



**HAL**  
open science

## Raisonnement avec des croyances partiellement ordonnées

Fayçal Touazi

► **To cite this version:**

Fayçal Touazi. Raisonnement avec des croyances partiellement ordonnées. Autre [cs.OH]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2016. Français. NNT : 2016INPT0003 . tel-04233210

**HAL Id: tel-04233210**

**<https://theses.hal.science/tel-04233210>**

Submitted on 9 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Intelligence Artificielle

---

Présentée et soutenue par :

M. FAYCAL TOUAZI

le vendredi 18 mars 2016

Titre :

RAISONNEMENT AVEC DES CROYANCES PARTIELLEMENT  
ORDONNEES

---

Ecole doctorale :

Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse (MITT)

Unité de recherche :

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.)

Directeur(s) de Thèse :

M. DIDIER DUBOIS

MME CLAUDETTE CAYROL

Rapporteurs :

M. GODO LLUIS, CSIC BARCELONE

M. SALEM BENFERHAT, UNIVERSITE D'ARTOIS

Membre(s) du jury :

Mme ODILE PAPINI, AIX-MARSEILLE UNIVERSITE, Président

M. DIDIER DUBOIS, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

M. HENRI PRADE, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

Mme CLAUDETTE CAYROL, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

*Je dédie cette thèse à mes parents*

---

## Résumé

---

Dans le cadre de cette thèse, nous présentons l'extension des résultats sur le raisonnement avec des bases de croyances totalement ordonnées au cas partiellement ordonné. L'idée est de raisonner avec des bases logiques équipées d'un ordre partiel exprimant la certitude relative et de construire une fermeture déductive partiellement ordonnée. Au niveau syntaxique, nous pouvons soit utiliser un langage exprimant des paires de formules et des axiomes décrivant les propriétés de l'ordre, ou utiliser des formules en relation avec des poids symboliques partiellement ordonnés dans l'esprit de la logique possibiliste. Une sémantique possible consiste à supposer que cet ordre provient d'un ordre partiel sur les modèles. Elle exige la capacité d'induire un ordre partiel sur les sous-ensembles d'un ensemble, à partir d'un ordre partiel sur ses éléments. Parmi plusieurs définitions de relations d'ordre partiel ainsi définies, nous sélectionnons la plus pertinente pour représenter la notion de certitude relative, en accord avec la théorie des possibilités. Nous montrons les limites d'une sémantique basée sur un ordre partiel unique sur les modèles et proposons une sémantique plus générale qui utilise une relation d'ordre partiel entre les ensembles de modèles. Nous utilisons un langage de plus haut niveau qui exprime des conjonctions de paires de formules en relation, avec des axiomes qui décrivent les propriétés de la relation. Nous proposons deux approches syntaxiques pour inférer de nouvelles paires de formules à partir d'une base partiellement ordonnée, et compléter ainsi l'ordre sur le langage propositionnel. L'une des inférences est proche des logiques conditionnelles de Lewis (qui traite le cas totalement ordonné) et d'un travail de Halpern. Elle est également proche du Système P.

Nous reprenons la logique possibiliste symbolique proposée par Benferhat et Prade et comparons cette approche avec l'approche par certitude relative. Pour cela nous poursuivons l'étude de la logique possibiliste symbolique en démontrant un résultat de complétude. Nous étudions la question de la traduction d'une base partiellement ordonnée en base possibiliste symbolique et inversement. Nous proposons enfin des pistes pour une implémentation du système d'inférence de certitude relative et du système possibiliste symbolique.

---

**Mots clefs :** Bases de croyances partiellement ordonnées, Logique conditionnelle, Logique possibiliste.

---

---

## Abstract

---

In this thesis, we present results on the extension of the existing methods for reasoning with totally ordered belief bases to the partially ordered case. The idea is to reason from logical bases equipped with a partial order expressing relative certainty and to construct a partially ordered deductive closure. The difficult part lies in the fact that equivalent definitions in the totally ordered case are no longer equivalent in the partially ordered case.

