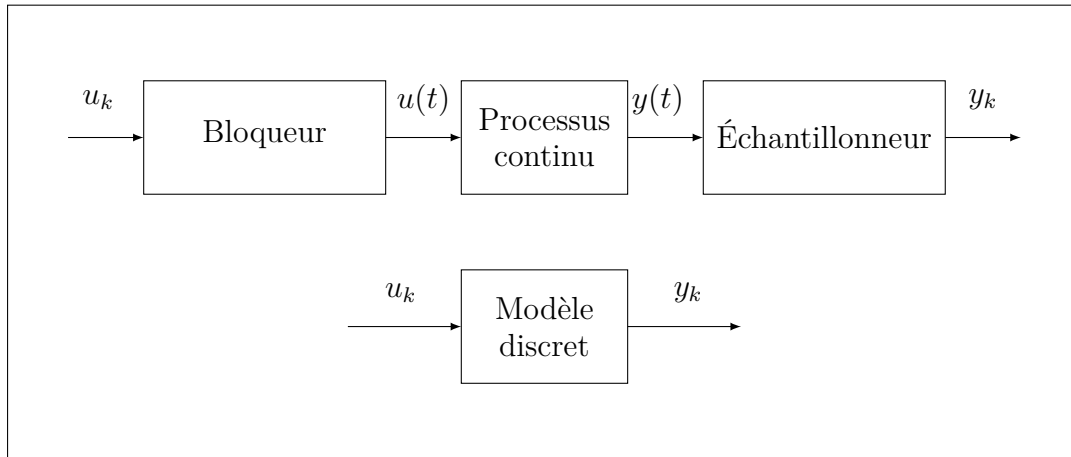


FIGURE 3.1.1 – Modélisation du processus échantillonné [10].

3.1.1 Système d'état échantillonné

Un système échantillonné est en général un système continu pour lequel la transmission de l'information s'effectue en certains instants discrets t_k du temps. L'importance prise par les systèmes de commande de processus du type échantillonné augmente avec l'accroissement des performances et l'abaissement du coût de mise en œuvre des calculateurs numériques.

On désire alors calculer la représentation d'état échantillonnée du système (3.1) selon le schéma classique de discrétisation de la figure 3.1.2, c'est-à-dire trouver les matrices A_d , B_d et C_d présentées par le système (3.2) est une équation d'état du système échantillonné.

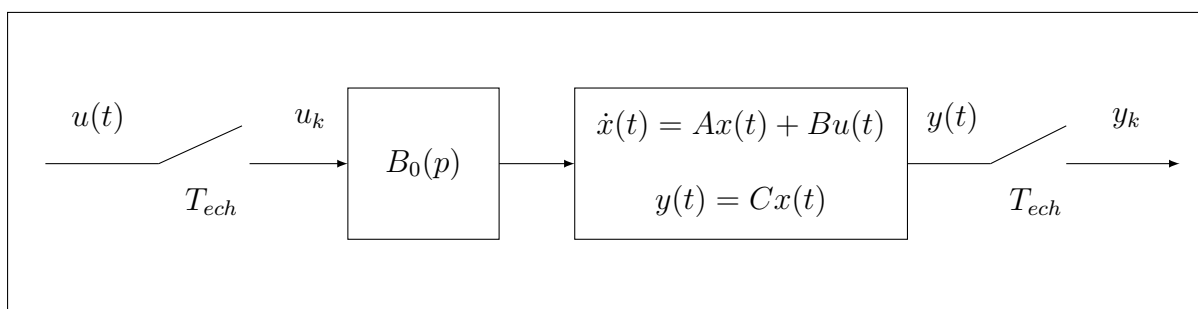


FIGURE 3.1.2 – Discrétisation d'un système sous forme d'état [5].

Nous allons maintenant déterminer la relation entre les variables du système aux instants d'échantillonnage. Étant donné l'état à l'instant d'échantillonnage t_k , l'état à un instant futur t est obtenu en résolvant l'équation (3.1), il vient en intégrant à partir des conditions initiales $x(t_k) = x_k$ [5] :

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x_k + \int_{t_k}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (3.3)$$

À l'instant kT_{ech} , le système est dans l'état x_k . Entre kT_{ech} et $(k+1)T_{ech}$, l'entrée $u(t)$ est maintenue constante par le bloqueur constante et vaut $u(t) = u_k$. On obtient :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x((k+1)T_{ech}), \\ &= e^{A((k+1)T_{ech}-kT_{ech})}x_k + \int_{kT_{ech}}^{(k+1)T_{ech}} e^{A((k+1)T_{ech}-\tau)}Bu_kd\tau, \\ &= e^{AT_{ech}}x_k + \left(\int_0^{T_{ech}} e^{A\theta}d\theta \right) Bu_k, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Soit,

$$A_d = e^{AT_{ech}}, \quad B_d = \left[\int_0^{T_{ech}} e^{A\theta}d\theta \right] B, \quad C_d = C$$

À partir de cette représentation d'état échantillonnée, nous présentons la procédure de conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire en temps discret.

3.2 Observateur de fonctionnelle linéaire d'un système d'état échantillonné

Considérons le système LTI en temps discret suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_dx_k + B_du_k, \\ y_k = C_dx_k, \end{cases} \quad (3.5)$$

tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^r$ et $y_k \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement le vecteur d'état du modèle, vecteur des commandes supposées accessibles, et le vecteur des mesures issues des capteurs. A_d , B_d et C_d sont des matrices constantes obtenues à partir de (3.4).

Soit v_k un vecteur qui doit être reconstruit (ou estimé), tel que :

$$v_k = Lx_k, \quad (3.6)$$

où L est une matrice de taille $(l \times n)$.

Notre objectif est de construire un observateur de la fonctionnelle linéaire (3.6) [56, 57] en temps discret pour estimer v_k , exprimé par l'équation d'état :

$$\begin{cases} z_{k+1} = F_d z_k + G_d u_k + H_d y_k, \\ \hat{v}_k = P_d z_k + V_d y_k, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $z_k \in \mathbb{R}^q$ et \hat{v}_k un vecteur de taille l , qui estime asymptotiquement $v_k = Lx_k$, les matrices F_d, G_d, H_d, P_d, V_d et l'ordre q sont déterminés afin que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (v_k - \hat{v}_k) = 0$. Lorsque cette propriété est satisfaite, l'observateur est dit asymptotique.

D'après [31], un observateur de fonctionnelle linéaire existe si et seulement si il existe une matrice $T(q \times n)$ telle que :

$$F_d \text{ est une matrice de Schur,} \quad (3.8)$$

$$TA_d - F_dT = H_dC_d, \quad (3.9)$$

$$L = P_dT + V_dC_d, \quad (3.10)$$

$$G_d = TB_d. \quad (3.11)$$

F_d est une matrice de Schur, c'est à dire que le module de toutes ses valeurs propres est inférieur à 1, et T est une matrice constante telle que, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (z_{k+1} - Tx_{k+1}) = 0$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{k+1} &= \dot{z}_{k+1} - T\dot{x}_{k+1}, \\ &= F_dz_k + G_du_k + H_dy_k - TA_dx_k - TB_du_k, \\ &= F_d\varepsilon_k + (G_d - TB_d)u_k + (F_dT - TA_d + H_dC_d)x_k. \end{aligned}$$

Maintenant, en introduisant l'erreur de reconstruction $e_k = \hat{v}_k - v_k$, celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} e_k &= Lx_k - P_dz_k - V_dy_k, \\ &= (L - P_dT - V_dC_d)x_k - P_d\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Si $L = P_dT + V_dC_d$, les conditions qui conduisent à $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$ assurent également $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_k = 0$, donc une reconstruction asymptotique de la fonctionnelle linéaire v_k .

Afin de concevoir un observateur rapide et implémentable sur un calculateur embarqué, nous devons rechercher l'ordre minimum d'un observateur de fonctionnelle linéaire. Il existe de nombreuses méthodes qui permettent dans certains cas particuliers, de résoudre le problème de la conception d'un observateur d'ordre minimal q où la matrice F_d possède des valeurs propres fixées a priori [68, 101]. Nous présentons dans la suite une technique issue de celle présentée dans le cas continu.

3.2.1 Conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire

Définissons q comme le plus petit entier tel que,

$$\text{rang } \Sigma_q = \text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ LA_d^q \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

où :

$$\Sigma_q = \begin{pmatrix} C_d \\ L \\ C_d A_d \\ L A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{q-1} \\ L A_d^{q-1} \\ C_d A_d^q \end{pmatrix}.$$

Après q dérivations de $v_k = Lx_k$, on obtient :

$$v_{k+q} = LA_d^q x_k + \sum_{i=0}^{q-1} LA_d^{q-1-i} B_d u_{k-i}, \quad (3.13)$$

D'après (3.12), il existe une combinaison linéaire, $\Gamma_i, i \in \llbracket 0 ; q \rrbracket$ et $\Lambda_i, i \in \llbracket 0 ; q-1 \rrbracket$, telle que :

$$LA_d^q = \sum_{i=0}^q \Gamma_i C_d A_d^i + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA_d^i, \quad (3.14)$$

donc, à partir de (3.14), nous pouvons écrire l'équation linéaire :

$$LA_d^q = M \Sigma_q. \quad (3.15)$$

où M est une matrice de $(l \times \rho)$, $\rho = m + q(l + m)$, donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Lambda_0 & \Gamma_1 & \Lambda_1 & \dots & \Gamma_{q-1} & \Lambda_{q-1} & \Gamma_q \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

En utilisant (3.13), et (3.14), on peut écrire :

$$v_{k+q} = \sum_{i=0}^q \Gamma_i C_d A_d^i x_k + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA_d^i x_k + \sum_{i=0}^{q-1} LA_d^{q-1-i} B_d u_{k-i}, \quad (3.17)$$

Nous allons éliminer l'état x_k pour faire apparaître v_k, y_k et leurs dérivées. On utilise les dérivées de $v_k = Lx_k$ et de $y_k = Cx_k$ [78, 37].

$$\begin{aligned} Lx_k &= v_k \\ LA_d x_k &= v_{k+1} - LB_d u_k \\ &\vdots \\ LA_d^{(q-1)} x_k &= v_{k+q-1} - \sum_{i=0}^{q-2} LA_d^i B_d u_{k+q-2-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_d x_k &= y_k \\
 C_d A_d x_k &= y_{k+1} - C_d B_d u_k \\
 C_d A_d^2 x_k &= y_{k+2} - C_d A_d B_d u_k - C_d B_d u_{k+1} \\
 &\vdots \\
 C_d A_d^q x_k &= y_{k+q} - \sum_{i=0}^{q-1} C_d A_d^i B_d u_{k+q-1-i}
 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

- pour $i \in \llbracket 1 ; q-1 \rrbracket$

$$L A_d^i x_k = v_{k+i} - \sum_{j=0}^{i-1} L A_d^{i-1-j} B_d u_{k-j} \quad (3.18)$$

- pour $i \in \llbracket 1 ; q \rrbracket$

$$C_d A_d^i x_k = y_{k+i} - \sum_{j=0}^{i-1} L A_d^{i-1-j} B_d u_{k-j} \quad (3.19)$$

En injectant les expressions (3.18) et (3.19) dans (3.17) et en regroupant les termes, nous obtenons une relation de la forme :

$$v_{k+q} = \sum_{i=0}^q \Gamma_i y_{k+i} + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i v_{k+i} + \sum_{i=0}^{q-1} \Phi_i u_{k+i} \quad (3.20)$$

où, pour $i \in \llbracket 0 ; q-2 \rrbracket$

$$\Phi_i = \left[L A_d^{q-1-i} - \sum_{j=i+1}^q \Gamma_j C_d A_d^{j-i-1} - \sum_{j=i+1}^{q-1} \Lambda_j L A_d^{j-i-1} \right] B_d \quad (3.21)$$

et,

$$\Phi_{q-1} = [L - \Gamma_q C_d] B_d \quad (3.22)$$

Pour obtenir l'observateur (3.7), nous allons réaliser la relation (3.20), c'est-à-dire construire une équation d'état qui traduit cette relation [49, 77]. Les différentes matrices sont définies par :

$$\begin{aligned}
 F_d &= \begin{pmatrix} 0 & & \Lambda_0 \\ I_l & \ddots & \Lambda_1 \\ & \ddots & 0 \\ & & I_l & \Lambda_{q-1} \end{pmatrix}, G_d = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{q-1} \end{pmatrix}, H_d = \begin{pmatrix} \Gamma_0 + \Lambda_0 \Gamma_q \\ \Gamma_1 + \Lambda_1 \Gamma_q \\ \vdots \\ \Gamma_{q-1} + \Lambda_{q-1} \Gamma_q \end{pmatrix} \\
 P_d &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I_l], V_d = \Gamma_q
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ce qui conduit à un observateur observable.

Lorsque la matrice F_d est une matrice de Schur, on obtient un observateur asymptotique de la fonctionnelle linéaire Lx_k . Dans le cas contraire

ou si les valeurs propres de la matrice ne conviennent pas, il convient d'augmenter l'ordre q et de réitérer la réalisation à un ordre plus élevé [80, 99].

3.2.2 Construction de la matrice T

Dans cette partie, nous allons présenter une matrice T qui satisfait aux relations nécessaires que doit vérifier un observateur de fonctionnelle linéaire. On a Φ_i qui s'exprime selon (3.21) et (3.22).

Cela suggère, par la relation $G_d = TB_d$, que T puisse s'écrire sous la forme d'une matrice de taille $(q \times n)$:

$$T = \begin{pmatrix} LA_d^{q-1} - \sum_{i=1}^q \Gamma_i C_d A_d^{i-1} - \sum_{i=1}^{q-1} \Lambda_i LA_d^{i-1} \\ \vdots \\ LA_d^{q-j} - \sum_{i=j}^q \Gamma_i C_d A_d^{i-j} - \sum_{i=j}^{q-1} \Lambda_i LA_d^{i-j} \\ \vdots \\ L - \Gamma_q C_d \end{pmatrix}$$

Certains calculs soulignent que (3.9) et (3.10) sont vérifiés. Lorsque F_d est une matrice de Schur, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un observateur de fonctionnelle linéaire (3.7) pour le système (3.1) sont vérifiées.

3.2.3 Application sur la plaque chauffante 2D

Dans cette section [85], la construction de l'observateur de fonctionnelle linéaire est appliqué à l'estimation de la température de la plaque chauffante. Pour illustrer l'approche de conception proposée, considérons le même exemple que dans le chapitre 2 rappelé dans la figure 3.2.1.

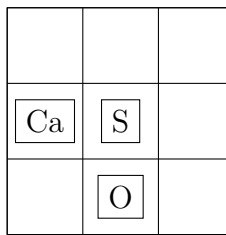


FIGURE 3.2.1 – Position des différents éléments

où S est la localisation de la source de puissance thermique injectée, Ca un capteur thermique physique placé dans un endroit voulu dans la plaque, traduit par la matrice C , et O le point dont on cherche à estimer traduit par la matrice L . On rappelle que l'on obtient le modèle d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.24)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & c & b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & d & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b & c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} f & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ 0 & g \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), L = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

avec $a = -1.40$, $b = 6.9 \times 10^{-3}$, $c = -0.71$, $d = -0.027$, $f = 1.38$ et $g = 0.69$.

