



HAL
open science

Opérateurs différentiels déformés en plusieurs variables

Pierre Houedry

► **To cite this version:**

Pierre Houedry. Opérateurs différentiels déformés en plusieurs variables. Géométrie algébrique [math.AG]. Normandie Université, 2023. Français. NNT : 2023NORMC210 . tel-04229491

HAL Id: tel-04229491

<https://theses.hal.science/tel-04229491>

Submitted on 5 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Opérateurs différentiels déformés en plusieurs variables

Présentée et soutenue par
PIERRE HOUEDRY

Thèse soutenue le 30/06/2023
devant le jury composé de

M. ANDREA PULITA	Professeur des universités, Université Grenoble Alpes	Rapporteur du jury
M. ATSUSHI SHIHO	Professeur des universités, The Tokyo University	Rapporteur du jury
M. DANIEL CARO	Professeur des universités, Université de Caen Normandie	Membre du jury
M. ADOLFO QUIROS	Professeur des universités, Universidad Autonoma de MADRID	Membre du jury
MME CHRISTINE HUYGHE	Directeur de recherche, Université de Franche-Comté	Président du jury
M. JEROME POINEAU	Professeur des universités, Université de Caen Normandie	Directeur de thèse
M. BERNARD LE STUM	Maître de conférences HDR, IRMAR - Université de Rennes 1	Co-directeur de thèse

Thèse dirigée par **JEROME POINEAU (Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen))** et **BERNARD LE STUM (Université de Rennes 1)**



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE



OPÉRATEURS DÉFORMÉS EN PLUSIEURS VARIABLES

Pierre Houédry

Dla mojej matki.

Remerciements

Mes premières pensées vont évidemment à Jérôme et Bernard, mes deux directeurs de thèse. Merci à vous de m'avoir appris à écrire les mathématiques. Votre complémentarité dans votre encadrement m'a permis de me faire passer trois magnifiques années.

Bernard, tu as été pour moi autant un modèle pour les mathématiques que pour la vie. Tu m'as continûment transmis tes intuitions mathématiques pour m'aider à comprendre les mécanismes qui mènent à la création. Je ne compte plus le nombre de fois où je suis allé au 6ème, abattu par les démos qui ne marchaient pas, pour trouver ta porte grande ouverte et ressortir le sourire aux lèvres, porté par ton optimisme sans faille.

Jérôme, tu es un pilier de ma vie de mathématicien. Grâce à toi j'ai découvert l'algèbre différentielle. Je te remercie du temps que tu as consacré pour que cette thèse ait lieu, de m'avoir laissé une grande liberté de travail et de m'avoir suivi dans tous mes projets. Nos sessions de travail à Caen ou en visio ont été à chaque fois fructueuses pour ma réflexion mathématiques et m'ont permis d'atteindre la compréhension que j'ai aujourd'hui de ce sujet.

La troisième personne que je tiens à remercier, c'est Vincent Mineo-Kleiner. Sans toi, je ne serais pas devenu le scientifique que je suis aujourd'hui. Tu m'as pris sous ton aile dès ma première année d'études et tu as su m'orienter tout au long de mon parcours. Au-delà des mathématiques, les moments passés ensemble, les découvertes partagées et ton soutien ont participé à forger la personne que je suis devenue. Je t'en suis infiniment reconnaissant.

Gracias Adolfo Quirós por esta estancia en Madrid, que en mi opinión fue increíble a pesar de que no lo creas. Fue un verdadero placer de trabajar contigo.

志甫 淳 先生のもとで学べた事に感謝しています。先生のおかげで、日本の文化や生活などを感じることができて、幸せでした。

Merci à Andrea d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse et pour ton invitation à Grenoble où tu m'as transmis beaucoup d'idées sur les q -différences.

Mes années d'études depuis le lycée ont été marquées par des professeurs que je remercie pour le savoir qu'ils m'ont transmis : Florian Ivorra, François Maucourant, Delphine Boucher, Ludovic Marquis et Eric Chartrain.

Parce que ces trois années de doctorat n'ont pas seulement été remplies par les mathématiques mais aussi par beaucoup de moments de vies géniaux je tiens à remercier : Velibor pour avoir inventé la chillaxicine. Alexandre N. pour nos interminables discussions téléphoniques. Julien pour toutes les plus belles roues libres. Nathan et Mathis, le sang de la veine, les triphazés, je sais pas ce que j'aurais fais sans vous, vous êtes incroyables. Ange, pour tous tes mots de philosophie. Enora, pour me redonner le sourire régulièrement. Andres mi querido venezolano. Arnaud, mon modèle préféré. Lucas pour la cruxifiction. Marie-Laure alias Watson le gros bébé. Yann mon informaticien préféré. Sébastien pour avoir découvert les maths. Guigui et ses bons tuyaux. Alexandre C. le balèze de l'ODM et des garages. Guillaume alias la Polytesse. Edgar pour sa droiture. Dorian mon grand frère de maths. Metlili pour le GH5. Pacush pour sa maîtrise des mots. Federico le joueur. Yvan du rêve le fou. Gwenn ma cousine. Victor pour son déni sans failles. Merci à Camille Dupont l'insoluble.

Dédicace à Mya, Hit, HI2P, Nes, Noctal, Ofet, Maraudeur, Fortune, Gloar, Martin, Odré, Byako, 68%, Hobes, Million, Yens et Von Naher les potes du graffiti. Lélé, je te remercie particulièrement pour la vision que tu m'as donnée et toutes les techniques que tu m'as enseignées.

Pour ce séjour incroyable au Japon rempli d'excès et de strong zero, merci à cette fabuleuse équipe de gaijin : Cuong mon partenaire de ramen, Jérôme et ses millions de fleurs, Florestan mon gâté rennais, Clara la médiatrice et Marie mon ange gardienne. Merci à Tristan pour Kikanbo et à Michał pour ce séjour à Nikko.

Merci à mes loulous de L1 CALM pour ce semestre d'enseignement en 2020-2021. Promis, j'essaierai de moins me cogner dans les tables à l'avenir.

Merci à Erwan, Antoine, Alexis M. et Alexis R. pour toutes ces sessions d'entraînement, pour votre soutien et la détermination que vous m'avez inculqué.

Remerciements à Nathan, Didier et Philippe, l'équipe de buenou, pour tous ces dimanches à parcourir cette campagne qui m'est chère et de m'avoir aidé avec Rio.

Dziękuję mojej rodzinie w Polsce za to, że za każdym razem w najlepszy sposób witała mnie w Warszawie. Podziękowania dla Ewelinki za jej nieskończoną słodocz i Michasi za zapoznanie mnie z polską młodzieżą.

Papa, c'est toi le meilleur, tu as été un soutien indéfectible durant ces dernières années difficiles et tu as su façonner un des lieux qui m'est le plus cher au monde, le Grand Clos.

Je souhaite le meilleur à mon petit frère Martin.

Table des matières

Introduction	9
1 Généralités	21
1.1 Anneaux de Huber	21
1.2 Morphismes topologiquement étales	28
2 Calcul différentiel déformé	35
2.1 Rappels sur les modules filtrés	35
2.2 Parties principales déformées en plusieurs variables	37
2.3 Coordonnées	45
2.4 Formes différentielles déformées	49
2.5 Dérivations	51
2.6 Opérateurs différentiels déformés de niveau infini	60
2.7 Séries de Taylor déformées	63
2.8 Opérateurs différentiels de rayon fini	64
3 Opérateurs différentiels déformés et q-cristaux	77
3.1 δ -anneaux	77
3.2 Puissances divisées et q -PD-enveloppes	79
3.3 q -PD-enveloppes complètes	82
3.4 Hyper q -stratifications	83
3.5 Calcul aux q -différences	89

Introduction

[. . .] I believe in evidence. I believe in observation, measurement, and reasoning, confirmed by independent observers. I'll believe anything, no matter how wild and ridiculous, if there is evidence for it. The wilder and more ridiculous something is, however, the firmer and more solid the evidence will have to be.

Isaac Asimov, *The Roving Mind*,
1983

Historique

Une équation aux q -différences est une relation de la forme

$$E(x, f, \partial_q(f), \dots, \partial_q^n(f)) = 0$$

entre une fonction inconnue f et ses itérations par l'opérateur aux q -différences

$$\partial_q(f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}.$$

La motivation première de l'étude de ce type d'équation est une question pratique. Le but est de discrétiser une équation différentielle afin de la rendre plus facilement manipulable. Ce passage s'appelle «déformation». Le processus qui consiste à récupérer une équation différentielle à partir d'une équation aux q -différences, en faisant tendre q vers 1, s'appelle «confluence». Le problème intéressant, d'un point de vue pratique, est donc de mesurer l'écart entre les solutions de l'équation discrétisée par déformation et celle de l'équation différentielle originelle.

L'étude des équations aux q -différences débute avec les problèmes de dénombrement étudiés par Euler au XVIII^e siècle. Heine et Jacobi s'intéressent aux fonctions hypergéométriques qui sont solutions d'équations aux q -différences linéaires du second ordre. Il est par exemple possible de considérer la série binomiale

$$F(\alpha, x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n,$$

où $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$. Cette série est solution de l'équation différentielle

$$(1 - x)y' - \alpha y = 0,$$

ce qui permet de démontrer que

$$F(\alpha, x) = (1 - x)^{-\alpha}.$$

Il est alors possible de déformer cette identité (Cauchy 1843, Heine) en posant

$$\Phi(a, q, x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a, q)_n}{(q, q)_n} x^n$$

où l'on a posé, pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$(a, q)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i).$$

Elle est solution de l'équation aux q -différences

$$(1 - ax)y(qx) = (1 - x)y(x),$$

ce qui permet de démontrer le théorème q -binomial

$$\Phi(a, q, x) = \frac{(ax, q)_\infty}{(x, q)_\infty}.$$

L'étude des équations aux q -différences est ensuite poursuivie par des mathématiciens tels que Poincaré, Picard, Ramnujan (*cf. Lost Notebook*), G. Watson... Birkhoff (voir par exemple [Bir13]) a joué un rôle fondamental dans le développement de la théorie des équations aux q -différences en fournissant une série de questions qui, une fois résolues, ont permis de fournir une base pour la théorie de l'étude de ces équations qui manquait jusqu'à lors de fondations solides.

Cette théorie semble cependant avoir été mise de côté pendant la deuxième moitié du XX^e siècle. Le sujet a connu un regain d'intérêt au début du XXI^e siècle et apparaît maintenant dans diverses aires de recherches telles que : l'arithmétique, les groupes quantiques, la physique théorique et les phénomènes aléatoires discrets. On trouve par exemple dans [BD99] une utilisation des q -analogues qui permet la description de certains oscillateurs harmoniques quantiques et des applications utiles à la compréhension des structures des molécules et des agrégats atomiques.

Une manière d'attaquer le problème est d'utiliser la *théorie de Galois différentielle*. C'est une façon de codifier l'information sur les solutions de l'équation. Des mathématiciens comme Ramis et Sauloy ont pu obtenir des descriptions des groupes de Galois grâce aux phénomènes de Stokes pour les équations différentielles et grâce à la théorie des courbes elliptiques pour les équations aux q -différences, permettant ainsi la classification de ces objets du point de vue des catégories Tannakiennes. Ces travaux ont permis de comprendre le phénomène de confluence dans le cadre

des complexes vers les années 2010. Dans ce carcan complexe, les équations ont des comportements assez différents et il apparaît plusieurs manières de faire confluer une équation aux q -différences vers une équation différentielle. On obtient alors des théorèmes de ce type : considérons une famille de systèmes

$$x\partial_q(Y(x)) = B_q(x)Y(x),$$

où B_q est une matrice de fonctions dont les coefficients dépendent de q . Nous supposons que $B_q \rightarrow \tilde{B}$ lorsque q tend vers 1. Ce qui donne le système différentiel

$$x\frac{\partial}{\partial x}Y(x) = \tilde{B}(x)Y(x).$$

Théorème. [Sau00, page 1047] *Supposons que le système différentiel associé à notre équation aux q -différences est fuschien non résonnant en 0 et que q tend vers 1 le long d'une q_0 -spirale continue*

$$q_0^{\mathbb{R}} = e^{-2i\pi\tau_0\mathbb{R}}, \text{ où } q_0 = e^{-2i\pi\tau_0}, \text{ Im}(\tau_0) > 0.$$

Nous supposons également que les singularités de B_q tendent vers les pôles x_1, x_2, \dots de \tilde{B} . Si de plus, $B_q \rightarrow \tilde{B}$ uniformément sur tout compact de

$$U_0 = \mathbb{C}^* \setminus \left(\bigcup x_i q_0^{\mathbb{R}^+} \right) \setminus q_0^{\mathbb{R}}$$

et qu'une matrice de passage de $B_q(0)$ à sa forme de Jordan converge vers une matrice de passage de $\tilde{B}(0)$ à sa forme de Jordan, alors, la solution canonique X_q du système aux q -différences converge uniformément, sur tout compact de U_0 , vers une solution \tilde{X} du système différentiel.

Il est possible de s'intéresser au même problème d'un point de vue arithmétique, c'est-à-dire dans le monde des nombres p -adiques. En 2000, Lucia Di Vizio démontre un q -analogue de la conjecture de Grothendieck sur les p -courbures ([DV02]). Peu de temps après, en 2004, Yves André et Lucia Di Vizio étudient le phénomène de confluence (cf. [ADV04]). Pour le corps de fractions K d'un anneau de valuation discrète qui est complet pour une valeur absolue $|\cdot|$ non-archimédienne, ils considèrent l'anneau de Robba

$$\mathcal{R}_K := \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}(]1 - \varepsilon, 1[)$$

où

$$\mathcal{A}(]1 - \varepsilon, 1[) := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n, a_n \in K, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rho^n = 0 \forall \rho \in]1 - \varepsilon, 1[\right\}.$$

Ils trouvent une équivalence entre la catégorie $\sigma_q - \text{eq}_{\mathcal{R}_K}^{(\phi)}$ des équations aux q -différences avec une structure de Frobenius sur l'anneau de Robba \mathcal{R}_K et la catégorie $d - \text{eq}_{\mathcal{R}_K}^{(\phi)}$ des équations différentielles avec une structure de Frobenius sur l'anneau de Robba. Ils montrent que les deux catégories sont équivalentes à $\text{Rep}_K(G_{k((x))} \times \mathbb{G}_a)$ où k désigne le corps résiduel de K . La stratégie pour démontrer cette équivalence consiste à montrer que tout objet de $\sigma_q - \text{eq}_{\mathcal{R}_K}^{(\phi)}$ devient unipotent après une extension spéciale de \mathcal{R}_K . Le carcan de leur travail requiert que q satisfasse $|q - 1| < 1$

et qu'il ne soit pas une racine de l'unité. La première condition sert à se passer de la confluence. Il n'est pas nécessaire de faire tendre q vers 1, il suffit d'avoir q suffisamment proche de 1. La deuxième condition est tout simplement nécessaire pour que le q -analogue d'un nombre entier n défini par

$$(n)_q := \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ne s'annule pas. Cela permet de s'assurer que le q -analogue de l'exponentielle, ingrédient essentiel à la résolution d'équations aux q -différences, est bien défini.

Au même moment, pendant sa thèse de doctorat, Andrea Pulita s'intéresse aussi à ces problèmes et obtient une équivalence entre ces catégories en supprimant les hypothèses sur q de [ADV04] pour des équations sur la droite affine. Plus précisément, il se donne un corps ultramétrique complet de caractéristique mixte K et un affinoïde $X = D^+(c_0, R_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n D^-(c_i, R_i)$. On peut alors considérer l'anneau $\mathcal{H}_K(X)$ des éléments analytiques sur X et regarder les équations fonctionnelles de la forme

$$Y(qx) = A(q, x)Y(x)$$

où $A(q, x) \in \text{GL}_n(\mathcal{H}_K(X))$. Cela est équivalent à se donner une équation aux q -différences de la forme

$$\partial_q(Y(x)) = B(x)Y(x) \text{ avec } B(x) = \frac{A(x) - 1}{(q - 1)x}.$$

Le q -analogue de la solution de Taylor de cette équation

$$TY(x, y) := \sum_{n \geq 0} H_n(y) \frac{(x - y, q)_n}{(n)_q!},$$

où $H_n(x)$ est obtenue par itération par ∂_q du système

$$\partial_q(Y)(x) = \frac{A(x) - 1}{(q - 1)x} Y(x).$$

Nous avons donc

$$\partial_q^n(Y)(x) = H_n(x)Y(x),$$

où $H_{n+1}(x) = H_n(qx)H_1(x) + \partial_q(H_n)(x)$. La solution de Taylor ainsi définie converge sur un voisinage de la diagonale de la forme

$$\mathcal{U}_R := \{(x, y) \in X \times X, |x - y| < R\}$$

avec

$$|q - 1| \max(|c_0|, R_0) < R.$$

Le point principal de son travail est de montrer que pour $q' \neq q$, dans le disque $D^-(1, R/\max(|c_0|, R_0))$, la matrice

$$M(q', x) := TY(q'x, x)$$

est une fonction analytique de x sur X . Il montre alors que $M(q', x) \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{H}_K(X))$ pour tout $q' \in D^-(1, R/\max(|c_0|, R_0))$. Cela implique que $TY(x, y)$ est simultanément la solution de Taylor de la famille $\{Y(q'x) = M(q', x)Y(x)\}_{q'}$ pour tout $q' \in D^-(1, R/\max(|c_0|, R_0))$. Ce principe est appelé *principe de propagation*. Ce principe, lorsqu'il est vérifié, est alors suffisant pour démontrer l'équivalence entre la confluence et la déformation sur les anneaux de fonctions p -adiques. Dans la lignée de ses travaux, Andréa Pulita généralise ses résultats aux courbes et à l'action d'opérateurs plus généraux que la multiplication par q (*cf.* [Pul08]).

Récemment, Bernard Le Stum, Adolfo Quirós et Michel Gros ont développé une théorie plus générale qui englobe les résultats précédents (*cf.* [LSQ15], [LSQ18b], [LSQ18a], [LSQ20], [GLS14] et [GLQ19]). Ils généralisent la notion d'opérateur différentiel et travaillent sur des algèbres affinoïdes. Ils construisent leur théorie en analogie au formalisme développé dans EGA-IV (*cf.* [Gro67]). C'est une approche orientée par le yoga classique de la cohomologie cristalline. Pour R un anneau commutatif, une R -algèbre déformée est une R -algèbre commutative A munie d'un endomorphisme de R -algèbre σ . Ils définissent alors la notion de σ -dérivation : sur un A -module M c'est la donnée d'une application R -linéaire qui satisfait la règle déformée :

$$D(xs) = D(x)s + \sigma(x)D(s).$$

Si un élément de x de A est une σ -coordonnée dans le sens qu'il existe une base ∂_σ des dérivations de A telles que $\partial_\sigma(x) = 1$, il est alors possible de définir l'algèbre des dérivations D_σ . Cela donne naissance à la notion de module σ -différentiel, c'est-à-dire des modules munis d'une action par la dérivation ∂_σ . Le but est alors de comparer D_σ à D_τ où τ est un autre endomorphisme R -linéaire de A tel que x est également une τ -coordonnée. De manière usuelle, on définit les opérateurs différentiels comme le dual d'un anneau de fonctions formelles. Ainsi pour comprendre D_σ il faut comprendre la notion de puissance σ -divisée. Une autre stratégie est de remplacer D_σ par un anneau d'opérateurs différentiels de Grothendieck $D_\sigma^{(\infty)}$. L'approche classique fonctionne alors particulièrement bien pour cette généralisation. En suivant ce chemin, on se ramène donc à comparer d'un côté $D_\tau^{(\infty)}$ et $D_\sigma^{(\infty)}$ et de l'autre côté, $D_\sigma^{(\infty)}$ et D_σ . Il est également possible de définir l'anneau des opérateurs différentiels déformés de niveau η^\dagger ([LSQ20]). Le jeu revient alors, encore, à comparer ces anneaux pour des endomorphismes différents et montrer, sous certaines conditions, que les catégories de modules munis d'une action par ces modules sont équivalentes et que cette équivalence préserve les solutions.

Ces différents travaux montrent que dans le cadre p -adique en une variable, le rêve du mathématicien appliqué est réalisé : les solutions de l'équation discrétisée sont les mêmes que les solutions de l'équation différentielle originelle après confluence.

L'engouement pour cette théorie s'est décuplé lorsque Bhargav Bhatt, Matthew Morrow et Peter Scholze ont publié leurs travaux (*cf.* [BMS18]) sur la cohomologie de Hodge p -adique entière. Leur construction permet se spécialise à la cohomologie de Rham et la cohomologie étale. Ils ont montré qu'il est possible de calculer cette cohomologie localement grâce à la théorie des q -différences. Bhatt et Scholze ont

également introduit les notions de *prisme* et de *cohomologie prismatique* afin d'unifier les cohomologies qu'ils ont définies auparavant. À nouveau, il semble apparaître que les équations aux q -différences permettent de faire des calculs de cohomologie prismatique.

Cependant, il est à noter que les théories des équations aux q -différences développées jusqu'à présent en géométrie arithmétique n'ont été établies que dans le cas d'une seule variable. Le travail mis en œuvre dans cette thèse permet de généraliser les théories précédentes au cas de plusieurs variables.

Description des espaces

Le premier chapitre est consacré aux anneaux de Huber et aux morphismes étales. Nous commençons par rappeler la définition d'un anneau de Huber défini dans [Hub93].

Définition. Un anneau topologique A est un *anneau de Huber* s'il existe un sous-anneau ouvert A_0 de A et un idéal de type fini I de A_0 tel que $\{I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinage de 0 dans A_0 .

Nous consacrons ensuite quelques pages à rappeler les différentes constructions associées à ces anneaux : complétion, produit tensoriel et *localisation rationnelle*. Toutes ces constructions nous sont utiles pour permettre d'inclure dans notre théorie en plusieurs variables les résultats démontrés jusqu'à présent dans le cas d'une variable.

Afin de pouvoir faire du calcul différentiel, il est nécessaire de se donner des coordonnées. Autrement dit, on se donne des cartes qui sont des morphismes étales. Dans la deuxième section du premier chapitre, nous introduisons la notion de morphisme topologiquement étale. Cette définition est une variante affine de [Abb10, Définition 2.3.13]. Nous introduisons également la notion de morphisme *bien étale*. Dans le cas où l'on travaille sur un anneau adique, un morphisme topologiquement étale est automatiquement bien étale. L'idée derrière cette notion est que nous allons nous donner des coordonnées qui satisfont certaines propriétés liées à nos différentielles, et nous voulons pouvoir étendre ces propriétés. Sous certaines conditions, la localisation rationnelle et le passage par un morphisme bien étale nous permettent cette extension des propriétés des coordonnées.

Calcul différentiel déformé

Le processus de confluence consiste à remplacer une équation différentielle par une équation aux q -différences ou aux différences finies. Ce type d'équations est un cas particulier des équations déformées comme expliqué dans [LSQ18b]. Dans ce contexte plus général, l'idée est de comparer des équations différentielles déformées pour des déformations différentes. Pour cela, une approche possible consiste à introduire différents anneaux différentiels déformés et les comparer.

Dans la suite, nous écrirons toujours pour des éléments x_1, \dots, x_d de notre anneau, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Pour $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, nous noterons $|\underline{k}| := k_1 + \dots + k_d$ et

$$\underline{x}^k := x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}.$$

Soit R un anneau commutatif et A une R -algèbre. Dans le cas classique, afin de formaliser le calcul différentiel on considère le A -module $P := A \otimes_R A$. Ce module est systématiquement vu comme une A -algèbre en le munissant de l'action

$$A \rightarrow P, f \mapsto 1 \otimes f.$$

Il est également naturel de considérer le noyau de la multiplication

$$I := \ker(P \rightarrow A).$$

Si l'on suppose que A est munie de coordonnées étales $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ et si l'on note pour $i = 1, \dots, d$, $\xi_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, on considère le A -module

$$P_n := P/I^{n+1},$$

c'est un A -module libre de base $\underline{\xi}^k$, $|k| \leq n$. Nous noterons également $\hat{P} := \prod_{k \in \mathbb{N}^d} A \underline{\xi}^k$. On définit alors l'application de Taylor $\theta : A \rightarrow \hat{P}$ comme étant

$$\forall f \in A, \theta(f) := \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \partial^{[k]}(f) \underline{\xi}^k$$

où $(\partial^{[k]})_{\mathbb{N}^d}$ est la base duale de $(\underline{\xi}^k)_{k \in \mathbb{N}^d}$. Cette application est alors l'unique morphisme de R -algèbres tel que l'application composée

$$\theta_n : A \rightarrow P \twoheadrightarrow P_n, f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}^d, |k| \leq n} \partial^{[k]}(f) \underline{\xi}^k$$

est une section de la projection $P_n \rightarrow A$ qui satisfait $\theta_n(x_i) = x_i + \xi_i$. Lorsque l'algèbre A est muni d'un automorphisme σ , Bernard Le Stum et Adolfo Quirós dans [LSQ20], remplacent les puissances de I par des puissances tordues de I , définies par

$$I^{(n+1)\sigma} := I\sigma(I) \dots \sigma^{n-1}(I).$$

Ils suivent alors le même cheminement que dans le cas classique afin de développer le calcul différentiel déformée. Cependant cette méthode ne s'applique que dans le cas d'une variable. Si l'on muni A de plusieurs automorphismes $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, il n'existe pas de notion naturelle de puissance déformée de I qui permette de mettre en place le même formalisme en plusieurs variables.

L'approche que nous développons, dans ce travail, consiste à procéder à contre-sens de ce qui est mis en œuvre dans [LSQ20]. Soit R un anneau de Huber. Nous considérons une R -algèbre adique A , cela permet de s'assurer que P est un anneau de Huber. Nous supposons qu'elle est munie d'endomorphismes R -linéaires continus $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ qui commutent entre eux et nous nous donnons des éléments $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ de A . Pour un entier naturel n , nous définissons le module des séries de Taylor déformées d'ordre n de la manière suivante :

$$P_{A,(n)\underline{\sigma}} := A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(k)\underline{\sigma}} \text{ tels que } |k| = n + 1 \right)$$

où l'on a posé pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$

$$\underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}}} := \xi_1^{(k_1)_{\sigma_1}} \dots \xi_d^{(k_d)_{\sigma_d}} \text{ et } \xi_i^{(k_i)_{\sigma_i}} := \xi_i \sigma_i(\xi_i) \dots \sigma_i^{k_i-1}(\xi_i).$$

Nous introduisons ensuite la notion de $\underline{\sigma}$ -coordonnées. C'est le concept clé de notre approche.

Définition. Les éléments x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A si, pour tout entier naturel n , il existe un unique morphisme continu de R -algèbres

$$\begin{aligned} \Theta_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} : A &\rightarrow P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \\ x_i &\mapsto x_i + \xi_i \end{aligned}$$

tel que la composée de la projection sur A avec $\Theta_{A,(n)_{\underline{\sigma}}}$ est l'identité. Le morphisme $\Theta_{A,(n)_{\underline{\sigma}}}$ est le n -ème morphisme de Taylor de A relativement à $\underline{\sigma}$ et \underline{x} .

Cette notion généralise la notion de coordonnées étales lorsque A est lisse de dimension relative d sur R . On peut alors définir, a posteriori, la puissance déformée de l'idéal I comme étant

$$I^{(n)_{\underline{\sigma}}} := \ker \left(\tilde{\Theta}_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} : A \otimes_R A \rightarrow P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \right).$$

En dimension un, on retrouve les théories évoquées ci-dessus. La situation pour laquelle toutes les notions sont introduites est celle où les coordonnées sont de la forme

$$\forall i = 1, \dots, d, \sigma_i(x_j) = \begin{cases} q_i x_i & \text{si } i = j, \\ x_j & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour des éléments q_1, \dots, q_d de R . Nous dirons alors que ce sont des \underline{q} -coordonnées.

Afin de développer la théorie, il faut s'assurer que l'application

$$P \rightarrow P \otimes P, f \otimes g \mapsto f \otimes 1 \otimes 1 \otimes g$$

induit un morphisme

$$P_{A,(m+n)_{\underline{\sigma}}} \rightarrow P_{A,(m)_{\underline{\sigma}}} \otimes'_A P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}}$$

où l'action de A à gauche se fait via $\Theta_{A,(n)_{\underline{\sigma}}}$. Nous dirons alors que ce sont des *coordonnées symétriques*.

La puissance déformée de l'idéal I que nous avons introduit permet de définir le *module des différentielles déformées* :

$$\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 := I_A^{(1)_{\underline{\sigma}}} / I_A^{(2)_{\underline{\sigma}}}.$$

Il satisfait les propriétés usuelles voulues et on retrouve dans le cas classique lorsqu'on prend $\underline{\sigma} = (\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A)$. En particulier, nous observons que ce module est de rang d . Par dualité, on obtient donc des applications $\partial_{\underline{\sigma},1}, \dots, \partial_{\underline{\sigma},d}$ de A dans lui-même. Cependant, les conditions établies jusqu'alors ne sont pas suffisantes afin que pour

$i = 1, \dots, d$, l'application $\partial_{\underline{\sigma}, i}$ soit une σ_i -dérivation. Il est alors naturel de rajouter la condition

$$\forall i = 1, \dots, d, \forall f \in A, \sigma_i(f) - f = (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f).$$

Des coordonnées qui vérifient cette condition sont dites *classiques*. Dans les cas qui nous intéressent, les coordonnées sont symétriques et classiques.

Il faut maintenant s'atteler à construire des $\underline{\sigma}$ -coordonnées. Dans le cas des anneaux adiques, il suffit de considérer des coordonnées étales. Un autre cas où avoir des coordonnées étales suffit est celui où les endomorphismes $\underline{\sigma}$ sont *infinitésimaux* sur un anneau de définition A_0 de A :

$$\forall i = 1, \dots, d, (\sigma_i - \text{Id})(A_0) \text{ est topologiquement nilpotent et } \sigma_i(A_0) \subset A_0.$$

Dans le cadre plus général, lorsque A est une R -algèbre de Huber quelconque, il est nécessaire que les coordonnées soient étales sur un anneau de définition, cela donne lieu à la notion de *bonnes coordonnées étales*. Malheureusement, les polycouronnes ne sont pas munies de bonnes coordonnées étales. Il est donc nécessaire de pouvoir étendre ces coordonnées le long d'une localisation rationnelle afin de pouvoir inclure le cas d'une polycouronne. Deux nouvelles conditions apparaissent afin de rendre cette extension possible

Définition. Des éléments x_1, \dots, x_d de A sont des *coordonnées transverses* relativement à $\underline{\sigma}$ si pour tout $i \neq j$, $\sigma_i(x_j) = x_j$. Ce sont des coordonnées *gentilles* relativement à $\underline{\sigma}$ si pour tout entier naturel $1 \leq i \leq d$ et $0 \leq k < n$: $\sigma_i^n(x_i) - \sigma_i^k(x_i)$ n'est pas un diviseur de zéro dans A .

Une fois notre algèbre A munie de $\underline{\sigma}$ -coordonnées, il est possible définir la notion de *connexion déformée*. Lorsque les coordonnées sont symétriques et classiques, on montre une équivalence de catégorie

$$\nabla_{\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A) \simeq T_{A, \underline{\sigma}}\text{-Mod}(A)$$

entre les A -modules munis d'une connexion déformée et les A -modules munis d'une action compatible par les $\partial_{\underline{\sigma}, i}$. Si de plus,

$$\forall i = 1, \dots, d, \sigma_i(x_i) \in R[x_i],$$

A est une *algèbre déformée de Schwarz d'ordre d* . Cela permet de retrouver des propriétés usuelles du calcul différentiel, par exemple le fait que les dérivations commutent. Ces conditions sont naturellement vérifiées lorsque les coordonnées sont des q -coordonnées. Dans ce cas, nous définissons l'anneau des opérateurs différentiels déformés de niveau zéro $D_{\underline{\sigma}}$. Et on obtient une équivalence entre les modules munis d'une connexion déformée et les $D_{\underline{\sigma}}$ -modules. Toujours en suivant le formalisme classique, nous définissons, lorsque les coordonnées sont symétriques, un anneau des opérateurs différentiel d'ordre infini $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$. Dans le cas où les coordonnées sont des q -coordonnées classiques, nous avons, encore une fois, équivalence entre modules munis d'une connexion déformée et $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -modules.

Nous souhaitons alors appliquer toutes les techniques et objets définis jusqu'à présent à la question de la confluence p -adique, dans la suite des travaux d'André-Di Vizio et de Pulita. Le cadre dans lequel nous nous plaçons ici est cependant plus général. Nous considérons un anneau de Tate A , c'est-à-dire un anneau de Huber admettant un élément inversible topologiquement nilpotent. Cela permet en particulier de définir une norme sous-multiplicative sur notre anneau. Nous supposons que cet anneau est muni de $\underline{\sigma}$ -coordonnées classiques et symétriques afin que tous les objets introduits précédemment soient bien définis. Pour un réel positif η suffisamment proche de 1, nous définissons la notion de $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module η^\dagger -convergent en demandant que la série de Taylor déformée ait un rayon de convergence au moins égal η . De manière analogue à ce qui est introduit dans [LSQ20], nous introduisons la notion d'opérateur différentiel déformée η -convergent (et η^\dagger -convergent en passant à la limite). Cela permet de construire deux anneaux $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$ et $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}$. Nous montrons alors l'équivalence suivante

Proposition. *La catégorie des $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}$ -modules qui sont de type fini et complet sur A est équivalente à la sous-catégorie des $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -modules η^\dagger -convergent de type fini et complet sur A .*

S'il existe des déformations $\underline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ telles que les coordonnées \underline{x} sont des $\underline{\tau}$ -coordonnées classiques et symétriques, nous avons, pour η suffisamment proche de 1, un isomorphisme $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \simeq D_{\underline{\tau}}^{(\eta)}$. Comme application nous pouvons regarder le cas des \underline{q} -coordonnées : s'il existe $\underline{q} = \{q_1, \dots, q_d\}$ des éléments de R tels que x_1, \dots, x_d sont des \underline{q} -coordonnées classiques symétriques,

$$\forall i = 1, \dots, d; \forall n \in \mathbb{N}, (n)_{q_i} \in R^\times,$$

et A est η^\dagger -convergent alors, nous avons l'équivalence de catégories suivante

$$\nabla_{\underline{\sigma}}\widehat{\text{Mod}}_{\text{tf}}^{(\eta^\dagger)}(A/R) \simeq D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\widehat{\text{Mod}}_{\text{tf}}(A/R),$$

entre la catégorie des A -modules de type fini et complet, munis d'une connexion déformée qui sont η^\dagger -convergent $\nabla_{\underline{\sigma}}\widehat{\text{Mod}}_{\text{tf}}^{(\eta^\dagger)}(A/R)$ et la catégorie $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\widehat{\text{Mod}}_{\text{tf}}(A/R)$ des $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}$ -modules qui sont complets et de type fini sur A . Nous retrouvons donc un résultat similaire, dans l'esprit, à celui de [ADV04].

