

### Ecoulements de solutions de polymères en milieux poreux : lien entre physique à l'échelle des pores et comportement macroscopique

Frédéric Zami-Pierre

### ► To cite this version:

Frédéric Zami-Pierre. Ecoulements de solutions de polymères en milieux poreux : lien entre physique à l'échelle des pores et comportement macroscopique. Sciences de la Terre. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2017. Français. NNT : 2017INPT0086 . tel-04228562

### HAL Id: tel-04228562 https://theses.hal.science/tel-04228562

Submitted on 4 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

# DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Surfaces Interfaces Continentales Hydrologie

### Présentée et soutenue par :

M. FREDERIC ZAMI-PIERRE le vendredi 20 octobre 2017

Titre :

Ecoulements de solutions de polymères en milieux poreux : lien entre physique à l'échelle des pores et comportement macroscopique

Ecole doctorale :

Sciences de l'Univers de l'Environnement et de l'Espace (SDUEE)

Unité de recherche : Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (I.M.F.T.) Directeur(s) de Thèse : M. MICHEL QUINTARD

**Rapporteurs :** 

M. PHILIPPE COUSSOT, ECOLE DES PONTS PARISTECH M. WILLIAM R. ROSSEN, UNIVERSITE DE DELFT

Membre(s) du jury : Mme AZITA AHMADI-SENICHAULT, ENSAM BORDEAUX, Président Mme DANIELLE MOREL, TOTAL PAU, Membre M. MICHEL QUINTARD, CNRS TOULOUSE, Membre M. YOHAN DAVIT, INP TOULOUSE, Membre

# Résumé

Lorsqu'un fluide complexe s'écoule à travers un milieu poreux, à la non-linéarité de l'écoulement s'ajoute la spécificité de la structure poreuse, qui est souvent multi-échelle. Il émerge alors un grand nombre de problématiques fondamentales liées à l'interaction entre le fluide et la structure poreuse. L'interprétation et la modélisation de la grande variété des phénomènes physiques à petite échelle ainsi que leurs répercussions à grande échelle soulèvent de nombreuses questions.

Dans cette thèse, les fluides é tudiés s ont d es s olutions d e p olymères, e t l es m ilieux poreux sont, entre autre, des roches issues de réservoirs pétroliers. Dans le contexte des méthodes de récupération améliorée pour les gisements pétroliers, l'injection d'eau avec polymères fait en effet partie des méthodes couramment utilisées, permettant d'augmenter l'efficacité du balayage et donc la production d'huile sur différents types de réservoirs. De part la rhéologie non-Newtonienne ainsi que les phénomènes particuliers proches de la paroi que développent les molécules de polymères, les fluides modélisés dans cette t hèse p euvent ê tre qualifiés de complexes.

L'objectif de cette thèse est d'étudier la rhéologie non-Newtonienne ainsi que le comportement des molécules de polymère proches de la paroi. On relie alors ces phénomènes aux propriétés effectives macroscopiques. Pour cela, on simule numériquement les écoulements à travers des images tomographiques de milieux poreux. Ainsi, on souhaite mieux cerner la physique qui est en jeu et également proposer des pistes d'amélioration des modèles actuellement implémentés dans les simulateurs de réservoirs.

Dans une première partie de ce travail de thèse (Chapitre 3), on s'intéresse à la transition du régime d'écoulement macroscopique, de Newtonien à non-Newtonien, induite par une solution de polymère. Par des simulations numériques de l'écoulement à travers un large panel de milieux poreux, on étudie la transition entre ces deux régimes. Une analyse de la mécanique de l'écoulement permet de proposer un modèle simple et d'évaluer en ordre de grandeur la vitesse moyenne de transition.

Ensuite, on étudie le glissement apparent induit par un mécanisme de répulsion des chaînes de polymère à la paroi liquide/solide (Chapitre 4). On propose un modèle à l'échelle des pores de ce phénomène et, par comparaison avec des données expérimentales, on montre que ce modèle permet de retrouver avec une précision acceptable les comportements macroscopiques observés.

Enfin, a vec d es s imulations d irectes s ur d es m ilieux p ériodiques, o n r elie l es phénoménologies micro- et macroscopiques d'écoulements non-Newtoniens (Chapitre 5). D'un point de vue fondamental, on étudie notamment la compétition entre la non-linéarité induite par la rhéologie non-Newtonienne et le désordre inhérent à la structure poreuse. Les modèles actuellement utilisés dans les simulateurs de réservoirs sont reconsidérés au vu des résultats.

Mots-clés : polymère, non-Newtonien, milieux poreux, glissement, changement d'échelle.

# Abstract

When a complex fluid is flowing through a porous medium, in addition to the fluid intrinsic physics, the multi-scale properties of the porous structure play a significant role. From the interaction between these features arise a great number of complex physical phenomena. The understanding and the modelling of the variety of these phenomena involved at the small scales and their impact on the large scales is the subject of intense work.

In this thesis, the fluids we consider are polymer solutions and the porous media are typical sandstones met in petroleum applications. In petroleum engineering, the injection of a polymer slug into the oil-bearing reservoir is indeed a method commonly used in enhanced oil recovery. This method allows to increase the sweep efficiency, hence to improve the oil production of the reservoir. Due to the non-Newtonian rheology induced by the polymer molecules as well as specific mechanisms occurring at the liquid/solid interface, a polymer solution may be qualified as a complex fluid.

The goal of this thesis is to investigate the non-Newtonian rheology and the behavior of the polymer molecules near the liquid/solid interface. These phenomena are related to macro-scale effective properties. To thoroughly address this goal, we perform numerical simulations of flows through porous media. The goal is to obtain a better understanding of the underlying physics and, furthermore, we wish to propose possible improvements of the models that are currently used in reservoir simulators.

Primarily, we are interested in the macro-scale transition from a Newtonian to a non-Newtonian flow (Chapter 3). This transition is induced by the non-Newtonian rheology. By simulating flows through a wide panel of porous media, we study the macro-scale transition. An analysis of the fluid mechanics involved allows us to propose a simple model for the critical average velocity at which the transition occurs.

In addition, we study the apparent slip induced by a repulsive mechanism of the polymer chains from the liquid/solid interface (Chapter 4). We propose a pore-scale model to this mechanism. By performing comparisons with experimental datasets, we show that the model allows for a good description of the observed macro-scale behavior.

Finally, with direct simulations over periodic media, we link the phenomenology at the microand macro-scale for the flow of non-Newtonian fluids (Chapter 5). On a fundamental level, we study the competition that emerges between the nonlinearity induced by the rheology and the disorder inherent to the porous structure. The results are related to models commonly used in reservoir simulators.

Keywords : polymer, non-Newtonian, porous media, slip, upscaling.

## Remerciements

Ma thèse s'est en majeure partie déroulée au sein du Groupe d'Étude des Milieux Poreux (GEMP) de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Elle a été financée par Total dans le cadre d'un projet CIFRE. Je tiens donc à remercier Total et l'IMFT pour leur collaboration qui m'a permis de travailler dans un cadre propice à la recherche scientifique.

Je remercie les ingénieurs de Total pour leurs discussions scientifiques qui m'ont aidé à mieux appréhender le sujet de thèse. En particulier, merci à Igor Bondino, Carolina Romero et Stéphane Jouenne. Je remercie également tous les membres de l'équipe Simulations encadrée par Gilles Darche pour leur accueil au CSTJF à Pau.

Cette thèse a donné lieu à des collaborations internationales. Je remercie Shima Parsa de l'université de Harvard pour toutes les données expérimentales fournies ainsi que son aide dans la réalisation de la comparaison des écoulements numériques et expérimentaux. Merci également à Florian Habla de l'université de Munich de nous avoir transmis son code de calcul et d'avoir participé à ce projet.

Je remercie toute l'équipe du centre de calcul CALMIP, pour la formation de qualité dispensée ainsi que leur disponibilité. La majorité des calculs de cette thèse a pu être réalisée grâce à ce centre de calcul, sous le projet p1511.

Je remercie tous les doctorants et permanents du groupe GEMP pour les discussions scientifiques stimulantes et leur bonne humeur. Je remercie particulièrement tous les joueurs de tarot avec qui j'ai passé de très bons moments.

C'est ici l'occasion de remercier l'ensemble de mes professeurs en physique et en mathématiques, du lycée au Master, pour leurs cours de qualité. En partageant avec passion leur goût pour la science, ils avaient depuis longtemps semé en moi l'envie de faire de la recherche.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux membres de mon jury de thèse pour avoir pris le temps de lire le manuscrit et d'être venus jusqu'à Toulouse pour la soutenance. Leurs suggestions qui ont permis d'améliorer la version finale de ce manuscrit.

Un très grand merci à mes trois encadrants; Romain de Loubens, Yohan Davit et Michel Quintard. C'était un réel plaisir de travailler avec vous! Votre sagacité et votre expérience ont été indispensables à la réussite de cette thèse. Merci pour votre temps, vos conseils et votre investissement.

J'aimerais finir par le remerciement le plus important : Merci Camille de m'avoir soutenu et encouragé pendant toutes ces années.

# Table des matières

In	Introduction 1				
1	Polymère et milieux poreux				
	1.1	Propriétés rhéologiques	<b>5</b>		
		1.1.1 Les polymères modélisés	<b>5</b>		
		1.1.2 Le comportement visqueux	6		
		1.1.3 Le comportement élastique	7		
	1.2	L'écoulement en milieu poreux à la petite échelle	8		
		1.2.1 Les différentes petites échelles	. 9		
		1.2.2 L'adsorption	10		
		1.2.3 La répulsion	11		
		1.2.4 Autres phénomènes non pris en compte	11		
	1.3	L'écoulement en milieu poreux à la grande échelle	13		
		1.3.1 Mesures expérimentales	13		
		1.3.2 Modèles macroscopiques	14		
		1.3.3 Différents régimes d'écoulements	17		
	1.4	Le changement d'échelle	18		
		1.4.1 Le cas linéaire	19		
		1.4.2 Le cas du glissement	21		
		1.4.3 Le cas d'une rhéologie non-Newtonienne	21		
	1.5	Les objectifs et contributions de cette thèse	22		
2	L'outil numérique et sa validation 24				
	2.1	Outil numérique	24		
		2.1.1 L'algorithme SIMPLE	24		
		2.1.2 Le SIMPLE dans OpenFOAM	26		
		2.1.3 La correction de Rhie-Chow	30		
	2.2	Les milieux poreux	33		
		2.2.1 Les mesures	33		
		2.2.2 Les maillages	34		
	2.3	Prédiction de perméabilité	36		
		2.3.1 Volume élémentaire représentatif	36		
		2.3.2 La segmentation d'une image en niveau de gris	41		
		2.3.3 Le lissage d'une image binaire	43		
		2.3.4 Les conditions limites	46		

		2.3.5 Recommandations pour la DRP	18			
	2.4	Validation expérimentale	49			
		2.4.1 Le protocole expérimental	19			
		2.4.2 Traitement des données expérimentales	50			
		2.4.3 Comparaison avec des simulations numériques	50			
વ	Dos	scription de la transition entre les régimes d'écoulement Newtoniens et non-				
J	Net	wtoniens	5			
	3.1	Motivations	55			
	3.2	Étude numérique de la transition	58			
	3.3	Étude théorique et expérimentale de la transition	58 58			
	3.4	Discussions	78			
	0.1	$341$ La longueur caractéristique $\sqrt{k_0}$	78			
		342 Correction du modèle de transition	79			
		343 Les distributions de vitesse normalisée	33			
4	Mo	odélisation de la répulsion des chaînes de polymère à la paroi 9	0			
	4.1	Introduction	)1			
	4.2	The Newtonian framework in EOR	94			
	4.3	The slip boundary condition	96			
	4.4	Accuracy of the effective model	8			
		4.4.1 Experimental data from the literature	98			
		4.4.2 CFD simulations	99			
		4.4.3 Results and discussion	)2			
	4.5	Summary and conclusions	)4			
5	Étu	Étude de l'influence de la non linéarité et de la structure noncuse sur la normée				
9	bili	té apparente	6			
	5.1	Introduction	)7			
	5.2	Models and Methods	0			
	··-	5.2.1 The pore-scale flow model	0			
		5.2.2 The porous media	0			
		5.2.3 Setting of numerical simulations	11			
		5.2.4 Metrics and statistics 11	3			
		5.2.5 Statistical isotropy of A-type media 11	4			
	5.3	Results	5			
	0.0	5.3.1 Newtonian flow	15			
		5.3.2 Transition from Newtonian to non-Newtonian flow	16			
		5.3.3 Effect of disorder on the non-Newtonian flow for isotropic structures	19			
		5.3.4 Effect of the anisotropy on the non-Newtonian flow for ordered structures	21			
	54	Discussion 19	22			
	5.5	Summary and conclusions 19	23			
	0.0					

6	Con	Conclusions et perspectives 125				
	6.1 Conclusions générales			. 125		
	6.2 Perspectives d'étude			. 127		
		6.2.1	Vers un double changement d'échelle	. 128		
		6.2.2	L'aspect multi-constituants	. 128		
		6.2.3	Les simulateurs de réservoirs	. 129		
		6.2.4	Les fluides visco-élastiques	. 129		
Annexes 133						
A	La	conditi	on de glissement dans OpenFOAM	<b>134</b>		
в	For	mulair	e de notation indicielle	<b>136</b>		
C La perméabilité et la dissipation visqueuse 1			137			
D	Pris	se de n	noyenne volumique appliquée à un fluide non-	140		
Ne	Newtonien					

# Nomenclature

#### Acronymes

- CFD Computational Fluid Dynamics.
- DMM Distribution de Masse Molaire.
- DNS Direct Numerical Simulations.
- DRP Digital Rock Physics.
- EOR Enhanced Oil Recovery.
- HPAM Polyacrylamide partiellement hydrolysé.
- IPV Inaccessible Pore Volume.
- PIV Particle Image Velocimetry.
- PLCO Power-Law with Cut-Off.
- **REV** Representative Elementary Volume.
- SIMPLE Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations.
- VAM Volume Averaging Method.
- VER Volume Élémentaire Représentatif.

#### Symboles grecs

 $\chi_{\beta}$  Indicatrice de phase (égale à 1 dans la phase liquide  $\beta$  et 0 dans la phase solide  $\sigma$ ).

$\delta$	Depletion layer thickness.	m
$\Delta \mu_{\mathrm{app}}^{\mathrm{XP}}$	Experimental apparent viscosity drop.	$\rm kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\dot{\gamma}$	Taux des déformations, $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}D:D}.$	$s^{-1}$
$\dot{\gamma}_{ m eq}$	Taux de déformations équivalent.	$s^{-1}$
l	Slip length.	m
$\kappa$	Paramètre d'accélération du fluide des pores vers les seuils de pores.	
$\mu$	Viscosité dynamique.	$\rm kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\mu_0$	Valeur du plateau Newtonien de la viscosité.	$\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$

$\mu_{\mathrm{app}}$	Viscosité apparente utilisée dans la loi de Darcy.	$\rm kg.m^{-1}.s^{-1}$			
$\mu_{\rm app}^{\rm CFD}$	Numerical apparent viscosity.	$\rm kg.m^{-1}.s^{-1}$			
$\mu_{\mathrm{app}}^{\mathrm{XP}}$	Experimental apparent viscosity.	$\rm kg.m^{-1}.s^{-1}$			
$\phi$	Porosité.				
au	Tenseur des contraintes, $\tau = \mu D$ .	$\rm kg.m^{-1}.s^{-2}$			
ρ	Viscosity ratio between the bulk and the depletion layer.				
Symboles Roman					
$\mathbf{v}$	Vitesse microscopique définie dans la phase liquide.	$\mathrm{m.s}^{-1}$			
ε	Local rate of dissipative energy lost by viscous friction per unit volume, $\mathcal{E} = \mu \dot{\gamma}^2$	$kg.m^{-1}.s^{-3}$			
D	Tenseur des déformations, $D = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{T}$ .	$s^{-1}$			
К	Tenseur de perméabilité.	$m^2$			
$K_0$	Tenseur de perméabilité intrinsèque.	$m^2$			
$\mathbf{e}_{\mathrm{v}}$	Average velocity direction, $\mathbf{e}_{v} = \langle \mathbf{v} \rangle / \  \langle \mathbf{v} \rangle \ $ .				
$A_{\beta\sigma}$	Frontière liquide/solide.				
$A_{\beta e}$	Frontière liquide/extérieur.				
$k_0^{\rm CFD}$	Numerical intrinsic permability.	$m^2$			
$k_0^{\rm XP}$	Experimental intrinsic permeability.	$m^2$			
p	Pression microscopique définie dans la phase liquide.	$\rm kg.m^{-1}.s^{-2}$			
$R_{\rm eq}$	Rayon équivalent, $R_{eq} = \sqrt{8 \ \mathbf{K}\ /\phi}$ .	m			
$R_{\rm eq}^{\rm CFD}$	Numerical equivalent radius.	m			
$R_{\rm eq}^{\rm XP}$	Experimental equivalent radius.	m			
$R_{\rm k}$	Permeability reduction factor.				
Opérateurs de moyenne					
$\langle ullet  angle$	Moyenne superficielle.				

 $\langle \bullet \rangle^{\beta}$  Moyenne intrinsèque (dans la phase liquide  $\beta$ ).

# Introduction

Un fluide peut être qualifié de complexe lorsque sa rhéologie est non-Newtonienne ou lorsqu'il présente des interactions particulières avec une paroi liquide/solide. Lorsque de tels fluides s'écoulent dans un milieu poreux, à la complexité du fluide s'ajoute la spécificité de la structure poreuse, qui est souvent multi-échelle. Il émerge alors un grand nombre de problématiques fondamentales liées à l'interaction entre le fluide et la structure poreuse. L'interprétation et la modélisation de la grande variété des phénomènes physiques à petite échelle ainsi que leurs répercussions à grande échelle soulèvent de nombreuses questions primordiales. Par exemple, lorsque le comportement local de la viscosité devient non-linéaire, la démonstration théorique de la loi macroscopique est plus complexe. Il est alors essentiel de prendre en compte la variété des phénomènes non-linéaires associés au fluide qui s'écoule pour proposer une représentation macroscopique correcte.

Concernant les domaines d'application, le fluide complexe ainsi que le milieu poreux peuvent être très variés. Il peut s'agir de sang à travers une artère [1] tout comme des résines à travers des moules [2, 3] pour des matériaux composites. Dans cette thèse, les fluides complexes que l'on souhaite modéliser sont des solutions de polymère qui s'écoulent à travers des roches issues de réservoirs pétroliers.

L'extraction du pétrole se décompose généralement en trois grandes étapes pour un réservoir conventionnel. La récupération primaire consiste en une déplétion du réservoir grâce à des forages et l'installation de puits uniquement producteurs. S'ensuit la récupération secondaire par injection d'eau afin de continuer à produire de l'huile tout en maintenant une pression suffisante dans le réservoir pour éviter les déformations géomécaniques. Enfin, peut intervenir une étape de récupération tertiaire qui a pour but d'améliorer le balayage de l'huile dans le réservoir (EOR pour "*Enhanced Oil Recovery*"), au niveau microscopique et/ou macroscopique [4].

Dans le contexte EOR, l'injection d'un mélange eau-polymère peut être utilisée, parfois même dès la phase secondaire, pour augmenter la production du réservoir [5, 6]. L'ajout de polymère à l'eau rend la solution injectée plus visqueuse. Cette méthode est utilisée pour deux raisons. D'une part, la solution injectée étant plus visqueuse, celle-ci balaye un plus grand volume du réservoir hétérogène et la percée de l'eau dans les puits producteurs est ainsi retardée. D'autre part, augmenter la viscosité du fluide déplaçant, qui reste souvent plus faible que la viscosité du fluide déplacé, permet d'atteindre un rapport de mobilité plus favorable et ainsi d'éviter des instabilités hydrodynamiques de type digitation visqueuse.

L'utilisation de polymère est une technique EOR parmi d'autres (e.g. mousse ou surfactant) bien documentée dans la littérature [7, 8]. Cette méthode est principalement utilisée sur des champs pétroliers "on-shore" et plus rarement "off-shore" [9]. Pour l'utilisation de polymère, le cas d'extraction "on-shore" est préféré pour des raisons pratiques d'acheminement et de stockage des solutions de polymères et la possibilité de placer plus facilement de nombreux puits. En plus de leur coût, les polymères présentent aussi des inconvénients qui rendent leur utilisation impossible dans certains cas; par exemple pour les réservoirs de faible perméabilité, de forte salinité ou encore à haute température.

Les outils numériques de simulation d'écoulements macroscopiques dans les réservoirs sont largement utilisés en ingénierie pétrolière pour prédire et optimiser l'extraction d'un champ pétrolifère. Dans ces simulateurs [10, 11], des modèles heuristiques, qui correspondent à des lois de type Darcy modifiées, sont implémentés. Concernant les polymères, l'objectif de ces simulateurs est d'estimer l'incrément d'huile, c'est-à-dire la quantité d'huile produite en plus par l'injection de polymère par rapport à l'injection d'eau en continu. Il est également nécessaire de modéliser l'injectivité de la solution de polymère dans le réservoir. Cette injectivité est fonction de la rhéologie et est contrainte par la pression maximale que l'on peut maintenir dans le puits injecteur.

De par la complexité des structures poreuses rencontrées en ingénierie pétrolière ainsi que par la richesse de la physique des polymères [12], les phénomènes en jeu à la petite échelle sont très nombreux et doivent être catalogués. L'objectif de cette thèse est d'étudier certains de ces phénomènes et de les relier aux propriétés effectives macroscopiques. On souhaite ainsi proposer des pistes d'amélioration des modèles empiriques actuellement implémentés dans les simulateurs de réservoirs. Dans cette thèse, on étudie deux phénomènes particuliers associés aux polymères qui sont d'une part la rhéologie non-Newtonienne et d'autre part un mécanisme répulsif des chaînes de polymères à la paroi liquide/solide. On étudiera ces phénomènes séparément, en se focalisant sur des écoulements rampants (à nombre de Reynolds très faible) et monophasiques. Parmi les autres mécanismes connus associés aux polymères qui ne seront pas étudiés ici mais qui nécessiteraient également un travail de recherche approfondi, on peut citer : les effets de salinité [13, 14], l'adsorption [15, 16], ou encore la dégradation mécanique, thermique ou biologique [17, 18] où une approche multi-constituants est nécessaire [19].

Pour étudier ces phénomènes physiques à l'échelle des pores, une méthodologie spécifique est mise en place. On utilise principalement la simulation numérique directe (DNS) de l'écoulement d'une solution de polymère à travers des structures poreuses obtenues par micro tomographie aux rayons X [20, 21]. Cette méthode d'imagerie permet en effet de générer des géométries complexes représentant la structure réelle des roches. Cependant, le but ici est d'étudier des phénomènes physiques dans des structures complexes, et non pas de prédire les propriétés intrinsèques de ces structures (comme la perméabilité). On ne se focalisera donc pas sur les procédés d'imagerie.

On analyse les résultats d'un point de vue macroscopique mais aussi microscopique, à l'aide de représentations statistiques de l'écoulement. On utilisera aussi des méthodes de changement d'échelles, comme la méthode de prise de moyenne volumique, pour lier les écoulements à la petite échelle et à la grande échelle [22, 23]. Au vu des phénomènes non-linéaires induits par les polymères, on ne suppose pas *a priori* avec ces méthodes la forme des équations macroscopiques.

Une étude bibliographique relative aux écoulements de polymère en milieux poreux est décrite dans le Chapitre 1. Une fois le contexte clarifié, on détaillera dans le Chapitre 2 la méthodologie numérique ainsi que les problématiques associées à la simulation dans des structures poreuses. Dans le Chapitre 3 on s'intéresse à la transition du régime d'écoulement macroscopique, de Newtonien à non-Newtonien, induite par une solution de polymère. Une analyse physique a permis de proposer un modèle simple et robuste de la transition observée. Ensuite, un mécanisme particulier d'interaction entre les molécules de polymère et les parois solides d'un milieu poreux est étudié dans le Chapitre 4. Par comparaison avec des données expérimentales provenant de la littérature, on montre qu'un modèle effectif de glissement à la paroi permet de décrire correctement le comportement macroscopique. Enfin dans le Chapitre 5, des simulations numériques spécifiques d'écoulements à travers des milieux poreux naturels et artificiels ont permis de caractériser le lien entre la mécanique des fluides à la petite échelle et le comportement macroscopique. En particulier, une compétition entre la non-linéarité induite par la rhéologie et la désordre inhérent à la structure poreuse a été identifiée. En plus de cet aspect fondamental, les conséquences de ces résultats dans des codes actuels de simulateurs de réservoirs sont discutées. Dans le dernier Chapitre, on conclut et propose des perspectives.

In this thesis, the Chapters 3, 4 and 5 are written in English. These are preceded by a short introduction in French.

# Chapitre 1 Polymère et milieux poreux

L'ajout de polymère à l'eau injectée dans un milieu poreux rend la physique de l'écoulement beaucoup plus complexe. D'un point de vue de la mécanique des milieux continus, le mélange acquiert une rhéologie non-Newtonienne, c'est-à-dire que la viscosité du fluide n'est alors plus nécessairement uniforme dans la phase liquide du milieu poreux et dépend des contraintes locales (Section 1.1). De plus, divers phénomènes à petites échelles agissant sur les molécules de polymères peuvent localement modifier l'écoulement (Section 1.2). Par exemple, la dégradation des chaînes de la molécule ou la salinité peuvent affecter les propriétés rhéologiques du fluide. A l'interface liquide/solide, la réorganisation des chaînes et les interactions moléculaires peuvent rendre la condition classique de non glissement inadéquate.

Les phénomènes physiques qui se produisent à petites échelles se manifestent à grandes échelles via plusieurs paramètres expérimentaux qui traduisent des caractéristiques de l'écoulement macroscopique (Section 1.3). La loi de Darcy pour les milieux poreux, qui stipule que la vitesse moyennée en espace dépend linéairement du gradient de pression intrinsèque, n'est généralement pas vérifiée. Des méthodes mathématiques de changement d'échelle permettent de lier des modèles à petites et grandes échelles (Section 1.4). Le cas linéaire (fluide Newtonien et sans glissement à la paroi liquide/solide) à la petite échelle est depuis longtemps traité dans la littérature et des modèles plus spécifiques (fluide non-Newtonien, condition de glissement à la paroi) ont également été élaborés. Dans ce contexte, les objectifs de la thèse seront détaillés dans la Section 1.5.

### 1.1 Propriétés rhéologiques

#### 1.1.1 Les polymères modélisés

En récupération pétrolière améliorée (EOR pour "*Enhanced Oil Recovery*"), les deux polymères les plus couramment utilisés pour augmenter la viscosité de la solution injectée dans le réservoir sont le xanthane et le polyacrylamide partiellement hydrolysé (HPAM).

Le xanthane est un bio-polymère produit par le micro-organisme Xanthomonas campestris [24]. Dans sa forme la plus simple, la molécule est une hélice semi-rigide [25]. Sa rigidité lui confère une insensibilité au pH ou à la salinité. Cette molécule présente également une bonne stabilité thermique et mécanique [26]. La longueur typique de la molécule est de l'ordre du micron [5]. Ce polymère présente aussi des désavantages comme la formation de micro-gels qui peuvent boucher certains pores et ainsi dégrader fortement l'injectivité [27, 28]. Ce polymère est aussi coûteux à préparer et peut se dégrader par réactions chimiques ou biologiques [18].

Dès les années 1960, le HPAM a été utilisé pour des applications EOR dans des champs pétrolifères [5, 6]. L'hydrolyse de la molécule conduit à la formation de ligands anioniques sur la chaîne carbonée [29]. Ces ligands entraînent des effets particuliers du HPAM, comme une tendance à s'adsorber aux surfaces, ou une sensibilité au pH [30] et à la salinité [31]. Le HPAM peut aussi se dégrader à partir d'une certaine température [32], ce qui limite son utilisation à certains réservoirs, assez peu profonds. Les molécules de HPAM sont flexibles et peuvent se lier entre elles ou aux molécules adsorbées à la surface [33].

Les propriétés rhéologiques sont sensibles à la distribution de la masse molaire et à la concentration en polymère dans la solution. Différents régimes de concentration en polymère existent et on utilise une concentration critique de chevauchement  $c^*$  pour les différencier [12]. Cette concentration peut être reliée à la taille des molécules et correspond à la concentration à partir de laquelle les molécules de polymères sont assez nombreuses pour interagir. On distingue trois régimes :

- Le régime dilué correspond à  $c < c^*$ . Il y a très peu d'interactions entre les chaînes. En conséquence, les effets non-Newtoniens n'apparaissent pas quelles que soient les contraintes locales.
- Le régime semi-dilué, qui correspond à  $c^* < c \ll c_{\text{gel}}$ , où le comportement de la solution est dominé par les effets visqueux.
- Le régime concentré, où  $c^* \ll c < c_{\text{gel}}$ . Le comportement de la solution est dominé par les effets élastiques.

Dans le cadre de cette thèse, on étudiera principalement le comportement de solutions semi-diluées. Ce régime de concentration correspond à une gamme de concentration de 100 à 2000 ppm, qui est classiquement utilisée en EOR [5].

#### 1.1.2 Le comportement visqueux

Contrairement à un milieu poreux qui, par sa structure, contraint l'écoulement du fluide, l'écoulement est en cisaillement pur dans un rhéomètre. La taille des molécules est très petite devant la taille du rhéomètre et on observe la réponse purement rhéologique de la solution, qu'il faut cependant parfois corriger pour prendre en compte le glissement des molécules à la paroi du rhéomètre.

Les molécules de polymère augmentent considérablement, même à très faible concentration, la viscosité d'une solution. A quelques centaines de ppm, la viscosité peut déjà atteindre la dizaine de centipoises  $(1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1})$  [5]. Une interprétation physique de l'augmentation de viscosité peut se faire à partir de l'énergie dissipée par les interactions moléculaires. Plus la taille de la molécule est grande et plus son mouvement dissipe de l'énergie [34]. De plus, les molécules ont tendance à s'entremêler et donc à opposer une plus forte résistance au mouvement. L'ajout d'un polymère permet dont d'augmenter la viscosité Newtonienne  $\mu_0$  du fluide. La viscosité augmente avec la masse molaire ou la concentration [35].

Dans le régime de concentration semi-dilué et sous un écoulement en cisaillement pur, le HPAM et le xanthane sont rhéo-fluidifiants. A partir d'un certain taux de déformation critique  $\dot{\gamma}_c$ , les molécules de polymère vont se détacher les unes des autres et s'aligner avec la direction de l'écoulement. Elles opposent moins de résistance au mouvement. La plupart des solutions de polymère présentent donc des caractéristiques rhéo-fluidifiantes. La viscosité diminue en loi de puissance avec le taux de déformations  $\dot{\gamma}$ . La Figure 1 illustre cet effet avec trois modèles différents pour caractériser une solution rhéo-fluidifiante. De nombreux modèles existent pour décrire la rhéologie des polymères [36, 35]. Le modèle rhéologique le plus simple est le "*Power-Law with Cut-Off*" (PLCO), où la viscosité suit loi suivante,

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \\ \mu_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$
(1.1)

avec *n* un paramètre propre à la solution. Ce modèle décrit très bien les comportements asymptotiques. Cependant, la zone de transition ( $\dot{\gamma} = \mathcal{O}(\dot{\gamma}_c)$ ) est relativement mal décrite. D'autres modèles, comme Bird-Carreau [37], représentent mieux la chute progressive de viscosité.



FIGURE 1: Différents modèles rhéologiques.

#### 1.1.3 Le comportement élastique

Dès 1948, il a été démontré que l'ajout de polymère, même à faible concentration, peut modifier drastiquement les caractéristiques d'un écoulement à haut Reynolds [38]. Bien plus tard, des observations *in situ* d'écoulement de fluides viscoélastiques ont aussi démontré qu'à faible nombre de Reynolds des structures tourbillonnaires sont générées en amont d'une constriction [39]. A contrario, pour l'écoulement d'un fluide Newtonien à haut nombre de Reynolds, ce type de structures est typiquement observé en aval d'une constriction. Par analogie, on parle alors de turbulence élastique.

Dans un milieu poreux, la molécule de polymère passe par une succession de pores et seuils de pores. Dans les seuils de pores, les contraintes peuvent être suffisamment fortes pour déformer la molécule. Dans le pore, les contraintes diminuent et la molécule retrouve sa conformation originelle. Plus la géométrie induit de fortes variations de contraintes, et plus la turbulence élastique se manifeste [40].

L'effet principal de la turbulence élastique est d'augmenter l'énergie dissipée. D'un point de vue macroscopique, cela se traduit par une augmentation de la chute de pression macroscopique pour une vitesse moyenne fixée. Dans le contexte EOR, ce phénomène est *a priori* indésirable car il conduit

à imposer une forte pression dans le puits d'injection. Cependant, des simulations numériques prédisent que la viscoélasticité induit un meilleur balayage du milieu par le polymère [41]. Cela a été confirmé par des expériences sur micro-modèles qui ont montré que les effets instationnaires conduisent à une mobilisation de l'huile piégée par effet capillaire [42, 43].

Pour pourvoir induire une rhéologie viscoélastique, le polymère doit être flexible. Ainsi il peut, par déformation, stocker de l'énergie sous forme élastique. C'est la raison pour laquelle la plupart des phénomènes viscoélastiques ont été observés avec du HPAM, qui est flexible. Pour caractériser le phénomène viscoélastique le nombre adimensionnel de Weissenberg (Wi) est souvent utilisé. Le nombre de Weissenberg,  $Wi = \langle v \rangle \lambda_1 / R$  est le produit d'un taux de déformation caractéristique (souvent estimé comme le rapport d'une vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  et d'une longueur caractéristique R) et du temps caractéristique nécessaire à une molécule déformée pour retrouver sa conformation originelle  $\lambda_1$ .

La modélisation de l'écoulement d'un fluide viscoélastique a été le sujet de nombreuses études. La principale difficulté provient du tenseur de déformation, qui prend en compte l'histoire de l'écoulement selon un temps caractéristique et devient une fonction fortement non-linéaire de la vitesse et du temps. De nombreux modèles existent pour représenter ces écoulements. Le premier modèle qui est apparu est le modèle Oldroyd-B [44]. Dans ce modèle, des particules sont en suspension dans un solvant Newtonien. Ces particules sont reliées entres elles deux à deux par un ressort de Hook, la force de rappel étant alors proportionnelle à la déformation. Selon ce modèle, on peut démontrer sous de nombreuses hypothèses (comme considérer les particules sans inertie ou négliger la traînée hydrodynamique des billes, voir Chapitre 13 de [44]) que le tenseur des contraintes  $\tau$  suit alors une loi de la forme,

$$\tau + \lambda_1 \overline{\tau} = -\eta_0 \left( \mathsf{D} + \lambda_2 \overline{\mathsf{D}} \right), \tag{1.2}$$

avec D le tenseur de déformations et  $\lambda_2$  et  $\eta_0$  des constantes calculées à partir de paramètres inhérents au fluide (concentration, température et temps caractéristique de relaxation). On note que  $\lambda_1 = 0$  permet de retrouver le cas d'un écoulement Newtonien, qui correspond à une concentration nulle en polymère dans la solution. On obtient alors  $\tau = \eta_s D$  avec  $\eta_s$  la viscosité du solvant.

Par la suite, de nombreux modèles ont été développés (par exemple FENE [45, 46, 47], Giesekus [48, 49] ou L-PTT [50, 51]). Ces modèles se ressemblent fortement et ont été validés numériquement avec une expérience d'écoulement de fluide viscoélastique dans une constriction en marche d'escalier [52]. Tous ces modèles se heurtent à des problèmes numériques à haut nombre de Weissenberg. A haut nombre de Weissenberg, la turbulence devient trop forte et la plupart des schémas numériques divergent (typiquement pour  $Wi \ge 5$ ). Récemment, une nouvelle approche mathématique a été utilisée avec succès [53, 54]. Cette méthode, dite "log-conformational", consiste à faire un changement de variables pour améliorer la stabilité des calculs.

### 1.2 L'écoulement en milieu poreux à la petite échelle

A l'échelle des pores, plusieurs longueurs caractéristiques émergent lorsque l'on traite d'écoulement de polymère en milieu poreux. Ces longueurs peuvent être associées à la structure poreuse ou au fluide qui la traverse.

Des longueurs intrinsèques à la structure poreuse, comme une taille de pore ou de seuil de pore, sont souvent utilisées. D'autres longueurs, calculées par exemple à partir d'une analyse statistique de la structure poreuse dans le cas de milieux périodiques, permettent d'estimer sur quelle longueur la structure poreuse se répète. Des propriétés intrinsèques au milieu poreux (comme la perméabilité) peuvent également être calculées à partir d'un écoulement linéaire (viscosité Newtonienne, sans glissement à la paroi) et sont aussi reliées à des longueurs caractéristiques (rayon équivalent  $R_{eq}$  ou parcours moyen).

D'un autre côté, les longueurs intrinsèques à la solution de polymère sont par exemple la taille moyenne des molécules ou l'écart type de la distribution de taille de polymère. Les molécules de polymère peuvent se lier et interagir sur de courtes distances avec les parois solides. C'est lorsque les longueurs caractéristiques du fluide ne sont plus négligeables devant les longueurs caractéristiques du milieu poreux que le modèle continu, ou fluide effectif, n'est plus pertinent.

#### 1.2.1 Les différentes petites échelles

Divers phénomènes à la petite échelle peuvent modifier les propriétés de l'écoulement de la solution de polymère injectée dans un milieu poreux. Une caractéristique importante d'un écoulement en milieu poreux est la grande surface spécifique, c'est-à-dire le grand ratio surface des pores sur volume du milieu poreux. Les propriétés macroscopiques sont alors très sensibles aux phénomènes se produisant à l'interface, comme par exemple la dissolution, le transfert de masse ou encore le glissement. Concernant les polymères, on observe des comportements à proximité d'une surface solide très variés.



FIGURE 2: Différents modèles pour décrire le transport de polymère près d'une interface solide [55]. La situation (a) correspond à la modélisation de chaque molécule de polymère et (b) correspond à une description statistique des chaînes de polymère. Dans les situations (c) et (d), le comportement proche paroi est modélisé par une condition effective.

A l'échelle moléculaire (Fig. 2a), les chaînes de polymères s'organisent de manière particulière à proximité de la paroi. Les deux grandes classes de phénomènes possibles à l'interface sont l'adsorption (décrite dans la Section 1.2.2) et la répulsion (décrite dans la Section 1.2.3). Une revue détaillée des phénomènes entre les molécules de polymère et l'interface est fournie par exemple dans [56] ou [57]. Pour étudier les mécanismes à l'interface, des simulations de dynamique moléculaire avec des chaînes simplifiées sont utiles pour comprendre la phénoménologie à très petite échelle [58]. Bien que ces simulations soient majoritairement utilisées pour clarifier la rhéologie, elles sont de plus en plus utilisées pour étudier le comportement proche de la paroi [59, 60]. Cependant, ces techniques sont encore trop coûteuses et les simulations ne peuvent pas être réalisées sur des volumes suffisamment grands pour modéliser un écoulement en milieu poreux.

Des modèles mésoscopiques (Fig. 2b), qui décrivent le comportement statistique des chaînes de polymère, donnent une description continue de la concentration. Des modèles théoriques existent dans le cas d'une répulsion [61] ou d'une attraction [62] des chaînes à la paroi et prédisent le champ de concentration en fonction d'une distance à la paroi [63]. La concentration peut fortement varier en temps ou en espace près de la paroi. Ces modèles restent difficiles à utiliser pour prédire le comportement macroscopique d'un écoulement à travers un volume assez grand.

Pour modéliser l'écoulement à travers des volumes assez grands, il est nécessaire de considérer le problème à l'échelle des pores. On résout alors les équations de Stokes (le terme inertiel est négligé ici sous l'hypothèse d'un écoulement rampant) du fluide effectif dans la phase liquide  $\beta$ ,

$$\nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla \mathbf{v} + \left( \nabla \mathbf{v} \right)^{\mathsf{T}} \right) \right] - \nabla p = \rho \mathbf{f}, \qquad (1.3)$$

où  $\mathbf{v}$  et p sont respectivement la vitesse et pression dans la phase liquide et  $\mathbf{f}$  un terme source de quantité de mouvement. On note que la plupart des variables ( $\mathbf{v}$ , p,  $\mu$  ou  $\rho$ ) pourraient s'écrire avec l'indice  $\beta$ , puisqu'elles sont définies uniquement dans la phase liquide. Pour simplifier les notations, elles sont cependant notées sans indice dans l'ensemble de cette thèse. La viscosité  $\mu$  n'est pas constante, mais est une fonction non-linéaire du taux de déformation local (par exemple PLCO, Eq. 1.1). En supposant que le fluide est incompressible, l'équation de bilan de masse s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.4}$$

Une première possibilité pour prendre en compte de manière approchée l'effet de la réorganisation des chaînes moléculaires près de la paroi est de séparer la phase liquide  $\beta$  en une phase loin des parois (p dans la Fig. 2c) où la viscosité est indépendante de la distance à la paroi et une phase proche de la paroi (b dans la Fig. 2c) où la viscosité ne l'est plus. Des modèles continus ou discontinus de la viscosité dans la région proche de la paroi ont été proposés [64, 26].

La seconde possibilité est de conserver le champ de viscosité constant, ou obéissant à la loi rhéologique en volume, et d'ajouter une condition effective à la paroi. Cette condition effective est dérivée à partir d'un modèle mésoscopique; voir par exemple [65] pour la présentation d'une technique de dérivation de conditions aux limites effectives. Dans cette thèse, une condition effective à la paroi pour un mécanisme répulsif est proposée dans le Chapitre 4. Le cas de l'adsorption n'est pas considéré dans cette thèse.

#### 1.2.2 L'adsorption

L'origine physique de l'adsorption des chaînes de polymères à l'interface peut être multiple et dépend à la fois des propriétés de la molécule et de la surface [62]. De manière générale, plus la chaîne est longue, et plus la probabilité qu'elle soit adsorbée est grande [66, 67]. A faible régime d'écoulement, il y a une forte friction entre les chaînes en suspension et les chaînes adsorbées [68, 69]. D'un point de vue de la modélisation à l'échelle du fluide effectif (Fig. 2d), l'adsorption peut alors se traduire avec une condition de non glissement. En revanche, à plus fort régime d'écoulement, les chaînes en suspension peuvent se détacher des chaînes adsorbées et un modèle de glissement apparent est alors nécessaire [68].

L'adsorption en condition statique peut être mesurée expérimentalement et est bien documentée dans la littérature [7]. A l'équilibre, le modèle de Langmuir exprime la concentration adsorbée en fonction de la concentration locale et des variables thermodynamiques [70]. En condition dynamique, le comportement de la couche adsorbée est moins clair. De plus, la couche adsorbée peut par exemple se détacher si les contraintes à la paroi sont suffisamment fortes et des phénomènes instationnaires peuvent se développer [71].

Dans un milieu poreux, si la taille de la couche adsorbée est de l'ordre de grandeur des seuils de pores, un phénomène de pontage entre les couches adsorbées de part et d'autre du seuil de pore ("*pore brigding*") est susceptible d'apparaître [16]. Ce phénomène peut fortement réduire la perméabilité apparente du milieu. De plus, à forte vitesse d'écoulement, les forces hydrodynamiques peuvent être suffisamment fortes pour introduire des molécules de polymères dans la couche adsorbée, augmentant ainsi son épaisseur [72] et donc le nombre de seuils de pores bloqués.

#### 1.2.3 La répulsion

Dans d'autres situations, les chaînes de polymères peuvent aussi être repoussées de la paroi (voir les revues de Barnes [56] ou Sochi [57]). Les causes de cette répulsion peuvent être stériques [73] (les molécules ne peuvent pas approcher la paroi de part leur grande taille), électrostatiques [74] ou hydrodynamiques [75]. La répulsion conduit à la formation d'une fine couche près de l'interface, appelée couche de déplétion [76]. Dans cette couche, la concentration en polymère est plus faible que loin de la paroi.

D'un point de vue modélisation, la couche de déplétion est caractérisée par une épaisseur  $\delta$  et un profil de concentration. Ce profil de concentration, qui n'est pas forcément uniforme, peut être traduit en un profil de viscosité [77]. Les propriétés de la couche de déplétion peuvent dépendre de nombreux paramètres, comme le pH [14], la concentration en polymère ou la flexibilité des chaînes [62, 78]. La fine couche de fluide ayant une faible viscosité, elle agit comme un film lubrifiant. Les molécules de polymères glissent alors sur ce film. En conséquence, moins d'énergie est perdue par frottement du fluide à la paroi.

#### 1.2.4 Autres phénomènes non pris en compte

D'autres phénomènes physiques peuvent se manifester avec des écoulements de polymères. Dans le cadre de cette thèse, les phénomènes suivants ne seront pas étudiés.

#### La dégradation

Lors de l'écoulement de la solution dans le réservoir pétrolier, une dégradation d'origine thermique, mécanique ou biologique peut se produire [17, 32]. Les chaînes de polymère se cassent et la distribution de masse molaire (DMM) est modifiée. Cette dégradation affecte directement la viscosité, qui chute [79]. Le caractère rhéo-fluidifiant est aussi moins prononcé (n plus proche de l'unité dans Eq. 1.1) [80]. Les chaînes étant de taille plus petite, le caractère élastique du fluide s'exprime également moins [79].

#### La salinité

Certains polymères, comme le HPAM, sont sensibles à la concentration et à la nature des sels en solution [5]. En effet, en l'absence de sel, les ligands anioniques présents sur la molécule se repoussent les uns les autres ce qui conduit à une conformation étendue de la molécule. En présence de sel, les cations sont attirés par les ligands anioniques. Les forces intramoléculaires sont alors moins fortes et la molécule se replie sur elle même. Avec cette conformation repliée, la viscosité de la solution est beaucoup plus faible [13]. Il a aussi été observé que la salinité réduisait les effets élastiques [80].

#### La rétention mécanique

De part différents mécanismes en place à l'échelle des pores, les molécules de polymères sont susceptibles d'être piégées dans le milieu poreux. Ce phénomène, appelé rétention, peut avoir comme origine l'adsorption des molécules à la paroi ou le piégeage mécanique des plus larges molécules dans les petits pores [81]. Récemment, les progrès de visualisations *in situ* dans des micro-modèles ont permis de clarifier le comportement des différents types de rétention [82]. La rétention dite mécanique est d'autant plus grande que la perméabilité de la roche est petite [15, 83]. Elle est généralement quantifiée en masse de polymère piégée par unité de masse de roche ( $\mu$ g.g<sup>-1</sup>).

La rétention mécanique est sensible à divers paramètres comme la vitesse d'injection ou la concentration en polymère [84, 81] mais aussi la dégradation qui, en diminuant la taille des molécules, diminue la quantité de polymère piégée [80]. La rétention a diverses conséquences, notamment sur une injection d'eau qui suit une injection de polymère. On remarque en effet que la perméabilité à l'eau est souvent diminuée [6]. Enfin, dans une région où le polymère est piégé mécaniquement, il y a une accumulation de polymère qui est immobile. La concentration étant forte dans cette région, les propriétés de transport (diffusion moléculaire ou viscosité) peuvent être modifiées.

#### Les volumes de pores inaccessibles

Certains phénomènes peuvent conduire à un volume de pore inaccessible (IPV, pour "*Inaccessible Pore Volume*") pour les molécules de polymères [85, 86]. Il existe trois sources potentielles d'IPV :

- De part leur large taille, les molécules ne peuvent pas accéder à certaines régions du domaine. Les molécules restent alors bloquées devant les seuils de pores. Il a été observé que l'IPV augmente avec la masse molaire (moins de seuils de pore peuvent être traversés) et diminue avec la salinité (qui peut réduire la taille effective des molécules flexibles) [87].
- Le phénomène de répulsion des molécules de polymères de la paroi entraînent aussi une zone inaccessible le long de la frontière liquide/solide. L'épaisseur de la couche de déplétion est également sensible à la salinité et à la masse molaire.
- Due à la topologie de la structure poreuse, il existe des zones à faibles vitesses dans le milieu poreux, dite immobiles. Il y a alors un transfert de masse des zones mobiles aux zones immobiles [88]. La taille de ces zones est corrélée au nombre de Péclet, et donc à la vitesse moyenne de l'écoulement.

Expérimentalement, il est difficile de différencier ces sources d'IPV. De plus, tout comme la rétention mécanique, l'IPV peut varier en fonction de l'orientation de l'écoulement si le milieu n'est pas homogène.

En un sens, l'IPV s'oppose au phénomène de rétention. En effet, la rétention a tendance à retarder l'avancée du polymère alors que l'IPV a tendance à l'accélérer. Lorsque les phénomènes qui conduisent à l'IPV et à la rétention se produisent simultanément dans le milieu, interpréter les résultats expérimentaux associés devient alors difficile.

#### Le transport de masse

Une solution de polymère est, quel que soit le procédé de fabrication, polydisperse. La distribution de masse moléculaire (DMM) peut alors être étendue. Cependant, le transport des molécules de taille différente peut conduire, par divers phénomènes, à une variation spatiale de la DMM. Dès lors, pour décrire le transport de masse, il faut décrire le transport de masse de chaque espèce [89]. Un exemple de cette modification de la DMM est le rôle de l'IPV. Pour certaines molécules de grandes taille, certains pores seront inaccessibles. Dans ces pores, la DMM sera donc moins étendue. D'autres phénomènes, comme la dégradation (mécanique ou thermique [90, 19]) ou l'adsorption des grandes chaînes à la paroi peuvent directement modifier la DMM. Des termes sources et puits doivent donc être ajoutés à l'équation de transport pour chaque espèce.

Dans le transport de masse, la loi de Fick est souvent utilisée pour modéliser la diffusion. Dans le cas d'une solution de polymère, le coefficient de diffusion varie fortement avec la concentration [91]. On imagine alors facilement que, dans les régions où le polymère est retenu (mécaniquement ou hydrodynamiquement), la diffusion augmente fortement. De plus, il a été montré que les déformations locales peuvent réorganiser la répartition des chaînes et modifier le coefficient de diffusion [92].

### 1.3 L'écoulement en milieu poreux à la grande échelle

#### 1.3.1 Mesures expérimentales

Pour caractériser expérimentalement l'écoulement d'une solution de polymère, des expériences dite "sur carotte" sont souvent réalisées. Dans ces expériences, le milieu poreux est confiné dans un cylindre étanche et le débit d'injection de la solution de polymère à travers ce cylindre est imposé. La chute de pression macroscopique est mesurée avec des manomètres en amont et en aval de la carotte.

Lors de mesures expérimentales, des paramètres spécifiques aux écoulements de polymère sont souvent utilisés et permettent d'estimer les phénomènes physiques supposés en jeu. En fixant le débit d'injection dans la carotte poreuse, on mesure le paramètre de réduction de mobilité RF(pour "Resistance Factor") comme,

$$RF = \frac{\Delta P_p}{\Delta P_{w0}},\tag{1.5}$$

avec  $\Delta P_{w0}$  la chute de pression associée à un écoulement d'eau et  $\Delta P_p$  à l'écoulement de la solution de polymère. Généralement, RF est supérieur à 1, ce qui signifie simplement qu'il est plus difficile d'injecter du polymère que de l'eau dans le milieu. Dans une problématique d'injection dans un puits de réservoir, on peut diminuer RF en dégradant la solution [79].

On mesure aussi la réduction de perméabilité RRF (pour "*Residual Resistance Factor*"), comme le ratio de chute de pression entre un *écoulement d'eau avant* et *après* injection de polymère,

$$RRF = \frac{\Delta P_{w1}}{\Delta P_{w0}}.$$
(1.6)

Lorsque le RRF est plus grand que 1, cela signifie que la rétention du polymère (sur les parois ou dans les pores) diminue la perméabilité à l'eau [86]. Le RRF est dépendant de la taille des molécules de polymères [33, 93].

Toujours à partir d'écoulements macroscopiques expérimentaux, il est aussi possible d'estimer l'épaisseur moyenne de la couche de polymère adsorbée. En assimilant l'écoulement dans la carotte à un écoulement dans un tube et en utilisant le rayon équivalent  $R_{eq}$  comme longueur caractéristique du milieu poreux (ce qui est un choix arbitraire), Chauveteau [66] propose d'estimer l'épaisseur de la couche adsorbée *e* avec le facteur de réduction de perméabilité comme,

$$RRF = (1 - e/R_{eq})^{-4}$$
. (1.7)

L'épaisseur de la couche adsorbée est de l'ordre de la taille des molécules [66]. Cependant, l'adsorption reste un phénomène local, et le transport de masse ou les contraintes près de la paroi conduisent probablement à une épaisseur adsorbée non uniforme [94].

Le volume de pores inaccessibles est souvent estimé avec les profils de concentration en polymère et en sel en sortie de carotte. Ne pouvant accéder à toute la structure poreuse, les molécules de polymères traversent plus vite la carotte que le sel. On observe alors en sortie un front de concentration en polymère puis en sel qui augmente avec le volume de fluide injecté [83, 95]. L'écart entre les deux profils de sortie permet d'estimer l'IPV [7]. Pour des grès typiquement rencontrés en ingénierie pétrolière, l'IPV est de 30% du volume fluide. Il a aussi été observé que l'IPV augmente avec la masse molaire et diminue avec la concentration [87].

#### 1.3.2 Modèles macroscopiques

Les phénomènes microscopiques décrits dans la Section 1.2 se traduisent par des comportements spécifiques à une échelle macroscopique. Dans les simulateurs de réservoirs comme UTCHEM [10] ou ECLIPSE [11], le transport monophasique d'une solution de polymère est modélisé avec des lois macroscopiques de la forme,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_0}{\mu \left( \dot{\gamma}_{\rm eq} \right) R_{\rm k}} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right), \tag{1.8}$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \phi_{\text{eff}}c}{\partial t} + (1 - \phi) \frac{\partial c_{\text{ads}}}{\partial t} + \nabla \cdot (c \langle \mathbf{v} \rangle) = \nabla \cdot (\phi \mathsf{D}_{\text{eff}} \cdot \nabla c), \qquad (1.10)$$

$$c_{\rm ads} = f\left(T, P, c, \langle \mathbf{v} \rangle\right). \tag{1.11}$$

L'équation 1.9 signifie que l'écoulement est à masse volumique constante. L'équation 1.10 traduit la conservation de quantité de matière, avec c la concentration en polymère et  $\langle \mathbf{v} \rangle$  est la vitesse moyenne superficielle. L'équation 1.8 est la loi de Darcy où  $\mathsf{K}_0$  est le tenseur de perméabilité intrinsèque,  $\mu$  la viscosité obtenue par un rhéomètre (appelée parfois viscosité de référence et notée  $\mu_r$  dans les simulateurs de réservoir),  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  le gradient de pression intrinsèque,  $\rho \mathbf{g}$  le terme de gravité et  $R_k$  un paramètre semi-empirique.

La viscosité  $\mu$  est une fonction du taux de déformation équivalent  $\dot{\gamma}_{eq}$ . Cette fonction est définie par la viscosité mesurée dans un rhéomètre. Le paramètre  $R_k$  doit en théorie prendre en compte les effets de réduction de perméabilité dus au polymère. Dans cette loi de Darcy modifiée,  $K_0$  est fixé constant pour chaque maille du domaine macroscopique. Une viscosité à grande échelle, dite apparente, peut être définie comme,

$$\mu_{\rm app} = \mu \left( \dot{\gamma}_{\rm eq} \right) R_{\rm k}. \tag{1.12}$$

On remarque alors que c'est uniquement  $\mu_{app}$  qui est chargé ici de modéliser toute la physique associée au polymère.

#### Une correction scalaire de Darcy

Généralement, on associe le facteur de réduction de perméabilité  $R_k$  à la réduction de perméabilité due au polymère retenu dans le milieu par adsorption ou rétention mécanique (voir Eq. 2.84

dans [10]). Cependant, de nombreux autres phénomènes physiques peuvent se produire et dans une expérience,  $R_k$  les englobent tous. Cela explique pourquoi il peut dépendre théoriquement de beaucoup de paramètres (propriété de la roche et du type de polymère, salinité ou vitesse d'écoulement). Dans les simulateurs de réservoirs, ce facteur obéit alors à une formulation semi-empirique qui dépend du type de polymère et des propriétés de la roche [96].

Avec une correction à la loi de Darcy purement scalaire (Eq. 1.8), il semble impossible de prendre en compte une possible modification de l'orientation des axes principaux du tenseur de perméabilité. Dans les modèles actuels, la direction d'un écoulement,  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle / || \langle \mathbf{v} \rangle ||$ , est identique avec et sans polymère pour un gradient de pression donné. Il n'y a *a priori* aucune raison pour que les axes principaux du tenseur de perméabilité apparent restent inchangés avec un écoulement non-Newtonien. Sur des cellules unitaires simples, il a d'ailleurs été montré par des procédures de changement d'échelle que les axes principaux étaient effectivement modifiés [97, 98].

Dans les simulateurs de réservoirs, les mailles du domaine sont alignées avec les couches géologiques. On suppose alors que le tenseur de perméabilité peut être pris comme diagonal [10]. Introduire un tenseur non diagonal peut largement compliquer les calculs numériques macroscopiques, car il est alors plus difficile de calculer le flux aux faces des mailles en interpolant la vitesse.