La discrétisation du modèle d'état (3.24) suivant la procédure exprimée en section (3.1.1) avec un temps d'échantillonnage $T_{ech} = 1s$ conduit à un système en temps discret (3.5) avec :

$$A_d = \begin{pmatrix} a' & b' & c' & b' & d' & e & c' & e & f' \\ b' & g' & b' & d' & h & d' & e & i & e \\ c' & b' & a' & e & d' & b' & f' & e & c' \\ b' & d' & e & g' & h & i & b' & d' & e \\ d' & h & d' & h & j & h & k & h & d' \\ e & d' & l & i & h & g' & e & d' & l \\ c' & e & f' & l & d' & e & a' & l & c' \\ e & i & e & d' & h & d' & l & g & l \\ f' & e & c' & e & d' & b' & c' & b' & a' \end{pmatrix}, B_d = \begin{pmatrix} 0,74 & 6,74 \times 10^{-6} \\ 0,50 & 1,90 \times 10^{-3} \\ 0,74 & 6,74 \times 10^{-6} \\ 0,50 & 1,90 \times 10^{-3} \\ 7,68 \times 10^{-3} & 0,68 \\ 0,50 & 1,90 \times 10^{-3} \\ 0,74 & 6,74 \times 10^{-6} \\ 0,50 & 1,90 \times 10^{-3} \\ 0,74 & 6,74 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$C_d = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), L = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

avec ici $a' = 0.24$, $b' = 2.45 \times 10^{-3}$, $c' = 7.55 \times 10^{-6}$, $d' = 2.45 \times 10^{-5}$, $e = 7.54 \times 10^{-8}$, $f' = 2.32 \times 10^{-10}$, $g' = 0.48$, $h = 4.88 \times 10^{-3}$, $i = 1.50 \times 10^{-5}$, $j = 0.97$, $k = 2.45 \times 10^{-5}$ et $l = 2.45 \times 10^{-3}$.

On peut remarquer ici que, contrairement aux matrices A et B , les matrices A_d et B_d ne sont pas creuses et possèdent des valeurs dont les ordres de grandeurs sont variables.

Conception d'un observateur minimal

Les étapes suivantes illustrent la procédure de conception d'un observateur minimal :

- Recherche de l'ordre minimal :

Itération 1 : Test pour l'observateur minimum. Comme,

$$C_d A_d = (b \ d \ e \ g \ h \ i \ b \ d \ e)$$

$$L A_d = (e \ i \ e \ d \ h \ d \ l \ g \ l)$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_1) = 3$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ LA_d \end{pmatrix} = 4$.

\Rightarrow l'observateur minimum du premier ordre n'est pas réalisable.

Itération 2 : Test pour l'observateur minimal, $q = 2$. Comme,

$$C_d A_d^2 = \begin{pmatrix} 1.80 \times 10^{-3} & 5.38 \times 10^{-5} & 2.91 \times 10^{-7} & 0.23 & 7.14 \times 10^{-3} \\ 3.85 \times 10^{-5} & 1.80 \times 10^{-3} & 5.38 \times 10^{-5} & 2.91 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$L A_d^2 = \begin{pmatrix} 2.91 \times 10^{-7} & 3.85 \times 10^{-5} & 2.91 \times 10^{-7} & 5.38 \times 10^{-5} \\ 7.14 \times 10^{-3} & 5.38 \times 10^{-5} & 1.80 \times 10^{-3} & 0.23 & 1.8 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_2) = 5$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_2 \\ L A_d^2 \end{pmatrix} = 6$.

\Rightarrow l'observateur minimal du second ordre n'est pas réalisable.

Itération 3 : Test pour l'observateur minimal, $q = 3$. Comme,

$$C_d A_d^3 = \begin{pmatrix} 1.03 \times 10^{-3} & 7.15 \times 10^{-5} & 5.05 \times 10^{-7} & 0.11 & 8.11 \times 10^{-3} \\ 5.73 \times 10^{-5} & 1.03 \times 10^{-3} & 7.15 \times 10^{-5} & 5.05 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$L A_d^3 = \begin{pmatrix} 5.05 \times 10^{-7} & 5.73 \times 10^{-5} & 5.05 \times 10^{-7} & 7.15 \times 10^{-5} & 8.11 \times 10^{-3} \\ 7.15 \times 10^{-5} & 1.03 \times 10^{-3} & 0.11 & 1.03 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons : $\text{rang}(\Sigma_3) = 7$ et $\text{rang} \begin{pmatrix} \Sigma_3 \\ L A_d^3 \end{pmatrix} = 7$.

\Rightarrow L'observateur candidat minimal du troisième ordre est réalisable.

Il faut vérifier que F_d est une matrice de Schur :

D'après (3.12), il existe donc une combinaison linéaire, Γ_i , pour $i \in \llbracket 0 ; q \rrbracket$, et Λ_i , pour $i \in \llbracket 0 ; q - 1 \rrbracket$, tel que :

$$L A_d^3 \Sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} -0.05 & 0.05 & 0.47 & -0.47 & -1.22 & 1.22 & 1 \end{pmatrix}$$

où Σ_3^\dagger est la pseudo inverse de Σ_3 .

On en déduit que, $\Lambda_0 = 0.05, \Lambda_1 = -0.47, \Lambda_2 = 1.22$, qui mène à F_d :

$$F_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.05 \\ 1 & 0 & -0.47 \\ 0 & 1 & 1.22 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de F_d sont : $\{0.24, 0.48, 0.48\}$, F_d est donc une matrice de Schur. Par conséquent, l'observateur d'ordre $q = 3$ est asymptotiquement convergent.

• **Conception de l'observateur minimal d'ordre $q = 3$:**

D'après, $LA^3\Sigma_3^\dagger$, on a : $\Gamma_0 = -0.05, \Gamma_1 = 0.47, \Gamma_2 = -1.22, \Gamma_3 = 1$

De (3.23), nous obtenons,

$$G_d = \begin{pmatrix} 1.28 \times 10^{-13} & -3.23 \times 10^{-16} \\ -6.46 \times 10^{-13} & 1.13 \times 10^{-15} \\ 5.41 \times 10^{-13} & 2.05 \times 10^{-15} \end{pmatrix}, H_d = \begin{pmatrix} 6.17 \times 10^{-14} \\ -3.80 \times 10^{-13} \\ 5.04 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$P_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_d = 1$$

Compte tenu des ordres des grandeurs des coefficients des matrices G_d et H_d , on pourra approcher leurs valeurs par :

$$G_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_d = 1$$

On peut remarquer que le résultat obtenu vérifie l'hypothèse physique du système symétrique, la sortie de l'observateur conduit à une température estimée en position O égale à celle en position Ca , la différence résidant dans l'effet de conditions initiales différentes.

On peut conclure que la taille de l'observateur de fonctionnelle linéaire est la même pour les deux types d'observateurs continu et discret, $q = 3$. Par contre, nous pouvons remarquer que les valeurs propres de l'observateur discret sont les exponentielles des valeurs propres de l'observateur linéaire continu.

La conception de cet observateur est terminée et la procédure peut être arrêtée. Si les pôles ne sont pas acceptables, nous devons augmenter l'ordre de l'observateur.

Résultats de simulation

La figure 3.2.2, montre le résultat de simulation de l'observateur conçu, et le système initial pour une entrée en rampe.

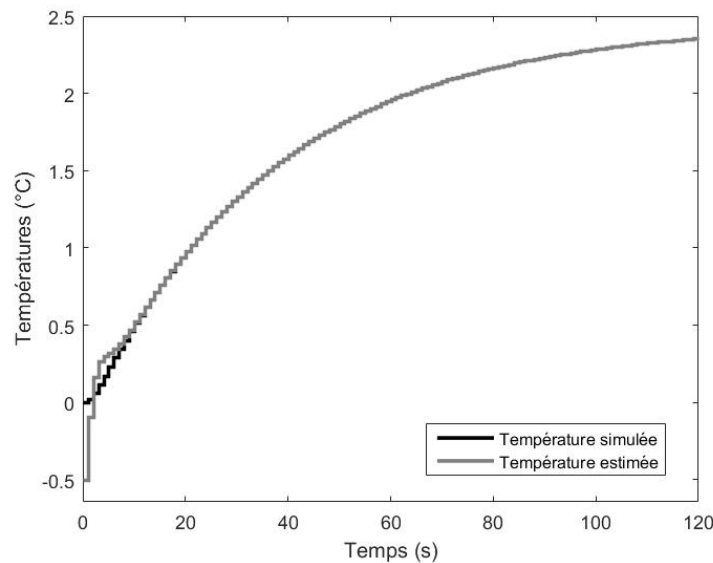


FIGURE 3.2.2 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal, avec conditions initiales différentes.

La sortie de l'observateur conduit à une température estimée en position O égale à celle en position Ca sans erreur de trainage, ce qui nous permet de conclure que cet observateur est apte à estimer la température quelles que soient les conditions initiales avec une réponse rapide.

3.2.4 Discrétisation plus fine de la plaque chauffante $2D$

L'étude précédente a présenté un cas simple où le résultat peut se déduire en utilisant une analyse physique. Afin de montrer d'une façon plus générale la capacité de l'observateur dans l'estimation de la température, nous proposons dans ce paragraphe l'étude d'un autre exemple. Considérons un modèle de système avec une discrétisation plus précise avec 11 surfaces élémentaires conduisant à un modèle d'espace d'état de dimension 121 comme le montre la figure 3.2.3, où la position du capteur et le point estimé sont choisis afin d'assurer un cas non-symétrique.

Comme dans l'exemple précédent, les équations de l'observateur peuvent être approximées par (3.25), et le résultat de la simulation est donné par la figure 3.2.4.

$$\begin{aligned}
 G_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.49 \times 10^{-2} & 0 \\ -0.10 & 0 \\ 0.44 & -2.37 \times 10^{-2} \\ -1.33 & 0 \\ 2.63 & 0.16 \\ -3.28 & -0.35 \\ 2.33 & 0.17 \\ -0.72 & 6.93 \times 10^{-2} \end{bmatrix}, H_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.02 \times 10^{-2} \\ -0,13 \\ 0,62 \\ -1,94 \\ 3,98 \\ -5,17 \\ 3,82 \\ -1,22 \end{bmatrix} \\
 P_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, V_d = 2.47.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

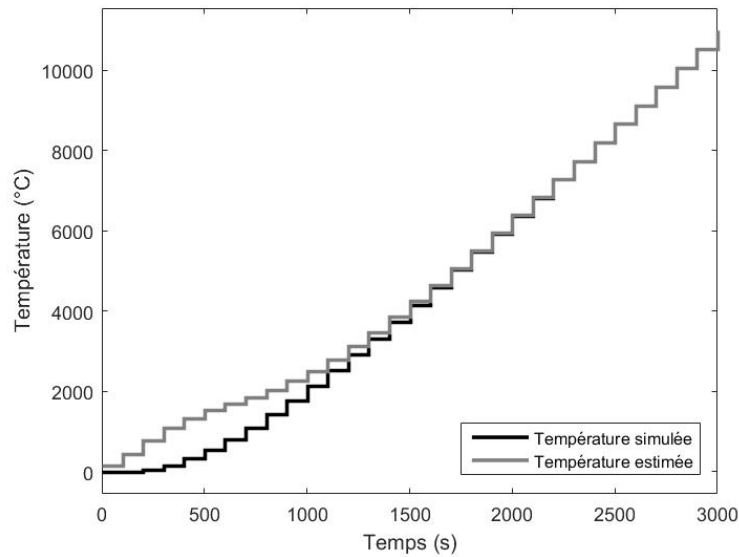


FIGURE 3.2.4 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal réduit $q = 14$, avec conditions initiales différentes.

Nous pouvons conclure que l'observateur de fonctionnelle linéaire est capable d'estimer avec précision la température d'une plaque chauffante. En outre, les positions relatives du capteur, de la source et des points estimés influencent la dimension de l'observateur.

Nous pouvons remarquer que les valeurs propres de l'observateur discret sont les exponentielles des valeurs propres de l'observateur linéaire continu.

3.3 Échantillonné bloqué de l'OFL continu

Le but de la conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire d'ordre minimal est de pouvoir être implémenté sur calculateur numérique embarqué. Pour cela, il est possible d'envisager, pour une application temps-réel de discrétiser cet observateur pour obtenir un module échantillonné-bloqué. Par conséquent, nous présentons la discrétisation d'un observateur de fonctionnelle linéaire continu. Un bloqueur d'ordre zéros est utilisé sur $u(t)$ et $y(t)$ afin de s'assurer que les commandes de l'observateur sont bloquées.

Considérons le même exemple qu'à la figure 3.2.1, présenté par l'équation d'état d'un observateur de fonctionnelle linéaire continu (détaillé dans le chapitre 2), défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.71 \\ 1 & 0 & -2.51 \\ 0 & 1 & -2.83 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 1.43 \times 10^{-14} & 7.75 \times 10^{-16} \\ 1.15 \times 10^{-13} & 4.88 \times 10^{-16} \\ 7.02 \times 10^{-14} & 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \quad + \begin{pmatrix} 5.66 \times 10^{-14} \\ 1.18 \times 10^{-13} \\ 5.06 \times 10^{-14} \end{pmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) = (0 \quad 0 \quad 1) z(t) + 1 y(t) \end{array} \right. \quad (3.26)$$

La discrétisation de la représentation d'état de l'observateur de fonctionnelle linéaire continu (3.26), avec un temps d'échantillonnage $T_{ech} = 1s$ conduit à un observateur à temps discret présenté par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.14 & -0.15 \\ 0.77 & 0.44 & -0.67 \\ 0.19 & 0.21 & -0.15 \end{pmatrix} z_k + \begin{pmatrix} -2.82 \times 10^{-15} & 7.32 \times 10^{-16} \\ 5.62 \times 10^{-14} & 7.14 \times 10^{-16} \\ 3.89 \times 10^{-14} & 1.61 \times 10^{-16} \end{pmatrix} u_k \\ \quad + \begin{pmatrix} 4.13 \times 10^{-14} \\ 8.75 \times 10^{-14} \\ 3.88 \times 10^{-14} \end{pmatrix} y_k \\ \hat{v}_k = (0 \quad 0 \quad 1) z_k + 1 y_k \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Les valeurs propres de F_d sont : $\{0.48, 0.48, 0.24\}$, donc F_d est une matrice de Schur.

Compte tenu des ordres des grandeurs des coefficients des matrices G_d et H_d , le modèle peut être approché par :

$$G_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le résultat de simulation est présenté par la figure 3.3.1. Il est clair que la fonction estimée converge asymptotiquement vers sa vraie valeur.

On peut également remarquer qu'il existe une relation de similitude entre les états des observateurs obtenus par les deux techniques.

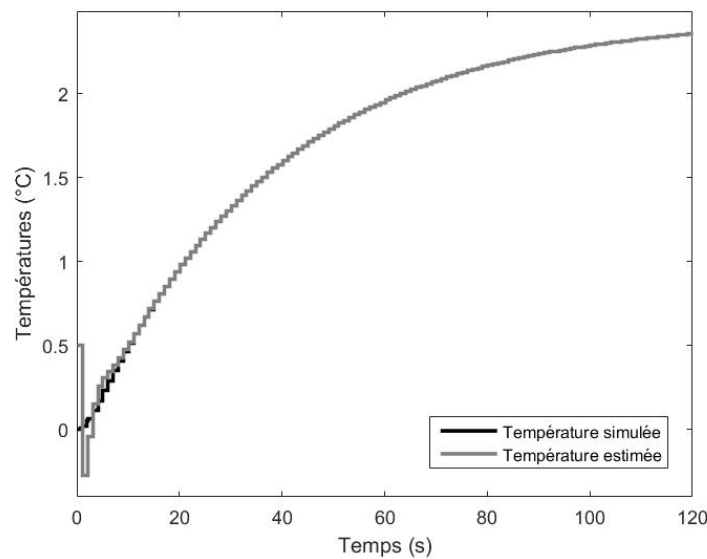


FIGURE 3.3.1 – Résultat de simulation pour la mise en œuvre d'observateur minimal continu discrétisé réduit $q = 3$, avec conditions initiales différentes.