Opérateurs différentiels déformés et q -cristaux

Nous nous intéressons ensuite à la notion de q -cristal développée par Bhargav Bhatt et Peter Scholze dans [BS22]. Ils y introduisent de nouveaux outils qui permettent de renouveler l'approche de la théorie de Hodge p -adique. Pour encoder les différents relèvements du Frobenius, ils introduisent le concept de site prismatique qui, en étant poussé le long du Frobenius, permet d'obtenir le site q -cristallin. Pour pouvoir opérer sur ces sites, il est nécessaire de considérer l'enveloppe prismatique et la q -PD-enveloppe. Gros, Le Stum et Quirós ont montré que ces enveloppes coïncident avec un anneau polynomial lorsqu'on dispose d'une coordonnée locale. Cela permet, en dimension un, de ramener le calcul de la cohomologie prismatique à des problèmes d'équations aux q -différences.

Cette construction nécessite le développement d'une théorie du calcul différentiel déformée de niveau zéro. Soit R un anneau de Huber et A une R -algèbre de Huber complète. Pour des éléments $\underline{q} = (q_1, \dots, q_d)$ et $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ nous définissons l'anneau des polynômes déformés divisés $A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}$ comme étant le A -module libre avec pour générateurs $\underline{\xi}^{[\underline{k}]} = \xi_1^{[k_1]} \dots \xi_d^{[k_d]}$ muni de la règle de multiplication suivante

$$\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \underline{\xi}^{[\underline{m}]} = \prod_{i=1}^d \sum_{j=0}^{\min(n_i, m_i)} q_i^{j(j-1)/2} \binom{n_i + m_i - j}{n_i}_{q_i} \binom{n_i}{j}_{q_i} (q_i - 1)^j x_i^j \xi_i^{[n_i + m_i - j]}.$$

Cette règle de multiplication définit une structure de A -algèbre commutative sur $A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}$.

Nous pouvons ensuite supposer que R est une $\mathbb{Z}[q]_{(p, q-1)}$ -algèbre et que les coordonnées x_1, \dots, x_d sont étales, classiques et symétriques. Sous ces hypothèses, il est possible de définir une application de Taylor

$$\theta : A \rightarrow A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}.$$

Cela permet de définir la notion d'*hyper \underline{q} -stratification* et la notion d'*hyper \underline{q} -structure de Taylor* sur un A -module. Nous démontrons, sous nos hypothèses, que ces structures sont équivalentes. Nous définissons également la notion de *\underline{q} -structure de Taylor* et nous montrons, pour un A -module, que la donnée d'une telle structure est équivalente à la donnée d'une action par $D_{A, \underline{q}}$.

Dans le cas où $q_1 = \dots = q_d = q$ si l'on suppose que R est sans $(p)_q$ -torsions et munie d'une δ -structure telle que $\delta(q) = 0$ et que A est une δ - R -algèbre avec $\delta(x_1) = \dots = \delta(x_d) = 0$, nous montrons que le couple $(\widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}}, \overline{I^{[1]}}^{\text{cl}})$, où $\widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}}$ désigne la complétion par rapport à la topologie $(p, q-1)$ -adique et $I^{[1]}$ est l'idéal engendré par les $\underline{\xi}^{[\underline{k}]}$ pour $|\underline{k}| \geq 1$, est la q -PD-enveloppe de l'idéal d'augmentation de $(A[\underline{\xi}], (\xi_1, \dots, \xi_d))$.

Chapitre 1

Généralités

Tout bonheur est une jouissance
finie de l'infini.

Alain Badiou, Métaphysique du
bohneur réel, 2015

Table des matières

1.1	Anneaux de Huber	21
1.2	Morphismes topologiquement étales	28

1.1 Anneaux de Huber

Tout comme les objets algébriques locaux de la théorie des schémas sont les anneaux commutatifs, les objets locaux de la théorie des espaces adiques de Huber sont les anneaux de Huber. Les schémas, les schémas formels et leurs fibres génériques (qui peuvent s'exprimer en tant qu'espace analytique rigide et espace de Berkovich) sont des sous-catégories pleines de la catégorie des espaces adiques. C'est donc un carcan naturel à l'étude des géométries p -adiques. Cette section sert à introduire cette notion développée dans [Hub93].

Tout les anneaux dans ce manuscrit seront supposés commutatifs et unitaires.

Définition 1.1.1. Un anneau topologique A est un *anneau de Huber* s'il existe un sous-anneau ouvert A_0 de A et un idéal de type fini I_0 de A_0 tel que $\{I_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinage de 0 dans A_0 . Le sous anneau A_0 est appelé *anneau de définition* de A et l'idéal I_0 est appelé *idéal de définition* de A . Un *couple de définition* (A_0, I_0) est la donnée d'un anneau de définition et d'un idéal de définition. Dans le cas où A est un anneau de définition, l'anneau est dit *adique*. Si de plus, $\{0\}$ est un idéal de définition, l'anneau A est dit *discret*.

Exemples. 1. L'anneau des entiers \mathbb{Z} muni de la topologie discrète est un anneau discret.

2. Pour un entier naturel premier p , l'anneau des entiers p -adiques

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n p^n, 0 \leq a_n < p \right\}$$

muni de la topologie associée à la valuation p -adique est un anneau adique. L'idéal (p) est un idéal de définition.

3. L'anneau $\mathbb{Q}_p[[T]]$ n'est pas un anneau de Huber ayant pour anneau de définition $\mathbb{Z}_p[[T]]$ et (p, T) pour idéal de définition. En effet, $\mathbb{Q}_p[[T]]$ ne peut pas être muni d'une topologie d'anneau qui vérifie cela : la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 pour cette topologie et comme la multiplication par p^{-1} est continue,

$$p^{-1}T^n \rightarrow 0.$$

Cependant cette suite ne rentre jamais dans $\mathbb{Z}_p[[T]]$.

4. Soit A un anneau de Huber. Pour tout entier naturel n , l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ peut être muni d'une structure d'anneau de Huber, qui induit la topologie de A , avec $A_0[X_1, \dots, X_n]$ pour anneau de définition et $I_0 A_0[X_1, \dots, X_n]$ pour idéal de définition.

5. Soit K un *corps non-archimédien* : c'est-à-dire un corps topologique pour une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$ non triviale. Il existe un élément π de K tel que $0 < |\pi| < 1$ (appelé pseudo-uniformisante). Le corps K est un anneau de Huber : l'ensemble $\{|x| \leq 1\}$ est un anneau de définition et (π) est un idéal de définition.

6. Soit d un entier naturel. Dans la situation du point précédent considérons l'anneau suivant

$$A = \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\underline{k}} X^{\underline{k}}, a_{\underline{k}} \in K, |a_{\underline{k}}| \prod_{i=1}^d \max(1, |\pi|^{k_i}) \rightarrow 0 \text{ quand } \underline{k} \rightarrow +\infty \right\},$$

muni de la topologie induite par la norme de Gauss

$$\left\| \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\underline{k}} X^{\underline{k}} \right\| = \max \left\{ \sup_{|\underline{k}| \geq 0} |a_{\underline{k}}|, \sup_{|\underline{k}| < 0} |\pi^{|\underline{k}|} a_{\underline{k}}| \right\}.$$

Avec cette topologie, cet anneau est un anneau de Huber. Un couple de définition est donné par le sous-anneau et l'idéal suivant

$$A_0 = \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\underline{k}} X^{\underline{k}} \in A \text{ tel que } |a_{\underline{k}}| \leq 1 \text{ si } |\underline{k}| \geq 0, |\pi^{|\underline{k}|} a_{\underline{k}}| \leq 1 \text{ si } |\underline{k}| < 0 \right\},$$

$$I_0 = \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\underline{k}} X^{\underline{k}} \in A \text{ tel que } |a_{\underline{k}}| < 1 \text{ si } |\underline{k}| \geq 0, |\pi^{|\underline{k}|} a_{\underline{k}}| < 1 \text{ si } |\underline{k}| < 0 \right\}.$$

Définition 1.1.2. Soit A et B deux anneaux de Huber. Un *morphisme d'anneaux de Huber* $u : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux qui est continu. Cela équivaut à dire qu'il existe un anneau de définition A_0 de A (resp. B_0 de B) et un idéal de définition $I_0 \subset A_0$ (resp. $J_0 \subset B_0$) tel que $u(A_0) \subset B_0$ et $u(I_0) \subset J_0$. Dans le cas où l'idéal engendré par $u(I_0)$ est un idéal de définition de B , le morphisme est dit *adique*.

Proposition 1.1.3. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme adique d'anneaux de Huber, pour tous couples de définition (A_0, I_0) de A et tout anneau de définition B_0 de B tels que $\varphi(A_0) \subset B_0$, $\varphi(I_0)B_0$ est un idéal de définition de B .

Preuve. Le lecteur pourra se référer à [Mor19, Proposition II.1.3.3]. □

- Exemples.**
1. Tout morphisme d'anneaux discrets est adique.
 2. L'identité $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ n'est pas continue si \mathbb{Z} est muni, à gauche, de la topologie p -adique et de la topologie discrète à droite.
 3. Si A est un anneau discret et que $A[T]$ est muni de la topologie T -adique alors le morphisme canonique $A \rightarrow A[T]$ est continu mais pas adique.

Définition 1.1.4. Si $R \rightarrow A$ est un morphisme d'anneaux de Huber, A est appelée *R -algèbre de Huber*. Si le morphisme est adique A est appelée *R -algèbre adique*.

- Remarques.**
1. Une R -algèbre adique n'est pas nécessairement un anneau adique.
 2. Soit R est un anneau de Huber avec anneau (resp. idéal) de définition A_0 (resp. $I_0 \subset A_0$). Si M est un A -module de type fini, nous pouvons le munir d'une topologie naturelle, qui est la topologie universelle pour les morphismes A -linéaire continus $M \rightarrow N$ dans les A -modules topologiques, et dans ce cas, tout sous- A_0 -module M_0 de M qui engendre M est nécessairement ouvert dans M et la topologie de M_0 est la topologie I_0 -adique.

Afin d'avoir une semi-norme qui définit notre topologie, nous considérons plus tard des anneaux de Tate. Ce sont des anneaux de Huber dont la topologie peut être définie par une norme sous multiplicative ultramétrique.

Définition 1.1.5. Un *anneau de Tate* A est un anneau de Huber tel qu'il existe un élément π de A qui est inversible et topologiquement nilpotent. L'élément π est appelé *pseudo-uniformisante*.

- Exemples.**
1. L'anneau \mathbb{Q} muni de la topologie provenant de la valuation p -adique est un anneau de Tate.
 2. Plus généralement, tout anneau A peut être équipé de la topologie p -adique et on peut former l'anneau de Tate $A \left[\frac{1}{p} \right]$.
 3. Tout corps non-archimédien est un anneau de Tate.

Proposition 1.1.6. Soit A un anneau de Tate et A_0 un anneau de définition de A . Alors, A_0 contient une pseudo-uniformisante π de A et $A = A_0 \left[\frac{1}{\pi} \right]$.

Preuve. Toute pseudo-uniformisante π de A est topologiquement nilpotente, il existe donc un entier naturel m tel que $\pi^m \in A_0$. L'élément π^m est également une pseudo-uniformisante de A . Tout élément a de A vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n a = 0.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand $\pi^n a \in A_0$. Ce qui assure que $a \in A_0 \left[\frac{1}{\pi} \right]$. L'inclusion inverse est évidente. \square

Définition 1.1.7. Une *semi-norme sous-multiplicative ultramétrique* sur un anneau A est une application

$$\| \cdot \| : A \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\forall f, g \in A$,

1. $\|f + g\| \leq \max(\|f\|, \|g\|)$ et
2. $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$.

Nous dirons que c'est une *norme sous-multiplicative ultramétrique* si de plus

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Proposition 1.1.8. *La topologie d'un anneau de Huber peut toujours être définie par une semi-norme sous-multiplicative. Dans le cas particulier d'un anneau de Tate séparé alors la topologie peut être définie par une norme sous-multiplicative.*

Preuve. Soient A un anneau de Huber, A_0 un anneau de définition de A et $I_0 \subset A_0$ un idéal de définition. Pour un élément f de A posons

$$\|f\| = \begin{cases} e^n & \text{si } fI_0^n \subset A_0 \text{ mais } fI_0^{n-1} \not\subset A_0, \\ e^{-n} & \text{si } f \in I_0^n \text{ mais } f \notin I_0^{n+1}, \\ 0 & \text{si } f \in \bigcap I_0^n. \end{cases}$$

Alors, $A_0 = \{f \in A, \|f\| \leq 1\}$ et $I_0 = \{f \in A, \|f\| < 1\}$. \square

Définition 1.1.9. Une norme sous-multiplicative $\| \cdot \|$ sur un anneau A est dite *contractante* par rapport à un endomorphisme φ de A si $\forall x \in A, \|\varphi(x)\| \leq \|x\|$.

Définition 1.1.10. Soit A un anneau topologique. Un sous-ensemble E de A est

1. *borné* si pour tout voisinage U de 0 dans A , il existe un voisinage V de 0 tel que $ax \in U$ pour tout $a \in E$ et $x \in V$,
2. *borné en puissances* si $\bigcup_{n \geq 1} E(n)$ est borné, où $E(n) = \left\{ \prod_{i=1}^n f_i, (f_i)_{i=1, \dots, n} \in E \right\}$,
3. *topologiquement nilpotent* si pour tout voisinage W de 0 dans A il existe un entier naturel N tel que pour tout $n > N$, $E(n) \subset W$.

Nous utiliserons cette notion dans le cas où l'ensemble E est réduit à un élément f , nous dirons alors que f est borné en puissance ou topologiquement nilpotent. L'ensemble des éléments bornés en puissances de A sera noté A^0 et l'ensemble de ses éléments topologiquement nilpotents sera noté A^{00} .

- Exemples.**
1. Dans le cas d'un anneau discret une partie est topologiquement nilpotente si et seulement si elle est nilpotente.
 2. Soit K un corps non-archimédien. Tout élément x de K vérifiant $|x| < 1$ engendre un idéal topologiquement nilpotent de l'anneau de valuation \mathcal{O}_K .
 3. Tout idéal de définition d'un anneau adique est topologiquement nilpotent.

Proposition 1.1.11. *Soit $E = \{f_1, \dots, f_r\}$ un ensemble fini d'éléments de A alors*

$$E \text{ est borné en puissances} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\}, f_i \text{ est borné en puissances.}$$

Preuve. Le sens direct est trivial. Montrons le sens réciproque. Par définition, pour tout voisinage U de 0 dans A il existe un voisinage W_r de 0 dans A tel que pour tout entier naturel n_r

$$f_r^{n_r} W_r \subset U.$$

Par récurrence, il existe des voisinages (W_1, \dots, W_{r-1}) de 0 dans A tels que pour tout $(n_1, \dots, n_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$

$$\forall i = 1, \dots, r-1, f_i^{n_i} W_i \subset W_{i+1}.$$

Ainsi,

$$f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r} W_1 \subset U.$$

C'est le résultat voulu. □

Le produit tensoriel de deux anneaux de Huber n'est pas, à priori, un anneau de Huber. Afin de pouvoir étendre les scalaires sur les anneaux de polynômes et les anneaux de séries sur lesquels nous souhaitons regarder des équations différentielles, nous introduisons ici les conditions nécessaires afin que le produit tensoriel existe dans la catégorie des anneaux de Huber sur les anneaux que l'on considère.

Soit R un anneau de Huber et deux R -algèbres adiques A et B . Pour un couple de définition (R_0, I) de R et des anneaux de définition A_0 et B_0 de A et B tels que l'image de R_0 dans A soit contenue dans A_0 et l'image de R_0 dans B soit contenue dans B_0 , notons J l'idéal de $\text{Im}(A_0 \otimes_{R_0} B_0 \rightarrow A \otimes_R B)$ engendré par l'image I .

Proposition 1.1.12. *Avec ces notations, si l'on munit $\text{Im}(A_0 \otimes_{R_0} B_0 \rightarrow A \otimes_R B)$ de la topologie J -adique et que l'on munit $A \otimes_R B$ de l'unique structure de groupe topologique pour laquelle $\text{Im}(A_0 \otimes_{R_0} B_0 \rightarrow A \otimes_R B)$ est un sous-groupe ouvert alors $A \otimes_R B$ est un anneau de Huber avec $(\text{Im}(A_0 \otimes_{R_0} B_0 \rightarrow A \otimes_R B), J)$ pour couple de définition.*

Preuve. Le lecteur pourra se référer à [Mor19, Proposition II.3.2.1]. □

Exemple. Soit $A = A_0 = \mathbb{Z}_p[[x]]$ muni de la topologie (p, x) -adique, $C_0 = \mathbb{Z}_p \subset C = \mathbb{Q}_p$ muni de la topologie p -adique et $B = B_0 = \mathbb{Z}_p$ muni de la topologie p -adique. On a $A \otimes_B C = \mathbb{Z}_p[[x]][1/p]$, $A_0 \otimes_{B_0} C_0 = \mathbb{Z}_p[[x]]$ et $(p, x) \otimes_{B_0} C_0 + A_0 \otimes_{B_0} (p) = (p, x)$. Il n'est pas possible de munir $\mathbb{Z}_p[[x]][1/p]$ d'une topologie de telle sorte que $\mathbb{Z}_p[[x]]$ soit un sous-anneau ouvert dans lequel la topologie induite est la topologie (p, x) -adique. Cela impliquerait que la multiplication par p est un homéomorphisme et donc que $p\mathbb{Z}_p[[x]]$ est ouvert dans $\mathbb{Z}_p[[x]]$, ce qui est évidemment faux.

Par la suite, il sera nécessaire de considérer des anneaux topologiques complets. La proposition suivante décrit comment se comporte le complété d'un anneau de Huber. Ces propriétés pourront nous être utiles par la suite pour se ramener d'un anneau de Huber à un anneau adique.

Proposition 1.1.13. *Soit A un anneau de Huber et (A_0, I) un couple de définition de A . Posons $\hat{A} = \varprojlim_{n \geq 0} A/I^n A_0$ (cet ensemble n'est à priori qu'un groupe abélien topologique) alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Si l'on munit \hat{A} de l'unique topologie pour laquelle \hat{A}_0 est un sous-groupe ouvert, alors \hat{A} est un groupe topologique complet.*
2. *Il existe une unique structure d'anneau sur \hat{A} qui rend continue l'application canonique $A \rightarrow \hat{A}$, et \hat{A} est un anneau topologique.*
3. *L'anneau \hat{A} est un anneau de Huber et $(\hat{A}_0, I_0 \hat{A}_0)$ est un couple de définition de \hat{A} . De plus, l'application canonique $A \rightarrow \hat{A}$ est adique.*
4. *L'application canonique $\hat{A}_0 \otimes_{A_0} A \rightarrow \hat{A}$ est un isomorphisme.*
5. *Pour tout entier naturel n , l'application induite $\hat{A}_0/I^n \hat{A}_0 \rightarrow A_0/I^n A_0$ est un isomorphisme.*

Preuve. Le lecteur pourra se référer à [Mor19, Theorem II.3.1.8, Corollary II.3.1.9]. □

Définition 1.1.14. Si A est un anneau de Huber, l'anneau de Huber \hat{A} défini dans la proposition 1.1.13 est appelé le *complété* de A .

- Remarques.**
1. Si A est un anneau de Huber complet alors tout anneau de définition de A est également complet. En effet, un anneau de définition de A est un fermé de A car c'est un sous-groupe ouvert.
 2. Un anneau commutatif muni de la topologie discrète est un anneau adique complet. Il existe ainsi un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des anneaux dans celle des anneaux adiques complets.

- Exemples.**
1. Si R est un anneau commutatif, l'anneau $R[T]$ muni de la topologie T -adique a pour complétion l'anneau des séries formelles $R[[T]]$.
 2. Pour un nombre premier p , l'anneau des entiers \mathbb{Z} muni de la topologie p -adique a pour complétion \mathbb{Z}_p .
 3. Le corps \mathbb{Q} muni de la topologie p -adique est un corps non archimédien dont le complété est le corps des nombres p -adiques $\mathbb{Q}_p \simeq \mathbb{Q} \otimes \varprojlim \mathbb{Z}_p$.

Un de nos buts est d'obtenir un théorème en plusieurs variables dans l'esprit de [ADV04]. Il faut pour cela étudier l'anneau de Robba en plusieurs variables. Une technique que nous utiliserons à cette fin est la localisation rationnelle. Elle nous permettra d'étendre les résultats obtenus sur l'anneau de polynôme à une poly-couronne.

Proposition 1.1.15 ([Hub93, Section 3, page 467]). *Soit A un anneau de Huber. Soient f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert de A . Il existe*

un unique anneau topologique $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$ et un morphisme continu $A \rightarrow A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$ universel pour la propriété suivante : Si B est un anneau de Huber et $u : A \rightarrow B$ est un morphisme continu tel que

$$u(f_0) \in B^\times \text{ et } \forall i = 1, \dots, r, u(f_i)u(f_0)^{-1} \text{ est borné en puissance dans } B,$$

alors il existe un unique morphisme continu prolongeant u à $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$.

Preuve. Le lecteur pourra se référer à [Wed19, Proposition and Definition 5.51]. \square

Remarques. 1. La construction donne que $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right) = A\left[\frac{1}{f_0}\right]$ en tant qu'anneaux. Si (A_0, I_0) est un couple de définition de A alors $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$ est un anneau de Huber qui admet pour couple de définition

$$\left(A_0 \left[\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_r}{f_0}\right], I_0 \left[\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_r}{f_0}\right]\right)$$

Le lecteur pourra se référer à [Wed19, Proposition 6.21] pour plus de détails. Par construction l'ensemble $\left\{\frac{f_i}{f_0}, 1 \leq i \leq r\right\}$ est borné en puissance dans $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$. Le complété de $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$ sera noté $A\left\{\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right\}$ ou $A\{\underline{f}/f_0\}$ lorsque la situation le permet.

Définition 1.1.16. Soit A un anneau de Huber et f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert de A . Nous dirons que $A\{\underline{f}/f_0\}$ est une *localisation rationnelle régulière* de A si le morphisme $A \rightarrow A\{\underline{f}/f_0\}$ préserve les éléments réguliers.

Exemple. Soit K un corps non-archimédien. Notons $|\cdot|$ sa norme. Considérons deux éléments a et b de K tels que $0 < \|a\| \leq \|b\|$. Nous pouvons alors considérer l'anneau $K[X]\left\{\frac{X^2, ab}{bX}\right\}$. En tant qu'anneau topologique, nous avons

$$K[X]\left\{\frac{X^2, ab}{bX}\right\} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n, a_n \in K, \begin{cases} \|a_n\| \|b\|^n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \\ \|a_n\| \|a\|^n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow -\infty \end{cases} \right\}.$$

Cet anneau vient avec la norme usuelle

$$\left\| \sum a_n X^n \right\| := \max \{ \|a_n\| \|b\|^n, n \geq 0; \|a_n\| \|a\|^n, n \leq 0 \}.$$

Se donner un endomorphisme σ de $K[X]\left\{\frac{X^2, ab}{bX}\right\}$ revient à se donner un élément $\sigma(X)$ tel que $\|a\| \leq \|\sigma(X)\| \leq \|b\|$. Nous retrouvons l'anneau de Robba \mathcal{R} défini dans [ADV04] en posant

$$\mathcal{R}_K = \varinjlim_{\|b\| > 0} \varprojlim_{\|a\| > 1} K[X]\left\{\frac{X^2, ab}{bX}\right\}$$

où les limites sont prises sur ϵ positif.

1.2 Morphismes topologiquement étales

Nous allons définir la notion de morphisme topologiquement étale. Parmi cette classe de morphismes, nous regarderons en particulier les morphismes bien étale et les localisations rationnelles. Ce sont les deux types de morphismes étales le long desquels nous pourrions étendre nos coordonnées.

Définition 1.2.1. Un morphisme d'anneaux de Huber $\varphi : A \rightarrow B$ est *topologiquement de type fini* (resp. de *présentation finie*) s'il est adique et s'il existe des anneaux de définition $A_0 \subset A$ et $B_0 \subset B$ tels que l'image de A_0 soit contenue dans B_0 et

1. pour tout idéal de définition $I \subset A_0$, l'application induite

$$A_0/I \rightarrow B_0/\varphi(I)B_0$$

est de type fini (resp. présentation finie),

2. $A \otimes_{A_0} \widehat{B_0} \rightarrow \widehat{B}$ est de type fini (resp. présentation finie).

Remarque. Cette définition est une variante de la définition 2.3.13 de [Abb10] qui ne traite que du cas des schémas formels, ce qui dans le cas affine correspond aux anneaux adiques. Les conditions ici sont plus faibles que la version algébrique de la définition 1.8.18 de [Abb10]. Dans le cas où A est un anneau noethérien ces deux notions sont équivalentes

- Exemples.**
1. Dans le cas des anneaux discrets, cette notion est tout simplement la notion algébrique classique de type fini (resp. présentation finie).
 2. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de type fini (resp. présentation finie) entre deux anneaux. Pour un idéal I de A de type fini, il est possible de munir A et B de la topologie I -adique. Le morphisme φ est topologiquement de type fini (resp. de présentation finie).
 3. Soit A un anneau de Huber et f_0, f_1, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert, le morphisme

$$A \rightarrow A \left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0} \right)$$

est topologiquement de présentation finie. En effet, par construction, il est adique et pour tout anneau de définition A_0 de A et idéal de définition $I \subset A_0$ de A , pour tout entier naturel n le morphisme

$$A_0/I \rightarrow (A_0/I) \left[\frac{1}{f_0} \right]$$

est de présentation finie. La deuxième condition est automatiquement vérifiée.

Proposition 1.2.2. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux morphismes entre anneaux adiques.

1. Si f et g sont topologiquement de type fini (resp. de présentation finie), il en est de même de $g \circ f$.

2. Si $g \circ f$ est topologiquement de type fini et si g est adique alors f est topologiquement de type fini.
3. Si $g \circ f$ est topologiquement de présentation finie et si g est topologiquement de type fini alors f est topologiquement de présentation finie.

Preuve. C'est la variante affine de la proposition 2.3.18 de [Abb10]. \square

Proposition 1.2.3. *Un morphisme entre anneaux adiques $A \rightarrow B$ est topologiquement de présentation finie si et seulement si le morphisme complété induit $\widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie.*

Preuve. Considérons dans un premier temps le sens réciproque. Si $\widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie, alors, pour tout idéal de définition I de A , l'idéal $I\widehat{A}$ est un idéal de définition de \widehat{A} par la proposition 1.1.13. Cette même proposition implique les isomorphismes suivants

$$\widehat{A}/I\widehat{A} \simeq A/I \text{ et } \widehat{B}/I\widehat{B} \simeq B/IB.$$

Ce qui assure que pour tout idéal de définition I de A , le morphisme $A/I \rightarrow B/IB$ est de présentation finie. Montrons alors le sens direct. Si I' est un idéal de définition de \widehat{A} alors pour tout idéal de définition I de A il existe un entier naturel n tel que $I^n\widehat{A} \subset I'$. Il suffit alors de considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}/I^n\widehat{A} & \longrightarrow & \widehat{B}/I^n\widehat{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{A}/I' & \longrightarrow & \widehat{B}/I' \end{array}$$

Le morphisme du haut est topologiquement de présentation finie en utilisant encore une fois l'isomorphisme de la proposition 1.1.13 ce qui permet de déduire que celui du bas l'est aussi. La deuxième condition de la définition se vérifie facilement. \square

Proposition 1.2.4. *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme entre anneaux adiques, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Le morphisme φ est topologiquement de type fini (resp. de présentation finie).
2. Pour tout idéal de définition I de A , l'application induite

$$A/I \rightarrow B/\varphi(I)B$$

est de type fini (resp. de présentation finie).

Preuve. Le sens (2) \Rightarrow (1) est évident. Montrons alors (1) \Rightarrow (2). Nous supposons, sans perte de généralité, que les anneaux A et B sont complets. Par hypothèse, le morphisme est adique. Soit A_0 et B_0 des anneaux de définitions de A et B qui satisfont les conditions de la définition. Pour tout idéal de définition $I \subset A_0$ de A , l'application induite

$$A_0/I \rightarrow B_0/\varphi(I)B_0$$

est de type fini. Par extension des scalaires et par la deuxième condition de la définition, l'application

$$A/I \simeq A \otimes_{A_0} A_0/I \rightarrow A \otimes_{A_0} B_0/\varphi(I)B_0 \rightarrow B/\varphi(I)B$$

est de type fini. \square

Lemme 1.2.5. Soit A , B et A' des anneaux adiques, $A \rightarrow B$ un morphisme topologiquement de présentation finie et $A \rightarrow A'$ un morphisme adique alors $A' \rightarrow A' \otimes_A B$ est topologiquement de présentation finie.

Preuve. Le morphisme $A \rightarrow A'$ étant adique, il existe un idéal de définition J de A tel que l'image de J engendre un idéal de définition de A' . De plus, l'application induite

$$A/J \rightarrow B/JB$$

est de présentation finie. L'application

$$A'/JA' \simeq A'/JA' \otimes_{A/J} A/J \rightarrow A'/JA' \otimes_{A/J} B/J \simeq (A' \otimes_A B)/J(A' \otimes_A B)$$

est alors de présentation finie. \square

Lemme 1.2.6. Soit R un anneau adique, A , A' , B et B' des R -algèbres adiques. Si $A \rightarrow B$ et $A' \rightarrow B'$ sont des morphismes topologiquement de présentation finie, alors $A \otimes_R A' \rightarrow B \otimes_R B'$ est topologiquement de présentation finie.

Preuve. Par extension des scalaires, en utilisant le lemme 1.2.5, les morphismes

$$A \otimes_R A' \rightarrow B \otimes_R A' \text{ et } B \otimes_R A' \rightarrow B \otimes_R B'$$

sont topologiquement de présentation finie. En utilisant la proposition 1.2.2, avec le morphisme $B \otimes_R A' \rightarrow B \otimes_R B'$, on obtient que le morphisme $A \otimes_R A' \rightarrow B \otimes_R B'$ est topologiquement de présentation finie. \square

Définition 1.2.7. Un morphisme $A \rightarrow B$ d'anneaux adiques est *formellement étale* si pour tout diagramme d'anneaux adiques

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C/\mathfrak{c} \end{array}$$

où C est un anneau adique complet et \mathfrak{c} est nilpotent, il existe un unique morphisme $B \rightarrow C$ rendant le diagramme commutatif. Le morphisme $A \rightarrow B$ est *topologiquement étale* si il est formellement étale et topologiquement de présentation finie.

Exemples. 1. Dans le cas des anneaux discrets, la notion de morphisme topologiquement étale est tout simplement la notion algébrique classique de morphisme étale.

2. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme étale entre deux anneaux. Pour un idéal de type fini I de A , il est possible de munir A et B de la topologie I -adique. Le morphisme φ est alors adique, topologiquement de type fini et formellement étale. Il est donc topologiquement étale.

3. Soit A un anneau adique et f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert, le morphisme

$$A \rightarrow A \left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0} \right)$$

est topologiquement étale. Nous avons montré dans la remarque qui suit la définition 1.2.1 que ce morphisme est topologiquement de présentation finie. Il suffit alors de remarquer qu'il est formellement étale. Si l'on se donne un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \left(\begin{array}{c} f_1, \dots, f_r \\ f_0 \end{array} \right) & \longrightarrow & C/\mathfrak{c} \end{array}$$

où C est un anneau adique complet et \mathfrak{c} est nilpotent, nous vérifions aisément que le morphisme $A \rightarrow C$ satisfait les conditions nécessaires afin d'appliquer la propriété universelle de la localisation rationnelle, ce qui permet d'obtenir un unique relèvement $A \left(\begin{array}{c} f_1, \dots, f_r \\ f_0 \end{array} \right) \rightarrow C$ qui fasse commuter le diagramme.

Proposition 1.2.8. *Soit A et B deux anneaux adiques et un morphisme adique $\varphi : A \rightarrow B$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le morphisme φ est formellement étale.*
2. *Pour tout diagramme d'anneaux adiques*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C/\mathfrak{c} \end{array}$$

où C est un anneau adique complet et \mathfrak{c} est un idéal topologiquement nilpotent, il existe un unique morphisme $B \rightarrow C$ rendant le diagramme commutatif.