On peut néanmoins nuancer le propos ici. Le désordre des roches modélisées dans les simulateurs de réservoirs pourraient fortement atténuer un effet d'anisotropie induit par la rhéologie. Si le milieu est homogène, assez désordonné et suffisamment grand, on peut penser qu'aucune direction n'est favorisée par la rhéologie non-Newtonienne et que, en conséquence, les directions de vitesse Newtonienne et non-Newtonienne sont identiques. La possibilité de prendre en compte les effets non-Newtoniens simplement par des paramètres scalaires dans la loi macroscopique reste cependant à vérifier pour des milieux typiquement rencontrés en ingénierie pétrolière. C'est ce que l'on se propose de faire dans le Chapitre 5.

#### La viscosité à grande échelle

Hors milieu poreux, un rhéomètre nous renseigne sur le comportement de la viscosité avec le taux de déformation local, i.e.,  $\mu$  avec  $\dot{\gamma}$ . Souvent, une formulation de type Bird-Carreau est alors utilisée pour décrire la fonction  $\mu(\dot{\gamma})$  [37]. Lorsqu'une solution de polymère s'écoule dans un milieu poreux, une viscosité apparente  $\mu_{app}$  est introduite (Eq. 1.12). Prenons  $R_{\rm k} = 1$ , ce qui signifie qu'aucun phénomène de rétention ne se produit. On essaie alors de calibrer les données expérimentales seulement avec  $\mu$ , qui est fonction d'un taux de déformation équivalent  $\dot{\gamma}_{\rm eq}$ . Une question vient alors naturellement : comment estimer  $\dot{\gamma}_{\rm eq}$ ?

Cette question se pose ici pour le taux de déformation, qui est une quantité fondamentalement microscopique, mais elle est aussi plus générale; comment estimer des quantités macroscopiques apparente? Cette question se pose par exemple pour la taille des pores, que l'on estime avec un rayon équivalent  $R_{eq}$ . En utilisant des formulations à la grande échelle (loi de Darcy), des quantités physiques intrinsèquement microscopiques sont transcrites à la grande échelle. Pour définir ces quantités, on a alors souvent recours à des analogies avec des écoulements à travers des tubes capillaires.

En pratique, pour alimenter les modèles des simulateurs de réservoirs, des écoulements sur carottes sont réalisés et une viscosité apparente est mesurée en fonction de la vitesse moyenne d'écoulement. On définit alors ensuite  $\dot{\gamma}_{eq}$  tel que les courbes  $\mu$  vs.  $\dot{\gamma}_{eq}$  (*in situ*) et  $\mu$  vs.  $\dot{\gamma}$  (*ex situ*) se superposent. Plusieurs définitions de  $\dot{\gamma}_{eq}$  sont alors envisageables.

Des le début du XX<sup>ième</sup> siècle, Kozeny [99] et Carman [100] proposent une formulation de  $\dot{\gamma}_{eq}$  en

assimilant le milieu poreux à un ensemble de tubes capillaires. Plus tard, à partir d'empilements de billes, de nouvelles formulations ont été proposées où la longueur caractéristique  $\sqrt{k_0}$  apparaît pour des milieux isotropes [101, 102]. Par la suite, diverses améliorations ont été proposées pour prendre en compte des effets comme la saturation ou la tortuosité [93, 81]. Finalement, c'est la formulation 1D proposée par Chauveteau qui a été largement retenue [64],

$$\dot{\gamma}_{\rm eq} = \alpha \frac{4 \|\langle \mathbf{v} \rangle \|/\phi}{\sqrt{8k_0/\phi}}.$$
(1.13)

Cette formulation provient d'une solution analytique obtenue en assimilant le milieu poreux à un tube simple. Cette formule est valable pour des milieux isotropes. Dans les simulateurs de réservoirs, le cas anisotropes est traité en utilisant  $\|\mathbf{K}_0^{-1/2} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle\|$  dans la formulation de  $\dot{\gamma}_{eq}$  (voir Eq. 2.83 dans [10]).

Dans un tube, lorsque  $\dot{\gamma}_{eq} = \dot{\gamma}_c$ , le fluide est non-Newtonien dans une couronne d'épaisseur infinitésimale le long de la paroi du tube. Caractériser la transition de régime d'écoulement macroscopique de Newtonien à non-Newtonien de cette manière ne semble alors pas adéquate puisque pour  $\dot{\gamma}_{eq} = \dot{\gamma}_c$ , la perméabilité n'a alors que très faiblement déviée de sa valeur Newtonienne. C'est pourquoi cette formulation est principalement utilisée pour caractériser le régime d'écoulement pleinement non-Newtonien, c'est-à-dire pour  $\dot{\gamma}_{eq} > \dot{\gamma}_c$ .

Le paramètre  $\alpha$  est semi-empirique et est utilisé pour superposer les courbes  $\mu$  vs.  $\dot{\gamma}_{eq}$  et  $\mu$  vs.  $\gamma$  dans le régime non-Newtonien. Ce paramètre vaut environ 1.7 pour des empilement de billes [33] et varie avec le milieu poreux (jusqu'à 10 pour des milieux de type grès [103]). Le paramètre  $\alpha$ reflète alors certaines propriétés géométriques du milieu qui sont encore mal cernées [104]. Étant semi-empirique, il pourrait par exemple être fonction aussi bien de la structure poreuse [6] que de la rhéologie [105, 103]. De plus,  $\alpha$  est sensible à de nombreux phénomènes physiques, comme l'adsorption, la rétention ou la dégradation. La physique qu'englobe le paramètre  $\alpha$  est certainement encore très mal comprise.

Dans l'équation 1.13, la longueur utilisée au dénominateur est le rayon équivalent  $R_{eq}$  et provient de l'analogie avec un écoulement de Poiseuille dans un tube. Lorsqu'on l'utilise pour des milieux complexes et tortueux, le choix de cette longueur basée sur un tube semble arbitraire et peut être remis en question [106].

#### Transport de masse

L'équation 1.10 est une équation d'advection diffusion à grande échelle qui régit le transport de la concentration de polymère. Le tenseur de diffusion  $D_{eff}$  est la somme d'un terme de diffusion effective et d'un terme de dispersion. Dans l'équation 1.10,  $\phi_{eff}$  est une porosité effective plus petite que la porosité intrinsèque  $\phi$  et prend en compte l'existence du volume des pores inaccessibles (IPV) aux polymères dans le milieu. Dans les simulateurs de réservoirs, cette grandeur, qui est spécifiée par l'utilisateur, est uniforme dans tout le réservoir [96]. Il est cependant clair que l'IPV peut être différente selon les hétérogénéités mais aussi selon la taille des molécules, qui diminue par dégradation au fur et à mesure que les molécules avancent dans le réservoir.

Le second terme de l'équation 1.10 correspond à la quantité de polymère adsorbée à la paroi et/ou retenue mécaniquement dans le milieu [81]. Dans les simulateurs de réservoirs, on suppose pour l'adsorption une situation d'équilibre local. La concentration  $c_{ads}$  est alors décrite par une adsorption irréversible de Langmuir et est fonction de la concentration et des variables thermodynamiques pression et température. Pour prendre en compte la rétention mécanique, on ajoute dans cette fonction un terme proportionnel à la vitesse d'écoulement [10]. En pratique, des données empiriques pour distinguer l'adsorption et la rétention mécanique sont souvent manquantes [96] et seulement l'adsorption est prise en compte.

Dans le cadre de cette thèse, les milieux poreux utilisés peuvent être considérés comme petits par rapport à l'échelle de variation spatiale de la concentration. On suppose alors que le champ de concentration est uniforme à l'échelle des volumes microscopiques. Il en résulte que les paramètres des lois rhéologiques sont uniformes à l'échelle des milieux poreux utilisés. On s'intéresse seulement aux équations macroscopiques de quantité de mouvement (Eq. 1.8) et d'incompressibilité (Eq. 1.9).

#### 1.3.3 Différents régimes d'écoulements

Dans un champ pétrolifère, la vitesse moyenne est fonction de la distance au puits injecteur. Suivant le régime d'écoulement local, les phénomènes en place à la petite échelle s'expriment différemment. À l'échelle macroscopique, on observe alors des comportement différents selon la distance au puits.

#### Régime d'écoulement fort

Le régime d'écoulement est dit fort lorsque  $\dot{\gamma}_{eq}$  est supérieur à environ 100  $\dot{\gamma}_c$  (avec  $\dot{\gamma}_c$  inhérent à la solution de polymère, voir Eq. 1.1) [107]. C'est le cas près d'un puits d'injection ou de production. Les contraintes locales sont élevées, ce qui conduit à une dégradation de la solution de polymère. Vraisemblablement, la dégradation est la plus forte lorsque le polymère quitte le puits et entre dans le milieu poreux [108]. Cette dégradation est d'autant plus forte que la perméabilité du milieu est faible. Comme expliqué dans la Section 1.2.4, la distribution de masse molaire ainsi que les propriétés visqueuses sont modifiées [17]. À ce régime d'écoulement, un rhéo-épaississement apparent est souvent observé dans le cas de polymères flexibles, qui sont élastiques. Cependant, les solutions étant dégradées, le rhéo-épaississement apparent peut être diminué [79].

#### Régime d'écoulement modéré

Le régime d'écoulement est dit modéré lorsque  $\dot{\gamma}_{eq}$  est supérieur  $\dot{\gamma}_c$  mais suffisamment bas pour que des phénomènes de viscoélasticité ou de dégradation ne se produisent pas. C'est dans ce régime que se manifeste la composante visqueuse des effets non-Newtonien. Dans un rhéomètre, la viscosité chute selon  $\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1}$ , alors que la viscosité apparente chute avec le taux de déformation équivalent  $\mu_{app} \propto \dot{\gamma}_{eq}^{m-1}$ .

Certaines expériences d'écoulement macroscopique sur carottes ont montré que les pentes sont similaires, i.e., m = n [109, 103], alors que d'autres ont montré que le paramètre m était sensiblement plus grand que n [110, 26]. Le fait que le polymère soit apparemment moins rhéo-fluidifiant peut être expliqué de différentes manières. On peut penser que le glissement des chaînes de polymères à la paroi devient moins important lorsque le taux de déformation local est fort [26]. Cette explication n'a cependant jamais été démontrée rigoureusement et ce phénomène reste inexpliqué.

#### Régime d'écoulement faible

Le régime d'écoulement est dit faible lorsque  $\dot{\gamma}_{eq}$  est plus petit que  $\dot{\gamma}_c$ . Le fluide se comportant comme un fluide Newtonien, on s'attend à ce que la viscosité apparente soit égale à la viscosité Newtonienne de la solution  $\mu_0$ . Cependant, il a été souvent observé que  $\mu_{app}$  était différent de  $\mu_0$ .

Avec certains polymères, notamment le xanthane, des micro-gels peuvent se former. Ces microgels de grande taille bloquent des pores et conduisent à une viscosité apparente observée plus grande que la viscosité en volume. Dans un champ pétrolifère, cela peut conduire à des problèmes d'injectivité de la solution au niveau du puits. Des techniques de filtrations de la solution peuvent être utilisées pour éviter la formation de ces micro-gels [28].

Souvent, il est aussi observé à bas régime d'écoulement que  $\mu_{app}$  est plus petit que  $\mu_0$  [26, 64]. A bas régime d'écoulement, les phénomènes à l'interface deviennent en effet prépondérant, notamment la possible répulsion des chaînes de polymères, comme expliqué dans la Section 1.2.3. Cette chute de viscosité apparente a été fortement étudiée dans la littérature et des modèles mésoscopiques [77] ou à l'échelle des pores (voir Chapitre 4) ont été proposés.

### 1.4 Le changement d'échelle

Les méthodes de changement d'échelles permettent de lier la phénoménologie micro- et macroscopique. Les deux grandes familles de cette méthode mathématique sont la prise de moyenne volumique (VAM pour "Volume Averaging Method") [22] et l'homogénéisation [23]. Une comparaison entre les deux méthodes est proposée par Davit *et al.* [111]. Dans cette thèse on emploiera la VAM dans l'Annexe D. On montrera que la forte non-linéarité limite cette méthode, et qu'elle revient à faire des simulations numériques spéciales sur des échantillons périodiques pour prédire des propriétés effectives.



FIGURE 3: Schéma de principe de séparation des échelles  $(L \gg h \gg \ell_{\beta})$ . Dans le volume élémentaire représentatif, la phase solide  $\sigma$  est représentée en gris.



FIGURE 4: Diagramme d'une méthodologie de changement d'échelle par la prise de moyenne volumique dans le cas linéaire (rhéologie Newtonienne et condition de non-glissement à la paroi).

#### 1.4.1 Le cas linéaire

Le but d'une méthode de changement d'échelle est de résoudre un système d'équations à la petite échelle sur un volume élémentaire représentatif (VER, de taille caractéristique h) afin de calculer des propriétés effectives (par exemple le tenseur de perméabilité K) définies sur un domaine macroscopique de taille L, voir Fig. 3. Prenons l'exemple des équations de transport de la quantité de mouvement et de masse (Eqs. 1.3 et 1.4). La méthodologie associée à ce cas est illustrée dans la Figure 4. Initialement, le problème est défini à l'échelle microscopique sur le VER. Ce problème comporte 4 inconnues; la vitesse  $\mathbf{v}$  et la pression p qui sont définies dans la phase liquide  $\beta$ .

Dans toutes les méthodes de changement d'échelle, on fait l'hypothèse pour des milieux désordonnés que les échelles caractéristiques du problème sont séparées,

$$\ell_{\beta} \ll h \ll L, \tag{1.14}$$

avec  $\ell_{\beta}$  la taille caractéristique des pores, voir Fig. 3. Dans cette section, on détaille le cas linéaire, qui nécessite comme hypothèses supplémentaires que la rhéologie soit Newtonienne,

$$\mu = \mu_0 \tag{1.15}$$

et qu'une condition de non glissement soit imposée à la paroi liquide/solide,

$$\mathbf{v} = 0 \, \mathrm{sur} \, A_{\beta\sigma}. \tag{1.16}$$

Sous ces hypothèses, des méthodes mathématiques dédiées à la VAM sont alors employées. La moyenne superficielle d'une variable  $\psi$  en  $\mathbf{r}_0$  est définie comme

$$\langle \psi \rangle_m |_{\mathbf{r}_0} = \int_{\mathbb{R}^3} m \left( \mathbf{r}_0 - \mathbf{y} \right) \chi_\beta \left( \mathbf{y} \right) \psi \left( \mathbf{y} \right) \, d\mathbf{y}, \tag{1.17}$$

où  $\psi$  peut représenter p ou  $\mathbf{v}$ ,  $\chi_{\beta}$  est l'indicatrice de phase (qui vaut 1 dans la phase liquide  $V_{\beta}$  et 0 dans la phase solide) et m est le noyau de l'opérateur de moyenne [112]. Le but de l'opérateur de moyenne est d'agir comme un filtre passe-bas, afin obtenir un comportement macroscopique continu. Pour ce faire, le noyau m doit être choisi convenablement (voir les discussions dans la série d'articles de Quintard et Whitaker [113, 114, 115, 116, 117] ou plus récemment dans Davit et Quintard [112]). Par commodité, on suppose ici que le noyau est choisi correctement. La moyenne superficielle est alors simplement notée  $\langle \bullet \rangle^{\beta}$  et on obtient la relation  $\langle \psi \rangle = \phi \langle \psi \rangle^{\beta}$  avec  $\phi = V_{\beta}/V$  la porosité du milieu.

Avec ces définitions, on utilise la décomposition des champs  $\mathbf{v}$  et p en moyenne intrinsèque et déviation [118],

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \,, \tag{1.18}$$

$$p = \tilde{p} + \langle p \rangle^{\beta} \,. \tag{1.19}$$

Ensuite, on moyenne alors les équations microscopiques (Eqs. 1.3 et 1.4). Puis, on ferme le problème en introduisant un tenseur B et un vecteur b,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathsf{B} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \,, \tag{1.20}$$

$$\tilde{p} = \mu_0 \mathbf{b} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta \,. \tag{1.21}$$

Dans les Eqs. 1.20 et 1.21, on suppose une relation linéaire entre les déviations et la vitesse moyenne intrinsèque, c'est-à-dire que les variables B et b sont indépendantes de  $\langle \mathbf{v} \rangle$ . Ici, c'est la linéarité du problème microscopique qui permet de poser cette relation. Dans un cas non-linéaire, une telle fermeture du problème est discutable, voir Annexe D.

Le problème final comporte alors 12 inconnues (9 pour B et 3 pour b). On peut alors exprimer le tenseur de perméabilité  $K_0$  avec ces variables de fermetures. Une loi homogénéisée est obtenue à l'échelle macroscopique,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_0}{\mu_0} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right). \tag{1.22}$$

Le densité de la phase fluide  $\rho$  pourrait s'écrire  $\rho_{\beta}$  puisqu'elle est définie uniquement dans la phase liquide. Pour simplifier les notations, elle est cependant notée simplement  $\rho$  dans l'ensemble de cette thèse, ce qui n'est valable que pour un écoulement monophasique. On note que résoudre le problème de fermeture linéaire (12 inconnues) est identique à résoudre 3 fois le problème microscopique en  $\mathbf{v}$  et p (4 inconnues) pour des directions de l'écoulement orthogonales entre elles. Autrement dit, chacune des colonnes du tenseur de perméabilité intrinsèque K<sub>0</sub> correspond à l'écoulement dans une des trois directions de l'espace. De plus, si le VER est périodique, on peut montrer que K<sub>0</sub> est un tenseur symétrique, voir Annexe C.

Ici encore, c'est la linéarité du problème qui permet le calcul de la perméabilité  $K_0$ . Cette perméabilité  $K_0$  est dite intrinsèque car l'écoulement étant linéaire, elle est seulement conditionnée par la structure poreuse. Dans le cas non-linéaire, l'obtention d'une forme macroscopique fermée est plus délicate. Dans le cadre de cette thèse nous nous intéresserons à des cas particuliers où la non-linéarité est induite par la physique des polymères.

#### 1.4.2 Le cas du glissement

Comme détaillé dans la Section 1.2, des mécanismes particuliers se mettent en place entre les molécules de polymère et la paroi. Dans le cas où ce mécanisme est répulsif, une condition effective de glissement peut être proposée [68, 119, 120]. La condition de glissement proposée par Navier [121] est la plus courante et implique que la vitesse à la paroi est proportionnelle à la déformation locale. La constante de proportionnalité est une longueur, appelée longueur de glissement,  $\ell$ . Cette condition s'exprime en 3D comme,

$$\mathbf{v} = -\ell \,\mathbf{n} \cdot \left(\nabla \mathbf{v} + \left(\nabla \mathbf{v}\right)^{\mathsf{T}}\right) \cdot \left(\mathsf{I} - \mathbf{nn}\right) \, \operatorname{sur} \, A_{\beta\sigma}, \tag{1.23}$$

avec **n** un vecteur normal à l'interface  $A_{\beta\sigma}$ , dirigé de la phase liquide  $\beta$  vers la phase solide  $\sigma$ . Dans le Chapitre 4, il est démontré que cette expression, associée à une bonne estimation de la longueur de glissement, permet de prédire avec suffisamment de précision la chute de viscosité apparente observée dans des expériences sur carottes [64, 26].

Initialement proposées dans le but d'étudier des écoulements de gaz en milieux poreux, des méthodes de changement d'échelle avec une condition de glissement (Eq. 1.23) ont permis de dégager des lois macroscopiques de l'écoulement [122, 123]. Une perméabilité apparente est alors obtenue,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_0 \left(\mathsf{I} + \ell \mathsf{S}_0\right)}{\mu_0} \cdot \left(\nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g}\right),\tag{1.24}$$

où le tenseur  $S_0$  est une propriété intrinsèque du milieu [124]. On retrouve naturellement le cas de référence lorsque la longueur de glissement est nulle. Cette formulation macroscopique a été validée par des comparaisons avec des expériences [125, 126].

#### 1.4.3 Le cas d'une rhéologie non-Newtonienne

Le caractère non-Newtonien est un effet non-linéaire induit par les solutions de polymères que nous souhaitons étudier, par exemple à travers une méthode de changement d'échelle (voir Annexe D). Dans la littérature, les méthodes de changement d'échelles ont uniquement été appliquées à des fluides dit "*pure power-law*" (PPL), dont la viscosité (notée  $\mu_{\beta}$  dans les procédures de changement d'échelle) suit une loi de type,

$$\mu = c \,\dot{\gamma}^{n-1},\tag{1.25}$$

avec c une constante. Le principal reproche que l'on peut adresser à ce modèle rhéologique est qu'il n'est pas représentatif d'une solution de polymère, qui présente presque toujours un plateau de viscosité à faible taux de déformation. Dans ce modèle, il se pose un problème lorsque  $\dot{\gamma}$  tend vers 0. En effet, les très faibles  $\dot{\gamma}$  conduisent à des valeurs de viscosité très grandes. Lorsqu'un tel fluide s'écoule dans un milieu poreux, la loi macroscopique obtenue correspond à un écoulement dit pleinement non-Newtonien d'un modèle PLCO, c'est-à-dire que partout dans le milieu  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c$  (voir Eq. 1.1).

Dans le cas de fluides PPL, des méthodes de changement d'échelles par prise de moyenne volumique [127] ou par homogénéisation [128, 129] ont toutes les deux été développées. Les études de changement d'échelle appliquées à ces fluides ont été motivées par des applications industrielles d'écoulement de matériaux non-Newtoniens (comme du papier ou du plastique) à travers des structures fibreuses. En conséquence, les méthodes ont uniquement été appliquées à des treillis de cylindres en deux dimensions. L'influence de la porosité de ces treillis de cylindres sur la loi homogénéisée a été particulièrement étudiée [98] ainsi que l'influence de la forme des fibres [97]. Cependant, le comportement macroscopique n'a jamais été étudié pour des fluides qui présentent une rhéologie plus complexe (type PLCO) et appliqué à des milieux plus tortueux et 3D. C'est ce que l'on se propose de faire dans le Chapitre 5. Nous avons également essayé d'utiliser une procédure de changement d'échelle, voir Annexe D.

### 1.5 Les objectifs et contributions de cette thèse

Comme décrit de manière non exhaustive dans ce Chapitre, la physique liée à l'écoulement de polymère en milieu poreux est complexe. Cette complexité est due à la structure poreuse et à la non-linéarité du fluide. Les propriétés effectives utilisées dans les lois homogénéisées traduisent alors une interaction entre le fluide et la structure poreuse. Dans cette thèse, on se focalisera sur deux phénomènes liés aux polymères que sont la rhéologie non-Newtonienne et un mécanisme de répulsion des chaînes de polymère à la paroi.

On pose alors un grand nombre d'hypothèses pour simplifier le cadre de recherche. Dans nos modèles et nos simulations numériques, les écoulements sont monophasiques, la concentration en polymère est uniforme ainsi que la distribution en masse molaire. On suppose l'absence de dégradations et que la salinité n'affecte pas les propriétés rhéologiques. La rhéologie est décrite par un modèle PLCO (Eq. 1.1). Comme conséquences de ces hypothèses, les paramètres de ce modèle sont supposés uniformes dans le milieu poreux. On suppose également qu'il n'y a pas de volume inaccessible au fluide et que le polymère n'est pas retenu dans le milieu poreux. Dans les Chapitres 2, 3 et 5, on suppose qu'une condition de non glissement à la paroi représente bien l'interaction entre les molécules de polymère et l'interface. Dans le Chapitre 4, on supposera que les molécules de polymère sont repoussées de la paroi.

L'objectif de ce travail de recherche est de développer des modèles homogénéisés permettant la description du transport de polymères en milieux poreux. Pour construire ces modèles, nous avons besoin d'informations sur l'écoulement à la petite échelle. On appréhendera donc la phénoménologie macroscopique à partir d'une analyse de l'écoulement à l'échelle des pores.

Dans un premier temps, nous étudions la physique à l'échelle du pore en se basant sur les équations de Stokes en formulation Newtonienne généralisée et nous analysons le comportement à grande échelle. Alors que la simulation numérique directe sur des images poreuses réalistes est une thématique très en vogue, peu d'études se sont penchées sur la transition entre un régime d'écoulement Newtonien à non-Newtonien induite par un modèle de viscosité qui représente correctement une solution de polymère. Dans le Chapitre 3, on se propose de simuler des écoulements dans de nombreux milieux poreux, pour analyser physiquement cette transition. L'utilisation de modèles semi-empiriques est revisitée par les résultats obtenus.

On s'intéresse ensuite au comportement des molécules de polymères proche de la paroi dans le Chapitre 4. Dans le cas d'un phénomène de répulsion des chaînes de la paroi, une chute de viscosité apparente est en effet souvent observée expérimentalement. A partir d'un modèle mésoscopique à deux fluides déjà existant développé par Chauveteau [64], nous revisitons une approche qui consiste à utiliser une condition effective de glissement pour représenter le phénomène. Un nouvel outil, qui permet de prédire rapidement la chute de viscosité apparent de manière simple et en se basant directement sur la structure poreuse, est présenté et validé par comparaison avec des données expérimentales provenant de la littérature.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous simulons des écoulements non-Newtoniens à travers des milieux poreux artificiels (où le désordre est contrôlé) et naturels périodiques. De ces simulations, une perméabilité apparente qui est fonction de la vitesse moyenne est calculée. Nos résultats mettent en évidence une compétition entre la rhéologie non-Newtonienne et le désordre inhérent à la structure poreuse. Cette compétition n'avait jamais été observée explicitement et elle permet de revisiter les modèles actuellement utilisés dans les simulateurs de réservoirs. On considère notamment sur l'utilisation d'une viscosité apparente dans la loi de Darcy pour prendre en compte les effets non-Newtoniens.

# Chapitre 2 L'outil numérique et sa validation

Le but de ce chapitre est d'appréhender l'outil numérique utilisé (OpenFOAM) et d'étudier les problématiques associées à la prédiction numérique de la perméabilité. Dans un premier temps, l'algorithme de résolution utilisé sera examiné dans la Section 2.1, puis les milieux poreux utilisés ainsi que les problématiques relatives à la convergence au maillage seront considérés dans la Section 2.2. Ensuite, les questions relatives à la prédiction de propriétés effectives sont examinées dans la Section 2.3. Enfin, une comparaison avec une expérience d'écoulement dans un micro-modèle 2D permettra de valider le code de calcul dans la Section 2.4.

### 2.1 Outil numérique

#### 2.1.1 L'algorithme SIMPLE

L'algorithme SIMPLE (pour "Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations") a été développé originellement par Patankar [130]. Cet algorithme consiste en une succession de prédictions et de corrections des inconnues p (pression) et  $\mathbf{v}$  (vitesse) microscopiques par la méthode des volumes finis. Les équations de Navier Stokes incompressibles régissent l'écoulement à résoudre

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})\right) - \nabla \cdot \left[\mu\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathsf{T}}\right)\right] + \nabla p = \rho \mathbf{f},\tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2.2}$$

L'équation 2.2 traduit l'incompressibilité du fluide (masse volumique  $\rho$  uniforme) et l'équation 2.1 correspond à la conservation de quantité de mouvement. Le terme  $\rho \mathbf{f}$  est une force volumique externe qui s'applique au fluide. Il s'agit, par exemple, du terme de gravité. La viscosité dynamique du fluide,  $\mu$ , n'est pas nécessairement uniforme si le fluide est non-Newtonien et peut être fonction du taux de déformation local,  $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{D}}: \mathbf{D}$  avec  $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathsf{T}}$  le tenseur de taux de déformation. Dans les écoulements simulés dans cette thèse, le terme inertiel est toujours négligé sous l'hypothèse d'un régime rampant, c'est-à-dire à nombre de Reynolds très petit. La seule source de non-linéarité vient donc de la viscosité non-Newtonienne. L'équation de quantité de mouvement devient alors

$$-\nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \mathbf{v} + \left(\nabla \mathbf{v}\right)^{\mathsf{T}}\right)\right] + \nabla p = \rho \mathbf{f}.$$
(2.3)

Chaque itération de l'algorithme SIMPLE commence avec ces champs initiaux de p et **v**. La première étape, "momentum predictor" en anglais, consiste à prédire la nouvelle vitesse avec la valeur initiale de la pression. Pour cela, on intègre l'équation de quantité de mouvement (Eq. 2.3) sur une cellule I de volume  $V_I$ ,

$$\int_{V_I} -\nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\mathsf{T} \right) \right] \, dV = \int_{V_I} \left( \rho \mathbf{f} - \nabla p \right) \, dV. \tag{2.4}$$

On rappelle ici le théorème de Green-Ostrogradski, qui est utilisé couramment dans la méthode des volumes finis,

$$\int_{V_I} \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, dS,\tag{2.5}$$

$$\int_{V_I} \nabla a \, dV = \oint_S \mathbf{n} \, a \, dS,\tag{2.6}$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante à la surface. Dans un code volumes finis, l'intégrale surfacique est calculée comme la somme des flux aux faces des cellules. En appliquant, par exemple, le théorème de Green-Ostrogradski au terme de diffusion visqueuse on obtient,

$$\int_{V_I} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) \ dV \simeq \sum_f (\mu)_f \, \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \mathbf{v})_f \,, \tag{2.7}$$

avec $\mathbf{S}_f$  un vecteur normal à la face f et dont la norme est égale à l'aire de la face f.

En fonction des schémas numériques utilisés, le flux à la surface sera estimé de différentes manières. Souvent, et c'est le cas dans les solveurs OpenFOAM utilisés dans cette thèse, le flux est estimé de manière linéaire. Cela signifie que l'on suppose que les variables évoluent de manière linéaire sur la cellule où l'on calcule le flux. Par exemple la viscosité  $(\mu)_f$ , estimée à la face f qui sépare les cellules I et E, est calculée comme,

$$(\mu)_f = \lambda_f \mu_E + (1 - \lambda_f) \,\mu_I. \tag{2.8}$$

On note F le centre de la face f. Si les vecteurs FE et IE sont parallèles, le coefficient adimensionnel  $\lambda_f$  est calculé comme le ratio ||FE||/||IE||. Toujours sous l'hypothèse FE et IE parallèles, le calcul de  $(\nabla \mathbf{v})_f$  dans l'Eq. 2.7 est similaire,

$$\mathbf{S}_{f} \cdot (\nabla \mathbf{v})_{f} = \|\mathbf{S}_{f}\| \frac{\mathbf{v}_{E} - \mathbf{v}_{I}}{\|IE\|}$$
(2.9)

L'ordre théorique de ce schéma linéaire est de deux.

Toujours sous l'hypothèse de régime rampant, l'Eq. 2.3 est discrétisée en espace suivant les schémas du code volumes finis. Pour chaque cellule I, on obtient une équation de la forme,

$$\mathsf{A}_{I} \cdot \mathbf{v}_{I} + \sum_{J \neq I} \mathsf{A}_{IJ} \cdot \mathbf{v}_{J} = \mathbf{r}_{I}.$$
(2.10)

Les coefficients des matrices  $A_I$  (propre à la cellule) et  $A_{IJ}$  (propres aux voisins) sont définis pour chaque cellule et sont remplis selon les équations définies précédemment. Le terme  $\mathbf{r}_I$  est calculé explicitement. Il contient le terme source et le champ de pression. On concatène alors l'équation 2.10 pour toutes les cellules du domaine et le système s'écrit sous la forme

$$\mathsf{A}] \cdot [\mathbf{v}] = [\mathbf{r}] \tag{2.11}$$

Dans l'équation 2.11, [A] est une matrice, souvent creuse, avec les sous matrices  $A_I$  sur la diagonale et  $A_{IJ}$  ailleurs. L'objet [**v**] est un vecteur qui a pour nombre d'éléments dans  $\mathbb{R}^3$  le nombre total de cellules. Le système est résolu et le nouveau champ de vitesse **v** est obtenu. Ce champ ne satisfait pas encore l'équation de continuité mais approxime l'équation de quantité de mouvement.

Ayant une estimation de la vitesse, il faut maintenant calculer le nouveau champ de pression p. Pour cela, on reprend l'équation 2.10 que l'on écrit comme

$$\mathsf{A}_{I} \cdot \mathbf{v}_{I} = H\left(\mathbf{v}\right) - \left(\nabla p\right)_{I},\tag{2.12}$$

où  $H(\mathbf{v})$  contient le terme source  $\rho \mathbf{f}$  ainsi que les termes  $A_{IJ} \cdot \mathbf{v}_J$ . L'équation 2.12 s'écrit comme,

$$\mathbf{v}_I = \mathsf{A}_I^{-1} \cdot (H(\mathbf{v}) - (\nabla p)_I).$$
(2.13)

Dans la démonstration, seulement l'équation de quantité de mouvement a été jusqu'alors utilisée. On introduit maintenant la nouvelle expression de  $\mathbf{v}_I$  dans l'équation de continuité 2.2, ce qui donne,

$$\nabla \cdot \left(\mathsf{A}_{I}^{-1} \cdot (\nabla p)_{I}\right) = \nabla \cdot \left(\mathsf{A}_{I}^{-1} \cdot H\left(\mathbf{v}\right)\right).$$
(2.14)

Il en résulte une équation pour calculer le champ de pression, avec cette fois-ci le champ  $\mathbf{v}$  qui est utilisé explicitement pour calculer le terme de droite dans l'Eq. 2.14. Cette étape est répétée plusieurs fois (pour corriger les erreurs induites par un maillage non structuré, voir Section 2.1.2), et le nouveau champ de pression est obtenu.

Il reste alors à recalculer la vitesse avec le nouveau champ de pression. Le nouveau champ de vitesse satisfait alors bien l'équation de continuité. Cet algorithme est répété plusieurs fois, jusqu'à ce que les résidus soient suffisamment bas.

#### 2.1.2 Le SIMPLE dans OpenFOAM

OpenFOAM est un code CFD basé sur la méthode des volumes finis [131]. Ce code présente le double avantage d'être à la fois sous licence libre (GPLv3) et d'avoir été conçu pour le calcul massivement parallèle [132]. Un inconvénient notable est le faible ordre des schémas et certains choix numériques, e.g. variables colocalisées ou algorithmes principalement séquentiels.

Le but de cette section est d'identifier dans le solveur *simpleFOAM* les étapes associées à l'algorithme SIMPLE. La Figure 1 décrit les étapes de l'algorithme. On a ajouté à l'algorithme standard le détail d'une condition de glissement (voir Annexe A) et le traitement de la viscosité non-Newtonienne. Une description plus détaillée peut être trouvée dans [133, 131].

Au début de chaque itération, l'équation de quantité de mouvement (Eq. 2.1) est définie dans une syntaxe propre à OpenFOAM,

tmp<fvVectorMatrix> UEqn

```
(
    fvm::div(phi, U)
    + turbulence->divDevReff(U)
    ==
    fvOptions(U)
);
```

où div(phi, U) correspond au terme inertiel. Le champ phi est calculé explicitement avec la valeur initiale de vitesse. Le terme divDevReff(U) correspond au terme d'advection visqueuse. Dans ce terme, une viscosité cinématique effective est utilisée,

```
divDevReff(U) =
- fvm::laplacian(nuEff(), U)
- fvc::div(nuEff()*fvc::grad(U)().T())
```

Si l'itération en cours correspond à la première de l'algorithme, nuEff est calculé explicitement. Sinon, le code utilise le champ sauvegardé à l'itération précédente. Dans le cas d'une rhéologie non-Newtonienne sans modèle de turbulence (on fait toujours l'hypothèse d'un écoulement rampant), nuEff est une fonction du taux de déformation local. Si un modèle de turbulence est sélectionné, nuEff comprend, en plus de la rhéologie, une contribution inertielle.

Dans OpenFOAM, le suffixe *fvm* signifie que le champ est calculé en inversant une matrice. On résout effectivement un système d'équation (boîtes oranges dans la Fig. 1). Le suffixe *fvc* signifie que le terme est calculé explicitement (boîtes vertes dans la Fig. 1). Dans l'expression du terme de Stokes, on remarque que le terme  $\mu\Delta \mathbf{U}$  est calculé implicitement (il contribue à [A] dans Eq. 2.11) mais que le terme  $\nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla \mathbf{v}\right)^{\mathsf{T}}\right)$  est calculé explicitement (il contribue à [r] dans Eq. 2.11). L'équation UEqn est alors résolue,

solve(UEqn() == -fvc::grad(p));

en utilisant bien le champ de pression comme source (suffix fvc devant  $\nabla p$ ) du système d'équations à résoudre.

Ensuite, il faut calculer le nouveau champ de pression. Cette étape est répétée nOrthoCorr fois dans OpenFOAM. En pratique, deux itérations sont suffisantes pour correctement estimer p dans la plupart des cas [134]. Les objets relatifs à l'Eq. 2.13 sont au préalable définis,

```
volScalarField rAU(1.0/UEqn().A());
volVectorField HbyA("HbyA", U);
HbyA = rAU*UEqn().H();
```

Ici, rAU correspond aux  $A_I^{-1}$  et HbyA à  $A_I^{-1} \cdot H(\mathbf{v})$  dans l'Eq. 2.14. Le terme HbyA correspond à la solution de  $\mathbf{v}$  sans la contribution du gradient de pression. Ensuite, le terme HbyA est interpolé sur les faces du maillage.

```
surfaceScalarField phiHbyA("phiHbyA", fvc::interpolate(HbyA) & mesh.Sf());
```

On obtient alors un flux, noté *phiHbyA*. On va maintenant de manière itérative calculer le nouveau champ de pression.


FIGURE 1: Diagramme décrivant un algorithme SIMPLE dans OpenFOAM.

L'équation 2.14 correspond dans OpenFOAM à

# fvScalarMatrix pEqn (fvm::laplacian(rAU, p) == fvc::div(phiHbyA));

Pour calculer le terme  $\nabla \cdot (\mathsf{A}_{I}^{-1} \cdot (\nabla p)_{I})$ , OpenFOAM fait ici deux opérations qui sont sous-entendues dans la manière de définir l'équation en pression. Pour comprendre ce qui se produit, nous écrivons avec le théorème de Green-Ostrogradski la discrétisation spatiale de ce terme diffusif,

$$\int_{V_I} \nabla \cdot \left( \mathsf{A}_I^{-1} \cdot (\nabla p)_I \right) \, dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathsf{A}_I^{-1} \cdot (\nabla p)_I \, dS \simeq \sum_f \left( \mathsf{A}_I^{-1} \right)_f \cdot \mathbf{S}_f \cdot (\nabla p)_f \tag{2.15}$$

L'enjeu est maintenant d'estimer le terme  $\mathbf{S}_f \cdot (\nabla p)_f$  sur chaque face de la cellule. Comme expliqué dans la thèse de Jasak [131], le calcul de ce terme dépend de l'orthogonalité du maillage.

En plus du vecteur  $\mathbf{S}_f$ , on définit aussi  $\mathbf{d}$ , le vecteur entre les centres I et J. Si les mailles sont orthogonales entre elles, c'est-à-dire que  $\mathbf{S}_f$  et  $\mathbf{d}$  sont parallèles, on calcule alors le flux simplement comme,

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla p)_f = \|\mathbf{S}_f\| \frac{p_J - p_I}{\|\mathbf{d}\|}.$$
(2.16)

Pour calculer  $(\nabla p)_f$ , on aurait aussi pu interpoler le gradient de pression des cellules I et J. Mais ici, on calcule  $(\nabla p)_f$  directement avec les pressions en I et J. Cette opération est la correction de Rhie-Chow, voir Section 2.1.3, indispensable pour stabiliser le calcul de p et  $\mathbf{v}$  sur un maillage non décalé.

Si les mailles ne sont pas orthogonales entre elles, le vecteur  $\mathbf{S}_f$  est décomposé en une composante parallèle à  $\mathbf{d}$ ,  $\Delta$ , et une composante  $\mathbf{k}$  telle que  $\mathbf{S}_f = \Delta + \mathbf{k}$ . On obtient alors,

$$\mathbf{S}_{f} \cdot (\nabla p)_{f} = \|\Delta\| \frac{p_{J} - p_{I}}{\|\mathbf{d}\|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla p)_{f}.$$
(2.17)

Contrairement à la composante orthogonale, le terme  $(\nabla p)_f$  dans la composante non orthogonale est calculé en interpolant le gradient de pression des cellules I et J sur la face f. Cela nécessite donc l'intervention d'autre cellules qui ne sont pas directement voisines comme I et J. Comme expliqué dans la Section 3.5 de la thèse de Jasak [131], en introduisant d'autres cellules, la matrice à inverser ne respecte plus un critère de stabilité et la solution peut diverger. Comme la composante non orthogonale est généralement petite devant la composante orthogonale, il est raisonnable de la traiter comme explicite (voir Fig. 1). On utilise la valeur initiale de la pression pour l'estimer et on résout l'équation.

#### pEqn.solve();

Cette opération est répétée nOrthoCorr fois, avec à chaque fois le terme non orthogonale traité comme explicite et calculé avec le champ précédent de pression. Plus le degré de non orthogonalité du maillage est grand, et plus le paramètre nOrthoCorr doit être augmenté.

Si le nombre d'itérations nOrthoCorr est atteint, on calcule le flux de vitesse aux faces en ajoutant la contribution du gradient de pression,

```
if (simple.finalNonOrthogonalIter())
{phi = phiHbyA - pEqn.flux();}
```

où pEqn.flux() correspond à  $A_I^{-1} \cdot (\nabla p)_I$  interpolé aux faces des cellules dans l'Eq. 2.13. De la même manière, on corrige la vitesse en ajoutant la contribution du gradient de pression.

U = HbyA - rAU\*fvc::grad(p);

Les valeurs de vitesse aux conditions limites sont actualisées pour satisfaire l'équation de continuité.

```
U.correctBoundaryConditions();
```

Enfin, on calcule l'erreur de continuité.

```
#include "continuityErrs.H"
```

A la fin d'une itération, la viscosité est mise à jour explicitement selon le modèle rhéologique choisi avec l'appel de

```
turbulence->correct();
```

Les champs de vitesse, pression et viscosité sont sauvegardés si besoin.

```
runTime.write();
```

Si l'erreur de continuité est supérieure à la limite exigée par l'utilisateur, une nouvelle itération commence.

# 2.1.3 La correction de Rhie-Chow

OpenFOAM est un code co-localisé, c'est-à-dire que les inconnues p et  $\mathbf{v}$  sont définies et calculées aux centres des mailles du domaine. Les solveurs co-localisés ont tendance à générer des instabilités si une correction, comme celle proposée par Rhie et Chow [135], n'est pas implémentée. La méthode de Rhie-Chow permet d'éviter des instabilités dues à un découplage entre pression et vitesse. Dans les algorithmes de prédictions/corrections comme SIMPLE, la correction de Rhie-Chow est introduite dans l'étape de correction en pression.

Pour comprendre cette méthode corrective et son implémentation dans OpenFOAM, on s'appuie sur un maillage 1D, présenté dans la Figure 2. Dans la Figure 2, les voisins de la cellule I sont les cellules W et E et les faces fw et fe décrivent la frontière de I. Une bonne description de cette méthode peut être trouvée dans [136] ou [137].



FIGURE 2: Maillage 1D.

On fait l'hypothèse que l'écoulement est stationnaire, rampant et Newtonien. L'équation de quantité de mouvement s'écrit en 1D comme,

$$\mu_0 \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{dp}{dx} = \rho F. \tag{2.18}$$

On discrétise alors les opérateurs en s'appuyant sur la Fig. 2,

$$\int_{V_I} \frac{d^2 v}{dx^2} dx dy = \left(v_E - 2v_I + v_W\right) \frac{\Delta y}{\Delta x},\tag{2.19}$$

$$\int_{V_I} \frac{dp}{dx} dx dy = (p_{fe} - p_{fw}) \,\Delta y = (p_E - p_W) \,\frac{\Delta y}{2},\tag{2.20}$$

où l'on a employé une interpolation linéaire dans l'équation 2.20 pour estimer la pression aux faces fw et fe de la cellule I. L'équation de quantité de mouvement discrétisée devient,

$$\mu_0 \left( v_E - 2v_I + v_W \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} - \left( p_E - p_W \right) \frac{\Delta y}{2} = \rho F_I \Delta y \Delta x.$$
(2.21)

Cette équation est alors mise sous une forme générale similaire à l'Eq. 2.10,

$$\mathsf{A}_{I}v_{I} = \sum_{J \neq I} \mathsf{A}_{IJ}v_{J} + (p_{E} - p_{W})\frac{\Delta y}{2} + \rho F_{I}\Delta y\Delta x \tag{2.22}$$

où dans le cas général  $A_I$  est une matrice diagonale et les  $A_{IJ}$  sont des matrices à diagonales nulles. Dans ce cas 1D, on peut vérifier que les  $A_{IJ}$  sont toutes égales et valent  $-\mu_0 \Delta y / \Delta x = A_I / 2$ . L'équation de continuité,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , se traduit sous forme discrète en 1D comme,

$$v_{fe} = v_{fw}, \tag{2.23}$$

avec fe et fw les faces de la cellule I. La question cruciale du développement est maintenant la suivante : comment estimer la vitesse aux faces des cellules ?

La première possibilité est d'estimer  $v_{fe}$  et  $v_{fw}$  par une simple interpolation linéaire,

$$v_{fe} = \frac{v_I + v_E}{2},$$
 (2.24)

$$v_{fw} = \frac{v_W + v_I}{2}.$$
 (2.25)

En utilisant l'équation de quantité de mouvement discrétisée (Eq. 2.22), on obtient en supposant que le terme source est uniforme ( $F_E = F_W$ , voir [137] sinon),

$$2v_{fe} = \underbrace{\mathsf{A}_{I}^{-1} \sum_{J \neq I} \mathsf{A}_{IJ} v_{J} + \mathsf{A}_{E}^{-1} \sum_{J \neq E} \mathsf{A}_{EJ} v_{J}}_{H_{e}} + \underbrace{(p_{W} - p_{E} + p_{I} - p_{EE}) \frac{\Delta y}{2}}_{A} + 2\rho F \Delta x \Delta y, \qquad (2.26)$$

$$2v_{fw} = \underbrace{\mathsf{A}_I^{-1} \sum_{J \neq I} \mathsf{A}_{IJ} v_J + \mathsf{A}_W^{-1} \sum_{J \neq W} \mathsf{A}_{WJ} v_J}_{H_w} + \underbrace{(p_W - p_E + p_{WW} - p_I) \frac{\Delta y}{2}}_B + 2\rho F \Delta x \Delta y. \quad (2.27)$$

Dans notre exemple, le maillage est régulier et cartésien (donc  $A_{EJ} = A_{WJ}$  et  $A_E = A_W$ ). De plus le caractère incompressible du fluide garantit que toutes les vitesses sont égales. Les équations 2.26 et 2.27 donnent alors A = B, soit

$$p_I = \frac{1}{2} \left( p_{EE} + p_{WW} \right). \tag{2.28}$$

La pression dans une cellule n'est alors pas dépendante de la pression dans les cellules voisines. On a alors un découplage entre la pression et la vitesse pour la cellule I, ce qui conduit à des solutions instables [135].

Pour résoudre ce problème de découplage entre pression et vitesse, la première solution est d'utiliser un maillage décalé, c'est-à-dire que la pression est toujours calculée au centre des cellules mais la vitesse est uniquement estimée aux faces [133]. Cependant, on peut souhaiter conserver un maillage co-localisé, qui présente certains avantages. On introduit alors la correction de Rhie-Chow.

Cette correction consiste à estimer la vitesse aux faces avec une méthode différente qu'une simple interpolation linéaire. Pour calculer le gradient de pression sur les faces, on a dans les Eqs. 2.26 et 2.27 interpolé les gradients de pression des cellules voisines (termes A et B). Au lieu de cela, on va directement estimer le gradient de pression sur les faces avec la pression des cellules voisines,

$$2v_{fe} = H_e + (p_I - p_E)\frac{\Delta y}{2} + 2\rho F \Delta x \Delta y \qquad (2.29)$$

$$2v_{fw} = H_w + (p_W - p_I)\frac{\Delta y}{2} + 2\rho F \Delta x \Delta y$$
(2.30)

On obtient alors simplement,

$$p_I = \frac{1}{2} \left( p_E + p_W \right). \tag{2.31}$$

Dans ce cas, pression et vitesse sur la cellule I sont couplées, et il n'y a pas d'oscillation nonphysique.

Comment est implémentée cette correction dans OpenFOAM? Dans l'étape de correction en pression qui est répétée *nOrthoCorr* fois, l'équation à résoudre est,

#### fvm::laplacian(rAU, p) == fvc::div(phiHbyA)

Ce qui n'est pas visible ici, c'est qu'OpenFOAM utilise en fait le théorème de Green-Ostrogradski (voir le guide pour programmeurs d'OpenFOAM [138], Section 2.4.1). En effet, le terme elliptique est calculé comme,

$$\int_{V_I} \nabla \cdot (rAU \cdot \nabla p) \ dV = \int_S \mathbf{n} \cdot (rAU \cdot \nabla p) \cdot dS = \sum_f (rAU)_f \cdot \mathbf{S}_f \cdot (\nabla p)_f.$$
(2.32)

La correction de Rhie-Chow intervient dans le calcul du flux aux faces, qui est défini dans le cas d'un maillage parfaitement orthogonal comme,

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla p)_f = \|\mathbf{S}_f\| \frac{p_J - p_I}{\|\mathbf{d}\|},\tag{2.33}$$

où  $\mathbf{d}$  est le vecteur entre le centre des mailles I et J. L'Eq. 2.33 correspond bien à un calcul du gradient aux faces avec les valeurs de pression des cellules voisines.

# 2.2 Les milieux poreux

Dans cette section, la plupart des milieux poreux utilisés dans cette thèse sont présentés. On introduit les quantités que l'on mesure dans la Section 2.2.1 et on discute des problématiques de maillage dans la Section 2.2.2. Les principaux milieux poreux utilisés sont illustrés dans la Figure 3. Les milieux A1 et A2 sont des treillis 2D de cylindres ou de carrés. Les milieux P1 et P2 sont des empilements 3D de billes et de cubes. Les milieux B1 et B2 sont des grès de type Bentheimer et C1 et C2 de type Clashash. Les milieux B et C sont des échantillons qui ressemblent à de roches pouvant appartenir à des réservoirs d'hydrocarbures.

Tous les milieux 3D ont été obtenus par micro tomographie rayon X. Dans le cadre de cette thèse, la micro tomographie rayon X est uniquement utilisée comme un moyen de générer des images réalistes et complexes. Le but n'est pas de prédire la perméabilité de ces milieux. Dans l'ensemble de cette thèse, les notations C ou B font référence à un milieu de type Clashash ou Bentheimer mais ne correspondent pas forcément toujours au même échantillon.



FIGURE 3: (a)–(d) et (f)–(i) : coupes 2D des milieux poreux étudiés. Les milieux P, C et B ont été obtenus par micro tomographie rayon X. (e) et (j) : illustration d'un raffinement local. (k) vue 3D du milieu B1 et d'un écoulement associé.

# 2.2.1 Les mesures

Lorsque l'écoulement est simulé à travers les milieux poreux décrit dans la Figure 3, on s'intéresse alors à des quantités macroscopiques et microscopiques. Les quantités microscopiques peuvent être p et  $\mathbf{v}$  déjà calculées, mais aussi la viscosité  $\mu$  ou la dissipation locale d'énergie par frottement visqueux  $\mathcal{E}$ . Ces quantités varient spatialement dans le milieu poreux et ces variations sont d'autant plus grandes que la structure poreuse est complexe. Intuitivement, le rapport taille de pore sur taille de seuil de pore nous permet de comparer ces variations. Dans la Figure 3, on suppose que ces variations sont faibles pour les milieux A1 et A2, modérées pour les milieux P1 et P2 et fortes pour les milieux de type grès.

Pour analyser le comportement de ces quantités microscopiques, on s'intéresse à leurs distributions spatiales dans le milieu. Pour cela, les fonctions de densité de probabilité (PDF, pour "Probability Density Functions") sont largement utilisées dans le cadre de cette thèse. Elles sont construites à partir d'une solution discrète obtenue sur un maillage. Pour un champ  $\psi$ , on construit la PDF  $p(\psi)$  de la manière suivante : on calcule d'abord les valeurs du minimum et du maximum du champ  $\psi$ , min $(\psi)$  et max $(\psi)$ , et on discrétise  $\psi$  en un nombre fini d'intervalles entre min $(\psi)$ et max $(\psi)$ . Chaque point  $p(\psi_i)$  est obtenu en calculant le volume des cellules du maillage pour lesquelles  $\psi_{i-1} \leq \psi < \psi_i$ . Enfin, ces valeurs sont normalisées comme

$$p^*\left(\psi_i\right) = \frac{p\left(\psi_i\right)}{\sum_j p\left(\psi_j\right)\delta\psi_j},\tag{2.34}$$

avec  $\delta \psi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$ , afin que l'aire sous la PDF soit unitaire,  $\sum_i p^*(\psi_i) \, \delta \psi_i = 1$ .

Les PDF étant unitaires, on peut alors les comparer entre elles. Nous insistons sur le fait que les PDF ne sont qu'une représentation statistique. Si, par exemple, deux PDF de vitesse se superposent, cela signifie que la vitesse est distribuée de la même manière dans le milieu poreux. En revanche, aucune information sur des corrélations spatiales (profils de vitesse ou seuils de pore sollicités par l'écoulement) n'est incorporé dans les PDF.

Concernant les quantités macroscopiques, dans le cadre de cette thèse on s'intéresse principalement à la perméabilité. Si l'on souhaite obtenir le tenseur complet de perméabilité intrinsèque  $K_0$ , il faut alors résoudre trois fois l'écoulement linéaire avec un terme source associé à chacune des directions de l'espace. Un milieu est dit isotrope lorsque le tenseur de perméabilité est sphérique. La perméabilité est généralement exprimée en Darcy dans cette thèse (1 Darcy = 1  $\mu$ m<sup>2</sup>).

# 2.2.2 Les maillages

Le maillage peut générer des erreurs soit par sa mauvaise qualité (par exemple lorsque les mailles sont non orthogonales entre elles) soit par son nombre insuffisant de mailles [131]. Dans cette section, les maillages sont majoritairement structurés et on étudie spécifiquement l'influence du nombre de mailles sur la solution. On fixe alors la géométrie, les schémas numériques et les conditions limites. Le seul paramètre qui varie est la taille des mailles. De manière générale, les mailles doivent être suffisamment fines pour capturer les structures caractéristiques de l'écoulement.

L'erreur est définie en fonction de la variable à laquelle on s'intéresse. Si on s'intéresse seulement aux propriétés macroscopiques, l'erreur peut être définie, par exemple, avec la vitesse moyenne,

$$E_{\text{macro}} = \frac{\|\langle \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}_{\text{fin}} \rangle \|}{\|\langle \mathbf{v}_{\text{fin}} \rangle \|}.$$
(2.35)

Dans l'équation 2.35,  $\langle \mathbf{v}_{fin} \rangle$  correspond au calcul de vitesse moyenne le plus fin réalisé. En revanche, si l'on souhaite étudier les profils locaux de l'écoulement, ou la distribution statistique d'un champ, une erreur microscopique basée sur le champ en question doit être définie,

$$E_{\rm micro} = \frac{\sqrt{\langle \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\rm fin}\|^2 \rangle}}{\|\langle \mathbf{v}_{\rm fin} \rangle \|}.$$
(2.36)

Le raffinement d'un maillage peut se faire uniformément ou localement. Alors que pour les milieux 2D, un maillage uniforme permet d'obtenir une solution assez précise, pour les milieux 3D, compte tenu des capacités de calcul limitées, des techniques de raffinement local sont nécessaires. Un raffinement local peut se faire de deux manières :

— Pour chaque cellule du domaine, on peut choisir de la raffiner ou non en fonction de sa distance à la paroi. Cette méthode est disponible dans OpenFOAM avec certains outils de "snappyHexMesh" comme "close-proximity feature detection". Ce procédé se prête particulièrement bien aux milieux poreux, puisque c'est dans les seuils de pore, i.e., proche des parois, que le maillage a souvent besoin d'être raffiné.

— On peut aussi raffiner les régions où la dissipation visqueuse est la plus forte. Dans ces régions, les gradients de vitesse sont forts et une discrétisation plus fine est nécessaire.

La seconde méthode présente l'avantage de se baser sur une solution approchée de l'écoulement pour définir les zones à raffiner. Cependant, pour deux directions différentes de l'écoulement, les seuils de pore sollicités peuvent être différents. C'est pourquoi cette méthode a été utilisée dans le Chapitre 3, où la direction de l'écoulement ne change pas. En revanche, on a utilisé la première méthode dans le Chapitre 5, où l'on fait varier la direction de l'écoulement.

La Figure 4 montre une étude de convergence au maillage sur un milieu de type Bentheimer. Dans cet exemple, tous les maillages sont uniformes et la taille de maille est h. Les erreurs macroscopiques (Eq. 2.35) et microscopiques (Eq. 2.36) sont calculées pour chaque maillage à partir du maillage le plus fin.



FIGURE 4: Etude de convergence sur un milieu Bentheimer. Un critère de convergence (ici 3%) est fixé. A critère de convergence fixé, le nombre de mailles nécessaire pour obtenir une convergence macroscopique est plus petit que pour obtenir une convergence microscopique. Le paramètre n caractérise la rhéologie du fluide, voir Eq. 1.1.

Dans la Figure 4, on remarque que la convergence de l'erreur macroscopique est plus rapide que celle de l'erreur microscopique. À critère de convergence donné, il est donc moins coûteux d'étudier des grandeurs macroscopiques que microscopiques. Cependant, si on souhaite s'intéresser à des profils locaux de vitesses ou à la répartition statistique d'un champ microscopique, il est nécessaire de s'assurer de la convergence microscopique.