3.4 Intégration numérique d'un observateur continu

Il existe un grand nombre de façons de résoudre une équation différentielle et aucune méthode n'est clairement supérieure à toutes les autres en toutes circonstances. De nos jours, la technique Runge-Kutta d'ordre 4 est souvent utilisée. Néanmoins, les recherches dans ce domaine ne sont pas encore terminées et le développement des techniques numériques continue, surtout pour les situations où une très grande précision est demandée [90].

Soit le système d'équations d'état déterministe à temps continu exprimé par (3.1), qui est un système d'équations différentielles du premier ordre. Dans le but de résoudre ce système, nous utilisons l'une des

méthodes d'intégration numérique d'équations différentielles du premier ordre, comme les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta.

Considérons une équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \quad (3.28)$$

avec pour condition initiale : $x(t_0) = x_0$, où, t_0 est l'instant initial.

Choisissons l'intervalle de longueur T sur lequel on veut approcher $(x(t), y(t))$. Commençons par subdiviser l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en N sous-intervalles de même longueur h et appelons t_n les instants de subdivision. Nous avons donc :

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad t_n = t_0 + nh \quad \text{pour} \quad n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket \quad (3.29)$$

3.4.1 Méthode d'Euler

Appelée aussi méthode de la tangente, c'est la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles. On considère que, h étant petit, le développement de $y(t_{n+1})$ jusqu'à l'ordre 1 autour du point t_n est s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h\dot{x}(t) + O(h^2), \\ &= x(t_n) + hf(x(t), y(t)) + O(h^2). \end{aligned}$$

L'application de cette formule pour calculer les $x(t)$ est connue comme méthode d'Euler, on remarque que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de $O(h^2)$. Il est clair qu'on peut augmenter la précision de cette méthode en diminuant h , mais un h petit implique qu'on doit évaluer la fonction un grand nombre de fois ce qui est coûteux en temps d'exécution. De plus, un grand nombre d'évaluations de la fonction peut provoquer un cumul des erreurs numériques commises par la machine.

Considérons le même exemple qu'à la figure 3.2.1, présenté par l'équation d'état d'un observateur de fonctionnelle linéaire continu (détaillé dans le chapitre 2), défini par (3.26).

La figure 3.4.1 montre le résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur continu en utilisant la méthode d'Euler.

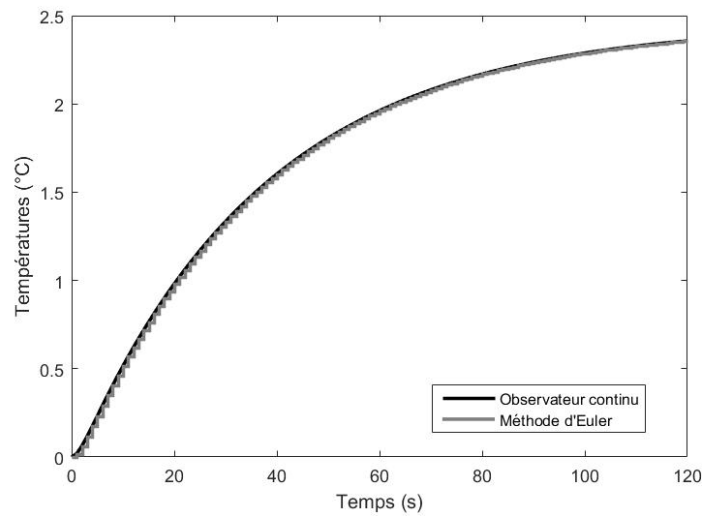


FIGURE 3.4.1 – Résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant Euler pour $T_{ech} = 1s$, avec conditions initiales nulles.

3.4.2 Méthodes de Runge-Kutta

En pratique, Runge-Kutta remplacent l'évaluation analytique des dérivées d'ordres $m, m > 1$ par des dérivées numériques obtenues en évaluant la fonction $f(x(t), y(t))$ à différents temps intermédiaires.

Considérons toujours le même exemple qu'à la figure 3.2.1, présenté par l'équation d'état d'un observateur de fonctionnelle linéaire continu (détaillé dans le chapitre 2), défini par (3.26).

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Cette méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est symétrique puisqu'elle revient à évaluer numériquement la dérivée au centre de l'intervalle. Les équations de cette méthode sont :

$$\begin{cases} k_1 = hf(x(t), y(t)) \\ k_2 = hf\left(x(t) + \frac{1}{2}h, y(t) + \frac{1}{2}k_1\right) \\ x(t_{n+1}) = x(t_n) + k_2 + O(h^3) \end{cases} \quad (3.30)$$

La figure 3.4.2 montre le résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant la méthode de Range-Kutta d'ordre 2.

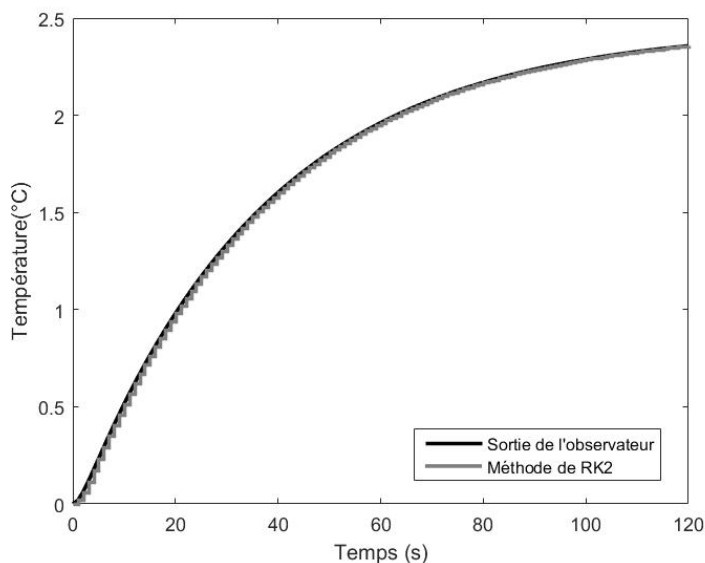


FIGURE 3.4.2 – Résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant RK2 pour $T_{ech} = 1s$, avec conditions initiales nulles.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Afin d'atteindre une plus grande précision, on peut calculer des valeurs de la dérivée en 4 points de l'intervalle. La formule de Runge-Kutta à l'ordre 4 est de loin la plus utilisée. Elle a pour forme :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \quad (3.31)$$

avec,

$$\begin{cases} k_1 = hf(x(t), y(t)) \\ k_2 = hf\left(x(t) + \frac{1}{2}h, y(t) + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x(t) + \frac{1}{2}h, y(t) + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = hf(x(t) + h, y(t) + k_3) \end{cases} \quad (3.32)$$

On montre maintenant en figure 3.4.3 le résultat de simulation de l'application de Runge-Kutta à l'ordre 4 afin d'intégrer l'observateur de fonctionnelle linéaire proposé en chapitre 2.

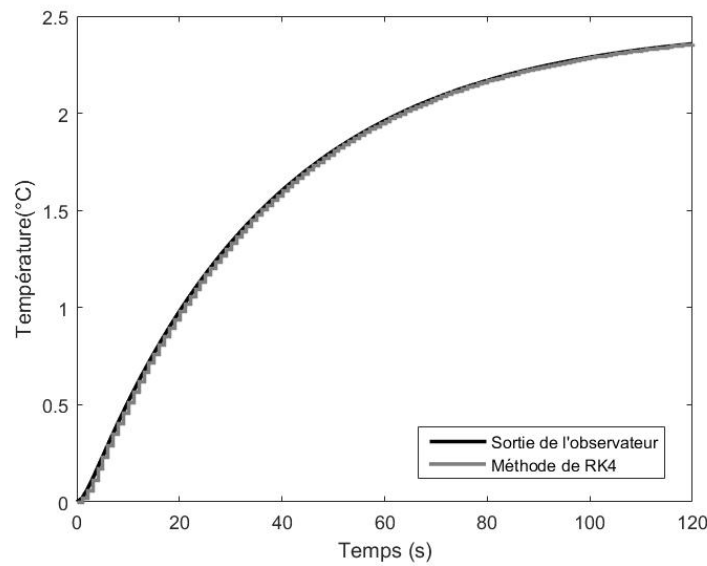


FIGURE 3.4.3 – Résultat de simulation pour la discrétisation de l'observateur en utilisant RK4 pour $T_{ech} = 1s$, avec conditions initiales nulles.

Afin d'évaluer l'efficacité de l'observateur, nous avons comparé les différentes méthodes d'intégration numérique de l'observateur continu, Euler, RK2 et RK4, pour valider la meilleure méthode. La figure 3.4.4 montre le résultat de simulation des estimations des erreurs des différentes méthodes, avec conditions initiales différentes. Dans la pratique, cela peut correspondre à une modification du flux ou de la température ambiante pendant l'expérience.

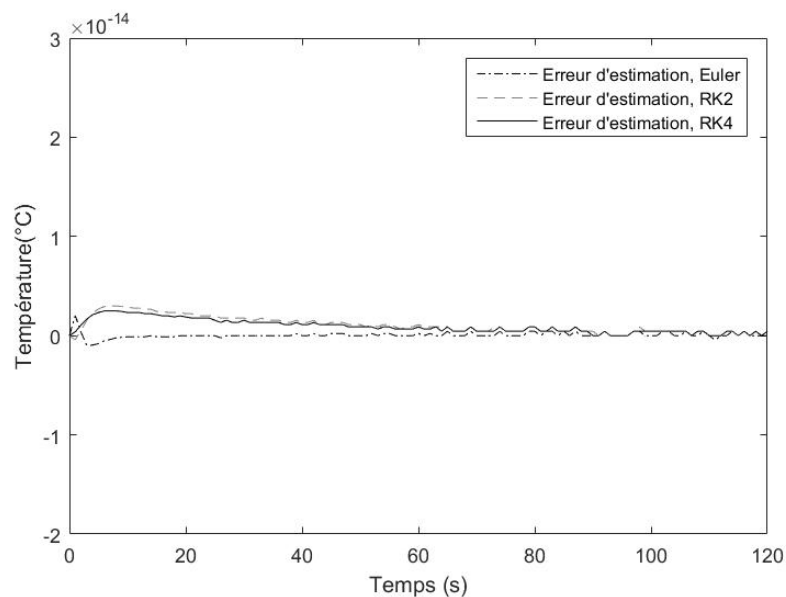


FIGURE 3.4.4 – Résultat de simulation des erreurs d'estimation pour les différentes méthodes Euler, RK2 et RK4 pour $T_{ech} = 1s$, avec les mêmes conditions initiales non nulles.

La figure 3.4.4 montre que l'erreur d'estimation tend vers zéros pour les trois méthodes d'intégration numérique, avec les mêmes conditions initiales. On peut conclure que la méthode d'intégration numérique RK4 est apte à estimer la température quelles que soient les conditions initiales, avec moins d'erreurs par rapport à la méthode d'Euler et RK2.

3.5 Comparaison entre les différentes techniques

Dans cette section, nous allons comparer les différents types d'observateurs exprimés avant. Le premier type est l'observateur de fonctionnelle linéaire en temps discret, conçu du modèle d'état échantillonné-bloqué, noté par $OFL_{discret}$. Le deuxième type est le modèle échantillonné-bloqué de l'observateur de fonctionnelle linéaire continu noté par $OFL_{ech-blo}$, et le troisième type est l'observateur de fonctionnelle linéaire en temps continu implémenté avec des algorithmes de résolution numériques noté par $OFL_{int-num}$. Évidemment, la période d'échantillonnage maximale reste inférieure à la plus petite des constantes de temps du système.

Le tableau 3.5.1 résume cette comparaison, avec q l'ordre de l'observateur, n le nombre d'états, m le nombre de sorties, d le nombre d'entrées, et $l = 1$ le nombre de mesures :

	$OFL_{discret}$	$OFL_{ech-blo}$	Euler	$OFL_{int-num}$ RK2	RK4
Valeurs propres de F_d	VP_{dis}	VP_{ech}	VP_{int}	VP_{int}	VP_{int}
Nb d'addition	$Nb_{Add_{dis}}$	$Nb_{Add_{ech}}$	$Nb_{Add_{Eul}}$	$Nb_{Add_{RK2}}$	$Nb_{Add_{RK4}}$
Nb de multiplication	$Nb_{Mult_{dis}}$	$Nb_{Mult_{dis}}$	$Nb_{Mult_{Eul}}$	$Nb_{Mult_{RK2}}$	$Nb_{Mult_{RK4}}$

TABLEAU 3.5.1 – Complexités algorithmiques des différents observateurs.

où

$$\left\{ \begin{array}{l} VP_{dis} = [0.24, 0.48, 0.48], \\ Nb_{Add_{dis}} = 3q + d + 1, \\ Nb_{Mult_{dis}} = 3q + dq + 1. \\ VP_{ech} = [0.24, 0.48, 0.48], \\ Nb_{Add_{ech}} = q(q - 1) + d + 2q + 1, \\ Nb_{Mult_{ech}} = q^2 + dq + q + 2. \\ VP_{int} = [0.28, 0.28, -0.40], \\ Nb_{Add_{Eul}} = q + d + 2q + 1 + 1, \\ Nb_{Mult_{Eul}} = 2(q - 1) + 1 + dq + q + 2 + 1. \\ Nb_{Add_{RK2}} = 4q + 2d + 6, \\ Nb_{Mult_{RK2}} = 6q + 2dq + 5. \\ Nb_{Add_{RK4}} = 12q + 6d + 8, \\ Nb_{Mult_{RK4}} = 18q + 6dq + 14. \end{array} \right.$$

Le tableau montre que l'observateur d'intégration numérique de l'observateur continu $OFL_{int-num}(Euler)$, est plus rapide par rapport aux autres types d'observateurs. Dans un cas général de l'implémentation de cet observateur, il est nécessaire de considérer la complexité du calcul pour obtenir la température estimée de chaque échantillon. Considérant la structure des matrices F , G , et H , la température estimée nécessite donc $2(q - 1) + dq + q + 4$ multiplications et $3q + d + 2$ additions. Par conséquent, il devient clair que la dimension d'observateur est minimale, et que la meilleure solution est d'intégrer numériquement l'observateur de fonctionnelle linéaire continu.

3.6 Partie expérimentale

Nous présenterons dans cette partie le résultat de simulation des mesures expérimentales pour la mise en œuvre de l'observateur de fonctionnelle linéaire discret conçu par intégration numérique de l'observateur continu, nous traitons le cas d'un barreau mono-dimensionnel de gel encapsulant (détaillé au chapitre 1), où nous avons choisi une discrétisation par différence finie exprimée par un modèle d'état d'ordre 16.

Nous avons choisi de construire la température la plus chaude, où nous prenons la température la plus froide comme capteur. La figure 4.6.1 montre le résultat mesures expérimentales, pour l'intégration numérique de l'observateur continu en utilisant la méthode d'Euler.