Preuve. Le sens (2) \Rightarrow (1) est évident car un idéal nilpotent est topologiquement nilpotent. Montrons alors le sens (1) \Rightarrow (2). Donnons-nous un diagramme d'anneaux adiques

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C/\mathfrak{c} \end{array}$$

où C est un anneau adique complet et \mathfrak{c} est un idéal topologiquement nilpotent. Pour tout idéal de définition I de A et tout entier naturel, k ce diagramme induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C/I^k C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C/I^k C/\mathfrak{c}. \end{array}$$

L'idéal \mathfrak{c} est nilpotent dans $C/I^k C$ car $I^k C$ est un idéal de définition de C par la proposition 1.1.3. De plus, $C/I^k C$ est complet pour la topologie discrète. Nous obtenons ainsi un unique relèvement $B \rightarrow C/I^k C$. En passant au complété, nous obtenons un morphisme $B \rightarrow C$ et il est aisément vérifiable que celui-ci est adique. \square

Proposition 1.2.9. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux morphismes entre anneaux adiques. Si f et g sont topologiquement étales alors $g \circ f$ est topologiquement étale.

Preuve. On vérifie facilement que la composition de morphismes formellement étales est formellement étale. La proposition découle alors de la Proposition 1.2.2. \square

Proposition 1.2.10. Soit R un anneau adique, $\varphi : A \rightarrow C$ et $\psi : B \rightarrow D$ deux morphismes entre anneaux adiques. Si A, B, C et D sont des R -algèbres adiques et les morphismes φ et ψ sont topologiquement étales alors $\varphi \otimes_R \psi : A \otimes_R B \rightarrow C \otimes_R D$ est topologiquement étale.

Preuve. On se donne un diagramme de R -algèbres de Huber

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R B & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \otimes_R D & \longrightarrow & E/\mathfrak{e} \end{array}$$

où E est complet et \mathfrak{e} est nilpotent. Ce diagramme induit les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & E/\mathfrak{e} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E/\mathfrak{e} \end{array}$$

Par hypothèse il existe des relèvements uniques $C \rightarrow E$ et $D \rightarrow E$ qui font commuter ces diagrammes. Par propriété universelle il existe une unique application $C \otimes_R D \rightarrow E$ qui fait commuter le premier diagramme. Le fait que le morphisme soit topologiquement de présentation finie découle de la proposition 1.2.6. \square

Définition 1.2.11. Un morphisme $\varphi : A \rightarrow B$ d'anneaux de Huber est *bien étale* si il existe des anneaux de définitions A_0 et B_0 de A et B qui vérifient $\varphi(A_0) \subset B_0$ tels que le morphisme induit $\varphi_0 : A_0 \rightarrow B_0$ est topologiquement étale et $B = A \otimes_{A_0} B_0$. Le triplet (φ_0, A_0, B_0) est un *bon modèle* de φ .

Exemples. 1. Dans le cas où les anneaux sont discrets c'est tout simplement la notion de morphisme étale.

2. Pour un nombre premier $p \neq 2$, le morphisme

$$\mathbb{Q}_p[T] \rightarrow \mathbb{Q}_p[X, Y]/(Y^2 - X^3 + X), \quad T \mapsto X$$

est bien étale, où la topologie des deux côtés est la topologie p -adique.

3. Soit A un anneau de Huber et f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert, le morphisme

$$A \rightarrow A \left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0} \right)$$

est bien étale.

Proposition 1.2.12. *Soit A et B deux anneaux adiques et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme. Si φ est bien étale alors il est formellement étale.*

Preuve. Soit un diagramme d'anneaux adiques de la forme suivante

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C/\mathfrak{c} \end{array}$$

avec C complet et \mathfrak{c} nilpotent. Pour des anneaux de définitions A_0 et B_0 , respectivement de A et B satisfaisant les hypothèses de la définition de bien étale pour le morphisme φ , on en déduit le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_0 & \longrightarrow & C/\mathfrak{c}. \end{array}$$

Encore par hypothèse, il existe un unique relèvement $B_0 \rightarrow C$ qui peut être étendu de manière unique en utilisant l'hypothèse : $B = A \otimes_{A_0} B_0$. \square

Définition 1.2.13. Soit A un anneau de Huber. Un endomorphisme σ de A est dit *infinitésimal* sur une partie V de A s'il existe une partie topologiquement nilpotente U de A telle que $(\sigma - \text{Id})(V) \subset U$ et si $\sigma(V) \subset V$.

Exemple. Soit A un anneau de Huber. Notons $\|\cdot\|$ sa semi-norme sous-multiplicative associée et (A_0, I_0) un couple de définition. Soit un élément q de A tel que $\|q - 1\| < 1$

$$A[X] \rightarrow A[X], \quad X \mapsto qX$$

est infinitésimal sur $A_0[X]$.

Proposition 1.2.14. *Soit B un anneau de Huber complet et $u : A \rightarrow B$ un morphisme bien étale d'anneaux de Huber et (u_0, A_0, B_0) un bon modèle de u . Si σ_A est un endomorphisme de A infinitésimal sur A_0 et B est complète, alors σ_A se prolonge, de manière unique, en un endomorphisme σ_B de B également infinitésimal sur B_0 .*

Preuve. Notons J l'idéal de A engendré par $(\sigma_A - \text{Id})(A_0)$. Du fait que le morphisme σ_A est infinitésimal sur A_0 , nous avons $J \subset A_0$. L'idéal JB_0 est un idéal topologiquement nilpotent de B_0 . Afin d'obtenir le relèvement il suffit de considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{u \circ \sigma_A} & B_0 \\ \downarrow u & & \downarrow \\ B_0 & \longrightarrow & B_0/JB_0. \end{array}$$

Cela nous assure, du fait que le morphisme $A \rightarrow B$ est bien étale, qu'il existe un unique relèvement $B_0 \rightarrow B_0$. Par extension des scalaires ce morphisme peut être entendu en un endomorphisme de B qui satisfait automatiquement les propriétés voulues. \square

Définition 1.2.15. Soit R un anneau de Huber et A une R -algèbre de Huber. Des éléments $x_1, \dots, x_d \in A$ sont des *coordonnées étales* si il existe un morphisme formellement étale

$$\varphi : R[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A, \quad X_i \mapsto x_i.$$

Nous dirons de plus que ce sont des *bonnes coordonnées étales* si φ est bien étale : s'il existe des anneaux de définition R_0 de R et A_0 de A tels que le triplet $(\varphi_0, R_0[X_1, \dots, X_d], A_0)$ est un bon modèle pour φ , où $\varphi_0 : R_0[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A_0$ est le morphisme induit par φ .

Proposition 1.2.16. *Soit R un anneau de Huber et A une R -algèbre de Huber, si x_1, \dots, x_d sont des bonnes coordonnées étales sur A alors ce sont des coordonnées étales.*

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 1.2.12. □

Proposition 1.2.17. *Soit R un anneau adique, A et B des R -algèbres adiques qui sont des anneaux adiques. Si A et B sont munies respectivement de bonnes coordonnées étales x_1, \dots, x_d et y_1, \dots, y_e , alors $x_1 \otimes 1, \dots, x_d \otimes 1, 1 \otimes y_1, \dots, 1 \otimes y_e$ sont des bonnes coordonnées étales sur $A \otimes_R B$.*

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 1.2.10. □

Chapitre 2

Calcul différentiel déformé

Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir.

Alexandre Grothendieck, Récoltes et Semailles, 1986

Table des matières

2.1	Rappels sur les modules filtrés	35
2.2	Parties principales déformées en plusieurs variables . . .	37
2.3	Coordonnées	45
2.4	Formes différentielles déformées	49
2.5	Dérivations	51
2.6	Opérateurs différentiels déformés de niveau infini	60
2.7	Séries de Taylor déformées	63
2.8	Opérateurs différentiels de rayon fini	64

2.1 Rappels sur les modules filtrés

Nous rappelons dans cette section quelques résultats généraux sur les modules filtrés sur un anneau qui nous seront utiles par la suite.

Définition 2.1.1. Soit A un anneau. Un A -module M est dit *filtré* s'il est muni d'une filtration exhaustive décroissante indexée sur les entiers naturels $\text{Fil}_\bullet M$. Pour tout entier naturel i , notons $\text{Gr}_i M = \text{Fil}_i M / \text{Fil}_{i+1} M$ la graduation associée.

Proposition 2.1.2. Soit A un anneau, M et N deux A -modules filtrés. Il existe une filtration naturelle définie pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$\text{Fil}_k(M \otimes_R N) = \sum_{i+j=k} \text{Im}(\text{Fil}_i M \otimes \text{Fil}_j N \rightarrow M \otimes N).$$

qui donne lieu à un morphisme naturel

$$\bigoplus_{i+j=k} \text{Gr}_i M \otimes \text{Gr}_j N \rightarrow \text{Gr}_k(M \otimes N).$$

Si, de plus, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $M/\text{Fil}_i M$ et $N/\text{Fil}_j N$ sont des modules plats sur R , ce morphisme est un isomorphisme.

Preuve. Par définition, pour $i + j = k$ fixés il existe un morphisme

$$\text{Fil}_i M \otimes \text{Fil}_j N \rightarrow M \otimes N \rightarrow \text{Gr}_k(M \otimes N).$$

L'image de $\text{Fil}_{i+1} M \otimes \text{Fil}_j N$ est nulle par ce morphisme, et par passage au quotient, cela donne un morphisme

$$\text{Gr}_i M \otimes \text{Fil}_j N \rightarrow \text{Gr}_k(M \otimes N).$$

Appliquons à nouveau le même raisonnement en remarquant que, par ce morphisme, l'image de $\text{Gr}_i M \otimes \text{Fil}_{j+1} N$ est nulle pour obtenir par passage au quotient un morphisme

$$\psi_{i,j} : \text{Gr}_i M \otimes \text{Gr}_j N \rightarrow \text{Gr}_k(M \otimes N).$$

En prenant la somme directe

$$\bigoplus_{i+j=k} \text{Gr}_i M \otimes \text{Gr}_j N \rightarrow \text{Gr}_k(M \otimes N)$$

nous obtenons le morphisme naturel voulu. Supposons alors que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $M/\text{Fil}_i M$ et $N/\text{Fil}_j N$ sont des modules plats sur R . Il nous faut construire un inverse. Pour $i + j = k$ fixés, considérons le morphisme composé

$$\phi_{i,j} : \text{Fil}_k(M \otimes N) \hookrightarrow M \otimes N \rightarrow M/\text{Fil}_{i+1} M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N.$$

En composant avec la surjection

$$\rho_1 : M/\text{Fil}_{i+1} M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N \rightarrow M/\text{Fil}_i M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N$$

cela donne l'application nulle. En effet, étant donné un élément dans l'image de $\phi_{i,j}$ il peut être écrit sous la forme $\sum_{v+u=k} \overline{m_u} \otimes \overline{n_v}$ avec $m_u \in \text{Fil}_u M$ et $n_v \in \text{Fil}_v N$. Un raisonnement par l'absurde nous assure que $u \geq i$ ou $v \geq j + 1$. Un tel élément est bien envoyé sur 0 par ρ_1 . L'image de $\phi_{i,j}$ est donc incluse dans le noyau de ρ_1 . Utilisons alors la platitude de $N/\text{Fil}_{j+1} N$ pour calculer ce noyau. Par définition, la suite ci-dessous est exacte

$$0 \rightarrow \text{Gr}_i M \rightarrow M/\text{Fil}_{i+1} M \rightarrow M/\text{Fil}_i M \rightarrow 0.$$

Par platitude de $N/\text{Fil}_{j+1} N$, la suite obtenue en tensorisant est également exacte

$$0 \rightarrow \text{Gr}_i M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N \rightarrow M/\text{Fil}_{i+1} M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N \rightarrow M/\text{Fil}_i M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N \rightarrow 0.$$

Ainsi $\ker(\rho_1) = \text{Gr}_i M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N$ et il existe un morphisme

$$\phi'_{i,j} : \text{Fil}_k(M \otimes N) \rightarrow \text{Gr}_i M \otimes N/\text{Fil}_{j+1} N.$$

Procédons de la même façon et considérons la surjection

$$\rho_2 : \text{Gr}_i M \otimes N / \text{Fil}_{j+1} N \rightarrow \text{Gr}_i M \otimes N / \text{Fil}_j N.$$

Un raisonnement identique nous permet d'obtenir un morphisme

$$\phi''_{i,j} : \text{Fil}_k(M \otimes N) \rightarrow \text{Gr}_i M \otimes \text{Gr}_j N.$$

En raisonnant à nouveau sur les indices, ce morphisme passe au quotient

$$\text{Gr}_k(M \otimes N) \rightarrow \text{Gr}_i M \otimes \text{Gr}_j N.$$

Prenons à nouveau la somme directe pour obtenir un morphisme

$$\text{Gr}_k(M \otimes N) \rightarrow \bigoplus_{i+j=k} \text{Gr}_i M \otimes \text{Gr}_j N.$$

C'est bien un inverse. □

Lemme 2.1.3. *Soit M et N deux R -modules munis, respectivement, des filtrations décroissantes exhaustives $\text{Fil}_\bullet M$ et $\text{Fil}_\bullet N$. Si $M \rightarrow N$ est un isomorphisme de modules filtrés qui induit pour tout entier i un isomorphisme $\text{Gr}_i M \rightarrow \text{Gr}_i N$ alors pour tout entier i*

$$\text{Fil}_i M \simeq \text{Fil}_i N.$$

Preuve. Nous procédons par récurrence. Pour $k = 0$, le résultat est évidemment vrai. Supposons alors que le résultat soit vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{k+1} M & \longrightarrow & \text{Fil}_k M & \longrightarrow & \text{Gr}_k M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_{k+1} N & \longrightarrow & \text{Fil}_k N & \longrightarrow & \text{Gr}_k N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les morphismes verticaux au centre et à droite sont des isomorphismes et donc par le lemme des cinq $\text{Fil}_{k+1} M \rightarrow \text{Fil}_{k+1} N$ est un isomorphisme. □

2.2 Parties principales déformées en plusieurs variables

Définition 2.2.1. Soit R un anneau de Huber, A une R -algèbre adique et $d \in \mathbb{N}$. La R -algèbre A est dite *déformée d'ordre d* si elle est munie d'une suite $\underline{\sigma} = (\sigma_{A,1}, \dots, \sigma_{A,d})$ d'endomorphismes R -linéaires continus qui commutent entre eux.

Posons $P_A = A \otimes_R A$. Nous étendons σ_i à P_A en posant $\sigma_i(a \otimes b) = \sigma_i(a) \otimes b$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrirons tout simplement σ_i au lieu de $\sigma_{A,i}$. La donnée de l'anneau et de l'ensemble des endomorphismes sera notée sous la forme d'un couple $(A, \underline{\sigma})$.

Exemples. Soit R un anneau de Huber et A une R -algèbre adique. Les exemples suivant sont des exemples d'algèbres déformées

1. Soit h_1, \dots, h_d des éléments de A , l'anneau $A[\underline{X}]$ muni de $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, définis par $\sigma_i(X_j) = X_j + h_j$, est une R -algèbre déformée d'ordre d . C'est le cas des différences finies.
2. Soit $l \in \mathbb{N}$, l'anneau $A[\underline{X}]$ muni de $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, définis par

$$\forall a \in A, \forall i, j = 1, \dots, d, \sigma_i(aX_j) = a\delta_{i,j}X_i^l,$$

est une R -algèbre déformée d'ordre d . C'est le cas des différences de Mahler.

3. Dans le cas de deux variables $A = R[X_1, X_2]$, il est possible de regarder les cas $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_1(\sum a_{i,j}X_1^iX_2^j) = \sum a_{i,j}X_2^{i+j}$ et $\sigma_2(\sum a_{i,j}X_1^iX_2^j) = \sum a_{i,j}X_1^{i+j}$ ou encore $\sigma_1(\sum a_{i,j}X_1^iX_2^j) = \sum a_{i,j}(X_1+X_2)^iX_2^j$ et $\sigma_2(\sum a_{i,j}X_1^iX_2^j) = \sum a_{i,j}X_1^i(X_1+X_2)^j$.

Définition 2.2.2. Soit R un anneau de Huber et $(A, \underline{\sigma}_A)$ et $(B, \underline{\sigma}_B)$ deux R -algèbres de Huber déformées d'ordre d . Un morphisme de R -algèbres de Huber déformées d'ordre d , $u : A \rightarrow B$ est un morphisme de R -algèbres de Huber tel que

$$\forall i = 1, \dots, d, \sigma_{B,i} \circ u = u \circ \sigma_{A,i}.$$

Dans la suite, nous considérons un anneau de Huber R et $(A, \underline{\sigma})$ une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d . Considérons également des éléments $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ de A sur lesquels nous mettrons des conditions variées par la suite. Nous utiliserons la même notation σ_i pour l'endomorphisme de l'anneau de polynômes $A[\underline{\xi}]$ tel que pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$

$$\sigma_i(\xi_j) = \begin{cases} \xi_i + x_i - \sigma_i(x_i), & \text{si } j = i \\ \xi_j, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2.3. Pour tout entier naturel n , le A -module $P_{A,(n),\underline{\sigma},\underline{x}}$ des *parties principales déformées d'ordre n* est le module défini de la façon suivante

$$P_{A,(n),\underline{\sigma},\underline{x}} := A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(k),\underline{\sigma},\underline{x}} \text{ tels que } |k| = n + 1 \right)$$

où l'on a posé pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$

$$\underline{\xi}^{(k),\underline{\sigma},\underline{x}} := \xi_1^{(k_1)\sigma_1} \dots \xi_d^{(k_d)\sigma_d} \text{ et } \xi_i^{(k_i)\sigma_i} := \xi_i \sigma_i(\xi_i) \dots \sigma_i^{k_i-1}(\xi_i).$$

Cela donne

$$\underline{\xi}^{(k),\underline{\sigma},\underline{x}} = \prod_{i=1}^d \prod_{j=0}^{k_i-1} (\xi_i + x_i - \sigma_i^j(x_i)). \quad (2.1)$$

Dans le cas où $d = 1$, c'est le module défini par Le Stum et Quirós dans [LSQ18a, Définition 1.5].

Remarque. Comme remarqué dans les exemples qui suivent la définition 1.1.1, l'anneau de polynômes $A[\underline{\xi}]$ peut être muni d'une structure d'anneau de Huber induisant la topologie de \bar{A} . L'anneau $P_{A,(n),\underline{\sigma},\underline{x}}$ muni de la topologie quotient est également un anneau de Huber. Dans la suite, nous le munirons de cette topologie.

Exemple. Lorsque $A = R[X_1, X_2]$, et pour $i, j = 1, 2$, $\sigma_i(X_j) = q_i^{\delta_{i,j}} X_j$ où q_1 et q_2 sont des éléments de R , le module admet la description suivante

$$P_{A,(n)_{\underline{\sigma}, \{X_1, X_2\}}} = A[\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2] / \left(\prod_{i=1}^2 \prod_{j=0}^{k_i-1} (\xi_i + (1 - q_i^j) X_i) \text{ tels que } k_1 + k_2 = n + 1 \right).$$

Proposition 2.2.4. *Pour tout entier naturel n , le morphisme composé*

$$A[\underline{\xi}]_{\leq n} \hookrightarrow A[\underline{\xi}] \rightarrow P_{A,(n)_{\underline{\sigma}, \underline{x}}}$$

est un isomorphisme.

Preuve. Considérons le morphisme de A -modules suivant

$$\begin{aligned} A[\underline{\xi}] &\rightarrow A[\underline{\xi}] \\ \underline{\xi}^{\underline{k}} &\mapsto \underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}, \underline{x}}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La formule 2.1 nous assure que pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $\underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}, \underline{x}}}$ est de degré $|\underline{k}|$. Le morphisme 2.2 conserve donc le degré et induit pour tout entier naturel n un morphisme

$$A[\underline{\xi}]_{\leq n} \rightarrow A[\underline{\xi}]_{\leq n},$$

où $A[\underline{\xi}]_{\leq n}$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n . Pour $n = 0$, ce morphisme est un isomorphisme. Procédons alors par récurrence en supposant que c'est un isomorphisme pour un entier naturel n . Il existe également un morphisme induit

$$A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} / A[\underline{\xi}]_{\leq n} \rightarrow A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} / A[\underline{\xi}]_{\leq n}.$$

Ce morphisme est un isomorphisme. En effet, étant donné $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| = n + 1$ alors par la formule 2.1 $\underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}, \underline{x}}} \equiv \xi_1^{k_1} \dots \xi_d^{k_d} \pmod{A[\underline{\xi}]_{\leq n}}$. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A[\underline{\xi}]_{\leq n} & \longrightarrow & A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} & \longrightarrow & A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} / A[\underline{\xi}]_{\leq n} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A[\underline{\xi}]_{\leq n} & \longrightarrow & A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} & \longrightarrow & A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} / A[\underline{\xi}]_{\leq n} \longrightarrow 0 \end{array}$$

permet de conclure, en utilisant le lemme des cinq, que le morphisme

$$A[\underline{\xi}]_{\leq n+1} \rightarrow A[\underline{\xi}]_{\leq n+1}$$

est un isomorphisme. Il en découle directement que le morphisme 2.2 est un isomorphisme. \square

Remarque. Le module $P_{A,(n)_{\underline{\sigma}, \underline{x}}}$ est un A -module libre de base $\left\{ \underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}, \underline{x}}} \right\}_{|\underline{k}| \leq n}$.

Proposition 2.2.5. *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de R -algèbres de Huber déformées d'ordre d alors,*

$$B \otimes_A P_{A,(n)_{\underline{\sigma}_A, \underline{x}}} \simeq P_{B,(n)_{\underline{\sigma}_B, u(\underline{x})}}.$$

Preuve. Par définition,

$$\begin{aligned} B \otimes_A P_{A,(n)\underline{\sigma}_A,\underline{x}} &= B \otimes_A A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(k)\underline{\sigma}_A,\underline{x}} \text{ tels que } |k| = n + 1 \right) \\ &\simeq B[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(k)\underline{\sigma}_B,\underline{u}(x)} \text{ tels que } |k| = n + 1 \right) = P_{B,(n)\underline{\sigma}_B,\underline{u}(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

Définition 2.2.6. Les éléments x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A si, pour tout entier naturel n , il existe un unique morphisme adique R -algèbres

$$\begin{aligned} \Theta_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} : A &\rightarrow P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} \\ x_i &\mapsto x_i + \xi_i \end{aligned}$$

tel que la composée de la projection sur A avec $\Theta_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}$ est l'identité. Le morphisme $\Theta_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}$ est le n -ème morphisme de Taylor de A relativement à $\underline{\sigma}$ et \underline{x} .

Remarque. Soit $\underline{q} = (q_1, \dots, q_d)$ des éléments de R . Lorsque

$$\forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \sigma_i(x_j) = \begin{cases} q_i x_i & \text{si } i = j \\ x_j & \text{sinon,} \end{cases}$$

et x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées, nous dirons que ce sont des \underline{q} -coordonnées pour accentuer le lien avec les éléments q_1, \dots, q_d . Dans le cas où $d = 1$, c'est la situation qui est traitée dans [ADV04].

Exemple. Dans le cas où $\sigma_1 = \dots = \sigma_d = \text{Id}_A$ et qu'il existe un morphisme étale

$$R[\underline{X}] \rightarrow A, \quad X_i \mapsto x_i,$$

alors x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A . En effet, pour tout entier naturel n le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} R[\underline{X}] & \xrightarrow{X_i \mapsto x_i + \xi_i} & P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} \\ \downarrow X_i \mapsto x_i & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} / (\xi_1, \dots, \xi_d) \end{array}$$

Comme nous nous sommes placés dans le cas où $\sigma_1 = \dots = \sigma_d = \text{Id}_A$, les éléments ξ_i sont des éléments nilpotents de $P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}$. Puisque la première flèche verticale est formellement étale, il existe alors un unique relevé $A \rightarrow P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}$ qui vérifie bien la propriété voulue.

Soit x_1, \dots, x_d des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A . Considérons pour un entier naturel n le morphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} : P_A &\rightarrow P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} \\ a \otimes b &\mapsto a \Theta_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}(b) \end{aligned}$$

qui étend $\Theta_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}$ à P_A par A -linéarité. Pour $i = 1, \dots, d$,

$$\tilde{\Theta}_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) = \xi_i.$$

La proposition 2.2.4 nous assure donc que ce morphisme est surjectif. Notons

$$I_A^{(n+1)\underline{\sigma}, \underline{x}} := \ker \left(\tilde{\Theta}_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} \right).$$

Par le premier théorème d'isomorphisme

$$P_A / I_A^{(n+1)\underline{\sigma}, \underline{x}} \simeq P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}}.$$

Remarques. 1. Si nous notons

$$p_2^* : A \rightarrow P_A, f \mapsto 1 \otimes f$$

et π la projection $P_A \twoheadrightarrow P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}}$, alors par unicité de $\Theta_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}}$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_2^*} & P_A \\ & \searrow \Theta_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} & \downarrow \pi \\ & & P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} \end{array}$$

2. Pour tout entier naturel n , il existe, par factorisation, un morphisme

$$\phi_n : P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} \rightarrow P_{A, (n-1)\underline{\sigma}, \underline{x}}$$

qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} A[\underline{\xi}] & \twoheadrightarrow & P_{A, (n-1)\underline{\sigma}, \underline{x}} \\ \downarrow & \nearrow \phi_n & \\ P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} & & \end{array}$$

En utilisant l'unicité du morphisme $\tilde{\Theta}_{A, (n-1)\underline{\sigma}, \underline{x}}$ on vérifie facilement que

$$\phi_n \circ \tilde{\Theta}_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} = \tilde{\Theta}_{A, (n-1)\underline{\sigma}, \underline{x}}.$$

3. Le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_A^{(n)\underline{\sigma}, \underline{x}} & \hookrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_{A, (n-1)\underline{\sigma}, \underline{x}} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & I_A^{(n+1)\underline{\sigma}, \underline{x}} & \hookrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Lemme 2.2.7. Soit x_1, \dots, x_d des $\underline{\sigma}$ -coordonnées telles que pour $i = 1, \dots, d$, $\sigma_i(x_i) \in R[x_i]$. Pour tous les entiers naturels n et m , il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\delta_{n,m} : P_{A, (n+m)\underline{\sigma}, \underline{x}} \rightarrow P_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}} \otimes'_A P_{A, (m)\underline{\sigma}, \underline{x}}, \quad \xi_i \mapsto \xi_i \otimes 1 + 1 \otimes \xi_i$$

où \otimes'_A désigne le fait que l'action à droite se fait via $\Theta_{A, (n)\underline{\sigma}, \underline{x}}$.

Preuve. Il existe un unique morphisme de A -algèbres

$$\delta : A[\underline{\xi}] \rightarrow P_{A,(n)_{\underline{\sigma},\underline{x}}} \otimes'_A P_{A,(m)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}, \quad \xi_i \mapsto 1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1.$$

Pour $i = 1, \dots, d$ notons $\mathfrak{a}_{i,n}$ le sous-module libre de base $\{\xi_i^{(k)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}, k \geq n\}$. Montrons par récurrence l'inclusion suivante :

$$\delta(\mathfrak{a}_{i,n}) \subset \sum_{j=0}^n \mathfrak{a}_{i,j} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n-j}.$$

Pour $n = 1$, l'inclusion est immédiate. Supposons alors le résultat vrai pour un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'il reste vrai au rang $n + 1$. Il suffit de le montrer sur la base du module. Soit $k \geq n + 1$, nous avons :

$$\delta\left(\xi_i^{(k)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}\right) = \delta\left(\xi_i^{(n)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}\right) \prod_{j=n}^{k-1} \delta\left(\sigma_i^j(\xi_i)\right).$$

De plus, en tant qu'idéaux, nous avons

$$\prod_{j=n}^{k-1} \delta\left(\sigma_i^j(\xi_i)\right) \subset \delta\left(\sigma_i^n(\xi_i)\right).$$

Montrons alors que

$$\delta\left(\sigma_i^n(\xi_i)\right) \subset P_{A,(n)_{\underline{\sigma},\underline{x}}} \otimes'_A \sigma_i^{n-j}(\xi_i) + \sigma_i^j(\xi_i) \otimes'_A P_{A,(m)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}.$$

Du fait que δ soit A -linéaire et que $\sigma_i(x_i) \in R[x_i]$, il est suffisant de montrer cette inclusion sur $R[x_i]$, nous identifierons ici l'élément ξ_i à $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$ par l'isomorphisme $P_A/I_A^{(n+1)_{\underline{\sigma},\underline{x}}} \simeq P_{A,(n)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}$. C'est alors la proposition 3.3 de [LSQ18a] qui permet d'obtenir cette inclusion. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \delta\left(\xi_i^{(k)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}\right) &\subset \sum_{j=0}^n (\mathfrak{a}_{i,j} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n-j}) \left(P_{A,(n)_{\underline{\sigma},\underline{x}}} \otimes'_A \sigma_i^{n-j}(\xi_i) + \sigma_i^j(\xi_i) \otimes'_A P_{A,(m)_{\underline{\sigma},\underline{x}}} \right) \\ &\subset \sum_{j=0}^n (\mathfrak{a}_{i,j} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n-j} \sigma_i^{n-j}(\xi_i) + \mathfrak{a}_{i,j} \sigma_i^j(\xi_i) \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n-j}) \\ &\subset \sum_{j=0}^n (\mathfrak{a}_{i,j} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n+1-j} + \mathfrak{a}_{i,j+1} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n-j}) \\ &\subset \sum_{j=0}^{n+1} \mathfrak{a}_{i,j} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,n+1-j}. \end{aligned}$$

Désignons par \mathfrak{a}_n le sous-module libre de base $\{\underline{\xi}^{(k)_{\underline{\sigma},\underline{x}}}, |\underline{k}| \geq n\}$. Montrons alors que

$$\delta(\mathfrak{a}_n) \subset \sum_{j=0}^n \mathfrak{a}_j \otimes_A \mathfrak{a}_{n-j}.$$

L'égalité $\mathfrak{a}_n = \sum_{|\underline{k}|=n} \prod_{i=1}^d \mathfrak{a}_{i,k_i}$ donne

$$\begin{aligned}
\delta(\mathfrak{a}_n) &= \delta \left(\sum_{|\underline{k}|=n} \prod_{i=1}^d \mathfrak{a}_{i,k_i} \right) \\
&\subset \sum_{|\underline{k}|=n} \prod_{i=1}^d \delta(\mathfrak{a}_{i,k_i}) \\
&\subset \sum_{|\underline{k}|=n} \prod_{i=1}^d \sum_{j=0}^{k_i} \mathfrak{a}_{i,k_i-j} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,j} \\
&\subset \sum_{|\underline{k}|=n} \sum_{|\underline{j}| \leq |\underline{k}|} \prod_{i=1}^d (\mathfrak{a}_{i,j_i} \otimes_A \mathfrak{a}_{i,k_i-j_i}) \\
&\subset \sum_{|\underline{k}|=n} \sum_{|\underline{j}| \leq |\underline{k}|} \left(\prod_{i=1}^d \mathfrak{a}_{i,j_i} \otimes_A \prod_{i=1}^d \mathfrak{a}_{i,k_i-j_i} \right) \\
&\subset \sum_{|\underline{k}|=n} \sum_{|\underline{j}| \leq |\underline{k}|} (\mathfrak{a}_{|\underline{j}|} \otimes_A \mathfrak{a}_{|\underline{k}-\underline{j}|}) \\
&\subset \sum_{j=0}^n \mathfrak{a}_j \otimes_A \mathfrak{a}_{n-j}
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq i \leq n + m + 1$, soit $i > n$ et dans ce cas $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{n+1}$ ou bien $i \leq n$ et dans ce cas $m + n + 1 - i > m$ et donc $\mathfrak{a}_{n+m+1-i} \subset \mathfrak{a}_{m+1}$. D'où

$$\delta(\mathfrak{a}_{n+m+1}) \subset A[\underline{\xi}] \otimes_A \mathfrak{a}_{n+1} + \mathfrak{a}_{m+1} \otimes_A A[\underline{\xi}].$$

Par passage au quotient, on construit alors l'application voulue. \square

Remarques. 1. L'application $\delta_{n,m}$ ainsi définie est automatiquement adique.