Dans la Fig. 4, la plus basse résolution en maillage correspond à l'utilisation des voxels obtenus par le procédé d'imagerie directement comme cellule du maillage. On remarque que si l'on fait ce choix, on fait une erreur macroscopique (donc sur la perméabilité) de plus de 25% avec notre outil de résolution volume finis. Il n'y a en effet aucune raison pour que la taille caractéristique des mailles nécessaire pour résoudre l'écoulement soit supérieure ou égale à la résolution spatiale du procédé d'imagerie.

Le taux de convergence t est défini comme  $E \propto h^t$ . Le paramètre t est l'ordre effectif des schémas numériques [139]. Dans OpenFOAM, l'étude de convergence d'un écoulement rampant (nombre de Reynolds très petit) et Newtonien sur une plaque plane donne un ordre effectif de 2, qui est l'ordre nominal des schémas centrés [138]. Lorsque la géométrie devient plus complexe, l'ordre effectif diminue. On remarque ici que t est peu sensible à la rhéologie du fluide. La non-linéarité due à la viscosité non-Newtonienne n'impose pas un nombre de mailles beaucoup plus grand pour résoudre l'écoulement.

# 2.3 Prédiction de perméabilité

A partir de l'image d'un échantillon poreux, la prédiction numérique de la perméabilité est un enjeu crucial dans de nombreux domaines et suscite de nombreuses études [140, 141, 142]. Pour les fluides non-Newtoniens, de nombreuses méthodes ont été utilisées pour prédire la perméabilité, comme la DNS [143] mais aussi des méthodes Lattice-Boltzmann [144] ou encore "*smoothed particle hydrodynamics*" [145]. Quelle que soit la méthode de résolution de l'écoulement, de nombreuses étapes préliminaires sont nécessaires pour évaluer la perméabilité, chacune induisant des erreurs, comme illustré dans la Figure 5.

Dans un processus parfaitement rigoureux, ces erreurs devraient être quantifiées à chacune des étapes pour finalement encadrer la prédiction de perméabilité finale. Parmi toutes les étapes du processus, les questions suivantes émergent :

- L'échantillon microscopique est-il assez grand pour être considéré comme un volume élémentaire représentatif (VER) d'un domaine macroscopique?
- L'acquisition de l'image est-elle assez résolue pour capturer de manière assez précise la géométrie [146]?
- Quel que soit le procédé d'acquisition, une image en niveau de gris est obtenue. Dans quelle mesure la perméabilité est-elle sensible à la segmentation ?
- L'image obtenue est composée de voxels. Un lissage de la surface de l'image peut rendre l'objet plus réaliste. Ce lissage influence-t-il la prédiction de perméabilité?
- Une fois la géométrie finale fixée, des erreurs induites par les méthodes de calcul numérique peuvent aussi intervenir.

Les questions spécifiques au VER, à la segmentation, au lissage et aux conditions limites sont adressées dans les sections suivantes.

#### 2.3.1 Volume élémentaire représentatif

Les propriétés intrinsèques d'un milieu poreux, e.g. la perméabilité  $K_0$  et la porosité  $\phi$ , varient à l'échelle microscopique et se stabilisent généralement lorsque le volume considéré est assez grand [147]. Si l'échantillon poreux présente la même perméabilité que le domaine macroscopique, on dit que l'échantillon est un volume élémentaire représentatif (VER) en perméabilité. La notion de VER associée à une variable est importante car, selon la variable observée, la taille du VER peut être différente.

Pour étudier le VER, nous prenons 3 milieux très différents en termes de désordre, porosité et perméabilité, illustrés dans la Figure 6. Le milieu A est un treillis ordonné de  $10 \times 10$  cylindres 2D,



FIGURE 5: Diagramme d'une méthodologie de prédiction numérique de perméabilité. Des sources d'erreur peuvent être associées à chaque étape de la procédure. On distingue les erreurs associées au procédé d'imagerie (avant le trait horizontal) et les erreurs associées à la résolution numérique (après le trait horizontal).

les milieux P et B sont décrit dans la Section 2.2. Les caractéristiques poreuses intrinsèques des milieux sont décrites dans la Table 2.1, où le rayon équivalent  $R_{eq}$  est calculé comme  $\sqrt{8||K_0||/\phi}$ .

Le tenseur de perméabilité de référence  $K_0$  est calculé dans chacun de ces milieux, en imposant une condition de périodicité en pression et vitesse à la frontière extérieure  $A_{\beta e}$  et de non glissement à la paroi liquide/solide  $A_{\beta\sigma}$ . Pour les milieux P et B, une fine couche de fluide est ajoutée aux 6 faces des milieux cubiques pour assurer la périodicité. L'épaisseur de la couche de fluide est suffisamment fine pour avoir un impact négligeable sur la perméabilité (voir Section 2.3.4).



FIGURE 6: Phase solide  $\sigma$  des milieux utilisés.

Le tenseur de perméabilité intrinsèque  $K_0$  est alors calculé en résolvant trois écoulements rampants, Newtoniens et incompressibles. Une condition de périodicité étant imposée, le fluide est mis en mouvement avec un terme source  $\rho \mathbf{f}$  dans l'équation de quantité de mouvement, orienté selon  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  pour les 3 écoulements résolus. La perméabilité est alors calculée dans un sous-domaine cubique dont le centre est confondu avec le centre du domaine initial, voir Fig. 7d. On étend la taille du cube de largeur h et on introduit le paramètre  $m = h/R_{eq}$ . La Figure 7 montre l'évolution de la norme de la perméabilité et de la porosité en fonction de la taille du domaine. On note que les tenseurs de perméabilité calculés dans les sous-domaines ne sont pas nécessairement symétriques puisque les conditions limites ne sont pas périodiques (voir Annexe C).

Pour les milieux présentés dans la Fig. 6, on observe que les variations microscopiques de porosité et perméabilité sont fortement corrélées. Dans la Fig. 7a, on observe de fortes oscillations de porosité et perméabilité avec la taille du domaine de calcul, sur des échelles caractéristiques du milieu A, parfaitement ordonné. Ces oscillations sont dues au non respect de la périodicité pour des valeurs de h quelconques. La période de ces oscillations est la taille d'une cellule unitaire et la porosité ainsi que la perméabilité tendent vers les valeurs de la cellule unitaire. Avec un milieu de  $10 \times 10$  cylindres, on remarque que l'amplitude de la dernière oscillation est de quelques pourcents.

Milieu	$\phi$	$\ K_0\ $	$R_{\rm eq}$
Α	0.49	1827	171
Р	0.36	34	27.6
В	0.25	4.44	12

TABLE 2.1: Caractéristiques intrinsèques (porosité, perméabilité en Darcy et rayon équivalent en  $\mu$ m) des milieux utilisés pour étudier le VER.

Pour les milieux 3D P (Fig. 7b) et B (Fig. 7c), on observe que la perméabilité et la porosité se stabilisent toutes les deux pour une certaine taille de domaine; environ  $30 R_{eq}$  pour B et  $15 R_{eq}$  pour P. Le milieu P étant moins désordonné que B, on s'attend en effet à ce qu'un VER soit plus rapidement atteint que pour le milieu B. Pour le milieu B, on remarque que la perméabilité n'atteint pas tout à fait une valeur plateau et des variations de porosité sont présentes. De plus, la Fig. 7d montre clairement qu'il n'y a seulement que quelques pores liquides dans ce milieu. Si l'échantillon était plus grand, on aurait peut-être pu observer des variations de la structure poreuse ou des hétérogénéités locales. Il est prudent de ne pas considérer le milieu B comme un VER.



FIGURE 7: (a) à (c) Evolution de  $||K_0||$  (en Darcy) et  $\phi$  avec la taille du domaine ( $m = h/R_{eq}$ ) pour les différents milieux et (d) sous-domaine de prise de moyenne pour le calcul des propriétés macroscopiques.

Un autre moyen d'estimer la taille du VER est d'utiliser des opérateurs statistiques, comme des fonctions d'auto-corrélation [148, 149]. Pour un champ scalaire microscopique  $\psi$ , on définit la

fonction d'auto-corrélation  $\gamma$  comme

$$\gamma(\mathbf{h}, \psi) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \left( \psi(\mathbf{x}_i) - \psi(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) \right)^2, \qquad (2.37)$$

où **h** est un vecteur et N le nombre de points qui discrétisent de façon cartésienne le milieu et  $\mathbf{x}_i$  le vecteur coordonnée de la discrétisation spatiale. Si  $\|\mathbf{h}\|$  est petit, alors les valeurs de  $\psi$  en  $\mathbf{x}_i$  et en  $\mathbf{x}_i + \mathbf{h}$  sont corrélées. La valeur de  $\gamma$  est alors petite. Plus  $\|\mathbf{h}\|$  augmente, moins les valeurs de  $\psi$  en  $\mathbf{x}_i$  et en  $\mathbf{x}_i + \mathbf{h}$  sont corrélées,  $\gamma$  atteint une valeur plateau. Si le champ  $\psi$  est l'indicatrice de phase  $\chi_\beta$  (qui vaut 1 dans le liquide et 0 dans le solide), on peut montrer analytiquement que la valeur du plateau est  $\phi (1 - \phi)$  [150]. La Figure 8 présente les fonctions d'auto-corrélation de l'indicatrice de phase calculées dans les milieux P et B, avec le vecteur  $\mathbf{h}$  imposé selon  $\mathbf{e}_z$ .



FIGURE 8: Fonction d'auto-corrélation  $\gamma(\mathbf{h}, \chi)$  pour les milieux P et B. La valeur du plateau est  $\phi(1-\phi)$ .

Concernant le milieu P, on observe dans la Figure 8a des oscillations assez marquées pour des valeurs de  $\|\mathbf{h}\|$  allant jusqu'à 6  $R_{eq}$ . La longueur d'onde de ces oscillations est de l'ordre de grandeur du diamètre d'une bille. Dans des empilements de billes, ces oscillations caractéristiques ont aussi été observées expérimentalement sur le champ de vitesse [151]. En revanche, dans le milieu consolidé B, de telles oscillations ne sont pas visibles.

Une fonction d'auto-corrélation peut être utilisée pour estimer des longueurs caractéristiques du milieu poreux [20]. Par exemple, la longueur de corrélation  $\ell_c$  est définie comme la distance à partir de laquelle la fonction d'auto-corrélation atteint sa valeur plateau pour la première fois. Ici, on obtient environ  $1.5 R_{eq}$  pour P et  $6 R_{eq}$  pour B. Une petite longueur  $\ell_c$  pour le milieu P signifie que de proche en proche l'indicatrice de phase est corrélée à elle-même. Cela s'explique par la structure du milieu, où les pores sont régulièrement espacés d'une taille de bille environ. En revanche, le milieu B présente de larges pores qui ne sont pas régulièrement espacés dans le milieu. On observe donc une plus grande longueur  $\ell_c$ .

La fonction d'auto-corrélation ne donne pas d'information directe sur la taille du VER en porosité ou perméabilité. Elle fournit seulement une indication sur la corrélation de la structure poreuse à elle même à la petite échelle. Lorsque  $\gamma(\mathbf{h}, \chi)$  atteint son plateau pour  $\|\mathbf{h}\|$ , cela signifie que la structure poreuse n'est plus corrélée avec elle même au-delà de  $\|\mathbf{h}\|$ . Cette distance  $\|\mathbf{h}\|$  correspond alors à une taille caractéristique du milieu poreux que l'on peut estimer à 8  $R_{eq}$  pour P et 10  $R_{eq}$ pour B. On remarque que ces longueurs sont plus petites que les longueurs nécessaires pour obtenir un plateau en porosité et perméabilité (environ 15  $R_{eq}$  pour P et 30  $R_{eq}$  pour B, voir Fig. 6). Selon la quantité à laquelle on s'intéresse (par exemple l'auto-corrélation de la structure poreuse ou la perméabilité) la taille du VER peut être fortement différente.

Ici, on quantifie la corrélation d'un champ scalaire entre deux points séparés par un vecteur  $\mathbf{h} = \|\mathbf{h}\|\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ . On pourrait aussi quantifier cette corrélation entre un point et tous les points équidistants d'une distance  $\|\mathbf{h}\|$ . La fonction d'auto-corrélation devient alors 3D. Pour le milieu P, il a été observé que pour une fonction d'auto-corrélation 3D, l'amplitude des oscillations était fortement amoindrie [106]. La répartition désordonnée des billes diminue la corrélation entre un point et tous les points équidistants, d'où des oscillations plus faibles. Si le milieu était parfaitement ordonné, ces corrélations persisteraient, même en 3D.

Cette section a permis de montrer que les milieux utilisés ici ne sont pas *strico sensu* des volumes élémentaires représentatifs. On a été limité ici, non pas par la taille des images, mais par la puissance de calcul numérique disponible. Cependant, les problématiques de VER peuvent être étudiés séparément des phénomènes physiques auxquels on s'intéresse. Les volumes de fluides utilisés dans cette thèse sont assez grands pour analyser physiquement l'écoulement. En revanche, n'ayant pas fait de simulation sur VER, on ne peut que supposer le comportement de ces phénomènes sur de grands volumes. Par exemple, si le milieu est désordonnée, on peut imaginer que l'impact de certains phénomènes physiques soit atténué dès que le volume considéré est assez grand.

# 2.3.2 La segmentation d'une image en niveau de gris

Quel que soit le procédé d'imagerie, l'image obtenue est en niveau de gris. Après avoir traité l'image pour réduire le bruit, il faut alors la segmenter, c'est-à-dire différencier la phase liquide  $\beta$  et solide  $\sigma$  [20, 21]. Cette étape consiste à scinder la distribution du niveau de gris en deux. Sur une roche de type Berea (échantillon  $n^{\circ}13$  dans les données de [21]), quatre segmentations différentes ont été réalisées avec le logiciel Avizo Fire [152] :

- La segmentation 1 correspond à un "*auto-thresholding*" [153] : l'algorithme choisit automatiquement le seuil de niveau de gris  $\xi$  pour minimiser des paramètres associés à la distribution de niveau de gris.
- La segmentation 2 correspond à un "hysteresis thresholding" [154] : l'algorithme définit deux valeurs de seuillage  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . Pour un niveau de gris compris entre  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , l'algorithme définit la phase en fonction de sa connectivité aux autres phases.
- La segmentation 3 correspond à un "watershed thresholding" [155] : l'algorithme s'appuie que les gradients de niveau de gris pour segmenter l'image.

Le but ici n'est pas de détailler les différences entre ces algorithmes de segmentation, mais seulement d'évaluer leurs impacts respectifs. Dans toutes ces segmentations, l'utilisateur introduit toujours un biais subjectif en choisissant les paramètres propres aux algorithmes.

Ensuite, les images ont été maillées sans être lissées et la perméabilité intrinsèque a été estimée avec des conditions limites périodiques. La Figure 9 illustre les géométries obtenues avec des coupes de normale  $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ . Dans la Figure 9, la composante  $v_{\mathbf{x}}$  d'un écoulement imposé selon  $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$  est représentée.

On note que toutes ces segmentations semblent pertinentes du point de vue de la structure poreuse. On remarque que la différence est très légère entre ces segmentations et que les champs de vitesses résultants sont similaires.



FIGURE 9: Composante  $v_x$  d'un écoulement imposé selon  $\mathbf{e}_x$  dans un coupe de normale  $\mathbf{e}_x$  pour les quatre segmentations différentes d'une image de type Berea.

On calcule la porosité  $\phi$ , le tenseur complet de perméabilité intrinsèque  $\mathsf{K}_0$  et le rayon équivalent  $(R_{\mathrm{eq}} = \sqrt{8 \|\mathsf{K}_0\|/\phi} \text{ avec } \|\mathsf{K}_0\|$  défini comme le maximum des valeurs propres du tenseur) associé à ces segmentations. Les résultats sont rassemblés dans la Table 2.2.

Segmentations	$\phi$	$K_0$	$R_{\rm eq}$
Seg. 1	0.175	$\left(\begin{array}{rrrr} 55.5 & -1.8 & -1.7 \\ -1.8 & 27.2 & -4.8 \\ -1.7 & -4.8 & 49 \end{array}\right)$	1.60
Seg. 2	0.170	$\left(\begin{array}{cccc} 50.6 & -1.7 & -1.3 \\ -1.7 & 24 & -4.6 \\ -1.3 & -4.6 & 44 \end{array}\right)$	1.55
Seg. 3	0.182	$\left(\begin{array}{cccc} 65 & -2.5 & -3 \\ -2.5 & 35 & -5.8 \\ -3 & -5.8 & 60 \end{array}\right)$	1.70

TABLE 2.2: Porosité  $\phi$ , perméabilité intrinsèque K<sub>0</sub> (en 10<sup>-3</sup> Darcy) et rayon équivalent  $R_{eq}$  (en  $\mu$ m) calculés pour diverses segmentations sur une roche de type Berea.

Dans la Table 2.2, on observe que la porosité est peu sensible aux différentes segmentations. Cette observation est cohérente avec les très faibles changements observés dans les géométries (Fig. 9). En revanche, les termes du tenseur de perméabilité varient significativement avec les segmentations, notamment avec la segmentation 3 ("watershed thresholding"), où le terme  $k_{xx}$  varie de 30% entre les segmentations 2 et 3. En terme de rayon équivalent, on observe des variations atteignant 10% entre les segmentations 2 et 3.

On suppose que la sensibilité de la perméabilité à la segmentation est principalement contrôlée par les modifications de la géométrie dans les seuils de pores. On peut définir la région des seuils de pores comme la région où la dissipation visqueuse est la plus importante. Dans ces régions, un faible changement de la géométrie pourrait fortement modifier la perméabilité. On note aussi qu'un autre jeu de paramètres aurait pu être utilisé dans les différentes segmentations, tout en obtenant des images réalistes. Les valeurs des erreurs calculées ici ne représentent donc pas la borne supérieure, mais seulement un ordre de grandeur.

Dans l'image en niveau de gris, il existe donc un certain volume dont la nature est incertaine. La prédiction de perméabilité est sensible à la nature de ce volume, selon qu'il soit considéré solide ou liquide. Une méthode alternative consiste à considérer ce volume limitrophe comme un milieu poreux (système à double porosité) et à rajouter un terme de Darcy dans l'équation de quantité de mouvement [146]. Ce volume présente une forte perméabilité en contact avec le fluide et une faible perméabilité en contact avec le solide.

Dans le cadre de cette thèse, la micro-tomographie n'est utilisée que comme un moyen de générer des images à géométrie complexe et réaliste. L'objectif n'étant pas de prédire la perméabilité des images dont nous disposons, la segmentation sera fixée pour tous les milieux.

## 2.3.3 Le lissage d'une image binaire

L'étape de segmentation nous a donné une image binarisée. La géométrie est donc maintenant fixée et la surface  $A_{\beta\sigma}$  est décrite par les faces des voxels appartenant à la phase  $\beta$  et en contact avec la phase  $\sigma$ , voir Fig. 10. Il en résulte une géométrie dite *en marches d'escalier*. On imagine facilement que pour certains phénomènes physiques sensibles à l'état de la surface (transfert de masse à la paroi, glissement ou encore dissolution), ce type de discrétisation surfacique peut poser problème et amoindrir la qualité de la modélisation. Par exemple, l'aire d'une surface en marche d'escalier sera toujours plus grande que l'aire d'une surface lisse ( $\sqrt{2}$  fois plus grande en 1D), et ce quel que soit le pas de discrétisation spatial en marches d'escalier.

Pour quantifier la sensibilité de la perméabilité au lissage, des écoulements rampants et Newtoniens dans les milieux A et B ont été calculés. Dans le milieu A, la surface du cylindre est soit discrétisée en marches d'escalier avec un raffinement variable (caractérisé par le paramètre N dans les Figs. 11a à 11c, qui est le nombre de mailles sur le diamètre du cylindre), soit lissée (Fig. 11d). Pour le milieu B, une géométrie non lissée et une géométrie lissée avec Avizo ont été générées, voir la Figure 10. De plus, la perméabilité a été calculée avec et sans condition de glissement à la surface  $A_{\beta\sigma}$ .



FIGURE 10: Milieu B : effet du lissage sur la surface.



FIGURE 11: Milieu A : (a) à (c) la surface  $A_{\beta\sigma}$  est discrétisée en marches d'escalier avec un raffinement variable et (d)  $A_{\beta\sigma}$  est lisse.

On souhaite maintenant quantifier la sensibilité de la perméabilité à la discrétisation de la surface. De plus, on s'intéresse à l'effet d'une condition de glissement de type Navier (voir Annexe A). La longueur de glissement est fixée à  $10 \,\mu\text{m}$  pour le milieu A ( $R_{\text{eq}} = 171 \,\mu\text{m}$ ) et à  $1 \,\mu\text{m}$  pour le milieu B ( $R_{\text{eq}} = 8.73 \,\mu\text{m}$ ). Dans la Figure 12, on trace l'évolution de la perméabilité adimensionnée,  $k/k_{\text{lisse}}$ , avec la discrétisation de la surface, caractérisée par N. On observe que, dans le cas sans glissement, lorsque N augmente la perméabilité k tend bien vers la perméabilité du milieu A lisse,  $k_{\text{lisse}}$ . En revanche avec glissement, la perméabilité de la surface en marches d'escalier tend vers une valeur plateau 0.91  $k_{\text{lisse}}$ .

On conclut qu'avec une condition limite de glissement, la perméabilité devient très sensible à la surface  $A_{\beta\sigma}$  et que même très discrétisée, on n'obtiendra pas avec une surface en marches d'escalier la perméabilité d'une surface lisse. Ceci est à rapprocher du fait qu'une surface en escalier n'assure pas une convergence en maillage vers la surface spécifique du milieu lisse, voir [156]. Le résultat obtenu est spécifique à l'outil (et notamment les schémas numériques) utilisé. Il est possible que d'autres schémas numériques adéquats permettent de diminuer la différence observée.



FIGURE 12: Évolution de  $k/k_{\text{lisse}}$  avec le nombre de mailles N utilisé pour discrétiser la surface du milieu A. Dans la condition de Navier, le cas avec glissement correspond à  $\ell = 10\mu \text{m}$  et sans glissement à  $\ell = 0$ .

Concernant le milieu B, les valeurs de perméabilité pour les différentes surfaces avec et sans glissement sont rapportées dans le Tableau 2.3. Dans le cas sans glissement, on observe sur la perméabilité une différence de 3.5% entre une géométrie non lissée et lissée. Dans le cas avec glissement, cette différence atteint 6%. L'impact du lissage n'est donc pas négligeable dans une optique de prédiction de perméabilité.

Surface	Non lissée	Lissée
$\phi$	0.148	0.146
$k_{\ell=0}$	1.41	1.46
$k_{\ell=1\mu m}$	1.66	1.76

TABLE 2.3: Porosité et perméabilité (en Darcy) avec et sans glissement pour le milieu B avec surface non lissée et lissée. Le cas avec glissement correspond à  $\ell = 1\mu m$  et sans glissement à  $\ell = 0$ .

Cette section a permis de conclure que le lissage est une étape importante et sensible pour prédire la perméabilité d'un milieu poreux. L'importance de cette étape est d'autant plus grande que les phénomènes de paroi sont complexes. Enfin, il faut insister sur le fait que tout lissage est arbitraire. On ne connaît pas *a priori* la topologie de la surface d'une roche réelle. De plus, on a comparé ici les résultats entre des surfaces lisses et en marches d'escalier, mais la roche réelle peut présenter des rugosités à très petite échelle qui ne sont pas capturées par le procédé d'imagerie. Pour encadrer une prédiction de perméabilité des roches typiquement rencontrées en ingénierie pétrolière, une étude de sensibilité au lissage paraît nécessaire.

#### 2.3.4 Les conditions limites

Une fois que l'image du milieu poreux est fixée (trait horizontal rouge dans la Figure 5), il faut alors estimer les erreurs liées à la résolution numérique de l'écoulement. Lorsque le maillage est assez fin (voir Section 2.2) et que les solveurs sont assez précis (voir Section 2.1), il reste le choix des conditions limites que l'on impose aux bords du domaine. La perméabilité peut être très sensible aux choix des conditions limites et c'est particulièrement le cas lorsque le milieu est de petite taille, c'est-à-dire que la plupart des pores sont relativement proches d'un des bords du domaine.

Pour illustrer cette problématique, nous utilisons l'image d'un échantillon issu d'une roche de type Berea, sur laquelle une étude de sensibilité de la perméabilité à la segmentation a déjà été réalisée par Andra *et al.* [21]. Ce milieu, qui correspond au  $n^{\circ}13$  dans les données de [21], est un cube, de taille 296  $\mu$ m<sup>3</sup>, dont la géométrie n'est pas périodique. Si la géométrie était périodique, i.e., si les faces du cube étaient identiques deux à deux, on imposerait naturellement une condition limite périodique sur les variables pression et vitesse lorsque l'on résout l'écoulement. Cependant, en "*Digital Rock Physics*" (DRP), les images de roches naturelles que l'on obtient sont *a priori* toujours non périodiques. Une solution annexe consiste à extraire des propriétés statistiques du milieu poreux et à recréer un milieu équivalent en imposant une périodicité spatiale [141]. Cette méthode n'a pas été utilisée dans cette thèse.

Diverses configurations de conditions limites détaillées plus bas sont utilisables lorsque l'on résout l'écoulement numériquement. Dans cette Section, on simule des écoulements Newtoniens avec une condition de non glissement imposée à la surface liquide/solide et différentes conditions limites aux bords du domaine. On obtient alors plusieurs tenseurs de perméabilité intrinsèque  $K_0$ , voir les Eqs. 2.39 à 2.41. Les configurations de conditions limites aux bords considérées, qui sont notées de 1 à 3, sont les suivantes :

- La configuration 1 est le choix du perméamètre, qui consiste à imposer une condition de non glissement sur les faces orthogonales à l'écoulement et une pression uniforme sur les faces d'entrée et de sortie. C'est cette configuration qui a été utilisée dans le Chapitre 3.
- La configuration 2 est similaire à la première, excepté qu'une condition de symétrie est appliquée sur les faces orthogonales à l'écoulement. Cette condition est modélisée en imposant un flux nul à la paroi. On note que l'on peut alors toujours *a priori* obtenir des termes non diagonaux. Les termes non diagonaux seraient perdus si on avait symétrisé géométriquement le milieu et calculé la perméabilité sur l'ensemble de ce nouveau milieu (4 fois plus grand en 2D et 8 fois en 3D).
- Dans la configuration 3, on choisit de rendre le milieu périodique en imposant une fine couche de fluide sur les 6 faces du cubes [157]. Afin de limiter l'impact de ces couches de fluide sur l'écoulement, elles ne sont pas en contact les unes des autres. Cette configuration a été utilisée dans le Chapitre 5. Dans cette configuration, l'écoulement est forcé par un terme source dans l'équation de quantité de mouvement.

D'autres méthodes existent. Une d'entre elles consiste à entourer l'échantillon d'un milieu poreux équivalent où l'écoulement est résolu à l'échelle de Darcy [158]. Dans le cas spécifique de géométries capillaires, on peut aussi imposer le profil de vitesse en entrée et en sortie du milieu [1]. Quelle que soit la configuration choisie, un biais demeure toujours présent. En l'absence de mesure de référence expérimentale, il est difficile (voire impossible) d'estimer ce biais. On peut estimer cependant que ce biais aura tendance à diminuer si la taille du domaine est suffisamment grande par rapport aux longueurs caractéristiques du milieu.

Concernant la configuration 3, l'épaisseur de la couche de fluide qui entoure le milieu doit être la plus fine possible pour n'influencer que très légèrement la mesure de perméabilité. Pour étudier l'influence de cette couche fluide sur la perméabilité de l'échantillon Berea, on fait varier son épaisseur, notée  $\varepsilon$ , de 0.0185 µm à 3.7 µm, et on calcule le tenseur complet de perméabilité. Les termes du tenseur de perméabilité sont adimensionnés comme,

$$k_{ij}^* = \frac{k_{ij} - k_{ij}^{\varepsilon_{\min}}}{k_{ij}^{\varepsilon_{\min}}},\tag{2.38}$$

où  $k_{ij}^{\varepsilon_{\min}}$  correspond aux termes du tenseur de perméabilité mesurée pour l'épaisseur la plus fine de la couche limite, notée  $\varepsilon_{\min}$  ( $\varepsilon_{\min}/h = 6.25 \, 10^{-5}$  avec  $h = 296 \, \mu$ m). La Figure 13 montre l'évolution des termes  $k_{ij}^*$  (en %) avec l'épaisseur adimensionnés de la couche de fluide qui entoure le milieu Berea  $\varepsilon/h$ . On observe une convergence des termes du tenseur lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.



FIGURE 13: Évolution des termes adimensionnés du tenseur de perméabilité (voir Eq. 2.38) avec l'épaisseur adimensionnée de la couche de fluide  $\varepsilon/h$  qui entoure le milieu Berea.

Dans le cas de cet échantillon de Berea, on utilise pour la prédiction finale de la perméabilité une épaisseur  $\varepsilon_{\rm ref} = 2 \varepsilon_{\rm min}$ . On peut comparer cette épaisseur au rayon équivalent du milieu, calculé comme  $R_{\rm eq} = \sqrt{8} ||\mathbf{K}_0||/\phi$ , ce qui conduit à  $\varepsilon_{\rm ref}/R_{\rm eq} = 0.02$ . On remarque que la mesure de la perméabilité est très sensible à la valeur de  $\varepsilon$ . Par exemple, utiliser  $\varepsilon/R_{\rm eq} = 0.2$  (soit  $\varepsilon/h = 1.25 \, 10^{-3}$ ) conduit à des différences atteignant un facteur 2 pour certains termes du tenseur de perméabilité. Lorsque cette méthode est utilisée en DRP, une vérification systématique de l'effet de l'épaisseur de cette couche de fluide doit être menée.

Les résultats sont présentés dans les Eqs. 2.39 à 2.41. Dans Andra *et al.* [21], seulement les termes diagonaux sont reportés, voir Eq. 2.42. On remarque que les résultats des configurations 1 et 2 sont proches, i.e., la condition de non glissement aux faces orthogonales à l'écoulement ne modifie pas significativement la perméabilité comparée à une condition de symétrie. Si le milieu avait été plus petit, c'est-à-dire que la plupart des pores étaient proches des faces orthogonales à l'écoulement, on suppose que la différence entre les configurations 1 et 2 aurait été plus marquée.

De plus, la perméabilité calculée par Andra *et al.* [21] est proche des mesures des configurations 1 et 2. Cependant, la configuration 3 donne des résultats sensiblement différents, d'un facteur environ égal à deux ( $\|\mathsf{K}_0^{\text{conf. 1}}\| / \|\mathsf{K}_0^{\text{conf. 3}}\| \simeq 1.8$ ). En conclusion, dans un processus DRP parfaitement rigoureux, il est impératif d'étudier la sensibilité des propriétés macroscopiques aux conditions limites avant d'analyser les résultats.

$$\mathsf{K}_{0}^{\text{conf. 1}} = \begin{pmatrix} 93.3 & 12.6 & 2.1 \\ 12.6 & 87.5 & 11 \\ 2.1 & 11 & 72.2 \end{pmatrix} \text{ en } 10^{-3} \text{ Darcy.}$$
(2.39)

$$\mathsf{K}_{0}^{\text{conf. 2}} = \begin{pmatrix} 93.7 & 12.6 & 2.4\\ 12.6 & 89 & 11.5\\ 2.4 & 11.5 & 73 \end{pmatrix} \text{ en } 10^{-3} \text{ Darcy.}$$
(2.40)

$$\mathsf{K}_{0}^{\text{conf. 3}} = \begin{pmatrix} 52.6 & 2 & 1\\ 2 & 29.7 & 4\\ 1 & 4 & 44.1 \end{pmatrix} \text{ en } 10^{-3} \text{ Darcy.}$$
(2.41)

$$\mathsf{K}_{0}^{\text{Andra et al.}} = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0\\ 0 & 96 & 0\\ 0 & 0 & 73 \end{pmatrix} \text{ en } 10^{-3} \text{ Darcy.}$$
(2.42)

# 2.3.5 Recommandations pour la DRP

Dans ce Chapitre, la sensibilité de la perméabilité calculée à diverses étapes inhérentes au processus de prédiction numérique a été évaluée. Même si les erreurs associées à chacune de ces étapes sont inter-dépendantes, cette étude en donne un ordre de grandeur lorsque la DRP est utilisée sur des roches typiquement rencontrées en ingénierie pétrolière. Dans un processus de DRP parfaitement rigoureux, les questions et problématiques qui suivent devraient être systématiquement étudiées.

- L'image du milieu est-elle un VER ? Dans la Section 2.3.1, nous avons montré que le milieu Bentheimer dont nous disposions était de taille probablement trop petite (environ  $(40 R_{eq})^3)$  pour être rigoureusement considéré comme un VER. Il convient de rappeler que la taille du VER est liée à la propriété physique à laquelle on s'intéresse. Lorsque les phénomènes sont fortement non-linéaires, il est probable que la taille du VER augmente. Dans un protocole de DRP parfaitement rigoureux, nous recommandons de choisir plusieurs images (de taille fixe) dans le milieu poreux, afin de vérifier que le milieu soit homogène et, en même temps, de faire varier la fenêtre de calcul des propriétés effectives.
- Quelle est la sensibilité des propriétés effectives à la segmentation? Dans la Section 2.3.2, nous avons montré que sur une roche de type Berea, les termes du tenseur de perméabilité peuvent varier entre deux segmentations jugées pertinentes par l'utilisateur (jusqu'à 30%). Ici encore, selon les phénomènes étudiés, cette sensibilité pourrait s'accroître, notamment lorsqu'ils se produisent à l'interface.
- Un lissage de la géométrie binaire affecte-t-il la perméabilité? Sur une roche Bentheimer, nous avons montré dans la Section 2.3.3 que la perméabilité est faiblement sensible au lissage (environ 4%). Cependant, lorsqu'il y a présence d'un phénomène particulier à l'interface, ici le glissement, le lissage induit une différence légèrement plus forte de perméabilité (environ 6%).

- Une fois la géométrie définie, les questions relatives à la résolution numérique apparaissent, notamment la question du maillage des pores liquides. Dans la Section 2.2.2, nous avons montré qu'un maillage trop peu raffiné peut conduire à plus de 25% d'erreur sur la mesure de perméabilité.
- Enfin, la sensibilité de la perméabilité aux conditions limites a été étudiée dans la Section 2.3.4. Nous avons montré que sur une roche de type Berea, un facteur deux peut apparaître dans les termes du tenseur de perméabilité selon les conditions limites choisies. On s'attend à ce que cette erreur diminue avec la taille du domaine.

En conclusion, les étapes les plus sensibles dans ce processus semblent être la segmentation (environ 30%), le maillage (environ 25%) et les conditions limites appliquées aux bords du domaine (environ 50%). Au vu de ces incertitudes, il parait difficile d'utiliser la DRP de manière quantitative et, dans cette thèse, nous avons fait le choix d'utiliser la micro-tomographie d'image réelle comme un moyen d'obtenir des structures poreuses complexes. Le but n'est pas de prédire la perméabilité du milieu poreux associé aux images utilisées.

# 2.4 Validation expérimentale

Le but de cette section est de valider l'outil de simulation par comparaison avec des écoulements expérimentaux. Les expériences décrites ici ont été réalisées essentiellement par Shima Parsa au sein de l'équipe "*Experimental Soft Condensed Matter Group*" à l'université de Harvard. Les protocoles expérimentaux sont succinctement décrits dans la Section 2.4.1. Les données obtenues ont ensuite été traitées, Section 2.4.2, et une comparaison de l'écoulement expérimental avec plusieurs écoulements numériques a été réalisée, Section 2.4.3.

### 2.4.1 Le protocole expérimental

Les expériences réalisées sont des écoulements 3D à travers un micro-modèle dit 2D. Le micromodèle est constitué de cylindres de diamètre 300  $\mu$ m et de hauteur 27  $\mu$ m. Le micro-modèle est fabriqué par moulage dans une résine de polymère. La porosité de l'image utilisée pour le moulage, voir Fig 14, est de 0.44. La solution injectée est préparée pour que l'indice de réfraction du fluide soit le même que celui des cylindres. La solution présente une viscosité de 1.5 cP et une masse volumique de 1260 kg.m<sup>-3</sup>. Des particules de latex fluorescent de 1  $\mu$ m de diamètre sont ajoutées pour suivre l'écoulement par PIV (pour "*Particle Image Velocimetry*"). De cette expérience, deux éléments qui pourraient induire une mauvaise comparaison entre l'expérience et la prédiction numérique peuvent d'ores et déjà être relevés :

- La hauteur des cylindres est beaucoup plus petite que leur diamètre. L'écoulement sera donc fortement influencé par les effets 3D.
- Un effet de dispersion est indissociable de la méthode de PIV. Les particules auront tendance à ne pas diffuser dans les zones de faibles vitesses. Cela peut affecter la représentation statistique de l'écoulement.



FIGURE 14: Image utilisée pour la fabrication du milieu poreux 2D.

#### 2.4.2 Traitement des données expérimentales

Dans un premier temps, nous ne disposions pas de la géométrie réelle du micro-modèle, seulement de données PIV. L'objectif était alors de reconstruire la géométrie avec seulement les données PIV brutes. Ces données PIV sont limitées à un sous-domaine du micro-modèle, noté  $\Omega_{\text{PIV}}$ . Pour un pixel donné, si une acquisition PIV est réalisée, nous connaissons alors la vitesse transversale  $v_y$  et longitudinale  $v_x$ . On peut alors reconstruire la phase fluide (en jaune dans la Fig. 15a) lorsqu'à un pixel est associé une valeur vitesse.

Comparée à la Fig. 14, la géométrie obtenue est peu réaliste. Cela est dû aux zones stagnantes, dans lesquelles la vitesse est très faible et aucun traceur n'est détecté. Une simulation de l'écoulement à travers cette géométrie ne serait pas pertinente. Pour reconstruire l'image du milieu poreux, un traitement d'image est indispensable. La fonction matlab *imfindcircles* a alors été utilisée. Cette fonction permet de rechercher des cylindres dans l'image et de proposer une image réaliste du milieu poreux, voir Fig. 15b. La géométrie du milieu est beaucoup plus réaliste et une comparaison numérique expérimentale est alors envisageable.

# 2.4.3 Comparaison avec des simulations numériques

Disposant d'une géométrie approximative obtenue avec les données PIV, les simulations numériques ont été réalisées sous les conditions suivantes :

- La pression est imposée de manière uniforme à l'entrée et à la sortie du micro-modèle.
- Le fluide est Newtonien et ne glisse pas à la paroi.
- Dans un premier temps, les simulations sont a priori 2D.

Les PDF de vitesse longitudinale,  $v_x$  et transversale,  $v_y$ , sont générées pour toutes les simulations numériques. La Fig. 16 présente les PDF expérimentales et numériques avec (Fig. 15b) et sans (Fig. 15a) traitement de l'image des vitesses adimensionnées par la norme de la vitesse moyenne intrinsèque dans la phase liquide,  $\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \|$ .

La Figure 16 montre qu'une reconstruction de l'image en recherchant les cylindres améliore en effet la prédiction numérique. Cependant, cette approche est dépendante des données de la PIV et des biais sont induits par la méthode de reconstruction. De plus, certains bords du domaine  $\Omega_{\text{PIV}}$  sont considérés comme des murs (non glissement) alors que  $\Omega_{\text{PIV}}$  appartient à un plus grand domaine.



(a) À la recherche des cylindres...



(b) Milieu poreux reconstruit avec traitement.

FIGURE 15: Reconstruction avec traitement du milieu poreux.



FIGURE 16: PDF de vitesses (a) longitudinales et (b) transverses à travers le treillis de cylindres 2D, avec et sans traitement de l'image (voir Fig. 15). La légende de (b) est identique à (a).

Dans un second temps, nous avons pu avoir accès à la géométrie de tout le domaine, voir Fig. 17, et identifier dans quelle zone de ce domaine la PIV a été réalisée (en rouge dans la Fig. 17). Les PDF sont toujours calculées dans  $\Omega_{\text{PIV}}$ , mais on s'affranchit du problème des conditions aux limites.



FIGURE 17: Domaine complet du micro-modèle et zone imagée par PIV (en rouge).

Une fois la convergence au maillage assurée, plusieurs pistes sont envisagées pour améliorer la comparaison statistique des champs de vitesse. La première est de corriger empiriquement l'effet de dispersion, en réduisant le domaine de calcul des PDF aux zones de fortes vitesses. Le domaine de calcul des PDFs est noté  $\Omega_{calc}$ . On définie  $\phi_{PIV} = \Omega_{calc}/\Omega_{PIV}$ . La Fig. 18 présente des PDF calculées dans l'ensemble du domaine liquide (on a alors  $\phi_{PIV} = 1.00$ ) ou seulement dans un sous domaine de taille 70% de  $\Omega_{PIV}$  qui ne comprend que les plus fortes vitesses de  $\Omega_{PIV}$  (on a alors  $\phi_{PIV} = 0.70$ ).



FIGURE 18: PDF de vitesse (a) longitudinale et (b) transversale à travers le treillis de cylindres 2D, avec un domaine de calcul des PDF différent. La légende de (b) est identique à (a).

De la Figure 18, on observe que réduire le domaine de calcul de la PDF aux fortes vitesses améliore la prédiction en vitesse longitudinale (Fig. 18a). La statistique des fortes vitesses est correctement prédite mais l'écoulement à contre courant (vitesse négative) est toujours mal décrit. De plus, la distribution de vitesse transverse n'est pas modifiée (Fig. 18b). Cette méthode de correction empirique n'est pas assez rigoureuse pour comparer les PDFs.

Un autre facteur de correction possible est le caractère 3D évident de l'écoulement. On simule alors un écoulement 3D, avec un nombre suffisant de mailles dans la direction transverse  $\mathbf{e}_{z}$ . On

calcule alors les PDFs avec les mailles qui appartiennent au plan de la zone PIV. Les résultats sont présentés dans la Figure 19.



FIGURE 19: PDF de vitesse (a) longitudinale et (b) transversale à travers le treillis de cylindres 2D. La simulation de l'écoulement est 3D. La légende de (b) est identique à (a).

La Figure 19 montre que la comparaison des PDFs expérimentales et numériques est très satisfaisante lorsque la simulation est 3D. La statistique de toutes les vitesses (fortes, faibles ou négatives) est correctement prédite. Comme on pouvait s'y attendre, la prise en compte du caractère 3D de l'écoulement est la condition la plus importante pour prédire la bonne statistique de vitesse.

Bien que la statistique de vitesse soit correctement prédite, on remarque que le champ de vitesse microscopique est très légèrement différent. En comparant les Figures 20a et 20b, on observe que, dans presque tout le milieu, les champs numériques et expérimentaux sont similaires, mais qu'il existe de légères différences. En particulier, il semble en effet qu'un cylindre se soit déplacé lors de la conception, bouchant ainsi un seuil de pore qui existe dans l'écoulement numérique. Cet incident prouve que les PDFs ne reflètent que la distribution statistique. Ainsi, inférer les profils de vitesse locaux à partir des PDFs semble délicat.

Cette comparaison permet tout de même de valider l'outil numérique de calcul OpenFOAM. La même étude aurait été souhaitable sur des géométries 3D avec un fluide non-Newtonien. Cependant, au regard des difficultés expérimentales rencontrées, ce travail n'a pas pu être réalisé.





(a) Champ expérimental  $v_{\rm x}$ .

(b) Champ numérique  $v_{\rm x}$ .

FIGURE 20: Comparaison finale du champ de vitesse  $v_{\rm x}$  expérimental et numérique.

# Chapitre 3

# Description de la transition entre les régimes d'écoulement Newtoniens et non-Newtoniens

Ce Chapitre est construit autour de deux articles publiés en 2016, l'un dans Physical Review Letters [106] et l'autre à l'occasion de la conférence ECMOR XV [159]. Dans ces deux publications, on étudie la transition entre un régime d'écoulement macroscopique linéaire et non-linéaire. Ces deux articles sont complémentaires. Dans le premier, une étude numérique est réalisée sur plusieurs types de milieux (treillis simples, empilements de billes et roches) et un modèle simple pour la transition est proposé (Section 3.2). Dans le second, ce modèle est testé avec des solutions analytiques calculées dans des ensembles de tubes et des résultats expérimentaux provenant de la littérature (Section 3.3). Enfin, dans la Section 3.4, on discutera du modèle de transition proposé.

# 3.1 Motivations

Comprendre et modéliser l'écoulement d'un fluide complexe à travers un milieu poreux est un défi puisque le système en question comporte à la fois des effets non-linéaires associés à la rhéologie et des effets multi-échelles associés à la structure poreuse. Généralement, on utilise pour décrire l'écoulement à travers des milieux une loi homogénéisée de type Darcy,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}}{\mu_0} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right), \tag{3.1}$$

où  $\langle \mathbf{v} \rangle$  est la vitesse moyenne superficielle,  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  est le gradient de pression intrinsèque,  $\rho \mathbf{g}$  le terme gravitaire et K est le tenseur de perméabilité. La moyenne dans la phase fluide  $\beta$  est reliée à la moyenne superficielle par la relation  $\langle \bullet \rangle = \phi \langle \bullet \rangle^{\beta}$ , avec  $\phi$  la porosité.

Dans l'équation 3.1, les effets non-linéaires et multi-échelles sont pris en compte entièrement par la perméabilité, dite alors apparente, K. Lorsque que l'écoulement est fortement non-linéaire, on pourrait s'attendre à ce que la loi de Darcy ne permette plus de décrire convenablement l'écoulement. Cependant, de manière surprenante, la perméabilité apparente devient fonction de la vitesse

moyenne et une description homogénéisée est toujours possible. C'est par exemple le cas pour un fluide "pure power-law" ( $\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1}$ ), où la perméabilité évolue en  $\|\langle \mathbf{v} \rangle \|^{1-n}$  [28, 160, 98]. Il en va de même pour les fluides de Bingham où, même si des chemins préférentiels sont crées dans un régime de transition, une loi de Darcy généralisée décrit toujours correctement l'écoulement [161, 162]. Des études récentes [162, 160] suggèrent que la distribution de vitesse dans le milieu poreux est principalement contrôlée par la géométrie. Les effets non-linéaires n'influenceraient que peu la distribution de vitesse. D'un point de vue fondamental, il est alors important de comprendre le lien entre l'écoulement non-linéaire à la petite échelle et le comportement macroscopique apparent.

Dans ce Chapitre, les effets non linéaires sont dus à la rhéologie non-Newtonienne, modélisée par une loi "power-law with cut-off" (PLCO),

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \\ \mu_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$
(3.2)

On cherche à modéliser des solutions de xanthan ou de HPAM qui sont rhéo-fluidifiantes dans la gamme concentration typiquement utilisée en ingénierie pétrolière, soit n < 1 [5].

Pour s'intéresser à la transition entre un régime d'écoulement Newtonien et non-Newtonien, nous prenons le cas d'un écoulement où l'on suppose que la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{v} \rangle$  est alignée avec le terme source  $\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}$  que l'écoulement soit Newtonien ou non-Newtonien. En effectuant un changement de base tel que  $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle v \rangle \mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ , on peut alors écrire la loi de Darcy sous une forme scalaire,

$$\langle v \rangle = \frac{k}{\mu_0} \left\| \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right\|.$$
(3.3)

Dès que  $\langle v \rangle$  et  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  sont connus, on peut toujours écrire la loi macroscopique 1D sous la forme de l'Eq. 3.3, et cela quels que soient les phénomènes non-linéaires que l'on traite, la non-linéarité étant incorporée dans k.

Pour lier le terme source de l'écoulement  $\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}$  et la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$ , deux choix se présentent. Le premier consiste, comme dans l'Eq. 3.3, à fixer la viscosité à  $\mu_0$  et à utiliser une perméabilité apparente k (voir Fig. 1a). La seconde consiste à fixer la perméabilité à sa valeur Newtonienne  $k_0$  et introduire une viscosité apparente  $\mu_{app}$  (voir Fig. 1b), conduisant à une loi macroscopique de la forme,

$$\langle v \rangle = \frac{k_0}{\mu_{\rm app}} \left\| \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right\|. \tag{3.4}$$

Dans ce Chapitre, c'est la première possibilité qui est retenue alors que, comme expliqué dans l'Introduction (voir Section 1.3.3), c'est la seconde qui est souvent choisie en ingénierie pétrolière [10]. Dans ce dernier cas, on utilise alors un taux de déformation équivalent,  $\dot{\gamma}_{eq}$ , en supposant que les courbes  $\mu_{app}$  vs.  $\dot{\gamma}_{eq}$  (*in situ*) et  $\mu$  vs.  $\dot{\gamma}$  (*ex situ*) se superposent. L'utilisation de  $\mu_{app}$  pour prendre en compte les effets non linéaires présente deux inconvénients majeurs.

Le premier inconvénient est qu'il est *a priori* possible que la tendance de  $\mu$  vs.  $\dot{\gamma}$  soit différente de la tendance  $\mu_{app}$  vs.  $\dot{\gamma}_{eq}$ . Un exemple manifeste est justement le modèle PLCO qui ne pourra jamais représenter correctement la viscosité apparente dans la zone de transition qui est caractérisée par une évolution lisse (voir la Figure 1b). Le second inconvénient, développé dans le Chapitre 5, est qu'utiliser seulement la viscosité pour traduire les effets non-Newtoniens ne permet pas une approche tensorielle. On pourrait en effet imaginer que les directions de la vitesse moyenne d'écoulement



(a) Perméabilité apparente vs.  $\langle v \rangle$ 

(b) Viscosité apparente et "bulk" vs.  $\langle v \rangle$ 

FIGURE 1: Représentation schématique de l'évolution de la perméabilité apparente k (a) ou de la viscosité apparente  $\mu_{app}$  (b) avec la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  lors de l'écoulement 1D d'un fluide rhéofluidifiant à travers un milieu poreux. Dans (a), diverses vitesses de transition peuvent être définies. Pour un milieu de naturel typique de réservoirs péroliers,  $k_0$  est de l'ordre du Darcy (en considérant 1 Darcy = 1  $\mu$ m<sup>2</sup>) et  $\langle v_c \rangle$  est de l'ordre de 1  $\mu$ m.s<sup>-1</sup> pour une solution de xanthan à des concentrations typiquement utilisée en EOR.

Newtonien et non-Newtonien soient différentes. Dans ce cas, il faudrait alors adopter une approche tensorielle pour correctement décrire l'écoulement macroscopique.

Lorsqu'un fluide PLCO s'écoule à très basse vitesse moyenne dans un milieu poreux, on observe partout dans le milieu  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c$ , engendrant un champ de viscosité uniforme,  $\mu = \mu_0$ . La perméabilité est indépendante de  $\langle v \rangle$  et vaut  $k_0$ . Quand on augmente  $\langle v \rangle$ , on observe localement que  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c$ , induisant un champ de viscosité qui n'est plus uniforme. La perméabilité apparente n'est alors plus constante et évolue en  $\langle v \rangle^{1-n}$  lorsque l'écoulement est pleinement non-Newtonien. Cette relation a été démontrée théoriquement [98, 163, 164], numériquement [127, 143] et expérimentalement [64, 27].

La rhéologie telle que décrite par l'Eq. 3.2 va induire deux régimes d'écoulement différents, séparés par un régime d'écoulement partiellement non-Newtonien. On peut définir une vitesse de transition  $\langle v_{T1} \rangle$  pour laquelle la valeur de la perméabilité apparente dévie de sa valeur Newtonienne  $k_0$ . Cette vitesse  $\langle v_{T1} \rangle$  caractérise la transition entre un régime d'écoulement Newtonien et un régime d'écoulement partiellement non-Newtonien (voir Fig. 1a). De la même manière, on peut définir  $\langle v_{T2} \rangle$ , qui caractérise la transition entre le régime d'écoulement partiellement non-Newtonien et pleinement non-Newtonien.

La perméabilité apparente évolue de manière non-linéaire entre  $\langle v_{T1} \rangle$  et  $\langle v_{T2} \rangle$ . Nous n'avons pas observé de phénomène de type bifurcation qui permettrait de définir de manière univoque ces deux vitesse de transition, i.e., il ne semple pas y avoir de rupture de pente marquée. On pourrait définir  $\langle v_{T1} \rangle$  (et par analogie  $\langle v_{T2} \rangle$ ) par la vitesse à laquelle  $k = (1 + \epsilon) k_0$  ( $\epsilon$  étant choisi de manière

arbitraire). Nous n'avons pas effectué une analyse exhaustive de la transition. Nous avons plus étudié plus particulièrement une vitesse critique, notée  $\langle v_c \rangle$ , permettant de positionner correctement les deux asymptotes; le régime Newtonien et le régime pleinement non-Newtonien (voir Fig. 1a).

Dans la Fig. 1, en observant l'évolution de k en fonction de  $\langle v \rangle$ , on remarque que la transition du régime Newtonien à non-Newtonien est un phénomène qui s'étend sur une décade de vitesse pour une variation de k d'un facteur deux. L'estimation de la transition est alors délicate car très sensible à la définition de la vitesse critique. C'est pourquoi le but ici n'est pas de prédire exactement la transition mais de l'estimer, à partir d'une analyse physique. Dans ce Chapitre, on propose un modèle pour la transition et pour cela, on utilisera  $\langle v_c \rangle$  comme étant la vitesse critique de transition. Un modèle simple pour  $\langle v_c \rangle$  sera proposé et évalué numériquement (Section 3.2), mais aussi théoriquement et par comparaison avec des données expérimentales provenant de la littérature (Section 3.3). Enfin, une comparaison avec les modèles macroscopiques empiriques actuellement utilisés dans les simulateurs de réservoirs sera réalisée.

Dans ce chapitre, on souhaite caractériser et expliciter le lien physique entre rhéologie et structure poreuse par la mécanique des fluides. Le résultat principal des deux articles qui suivent est que la longueur caractéristique  $\sqrt{k_0}$  porte beaucoup de sens physique, puisqu'elle transcrit à la fois une information sur la structure poreuse et sur l'écoulement.

# 3.2 Étude numérique de la transition

De part les récents progrès de l'imagerie en trois dimension d'échantillons de petites tailles ainsi que les puissances de calculs disponibles actuellement, la simulation d'écoulement à l'échelle des pores dans des milieux poreux réalistes est une thématique très en vogue. Dans l'article qui suit [106], nous avons utilisé un large panel de milieux poreux qui présentent des porosités, perméabilités et distributions de tailles de pores très différentes.

Des écoulements de fluides non-Newtoniens, qui suivent le modèle PLCO (Eq. 3.2), ont été simulés à travers ces milieux pour différents régimes. La diversité des milieux poreux utilisés nous permet d'avoir une large représentation de la transition macroscopique. Pour chaque milieu poreux, la vitesse intrinsèque de transition  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  est alors estimée (voir Fig. 1).

L'observation principale est qu'il existe pour tous les milieux des régions particulières, appelées seuils de pores. Ces seuils de pore sont définis rigoureusement comme le volume fluide dans lequel la viscosité est non-Newtonienne ( $\mu \neq \mu_0$ ) lorsque  $\langle v \rangle = \langle v_c \rangle$ . Dans ces régions, l'énergie dissipée par frottement visqueux est très forte. Cette région contrôle alors la perméabilité mais aussi la transition du régime d'écoulement Newtonien à non-Newtonien. Cette observation permet alors de proposer le modèle suivant au premier ordre,

$$\langle v_{\rm c} \rangle^{\beta} \simeq \dot{\gamma}_{\rm c} \sqrt{k_0},$$
(3.5)

dans lequel les effets de la structure sur l'écoulement sont pris en compte par la longueur caractéristique  $\sqrt{k_0}$ . Cette longueur est d'ailleurs retrouvée dans beaucoup d'applications de milieux poreux, comme les écoulements inertiels [165, 166].

<

Une autre observation importante concerne la distribution spatiale du champ de vitesse normalisée par la vitesse moyenne. Il est observé que la statistique de vitesse normalisée est peu affectée par la non-linéarité induite par la rhéologie. Comme observé dans d'autres études, la distribution spatiale de vitesse est principalement contrôlée par la structure du milieu poreux [143, 160, 167]. Les perturbations induites par la rhéologie de la distribution de vitesse spatiale sont négligeables devant le contrôle de la distribution par la structure poreuse.

**Notations** : Dans l'article qui suit, les variables ci-dessous sont notées différemment que dans le reste de la thèse :

- La vitesse microscopique est notée  $\mathbf{U}$  au lieu de  $\mathbf{v}$ .
- L'opérateur de moyenne dans la phase liquide est notée  $\langle \bullet \rangle_{\rm FL}$  au lieu de  $\langle \bullet \rangle^{\beta}$ .
- La pression microscopique est noté<br/>é ${\cal P}$ au lieu de p.
- La porosité est notée  $\phi_{\rm FL}$  au lieu de  $\phi$ .
- Le paramètre d'accélération du fluide des pores vers les seuils de pores est noté  $\beta$  au lieu d'être noté  $\kappa.$

# Transition in the Flow of Power-Law Fluids through Isotropic Porous Media

F. Zami-Pierre,<sup>1,2</sup> R. de Loubens,<sup>2</sup> M. Quintard,<sup>1</sup> and Y. Davit<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)–Université de Toulouse, CNRS-INPT-UPS, Toulouse France

<sup>2</sup>Total, CSTJF, Avenue Larribau, 64018 Pau, France

(Received 8 December 2015; published 10 August 2016)

We use computational fluid dynamics to explore the creeping flow of power-law fluids through isotropic porous media. We find that the flow pattern is primarily controlled by the geometry of the porous structure rather than by the nonlinear effects in the rheology of the fluid. We further highlight a macroscale transition between a Newtonian and a non-Newtonian regime, which is the signature of a coupling between the viscosity of the fluid and the structure of the porous medium. These complex features of the flow can be condensed into an effective length scale, which defines both the non-Newtonian transition and the Newtonian permeability.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.074502

The creeping flow of complex fluids through porous media embraces a wide variety of applications such as blood flow in vascular networks [1] or enhanced oil recovery [2-4]. Understanding and modeling such systems has proven a considerable challenge, as they intricately couple the nonlinear effects of non-Newtonian fluids with the multiscale nature of porous media. Linear transport phenomena in porous materials can often be described using homogenized equations encapsulating the large deviations induced by the multiscale heterogeneities-one of the hallmarks of transport in porous media-in a limited number of effective parameters. When the large deviations induced by the porous structure are further coupled with the rich nonlinear behaviors displayed by the flow of complex fluids-shear thickening and thinning, yield and cutoff effects, time-dependent mechanisms, confinement and sorption effects-it becomes unclear whether or not such average descriptions can accurately describe momentum transport. For a shearthinning fluid, a strong nonlinear response could yield preferential flow paths whereby the fluid might primarily flow at large velocity in regions where it would exhibit a relatively small viscosity, while leaving almost at rest other regions where it exhibits a higher viscosity (see similar effects in computations for Bingham fluids in Ref. [5]).