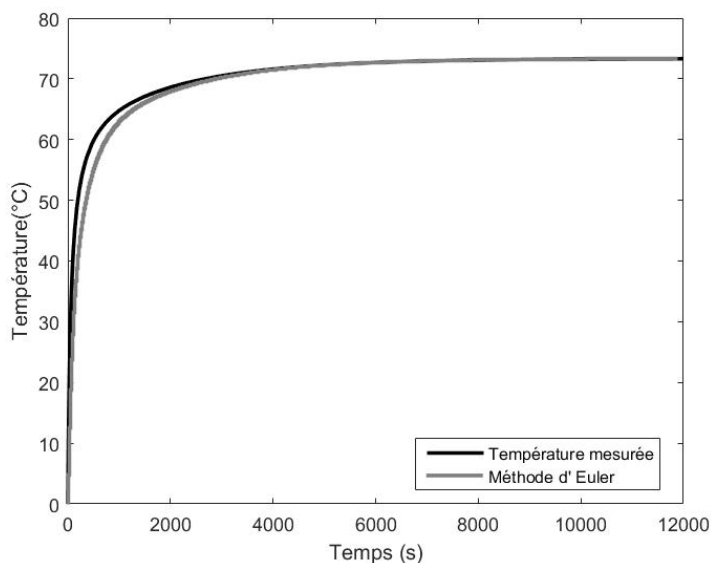


FIGURE 3.6.1 – Résultat d’expérimentale et de simulation pour la mise en œuvre d’observateur minimal, pour un modèle d’état d’ordre 16, avec conditions initiales nulles.

La figure 4.6.1 montre que la sortie de l’observateur conçu par intégration numérique converge vers la température simulée, avec un taux de décroissance donné par les valeurs propres de la matrice F , avec conditions initiales nulles, et une réduction d’ordre pertinente $q = 8$.

Conclusion

Ce document montre que les différents types d’observateurs sont capables d’estimer avec précision la température de la plaque chauffante. Le réglage de la période d’échantillonnage doit être fait en fonction du système physique. Par conséquent, la période d’échantillonnage doit être aussi faible que possible pour augmenter les performances de l’observateur en termes d’erreur d’estimation.

Nous avons montré, que pour des systèmes de grande dimension, la meilleure solution est l’intégration numérique de l’observateur continu, qui est un petit système ce qui réduit la complexité du calcul. Afin de valider notre choix, nous avons réaliser une application d’une étude expérimentale.

Une autre recherche future liée au travail présenté consistera à considérer les perturbations inconnues et les sources d’énergie agissant sur la plaque chauffée. L’observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues sera conçu dans ce cadre.

Chapitre 4

Application des observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues

Sommaire

Introduction	105
4.1 Observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues	107
4.2 Résultat principal	110
4.3 Conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues	112
4.3.1 Première étape	112
4.3.2 Deuxième étape	113
4.4 Exemple illustratif	115
4.4.1 Recherche de l'ordre minimal	116
4.4.2 Conception de l'observateur du second ordre	117
4.4.3 Conception de l'observateur du troisième ordre	118
4.5 Application sur la plaque chauffante	121
4.5.1 Recherche de l'ordre minimal	122
4.5.2 Conception de l'observateur du troisième ordre	124
4.6 Partie expérimentale	125
Conclusion	126

Introduction

Le problème de l'observation d'un système dynamique consiste à estimer certaines variables internes non mesurables, à partir des mesures fournies par des capteurs. Depuis les travaux de Luenberger [56, 57], des solutions au problème de l'observation pour un système linéaire sont considérées en deux directions. D'une part, des méthodes ont été développées pour la conception des observateurs de fonctionnelle linéaire (OFL) du vecteur d'état du système, conduit à des observateurs d'ordre réduit. D'autre part, notamment pour le diagnostic [23] ou la robustesse, le problème d'observation de l'état complet avec des entrées ou des perturbations inconnues a conduit à des méthodes de

conception pour les observateurs linéaires à entrées inconnues (OLEI). Les algorithmes et les conditions d'existence de ces observateurs ont été rapportés dans [64, 25, 33, 102, 48, 58], et dans les livres de [68, 101].

Les observateurs de fonctionnelle linéaire sont une version généralisée des observateurs ordinaires de Luenberger à ordre plein ou réduit, qui visent à reconstruire une ou plusieurs fonctions d'états du système [64, 89, 101, 80]. Néanmoins, les entrées ou les perturbations inconnues agissent sur le système, qui ne sont pas mesurées, ont été considérées dans la conception des observateurs de fonctionnelle linéaire seulement récemment [32, 42, 43, 44, 109], et des développements récents peuvent être trouvés dans [61, 63]. L'ordre minimal de ces observateurs est un problème ouvert. En effet, cela dépend de l'objectif recherché par rapport aux valeurs propres souhaitées de l'observateur. Il est bien connu que l'ordre minimal d'un observateur de fonctionnelle linéaire ne peut pas être inférieur au nombre de fonctions à estimer [101]. En fait, il existe certains mécanismes pour augmenter l'ordre d'un observateur de fonctionnelle linéaire ou d'un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues (OFLEI), pour obtenir un observateur éventuellement asymptotiquement stable, même en cas de non-déteçtabilité du système [27, 26]. Cependant, pour construire un observateur de fonctionnelle linéaire avec un ordre le plus petit possible, Fernando a présenté une méthodologie pour obtenir un OFLEI par augmentation du nombre de fonctionnelles à observer [26]. Cependant, entre le problème des observateurs à pôle fixe, et le problème des observateurs stables où les pôles sont situés au demi-plan de gauche, trouvant l'ordre le plus petit possible d'un OFLEI a été l'un des principaux défis dans ce domaine de recherche qui n'est pas encore complètement abordé [26].

Dans ce chapitre, nous récrivons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un OFLEI stable pour un système linéaire exprimé en [20, 78] et nous proposons une procédure directe et itérative pour obtenir un ordre minimal d'un observateur de fonctionnelle linéaire stable. La procédure proposée est simple et n'est pas basée sur la solution d'une équation de Sylvester, ou sur l'utilisation de formes canoniques. Nous utilisons une séquence itérative pour obtenir l'ordre le plus petit possible. La principale caractéristique de notre procédure de conception est la mise en évidence de certains degrés de liberté pour placer certains pôles de l'observateur obtenus.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 4.1, nous soulignons les conditions nécessaires et suffisantes bien connues pour l'existence d'un OFLEI, où ces conditions sont centrées sur l'existence d'une relation linéaire entre l'état du système et l'état de l'observateur. Pour surmonter cette difficulté, qui a été le point-clé dans la conception des observateurs de fonctionnelle linéaire pendant de nombreuses années, Darouach a proposé des critères dans [19] pour OFL et dans [20] pour OFLEI. Dans la section 4.2, nous détaillons la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un observateur asymptotique. Cette condition nécessaire et suffisante a été énoncée pour un observateur de fonctionnelle linéaire où les entrées sont complètement mesurées dans [31, 102], nous montrons ici la condition suffisante dans le cas des entrées inconnues. La section 4.3 est consacrée à la preuve constructive du résultat

principal et de la procédure de conception du OFLEI, où les dérivées successives du fonctionnelle d'état et la méthode de réalisation itérative conduisent à obtenir la structure de l'observateur. On peut remarquer que les résultats présentés étendent les résultats en [81] dans le cas où des entrées inconnues sont présentes. Enfin, un exemple illustre la procédure et montre l'avantage de notre conception par rapport aux précédentes dans la section 4.4. Enfin, la section 4.5 présente une application directe de cet observateur sur notre plaque chauffante afin d'estimer la température dans un endroit non accessible à la mesure, en présence des perturbations.

4.1 Observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues

Considérons le système décrit par les équations linéaires d'état avec des entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où pour tout instant $t \in \mathbb{R}^+$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ et $d(t) \in \mathbb{R}^r$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée, le vecteur de sortie du système et le vecteur des entrées inconnues. $A(n \times n)$, $B(n \times p)$, $C(m \times n)$ et $D(n \times r)$ représentent les matrices constantes connues du système. D et C sont respectivement de rang plein en colonnes et de rang plein en lignes.

Notre objectif est de proposer une procédure simple de construction d'un observateur linéaire pour estimer le vecteur $v(t)$ lié à l'état $x(t)$ par :

$$v(t) = Lx(t), \quad (4.2)$$

où $L(l \times n)$ est une matrice constante de rang plein en lignes, nous supposons que :

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} \right) = m + l.$$

L'observation de $v(t)$ peut être effectuée par un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues (OFLEI) qui est un observateur de Luenberger décrit par l'équation d'état suivante [56, 57] :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \\ \hat{v}(t) = Pz(t) + Vy(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

où, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $z(t)$ et $\hat{v}(t)$ représentent respectivement, le vecteur d'état de taille q , et le vecteur de sortie de l'observateur de taille l . Les matrices F , G , H , P , V et l'ordre q sont déterminés afin que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t) - \hat{v}(t)) = 0$.

De plus, nous recherchons un observateur avec un ordre le plus petit possible. Il est bien connu que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un observateur asymptotique (4.3) sont données par le résultat suivant [68, 101].

Théorème . *Le système observable (4.3) est un OFLEI de (4.2) pour le système (4.1), si et seulement si F est une matrice de Hurwitz, et qu'il existe une matrice $T(q \times n)$ telle que :*

$$FT + HC - TA = 0, \quad (4.4)$$

$$L - PT - VC = 0, \quad (4.5)$$

$$G - TB = 0, \quad (4.6)$$

$$TD = 0. \quad (4.7)$$

Démonstration. La preuve de la suffisance est bien connue et résumée dans ce qui suit. Nous insistons ensuite sur la nécessité d'observabilité de l'observateur. Notons les erreurs par : $\epsilon(t) = z(t) - Tx(t)$ et $e(t) = v(t) - \hat{v}(t)$. On a :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t), \\ &= Fz(t) + Gu(t) + Hy(t) - TAx(t) - TBU(t) - TDD(t), \\ &= F\epsilon(t) + (G - TB)u(t) + (FT + HC - TA)x(t) - TDD(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lorsque (4.4), (4.6), et (4.7) sont réalisées et que F est une matrice de Hurwitz, nous avons $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = 0$. L'erreur de reconstruction $e(t) = v(t) - \hat{v}(t)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} e(t) &= Lx(t) - Pz(t) - Vy(t), \\ &= (L - PT - VC)x(t) - P\epsilon(t) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $L - PT - VC = 0$, on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$. Inversement, lorsque (4.3) est un OFLEI du (4.2) pour le système (4.1), nous avons par linéarité, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i)}(t) = 0$. Avec $M = L - VC$, on est conduit, quand $t \rightarrow +\infty$, aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (Lx(t) - Pz(t) - Vy(t)) = 0, \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (Lx(t) - Pz(t) - VCx(t)) = 0, \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} ((L - VC)x(t) - Pz(t)) = 0, \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (Mx(t) - Pz(t)) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{e}(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} M(Ax(t) + Bu(t) + Dd(t)) - P(Fz(t) + Gu(t) + Hy(t)), \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (MA - PHC)x(t) + (MB - PG)u(t) + MDd(t) - PFz(t) = 0. \end{aligned}$$

Comme la dernière relation doit être réalisée pour tout $u(t)$ et $d(t)$, nous obtenons $MB = 0$ et $MD = 0$. En poursuivant cette procédure avec la dérivée successive de $e(t)$ on obtient, pour $i \in \llbracket 0; q - 1 \rrbracket$, :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (M_i x(t) - PF^i z(t)) = 0, \quad (4.9)$$

Montrons par récurrence que les matrices M_i sont récursivement définies par $M_0 = M$ et :

$$M_{i+1} = M_i A - P F^i H C.$$

En supposant (4.9), nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i+1)}(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (M_i \dot{x}(t) - P F^i \dot{z}(t)), \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (M_i (A x(t) + B u(t) + D d(t)) - P F^i (F z(t) \\ &\quad + G u(t) + H y(t))), \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} ((M_i A - P F^i H C) x(t) - P F^{i+1} z(t) \\ &\quad + (M_i B - P F^i G) u(t) + M_i D d(t)), \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i+1)}(t) = 0$ pour tout $u(t)$ et $d(t)$, nous avons $M_i B = P F^i G$ et $M_i D = 0$, et il vient l'expression des matrices M_i .

Rassemblons les relations (4.9), nous obtenons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{q-1} \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} P \\ P F \\ \vdots \\ P F^{q-1} \end{bmatrix} z(t) \right) = 0.$$

Comme l'observateur (4.3) est supposé observable, $\begin{bmatrix} P \\ \vdots \\ P F^{q-i} \end{bmatrix}$ est une matrice de rang plein en colonnes. Ainsi, il existe une matrice unique T :

$$T = \begin{bmatrix} P \\ P F \\ \vdots \\ P F^{q-1} \end{bmatrix}^{[1]} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{q-1} \end{bmatrix},$$

Tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (T x(t) - z(t)) = 0$. D'une part, cette propriété doit être réalisée pour tout $u(t)$, $x(t)$ et $d(t)$. Ainsi, à partir de (4.8), nous obtenons les relations (4.4, 4.6, 4.7) et F est une matrice de Hurwitz. D'une autre part, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$, pour tout $x(t)$ conduit à (4.5). \square

D'après le travail de Darouach [19, 20], plusieurs travaux (voir par exemple [101]) ont étudié ou utilisé un cas particulier de l'observateur de Luenberger où $P = I_q$. Ces observateurs, comme l'observateur de Darouach, sont évidemment observables. Dans le cas des entrées inconnues, l'observateur de Darouach :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F z(t) + G u(t) + H y(t), \\ \hat{v}(t) = z(t) + V y(t), \end{cases} \quad (4.10)$$

est un observateur asymptotique de (4.2) pour le système (4.1) si et seulement si :

$$1. \operatorname{rank} \left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ L & 0 \\ CA & CD \end{bmatrix} \right) = \operatorname{rank} \left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ L & 0 \\ CA & CD \\ LA & LD \end{bmatrix} \right).$$

$$2. \forall s, \Re(s) \geq 0, \operatorname{rank} \left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ CA & CD \\ sL - LA & -LD \end{bmatrix} \right) = \operatorname{rank} \left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ L & 0 \\ CA & CD \end{bmatrix} \right).$$

La première condition assure l'existence de la structure de Darouach (4.10), et la seconde conduit au suivi asymptotique de la fonctionnelle $v(t)$. La seconde condition est une condition de type Hautus [40], qui peut être utilisée uniquement pour les systèmes linéaires invariants, elle était exprimée dans [78] dans le cas où $D = 0$ comme :

$$LA = \Gamma_0 C + \Lambda_0 L + \Gamma_1 CA,$$

et (4.10) est un observateur de (4.2) si et seulement si Λ_0 , $(l \times l)$ est une matrice de Hurwitz. Ce point de vue a été approfondi aux systèmes linéaires non stationnaires [79, 54].

Dans la suite, nous développons ce critère pour le cas d'entrées inconnues.

Remarque . La méthode de Darouach [20] a été utilisée dans la majorité des articles traitant de la conception des observateurs de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues. Beaucoup de procédures de conception sont basées sur l'extension du fonctionnelle à observer. En effet, ces méthodes consistent à chercher une matrice $R(\rho \times n)$ telle que (4.3) avec $q = l + \rho$ et $P = I_q$ est un observateur de Darouach de $\bar{v}(t) = \begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix}$. Néanmoins, quelques tentatives ont été proposées dans [98, 97, 62, 61, 63, 26].

L'équation (4.4) est appelée une équation de Sylvester généralisée. Notons que c'est une équation non linéaire à résoudre en raison du fait que F , T et H sont inconnues. Néanmoins, jusqu'à [19, 20], un grand nombre de méthodes de conception ont été consacrées à rechercher la matrice T à partir de la forme canonique ou en imposant F . Mentionnons que notre procédure ne demande pas la détermination de T comme une condition préalable de la méthode. Pour l'exhaustivité de la preuve, T peut être donnée après.