2. Si A et B sont deux R -algèbres adiques tels que B est munie d'endomorphismes R -linéaires continus τ_1, \dots, τ_e ainsi que de $\underline{\tau}$ -coordonnées y_1, \dots, y_e alors, il est possible de définir un endomorphisme $(\sigma \cup \tau)_i$ de $A \otimes_R B$ en posant

$$(\sigma \cup \tau)_i(a \otimes b) = \begin{cases} \sigma_i(a) \otimes b & \text{si } 1 \leq i \leq d \\ a \otimes \tau_{i-d}(b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous utiliserons, comme précédemment, la même notation pour l'endomorphisme $(\sigma \cup \tau)_i$ sur $(A \otimes_R B)[\xi_1, \dots, \xi_{d+e}]$ défini par

$$(\sigma \cup \tau)_i(\xi_j) = \begin{cases} \xi_i + x_i \otimes 1 - \sigma_i(x_i) \otimes 1 & \text{si } i = j \text{ et } 1 \leq i, j \leq d \\ \xi_j & \text{si } i \neq j \text{ et } 1 \leq i, j \leq d \\ \xi_i + 1 \otimes y_i - 1 \otimes \tau_{i-d}(y_{i-d}) & \text{si } i = j \text{ et } d + 1 \leq i, j \leq d + e \\ \xi_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.2.8. *Si $(B, \underline{\tau})$ est une R -algèbre adique déformée d'ordre e munie de $\underline{\tau}$ -coordonnées y_1, \dots, y_e alors $x_1 \otimes 1, \dots, x_d \otimes 1, 1 \otimes y_1, \dots, 1 \otimes y_e$ sont des $\underline{\sigma \cup \tau}$ -coordonnées sur $A \otimes_R B$.*

Preuve. Il suffit ici d'utiliser la propriété universelle du produit tensoriel. Par existence des morphismes suivants :

$$A \xrightarrow{\Theta_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}}} P_{A,(n)\underline{\sigma},\underline{x}} \rightarrow P_{A \otimes_R B,(n)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}, \underline{x} \otimes \underline{1}, \underline{1} \otimes \underline{y}}$$

et

$$B \xrightarrow{\Theta_{B,(n)\underline{\sigma},\underline{y}}} P_{B,(n)\underline{\sigma},\underline{y}} \rightarrow P_{A \otimes_R B,(n)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}, \underline{x} \otimes \underline{1}, \underline{1} \otimes \underline{y}}$$

il est possible de construire une application bilinéaire

$$A \times B \rightarrow P_{A \otimes_R B,(n)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}, \underline{x} \otimes \underline{1}, \underline{1} \otimes \underline{y}}.$$

Alors par propriété universelle du produit tensoriel, il existe une unique application

$$A \otimes_R B \rightarrow P_{A \otimes_R B,(n)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}, \underline{x} \otimes \underline{1}, \underline{1} \otimes \underline{y}}.$$

qui satisfait les propriétés voulues. \square

Proposition 2.2.9. *Soit $(B, \underline{\tau})$ est une R -algèbre adique déformée d'ordre e munie de $\underline{\tau}$ -coordonnées y_1, \dots, y_e . Si A et B sont plates sur R alors pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$I_{A \otimes_R B}^{(n)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}, \underline{x} \otimes \underline{1}, \underline{1} \otimes \underline{y}} \simeq \sum_{i+j=n} I_A^{(i)\underline{\sigma}, \underline{x}} \otimes I_B^{(j)\underline{\tau}, \underline{y}}.$$

Preuve. Le module P_A peut être muni d'une filtration exhaustive décroissante définie de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\text{Fil}_n P_A = I_A^{(n)\underline{\sigma}, \underline{x}}$. De plus, le diagramme suivant est commutatif et ses lignes et colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{|k|=n} A \underline{\xi}^{(k)\underline{\sigma}, \underline{x}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_A^{(n+1)\underline{\sigma}, \underline{x}} & \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_{A,(n)\underline{\sigma}, \underline{x}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_A^{(n)\underline{\sigma}, \underline{x}} & \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_{A,(n-1)\underline{\sigma}, \underline{x}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & I_A^{(n)\underline{\sigma}, \underline{x}} / I_A^{(n+1)\underline{\sigma}, \underline{x}} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par le lemme du serpent, $\bigoplus_{|k|=n} A \underline{\xi}^{(k)\underline{\sigma}, \underline{x}} \simeq I_A^{(n)\underline{\sigma}, \underline{x}} / I_A^{(n+1)\underline{\sigma}, \underline{x}} = \text{Gr}_n P_A$. Considérons de la même manière que précédemment la filtration décroissante exhaustive $\text{Fil}_n P_B = I_B^{(n)\underline{\tau}, \underline{y}}$ et la graduation associée $\text{Gr}_n P_B \simeq \bigoplus_{|k|=n} B \underline{\xi}^{(k)\underline{\tau}, \underline{y}}$. L'isomorphisme

$$P_A \otimes_R P_B \rightarrow P_{A \otimes_R B}$$

induit un isomorphisme

$$\text{Gr}_k (P_A \otimes_R P_B) \simeq \text{Gr}_k P_{A \otimes_R B}.$$

En effet, remarquons que $P_A / I_A^{(i)\underline{\sigma}, \underline{x}}$ est un A -module libre et $P_B / I_B^{(j)\underline{\tau}, \underline{y}}$ est un B -module libre. Sachant que A et B sont des modules plats sur R , $P_A / I_A^{(i)\underline{\sigma}, \underline{x}}$ et $P_B / I_B^{(j)\underline{\tau}, \underline{y}}$ sont des modules plats sur R . Les propositions 2.1.2 et 2.1.3 permettent de conclure. \square

2.3 Coordonnées

Dans cette section, nous étudions les conditions nécessaires afin que les propriétés de nos coordonnées soient conservées lorsqu'on les transporte via un morphisme bien étale ou une localisation rationnelle.

Nous énonçons ici les hypothèses qui seront utilisées tout au long de cette section : R est un anneau de Huber et $(A, \underline{\sigma})$ est une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d (définition 2.2.1). Dorénavant, pour alléger les notations, les coordonnées \underline{x} seront omises en indice.

Proposition 2.3.1. *Supposons A complète. Soit x_1, \dots, x_d des bonnes coordonnées étales sur A et (φ_0, R_0, A_0) le bon modèle associé. Si pour tout $i = 1, \dots, d$, σ_i est infinitésimal sur A_0 alors, x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A .*

Preuve. Par définition, il existe un morphisme $R[\underline{X}] \rightarrow A$ qui est bien étale. Appliquons le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 1.2.14. Le morphisme induit $\sigma_0 : R_0[\underline{X}] \rightarrow A_0$ est topologiquement étale. Pour tout $1 \leq i \leq d$, $(\sigma_i - \text{Id})(A_0)$ est topologiquement nilpotent. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} R_0[\underline{X}] & \xrightarrow{X_i \mapsto \xi_i + x_i} & P_{A_0, (n)\underline{\sigma}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \longrightarrow & P_{A_0, (n)\underline{\sigma}} / ((\xi_1, \dots, \xi_d) + J) \end{array}$$

où $J = \left(\sum_{i=1}^d (\sigma_i - \text{Id})(A_0) \right)$. Du fait que le morphisme $R[\underline{X}] \rightarrow A$ est bien étale cela nous donne un unique relevé $A_0 \rightarrow P_{A_0, (n)\underline{\sigma}}$ qui peut être étendu en utilisant le fait que $A = A_0 \otimes_{R_0} R$. \square

Définition 2.3.2. Les éléments x_1, \dots, x_d sont des *bonnes σ -coordonnées* si ce sont des bonnes coordonnées étales et des $\underline{\sigma}$ -coordonnées.

Proposition 2.3.3. *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme bien étale de R -algèbres de Huber complètes et x_1, \dots, x_d des bonnes $\underline{\sigma}$ -coordonnées, avec (φ_0, R_0, A_0) pour bon modèle associé, tel qu'il existe un anneau de définition B_0 de B tel que $(u|_{A_0}, A_0, B_0)$ est un bon modèle de u . Si pour $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i est infinitésimal sur A_0 , alors, il se prolonge de manière unique à B en un endomorphisme $\sigma_{i,B}$. De plus, $u(x_1), \dots, u(x_d)$ sont des bonnes $\underline{\sigma}_B$ -coordonnées sur B .*

Preuve. Le résultat se déduit directement des propositions 2.3.1 et 1.2.14. \square

Définition 2.3.4. Des éléments x_1, \dots, x_d de A sont des coordonnées *gentilles* (resp. *fortes*) relativement à $\underline{\sigma}$ si pour tout entier naturel $1 \leq i \leq d$ et $0 \leq k < n$: $\sigma_i^n(x_i) - \sigma_i^k(x_i)$ n'est pas un diviseur de zéro (resp. est inversible) dans A .

Exemple. Dans le cas où $\sigma_i(x_j) = q_i^{\delta_{i,j}} x_j$ avec $q_i \in R$, les coordonnées sont gentilles si et seulement si $q_i^k - 1$ est régulier dans R . Cela revient à demander que q_i n'est pas une racine de l'unité. Les coordonnées seront fortes lorsque $q_i^k, q_i^{n-k} - 1$ sont

des éléments inversibles de R et x_1, \dots, x_d sont des éléments inversibles de A . C'est le cas dans la situation de [ADV04], où l'anneau R que nous considérons est un corps K de caractéristique nulle, complet par rapport à une valeur absolue $|\cdot|$ non archimédienne, avec un corps résiduel de caractéristique $p > 0$ et pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}_{>0}$ la R -algèbre de Huber déformée d'ordre 1 est

$$\mathcal{A}_K(I) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n, a_n \in K, \lim_{\pm\infty} |a_n| \rho^n = 0 \forall \rho \in I \right\}$$

munie de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \sigma_q : \mathcal{A}_K(I) &\rightarrow \mathcal{A}_K(I) \\ f(x) &\mapsto f(qx), \end{aligned}$$

où q est un élément de K tel que $|q - 1| < 1$ et q n'est pas une racine de l'unité.

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $\alpha_d^n := \# \{ \underline{k} \in \mathbb{N}^d, |\underline{k}| \leq n \} = \binom{n+d}{d}$

Proposition 2.3.5. *Si A est munie de coordonnées x_1, \dots, x_d gentilles (resp. fortes), alors pour tout entier naturel n , il existe un morphisme injectif (resp. bijectif) de A -algèbres*

$$\pi_n : P_{A, (n)_\sigma} \rightarrow A^{\alpha_d^n},$$

dont les composantes sont données par

$$\pi_{\underline{k}} : P_{A, (n)_\sigma} \rightarrow A, \quad \xi_i \rightarrow \sigma_i^{k_i}(x_i) - x_i,$$

pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| \leq n$.

Preuve. Un calcul direct donne

$$\pi_{\underline{k}}(\sigma_i^j(\xi_i)) = \pi_{\underline{k}}(\xi_i - \sigma_i^j(x_i) + x_i) = \sigma_i^{k_i}(x_i) - \sigma_i^j(x_i),$$

qui est donc nul si $k_i = j$ et régulier (resp. inversible) sinon. Il s'en déduit que

$$\pi_{\underline{k}}(\underline{\xi}^{(\underline{l})_\sigma}) = \prod_{i=1}^d \prod_{0 \leq j_i < l_i} (\sigma_i^{k_i}(x_i) - \sigma_i^{j_i}(x_i))$$

est nul s'il existe i tel que $k_i < l_i$, et régulier (resp. inversible) sinon. Ainsi,

$$\pi_{\underline{k}}(\underline{\xi}^{(\underline{l})_\sigma}) = 0 \text{ si } \underline{k} <_{\text{lex}} \underline{l}$$

et

$$\pi_{\underline{k}}(\underline{\xi}^{(\underline{l})_\sigma}) \in A^{\text{reg}} \text{ (resp. } A^\times) \text{ si } \underline{k} = \underline{l}.$$

Ainsi, si $P_{A, (n)_\sigma}$ est muni de la base $\{ \underline{\xi}^{(\underline{l})_\sigma} \}_{|\underline{l}| \leq n}$ et $A^{\alpha_d^n}$ est muni de la base canonique, la matrice de π_n exprimée dans ces bases, indexées suivant l'ordre lexicographique, est triangulaire inférieure avec des éléments réguliers (resp. inversibles) sur la diagonale. Nous observons donc que $\det(\pi_n) \in A^{\text{reg}}$ (resp. A^\times), ce qui permet de conclure. \square

Remarque. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, les morphismes $\pi_{\underline{k}}$ sont des morphismes finis car ce sont des morphismes de A -algèbres finies.

Définition 2.3.6. Des éléments x_1, \dots, x_d de A sont des *coordonnées transverses* relativement à $\underline{\sigma}$ si pour tout $i \neq j$, $\sigma_i(x_j) = x_j$.

Exemple. Dans la situation de [ADV04] la variable x est évidemment une coordonnée transverse.

Lemme 2.3.7. Soit x_1, \dots, x_d des coordonnées transverses sur A , alors pour tout entier naturel n et tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| \leq n$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} R[\underline{X}] & \xrightarrow{X_i \mapsto \xi_i + x_i} & P_{A, (n)\underline{\sigma}} \\ X_i \mapsto x_i \downarrow & & \downarrow \pi_{\underline{k}} \\ A & \xrightarrow{\underline{\sigma}^{\underline{k}}} & A \end{array}$$

Preuve. Pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, puisque les coordonnées sont transverses alors

$$\pi_{\underline{k}}(x_i + \xi_i) = x_i + (\sigma_i^{k_i}(x_i) - x_i) = \sigma_i^{k_i}(x_i) = \underline{\sigma}^{\underline{k}}(x_i). \quad \square$$

Proposition 2.3.8. Supposons A complète. Soit x_1, \dots, x_d des bonnes coordonnées étales associées à un bon modèle (φ_0, R_0, A_0) . Supposons que pour $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i est infinitésimal sur A_0 , alors pour $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i est uniquement déterminé par sa restriction à $R[\underline{X}]$ dans le sens où si τ_i est un endomorphisme R -linéaire continu de A tel que $\tau_i|_{R[\underline{X}]} = \sigma_i|_{R[\underline{X}]}$ alors $\tau_i = \sigma_i$.

Preuve. Étant donné le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} R_0[\underline{X}] & \xrightarrow{X_i \mapsto \sigma_i(x_i)} & A_0 \\ X_i \mapsto x_i \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \longrightarrow & A_0/(\sigma_i - \text{Id})(A_0) \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche envoie X_j sur $\sigma_i(x_j)$. Le premier morphisme horizontal étant supposé formellement étale, il existe alors un unique relèvement de A_0 dans A_0 qui est égal à σ_i sur $R_0[\underline{X}]$. Ce relèvement peut être étendu à A en utilisant le fait que $A = A_0 \otimes_{R_0} R$ et il est aisément vérifiable que c'est l'endomorphisme σ_i . \square

Le lemme suivant est un résultat général sur les anneaux commutatifs.

Lemme 2.3.9. Soit $A \rightarrow B$ un morphisme injectif entier entre deux anneaux commutatifs alors $A^\times = A \cap B^\times$.

Preuve. Cela résulte du fait qu'il existe une surjection $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ ([Aut23, Chapter 10, Lemma 10.36.17]) et qu'une fonction est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas. \square

Lemme 2.3.10. Soit $A \rightarrow B$ un morphisme injectif d'algèbres de Huber. Si le morphisme induit $A^0 \rightarrow B^0$ est entier, alors $A^0 = A \cap B^0$.

Preuve. Si $f \in A \cap B^0$ alors, en particulier, $f \in B^0$. Et comme $A^0 \rightarrow B^0$ est entier, cela implique que f est entier sur A^0 . Mais comme $f \in A$ et que A^0 est intégralement clos dans A , alors nécessairement $f \in A^0$. \square

Lemme 2.3.11. *Soit f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert de A . Si, A est complète, que pour tout $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i se prolonge à $A \{ \underline{f}/f_0 \}$ et pour tout entier naturel n*

$$\Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}(f_0) \in P_{A,(n)\underline{\sigma}}(\underline{f}/f_0)^\times \text{ et}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}(f_i)/\Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}(f_0) \in P_{A,(n)\underline{\sigma}}(\underline{f}/f_0)^0,$$

alors x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur $A \{ \underline{f}/f_0 \}$.

Preuve. Cela découle directement du fait que l'on souhaite vérifier que l'endomorphisme

$$A \rightarrow P_{A,(n)\underline{\sigma}} \rightarrow P_{A,(n)\underline{\sigma}}(\underline{f}/f_0) \rightarrow P_{A,(n)\underline{\sigma}}\{ \underline{f}/f_0 \}$$

se prolonge à $A \{ \underline{f}/f_0 \}$. \square

Proposition 2.3.12. *Supposons que A est complète. Soit x_1, \dots, x_d des bonnes $\underline{\sigma}$ -coordonnées étales gentilles et transverses associées à un bon modèle (R_0, A_0) . Supposons que pour $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i est infinitésimal sur A_0 . Soit f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert de A . Si $A \{ \underline{f}/f_0 \}$ est une localisation rationnelle régulière de A et pour tout $i = 1, \dots, d$*

$$\sigma_i(f_0) \in A(\underline{f}/f_0)^\times \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, r\}, \sigma_i(f_j)/\sigma_i(f_0) \in A(\underline{f}/f_0)^0,$$

alors $\underline{\sigma}$ se prolonge à $A \{ \underline{f}/f_0 \}$ et x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur $A \{ \underline{f}/f_0 \}$.

Preuve. Par la propriété universelle et par continuité, pour tout $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i se prolonge en un endomorphisme de $A \{ \underline{f}/f_0 \}$. Les coordonnées x_1, \dots, x_d sont gentilles sur $A \{ \underline{f}/f_0 \}$ car le morphisme $A \rightarrow A \{ \underline{f}/f_0 \}$ préserve donc les éléments réguliers. Par propriété universelle de $A \{ \underline{f}/f_0 \}$ elles sont également transverses. Par le lemme 2.3.11, les coordonnées x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées si et seulement si pour tout entier naturel n

$$\Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}(f_0) \in P_{A,(n)\underline{\sigma}}(\underline{f}/f_0)^\times \text{ et}$$

$$\forall i = 1, \dots, r \text{ on a } \Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}(f_i)/\Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}(f_0) \in P_{A,(n)\underline{\sigma}}(\underline{f}/f_0)^0.$$

Grâce aux lemmes 2.3.9 et 2.3.10 cela est équivalent à demander que

$$(\pi_n \circ \Theta_{A,(n)\underline{\sigma}})(f_0) \in \left(A(\underline{f}/f_0)^{\binom{d+n}{n}} \right)^\times$$

$$\text{et } \forall i \in \{1, \dots, r\}, (\pi_n \circ \Theta_{A,(n)\underline{\sigma}})(f_i)/(\pi_n \circ \Theta_{A,(n)\underline{\sigma}})(f_0) \in \left(A(\underline{f}/f_0)^{\binom{d+n}{n}} \right)^0.$$

Nous appliquons alors les lemmes 2.3.7 et 2.3.8 pour obtenir que pour $|k| \leq n$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}} & P_{A,(n)\underline{\sigma}} & \xrightarrow{\pi_{\underline{k}}} & A & \longrightarrow & A(\underline{f}/f_0) \\
 & & & & \nearrow \sigma_{\underline{k}} & & \\
 & & R[\underline{X}] & & & &
 \end{array}$$

et donc vérifier que nos hypothèses sont suffisantes pour obtenir le résultat. \square

Corollaire 2.3.13. *De plus,*

$$A\{\underline{f}/f_0\} \otimes_A P_{A,(n)\underline{\sigma}} \simeq P_{A\{\underline{f}/f_0\},(n)\underline{\sigma}}.$$

Preuve. Par la proposition 2.3.12 les endomorphismes $\underline{\sigma}$ se prolongent à $A\{\underline{f}/f_0\}$ et x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur $A\{\underline{f}/f_0\}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.2.5 pour obtenir le résultat voulu. \square

2.4 Formes différentielles déformées

Nous conservons les hypothèses de la section précédente, c'est-à-dire : R est un anneau de Huber et $(A, \underline{\sigma})$ est une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d (définition 2.2.1). À partir de maintenant, nous supposons de plus qu'il existe des éléments $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ qui sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A (définition 2.2.6).

Définition 2.4.1. Le A -module des *différentielles déformées* de A sur R est

$$\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 := I_A^{(1)\underline{\sigma}}/I_A^{(2)\underline{\sigma}}.$$

Remarques. 1. L'isomorphisme obtenu par le lemme du serpent dans la preuve de la proposition 2.2.9 assure que $\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1$ est un module libre de rang d qui admet $(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)_{i=1,\dots,d}$ comme base. La preuve de cette proposition donne également que pour $i = 1, \dots, r$, l'élément ξ_i de $P_{A,(1)\underline{\sigma}}$ s'identifie avec la classe de $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$ dans $P_A/I_A^{(2)\underline{\sigma}}$.

2. Avec les notations de la preuve de la proposition 2.2.7, remarquons que

$$\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 = \mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_2.$$

3. L'isomorphisme $P_{A,(1)\underline{\sigma}} \simeq P_A/I_A^{(2)\underline{\sigma}}$ nous permet d'identifier $\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1$ avec un idéal de $P_{A,(1)\underline{\sigma}}$.

Proposition 2.4.2. *La suite de A -modules suivante,*

$$0 \rightarrow \Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 \rightarrow P_{A,(1)\underline{\sigma}} \rightarrow A \rightarrow 0$$

où le premier morphisme $\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 \rightarrow P_{A,(1)\underline{\sigma}}$ est l'inclusion et le morphisme $P_{A,(1)\underline{\sigma}} \rightarrow A$ est la multiplication, est exacte et scindée.

Preuve. Le fait que la suite est exacte est direct par construction. Pour montrer qu'elle est scindée, il suffit de considérer $A \rightarrow P_A/I_A^{(2)\underline{\sigma}} \simeq P_{A,(1)\underline{\sigma}}$ qui à un élément a , associe $a \otimes 1$. Nous obtenons l'identité en composant avec la flèche $P_{A,(1)\underline{\sigma}} \rightarrow A$ qui n'est autre que la multiplication. \square

Proposition 2.4.3. *Soit A et B deux R -algèbres déformées d'ordre d et $u : A \rightarrow B$ un morphisme de R -algèbres de Huber déformées d'ordre d . Supposons que $u(x_1), \dots, u(x_d)$ sont des $\underline{\sigma}_B$ -coordonnées, alors, il existe un isomorphisme*

$$B \otimes_A \Omega_{A,\underline{\sigma}_A}^1 \simeq \Omega_{B,\underline{\sigma}_B}^1.$$

Preuve. Par la proposition 2.4.2

$$0 \rightarrow \Omega_{A,\underline{\sigma}_A}^1 \rightarrow P_{A,(1)\underline{\sigma}_A} \rightarrow A \rightarrow 0$$

En appliquant le produit tensoriel, nous obtenons, en utilisant la proposition 2.2.5 et le fait que la suite est scindée

$$0 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{A,\underline{\sigma}_A}^1 \rightarrow P_{B,(1)\underline{\sigma}_B} \rightarrow B \rightarrow 0. \quad \square$$

Nous rappelons le résultat général suivant

Lemme 2.4.4. *Soit R un anneau. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$ des morphismes surjectifs de R -modules. L'égalité suivante est vérifiée*

$$\ker(f \otimes g) = \text{Im}(A \otimes \ker(g) + \ker(f) \otimes C \rightarrow A \otimes_R C).$$

Preuve. Nous avons les deux suites exactes suivantes

$$\ker(f) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$$

et

$$\ker(g) \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0.$$

En appliquant deux fois l'exactitude du produit tensoriel à droite ainsi que le lemme 3.1.20 de [Bra14], nous obtenons que la suite

$$\ker(f) \otimes C \oplus A \otimes \ker(g) \rightarrow A \otimes C \rightarrow B \otimes D \rightarrow 0$$

est exacte. C'est le résultat voulu. \square

Proposition 2.4.5. *Soit une R -algèbres de Huber déformée d'ordre d . Supposons que A et B sont plates sur R et qu'il existe un morphisme de R -algèbres déformées d'ordre d , $u : A \rightarrow B$. Si $u(x_1), \dots, u(x_d)$ sont des $\underline{\sigma}_B$ -coordonnées, alors, il existe un isomorphisme naturel*

$$\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 \otimes_R B \oplus A \otimes_R \Omega_{B,\underline{\tau}}^1 \simeq \Omega_{A \otimes_R B, \underline{\sigma} \cup \underline{\tau}}^1.$$

Preuve. Soit $\pi_A : I_A^{(1)\underline{\sigma}} \rightarrow \Omega_{A,\underline{\sigma}}^1$ et $\pi_B : I_B^{(1)\underline{\tau}} \rightarrow \Omega_{B,\underline{\tau}}^1$ les projections canoniques. Considérons l'application

$$\mathrm{Gr}_1 P_{A \otimes_R B} \simeq I_A^{(1)\underline{\sigma}} \otimes_R P_B + P_A \otimes_R I_A^{(1)\underline{\tau}} \xrightarrow{\pi_A \otimes \Delta_B + \Delta_A \otimes \pi_B} \Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 \otimes_R B \oplus A \otimes_R \Omega_{B,\underline{\tau}}^1$$

qui, par la proposition 2.4.4, admet comme noyau

$$I_A^{(2)\underline{\sigma}} \otimes_R P_B + P_A \otimes_R I_B^{(2)\underline{\tau}} + I_A^{(1)\underline{\sigma}} \otimes_R I_B^{(1)\underline{\tau}}$$

du fait que les applications considérées sont surjectives et que les modules en jeu sont plats sur l'anneau de base. Par la proposition 2.2.9

$$\begin{aligned} \Omega_{A \otimes_R B, \underline{\sigma} \cup \underline{\tau}}^1 &= I_{A \otimes_R B}^{(1)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}} / I_{A \otimes_R B}^{(2)\underline{\sigma} \cup \underline{\tau}} \\ &\simeq \left(I_A^{(1)\underline{\sigma}} \otimes_R P_B + P_A \otimes_R I_A^{(1)\underline{\tau}} \right) / \left(I_A^{(2)\underline{\sigma}} \otimes_R P_B + P_A \otimes_R I_B^{(2)\underline{\tau}} + I_A^{(1)\underline{\sigma}} \otimes_R I_B^{(1)\underline{\tau}} \right) \\ &\simeq \Omega_{A,\underline{\sigma}}^1 \otimes_R B \oplus A \otimes_R \Omega_{B,\underline{\tau}}^1. \quad \square \end{aligned}$$

2.5 Dérivations

Nous conservons les hypothèses de la section précédente, c'est à dire : R est un anneau de Huber et $(A, \underline{\sigma})$ est une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d (définition 2.2.1) et, Il existe des éléments $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ qui sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A (définition 2.2.6).

Définition 2.5.1. Soit i un entier compris entre 1 et d . Nous rappelons de [LSQ18b] qu'une σ_i -dérivation D de A est un morphisme R -linéaire de A dans un A -module M qui satisfait la règle de Leibniz déformée :

$$\forall x, y \in A, \quad D(xy) = xD(y) + \sigma_i(y)D(x).$$

Remarque. Notons $(e_i)_{i=1, \dots, d} := ((1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)^*)_{i=1, \dots, d}$ la base de $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1, A)$ duale de la base $(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)_{i=1, \dots, d}$ de $\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1$. Posons

$$d : A \rightarrow \Omega_{A,\underline{\sigma}}^1, \quad f \mapsto \Theta_{A,(1)\underline{\sigma}}(f) - f.$$

Nous utilisons cette application que pour définir

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad \partial_{\underline{\sigma}, i} := e_i \circ d$$

Nous noterons $\mathrm{Der}_{\underline{\sigma}}(A, A)$ le A -module engendré par $\partial_{\underline{\sigma}, 1}, \dots, \partial_{\underline{\sigma}, d}$. Ce module est libre sur A . En effet, étant donné a_1, \dots, a_d des éléments de A tels que

$$\sum_{i=1}^d a_i \partial_{\underline{\sigma}, i} = 0$$

il est possible d'évaluer cette somme en x_1, \dots, x_d , ce qui donne $a_1 = \dots = a_d = 0$. Nous noterons également $\mathrm{T}_{A,\underline{\sigma}} := \mathrm{Der}_{\underline{\sigma}}(A, A)$ et $\mathrm{T}_{A,\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A)$ la catégorie des A -modules munis d'une action par les dérivations.

Lemme 2.5.2. *La formule suivante est vérifiée*

$$\forall f, g \in A, \partial_{\underline{\sigma}, i}(fg) = f\partial_{\underline{\sigma}, i}(g) + (g + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(g))\partial_{\underline{\sigma}, i}(f).$$

Preuve. Par définition des applications $\partial_{\underline{\sigma}, 1}, \dots, \partial_{\underline{\sigma}, d}$ nous disposons du morphisme d'anneaux

$$\Theta_{A, (1)_{\underline{\sigma}}} : A \rightarrow P_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}, f \mapsto f + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(f)\xi_i.$$

Dans $P_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}$ pour $i \neq j$, $\xi_i\xi_j = 0$ et $\sigma_i(\xi_i)\xi_i = 0$ ce qui implique

$$\xi_i(\xi_i + x_i - \sigma_i(x_i)) = 0$$

d'où

$$\xi_i^2 = (\sigma_i(x_i) - x_i)\xi_i.$$

Maintenant pour $f, g \in A$, d'une part $\Theta_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}(fg) = fg + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(fg)\xi_i$ et d'autre part comme c'est un morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \Theta_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}(fg) &= \Theta_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}(f)\Theta_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}(g) \\ &= \left(f + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(f)\xi_i \right) \left(g + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(g)\xi_i \right) \\ &= fg + g \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(f)\xi_i + f \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(g)\xi_i + \sum_{i, j=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(f)\partial_{\underline{\sigma}, j}(g)\xi_i\xi_j \\ &= fg + \sum_{i=1}^d (f\partial_{\underline{\sigma}, i}(g) + g\partial_{\underline{\sigma}, i}(f))\xi_i + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma}, i}(g)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f)(\sigma_i(x_i) - x_i)\xi_i \\ &= fg + \sum_{i=1}^d (f\partial_{\underline{\sigma}, i}(g) + (g + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(g))\partial_{\underline{\sigma}, i}(f))\xi_i \end{aligned}$$

Nous obtenons alors la formule par identification. \square

Remarque. Pour $1 \leq i \leq d$, l'application $\partial_{\underline{\sigma}, i}$ est automatiquement continue comme composante de $\Theta_{A, (1)_{\underline{\sigma}}}$ qui est continue par hypothèse.

Contrairement au cas en une variable traité dans [LSQ20], il n'est pas automatique que les applications canoniques que l'on définit soient des $\underline{\sigma}$ -dérivation. Il est donc nécessaire de rajouter une hypothèse sur nos coordonnées afin que cela soit le cas.