At the syntactic level we can either use a language expressing pairs of related formulas and axioms describing the properties of the ordering, or use formulas with partially ordered symbolic weights attached to them in the spirit of possibilistic logic. A possible semantics consists in assuming that the partial order on formulas stems from a partial order on interpretations. It requires the capability of inducing a partial order on subsets of a set from a partial order on its elements so as to extend possibility theory functions. Among different possible definitions of induced partial order relations, we select the one generalizing necessity orderings (closely related to epistemic entrenchments). We study such a semantic approach inspired from possibilistic logic, and show its limitations when relying on a unique partial order on interpretations. We propose a more general sound and complete approach to relative certainty, inspired by conditional modal logics, in order to get a partial order on the whole propositional language. Some links between our approach and several inference systems, namely conditional logic, modal epistemic logic and non-monotonic preferential inference are established.

Possibilistic logic with partially ordered symbolic weights proposed by Benferhat and Prade is also revisited and we continue the study by proving a completeness result. A comparison with the relative certainty approach is made via mutual translations. We compare this approach with the relative certainty approach. We study the question of the translation of a partially ordered base into a symbolic possibilistic base and vice versa. The results for this translation highlight different assumptions underlying the two logics. We also offer steps toward implementation tools for the inference of relative certainty and for the symbolic possibilistic system.

---

**Key words :** Partially ordered belief bases, Conditional logic, Possibilistic logic

---

---

## Remerciements

---

Tout d'abord, je remercie toutes celles et tous ceux qui ont contribué à la préparation et la rédaction de ma thèse. Bien évidemment, il m'est difficile de remercier tout le monde, chacun par son nom car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je souhaiterais en premier lieu exprimer ma gratitude empreinte d'affection à toute ma famille, merci à mon père et ma mère qui ont été pour moi des étoiles lumineuses tout au long du chemin et qui ont été présents lorsque j'en ai eu besoin. Je remercie mon frère Athmane, sa femme et les deux petites princesses Assil et Merieme, mes sœurs Hind et Yasmine et toute ma famille pour leur amour sincère et leur soutien sans faille au cours de ces années.

Mes remerciements vont également aux rapporteurs, Lluís Godo et Salem Benferhat, auxquels j'associe Henri Prade l'examineur et Odile Papini, présidente du jury de ma soutenance, pour m'avoir fait l'honneur de prendre le temps de relire en détail mon travail et dont la gentillesse, l'intérêt et les conseils pour continuer et améliorer ma recherche sont inestimables. Que de telles personnes, exemples parfaits de chercheurs accomplis, se soient assis à la table de mon jury est un accomplissement en soi et m'emplit de fierté.

Je remercie grandement ma directrice de thèse Claudette Cayrol de m'avoir accepté et encadré tout au long de la préparation de ma thèse. Je suis ravi d'avoir pu travailler en sa compagnie car en plus de son appui scientifique et le côté humain, elle a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de mes travaux.

Je remercie aussi chaleureusement mon directeur de thèse, Didier Dubois, qui, malgré ses nombreuses occupations, a été un support scientifique avec un côté humain dont je garderai un long souvenir. Je lui suis également reconnaissant de m'avoir assuré un encadrement rigoureux tout au long de ces années.

Je remercie tous mes amis qui m'ont apporté le soutien moral pendant les années de

cette thèse Djamel, Nader, Kais, Amine, Adel (Z), Adel (B), Cherif.

Durant mes séjours à IRIT, j'ai rencontré plusieurs personnes sympathiques avec qui j'ai partagé de bons moments : Fatma, Hela, Zineb, Chloé, Juliette, Sarah, Damien, Nico, Pierre, Sif et tant d'autres ; ils ont chacun amené une touche de couleur agréable à mon quotidien.

Merci, enfin, à l'ensemble des membres de l'équipe ADRIA, et plus généralement de l'IRIT, que j'ai eu l'honneur de connaître.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
I Contexte et problématique . . . . .	1
II Objectifs de la thèse . . . . .	3
III Guide de lecture . . . . .	5
<b>1 Panorama sur les ordres partiels</b>	<b>7</b>
1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés . . . . .	8
1.1.1 Relations d'ordre . . . . .	8
1.1.2 Ensembles partiellement ordonnés . . . . .	9
1.2 Comparaison d'ensembles de valeurs partiellement ordonnées . . . . .	11
1.2.1 Rappel des propriétés des relations d'ordre entre sous-ensembles .	11
1.2.2 Transposition des propriétés à la relation duale . . . . .	17
1.2.3 Dominance sûre et dominance risquée . . . . .	19
1.2.4 Dominance optimiste . . . . .	22
1.2.4.1 Dominance optimiste faible . . . . .	22
1.2.4.2 Dominance optimiste forte . . . . .	25
1.2.5 Dominance pessimiste . . . . .	28
1.3 Raffinement des relations d'ordre partiel induites entre sous-ensembles . .	30
1.3.1 Comparaison préadditive . . . . .	30
1.3.2 Comparaison de vecteurs de valeurs partiellement ordonnées . . .	34
1.3.2.1 Notations . . . . .	35
1.3.2.2 Raffinements du minimum . . . . .	36
1.3.2.3 Extensions de la Pareto-dominance . . . . .	38
1.3.2.4 Comparaison des extensions . . . . .	38
1.3.3 Comparaison de vecteurs de valeurs ou comparaison d'ensembles de valeurs . . . . .	39
1.4 Ordre partiel comme une famille d'ordres totaux . . . . .	44
1.5 Conclusion . . . . .	47