4.2 Résultat principal

Définissons récursivement les matrices K_q et Σ_q , $q \in \mathbb{N}$ [84] :

- $K_0 = I_n$, for $q \geq 1$, $K_q = \begin{bmatrix} AK_{q-1} & D \end{bmatrix}$;

- $\Sigma_0 = C$, pour $q \geq 1$,

$$\Sigma_q = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{q-1} & 0(q(m+l) \times r) \\ LK_{q-1} & \\ \hline & CK_q \end{array} \right].$$

De façon plus explicite :

$$\Sigma_q = \left[\begin{array}{ccccccc} C & 0(m \times r) & 0(m \times r) & \cdots & 0(m \times r) & 0(m \times r) & 0(m \times r) \\ L & 0(l \times r) & 0(l \times r) & \cdots & 0(l \times r) & 0(l \times r) & 0(l \times r) \\ CA & CD & 0(m \times r) & \cdots & 0(m \times r) & 0(m \times r) & 0(m \times r) \\ LA & LD & 0(l \times r) & \cdots & 0(l \times r) & 0(l \times r) & 0(l \times r) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0(l \times r) & 0(l \times r) & 0(l \times r) \\ CA^{q-1} & CA^{q-2}D & \cdots & \cdots & CAD & CD & 0(m \times r) \\ LA^{q-1} & LA^{q-2}D & \cdots & \cdots & LAD & LD & 0(l \times r) \\ CA^q & CA^{q-1}D & \cdots & \cdots & CA^2D & CAD & CD \end{array} \right].$$

Dans la suite nous utilisons également la notation :

$$\Sigma_q = \left[\begin{array}{c} C_{q,0} \\ L_{q,0} \\ C_{q,1} \\ L_{q,1} \\ \vdots \\ C_{q,q-1} \\ L_{q,q-1} \\ C_{q,q} \end{array} \right], \quad (4.11)$$

où les matrices $C_{q,i}$, pour $i \in \llbracket 0; q \rrbracket$, et $L_{q,i}$, pour $i \in \llbracket 0; q-1 \rrbracket$, sont respectivement de dimensions $(m \times (n + rq))$ et $(l \times (n + rq))$.

Théorème . *Il existe un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues observable (4.3) du système (4.1) pour observer asymptotiquement le fonctionnel (4.2) si et seulement s'il existe des matrices Γ_i , $i \in \llbracket 0, q \rrbracket$, et Λ_i , $i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, telle que :*

$$LK_q = \sum_{i=0}^q \Gamma_i C_{q,i} + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i L_{q,i}, \quad (4.12)$$

et la matrice :

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0_l & \cdots & \cdots & 0_l & \Lambda_0 & \\ I_l & \ddots & & \vdots & \Lambda_1 & \\ 0_l & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_l & \Lambda_{q-2} & \\ 0_l & \cdots & 0_l & I_l & \Lambda_{q-1} & \end{array} \right], \quad (4.13)$$

est une matrice de Hurwitz.

La preuve de ce résultat est constructive et conduit à la conception d'un OFLEI, qui sera détaillée dans la section suivante.

La condition (4.12) qui peut s'écrire comme :

$$\text{rang}(\Sigma_q) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} \Sigma_q \\ LK_q \end{bmatrix} \right), \quad (4.14)$$

est la condition d'existence de l'équation d'état (4.3). La condition de Hurwitz assure que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (v(t) - \hat{v}(t)) = 0$. Ainsi, le théorème précédent apparaît comme une extension du critère de Darouach reformulé pour un OFLEI.

Dans ce qui suit, la condition suffisante pour l'existence d'un ordre minimum est utilisée afin de développer une méthode de conception d'un OFLEI. Lorsque la structure d'observateur obtenue ne conduit pas à un observateur asymptotiquement stable, la procédure consiste à augmenter l'ordre q . Cette démarche est détaillée dans l'exemple de la section 4.4.

4.3 Conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues

Cette section traite de la conception d'un OFLEI pour le problème d'observation défini par (4.1) et (4.2), lorsque la condition (4.12) est vérifiée. De plus, nous détaillons la procédure pour obtenir un observateur stable d'ordre minimum [84].

4.3.1 Première étape

Cette étape consiste à déterminer l'ordre q pour la structure (4.3). Premièrement, comme q est donné par la condition (4.14), supposons que cette relation (4.14) soit vérifiée, cela conduit à l'existence des matrices $\Gamma_i, i \in \llbracket 0, q \rrbracket$, et, $\Lambda_i, i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, dans (4.12) qui peuvent s'écrire comme :

$$\begin{aligned} LA^q &= \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^i, \\ LA^{q-1}D &= \sum_{i=1}^q \Gamma_i CA^{i-1}D + \sum_{i=1}^{q-1} \Lambda_i LA^{i-1}D, \\ &\vdots \\ LAD &= \Gamma_q CAD + \Gamma_{q-1}CD + \Lambda_{q-1}LD, \\ LD &= \Gamma_q CD. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Deuxièmement, la conception de l'observateur peut être considérée seulement lorsque la matrice (4.13) est une matrice de Hurwitz, qui peut être testée à partir de la décomposition (4.12) pour LK_q dans Σ_q . Lorsque les conditions du théorème ci-dessus sont satisfaites, on peut passer à la seconde étape qui consiste à déterminer les matrices de (4.3).

4.3.2 Deuxième étape

La conception de l'observateur utilise les dérivations successives de $v(t)$. Après q dérivations de $v(t) = Lx(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= LAx(t) + LBu(t) + LDd(t), \\ v^{(2)}(t) &= LA^2x(t) + LABu(t) + LB\dot{u}(t) + LADd(t) + LD\dot{d}(t), \\ &\vdots \\ v^{(q-1)}(t) &= LA^{q-1}x(t) + \sum_{i=0}^{q-2} LA^i Bu^{(q-2-i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-2} LA^i Dd^{(q-2-i)}(t), \quad (4.16) \\ v^{(q)}(t) &= LA^q x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i Bu^{(q-i-1)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i Dd^{(q-i-1)}(t). \end{aligned}$$

De l'équation (4.16), $LA^k x(t)$ est exprimée, pour $q \in \mathbb{N}^*$ par :

$$LA^k x(t) = v^{(k)}(t) - \sum_{i=0}^{k-1} LA^i Bu^{(k-i-1)}(t) - \sum_{i=0}^{k-1} LA^i Dd^{(k-i-1)}(t). \quad (4.17)$$

De plus, la dernière équation (4.16) peut aussi être écrite, en utilisant la première équation (4.15), par :

$$\begin{aligned} v^{(q)}(t) &= \sum_{i=0}^q \Gamma_i CA^i x(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i LA^i x(t) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i Bu^{(q-i-1)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} LA^i Dd^{(q-i-1)}(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pour éliminer $x(t)$ et $d(t)$ de l'équation (4.18), nous utilisons la dérivée de $v(t)$ et de $y(t)$. En effet, à partir de $y(t) = Cx(t)$ on obtient, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$CA^k x(t) = y^{(k)}(t) - \sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu^{(k-1-i)}(t) - \sum_{i=0}^{k-1} CA^i Dd^{(k-1-i)}(t).$$

En remplaçant les expressions des matrices $LA^i D$ de (4.15) et les termes $LA^i x(t)$ de (4.16), $i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, nous conduit à :

$$v^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Lambda_i v^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{q-1} \Phi_i u^{(i)}(t), \quad (4.19)$$

où, pour $i \in \llbracket 0, q-2 \rrbracket$:

$$\Phi_i = \left[LA^{q-1-i} - \sum_{j=i+1}^q \Gamma_j CA^{j-i-1} - \sum_{j=i+1}^{q-1} \Lambda_j LA^{j-i-1} \right] B, \quad (4.20)$$

et $\Phi_{q-1} = [L - \Gamma_q C] B$.

La réalisation de l'équation différentielle d'entrée-sortie (4.19) [49, 78, 81] avec la méthode que celle utilisée dans le chapitre (2), conduit à l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{q-1} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \Gamma_0 + \Lambda_0 \Gamma_q \\ \Gamma_1 + \Lambda_1 \Gamma_q \\ \vdots \\ \Gamma_{q-1} + \Lambda_{q-1} \Gamma_q \end{bmatrix} y(t), \\ \hat{v}(t) = [0_l \ \cdots \ 0_l \ I_l] z(t) + \Gamma_q y(t), \end{cases} \quad (4.21)$$

avec :

$$F = \begin{bmatrix} 0_l & \cdots & \cdots & 0_l & \Lambda_0 \\ I_l & \ddots & & \vdots & \Lambda_1 \\ 0_l & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_l & \Lambda_{q-2} \\ 0_l & \cdots & 0_l & I_l & \Lambda_{q-1} \end{bmatrix},$$

ce qui clôt la conception de l'observateur.

Lorsque la condition de Hurwitz sur la matrice F est satisfaite, (4.21) est un observateur asymptotique de la fonctionnelle linéaire $Lx(t)$.

Dans le cas contraire, il est nécessaire d'augmenter l'ordre q et de refaire la procédure de construction avec un ordre plus élevé [99, 80] comme il a été décrit dans le chapitre 2.

Les matrices Γ_i , $i \in \llbracket 0, q \rrbracket$, et Λ_i , $i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$ sont obtenues à partir de la solution du système linéaire $LK_q = X\Sigma_q$:

$$X = LK_q \Sigma_q^{[1]} + Z \left(I_{r_q} - \Sigma_q \Sigma_q^{[1]} \right),$$

où $r_q = m(q+1) + lq$ est le nombre de lignes de Σ_q , Z est une matrice de la même taille que X , et, $\Sigma_q^{[1]}$ est une inverse généralisée de Σ_q .

En raison des propriétés numériques et des implémentations aux logiciels numériques, nous pouvons choisir comme cas particulier $\Sigma_q^{[1]} = \Sigma_q^\dagger$. Dans le cas où Σ_q est de rang plein, la solution est unique, par conséquent, les matrices Γ_i et Λ_i aussi et les valeurs propres de la matrice F sont fixes.

Dans le cas contraire, lorsque $\text{rank}(\Sigma_q) = \rho_q < r_q$, des degrés de liberté $(r_q - \rho_q)$ peuvent être définis, pour placer certaines valeurs propres de F . Partitionnement X par rapport à la partition de rang de Σ_q en (4.11) :

$$X = [\Gamma_0 \ \Lambda_0 \ \Gamma_1 \ \Lambda_1 \ \cdots \ \Gamma_{q-1} \ \Lambda_{q-1} \ \Gamma_q],$$

nous sommes menés aux matrices Γ_i pour $i \in \llbracket 0; q \rrbracket$ et Λ_i pour $i \in \llbracket 0; q-1 \rrbracket$ en (4.12).

De façon à conclure la démonstration on va déterminer, a postérieur, la matrice T à partir de l'expression (4.20) pour les matrices Φ_i et la relation $G = TB$ (4.6), on peut introduire la matrice T suivante :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{q-1} \\ T_q \end{bmatrix},$$

où, pour $j \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$:

$$T_j = LA^{q-j} - \sum_{i=j}^{q-1} \Lambda_i LA^{i-j} - \sum_{i=j}^q \Gamma_i CA^{i-j},$$

et $T_q = L - \Gamma_q C$ comme montré dans le chapitre 2, T vérifie les relations (4.4, 4.5, 4.6).

De (4.15), il est facile de vérifier que $TD = 0$. Ainsi T satisfait aux relations nécessaires que doit vérifier un observateur de fonctionnelle linéaire [81].

4.4 Exemple illustratif

Avec [61], considérons le système (4.1) et la fonctionnelle (4.3) définis par :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2.51 & 0.33 & 0.68 & 1.12 & -0.25 \\ 0.14 & -0.23 & -0.31 & 0.91 & 0.36 \\ 0.51 & -1.18 & 0.41 & 0.63 & -0.77 \\ 0.22 & 0.33 & 0.46 & 0.65 & -0.77 \\ 0.23 & 0.33 & 3.97 & 0.06 & 0.69 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.00 \\ 0.92 \\ 1.20 \\ -1.27 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ -3.00 & -1.00 \\ 0.00 & 0.50 \\ 0.45 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2.00 & 0.00 & 0.00 & 9.00 & 0.30 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans l'exemple proposé, le signal d'entrée est de la forme $u(t) = 0, 2 + e^{-0,4t\cos(2t)}$, $t \geq 0$ présenté par la figure 4.4.1(a), et les deux signaux de perturbation sont pris en compte décrits par : $d_1(t) = 0, 1 + 0, 2e^{-0,1\sin(t)}\tanh(2t)$, $t \geq 0$ présenté par la figure 4.4.1(b), et $d_2(t) = 2$.

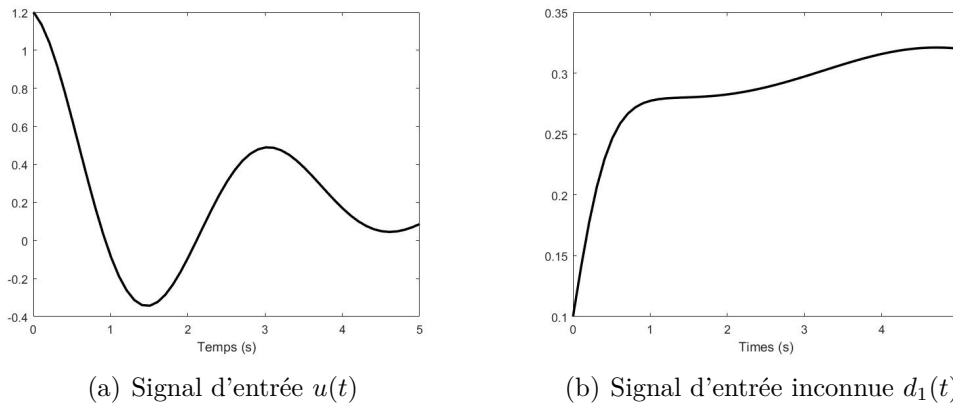


FIGURE 4.4.1 – Les signaux d'entrée et de perturbation utilisés pour la simulation

Dans [61], il est indiqué que ce problème d'observation a deux zéros invariants $(-2.16 \pm 2.02i)$. Par conséquent, ils apparaîtront comme des pôles de l'observateur. Nous avons étudié deux cas, le premier illustre notre procédure de conception proposée, où nous cherchons l'ordre le plus petit possible de notre observateur, le deuxième cas illustre l'introduction des degrés de liberté afin de changer certains pôles d'observateurs. À partir des zéros invariants, nous savons que l'ordre minimal de l'observateur est égal à 2. Mentionnons ici que [61] a conçu un observateur de troisième ordre avec des valeurs propres $\{-5, -2.16 \pm 2.02i\}$.

4.4.1 Recherche de l'ordre minimal

Itération 1 : Test pour l'observateur minimum. Comme,

$$CK_1 = \begin{bmatrix} -2.37 & 0.53 & 3.06 & 1.16 & 0.16 & 1.00 & 0.00 \\ 0.22 & 0.33 & 0.46 & 0.65 & -0.77 & 0.45 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Nous avons :

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2.00 & 0.00 & 0.00 & 9.00 & 0.30 & 0.00 & 0.00 \\ -2.37 & 0.53 & 3.06 & 1.16 & 0.16 & 1.00 & 0.00 \\ 0.22 & 0.33 & 0.46 & 0.65 & -0.77 & 0.45 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

et :

$$LK_1 = \begin{bmatrix} -2.97 & 3.72 & 6.69 & 8.11 & -7.22 & 6.05 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Comme, $\text{rang}(\Sigma_1) = 5$ et $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ LK_1 \end{bmatrix}\right) = 6$, l'observateur minimum du premier ordre n'est pas réalisable.