One would expect that such nonlinear mechanisms would make Darcy's law obsolete. In many instances, however, surprisingly simple generalizations of Darcy's law have been shown to adequately describe the flow of non-Newtonian fluids in porous media. For pure powerlaw fluids, a modified version where  $\langle U \rangle^n \propto ||\nabla \langle P \rangle_{FL}||$ , with  $\langle U \rangle$  the velocity norm [6],  $\langle P \rangle_{FL}$  the hydrodynamic pressure, and *n* a power-law coefficient, has been validated experimentally [7–10], computationally [11–13], and theoretically [14–19]. When the fluids further display yield or cutoff effects, there are also examples of simple macroscopic laws describing the flow. For instance, Chevalier and co-workers in Refs. [9,10] show that, even though channels may develop in a transition regime, a generalized Darcy law can be used for Bingham fluids with the yield stress described as a critical pressure gradient at the macroscale. A similar approach is used for the flow of polymer solutions behaving as power-law fluids with cutoff (PLCO), i.e., displaying a Newtonian regime below a critical value of the shear rate  $\dot{\gamma}_c$ . At the macroscale, these are often modeled using Newtonian and non-Newtonian regimes with a transition characterized empirically by a set of parameters, an equivalent shear rate, and an effective length scale based on the square root of the Newtonian permeability [20–25].

These studies suggest that the porous medium may not systematically amplify nonlinear effects and induce large perturbations in the flow pattern. Recent studies in Refs. [10,13], combining experimental measurements of the flow with theoretical analyses and computations on model systems, suggest that the primary mechanism controlling the flow pattern is the geometrical constriction of the flow, which dominates nonlinear effects. These studies also demonstrate that there is a significant lack of understanding in the fundamental physics of non-Newtonian flow through porous media, particularly concerning the link between the microscale physics and the apparent macroscale behavior. In this Letter, we use computational fluid dynamics to study (1) nonlinear effects in the rheology of PLCO fluids and their attenuation in the porous medium, (2) the validity of Darcy's law, and (3) the transition from a Newtonian to a non-Newtonian regime.

To this end, we explore numerically the flow of PLCO fluids in a broad variety of porous geometries including complex realistic structures obtained using x-ray microtomography. We use the following generalized steady-state Stokes equation to describe the flow:

$$\nabla \cdot \left[ \mu(\dot{\gamma}) \left( \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^{\mathsf{T}} \right) \right] - \nabla P = 0, \qquad (1)$$



FIG. 1. Geometries of the porous structures. (a)–(d), (f)–(i) Two-dimensional slices of the porous media investigated. A1 and A2 are two-dimensional arrays of cylinders and squares. P1 and P2 are three-dimensional packings of beads and cuboids. C1 and C2 are subvolumes of a Clashach sandstone sample. B1 and B2 are subvolumes of a Bentheimer sandstone sample. Media P, C, and B were obtained using x-ray microtomography. (e),(j) Illustration of the mesh used for the flow calculation in the pore throats. (k) Three-dimensional representation of the porous medium with the geometry of B1 in the lower half and the corresponding streamlines colored by shear rate in the upper half, illustrating the strong localization of viscous dissipation.

where **U** is the velocity field, which further satisfies  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ , and *P* is the pressure field. The viscosity is a power law with a simple cutoff in the limit of low shear rates:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \mu_0 & \text{if } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c \\ \mu_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} & \text{otherwise,} \end{cases}$$
(2)

where  $\mu_0$  is the viscosity in the Newtonian limit,  $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}} (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^{\mathsf{T}}) : (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^{\mathsf{T}})$ , and  $\dot{\gamma}_c$  is the cutoff value of the shear rate above which non-Newtonian effects occur. The parameter *n* characterizes the response of the fluid to the shear rate with n < 1 corresponding to shear thinning and n > 1 to shear thickening. This expression of the viscosity is known to properly describe the flow of a number of polymer solutions such as xanthan or dextran [7,8,26] and the two parameters *n* and  $\dot{\gamma}_c$  can be measured via standard rheological methods. For convenience, we further define the following averaging operators,  $\langle \bullet \rangle_{\rm FL} = (1/|\Omega_{\rm FL}|) \int_{\Omega_{\rm FL}} \bullet dV$ ,  $\langle \bullet \rangle = (1/|\Omega|) \int_{\Omega_{\rm FL}} \bullet dV$ , where  $\Omega_{\rm FL}$  is the fluid domain and  $\Omega$  the whole domain (including the solid phase). These operators are simply connected via the relation  $\langle \bullet \rangle = \phi_{\rm FL} \langle \bullet \rangle_{\rm FL}$ , with  $\phi_{\rm FL} = |\Omega_{\rm FL}|/|\Omega|$  the volume fraction of the fluid domain.

The Stokes equation is solved using the finite-volume toolbox OpenFOAM [27] via a SIMPLE algorithm [28] with second-order discretization in space. We use boundary conditions similar to permeameters, whereby a macroscale pressure gradient is obtained by imposing a uniform pressure on the inlet and outlet faces and no-slip conditions on other faces. A no-slip condition is also used at the

liquid-solid interface, therefore not accounting for slip effects observed with polymer solutions [29]. For each medium, an unstructured polyhedral mesh (hex dominant) was generated and convergence was carefully studied. To achieve grid convergence while maintaining the number of elements tractable, we performed local refinements within the pore throats; see Figs. 1(j) and 1(e). For each three-dimensional structure, we used approximately  $10^8$  mesh cells, and the entire work required about  $10^5$  cores × h on the supercomputer EOS-CALMIP.

Eight porous media (see Fig. 1) are investigated, six of which are three-dimensional  $(1 \text{ mm}^3)$ —two Bentheimer sandstones, *B*1 and *B*2; two Clashach sandstones, *C*1 and *C*2; and 3D packings of beads *P*1 and cuboids *P*2—and the other two are two-dimensional  $(1 \text{ mm}^2)$  arrays of cylinders *A*1 and squares *A*2. The three-dimensional structures were all obtained using x-ray computed microtomography, along with standard reconstruction, filtering, and segmentation techniques [30–32]. We do not detail these here, as x-ray tomography data were merely used as a way to generate complex digital structures exhibiting realistic geometrical and topological features.

We characterize each structure using the porosity  $\phi_{\text{FL}}$ , in the range 0.1–0.7, along with the length scales  $\ell_{\min}$ ,  $\ell_{\max}$ , and  $\ell_{\operatorname{corr}(\chi)}$ , which were calculated from chord lengths distributions and spatial autocorrelation of the fluid indicator function  $\chi$  (see Refs. [33,34]) on samples of identical sizes. The arrays A1 and A2 are ordered (largest correlation length  $\ell_{\operatorname{corr}(\chi)}$ ) with the lowest ratio  $\ell_{\max}/\ell_{\min}$ . The packings P1 and P2 are moderately disordered (intermediate correlation length) with slightly larger differences between



FIG. 2. PDFs of the dimensionless longitudinal  $U_z^* = U_z/\langle U \rangle$ and transverse  $U_y^* = U_y/\langle U \rangle$  components of the velocity fields for four porous media under Newtonian (n = 1.00) and non-Newtonian (n = 0.75 and more than 80% of the fluid being non-Newtonian) flow conditions. Insets correspond to a magnification of the PDFs for A2. Lines are a guide to the eyes.

the largest and smallest pores. The sandstones *B* and *C* are highly disordered (smallest correlation length) and display a broad distribution of pore sizes with the largest ratio  $\ell_{\text{max}}/\ell_{\text{min}}$ . Further details are given in the Table 1 of the Supplemental Material [35].

Our calculations in the Newtonian regime exhibit some of the statistical properties typical of porous media, as can be measured experimentally (see, e.g., Refs. [38]). The flow is not completely random, but rather is correlated with a structure that depends on the pore scale geometry (see Fig. 1 in Ref. [35]). The structure of the correlation function is similar for the packings and arrays with a decay over a length scale that is about the object's size. For the sandstones *B* and *C*, however, we find a length scale that is smaller, suggesting a larger amount of randomness in the velocity fields.

The probability density functions (PDFs) of the velocity fields, Fig. 2, are markedly different between the porous media. The PDFs of the two-dimensional arrays are distinctly the narrowest, displaying only cocurrent flow and relatively small variations in velocity in comparison with three-dimensional media. For all three-dimensional structures, the cocurrent component of the longitudinal velocity exhibits first a near exponential decay, but with a much steeper slope for the packings (see also Refs. [38-40] for media similar to P1). The sandstones are characterized by a broader range of countercurrent flow and a distribution of the largest velocities that deviates from an exponential decay, a result that may have important implications for mass dispersion models [39,40]. Consistent with Ref. [38], we also find that the distributions of transverse velocities for all media are not Gaussian, but are roughly symmetric (isotropy) with near exponential decay.

The PDFs of the normalized velocity fields (Fig. 2) and the correlation functions (Fig. 1 in Ref. [35]) are nearly invariant with respect to the flow regime, highlighting that the statistics for non-Newtonian flow are only slightly perturbed from the Newtonian case. This is in sharp



(c) Dimensionless viscosity field,  $\mu/\mu_0$ , for medium P1.

FIG. 3. PDFs of the shear rate for (a) an average velocity  $1 \ \mu \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  for all eight media and (b) medium *P*1 at different flow regimes. (c) Normalized viscosity field for *P*1 and the three average velocities in (b). Rheology:  $\dot{\gamma}_c = 1 \ \text{s}^{-1}$  and n = 0.75. Lines are a guide to the eyes.

contrast with the large above-described differences in the flow statistics between porous structures [see also PDFs for shear rates in Fig. 3(a)], suggesting that the flow pattern is controlled by the porous structure which dominates nonlinear effects. This type of negative feedback between the porous medium and the nonlinear rheology was already observed for Bingham fluids in Refs. [10,13,41].

For each medium, we study the flow as the pressure gradient, and therefore the average velocity, is increased [see PDFs of the shear rate for P1 in Fig. 3(b)]. In the limit of small pressure gradients, the maximum value of the shear rate remains below  $\dot{\gamma}_c$ . As the average velocity increases, the distributions of the shear rate progressively translate towards larger values of  $\dot{\gamma}$  until the pore throats and regions close to surfaces where the shear rate is maximum reach  $\dot{\gamma}_c$  and become non-Newtonian. As we further increase the pressure gradient, the domain that is affected progressively extends towards the centers of the pores [see Fig. 3(c) and Ref. [35]). Eventually, for large average velocities, the whole fluid domain becomes



FIG. 4. Apparent dimensionless permeability  $k^* = k/k_0$ against (a) the average velocity  $\langle U \rangle_{\rm FL}$  and (b) the dimensionless velocity  $\mathcal{U}^* = \langle U \rangle_{\rm FL} / (\dot{\gamma}_c \sqrt{k_0})$ . The inset is a magnification of the transition for C1, showing precisely how  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$  is calculated. Rheology:  $\dot{\gamma}_c = 1s^{-1}$  and n = 0.75. Lines are a guide to the eyes.

non-Newtonian. The transition for the different porous structures is similar, the primary difference being the value of  $\langle U \rangle_{\rm FL}$  at which the fluid starts to exhibit a non-Newtonian behavior, which is correlated with the geometrical properties of the medium (see Ref. [35]).

We now focus on the macroscale behavior of PLCO fluids and consider the validity of Darcy's law,  $\langle \mathbf{U} \rangle =$  $-\mu_0^{-1}k\nabla \langle P \rangle_{\rm FL}$ . We study an apparent dimensionless permeability  $k^* = k/k_0$ , where  $k_0$  is the Newtonian permeability, which is determined numerically by calculating the velocity  $\langle \mathbf{U} \rangle$  corresponding to an imposed pressure gradient  $\nabla \langle P \rangle_{\rm FI}$ . Results in Fig. 4(a) show two different regimes for all porous media. In the limit of small average velocity, the fluid is Newtonian and can be described via Darcy's law with a constant permeability. In the limit of large average velocity, the shear rate exceeds the critical value for every point in the fluid and we obtain a modified Darcy's law with  $\langle U \rangle^n \propto \|\nabla \langle P \rangle_{\rm FL}\|$ . Between these two limits, we observe a relatively short transition joining smoothly Darcy's law to the regime  $\langle U \rangle^n \propto \|\nabla \langle P \rangle_{\rm FL}\|$ . The transition can be further characterized by a critical velocity  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$  defined as in Fig. 4(a). This critical velocity is the signature of a multiscale effect where the cutoff in the rheology of the bulk fluid combines with the structure of the porous medium to yield a transition characterized by the average velocity.

Interestingly, the macroscale non-Newtonian regime is attained before every fluid point has become non-Newtonian at the microscale. We therefore hypothesize that the macroscale transition corresponds to the change in the rheology of only a subdomain of  $\Omega_{FL}$ ,  $\Omega_{PT}$ , that controls the flow. Once  $\Omega_{PT}$  is non-Newtonian, the macroscale behavior rapidly becomes fully non-Newtonian, with  $\langle U \rangle^n \propto ||\nabla \langle P \rangle_{FL}||$ , even though the microscale rheology remains a complex mixture of Newtonian and non-Newtonian fluids [as illustrated in Figs. 3(b) and 3(c) herein and in Fig. 2 in Ref. [35]]. This phenomenon can be further explored to develop an analytical expression of  $\langle U_c \rangle_{FL}$  in terms of  $k_0$ , using the idea that  $\Omega_{PT}$  also controls the global viscous dissipation (a

detailed derivation is given in Ref. [35]). A dimensional analysis for the critical velocity first yields  $\langle U_c \rangle_{FL} = \dot{\gamma}_c \ell_{eff}$ , where  $\ell_{eff}$  is an effective length scale that can be estimated as  $\ell_{eff} = \ell_{PT}/\beta$  using a characteristic pore throat length  $\ell_{PT}$ , an acceleration parameter  $\beta = (\langle U \rangle_{PT}/\langle U \rangle_{FL}) > 1$  and a pore-throat averaging operator defined as  $\langle \bullet \rangle_{PT} =$  $(1/|\Omega_{PT}|) \int_{\Omega_{PT}} \bullet dV$ . Using energetic considerations, we express the permeability in terms of the global viscous dissipation as

$$k_0 = \frac{\mu_0 \langle U \rangle^2}{\langle \mathcal{E} \rangle},\tag{3}$$

where  $\mathcal{E}$  is the local rate of dissipated energy by viscous forces per unit volume. Assuming that  $\mathcal{E}$  is strongly localized in  $\Omega_{\text{PT}}$  (see Ref. [35]), we finally obtain

$$\ell_{\rm eff} \simeq \sqrt{k_0}.$$
 (4)

Figure 4(b) confirms this theory numerically, showing that the dimensionless velocity  $\mathcal{U}^* = \langle U \rangle_{\text{FL}} / (\dot{\gamma}_c \sqrt{k_0})$  predicts the transition with relatively good accuracy, without any fitting parameter.

In this Letter, we used computational fluid dynamics to study nonlinear effects in the flow of PLCO fluids through isotropic homogeneous porous media-the impact of anisotropies and heterogeneities being an important extension of this work. Our first result is that the nonlinear effects only weakly impact the flow statistics (PDFs, correlation lengths) and that the primary mechanism controlling the flow pattern is the geometrical constriction of the flow, not the non-Newtonian rheology. Secondly, we find that a relatively small subdomain  $\Omega_{PT}$ , not the whole fluid, determines the transition to a macroscopic non-Newtonian regime where  $\langle U \rangle^n \propto \|\nabla \langle P \rangle_{\rm FL}\|$ . The third result of this Letter is a theory providing an analytical formulation for the critical velocity at which we obtain macroscale transition. This theory uses the idea that  $\Omega_{PT}$  controls both the viscous dissipation and the non-Newtonian transition to show that the effective length scale,  $\ell_{\rm eff} \simeq \sqrt{k_0}$ , accurately approximates the transition velocity. Interestingly, we remark that  $\sqrt{k_0}$  is already used to characterize other nonlinear effects in porous media, such as the transition from a linear (Darcy) to a quadratic drag (Darcy-Forchheimer) [42]. This study substantiates the role of the length scale  $\sqrt{k_0}$  in porous media sciences and suggests a certain degree of universality in the mechanisms governing nonlinear flows through porous media.

We thank Total for the support of this study. This work was granted access to the HPC resources of CALMIP supercomputing center under the allocation 2015-11.

\*yohan.davit@imft.fr

J. V. Soulis, G. D. Giannoglou, Y. S. Chatzizisis, K. V. Seralidou, G. E. Parcharidis, and G. E. Louridas, Medical Engineering and Physics 30, 9 (2008).
- [2] E. Koval, Soc. Pet. Eng. J. 3, 145 (1963).
- [3] L. W. Lake, R. Johns, W. Rossen, and G. Pope, *Funda-mentals of Enhanced Oil Recovery* (Society of Petroleum Engineers, Richardson, 1986).
- [4] K. S. Sorbie, *Polymer-Improved Oil Recovery* (Springer Science and Business Media, 2013).
- [5] T. Chevalier and L. Talon, Phys. Rev. E 91, 023011 (2015).
- [6] The notation  $\langle U \rangle$  corresponds to  $\|\langle \mathbf{U} \rangle\|$ , not to  $\langle \|\mathbf{U}\| \rangle$ .
- [7] G. Chauveteau and N. Kohler, Soc. Petrol. Eng. J. 24, 361 (1984).
- [8] R. S. Seright, T. Fan, K. Wavrik, and R. d. C. Balaban, Soc. Petrol. Eng. J. 16, 35 (2011).
- [9] T. Chevalier, C. Chevalier, X. Clain, J. Dupla, J. Canou, S. Rodts, and P. Coussot, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 195, 57 (2013).
- [10] T. Chevalier, S. Rodts, X. Chateau, C. Chevalier, and P. Coussot, Phys. Rev. E 89, 023002 (2014).
- [11] A. F. Morais, H. Seybold, H. J. Herrmann, and J. S. Andrade, Jr., Phys. Rev. Lett. **103**, 194502 (2009).
- [12] M. Vakilha and M. T. Manzari, Transport Porous Med. 74, 331 (2008).
- [13] J. Bleyer and P. Coussot, Phys. Rev. E 89, 063018 (2014).
- [14] O. Gipouloux and A.-M. Zine, Comput. Geosci. 1, 127 (1997).
- [15] S. Liu and J. H. Masliyah, Chem. Eng. Sci. 53, 1175 (1998).
- [16] D. Getachew, W. Minkowycz, and D. Poulikakosi, J. Porous Media 1, 273 (1998).
- [17] J.-L. Auriault, P. Royer, and C. Geindreau, Int. J. Eng. Sci. 40, 1151 (2002).
- [18] Z. Idris, L. Orgéas, C. Geindreau, J.-F. Bloch, and J.-L. Auriault, Model. Simul. Mater. Sci. Eng. 12, 995 (2004).
- [19] X.-H. Wang, J.-T. Jia, Z.-F. Liu, and L.-D. Jin, J. Porous Media 17, 741 (2014).
- [20] K. Sorbie and Y. Huang, J. Colloid Interface Sci. 145, 74 (1991).
- [21] A. Fletcher, S. Flew, S. Lamb, T. Lund, E. Bjornestad, A. Stavland, N. Gjovikli *et al.*, in *Proceedings of the SPE International Symposium on Oilfield Chemistry* (Society of Petroleum Engineers, 1991).
- [22] G. Chauveteau, J. Rheol. 26, 111 (1982).
- [23] J. Lecourtier and G. Chauveteau, Macromolecules 17, 1340 (1984).
- [24] P. Zitha, G. Chauveteau, and A. Zaitoun, in *Proceedings of the SPE International Symposium on Oilfield Chemistry* (Society of Petroleum Engineers, San Antonio, 1995).

- [25] M. Delshad, G. A. Pope, and K. Sepehrnoori, Center for Petroleum and Geosystems Engineering, The University of Texas at Austin, Texas 78751, 21 (2000).
- [26] V. B. Veljkovic, M. L. Lazić, and D. U. Skala, Enzyme Microb. Tech. 10, 686 (1988).
- [27] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby, Comput. Phys. **12**, 620 (1998).
- [28] S. V. Patankar, in *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences (Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980).
- [29] F. Brochard and P. De Gennes, Langmuir 8, 3033 (1992).
- [30] H. Andrä, N. Combaret, J. Dvorkin, E. Glatt, J. Han, M. Kabel, Y. Keehm, F. Krzikalla, M. Lee, C. Madonna, M. Marsh, T. Mukerji, E. H. Saenger, R. Sain, N. Saxena, S. Ricker, A. Wiegmann, and X. Zhan, Comput. Geosci. 50, 25 (2013).
- [31] M. Piller, D. Casagrande, G. Schena, and M. Santini, J. Phys Conf. Ser. 501, 012010 (2014).
- [32] O. Rozenbaum and S. R. du Roscoat, Phys. Rev. E 89, 053304 (2014).
- [33] A. Jongerius, D. Schoonderbeek, A. Jager, and S. Kowalinski, Geoderma 7, 177 (1972).
- [34] M. Ioannidis, M. Kwiecien, and I. Chatzis, J. Petrol. Sci. Eng. 16, 251 (1996).
- [35] See Supplemental Material at http://link.aps.org/ supplemental/10.1103/PhysRevLett.117.074502 for additional details about the porous structures, the representation in terms of probability density functions, the flow statistics, the transition mechanism and the corresponding theory, which includes Ref. [36,37].
- [36] I. Cousin, P. Levitz, and A. Bruand, Eur. J. Soil Sci. 47, 439 (1996).
- [37] M. Pilotti, S. Succi, and G. Menduni, Europhys. Lett. **60**, 72 (2002).
- [38] S. S. Datta, H. Chiang, T. S. Ramakrishnan, and D. A. Weitz, Phys. Rev. Lett. **111**, 064501 (2013).
- [39] Y. Kutsovsky, L. Scriven, H. Davis, and B. Hammer, Phys. Fluids 8, 863 (1996).
- [40] R. S. Maier, D. Kroll, Y. Kutsovsky, H. Davis, and R. S. Bernard, Phys. Fluids 10, 60 (1998).
- [41] B. D. Rabideau, P. Moucheront, F. Bertrand, S. Rodts, N. Roussel, C. Lanos, and P. Coussot, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165, 394 (2010).
- [42] J. Lage and B. Antohe, J. Fluids Eng. 122, 619 (2000).

#### Supplemental Material: Transition in the Flow of Power-Law Fluids through Isotropic Porous Media

F. Zami-Pierre<sup>1,2</sup>, R. de Loubens<sup>2</sup>, M. Quintard<sup>1</sup> and Y. Davit<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) - Université de Toulouse, CNRS-INPT-UPS, Toulouse France and

<sup>2</sup>Total, CSTJF, Avenue Larribau, 64018 Pau, France

This document contains supplementary materials to our paper *Transition in the Flow of Power-Law Fluids through Isotropic Porous Media.* We provide additional details about the porous structures, the representation in terms of probability density functions, the flow statistics, the transition mechanism and the corresponding theory.

#### I. POROUS MEDIA STATISTICS

The eight porous media investigated in this study exhibit very different geometrical structures, as characterized in Table I. In addition to the porosity  $\phi_{FL}$ , we analyze the geometry of each porous medium using several standard metrics. A chord distribution is calculated according to the method of Jongerius [1] with  $\ell_{\min}$  defined as the first peak in the distribution [2] and  $\ell_{max}$  the longest chord. Auto-correlation functions (see [3, 4]) are also calculated for the fluid indicator function  $\chi$ , which value is 1 in the liquid phase and 0 in the solid phase, and the velocity fields, U. The characteristic length scale  $\ell_{corr(\gamma)}$ , defined as the integral of the auto-correlation function, is specific to the spatial structure [4], while  $\ell_{corr(U)}$  characterizes the velocity fields. Table I also contains the values of the Newtonian permeability,  $k_0$ , for each medium and the critial velocity at which the macroscale transition occurs (calculated for  $\dot{\gamma}_c = 1 \, \mathrm{s}^{-1}$ ).

Medium	A1	A2	P1	<b>P</b> 2	<b>B</b> 1	<b>B</b> 2	C1	C2
$\ell_{\rm min}$	400	500	22	20	11	12	10	9
$\ell_{\rm max}/\ell_{\rm min}$	2.5	2	4.2	4.5	5.4	5.3	6.2	6.3
$\ell_{\rm corr(\chi)}$	150.4	159.4	32.6	53.8	26.5	27.2	29.8	29.3
$\ell_{\rm corr(U)}$	210	222	104	55.8	34.5	35.1	32.5	33.2
$\sqrt{k_0}$	105	115	5.76	6.63	1.39	0.91	0.53	0.70
$k_0$	11005	13121	33.2	44	1.92	0.82	0.27	0.48
$\langle U_c \rangle_{\rm FL}$	88.7	92.8	5.88	6.15	1.21	0.633	0.272	0.387
$\phi_{ ext{FL}}$	0.72	0.75	0.38	0.44	0.18	0.17	0.13	0.14
$\phi_{ ext{PT}}$	0.175	0.252	0.085	0.10	0.025	0.022	0.010	0.014
$\phi_{\rm FL}/\sqrt{\phi_{\rm PT}}$	1.72	1.49	1.20	1.39	1.13	1.20	1.30	1.18

TABLE I Characteristic properties of the eight porous media (lengths in  $\mu m$ ,  $k_0$  in  $\mu m^2$ ,  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$  in  $\mu m.s^{-1}$ ), illustrating the variety of the porous structures.  $\ell_{\min}$ ,  $\ell_{\max}$  and  $\ell_{\rm corr}$  are characteristic lengths.  $\phi_{\rm FL}$  and  $\phi_{\rm PT}$  are the volume fractions of, respectively, the fluid domain and the pore throats.  $k_0$  is the Newtonian permeability.  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$  is the critical velocity for the non-Newtonian transition.

#### **II. PROBABILITY DENSITY FUNCTIONS**

In our study, the three-dimensional velocity and shear rate fields are presented using probability density functions (PDFs). These are obtained directly from the discrete representation of the finite-volume calculations. For a field f, we construct the PDF, p(f), as follows. We first calculate the minimum and maximum values of the field f, min(f) and max(f), and discretize f in a finite number of intervals between min(f) and max(f). For each point in the PDF,  $p(f_i)$  is obtained by calculating the volume of the mesh elements for which  $f_{i-1} \leq f < f_i$ , with the first point of the PDF,  $p(f_1)$ , describing min $(f) \leq f < f_1$ . Finally, these values are normalized as  $p^*(f_i) = \frac{p(f_i)}{\sum_i p(f_i)\delta f_i}$ , with  $\delta f_i = f_i - f_{i-1}$ , so that the area under the PDF equals one,  $\sum_i p^*(f_i) \delta f_i = 1$ .

#### **III. CORRELATION FUNCTIONS**

We calculate the correlation function,  $C_{UU}$ , of the velocity deviation  $\delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle_{FL}$ , with  $\langle \bullet \rangle_{FL} = \frac{1}{|\Omega_{FL}|} \int_{\Omega_{FL}} \bullet dV$ , as (see also [5])

$$C_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\|\mathbf{h}\|) = \left\{ \frac{\sum_{j} \delta \mathbf{U}(\mathbf{r}_{j}) \cdot \delta \mathbf{U}(\mathbf{r}_{j} + \mathbf{h})}{\sum_{j} \delta \mathbf{U}(\mathbf{r}_{j}) \cdot \delta \mathbf{U}(\mathbf{r}_{j})} \right\}.$$
 (1)

The brackets  $\{\bullet\}$  represent an average over all *xyz* directions (calculated numerically using 6 points at  $+/-||\mathbf{h}||$  in each direction) and the summation over the index *j* corresponds to all cell points of an associated Cartesian grid obtained by linear interpolation. For comparison with experimental results in [5], we also calculated  $C_{UU}$  for two-dimensional planes *xz* through *P*1.

The correlation functions, which provide a metric for disorder [4], are presented in Fig. 1 and values of  $\ell_{corr(U)}$  are summarized in Table I. We observe sharp exponential decays, especially for *B* and *C*, characterized by a short length scale  $\ell_{corr(U)}$ . For *P*1, the two-dimensional correlation decays similarly to the three-dimensional one, but with much stronger fluctuations on a length scale about the diameter of the beads. The comparison between Newtonian and non-Newtonian curves further highlights the weak impact of the nonlinearity on the flow pattern.



FIG. 1 Plots of the correlation functions  $C_{UU}$  as functions of the distance  $\|\mathbf{h}\|$  for the different classes of porous media in the Newtonian and non-Newtonian regimes. Lines are a guide to the eyes.

#### IV. EVOLUTION OF THE VISCOSITY WITH THE PRESSURE GRADIENT

In this Section, we provide supplementary material to the Fig. 3 in the main article by presenting data for additional porous structures. Fig. 2 shows dimensionless representations of the viscosity fields for array A2, packing P2 and the sandstones B2 and C2. The first column corresponds to a value of the average velocity that is below the critical value for the non-Newtonian transition ( $\mathcal{U}^* < 1$ ). We see that the viscosity field is uniform, which corresponds to a Newtonian situation. The center column corresponds to the critical value of the average velocity ( $\mathcal{U}^* = \mathcal{O}(1)$ ) and shows that only a small subdomain of the fluid has transitioned to a non-Newtonian behavior with  $\mu \neq \mu_0$ . The initial transition occurs primarily in the pore throats for B and C. For P and A, we observe a larger subdomain also including the vicinity of the pore walls. The third column corresponds to a velocity that is larger than the critical transition velocity ( $\mathcal{U}^* > 1$ ). We observe an expansion of the non-Newtonian domain to the bulk of the pore that is much faster in the case A and P than B and C.

#### V. DIMENSIONAL ANALYSIS AND TRANSITION THEORY

In this Section, we detail the theoretical derivation of the critical velocity, which leads to the result

$$\langle U_{\rm c} \rangle_{\rm FL} \simeq \dot{\gamma}_c \sqrt{k_0},$$
 (2)

with  $k_0$  the Newtonian permeability and  $\dot{\gamma}_c$  the critical shear rate for non-Newtonian transition. The key to this formulation



FIG. 2 Dimensionless viscosity fields for media A2, P2, B2 and C2 at different flow regimes. Rheology:  $n = 0.75 \& \dot{\gamma}_c = 1s^{-1}$ .

is the subdomain  $\Omega_{PT}$  of the fluid that controls both the transition to the non-Newtonian regime and the viscous dissipation as illustrated in Fig. 3.

The first step of the demonstration is a dimensional analysis of the critical velocity, which leads to

$$\langle U_{\rm c} \rangle_{\rm FL} \simeq \dot{\gamma}_c \ell_{\rm eff},$$
 (3)

where  $\ell_{\rm eff}$  is an effective length scale. In this model, the rheology is characterized only by  $\dot{\gamma}_c$  while the geometrical properties of the porous medium are embedded in  $\ell_{\rm eff}$ . This formulation is compatible with our computations showing a linear relationship between  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$  and  $\dot{\gamma}_c$  and quasi-independence from *n* (see Fig. 4). Consistent with previous studies ([6–8]) that neglect the influence of the parameter *n* on the transition, Fig. 4 shows that the critical velocity,  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$ , primarily depends on the critical shear rate  $\dot{\gamma}_c$ . The parameter *n*, in the range 0.6 to 1.2, which is reasonable for most polymer solu-



FIG. 3 Comparison of the dimensionless viscosity fields for P1 at  $\mathcal{U}^* = 1$  (left-hand side) and the local rate of viscous dissipative energy per unit volume normalized by its maximum (right-hand side).



FIG. 4 Critical velocity  $\langle U_c \rangle_{FL}$  ( $\mu m.s^{-1}$ ) as a function of  $\dot{\gamma}_c$  ( $s^{-1}$ ) for medium C1 and different values of *n*. Lines are a guide to the eyes.

tions, induces deviations of  $\langle U_c \rangle_{FL}$  which are small compared to the impact of  $\dot{\gamma}_c$ . Given that our dimensional analysis is based on order of magnitudes estimations, we can assume that  $\langle U_c \rangle_{FL}$  is independent from *n* at first order.

To further estimate  $\ell_{eff}$ , we remark that the transition occurs when the flow in the pore throats becomes non-Newtonian (see Figs. 2 and 3), that is when

$$\langle U \rangle_{\rm PT} = \dot{\gamma}_c \ell_{\rm PT}. \tag{4}$$

Using an acceleration parameter  $\beta = \frac{\langle U \rangle_{\text{PT}}}{\langle U \rangle_{\text{FL}}} > 1$ , this can be written as

$$\langle U_c \rangle_{\rm FL} = \dot{\gamma}_c \frac{\ell_{\rm PT}}{\beta},$$
 (5)

so that

$$\ell_{\rm eff} = \frac{\ell_{\rm PT}}{\beta}.$$
 (6)

We then express the permeability for a Newtonian fluid using energetic considerations (see e.g. [9]) as

$$k_0 = \frac{\mu_0 \langle U \rangle^2}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{\langle U \rangle^2}{\langle \dot{\gamma}^2 \rangle},\tag{7}$$

where  $\mathcal{E}$  is the local rate of dissipated energy by viscous forces per unit volume. As most of the dissipation occurs in  $\Omega_{PT}$  (see Fig. 3), we can further approximate  $\langle \dot{\gamma}^2 \rangle \simeq \phi_{PT} \langle \dot{\gamma}^2 \rangle_{PT}$  with  $\phi_{PT}$  the volume fraction of  $\Omega_{PT}$ . A dimensional analysis using a characteristic length  $\ell_{PT}$  leads to

$$\langle \dot{\gamma}^2 \rangle \simeq \phi_{\rm PT} \frac{\langle U \rangle_{\rm PT}^2}{\ell_{\rm PT}^2},$$
 (8)

and with the acceleration parameter  $\beta = \frac{\langle U \rangle_{\text{PT}}}{\langle U \rangle_{\text{FI}}}$ , we have

$$\sqrt{k_0} \simeq \frac{\phi_{\rm FL}}{\sqrt{\phi_{\rm PT}}} \frac{\ell_{\rm PT}}{\beta}.$$
(9)

Finally, we define precisely the domain  $\Omega_{\rm PT}$  as the domain that is non-Newtonian when the average velocity reaches its critical value  $\langle U_c \rangle_{\rm FL}$ , so that we can estimate  $\sqrt{\phi_{\rm PT}}$  numerically. Results in Table I show that  $\frac{\phi_{\rm FL}}{\sqrt{\phi_{\rm PT}}} \simeq 1$  for all the different media, so that  $\sqrt{k_0} \simeq \frac{\ell_{\rm PT}}{\beta} < \ell_{\rm PT}$ , and finally

$$\ell_{\rm eff} \simeq \sqrt{k_0}.$$
 (10)

\* yohan.davit@imft.fr

- A. Jongerius, D. Schoonderbeek, A. Jager, and S. Kowalinski, Geoderma 7, 177 (1972).
- [2] I. Cousin, P. Levitz, and A. Bruand, Eur. J. Soil Sci. 47, 439 (1996).
- [3] M. Ioannidis, M. Kwiecien, and I. Chatzis, Soc. Petrol. Eng. J. 16, 251 (1996).
- [4] O. Rozenbaum and S. R. du Roscoat, Phys. Rev. E 89, 053304 (2014).
- [5] S. S. Datta, H. Chiang, T. Ramakrishnan, and D. A. Weitz, Phys. Rev. Letters 111, 064501 (2013).
- [6] G. Chauveteau, J. Rheol. 26, 111 (1982).
- [7] R. S. Seright, T. Fan, K. Wavrik, R. d. C. Balaban, *et al.*, Soc. Petrol. Eng. J. 16, 35 (2011).
- [8] P. Zitha, G. Chauveteau, and A. Zaitoun, in SPE International Symposium on Oilfield Chemistry (1995).
- [9] M. Pilotti, S. Succi, and G. Menduni, Europhys. Letters 60, 72 (2002).

#### 3.3 Étude théorique et expérimentale de la transition

Le but de l'article qui suit [159] est d'approfondir l'analyse faite dans [106]. Cet article a été recopié ici et très légèrement modifié pour conserver des notations consistantes par rapport au reste de la thèse. Cet article se décompose en répondant à deux problématiques.

Premièrement, la vitesse critique de transition du régime d'écoulement macroscopique peut-elle être correctement modélisée par  $\dot{\gamma}_c \sqrt{k_0}$ ? La perméabilité Newtonienne est notée  $k_0$  et la perméabilité pleinement non-Newtonienne, c'est-à-dire pour  $\mathcal{U}^* \gg 1$ , est notée  $k_{\infty}$  et est fonction de  $\langle v \rangle$ . On testera si ce modèle de vitesse de transition critique est robuste dans des configurations différentes de celles de [106]. Pour cela, des solutions analytiques sur des milieux poreux théoriques (ensemble de tubes en série ou en parallèle) sont calculées. La robustesse du modèle est testée en fonction de la distribution du rayon des tubes. On montre que pour des valeurs de variances de la distribution acceptables,  $\dot{\gamma}_c \sqrt{k_0}$  prédit correctement  $\langle v_c \rangle^{\beta}$ .

On utilisera aussi des expériences d'écoulements de solutions de polymères à travers des empilements de billes ou des grès typiques (Berea ou Clashach) qui sont répertoriées dans la littérature. Ces expériences ont été utilisées pour tester le modèle proposé. Une vitesse de transition associée à chaque expérience a été calculée et comparée à sa prédiction selon l'Eq. 3.5. On observe que le modèle pour  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  prédit assez bien, en terme d'ordre de grandeur, la vitesse critique de transition.

En comparant avec le modèle de Chauveteau (Eq. 1.13) on montre que le paramètre semiempirique  $\alpha$  introduit une dépendance artificielle avec la porosité. Le nouveau modèle est donc plus robuste et plus simple physiquement.

Deuxièmement, peut-on confirmer que la distribution spatiale du champ de vitesse normalisée est peu sensible à la rhéologie non-Newtonienne ? Un résultat majeur de [106] est en effet que la nonlinéarité induite par la rhéologie impacte faiblement la statistique du champ de vitesse normalisée. Le contrôle de la structure poreuse sur la distribution statistique du champ de vitesse normalisée serait plus fort que l'impact de la rhéologie. Dans la publication qui suit, cette observation a été confirmée en étudiant des fonctions d'auto-corrélation de l'énergie de dissipation visqueuse sur les milieux utilisés dans l'étude numérique.

# EAGE



#### Introduction

The flow of non-Newtonian fluids through porous media is ubiquitous in many applications, such as blood flow [1], polymer flows in composites and paper manufacturing [2] or enhanced oil recovery [4, 109, 80]. Understanding the underlying physics and proposing models for such complex flows is both intriguing and fundamental. Polymer solutions – typically Xanthan or Dextran in water – are classical examples of non-Newtonian fluids. Flow of such polymer solutions through porous media has been the subject of intense experimental and modeling works. Difficulties for all of these studies lie in the multiscale nature of porous media and highly nonlinear nature of the fluids rheology.

For Newtonian fluids, Darcy's law is a remarkable example of a simple and robust homogenized expression where the system is described using the filtration velocity  $\langle v \rangle$  and the macro-scale pressure gradient  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$ ,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}}{\mu_0} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right). \tag{3.6}$$

In Eq. 3.6, K is the permeability tensor,  $\mu_0$  is the Newtonian viscosity of the fluid and  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  the pressure gradient and  $\rho \mathbf{g}$  the gravity term. Due to the complex pore structure, the pore-scale flow field exhibits large perturbations from spatially average fields. These perturbations are further coupled with the strong nonlinear effects induced by the presence of the polymers, e.g., shear thickening and thinning, yield stress and cut-off effects, time-dependent mechanisms, mechanical and chemical degradation of polymer chains, confinement and sorption effects. The variety of phenomena occurring at the pore-scale, and even at smaller scales, is actually very large. Under these circumstances, devising accurate models that apply to the Darcy or reservoir scales is an important challenge.

Although the physics of non-Newtonian fluids represents a wide domain, many polymer mixtures exhibit similar rheological features. Under low shear rate, the fluid can often be considered Newtonian – i.e., with a uniformly constant viscosity  $\mu_0$  – while under high shear rate, a power-law behavior is observed,  $\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1}$  with  $\dot{\gamma}$  the local shear rate and n an intrinsic exponent of the fluid. The flow of such fluids through a porous medium yields two different macro-scale behaviors (Newtonian and non-Newtonian). During the past decades, thorough studies have been performed to understand and predict the transition between the two resulting macro-scale laws. The complexity of this problem lies in both the nonlinearity induced by the fluid rheology and the complex pore structure of the medium itself. Recently, a simple prediction of the critical condition at which the macro-scale behavior transitions from Newtonian to non-Newtonian has been proposed by Zami-Pierre et al [106]. This model predicts a critical average velocity characterizing the regime at which the apparent homogenized behavior starts to become nonlinear.

The goal of this paper is to provide more insight into the analysis previously proposed in [106], using simple analytical solutions over bundles of tubes and experimental datasets provided by the literature. This paper is organized as follows. After a review of previous work, we present the rheological model used. Then, we compare the critical velocity model to analytical solutions obtained for tube bundles. Later, we compare the model to experimental datasets. Finally, we investigate the relative invariance of the flow patterns when increasing velocity, for the porous media used in the previous study by Zami-Pierre et al [106].



FIGURE 2: Evolution of the apparent permeability k versus the average velocity. This behavior is valid for any porous medium while a relatively simple non-Newtonian fluid – here Newtonian at low shear rates and then shear-thinning – is flowing through it. We observe two distinct macro-scale regimes. The Newtonian permeability corresponds to  $k = k_0$  and the non-Newtonian asymptote to  $k = k_{\infty} (\langle v \rangle)$ .

#### Previous work

As described in the introduction, the flow of non-Newtonian fluids through porous media has been the subject of intensive work. In this paper, we focus on relatively simple non-Newtonian fluids. We consider a constitutive law whereby the viscosity is constant up to a critical shear rate  $\dot{\gamma}_c$ , and then follows a classical power law. This behavior has been observed for many polymer mixtures using standard measurements techniques. At the macro-scale, Newtonian – constant permeability,  $k = k_0$  – and non-Newtonian – variable permeability,  $k = k_{\infty} (\langle v \rangle)$  – regimes are observed. As demonstrated theoretically [163, 164, 168], experimentally [161, 66] and computationally [145, 160], the non-Newtonian permeability  $k_{\infty}$  for power-law fluids evolves as proportinal to  $\|\langle v \rangle^{\beta} \|^{1-n}$ ,  $\langle v \rangle^{\beta}$ being the intrinsic average velocity in the porous medium.

A common method used in coreflood experiments to evaluate the constraints experienced by the fluid inside the porous medium consists in calculating an equivalent shear rate as [169, 26, 103],

$$\dot{\gamma}_{\rm eq} = \frac{4\alpha \langle v \rangle^{\beta}}{R_{\rm eq}} \tag{3.7}$$

This formulation is directly deduced from a single tube analogy, where the length  $R_{\rm eq}$  is proportional to the square root of the Newtonian permeability  $k_0$ . At the transition, we should have  $\dot{\gamma}_{\rm eq} = \dot{\gamma}_{\rm c}$ for a real porous medium. However, a semi-empirical parameter  $\alpha$  is necessary to calibrate the actual transition. It is not surprising that a single tube analogy is not sufficient to understand the complexity due to the porous structure and the fluid rheology. Moreover, many other physical phenomena may be involved in the fitting parameter  $\alpha$  such as slip, sorption, etc.

More recently, a new approach to quantify the transition has been proposed in [106] based on direct numerical simulations of the flow field over a wide panel of different porous media, e.g., model porous media such as simple arrays, beads packing or tomographic images of sandstone samples. An important finding is that the macroscopic transition to a non-Newtonian regime is controlled by the local transition in a limited number of pore-throats. From a dimensional analysis and the study of viscous dissipation, we found a model that characterizes the transition using only an effective length scale. This yields a new formulation for the intrinsic average velocity at which the macro-scale behavior transitions, which reads

$$\langle v_{\rm c} \rangle^{\beta} \simeq \dot{\gamma}_{\rm c} \sqrt{k_0},$$
(3.8)

with  $k_0$  the Newtonian permeability. This model is found to predict the transition with relatively good accuracy. An important feature here is the absence of any fitting parameter and the prediction of the transition using a simple effective length that is based on the linear situation. The goal of the present paper is to propose a test of robustness for the model presented in Eq. 3.8. The approach consists in comparing this model to tube bundles to see if the underlying theory remains valid.

#### Rheological model

The fluid's rheology is chosen as time independent and viscosity is a simple function of the local shear rate. The chosen rheological model is a power law with cut-off (PLCO), like in [106]. This model uses two parameters,  $(n \text{ and } \dot{\gamma}_c)$  as described in Eq. 3.9 below,

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{if } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c, \\ \mu_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$
(3.9)

The parameter n indicates the rheological response of the fluid with the shear rate. A Newtonian fluid corresponds to n = 1 whereas shear-thinning corresponds to n < 1 and shear-thickening to n > 1. The higher |n - 1|, the stronger is the nonlinearity induced by the fluid. This model is known to accurately describe many polymer solutions. The parameters n and  $\dot{\gamma}_c$  can be obtained by standard rheological measurements. Due to the relative simplicity of this model, analytical solutions can be obtained for simple geometries, as shown in the following section.

#### Model comparison with tubes bundles

Analytical tubes bundles have been intensively studied in porous media science [170]. More specifically, for purely non-Newtonian fluids, the analogy with tubes bundles has already been used to explain the macro-scale behavior observed experimentally [101, 171]. On the other hand, the transition phenomenon between Newtonian and non-Newtonian macro-scale regimes has surprisingly not been studied using bundles of tubes and analytical solutions.

Figure 2 shows the apparent permeability of a PLCO fluid flowing through a porous medium. We observe two macro-scale regimes, with a Newtonian and a non-Newtonian asymptote. The critical velocity  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  is defined as in [106] as the intersection of the fully non-Newtonian asymptote with the Newtonian permeability line, see Fig. 2. Here we investigate the behavior of  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  for porous media consisting of a single tube, bundles of tubes in serial and in parallel. For all these media, we have calculated the Newtonian ( $\mu = \mu_0$ ) permeability  $k_0$  and the fully non-Newtonian ( $\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1}$ ) permeability  $k_{\infty}$ . We then calculate the critical velocity  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  defined as the average velocity  $\langle v \rangle^{\beta}$  at which  $k_{\infty} \left( \langle v_c \rangle^{\beta} \right) = k_0$ . Finally, we express this critical velocity with an effective length,  $\ell_{\text{eff}}$ , and the rheological parameter  $\dot{\gamma}_c$  as  $\langle v_c \rangle^{\beta} = \ell_{\text{eff}}\dot{\gamma}_c$ . The bundles of tubes are composed of N tubes of

radii  $R_i$   $(1 \le i \le N)$ . For the specific case of the serial bundle, each tube *i* has an associated length  $h_i$ . For the case of the parallel bundle, all tubes have the same length  $h_0$ . All our calculations are summarized in Table 3.1.

In Table 3.1, the factor C(n) might be different from values found in the literature, like for instance in [10]. This may be explained by a different definition of the transition point, emerging from a single tube. Here we used the asymptote intersection method defined above (see Fig. 2), while others would use the velocity at which the maximum shear rate in the medium is equal to the critical shear rate  $\dot{\gamma}_c$ . This latter definition emphasizes the departure from the pure Newtonian flow and the beginning of the complex transition regime. Our proposed definition offers a better mathematical connection between the two limited regimes.

	Single tube	Tubes in serial	Tubes in parallel
$k_0$	$\frac{R^2}{8}$	$\frac{\sum_i h_i}{R_{\rm eq}^2 \sum_i \frac{8h_i}{R_i^4}}$	$\frac{\frac{1}{8}\sum_i R_i^4}{\sum_i R_i^2}$
$k_{\infty}\left(\langle v\rangle\right)$	$A R^{n+1} \left( \langle v \rangle^{\beta} \right)^{1-n}$	$A \frac{\sum_{i} h_i}{R_{\text{eq}}^{2n} \sum_{i} \frac{h_i}{R_i^{3n+1}}} \left( \langle v \rangle^{\beta} \right)^{1-n}$	$A\left(\frac{\sum_{i}R_{i}^{3+1/n}}{\sum_{i}R_{i}^{2}}\right)^{n}\left(\langle v\rangle^{\beta}\right)^{1-n}$
$\ell_{\rm eff}$	C R	$C \left( \frac{R_{\rm eq}^{2n} \sum_{i} \frac{h_i}{R_i^{3n+1}}}{R_{\rm eq}^2 \sum_{i} \frac{8h_i}{R_i^4}} \right)^{\frac{1}{1-n}}$	$C \left( \frac{\sum_i R_i^4}{\sum_i R_i^2} \left( \frac{\sum_i R_i^2}{\sum_i R_i^{3+1/n}} \right)^n \right)^{\frac{1}{1-n}}$

TABLE 3.1: Calculated Newtonian and non-Newtonian permeability and related effective length used in  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  to characterize the macro-scale transition. In this table, the following definitions are used :  $A(n, \dot{\gamma}_c) = \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \frac{\dot{\gamma}_c^{n-1}}{2}, C(n) = \left(\frac{1}{4} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{1-n}}$  and  $R_{eq}^2 = \frac{\sum_i h_i R_i^2}{\sum_i h_i}$ .

We remark that, for the bundles of tubes in parallel or in serial, we naturally recover the single tube case by reducing the number of tubes to one. We also remark that the parameter C(n) comes as a factor for the effective length in all cases. For strong variations of n,  $0.5 \le n \le 1.5$ , this factor verifies the double inequality  $0.88 \le 2\sqrt{2}C(n) \le 0.91$ . Hence, we approximate it by  $1/(2\sqrt{2})$  (approximation valid to about 4%). As a consequence, we obtain in the single tube case  $\ell_{\text{eff}} = RC(n) \simeq \frac{R}{2\sqrt{2}} = \sqrt{k_0}$ , which is coherent with the findings in Zami-Pierre *et al.* (2016). For the other porous media, the results are less clear and actual computations of over discrete distributions are needed.

We adopt a discrete log-normal distribution for N tubes. For the sake of simplicity and to reduce the number of variables, all tubes have the same length  $h_0$  in the case of a serial bundle. We use a large number of tubes (10<sup>7</sup>), in order to have representative statistics. The distribution is defined by a mean value of radii  $R_{\text{mean}}$  and a variance  $\mathcal{V}$ . In addition, we calculate for each parallel or serial bundle the effective length associated to the macro-scale transition  $\ell_{\text{eff}}$  and the Newtonian permeability  $k_0$  of the generated porous medium. We plot, Fig. 3, the dimensionless effective length  $\ell_{\text{eff}}^* = \ell_{\text{eff}}/\sqrt{k_0}$  against the variance of these porous media. We added the value  $\ell_{\text{eff}}^*$  for the porous media investigated in the previous study [106].

A few important clarifications must be made at this point :

— We ran the calculations for a wide range of values of (0.5 to 1.5) and the trend seems relatively independent of this parameter. Remarkably, despite the high complexity of the *n* dependency in the effective length expression, see Table 3.1, the choice of *n* does not significantly influence the critical velocity at which the transition occurs. This supports conclusions in [106], where



FIGURE 3: Evolution of the dimensionless effective length with the variance of the bundle in parallel or serial,  $(R_{\text{mean}} = 10 \,\mu\text{m})$ . The calculations are run for n = 0.70. The values for some of the porous media from [106] are also reported.

the effective length was also found to be independent from this parameter.

- For better comparison with the results from [106], we add in Fig. 3 the values for the dimensionless effective length obtained in that paper for a Bentheimer sandstone, B1, a Clashach sandstone, C1, a packing of beads, P1, and a 2D cylinder array, A1. For all of them,  $\sqrt{k_0}$  is a good order of magnitude estimation of the effective length ( $\ell_{\text{eff}}^*$  is of order 1). Nonetheless we note that  $\ell_{\text{eff}}^*$  is equal to 0.55 for medium C. In the framework of an order of magnitude approximation, the length  $\sqrt{k_0}$  is however still a correct estimation.
- The ratio of maximal to minimal radii of the distribution is equal to 21 for  $\mathcal{V} = 0.1$  and 2597 for  $\mathcal{V} = 1$ . In the framework of this paper, we choose to not investigate tubes bundles that have a variance above 0.1. Although particular porous media present a very wide maximal to minimal pore size, e.g., carbonate media, we consider these latter as very specific. The pore space would be very complicated, and the model proposed by Zami-Pierre *et al.* [106] to predict the transition may not be applied in this case.

In summary, we observe that  $\ell_{\text{eff}}^*$  is close to unity for all bundles (serial or parallel) up to a reasonable variance value (say  $\mathcal{V} = 0.1$ , which corresponds to a ratio of maximal to minimal radii of the distribution is equal to 21). By "close", we mean here that an order of magnitude approximation is correct. As explained in [106], the goal of the model is not to accurately predict the transition – which is a smooth phenomenon, definition-sensitive, pore structure dependent – but rather to estimate it. We may conclude that such artificial porous media give a transition between Newtonian and non-Newtonian regimes which can be reasonably estimated by Eq. 3.8.

Results show a different trend between the serial and parallel bundles. We observe in Fig. 3 that, as the serial bundle curve collapses to zero, the parallel one increases above a certain variance value. Modelling the effective length by  $\sqrt{k_0}$  seems then to work better at high variances for the parallel bundle than for the serial one. To understand the curve behavior at high variance values, we

calculate an approximation of the Newtonian permeability using the fact that the ratio of maximal to minimal radii is very large, so that we can simplify equations from Table 3.1.

$$\left(k_0^{\mathcal{V}\gg1}\right)_{\text{serial}} = \frac{N^2 R_{\min}^4}{8 R_{\max}^2} \tag{3.10}$$

$$\left(k_0^{\mathcal{V}\gg1}\right)_{\text{parallel}} = \frac{R_{\max}^2}{8} \tag{3.11}$$

Concerning the serial bundle, we clearly see that, for a large variance, the permeability becomes very sensitive to the smallest tube radius, Eq. 3.10. This was expected since all the fluid must go through this small section. On the other hand, the largest tube radius becomes the most important for the parallel bundle, as expected, Eq. 3.11. We can now adopt the same asymptotic approach for the effective length.

$$\left(\ell_{\text{eff}}^{\mathcal{V}\gg1}\right)_{\text{serial}} = C\left(n\right) \frac{N R_{\min}^3}{R_{\max}^2} \simeq \sqrt{k_0^{\mathcal{V}\gg1}} \frac{R_{\min}}{R_{\max}}$$
(3.12)

$$\left(\ell_{\text{eff}}^{\mathcal{V}\gg1}\right)_{\text{parallel}} = C\left(n\right) \ R_{\text{max}} \simeq \sqrt{k_0^{\mathcal{V}\gg1}} \tag{3.13}$$

Thanks to the formulation in Eq. 3.13, we can understand why the parallel bundle curve increases at high variance. Indeed, by increasing the variance the parallel bundle will contain a very large and dominant tube, and the apparent behavior will then be close to a single tube case with this maximal radius. On the other hand, the expression  $(\ell_{\text{eff}}^{\nu \gg 1})_{\text{serial}}$  tends to zero with increasing variance, i.e., increasing maximal radius. The use of  $\sqrt{k_0}$  as effective length in such cases becomes completely irrelevant.

#### Model comparison with experiments

In addition to conceptual tubes bundles, we can also test the robustness of the model with regard to experimental datasets provided by the literature. As described earlier, a common methodology used in coreflood experiments consists in calculating an equivalent shear rate,  $\dot{\gamma}_{eq}$  as in Eq. 8. The fitting parameter  $\alpha$  is tuned such as at the transition,  $\dot{\gamma}_{eq} = \dot{\gamma}_{c}$ .

$$\dot{\gamma}_{\rm eq} = \alpha \frac{4 \left\langle v \right\rangle^{\beta}}{\sqrt{8k_0/\phi}} \Rightarrow \left\langle v_{\rm c} \right\rangle^{\beta} = \frac{1}{\alpha \sqrt{2\phi}} \dot{\gamma}_{\rm c} \sqrt{k_0}. \tag{3.14}$$

Instead of dealing with such an equivalent quantity, the model presented by Zami-Pierre *et al.* [106] directly predicts the critical intrinsic average velocity, Eq. 3.14. A comparison can be done between these two approaches, through Eq. 3.14. The equivalent shear rate approach is actually similar to the proposed model. A prefactor – equal to  $1/(\alpha\sqrt{2\phi})$  – is simply added to the original formulation.