<b>2</b>	<b>Peut-on adapter la logique possibiliste au cas partiel ?</b>	<b>48</b>
2.1	Rappels sur la logique possibiliste LP . . . . .	49
2.1.1	Base possibiliste . . . . .	49
2.1.2	Sémantique ordinale d'une base possibiliste . . . . .	50
2.1.3	Inférence syntaxique en logique possibiliste . . . . .	51
2.2	Fermeture déductive - Approche sémantique par extension ensembliste de l'ordre partiel . . . . .	52
2.2.1	Extension partielle de la logique possibiliste standard . . . . .	52
2.2.2	Fermeture déductive par extension ensembliste . . . . .	53
2.2.3	Fermeture déductive par extension ensembliste préadditive . . . . .	57
2.3	Conclusion . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Fermeture déductive par une approche logique conditionnelle</b>	<b>61</b>
3.1	Systèmes d'inférence pour la certitude relative . . . . .	62
3.1.1	Syntaxe . . . . .	62
3.1.2	Une sémantique plus puissante . . . . .	63
3.1.3	Un système d'inférence pour la certitude relative simple . . . . .	64
3.1.4	Un système d'inférence pour la certitude préadditive . . . . .	67
3.1.5	Inconsistance des bases partiellement ordonnées . . . . .	71
3.2	Fermeture déductive – Approche par les coupes . . . . .	72
3.2.1	Inférence syntaxique . . . . .	72
3.2.2	Etude sémantique . . . . .	73
3.3	Comparaison avec la logique MEL . . . . .	75
3.3.1	La logique MEL . . . . .	75
3.3.2	Comparaison avec le système d'inférence $\mathcal{S}_1$ . . . . .	76
3.4	Comparaison avec les logiques conditionnelles . . . . .	78
3.4.1	Comparaison avec le système P . . . . .	78
3.4.1.1	Le système P . . . . .	78
3.4.1.2	Comparaison avec le système d'inférence $\mathcal{S}_1$ . . . . .	79
3.4.2	La logique de la vraisemblance relative de Halpern . . . . .	80
3.4.3	Le système de Lewis . . . . .	81
3.5	Approche à base de familles d'ordres totaux . . . . .	82
3.6	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Logique possibiliste symbolique</b>	<b>85</b>
4.1	Logique possibiliste avec des poids symboliques (LPS) . . . . .	86
4.1.1	Syntaxe de la LPS . . . . .	86
4.1.2	Contraintes entre les poids . . . . .	86
4.1.3	Sémantique d'une base possibiliste avec poids symboliques . . . . .	87
4.1.4	Inférence syntaxique en LPS . . . . .	89
4.1.5	Preuve de complétude . . . . .	91
4.1.5.1	Bases consistantes . . . . .	91