Itération 2 : Test pour l'observateur minimal, $q = 2$. Comme,

$$CK_2 = \begin{bmatrix} 7,88 & -4,08 & 0,66 & 0,51 & -2,35 & -3,44 & 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ -0,31 & -0,59 & -2,52 & 1,21 & -1,32 & -0,48 & -0,10 & 0,45 & 0,00 \end{bmatrix}.$$

Nous avons :

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,60 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 2,00 & 0,00 & 0,00 & 9,00 & 0,30 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -2,37 & 0,53 & 3,06 & 1,16 & 0,16 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,22 & 0,33 & 0,46 & 0,65 & -0,77 & 0,45 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -2,97 & 3,73 & 6,69 & 8,11 & -7,22 & 6,05 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 7,88 & -4,08 & 0,66 & 0,51 & -2,35 & -3,44 & 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ -0,31 & -0,59 & -2,52 & 1,21 & -1,32 & -0,48 & -0,10 & 0,45 & 0,00 \end{bmatrix}.$$

et :

$$LK_2 = \begin{bmatrix} 11,51 & -9,44 & -25,38 & 9,12 & -14,29 & -10,51 & -0,38 & 6,05 & 0,00 \end{bmatrix}.$$

Comme, $\text{rang}(\Sigma_2) = 8$ et $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_2 \\ LK_2 \end{bmatrix}\right) = 8$. Donc, l'observateur minimal du second ordre est réalisable.

À partir de :

$$\begin{aligned} X &= LK_2 \Sigma_2^\dagger, \\ &= \begin{bmatrix} 13,24 & 75,14 & -8,77 & 3,96 & 44,38 & -4,32 & 0,78 & 11,70 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

nous obtenons $\Lambda_0 = -8,77$ et $\Lambda_1 = -4,32$. Donc :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -8,77 \\ 1 & -4,32 \end{bmatrix}.$$

Comme prévu, les valeurs propres de F sont $(-2,16+2,02i, -2,16-2,02i)$, donc c'est une matrice de Hurwitz. Cela signifie que l'observateur d'ordre $q = 2$ est asymptotiquement convergent.

4.4.2 Conception de l'observateur du second ordre

Pour concevoir l'observateur du second ordre, nous obtenons, à partir de $X = LK_2 \Sigma_2^\dagger$:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \begin{bmatrix} 13,24 & 75,14 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_1 &= \begin{bmatrix} 3,96 & 44,38 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} 0,78 & 11,70 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De (4.21), nous déduisons les matrices de l'observateur :

$$G = \begin{pmatrix} -8.25 \\ -2.50 \end{pmatrix}, H = \begin{bmatrix} 6.36 & -27.55 \\ 0.57 & -6.21 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0.78 & 11.70 \end{bmatrix}.$$

La conception de l'observateur est terminée. La figure 4.4.2 montre le résultat de simulation avec conditions initiales non nulles, $x(t = 0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (resp. $z(t = 0) = [500 \ 200]^T$).

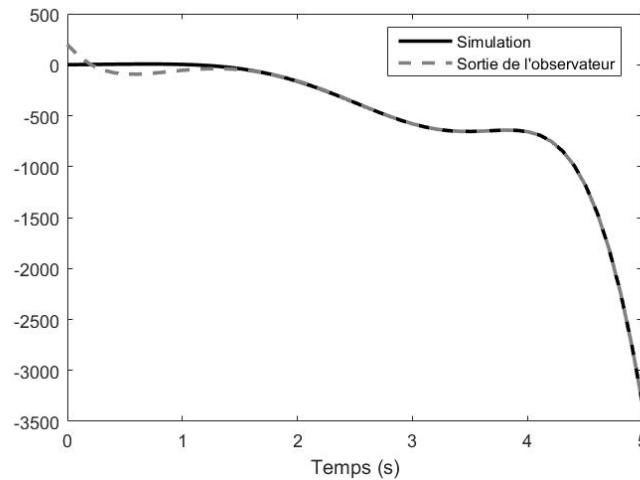


FIGURE 4.4.2 – Résultat de simulation pour l'observateur de second ordre.

On remarque que la sortie de l'observateur converge vers $v(t) = Lx(t)$ avec un taux de décroissance donné par les valeurs propres de F . On rappelle que dans [61], ils ont trouvé que l'ordre de l'observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues est $q = 3$. Avec notre procédure, nous avons obtenu un OFLEI minimal du second ordre.

4.4.3 Conception de l'observateur du troisième ordre

Dans cette section, nous détaillons la conception d'un OFLEI d'ordre $q = 3$. Nous illustrons les degrés de liberté qui peuvent apparaître pendant la procédure de conception.

La taille de Σ_3 est de (11,11) et nous obtenons $\text{rang}(\Sigma_3) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} \Sigma_3 \\ LK_3 \end{bmatrix} \right) = 10$. Par conséquent, il existe 10 lignes dans Σ_3 qui sont indépendantes.

Considérons la matrice Σ_3^* de taille (10×11) , tel que la composante $L_{3,2}$ est éliminée :

$$\Sigma_3^* = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \\ CA & CD & 0 & 0 \\ LA & LD & 0 & 0 \\ CA^2 & CAD & CD & 0 \\ CA^3 & CA^2D & CAD & CD \end{bmatrix}.$$

Ainsi, Σ_3^* a 10 lignes et $\text{rang}(\Sigma_3^*) = 10$. D'une part, (4.12) peut s'écrire comme :

$$LK_3 = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Lambda_0 & \Gamma_1 & \Lambda_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_3^* \\ L_{3,2} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

qui n'est pas unique.

Comme la ligne $L_{3,2}$ a été éliminée de Σ_3 , Λ_2 apparaît comme un degré de liberté. D'une autre part, nous avons :

$$LK_3 = \begin{bmatrix} \Gamma_{30} & \Lambda_{30} & \Gamma_{31} & \Lambda_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \Sigma_3^*, \quad (4.24)$$

$$L_{3,2} = \begin{bmatrix} \Pi_0 & \Delta_0 & \Pi_1 & \Delta_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \Sigma_3^*, \quad (4.25)$$

les matrices Γ_{ij} , Λ_{ij} , Π_i et Δ_i sont uniques. De (4.23) et (4.25), nous avons :

$$LK_3 = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Lambda_0 & \Gamma_1 & \Lambda_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \Sigma_3^* + \Lambda_2 \begin{bmatrix} \Pi_0 & \Delta_0 & \Pi_1 & \Delta_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \Sigma_3^*. \quad (4.26)$$

Par conséquent, en comparant et identifiant les décompositions (4.24) et (4.26), on obtient :

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \Gamma_{30} - \Lambda_2 \Pi_0, \\ \Lambda_0 = \Lambda_{30} - \Lambda_2 \Delta_0, \\ \Gamma_1 = \Gamma_{31} - \Lambda_2 \Pi_1, \\ \Lambda_1 = \Lambda_{31} - \Lambda_2 \Delta_1, \\ \Gamma_2 = \Gamma_{32} - \Lambda_2 \Pi_2, \\ \Gamma_3 = \Gamma_{33} - \Lambda_2 \Pi_3, \end{cases} \quad (4.27)$$

où Λ_2 est arbitraire. Dans cet exemple, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{30} &= \begin{bmatrix} -57.28 & -324.98 \end{bmatrix}, \Lambda_{30} = 37.95, \\ \Gamma_{31} &= \begin{bmatrix} -3.88 & -116.79 \end{bmatrix}, \Lambda_{31} = 9.92, \\ \Gamma_{32} &= \begin{bmatrix} 0.57 & -6.21 \end{bmatrix}, \Gamma_{33} = \begin{bmatrix} 0.78 & 11.70 \end{bmatrix}, \\ \Pi_0 &= \begin{bmatrix} 13.24 & 75.14 \end{bmatrix}, \Delta_0 = -8.77, \\ \Pi_1 &= \begin{bmatrix} 3.96 & 44.38 \end{bmatrix}, \Delta_1 = -4.32, \\ \Pi_2 &= \begin{bmatrix} 0.78 & 11.70 \end{bmatrix}, \Pi_3 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice F exprimée par :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Lambda_{30} - \Lambda_2 \Delta_0 \\ 1 & 0 & \Lambda_{31} - \Lambda_2 \Delta_1 \\ 0 & 1 & \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice F sont les racines du polynôme caractéristique $p_F(\lambda) = \lambda^3 - \Lambda_2 \lambda^2 - \Lambda_1 \lambda - \Lambda_0$ qui dépend du paramètre Λ_2 . Nous obtenons, avec $\Lambda_0 = 37.95 + 8.77\Lambda_2$ et $\Lambda_1 = 9.92 + 4.32\Lambda_2$:

$$p_F(\lambda) = (\lambda^2 + 4.32\lambda + 8.77)(\lambda - 4.32 - \Lambda_2).$$

En raison des zéros invariants, Λ_2 ne peut placer qu'une seule valeur propre pour F . Afin de faire une comparaison avec [61] où les racines de $p_F(\lambda)$ sont $(-2.16 \pm 2.02i, -5)$, nous prenons $\Lambda_2 = -9.32$, qui conduit à $\Lambda_1 = -30.34$ et $\Lambda_0 = -43.78$. Pour ces valeurs, nous obtenons l'observateur de Luenberger du troisième ordre défini par :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -43.78 \\ 1 & 0 & -30.34 \\ 0 & 1 & -9.32 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -41.96 \\ -20.84 \\ -2.50 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 31.96 & -136.90 \\ 9.36 & -58.14 \\ 0.56 & -6.21 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0.78 & 11.70 \end{bmatrix}.$$

La figure 4.4.3 montre le résultat de simulation de l'observateur conçu d'ordre $q = 3$, où la sortie de l'observateur est comparée à la fonction à observer. Les entrées et les conditions initiales du système sont identiques à celles utilisées pour la simulation de la figure 4.4.2. Les conditions initiales de l'observateur sont réglées par $z(t = 0) = [500 \ -300 \ 200]^T$.

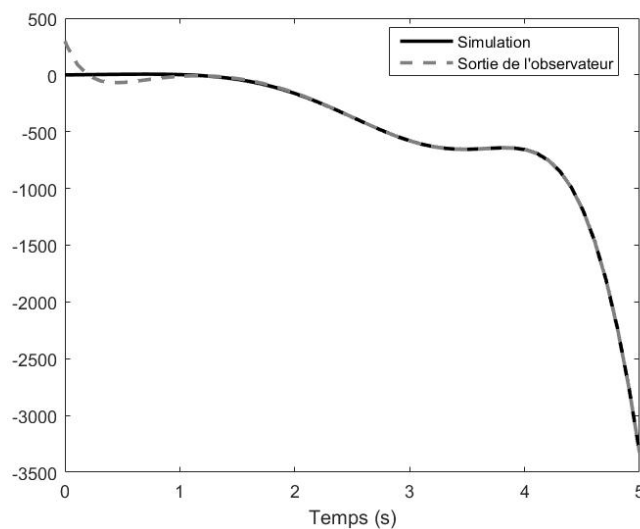


FIGURE 4.4.3 – Résultat de simulation de l'observateur d'ordre 3.

La figure 4.4.3 montre que le taux de décroissance est supérieur à celui de la figure 4.4.2, comme prévu avec le choix du degré de liberté Λ_2 et l'obtention des valeurs propres de F .

4.5 Application sur la plaque chauffante

Dans cette section, la construction d'un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues [84] est appliquée à l'estimation de la température de la plaque chauffante, où l'entrée inconnue peut représenter une température extérieure qui est constante mais elle peut varier pour devenir une entrée inconnue, ou la présence des perturbations qui peuvent affecter le système. Afin de suivre le mécanisme de construction de l'observateur, nous choisissons une discrétisation par différences finies de la plaque chauffante qui est exprimée par un modèle d'état d'ordre 9, comme le montre la figure 4.5.1, où S est la source thermique injectée au milieu de la plaque, Ca un capteur thermique physique placé dans un endroit voulu dans la plaque, traduit par la matrice C , E l'entrée inconnue traduit par la matrice D , et O le point dont on cherche à estimer la température traduit par la matrice L .

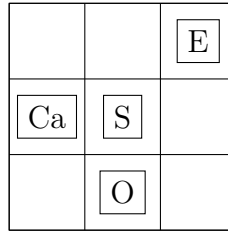


FIGURE 4.5.1 – Position des différents éléments.

D'après la modélisation thermique de la plaque chauffante, on arrive sur une représentation d'état de la forme (4.1) définie par :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & c & b & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b & d & b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b & c & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} f & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ 0 & g \\ g & 0 \\ f & 0 \\ g & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], L = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

où, $a = -1.40$, $b = 6.9 \times 10^{-3}$, $c = -0.71$, $d = -0.027$, $f = 1.38$, et $g = 0.69$.

Les matrices C , L , D et la position du coefficient g en deuxième colonne de B sont liées aux positions de Ca , O , E et S .

4.5.1 Recherche de l'ordre minimal

Itération 1 : Test pour l'observateur minimum. Comme,

$$CK_1 = \begin{bmatrix} 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & -0,71 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 \\ & & & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Nous avons :

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & -0.71 & 6.94 \times 10^{-3} \\ & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

et :

$$LK_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} \\ & & & & -0.71 & 6.94 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Comme, $\text{rang}(\Sigma_1) = 3$ et $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ LK_1 \end{bmatrix} \right) = 4$, l'observateur minimum du premier ordre n'est pas réalisable.

Itération 2 : Test pour l'observateur minimal, $q = 2$. Comme,

$$CK_2 = \begin{bmatrix} -1.47 \times 10^{-2} & 9.64 \times 10^{-5} & 0.00 & 0.51 & -5.16 \times 10^{-3} \\ -1.47 \times 10^{-2} & 4.82 \times 10^{-5} & 9.64 \times 10^{-5} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Nous avons :

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & -0.71 & 6.94 \times 10^{-3} \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} \\ -1.47 \times 10^{-2} & 9.64 \times 10^{-5} & 0.00 & 0.51 & -5.16 \times 10^{-3} \\ & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} & -0.71 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 \\ 4.82 \times 10^{-5} & -1.47 \times 10^{-2} & 9.64 \times 10^{-5} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$

et :

$$LK_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 4.82 \times 10^{-5} & 0.00 & 9.64 \times 10^{-5} & -5.16 \times 10^{-3} & 9.64 \times 10^{-5} \\ & & & -1.47 \times 10^{-2} & 0.51 & -1.47 \times 10^{-2} & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Comme, $\text{rang}(\Sigma_2) = 5$ et $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_2 \\ LK_2 \end{bmatrix}\right) = 6$, l'observateur minimal du second ordre n'est pas réalisable.

Itération 3 : Test pour l'observateur minimal, $q = 3$. Comme,

$$CK_3 = \begin{bmatrix} 2.41 \times 10^{-2} & 2.06 \times 10^{-4} & 1.00 \times 10^{-6} & -0.36 & 3.69 \times 10^{-3} \\ -7.03 \times 10^{-5} & 2.41 \times 10^{-2} & -2.06 \times 10^{-4} & 1,00 \times 10^{-6} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Nous avons :

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & -0.71 & 6.94 \times 10^{-3} \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} \\ -1.47 \times 10^{-2} & 9.64 \times 10^{-5} & 0.00 & 0.51 & -5.16 \times 10^{-3} \\ 0.00 & 4.82 \times 10^{-5} & 0.00 & 9.64 \times 10^{-5} & -5.16 \times 10^{-3} \\ 2.41 \times 10^{-2} & 2.06 \times 10^{-4} & 1.00 \times 10^{-6} & -0.36 & 3.69 \times 10^{-3} \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.94 \times 10^{-3} & -0.71 & 6.94 \times 10^{-3} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 4.82 \times 10^{-5} & -1.47 \times 10^{-2} & 9.64 \times 10^{-5} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.64 \times 10^{-5} & -1.47 \times 10^{-2} & 0,51 & -1.47 \times 10^{-2} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -7.03 \times 10^{-5} & 2.41 \times 10^{-2} & -2.06 \times 10^{-4} & 1,00 \times 10^{-6} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$

et :

$$LK_3 = \begin{bmatrix} 1.00 \times 10^{-6} & -7.03 \times 10^{-5} & 1.00 \times 10^{-6} & -2.06 \times 10^{-4} & 3.69 \times 10^{-3} \\ -2.06 \times 10^{-4} & 2.41 \times 10^{-2} & -0,36 & 2.41 \times 10^{-2} & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Comme $\text{rang}(\Sigma_2) = 7$ et $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \Sigma_3 \\ LK_3 \end{bmatrix}\right) = 7$, l'observateur minimal du troisième ordre est réalisable.