Définition 2.5.3. Les $\underline{\sigma}$ -coordonnées x_1, \dots, x_d sont *classiques* si

$$\forall i = 1 \dots, d, \forall f \in A, \sigma_i(f) = f + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f).$$

Remarque. Lorsque $\sigma_i(x_i) - x_i$ est inversible, nous retrouvons la formule classique

$$\partial_{\underline{\sigma}, i}(f) = \frac{\sigma_i(f) - f}{\sigma_i(x_i) - x_i}.$$

Proposition 2.5.4. *Les $\underline{\sigma}$ -coordonnées x_1, \dots, x_d sont des coordonnées classiques si et seulement si $i \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_{\underline{\sigma}, i}$ est une σ_i -dérivation.*

Preuve. Ce résultat découle de la formule du lemme 2.5.2. \square

Proposition 2.5.5. *Supposons A complète. Si x_1, \dots, x_d sont des bonnes coordonnées étales sur A associées à un bon modèle (u_0, R_0, A_0) telles que pour tout $i = 1, \dots, d$, σ_i est infinitésimal et sur A_0 alors x_1, \dots, x_d sont des coordonnées classiques.*

Preuve. Posons

$$\forall i = 1, \dots, d, \forall f \in A, \sigma'_i(f) = f + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f).$$

Montrons que σ'_i est un morphisme d'anneaux : pour $f, g \in A$

$$\begin{aligned} \sigma'_i(fg) &= fg + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(fg) \\ &= fg + (\sigma_i(x_i) - x_i)(f\partial_{\underline{\sigma}, i}(g) + \sigma'_i(g)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f)) \\ &= f(g + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(g)) + (\sigma_i(x_i) - x_i)\sigma'_i(g)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f) \\ &= (f + (\sigma_i(x_i) - x_i)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f))\sigma'_i(g) \\ &= \sigma'_i(f)\sigma'_i(g). \end{aligned}$$

Nous utilisons ici la formule du lemme 2.5.2. Nous vérifions aisément que

$$\sigma_i|_{R_0[\underline{X}]} = \sigma'_i|_{R_0[\underline{X}]}$$

et que $\sigma'_i = \sigma_i \bmod ((\sigma_i - \text{Id})(A_0))$. Nous pouvons alors appliquer la proposition 2.3.8 pour obtenir que $\sigma_i = \sigma'_i$. \square

La définition suivante est une définition générale provenant du calcul différentiel classique

Définition 2.5.6. La R -algèbre de Huber déformée d'ordre d , A munie de $\underline{\partial} = (\partial_{\underline{\sigma}, 1}, \dots, \partial_{\underline{\sigma}, d})$ est dite *déformée d'ordre d de type Schwarz* si les relations suivantes sont vérifiées

$$\forall i, j = 1, \dots, d, \partial_{\underline{\sigma}, i} \circ \partial_{\underline{\sigma}, j} = \partial_{\underline{\sigma}, j} \circ \partial_{\underline{\sigma}, i} \text{ et } \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i,$$

$$\forall i \neq j, \sigma_i \circ \partial_{\underline{\sigma}, j} = \partial_{\underline{\sigma}, j} \circ \sigma_i.$$

Proposition 2.5.7. *Si les $\underline{\sigma}$ -coordonnées x_1, \dots, x_d sont classiques et pour tout $i = 1, \dots, d$, $\sigma_i(x_i) \in R[x_i]$ alors pour tout $i \neq j$, $\partial_{\underline{\sigma}, j}(\sigma_i(x_i)) = 0$.*

Preuve. Posons $\sigma_i(x_i) = \sum_{k=1}^m a_k x_i^k$ avec $a_k \in R$. Il est alors possible d'effectuer le calcul en utilisant la R -linéarité et la propriété de la dérivation

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{\sigma}, j}(\sigma_i(x_i)) &= \partial_{\underline{\sigma}, j} \left(\sum_{k=1}^m a_k x_i^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \partial_{\underline{\sigma}, j}(x_i^k) \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel k et tout $i \neq j$, $\partial_{\underline{\sigma},j}(x_i^k) = 0$. Pour $k = 0$, c'est l'astuce classique

$$\partial_{\underline{\sigma},i}(1) = \partial_{\underline{\sigma},i}(1 \cdot 1) = 2\partial_{\underline{\sigma},i}(1),$$

d'où $\partial_{\underline{\sigma},i}(1) = 0$. Supposons la propriété vérifiée pour un entier naturel k et montrons qu'elle reste vraie au rang $k + 1$. Comme les coordonnées sont supposées classiques, nous avons

$$\partial_{\underline{\sigma},j}(x_i^{k+1}) = \partial_{\underline{\sigma},j}(x_i^k \cdot x_i) = x_i^k \partial_{\underline{\sigma},j}(x_i) + \sigma_j(x_i) \partial_{\underline{\sigma},j}(x_i^k) = 0. \quad \square$$

Proposition 2.5.8. *Si les $\underline{\sigma}$ -coordonnées x_1, \dots, x_d sont classiques et pour tout $i = 1, \dots, d$, $\sigma_i(x_i) \in R[x_i]$ alors A est une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d de type Schwarz.*

Preuve. Le fait que les endomorphismes σ_i commutent est vrai par hypothèse. Démontrons alors que les dérivées commutent entre elles. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{d} & P_A & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_2} \\ \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{p_1} \end{array} & P_A \otimes'_A P_A \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{\Theta}_{A,(2)\underline{\sigma}} & & \downarrow \tilde{\Theta}_{A,(1)\underline{\sigma}} \otimes \tilde{\Theta}_{A,(1)\underline{\sigma}} \\ A & \xrightarrow{\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id}} & P_{A,(2)\underline{\sigma}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{p'_2} \\ \xrightarrow{\delta_{1,1}} \\ \xrightarrow{p'_1} \end{array} & P_{A,(1)\underline{\sigma}} \otimes'_A P_{A,(1)\underline{\sigma}} \end{array}$$

où l'on a noté en haut

$$d : A \rightarrow P_A, \quad a \mapsto 1 \otimes a - a \otimes 1,$$

$$p_1 : P_A \rightarrow P_A \otimes'_A P_A, \quad a \otimes b \mapsto a \otimes b \otimes 1 \otimes 1$$

$$\text{et } p_2 : P_A \rightarrow P_A \otimes'_A P_A, \quad a \otimes b \mapsto 1 \otimes 1 \otimes a \otimes b.$$

Par analogie en bas nous avons noté p'_2 et p'_1 les morphismes associés au morphisme $P_{A,(2)\underline{\sigma}} \rightarrow P_{A,(1)\underline{\sigma}}$. En haut \otimes'_A indique que l'action à droite se fait via p_1 et que l'action à gauche se fait via p_2 . En bas \otimes'_A indique que l'action à droite se fait via $\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}}$. Posons alors

$$d_1 : = p_2 - \delta + p_1 : P_A \rightarrow P_A \otimes'_A P_A$$

et

$$d_2 : = p'_2 - \delta_{1,1} + p'_1 : P_{A,(2)\underline{\sigma}} \rightarrow P_{A,(1)\underline{\sigma}} \otimes'_A P_{A,(1)\underline{\sigma}}.$$

En calculant, il est facilement obtenu que $d_1 \circ d = 0$ et en utilisant le diagramme commutatif précédent il suit que $d_2 \circ (\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id}) = 0$. Ainsi pour tout $f \in A$

$$\delta_{1,1} ((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)) = p'_1 ((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)) + p'_2 ((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)).$$

En utilisant $P_{A,(2)\underline{\sigma}} \rightarrow P_{A,(1)\underline{\sigma}}$ nous déduisons que l'élément $(\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)$ peut être écrit sous la forme suivante

$$\sum_i \partial_{\underline{\sigma},i}(f)\xi_i + \sum_{i<j} g_{i,j}\xi_i\xi_j + \sum_i g_i\xi_i^{(2)\underline{\sigma}}$$

où les g_i et $g_{i,j}$ sont des éléments de A . D'où

$$\delta_{1,1}((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)) = \delta_{1,1}\left(\sum_i \partial_{\underline{\sigma},i}(f)\xi_i + \sum_{i<j} g_{i,j}\xi_i\xi_j + \sum_i g_i\xi_i^{(2)\underline{\sigma}}\right).$$

En utilisant le fait que $\xi_i^{(2)\underline{\sigma}} = \xi_i(\xi_i + x_i - \sigma_i(x_i)) = 0$ dans $P_{A,(1)\underline{\sigma}}$ il découle que :

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}(\xi_i^{(2)\underline{\sigma}}) &= \delta_{1,1}(\xi_i(\xi_i + x_i - \sigma_i(x_i))) = \delta_{1,1}(\xi_i^2 + (x_i - \sigma_i)\xi_i) \\ &= (1 \otimes' \xi_i + \xi_i \otimes' 1)^2 + (x_i - \sigma_i(x_i))\xi_i \otimes' 1 + (x_i - \sigma_i(x_i)) \otimes' \xi_i \\ &= \xi_i^2 \otimes' 1 + 2(\xi_i \otimes' \xi_i) + 1 \otimes' \xi_i^2 + (x_i - \sigma_i(x_i))\xi_i \otimes' 1 + (x_i - \sigma_i(x_i)) \otimes' \xi_i \\ &= -(x_i - \sigma_i(x_i))\xi_i \otimes' 1 + (2\xi_i) \otimes' \xi_i + 1 \otimes' \xi_i^2 + (x_i - \sigma_i(x_i))\xi_i \otimes' 1 \\ &\quad + (x_i - \sigma_i(x_i)) \otimes' \xi_i \\ &= (2\xi_i) \otimes' \xi_i - 1 \otimes' (x_i - \sigma_i(x_i))\xi_i + (x_i - \sigma_i(x_i)) \otimes' \xi_i \\ &= (2\xi_i) \otimes' \xi_i - d(x_i - \sigma_i(x_i)) \otimes' \xi_i \\ &= (2\xi_i) \otimes' \xi_i - \xi_i \otimes' \xi_i + d(\sigma_i(x_i)) \otimes' \xi_i \\ &= (\xi_i + d(\sigma_i(x_i))) \otimes' \xi_i \\ &= (\xi_i + \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_i(x_i))\xi_i) \otimes' \xi_i \\ &= (1 + \partial_{i,\underline{\sigma}}(\sigma_i(x_i)))\xi_i \otimes' \xi_i. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}(\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f) &= \delta_{1,1}\left(\sum_i \partial_{\underline{\sigma},i}(f)\xi_i + \sum_{i<j} g_{i,j}\xi_i\xi_j + \sum_i g_i\xi_i^{(2)\underline{\sigma}}\right) \\ &= \sum_i \partial_{\underline{\sigma},i}(f)(\xi_i \otimes' 1 + 1 \otimes' \xi_i) + \sum_{i<j} g_{i,j}\xi_i \otimes' \xi_j + \sum_{i>j} g_{j,i}\xi_i \otimes' \xi_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^d g_j \left(1 + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_j(x_j))\right) \xi_i \otimes' \xi_j \\ &= \sum_i \partial_{i,\underline{\sigma}}(f)\xi_i \otimes' 1 + \sum_j \partial_{\underline{\sigma},j}(f) \otimes' \xi_j + \sum_{i<j} (g_{i,j} + g_j \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_j(x_j)))\xi_i \otimes' \xi_j \\ &\quad + \sum_{i>j} (g_{j,i} + g_j \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_j(x_j)))\xi_i \otimes' \xi_j + \sum_{i=1}^d g_i(1 + \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_i(x_i)))\xi_i \otimes' \xi_i. \end{aligned}$$

Nous avons encore utilisé le fait que $\xi_i\xi_j = \xi_i^{(2)\underline{\sigma}} = 0$ dans $P_{A,(1)\underline{\sigma}}$. De l'autre côté, il est possible de calculer $p'_1((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f))$ et $p'_2((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f))$. Ce qui nous donne tout simplement

$$p'_1((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)) = \sum_i \partial_{\underline{\sigma},i}(f)\xi_i \otimes' 1$$

et

$$\begin{aligned}
p'_2((\Theta_{A,(2)\underline{\sigma}} - \text{Id})(f)) &= \sum_j 1 \otimes' \partial_{\underline{\sigma},j}(f) \xi_j \\
&= \sum_j \Theta_{A,(1)\underline{\sigma}}(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) \otimes' \xi_j \\
&= \sum_j \left(\partial_{\underline{\sigma},j}(f) + \sum_i \partial_{\underline{\sigma},i}(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) \xi_i \right) \otimes' \xi_j \\
&= \sum_j \partial_{\underline{\sigma},j}(f) \otimes' \xi_j + \sum_{i < j} \partial_{\underline{\sigma},i}(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) \xi_i \otimes' \xi_j + \sum_{i > j} \partial_{\underline{\sigma},j}(\partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \xi_i \otimes' \xi_j + \sum_i \partial_{j,\underline{\sigma}}^2(f) \xi_i \otimes' \xi_i.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients cela implique les conditions suivantes

$$\forall i < j, g_{ij} = \partial_{\underline{\sigma},i}(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_j(x_j)) g_j = \partial_{\underline{\sigma},j}(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) - \partial_{\underline{\sigma},j}(\sigma_i(x_i)) g_i$$

et

$$\forall i, (1 + \partial_{\underline{\sigma},i}(\sigma_i(x_i))) g_i = \partial_{i,\underline{\sigma}}^2(f).$$

Le fait que pour tout i , $\sigma_i(x_i) \in R[x_i]$ nous assure que

$$\forall i \neq j, \partial_{\underline{\sigma},j}(f)(\sigma_i(x_i)) = 0.$$

Pour démontrer que les dérivées commutent avec les endomorphismes σ_i il est possible de se servir de la formule de la définition 2.5.3. Nous avons d'un côté

$$\sigma_i(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) = \partial_{\underline{\sigma},j}(f) + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(\partial_{\underline{\sigma},j}(f)) = \partial_{\underline{\sigma},j}(f) + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},j}(\partial_{\underline{\sigma},i}(f)).$$

Et de l'autre,

$$\begin{aligned}
\partial_{\underline{\sigma},j}(\sigma_i(f)) &= \partial_{\underline{\sigma},j}(f + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \\
&= \partial_{\underline{\sigma},j}(f) + \partial_{\underline{\sigma},j}((\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \\
&= \partial_{\underline{\sigma},j}(f) + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},j}(\partial_{\underline{\sigma},i}(f)) + \sigma_j(\partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \partial_{\underline{\sigma},j}(\sigma_i(x_i) - x_i) \\
&= \partial_{\underline{\sigma},j}(f) + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},j}(\partial_{\underline{\sigma},i}(f)). \quad \square
\end{aligned}$$

La proposition suivante assure qu'étant donné des coordonnées classiques sur l'anneau de polynômes, alors ces mêmes coordonnées sont toujours classiques sur une localisation rationnelle de l'anneau de polynômes. Par exemple, si l'on a des dérivations déformées associées à nos endomorphismes, alors en passant de l'anneau de polynômes à une poly-couronne, nous sommes toujours assurés d'avoir des dérivations déformées associées aux prolongements de nos endomorphismes. Nous sommes donc dans une situation analogue à celle du cas non déformé.

Proposition 2.5.9. *Supposons que A est complète. Soit x_1, \dots, x_d des bonnes $\underline{\sigma}$ -coordonnées étales classiques, gentilles et transverses associées à un bon modèle (R_0, A_0) . Supposons que pour $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i est infinitésimal sur A_0 . Soit f_0, \dots, f_r des éléments de A qui engendrent un idéal ouvert de A . Si $A\{\underline{f}/f_0\}$ est une localisation rationnelle régulière de A et pour tout $i = 1, \dots, d$*

$$\sigma_i(f_0) \in A(\underline{f}/f_0)^\times \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, r\}, \sigma_i(f_j)/\sigma_i(f_0) \in A(\underline{f}/f_0)^0,$$

alors x_1, \dots, x_d sont des coordonnées classiques sur $A\{\underline{f}/f_0\}$.

Preuve. La proposition 2.3.12 nous assure que pour $i = 1, \dots, d$, l'endomorphisme σ_i se prolonge en un endomorphisme $\tilde{\sigma}_i$ de $A\{\underline{f}/f_0\}$ tel que x_1, \dots, x_d sont des $\tilde{\sigma}$ -coordonnées sur $A\{\underline{f}/f_0\}$. Rappelons qu'en tant qu'anneaux nous avons $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right) = A[1/f_0]$. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$, pour étendre la σ_i -dérivation $\partial_{\underline{\sigma}, i}$ en une $\tilde{\sigma}_i$ -dérivation $\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}$ il faut pouvoir vérifier la règle de Leibniz déformée et donc avoir

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}\left(\frac{1}{f_0}f_0\right) &= \tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}\left(\frac{1}{f_0}\right)f_0 + \tilde{\sigma}_i\left(\frac{1}{f_0}\right)\partial_{\underline{\sigma}, i}(f_0) \\ &= \tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}\left(\frac{1}{f_0}\right)f_0 + \frac{1}{\sigma_i(f_0)}\partial_{\underline{\sigma}, i}(f_0).\end{aligned}$$

Cependant, cette quantité doit être nulle, ceci implique l'égalité suivante

$$\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}\left(\frac{1}{f_0}\right) = \frac{-\partial_{\underline{\sigma}, i}(f_0)}{\sigma_i(f_0)f_0}.$$

L'opérateur ainsi défini est bien un prolongement de $\partial_{\underline{\sigma}, i}$ à $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$ et est unique par nécessité de vérifier l'égalité ci-dessus. Montrons alors que cet opérateur est continu afin de le prolonger à $A\{\underline{f}/f_0\}$. Par hypothèse, l'endomorphisme σ_i est continu. Si I_0 est un idéal de définition de A alors il existe un entier naturel m tel que $\sigma_i(I_0^m) \subset I_0$. De plus, une base de voisinage de 0 de $A\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{f_0}\right)$ est donnée par $(J_n)_{n \in \mathbb{N}} := (I_0^n A_0[f_1/f_0, \dots, f_r/f_0])_{n \in \mathbb{N}}$. Montrons par récurrence que

$$\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}(J_{m+1}) \subset J_1.$$

Soit $\frac{1}{f_0^n}ab_1b_2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a \in A_0$, $b_1 \in I_0^m$ et $b_2 \in I_0$. Alors,

$$\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}\left(\frac{1}{f_0^n}ab_1b_2\right) = \tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}\left(\frac{1}{f_0^n}\right)ab_1b_2 + \frac{1}{\sigma_i(f_0^n)}(\partial_{\underline{\sigma}, i}(ab_1)b_2 + \sigma_i(a)\sigma_i(b_1)\partial_{\underline{\sigma}, i}(a_2))$$

C'est ce que l'on voulait démontrer. Encore par récurrence, $\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}(J_{N(m+1)}) \subset J_N$ pour tout entier naturel N . L'opérateur $\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}$ est bien continu. Par complétion, il se prolonge à $A\{\underline{f}/f_0\}$ et c'est automatiquement par continuité une $\tilde{\sigma}_i$ -dérivation. Nous vérifions aisément que l'opérateur $\tilde{\partial}_{\tilde{\sigma}, i}$ ainsi défini est égal à l'opérateur $\partial_{\tilde{\sigma}, i}$. Le fait que les coordonnées \underline{x} soient des coordonnées classiques sur $A\{\underline{f}/f_0\}$ découle du prolongement par continuité et de la manière dont sont définis nos opérateurs. \square

Définition 2.5.10. Des $\underline{\sigma}$ -coordonnées x_1, \dots, x_d , sont dites *symétriques* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in A, \delta_{n, m}(\Theta_{A, (n+m)\underline{\sigma}}(f)) = 1 \otimes' \Theta_{A, (m)\underline{\sigma}}(f).$$

Ici \otimes' indique que l'action à gauche se fait via $\Theta_{A, (n)\underline{\sigma}}$.

Proposition 2.5.11. *Supposons que les coordonnées sont symétriques. Posons*

$$\begin{aligned}\delta: P_A &\rightarrow P_A \otimes_A P_A \\ a \otimes b &\mapsto a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b\end{aligned}$$

alors

$$\delta\left(I_A^{(n+m+1)\underline{\sigma}}\right) \subset I_A^{(n+1)\underline{\sigma}} \otimes P_A + P_A \otimes I_A^{(m+1)\underline{\sigma}}.$$

Preuve. Afin d'obtenir l'inclusion voulue, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_A & \xrightarrow{\delta} & P_A \otimes_A P_A \\ \tilde{\Theta}_{A,(n+m)\underline{\sigma}} \downarrow & & \downarrow \tilde{\Theta}_{A,(n)\underline{\sigma}} \otimes \tilde{\Theta}_{A,(m)\underline{\sigma}} \\ P_{A,(n+m)\underline{\sigma}} & \xrightarrow{\delta_{n,m}} & P_{A,(n)\underline{\sigma}} \otimes_A P_{A,(m)\underline{\sigma}} \end{array}$$

Les coordonnées étant supposés symétriques c'est automatique. Cela implique que

$$\delta \left(I_A^{(n+m+1)\underline{\sigma}} \right) \subset \ker \left(\tilde{\Theta}_{A,(n)\underline{\sigma}} \otimes \tilde{\Theta}_{A,(m)\underline{\sigma}} \right).$$

L'inclusion souhaitée provient alors du lemme 2.4.4 □

Définition 2.5.12. Lorsque les coordonnées \underline{x} sont classiques, une *connexion déformée* sur un A -module M est la donnée d'une application

$$\nabla_{\underline{\sigma}} : M \rightarrow M \otimes_A \Omega_{\underline{\sigma}}^1$$

qui vérifie que l'application

$$\theta_M : M \rightarrow M \otimes_A P_{A,(1)\underline{\sigma}}, \quad s \rightarrow s \otimes 1 + \nabla_{\underline{\sigma}}(s)$$

est $\Theta_{A,(1)\underline{\sigma}}$ -linéaire :

$$\forall f \in A, \forall s \in M, \theta_M(fs) = \Theta_{A,(1)\underline{\sigma}}(f)\theta_M(s).$$

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\Omega_{\underline{\sigma}}^n = \bigwedge^n \Omega_{\underline{\sigma}}^1$. Une connexion déformée $\nabla_{\underline{\sigma}}$ sur un A -module M se prolonge en une suite d'applications A -linéaires

$$\nabla_{n,\underline{\sigma}} : M \otimes_A \Omega_{\underline{\sigma}}^n \rightarrow M \otimes_A \Omega_{\underline{\sigma}}^{n+1}$$

en posant $\nabla_{n,\underline{\sigma}}(m \otimes w) = m \otimes d(w) + \nabla_{\underline{\sigma}}(m) \wedge (-1)^n w$.

Définition 2.5.13. Une connexion déformée $\nabla_{\underline{\sigma}}$ sur A -module M est dite *intégrable* si $\nabla_{2,\underline{\sigma}} \circ \nabla_{\underline{\sigma}} = 0$.

Remarque. Sur un A -module M , il est possible de construire le complexe de de Rham

$$\mathrm{DR}(A) = [M \rightarrow M \otimes_A \Omega_{\underline{\sigma}}^1 \rightarrow M \otimes_A \Omega_{\underline{\sigma}}^2 \rightarrow \dots].$$

La cohomologie de de Rham est la cohomologie de ce complexe.

Nous notons par $\nabla_{\underline{\sigma}}^{\mathrm{Int}}\text{-Mod}(A)$ l'ensemble des A -modules muni d'une connexion déformée.

Proposition 2.5.14. Lorsque les coordonnées x_1, \dots, x_d sont classiques, il existe une équivalence de catégories

$$\nabla_{\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A) \simeq \mathrm{T}_{A,\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A).$$

Preuve. Construisons dans un premier temps un foncteur

$$\nabla_{\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A) \rightarrow \mathbb{T}_{A,\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A).$$

Soit M un A -module muni d'une connexion déformée $\nabla_{\underline{\sigma}}$. Pour un élément s de M nous écrivons

$$\nabla_{\underline{\sigma}}(s) = \sum_{i=1}^d \nabla_i(s) \otimes \xi_i.$$

La condition sur θ_M se traduit de la manière suivante : pour tout $f \in A$, $s \in M$

$$fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d \nabla_i(fs) \otimes \xi_i = \left(f \otimes 1 + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f)(1 \otimes \xi_i) \right) \left(s \otimes 1 + \sum_{i=1}^d \nabla_i(s) \otimes \xi_i \right)$$

Développons alors le terme de droite

$$\begin{aligned} fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d f \nabla_i(s) \otimes \xi_i + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f)s \otimes \xi_i + \left(\sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f)(1 \otimes \xi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^d \nabla_i(s) \otimes \xi_i \right) \\ = fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d (f \nabla_i(s) + \partial_{\underline{\sigma},i}(f)s) \otimes \xi_i + \sum_{i,j=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f) \nabla_j(s) \otimes \xi_i \xi_j. \end{aligned}$$

Rappelons les relations suivantes dans $\Omega_{A,\underline{\sigma}}^1$

$$\xi_i \xi_j = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } \xi_i^2 = (\sigma_i(x_i) - x_i) \xi_i.$$

Ainsi,

$$\sum_{i,j=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f) \nabla_j(s) \otimes \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^d (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f) \nabla_i(s) \otimes \xi_i.$$

Par identification, pour $i = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned} \nabla_i(fs) &= f \nabla_i(s) + \partial_{\underline{\sigma},i}(f)s + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f) \nabla_i(s) \\ &= \partial_{\underline{\sigma},i}(f)s + (f + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \nabla_i(s) \\ &= \partial_{\underline{\sigma},i}(f)s + \sigma_i(f) \nabla_i(s). \end{aligned}$$

Ainsi étant donné une connexion déformée $\nabla_{\underline{\sigma}}$ nous retrouvons des σ_i -dérivations. Et donc, une action par $\mathbb{T}_{A,\underline{\sigma}}$. Nous pouvons maintenant construire un foncteur inverse

$$\mathbb{T}_{A,\underline{\sigma}}\text{-Mod} \rightarrow \nabla_{\underline{\sigma}}\text{-Mod}(A).$$

Supposons que M soit muni d'une action par les dérivations canoniques $\partial_{\underline{\sigma},1}, \dots, \partial_{\underline{\sigma},d}$.

Posons $\nabla_{\underline{\sigma}}(s) = \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(s) \otimes \xi_i$. Nous souhaitons alors vérifier que l'application induite

θ_M est $\Theta_{A,(1)\underline{\sigma}}$ -linéaire.

$$\begin{aligned}
\Theta_{A,(1)\underline{\sigma}}(f)\theta_M(s) &= \left(f + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f)(1 \otimes \xi_i) \right) \left(s \otimes 1 + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(s) \otimes \xi_i \right) \\
&= fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d (f \partial_{\underline{\sigma},i}(s) + s \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \otimes \xi_i + \sum_{i,j=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(f) \partial_{\underline{\sigma},i}(s) \otimes \xi_i \xi_j \\
&= fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d (f \partial_{\underline{\sigma},i}(s) + s \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \otimes \xi_i + \sum_{i=1}^d (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f) \partial_{\underline{\sigma},i}(s) \otimes \xi_i \\
&= fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d ((f + (\sigma_i(x_i) - x_i) \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \partial_{\underline{\sigma},i}(s) + s \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \otimes \xi_i \\
&= fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d (\sigma_i(f) \partial_{\underline{\sigma},i}(s) + s \partial_{\underline{\sigma},i}(f)) \otimes \xi_i \\
&= fs \otimes 1 + \sum_{i=1}^d \partial_{\underline{\sigma},i}(fs) \otimes \xi_i = \theta_M(fs).
\end{aligned}$$

Nous obtenons deux foncteurs qui sont bien inverses l'un de l'autre. \square

2.6 Opérateurs différentiels déformés de niveau infini

Nous conservons les hypothèses de la section précédente, c'est à dire : R est un anneau de Huber et $(A, \underline{\sigma})$ est une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d (définition 2.2.1). Il existe des éléments $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ qui sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées sur A (définition 2.2.6). Nous supposons de plus que les coordonnées x_1, \dots, x_d sont symétriques (définition 2.5.10). Cette hypothèse intervient afin de pouvoir définir la composée d'opérateurs différentiels déformés.

Définition 2.6.1. Soit M un A -module et N un A -module. Un *opérateur différentiel déformé d'ordre au plus n* est un morphisme $\phi : M \rightarrow N$ R -linéaire dont la A -linéarisation $\tilde{\phi}$ se factorise par $P_{A,(n)\underline{\sigma}}$. Ce qui donne le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
& & \tilde{\phi} & & \\
& & \curvearrowright & & \\
P_A \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & A \otimes_R M & \xrightarrow{\quad} & N \\
& \searrow & & \swarrow & \\
& & P_{A,(n)\underline{\sigma}} \otimes'_A M & &
\end{array}$$

où \otimes'_A désigne le fait que l'action à gauche se fait par $\Theta_{A,(n)\underline{\sigma}}$. Cela se traduit par le fait que $\tilde{\phi}$ est nul sur $I_A^{(n+1)\underline{\sigma}}$. Notons $\text{Diff}_{n,\underline{\sigma}}(M, N)$ l'ensemble des opérateurs différentiels déformés d'ordre au plus n .

Par définition $\text{Diff}_{n,\underline{\sigma}}(M, N) \simeq \text{Hom}_A(P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \otimes'_A M, N)$. Dans le cas où $M = N$ nous noterons simplement $\text{Diff}_{n,\underline{\sigma}}(M)$. Posons également

$$\text{Diff}_{\underline{\sigma}}(M, N) = \varinjlim_n \text{Hom}_A(P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \otimes'_A M, N) \text{ et } D_{A,\underline{\sigma}}^{(\infty)} = \text{Diff}_{\underline{\sigma}}(A).$$

Rappelons que pour un élément q de R et tout entier naturel n , nous définissons le q -analogue de n comme étant

$$(n)_q := 1 + q + \dots + q^{n-1}.$$

Cet élément vérifie $\lim_{q \rightarrow 1} (n)_q = n$. De manière analogue, il est possible de définir le q -analogue de la factorielle d'un entier naturel n de la manière suivante :

$$(n)_q! := (2)_q \dots (n)_q.$$

Remarques. 1. Une base standard de $\text{Diff}_{n,\underline{\sigma}}(A)$ est la base $\partial_{\underline{\sigma}}^{[k]}$ duale de l'image des $\underline{\xi}^{(k)_{\underline{\sigma}}}$ dans $P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}}$ pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| \leq n$.

2. Soit $\underline{q} = \{q_1, \dots, q_d\}$ des éléments de R . Dans le cas où x_1, \dots, x_d sont des \underline{q} -coordonnées, d'après le corollaire 6.2 de [LSQ18a], la relation suivante est vérifiée

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in A, \partial_{q_i}^k(z) = (k)_{q_i}! \partial_{q_i}^{[k]}(z).$$

Pour $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d)$, posons

$$\partial_{\underline{\sigma}}^{\underline{k}} := \partial_{\sigma_1}^{k_1} \circ \dots \circ \partial_{\sigma_d}^{k_d}.$$

Alors, d'après la relation précédente

$$\partial_{\underline{\sigma}}^{\underline{k}} = (k_1)_{q_1}! \dots (k_d)_{q_d}! \partial_{\underline{\sigma}}^{[k]}. \quad (2.3)$$

Proposition 2.6.2. *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme plat de R -algèbres déformées d'ordre d . Si de plus B est un A -module de présentation finie et $u(x_1), \dots, u(x_d)$ sont des $\underline{\sigma}_B$ -coordonnées alors il existe un isomorphisme*

$$\text{Diff}_{\underline{\sigma}_B}(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \simeq B \otimes_A \text{Diff}_{\underline{\sigma}_A}(M, N).$$

Preuve. Par commutativité du produit tensoriel avec les limites inductives

$$B \otimes_A \text{Diff}_{\underline{\sigma}_A}(M, N) = B \otimes_A \varinjlim \text{Hom}_A(P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \otimes'_A M, N) = \varinjlim B \otimes_A \text{Hom}_A(P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \otimes'_A M, N).$$

Appliquons alors [Bou98, Chapitre 1, Section 2, Sous-section 10, Proposition 11] qui nous permet d'obtenir

$$B \otimes_A \text{Diff}_{\underline{\sigma}_A}(M, N) \simeq \varinjlim \text{Hom}_B(B \otimes_A P_{A,(n)_{\underline{\sigma}}} \otimes'_A M, B \otimes_A N).$$

La proposition 2.2.5 permet de conclure. □

Proposition 2.6.3. *Soient M, N et L des A -modules. Pour deux entiers naturels m et n , étant donné $\varphi \in \text{Diff}_{n,\underline{\sigma}}(M, N)$ et $\psi \in \text{Diff}_{m,\underline{\sigma}}(L, M)$ alors $\varphi \circ \psi \in \text{Diff}_{m+n,\underline{\sigma}}(L, N)$. En particulier, $\text{Diff}_{\underline{\sigma}}(M)$ est un sous-anneau de $\text{Hom}_R(M)$.*

Preuve. Soit $\varphi : M \rightarrow N$ un opérateur différentiel déformé d'ordre au plus n et $\psi : L \rightarrow M$ un opérateur différentiel déformé d'ordre au plus m . Nous avons la suite suivante :

$$P_A \otimes_A L \longrightarrow P_A \otimes_A P_A \otimes_A L \xrightarrow{\text{Id} \otimes \tilde{\psi}} P_A \otimes_A M \xrightarrow{\tilde{\varphi}} N.$$

De plus, $\tilde{\varphi}$ se factorise par $P_{A,(n)_\sigma} \otimes'_A M$ et $\text{Id} \otimes \tilde{\psi}$ se factorise par $P_A \otimes_A P_{A,(m)_\sigma} \otimes'_A L$. De ce fait, la composée des deux se factorise par $P_{A,(n)_\sigma} \otimes_A P_{A,(m)_\sigma} \otimes'_A L$. Il résulte de la proposition 2.5.11 que le tout se factorise donc par $P_{A,(n+m)_\sigma} \otimes'_A L$. \square

Proposition 2.6.4. *Les égalités suivantes sont vérifiées*

$$\text{Diff}_{0,\sigma}(A) = A \text{ et } \text{Diff}_{1,\sigma}(A) = A \oplus T_{A,\sigma}.$$

Preuve. Pour la première égalité cela vient juste de la construction et pour la deuxième, il suffit d'utiliser la proposition 2.4.2 et le fait que $T_{A,\sigma}$ est le dual de $\Omega_{A,\sigma}^1$. \square

Dans le cas où x_1, \dots, x_d sont des coordonnées classiques, notons $\overline{D}_{A,\sigma}$ le plus petit sous-anneau de $\text{End}_R(A)$ contenant à la fois A et $T_{A,\sigma}$ et $D_{A,\sigma}$ comme étant l'anneau polynomial non commutatif en $\partial_{\sigma,1}, \dots, \partial_{\sigma,d}$ sur A avec les règles suivantes

$$\forall i \neq j, \partial_{\sigma,i} \circ \partial_{\sigma,j} = \partial_{\sigma,j} \circ \partial_{\sigma,i} \quad (2.4)$$

$$\text{et } \forall a \in A, \partial_{\sigma,i} a = \partial_{\sigma,i}(a) + \sigma_i(a) \partial_{\sigma,i}. \quad (2.5)$$

Proposition 2.6.5. *S'il existe $\underline{q} = \{q_1, \dots, q_d\}$ des éléments de R tels que x_1, \dots, x_d sont des \underline{q} -coordonnées classiques et*

$$\forall i = 1, \dots, d \forall n \in \mathbb{N}, (n)_{q_i} \in R^\times,$$

alors il existe une équivalence de catégories

$$\nabla_{\sigma}^{\text{Int}}\text{-Mod}(A) \simeq D_{A,\sigma}^{(\infty)}\text{-Mod}.$$

Preuve. Cela se déduit de la proposition 2.5.14 et de la formule 2.3. \square

Proposition 2.6.6. *Si x_1, \dots, x_d sont des coordonnées classiques, il existe une factorisation*

$$D_{A,\sigma} \twoheadrightarrow \overline{D}_{A,\sigma} \hookrightarrow D_{A,\sigma}^{(\infty)}.$$

Preuve. L'injection découle de la proposition 2.6.4. Pour la surjection il suffit de considérer l'application qui pour $i = 1, \dots, d$ envoie $\partial_{\sigma,i}$ sur l'endomorphisme de A correspondant. Du fait que les coordonnées soient symétriques et classiques, les conditions 2.4 et 2.5 sont satisfaites, qui nous assure que cette application est bien définie et est automatiquement surjective par définition de $T_{A,\sigma}$. \square

2.7 Séries de Taylor déformées

Nous énonçons ici les hypothèses qui seront utilisées tout au long de cette section : R est un anneau de Huber, $(A, \underline{\sigma})$ est une R -algèbre de Huber déformée d'ordre d (définition 2.2.1). Nous supposons également être doté d'éléments $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ qui sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées classiques et symétriques (définitions 2.2.6, 2.5.3 et 2.5.10). Toutes les propositions énoncées dans cette section se démontrent de la même manière que dans [LSQ18a, Section 5].

Notons $\widehat{P}_{\underline{\sigma}} := \varprojlim P_A/I_A^{(n+1)\underline{\sigma}}$. Cet ensemble diffère de la complétion topologique usuelle d'algèbre de Huber de $P_A = A \otimes_R A$.

Lemme 2.7.1. *Si M est un $D_{A, \underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module, alors l'application canonique*

$$D_{A, \underline{\sigma}}^{(\infty)} \rightarrow \text{End}_R(M)$$

induit pour tout entier naturel n , une application

$$\text{Diff}_{n, \underline{\sigma}}(A) \rightarrow \text{Diff}_{n, \underline{\sigma}}(M).$$

Il existe alors, en passant à la limite, une application $\widehat{P}_{\underline{\sigma}}$ -linéaire

$$D_{A, \underline{\sigma}}^{(\infty)} \rightarrow \text{Diff}_{\underline{\sigma}}(M).$$

Preuve. Le lecteur pourra se référer à [LSQ18a, Lemma 5.1]. □

On désignera par φ_M l'image de $\varphi \in D_{A, \underline{\sigma}}^{(\infty)}$ dans $\text{Diff}_{\underline{\sigma}}(M)$.