We looked for coreflood experiments that used a non-Newtonian fluid (Xanthan) [169, 64, 103] and where the parameters used in the apparent shear rate formulation were detailed. We reported the values of the associated prefactor for several references and porous media in Table 3.2.

From Table 2, we observe that, for different porous media, the prefactor value is compatible with the estimate for the critical transition velocity. In other words, and this has an important practical significance, the "traditional" representation of the transition seems to introduce an artificial dependence with the porosity which is not supported by the physics of the flow for all type of media. As a consequence, this latest criterion needs to introduce a correcting factor which may

Reference	Porous medium	$\alpha$	$\phi$	$1/\left(\alpha\sqrt{2\phi}\right)$
Lecourtier <i>et al.</i> [169]	Beads packing	1.7	0.48	0.60
Chauveteau [64]	Beads packing	1.4	0.41	0.79
Chauveteau [64]	Sandstone	4.5	0.09	0.53
Chauveteau [64]	Carborunbum	1.1	0.46	0.95
Fletcher et al. [103]	Clashach	4.48	0.14	0.41
Fletcher et al. [103]	Berea	6	0.20	0.26

TABLE 3.2: Calculated prefactor  $1/(\alpha\sqrt{2\phi})$  for several coreflood experiments for polymer solutions through different type of porous media.

vary strongly with the nature of the porous medium. In the new approach, the proposed criterion is more robust and likely to suppress an unnecessary parameter.

We also observe that the prefactor value is always smaller than 1. We recall that, the model from Zami-Pierre *et al.* [106] is based on a simple rheology only. In an actual coreflood, many physical phenomena may occur (e.g., rearrangement of polymer chains, wall interaction, degradation...) which are not taken into account in the proposed model. It seems like, from a macro-scale point of view, the sum of these phenomena trigger the transition sooner.

#### Flow patterns

Among the results obtained in [106], one of them is that the nonlinearity induced by the rheology has a weak impact on the evolution of the flow field properties for PLCO fluids. In particular, the probability density function of the velocity field normalized by the average velocity remains relatively unchanged by the non-Newtonian behavior. This is remarkable since we could expect the nonlinearity to drastically change the flow field. For instance, dealing with a shear-thinning fluid, we might think that when the fluid in a pore-throat becomes non-Newtonian, the viscosity will start to drop, reducing the energy loss through this pore-throat. As a result the velocity would increase in this pore-throat and the flow field would be drastically modified. Such feed-back being not observed, we explore this interesting and somehow intriguing result by studying the local rate of dissipative energy lost by viscous friction per unit volume,  $\mathcal{E} = \mu \dot{\gamma}^2$ .

For the four porous media in [106] presented earlier, we first define a dimensionless dissipative energy by  $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\max}$ . This definition allows us to work with a field variable between 0 and 1. We note  $\mathcal{E}_0^*$  the dissipative energy field of a Newtonian fluid. As long as the flow velocity is too low to exhibit non-Newtonian phenomena ( $||\langle \mathbf{v} \rangle || \ll ||\langle \mathbf{v}_c \rangle ||$ ), the field  $\mathcal{E}^*$  does not change and is equal to  $\mathcal{E}_0^*$ . When the flow velocity starts to be high enough ( $||\langle \mathbf{v} \rangle || = \mathcal{O}(||\langle \mathbf{v}_c \rangle ||)$ ), the field  $\mathcal{E}^*$  should slightly deviate from  $\mathcal{E}_0^*$ . To quantity this deviation, we define an auto-correlation function  $F_{\mathcal{E}^*\mathcal{E}_0^*}$ for the dissipative energy as,

$$F_{\mathcal{E}^*\mathcal{E}^*_0}(\mathcal{U}^*) = \frac{\langle \mathcal{E}^*\mathcal{E}^*_0 \rangle}{\langle \mathcal{E}^*_0 \mathcal{E}^*_0 \rangle}$$
(3.15)

with  $\mathcal{U}^* = \| \langle \mathbf{v} \rangle \| / \| \langle \mathbf{v}_c \rangle \|$ . With this definition, when the flow regime is fully Newtonian ( $\mathcal{U}^* \ll 1$ ), the auto-correlation function is equal to 1, i.e.,  $\mathcal{E}^*$  and  $\mathcal{E}^*_0$  are equal. As the velocity increases, the flow field starts to exhibit deviations from the Newtonian pattern. To prove that the flow patterns seem to remain statistically unchanged when the fluid undergoes nonlinear behavior induced by non-Newtonian effects, we could have studied other variables than the dissipative energy, e.g.,



FIGURE 4: Evolution of F versus the dimensionless average velocity  $\mathcal{U}^*$ . Porous media investigated : A1, B1, C1 and P1 from [106], as well as a converging tube ( $R^* = 0.6$ ) and a simple tube ( $R^* = 1.0$ ). Rheology : n = 0.75 &  $\dot{\gamma}_c = 1 \text{s}^{-1}$ .

shear rate, velocity magnitude or kinetic energy. However, the dissipative energy is very interesting since it is involved in the permeability and points at the region where the fluid firstly displays non-Newtonian effects [106]. Figure 4 shows the function F versus the dimensionless velocity  $\mathcal{U}^*$  for the porous media from [106] as well as a converging tube ( $R^* = R_{\text{outlet}}/R_{\text{inlet}} = 0.6$ ) and a simple tube ( $R^* = 1.0$ ).

Fig. 4 shows the existence of a plateau obtained at high flow velocity for all investigated porous media. We denote the plateau value as  $F_{\mathcal{U}^*\gg 1}$ . We could have expected that the function F continues to increase with  $\mathcal{U}^*$ , the flow field being less and less correlated to the Newtonian flow field. However, the plateau clearly indicates that, despite the flow complexity induced by the fluid nonlinearity, the dissipative energy fields remain correlated to the Newtonian field. We also notice that the plateau value is different for all media. Since the rheology is fixed for the cases in Fig. 4, this means that  $F_{\mathcal{U}^*\gg 1}$  is an intrinsic trace of the topology/rheology interaction, or, in other words, an intrinsic property of the considered medium.

Further insight can be gained by looking at simple analytical solutions for tubes. We can calculate  $F_{\mathcal{U}^* \gg 1}$  for a tube or a converging tube, see Fig. 3. In the case of a tube,  $F_{\mathcal{U}^* \gg 1}$  simply depends on n and is equal to 6n/(5n+1). This case is very distinct from the others since the effect of the topology is non-existent and the deviation of  $F_{\mathcal{U}^* \gg 1}$  from 1 is purely due to the rheology. Concerning the converging geometry ( $R^* = 0.6$ ), the value of  $F_{\mathcal{U}^* \gg 1}$  is different. Turning to real porous media, where pore throats may be assimilated to converging-diverging tubes, this suggests that the pore size distribution (PSD) may affect directly the plateau value. When the PSD is wide, the inherent porous medium topology would be more likely to play a role in  $F_{\mathcal{U}^* \gg 1}$ .

This idea might help in the analysis of results from Fig. 4. The PSD is wider for sandstone media B1 & C1, than for the beads packing P1, which itself has a wider PSD than medium A1 [106]. The classification based on  $F_{\mathcal{U}^*\gg 1}$  works for samples B, P & A, but not for medium C, which has

a plateau close to unity. We hypothesise that medium C is so particular that it could actually be very well seen as a series of single tubes. Indeed, although its PSD is wide, only a few pore-throats are actually be solicited by the flow. A crucial distinction emerges here between the PSD and the actual solicited pores. Further work is needed to confirm this theory.

#### Conclusions

In this paper we have tested the robustness of the macro-scale transition model of a non-Newtonian fluid flowing through porous media proposed by Zami-Pierre *et al.* [106]. The tests were performed by comparing the model with results obtained for conceptual bundles of tubes and actual coreflood experiments. We found that the model is robust and that the square root of the Newtonian permeability provides a good estimation of the characteristic length-scale defining the non-Newtonian transition. A comparison with traditional transition criteria suggests that the introduction of the porosity in the criteria might be not pertinent. We also studied the relative stability of the flow patterns when the fluid changes to non-Newtonian behavior. In agreement with [106], we found that the normalized flow statistics remain unchanged by studying correlation functions for the viscous dissipative energy field. Further work is needed to quantify the influence of the topology and the rheology on the flow statistics.

#### **3.4** Discussions

Dans cette section, on approfondit les deux résultats principaux de ce chapitre,

- 1) la longueur caractéristique  $\sqrt{k_0}$  porte un sens physique particulier dans notre contexte d'écoulement,
- 2) la PDF de la distribution spatiale du champ de vitesse normalisée est relativement peu affectée par la rhéologie non-Newtonienne.

Le premier résultat est discuté dans la Section 3.4.1. On discute ensuite les limites du modèle proposé dans la Section 3.4.2. Enfin, on approfondit l'étude du second résultat dans la Section 3.4.3

#### 3.4.1 La longueur caractéristique $\sqrt{k_0}$

Pour caractériser la transition du régime Newtonien à non-Newtonien, on cherche intuitivement à inclure la rhéologie et la géométrie de la structure poreuse dans la formulation de  $\langle v_c \rangle^{\beta}$ . On montre facilement que  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  est proportionnel à  $\dot{\gamma}_c$  et indépendant de *n* au premier ordre (voir le "supplemental material" de [106]). On cherche donc une formulation de la forme

$$\langle v_{\rm c} \rangle^{\beta} = \dot{\gamma}_{\rm c} \ell_{\rm eff},$$
 (3.16)

où, *au premier ordre*, toute l'influence de la structure poreuse est comprise dans  $\ell_{\text{eff}}$ . En cherchant une expression de  $\ell_{\text{eff}}$  qui prédit au mieux la transition macroscopique, nous avons testé différentes longueurs caractéristiques classiquement utilisées en milieux poreux, comme par exemple,

- le diamètre ou rayon équivalent du milieu poreux [172],
- des ratios volumes sur surfaces spécifiques comme le diamètre de Sauter ou le diamètre hydraulique [173],
- des formulations dérivées de Kozeny-Carman qui utilisent la perméabilité et la porosité [174],
- des longueurs caractéristiques issues de fonctions d'auto-corrélations (voir Section 2.3.1)
   [149],
- des longueurs caractéristiques de pores, issues d'analyse de distribution de taille de cordes dans la phase liquide [175, 176].

Étonnamment, aucune des longueurs testées comme  $\ell_{\text{eff}}$  ne prédisait en moyenne mieux la transition que simplement  $\sqrt{k_0}$ .

Par la suite, une analyse physique de l'écoulement a permis de comprendre pourquoi  $\sqrt{k_0}$  est (en terme d'ordre de grandeur) la longueur qui prédisait au mieux la transition. Cette longueur porte en effet beaucoup plus d'informations qu'une longueur purement géométrique, puisque la résolution d'équations aux dérivées partielles caractéristiques du phénomène de transport est nécessaire pour l'obtenir. D'ailleurs, comme démontré dans [106] (voir une démonstration détaillée dans le "supplemental material"), on peut estimer  $\sqrt{k_0}$  comme,

$$\sqrt{k_0} \simeq \frac{\ell_{\rm PT}}{\kappa},\tag{3.17}$$

avec  $\ell_{\rm PT}$  une taille caractéristique des seuils de pores et  $\kappa$  un paramètre d'accélération du fluide des pores vers les seuils de pores. La région des seuils de pores est définie rigoureusement comme étant le volume fluide pour lequel la viscosité est non-Newtonienne lorsque  $\langle v \rangle^{\beta} = \langle v_c \rangle^{\beta}$ . Comme  $\kappa$  est toujours plus grand que 1,  $\sqrt{k_0}$  est plus petite que la petite longueur géométrique du milieu poreux  $\ell_{\rm PT}$ . Estimer  $\sqrt{k_0}$  uniquement à partir de la géométrie semble alors difficile. La longueur

 $\sqrt{k_0}$  étant liée à la quantité d'énergie que le fluide perd en traversant la structure poreuse, il semble alors légitime de devoir résoudre l'écoulement complet pour l'obtenir.

Beaucoup d'études ont essayé de prédire la perméabilité à partir d'analyses statistiques d'images de milieux poreux [177]. Pour certains milieux qui présentent une structure qui se répète, on peut en effet avec l'aide de paramètres empiriques, prédire la perméabilité à partir de la géométrie, et de certaines constantes reliant structure et écoulement. C'est par exemple le cas de la formulation de Kozeny-Carman qui fonctionne assez bien sur des empilements de billes [99, 100]. Cependant, extrapoler ces formulations à des milieux plus complexes devient délicat, et ces formulations ne peuvent être utilisées que pour fournir un ordre de grandeur de la perméabilité. Il est d'ailleurs toujours facile de trouver des milieux "contre-exemples", qui présentent les mêmes longueurs géométriques mais des perméabilités très différentes. Ces milieux contre-exemples prouvent l'absence de relation générale et bijective entre la perméabilité et une information purement géométrique.

#### 3.4.2 Correction du modèle de transition

Nous avons présenté le modèle suivant pour estimer la vitesse critique de transition au premier ordre,

$$\langle v_{\rm c} \rangle^{\beta} \simeq \dot{\gamma}_{\rm c} \sqrt{k_0}.$$
 (3.18)

En se fondant sur une analyse de la mécanique de l'écoulement, nous avons montré que  $\sqrt{k_0}$  porte effectivement un sens physique particulier. Cependant, même si  $\sqrt{k_0}$  permet de déterminer un ordre de grandeur de  $\langle v_c \rangle^{\beta}$ , l'utilisation de cette longueur seule n'est pas suffisante pour décrire plus finement la transition. Dans un premier temps, on s'intéressera à l'influence de la définition de la transition elle-même sur la longueur effective. Ensuite, on s'intéressera à l'influence de la non-linéarité induite par la rhéologie sur cette longueur. Enfin, on étudiera le comportement de ce modèle pour des milieux anisotropes.

#### Définitions de la transition

Comme expliqué précédemment, pour un milieu poreux donné, la valeur de la vitesse de transition peut varier selon sa propre définition ( $\langle v_{T1} \rangle$ ,  $\langle v_c \rangle$  ou  $\langle v_{T2} \rangle$ , voir Fig. 1a). Pour illustrer cette problématique, nous prenons l'exemple d'un écoulement rampant dans un capillaire de rayon R, où la perméabilité Newtonienne  $k_0$  peut être définie de deux manières différentes, voir Fig. 5.

Pour définir un taux de déformation équivalent, Chauveteau [64] se base sur le taux de déformation maximal dans le tube, qui se produit à la paroi. La formulation 1D obtenue, voir Section 1.3.2, est alors la suivante

$$\dot{\gamma}_{\rm eq} = \alpha \frac{4\langle v \rangle / \phi}{\sqrt{8k_0^{n^\circ 1} / \phi}},\tag{3.19}$$

où  $\alpha$  est un paramètre semi-empirique qui sert à calibrer le comportement de la viscosité apparente avec  $\dot{\gamma}_{eq}$  pour des milieux poreux complexes (voir Section 1.3.3). Dans le cas du tube, le paramètre  $\alpha$  est égal à l'unité. Dans ce modèle, Chauveteau définit la perméabilité Newtonienne du capillaire comme,

$$k_0^{n^{\circ}1} = \phi \frac{R^2}{8}.$$
 (3.20)

Avec l'Eq. 3.19, la transition est définie rigoureusement pour  $\dot{\gamma}_{eq} = \dot{\gamma}_c$ . Pour  $\dot{\gamma}_{eq} = \dot{\gamma}_c$ , le fluide contenu dans une couronne annulaire le long de la paroi d'épaisseur infinitésimale est non-Newtonien. Cependant, la perméabilité n'a alors que très faiblement déviée de sa valeur Newto-



FIGURE 5: Différentes définitions de la perméabilité Newtonienne  $k_0$  dans un capillaire. La porosité est définie comme  $\phi = V_{\beta}/(V_{\beta} + V_{\sigma})$ .

nienne. Avec cette approche, la vitesse de transition correspond à  $\langle v_{T1} \rangle$  (voir Fig. 1a). En remplaçant  $\langle v_{T1} \rangle$  dans l'Eq 3.19, et en prenant  $\alpha = 1$  (cas d'un tube) on obtient alors

$$\langle v_{\rm T1} \rangle^{\beta} = \dot{\gamma}_{\rm c} \sqrt{\frac{k_0^{n^{\circ}1}}{2\phi}}.$$
(3.21)

Si l'on remplace  $k_0^{n^{\circ}1}$  par sa valeur, on obtient alors

$$\langle v_{\rm T1} \rangle^{\beta} = \dot{\gamma}_{\rm c} \frac{R}{4}, \qquad (3.22)$$

soit une longueur effective  $\ell_{\text{eff}}^{T1} = 0.25 R$ . On remarque que le paramètre rhéologique n n'est pas pris en compte dans  $\ell_{\text{eff}}^{T1}$ , ce qui semble cohérent puisque la vitesse de transition  $\langle v_{\text{T1}} \rangle$  est *a priori* indépendante de ce paramètre.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi, pour des raisons de simplicité, de définir la vitesse de transition comme  $\langle v \rangle = \langle v_c \rangle$ . De plus, nous définissons la perméabilité Newtonienne d'un capillaire comme

$$k_0^{n^\circ 2} = \frac{R^2}{8}.\tag{3.23}$$

Sous ces deux conditions, nous avons montré que, pour un capillaire simple,  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  peut être calculé analytiquement comme

$$\langle v_{\rm c} \rangle^{\beta} = \dot{\gamma}_{\rm c} C\left(n\right) \sqrt{8k_0^{n^{\circ}2}},\tag{3.24}$$

avec C(n) une fonction de n (voir Section 3.3). En remplaçant l'expression de la perméabilité dans l'Eq. 3.24, on obtient

$$\left\langle v_{\rm c} \right\rangle^{\beta} = \dot{\gamma}_{\rm c} C\left(n\right) R,\tag{3.25}$$

soit  $\ell_{\text{eff}}^{c} = C(n) R$ . On remarque que la vitesse  $\langle v_{c} \rangle$  est dépendante du paramètre n au second ordre, ce qui conduit à inclure ce paramètre dans la définition de  $\ell_{\text{eff}}^{c}$ . Le paramètre C(n) varie très

faiblement avec n, si bien que l'on peut l'approximer comme  $C(n) \simeq 0.32$ . On obtient alors une longueur effective qui décrit la transition  $\ell_{\text{eff}}^c \simeq 0.32 R$ .

De cette analyse, on observe que  $\ell_{\text{eff}}^{T1} < \ell_{\text{eff}}^c$ , ce qui correspond bien à une vitesse de transition  $\langle v_{\text{T1}} \rangle$  plus petite que la vitesse de transition  $\langle v_c \rangle$ . En somme, les différents choix réalisés entre le modèle de Chauveteau et celui que nous proposons conduisent à deux expressions différentes de la longueur effective qui caractérise la transition. Aucun modèle ne parait dans l'absolu mieux posé qu'un autre.

#### Effet de la non-linéarité

En ajoutant un paramètre empirique, ici  $\alpha'$ , on peut toujours exprimer de manière exacte la vitesse critique de transition comme,

$$\langle v_{\rm c} \rangle^{\beta} = \alpha' \dot{\gamma}_{\rm c} \ell_{\rm eff}. \tag{3.26}$$

Nous notons que pour les milieux utilisés dans [106], ce paramètre  $\alpha'$  varie relativement peu en prenant  $\ell_{\text{eff}} = \sqrt{k_0}$ , voir Table 3.3. Sa valeur maximale est de 1.02 pour un empilement de billes et sa valeur minimale est de 0.51 pour le milieu C1, qui présente une structure poreuse plus complexe.

$\alpha'$	A1	A2	P1	P2	B1	B2	C1	C2
$\ell_{\rm eff} = \sqrt{k_0}$	0.84	0.81	1.02	0.93	0.87	0.70	0.51	0.54
$\ell_{\rm eff} = 2\sqrt{2}C\left(n\right)\sqrt{k_0}$	0.94	0.90	1.14	1.03	0.97	0.77	0.57	0.61

TABLE 3.3: Valeurs du coefficient semi-empirique  $\alpha'$  utilisé dans l'Eq. 3.26 pour les milieux présentés dans [106] et pour différentes définitions de la longueur effective  $\ell_{\text{eff}}$ . La valeur du paramètre rhéologique n est de 0.75.

Peut-on proposer une autre définition de  $\ell_{\text{eff}}$  qui améliore le modèle de transition, c'est-à-dire qui rapproche  $\alpha'$  de l'unité ? Nous avons montré que le paramètre n n'influence pas au premier ordre la vitesse critique de transition (voir Section 3.2). Cependant, si l'on cherche à faire une estimation plus fine de  $\langle v_c \rangle^{\beta}$ , son influence peut être prise en compte à l'ordre supérieur.

La prise en compte de la rhéologie dans le paramètre semi-empirique utilisé par Chauveteau ( $\alpha$  dans l'Eq. 3.19) a été initialement proposée par Fletcher *et al.* [103]. En se basant sur l'écoulement rampant d'un fluide non-Newtonien dans un capillaire, une correction de l'Eq. 3.19 avec un paramètre dépendant de n a alors été proposée.

Toujours définissant la vitesse de transition comme  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  et la perméabilité d'un capillaire comme  $k_0 = R^2/8$ , une solution exacte de la longueur effective est calculée pour un capillaire comme  $\ell_{\text{eff}} = 2\sqrt{2}C(n)\sqrt{k_0}$ , voir Eq. 3.24. La correction  $2\sqrt{2}C(n)$  n'est a priori valable que pour le tube capillaire. Cependant, en suivant la démarche de Fletcher *et al.* [103], on applique cette correction aux milieux utilisés dans [106]. Cette correction permet au paramètre  $\alpha'$  de se rapprocher de l'unité, excepté pour le milieu P1, voir Table 3.3. Pour les échantillons étudiés, cette correction semble améliorer globalement le modèle. Ce résultat reste à confirmer sur un jeu de milieu plus grand.

#### Effet de l'anisotropie

Le modèle de transition proposé est valable pour des milieux isotropes. Lorsque les milieux sont anisotropes, comment estimer la longueur effective  $\ell_{\text{eff}}$  (Eq. 3.16)? Nous prenons l'exemple



FIGURE 6: Champ de vitesse Newtonien d'un écoulement forcé selon  $\mathbf{e}_x$  ou  $\mathbf{e}_y$  dans les milieux stratifiés S1 et S2.

des milieux stratifiés S1 et S2, décrits dans la Fig. 6, où des conditions périodiques en pression et vitesse sont appliquées aux bords des domaines. Lorsque l'on simule des écoulements Newtoniens dans ces milieux anisotropes, on obtient un facteur d'anisotropie  $f = (K_0)_{xx} / (K_0)_{yy}$  de 5.67 pour le milieu S1 et 10.5 pour le milieu S2. Le milieu S2 présente des seuils de pores plus petits que le milieu S1 selon la direction  $\mathbf{e}_{y}$ , ce qui explique son facteur d'anisotropie plus grand.

$\alpha'$	$\mathbf{f} \propto \mathbf{e}_{\mathrm{x}}$	$\mathbf{f} \propto \mathbf{e}_{\rm y}$	-	$\alpha'$	$\mathbf{f} \propto \mathbf{e}_{\mathrm{x}}$	$\mathbf{f} \propto \mathbf{e}_{\rm y}$	
$\ell_{\rm eff} = \sqrt{k_{0\rm xx}}$	1.10	2.74	-	$\ell_{\rm eff} = \sqrt{k_{0\rm xx}}$	1.03	3.87	
$\ell_{\rm eff} = \sqrt{k_{0yy}}$	0.46	1.15		$\ell_{\rm eff} = \sqrt{k_{0yy}}$	0.32	1.20	
(a) Milieu S1				(b) Milieu $S2$			

TABLE 3.4: Valeurs du coefficient semi-empirique  $\alpha'$  utilisé dans l'Eq. 3.26 pour différentes définitions de  $\ell_{\text{eff}}$  et des directions de l'écoulement différentes dans les milieux S1 et S2.

Dans ces milieux, on calcule  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  lorsque l'écoulement est imposé avec un terme source ( $\rho \mathbf{f}$  dans Eq. 1.3) selon  $\mathbf{e}_x$  ou  $\mathbf{e}_y$ . Le paramètre rhéologique n est fixé à 0.75. Pour chacune des directions de l'écoulement, on calcule le coefficient  $\alpha'$  pour diverses définitions de  $\ell_{\text{eff}}$ , voir le Tableau 3.4. On remarque pour les milieux S1 et S2 que, lorsque l'écoulement est imposé selon  $\mathbf{e}_x$ ,  $\sqrt{(\mathsf{K}_0)_{xx}}$  est une bonne longueur pour caractériser la transition (idem pour  $\sqrt{(\mathsf{K}_0)_{yy}}$  lorsque l'écoulement est imposé selon  $\mathbf{e}_y$ ).

Dans le cas du milieu S1, on remarque que les valeurs de  $\alpha'$  sont proches (1.10 et 1.15). Bien que proches, il n'y a *a priori* aucune raison d'un point de vue mathématique pour que ces valeurs soient égales. La proximité de ces valeurs peut s'expliquer par une anisotropie modérée. En effet, dans le milieu S2, qui présente une anisotropie plus forte, ces valeurs sont plus éloignées (1.03 et 1.20). Dans l'optique d'appliquer le modèle de transition à des milieux anisotropes, il faut alors prendre en compte la sensibilité du pré-facteur  $\alpha'$  à la direction de l'écoulement. Pour utiliser le modèle de prédiction de  $\langle v_c \rangle^{\beta}$  dans un milieu anisotrope donné, il faut alors

Pour utiliser le modèle de prédiction de  $\langle v_c \rangle^{\rho}$  dans un milieu anisotrope donné, il faut alors distinguer le cas où l'écoulement est imposé selon une direction principale du cas plus général où il ne l'est pas. Pour distinguer ces cas, il faut travailler avec le tenseur de perméabilité exprimé dans sa base propre (ce qui est déjà le cas ici pour les milieux S1 et S2). Dans le cas où l'écoulement est imposé selon une direction préférentielle, on recommande alors d'utiliser comme longueur effective la racine de la valeur propre associée. Dans le cas plus général, à cause de la non linéarité, il est *a priori* difficile de proposer une forme pour  $\ell_{\text{eff}}$ .

#### 3.4.3 Les distributions de vitesse normalisée

Dans la Section 3.2, nous avons observé que les PDFs de la vitesse normalisée par la vitesse moyenne étaient peu sensibles à la rhéologie non-Newtonienne. Nous insistons sur le fait que les PDFs ne sont qu'un outil de représentation de certaines propriétés statistiques de la distribution spatiale d'un champ. En non-Newtonien, les profils locaux de vitesses peuvent être modifiés mais, d'un point de vue global, la distribution du champ normalisé est peu modifiée. On suppose que c'est la complexité de la structure poreuse qui définit au *premier ordre* la PDF de vitesse normalisée. La non-linéarité induite par la rhéologie ne perturbe qu'au *second ordre* la PDF. Pour vérifier cette hypothèse, nous allons étudier divers milieux poreux, du plus simple (un tube capillaire) aux plus complexes (des milieux 3D) et tracer les PDFs de vitesse et de gradient de pression normalisés.

#### Le tube

Prenons un écoulement rampant et pleinement non-Newtonien  $(\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1})$  dans un capillaire. Le calcul conduit à une solution analytique du profil de vitesse,

$$v(r) = \frac{3n+1}{n+1} \langle v \rangle^{\beta} \left( 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \text{ pour } R \ge r \ge 0,$$
(3.27)

avec r/R le rayon normalisé du tube. On peut calculer la fonction de densité de probabilité de vitesse dans le tube [178],

$$f(v) = \frac{2n}{3n+1} \frac{1}{\langle v \rangle^{\beta}} \left( 1 - \frac{v}{\frac{3n+1}{n+1} \langle v \rangle^{\beta}} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \text{ pour } \frac{3n+1}{n+1} \langle v \rangle^{\beta} \ge v \ge 0.$$
(3.28)

Avec le cas linéaire, n = 1, on obtient  $f(v) = 1/(2\langle v \rangle^{\beta})$ . La Figure 7 représente les PDFs de vitesse normalisée dans le tube pour différentes rhéologies.



FIGURE 7: PDF de vitesse normalisée  $v/\langle v \rangle^{\beta}$  dans un tube pour des écoulements Newtonien (n = 1) et pleinement non-Newtonien  $(n \neq 1)$ .

Dans le cas précis du tube, la distribution statistique change effectivement sur toute le gamme de vitesse pour  $n \neq 1$ . Concernant la pression, on note que le gradient de pression est uniforme dans tout le tube. La PDF de gradient de pression normalisé est alors un Dirac et n'est pas modifiée en non-Newtonien.

Dans le cas du tube simple, l'action de la structure poreuse sur le fluide est très particulière. En effet, les profils de vitesses étant identiques pour toutes les sections du tube, la plage de distribution de vitesse est assez étroite  $(2\langle v \rangle^{\beta} \geq v \geq 0)$  comparée à des milieux poreux plus complexes (notamment avec un fort rapport taille de pore sur seuils de pores) qui induisent une distribution de vitesse plus étendue (voir par exemple le milieu C2 dans la Fig. 2 de la Section 3.2,  $60 \langle v \rangle^{\beta} \geq v_z \geq -10 \langle v \rangle^{\beta}$ ).

Les perturbations du profil de vitesse induite par la rhéologie sont alors significatives par rapport à la plage de distribution de vitesse dans le cas du tube. La PDF de vitesse normalisée est alors fortement modifiée (voir Fig. 7) et la PDF de gradient de pression est inchangée.

#### Des ensembles de tubes

Pour complexifier légèrement la topologie, on souhaite étudier des ensembles de tubes, en série ou en parallèle. Nous prenons 2 milieux composés de N tubes de longueur identique h et dont les rayons sont distribués suivant, par exemple, une loi log-normale.

Concernant les tubes en parallèle, on applique un gradient de pression, noté  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$ , identique sur tous les tubes. Il en résulte que, quel que soit la rhéologie, Newtonienne ou non-Newtonienne, le gradient de pression est le même dans tous les tubes et la PDF du gradient de pression est, comme dans le cas du tube simple, un Dirac.

Dans le cas des tubes en série, on impose le débit Q. La solution analytique d'un écoulement pleinement non-Newtonien dans un des tubes du milieu (noté i) conduit à la relation macroscopique,

$$\langle v_i \rangle^{\beta} = c \, R_i^{n+1} \left( \langle v_i \rangle^{\beta} \right)^{1-n} \frac{\left( \nabla \langle p \rangle^{\beta} \right)_i}{\mu_0}, \tag{3.29}$$

avec c une constante qui est fonction de n. La conservation du débit implique que, quel que soit le tube i,

$$Q = \langle v_i \rangle^\beta R_i^2. \tag{3.30}$$

En combinant les Eqs. 3.29 et 3.30 on obtient alors une relation entre le gradient de pression dans le tube i et le rayon du tube i,

$$\left(\nabla \langle p \rangle^{\beta}\right)_{i} \propto R_{i}^{-(3n+1)}.$$
 (3.31)

L'équation 3.31 signifie simplement que, plus le rayon du tube est petit et plus la perte de charge associée est grande. On note ici que, même en Newtonien, la PDF des gradients de pression dans un ensemble de tubes en série n'est plus un Dirac. En non-Newtonien, la distribution des  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  sera modifiée de part la dépendance en n dans l'Eq. 3.31.

L'étude de ces ensembles de tubes nous permet de conclure que, lorsque la géométrie d'un milieu poreux se rapproche d'un ensemble de tubes en série, la distribution du gradient de pression aura plus tendance à être modifiée par la rhéologie non-Newtonienne que lorsque la géométrie du milieu se rapproche d'un ensemble de tubes en parallèle.

#### Des treillis de cylindres

Nous souhaitons maintenant étudier des milieux plus complexe que les ensembles de tubes. Pour cela, nous générons le treillis de cylindres TC1, composé de  $15 \times 15$  cylindres régulièrement espacés en imposant des conditions périodiques aux bords du domaine, voir Fig. 10a. La porosité de ce milieu est de 0.49. A partir de TC1, nous générons le milieu désordonné noté TC2, en perturbant la position des cylindres, voir Fig. 10b. Dans ce milieu, les cylindres ne se superposent pas et des conditions périodiques sont toujours garanties.

Dans la Figure 10, représentant les champs de vitesse, on remarque que le désordre modifie considérablement le champ de vitesse. Dans le milieu TC2, des chemins préférentiels sont créés et des régions où le fluide est immobile se forment. Les PDFs de vitesse et gradient de pression normalisés sont tracées pour différentes valeurs du paramètre non-linéaire n dans les Figures 8 et 9.

Lorsque l'on compare les PDF de distributions spatiales du champ de vitesse normalisée Newtonien (n = 1.00) entre un milieu ordonné (Fig. 8a) et désordonné (Fig. 9a), on remarque qu'elles sont très différentes. D'une part, les vitesses maximales atteignent environ  $3 \times || \langle v \rangle^{\beta} ||$  dans le milieu ordonné et  $15 \times || \langle v \rangle^{\beta} ||$  dans le milieu désordonné. Cela s'explique par des seuils de pores rendus plus étroits par le désordre. D'autre part, lorsque le milieu est désordonné, la distribution de vitesse perd les pics caractéristiques du milieu ordonné. La statistique du champ de vitesse dans le milieu désordonné se rapproche d'une distribution exponentielle, comme observé expérimentalement dans des milieux similaires [151].

CHAPITRE 3. DESCRIPTION DE LA TRANSITION ENTRE LES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT NEWTONIENS ET NON-NEWTONIENS



FIGURE 8: Milieu TC1: PDF de norme de vitesse (normalisée par  $\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \|$ ) et norme de gradient de pression (normalisés par  $\|\rho \mathbf{f}\|$ ) pour un écoulement Newtonien (n = 1.00) et pleinement non-Newtonien ( $n \neq 1.00$ ). Légendes identiques dans (a) et (b).



FIGURE 9: Milieu TC2: PDF de norme de vitesse (normalisée par  $\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \|$ ) et norme de gradient de pression (normalisés par  $\|\rho \mathbf{f}\|$ ) pour un écoulement Newtonien (n = 1.00) et pleinement non-Newtonien ( $n \neq 1.00$ ). Légendes identiques dans (a) et (b).

Concernant l'influence de la rhéologie, caractérisée par le paramètre n, on observe que la PDF de vitesse normalisée est fortement modifiée sur toute la plage de vitesse par la non-linéarité pour le milieu ordonné, Fig. 8a. A l'inverse, elle l'est beaucoup moins lorsque le milieu est désordonné,

Fig. 9a. Concernant la PDF du gradient de pression normalisé, elle est peu sensible à la rhéologie lorsque le milieu est ordonné, Fig. 8b, et l'est beaucoup plus lorsque le milieu est désordonné, Fig. 9b.

De ces observations, on conclu donc que, lorsque la structure poreuse devient complexe, elle contraint la distribution spatiale de vitesse normalisée, dont certaines propriétés statistiques (ici la PDF) deviennent moins sensible à la rhéologie. A l'inverse, la PDF du gradient de pression normalisé semble d'avantage modifiée par la rhéologie lorsque le désordre augmente.



FIGURE 10: Champ de vitesse d'un écoulement Newtonien à travers des treillis de  $15 \times 15$  cylindres ordonnés (a) et désordonnés (b). Le fluide est mis en mouvement par un terme source ( $\rho \mathbf{f}$  dans Eq. 1.3) imposé à 22.5° avec la direction horizontale  $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$ .

#### Des milieux 3D

Finalement, on étudie les PDFs normalisées de  $\|\mathbf{v}\|$  et  $\|\nabla p\|$  pour des écoulements Newtoniens et non-Newtoniens à travers des milieux désordonnés et 3D de type empilement de bille (noté P, voir Fig. 11) et Bentheimer (noté B, voir Fig. 12).

Pour les milieux 3D, les observations sont moins évidentes. Pour mieux analyser les comportements des PDFs avec la rhéologie, on estime de manière approximative, en fixant un seuil (subjectivement, à l'œil) sur les PDFs représentées dans les Figs. 11 et 12, le volume de fluide pour lequel les PDFs sont inchangées par la rhéologie. Cette méthode est utilisée ici seulement de manière indicative, puisque le seuil est fixé de manière subjective. Ce volume est grand pour les milieux P( $\approx 95\%$ ) et B ( $\approx 88\%$ ). On en conclut que les PDFs de  $\|\mathbf{v}\|/\|\langle \mathbf{v}\rangle^{\beta}\|$  sont donc assez peu sensibles à la rhéologie.

CHAPITRE 3. DESCRIPTION DE LA TRANSITION ENTRE LES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT NEWTONIENS ET NON-NEWTONIENS



FIGURE 11: Milieu P: PDF de norme de vitesse (normalisée par  $\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \|$ ) et norme de gradient de pression (normalisée par  $\|\rho \mathbf{f}\|$ ) pour un écoulement Newtonien (n = 1.00) et pleinement non-Newtonien ( $n \neq 1.00$ ). Légendes identiques dans (a) et (b).



FIGURE 12: Milieu B : PDF de norme de vitesse (normalisée par  $\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \|$ ) et norme de gradient de pression (normalisée par  $\|\mathbf{f}\|$ ) pour un écoulement Newtonien (n = 1.00) et pleinement non-Newtonien ( $n \neq 1.00$ ). Légendes identiques dans (a) et (b).

Concernant les PDFs de  $\|\nabla p\|/\|\rho f\|$ , le volume de fluide sur lequel la distribution spatiale est inchangée est aussi significatif ( $\approx 70\%$  pour P et  $\approx 80\%$  pou B) mais est plus petit que pour la PDF de vitesse normalisée. Les PDFs de  $\|\mathbf{v}\|/\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}\|$  semblent dont moins sensibles à la rhéologie que les PDFs de  $\|\nabla p\|/\|\rho f\|$ . Cependant, au vu de la méthode approximative utilisée ici, on ne peut pas conclure rigoureusement que la PDF de  $\|\nabla p\|/\|\rho \mathbf{f}\|$  est d'avantage modifiée que la PDF de  $\|\mathbf{v}\|/\|\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}\|$ .

#### Discussions

En partir d'un tube, et en augmentant en complexité jusqu'à des milieux réels, on observe que la PDF de vitesse normalisée devient moins sensible à la rhéologie lorsque la complexité du milieu augmente. Concernant la PDF du gradient de pression normalisé, elle semble être d'avantage sensible à la rhéologie lorsque le désordre augmente (voir Figs. 8b et 9b).

Les observations ont montré que la sensibilité de la PDF de vitesse normalisée à la rhéologie est dépendante de la structure poreuse. Il y a donc une compétition entre la structure poreuse et la rhéologie qui se reflète dans la distribution spatiale de vitesse. Pour illustrer cette compétition, nous prenons l'exemple d'un milieu poreux composé d'un convergent cylindrique. Nous réalisons une expérience par la pensée, où l'on peut modifier les rayons d'entrée et de sortie du convergent ainsi que la rhéologie du fluide qui s'y écoule.

Lorsque le convergent est fort, la distribution spatiale de vitesse est étendue. A l'inverse, dans le cas asymptotique du tube, la distribution spatiale traduit simplement le profil de Poiseuille. Lorsqu'une perturbation, par exemple d'origine rhéologique, est introduite dans le système, les profils locaux de vitesse se déforment. On peut alors distinguer deux cas :

- Les variations de vitesses dues à la rhéologie peuvent être plus grandes que les variations de vitesses imposées par la structure poreuse (c'est le cas dans un tube).
- Les variations de vitesses dues à la rhéologie peuvent être plus faibles que les variations de vitesses imposées par la structure poreuse (c'est le cas d'un convergent fort).

Dans le premier cas, l'influence de la rhéologie se reflétera alors directement dans la PDF de vitesse normalisée. Dans le second, c'est toujours la structure poreuse qui contrôlera la distribution spatiale de vitesse, et la PDF ne sera que légèrement modifiée.

De plus, cette analyse est cohérente avec une observation que l'on peut tirer des PDFs de vitesse normalisée dans les milieux 3D; en effet, les Figs. 11a et 12a montrent que la rhéologie affecte principalement la distribution spatiale des fortes vitesses. Dans l'exemple du convergent, les vitesses fortes se situent dans la région de faibles rayons (petit volume associé) alors que les faibles vitesses se situent dans la région de grand rayons (grand volume associé).

Dans un milieu poreux réel, le grand volume est associé aux pores et le petit volume aux seuils de pores. Dans les pores, l'effet de la perturbation locale des profils de vitesses sur la distribution statistique est atténué par le grand volume concerné. En effet, sur ce grand volume, en moyenne, on suppose que les perturbations se compensent, ce qui conduit à une représentation statistique peu modifiée. En revanche, le petit volume associé aux seuils de pores ne permet pas ce type de mécanisme et la perturbation locale des profils de vitesses est directement visible dans la PDF de vitesse normalisée.

### Chapitre 4

# Modélisation de la répulsion des chaînes de polymère à la paroi

Ce Chapitre est consacré à un phénomène particulier qui peut se produire dans certaines configurations entre la paroi liquide/solide et les molécules de polymère. Comme présenté dans l'Introduction, le réarrangement des chaînes à l'interface liquide/solide peut être souvent complexe [56, 57] et un des mécanismes en jeu est la répulsion des molécules [179]. Cette répulsion engendre une fine couche le long de la paroi où la concentration en polymère est faible. Dans cette région, appelée couche de déplétion, la viscosité est faible et ainsi la couche de déplétion agit comme un film lubrifiant.

D'un point de vue macroscopique, ce phénomène peut se traduire pour un milieu isotrope avec la loi de Darcy,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{k_0}{\mu_{\rm app}} \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right) \tag{4.1}$$

avec  $\langle \mathbf{v} \rangle$  la vitesse moyenne superficielle,  $k_0$  la perméabilité intrinsèque (mesurée avec l'écoulement du solvant par exemple),  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  le gradient de pression intrinsèque et  $\rho \mathbf{g}$  le terme de gravité. Dans cette formulation, c'est la viscosité apparente  $\mu_{app}$  qui est utilisée pour traduire les divers phénomènes physiques qui peuvent se produire, par exemple la rétention du polymère dans le milieu [81], la dégradation mécanique ou thermique des chaînes [17] ou les effets non-Newtoniens [39, 180].

Dans ce Chapitre, on suppose que l'écoulement est Newtonien et qu'aucun phénomène particulier ne se produit à l'exception du mécanisme de répulsion des chaînes de polymères à la paroi. Cette hypothèse forte est justifiée dans la Section 4.2. Le film lubrifiant décrit plus haut se traduit d'un point de vue macroscopique en une chute de viscosité apparente dans l'Eq. 4.1.

A partir d'un modèle mésoscopique à deux fluides déjà existant développé par Chauveteau [64], nous revisitons une approche qui consiste à utiliser une condition effective de glissement pour représenter la couche de déplétion. Avec cette condition de glissement, nous proposons alors un outil pour prédire la viscosité apparente induite par l'écoulement d'une solution de polymère dans un milieu poreux lorsque l'écoulement est Newtonien et qu'un mécanisme de répulsion est en place à l'interface liquide/solide. Cet outil est validé par comparaisons avec des données expérimentales provenant de la littérature. Comparé au modèle mésoscopique existant, cet outil présente les

avantages de ne pas avoir besoin de définir une longueur caractéristique et de s'appuyer directement sur la structure poreuse.

Le Chapitre qui suit fait l'objet d'un article publié dans le journal Transport in Porous Media [181].

#### 4.1 Introduction

One of the hallmarks of porous media is the relatively large value of the specific area, i.e., the surface to volume ratio, therefore making interfacial phenomena of great importance in the study of mass and momentum transport. This is particularly true for the flow of polymer molecules that are relatively large (up to 100 nm) and can interact with the solid surface in a variety of ways. In general, repulsion [179] and attraction [62] mechanisms can have significant impacts on momentum transport in porous media. For instance, sorption mechanisms associated with electrostatic forces often lead to a cushion of polymer molecules that can strongly affect the macroscale flow (see [68] for a description of different regimes). On the other hand, repulsion mechanisms originating from a variety of phenomena such as steric hindrance [73], electrostatic repulsion [74] or migration of polymer molecules away from high shear regions [75] can lead to a depletion layer close to the solid interface (see [76] and the very good reviews from Barnes [56] or Sochi [57] for more details). The concentration of polymer is then lower in the depletion layer than in the bulk, leading to a lower viscosity in the vicinity of the wall. Consequently, this layer acts as a lubricating film, over which the polymer molecules slip. The properties of this depletion layer depend on parameters such as pH [14], polymer concentration or even the flexibility of the molecules [62, 78]. For diluted solutions, the depletion layer thickness, which we call  $\delta$  in the remainder of this paper, is often estimated using the gyration radius for flexible molecules and using the length of the molecules for rigid polymers.

How does this depletion layer affect the flow on larger scales? To describe the macroscale flow, a modified version of the isotropic Darcy's law [6] is often used,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{k_0}{\mu_{\rm app}} \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right), \tag{4.2}$$

with  $\langle \mathbf{v} \rangle$  the superficial average velocity,  $k_0$  the intrinsic permeability (associated to the flow of a Newtonian fluid which does not induce a depletion layer or any other particular phenomena),  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  the gradient of the intrinsic average pressure,  $\rho \mathbf{g}$  the gravitational force and  $\mu_{app}$  the apparent viscosity. The effects of slip at the pore scale are usually included in this apparent viscosity, which decreases as slip increases. The apparent viscosity drop has been observed experimentally with rigid or flexible polymer molecules over a wide range of porous media [103, 61, 179].

However, the physics of polymer flow in porous media is very rich and complex [12] so that this apparent viscosity also includes a variety of other important, often even predominant, phenomena. These include non-Newtonian rheology, retention mechanisms [81], thermochemical or mechanical degradation of polymer chains [32, 17] or inaccessible pore volume [85]. Due to the combined effects of these phenomena,  $\mu_{app}$  includes rock geometrical and structural effects and may be very different from the bulk viscosity  $\mu_{bulk}$ , with apparent thinning or thickening effects. These effects can be extremely complex, a striking example of this being elastic turbulence at low Reynolds numbers, resulting in apparent thickening for the flow of rigid and flexible polymer molecules through porous media [180, 182, 39].

# CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI

The concept of apparent viscosity itself may not work very well for all porous media, especially if nonlinearity in the momentum equation induces orientation effects. The fact that the intrinsic permeability is isotropic does not guarantee the absence of orientation effects, as shown in [97]. These orientation or anisotropic effects tend to decrease for a statistically isotropic disordered media, which is the case of many natural sandstones.

With this restriction in mind, we focus in this work on the link between slip at the pore scale and the apparent viscosity at the Darcy scale. We consider the bulk fluid rheology as Newtonian and overlook all the other complex features of polymer flows, including non-Newtonian effects in the rheology. The rationale for doing so is twofold. Firstly, there are many situations in which interfacial effects are predominant in the control of the flow. One of the practical cases where this occurs is Enhanced Oil Recovery (EOR), where polymer solutions are often injected into oil-bearing reservoirs [9]. The idea of the technology is to benefit from an increase of the bulk fluid viscosity in the reservoir compared to just water, which increases sweep efficiency by a number of mechanisms including a reduction of hydrodynamic instabilities [5]. In field applications, a significant portion of the reservoir is composed of regions with relatively small velocities where the polymer solution essentially behaves as a Newtonian fluid. In the Newtonian regime, flood experiments further show that the flow of polymer solutions through typical sandstones yields an apparent viscosity drop that can reach 20% [103, 64], which is consistent with a predominance of slip. Furthermore, different effects are known to reduce the non-Newtonian effects under typical reservoir conditions, such as mechanical degradation or the presence of salt ions (these are further discussed in Section 4.2). Therefore, there is a clear engineering and practical interest in determining the impact of slip on the macroscopic flow assuming a Newtonian rheology.

The second reason for using a Newtonian rheology is on a more fundamental level. The approach using an apparent viscosity is mostly empirical and, as we have discussed before, it is used successfully as a black box to describe a variety of phenomena at the pore scale. However, there is little fundamental understanding of the relative contributions of these phenomena in different configurations. To make progress in this direction, we believe that it is necessary to evaluate the influence of each effect separately, so that we can understand better the physics of multiscale polymer flows in porous media. For example, we recently studied the Newtonian to non-Newtonian transition without slip effects using a digital rock physics approach [106]. This fundamental understanding of the physics may ultimately lead to better models of polymer flows that accurately combine the different effects, with potential applications in many engineering problems such as EOR. Therefore, we need to propose a tool to evaluate simply the impact of the depletion layer.

How can we study the depletion layer phenomenon and the associated slip effect? To do so, different tools are available. Molecular dynamics approaches, often with simple molecules, are useful to understand the fundamental physics at the molecular level [58, 59, 57]. However, simulations cannot yet be performed on sufficiently large volumes to model flow in porous media, especially in the case of polymer solutions. Therefore, mesoscale models are usually adopted (see Fig. 1a to Fig. 1b). The so-called "two-fluid model" proposed by Chauveteau [64], whereby the concentration of polymer and the viscosity are piecewise constant (see the red dotted curve in Fig. 1b), is probably the simplest way to represent the depletion layer (other models use continuous and linear [26] or nonlinear [61] concentration fields, see the black curve in Fig. 1b). In the two-fluid model, the viscosity is  $\mu_{\text{layer}}$  inside the depletion layer of thickness  $\delta$  and  $\mu_{\text{bulk}}$  outside, with  $\mu_{\text{bulk}} > \mu_{\text{layer}}$ .

CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI



FIGURE 1: Different scales for different models : (a) molecular-scale description, (b) mesoscale where the curves describe the concentration field that decreases near the wall (according to a continuous or discontinuous model) and (c) pore scale at which an effective condition can be used.

How can this two-fluid model be used to calculate the apparent viscosity of a polymer solution flowing through a porous medium? One way to proceed is to exploit the simplicity of the two-fluid model to obtain an analytic solution for the flow through a single capillary and then go on to apply the obtained analytic solution to represent more complex structures in order to predict the apparent viscosity [183, 103, 184, 64]. To do so, a characteristic length must be defined and used instead of the radius of the capillary. For complex structures, the choice of this characteristic length is not obvious. More generally in porous media sciences, the definition of a single characteristic length is a frequent issue. In this case, according to the choice that is made, the prediction of the apparent viscosity might be inaccurate. For instance, in the article from Chauveteau [64], the apparent viscosity prediction is accurate in beads packing, where the capillary analogy is relevant, and fails in natural rocks like sandstones.

Another method would be to use computational fluid dynamics (CFD) to solve the Stokes equations at the pore scale in complex porous structures. However, this approach requires a large number of mesh elements to capture gradients in the thin depletion layer and, in most cases, it is not computationally tractable. A way to overcome this issue is to further simplify the representation and use a slip boundary condition at the solid/liquid interface (see Fig. 1b to Fig. 1c). The slip coefficient can be obtained from the solution in a capillary tube and then applied to more complex pore-scale structures. The idea is that computations where only the slip length is estimated using the capillary tube model may be more accurate than models where the whole porous medium is treated as a capillary tube. This is because it deals with the realistic pore-scale structure instead of simplifying it and there is no requirement of characteristic length estimation. However, there is no strong theoretical basis for estimating differences in accuracy and therefore, the validity of such an effective condition must be tested.

In this paper, we revisit the use of a pore-scale slip effective condition to model a wall repulsion mechanism. The derivation of this pore-scale effective condition is detailed in Section 4.3 and the slip length that we obtain is directly related to parameters of the depletion layer. In order to validate the expression of the slip length, we compare the apparent viscosity (see Eq. 4.2) obtained

from several flood experiments from the literature [64, 26] and CFD calculations that we perform on associated geometries, see Section 4.4. We show that our model provides an estimation of the apparent viscosity within an accuracy of about 10% in most cases. The main contribution of this paper is to show that this computational approach is a simple way to estimate the contribution of the depletion layer to the macroscale flow. This method also lays the foundation for further improvements, such as accounting for a non-Newtonian rheology that could be easily implemented in the numerical model.

#### 4.2 The Newtonian framework in EOR

In this Section, we go beyond the qualitative discussion of the Introduction and further justify the Newtonian framework in which this study is set for EOR applications.

The bulk rheology of a polymer solution, as measured for example by a rheometer, exhibits non-Newtonian effects. For most polymer fluids, the solution has a Newtonian behavior in the limit of low shear rates, i.e.,  $\mu_{\text{bulk}} = \mu_0$  (except yield stress fluids that are not considered in this study), and, in most cases, a shear-thinning behavior under moderate shear rates (for  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c$ ,  $\mu_{\text{bulk}} \propto \dot{\gamma}^{n-1}$ , see Fig. 2). Various laws exist to describe the shear-thinning rheology. The viscosity usually drops according to a power-law [44], as is the case for xanthan or partially hydrolyzed polyacrylamide (HPAM) polymers, which are commonly used in EOR [5]. As discussed in the Introduction, under higher shear rates elastic turbulence may occur for HPAM or xanthan, yielding an apparent shearthickening. This effect is not represented in Fig. 2.

In a porous medium, there exists a complex coupling between this bulk rheology and the multiscale geometry of the porous structure. Despite this apparent complexity, it is well accepted [64, 143] that there is a critical value of the Darcy velocity, or equivalently the pressure gradient, that controls the transition from a Newtonian to a non-Newtonian regime at the macroscale. Below this critical velocity, the flow behaves in a Newtonian manner. Fundamental aspects of this transition are discussed in [106]. In EOR modeling, this is often considered via an apparent viscosity  $\mu_{app}$  (the limitations of this approach are discussed in the Introduction) that is treated as a function of an equivalent shear rate  $\dot{\gamma}_{eq}$  that is usually calculated as

$$\dot{\gamma}_{\rm eq} = \alpha \frac{4 \left\| \left\langle \mathbf{v} \right\rangle \right\| / \phi}{R_{\rm eq}},\tag{4.3}$$

with  $\alpha$  an empirical parameter that characterizes the impact of the medium structure and

$$R_{\rm eq} = \sqrt{\frac{8k_0}{\phi}},\tag{4.4}$$

with  $\phi$  the porosity [66]. The definition of the equivalent radius  $R_{\rm eq}$ , sometimes called the "pore throat radius", results from an analogy with the flow through a capillary tube. In this paper, we will also use the length  $R_{\rm eq}$  as a characteristic length of the medium, in order to evaluate the impact of the depletion layer of thickness  $\delta$ . This definition of  $\dot{\gamma}_{\rm eq}$  is derived from models based on a tube ( $\alpha = 1$  corresponding to the expression of the maximum shear rate in a capillary tube) and a similar expression is used in petroleum engineering simulators [10]. In these simulators, the flow is also considered Newtonian for  $\dot{\gamma}_{\rm eq} \lesssim \dot{\gamma}_c$ . Figure 2 represents a simplified view of the bulk and apparent viscosities dependence upon the shear rate for a xanthan solution. In an ideal situation

CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI



FIGURE 2: Simplified representation of the viscosity dependence upon the shear rate (the viscosity is calculated with a Bird-Carreau model [37]) for a xanthan polymer solution. For HPAM, the apparent shear-thinning is often not observed, as elastic effects rapidly become predominant in the non-Newtonian regime [185]. In a porous medium, the apparent viscosity ( $\mu_{app}$  in Eq. 4.2) is plotted versus an apparent shear rate  $\dot{\gamma}_{eq}$  [66]. The apparent and bulk viscosities are represented with the same slope in the non-Newtonian regime. This might not always be the case in practical situations [5] where different slopes have been observed. The parameter  $\alpha$  in Eq. 4.3 is used to superpose the apparent and bulk viscosity curves in the non-Newtonian regime. This leads to a shift in the transition from the Newtonian to the non-Newtonian regime between the bulk and apparent viscosities. For example,  $\alpha$  is about 2 for beads packings [33] and rises up to 10 for sandstones [103].

where all the phenomena described in the Introduction are not occurring, the apparent viscosity drop in the Newtonian regime,  $\Delta \mu_{app}$  in Fig. 2, is only induced by the depletion layer.

We now ask the question of whether the situation  $\dot{\gamma}_{eq} \leq \dot{\gamma}_c$  actually occurs in EOR? For the xanthan polymer,  $\dot{\gamma}_c$  values are typically in the range  $1 - 10 \,\mathrm{s}^{-1}$  for concentrations used in EOR [26, 184, 5]. This range of  $\dot{\gamma}_c$  must be compared to the values of  $\dot{\gamma}_{eq}$  associated with the flow through reservoirs. To estimate  $\dot{\gamma}_{eq}$ , we perform a simple order of magnitude estimation. Let us consider two wells at a distance of about 500 m (in off-shore fields the well spacing may even reach 1500 m [9]). The thickness of the reservoir is supposed to be 10 m and the injection flow rate is about 20 m<sup>3</sup>.hour<sup>-1</sup> [9]. By mass flux conservation, the velocity deep into the reservoir, i.e., halfway between the two wells, can be estimated to about  $3 \,\mathrm{cm.day}^{-1}$ . Using typical values of the permeability (1 Darcy), porosity (0.20) and  $\alpha$  (2.5 [186]), Eq. 4.3 yields an order of magnitude for  $\dot{\gamma}_{eq}$  of  $0.5 \,\mathrm{s}^{-1}$ . This value is consistent with real oil fields applications [186]. This suggests that, in a significant part of the reservoir, the flow is primarily Newtonian.