À partir de :

$$\begin{aligned} X &= LK_3 \Sigma_2^\dagger, \\ &= \begin{bmatrix} 0.71 & -0.71 & 2.51 & -2.51 & 2.83 & -2.83 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

nous obtenons $\Lambda_0 = -0.71$, $\Lambda_1 = -2.51$ et $\Lambda_2 = 2.83$. Donc :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.71 \\ 1 & 0 & -2.51 \\ 0 & 1 & -2.83 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de F sont $\{-0.71, -0.71, -1.40\}$, donc c'est une matrice de Hurwitz. Cela signifie que l'observateur d'ordre $q = 3$ est asymptotiquement convergent.

4.5.2 Conception de l'observateur du troisième ordre

Pour concevoir l'observateur du troisième ordre, nous obtenons, à partir de $X = LK_3\Sigma_3^\dagger$:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 0,71, \Gamma_1 = 2.51, \\ \Gamma_2 &= 2.83, \Gamma_3 = 1.00. \end{aligned}$$

De (4.21), nous déduisons les matrices de l'observateur :

$$G = \begin{bmatrix} -7.74 \times 10^{-14} & -2.26 \times 10^{-14} \\ -3.38 \times 10^{-12} & -1.61 \times 10^{-14} \\ -2.33 \times 10^{-12} & 0.00 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -2.33 \times 10^{-12} \\ -4.92 \times 10^{-12} \\ -2.32 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = 1.$$

Compte tenu des ordres des grandeurs des coefficients des matrices G et H , on pourra approcher leurs valeurs par :

$$G = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

On peut remarquer que le résultat obtenu vérifie l'hypothèse physique, que le système est symétrique, la sortie de l'observateur conduit à une température estimée en position O égale à celle en position Ca .

La conception de l'observateur est terminée et la procédure peut être arrêtée. Néanmoins, les pôles sont fixes. Si les pôles $\{-0.71, -0.71, -1.40\}$ ne sont pas acceptables, nous devons augmenter l'ordre de l'observateur.

La figure 4.5.2 montre le résultat de simulation de l'observateur conçu, avec conditions initiales non nulles.

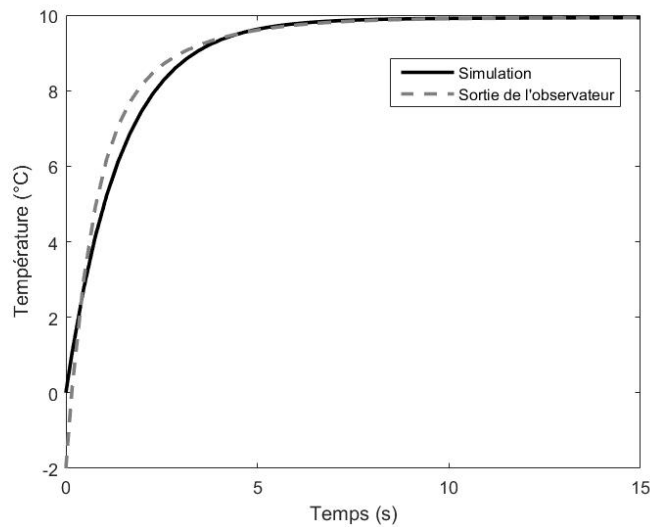


FIGURE 4.5.2 – Résultat de simulation de l’observateur du troisième ordre et le système initial avec conditions initiales non nulle.

On remarque que la température estimée converge vers la température simulée, ce qui nous permet de conclure que cet observateur est apte à estimer la température quelles que soient les conditions initiales avec une réponse rapide.

4.6 Partie expérimentale

Nous présentons dans cette section le résultat de simulation des mesures expérimentales pour la mise en œuvre de l’observateur de fonctionnelle linéaire à entrée inconnue, où nous traitons le cas d’un barreau mono-dimensionnel de gel encapsulant (détaillé au chapitre 1). Nous avons choisi une discrétisation par différence finie exprimée par un modèle d’état d’ordre 16, où allons reconstruire la température la plus chaude, en utilisant la position de la température la plus froide comme capteur, et considérant la température ambiante T_a comme entrée inconnue. La figure 4.6.1 montre le résultat des mesures expérimentales pour l’observateur conçu d’ordre $q = 8$ pour un modèle d’état initial d’ordre 16. Les conditions initiales de l’observateur sont réglées par $z(t = 0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2 \ -1 \ 1]$.

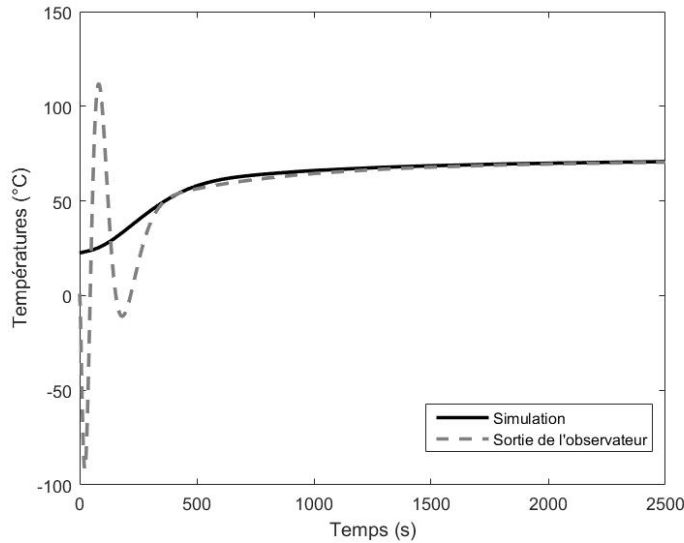


FIGURE 4.6.1 – Résultat d’expérimentale et de simulation pour la mise en œuvre d’observateur minimal, pour un modèle d’état d’ordre 16, avec conditions initiales non nulles.

On remarque que la sortie de l’observateur converge vers $v(t) = Lx(t)$ avec un taux de décroissance donné par les valeurs propres de F . Ce type d’observateur induit une réduction pertinente de l’ordre de l’observateur à entrée inconnue $q = 8$ par rapport au système initial d’ordre 16.

Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle procédure de conception pour obtenir un observateur de fonctionnelle linéaire à entrées inconnues. Nous avons détaillé les conditions nécessaires et suffisantes pour l’existence d’un OFLEI stable. La procédure proposée, est basée sur des opérations algébriques linéaires dans un espace d’états et ne doit résoudre que des équations linéaires. L’ordre de l’observateur obtenu peut être augmenté avec un certain degré de liberté afin d’imposer la réponse dynamique de la fonction observée.

Nous avons appliqué cette procédure de conception de l’observateur pour estimer la température d’une plaque chauffante en n’importe quel point désiré, en utilisant peu de mesures et en connaissant les entrées. Ce type d’observateur induit une réduction pertinente de l’ordre des observateurs par rapport à la dimension initiale du système. Nous avons montré que l’observateur était capable d’estimer avec précision l’évolution de la température d’un point désiré, quelles que soient les conditions initiales.

Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur la mise en place d'un modèle analytique afin de caractériser les contraintes électro-thermiques subies par les modules d'électronique de puissance, ainsi qu'une contribution dans le domaine des observateurs pouvant s'appliquer sur des systèmes linéaires à temps invariant. L'intérêt était de savoir si nous pouvions déterminer le comportement du module d'un point de vue multiphysique (électrique, thermique), afin d'être en mesure de reconstruire des grandeurs qui ne sont pas accessibles à la mesure en utilisant des observateurs. Les contraintes thermo-mécaniques conduisent à la dégradation des composants des modules d'électronique de puissance, ce qui entraîne le dysfonctionnement de ces modules. À ce propos le premier chapitre retrace les différents modes de défaillance des modules d'électronique de puissance. Les modes de dégradation, bien que correctement identifiés par de nombreux travaux, sont encore mal quantifiés. L'interaction des différents phénomènes physiques rend l'étude de ces défaillances plus compliquée. Les études s'intéressent dès lors à la compréhension des différents phénomènes physiques qui entrent en jeu dans un module d'électronique de puissance.

L'approfondissement des bases théoriques et mathématiques de ces mêmes phénomènes était l'objet du premier chapitre. Nous avons détaillé le comportement électrique des modules d'électronique de puissance et l'analogie électro-thermique qui nous a permis de définir les expressions des températures. Nous avons pu voir que cette analogie traduite est prise par l'intermédiaire des équations de transfert de chaleur et de leur lien avec le flux de la densité de courant. La connaissance de la répartition de température au niveau des composants des modules d'électronique de puissance permettant de déterminer les contraintes thermiques, nous avons consacré une partie à la modélisation thermique, en utilisant des modèles équivalents électriques, conduisant ainsi à une représentation d'état du système. Enfin, nous avons exposé les différents résultats de simulation issus du modèle. Ces résultats de simulation ont été par la suite confrontés à des mesures expérimentales.

En se basant sur ces modèles d'état, notre démarche a ensuite consisté à développer des techniques permettant d'estimer la température d'un composant dans un module de puissance. Dans un premier temps, nous avons construit des estimateurs linéaires à partir du modèle de transfert identifié expérimentalement. Cependant, cette démarche ne s'applique pas sur notre cas d'étude. Nous nous sommes donc réorientés vers une procédure de conception d'un observateur de fonctionnelle linéaire à partir d'une représentation d'état pour estimer la température en n'importe quel point désiré en utilisant des mesures et la connaissance des entrées. Ce type d'observateur induit une réduction

pertinente de l'ordre des observateurs par rapport à la dimension initiale du système. Enfin, nous avons démontré que l'observateur était capable d'estimer asymptotiquement l'évolution de la température d'un point désiré, quelles que soient les conditions initiales, sur un cas d'étude expérimental.

Le chapitre trois montre une comparaison entre différents algorithmes discrets permettant d'implanter les d'observateurs conçus au chapitre précédent. Le but de la conception de ces types d'observateurs de fonctionnelle linéaire d'ordre minimal discrets, est de pouvoir être implémentés sur calculateur numérique embarqué. Nous avons étudié les différents types d'algorithmes possibles d'observation afin de valider les résultats obtenus tout en minimisant le nombre d'opérations élémentaires effectuées par le calculateur à chaque nouvel échantillon acquis pour estimer la température, Le choix final de l'algorithme à mettre en œuvre pour l'implantation d'un observateur est le résultat de l'intégration numérique de l'observateur continu.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, nous avons présenté une nouvelle procédure de conception pour obtenir un observateur de fonctionnelle linéaire à entrée inconnue. L'originalité de ces travaux se trouve dans la technique de construction de l'observateur qui permet de simplifier grandement les calculs. Nous avons détaillé la procédure de conception de l'observateur pour estimer la température en n'importe quel point désiré dans le module de puissance, et ceci indépendamment d'une source de chaleur inconnue qui viendrait perturber le fonctionnement du système. La conception de cet observateur à entrées inconnues est basée, à l'instar des chapitres précédents, sur des opérations algébriques linéaires dans un espace d'états. L'ordre de l'observateur obtenu peut être augmenté pour faire apparaître des degrés de liberté qui permettent de modifier la dynamique de l'erreur d'estimation de la fonctionnelle observée. Nous nous sommes surtout intéressés à l'aspect de perturbation inconnue agissant sur le module d'électronique de puissance. Ce type d'observateur induit une réduction pertinente de l'ordre des observateurs par rapport à la dimension initiale du système. Enfin, un exemple de cas d'étude expérimental nous a permis de valider les résultats de simulation de cet observateur qui est capable d'estimer l'évolution de la température.

En termes de perspectives, plusieurs axes principaux se dégagent de cette étude. Tout d'abord, il sera nécessaire d'étudier la caractérisation du comportement multiphysiques du module d'électronique de puissance, comme l'électrique, la thermique, la mécanique, afin de présenter la modélisation des couplages électro-thermo-mécaniques au sein des modules de puissance. Cependant, dans ces modules, les sollicitations thermiques sont liées aux phénomènes électriques et présentent des gradients spatiaux importants avec des sources de chaleur parfois intenses et localisées. Un deuxième axe crucial concerne l'observation de la température d'un module complet d'électronique de puissance, où les représentations d'état issues de la modélisation multiphysique seront potentiellement de très grande dimension, il serait intéressant d'appliquer le même type d'observateurs linéaires conçu dans cette thèse, afin d'estimer la température dans un endroit voulu dans le module complet, sachant que, la faisabilité des techniques présentées dans ce manuscrit montrent que l'extension au 3D ne pose pas de problème méthodologique majeur mais seulement

sur les modélisations d'état. Un troisième axe devra se concentrer sur des observateurs pour reconstruire l'entrée inconnue. La plupart des systèmes qui nous entourent se modélisent par des systèmes non linéaires. En raison des différents types de non linéarités pouvant intervenir dans la modélisation, il est très difficile d'établir des méthodes génériques comme dans le cas des systèmes linéaires. Classiquement, lorsque le modèle d'un système est non linéaire, on procède à une linéarisation, soit autour d'un point de fonctionnement qui nous conduit à un système linéaire stationnaire, soit autour d'une trajectoire qui nous conduit à un système linéaire non stationnaire traduisant alors de façon plus précise la réalité, qui sera un dernier axe à envisager.

Bibliographie

- [1] Captif. aap anr capteurs innovants intégrés et logiciels au cœur d'un dispositif d'électronique de puissance. embedded innovative sensors and software in power electronic components. <http://www.iut-tarbes.fr/rech/cv/Irenezambettakis/articles/CAPTIF-scientific-description.pdf>, 2014.
- [2] Efficacité énergétique des procédés et des systèmes (ds0205). <http://www.agence-nationale-recherche.fr/projet-anr/tx-lwmsuivibilan>, 2014.
- [3] M. Aldeen and H. Trinh. Reduced-order linear functional observer for linear systems. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 146(5) :399–405, 1999.
- [4] J. Antonios. *Développement de modèles et de méthodes de calculs électriques et thermiques appliqués aux onduleurs à IGBT*. PhD thesis, Nantes, 2011.
- [5] K. J Astrom and B Wittenmark. *Computer-controlled systems : theory and design*, volume 1. Englewood Cliffs (N.J.) , Prentice Hall, 1990.
- [6] N. Belouaggadia, N. C. Abid, and R. Brun. *Eléments fondamentaux des transferts thermiques*. 2015.
- [7] K. Berkoune. *Approche mathématique pour la modulation de largeur d'impulsion pour la conversion statique de l'énergie électrique : application aux onduleurs multiniveaux*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2016.
- [8] A. M. Bianchi, Y. Fautrelle, and J. Etay. *Transferts thermiques*. PPUR presses polytechniques, 2004.
- [9] J. Bielen, J. J. Gommans, and F. Theunis. Prediction of high cycle fatigue in aluminum bond wires : A physics of failure approach combining experiments and multi-physics simulations. In *Thermal, Mechanical and Multiphysics Simulation and Experiments in Micro-Electronics and Micro-Systems, 2006. EuroSime 2006. 7th International Conference on*, pages 1–7. IEEE, 2006.
- [10] P Borne, G Dauphin-Tanguy, J. P Richard, F Rotella, and I Zambettakis. *Analyse et régulation des processus industriels : régulation numérique*, volume 1. Editions Technip, 1993.
- [11] C. Brezinski. *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*. Springer, 1980.