Définition 2.7.2. Une *structure de Taylor déformée* sur A -module M est une famille d'applications A -linéaires compatibles $\theta_n : M \rightarrow M \otimes'_A P_{A, (n)\underline{\sigma}}$ appelée *applications de Taylor*, telles que $\theta_0 = \text{Id}$, et qui rendent les diagrammes suivant commutatifs

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_m} & M \otimes'_A P_{A, (m)\underline{\sigma}} \\ \theta_{n+m} \downarrow & & \downarrow \theta_n \otimes \text{Id} \\ M \otimes'_A P_{A, (n+m)\underline{\sigma}} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \delta_{n, m}} & M \otimes'_A P_{A, (n)\underline{\sigma}} \otimes'_A P_{A, (m)\underline{\sigma}} \end{array}$$

Proposition 2.7.3. *Soit M un A -module muni d'une structure de Taylor déformée $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors il existe une unique structure de $D_{A, \underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module sur M telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n(s) = \sum s_k \otimes f_k \in M \otimes_A P_{A, (n)\underline{\sigma}} \Rightarrow \forall \varphi \in \text{Diff}_{n, \underline{\sigma}}(A), \varphi_M(s) = \sum \tilde{\varphi}(f_k) s_k.$$

Preuve. Le lecteur pourra se référer à [LSQ18a, Proposition 5.3]. □

Définition 2.7.4. Soit M un A -module muni d'une structure de Taylor déformée. Alors l'application de Taylor déformée de M est l'application

$$\hat{\theta} = \varprojlim \theta_n : M \rightarrow M \widehat{\otimes}_A \widehat{P}_{\underline{\sigma}} := \varprojlim M \otimes_A P_{A, (n)\underline{\sigma}}.$$

Proposition 2.7.5. *Si M est un $D_{A,\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module, pour tout entier naturel n ,*

$$\theta_n(s) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d, |\underline{k}| \leq n} \partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s) \otimes \underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}}$$

et

$$\hat{\theta}(s) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} \partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s) \otimes \underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}}$$

Preuve. Par la Proposition 2.7.3, si l'on écrit

$$\theta_n(s) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d, |\underline{k}| \leq n} s_{\underline{k}} \otimes \underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}}$$

alors pour tout $\underline{l} \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{l}]}(s) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d, |\underline{k}| \leq n} \tilde{\partial}_{\underline{\sigma}}^{[\underline{l}]} \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \right) s_{\underline{k}} = s_{\underline{l}}. \quad \square$$

2.8 Opérateurs différentiels de rayon fini

Nous énonçons ici les hypothèses qui seront utilisées tout au long de cette section : R est un anneau de Tate, $(A, \underline{\sigma})$ est une R -algèbre de Huber noethérienne complète (en particulier A est un anneau de Tate et donc muni d'une norme ultramétrique) déformée d'ordre d (définition 2.2.1). Il existe éléments x_1, \dots, x_d qui sont des $\underline{\sigma}$ -coordonnées classiques et symétriques (définitions 2.2.6, 2.5.3 et 2.5.10). Nous fixons une norme ultramétrique $\| \cdot \|$ qui définit la topologie de A . Cette norme sera supposée contractante (définition 1.1.9) par rapport aux endomorphismes $\sigma_1, \dots, \sigma_d$.

Remarques. 1. Si A est un anneau muni d'une norme sous-multiplicative $\| \cdot \|$ alors tout A -module M de type fini peut être muni d'une semi-norme. Si l'on se donne une famille génératrice (e_1, \dots, e_m) de M , il est possible de définir la semi-norme de M comme suit

$$\forall x \in M, \|x\|_M = \inf_{x = \sum_{i=1}^m a_i e_i} \left\{ \sum_{i=1}^m \|a_i\| \right\}.$$

Le lecteur pourra se référer à la section 2 de [KL15] pour plus de détails.

2. Dans la suite il sera nécessaire de supposer que les modules de type fini sur A considérés sont complets afin que les limites que l'on souhaite regarder existent. C'est le cas sous les hypothèses avec lesquelles nous travaillons. D'autres hypothèses possibles auraient été de demander qu'il existe un anneau de définition A_0 de A qui noethérien et que A est de type fini sur A_0 ou que le module M considéré soit plat de présentation finie sur A .

Définition 2.8.1. Le \underline{x} -rayon de $\underline{\sigma} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$ est

$$\rho(\underline{\sigma}) = \max_{1 \leq i \leq d} \|x_i - \sigma_i(x_i)\|.$$

Lemme 2.8.2. *Si nous posons $\underline{\sigma}^n = \{\sigma_1^n, \dots, \sigma_d^n\}$ alors,*

$$\rho(\underline{\sigma}^n) \leq \rho(\underline{\sigma})$$

Preuve. Par récurrence sur n ,

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq d} \|x_i - \sigma_i^{n+1}(x_i)\| &\leq \max \left\{ \sup_{1 \leq i \leq d} \|x_i - \sigma_i^n(x_i)\|, \sup_{1 \leq i \leq d} \|\sigma_i^n(x_i - \sigma_i(x_i))\| \right\} \\ &\leq \max \{ \rho(\underline{\sigma}^n), \rho(\underline{\sigma}) \} = \rho(\underline{\sigma}). \end{aligned}$$

La dernière inégalité est ici obtenue en utilisant la contractivité de la norme par rapport aux endomorphismes $\sigma_1, \dots, \sigma_d$. \square

Soit $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \eta < 1$. Posons

$$A \{ \underline{\xi}/\eta \} = \left\{ \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} z_{\underline{n}} \underline{\xi}^{\underline{n}}, z_{\underline{n}} \in A \text{ et } \|z_{\underline{n}}\| \eta^{|\underline{n}|} \rightarrow 0 \text{ quand } |\underline{n}| \rightarrow \infty \right\}.$$

C'est une algèbre de Banach pour la norme sup

$$\left\| \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} z_{\underline{n}} \underline{\xi}^{\underline{n}} \right\|_{\eta} = \max \|z_{\underline{n}}\| \eta^{|\underline{n}|}.$$

Le lecteur pourra se référer à la section 2.2 de [KL15] pour plus de détails. Nous remarquerons que c'est également un anneau de Tate.

Lemme 2.8.3. *Si $\eta \geq \rho(\underline{\sigma})$, alors l'application A -linéaire*

$$\underline{\xi}^{\underline{n}} \mapsto \underline{\xi}^{(\underline{n})\underline{\sigma}}$$

est un automorphisme isométrique du A -module $A \{ \underline{\xi}/\eta \}$.

Preuve. Rappelons que pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$,

$$\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} = \prod_{i=1}^d \prod_{j=0}^{k_i-1} (\xi_i + x_i - \sigma_i^j(x_i)) = \xi_1^{k_1} \dots \xi_d^{k_d} + f_{\underline{k}}.$$

avec $f_{\underline{k}} \in A[\underline{\xi}]_{<|\underline{k}|}$. Par le lemme 2.8.2, pour tout entier naturel j et tout $1 \leq i \leq d$, $\|x_i - \sigma_i^j(x_i)\| \leq \eta$. Il s'ensuit que $\|f_{\underline{k}}\|_{\eta} \leq \eta^{(\sum k_i)} = \eta^{|\underline{k}|}$ et par suite que $\left\| \underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \right\|_{\eta} = \eta^{|\underline{k}|}$.

Ainsi, l'unique endomorphisme A -linéaire de $A[\underline{\xi}]$ qui envoie $\underline{\xi}^{\underline{k}}$ sur $\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}}$ est une isométrie qui préserve le degré. Il s'étend donc de manière unique en une isométrie de $A \{ \underline{\xi}/\eta \}$ dans lui-même. \square

Définition 2.8.4. Une *base de Schauder orthogonale* pour un A -module normé est une famille $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de M telle que tout élément s de M peut être écrit de manière unique comme une série convergente

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} z_n s_n$$

avec $z_n \in A$ et $\|s\| = \sup \{ \|z_n\| \|s_n\| \}$.

Proposition 2.8.5. Soit M un A -module normé et $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base de Schauder orthogonale de M . Si, N est un A -module de type fini alors tout élément f de $N \otimes_A M$ peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum f_i \otimes s_i$$

où $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de N .

Preuve. Par hypothèse, pour un certain entier naturel n il existe un morphisme surjectif

$$A^n \rightarrow N.$$

Nous en déduisons donc un morphisme surjectif

$$M^n \simeq (A \otimes_A M)^n \simeq (A^n \otimes_A M) \rightarrow N \otimes_A M.$$

Ce qui conclut notre démonstration. \square

Proposition 2.8.6. Lorsque $\eta \geq \rho(\underline{\sigma})$, $\{\underline{\xi}^{(n)\underline{\sigma}}\}_{n \in \mathbb{N}^d}$ est une base de Schauder orthogonale pour le A -module $A \{\underline{\xi}/\eta\}$.

Preuve. Cela découle directement du lemme 2.8.3 et du fait que la famille $\{\underline{\xi}^{\underline{k}}\}_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d}$ est une base de Schauder orthogonale de $A \{\underline{\xi}/\eta\}$. \square

Proposition 2.8.7. Si $\eta \geq \rho(\underline{\sigma})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme de A -algèbres

$$A \{\underline{\xi}/\eta\} / \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \text{ avec } \underline{k} \in \mathbb{N}^d \text{ tels que } |\underline{k}| = n + 1 \right) \simeq P_{A, (n)\underline{\sigma}}.$$

Preuve. Par la proposition 2.2.4

$$P_{A, (n)\underline{\sigma}} = A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \text{ avec } \underline{k} \in \mathbb{N}^d \text{ tels que } |\underline{k}| = n \right) \simeq A[\underline{\xi}]_{\leq n}.$$

Posons, avec un léger abus de notation, $I_n := \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \text{ avec } \underline{k} \in \mathbb{N}^d \text{ tels que } |\underline{k}| = n + 1 \right)$ l'idéal engendré par ces éléments dans $P_{A, (n)\underline{\sigma}}$ et $A \{\underline{\xi}/\eta\}$. La preuve se conclut en considérant l'application suivante

$$A[\underline{\xi}]_{\leq n} \simeq A[\underline{\xi}]/I_n \rightarrow A \{\underline{\xi}/\eta\} / I_n$$

qui est bijective par la proposition 2.8.6. \square

Corollaire 2.8.8. Si $\eta \geq \rho(\underline{\sigma})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout A -module M de type fini, il existe une injection canonique

$$M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \rightarrow M \otimes_A \widehat{P}_{\underline{\sigma}}.$$

Preuve. Par la proposition 2.8.7, pour tout $n \in \mathbb{N}^d$ il existe une application

$$A \{\underline{\xi}/\eta\} \rightarrow A \{\underline{\xi}/\eta\} / \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}}, |\underline{k}| = n + 1 \right) \simeq P_{A, (n)\underline{\sigma}}.$$

En passant à la limite puis en tensorisant avec M nous obtenons une application $M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \rightarrow M \otimes_A \widehat{P}_\sigma$. Il reste à montrer que cette application est injective. L'injectivité de cette application se traduit par le fait que

$$\forall \sum s_i \otimes f_i \in M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\}; \forall \underline{n} \in \mathbb{N}^d, \sum s_i \otimes f_i = 0 \text{ mod } \underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} \Rightarrow \sum s_i \otimes f_i = 0.$$

Or, cela découle directement du fait que $\{\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma}\}_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d}$ est une base de Schauder de $A \{\underline{\xi}/\eta\}$ et de la proposition 2.8.5. \square

Définition 2.8.9. Soit M un $D_{A,\sigma}^{(\infty)}$ -module de type fini complet sur A et $\eta \in \mathbb{R}$

1. Soit $s \in M$ alors
 - (a) s est η -convergent si

$$\|\partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s)\| \eta^{|\underline{k}|} \rightarrow 0 \text{ quand } |\underline{k}| \rightarrow \infty,$$

- (b) le *rayon de convergence* de s est

$$\text{Rad}(s) = \sup \{ \eta, s \text{ est } \eta\text{-convergent} \},$$

- (c) s est η^\dagger -convergent si $\text{Rad}(s) \geq \eta$.
2. M est η -convergent si tous les éléments de M le sont,
3. le *rayon de convergence* de M est

$$\text{Rad}(M) = \inf_{s \in M} \text{Rad}(s)$$

4. M est η^\dagger -convergent si tous les éléments de M le sont.

Remarques. 1. Nous avons la formule suivante

$$\text{Rad}(M) = \inf_{s \in M} \limsup_{|\underline{k}| \rightarrow \infty} \|\partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s)\|^{-\frac{1}{|\underline{k}|}}.$$

2. Si s (resp. M) est η -convergent alors s (resp. M) est η^\dagger -convergent.

Lemme 2.8.10. Soit M un $D_{A,\sigma}^{(\infty)}$ -module de type fini complet sur A et $\eta \geq \rho(\sigma)$. Un élément s de M est η -convergent si et seulement sa série de Taylor déformée

$$\widehat{\theta}(s) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} \partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s) \otimes \underline{\xi}^{(\underline{k})\sigma}$$

est un élément de $M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \subset M \otimes_A \widehat{P}_\sigma$.

Preuve. D'après la proposition 2.8.6, $(\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma})_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d}$ est une base de Schauder de $A \{\underline{\xi}/\eta\}$. Nous utilisons à nouveau ici la proposition 2.8.5 pour conclure. \square

Proposition 2.8.11. Soit M un $D_{A,\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module de type fini complet sur A et $\eta \geq \rho(\underline{\sigma})$. Le module M est η -convergent si et seulement l'application de Taylor déformée se factorise de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{\theta}} & M \otimes_A \widehat{P}_\sigma \\ & \searrow \theta_\eta & \uparrow \\ & & M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \end{array}$$

Preuve. Le résultat découle directement du lemme 2.8.10. \square

Définition 2.8.12. L'application θ_η est appelée *application de Taylor déformée de rayon η* .

Proposition 2.8.13. La η -convergence pour les $D_{A,\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module de type fini complet sur A est stable par quotient et sous-objet si ces derniers sont eux-mêmes de type fini et complet sur A .

Preuve. La preuve est identique à celle de [LSQ20, Proposition 3.5]. \square

Définition 2.8.14. La structure de A -module sur $A \{\underline{\xi}/\eta\}$ induite par l'application de Taylor déformée de rayon η est appelée *structure à droite*. Nous noterons dans ce cas là $A \{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'$ – pour signifier que nous utilisons la structure à droite sur le côté gauche du produit tensoriel :

$$f \otimes' z s = \theta_\eta(z) f \otimes' s.$$

Remarque. Si A est η -convergent, il est possible de linéariser l'application de Taylor déformée de rayon η pour obtenir une application A -linéaire

$$\tilde{\theta}_\eta : P_A \rightarrow A \{\underline{\xi}/\eta\}$$

qui induit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow \theta & \downarrow \theta_\eta & \searrow \hat{\theta} & \\ A[\underline{\xi}] & \longrightarrow & P_A & \xrightarrow{\tilde{\theta}_\eta} & A \{\underline{\xi}/\eta\} & \longrightarrow & \widehat{P}_\sigma \end{array} \quad (2.6)$$

où θ est définie comme

$$\theta : A \rightarrow P_A, f \mapsto 1 \otimes f.$$

Lemme 2.8.15. Soient M et N deux A -modules de type fini, l'application

$$M \rightarrow A \{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M, s \mapsto 1 \otimes' s$$

induit une application P_A -linéaire injective

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-cont}}(A \{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-cont}}(M, N).$$

Preuve. Par le diagramme 2.6 l'inclusion de $A[\underline{\xi}]$ dans $A\{\underline{\xi}/\eta\}$ se factorise comme

$$A[\underline{\xi}] \rightarrow P_A \xrightarrow{\tilde{\theta}_\eta} A\{\underline{\xi}/\eta\}.$$

L'image de $\tilde{\theta}_\eta$ est donc dense dans $A\{\underline{\xi}/\eta\}$. De plus, pour un morphisme A -linéaire et continu $\psi : A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M \rightarrow N$, le diagramme suivant est commutatif par construction

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_R M & \longrightarrow & P_A \otimes'_A M & \xrightarrow{\tilde{\theta}_\eta \otimes' \text{Id}} & A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M & \xrightarrow{\psi} & N \\ & & & \swarrow i & \uparrow & \searrow \bar{\psi} & \\ & & & & M & & \end{array}$$

où $\bar{\psi} := \psi \circ (\tilde{\theta}_\eta \otimes' \text{Id}) \circ i$ et

$$\begin{array}{ccc} i : M & \longrightarrow & P_A \otimes'_A M \\ s & \longmapsto & 1 \otimes s. \end{array}$$

Ainsi, par densité de $\tilde{\theta}_\eta$, dans $A\{\underline{\xi}/\eta\}$, l'application suivante est injective

$$\text{Hom}_{A\text{-cont}}(A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M, N) \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-cont}}(M, N), \quad \psi \mapsto \psi \circ (\tilde{\theta}_\eta \otimes' \text{Id}) \circ i. \quad \square$$

Définition 2.8.16. Soient M et N deux A -module de type fini, une application R -linéaire $\varphi : M \rightarrow N$ est appelée *opérateur différentiel de rayon η* si elle s'étend en une application A -linéaire continue $\tilde{\varphi}_\eta : A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M \rightarrow N$ appelée η -linéarisation.

Nous noterons $\text{Diff}_\sigma^{(\eta)}(M, N)$ l'ensemble des opérateurs différentiels de rayon η .

Remarque. Soient M et N deux A -modules de type fini. L'ensemble $\text{Hom}_{R\text{-cont}}(M, N)$ des morphismes R -linéaires continus entre M et N est un P_A -module pour l'action définie par

$$\forall \psi \in \text{Hom}_{R\text{-cont}}(M, N), \quad \forall a, b \in A, \quad \forall x \in M \quad (a \otimes b) \cdot \psi(x) = a\psi(bx).$$

Proposition 2.8.17. Soient M et N deux A -module de type fini. L'ensemble $\text{Diff}_\sigma^{(\eta)}(M, N)$ est un P_A -sous-module de $\text{Hom}_{R\text{-cont}}(M, N)$ contenant $\text{Diff}_\sigma^{(\infty)}(M, N)$ et

$$\text{Hom}_{A\text{-cont}}(A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M, N) \simeq \text{Diff}_\sigma^{(\eta)}(M, N).$$

Preuve. Il est possible de définir l'action de P_A sur $\text{Hom}_{A\text{-cont}}(A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M, N)$. Pour un élément φ de $\text{Diff}_\sigma^{(\eta)}(M, N)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A\{\underline{\xi}/\eta\} \otimes'_A M & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\eta} & N \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ M & & \end{array}$$

où l'application canonique π est P_A -linéaire. Ainsi, $(a \otimes b) \cdot \varphi = \pi((a \otimes b) \cdot \tilde{\varphi}_\eta)$. Ce qui nous assure que $\text{Diff}_\sigma^{(\eta)}(M, N)$ est un P_A -sous-module de $\text{Hom}_{R\text{-cont}}(M, N)$. Il contient $\text{Diff}_\sigma^{(\infty)}(M, N)$ car nous avons une surjection de $A\{\underline{\xi}/\eta\}$ dans $P_{A, (n)_\sigma}$ pour tout entier naturel n . L'isomorphisme se déduit directement de la définition. \square

Dans la suite, nous munissons $A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\}$ de la norme définie par

$$\forall f \in A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\}, \|f\| := \inf_{f = \sum a_i \otimes b_i} \max \|a_i\|_\eta \|b_i\|_\eta.$$

Proposition 2.8.18. *L'application δ_η définie par*

$$\delta_\eta : A \{\underline{\xi}/\eta\} \rightarrow A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}_A, \xi_i \mapsto \xi \otimes' 1 + 1 \otimes' \xi_i$$

fait commuter le diagramme suivant pour tout entiers naturels $m' < m$ et $n' < n$:

$$\begin{array}{ccccccc} P_A & \longrightarrow & A \{\underline{\xi}/\eta\} & \longrightarrow & P_{A,(m+n)_\sigma} & \longrightarrow & P_{A,(m'+n')_\sigma} \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta_\eta & & \downarrow \delta_{m,n} & & \downarrow \delta_{m',n'} \\ P_A \widehat{\otimes}'_A P_A & \longrightarrow & A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\} & \longrightarrow & P_{A,(m)_\sigma} \widehat{\otimes}'_A P_{A,(n)_\sigma} & \longrightarrow & P_{A,(m')_\sigma} \widehat{\otimes}'_A P_{A,(n')_\sigma} \end{array}$$

De plus, δ_η est un morphisme de R -algèbre de Huber de norme 1.

Preuve. Par passage à la limite, nous obtenons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A \{\underline{\xi}/\eta\} & \longrightarrow & \widehat{P}_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\} & \longrightarrow & \varprojlim P_{A,(m)_\sigma} \widehat{\otimes}_A P_{A,(n)_\sigma} \end{array}$$

L'unicité ainsi que le fait que δ_η soit un morphisme d'anneaux provient alors de la proposition 2.5.11 et du fait que l'application $A \{\underline{\xi}/\eta\} \rightarrow \widehat{P}_\sigma$ est injective. Pour l'existence, il suffit de poser $\delta_\eta(\xi_i) = 1 \otimes' \xi_i + \xi_i \otimes' 1$ et de vérifier que l'application ainsi définie fait bien commuter le diagramme. Elle est bien définie et de norme 1 car $\|\delta_\eta(\xi_i)\|_\eta = \eta$. \square

Proposition 2.8.19. *Le A -module $\text{Hom}_{A\text{-cont}}(A \{\underline{\xi}/\eta\}, A)$ est une R -algèbre de Banach pour la multiplication définie par*

$$\psi \phi : A \{\underline{\xi}/\eta\} \xrightarrow{\delta_\eta} A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \xrightarrow{\text{Id} \otimes' \phi} A \{\underline{\xi}/\eta\} \xrightarrow{\psi} A.$$

Proposition 2.8.20. *Les opérateurs différentiels de rayon η sont stables par composition et $\|\varphi \circ \psi\|_\eta \leq \|\varphi\|_\eta \|\psi\|_\eta$.*

Preuve. Soit $\varphi : M \rightarrow N$ et $\psi : L \rightarrow M$ deux opérateurs différentiels déformés de rayon η . Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} P_A \widehat{\otimes}'_A L & \xrightarrow{\delta} & P_A \widehat{\otimes}'_A P_A \widehat{\otimes}'_A L & \xrightarrow{\text{Id} \otimes' \tilde{\psi}} & P_A \widehat{\otimes}'_A M & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A L & \xrightarrow{\delta_\eta} & A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A L & \xrightarrow{\text{Id} \otimes' \tilde{\psi}_\eta} & A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A M & \xrightarrow{\tilde{\phi}_\eta} & N \end{array}$$

où la ligne du haut est exactement $\widetilde{\phi \circ \psi}$. Les opérateurs différentiels déformés de rayon η sont donc bien stables par composition. Par sous-multiplicativité de la norme, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|\phi \circ \psi\|_\eta \leq \|(\widetilde{\phi \circ \psi})_\eta\| \leq \|\tilde{\phi}_\eta\| \|\text{Id} \otimes' \tilde{\psi}_\eta\| \|\delta_\eta\| = \|\tilde{\phi}_\eta\| \|\tilde{\psi}_\eta\| = \|\phi\|_\eta \|\psi\|_\eta. \quad \square$$

Proposition 2.8.21. *Soit M un A -module de type fini et $\theta_\eta : M \rightarrow M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\}$ une application A -linéaire par rapport à la structure à droite de $A \{\underline{\xi}/\eta\}$. Alors θ_η est une application de Taylor déformée de rayon η si et seulement le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_\eta} & M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \\ \downarrow \theta_\eta & & \downarrow \theta_\eta \otimes \text{Id} \\ M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \delta_\eta} & M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \widehat{\otimes}'_A A \{\underline{\xi}/\eta\} \end{array}$$

Preuve. Supposons que le module M soit muni d'une application de Taylor déformée de rayon η . Il est donc muni d'une structure de Taylor déformée. Par la proposition 2.8.11, l'application de Taylor déformée se factorise par $M \otimes_A A \{\underline{\xi}/\eta\}$ et l'application θ_η . La proposition 2.8.18 implique la commutativité du diagramme et permet de conclure. La réciproque se déduit également directement de cette proposition en suivant le même raisonnement. \square

Définition 2.8.22. *L'anneau des opérateurs différentiels de rayon η est*

$$D_\sigma^{(\eta)} := \text{Diff}_{A,\sigma}^{(\eta)}(A, A).$$

Remarque. Nous munissons $D_\sigma^{(\eta)}$ d'une norme définie de la façon suivante :

$$\|\varphi\|_\eta := \|\tilde{\varphi}_\eta\| := \sup_{f \neq 0} \frac{\|\tilde{\varphi}_\eta(f)\|}{\|f\|}.$$

Corollaire 2.8.23. *Il existe un isomorphisme canonique de A -module de Banach*

$$D_\sigma^{(\eta)} \simeq \text{Hom}_{A\text{-cont}}(A \{\underline{\xi}/\eta\}, A).$$

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $K^{[n]}$ le sous-module engendré par tous les $\partial_\sigma^{[k]}$ tels que $|k| \geq n$ et

$$\widehat{D}_\sigma^{(\infty)} = \varprojlim D_{A,\sigma}^{(\infty)} / K^{[n]}.$$

Ce n'est pas un anneau en général, cependant, nous avons la description suivante

$$\widehat{D}_\sigma^{(\infty)} := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}^d} z_k \partial_\sigma^{[k]}, z_k \in A \right\}.$$

Par dualité, le diagramme 2.6 induit la suite d'inclusion suivante :

$$D_\sigma^{(\infty)} \rightarrow D_\sigma^{(\eta)} \rightarrow \widehat{D}_\sigma^{(\infty)}.$$

où l'application de droite est explicitement donnée par

$$\varphi \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \tilde{\varphi}_\eta \left(\underline{\xi}^{(k)\sigma} \right) \partial_\sigma^{[k]}.$$

Proposition 2.8.24. *L'application injective $D_{A,\underline{\sigma}}^{(\eta)} \rightarrow \widehat{D}_{A,\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ induit un isomorphisme isométrique de A -module de Banach*

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \rightarrow \left\{ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} z_{\underline{k}} \partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}, \exists C > 0, \forall \underline{k} \in \mathbb{N}^d, \|z_{\underline{k}}\| \leq C \eta^{|\underline{k}|} \right\}$$

pour la norme sup

$$\left\| \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} z_{\underline{k}} \partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]} \right\|_{\eta} = \sup \{ \|z_{\underline{k}}\| / \eta^{|\underline{k}|} \}.$$

Preuve. Soit $\varphi \in D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$, comme $\tilde{\varphi}_{\eta}$ est continue, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$

$$\left\| \tilde{\varphi}_{\eta} \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \right) \right\| \leq \|\tilde{\varphi}_{\eta}\| \left\| \underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \right\| = \|\tilde{\varphi}_{\eta}\| \eta^{|\underline{k}|}.$$

L'application d'injection $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \rightarrow \widehat{D}_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ a son image contenue dans l'ensemble considéré et est de norme au plus 1. Donnons nous un élément $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} w_{\underline{k}} \partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}$ de norme au plus C dans le membre de droite. Par la proposition 2.8.17, pour toute suite $(z_{\underline{k}})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d}$ d'éléments de A vérifiant $\|z_{\underline{k}}\| \eta^{|\underline{k}|} \rightarrow 0$, il existe un unique $\varphi \in D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$ tel que

$$\tilde{\varphi}_{\eta} \left(\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} z_{\underline{k}} \underline{\xi}^{(\underline{k})\underline{\sigma}} \right) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} z_{\underline{k}} w_{\underline{k}} \in A$$

du fait que $\|z_{\underline{k}} w_{\underline{k}}\| \leq C \|z_{\underline{k}}\| \eta^{|\underline{k}|} \rightarrow 0$. Cela implique également que $\|\varphi\| \leq C$. Cela définit une application inverse qui est bien une isométrie. \square

Proposition 2.8.25. *La structure de $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -module sur un module η -convergent de type fini complet sur A s'étend canoniquement en une structure de $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$ -module.*

Preuve. Considérons l'application $A \{ \underline{\xi} / \eta \}$ -linéaire naturelle

$$\begin{aligned} M \otimes_A A \{ \underline{\xi} / \eta \} &\longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(A \{ \underline{\xi} / \eta \}, A), M) \\ s \otimes f &\longmapsto (\psi \mapsto \psi(f)s). \end{aligned}$$

L'application de Taylor déformée de rayon η se linéarise alors pour obtenir une application $A \{ \underline{\xi} / \eta \} \otimes' M \rightarrow M \otimes A \{ \underline{\xi} / \eta \}$. En composant, cela donne une application $A \{ \underline{\xi} / \eta \}$ -linéaire

$$A \{ \underline{\xi} / \eta \} \otimes'_A M \rightarrow \text{Hom}_A(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}, M)$$

ou, de manière équivalente, une application $A \{ \underline{\xi} / \eta \}$ -linéaire

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \rightarrow \text{Hom}_A(A \{ \underline{\xi} / \eta \} \otimes' M, M) = D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}(M, M).$$

C'est un morphisme d'anneaux par la proposition 2.8.21. Et par construction, cette application est compatible avec l'application

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)} \rightarrow D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}(M, M)$$

qui donne l'action de $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ sur M . \square

Proposition 2.8.26. *Si M est un $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$ -module complet et de type fini sur A , alors M est η^\dagger -convergent.*

Preuve. Nous devons montrer ici que M est η' -convergent pour tout $\eta' < \eta$. Par le lemme 4.1.2 de [Ber96], M est un $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$ module topologique. Autrement dit, pour tous éléments s de M , l'application

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \rightarrow M, \varphi \mapsto \varphi(s)$$

est A -linéaire continue. Cela se traduit par le fait qu'il existe une constante C telle que pour tout $\varphi \in D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)}$, $\|\varphi(s)\| \leq C\|\varphi\|\|s\|$. Ainsi $\forall \underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $\|\partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s)\| \leq C\|s\|/\eta^{|\underline{k}|}$ et donc $\|\partial_{\underline{\sigma}}^{[\underline{k}]}(s)\|\eta^{|\underline{k}|} \leq C\|s\| (\eta^{|\underline{k}|}/\eta^{|\underline{k}|}) \rightarrow 0$. Nous avons montré que le module est M est η' convergent pour tout $\eta' < \eta$. \square

Proposition 2.8.27. *Soit τ_1, \dots, τ_d des endomorphismes R -linéaires continus de A qui commutent entre eux. Supposons que x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\tau}$ -coordonnées classiques symétriques et que $\eta \geq \rho(\underline{\tau})$. Alors si A est η convergent par rapport à $\underline{\sigma}$, il est également η -convergent par rapport à $\underline{\tau}$ avec le même morphisme de Taylor déformé que $\underline{\sigma}$.*

Preuve. Nous pouvons considérer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & A \\
 & & & \nearrow \theta & \downarrow \theta_\eta \\
 A[\underline{\xi}] & \hookrightarrow & P_A & \twoheadrightarrow & A\{\underline{\xi}/\eta\} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A[\underline{\xi}]/(\underline{\xi}^{(k)}_{\underline{\tau}}; |\underline{k}| = n+1) & \longrightarrow & P_{A,(n)_{\underline{\tau}}} & & A\{\underline{\xi}/\eta\}/(\underline{\xi}^{(k)}_{\underline{\tau}}; |\underline{k}| = n+1)
 \end{array}$$

(où θ_η est l'application de Taylor déformée de rayon η par rapport à $\underline{\sigma}$). Le diagramme étant commutatif, la composition des applications verticales à droite ne dépend pas de $\underline{\sigma}$. De plus, par hypothèses $\eta \geq \rho(\underline{\tau})$, ainsi l'application

$$A[\underline{\xi}]/(\underline{\xi}^{(k)}_{\underline{\tau}}, |\underline{k}| = n+1) \rightarrow A\{\underline{\xi}/\eta\}/(\underline{\xi}^{(k)}_{\underline{\tau}}, |\underline{k}| = n+1)$$

est un isomorphisme par la proposition 2.8.7. En passant à la limite, nous obtenons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & & A \\
 & \nearrow \theta & \downarrow \theta_\eta \\
 P_A & & A\{\underline{\xi}/\eta\} \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 \widehat{\widehat{P}}_{\underline{\tau}} & &
 \end{array}$$

Il suit alors de la proposition 2.8.11 que A est η -convergent par rapport à $\underline{\tau}$ et que θ_η est l'application de Taylor déformée de rayon η par rapport à $\underline{\tau}$. \square

Proposition 2.8.28. *La structure d'anneau de $\text{Hom}_{A\text{-cont}}(A\{\underline{\xi}/\eta\}, A)$ ne dépend pas de $\underline{\sigma}$.*

Preuve. Cela découle de la multiplication définie sur le A -module $\text{Hom}_{A\text{-cont}}(A\{\underline{\xi}/\eta\}, A)$ dans le corollaire 2.8.19 et de la proposition 2.8.27. \square

Théorème 2.8.29. *Soit τ_1, \dots, τ_d des endomorphismes R -linéaires continus de A qui commutent entre eux. Supposons que x_1, \dots, x_d sont des $\underline{\tau}$ -coordonnées classiques symétriques et que $\eta \geq \rho(\underline{\tau})$. Alors, il existe un isomorphisme isométrique A -linéaire de R -algèbres*

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \simeq D_{\underline{\tau}}^{(\eta)}.$$

qui ne dépend que de x_1, \dots, x_d .

Preuve. Cela résulte de la proposition précédente et du fait que l'isomorphisme

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \simeq \text{Hom}_{A\text{-cont}}(A\{\underline{\xi}/\eta\}, A)$$

est A -linéaire. \square

Il est en particulier possible d'appliquer ce théorème dans le cas où

$$\forall i = 1, \dots, d, \tau_i = \text{Id}_A.$$

Corollaire 2.8.30. *Si x_1, \dots, x_d sont des coordonnées étales alors il existe un isomorphisme isométrique A -linéaire de R -algèbres*

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta)} \simeq D_{\underline{\text{Id}}}^{(\eta)}$$

où $D_{\underline{\text{Id}}}^{(\eta)}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels de rayon η où $\underline{\text{Id}} = (\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A)$.