Moreover, several other effects may limit the impact of non-Newtonian rheology. For instance, in some regions of the reservoir, low polymer concentrations may exist (due for instance to a transient regime), which may also limit non-Newtonian effects [187]. Concerning HPAM, the strong degradation that polymer molecules undergo when they penetrate the reservoir results in a breakage of the chains, hence lowering the non-Newtonian effects in the bulk rheology of the fluid [188]. Finally, the salt hardness and concentration may affect the rheological properties of the solution if the polymer is charged (which is the case for HPAM) [5]. As shown by [80], the salt concentration in the injected polymer slug can lead to Newtonian-like behavior deep into the reservoir. Under these circumstances, the flow is likely Newtonian in a significant portion of the reservoir.

From the order of magnitude calculation of  $\dot{\gamma}_{eq}$  combined with these remarks, we conclude that setting the study under the Newtonian flow framework is both fundamentally important and relevant for petroleum engineering applications.

#### 4.3 The slip boundary condition

The goal of this section is to revisit an effective condition at the pore scale that is derived from the two-fluid model [189, 190]. To this end, we will study a model for the flow in a single capillary tube. First, let us consider the flow of a Newtonian fluid through a tube of radius R and length Loriented along  $\mathbf{e}_z$ . In this tube, the viscosity is described as

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_{\text{layer}} & \text{if } R - \delta \le r \le R, \\ \mu_0 & \text{if } 0 \le r \le R - \delta, \end{cases}$$
(4.5)

where  $\mu_0$  and  $\mu_{\text{layer}}$  are constant. From Eq. 4.5, it is assumed that the depleted layer thickness is uniform in the porous medium. In addition, a no-slip condition is imposed at the solid surface. Under these circumstances, as demonstrated by Chauveteau [64], the filtration velocity of the two-fluid model  $\langle v_{2f} \rangle$  is given by

$$\langle v_{2f} \rangle = -\frac{R^2 \nabla \langle p \rangle^{\beta}}{8\mu_{app}}, \text{ with } \mu_{app} = \frac{\mu_0}{1 + (\varrho - 1) \left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^4\right]},$$

$$(4.6)$$

where  $\rho$  is the ratio  $\mu_0/\mu_{\text{layer}}$  and  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  is the intrinsic pressure gradient. The absence of a depletion layer,  $\delta = 0$ , is a limiting case that leads back to the no-slip case ( $\mu_{\text{app}} = \mu_0$  in Eq. 4.6).

The goal now is to upscale the two-fluid model (Fig. 1b) into an equivalent one-fluid model along with an effective boundary condition (Fig. 1c). The choice for this boundary condition is a Navier slip, which has been widely used in different geometries [121, 122]. The slip length, which may be considered constant [68] or shear rate dependent [119, 120], is the only control parameter of the boundary condition. To connect this slip length to the mesoscale representation, i.e., the two-fluid model, we compare the flow of a two-fluid model through a single tube and the flow of a one-fluid model with a Navier slip boundary condition. Let us now consider an equivalent fluid with uniform viscosity,  $\mu_0$ , and a slip boundary condition in the form

$$v_{\rm wall} = -\ell \left. \frac{d\,v}{d\,r} \right|_{\rm wall},\tag{4.7}$$

where  $\ell$  is the slip length. The analytic solution of the velocity profile is the sum of the classical Poiseuille flow and a velocity offset. It reads

$$v(r) = v_{\text{wall}} - \frac{R^2 \nabla \langle p \rangle^{\beta}}{4\mu_0} \left( 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right).$$
(4.8)

As already calculated by [191], the mean velocity over the cross-section of the tube in the one fluid model  $U_{1f}$  is then

$$\langle v_{1f} \rangle = -\frac{R^2 \nabla \langle p \rangle^{\beta}}{8\mu_0} \left( 1 + \frac{4\ell}{R} \right). \tag{4.9}$$

We now seek  $\ell$  so that the average velocity is the same for the one and two-fluid models in Eqs. 4.6 and 4.9. After some simple algebra,  $\langle v_{1f} \rangle = \langle v_{2f} \rangle$  yields

$$\ell = \frac{R}{4} \left(\varrho - 1\right) \left[ 1 - \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^4 \right]. \tag{4.10}$$

A key step now consists in assuming that the thickness of the depletion layer is much smaller than the tube radius, which is correct if the pores are much larger than the polymer molecules. This assumption,  $\delta \ll R$ , is widely used in the development of mesoscale models and is often verified in practical situations, where R may be estimated for a porous medium by the equivalent radius  $R_{\rm eq}$ (see Eq. 4.4). As explained earlier, in this study we do not recognize  $R_{\rm eq}$  as a precise geometrical length, but rather as an order of magnitude estimate of a typical pore size. With the assumption  $\delta \ll R$ , we can use a Taylor series expansion in Eq. 4.10 to obtain

$$\ell = \delta\left(\varrho - 1\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{R}\right)\right) \simeq \delta\left(\varrho - 1\right).$$
(4.11)

We also recover the limiting case  $\delta = 0$  that yields a no-slip condition. Many studies assume further that  $\rho \gg 1$ , so that the slip length reduces to  $\ell = \delta \rho$  [75]. However, if incorrect, this simplification could greatly overestimate the slip length, so that we do not use it here. The formulation  $\ell = \delta (\rho - 1)$  is not novel. This formulation has actually already been derived, using either molecular kinetic theory as demonstrated by [192] (the original paper is in Russian, a translation can be found in [189]) or, in a similar manner to what we did here, using a creeping flow through a tube [190]. This expression has also been directly used in the literature [193, 194, 75].

With this expression, how do we link  $\ell$  to an apparent viscosity? At this point, considering that  $\delta$  and  $\rho$  are known, two options are available to predict the apparent viscosity drop for a given sandstone. The first option consists in using the formulation of Chauveteau [64] (Eq. 4.6), replacing R by a characteristic length of the porous medium. The major drawback of this approach is that the choice of this characteristic length is somewhat arbitrary. We could choose, by analogy with a capillary tube, the value  $\sqrt{8k_0/\phi}$  but we might as well choose a geometrical chord length or any other similar metric. We draw the reader's attention to the fact that, in the paper from Chauveteau [64], the characteristic length that replaces R in Eq. 4.6 is calculated such as the apparent viscosity prediction matches the experimental measurements. While for beads packings  $\sqrt{8k_0/\phi}$  works quite well to predict  $\mu_{\rm app}$ , for more complex media (such as the Fontainebleau sandstone), the use of this length predicts very poorly the apparent viscosity. This approach is hence limited to simple porous media where the capillary analogy holds.

The second option consists in performing numerical simulations on the image of the sandstone with a Navier slip condition at the interface, where the slip length is defined by Eq. 4.11. Since the slip length expression is independent from the tube radius, this approach is free of any characteristic length estimation. Despite the fact that both approaches have a similar origin, i.e. assimilating the porous medium to a capillary tube and using a slip length derived from the simple flow in a tube, it is absolutely not obvious that they will lead to the same apparent viscosity prediction.

# CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI

In particular, the slip approach captures the complex geometry of the porous medium, whereas the approach based on a capillary simplifies it. Moreover, the effective slip condition lends itself very well to future improvements. Among them, we could modify the slip length and use a nonuniform expression in the porous medium. In a tube, since the shear rate does not vary along  $\mathbf{e}_z$ , considering a uniform slip length is indeed relevant. However, in a real porous medium, under locally high shear rates, polymer molecules may align along the wall with the orientation of the flow field, therefore potentially decreasing the parameter  $\delta$  [76, 26]. In the same manner, the non-Newtonian effects might modify the parameter  $\rho$  [184]. These are possible mechanisms that could be taken into account using an effective description of the depletion layer.

To the best of our knowledge, the accuracy of the Navier slip as an effective condition to represent the depletion layer has never been evaluated for numerical applications. Besides, an effective slip condition is commonly used for a variety of interface phenomena to represent the macroscale effects. For instance, microfluidic experiments have shown that red blood cells tend to create a cell-depleted layer near the wall, that also induces an apparent slip effect [195, 196]. Gas flow through porous media under low Knudsen number might also be accurately characterized with an effective slip condition [122]. From a fundamental and general point of view, it is hence important to test the validity of such a boundary condition regarding the depletion layer effect.

#### 4.4 Accuracy of the effective model

Here, we assess the accuracy of our model by comparing CFD results to flood experimental data obtained from the literature, where the fluid injected into the core is a polymer solution and the apparent viscosity drop has been measured. In this section, parameters related to experimental data are denoted with the superscript XP while the corresponding parameters related to numerical results are denoted with the superscript CFD.

#### 4.4.1 Experimental data from the literature

Among all the data sets available, we chose to limit our comparison to xanthan flow in beads packings in the studies of Chauveteau [64] and Sorbie and Huang [26]. We chose beads packings because the complexity of the porous structure is described by a limited number of parameters (primarily, beads size and porosity), therefore allowing us to easily reproduce geometrical features of the system in CFD simulations. For more complex structures, such as Berea, Clashach or Bentheimer sandstones [103, 66], used in experiments where apparent viscosities have actually been measured, we lack information regarding the geometry of these particular structures, which may be fundamental in evaluating the macroscale effect of the depletion layer. We also chose xanthan mainly because the polymer molecules are semi-rigid, as opposed to HPAM molecules for example that are flexible. Flexible molecules yield more complicated physical phenomena (such as entanglement or elasticity as shown by [39]). Obviously, our simple slip model would not be able to capture such complicated effects. In addition, for the selected studies, the sorption of xanthan molecules to the wall was negligible so that the repulsion mechanism dominates and the two-fluid model is relevant.

Finally, we chose the works of Chauveteau [64] and Sorbie and Huang [26] because Chauveteau [64] uses the same polymer solution and changes the characteristics of the porous medium while Sorbie and Huang [26] always use the same porous medium but with different solutions. Hence, comparison with Chauveteau [64] allows us to test the robustness of the slip model with respect

to the distribution of pore sizes, in particular in the limit where  $R_{eq} = \mathcal{O}(\delta)$ , whereas comparison with Sorbie and Huang [26] allows us to evaluate the impact of the depletion layer.

For all the configurations considered, we report in Table 4.1 the main experimental parameters, i.e. the porous medium characteristics (the minimum  $D_{\min}^{XP}$  and maximum  $D_{\max}^{XP}$  beads diameters, the intrinsic permeability  $k_0^{XP}$  which is measured for the flow of the solvent, i.e., without a depletion layer, and porosity  $\phi$ ), the properties of the depletion layer ( $\delta$  and  $\rho$ ) and the measured apparent viscosity,  $\mu_{\text{app}}^{XP}$ . We note that different methods exist to estimate the thickness of the depletion layer,  $\delta$ , and the viscosity ratio,  $\rho$ . To be consistent, for all experimental data sets we use  $\delta = 0.7b$  (where *b* is the molecular length, valid approximation at low shear rates for rigid molecules [66]), and  $\mu_{\text{layer}}$  as  $(\mu_0 + \mu_{\text{solvent}})/2$  to calculate  $\rho = \mu_0/\mu_{\text{layer}}$  (proposed by Chauveteau [64]). In the paper from Sorbie and Huang [26], the polymer concentration is different for all the experimental configurations, implying that  $\rho$  varies, but the molecular length is always the same, meaning that  $\delta$  remains constant. The slip length associated to each configuration is also calculated according to Eq. 4.11.

In Table 4.1, we also report the experimental apparent viscosity drop,

$$\Delta \mu_{\rm app}^{\rm XP} = \frac{\mu_0 - \mu_{\rm app}^{\rm XP}}{\mu_0}.$$
 (4.12)

As expected, we observe with the cases from Sorbie and Huang [26] that the apparent viscosity drop increases with the slip length. On the other hand, in the cases from [64], the slip length is fixed and  $k_0^{\text{XP}}$ , or the experimental equivalent radius  $R_{\text{eq}}^{\text{XP}} = \sqrt{8k_0^{\text{XP}}/\phi}$ , varies. We observe that small values of  $k_0^{\text{XP}}$ , or  $R_{\text{eq}}^{\text{XP}}$ , correspond to large values of  $\Delta \mu_{\text{app}}^{\text{XP}}$ . This is because, for a fixed average velocity, the shear rates close to the wall will be larger for the smallest values of  $R_{\text{eq}}^{\text{XP}}$ , hence inducing a higher slip velocity.

#### 4.4.2 CFD simulations

For CFD simulations, we approximate the flow in the beads packings using face-centered cubic (FCC) packings. In the standard FCC, the porosity is about 0.26 and the beads are in contact. The beads diameter of the generated FCC is denoted by  $D^{\text{CFD}}$ . To generate a geometry close to the packings used in the experiments, we first shrank the beads, which are not in contact any more (see Fig. 3a), until we match the porosity ( $\phi^{\text{XP}} = \phi^{\text{CFD}} = \phi$ ). Then, we scaled the beads diameter so that  $D^{\text{CFD}} = (D_{\text{max}}^{\text{max}} + D_{\text{min}}^{\text{XP}})/2$  (see Tables 4.1 and 4.2), while preserving the correct porosity.

We could have used other methods to produce more realistic beads packings, e.g. generating the packings randomly [197] or imaging an actual packing via x-ray microtomography. Compared to the experiments, we would have probably obtained a more realistic geometry than the FCC packings (in terms of disorder or tortuosity). However, the aim here is to keep the procedure as simple as possible in order to evaluate if a Navier slip condition captures the characteristics of the macroscopic flow. Moreover, slip is known to strongly depend on the distribution of pore sizes. For instance, if the slip length is too small compared to the typical geometrical length, the slip effect becomes negligible. Therefore, we expect that to correctly estimate the slip effect, matching the pore size may be more important than matching the spatial organization of the beads or the permeability.

In the liquid phase, denoted by subscript  $\beta$ , the flow is described by the incompressible Stokes equations

$$\nabla \cdot \left[ \mu_0 \left( \nabla \mathbf{v} + \left( \nabla \mathbf{v} \right)^\mathsf{T} \right) \right] - \nabla p + \rho \mathbf{f} = 0, \qquad (4.13)$$
$\Delta \mu_{\mathrm{app}}^{\mathrm{AF}}$ (%)	×	13	14	16	7	15	17	18	10	17	18	2.5	6.25	10	15	26	32	41
$\mu_{\mathrm{app}}^{\mathrm{AF}}$	1.21	1.37	1.80	2.57	1.22	1.40	1.74	2.27	1.37	1.73	3.2	3.9	3.75	3.6	3.37	2.97	2.72	2.37
ł	0.08	0.14	0.23	0.34	0.08	0.16	0.23	0.31	0.13	0.23	0.40				0.34			
ō	1.11	1.20	1.32	1.49	1.11	1.21	1.32	1.45	1.18	1.33	1.57				1.6			
δ						0.7									0.575			
$\mu_0$	1.32	1.57	2.10	3.06	1.31	1.65	2.10	2.76	1.53	2.08	3.9				4			
$k_0^{\rm XP}$						2						137	36	8.4	2.4	0.66	0.21	0.11
$D_{ m max}^{ m XP}$						00						500	250	100	50	30	20	15
$D_{\min}^{XP}$						45						400	200	80	40	20	10	×
φ						0.34			_			0.40	0.40	0.40	0.41	0.41	0.41	0.41
Conf.	$\mathbf{S1}$	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	$\mathbf{S9}$	S10	S11	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Exp. data	No. $1 : row 1$	No. $1 : row 2$	No. $1 : row 3$	No. $1 : row 4$	No. $2 : row 1$	No. $2 : row 2$	No. $2 : row 3$	No. $2 : row 4$	No. $3 : row 1$	No. $3 : row 2$	No. $3 : row 3$	Table II : row 1	Table II : row 2	Table II : row 3	Table II : row 4	Table II : row 5	Table II : row 6	Table II : row 7
Ref						[26]									[64]			

ñ are identical whereas in [26] (S cases) the porous medium used is the same for all experiments. The experimental apparent viscosity drop is calculated as  $\Delta \mu_{\rm app}^{\rm XP} = (\mu_0 - \mu_{\rm app}^{\rm XP})/\mu_0$ . All lengths in  $\mu m$ , intrinsic permeability  $k_0^{\rm XP}$  in  $\mu m^2$  and viscosity in cP. TABLE

# CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI

along with  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , where **f** is a source term, playing the role of  $-\left(\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}\right)$  in Eq. 4.2. For the solid/liquid interface, which we note  $A_{\beta\sigma}$  ( $\sigma$  is the solid), we use the [121] slip boundary condition,

$$\mathbf{v} = -\ell \left[ \mathbf{n} \cdot \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathsf{T}} \right) \right] \cdot (\mathsf{I} - \mathbf{nn}), \qquad (4.14)$$

where **n** is the unit normal vector to the surface directed from  $\beta$  to  $\sigma$  (see Appendice A). For the external boundaries, periodic conditions are applied to both the velocity and pressure.

These equations are solved using the finite volume toolbox OpenFOAM [134] via a SIMPLE algorithm originally developed by [130]. Since the grids are collocated (pressure and velocity are calculated at the same point), a Rhie-Chow type interpolation [135] is employed during the pressure correction steps in OpenFOAM, by estimating the pressure gradient on the cell faces with the pressure values of the neighbouring cell centers. This Rhie-Chow method prevents the solution from becoming unstable, by enforcing the pressure/velocity coupling in the course of the SIMPLE algorithm (see a detailed description in [137]).

To assess numerical convergence, several unstructured hex-dominant meshes (from coarse to fine) were generated and the accuracy of the associated solutions is evaluated using a convergence error estimate of the no-slip permeability  $k_0^{\text{CFD}}$ ,

$$E(k_0) = \frac{k_0^{\text{CFD}} - k_{0\text{finest}}^{\text{CFD}}}{k_{0\text{finest}}^{\text{CFD}}},$$
(4.15)

where  $k_{0\text{finest}}^{\text{CFD}}$  corresponds to the finest calculation of the intrinsic permeability. The number of cells in the finest grid is denoted as  $N_{\text{max}}$  and is about 26 millions. Fig. 3b shows the error estimate decreasing with the number of cells. The final chosen grids for our CFD simulations contain about 3 million cells.



FIGURE 3: (a) Typical porous structure used in the CFD simulations and (b) grid convergence study, with the error  $E(k_0^{\text{CFD}})$  plotted against the normalized number of cells  $N/N_{\text{max}}$ . The final meshes are chosen for an acceptable relative error of about 0.5%.

### CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI

Using the final chosen grids, we calculated for each case of Table 4.2 the intrinsic permeability tensor  $\mathsf{K}_0^{\mathrm{CFD}}$ , defined with a no-slip boundary condition at  $A_{\beta\sigma}$ . Since the medium is isotropic and the momentum transport operator is linear (Eq. 4.13), the permeability tensor can be written as  $\mathsf{K}_0 = k_0^{\mathrm{CFD}}\mathsf{I}$ . In the CFD simulations, we impose the source term **f** along the spatial direction  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_z$ , yielding an average velocity  $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle v \rangle \mathbf{e}_z$ . The apparent permeability is then simply calculated with Eq. 4.2 as  $k_0^{\mathrm{CFD}} f/\langle v \rangle$ .

### 4.4.3 Results and discussion

Numerical simulations with and without slip are used to estimate the apparent viscosity  $\mu_{app}^{CFD}$ and perform a comparison with its experimental value  $\mu_{app}^{XP}$ . We calculate the relative difference

$$E(\mu) = \frac{\mu_{\text{app}}^{\text{CFD}} - \mu_{\text{app}}^{\text{XP}}}{\mu_{\text{app}}^{\text{XP}}}.$$
(4.16)

Results are summarized in Table 4.2 and  $E(\mu)$  is plotted in Figure 4. Since our porous medium is idealized in the CFD simulations, we further introduce uncertainties to facilitate the comparison with experiments :

- First, in the FCC packings, the beads are perfectly ordered which is not the case in the experiments. In order to evaluate the uncertainty induced by this, we randomly shifted the position of the beads, authorizing contact between beads, and simulated the flow through these geometries. We find that the influence of disorder is rather small (less than 1% change in the apparent viscosity).
- Second, there is a distribution of beads sizes in the experiments (unknown since only a range is reported in the papers) that is not captured by the FCC structures. To estimate the uncertainty associated with the distribution of sizes, we simulated the flow through FCC packings with beads size  $D^{\text{CFD}}$  corresponding to  $D_{\min}^{\text{XP}}$  and  $D_{\max}^{\text{XP}}$  reported in the papers. We find that the influence of the beads size on  $\mu_{\text{app}}^{\text{CFD}}$  can be significant, with differences up to 12%.

Fig. 4 shows that, for the mean values, CFD simulations in FCC packings provide an accurate estimation of the apparent viscosity, with an error below 10% for most cases. We also emphasize that, even though the estimation of the apparent viscosity is accurate, the permeability prediction is less accurate. We observe indeed that the ratio of permeability between CFD and experiments varies between 0.75 and 1.20 for the study of Chauveteau [64] and is about 2 for the paper from Sorbie and Huang [26]. We note that in the paper from Sorbie and Huang [26], the accuracy of the intrinsic permeability measurement is lower than in the paper from Chauveteau [64].

A question emerges here : what would have been the apparent viscosity prediction if we had chosen  $D^{\text{CFD}}$  such as  $k_0^{\text{CFD}} = k_0^{\text{XP}}$ ? We tested this configuration and found that the predictions were always in the range of the error bars plotted in Fig. 4 (except for medium C1, where the error is extremely small anyway). For instance, for the media in [26], tuning  $D^{\text{CFD}}$  so that the experimental and numerical permeabilities are matched actually leads to  $D^{\text{CFD}} \simeq D_{\min}^{\text{XP}}$ , which corresponds to the lowest part of the error bar. While this choice improves the prediction for some media, it also makes it worse for other media. The arbitrary choice of  $D^{\text{CFD}}$  such as  $k_0^{\text{CFD}} = k_0^{\text{XP}}$  is thus not better than  $D^{\text{CFD}} = (D_{\max}^{\text{XP}} + D_{\min}^{\text{XP}})/2$ . For the reason explained above, we prefer to compare porous media that have the same geometrical characteristic length rather than the same permeability.

Interestingly, the only case for which the error is over 10% corresponds to a configuration where  $R_{eq}^{CFD}$  is small and for which we have the largest uncertainty. For the results of Chauveteau [64],

$\ell \mid \mu($	$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$  \mathcal{R}_{eq}^{\pm} -   \ell   \mu_0$	$D^{\mathrm{CFD}} \mid R_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{CFD}} \mid \ell \mid \mu_{\mathrm{eq}}$	$  \varphi   U^{\text{vir}}   R_{eq}^{\text{vir}}   k   \mu($
0.08   1.3	0.08 1.3	0.08 1.3	0.08 1.3	0.08 1.3
).14 1.5	0.14 1.5	0.14 1.5	0.14 1.5	0.14 1.5
).23 2.	0.23 2.	0.23 2.	0.23 2.	0.23 2.
).34 3	0.34 3	0.34 3	0.34 3	0.34 3
0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
).16 ]	7 0.16	7 0.16 1	67.5 7 0.16 ]	0.34 67.5 7 0.16 ]
).23 2	0.23 2	0.23 2	0.23 2	0.23 2
).31 2	0.31 2	0.31 2	0.31 2	0.31 2
).13 1	0.13 ]	0.13 1	0.13 1	0.13 1
).23 2	0.23 2	0.23 2	0.23 2	0.23 2
.40 5	0.40	0.40 5	0.40	0.40
	).1	59.1	450 59.1	0.40 $450$ $59.1$
	[.3	31.3	225 31.3	0.40 $225$ $31.3$
	2.5	12.5	90 12.5	0.40  90  12.5
).34	27 0.34	6.27 $0.34$	45  6.27  0.34	0.41 45 $6.27$ $0.34$
	48	3.48	25 $3.48$	0.41 $25$ $3.48$
	60	2.09	15  2.09	0.41 15 $2.09$
	47	1.47	11.5 1.47	0.41 11.5 1.47

CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI

### CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI

Fig. 4 also shows that the accuracy of the model is the poorest for media C6 and C7 and tends to increase with  $R_{\rm eq}^{\rm CFD}$ . While the assumption  $\delta \ll R_{\rm eq}^{\rm CFD}$  is necessary to obtain the expression of the slip length, the ratio  $\delta/R_{\rm eq}^{\rm CFD}$  gets close to unity for media C6 and C7 (see Table 4.2). We hypothesize that this is the cause of the observed inaccuracies. When the polymer size is close to the size of the pores ( $R_{\rm eq}^{\rm CFD} = \mathcal{O}(\delta)$ ), the physics involved might indeed be very different, and a pore-scale description of the polymer solution as a continuum could be irrelevant. On the other hand, in the configurations from Sorbie and Huang [26],  $R_{\rm eq}^{\rm CFD}$  is fixed and the assumption  $\delta \ll R_{\rm eq}^{\rm CFD}$  is always verified. Hence, we can focus on the dependence of  $E(\mu)$  on the slip length. We observe no clear trend of  $E(\mu)$  with respect to  $\ell$ . We conclude that the accuracy of the model is not sensitive to the slip length.

Finally, it is important to keep in mind the following. Firstly, other phenomena may occur that are not described by our model, such as the retention of polymer molecules [81], or micro-gels [28]. Moreover, when the flow regime is high enough, non-Newtonian effects should be taken into account. This would result in  $E(\mu)$  being a function of the average velocity. Secondly, the effective condition is based on the two-fluid model that is a relatively crude description of the depletion layer (because of the discontinuous concentration field). Finally, experimental uncertainties were not clearly quantified in the studies of Chauveteau [64] and Sorbie and Huang [26]. Despite this, values of  $E(\mu)$  are below 10% in most cases, and we conclude that our approach for calculating the slip length provides a good first-order estimation of the apparent viscosity.

### 4.5 Summary and conclusions

Polymer molecules can arrange and interact with the solid/liquid interface in a variety of ways. At the molecular scale, one of these rearrangements is a repulsion mechanism of polymer molecules from the wall, creating a depletion layer acting as a lubricating film. At the macro scale, this effect can be described using an apparent viscosity in Darcy's law that is lower than the bulk viscosity. There are several practical situations where this interfacial effect is predominant in the macroscale flow behavior, such as polymer injection for EOR. Therefore, it is important to have available a rapid and simple tool to quantify the relative contribution of the depletion layer with respect to other phenomena associated to polymer.

In this paper, we have investigated the accuracy of an effective slip condition in capturing the apparent viscosity drop. We first revisited the formulation  $\ell = \delta (\rho - 1)$ , where  $\delta$  is the thickness of the depletion layer and  $\rho$  the ratio of viscosity between the bulk fluid and the depletion layer. We then assessed the accuracy of this effective condition by comparing viscosity drops obtained in coreflood experiments in Chauveteau [64] and Sorbie and Huang [26] to CFD calculations in model geometries. We found that in most cases the effective condition predicts the apparent viscosity with an error below 10%. This method only requires the parameters  $\delta$ ,  $\rho$  and an image of the porous medium. Therefore, this simple expression of the slip length in the Navier boundary condition may be used as a quick way to evaluate the macroscale apparent viscosity drop.

Several subsequent investigations may follow from the proposed numerical methodology. For instance, we validated the proposed methodology with beads packing, where the complexity of the porous structure is moderate compared to natural media, such as sandstones. However, the main advantage of the effective condition approach is that it deals with the actual pore-scale structure instead of simplifying it. Therefore, if the geometry of the medium is available, we assume that the effective slip condition would yield a similar accuracy when applied to natural porous media. However, this is a conjecture and it requires further investigations.

CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA RÉPULSION DES CHAÎNES DE POLYMÈRE À LA PAROI



FIGURE 4: Comparison of experimental and numerical results via the dimensionless viscosity  $E(\mu) = \frac{\mu_{app}^{CFD} - \mu_{app}^{XP}}{\mu_{app}^{XP}}$ . The averaged value of  $E(\mu)$  is about -4.4% for [64] and 3.5\% for [26].

A step further would also be to assess the impact of non-Newtonian effects on the Navier slip length and the impact of this effective slip on the macroscale transition between Newtonian and non-Newtonian regimes [106]. In addition, an advantage of the slip formulation, as opposed to the two-fluid model, is its ability to deal with a non-uniform depletion layer. For instance, the viscosity ratio  $\rho$  may be treated as a function of the local concentration field or profile [78, 64] in future work. Likewise, as suggested by Sorbie and Huang [26],  $\delta$  may vary with the local wall shear rate.

### Chapitre 5

# Étude de l'influence de la non-linéarité et de la structure poreuse sur la perméabilité apparente

Les résultats des simulations numériques du Chapitre 3 ont permis de relier la phénoménologie à l'échelle du pore à la transition de régimes macroscopiques pour des milieux isotropes. Pour aller plus loin, on approfondie la notion de perméabilité apparente pour des cas anisotropes et on étudie l'éffet du désordre. On postule une description macroscopique sous la forme

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -k_{\mathrm{n}} \mathsf{P} \cdot \frac{\mathsf{K}_{0}}{\mu_{0}} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g} \right), \tag{5.1}$$

où  $\langle \mathbf{v} \rangle$  est la vitesse moyenne superficielle,  $\mathsf{K}_0$  le tenseur de perméabilité intrinsèque (associé à un écoulement linéaire),  $\mu_0$  est la viscosité dans la limite Newtonienne,  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  est le gradient de pression intrinsèque et  $\rho \mathbf{g}$  est le terme gravitaire.

L'idée principale est de traiter la non-linéarité à travers le scalaire  $k_n$ , qui décrit un changement de norme du tenseur de perméabilité, et la matrice de rotation P, qui traduit un changement d'orientation des axes principaux de K<sub>0</sub>. Une telle forme peut être obtenue, sous de nombreuses hypothèses, par une méthode de changement d'échelle pour un fluide non-Newtonien dont la viscosité est décrite par une loi générique (voir Annexe D). L'approche est similaire à celle proposée par Whitaker [22] pour le cas des écoulements rampants. Cependant, la différence majeure est qu'une telle procédure a été développée pour traiter des cas linéaires et n'aboutit pas à une forme simple dans le cas non-linéaire. Ce résultat était attendu puisqu'il n'y a *a priori* aucune raison de retrouver une forme Darcy linéaire dans le cas où la viscosité est définie comme une fonction non-linéaire du taux de cisaillement.

Dans ce Chapitre, on s'intéresse au comportement du scalaire  $k_n$  et de la matrice de rotation P qui sont des fonctions non linéaires de la vitesse moyenne (norme et orientation). On étudie en particulier le comportement du terme  $k_n$ P dans différentes configurations, sa sensibilité à la direction de l'écoulement, à la non-linéarité et au désordre. Pour cela, on utilise des milieux poreux artificiels,

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

où le désordre et l'anisotropie sont contrôlés, et un milieu poreux naturel de type Bentheimer. Le résultat principal est que les directions de la vitesse Newtonienne et non-Newtonienne sont très proches si le milieu est assez désordonné et isotrope. Ce résultat justifie l'utilisation uniquement du scalaire  $k_n$  pour prendre en compte les effets non-Newtoniens, ce qui est le cas dans les simulateurs de réservoirs en ingénierie pétrolière. Si ce scalaire est traité comme faisant partie d'une viscosité apparente, les corrélations utilisées en ingénierie demeurent peu précises car le comportement de la viscosité apparente peut être différent de celui de la viscosité calculée dans un rhéomètre.

This Chapter is written in English since it is has been submitted to Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics.

### 5.1 Introduction

Complex fluids flowing through porous media are found in many practical applications such as composites manufacturing [2], blood flow [1, 198] or Enhanced Oil Recovery (EOR) [5]. For EOR applications, although the positive impact of polymer flooding has been well documented [4, 8], many aspects of the fundamental physics of polymer flows are still poorly understood. Due to the intra- or inter-molecular phenomena associated to polymer molecules, specific flow features arise in regions where the velocity gradients are strong. This is the case, for instance, close to the well-bore where the strain rates are high and the fluid exhibits a complex non-Newtonian rheology, which depends on the type of polymer that is used. Some polymer solutions are well described by yield stress or Bingham fluids [3]. Some exhibit a Newtonian behavior when submitted to low shear rates, followed by a viscosity drop or increase at higher shear rates [37]. Others also exhibit transient viscoelastic features [39]. Due to these rheological effects, the flow of polymer solution through porous media is very complex, making it challenging to model flows at the continuum-scale.

What are the continuum-scale models used to describe the flow of polymer solutions in porous media? There are mainly two options, which are both simple extensions of Darcy's law. The first one consists in using an apparent permeability tensor [127, 98, 97],

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_{\mathrm{app}}}{\mu_0} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right), \tag{5.2}$$

with  $\langle \mathbf{v} \rangle$  the average superficial velocity,  $\mu_0$  the fluid Newtonian viscosity,  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  the gradient of intrinsic pressure and  $\rho \mathbf{g}$  the gravity term. The second one consists in using an apparent viscosity  $\mu_{\rm app}$  [109, 64, 5],

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_0}{\mu_{\mathrm{app}}} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right), \tag{5.3}$$

with  $K_0$  the intrinsic permeability tensor. The main difference between these two formulations is that the first modification is tensorial whereas the second one is scalar. As discussed in the Chapter 3, if the orientation of the non-Newtonian average velocity (denoted by  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle / || \langle \mathbf{v} \rangle ||$ ) and the Newtonian average velocity (denoted by  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}^0$ ) are different, the first approach offers the possibility to represent this effect while the second approach does not. Therefore, the first approach is more general.

The model with the apparent viscosity, although the simplest, is the one that is used in petroleum engineering. As discussed in Section 1.3.3 of Chapter 1, the single-phase macroscale transport of a polymer solution is usually treated in reservoir simulators using (see [10])

$$\mu_{\rm app}\left(\dot{\gamma}_{\rm eq}\right) = \mu\left(\dot{\gamma}_{\rm eq}\right) R_{\rm k},\tag{5.4}$$

where  $R_k$  is the so-called permeability reduction factor (not necessarily constant) and  $\mu$  is the rheological law of the bulk fluid, therefore describing the microscale behavior of the flow. The idea here is that this bulk rheology of the fluid can be used to describe the macroscale flows by introducing an equivalent shear,  $\dot{\gamma}_{eq}$ , which unlike the local shear rate  $\dot{\gamma}$ , is a macroscale field. This equivalent shear rate is usually calculated as [64]

$$\dot{\gamma}_{\rm eq} = \alpha \frac{4 \left\| \langle \mathbf{v} \rangle \right\|}{\phi R_{\rm eq}},\tag{5.5}$$

with  $\phi$  the porosity and  $\alpha$  an empirical parameter that characterizes the impact of the porous structure and may depend on various surrounding parameters [103, 33]. The equivalent radius  $R_{eq}$  is defined as

$$R_{\rm eq} = \sqrt{\frac{8k_0}{\phi}},\tag{5.6}$$

in the case of an isotropic medium. In the anisotropic case, a different formulation involving  $\|\mathsf{K}_0^{-1/2} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle\|$  is used in reservoir simulators [10]. If the medium is not isotropic, we simply use in this Chapter  $\|\mathsf{K}_0\|$  instead of  $k_0$  to calculate  $R_{\rm eq}$ , where the norm is defined as the maximum of the eigenvalues of  $\mathsf{K}_0$ . The definition of the equivalent radius  $R_{\rm eq}$  in Eq. 5.6, sometimes called the "pore throat radius", results from an analogy with the flow through a capillary tube [66].

This heuristic formulation presents several problems. First, the parameter  $R_{\rm k}$  is supposed to take into account the retention mechanisms associated to the flow of polymers [10, 96]. However, in practical coreflood experiments,  $R_{\rm k}$  may depend on various parameters, such as the salinity, concentration of polymers or even the average velocity [79]. The sensitivity of  $R_{\rm k}$  to these parameters is still not fully understood, leading to semi-empirical formulations of  $R_k$  in the reservoir simulators. Another problem related to Eq. 5.4 is the assumption that the trends of  $\mu_{app}$  and  $\mu$  are the same. However, even if  $\dot{\gamma}_{eq}$  may be calibrated via the parameter  $\alpha$  in Eq. 5.5, there is a priori no reason for the apparent and bulk fluid viscosities to exhibit the same behavior with the shear rate. As discussed in Chapter 3, a striking example is the case of the PLCO viscosity model (see Eq. 1.1), where it is obvious that the functions are not the same. Sorbie and Huang [26] also observed a macroscale dependency of the apparent viscosity with the equivalent shear rate  $\mu_{app} \propto \dot{\gamma}_{eq}^{m-1}$  different from that of the bulk behavior  $\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1}$  with m > n. Finally, if a repulsive mechanism occurs at the wall, a depletion layer is created and yields a lower apparent viscosity (see Chapter 4). For all these reasons, an approach based only on  $\dot{\gamma}_{eq}$  and  $\mu$  may not be adequate. In reservoir simulators, the parameters of the Bird-Carreau model that describes  $\mu_{app}$  are tuned to take into account the differences cited above, a method which is not satisfactory from a fundamental point of view and may not always be accurate.

Can we develop better continuum models and understand the link between  $\mu_{app}$  and  $\mu$ ? In porous media sciences, this link between the pore-scale physics and the continuum models is often established using upscaling procedures. These are generally used to derive macroscale laws directly from the fundamental principles at the pore-scale (see Fig. 4 in Chapter 1). A variety of approaches exist (see discussions in [199]), including the volume averaging method (VAM). For instance, Whitaker in [22] showed that for the creeping incompressible flow of a Newtonian fluid with a no-slip condition at the solid/liquid interface, the classical Darcy's law is obtained [200],

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_0}{\mu_0} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g} \right). \tag{5.7}$$

One of the main result of the VAM is that the intrinsic permeability  $K_0$  is a function of closure variables and can be calculated for a given porous structure. For linear flows, the link between the pore-scale physics and the continuum-scale models is now well understood. However, the same is not true of non-Newtonian flows that are described by non-linear partial differential equations. The problem is that the VAM, along with most upscaling techniques, is intrinsically a linear method.

There are few very specific cases for which upscaling approaches seem to have been successful, such as the case of a pure power-law rheological model, i.e.,  $\mu \propto \dot{\gamma}^{n-1}$ , with  $\dot{\gamma}$  the local shear rate and n the rheological parameter that controls the nonlinearity [127, 98]. With such a specific rheology, many theoretical analysis and numerical studies have shown that the permeability is proportional to  $\|\langle \mathbf{v} \rangle\|^{1-n}$  [97, 145]. These results are also validated by many coreflood experiments [64, 4, 33]. Theoretical developments and numerical results [98, 97, 127] have shown that the permeability tensor is sensitive to the average velocity direction  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}$ . However, these studies are limited to a pure power-law fluid, which is not an acceptable model for polymer solutions (because most of them exhibit a Newtonian viscosity plateau at low shear rates), and simple unit-cell geometries.

In this study, we focus on a PLCO fluid and wish to study the behavior of  $K_{\rm app}$ . To do so, we postulate the following form

$$\mathsf{K}_{\mathrm{app}} = k_{\mathrm{n}}\mathsf{P}\cdot\mathsf{K}_{\mathsf{0}},\tag{5.8}$$

with  $k_n$  a scalar capturing the modification of the norm of the permeability tensor due to non-Newtonian effects and P a rotation tensor capturing changes in the directions of the permeability that may be written as

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma)\\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
(5.9)

with  $\alpha$  and  $\gamma$  the rotation angles. In Appendix D, we show that this formulation can be obtained by spatially averaging the flow problem at the pore-scale. However, contrary to the linear case, the problem is only closed on a specific manner. Further, while in the linear case the intrinsic permeability tensor K<sub>0</sub> is symmetric (see Appendix C), the same is not true of K<sub>app</sub> because of nonlinear effects [201].

The macroscopic model is a modified Darcy's law of the form

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -k_{\mathrm{n}} \mathsf{P} \cdot \frac{\mathsf{K}_{0}}{\mu_{0}} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g} \right) = k_{\mathrm{n}} \mathsf{P} \cdot \left\langle \mathbf{v}_{0} \right\rangle, \tag{5.10}$$

with  $\langle \mathbf{v}_0 \rangle$  the average velocity associated to the linear flow at the same value of  $\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}$ . To establish a relationship between the reservoir simulators model (Eq. 5.4) and the macroscale law proposed by the upscaling (Eq. 5.10), we must assume that the nonlinearity does not affect the average velocity direction, i.e.,  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  or  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_{\mathbf{v}}^{0}$ , and that  $k_n$  is independent of  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}$ . Under these restrictives assumptions, an apparent viscosity  $\mu_{app}^{\mathbf{P}=\mathbf{I}}$  may be simply related to  $k_n$  as

$$\mu_{\text{app}}^{\mathsf{P}=\mathsf{I}}\left(\|\langle \mathbf{v} \rangle\|\right) = \frac{\mu_{0}}{k_{n}\left(\|\langle \mathbf{v} \rangle\|\right)}.$$
(5.11)

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

In this Chapter, we use simulations at the pore-scale over a broad range of porous structures (see Section 5.2) to study the behavior of  $k_n P$  in Section 5.3. More specifically, we wish to answer the following questions : What is the behavior of  $k_n P$  in the different flow regime? When is it correct to use only a scalar in the Darcy's law to represent the non-Newtonian effects? What is the effect of disorder inherent to the porous structure on  $k_n P$ ? What is the effect of anisotropy on  $k_n P$ ? In addition to these fundamental questions, remarks concerning reservoir simulators models will be drawn along the Section 5.4.

### 5.2 Models and Methods

#### 5.2.1 The pore-scale flow model

In this section, we describe the pore-scale flow model considered in this study. We limit our study to the steady, incompressible, single-phase, creeping flow of a liquid ( $\beta$ -phase) through a rigid porous medium ( $\sigma$ -phase). Momentum and mass balance equations read

$$\nabla \cdot \left[\mu\left(\dot{\gamma}\right)\left(\nabla \mathbf{v} + \left(\nabla \mathbf{v}\right)^{\mathsf{T}}\right)\right] - \nabla p + \rho \mathbf{f} = 0 \text{ in } V_{\beta}, \qquad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } V_{\beta}, \qquad (5.13)$$

where  $\rho \mathbf{f}$  is the source of the momentum,  $\mathbf{v}$  the velocity field and p the pressure field. The non-Newtonian rheology is described by  $\mu(\dot{\gamma})$ , with  $\dot{\gamma}$  the local shear rate, and is the only source of nonlinearity in the problem. We consider the power-law with cut-off (PLCO) model,

$$\mu\left(\dot{\gamma}\right) = \begin{cases} \mu_0 & \text{if } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c, \\ \mu_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} & \text{else,} \end{cases}$$
(5.14)

which is one of the simplest models for xanthan or HPAM, both used in practical EOR situations [5]. The focal feature of this law is that it captures both the Newtonian asymptote for low shear rates and the power-law shear-thinning behavior at high shear rates. We could have used more sophisticated models [37] but the PLCO remains a reasonable description of polymer solutions, especially for xanthan, a semi-rigid rod-like polymer [24]. For more flexible molecules, time-dependent mechanisms may occur, yielding elastic turbulence [39], which cannot be represented by a steady-state model, such as PLCO [44]. Consistent with xanthan solutions at concentrations typically used in EOR, we use  $\dot{\gamma}_c = 1 \, \mathrm{s}^{-1}$  and  $\mu_0 = 3.5 \, \mathrm{cP}$ . In the PLCO model, the parameter *n* will be used to control the nonlinear effects (n = 1 in Eq. 5.14 corresponds to the Newtonian rheology) and assess their impact. Finally, we consider a simple no-slip condition at the solid/liquid interface,

$$\mathbf{v} = 0 \text{ at } A_{\beta\sigma}, \tag{5.15}$$

neglecting potential slip effects (see a discussion in Chapter 4).

### 5.2.2 The porous media

To understand the role of  $k_n P$  in Eq. 5.10, we are going to solve numerically the flow problem at the pore-scale over a variety of porous structures, selected for their different geometrical features. All these media are treated as locally periodic, so that effective properties  $K_0$ ,  $k_n$  and P can be easily calculated by pore-scale simulations with periodic conditions applied on  $\mathbf{v}$  and p.

#### The array of cylinders

The first class of porous structure that we consider are 2D arrays of  $15 \times 15$  cylinders, denoted as A-type, corresponding to an area of  $15 \times 15 \text{ mm}^2$ . Our goal in studying these model porous media is to assess the impact of disorder on the apparent permeability. To do so, we create a set of porous structures by first positioning the cylinders on a regular grid (medium  $A^{\sigma=0}$ , see Fig. 1a). Then, we randomly select one cylinder and define a sub-space of acceptable new positions for this cylinder that is defined by two conditions, 1) periodic boundaries must be preserved and 2) overlapping is prohibited. Finally this cylinder is moved within this sub-space according to a centered Gaussian law, which is characterized by its standard deviation  $\sigma$  that is used as a proxy to measure disorder [116]. This procedure is repeated for all cylinders. This methods generates slight biases in the distribution of the cylinder displacements, which is not truly Gaussian for  $\sigma \gtrsim 0.05$ . For each value of  $\sigma$ , 10 porous media are generated and are denoted by  $A_i^{\sigma\neq 0}$ . Examples of geometries with various degrees of disorder are presented in Fig. 1a to 1f.

#### The anisotropic structure

To study the influence of anisotropy on the macroscale flow, we use the stratified structures S1 and S2, which have already been presented in Chapter 3, see Figs. 1g and 1h. These media are periodic and their area is  $1 \text{ mm}^2$ . The pore throats in the direction  $\mathbf{e}_y$  in medium S2 are narrower than in medium S1, hence the anisotropy is higher in S2 than in S1.

#### The Bentheimer sandstone

The last porous structure that we consider is a Bentheimer sandstone, namely B (of volume  $1 \text{ mm}^3$ ), represented in Fig. 1i. This medium is very similar to sandstones encountered in EOR practical situations [7]. The geometry of this medium was extracted from x-ray micro tomography (see discussions about the related problems of the procedure in Chapter 2).

### 5.2.3 Setting of numerical simulations

The pore-scale flow problem is solved using the finite volume toolbox OpenFOAM [134] via a SIMPLE algorithm developed by Patankar [130], which is detailed in Chapter 2. Mesh convergence is studied for unstructured hex-dominant meshes that are generated for each media. For the two-dimensional structures, we could afford to use uniform meshes. However, for the three-dimensional sandstone, we achieved grid convergence by performing local mesh refinements within the pore throats. These pore throats are defined by the distance to the wall (see Section 2.2.2 of Chapter 2).

To study  $k_n$  and P under various flow conditions, we impose a source term  $\rho \mathbf{f}$  in the momentum equation to generate the flow, which plays the role of  $-\left(\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}\right)$  in the Darcy law (Eq. 5.10). The direction of the source term is specified with radial coordinates as

$$\rho \mathbf{f} = \rho \| \mathbf{f} \| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$
 (5.16)

In all the cases presented in this work, the source term is imposed in the plane  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ . Figure 2 illustrates in two dimensions the source vector  $\rho \mathbf{f}$  and the associated Newtonian,  $\langle \mathbf{v}_0 \rangle$ , and non-





FIGURE 1: Porous media investigated in Chapter 5. (a) to (f) : velocity fields of a Newtonian flow imposed in the array of cylinders (denoted A-type, area of  $15 \times 15 \text{ mm}^2$ ) with various degrees of disorder and a source term  $\rho \mathbf{f}$  imposed with  $\theta = 22.5^{\circ}$  (see Eq. 5.16). (g) and (h) : velocity fields of a Newtonian flow imposed in the anisotropic media S1 and S2 (of area 1 mm<sup>2</sup>) with a source term imposed with  $\theta = 90^{\circ}$ . (i) : solid phase of the Bentheimer sandstone B (of volume 1 mm<sup>3</sup>).

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

Newtonian,  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , average velocities. In two dimensions, only the angle  $\alpha$  is needed in the rotation matrix P (see Eq. 5.9).

We also apply periodic boundary conditions on  $\mathbf{v}$  and p. For A and S-type media, this condition is straightforward since these media are spatially periodic by construction. For medium B, this condition is ensured by surrounding the medium with a very thin layer of liquid (of thickness  $0.5 \,\mu$ m) on all sides [157]. As detailed in Section 2.3.4 of Chapter 2, this layer was as thin as possible in order to avoid preferential flows of fluid around the medium.



FIGURE 2: Angles used in a 2D case.

### 5.2.4 Metrics and statistics

To investigate the macroscale behavior with various degrees of disorder, the dimensionless intrinsic permeability  $K_0^*$  is defined for the A-type media as

$$\mathsf{K}_{0}^{*} = \frac{\mathsf{K}_{0}}{\|\mathsf{K}_{0}^{\sigma=0}\|},\tag{5.17}$$

with  $K_0^{\sigma=0}$  the intrinsic permeability of medium  $A^{\sigma=0}$ . Following the same idea, the parameter  $k_n^*$  is defined as

$$k_{\rm n}^* = \frac{k_{\rm n}}{k_{\rm n}^{\sigma=0}}.$$
(5.18)

To further investigate the statistics of the results, we define for a macroscale variable  $\psi$  the expected value  $E(\psi)$  which is the average of  $\psi$  over the 10 realizations for each value of  $\sigma$ . Following this idea, the standard deviation,

$$\Sigma(\psi) = \sqrt{E(\psi^2) - E(\psi)^2}, \qquad (5.19)$$

is also calculated for each  $\sigma$  value. In this Chapter, we will investigate the macroscale behavior in the linear case (via the parameter  $\|\mathsf{K}_0^*\|$ ) and in the nonlinear case (via the parameters  $k_n$ ,  $\alpha$  and  $\gamma$ , see Eq. 5.8) with the disorder.

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

For several Figures of this Chapter (3, 4 and 6), the same statistical representation is used. For a macroscale variable  $\psi$ , the average  $E(\psi)$  is represented by (red) disks. The standard deviation  $\Sigma(\psi)$  is represented by error bars (the lower and higher tips of the bars represent respectively  $E(\psi) - \Sigma(\psi)$  and  $E(\psi) + \Sigma(\psi)$ ). Finally, the (blue) circles represent the minimum and maximum values of  $\psi$ .

### 5.2.5 Statistical isotropy of A-type media

Before going on to present the results, we must ensure that the process used to generate the A-type media is correct. Since this procedure itself is isotropic, we expect that the disordered media should remain isotropic. To verify this, we calculate the full intrinsic permeability tensor  $K_0$  for each realization and each value of  $\sigma$ . Then we diagonalize the intrinsic permeability tensor and calculate the so-called isotropy factor with the two resulting eigenvalues  $d_{xx}$  and  $d_{yy}$ ,

j



$$f = \frac{d_{\rm xx}}{d_{\rm yy}}.\tag{5.20}$$

FIGURE 3: Statistics of f for the A-type media. (a) evolution with the disorder, characterized by  $\sigma$  and (b) evolution with the size of the medium for  $\sigma = 0.20$  (5 × 5, 10 × 10 and 15 × 15 cylinders).

Figure 3a shows that, as the disorder increases, the average value of the isotropy factor E(f) remains close to unity. The minimum and maximum values of f are also close to unity (the largest deviation is observed for  $\sigma = 0.3$  where the minimum and maximum values of f are respectively 0.70 and 1.30). Despite the fact that each realization is not isotropic, Figure 3a allows us to consider the ensemble as statistically isotropic since the expected value of f for only 10 realizations is very close to 1.

We also observe in Fig. 3a that, for a given size of the domain,  $\Sigma(f)$  increases with  $\sigma$ . We hypothesize that this is due to the finite size of the considered domain, which may not be large enough to ensure isotropy and statistical representativity when  $\sigma$  is large. For instance, we clearly see in Figs. 1a to 1f that increasing  $\sigma$  leads to structures with characteristic lengths (aggregates of

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

cylinders and preferential flow paths) much larger than the cylinder diameter. Further, given the procedure for generating these disordered structures and the periodic conditions, we expect some form of ergodicity between ensemble and spatial averages. Figure 3b, which shows that the variance of ensemble averaging strongly decreases with the size of the domain, confirms this ergodicity. For a domain size of  $15 \times 15$ , which is the size used in the remainder of the Chapter, we can consider only 10 realizations to obtain statistically converged results for f. Following the same idea, we verified that the results were statistically converged for the nonlinear parameters  $k_n$  and P, even though the results are not presented.

### 5.3 Results

### 5.3.1 Newtonian flow

We first focus on the Newtonian behavior of the different porous structures presented in Fig. 1. To evaluate differences between these structures, we characterize all media by the porosity  $\phi$ , the intrinsic permeability K<sub>0</sub> and the anisotropic factor f (see Eq. 5.20). Example results are described in Table 5.1. We remark that the order of magnitude of the calculated permeability for medium  $A^{\sigma=0}$ , which has been intensively investigated in porous media sciences [97, 98], is in good agreement with the literature and that the permeability of medium B is also correct for a sandstone medium [202, 203]. Regarding isotropy, we observe that the anisotropy is stronger in S2 (f = 10.5) than in S1 (f = 5.67).

Medium	$\phi$	K <sub>0</sub>	$\int f$
$A^{\sigma=0}$	0.4973	$\left(\begin{array}{cc}1828&0\\0&1828\end{array}\right)$	1
$A_1^{\sigma = 0.05}$	0.4973	$\left(\begin{array}{cc}1817&57\\57&1812\end{array}\right)$	0.94
$A_1^{\sigma=0.1}$	0.4950	$\left(\begin{array}{cc}1743 & 70\\70 & 1827\end{array}\right)$	1.09
$A_1^{\sigma=0.2}$	0.4950	$\left(\begin{array}{rrr} 1672 & 151 \\ 151 & 1671 \end{array}\right)$	0.83
$A_1^{\sigma=0.3}$	0.4950	$\left(\begin{array}{rrr}1626&37\\37&1380\end{array}\right)$	0.84
В	0.25	$\left(\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$	0.91
S1	0.52	$\left(\begin{array}{cc}933&0\\0&164\end{array}\right)$	5.68
S2	0.48	$\left(\begin{array}{cc} 872 & 0\\ 0 & 83 \end{array}\right)$	10.5

TABLE 5.1: Intrinsic characteristics of some of the porous media investigated. The intrinsic permeability  $K_0$  is expressed in Darcy (considering that  $1 \text{ Darcy} = 1 \mu \text{m}^2$ ). The anisotropic factor f is defined by Eq. 5.20.

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

For disordered structures,  $A^{\sigma\neq0}$ , Figure 4 shows the statistical behavior of  $\|\mathsf{K}_0^*\|$  with the disorder, characterized by  $\sigma$ . We observe that  $\Sigma(\|\mathsf{K}_0^*\|)$  increases with  $\sigma$ . As discussed above, this is related to the fact that the size of the considered domain may not be large enough to be considered as representative elementary volume (REV). Further, we observe that  $E(\|\mathsf{K}_0^*\|)$  decreases with  $\sigma$ , which is explained by the fact that the pore throats are getting narrower with the disorder (see Figs. 1a to 1f), hence increasing the energy loss by viscous friction for a fixed flow rate.



FIGURE 4: Statistics of  $\|\mathsf{K}_0^*\|$  versus  $\sigma$  for the A-type media.

### 5.3.2 Transition from Newtonian to non-Newtonian flow

We now investigate the behavior of  $k_n P$  during the transition from the Newtonian to the non-Newtonian flow regime. As shown in Chapter 3, the transition from a Newtonian to a non-Newtonian bulk rheology of the fluid (PLCO) generates a transition in  $K_{app}$ . We expect a Newtonian flow for relatively slow velocities, i.e.,  $k_n P = I$ . Then, for larger values of velocity or source term, nonlinear effects start to become predominant at the pore-scale, leading to a change in  $k_n P$ . To capture this transition, we use the dimensionless velocity introduced in Chapter 3

$$\mathcal{U}^* = \frac{\|\langle \mathbf{v} \rangle\|}{\phi \dot{\gamma}_c \sqrt{\|\mathbf{K}_0\|}}.$$
(5.21)

We have shown that for the flow of a PLCO fluid through an isotropic porous medium,  $K_0 = k_0 I$ and  $||K_0|| = k_0$ , the transition (as defined specifically in Chapter 3) occurs roughly at  $\mathcal{U}^* = 1$ . In our case, the media are only statistically isotropic so that we have used  $||K_0||$  (maximum of eigenvalues) in Eq. 5.21.

Figure 5a shows the evolution of  $k_n$  with  $\mathcal{U}^*$ . As expected, we observe a Newtonian regime behavior,  $k_n = 1$ , for all media and a transition above which  $k_n \propto (\mathcal{U}^*)^{1-n}$ . This behavior has already been demonstrated theoretically [164, 98] and observed experimentally [169, 26, 103] or numerically [127, 97, 106]. We further remark that the transition is spread over a decade of velocity,

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

making it smoother than the transition of the PLCO fluid. This transition would probably have been even smoother if we had used a smooth rheological model, such as Bird-Carreau [37].



FIGURE 5: Evolution of (a)  $k_{\rm n}$ , (b) angle  $\alpha$  of P and (c)  $\phi_{\mu\neq\mu_0}$  versus the average dimensionless velocity  $\mathcal{U}^* = \|\langle \mathbf{v} \rangle \| / (\phi \dot{\gamma}_{\rm c} \sqrt{\|\mathbf{K}_0\|})$  for several porous media. The source term direction is fixed  $(\theta = 22.5^{\circ})$  and the parameter *n* is set to 0.70. Same legend in (a) and (b). The inset in (a) is a zoom near the transition.