- [12] J. P. Chancelier. scilaba l'école nationale des ponts et chaussées <http://cermics.enpc.fr/scilab>.
- [13] J. Chevallier, B. Theys, A. Lusson, C. Grattepain, A. Deneuille, and E. Gheeraert. Hydrogen-boron interactions in p-type diamond. *Physical Review B*, 58(12) :7966–7969, 1998.
- [14] C. Chillet, A. W. Hadi, R. Perret, and R. Isnard. Identification du modèle thermique d'une machine à induction de puissance moyenne. *Revue de Physique Appliquée*, 24(9) :923–931, 1989.
- [15] M. Ciappa. *Some reliability aspects of IGBT modules for high-power applications*. PhD thesis, ETH Zurich, 2000.
- [16] M. Ciappa. Selected failure mechanisms of modern power modules. *Microelectronics reliability*, 42(4-5) :653–667, 2002.
- [17] J. L Cocquerelle and P. Borne. *L'électronique de commutation : analyse des circuits par la méthode de l'invariance relative*, volume 1. Editions Technip, 1993.
- [18] S. D. G. Cumming. Design of observers of reduced dynamics. *Electronics Letters*, 5(10) :213–214, 1969.
- [19] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5) :940–943, 2000.
- [20] M Darouach. Functional observers for systems with unknown inputs. In *16th international symposium on mathematical theory of networks and systems*, 2004.
- [21] P. de Larminat. *Automatique appliquée*. Hermès Science : Lavoisier, 2007.
- [22] J. P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed*. EDP sciences, 2016.
- [23] C Edwards. A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 5 :5279–5284, 2004.
- [24] K. El Boubkari. *Impact de la modélisation physique bidimensionnelle multicellulaire du composant semi-conducteur de puissance sur l'évaluation de la fiabilité des assemblages appliqués au véhicule propre*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2013.
- [25] F. W Fairman and R. D Gupta. Design of multifunctional reduced order observers. *International Journal of Systems Science*, 11(9) :1083–1094, 1980.
- [26] T Fernando, S MacDougall, V Sreeram, and H. M Trinh. Existence conditions for unknown input functional observers. *International Journal of Control*, 86(1) :22–28, 2013.

- [27] T Fernando, H. M Trinh, and L. S Jennings. Functional observability and the design of minimum order linear functional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(5) :1268–1273, 2010.
- [28] M. Fliess. Sur des penseurs anciens faisons des vers nouveaux. *Proceedings CIFA*, pages 26–36, 2000.
- [29] H. Foch, R. Arches, F. Bordry, Y. Cheron, B. Escaut, P. Marty, and M. Metz. Éléments constitutifs et synthèse des convertisseurs statiques. *Techniques de l'ingénieur, traité de génie électrique, D*, 3152 :1–18, 1989.
- [30] H. Foch, F. Forest, and T. Meynard. Onduleurs de tension : Structures. principes. applications. *Techniques de l'ingénieur. Génie électrique*, 5(D3176) :D3176–1, 1998.
- [31] T. Fortmann and D. Williamson. Design of low-order observers for linear feedback control laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(3) :301–308, 1972.
- [32] P. M Frank. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459–474, 1990.
- [33] P. A Fuhrmann and U Helmke. On the parametrization of conditioned invariant subspaces and observer theory. *Linear Algebra and its Applications*, 332 :265–353, 2001.
- [34] B. Gopinath. On the control of linear multiple input-output systems. *Bell Labs Technical Journal*, 50(3) :1063–1081, 1971.
- [35] W. Habra. *Développement de modèles thermiques compacts en vue de la modélisation électrothermique des composants de puissance*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2007.
- [36] T. Halkosaari and H. Tuusa. Optimal vector modulation of a pwm current source converter according to minimal switching losses. In *Power Electronics Specialists Conference, 2000. PESC 00. 2000 IEEE 31st Annual*, volume 1, pages 127–132. IEEE, 2000.
- [37] M Hamdoun, M Ayadi, F Rotella, and I Zambettakis. Discrete-time linear functional observer design using a direct approach. *Int. J. Modelling, Identification and Control*,, 2016.
- [38] A. Hamidi, N. Beck, K. Thomas, and E. Herr. Reliability and lifetime evaluation of different wire bonding technologies for high power igbt modules. *Microelectronics reliability*, 39(6-7) :1153–1158, 1999.
- [39] M. Haussener, S. Caihol, B. Trajin, P. E. Vidal, and F. Carrillo. Thermo-mechanical modeling and simulation of a silicone gel for power electronic devices. *Microelectronics reliability*, 55(9-10) :2045–2049, 2015.

- [40] M. L. J Hautus. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its applications*, 50 :353–368, 1983.
- [41] N. P. Hong, B. K. Song, S. W. Lee, W. C. Kim, P. G. Im, and J. W. Hong. The electrical properties of silicone gel due to curing condition. In *Conduction and Breakdown in Solid Dielectrics, 1998. ICSD'98. Proceedings of the 1998 IEEE 6th International Conference on*, pages 218–220. IEEE, 1998.
- [42] M Hou and P. C Müller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6) :871–875, 1992.
- [43] M Hou and P. C Müller. Design of decentralized linear state function observers. *Automatica*, 30(11) :1801–1805, 1994.
- [44] M Hou, A. C Pugh, and P. C Müller. Disturbance decoupled functional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2) :382–386, 1999.
- [45] P. Hudzovic. Identification method of systems to aperiodic response, 1973.
- [46] J. Huetz and J. P. Petit. Notions de transfert thermique par convection. *Techniques de l'ingénieur A-1541*, 1990.
- [47] M. Ishiko, M. Usui, T. Ohuchi, and M. Shirai. Design concept for wire-bonding reliability improvement by optimizing position in power devices. *Microelectronics Journal*, 37(3) :262–268, 2006.
- [48] L. S Jennings, T. L Fernando, and H. M Trinh. Existence conditions for functional observability from an eigenspace perspective. *IEEE transactions on automatic control*, 56(12) :2957–2961, 2011.
- [49] T. Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [50] J. Korec and R. Held. Comparison of dmos/igbt-compatible high-voltage termination structures and passivation techniques. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 40(10) :1845–1854, 1993.
- [51] C. J. M. Lasance, H. Vinke, and H. Rosten. Thermal characterization of electronic devices with boundary condition independent compact models. *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology : Part A*, 18(4) :723–731, 1995.
- [52] F Le Frious. Les propriétés thermiques des matériaux et les références métrologiques. *Laboratoire national de métrologie et d'essais LNE*, 2010.
- [53] P. Lefranc. *Etude, conception et réalisation de circuits de commande d'IGBT de forte puissance*. PhD thesis, Lyon, INSA, 2005.

- [54] L. T Li and G. R Duan. Observer design for a class of linear time-varying systems. In *36th IEEE Chinese Control Conference (CCC)*, pages 116–121. IEEE, 2017.
- [55] W. S. Loh, M. Corfield, H. Lu, S. Hogg, T. Tilford, and C. M. Johnson. Wire bond reliability for power electronic modules-effect of bonding temperature. In *Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation Experiments in Microelectronics and Micro-Systems, 2007. EuroSime 2007. International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2007.
- [56] D. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2) :190–197, 1966.
- [57] D. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6) :596–602, 1971.
- [58] M Lungu and R Lungu. Design of full-order observers for systems with unknown inputs by using the eigenstructure assignment. *Asian Journal of Control*, 16(5) :1470–1481, 2014.
- [59] H. Medjahed. *Contribution à la simulation électro-thermomécanique numérique 3d : appliquée à l'étude de la fiabilité des interrupteurs à semi-conducteurs packages, utilisés en traction ferroviaire*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2012.
- [60] L. Ménager, B. Allard, and B. Vincent. Conditionnement des modules de puissance. 2010.
- [61] R Mohajerpoor, H Abdi, and S Nahavandi. Minimal unknown-input functional observers for multi-input multi-output lti systems. *Journal of Process Control*, 35 :143–153, 2015.
- [62] R Mohajerpoor, H Abdi, and S Nahavandi. A new algorithm to design minimal multi-functional observers for linear systems. *Asian Journal of Control*, 18(3) :842–857, 2015.
- [63] R Mohajerpoor, H Abdi, and S Nahavandi. On unknown-input functional observability of linear systems. In *American Control Conference (ACC)*, pages 3534–3539. IEEE, 2015.
- [64] J Moore and G Ledwich. Minimal order observers for estimating linear functions of a state vector. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(5) :623–632, 1975.
- [65] A. Morozumi, K. Yamada, and T. Miyasaka. Reliability design technology for power semiconductor modules. *Fuji Electric Review*, 47(2) :54–58, 2001.
- [66] A. Morozumi, K. Yamada, T. Miyasaka, S. Sumi, and Y. Seki. Reliability of power cycling for igbt power semiconductor modules. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 39(3) :665–671, 2003.

- [67] P. Murdoch. Observer design for a linear functional of the state vector. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(3) :308–310, 1973.
- [68] J. O’Reilly. *Observers for linear systems*, volume 170. Academic Press, 1983.
- [69] C. Palermo, C. Guasch, and J. Torres. *Electricité : L’essentiel du cours- Exercices corrigés*. Dunod, 2015.
- [70] D. R. Pitts and L. E. Sissom. *Schaum’s outline of theory and problems of heat transfer*. McGraw-Hill, 1998.
- [71] T. Raff, P. Menold, C. Ebenbauer, and F. Allgöwer. A finite time functional observer for linear systems, 01 2006.
- [72] S. Ramminger, P. Türkes, and G. Wachutka. Crack mechanism in wire bonding joints. *Microelectronics Reliability*, 38(6-8) :1301–1305, 1998.
- [73] M. Riordan and L. Hoddeson. The origins of the pn junction. *IEEE spectrum*, 34(6) :46–51, 1997.
- [74] J. Roman and T. Bullock. Design of minimal order stable observers for linear functions of the state via realization theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(5) :613–622, 1975.
- [75] F. Rotella. Observateurs, support de cours. pages 7198 – 7203, 2008.
- [76] F. Rotella. Identification et régulation des systèmes, support de cours ec0732. 2012.
- [77] F. Rotella and I. Zambettakis. *Automatique élémentaire : de l’analyse des systèmes à la régulation*. Hermes science publ., 2008.
- [78] F. Rotella and I. Zambettakis. Minimal single linear functional observers for linear systems. *Automatica*, 47(1) :164–169, 2011.
- [79] F. Rotella and I. Zambettakis. On functional observers for linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5) :1354–1360, 2013.
- [80] F. Rotella and I. Zambettakis. Some new standpoints in the design of asymptotic functional linear observers. *ESAIM : Proceedings and Surveys*, 49 :102–114, 2015.
- [81] F. Rotella and I. Zambettakis. A note on functional observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(10) :3197–3202, 2016.
- [82] D. Roye and R. Perret. Définitions des règles de modélisation thermique des machines électriques tournantes. *Revue de physique appliquée*, 20(3) :191–202, 1985.
- [83] I. Sakhraoui, B. Trajin, and F. Rotella. Application of linear functional observers for the thermal estimation in power modules. 2018.

- [84] I. Sakhraoui, B. Trajin, and F. Rotella. A design procedure for linear unknown input functional observers. *Transactions on automatic control*, pages 1–16, 2018.
- [85] I. Sakhraoui, B. Trajin, and F. Rotella. Discrete linear functional observers for the thermal estimation in power modules. 2018.
- [86] H. A. Schafft. Failure analysis of wire bonds. In *Reliability Physics Symposium. 11th Annual*, pages 98–104. IEEE, 1973.
- [87] W. W. Sheng and R. P. Colino. *Power electronic modules : design and manufacture*. CRC press, 2004.
- [88] F. Sincere. Cours de physique appliquée : Conversion continu alternatif, onduleur autonome. *Terminale STI Génie Electrotechnique*.
- [89] H. R. Sirisena. Minimal-order observers for linear functions of a state vector. *International Journal of Control*, 29(2) :235–254, 1979.
- [90] B Stout. Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, 2007.
- [91] V. Strejc. Näherungsverfahren für aperiodische übergangscharakteristiken. *Regelungstechnik*, 7(4) :124–128, 1959.
- [92] V. Strejc. Trends in identification. *Automatica*, 17(1) :7–21, 1981.
- [93] J. Taine, F. Enguehard, and E. Iacona. *Transferts thermiques-Introduction aux transferts d'énergie-5e édition*. Dunod, 2014.
- [94] M. Tawk. *Etude et réalisation d'un système de refroidissement pour l'électronique de puissance basé sur la mise en mouvement d'un fluide conducteur électrique*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2011.
- [95] Y. Thiaux. Conversion ac/dc amélioration du facteur de puissance. 2013.
- [96] B. Trajin, P. E. Vidal, and J. Viven. Electro-thermal model of an integrated buck converter. In *Power Electronics and Applications (EPE'15 ECCE-Europe), 2015 17th European Conference on*, pages 1–9. IEEE, 2015.
- [97] H Trinh and Q Ha. Design of linear functional observers for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 31(6) :741–749, 2000.
- [98] H Trinh, T. D Tran, and T Fernando. Disturbance decoupled observers for systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic control*, 53(10) :2397–2402, 2008.
- [99] H. Trinh, T. D. Tran, and S. Nahavandi. Design of scalar functional observers of order less than $(\nu - 1)$. *International journal of control*, 79(12) :1654–1659, 2006.

- [100] H. Trinh and J. Zhang. Design of reduced-order scalar functional observers. *International journal of innovative computing, information and control*, 1(4) :791–799, 2005.
- [101] H. I. Trinh and T. Fernando. *Functional observers for dynamical systems*, volume 420. Springer Science & Business Media, 2011.
- [102] J Trumpf. Observers for linear time-varying systems. *Linear Algebra and its Applications*, 425(2-3) :303–312, 2007.
- [103] C. C Tsui. A new algorithm for the design of multifunctional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(1) :89–93, 1985.
- [104] J. Vallon. *Introduction à l'étude de la fiabilité des cellules de commutation à IGBT sous fortes contraintes*. PhD thesis, 2003.
- [105] P Van Dooren. Reduced order observers : A new algorithm and proof. *Systems & Control Letters*, 4(5) :243–251, 1984.
- [106] F. F. Wang. Electronics packaging simplified radiation heat transfer analysis method. In *Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems. IThERM'04. The Ninth Intersociety Conference on*, volume 1, pages 613–617. IEEE, 2004.
- [107] S. Wen. *Design and analyses of a dimple array interconnect technique for power electronics packaging*. PhD thesis, Virginia Tech, 2002.
- [108] W. Wu, G. Gao, L. Dong, Z. Wang, M. Held, P. Jacob, and P. Scacco. Thermal reliability of power insulated gate bipolar transistor (igbt) modules. In *Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, 1996. SEMI-THERM XII. Proceedings., Twelfth Annual IEEE*, pages 136–141. IEEE, 1996.
- [109] Y Xiong and M Saif. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39(8) :1389–1398, 2003.
- [110] J. Yamada, T. Simizu, M. Kawaguchi, M. Nakamura, M. Kikuchi, and E. Thal. The latest high performance and high reliability igbt technology in new packages with conventional pin layout. *INTELLIGENT MOTION*, 2003.
- [111] Z. Zhang. *Gestion thermique des composants d'électronique de puissance- Utilisation du diamant CVD*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse-INPT, 2012.