Définition 2.8.31. L'anneau des opérateurs différentiels déformés de rayon η^\dagger est

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)} = \varinjlim_{\eta' < \eta} D_{\underline{\sigma}}^{(\eta')}.$$

Proposition 2.8.32. *La catégorie des $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}$ -modules qui sont de type fini et complet sur A est équivalente à la sous-catégorie des $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -modules η^\dagger -convergent de type fini et complet sur A .*

Preuve. Il suffit d'appliquer les propositions 2.8.25 et 2.8.26. \square

Théorème 2.8.33. *Soient τ_1, \dots, τ_d des endomorphismes R -linéaires continus de A tels que x_1, \dots, x_d sont également des $\underline{\tau}$ -coordonnées. Si $\eta > \rho(\underline{\tau})$, alors les catégories des $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -modules, complet et de type fini sur A , qui sont η^\dagger -convergent par rapport à $\underline{\sigma}$ et $\underline{\tau}$ sont équivalentes.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.8.29 et la Proposition 2.8.32. \square

Tout comme dans [ADV04] afin d'avoir le q -analogue de l'exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n)_q!}$, nous sommes intéressés par le cas où les q -analogues des entiers sont inversibles.

Définition 2.8.34. Lorsqu'il existe $\underline{q} = \{q_1, \dots, q_d\}$ des éléments de R tels que x_1, \dots, x_d sont des \underline{q} -coordonnées classiques et

$$\forall i = 1, \dots, d; \forall n \in \mathbb{N}, (n)_{q_i} \in R^\times.$$

alors un A -module M de type fini complet muni d'une connexion déformée $\nabla_{\underline{\sigma}}$ est dit η^\dagger -convergent lorsque son image dans la catégorie des $D_{\underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -modules (voir proposition 2.6.5) est η^\dagger -convergent.

Nous noterons $\nabla_{\underline{\sigma}}^{\text{Int-Mod}}_{\text{tf}}(\eta^\dagger)(A)$ la catégorie des A -modules de type fini et complet, munis d'une connexion déformée intégrable qui sont η^\dagger -convergent et $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\text{-Mod}_{\text{tf}}(A)$ la catégorie des $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}$ -modules qui sont complets et de type fini sur A . La cohomologie de cette catégorie est celle donnée par $\text{Ext}_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}}(A, \cdot)$. Nous noterons également

$$\text{SP}\left(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right) = \text{Hom}_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}}\left(\text{DR}\left(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right), D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right).$$

Théorème 2.8.35. *Supposons qu'il existe des éléments $\underline{q} = \{q_1, \dots, q_d\}$ de R tels que x_1, \dots, x_d sont des \underline{q} -coordonnées classiques symétriques et tous les entiers q_i -adiques sont inversibles dans R . Alors, si de plus, A est η^\dagger -convergent, nous avons l'équivalence de catégories suivantes*

$$\nabla_{\underline{\sigma}}\text{-Mod}_{\text{tf}}(\eta^\dagger)(A) \simeq D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\text{-Mod}_{\text{tf}}(A).$$

De plus cette équivalence est compatible avec les cohomologies.

Preuve. Par la proposition 2.6.5, la catégorie des A -modules finis munis d'une connexion déformée intégrable $\nabla_{\underline{\sigma}}$ est équivalente à la catégorie des $D_{A, \underline{\sigma}}^{(\infty)}$ -modules finis sur A . Nous avons ici utilisé l'hypothèse sur les éléments q_1, \dots, q_d . L'équivalence découle alors directement de la proposition 2.8.32. Il nous reste à montrer que cette équivalence est compatible avec les cohomologies des deux côtés. La suite $\partial_{\underline{\sigma}, 1}, \dots, \partial_{\underline{\sigma}, d}$ est une suite régulière de $D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}$. Par la proposition 1.4.3 de [Sch13] $\text{SP}\left(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right)$ est une résolution libre de A . Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}}(A, M) &= \text{Hom}_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}}\left(\text{SP}\left(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right), M\right) \\ &= \text{Hom}_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}}\left(\text{SP}\left(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right), D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right) \otimes_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}} M \\ &= \text{DR}\left(D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}\right) \otimes_{D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)}} M \\ &= \text{DR}(M). \end{aligned} \quad \square$$

Nous retrouvons ici une généralisation en plusieurs variables du résultat de [LSQ20]. Ce résultat est dans l'esprit de [ADV04] et [Pul08].

Théorème 2.8.36. *Soit K un corps non archimédien complet de caractéristique 0. Soit A une K -algèbre de Huber et $\underline{q} = (q_1, \dots, q_d)$ des éléments de R tels que pour $i = 1, \dots, d$ tous les q_i -entiers sont inversibles. Si A est η^\dagger -convergente par rapport*

à des q -coordonnées étales, classiques et symétriques, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ avec $\eta \geq \rho(\underline{x})$ alors, on a une équivalence de catégories

$$\nabla_{\underline{\sigma}}^{\text{Int}}\text{-}\widehat{\text{Mod}}_{\text{tf}}^{(\eta^\dagger)}(A) \simeq \nabla_{\underline{\text{Id}}}^{\text{Int}}\text{-}\widehat{\text{Mod}}_{\text{tf}}^{(\eta^\dagger)}(A)$$

compatible avec les cohomologies des deux côtés.

Preuve. Nous sommes dans la situation où il est possible d'appliquer le théorème 2.8.35. Il reste alors à montrer que l'on a un isomorphisme

$$D_{\underline{\sigma}}^{(\eta^\dagger)} \simeq D_{\underline{\text{Id}}}^{(\eta^\dagger)}.$$

Cela découle du corollaire 2.8.30. □

Chapitre 3

Opérateurs différentiels déformés et q -cristaux

Quand on mélange la passion et la frustration, on contrôle plus rien dans l'équation.

Laylow, Poizon, 2020

Table des matières

3.1	δ -anneaux	77
3.2	Puissances divisées et q -PD-enveloppes	79
3.3	q -PD-enveloppes complètes	82
3.4	Hyper q -stratifications	83
3.5	Calcul aux q -différences	89

3.1 δ -anneaux

Dans la suite p désignera un nombre premier.

Définition 3.1.1. Un δ -anneau est une paire (R, δ) où R est un anneau commutatif et $\delta : R \rightarrow R$ est une application telle que $\delta(1) = \delta(0) = 0$ qui satisfait les égalités suivantes :

$$\delta(xy) = x^p\delta(y) + y^p\delta(x) + p\delta(x)\delta(y) \text{ et } \delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{x^p + y^p - (x+y)^p}{p}.$$

Nous dirons alors que R est muni d'une δ -structure.

Remarques. 1. Étant donné un δ -anneau (R, δ) , il est possible de définir le morphisme suivant

$$\phi : R \rightarrow R, x \mapsto x^p + p\delta(x).$$

Les identités satisfaites par δ nous assurent que c'est un morphisme d'anneau qui est un relevé du Frobenius sur R/p . Réciproquement, si R est sans p -torsion,

alors tout relèvement $\phi : R \rightarrow R$ du Frobenius de R/p provient d'une unique δ -structure sur R par la relation suivante :

$$\delta(x) = \frac{\phi(x) - x^p}{p}.$$

2. Pour tout anneau R , l'anneau des *vecteurs de Witt de longueur 2*, $W_2(R)$ est défini de la manière suivante : $W_2(R) := R \times R$ et l'addition et la multiplication sont données par

$$(x, y) + (x', y') := \left(x + x', y + y' + \frac{x^p + (x')^p - (x + x')^p}{p} \right)$$

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx', x^p y' + (x')^p y + pyy').$$

La première projection $\pi_1 : W_2(R) \rightarrow R$ est un morphisme d'anneau. Par définition, donner une δ -structure sur R revient à donner un morphisme d'anneau

$$w : R \rightarrow W_2(R), x \mapsto (x, \delta(x))$$

tel que $\pi_1 \circ w = \text{Id}_R$.

3. La catégorie des δ -anneaux admet toutes les limites et colimites.
4. Un élément x d'un δ -anneau R est dit de *rang 1* si $\delta(x) = 0$.
5. Lorsque R est un δ -anneau, une δ - R -algèbre est une R -algèbre munie d'une δ -structure compatible.

Exemples. 1. Il existe une unique δ -structure sur \mathbb{Z} donnée par

$$\delta(n) = \frac{n - n^p}{p}.$$

2. Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, il existe une unique δ -structure sur $\mathbb{Z}[X]$ telle que $\delta(X) = P$.

Définition 3.1.2. Soit (R, δ) un δ -anneau. Si A est une R -algèbre, sa δ -enveloppe A^δ est la δ - R -algèbre universelle pour les morphismes de R -algèbres dans les δ - R -algèbres.

Remarque. Le foncteur d'oubli des δ - R -algèbres vers les R -algèbres possède un adjoint $A \mapsto A^\delta$ si bien que les δ -enveloppes existent toujours et préservent les colimites. Il est donc préférable de travailler avec une δ -structure car ces dernières sont plus stables que les ϕ -structure. De plus, la catégorie des anneaux sans torsion n'est pas stable : il n'est pas possible, la plupart du temps, d'effectuer des passages au quotient.

Exemple. La δ -enveloppe de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$ est l'anneau de polynômes en une infinité dénombrable de variables $\mathbb{Z}[\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}]$ muni de l'unique δ -structure telle que $\delta(X_i) = X_{i+1}$. En effet, on considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{Z}[\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}]$ défini par $\varphi(n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(X_m) = X_m^p + X_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Le morphisme φ est un Frobenius sur A . L'anneau $\mathbb{Z}[\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}]$ n'a pas de p torsion, nous obtenons donc l'existence d'une δ -structure sur A défini par $\delta(n) = \frac{n - n^p}{p}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\delta(X_m) = X_{m+1}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Une δ -structure est uniquement déterminée par l'action de δ sur les générateurs de l'anneau, ce qui permet de conclure.

Définition 3.1.3. Un δ -idéal d'un δ -anneau (A, δ) est un idéal I qui est stable par δ . En général, la δ -clôture d'un idéal I de A est le plus petit δ -idéal contenant I .

Exemple. L'anneau polynomial $\mathbb{Z}[q]$ est généralement muni de l'unique δ -structure telle que $\delta(q) = 0$. L'idéal engendré par $q - 1$ est alors un δ -idéal.

3.2 Puissances divisées et q -PD-enveloppes

Une notion développée depuis longtemps est celle de *puissances divisées*. Pour un anneau A sans torsion, il est possible de voir A comme un sous-anneau de $A_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Un élément x de A a des *puissances divisées* si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x^{[n]} := \frac{x^n}{n!} \in A.$$

Lorsque A est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre la situation se simplifie car $A_{\mathbb{Q}} = A \left[\frac{1}{p} \right]$ et il est alors suffisant de demander que

$$\forall r \in \mathbb{N}, x^{[p^r]} := \frac{x^{p^r}}{p^{r!}} \in A.$$

Nous disposons du résultat fondamental [BS22, Lemme 2.35] : pour A une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre sans torsion munie d'une structure de Frobenius ϕ (ou de manière équivalente d'une δ -structure) alors

$$\forall x \in A, x^{[p]} \in A \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x^{[n]} \in A.$$

Nous remarquerons que

$$x^{[p]} = \frac{x^p}{p!} = \frac{\phi(x) - p\delta(x)}{p!} = \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{\phi(x)}{p} - \delta(x) \right).$$

Comme $(p-1)!$ est inversible dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et donc dans A , la condition se réécrit sous la forme

$$\frac{\phi(x)}{p} \in A \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x^{[n]} \in A.$$

Le q -analogue de cette condition, lorsque A est une $\mathbb{Z}_{(p)}[q]$ -algèbre sans $(p)_q$ -torsion avec $\delta(q) = 0$, semble donc être naturellement

$$\frac{\phi(x)}{(p)_q} \in A.$$

Le corollaire 2.39 de [BS22] nous dit que si A est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre sans torsion qui a une δ -structure alors, tout idéal I admet une enveloppe à puissances divisées. Lorsque $I = (x_1, \dots, x_r)$ et que x_1, \dots, x_r est suite régulière dans A/p alors dans ce cas l'enveloppe à puissances divisées de I dans A est

$$A \left[\frac{\phi(x_1)}{p}, \dots, \frac{\phi(x_r)}{p} \right]^{\delta}.$$

Il est cependant difficile de décrire explicitement ces anneaux.

Soit d un entier naturel. Dans la suite, nous fixons un δ -anneau R ainsi que q_1, \dots, q_d des éléments de rang 1 de R . L'anneau R peut être vu comme une $\delta\text{-}\mathbb{Z}[q_1, \dots, q_d]$ -algèbre avec $\delta(q_1) = \dots = \delta(q_d) = 0$. L'anneau R est muni d'un Frobenius ϕ qui satisfait

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \phi(q_i) = q_i^p.$$

Soit A une δ - R -algèbre et x_1, \dots, x_d des éléments de rang 1 de A . L'algèbre A est automatiquement munie d'un Frobenius ϕ qui est semi-linéaire par rapport au Frobenius de R et qui satisfait

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \phi(x_i) = x_i^p.$$

Il existe une unique structure de δ - A -algèbre sur l'anneau de polynômes $A[\underline{\xi}]$ telle que pour $i \in \{1, \dots, d\}$, $x_i + \xi_i$ est de rang 1. Cette structure sera appelée δ -symétrique. Elle est donnée par

$$\delta(\xi_i) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{j} x_i^{p-j} \xi_i^j.$$

Cette structure dépend de x_1, \dots, x_d mais pas de q_1, \dots, q_d .

Soit A un anneau de Huber. Notons $A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}$ le A -module libre avec pour générateurs $\underline{\xi}^{[\underline{k}]} = \xi_1^{[k_1]} \dots \xi_d^{[k_d]}$ où $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$.

Proposition 3.2.1. *La règle de multiplication*

$$\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \underline{\xi}^{[\underline{m}]} = \prod_{i=1}^d \sum_{j=0}^{\min(n_i, m_i)} q_i^{j(j-1)/2} \binom{n_i + m_i - j}{n_i}_{q_i} \binom{n_i}{j}_{q_i} (q_i - 1)^j x_i^j \xi_i^{[n_i + m_i - j]}. \quad (3.1)$$

définit une structure de A -algèbre commutative sur $A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}$.

Preuve. Cela découle de [GLQ19, Proposition 2.2]. □

Définition 3.2.2. Soit A un anneau de Huber. L'anneau des polynômes déformés divisés $A\langle\underline{\xi}\rangle_{q_1, \dots, q_d}$ est le A -module libre avec pour générateurs $\underline{\xi}^{[\underline{k}]} = \xi_1^{[k_1]} \dots \xi_d^{[k_d]}$ muni de la règle de multiplication de la proposition 3.2.1.

Remarque. L'égalité suivante est vérifiée

$$A\langle\underline{\xi}\rangle_{q_1, \dots, q_d} = A\langle\underline{\xi}_1\rangle_{q_1} \otimes_A \dots \otimes_A A\langle\underline{\xi}_d\rangle_{q_d} \quad (3.2)$$

Proposition 3.2.3. *Si tous les q_i -entiers sont inversibles dans R alors l'application canonique*

$$\begin{aligned} A[\underline{\xi}] &\rightarrow A\langle\underline{\xi}\rangle_{q_1, \dots, q_d} \\ \underline{\xi}^{(n_1, \dots, n_d)_{\underline{\sigma}}} &\mapsto (n_1)_{q_1}! \dots (n_d)_{q_d}! \xi_1^{[n_1]_{q_1}} \dots \xi_d^{[n_d]_{q_d}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de A -algèbres.

Preuve. Cela découle directement du fait que par la proposition 2.2.4, $(\underline{\xi})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d}^{(k)}$ est une base de $A[\underline{\xi}]$ et par définition $(\underline{\xi}^{[k]})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d}$ est une base de $A\langle \underline{\xi} \rangle_{q_1, \dots, q_d}$. \square

Nous supposons dorénavant que $q_1 = \dots = q_d = q$.

Définition 3.2.4. 1. Si B est une δ - R -algèbre et $J \subset B$ est un idéal, alors (B, J) est une δ -paire.

2. De plus, si, B est sans $(p)_q$ -torsion et

$$\forall f \in J, \phi(f) - (p)_q \delta(f) \in (p)_q J, \quad (3.3)$$

alors (B, J) est une q -PD-paire. Nous dirons également que J est un q -PD-idéal.

Remarques. 1. La condition 3.3 peut être séparée en deux parties : il faut demander que $\phi(J) \subset (p)_q B$ puis demander que l'application

$$\zeta : J \rightarrow B, f \mapsto \frac{\phi(f)}{(p)_q} - \delta(f)$$

vérifie $\zeta(J) \subset J$.

2. Dans le cas où J est un δ -idéal, la condition 3.3 est tout simplement $\phi(J) \subset (p)_q J$.

3. En général, les éléments de J satisfaisant la condition 3.3 forment un idéal et cette condition peut donc être vérifiée sur les générateurs.

Exemple. Nous pouvons munir $A\langle \underline{\xi} \rangle_q$ de l'idéal $I^{[1]}$ engendré par tous les $\underline{\xi}^{[k]}$ pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| \geq 1$. Lorsque A est sans $(p)_q$ -torsion, c'est une q -PD-paire. Le lecteur pourra se référer à [GSQ20] pour plus de détails.

Dans la suite, nous noterons $I^{[n]}$ l'idéal de $A\langle \underline{\xi} \rangle_q$ engendré par tous les $\underline{\xi}^{[k]}$ pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| \geq n$.

Lemme 3.2.5. ([GSQ20, Lemma 3.2])

1. Si (B, J) est une q -PD-paire, B' est un δ -anneau sans $(p)_q$ -torsion et $B \rightarrow B'$ est un morphisme de δ -anneaux alors (B', JB') est une q -PD-paire.

2. La catégorie des δ -paires possède des colimites qui sont données par

$$\varinjlim (B_e, J_e) = (B, J)$$

où $B = \varinjlim B_e$ et $J = \sum J_e B$. Les colimites préservent les q -PD-paires tant qu'elles sont sans $(p)_q$ -torsions. En particulier, dans la catégorie des δ -paires le produit tensoriel est défini par

$$(B_1, J_1) \otimes_{(B, J)} (B_2, J_2) = (B_1 \otimes_B B_2, \text{Im}(B_1 \otimes J_2 + J_1 \otimes_B B_2)).$$

Définition 3.2.6. Soit (B, J) une δ -paire. Si elle existe, la q -PD-enveloppe $(B^{[1]_q}, J^{[1]_q})$ est la q -PD-paire universelle pour les morphismes de q -PD-paires : il existe un morphisme de δ -paire $(B, J) \rightarrow (B^{[1]_q}, J^{[1]_q})$ tel que tout morphisme dans une q -PD-paire $(B, J) \rightarrow (B', J')$ s'étend de manière unique à $(B^{[1]_q}, J^{[1]_q})$.

Remarque. La q -PD-enveloppe ne dépend que de la $\delta - \mathbb{Z}[q]$ -structure sous-jacente, il est possible de prendre $R = B$.

3.3 q -PD-enveloppes complètes

Nous énonçons ici les hypothèses qui seront utilisées tout au long de cette section : R est un δ anneau muni d'un élément q de rang 1. Nous supposons que R est une $\mathbb{Z}[q]_{(p,q-1)}$ -algèbre. Toute R -algèbre B est implicitement munie de la topologie $(p, q-1)$ -adique. Nous noterons \hat{B} son complété pour cette topologie, c'est automatiquement une $\mathbb{Z}_p[[q-1]]$ -algèbre.

Remarques. 1. Pour des éléments q_1, \dots, q_d de R qui sont de rang 1, les égalités suivantes sont vérifiées

$$\widehat{A\langle \xi_1 \rangle_{q_1}} = \left\{ \sum a_i \xi_1^{[i]}, a_i \rightarrow 0 \text{ lorsque } i \rightarrow +\infty \right\}.$$

Ainsi,

$$\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle_q} = \widehat{A\langle \xi_1 \rangle_{q_1}} \hat{\otimes}_A \dots \hat{\otimes}_A \widehat{A\langle \xi_d \rangle_{q_d}}. \quad (3.4)$$

2. Si B est une δ - R -algèbre, alors δ se prolonge par continuité à \hat{B} . Le lecteur pourra se référer à [BS22, Lemma 2.17] pour une preuve.

Définition 3.3.1. Un groupe abélien M a p^∞ -torsion bornée si

$$\exists l \in \mathbb{N}, \forall s \in M, \forall m \in M, p^m s = 0 \Rightarrow p^l s = 0.$$

Définition 3.3.2. Une R -algèbre B est bornée si B est sans $(p)_q$ -torsion et $B/(p)_q B$ a p^∞ -torsion bornée.

Définition 3.3.3. Une δ -paire (B, J) est complète si B est complète et J est fermé. La complétion d'une δ -paire (B, J) est la δ -paire $(\hat{B}, \bar{J}^{\text{cl}})$ où \bar{J}^{cl} dénote la clôture de $J\hat{B}$ dans \hat{B} .

Définition 3.3.4. Si (B, J) est une δ -paire, alors, si elle existe, sa q -PD-enveloppe complète $(B^{\widehat{[1]}}_q, J^{\widehat{[1]}}_q)$ est une q -PD paire complète qui est universelle pour les morphismes de q -PD-paires.

Exemple. Si A est une δ - R -algèbre bornée complète avec un élément x de rang 1 alors $(\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle_q}, \overline{I^{\widehat{[1]}}})^{\text{cl}}$ est la q -PD-enveloppe complète de $(A[\underline{\xi}], (\underline{\xi}))$.

Théorème 3.3.5. Soit A une δ - R -algèbre bornée libre sans $(p)_q$ -torsion et des éléments x_1, \dots, x_d de rang 1. Si $A[\underline{\xi}]$ est muni de la structure δ -symétrique, alors $(\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle_q}, \overline{I^{\widehat{[1]}}})^{\text{cl}}$ est la q -PD-enveloppe complète de $(A[\underline{\xi}], (\underline{\xi}))$. De plus, nous avons l'isomorphisme suivant

$$\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle_q} \simeq A[\xi_1][\phi(\xi_1)/(p)_q]^\delta \otimes \dots \otimes A[\xi_d][\phi(\xi_d)/(p)_q]^\delta.$$

Preuve. Le lemme 3.2.5, la formule 3.2 et le théorème 3.5 de [GSQ20] nous assurent que nous avons bien l'isomorphisme énoncé. Par la formule 3.4, il apparait clairement que pour $1 \leq i \leq d$,

$$\widehat{A\langle \xi_i \rangle_q} = \widehat{A\langle \xi_1 \rangle_q} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \widehat{A\langle \xi_i \rangle_q} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}^i} a_k \xi_i^{[k]}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \right\}$$

est borné, où ξ_i désigne les variables ξ_1, \dots, ξ_i . Nous appliquons alors récursivement le lemme 4.10 de [GSQ20] pour obtenir le résultat. \square

3.4 Hyper q -stratifications

Nous énonçons ici les hypothèses qui auront cours tout au long de cette section : R est une $\mathbb{Z}[\underline{q}]_{(p, \underline{q}-1)}$ -algèbre. Tout R -module sera muni de la topologie $(p, \underline{q}-1)$ -adique. Nous considérons également A une R -algèbre complète munie de \underline{q} -coordonnées classiques $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Cela implique l'existence d'endomorphismes $\underline{\sigma}_{\underline{q}} = \{\sigma_{q_1}, \dots, \sigma_{q_d}\}$ tels que

$$\forall i, j = 1, \dots, d, \sigma_{q_i}(x_j) = \begin{cases} q_i x_i & \text{si } i = j, \\ x_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite, nous noterons $R\{\underline{x}\}$ la complétion de $R[\underline{x}]$ par rapport à la topologie $(p, \underline{q}-1)$ -adique.

De l'application de la proposition 3.2.3 il est possible de construire une application canonique $\varphi : A[\underline{\xi}] \rightarrow \widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}$. De plus,

$$\varphi(\underline{\xi}^n) = (n_1)_{q_1}! \dots (n_d)_{q_d}! \xi_1^{[n_1]_{q_1}} \dots \xi_d^{[n_d]_{q_d}} \rightarrow 0 \text{ quand } |\underline{n}| \rightarrow \infty.$$

Cette application se factorise donc de manière unique par l'*anneau des séries déformées*

$$\varprojlim A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}}}, |\underline{k}| = n + 1 \right).$$

Lemme 3.4.1. *L'isomorphisme d'anneau suivant est vérifié*

$$\varprojlim A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{\sigma}}}, |\underline{k}| = n + 1 \right) \simeq A[[\underline{\xi}]]$$

Preuve. Pour $i = 1, \dots, d$, d'après les q_i -formules de Stirling (voir [Ern12, Définition 99]), pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\xi_i^{(n)_{q_i}} = \sum_{k=1}^n s_{q_i}(n, k) (q_i - 1)^{n-k} x_i^{n-k} \xi_i^k \text{ et } \xi_i^n = \sum_{k=1}^n S_{q_i}(n, k) (q_i - 1)^{n-k} x_i^{n-k} \xi_i^{(k)_{q_i}}$$

où $s_{q_i}(n, k)$ et $S_{q_i}(n, k)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}[q_i]$. Cela implique que

$$\xi_i^{(2n)_{q_i}} \in (\xi_i^n) + ((q_i - 1)^n) \text{ et } \xi_i^{2n} \in \left(\xi_i^{(n)_{q_i}} \right) + ((q_i - 1)^n).$$

En passant au produit cela donne pour $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$

$$\underline{\xi}^{(2n_1, \dots, 2n_d)_{\underline{q}}} \in \prod_{i=1}^d \left(\xi_i^{n_i} + (q_i - 1)^{n_i} \right) \text{ et } \underline{\xi}^{(2n_1, \dots, 2n_d)} \in \prod_{i=1}^d \left(\xi_i^{(n_i)_{q_i}} + (q_i - 1)^{n_i} \right).$$

Cela assure que

$$\underline{\xi}^{(2n_1, \dots, 2n_d)_{\underline{q}}} \in \left(\underline{\xi}^{\underline{k}}, |\underline{k}| \geq n \right) + ((q_1 - 1)^{n_1}, \dots, (q_d - 1)^{n_d})$$

et

$$\underline{\xi}^{(2n_1, \dots, 2n_d)} \in \left(\underline{\xi}^{(\underline{k})_{\underline{q}}}, |\underline{k}| \geq n \right) + ((q_1 - 1)^{n_1}, \dots, (q_d - 1)^{n_d}).$$

L'isomorphisme vient alors du fait que A est $(\underline{q}-1)$ -complète. \square

Définition 3.4.2. La \underline{q} -application de Taylor est la composée

$$\theta : A \xrightarrow{p_2} P_A \rightarrow \varprojlim A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(k)\sigma}, |k| = n + 1 \right) \rightarrow A[[\underline{\xi}]] \rightarrow \widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}.$$

où la deuxième application est tout simplement $\varprojlim \tilde{\Theta}_{A,(n)\sigma_{\underline{q}}}$ où $\tilde{\Theta}_{A,(n)\sigma_{\underline{q}}}$ est la linéarisation de l'application définie dans la définition 2.2.6.

Lemme 3.4.3. *L'application de retournement*

$$\tau : A[\underline{\xi}] \rightarrow A[[\underline{\xi}]]_{\underline{q}}, \quad \begin{cases} f \mapsto \theta(f) & \text{si } f \in A \\ \xi_i \mapsto -\xi_i. \end{cases}$$

vérifie que pour tout $\underline{n} \in (\mathbb{N}^d)^*$

$$\tau \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} \right) = \prod_{i=1}^d \sum_{k=1}^{n_i} (-1)^k q_i^{k(k-1)/2} (1 - q_i)^{n_i - k} (n_i - k)!_{q_i} \binom{n_i - 1}{k - 1}_{q_i} \binom{n_i}{k}_{q_i} x_i^{n_i - k} \xi_i^{(k)\sigma_i}.$$

Preuve. L'application τ est un morphisme de R -algèbres. Cela implique que

$$\tau \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} \right) = \tau \left(\xi_1^{(n_1)\sigma_1} \right) \dots \tau \left(\xi_d^{(n_d)\sigma_d} \right).$$

Le résultat découle alors de la proposition 5.3 de [GSQ20]. \square

Proposition 3.4.4. *Si les coordonnées \underline{x} sont des coordonnées étales alors l'application R -linéaire $\tau' : \widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \rightarrow \widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}$ définie par*

$$f \underline{\xi}^{[\underline{n}]} \mapsto \theta(f) \prod_{i=1}^d \sum_{k=1}^{n_i} (-1)^k q_i^{k(k-1)/2} (1 - q_i)^{n_i - k} \binom{n_i - 1}{k - 1}_{q_i} x_i^{n_i - k} \xi_i^{(k)\sigma_i}.$$

est un automorphisme tel que $\tau' \circ \tau' = \text{Id}_{\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}}$.

Preuve. La preuve est analogue à celle du cas en une variable. Le lecteur pourra se référer à [GSQ20, Proposition 5.4]. Par fonctorialité, il est possible de supposer que $R = \mathbb{Z}[\underline{q}]_{(p, q-1)}$ et $A = R\{\underline{x}\}$. Cette supposition est possible, car tous les calculs nécessaires à cette démonstration ne mettent en jeu que les éléments x_1, \dots, x_d et q_1, \dots, q_d . Dans cette situation, l'anneau A est sans torsion et montrer que

$$\forall \underline{m}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d, \quad \tau' \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \underline{\xi}^{[\underline{m}]} \right) = \tau' \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \right) \tau' \left(\underline{\xi}^{[\underline{m}]} \right)$$

revient à montrer que

$$\forall \underline{m}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d, \quad \tau' \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} \underline{\xi}^{(\underline{m})\sigma} \right) = \tau' \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} \right) \tau' \left(\underline{\xi}^{(\underline{m})\sigma} \right).$$

C'est une égalité similaire à celle qui a été obtenue au lemme 3.4.3 pour l'application τ qui est un morphisme par définition. Montrons alors que la composée $\tau' \circ \tau'$ est A -linéaire. De façon équivalente, cela revient à montrer que $\tau \circ \theta : A \rightarrow$

$\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_q$ est l'identité. L'application τ du lemme 3.4.3 envoie l'idéal $(\underline{\xi}^{(k)\sigma}, |\underline{k}| = n)$ sur $(\underline{\xi}^{(k)\sigma}, |\underline{k}| = n - k, (q-1)^k)$ lorsque $n \geq k$. Ainsi, τ induit, pour tout entier naturel k , un morphisme

$$A[[\underline{\xi}]]_q = \varprojlim_{n \geq k} A[\underline{\xi}] / (\underline{\xi}^{(k)\sigma}, |\underline{k}| = n) \rightarrow A[\underline{\xi}] / (\underline{\xi}^{(k)\sigma}, |\underline{k}| = n - k, (q-1)^k) = A[[\underline{\xi}]]_q / ((q-1)^k)$$

Puis en passant à la limite sur k , nous obtenons un endomorphisme de $A[[\underline{\xi}]]_q$ que nous noterons, encore une fois, τ . Il est alors possible de décomposer $\tau \circ \theta$ de la manière suivante

$$A \xrightarrow{\theta} A[[\underline{\xi}]] \xrightarrow{\tau} A[[\underline{\xi}]] \longrightarrow \widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_q$$

Comme ξ_1, \dots, ξ_d sont topologiquement nilpotents sur $A[[\underline{\xi}]]$ et x_1, \dots, x_d sont des coordonnées étales, notre assertion provient du fait que

$$\forall i = 1, \dots, d, \tau(\theta(x_i)) = \tau(x_i + \xi_i) = x_i.$$

Pour prouver que $\tau' \circ \tau'$ est l'identité, nous nous ramenons, par le même raisonnement que précédemment, à montrer que

$$\forall \underline{n} \in \mathbb{N}, \tau \circ \tau(\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma}) = \underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma}.$$

Or, τ est un morphisme A -linéaire d'algèbres et $\tau \circ \tau(\xi_i) = \tau(-\xi_i) = \xi_i$. Cela conclut notre démonstration. \square

Proposition 3.4.5. *L'application diagonale*

$$\Delta : R[\underline{x}, \underline{\xi}] \rightarrow R[\underline{x}, \underline{\xi}] \otimes'_{R[\underline{x}]} R[\underline{x}, \underline{\xi}], \quad \underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} \mapsto \sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{n}|} \binom{\underline{n}}{\underline{i}}_{\underline{q}} \underline{\xi}^{(\underline{i})\sigma} \otimes \underline{\xi}^{(\underline{j})\sigma}$$

où $\binom{\underline{n}}{\underline{i}}_{\underline{q}} = \prod_{k=1}^d \binom{n_k}{i_k}_{q_k}$, est un morphisme $R[\underline{X}]$ -linéaire d'anneaux.