As already observed in Chapter 3, all curves tend to collapse to a single one. For A-type media (up to  $\sigma = 0.10$ ) and medium B, we observe that the transition occurs roughly at  $\mathcal{U}^* = 1$ . This means that for these statistically isotropic media, the use of  $\sqrt{\|K_0\|}$  as a characteristic length in Eq. 5.21 provides a way to evaluate the order of magnitude of the critical average velocity associated to the transition. For the highly disordered  $A_1^{\sigma=0.20}$  and  $A_1^{\sigma=0.30}$  media, the transition is shifted and  $\sqrt{\|K_0\|}$  does not seem to be as accurate in predicting the transition (see zoom near the transition).

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

in Fig. 5a). We hypothesize that this is due to the anisotropy of individual realizations (see f in Table 5.1).  $\|\mathsf{K}_0\|$  is indeed calculated as the maximum eigenvalue of the permeability tensor, so that  $\sqrt{\|\mathsf{K}_0\|}$  is associated to the flow in the preferential direction (defined by the eigenvector associated to  $\|\mathsf{K}_0\|$ ). In Fig. 5a, the flow is imposed at  $\theta = 22.5^{\circ}$ , which is not the preferential direction of media  $A_1^{\sigma=0.20}$  and  $A_1^{\sigma=0.30}$ , so that there is no reason for  $\sqrt{\|\mathsf{K}_0\|}$  to describe the transition in this direction.

For anisotropic media, it may therefore be interesting to use a length that is a function of the flow orientation and that differs from  $\sqrt{||\mathbf{K}_0||}$ . For instance, we could diagonalize  $\mathbf{K}_0$  to obtain the three eigenvalues and the principal axis eigenvectors. If the flow is oriented along a principal axis, we may use the square root of the associated eigenvalue as characteristic length. We could also combine the eigenvalues to calculate the lengthscale for any flow direction, which is actually what is done in reservoir simulators (see Eq. 2.83 in [10]). This new definition of  $\mathcal{U}^*$  demands further investigations that is beyond the scope of this chapter.

We then go on to study the evolution of the angles of P with  $\mathcal{U}^*$ , an aspect of the problem that was not studied in Chapter 3. For the two-dimensional A-type media, only the angle  $\alpha$  varies with  $\mathcal{U}^*$  ( $\gamma = 0^\circ$ ). For medium B, only the angle  $\alpha$  is plotted (the angle  $\gamma$  exhibits a similar behavior). For  $\mathcal{U}^* \ll 1$ , we observe  $\alpha = 0^\circ$  for all media, yielding an apparent Newtonian behavior (P = I). For  $\mathcal{U}^* > 1$ , we observe an anisotropy effect induced by the nonlinearity (P  $\neq$  I), with a plateau reached for the angles of P for a fully developed non-Newtonian regime ( $\mathcal{U}^* \gg 1$ ). For  $\mathcal{U}^* \gg 1$ ,  $\dot{\gamma}$  is higher than  $\dot{\gamma}_c$  everywhere in the liquid phase, so that the fluid behaves as a pure power-law and P becomes independent from  $||\langle \mathbf{v} \rangle ||$ . The independence of P from  $||\langle \mathbf{v} \rangle ||$  is consistent with theoretical studies that deal with pure power-law fluids [127, 97, 98]. Concerning the medium B, the behavior of  $\gamma$  is very similar to the behavior of  $\alpha$ . Both angles are sensitive to  $\mathcal{U}^*$  and their evolution is not monotonous.

So far, we have focused on the parameters  $k_n$  and P, which only reflect the macroscale behavior. In order to get more physical insight into the micro-scale flow, we calculate for each simulations the non-Newtonian volume fraction of the fluid,

$$\phi_{\mu \neq \mu_0} = \frac{V_{\mu \neq \mu_0}}{V_{\beta}},$$
(5.22)

where  $V_{\mu\neq\mu_0}$  denotes the volume of the liquid phase where the fluid is non-Newtonian, i.e., where  $\mu\neq\mu_0$ . Figure 5c shows the evolution of  $\phi_{\mu\neq\mu_0}$  versus  $\mathcal{U}^*$  for several porous media. In contrast with Fig. 5a where the curves  $k_n$  versus  $\mathcal{U}^*$  collapse roughly to a single curve, we observe in Fig. 5c that the curves  $\phi_{\mu\neq\mu_0}$  versus  $\mathcal{U}^*$  are markedly different. Furthermore, the A-type porous media show that the stronger is the disorder, the slower is the growth of the non-Newtonian domain with the flow regime. This observation is confirmed by the sandstone medium B, for which we observe that the growth of the non-Newtonian domain is the slowest, suggesting that this medium is the most disordered.

As explained in Chapter 3, since the pore throats define the region that exhibits the highest shear rates, these control the macroscale transition and are further the source of the non-Newtonian domain growth. In the ordered medium  $A^{\sigma=0}$ , most of the fluid is close to a source, so that the growth of the non-Newtonian domain with the flow regime is very fast. On the other hand, in the medium  $A_1^{\sigma=0.30}$  (see Fig. 1a) or *B*, some low velocity regions of the fluid are located away from the pore throats (see Fig. 1f). In these regions, for the viscosity to start to be non-Newtonian, the average velocity must be very high. From these observations, we conclude that the way these pore throats are spread in the porous medium controls the growth of the non-Newtonian domain. Hence, the trend of the evolution of  $\phi_{\mu\neq\mu_0}$  with  $\mathcal{U}^*$  may be seen as a trace of the interaction between the porous structure and the rheology.

### 5.3.3 Effect of disorder on the non-Newtonian flow for isotropic structures

We now focus on fully developed non-Newtonian flows ( $\mathcal{U}^* \gg 1$ ) and investigate the effect of the disorder on the macroscale parameters. For this reason, we study here statistically isotropic media (*A*-type and *B*) in order to focus on the effect of the disorder alone. For such media, we know that the ordered medium  $A^{\sigma=0}$  induces an anisotropy in the non-Newtonian regime, i.e.,  $\mathbf{e}_{v}$  becomes different form  $\mathbf{e}_{v}^{0}$  [98, 127]. For this ordered medium, the use of a scalar correction alone in Darcy's law (Eq. 5.3) is not appropriate and a tensorial approach (Eq. 5.2) is necessary. The question we ask here is whether disorder changes this and to what extent.



FIGURE 6: Statistics of (a)  $k_n^*$  and (b) angle  $\alpha$  of P versus the disorder for the A-type media. The source term direction is fixed ( $\theta = 22.5^\circ$ ) and the parameter n is set to 0.70.

Figure 6 shows the statistical evolution of  $k_n^*$  (see Eq. 5.18) and  $\alpha$  (see Eq. 5.9) with increasing disorder. For medium  $A^{\sigma=0}$ , the standard deviation is zero,  $k_n^* = 1$  and  $E(\alpha)$  is very low  $(-4.5^\circ)$ , meaning that, as shown in [98, 127], a significant anisotropy is induced by the nonlinearity for the ordered medium. For  $A^{\sigma\neq0}$ , we observe in Fig. 6a that  $E(k_n^*)$  increases with the disorder. We hypothesise that this is because the pore throats are getting narrower, hence amplifying the non-Newtonian effects. We also show in Fig. 6b that  $E(\alpha)$  is getting close to 0° as  $\sigma$  increases. This means that as disorder increases, the direction of the non-Newtonian average velocity is statistically getting closer to the direction of the Newtonian average velocity ( $\mathbf{e}_v \simeq \mathbf{e}_v^0$ ). In the case of the highly disordered sandstone medium B, Fig. 5b shows that, for  $\mathcal{U}^* \gg 1$ , the angle  $\alpha$  is smaller than 0.2° (the same order of magnitude has been observed for the angle  $\gamma$ ). In the case of this sandstone, we can then consider that  $\mathbf{e}_v \simeq \mathbf{e}_v^0$ . These two results show that the effect of increasing disorder in the porous structure is to align  $\mathbf{e}_v$  and  $\mathbf{e}_v^0$ , leading to  $\mathsf{P} \simeq \mathsf{I}$  and eliminating the rotation due to the nonlinear effects. This is the main results of this chapter.

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

To go one step further, we now investigate the influence of the parameter n, which drives the nonlinearity in the PLCO rheological model. Figure 7a shows the evolution of  $\alpha$  with n for several A-type media. We observe that, for a fixed value of  $\sigma$ , the average velocity deviation increases as the nonlinearity is getting stronger, i.e.,  $|\alpha|$  increases with |n-1|. We also observe that for a fixed value of n, the average velocity deviation decreases as the disorder increases, i.e.,  $|\alpha|$  decreases with  $\sigma$ . Further, the observation  $E(\alpha)$  getting closer to  $0^{\circ}$  as  $\sigma$  increases is confirmed by Figure 7a. We indeed have that  $|\alpha|$  is always the largest for the ordered medium. Finally, in the case of medium B, we show in Fig 7b that the angles  $\alpha$  and  $\gamma$  remain relatively small even for large n. Here, we clearly recognize a competition between the disorder clearly tends to weaken the influence of the rheology on the flow orientation.



FIGURE 7: Evolution of the angles  $\alpha$  and  $\gamma$  (associated to the rotation matrix P) versus *n* for several porous media under a fully developed non-Newtonian flow ( $\mathcal{U}^* \gg 1$ ). The source term direction is fixed ( $\theta = 22.5^{\circ}$ ).

The previous results are presented for a fixed direction of the source term. Figure 8 shows the evolution of  $k_n$  and the angles  $\alpha$  and  $\gamma$  with the source term direction, characterized by  $\theta$  (see Eq. 5.16), for  $\mathcal{U}^* \gg 1$  and several porous structures. Figures 8a and 8b show a  $\pi/2$  periodic and  $\pi/4$  anti-periodic behavior of  $k_n$  and  $\alpha$  for the ordered medium  $A^{\sigma=0}$ . This kind of periodic behavior has already been observed for similar 2D ordered arrays [127, 98]. As expected, when the source term is imposed along a preferential direction ( $\theta = m \, 45^\circ$  with  $m \in \mathbb{N}$ ), the Newtonian and non-Newtonian average velocity direction are similar ( $\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_v^0$ ) for  $A^{\sigma=0}$ .

Figure 8 also indicates that the effect of disorder also depends on the flow orientation. While the ordered medium  $A^{\sigma=0}$  exhibits a periodic behavior, this feature is weakened as the disorder increases and the magnitude of the variations of  $\alpha$  with the source term direction decreases. Further, the same observation is true for  $k_n$  in Fig. 8a. Concerning the disordered medium B, noisier a noisy trendis observed for  $k_n$  with  $\theta$ . The magnitude of the variations of  $k_n$  is also very small (the maximum reaches 1.3%) compared to the A-type media (for  $A^{\sigma=0}$ , the maximum reaches 11% ). These observations suggest that when disorder is large enough, the sensitivity of the apparent permeability with the flow direction may be neglected.

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE



FIGURE 8: Evolution of  $k_n$  and the angles  $\alpha$  and  $\gamma$  (associated to the rotation matrix P) versus the source term direction (characterized by  $\theta$ , see Eq. 5.16) for several porous media under a fully developed non-Newtonian flow ( $\mathcal{U}^* \gg 1$ ). Same legend in (a) and (b). The parameter n is set at 0.70.

# 5.3.4 Effect of the anisotropy on the non-Newtonian flow for ordered structures

We have seen in the previous section that for statistically isotropic media, the disorder tends to weaken the effect of the non-Newtonian rheology, i.e.,  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}$  is getting closer to  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}^{0}$  as  $\sigma$  increases for isotropic structures. Here we focus on order anisotropic structures and assess the impact on the non-Newtonian rheology on  $\alpha$ . To this end, we simulate a fully developed non-Newtonian flow in the ordered and anisotropic media S1 and S2 with different source term directions. Figures 9a and 9b show the evolution of respectively  $k_{n}$  and  $\alpha$  with the source term direction, characterized by  $\theta$ .

CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE



FIGURE 9: Evolution of (a)  $k_n$  and (b) the angles  $\alpha$  (associated to the rotation matrix P) versus the source term direction (characterized by  $\theta$ , see Eq. 5.16) for media S1 and S2 under a fully developed non-Newtonian flow ( $\mathcal{U}^* \gg 1$ ). The parameter n is set at 0.70.

Since the media are symmetric, the behavior is  $\pi/2$  periodic, so that only the range  $0^{\circ} - 90^{\circ}$  of  $\theta$  is reported in Fig. 9. In Fig. 9a, we observe that up to  $\theta \simeq 40^{\circ}$ , the values of  $\alpha$  are very small, i.e.,  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}} \simeq \mathbf{e}_{\mathbf{v}}^{0}$ . However, above  $\theta \simeq 40^{\circ}$ , strong and non-monotonous variations of  $\alpha$  are observed. Concerning  $k_{\mathbf{n}}$ , we also observe in Fig. 9a significant variations (up to 30%). We note that the magnitude of these variations are stronger for S2 than S1, which is explained by its stronger anisotropy. As a consequence of these results, in such strong anisotropic media, the macroscale parameter  $k_{\mathbf{n}}\mathsf{P}$  can not be considered independent from the flow direction. Further simulations are needed to assess the impact of disorder in such anisotropic structures.

### 5.4 Discussion

We have shown in Sections 5.3.3 that there is a competition between the disorder, inherent to the porous structure, and the nonlinearity, induced here by the rheology. The disorder tends to weaken the influence of the rheology on the flow orientation. To gain physical insight into this, we consider the porous media as a succession of pore bodies and pore throats. In this simplified view, each pore throat tends to deviate the non-Newtonian flow from its associated Newtonian orientation. For instance, when a fully developed non-Newtonian flow is imposed in  $A^{\sigma=0}$  (with  $\theta = 22.5^{\circ}$ ), the unit-cell composed of 1 cylinder deviates  $\mathbf{e}_{v}$  from  $\mathbf{e}_{v}^{0}$  with an angle of  $\alpha = -4.5^{\circ}$ . Since  $A^{\sigma=0}$  is spatially periodic, all the pore throats deviate the nonlinear flow in the same manner. This explains why the rheology dominates over the porous structure disorder (which is zero for  $A^{\sigma=0}$ ), so that the deviation is strong ( $E(\alpha) = -4.5^{\circ}$ , see Fig. 6b). On the other hand, in the case of disordered media, each pore throat tends to deviate the flow in a different direction. When these local deviations are averaged, the global effect of these pore throats is small. This is why averaging the behavior over 10 media is enough to statistically obtain  $E(\alpha) \simeq 0^{\circ}$  for the highly disordered media  $A^{\sigma=0.30}$ . To be more specific,  $E(\alpha)$  and  $\Sigma(\alpha)$  tend to zero with  $\sigma$  large for the case of an

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

infinite domain for disordered enough media. For a finite domain size, i.e., smaller that the REV size, we expect to have  $E(\alpha)$  and  $\Sigma(\alpha)$  different from 0 but both tending to 0 as the size increases.

Concerning medium B, we have observed that the disorder is sufficiently large to dominate over the nonlinearity, yielding  $\mathbf{e}_{v} \simeq \mathbf{e}_{v}^{0}$ . However, we have shown in Section 2.3.1 of Chapter 2 that medium B is not likely to correspond to a REV either as the number of pores is quite small, see Fig. 1i. Therefore further investigations are necessary to confirm the possibility to use a scalar in Darcy's law to account for the non-Newtonian effects. The first step would be to perform the same study on a larger sample (say 125 mm<sup>3</sup>). The value of the angles of P could get larger as the sample size increases. Although such a behavior to occur is counter intuitive, this aspect should be carefully checked. Moreover, we have shown that the angles of the rotation matrix P can reach almost 1° (it could be even more). Is a deviation of the velocity direction of a few degrees important in an EOR practical situation? To answer this question, the implementation of such behavior in reservoir simulators should be performed and tested.

This latest result could have a major impact on reservoir simulators, for which the non-Newtonian effects are treated with a scalar ( $\mu_{app}$  in Eq. 5.3). Hence, it is implicitly assumed in these models that the flow orientation is the same for a Newtonian or a non-Newtonian rheology. We have shown here that it might indeed be the case if the porous media are disordered enough. In such cases, a scalar may be enough to represent correctly the non-Newtonian effect. However, this latest result does not justify the use of an apparent viscosity as is done in petroleum engineering. As explained in the Introduction, two problems related to the use of  $\mu_{app}$  ( $\dot{\gamma}_{eq}$ ) =  $\mu$  ( $\dot{\gamma}_{eq}$ )  $R_k$  persist : 1)  $R_k$  depends on the surrounding parameters (see [10]) and 2) there is a priori no reason for  $\mu_{app}$  ( $\dot{\gamma}_{eq}$ ) and  $\mu$  ( $\dot{\gamma}$ ) to present the same behavior.

Another perspective of this work is that the independence between  $\mu_{app}$  and the flow orientation is limited here to disordered and isotropic porous media. In practical petroleum situations, anisotropy may be observed at different scales. In oil fields, the geological stratification leads to a vertical anisotropy [5]. For anisotropic media, we have shown in Section 5.3.4 that the macroscale parameter  $k_n P$  cannot be considered independent from the flow direction. Moreover, we expect the variations of  $k_n$  and the angle of P to increase with the nonlinearity. Concerning reservoir simulators, since the sandstones might be anisotropic, this aspect should be investigated quantitatively.

### 5.5 Summary and conclusions

In this Chapter, we have investigated the influence of the nonlinearity and the disorder on the apparent permeability tensor. To do so, we have solved the flow problems for a variety of porous media and studied the behavior of the apparent permeability, which we define as  $K_{app} = k_n P \cdot K_0$  with  $K_0$  the intrinsic permeability tensor, P a rotation matrix (defined by 2 angles) and a scalar  $k_n$ . We have considered 2D arrays of cylinders (A-type) where the disorder can be controlled, anisotropic structures (S-type) and a sandstone B.

We have found that there is a competition between the disorder inherent to the porous structure and the nonlinearity associated to the non-Newtonian rheology. While nonlinearity tends to deviate the non-Newtonian velocity direction from the associated Newtonian direction, disorder tends to weaken this effect. A trace of the competition can also be observed by studying the evolution of the non-Newtonian volume fraction,  $\phi_{\mu\neq\mu_0}$ . As disorder increases, the growth of the non-Newtonian domain into the pore bodies with the flow regime is getting slower. If disorder dominates over the nonlinearity (which is the case in the sandstone medium), the use of a scalar in Darcy's law (see Eq. 5.4), as is done in engineering practice to account for non-Newtonian effects, seems to be a

### CHAPITRE 5. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA NON-LINÉARITÉ ET DE LA STRUCTURE POREUSE SUR LA PERMÉABILITÉ APPARENTE

valid option. This result is primarily important for reservoirs simulators, although the current use of the apparent viscosity rises further questions that should be addressed.

This Chapter is limited time-independent rheology and a possible improvement would be to take into account unsteady effects induced by flexible polymer molecules [42], such as elastic turbulence. We may also study further retention [81] or inaccessible pore volume [204] and the possible impact of these phenomena on the flow orientation. The advantage of the approach proposed in this Chapter is that the parameters  $k_n$  and P (Eq. 5.10) could be used to take into account the impact of these phenomena.

# Chapitre 6 Conclusions et perspectives

Des conclusions générales tirées du travail présenté dans les Chapitres 3 à 5 sont développées dans la Section 6.1. Ensuite, dans la Section 6.2, on présente des perspectives d'études éventuelles qui s'inscrivent dans la continuité de cette thèse.

### 6.1 Conclusions générales

L'objectif principal de cette thèse était d'étudier les phénomènes en place à la petite échelle associés au polymère. La compréhension des mécanismes en jeu à la petite échelle permet de mieux appréhender le comportement macroscopique qui en résulte. Concernant les solutions de polymère, ces phénomènes peuvent par exemple être dus à la rhéologie (Chapitre 3 et 5) ou à l'interaction proche de la paroi (Chapitre 4).

Un des résultats principaux du Chapitre 3 concerne la longueur  $\sqrt{k_0}$  (avec  $k_0$  la perméabilité intrinsèque), qui permet de caractériser correctement (en ordre de grandeur) la transition de régime macroscopique lorsque celle-ci est définie par une méthode asymptotique. Cette longueur est intrinsèquement liée aux régions du milieux poreux où le fluide perd le plus d'énergie par dissipation visqueuse. C'est aussi dans ces régions que la rhéologie non-Newtonienne va commencer à s'exprimer lorsque la vitesse d'écoulement augmente progressivement. Il suffit alors que le fluide exprime une rhéologie non-Newtonienne dans ces seuils de pores pour que le comportement macroscopique devienne non-linéaire. Cette longueur est largement utilisée comme dimension caractéristique dans les milieux poreux en général [165, 161], mais ici, on propose une explication physique à l'utilisation de  $\sqrt{k_0}$  dans le cas de la transition Newtonienne à non-Newtonienne. Cette étude a aussi permis de revisiter les modèles actuellement utilisés dans les simulateurs de réservoir [10].

Un autre résultat, qui peut paraître surprenant, concerne la distribution spatiale de vitesse *normalisée*. Il a été observé que les PDFs étaient relativement inchangées entre un écoulement Newtonien et non-Newtonien si le milieu était assez désordonné. Cette observation est expliquée par la structure poreuse qui, si elle est suffisamment complexe, semble contraindre les variations du champ de vitesse entre un écoulement Newtonien et non-Newtonien. Ce résultat pourrait avoir plusieurs conséquences, concernant notamment l'analyse d'expériences micro-modèles, où les PDFs des champs de vitesses sont utilisées pour caractériser les écoulements [151, 205]. De nouveaux outils, autre que de simples PDFs, pour analyser la distribution des champs semblent nécessaires.

Ensuite, dans le Chapitre 4, on s'est intéressé à un phénomène de répulsion subie par les chaînes

de polymère à la paroi liquide/solide qui peut se produire dans certaines configurations d'écoulement. Ce phénomène induit une fine couche de fluide le long de la paroi, appelée couche de déplétion, de faible viscosité qui agit comme un film lubrifiant. Comparé à d'autres phénomènes associés aux polymères, l'effet de la couche de déplétion peut être prépondérant dans un régime d'écoulement Newtonien, qui correspond à de véritables situations pratiques. En effet, loin du puits d'un réservoir pétrolier, les contraintes sont généralement assez faibles pour que la rhéologie puisse être considérée comme Newtonienne.

En assimilant le milieu poreux à un tube, pour lequel une solutions analytique peut être calculée, Chauveteau [64] a proposé un modèle mésoscopique. Une formule analytique permet alors de prédire la chute de viscosité apparente induite par la couche de déplétion. Cependant, cette approche est limitée à des milieux simples, où l'analogie avec un ensemble de tubes est pertinente. En effet, une longueur caractéristique propre au milieu, qui remplace le rayon des tubes dans la formule analytique, doit être introduite ( $R_{eq}$  à la place de R dans l'Eq. 4.6). Définir *a priori* cette longueur caractéristique semble difficile pour des milieux de structure poreuse complexe.

Dans cette thèse, nous avons revisité l'approche de Chauveteau [64], en utilisant une condition effective de glissement à la paroi pour représenter la couche de déplétion. Lorsque l'épaisseur de la couche de déplétion est suffisamment fine, cette approche ne requiert pas l'introduction d'une longueur caractéristique. Cette approche est validée par comparaisons avec des données expérimentales provenant de la littérature. Comparé au modèle mésoscopique existant, elle présente les avantages de ne pas avoir besoin de définir la longueur caractéristique  $R_{eq}$  et de s'appuyer directement sur la structure poreuse. Elle peut être utilisée en ingénierie pétrolière comme un outil simple et rapide pour prédire la chute de viscosité apparente à partir d'une image du milieu poreux.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous avons étudié le comportement macroscopique dans différentes configurations d'écoulement et à travers différents milieux. A cause de la forte non-linéarité induite par la rhéologie non-Newtonienne, la procédure de changement d'échelle [22] se ferme d'une manière spéciale (voir Annexe D). On introduit alors un nombre limité de paramètres macroscopiques (un scalaire  $k_n$  et une matrice de rotation P) qui traduisent les effets non-linéaires. Dans le cas général, à chaque écoulement sont associés les paramètres  $k_n$  et P, qui relient les vitesses associées aux écoulements Newtoniens et non-Newtoniens. Contrairement au cas linéaire où résoudre trois problèmes spécifiques permet de connaître toutes les solutions par superposition, dans le cas non-linéaire, chaque écoulement doit faire l'objet d'une simulation.

Le comportement de ces variables macroscopiques est alors étudié via des écoulements Newtoniens et non-Newtoniens à travers des milieux poreux naturels et artificiels. Les milieux artificiels sont des treillis de cylindres 2D, où le désordre et l'anisotropie sont contrôlés. Cela permet de mettre en évidence la compétition qui se produit entre la non-linéarité induite par la rhéologie et le désordre inhérent à la structure poreuse. La sensibilité des paramètres  $k_n$  et P à la direction de l'écoulement, la rhéologie, le désordre ou encore l'anisotropie est observée. Le résultat principal concerne l'utilisation d'un scalaire dans l'équation de Darcy pour décrire les effets non-Newtoniens, comme par exemple dans les codes de simulateurs de réservoirs pétroliers. Il semble que l'utilisation d'un *scalaire* (et non pas forcément d'une viscosité apparente telle qu'elle est définie actuellement dans les simulateurs de réservoirs) est *a priori* correcte si le milieu est isotrope et assez désordonné. Dans le cas contraire, une approche tensorielle (en utilisant la matrice de rotation P) est nécessaire pour représenter correctement l'écoulement non-Newtonien.

### 6.2 Perspectives d'étude

Dans cette section, des perspectives d'études sont détaillées. Dans un premier temps, les perspectives associées aux Chapitres 3 à 5 sont décrites ci-dessous. Ensuite, des perspectives plus larges sont décrites dans les Sections 6.2.1 à 6.2.4.

En premier lieu, le besoin de quantifier de manière rigoureuse le désordre se présente. Le développement d'outils spécifiques est nécessaire pour caractériser, par exemple, l'influence du désordre sur la transition macroscopique du régime d'écoulement Newtonien à non-Newtonien ou sur les champs de vitesse et pression microscopiques (Chapitre 3). Pour cela, il faudrait utiliser des opérateurs statistiques plus sophistiqués que de simples PDFs. De plus, la représentation statistique d'autres quantités, comme les gradients de vitesse ou l'énergie perdue par dissipation visqueuse, pourrait mieux nous renseigner sur l'évolution de l'écoulement avec la non-linéarité. Enfin, étudier l'impact d'autres types de non-linéarités (par exemple inertielle) sur les distributions semble être une possibilité d'étude intéressante.

Concernant l'étude de la couche de déplétion (Chapitre 4), de manière générale, des visualisations expérimentales des mécanismes proche de la paroi semblent nécessaires, notamment pour valider les (fortes) hypothèses énoncées. Par exemple, il a été observé expérimentalement que la pente  $\mu_{app}$  vs.  $\dot{\gamma}_{eq}$  (*in situ*) est parfois plus faible que la pente de  $\mu$  vs.  $\dot{\gamma}$  (*ex situ*) [14]. Ce phénomène a été attribué à une diminution de l'épaisseur de la couche de déplétion (et donc de son effet) avec les contraintes locales. Pour étudier cette supposition, une prochaine étape de l'étude serait la prise en compte du caractère non-Newtonien, via une condition effective de glissement non uniforme et non-linéaire. On pourrait par exemple étudier si, lorsque l'épaisseur de la couche de déplétion diminue avec le taux de déformation local, le comportement macroscopique observé se rapproche du cas Newtonien.

Dans le Chapitre 5, on a montré les limites des méthodes de changement d'échelles classiques, où une forme spécifique du changement d'échelle doit être utilisée lorsque le problème devient non linéaire. Ici encore, il faudrait introduire des outils statistiques qui nous permettent de mettre en exergue explicitement certaines propriétés de la structures poreuse afin de mieux cerner leurs impacts sur les propriétés macroscopiques. Par exemple, on peut imaginer que ces outils démontrent que lorsque le milieu est suffisamment désordonné, la forme fermée se simplifie (P tend vers le tenseur identité dans l'Eq. 5.1), c'est-à-dire que les directions des vitesses moyennes d'écoulement Newtonien et non-Newtonien deviennent identiques.

Concernant les simulateurs de réservoirs, le Chapitre 5 a permis de valider l'utilisation d'un scalaire pour prendre en compte les effets non-Newtonien dans l'équation de Darcy si le milieu est assez désordonné. Ce résultat reste à confirmer sur des milieux naturels plus volumineux. De plus, l'utilisation d'une viscosité apparent n'est *a priori* toujours pas adéquate si les dépendances de la viscosité "*bulk*" et apparente avec le taux de déformations sont différentes. Le taux de déformation équivalent pose d'ailleurs des problèmes de définitions, et peut ne pas être suffisant pour prendre en compte toutes les non-linéarités incluses dans  $k_n$ .

En plus de la rhéologie non-Newtonienne, beaucoup d'autres phénomènes physiques sont associés aux polymères. Certains d'entre eux peuvent modifier le paramètre  $R_k$  (Eq. 1.8) qui est utilisé dans les codes de simulateurs de réservoirs. Au delà d'une simple tabulation de  $R_k$  sous diverses conditions d'écoulement, une étude de type changement d'échelle pourrait, comme nous l'avons fait avec dans le Chapitre 5 pour la rhéologie non-Newtonienne, permettre de fournir des indications sur le comportement de  $R_k$ .

### 6.2.1 Vers un double changement d'échelle

L'objectif du changement d'échelle présenté dans le Chapitre 5 est de dégager une loi macroscopique à l'échelle L, à partir de la résolution d'un système d'équations défini sur un volume microscopique de taille caractéristique h. Si l'on suppose que l'on peut résoudre les nombreuses problématiques liées à l'imagerie (voir Chapitre 2), les puissances de calcul typiquement disponibles actuellement permettent d'envisager la réalisation de simulations sur des milieux naturels de l'ordre de quelques mm<sup>3</sup>. En comparaison, dans le cas des réservoirs pétroliers, l'échelle L est de l'ordre du km et l'échelle intermédiaire d'une maille de simulateur est métrique ou décamétrique. A cause du procédé de stratification géologique qui n'est pas homogène, il existe des hétérogénéités à diverses échelles dans le réservoir. Une procédure de changement d'échelle directe du mm au km ne semble alors pas raisonnable.

On peut alors imaginer une procédure à plusieurs échelles, qui se décompose par exemple en un premier changement d'échelle d'une taille microscopique (équations de Stokes) à mésoscopique (équations de Darcy) suivi d'un second, d'une taille mésoscopique à macroscopique (équations de Darcy). Ce type de procédure, a déjà été proposé pour des milieux hétérogènes composé de deux régions pour un écoulement monophasique [206] où pour des problèmes de dispersion [207, 208].

D'un point de vu pratique, on peut imaginer un milieu mésoscopique qui contiendrait N cellules. Dans la procédure suivante, à chaque cellule serait associée un échantillon microscopique :

- Étape 1 : On résout le problème de fermeture linéaire sur N échantillons microscopiques. On obtient alors une distribution de perméabilités intrinsèques  $K_0$  (calculée pour un fluide Newtonien et sans glissement à la paroi). Si le nombre d'échantillon est assez grand, on peut typiquement s'attendre à une distribution log-normal de la distribution des termes du tenseur.
- Étape 2 : Pour une certaine gamme de norme,  $\|\langle \mathbf{v} \rangle \|$ , et de direction,  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}$ , de la vitesse moyenne, on calcule par simulations numériques directes de problèmes de changements d'échelle les perméabilités apparentes,  $K_{app} = k_n \mathsf{P} \cdot \mathsf{K}_0$ .
- Étape 3 : On établit des relations empiriques, en calibrant le comportent de  $\mathsf{K}_{app}$  avec  $\|\langle \mathbf{v} \rangle \|$  et  $\mathbf{e}_{v}$ .
- Étape 4 : On construit avec les N échantillons (et aussi possiblement des échantillons fictifs dont les propriétés effectives ont été extrapolées selon la distribution obtenue) un milieu mésoscopique hétérogène .
- Étape 5 : Résoudre l'écoulement de Darcy dans le milieu mésoscopique à partir des relations empiriques déterminées à la grande échelle. Une reflexion de type changement d'échelle doit être menée afin de guider cette étape. On peut suivre pour cela les méthodes décrites dans [209, 210] pour la prise de moyenne à grande échelle.

Finalement, on obtient une perméabilité à l'échelle mésoscopique qui tient compte des hétérogénéités locales. De plus, la perméabilité obtenue est aussi calibrée en fonction de la vitesse moyenne (norme et direction). On peut alors résoudre l'écoulement à la grande échelle.

### 6.2.2 L'aspect multi-constituants

Comme décrit brièvement dans la Section 1.2.4 du Chapitre 1, une solution de polymère est nécessairement composée d'un grand nombre de molécules différentes, de masse molaires différentes. A chacun de ces constituants est associé un problème d'écoulement spécifique. En effet, la dispersion, le volume de pore inaccessible ou encore les propriétés rhéologiques varient avec la masse molaire. Par des phénomènes de dégradation (mécanique ou thermique [19]), il se produit également un transfert de masse entre ces constituants, ce qui modifie la distribution de masse moléculaire [55].

De part le fort impact potentiel d'une approche multi-constituants sur les modèles d'écoulement de polymère, cette perspective d'étude semble intéressante. En discrétisant la distribution de masse moléculaire, on décrirait un nombre fini de phases liquides qui s'écoulent à travers le milieu poreux. Des modèles théoriques de changement d'échelle à multi-équations et non-linéaires ont déjà été développés [156] et peuvent servir de référence. On rajouterait par exemple dans ces modèles des termes puits et sources dans l'équation de transport de masse pour modéliser la dégradation [90]. La difficulté majeure réside probablement dans la détermination expérimentale ou théorique des propriétés effectives associées à chaque composant.

#### 6.2.3 Les simulateurs de réservoirs

De part la puissance de calcul disponible qui augmente et la possibilité d'acquérir relativement facilement des images de structures poreuses complexes, la simulation d'écoulement à la petite échelle est très en vogue. Lors de cette thèse, les problématiques principales de la "*Digital Rock Physics*" (DRP) étaient liées à l'acquisition des images (segmentation, REV) et à leurs utilisations (conditions limites, lissage), comme discuté dans le Chapitre 2. Au vu du nombre croissant d'utilisation d'images à la petite échelle issues de milieux réels, on peut espérer que, dans un futur proche, ces problématiques seront maîtrisées. Il sera alors possible de prédire les propriétés macroscopiques intrinsèques avec une erreur acceptable.

D'un point de vu ingénierie pétrolière, la DRP ne peut pas alimenter à elle seule les modèles utilisés dans les simulateurs de réservoirs. Elle ne peut venir qu'en soutien d'une approche expérimentale, pour extrapoler les comportements macroscopiques. On peut imaginer réaliser une expérience sur carotte sous certaines conditions, obtenir une image de l'échantillon et extrapoler, par exemple selon la concentration en polymère ou le régime d'écoulement, les résultats expérimentaux à d'autres configurations d'écoulement. En appui des expériences sur carottes, la DRP peut ainsi être d'une grande aide à la prédiction de propriétés macroscopiques et ainsi alimenter les simulateurs de réservoirs.

### 6.2.4 Les fluides visco-élastiques

Lors de la thèse, une étude numérique d'écoulement de fluides visco-élastiques a été réalisée. Cette étude succincte ouvre des pistes intéressantes, notamment en indiquant une possible erreur dans les modèles visco-élastiques actuellement utilisés. Dans cette section, on décrit succinctement le travail réalisé.

Lorsqu'une solution de polymères flexibles s'écoule à fort régime à travers un milieu poreux, un rhéo-épaississement apparent peut être observé [80, 5]. Il a été démontré expérimentalement que ce comportement est dû à des phénomènes instationnaires et élastiques [211, 39]. L'étude numérique de ces phénomènes est particulièrement difficile car de la turbulence élastique se développe et les calculs se heurtent rapidement au problème de haut nombre de Weissenberg.

Pour analyser un exemple de ce phénomène, prenons le cas du cylindre 2D plan, qui a été largement étudié dans la littérature (voir Fig. 1a). Le rapport  $\langle v \rangle / R$  définit un taux de déformations caractéristique de l'écoulement et on définit le nombre de Weissenberg comme

$$Wi = \frac{\lambda_1 \langle v \rangle}{R},\tag{6.1}$$

où  $\lambda_1$  est associé au temps de relaxation de la molécule flexible,  $\langle v \rangle$  est la vitesse moyenne intrinsèque et R le rayon du cylindre. Avec cette géométrie, au-delà de  $Wi \simeq 1$ , les schémas numériques ne sont plus capables de capturer les forts gradients et, à défaut de générer un maillage extrêmement raffiné, les calculs divergent [212, 213, 214].

Alors que beaucoup d'études s'intéressent à la répartition de la pression à la surface du cylindre ou à la rupture de la symétrie de l'écoulement lorsque le caractère élastique du fluide s'exprime, un nombre moins important d'études se focalisent sur le rhéo-épaissisement apparent, caractérisé par l'évolution de la traînée sur le cylindre, qui est fonction du nombre de Weissenberg [215, 216, 217]. Un coefficient de traînée adimensionnel est souvent calculé comme

$$C_{\rm d} = \frac{1}{\eta_0 \langle v \rangle L} \int_{A_{\rm cylindre}} \mathbf{n} \cdot (\tau - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{i} \, dA, \tag{6.2}$$

avec i la direction de l'écoulement (ici  $\mathbf{e}_x$ ). Nous allons simuler un écoulement visco-élastique autour de ce cylindre 2D grâce au solveur viscoelasticIcoFoam développé par Florian Habla [54]. Dans ce code, l'écoulement est rampant et les effets non-Newtoniens sont purement élastiques, i.e., lorsque l'écoulement est sous un cisaillement pur, nous avons vérifié que le comportement rhéologique était Newtonien. Le modèle d'élasticité choisi est le modèle Oldroyd-B. En s'assurant que le maillage utilisé est suffisamment fin [212], on peut calculer  $C_d$  pour diverses valeurs de Wi. Dans la Figure 1b, on compare alors l'évolution obtenue de  $C_d$  vs. Wi avec des données issues de la littérature.



FIGURE 1: (a) Schéma du milieu poreux utilisé et (b) coefficient de traînée  $C_d$  en fonction du nombre de Weissenberg Wi. Le modèle visco-élastique choisi est le modèle d'Oldroyd-B.

Dans la Figure 1b, nous aurions pu ajouter d'autres données extraites de la littérature, qui confirment la tendance ainsi que les valeurs obtenues [212, 213, 214]. Cependant, à cause du problème à haut nombre de Weissenberg, ces données ne vont pas au-delà de Wi = 1. On observe qu'OpenFOAM présente des résultats très proches de la littérature. Cette étude permet dont de valider l'outil viscoelasticIcoFoam.

Curieusement, aucun des articles publiés n'a expliqué avec des arguments physiques la tendance de  $C_d$  vs. Wi, et plus particulièrement son caractère non monotone. On observe en effet un rhéoépaississement apparent à partir de  $Wi \simeq 1$ , ce qui est également observé expérimentalement, mais il est précédé d'un effet rhéo-fluidifiant apparent. Ce comportement est surprenant ; il est en effet difficilement concevable que le caractère élastique du fluide donne de l'énergie au fluide pour Wi < 1 et qu'il en retire pour Wi > 1.

Comment expliquer ce caractère rhéo-fluidifiant apparent? Si l'on reprend les équations du modèle Oldroyd-B [218], le tenseur des contraintes complet  $\tau$  est calculé comme,

$$\tau = \tau_{\rm p} + \eta_{\rm s} \mathsf{D},\tag{6.3}$$

avec  $\eta_s$  la viscosité du solvant, D le tenseur de déformation et  $\tau_p$  le tenseur des contraintes associées au polymère. Ce tenseur est régi par l'équation

$$\tau_{\rm p} + \lambda_1 \tau_{\rm p}^{\nabla} = -\eta_{\rm p} \mathsf{D}, \tag{6.4}$$

avec  $\eta_{\rm p}$  la viscosité propre au polymère et  $\stackrel{\nabla}{\bullet}$  dénote l'opérateur "*co-deformational derivative*" [44]. La viscosité du polymère est calculée comme

$$\eta_{\rm p} = n_{\rm c} k_{\rm B} T \lambda_1, \tag{6.5}$$

où  $n_{\rm c}$  la concentration en polymère dans la solution,  $k_{\rm B}$  la constante de Boltzmann et T la température [218]. Comme expliqué dans la Section 1.1.3,  $\lambda_1 = 0$  ramène le cas d'un écoulement Newtonien qui correspond aussi à une concentration nulle en polymère dans la solution. On obtient alors simplement  $\tau = \eta_s D$ .

Dans la plupart des codes de calcul visco-élastiques, comme celui utilisé ici, le paramètre  $\eta_{\rm p}$  est pris comme constant. Cela constitue *a priori* une erreur. A  $\lambda_1$  très faible, l'écoulement modélisé tend en effet vers celui d'un fluide purement visqueux, mais dont la viscosité est sur-évaluée, i.e.,  $\eta = \eta_{\rm p} + \eta_{\rm s}$  et lieu de  $\eta = \eta_{\rm s}$ . En absolu, le modèle prédit alors une traînée plus grande que ce qu'elle devrait être. Cependant, le coefficient de traînée  $C_{\rm d}$  étant adimensionnel, on obtient la même valeur pour Wi = 0

Cette erreur affecte-t-elle le comportement de  $C_d$  avec le nombre de Weissenberg ? Pratiquement, pour faire varier le nombre de Weissenberg, on peut faire varier soit  $\langle v \rangle$ , soit  $\lambda_1$  (Eq. 6.1). Si l'on fixe le nombre  $\lambda_1$  et que l'on fait varier  $\langle v \rangle$ ,  $\eta_p$  est inchangé (Eq. 6.5). Cependant, d'un point de vue numérique, faire varier la vitesse est plus délicat que de faire varier  $\lambda_1$ , car des conditions spécifiques du maillage doivent êtres garanties (de type CFL). La plupart des études font donc varier  $\lambda_1$  pour faire varier le Weissenberg. Dans ce cas,  $\eta_p$  augmente linéairement avec Wi et le caractère rhéo-fluidifiant apparent observé pour Wi < 1 pourrait être fortement modifié.

Pour vérifier cette supposition, nous avons simulé l'écoulement autour du cylindre 2D dans les mêmes conditions que précédemment, mais en fixant la valeur du produit  $n_c k_B T$  et en calculant  $\eta_p$  avec l'Eq. 6.5 (contrairement au cas précédent où  $\eta_p$  était pris comme constant). On a alors fait varier le nombre de Weissenberg avec  $\lambda_1$ . Les résultats sont présentés dans la Figure 2. L'évolution de  $C_d$  avec Wi est clairement différente dans le cas où  $\eta_p$  est proportionnel à  $\lambda_1$  et dans le cas où  $\eta_p$  est pris comme constant. De plus, la tendance n'est plus monotone et seulement un rhéo-épaississement apparent est observé. Ce comportement s'explique naturellement par la dissipation d'énergie qui augmente avec les effets élastiques.



FIGURE 2: Coefficient de traînée  $C_d$  en fonction du nombre de Weissenberg Wi dans un cas où  $\eta_p$  est une constante ( $\eta_p \perp \lambda$ ) et dans un cas où  $\eta_p$  évolue proportionellement à  $\lambda_1$  ( $\eta_p \propto \lambda_1$ ). Le paramètre  $n_c k_B T$  est fixé à 0.7 dans les deux cas.

Ces derniers résultats restent à confirmer par des études plus poussées. Dans le domaine pétrolier, le rhéo-épaississement apparent pose des problèmes d'injectivité de la solution dans le réservoir. Au regard de la complexité des modèles visco-élastiques, ainsi que des erreurs potentielles dans les différents outils numériques actuellement utilisés, il paraît important de revisiter les modèles viscoélastiques, investiguer ces phénomènes à la petite échelle sur des structures poreuses réalistes et de caractériser leurs impacts sur le comportement macroscopique, comme proposé dans [43].

# Annexes

### Annexe A

# La condition de glissement dans OpenFOAM

Dans le contexte du Chapitre 4, nous avons implémenté dans OpenFOAM une condition limite de glissement de type Navier. La vitesse à la paroi liquide/solide  $A_{\beta\sigma}$  obéit à,

$$\mathbf{v} = -\ell \,\mathbf{n} \cdot \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathsf{T}}\right) \cdot (\mathsf{I} - \mathbf{nn})\,,\tag{A.1}$$

où  $\ell$  est la longueur de glissement [121] et **n** est le vecteur normal à l'interface, dirigé de la phase liquide  $\beta$  vers la phase solide  $\sigma$ .

Pour implémenter l'Eq. A.1, nous partons d'une condition limite existence dans OpenFOAM, "*partialSlip*". Dans cette condition limite, la vitesse de glissement à la paroi est calculée comme,

Cette opération est appliquée à toutes les faces concernées par la condition limite. Le vecteur normal de chaque face f est noté  $\mathbf{n}$  (toujours orienté de  $\beta$  vers  $\sigma$  dans OpenFOAM). Dans le repère Cartésien propre à chaque face,  $\mathsf{E} = (\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$  avec  $\mathbf{e}_I = \mathbf{n}$ , la condition "*partialSlip*" calcule la vitesse sur la face  $\mathbf{v}^f$  comme

$$\mathbf{v}^{f} = (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0\\ v_{II}^{c}\\ v_{III}^{c} \end{pmatrix}, \qquad (A.2)$$

où  $v_{II}^c$  et  $v_{III}^c$  sont les composantes du vecteur vitesse défini au centre de la cellule c associée à la face f. Lorsque le coefficient  $\alpha$  vaut 0 dans la condition "*partialSlip*", on retrouve le cas d'un glissement complet (pas de frottement) tandis que lorsque  $\alpha$  vaut 1, on retrouve le cas sans glissement. Le but ici est de modifier la condition "*partialSlip*" pour écrire la nouvelle condition "*NavierSlip*", où le glissement est défini par l'Eq. A.1.

Dans le repère E, la condition de Navier peut s'écrire comme,

$$\mathbf{v}^{f} = -\ell \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} \cdot \left(\partial_{i}v_{j}^{f} + \partial_{j}v_{i}^{f}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (A.3)

Après calcul, on obtient,

$$\mathbf{v}^{f} = -\ell \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{I} v_{II}^{f} + \partial_{II} v_{I}^{f} \\ \partial_{I} v_{III}^{f} + \partial_{III} v_{I}^{f} \end{pmatrix}.$$
(A.4)

La condition de flux nul à l'interface donne  $v_I^f = 0$ . Puisque  $v_I^f$  est nulle sur toute la surface de la face, les gradients tangentiels de  $v_I$  sont nuls. On obtient alors

$$\mathbf{v}^{f} = -\ell \begin{pmatrix} 0\\ \partial_{I} v_{II}^{f}\\ \partial_{I} v_{III}^{f} \end{pmatrix}.$$
(A.5)

Dans l'Eq. A.5, on note que  $\partial_I v^f$  est toujours négatif, puisque le vecteur **n** est orienté de  $\beta$  vers  $\sigma$ . Dans l'Eq. A.2, la condition "*partialSlip*" calcule en fait les vitesses tangentielles sur les faces comme proportionnelles à la vitesse de la cellule voisine. Dans la nouvelle condition "*NavierSlip*", les gradients normaux sont impliqués dans le calcul. Ils sont estimés avec  $\Delta$ , la distance entre la face et le centre de la cellule voisine. L'équation A.5 peut s'écrire comme,

$$\begin{pmatrix} 0\\ v_{II}^{f}\\ v_{III}^{f} \end{pmatrix} = -\ell \begin{pmatrix} 0\\ \frac{v_{II}^{f} - v_{II}^{c}}{\Delta}\\ \frac{v_{III}^{f} - v_{III}^{c}}{\Delta} \end{pmatrix},$$
(A.6)

qui est équivalent à

$$\mathbf{v}^{f} = \frac{\ell/\Delta}{1 + \ell/\Delta} \begin{pmatrix} 0\\ v_{II}^{c}\\ v_{III}^{c} \end{pmatrix}.$$
 (A.7)

L'équation A.7 est la forme final de la condition de Navier et est très proche de la formulation de "*partialSlip*". Dans la nouvelle condition limite "*NavierSlip*",  $1 - \alpha$  est remplacé par le pré-facteur de l'Eq. A.7. Dans le code, on lit alors,

```
Field<Type>::operator=
(
(
(
    (slipLength_ * this->patch().deltaCoeffs())
    / ( 1.0 + slipLength_ * this->patch().deltaCoeffs())
    )
    *transform(I - sqr(nHat), this->patchInternalField())
);
```

L'utilisateur doit aussi donner en entrée la longueur de glissement dans le fichier de condition limite U,

```
slipPatch
{
   type NavierSlip;
   slipLength uniform 1e-7;
}
```
# Annexe B Formulaire de notation indicielle

La règle générale de contraction des indices (en convention "nest") est : dernier du premier et premier du dernier. Pour les vecteurs, cette règle donne,

$$(\nabla \underline{A})_{ij} = \partial_i A_j, \tag{B.1}$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \partial_i A_i. \tag{B.2}$$

Pour les tenseurs d'ordre 2, on obtient,

$$\left(\nabla\underline{\underline{A}}\right)_{ijk} = \partial_i A_{jk},\tag{B.3}$$

$$\left(\nabla \cdot \underline{\underline{A}}\right)_{i} = \partial_{i} A_{ij}. \tag{B.4}$$

Pour obtenir Eqs B.3 et B.4, on pose  $\underline{A} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}}$  et on calcule  $\nabla \underline{\underline{A}}$  avec  $\underline{\underline{u}}$  unitaire. Pour les tenseurs d'ordre 3, l'opérateur divergence donne,

$$\left(\nabla \cdot \underline{\underline{A}}\right)_{jk} = \partial_i A_{ijk}.$$
(B.5)

L'opérateur transposé donne,

$$\left(\mathsf{^{\mathsf{T}}}\left(\underline{\underline{A}}\right)\right)_{ijk} = A_{jik},\tag{B.6}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \left(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}\right)^t, \tag{B.7}$$

On définit aussi la double contraction de 2 tenseurs d'ordre 2 comme,

$$\mathsf{A}:\mathsf{B}=A_{ij}B_{ji}.\tag{B.8}$$

# Annexe C

# La perméabilité et la dissipation visqueuse

Le but de cet annexe est de démontrer que la perméabilité peut être exprimée avec la moyenne de la dissipation visqueuse d'un fluide (phase  $\beta$ ) en écoulement à travers un milieu poreux rigide (phase  $\sigma$ ) périodique, qui est le volume élémentaire représentatif d'un domaine macroscopique. On suppose que l'élément considéré est situé loin des frontières du domaine macroscopique et que les effets non-linéaires induit par la rhéologie soient assez faibles pour que les gradients macroscopiques soient considérés uniformes à l'échelle du milieu poreux. Cet annexe est inspirée d'une démonstration similaire développée dans [219].

Sous les hypothèses d'écoulement stationnaire, rampant et incompressible, les équations de Stokes et de continuité sont

$$\nabla \cdot \tau - \nabla \tilde{p} - \nabla \langle p \rangle^{\beta} + \rho \mathbf{f} = 0, \ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{C.1}$$

où la pression p est décomposée entre déviation  $\tilde{p}$  et moyenne interstitielle  $\langle p \rangle^{\beta}$ . À l'interface liquide/solide  $A_{\beta\sigma}$ , la vitesse est tangente à la paroi, soit  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  avec  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la paroi orienté de  $\beta$  vers  $\sigma$ . A la frontière extérieure  $A_{\beta e}$ , on applique des conditions de périodicité sur  $\tilde{p}$ ,  $\mathbf{v}$  et leurs dérivées spatiales. On note  $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\mathsf{T}}$  le tenseur du taux de déformation et  $\tau = \mu \mathsf{D}$  le tenseur des contraintes visqueuses.

On multiplie l'équation de quantité de mouvement par  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \tau + \mathbf{v} \cdot \left(\rho \mathbf{f} - \nabla \tilde{p} - \nabla \langle p \rangle^{\beta}\right) = 0, \qquad (C.2)$$

soit,

$$\nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{v}) - \tau : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \left(\rho \mathbf{f} - \nabla \tilde{p} - \nabla \langle p \rangle^{\beta}\right) = 0, \tag{C.3}$$

On moyenne alors cette équation sur le domaine V et on utilise le théorème de Green-Ostrogradski pour obtenir,

$$\int_{\mathcal{S}} \left( \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \right) dS - \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle - \langle \mathbf{v} \cdot \left( \nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f} \right) \rangle = 0.$$
(C.4)

Ici, on scinde l'intégrale surfacique en  $A_{\beta\sigma}$  et  $A_{\beta e}$ . Par la condition de périodicité sur  $\tau$  et  $\mathbf{v}$ , la contribution de  $A_{\beta e}$  est nulle. La vitesse étant tangente à la paroi, la contribution de  $A_{\beta\sigma}$  est aussi

nulle. On obtient alors,

$$\langle \tau : \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot (\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f}) \rangle = 0.$$
 (C.5)

Le premier terme de l'Eq. C.5 correspond à la dissipation visqueuse irréversible sous forme thermique dans le fluide. Le second représente le travail des forces de pression et le troisième terme correspond au travail des forces qui mettent en mouvement le fluide.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux forces de dissipation visqueuse. Pour tout tenseur A, on a  $(A + A^T) : A^T = (A + A^T) : A$ . En remplaçant A par  $\nabla \mathbf{v}$ , on obtient,

$$\langle \tau : \nabla \mathbf{v} \rangle = \langle \mu \left( \nabla \mathbf{v} + \left( \nabla \mathbf{v} \right)^{\mathsf{T}} \right) : \nabla \mathbf{v} \rangle,$$
 (C.6)

$$= \langle \mu \left( \nabla \mathbf{v} + \left( \nabla \mathbf{v} \right)^{\mathsf{T}} \right) : \left( \nabla \mathbf{v} \right)^{\mathsf{T}} \rangle, \qquad (C.7)$$

$$= \langle \frac{1}{2}\mu \mathsf{D} : \mathsf{D} \rangle. \tag{C.8}$$

Pour le terme du travail des forces de pression, on utilise la décomposition  $\nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{v}) = \tilde{p}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}$ qui conduit avec l'équation de continuité à,

$$\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle = \langle \nabla \cdot (\tilde{p} \mathbf{v}) - \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \tag{C.9}$$

$$= \langle \nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{v}) \rangle \tag{C.10}$$

En utilisant le théorème de Green on obtient

$$\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle = \int_{A_{\beta e} + A_{\beta \sigma}} \mathbf{n} \cdot (\tilde{p} \mathbf{v}) \, dS$$
 (C.11)

La contribution de  $A_{\beta\sigma}$  est nulle par vitesse tangente à la paroi et la périodicité annule aussi la contribution de  $A_{\beta e}$ . On obtient alors,

$$\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle = 0. \tag{C.12}$$

Il reste alors le troisième terme qui est la source de quantité de mouvement. Le terme  $\rho \mathbf{f}$  uniforme. Puisque l'on a supposé que le milieu poreux était périodique et loin des frontières macroscopiques, le terme  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  est uniforme dans le cas linéaire (rhéologie Newtonienne). Dans le cas non-linéaire, on suppose que les effets non-linéaires sont suffisamment faibles pour que considérer  $\nabla \langle p \rangle^{\beta}$  comme uniforme. Sous ces hypothèses, on obtient alors

$$\langle \mathbf{v} \cdot (\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f}) \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \cdot (\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f})$$
 (C.13)

En rassemblant ces résultats on obtient,

$$\langle \frac{1}{2}\mu \mathsf{D} : \mathsf{D} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \left( \nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f} \right).$$
 (C.14)

L'équation C.14 traduit simplement que le travail transmis au fluide est dissipé sous forme de frottement visqueux. On introduit la loi de Darcy  $\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\kappa}{\mu_0} \cdot (\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f})$  dans l'équation C.14. On ne suppose pas *a priori* que le fluide est Newtonien, ce qui suppose que l'effet de la rhéologie non-Newtonienne est pris en compte par la perméabilité dans la loi de Darcy. On obtient alors,

$$\langle \frac{1}{2}\mu \mathsf{D} : \mathsf{D} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \left(\mathsf{K}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle\right)$$
 (C.15)

Pour des écoulements macroscopiques 1D, on peut trouver la forme de [220],

$$k = \frac{\mu_0 \|\langle \mathbf{v} \rangle \|^2}{\langle \frac{1}{2} \mu \mathsf{D} : \mathsf{D} \rangle}.$$
 (C.16)

D'une manière similaire, on peut étudier si la propriété de symétrie du tenseur de perméabilité est valable lorsque le fluide est non-Newtonien. Nous reprenons l'équation de Darcy écrite sous la forme condensée

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathsf{K} \cdot \mathbf{F},\tag{C.17}$$

avec  $\mathbf{F} = (\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{f}) / \mu_0$ . On suppose trois vecteurs sources  $\mathbf{F}$  unitaires et imposés dans les trois directions de l'espace, noté  $\mathbf{F}^j$ . On note  $\mathbf{v}^j$  le champ de vitesse qui est engendré par le terme source  $\mathbf{F}^j$ . Les vecteurs  $\mathbf{F}^j$  étant unitaires, on obtient alors  $\langle \mathbf{v}^j \rangle_i = k_{ij}$ . On peut aussi écrire ce résultat sous la forme

$$k_{ij} = \langle \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{F}^i \rangle. \tag{C.18}$$

On reprend alors l'équation de Stokes dans le cas non-linéaire appliquée aux champs  $\mathbf{v}^i$  et  $\tilde{p}^i$  engendrés pas le terme source  $\mathbf{F}^i$ , que l'on multiplie par  $\mathbf{v}^j$ ,

$$\mathbf{v}^{j} \cdot \nabla \cdot \left[ \mu^{i} \left( \nabla \mathbf{v}^{i} + \left( \nabla \mathbf{v}^{i} \right)^{\mathsf{T}} \right) \right] - \mathbf{v}^{j} \cdot \nabla \tilde{p}^{i} + \mathbf{v}^{j} \cdot \mathbf{F}^{i} = 0.$$
(C.19)

En moyennant l'Eq. C.19 et en utilisant les mêmes arguments que précédemment (conditions périodiques et vitesse tangente à la paroi), on peut montrer que la moyenne du terme en pression est nulle, ce qui conduit en utilisant l'Eq. C.18 à

$$k_{ij} = -\mu_0 \left\langle \mathbf{v}^j \cdot \nabla \cdot \left[ \mu^i \left( \nabla \mathbf{v}^i + \left( \nabla \mathbf{v}^i \right)^\mathsf{T} \right) \right] \right\rangle.$$
(C.20)

Si la rhéologie est Newtonienne, alors  $\mu^i = \mu_0$  et l'Eq. C.23 donne

$$k_{ij} = -\left\langle \mathbf{v}^j \cdot \nabla \cdot \left( \nabla \mathbf{v}^i \right) \right\rangle. \tag{C.21}$$

On décompose alors le terme de droite en

$$\mathbf{v}^{j} \cdot \nabla \cdot \left( \nabla \mathbf{v}^{i} \right) = \nabla \cdot \left( \mathbf{v}^{j} \cdot \nabla \mathbf{v}^{i} \right) - \nabla \mathbf{v}^{j} : \nabla \mathbf{v}^{i}.$$
(C.22)

En utilisant le théorème de Green et la condition de vitesse tangentielle à la paroi, on peut montrer que la moyenne du terme  $\nabla \cdot (\mathbf{v}^j \cdot \nabla \mathbf{v}^i)$  est nulle, ce qui conduit à

$$k_{ij} = \mu_0 \left\langle \nabla \mathbf{v}^j : \nabla \mathbf{v}^i \right\rangle. \tag{C.23}$$

Ici, on obtient  $k_{ij} = k_{ji}$ , ce qui montre que le tenseur de perméabilité est bien symétrique lorsque la rhéologie est Newtonienne. En revanche, lorsque la rhéologie ne l'est pas, on ne peut pas démontrer cette propriété.