4.1.5.2	Cas des bases inconsistantes . . . . .	93
4.1.6	Fermeture déductive ordonnée d'une base possibiliste avec poids symboliques . . . . .	94
4.2	Comparaison avec système d'inférence $\mathcal{S}_1$ . . . . .	95
4.2.1	Traduction d'une base partiellement ordonnée en une base possibiliste avec poids symboliques . . . . .	95
4.2.2	Traduction d'une base possibiliste avec des poids symboliques en une base partiellement ordonnée . . . . .	99
4.2.3	Traduction fidèle entre base possibiliste et base partiellement ordonnée . . . . .	103
4.3	Application aux CP-nets . . . . .	106
4.3.1	Réseaux de préférences conditionnelles (CP-nets) . . . . .	106
4.3.2	Codage des CP-nets en logique possibiliste . . . . .	108
4.3.3	CP-nets vs logique possibiliste : contre-exemples . . . . .	110
4.3.4	Les relations entre les préférences de la logique possibiliste et les CP-nets . . . . .	113
4.3.5	Discussion . . . . .	114
4.4	Conclusion . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Inférence sur des bases partiellement ordonnées : Implémentation</b>	<b>118</b>
5.1	Solveur SAT et inférence classique . . . . .	119
5.1.1	Solveur SAT . . . . .	119
5.1.2	Problème d'inférence . . . . .	120
5.2	Implémentation du système d'inférence $\mathcal{S}_1$ . . . . .	120
5.2.1	Rappel sur la syntaxe . . . . .	120
5.2.2	Processus d'inférence avec le système $\mathcal{S}_1$ . . . . .	121
5.2.3	Implémentation des règles d'inférence . . . . .	123
5.2.3.1	Implémentation des règles d'inférence primitives . . . . .	124
5.2.3.2	Règles d'inférence dérivées . . . . .	124
5.2.4	Implémentation du système d'inférence par les coupes . . . . .	127
5.2.4.1	Rappel sur l'inférence avec les coupes . . . . .	127
5.2.4.2	Implémentation de l'inférence avec les coupes . . . . .	127
5.3	Implémentation du système d'inférence possibiliste . . . . .	128
5.3.1	Vers une méthode d'inférence en logique possibiliste symbolique . . . . .	128
5.3.2	Calcul des sous-bases minimales inconsistantes . . . . .	130
5.3.2.1	Stratégie Bottom-up . . . . .	131
5.3.2.2	Stratégie Top-down . . . . .	133
5.3.2.3	Calcul à partir des sous-bases maximales consistantes . . . . .	135
5.3.2.4	Calcul des hitting-sets minimaux (HSM) . . . . .	138
5.3.3	Inférence d'un couple $\phi > \psi$ en logique possibiliste symbolique . . . . .	140
5.3.4	Inférence syntaxique basée sur les ATMS . . . . .	143

5.3.4.1	Rappel sur les ATMS (Assumption-base Truth Maintenance Systems) . . . . .	143
5.3.4.2	Codage d'une base possibiliste symbolique et adaptation . . . . .	144
5.3.5	Comparaison avec l'inférence possibiliste symbolique . . . . .	145
5.4	Conclusion . . . . .	146
<b>Conclusion</b>		<b>147</b>
I	Résumé conclusif . . . . .	147
II	Perspectives . . . . .	148
<b>Bibliographie</b>		<b>151</b>
<b>A Résultats sur les bases totalement ordonnées</b>		<b>159</b>
A.1	Les pré-ordres partiels induits par la comparaison de vecteurs de valeurs totalement ordonnées . . . . .	159
A.1.1	Relations de comparaison basées sur le Min . . . . .	159
A.1.1.1	Le pré-ordre Min . . . . .	160
A.1.1.2	L'ordre partiel strict discrimin . . . . .	160
A.1.1.3	Le pré-ordre total leximin . . . . .	161
A.2	Relations de comparaison basées sur le pré-ordre de Pareto . . . . .	163
A.2.1	Le pré-ordre de Pareto . . . . .	163
A.2.2	Le pré-ordre Pareto-Ordonné . . . . .	164
A.2.3	Pareto Symétrique . . . . .	165
A.3	Raisonnement avec des bases totalement ordonnées . . . . .	167
A.3.1	Comparaison d'ensembles de valeurs totalement ordonnées . . . . .	167
A.3.2	Applications . . . . .	170
A.3.2.1	Incertitude . . . . .	170
A.3.2.2	Préférences . . . . .	172
A.3.2.3	Décision multicritère . . . . .	172
<b>B Notations</b>		<b>173</b>
<b>C Liste des publications</b>		<b>176</b>

---

## Table des figures

---

1.1	Exemple de bornes inférieures et supérieures . . . . .	10
1.2	L'ordre partiel de l'exemple 3 . . . . .	21
1.3	Treillis associé à l'échelle $L$ de l'exemple 15 . . . . .	34
1.4	Les ordres partiels utilisés dans l'exemple 17 . . . . .	44
1.5	Ordre partiel et les ordres totaux qui le prolongent . . . . .	45
4.1	Le CP-net de l'exemple 44 et l'ordre partiel induit . . . . .	108
4.2	Exemples de cas élémentaires de CP-nets . . . . .	112
4.3	CP-net de l'exemple 46 . . . . .	115
5.1	Schéma explicatif du processus d'inférence du système $\mathcal{S}_1$ fusionné avec le système d'inférence par les coupes . . . . .	128
5.2	Calcul des sous-bases minimales inconsistantes avec la stratégie Bottom-up	133
5.3	Calcul des sous-bases minimales inconsistantes avec la stratégie Top-down	135
5.4	Schéma explicatif du processus d'inférence possibiliste symbolique . . . . .	141