Preuve. Par functorialité, encore une fois, il est possible supposer que $A = R[\underline{x}]$ et $R = \mathbb{Z}[q]_{(p, q-1)}$. Par propriété universelle des polynômes, il existe un unique morphisme d'anneaux

$$\Delta : R[\underline{x}, \underline{\xi}] \rightarrow R[\underline{x}, \underline{\xi}] \otimes'_A R[\underline{x}, \underline{\xi}], \quad \xi_j \mapsto \xi_j \otimes 1 + 1 \otimes \xi_j.$$

Montrons alors par récurrence, sur la longueur de \underline{n} , que ce morphisme satisfait la formule énoncée. Pour $|\underline{n}| = 1$, c'est la formule démontrée dans [LSQ18a, Theorem 3.5]. Supposons la propriété satisfaite pour un rang $k \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire pour tous les $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\underline{n}| = k$. Montrons alors qu'elle reste vraie au rang $k+1$. Soit $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{n}| = k+1$. Nous procédons par disjonction de cas. Dans le cas où il existe un unique $n_i \neq 0$, nous sommes ramené au cas en une variable et c'est à nouveau [LSQ18a, Theorem 3.5] qui permet de conclure. Plaçons nous donc le cas où il existe $i \neq j$ tels que $n_i, n_j \neq 0$. Nous supposons que $n_d > 0$. Il est alors possible de décomposer $\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma}$ de la façon suivante :

$$\underline{\xi}^{(\underline{n})\sigma} = \underline{\xi}^{(\underline{n}')\sigma} \xi_d^{(n_d)\sigma}$$

où $\underline{n}' = (n_1, \dots, n_{d-1}, 0)$. Nous avons donc $|\underline{n}'| \leq k$ et $n_d \leq k$. Il est alors possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})_{\underline{q}}} \right) &= \Delta \left(\underline{\xi}^{(\underline{n}')_{\underline{q}}} \underline{\xi}_d^{(n_d)_{q_d}} \right) = \Delta \left(\underline{\xi}^{(\underline{n}')_{\underline{q}}} \right) \Delta \left(\underline{\xi}_d^{(n_d)_{q_d}} \right) \\ &= \left(\sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{n}'|} \binom{\underline{n}'}{\underline{i}}_{\underline{q}} \underline{\xi}^{(\underline{i})_{\underline{q}}} \otimes \underline{\xi}^{(\underline{j})_{\underline{q}}} \right) \left(\sum_{i+j=n_d} \binom{n_d}{i}_{q_d} \xi_d^{(i)_{q_d}} \otimes \xi_d^{(j)_{q_d}} \right) \\ &= \sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{n}'|} \sum_{i+j=n_d} \binom{\underline{n}'}{\underline{i}}_{\underline{q}} \binom{n_d}{i}_{q_d} \underline{\xi}^{(\underline{i})_{\underline{q}}} \xi_d^{(i)_{q_d}} \otimes \underline{\xi}^{(\underline{j})_{\underline{q}}} \xi_d^{(j)_{q_d}} \\ &= \sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{n}|} \binom{\underline{n}}{\underline{i}}_{\underline{q}} \underline{\xi}^{(\underline{i})_{\underline{q}}} \otimes \underline{\xi}^{(\underline{j})_{\underline{q}}}. \end{aligned}$$

Nous avons bien obtenu la formule souhaitée. \square

Proposition 3.4.6. *L'application diagonale*

$$\Delta : \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \rightarrow \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \otimes'_A \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}, \quad \underline{\xi}^{[\underline{n}]} \mapsto \sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{n}|} \underline{\xi}^{[\underline{i}]} \otimes \underline{\xi}^{[\underline{j}]}$$

est un morphisme de A -algèbres.

Preuve. Par functorialité, encore une fois, il est possible supposer que $A = \widehat{R[x]}$ et $R = \mathbb{Z}[q]_{(p, q-1)}$. Comme A n'a alors pas de torsions, il suffit de prouver que

$$\forall \underline{n}, \underline{m} \in \mathbb{N}^d, \quad \Delta \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})_{\underline{\sigma}}} \underline{\xi}^{(\underline{m})_{\underline{\sigma}}} \right) = \Delta \left(\underline{\xi}^{(\underline{n})_{\underline{\sigma}}} \right) \Delta \left(\underline{\xi}^{(\underline{m})_{\underline{\sigma}}} \right).$$

Cela découle du fait que par la proposition 3.4.5, l'application diagonale

$$\Delta : R[x, \underline{\xi}] \rightarrow R[x, \underline{\xi}] \otimes'_A R[x, \underline{\xi}], \quad \underline{\xi}^{(\underline{n})_{\underline{q}}} \mapsto \sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{n}|} \binom{\underline{n}}{\underline{i}}_{\underline{q}} \underline{\xi}^{(\underline{i})_{\underline{q}}} \otimes \underline{\xi}^{(\underline{j})_{\underline{q}}}$$

est un morphisme d'anneau. \square

Dans la suite, nous noterons $e : \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \rightarrow A$ l'application d'évaluation en 0 ainsi que

$$p_1 : \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \rightarrow \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \hat{\otimes}'_A \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}, \quad f \mapsto f \otimes 1$$

et

$$p_2 : \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \rightarrow \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}} \hat{\otimes}'_A \widehat{A \langle \underline{\xi} \rangle}_{\underline{q}}, \quad f \mapsto 1 \otimes f$$

les applications canoniques. Nous utilisons la notation $\hat{\otimes}'$ pour indiquer que l'on utilise la \underline{q} -application de Taylor θ pour la A -structure à gauche.

Proposition 3.4.7. *Les diagrammes suivants sont commutatifs*

1.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \searrow \quad \downarrow e \\ A \end{array} \quad \text{et} \quad A \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \searrow \quad \downarrow e \\ A \end{array}$$

2.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \downarrow \quad \downarrow \Delta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \xrightarrow{p_1} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \quad \text{et} \quad A \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \downarrow \theta \quad \downarrow \Delta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \xrightarrow{p_2} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array}$$

3.

$$\widehat{A\langle\xi\rangle}_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \searrow \quad \downarrow e \otimes \text{Id} \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \quad \text{et} \quad \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \searrow \quad \downarrow \text{Id} \otimes e \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array}$$

4.

$$\widehat{A\langle\xi\rangle}_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \downarrow \Delta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \xrightarrow{\text{Id}_{\widehat{A\langle\xi\rangle}_q} \otimes \Delta} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q$$

5.

$$A \begin{array}{c} \downarrow \theta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \xrightarrow{\tau} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \quad \text{et} \quad A \begin{array}{c} \downarrow \theta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \xrightarrow{\tau} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q$$

6.

$$\widehat{A\langle\xi\rangle}_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \\ \searrow e \\ A \end{array}$$

7.

$$\widehat{A\langle\xi\rangle}_q \begin{array}{c} \xrightarrow{e} A \\ \downarrow \Delta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \xrightarrow{\text{Id} \times \tau} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \quad \text{et} \quad \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \begin{array}{c} \xrightarrow{e} A \\ \downarrow \Delta \\ \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\xi\rangle}_q \end{array} \xrightarrow{\tau \times \text{Id}} \widehat{A\langle\xi\rangle}_q$$

Preuve. La preuve est identique à celle de la proposition 5.6 de [LSQ20]. Le fait de rajouter des variables ne change rien au principe de la démonstration. \square

Définition 3.4.8. Une *hyper- q -stratification (de niveau zéro)* sur un A -module M est un $\widehat{A\langle \xi \rangle}_q$ -isomorphisme linéaire

$$\varepsilon : \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes'_A M \simeq M \otimes_A \widehat{A\langle \xi \rangle}_q$$

tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes M & \xrightarrow{\varepsilon} & M \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \\ (\varepsilon \otimes \text{Id}_M) \circ \left(\text{Id}_{\widehat{A\langle \xi \rangle}_q} \otimes \varepsilon \right) \circ (\Delta \otimes \text{id}_M) \downarrow & & \downarrow \text{Id}_M \otimes \Delta \\ M \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q & \simeq & M \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes M & \xrightarrow{e \otimes \text{Id}_M} & M \\ (\text{Id}_M \otimes e) \circ \varepsilon \downarrow & \swarrow & \\ M & & \end{array}$$

sont commutatifs.

Définition 3.4.9. Une *hyper- q -structure de Taylor* sur un A -module M est une application A -linéaire

$$\theta : M \rightarrow M \otimes_A \widehat{A\langle \xi \rangle}_q,$$

où la structure de A -module à droite est donnée par la q -application de Taylor de A , telle que

$$(\text{Id}_M \otimes e) \circ \theta = \text{Id}_M$$

et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & M \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \\ \theta \downarrow & & \downarrow \text{Id}_M \otimes \Delta \\ M \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q & \xrightarrow{\theta \otimes \text{Id}_{\widehat{A\langle \xi \rangle}_q}} & M \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \end{array}$$

Proposition 3.4.10. *L'extension et la restriction des scalaires par la q -application de Taylor fournit une équivalence entre les hyper- q -structure de Taylor et les hyper- q -stratification.*

Preuve. Étant donné une hyper- q -stratification ε sur un A -module M il est possible de définir l'application

$$\theta : M \xrightarrow{p_2} \widehat{A\langle \xi \rangle}_q \otimes'_A M \xrightarrow{\varepsilon} M \otimes_A \widehat{A\langle \xi \rangle}_q$$

où la première application est $p_2(s) = 1 \otimes s$. Il est alors possible de vérifier facilement que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\theta} & M \otimes_A \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \\
\theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \text{Id} \\
M \otimes_A \widehat{A \langle \xi \rangle}_q & \xrightarrow{\Delta} & M \otimes \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \otimes \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \\
& & \uparrow \varepsilon \otimes \text{Id} \\
& & \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \otimes'_A M \otimes_A \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \\
& & \uparrow p_2 \otimes \text{Id}
\end{array}$$

ce qui implique que toutes les conditions requises sur θ sont vérifiées. Pour le sens réciproque, étant donné une hyper- q -structure de Taylor θ , il est possible de l'étendre en une application $\widehat{A \langle \xi \rangle}_q$ -linéaire

$$\varepsilon : \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \otimes'_A M \simeq M \otimes_A \widehat{A \langle \xi \rangle}_q.$$

Nous vérifions alors aisément que l'application ainsi définie vérifie toutes les conditions voulues. \square

3.5 Calcul aux q -différences

Nous énonçons ici les hypothèses qui auront cours tout au long de cette section : R est une $\mathbb{Z}[\underline{q}]_{(p, q-1)}$ -algèbre. Tout R -module sera muni de la topologie $(p, q-1)$ -adique. Nous considérons également A une R -algèbre complète munie de q -coordonnées classiques $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Cela implique l'existence d'endomorphismes $\underline{\sigma}_q = \{\sigma_{q_1}, \dots, \sigma_{q_d}\}$ tels que

$$\forall i, j = 1, \dots, d, \sigma_{q_i}(x_j) = \begin{cases} q_i x_i & \text{si } i = j, \\ x_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 3.5.1. Pour tout entier naturel n , la q -application de Taylor de niveau zéro et d'ordre n est la composée

$$\theta_n : A \xrightarrow{\theta} \widehat{A \langle \xi \rangle}_q \twoheadrightarrow \widehat{A \langle \xi \rangle}_q / I^{[n+1]} \simeq A \langle \xi \rangle_q / I^{[n+1]}.$$

Définition 3.5.2. Soit M et N deux A -modules. Un opérateur q -différentiel d'ordre au plus n (et de niveau 0) de M dans N est une application A -linéaire

$$u : A \langle \xi \rangle_q / I^{[n+1]} \otimes'_A M \rightarrow N.$$

Nous rappelons que $\varphi \otimes fs = \theta_n(f)\varphi \otimes s$. L'ensemble des opérateurs q -différentiel d'ordre au plus n (et de niveau 0) de M dans N sera noté

$$\text{Diff}_{\underline{q}, n}(M, N) := \text{Hom}_A(A \langle \xi \rangle_q / I^{[n+1]} \otimes'_A M, N)$$

et nous noterons

$$\text{Diff}_{\underline{q}}(M, N) := \varinjlim_n \text{Diff}_{\underline{q},n}(M, N).$$

Nous pouvons alors considérer pour $m, n \in \mathbb{N}$ l'application diagonale d'ordre fini

$$\begin{aligned} A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[m+n+1]} &\xrightarrow{\Delta_{n,m}} A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \otimes'_A A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[m+1]} \\ \underline{\xi}^{[k]} &\longmapsto \sum_{|\underline{i}|+|\underline{j}|=|\underline{k}|} \underline{\xi}^{[\underline{i}]} \otimes \underline{\xi}^{[\underline{j}]} . \end{aligned}$$

induite par l'application défini à la proposition 3.4.6. Cela permet de composer les opérateurs \underline{q} -différentiels. En effet, étant donné

$$u : A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \otimes'_A M \rightarrow N \text{ et } v : A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[m+1]} \otimes'_A M \rightarrow N$$

nous définissons la composée $u \tilde{\circ} v$ comme

$$\begin{array}{ccc} A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[m+n+1]} & \xrightarrow{u \tilde{\circ} v} & N \\ \Delta_{n,m} \otimes \text{Id} \downarrow & & \uparrow u \\ A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \otimes'_A A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[m+1]} \otimes'_A L & \xrightarrow{\text{Id} \otimes v} & A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \otimes'_A M \end{array}$$

Il faut toutefois faire attention car $\text{Diff}_{\underline{q},0}(A) \simeq A$, ainsi tout élément f de A peut être vu comme un opérateur \underline{q} -différentiel d'ordre 0. Cependant, si $u \in \text{Diff}_{\underline{q},n}(A)$ alors $u \tilde{\circ} f = u \circ \theta_n(f)$.

Lemme 3.5.3. *Il existe un isomorphisme A -linéaire de R -algèbres*

$$D_{A,\underline{q}} \simeq \text{Diff}_{\underline{q}}(A), \quad \partial_{\underline{q}}^k \mapsto \left(\tilde{\partial}_{\underline{q}}^k : \underline{\xi}^{[\underline{n}]} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{n} = \underline{k} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \right)$$

où $D_{A,\underline{q}}$ est le module défini après la proposition 2.6.4.

Preuve. Par commutativité des opérateurs, l'application est clairement une bijection A -linéaire de R -algèbres. Il reste à vérifier que c'est bien un morphisme. Le fait que

$$\forall i = 1, \dots, d \quad \forall f \in A, \tilde{\partial}_{\underline{q},i} \tilde{\circ} f = \sigma_i(f) \tilde{\partial}_{\underline{q},i} + \partial_{A,\underline{q},i}(f) \text{ et } \tilde{\partial}_{\underline{q},i}^{k+1} = \tilde{\partial}_{\underline{q},i}^k \tilde{\circ} \tilde{\partial}_{\underline{q},i}$$

se démontre de la même manière que dans le Lemme 6.10 de [GSQ20]. \square

Remarques. 1. Les ensembles $\left\{ \partial_{\underline{q}}^k \right\}_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d}$ et $\left\{ \underline{\xi}^{[\underline{k}]} \right\}_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d}$ sont des bases duales de $D_{A,\underline{q}}$.

2. Si l'on note \tilde{P} l'image d'un élément P par l'isomorphisme défini dans la proposition précédente, alors

$$P = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} \tilde{P} \left(\underline{\xi}^{[\underline{k}]} \right) \partial_{\underline{q}}^k \text{ et } \forall \phi \in A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}}, \quad \phi = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} \tilde{\partial}_{\underline{q}}^{[\underline{k}]}(\phi) \underline{\xi}^{[\underline{k}]}.$$

3. Le module $D_{A,\underline{q}}$ est donc naturellement un $A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}$ -module. Nous décrivons sa structure explicite dans le lemme ci-dessous.

Lemme 3.5.4. *Pour tout $\underline{k} =, \underline{n} \in \mathbb{N}^d$,*

$$\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \cdot \partial_{\underline{q}}^{\underline{k}} = \sum_{|(i_1, \dots, i_d)| \leq |\underline{n}|} \prod_{j=1}^d q_i^{\frac{i_j(i_j-1)}{2}} \binom{k_j}{n_j}_{q_j} \binom{n_j}{i_j}_{q_j} (q_j - 1)^{i_j} x_j^{i_j} \partial_{\underline{q},j}^{k_i - n_i + i_j}.$$

Preuve. Par la formule 3.1, nous déduisons pour $\underline{m} \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned} \underline{\xi}^{[\underline{n}]} \cdot \tilde{\partial}_{\underline{q}}^{\underline{k}} \left(\underline{\xi}^{[\underline{m}]} \right) &= \tilde{\partial}_{\underline{q}}^{\underline{k}} \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \underline{\xi}^{[\underline{m}]} \right) \\ &= \tilde{\partial}_{\underline{q}}^{\underline{k}} \left(\prod_{i=1}^d \sum_{j=0}^{\min(n_i, m_i)} q_i^{j(j-1)/2} \binom{n_i + m_i + j}{n_i}_{q_i} \binom{n_i}{j}_{q_i} (q_i - 1)^j x_i^j \xi_i^{[n_i + m_i - j]} \right) \\ &= \begin{cases} \prod_{i=1}^d q_i^{j(j-1)/2} \binom{n_i + m_i + j}{n_i}_{q_i} \binom{n_i}{j}_{q_i} (q_i - 1)^j x_i^j \xi_i^{[n_i + m_i - j]} & \text{si } n_i + m_i - j = k_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \cdot \tilde{\partial}_{\underline{q}}^{\underline{k}} = \sum_{|(i_1, \dots, i_d)| \leq |\underline{n}|} \prod_{j=1}^d q_i^{\frac{i_j(i_j-1)}{2}} \binom{k_j}{n_j}_{q_j} \binom{n_j}{i_j}_{q_j} (q_j - 1)^{i_j} x_j^{i_j} \tilde{\partial}_{\underline{q},j}^{k_i - n_i + i_j}$$

si $|\underline{n}| \leq |\underline{k}|$ et 0 sinon. □

Remarque. Pour tout $P \in D_{A,\underline{q}}$ et tout $\varphi \in A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}}$, nous avons la formule suivante

$$\varphi \cdot P = \sum_{0 \leq |\underline{i}| \leq |\underline{n}| \leq |\underline{k}|} \prod_{j=1}^d q_j^{\frac{i_j(i_j-1)}{2}} \binom{k_j}{n_j}_{q_j} \binom{n_j}{i_j}_{q_j} (q_j - 1)^{i_j} x_j^{i_j} \tilde{P} \left(\xi_j^{[k_j]} \right) \tilde{\partial}_{\underline{q},j}^{n_j}(\varphi) \partial_{\underline{q},j}^{k_j - n_j + i_j}.$$

Lemme 3.5.5. *Pour $i = 1, \dots, d$, une q_i -dérivation $D : M \rightarrow M$ s'étend uniquement en un q -opérateur différentiel*

$$\bar{D} : A\langle\underline{\xi}\rangle_{\underline{q}} / I^{[2]} \otimes'_A M \rightarrow M, \quad \xi_j \otimes s \mapsto \begin{cases} s + (q_i - 1)x_i D(s) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'ordre au plus un.

Preuve. Considérons les applications

$$\tilde{D} : A[\underline{\xi}] \otimes_A M \rightarrow P_A \otimes_A M, \quad \xi_j \otimes m \mapsto (1 \otimes x_j - x_j \otimes 1) \otimes m$$

$$\text{et } \tilde{D} : P_A \otimes M \rightarrow M, \quad (f \otimes g) \otimes m \mapsto fD(gm).$$

Nous voulons ici montrer que $\bar{D} = (\tilde{D} \circ \tilde{D})$ s'annule sur $\left(\underline{\xi}^{(k)q}, |\underline{k}| = 2\right)$. Cet idéal est engendré par les éléments de la forme $\xi_i \xi_j$ et $\xi_j \sigma_j(\xi_j) = \xi_j(\xi_j + (1 - q_j)x_j)$. Montrons que $(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_i \xi_j \otimes s)$ est nul, on a

$$\begin{aligned} (\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_i \xi_j \otimes s) &= \tilde{D}((1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)(1 \otimes x_j - x_j \otimes 1) \otimes s) \\ &= D(x_i x_j s) - x_j D(x_i s) - x_i D(x_j s) + x_i x_j D(s) \\ &= \partial_{q_i}(x_i x_j) s + q_i x_i x_j D(s) - x_j(s + q_i x_i D(s)) - x_i x_j D(s) + x_i x_j D(s) \\ &= x_j s + q_i x_i x_j D(s) - x_j(s + q_i x_i D(s)) - x_i x_j D(s) + x_i x_j D(s) = 0. \end{aligned}$$

Montrons alors que $(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \sigma_j(\xi_j) \otimes s)$ est nul, on a

$$(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \sigma_j(\xi_j) \otimes s) = (\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j^2 \otimes s) + x_j(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \otimes s) - q_j x_j(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \otimes s).$$

Il est alors possible de calculer séparément $(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \otimes s)$ et $(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j^2 \otimes s)$. Ce qui donne

$$(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \otimes s) = \begin{cases} s + (q_i - 1)x_i D(s) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j^2 \otimes s) = \begin{cases} (q_i x_i - x_i)s + (q_i^2 - 2q_i + 1)x_i^2 D(s) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En sommant, nous obtenons bien que $(\tilde{D} \circ \tilde{D})(\xi_j \sigma_j(\xi_j) \otimes s) = 0$. Nous pouvons alors conclure en utilisant le fait que $\widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle}_q / I^{[2]} \simeq A[\underline{\xi}] / \left(\underline{\xi}^{(k)q}, |\underline{k}| = 2\right)$. \square

Lemme 3.5.6. *Si M est un $D_{A,q}$ -module et $s \in M$ alors $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\forall \underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $\forall \underline{n} = (n_i)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{N}^d$,*

$$\tilde{\partial}_{M,q,j}^{\underline{k}} \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \otimes s \right) = \prod_{j=1}^d \sum_{i=0}^{n_j} q_j^{\frac{i(i-1)}{2}} \binom{k}{n_j}_{q_j} \binom{n}{i}_{q_j} (q_j - 1)^i x_j^i \tilde{\partial}_{M,q,j}^{k - n_j + i}(s).$$

Preuve. Par définition, $\tilde{\partial}_{M,q,j}^{k_i} \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \otimes s \right) = \xi_1^{[n_1]} \dots \xi_{j-1}^{[n_{j-1}]} \xi_{j+1}^{[n_{j+1}]} \dots \xi_d^{[n_d]} \tilde{\partial}_{M,q,j}^{k_i} \left(\xi_j^{[n_j]} \otimes s \right)$. Il suffit alors d'appliquer récursivement les opérateurs et la proposition 6.13 de [LSQ20]. \square

Lemme 3.5.7. *Si M est un $D_{A,q}$ -module, l'application structurelle*

$$D_{A,q} \rightarrow \text{End}_R(M)$$

se relève de manière unique en un morphisme $A\langle \underline{\xi} \rangle_q$ -linéaire de R -algèbres

$$\rho : \text{Diff}_q(A) \rightarrow \text{Diff}_q(M).$$

Preuve. Pour $i = 1, \dots, d$, l'image de $\partial_{\underline{q},i} \in D_{A,\underline{q}}$ dans $\text{End}_R(M)$ est une q_i -dérivation $\tilde{\partial}_{M,\underline{q},i}$ de M qui satisfait

$$\forall f \in A, \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} \tilde{\sigma} f = \sigma_{q_i}(f) \tilde{\sigma} \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} + \partial_{A,\underline{q},i}(f).$$

Par linéarité et réduction modulo $I^{[2]}$, il est suffisant de vérifier cette formule sur $\xi_i \otimes s$ pour un élément s de M .

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} \tilde{\sigma} f \right) (\xi_i \otimes s) &= \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} (\theta_1(f) \xi_i \otimes s) \\ &= \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} \left(\left(f + \sum_{j=1}^d \partial_{A,\underline{q},j}(f) \xi_j \right) \xi_i \otimes s \right) \\ &= \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} \left((f + (q_i - 1)x_i \partial_{A,\underline{q},i}(f)) \xi_i \otimes s \right) \\ &= \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} (\sigma_{q_i}(f) \xi_i \otimes s) \\ &= \sigma_{q_i}(f) \tilde{\partial}_{M,\underline{q},i} (\xi_i \otimes s). \end{aligned}$$

Le lemme 3.5.5 nous permet de bien d'obtenir un relevé

$$\rho : \text{Diff}_{\underline{q}}(A) \rightarrow \text{Diff}_{\underline{q}}(M).$$

Il reste à montrer que ce relevé est $A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}}$ -linéaire. D'après les lemmes 3.5.4 et 3.5.6 pour un élément s de M la formule suivante est satisfaite

$$\forall \underline{k}, \underline{n} \in \mathbb{N}^d, \rho \left(\partial_{\underline{q}}^{\underline{k}} \right) \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \otimes s \right) = \rho \left(\underline{\xi}^{[\underline{n}]} \cdot \tilde{\partial}_{\underline{q}}^{\underline{k}} \right) (1 \otimes s).$$

Par linéarité, nous avons

$$\forall P \in D_{A,\underline{q}}, \forall \varphi \in A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}}, \rho \left(\tilde{P} \right) (\varphi \otimes s) = \rho \left(\varphi \cdot \tilde{P} \right) (1 \otimes s).$$

Maintenant si $P \in D_{A,\underline{q}}$ et $\psi, \varphi \in A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}}$ alors

$$\begin{aligned} \left(\varphi \cdot \rho \left(\tilde{P} \right) \right) (\psi \otimes s) &= \rho \left(\tilde{P} \right) (\varphi \psi \otimes s) \\ &= \rho \left(\varphi \psi \cdot \tilde{P} \right) (1 \otimes s) \\ &= \rho \left(\psi \cdot \left(\varphi \cdot \tilde{P} \right) \right) (1 \otimes s) \\ &= \rho \left(\varphi \cdot \tilde{P} \right) (\psi \otimes s). \end{aligned}$$

Le relevé ρ induit donc pour tout entier naturel n une application $A \langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]}$ -linéaire

$$\rho_n : \text{Diff}_{\underline{q},n}(A) \rightarrow \text{Diff}_{\underline{q},n}(M).$$

□

Définition 3.5.8. Une \underline{q} -structure de Taylor (de niveau zéro) sur un A -module M est une famille d'application semi-linéaire compatibles

$$\theta_n : M \rightarrow M \otimes_A A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]},$$

telles que

$$\forall s \in M, \theta_0(s) = s \otimes 1$$

et $\forall m, n \in \mathbb{N}$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_m} & M \otimes_A A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \\ \theta_{m+n} \downarrow & & \downarrow \theta_n \otimes \text{Id}_{A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]}} \\ M \otimes_A A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+m+1]} & \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes \Delta_{m,n}} & M \otimes_A A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \otimes_A A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[m+1]} \end{array}$$

Proposition 3.5.9. Avoir une \underline{q} -structure de Taylor sur un A -module M est équivalent à avoir une $D_{A,\underline{q}}$ -structure par la formule suivante :

$$\forall s \in M, \theta_n(s) = \sum_{|\underline{k}|=n} \partial_{M,\underline{q}}^{\underline{k}}(s) \otimes \underline{\xi}^{[\underline{k}]}.$$

Preuve. Le schéma de preuve est identique à celle de la proposition 6.16 de [GSQ20]. \square

Définition 3.5.10. Un $D_{A,\underline{q}}$ -module M est *topologiquement nilpotent* si

$$\forall s \in M, \lim_{\underline{k} \rightarrow \infty} \partial_{M,\underline{q}}^{\underline{k}}(s) = 0.$$

Proposition 3.5.11. Si M est un A -module plat de présentation finie, alors il est équivalent de se donner une structure de $D_{A,\underline{q}}$ -module topologiquement nilpotent sur M ou de munir M d'une hyper- \underline{q} -stratification.

Preuve. Notons $A\langle\langle \underline{\xi} \rangle\rangle_{\underline{q}} := \varprojlim A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]}$. Grâce aux propositions 3.5.9 et 3.4.10, c'est équivalent à montrer qu'il est équivalent de se donner une \underline{q} -structure de Taylor ou une hyper- \underline{q} -structure de Taylor. Si on se donne une hyper- \underline{q} -structure de Taylor alors celle-ci induit une \underline{q} -structure de Taylor par réduction modulo $I^{[n+1]}$ pour tout entier naturel n . Réciproquement, comme M est de présentation finie, une \underline{q} -structure de Taylor sur M induit à la limite une application

$$\hat{\theta} : M \rightarrow \varprojlim \left(M \otimes_A A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \right) \simeq M \otimes A\langle\langle \underline{\xi} \rangle\rangle_{\underline{q}}, \quad s \mapsto \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} \partial_{M,\underline{q}}^{\underline{k}}(s) \otimes \underline{\xi}^{[\underline{k}]},$$

où l'isomorphisme s'obtient par la proposition [Aut23, Tag 059K] et en utilisant le fait que $A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}} / I^{[n+1]} \simeq \prod_{|\underline{k}| \leq n} A\underline{\xi}^{[\underline{k}]}$. Le module M étant également supposé plat, par la proposition [Aut23, Tag 00Nx] c'est une somme directe de module libre, et nous avons l'équivalence suivante :

$$\sum_{|\underline{k}| \leq n} \partial_{M,\underline{q}}^{\underline{k}}(s) \otimes \underline{\xi}^{[\underline{k}]} \in M \otimes_A \widehat{A\langle \underline{\xi} \rangle_{\underline{q}}} \Leftrightarrow \lim_{\underline{k} \rightarrow \infty} \partial_{M,\underline{q}}^{\underline{k}}(s) = 0.$$

L'application $\hat{\theta}$ se factorise donc par $M \otimes_A \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q$ si et seulement si la q -structure de Taylor est topologiquement quasi-nilpotente. Il reste à vérifier que l'application induite $\theta : M \rightarrow M \otimes_A \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q$ est une hyper- q -structure de Taylor. La première condition de la définition est automatique, il reste donc à vérifier que

$$\left(\theta \otimes \text{Id}_{\widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q} \right) \circ \theta = (\text{Id}_M \otimes \Delta) \circ \theta,$$

cela revient à s'assurer que l'application canonique

$$M \otimes_A \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q \rightarrow M \otimes_A A\langle\langle\underline{\xi}\rangle\rangle_q \hat{\otimes}'_A A\langle\langle\underline{\xi}\rangle\rangle_q$$

est injective. Cela se déduit du fait que M est un module plat et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q & \longrightarrow & A\langle\langle\underline{\xi}\rangle\rangle_q \hat{\otimes}'_A A\langle\langle\underline{\xi}\rangle\rangle_q \\ \tau \otimes \text{Id} \downarrow & & \downarrow \tau \otimes \text{Id} \\ \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q \hat{\otimes}'_A \widehat{A\langle\underline{\xi}\rangle}_q & \longrightarrow & A\langle\langle\underline{\xi}\rangle\rangle_q \hat{\otimes}'_A A\langle\langle\underline{\xi}\rangle\rangle_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\bigoplus}_{i,j \in \mathbb{N}^d} A \left(\underline{\xi}^{[i]} \otimes \underline{\xi}^{[j]} \right) & \hookrightarrow & \prod_{i,j \in \mathbb{N}^d} A \left(\underline{\xi}^{[i]} \otimes \underline{\xi}^{[j]} \right). \end{array} \quad \square$$

Bibliographie

- [Abb10] Ahmed Abbas. *Éléments de Géométrie Rigide : Volume I. Construction et étude géométrique des espaces rigides*. Progress in Mathematics, vol. 286. Birkhäuser, 2010.
- [ADV04] Yves André and Lucia Di Vizio. q -difference equations and p -adic local monodromy. *Astérisque*, (296) :55–111, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.
- [Aut23] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2023.
- [BD99] D. Bonatsos and C. Daskaloyannis. Quantum groups and their applications in nuclear physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 43 :537–618, 1999.
- [Ber96] Pierre Berthelot. D -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(2) :185–272, 1996.
- [Bir13] George D. Birkhoff. The generalized riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q -difference equations. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 49(9) :521–568, 1913.
- [BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. Integral p -adic Hodge theory. *Publications Mathématiques de L’IHÉS*, 128(1) :219–397, November 2018.
- [Bou98] Nicolas Bourbaki. *Commutative algebra. Chapters 1–7*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Bra14] Martin Brandenburg. *Tensor categorical foundations of algebraic geometry*, 2014.
- [BS22] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. Prisms and prismatic cohomology. *Ann. of Math. (2)*, 196(3) :1135–1275, 2022.
- [DV02] Lucia Di Vizio. Arithmetic theory of q -difference equations. *Inventiones mathematicae*, 150(3) :517–578, Dec 2002.
- [Ern12] Thomas Ernst. *A comprehensive treatment of q -calculus*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.
- [GLQ19] Michel Gros, Bernard Le Stum, and Adolfo Quirós. Twisted divided powers and applications. *Journal of Number Theory*, pages 285–331, 2019.
- [GLS14] Michel Gros and Bernard Le Stum. Une neutralisation explicite de l’algèbre de Weyl quantique complétée. *Comm. Algebra*, 42(5) :2163–2170, 2014.

- [Gro67] Alexander Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 32 :5–361, 1967.
- [GSQ20] Michel Gros, Bernard Le Stum, and Adolfo Quirós. Twisted differential operators and q -crystals, 2020.
- [Hub93] R. Huber. Continuous valuations. *Math. Z.*, 212(3) :455–477, 1993.
- [KL15] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu. Relative p -adic Hodge theory : foundations. *Astérisque*, (371) :239, 2015.
- [LSQ15] Bernard Le Stum and Adolfo Quirós. On quantum integers and rationals. In *Trends in number theory*, volume 649 of *Contemp. Math.*, pages 107–130. 2015.
- [LSQ18a] Bernard Le Stum and Adolfo Quirós. Formal confluence of quantum differential operators. *Pacific Journal of Mathematics*, 292(2) :427–478, 2018.
- [LSQ18b] Bernard Le Stum and Adolfo Quirós. Twisted calculus. *Communications in Algebra*, 46(12) :5290–5319, 2018.
- [LSQ20] Bernard Le Stum and Adolfo Quirós. Twisted calculus on affinoid algebras. *Pacific J. Math.*, 304(2) :523–560, 2020.
- [Mor19] Sophie Morel. *Adic Spaces*. 2019.
- [Pul08] Andrea Pulita. p -adic confluence of q -difference equations. *Compositio Mathematica*, 144(4) :867–919, 2008.
- [Sau00] Jacques Sauloy. Systèmes aux q -différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(4) :1021–1071, 2000.
- [Sch13] Pierre Schapira. *An introduction to \mathcal{D} -modules*. 2013.
- [Wed19] Torsten Wedhorn. *Adic spaces*. 2019.