# Annexe D

# Prise de moyenne volumique appliquée à un fluide non-Newtonien

Dans cette Annexe, on étudie une procédure de changement d'échelle par la prise de moyenne volumique (VAM) appliquée à un fluide non-Newtonien dont la viscosité est définie de manière générique. En suivant la méthode proposée par Whitaker [22], nous montrerons que le problème non-linéaire ne peut pas être fermé de manière classique. On propose alors une forme homogénéisée spéciale pour fermer le problème.

Since the procedure is related to Chapter 5, the following development is written in English.

### Pore-scale model

In this section, we describe the pore-scale flow model considered in this study. The flow of the liquid ( $\beta$ -phase) through the rigid porous medium ( $\sigma$ -phase) is steady, incompressible and single-phase. Momentum and mass balance equations describing the flow read as follows,

$$\nabla \cdot \left[ \mu \left( \dot{\gamma} \right) \left( \nabla \mathbf{v} + \left( \nabla \mathbf{v} \right)^{\mathsf{T}} \right) \right] - \nabla p + \rho \mathbf{g} = 0 \text{ in } V_{\beta}, \tag{D.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } V_{\beta}. \tag{D.2}$$

The micro-scale description contains a generic rheological model (chosen under some restrictions, see below), expressed with a generic expression for the viscosity,  $\mu$ , which is a function of the local shear rate  $\dot{\gamma}$ . We further define,

$$\mu\left(\dot{\gamma}\right) = \mu_0 \,\hat{\mu}\left(\dot{\gamma}\right) \text{ in } V_\beta,\tag{D.3}$$

with  $\mu_0$  the Newtonian viscosity of the fluid. The generic approach allows to embrace a wide variety of applications.

Most polymer solutions, e.g. xanthan or HPAM mixture used in EOR, display a non-Newtonian nature when submitted to high enough shear rates. This specific physical behavior is described here using a shear rate dependent dimensionless viscosity,  $\hat{\mu}(\dot{\gamma})$ , in Eq. D.3. Polymer solutions are also likely to exhibit a Newtonian behavior under low shear rates, i.e.,  $\mu = \mu_0$ . As a result, a natural restriction of the rheological model emerges,

$$\lim_{\dot{\gamma} \to 0} \hat{\mu} \left( \dot{\gamma} \right) = 1. \tag{D.4}$$

We note here that our model ignores time dependent effects. As a consequence, another restriction of the generic rheological model is its steady-state nature. Unsteady flow induced by certain type of polymers, e.g. polyacrylamide, would require a more sophisticated derivation. The first step would be to take into account viscoelastic models [44] and add the velocity time derivative term in the momentum equation.

Concerning the polymer behavior at the solid/liquid interface, core-flood experiments show that the Newtonian flow of polymer fluids through porous media often exhibit a permeability higher than expected. This phenomenon has been attributed to complex mechanisms between the polymer molecules and the wall, yielding an apparent slip effect, see a discussion in Chapter 4. Here, we will not take into account this kind of interaction and a simple no-slip condition is applied at the solid/liquid interface,

$$\mathbf{v} = 0 \text{ at } A_{\beta\sigma}. \tag{D.5}$$

## The framework

We consider a macroscale domain, where the porous medium is at least locally spatially periodic. The average of a variable  $\psi$  at location **x** is defined as

$$\langle \psi \rangle |_{\mathbf{x}} = \int_{\mathbb{R}^3} m \left( \mathbf{x} - \mathbf{y} \right) \chi_\beta \left( \mathbf{y} \right) \psi \left( \mathbf{y} \right) \, d\mathbf{y}, \tag{D.6}$$

where  $\psi$  represents either p or  $\mathbf{v}$ ,  $\chi_{\beta}$  is the fluid-phase indicator (whose value is 1 in  $V_{\beta}$  and 0 elsewhere), m is a normalized kernel, i.e.,  $\int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ . We note that  $\psi$  could have been written  $\psi_{\beta}$  since p or  $\mathbf{v}$  are only defined in the liquid phase  $\beta$ . The relationship between intrinsic and superficial averages is  $\langle \psi \rangle = \phi \langle \psi \rangle^{\beta}$ , where  $\phi = V_{\beta}/V$  is the porosity. We note that assuming that the domain is spatially periodic leads to a uniform porosity, yielding  $\nabla \phi = 0$ .

The goal of the averaging operator is to act as a low-pass filter, yielding a well-behaved macroscale behavior. To actually act so, the kernel m must be adequately chosen. Several choices for the kernel m are available and are discussed in a series of paper from Quintard and Whitaker [113, 114, 115, 116, 117] and more recently in Davit and Quintard [112]. In the theoretical development that follows, we assume that the kernel is correctly defined, such as the resulting macroscale behavior is smooth.

It is very useful to decompose the flow variables between the intrinsic average and the deviation [118],

$$\psi\left(\mathbf{x}\right) = \left.\left\langle\psi\right\rangle^{\beta}\right|_{\mathbf{x}} + \tilde{\psi}\left(\mathbf{x}\right). \tag{D.7}$$

The quantity  $\nabla \langle \psi \rangle^{\beta}$  reflects the variations of  $\psi$  at a large scale whereas  $\nabla \tilde{\psi}$  rather reflects its microscale variations. Typical scales are used to estimate these variations. The length  $l_{\beta}$  characterizes



FIGURE 1: Schematic of length-scale separation  $(l_{\beta} \ll h \ll L)$ . The solid phase  $\sigma$  is represented in gray.

the micro-scale structures whereas L is associated to the macroscale domain. We assume that these length-scales are separated, i.e.,

$$l_{\beta} \ll h \ll L,\tag{D.8}$$

where h is the unit cell size. Figure 1 illustrates the length scale separation.

## The averaging

We first average the mass balance equation at location  $\mathbf{x}$ . This yields

$$\left\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = 0. \tag{D.9}$$

Using the spatial averaging theorem [221] along with the no-slip condition at  $A_{\beta\sigma}$  (Eq. D.5), Whitaker [22] has shown that Eq. D.9 is equivalent to

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = -\phi^{-1} \nabla \phi \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}}.$$
 (D.10)

Since we assumed that the porous medium is spatially periodic, the macroscale porosity gradient is zero. This yields

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = 0. \tag{D.11}$$

Introducing the decomposition (Eq. D.7) and the original mass balance equation in Eq. D.11 leads to

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \left( \mathbf{x} \right) = 0 \text{ in } V_{\beta}. \tag{D.12}$$

Secondly, we introduce the decomposition into the boundary condition,

$$\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{v}} (\mathbf{x}) \text{ at } A_{\beta\sigma}.$$
 (D.13)

Finally, we average at location  $\mathbf{x}$  the the momentum equation (Eq. D.1), which yields

$$\left\langle \nabla \cdot \left[ \mu \left( \dot{\gamma} \right) \left( \nabla \mathbf{v} + \left( \nabla \mathbf{v} \right)^{\mathsf{T}} \right) \right] - \nabla p \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = -\rho \mathbf{g}.$$
 (D.14)

We known subtract Eq. D.14 to the original momentum equation at location  $\mathbf{x}$ . We obtain

$$\left[\nabla \cdot \left[\mu\left(\dot{\gamma}\right)\left(\nabla \mathbf{v} + \left(\nabla \mathbf{v}\right)^{\mathsf{T}}\right)\right] - \nabla p\right](\mathbf{x}) = \left\langle\nabla \cdot \left[\mu\left(\dot{\gamma}\right)\left(\nabla \mathbf{v} + \left(\nabla \mathbf{v}\right)^{\mathsf{T}}\right)\right] - \nabla p\right\rangle^{\beta}\Big|_{\mathbf{x}}.$$
 (D.15)

Finally, we average at location  $\mathbf{x}$  the decomposition equations applied on the pressure and the velocity. We first start with the pressure, which yields,

$$\langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} - \left\langle \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{y}} \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = \left\langle \tilde{p} \left( \mathbf{y} \right) \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}},$$
 (D.16)

where  $\mathbf{y}$  is the integration variable of the average at location  $\mathbf{x}$ . We now require that the kernel is continuously differentiable (note that this is not the case with the rectangular kernel used in [22]), so that we can perform a Taylor expansion near the location  $\mathbf{x}$ ,

$$\left\langle \left\langle p \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{y}} \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = \left\langle p \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} + \left\langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \left\langle p \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathcal{O}\left( \nabla \nabla \left\langle p \right\rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right), \tag{D.17}$$

We assume that the kernel of the averaging operator is chosen such as  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = 0$  [112]. This yields to  $\langle \tilde{p} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = \mathcal{O} \left( \nabla \nabla \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right)$ . We can hence approximate the averaging condition on the pressure deviation as

$$\left. \left\langle \tilde{p} \right\rangle^{\beta} \right|_{\mathbf{x}} = 0. \tag{D.18}$$

Eq. D.18 actually translates the setting of the pressure field. We can indeed always redefine the pressure as  $p_{\text{new}} = p + c$  with c a constant. This would simply yields  $\langle \tilde{p}_{\text{new}} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = c$ . A similar development can be performed for the velocity. We obtain

$$\left. \left\langle \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle^{\beta} \right|_{\mathbf{x}} = 0.$$
 (D.19)

## The closure problem

The micro-scale equations that we must solve are the continuity equation (Eq. D.12), the momentum equation (Eq. D.15), the boundary condition at  $A_{\beta\sigma}$  (Eq. D.13). Usually, a solution to this problem is sought for p and  $\mathbf{v}$  under the form

$$p(\mathbf{x}) = \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} + \underbrace{\mu_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}}}_{\tilde{p}(\mathbf{x})},$$
(D.20)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left. \left\langle \mathbf{v} \right\rangle^{\beta} \right|_{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathsf{B}(\mathbf{x}) \cdot \left\langle \mathbf{v} \right\rangle^{\beta}}_{\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})}.$$
(D.21)

in which B and **b** are closure (or mapping) variables [22]. We choose this form because we expect the pressure and velocity deviations to be linearly proportional to  $\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}}$  in the linear case.

Solving the micro-scale equations over the whole macroscale domain would require a considerable amount of computational power. A smarter approach proposed by the VAM consists in solving the flow equations only over the unit cell, centered at location **X**. The unit cell may be thought as a parallelepipedic. Further, we assume that the considered unit-cell is located far-away from the macroscale boundaries. Under this condition, we choose to apply periodic conditions on **B** and **b** at the external boundary  $(A_{\beta e})$  of the unit-cell.

Since the unit-cell is a parallelepiped, the only possible choice for the kernel m of the averaging operator in Eq. D.6 is the rectangular kernel, defined simply as 1/V, with V the volume of the unit-cell. The average operator hence reads,

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_{\beta}} \psi \left( \mathbf{y} \right) \, d\mathbf{y}.$$
 (D.22)

An adequate kernel that would ensure a smooth macroscale behavior is for instance the triangular kernel (see definition in [113]). In the general case, the rectangular kernel does not ensure a smooth macroscale behavior. However, since the unit-cell we consider is periodic, the averaging operator using the rectangular or the triangular kernel are similar [112]. Hence, we can rightfully use the rectangular kernel over a periodic unit-cell. The problem expressed with the variables B and b now reads

$$\left\{\nabla \cdot \left[\hat{\mu}\left(\nabla \mathsf{B} + (\nabla \mathsf{B})^{\mathsf{T}}\right)\right] - \nabla \mathbf{b}\right\} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = \left\langle\nabla \cdot \left[\hat{\mu}\left(\nabla \mathsf{B} + (\nabla \mathsf{B})^{\mathsf{T}}\right)\right] - \nabla \mathbf{b}\right\rangle^{\beta} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \text{ in } V_{\beta}, \quad (D.23)$$

$$(\nabla \cdot \mathsf{B}) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = 0 \text{ in } V_{\beta}, \tag{D.24}$$

$$\mathsf{B} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = -\mathsf{I} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \text{ at } A_{\beta\sigma}, \tag{D.25}$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle^{\beta} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = 0, \tag{D.26}$$

$$\langle \mathsf{B} \rangle^{\beta} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = 0, \tag{D.27}$$

Periodicity of B and b at 
$$A_{\beta e}$$
. (D.28)

Note that the subcript  $\langle \bullet \rangle |_{\mathbf{X}}$  is not used here since the average operation independent of the location in a periodic unit-cell for B and **b**. Under this framework, we now distinguish between the linear case ( $\hat{\mu} = 1$ ) and the nonlinear case where  $\hat{\mu}$ , B and **b** are functions of  $\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}$ .

#### The linear case

The linear case refers to the flow of a Newtonian viscosity fluid, i.e., the classical Stokes problem. In this case,  $\hat{\mu} = 1$  and the problem simplifies to the closure problems introduced by Whitaker [22],

$$\Delta \mathsf{B}_0 - \nabla \mathbf{b}_0 = \left\langle \Delta \mathsf{B}_0 - \nabla \mathbf{b}_0 \right\rangle^\beta \text{ in } V_\beta, \tag{D.29}$$

$$\nabla \cdot \mathsf{B}_0 = 0 \text{ in } V_\beta, \tag{D.30}$$

$$\mathsf{B}_0 = -\mathsf{I} \text{ at } A_{\beta\sigma}, \tag{D.31}$$

$$\langle \mathbf{b}_0 \rangle^\beta = 0, \tag{D.32}$$

$$\left\langle \mathsf{B}_{0}\right\rangle ^{\beta}=0,\tag{D.33}$$

Periodicity of 
$$\mathsf{B}_0$$
 and  $\mathbf{b}_0$  at  $A_{\beta e}$ . (D.34)

where  $B_0$  and  $b_0$  refer to the solution in the linear case. Once this problem is solved,  $B_0$  and  $b_0$  are known and injected into Eq. D.14. This yields,

$$-\left(\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}\right) + \mu_0 \left\langle \Delta \mathsf{B}_0 - \nabla \mathbf{b}_0 \right\rangle^{\beta} \cdot \left\langle \mathbf{v} \right\rangle^{\beta} = 0. \tag{D.35}$$

This brings the classical Darcy's law with

$$\mathsf{K}_{0}^{-1} = -\frac{1}{\phi} \left\langle \Delta \mathsf{B}_{0} - \nabla \mathbf{b}_{0} \right\rangle^{\beta}. \tag{D.36}$$

Each column of the resulting intrinsic permeability tensor  $K_0$  associated to the linear problem corresponds to the Newtonian flow in one space direction. In this specific linear case, a solution for any vector  $\langle \mathbf{v} \rangle$  can be built by solving the three problems for  $B_0 \cdot \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{e}_i$  with i = 1, 2, 3.

#### The nonlinear case

In the nonlinear case,  $\hat{\mu}$  as well as the mapping variables B and b are functions of  $\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}$ , so that the equations D.23 to D.28 may be gathered under the form,

$$\mathcal{P}\left(\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}\right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = 0. \tag{D.37}$$

Because B, **b** and  $\hat{\mu}$  depends on  $\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}$ , the nonlinearity prevents to write  $\mathcal{P} = 0$  as before, i.e., as 3 *ind*ependent problems for  $\mathsf{B}_0 \cdot \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{e}_i$  with i = 1, 2, 3. This is a warning that the methodology might be inadequate in the nonlinear case. Furthermore, in the nonlinear case, there is a priori no reason for the perturbations  $\tilde{\mathbf{v}}$  and  $\tilde{p}$  to be linearly proportional to  $\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}$ .

To solve the problem in the nonlinear case, one may solve the problem in the coordinate system  $\mathsf{E}'$  for which  $\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = \left\| \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \right\| \mathbf{e}'_{1}$ . The solution in a general frame is obtained by traditional change of coordinate from the original coordinate system  $\mathsf{E}$  to the new coordinate system  $\mathsf{E}'$ ,

$$\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} = \mathcal{B}_{\mathsf{E} \to \mathsf{E}'} \cdot \begin{pmatrix} \| \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
 (D.38)

In this configuration, the velocity and pressure deviations are expressed as,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \left\| \left\langle \mathbf{v} \right\rangle^{\beta} \right\| (\mathsf{B})_{\mathsf{E}'} \cdot \mathbf{e}'_1, \tag{D.39}$$

$$\tilde{p} = \mu_0 \left\| \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \right\| (\mathbf{b})_{\mathsf{E}'} \cdot \mathbf{e}'_1. \tag{D.40}$$

Injecting Eqs. D.39 and D.40 in Eq. D.14 yields

$$-\left(\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho_{\beta} \mathbf{g}\right) + \left\langle \nabla \cdot \left[\hat{\mu} \left(\nabla (\mathsf{B})_{\mathsf{E}'} + \left(\nabla (\mathsf{B})_{\mathsf{E}'}\right)^{\mathsf{T}}\right)\right] - \nabla (\mathbf{b})_{\mathsf{E}'}\right\rangle^{\beta} \cdot \left\| \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \right\| \mathbf{e}_{1}' = 0, \qquad (D.41)$$

which can be equivalently written using an apparent tensor  $\mathsf{K}_{\rm app}$  expressed in the coordinate system  $\mathsf{E}',$ 

$$-\left(\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}\right) + \mu_0 \left(\mathsf{K}_{\mathrm{app}}\right)_{\mathsf{E}'} \cdot \left\| \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \right\| \mathbf{e}_1' = 0. \tag{D.42}$$

In Eq. D.42,  $K_{app}$  only depends of 3 independent components for a given orientation and velocity norm. This latest equation can be written in the original basis under the form of a special Darcy's law,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathsf{K}_{\mathrm{app}}\left(\langle \mathbf{v} \rangle\right)}{\mu_0} \cdot \left(\nabla \left\langle p \right\rangle^\beta - \rho \mathbf{g}\right),\tag{D.43}$$

Contrary to the linear case, we only have one problem to solve which will give in the E' frame four different fields, i.e.,  $(B_{11})_{\mathsf{E}'}$ ,  $(B_{21})_{\mathsf{E}'}$ ,  $(B_{31})_{\mathsf{E}'}$  and  $(b_1)_{\mathsf{E}'}$ . Solving the problem in this manner is actually similar to use direct numerical simulations over a periodic unit-cell with the original equations with a source term  $\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}$  and periodic conditions for p, i.e.  $\tilde{p}$ , and  $\mathbf{v}$ .

#### Special closed form

As we have highlighted in Chapter 5, the nonlinear relationship between the average velocity and the pressure gradient can be written under the form of an special Darcy's law with a nonlinear mapping permeability-like relation. On a pure mathematical basis, we can indeed always recast the macroscale behavior as,

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -k_{\mathrm{n}} \mathsf{P} \cdot \frac{\mathsf{K}_{0}}{\mu_{0}} \cdot \left( \nabla \left\langle p \right\rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g} \right), \tag{D.44}$$

This formulation, according to the above development, handles the relationship between  $\langle \mathbf{v} \rangle$  and the source term  $\nabla \langle p \rangle^{\beta} - \rho \mathbf{g}$  with only 3 independent variables that are; a scalar  $k_n$  and the angles  $\alpha$  and  $\gamma$  used to fill up the rotation matrix P. The apparent permeability tensor is therefore written as,

$$\mathsf{K}_{\mathrm{app}} = k_{\mathrm{n}} \mathsf{P} \cdot \mathsf{K}_{\mathsf{0}}.\tag{D.45}$$

# Bibliographie

- J. V. Soulis, G. D. Giannoglou, et al. Non-newtonian models for molecular viscosity and wall shear stress in a 3d reconstructed human left coronary artery. *Medical engineering & physics*, 30(1):9–19, 2008.
- [2] S. G. Advani. Flow and rheology in polymer composites manufacturing. Elsevier Science, 1994.
- [3] P. Coussot. Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials : applications in industry and environment. John Wiley & Sons, 2005.
- [4] L. W. Lake, R. Johns, et al. Fundamentals of enhanced oil recovery. Society of Petroleum Engineers, 1986.
- [5] K. Sorbie. Polymer-improved oil recovery. Springer Science & Business Media, 1991.
- [6] W. Gogarty. Mobility control with polymer solutions. Society of Petroleum Engineers Journal, 7(02) :161–173, 1967.
- [7] L. W. Lake. Enhanced oil recovery. 1989.
- [8] L. Prouvost and M. Quintard. Stability criteria for the design of graded polymer buffers. Journal of Petroleum Science and Engineering, 3(4):333–343, 1990.
- [9] D. Morel, S. Jouenne, *et al.* Polymer injection in deep offshore field : the dalia angola case. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, 2008.
- [10] University of Texas at Austin. UTCHEM Technical Documentation, 2000.
- [11] S. GeoQuest. Eclipse reservoir simulator, manual and technical description, 2010.
- [12] P.-G. De Gennes. Scaling concepts in polymer physics. Cornell university press, 1979.
- [13] D. Zhu, J. Zhang, et al. Laboratory study on the potential eor use of hpam/ves hybrid in high-temperature and high-salinity oil reservoirs. Journal of Chemistry, 2013, 2013.
- [14] K. Sorbie and Y. Huang. The effect of ph on the flow behavior of xanthan solution through porous media. Journal of colloid and interface science, 149(2):303–313, 1992.
- [15] Y. Cohen, F. Christ, et al. Polymer retention and adsorption in the flow of polymer solutions through porous media. SPE Reservoir Engineering, 1(02) :113–118, 1986.
- [16] P. Zitha and C. Botermans. Bridging-adsorption of flexible polymers in low permeability porous media. SPE production & facilities, 13(01) :15–20, 1998.
- [17] J. Maerker. Shear degradation of partially hydrolyzed polyacrylamide solutions. Society of Petroleum Engineers Journal, 15(04) :311–322, 1975.

- [18] S. Wellington. Biopolymer solution viscosity stabilization-polymer degradation and antioxidant use. Society of Petroleum Engineers Journal, 23(06) :901–912, 1983.
- [19] J. Staggs. Discrete bond-weighted random scission of linear polymers. Polymer, 47(3):897– 906, 2006.
- [20] O. Rozenbaum and S. R. du Roscoat. Representative elementary volume assessment of threedimensional x-ray microtomography images of heterogeneous materials : Application to limestones. *Physical Review E*, 89(5) :053304, 2014.
- [21] H. Andra, N. Combaret, et al. Digital rock physics benchmarks part i : Imaging and segmentation. Computers & Geosciences, 50 :25 – 32, 2013. Benchmark problems, datasets and methodologies for the computational geosciences.
- [22] S. Whitaker. Flow in porous media i : A theoretical derivation of darcy's law. Transport in porous media, 1(1) :3–25, 1986.
- [23] E. Sánchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory. In Non-homogeneous media and vibration theory, volume 127, 1980.
- [24] F. Garcia-Ochoa, V. Santos, et al. Xanthan gum : production, recovery, and properties. Biotechnology advances, 18(7):549–579, 2000.
- [25] M. Milas, M. Rinaudo, et al. Comparative depolymerization of xanthan gum by ultrasonic and enzymic treatments. rheological and structural properties. Carbohydrate polymers, 6(2):95– 107, 1986.
- [26] K. Sorbie and Y. Huang. Rheological and transport effects in the flow of low-concentration xanthan solution through porous media. *Journal of Colloid and Interface Science*, 145(1):74 - 89, 1991.
- [27] R. Seright. Comparaison of xanthan and HPAM rheology in berea sandstone. *Teledyne ISCO*, AN11, 2012.
- [28] G. Chauveteau, N. Kohler, et al. Influence of microgels in polysaccharide solutions on their flow behavior through porous media. Society of Petroleum Engineers Journal, 24(03):361– 368, 1984.
- [29] J. Sheng. Modern chemical enhanced oil recovery : theory and practice. Gulf Professional Publishing, 2010.
- [30] N. Mungan. Rheology and adsorption of aqueous polymer solutions. Journal of Canadian Petroleum Technology, 8(02) :45–50, 1969.
- [31] F. Martin and N. Sherwood. The effect of hyrolysis of polyacrylamide on solution viscosity, polymer retention and flow resistance properties. In SPE Rocky Mountain Regional Meeting. Society of Petroleum Engineers, 1975.
- [32] C. Gao. Viscosity of partially hydrolyzed polyacrylamide under shearing and heat. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, 3(3):203–206, 2013.
- [33] P. Zitha, G. Chauveteau, et al. Permeability dependent propagation of polyacrylamides under near-wellbore flow conditions. In SPE International Symposium on Oilfield Chemistry, 1995.
- [34] P. J. Flory. Principles of polymer chemistry. Cornell University Press, 1953.
- [35] R. B. Bird, R. C. Armstrong, et al. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1 : Fluid mechanics, volume 1. John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 1987.

- [36] P. J. Carreau. Rheological equations from molecular network theories. Transactions of the Society of Rheology, 16(1):99–127, 1972.
- [37] R. B. Bird and P. J. Carreau. A nonlinear viscoelastic model for polymer solutions and melts. *Chemical Engineering Science*, 23(5):427 – 434, 1968.
- [38] B. A. Toms. Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large reynolds numbers. In *Proceedings of the 1st International Congress on Rheology*, volume 2, pages 135–141, 1948.
- [39] A. Groisman and V. Steinberg. Elastic turbulence in a polymer solution flow. Nature, 405(6782):53–55, 2000.
- [40] A. Groisman and S. R. Quake. A microfluidic rectifier : anisotropic flow resistance at low reynolds numbers. *Physical review letters*, 92(9) :094501, 2004.
- [41] H. Yin, D. Wang, et al. Study on flow behavoirs of viscoelastic polymer solution in micropore with dead end. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers, 2006.
- [42] A. Clarke, A. M. Howe, et al. Mechanism of anomalously increased oil displacement with aqueous viscoelastic polymer solutions. Soft matter, 11(18):3536–3541, 2015.
- [43] J. Mitchell, K. Lyons, et al. Viscoelastic polymer flows and elastic turbulence in threedimensional porous structures. Soft matter, 12(2):460–468, 2016.
- [44] R. B. Bird, R. C. Armstrong, et al. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 2 : Kinetic theory, volume 2. Wiley New York, 1977.
- [45] A. Peterlin. Hydrodynamics of macromolecules in a velocity field with longitudinal gradient. Journal of Polymer Science Part B : Polymer Letters, 4(4) :287–291, 1966.
- [46] M. Chilcott and J. M. Rallison. Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 29:381–432, 1988.
- [47] H. R. Warner Jr. Kinetic theory and rheology of dilute suspensions of finitely extendible dumbbells. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 11(3):379–387, 1972.
- [48] G. Schleiniger and R. Weinacht. A remark on the giesekus viscoelastic fluid. Journal of Rheology, 35(6) :1157–1170, 1991.
- [49] J. Azaiez, R. Guénette, et al. Numerical simulation of viscoelastic flows through a planar contraction. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 62(2-3):253 – 277, 1996.
- [50] J. Evans and D. Sibley. Re-entrant corner flows of {PTT} fluids in the cartesian stress basis. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 153(1):12 – 24, 2008.
- [51] D. N. Sibley. Viscoelastic Flows of PTT Fluid. PhD thesis, University of Bath, 2010.
- [52] L. M. Quinzani, R. C. Armstrong, et al. Birefringence and laser-doppler velocimetry (ldv) studies of viscoelastic flow through a planar contraction. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 52(1):1–36, 1994.
- [53] R. Fattal and R. Kupferman. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 123(2):281–285, 2004.
- [54] F. Habla, M. W. Tan, et al. Numerical simulation of the viscoelastic flow in a threedimensional lid-driven cavity using the log-conformation reformulation in openfoam R. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 212:47 – 62, 2014.

- [55] M. Quintard. Report on flow models involving polymer slugs. Total external report, 2012.
- [56] H. A. Barnes. A review of the slip (wall depletion) of polymer solutions, emulsions and particle suspensions in viscometers : its cause, character, and cure. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 56(3) :221 – 251, 1995.
- [57] T. Sochi. Slip at fluid-solid interface. *Polymer Reviews*, pages 309–340, 2011.
- [58] P. E. Rouse Jr. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. The Journal of Chemical Physics, 21(7) :1272–1280, 1953.
- [59] Y. M. Joshi, A. K. Lele, et al. Slipping fluids : a unified transient network model. Journal of non-newtonian fluid mechanics, 89(3) :303–335, 2000.
- [60] N. V. Priezjev. Relationship between induced fluid structure and boundary slip in nanoscale polymer films. *Physical Review E*, 82(5):051603, 2010.
- [61] J. H. Aubert and M. Tirrell. Effective viscosity of dilute polymer solutions near confining boundaries. *The Journal of Chemical Physics*, 77(1):553–561, 1982.
- [62] P.-G. de Gennes. Polymer solutions near an interface. adsorption and depletion layers. Macromolecules, 14(6) :1637–1644, 1981.
- [63] E. F. Casassa and Y. Tagami. An equilibrium theory for exclusion chromatography of branched and linear polymer chains. *Macromolecules*, 2(1):14–26, 1969.
- [64] G. Chauveteau. Rodlike polymer solution flow through fine pores : influence of pore size on rheological behavior. *Journal of Rheology*, 26(2) :111–142, 1982.
- [65] B. D. Wood, M. Quintard, et al. Estimation of adsorption rate coefficients based on the smoluchowski equation. *Chemical engineering science*, 59(10) :1905–1921, 2004.
- [66] G. Chauveteau. Concentration dependence of the effective viscosity of polymer solutions in small pores with repulsive or attractive walls. *Journal of Colloid and Interface Science*, 100:41–54, 1984.
- [67] P. Gramain and P. Myard. Elongational deformation by shear flow of flexible polymers adsorbed in porous media. *Macromolecules*, 14(1):180–184, 1981.
- [68] F. Brochard and P.-G. de Gennes. Shear-dependent slippage at a polymer/solid interface. Langmuir, 8(12):3033–3037, 1992.
- [69] J. Meissner. Polymer melt flow measurements by laser doppler velocimetry. Polymer testing, 3(4):291–301, 1983.
- [70] I. Langmuir. The constitution and fundamental properties of solids and liquids. Journal of the Franklin Institute, 183(1):102–105, 1917.
- [71] S. G. Hatzikiriakos. Wall slip of molten polymers. Progress in Polymer Science, 37(4):624– 643, 2012.
- [72] G. Chauveteau, K. Denys, et al. New insight on polymer adsorption under high flow rates. In SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium. Society of Petroleum Engineers, 2002.
- [73] J. Joanny, L. Leibler, et al. Effects of polymer solutions on colloid stability. Journal of Polymer Science : Polymer Physics Edition, 17(6) :1073–1084, 1979.
- [74] Y. Uematsu. Nonlinear electro-osmosis of dilute non-adsorbing polymer solutions with low ionic strength. Soft matter, 11(37):7402–7411, 2015.

- [75] A. Cuenca and H. Bodiguel. Submicron flow of polymer solutions : Slippage reduction due to confinement. *Physical review letters*, 110(10) :108304, 2013.
- [76] L. Auvray. Solutions de macromolécules rigides : effets de paroi, de confinement et d'orientation par un écoulement. *Journal de Physique*, 42(1) :79–95, 1981.
- [77] G. Chauveteau, M. Tirrell, et al. Concentration dependence of the effective viscosity of polymer solutions in small pores with repulsive or attractive walls. Journal of colloid and interface science, 100(1):41–54, 1984.
- [78] D. Ausserre, H. Hervet, et al. Concentration dependence of the interfacial depletion layer thickness for polymer solutions in contact with nonadsorbing walls. *Macromolecules*, 19(1):85– 88, 1986.
- [79] D. Rousseau, I. Henaut, et al. Impact of polymer mechanical degradation on shear and extensional viscosities. In IOR 2013-From Fundamental Science to Deployment, 2013.
- [80] R. S. Seright, T. Fan, et al. New insights into polymer rheology in porous media. SPE Journal, 16(1):35–42, 2011.
- [81] C. Huh, E. Lange, et al. Polymer retention in porous media. In SPE/DOE Enhanced Oil Recovery Symposium. Society of Petroleum Engineers, 1990.
- [82] W. Yun and A. Kovscek. Microvisual investigation of polymer retention on the homogeneous pore network of a micromodel. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 128 :115–127, 2015.
- [83] K. Sorbie, A. Parker, et al. Experimental and theoretical study of polymer flow in porous media. SPE Reservoir Engineering, 2(03) :281–304, 1987.
- [84] M. Szabo. Some aspect of polymer retention in porous media using a c-14-tagged hydrolysed polyacrylamide. SPE, 154 :323–337, 1975.
- [85] T. Lund, E. Bjørnestad, et al. Polymer retention and inaccessible pore volume in north sea reservoir material. Journal of Petroleum Science and Engineering, 7(1-2):25 – 32, 1992. Enhanced Oil Recovery.
- [86] J. Duda, E. Klaus, et al. Influence of polymer-molecule/wall interactions on mobility control. Society of Petroleum Engineers Journal, 21(05) :613–622, 1981.
- [87] M. Pancharoen, M. R. Thiele, et al. Inaccessible pore volume of associative polymer floods. In SPE Improved Oil Recovery Symposium. Society of Petroleum Engineers, 2010.
- [88] A. Mennella, S. L. Bryant, et al. Analysis of high-dispersion tracer tests in cores containing polymer gels. Journal of Petroleum Science and Engineering, 23(3):201–212, 1999.
- [89] G. Madras and B. J. McCoy. Numerical and similarity solutions for reversible population balance equations with size-dependent rates. *Journal of colloid and interface science*, 246(2):356–365, 2002.
- [90] J. Staggs. Modelling end-chain scission and recombination of linear polymers. Polymer degradation and stability, 85(2):759–767, 2004.
- [91] R. C. Jones and J. L. Gainer. Diffusion in mixed polymer solutions. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 15(1):83–85, 1976.
- [92] M. Edwards and R. Smith. Diffusion in polymer solutions. Chemical Engineering Science, 35(5):1031–1039, 1980.

- [93] G. Hirasaki and G. Pope. Analysis of factors influencing mobility and adsorbtion in the flow of polymer solution through porous media. SPE Journal, 4:337–346, 1974.
- [94] R. Cheng, Y. Shao, et al. Effect of adsorption on the viscosity of dilute polymer solution. European polymer journal, 34(11) :1613–1619, 1998.
- [95] R. Dawson, R. B. Lantz, et al. Inaccessible pore volume in polymer flooding. Society of Petroleum Engineers Journal, 12(05) :448–452, 1972.
- [96] A. Trouillaud. Improved physical property modeling for polymer flooding. Technical report, Total, June 2012.
- [97] L. Orgéas, Z. Idris, et al. Modelling the flow of power-law fluids through anisotropic porous media at low-pore reynolds number. Chemical Engineering Science, 61(14):4490 4502, 2006.
- [98] Z. Idris, L. Orgéas, et al. Microstructural effects on the flow law of power-law fluids through fibrous media. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 12(5):995, 2004.
- [99] M. Kozeny. Uber kapillare leitung des wassers im boden. Sitzber. Akad. Wiss. Wein, Mathnaturw, 136 :Abt. II a, P. 277, 1927.
- [100] P. C. Carman. Fluid flow through granular beds. Transactions-Institution of Chemical Engineeres, 15:150–166, 1937.
- [101] R. H. Christopher and S. Middleman. Power-law flow through a packed tubepower-law flow through a packed tube. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 4(4):422–426, 1965.
- [102] C. L. McCormick, R. D. Hester, et al. Improved polymers for enhanced oil recovery synthesis and rheology. US Department of Energy, BETC-5603-5, 1979.
- [103] A. Fletcher, S. Flew, et al. Measurements of polysaccharide polymer properties in porous media. In SPE International Symposium on Oilfield Chemistry. Society of Petroleum Engineers, 1991.
- [104] D. Wreath, G. Pope, et al. Dependence of polymer apparent viscosity on the permeable media and flow conditions. In Situ, 14(3), 1990.
- [105] D. Teeuw, F. T. Hesselink, et al. Power-law flow and hydrodynamic behaviour of biopolymer solutions in porous media. In SPE Oilfield and Geothermal Chemistry Symposium. Society of Petroleum Engineers, 1980.
- [106] F. Zami-Pierre, R. de Loubens, et al. Transition in the flow of power-law fluids through isotropic porous media. *Physical Review Letters*, 117(7):074502, 2016.
- [107] D. G. Hatzignatiou and al. Core-scale simulation of polymer flow through porous media. Journal of Petroleum Science and Engineering, 108 :137–150, 2013.
- [108] R. Seright. The effects of mechanical degradation and viscoelastic behavior on injectivity of polyacrylamide solutions. Society of Petroleum Engineers Journal, 23(03):475–485, 1983.
- [109] W. Cannella, C. Huh, et al. Prediction of xanthan rheology in porous media. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers, 1988.
- [110] S. Hejri, G. Willhite, et al. Development of correlations to predict biopolymer mobility in porous media. SPE Reservoir Engineering, 6(01) :91–98, 1991.
- [111] Y. Davit, C. G. Bell, et al. Homogenization via formal multiscale asymptotics and volume averaging : How do the two techniques compare? Advances in Water Resources, 62 :178–206, 2013.

- [112] Y. Davit and M. Quintard. Technical notes on volume averaging in porous media i : How to choose a spatial averaging operator for periodic and quasiperiodic structures? submitted to Transport in Porous Media.
- [113] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media i : The cellular average and the use of weighting functions. *Transport in Porous Media*, 14(2) :163– 177, 1994.
- [114] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media ii : Generalized volume averaging. *Transport in porous media*, 14(2) :179–206, 1994.
- [115] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media iii : Closure and comparison between theory and experiment. *Transport in Porous Media*, 15(1) :31–49, 1994.
- [116] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media iv : Computer generated porous media for three-dimensional systems. *Transport in Porous Media*, 15(1):51–70, 1994.
- [117] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media v : Geometrical results for two-dimensional systems. *Transport in Porous Media*, 15(2) :183–196, 1994.
- [118] S. Whitaker. The transport equations for multi-phase systems. Chemical Engineering Science, 28(1):139–147, 1973.
- [119] S. Hatzikiriakos and J. Dealy. Wall slip of molten high density polyethylene. i. sliding plate rheometer studies. *Journal of Rheology*, 35(4):497–523, 1991.
- [120] D. M. Kalyon. Apparent slip and viscoplasticity of concentrated suspensions. Journal of Rheology, 49(3):621–640, 2005.
- [121] C. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, 6 :389–440, 1823.
- [122] D. Lasseux, F. V. Parada, et al. A macroscopic model for slightly compressible gas slip-flow in homogeneous porous media. *Physics of Fluids*, 26(5) :053102, 2014.
- [123] E. Skjetne and J.-L. Auriault. Homogenization of wall-slip gas flow through porous media. Transport in porous Media, 36(3):293–306, 1999.
- [124] D. Lasseux, F. J. V. Parada, et al. An improved macroscale model for gas slip flow in porous media. Journal of Fluid Mechanics, 805 :118–146, 2016.
- [125] A. S. Ziarani and R. Aguilera. Knudsen's permeability correction for tight porous media. Transport in porous media, 91(1):239–260, 2012.
- [126] S. C. Jones. A rapid accurate unsteady-state klinkenberg permeameter. Society of Petroleum Engineers Journal, 12(05) :383–397, 1972.
- [127] X.-H. Wang, J.-T. Jia, et al. Derivation of the darcy scale filtration equation for power-law fluids with the volume averaging method. Journal of Porous Media, 17(8):741–750, 2014.
- [128] J. Woods, P. Spelt, et al. Creeping flows of power-law fluids through periodic arrays of elliptical cylinders. Journal of non-newtonian fluid mechanics, 111(2):211-228, 2003.
- [129] J.-L. Auriault, P. Royer, et al. Filtration law for power-law fluids in anisotropic porous media. International Journal of Engineering Science, 40(10) :1151–1163, 2002.

- [130] S. V. Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow. Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. Hemisphere Pub. Corp. New York, Washington, 1980.
- [131] H. Jasak. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. PhD thesis, Imperial College, 1996.
- [132] L. Orgogozo, N. Renon, et al. An open source massively parallel solver for richards equation : Mechanistic modelling of water fluxes at the watershed scale. Computer Physics Communications, 185(12) :3358–3371, 2014.
- [133] J. H. Ferziger, M. Peric, et al. Computational methods for fluid dynamics, 1997.
- [134] H. Weller, G. Tabor, et al. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. Computers in physics, 12(6) :620–631, 1998.
- [135] C. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. AIAA journal, 21(11) :1525–1532, 1983.
- [136] P.-E. M. Rethore and N. N. Sørensen. Actuator disc model using a modified rhie-chow/simple pressure correction algorithm. comparison with analytical solutions. In 2008 European Wind Energy Conference and Exhibition, 2008.
- [137] M. Nordlund, M. Stanic, et al. Improved piso algorithms for modeling density varying flow in conjugate fluid-porous domains. *Journal of computational physics*, 306 :199–215, 2016.
- [138] C. J. Greenshields. Openfoam programmers guide. foam. sourceforge. net/docs/Guidesa4/ProgrammersGuides. pdf, 2015.
- [139] P. J. Roache. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. Annual review of fluid Mechanics, 29(1):123–160, 1997.
- [140] O. Gerbaux, F. Buyens, et al. Transport properties of real metallic foams. Journal of colloid and interface science, 342(1):155–165, 2010.
- [141] H. Okabe and M. J. Blunt. Prediction of permeability for porous media reconstructed using multiple-point statistics. *Physical Review E*, 70(6) :066135, 2004.
- [142] H. Andra, N. Combaret, et al. Digital rock physics benchmarks part ii : Computing effective properties. Computers & Geosciences, 50:33 – 43, 2013. Benchmark problems, datasets and methodologies for the computational geosciences.
- [143] A. F. Morais, H. Seybold, et al. Non-newtonian fluid flow through three-dimensional disordered porous media. Physical review letters, 103(19) :194502, 2009.
- [144] S. Sullivan, L. Gladden, et al. Simulation of power-law fluid flow through porous media using lattice boltzmann techniques. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 133(2) :91–98, 2006.
- [145] M. Vakilha and M. T. Manzari. Modelling of power-law fluid flow through porous media using smoothed particle hydrodynamics. *Transport in Porous Media*, 74(3):331–346, 2008.
- [146] C. Soulaine, F. Gjetvaj, et al. The impact of sub-resolution porosity of x-ray microtomography images on the permeability. Transport in Porous Media, 113(1):227–243, 2016.
- [147] T. Kanit, S. Forest, et al. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. International Journal of Solids and Structures, 40(13–14) :3647 – 3679, 2003.
- [148] G. Christakos. On the problem of permissible covariance and variogram models. Water Resources Research, 20(2):251–265, 1984.

- [149] O. Rozenbaum, E. L. Trong, et al. 2-d image analysis : A complementary tool for characterizing quarry and weathered building limestone. Journal of Cultural Heritage, 8(2):151-159, 2007.
- [150] R. Clavier. Utilisation de variogrammes pour quantifier le désordre dans un milieu poreux. Technical report, IRSN, 2013.
- [151] S. S. Datta, H. Chiang, et al. Spatial fluctuations of fluid velocities in flow through a threedimensional porous medium. *Physical review letters*, 111(6) :064501, 2013.
- [152] FEI. Avizo 9 user's guide, 2016.
- [153] M. Fleury, L. Hayat, et al. Parallel entropic auto-thresholding. Image and Vision Computing, 14(4):247-263, 1996.
- [154] P. Kumar, S. Ranganath, et al. Queue based fast background modelling and fast hysteresis thresholding for better foreground segmentation. In Information, Communications and Signal Processing, 2003 and Fourth Pacific Rim Conference on Multimedia. Proceedings of the 2003 Joint Conference of the Fourth International Conference on, volume 2, pages 743–747. IEEE, 2003.
- [155] A. P. Mangan and R. T. Whitaker. Partitioning 3d surface meshes using watershed segmentation. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 5(4):308–321, 1999.
- [156] Y. Davit and M. Quintard. Theoretical analysis of transport in porous media : Multi-equation and hybrid models for a generic transport problem with nonlinear source terms. In *Handbook* of Porous Media, Third Edition, pages 245–320. CRC Press, 2015.
- [157] S. Roman, C. Soulaine, et al. Particle velocimetry analysis of immiscible two-phase flow in micromodels. Advances in Water Resources, 2015.
- [158] R. Guibert, P. Horgue, et al. A comparison of various methods for the numerical evaluation of porous media permeability tensors from pore-scale geometry. *Mathematical Geosciences*, pages 1–19, 2015.
- [159] F. Zami-Pierre, Y. Davit, et al. Study of the macro-scale transition emerging from nonnewtonian fluid flow through porous media. In ECMOR XV-15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 2016.
- [160] J. Bleyer and P. Coussot. Breakage of non-newtonian character in flow through a porous medium : Evidence from numerical simulation. *Physical Review E*, 89(6) :063018, 2014.
- [161] T. Chevalier, C. Chevalier, et al. Darcy's law for yield stress fluid flowing through a porous medium. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 195:57–66, 2013.
- [162] T. Chevalier, S. Rodts, et al. Breaking of non-newtonian character in flows through a porous medium. Phys. Rev. E, 89 :023002, Feb 2014.
- [163] O. Gipouloux and A.-M. Zine. Computation of the filtration laws through porous media for a non-newtonian fluid obeying the power law. *Computational Geosciences*, 1(2):127–153, 1997.
- [164] D. Getachew, W. Minkowycz, et al. Macroscopic equations of non-newtonian fluid flow and heat transfer. Journal of Porous Media, 1(3):273–283, 1998.
- [165] J. Lage and B. Antohe. Darcy's experiments and the deviation to nonlinear flow regime. Journal of fluids engineering, 122(3):619–625, 2000.
- [166] S. Pasquier, M. Quintard, et al. Modeling flow in porous media with rough surfaces : Effective slip boundary conditions and application to structured packings. *Chemical Engineering Science*, 165 :131–146, 2017.

- [167] B. D. Rabideau, P. Moucheront, et al. The extrusion of a model yield stress fluid imaged by {MRI} velocimetry. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 165(7-8):394 - 408, 2010.
- [168] S. Liu and J. H. Masliyah. On non-newtonian fluid flow in ducts and porous media. Chemical Engineering Science, 53(6) :1175–1201, 1998.
- [169] J. Lecourtier and G. Chauveteau. Xanthan fractionation by surface exclusion chromatography. *Macromolecules*, 17(7) :1340–1343, 1984.
- [170] Transport Phenomena. John Wiley & Sons, 2002.
- [171] J. Savins. Non-newtonian flow through porous media. Industrial & Engineering Chemistry, 61(10):18–47, 1969.
- [172] F. Dullien. Single phase flow through porous media and pore structure. The chemical engeneering Journal, 1975.
- [173] R. Clavier, N. Chikhi, et al. Experimental investigation on single-phase pressure losses in nuclear debris beds : Identification of flow regimes and effective diameter. Nuclear Engineering and Design, 292 :222–236, 2015.
- [174] J. du Plessis and L. Roos. Predicting the hydrodynamic permeability of sandstone with a pore-scale model. *Journal of Geophysical Research*, 1994.
- [175] A. Jongerius, D. Schoonderbeek, et al. Electro-optical soil porosity investigation by means of quantimet-b equipment. Geoderma, 7(3-4):177 - 198, 1972.
- [176] P. Levitz and D. Tchoubar. Disordered porous solids : from chord distributions to small angle scattering. Journal de Physique I, 2(6) :771–790, 1992.
- [177] M. Ioannidis, M. Kwiecien, et al. Statistical analysis of the porous microstructure as a method for estimating reservoir permeability. Journal of Petroleum Science and Engineering, 16(4):251-261, 1996.
- [178] T. Chevalier. Injection de fuides non newtoniens en milieux poreux. Master's thesis, Ecole des Ponts, ParisTech, 2010.
- [179] U. Agarwal, A. Dutta, et al. Migration of macromolecules under flow : the physical origin and engineering implications. Chemical Engineering Science, 49(11) :1693 – 1717, 1994.
- [180] J. Amundarain, L. Castro, et al. Solutions of xanthan gum/guar gum mixtures : shear rheology, porous media flow, and solids transport in annular flow. *Rheologica acta*, 48(5) :491–498, 2009.
- [181] F. Zami-Pierre, R. de Loubens, et al. Polymer flow through porous media : Numerical prediction of the contribution of slip to the apparent viscosity. Transport in Porous Media, pages 1–18, 2017.
- [182] J. González, A. Müller, et al. The role of shear and elongation in the flow of solutions of semi-flexible polymers through porous media. *Rheologica acta*, 44(4) :396–405, 2005.
- [183] K. Sorbie. Depleted layer effects in polymer flow through porous media : I. single capillary calculations. Journal of colloid and interface science, 139(2) :299–314, 1990.
- [184] A. Omari, M. Moan, et al. Hydrodynamic behavior of semirigid polymer at a solid-liquid interface. Journal of Rheology, 33(1):1–13, 1989.
- [185] R. Seright, J. Seheult, et al. Injectivity characteristics of eor polymers. In SPE annual technical conference and exhibition. Society of Petroleum Engineers, 2008.

- [186] D. Morel, E. Zaugg, et al. Dalia/camelia polymer injection in deep offshore field angola learnings and in situ polymer sampling results. In SPE Asia Pacific Enhanced Oil Recovery Conference. Society of Petroleum Engineers, 2015.
- [187] T. Skauge, O. Kvilhaug, et al. Influence of polymer structural conformation and phase behaviour on in-situ viscosity. In IOR 2015-18th European Symposium on Improved Oil Recovery, 2015.
- [188] A. Stavland, H. Jonsbraten, et al. Polymer flooding-flow properties in porous media versus rheological parameters. In SPE EUROPEC/EAGE Annual Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers, 2010.
- [189] T. D. Blake. Slip between a liquid and a solid : Dm tolstoi's (1952) theory reconsidered. Colloids and surfaces, 47 :135–145, 1990.
- [190] Y. Cohen and A. Metzner. Apparent slip flow of polymer solutions. Journal of Rheology, 29(1):67–102, 1985.
- [191] N. Churaev, V. Sobolev, et al. Slippage of liquids over lyophobic solid surfaces. Journal of Colloid and Interface Science, 97(2):574 – 581, 1984.
- [192] D. Tolstoi. Mercury sliding on glass. In Dokl. Akad. Nauk SSSR, volume 85, pages 1329–1335, 1952.
- [193] H. Ma and M. D. Graham. Theory of shear-induced migration in dilute polymer solutions near solid boundaries. *Physics of Fluids*, 17(8) :083103, 2005.
- [194] N. V. Priezjev and S. M. Troian. Molecular origin and dynamic behavior of slip in sheared polymer films. *Physical review letters*, 92(1):018302, 2004.
- [195] R. Fåhræus and T. Lindqvist. The viscosity of the blood in narrow capillary tubes. American Journal of Physiology-Legacy Content, 96(3):562–568, 1931.
- [196] J. Sherwood, J. Dusting, et al. The effect of red blood cell aggregation on velocity and cell-depleted layer characteristics of blood in a bifurcating microchannel. *Biomicrofluidics*, 6(2):024119, 2012.
- [197] D. Adams and A. Matheson. Computation of dense random packings of hard spheres. The Journal of Chemical Physics, 56(5) :1989–1994, 1972.
- [198] G. D. Giannoglou, J. V. Soulis, et al. Wall pressure gradient in normal left coronary artery tree. Medical engineering & physics, 27(6):455-464, 2005.
- [199] Y. Davit and M. Quintard. Handbook of Porous Media, chapter ch. 7 : Theoretical analysis of transport in porous media : Multi-Equation and Hybrid Models for a Generic Transport Problem with Non-Linear Source Terms. Taylor & Francis, 3 edition, 2015.
- [200] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. 1856.
- [201] D. Lasseux and F. Valdés-Parada. Symmetry properties of macroscopic transport coefficients in porous media. *Physics of Fluids*, 29(4) :043303, 2017.
- [202] I. Swaid, K. Wilke, et al. Relative permeabilities and rheology of polymers in sandstone cores. Revue de l'Institut Français du Pétrole, 52(2) :263–265, 1997.
- [203] J. Dautriat, N. Gland, et al. Axial and radial permeability evolutions of compressed sandstones : end effects and shear-band induced permeability anisotropy. Pure and Applied Geophysics, 166(5-7) :1037–1061, 2009.

- [204] T. Lotsch, T. Muller, et al. The effect of inaccessible pore volume on polymer coreflood experiments. In SPE Oilfield and Geothermal Chemistry Symposium. Society of Petroleum Engineers, 1985.
- [205] A. Ferrari, J. Jimenez-Martinez, et al. Challenges in modeling unstable two-phase flow experiments in porous micromodels. Water Resources Research, 51(3):1381–1400, 2015.
- [206] M. Quintard and S. Whitaker. Ecoulement monophasique en milieu poreux : Effet des hétérogénéités locales. Journal de Mécanique théorique et appliquée, 6(5) :691–726, 1987.
- [207] A. Ahmadi, M. Quintard, et al. Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media : V. two-equation model for solute transport with adsorption. Advances in water resources, 22(1):59–86, 1998.
- [208] B. Wood, F. Cherblanc, et al. Volume averaging for determining the effective dispersion tensor : Closure using periodic unit cells and comparison with ensemble averaging. Water Resources Res., 39(6) :1154–1173, 2003.
- [209] M. Quintard and S. Whitaker. Two-phase flow in heterogeneous porous media : the method of large-scale averaging. *Transport in Porous Media*, 3 :357–413, 1988.
- [210] A. Ahmadi and M. Quintard. Large-scale properties for two-phase flow in random porous media. Journal of hydrology, 183(1-2) :69–99, 1996.
- [211] A. Clarke, A. M. Howe, et al. How viscoelastic-polymer flooding enhances displacement efficiency. SPE Journal, 2015.
- [212] W.-J. Yang, W. Yi, et al. Toward large scale parallel computer simulation of viscoelastic fluid flow : A study of benchmark flow problems. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 222 :82–95, 2015.
- [213] A. Caola, Y. Joo, et al. Highly parallel time integration of viscoelastic flows. Journal of non-newtonian fluid mechanics, 100(1):191–216, 2001.
- [214] Y. Fan, R. Tanner, et al. Galerkin/least-square finite-element methods for steady viscoelastic flows. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 84(2) :233-256, 1999.
- [215] A. W. Liu, D. E. Bornside, et al. Viscoelastic flow of polymer solutions around a periodic, linear array of cylinders : comparisons of predictions for microstructure and flow fields. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 77(3) :153–190, 1998.
- [216] M. A. Hulsen, R. Fattal, et al. Flow of viscoelastic fluids past a cylinder at high weissenberg number : stabilized simulations using matrix logarithms. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 127(1) :27–39, 2005.
- [217] R. G. Owens, C. Chauvière, et al. A locally-upwinded spectral technique (lust) for viscoelastic flows. Journal of non-newtonian fluid mechanics, 108(1):49–71, 2002.
- [218] R. Bird, P. Dotson, et al. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 7(2-3) :213–235, 1980.
- [219] C. Perrot, F. Chevillotte, et al. On the dynamic viscous permeability tensor symmetry. The Journal of the Acoustical Society of America, 124(4) :EL210–EL217, 2008.
- [220] M. Pilotti, S. Succi, et al. Energy dissipation and permeability in porous media. EPL (Europhysics Letters), 60(1):72, 2002.
- [221] F. A. Howes and S. Whitaker. The spatial averaging theorem revisited. Chemical engineering science, 40(8) :1387–1392, 1985.