---

# INTRODUCTION

---

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Contexte et problématique</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Objectifs de la thèse</b>	<b>3</b>
<b>III</b>	<b>Guide de lecture</b>	<b>5</b>

---

## I Contexte et problématique

Le raisonnement avec des bases de connaissances ordonnées a été étudié depuis plus de vingt ans en intelligence artificielle (IA). A notre connaissance cette notion remonte aux travaux de Rescher sur le raisonnement plausible [84]. Le raisonnement à partir d'une telle base repose sur une idée encore plus vieille, puis qu'elle remonte à l'antiquité avec les textes de Théophraste, disciple d'Aristote, qui évaluait la validité d'une chaîne de raisonnements par la validité du maillon le plus faible.

La logique possibiliste [44, 74] est un exemple typique de logique utilisant une base ordonnée, obtenue en affectant un degré de certitude (nécessité) à chaque formule, sur une échelle ordinale, et mettant en œuvre le principe du maillon le plus faible. Le niveau d'une formule, souvent codé par un poids appartenant à  $(0, 1]$ , est vu comme une borne inférieure de son degré de certitude. Les degrés de certitude étendent les principes utilisés pour les notions de croyance ou de savoir en logique épistémique, à savoir qu'il est équivalent de croire deux formules ou de croire la conjonction des ces deux formules avec la même force. C'est l'axiome de base des degrés de nécessité en théorie des possibilités [45]. La logique possibiliste est une extension de la logique propositionnelle qui est saine et complète par rapport à une sémantique en termes de théorie des possibilités, où la notion d'ensemble de modèles est remplacée par une distribution de possibilité sur les interprétations (qui sont alors plus ou moins plausibles)

La fermeture déductive d'une base en logique possibiliste est un ordre total de possibilité comparative [34, 78] sur les formules de la fermeture classique de la base des formules sans les poids. La déduction obéit à la règle du maillon le plus faible : la force

d'une chaîne d'étapes d'inférence est celle de la formule la moins certaine impliquée dans la chaîne. Le poids d'une formule dans la fermeture déductive est le poids de la chaîne d'inférences la plus forte menant de la base à la formule.

La logique possibiliste a permis de développer des techniques de représentation et de raisonnement pour divers domaines, comme le raisonnement non monotone, la révision des croyances et la fusion de croyances (un article important pour ces développements est [10] ; voir les références dans [48, 50]).

Au cours des 10 dernières années, quelques auteurs se sont intéressés à étendre à l'extension de la logique possibiliste à des bases partiellement ordonnées, et différentes approches ont été proposées [18, 21, 67, 88]. En particulier, l'approche basée sur les poids symboliques partiellement ordonnés [16, 21] apparaît naturelle et commode à mettre en oeuvre. Il convient également de mentionner l'extension précoce de la théorie de révision de croyances au cas partiel par Lindström and Rabinowicz [81].

De façon indépendante, dès les travaux de Lewis [78], des logiques conditionnelles ont été proposées pour raisonner avec des paires de formules liées par un connecteur exprimant une certitude (ou une possibilité) relative, dans le cadre d'ordres totaux de possibilité. La notion de possibilité comparative a aussi été étudiée dans [34] dans l'optique de la théorie de la décision, comme contrepartie de la probabilité comparative. Halpern [67] a étendu les relations de possibilité comparative au cadre des ordres partiels, en étudiant plusieurs façons d'étendre aux sous-ensembles d'un ensemble un ordre partiel sur ses éléments. Par ailleurs Halpern [67] a proposé une logique conditionnelle de possibilité comparative dans le cas d'ordres partiels entre des formules.

Raisonner sur des bases de connaissances partiellement ordonnées est donc un problème relativement nouveau. Cependant, avant d'envisager de raisonner avec des bases de connaissances partiellement ordonnées, on peut se demander d'où vient cet ordre partiel, et ce qu'il signifie. Il y a deux façons de comprendre le manque d'exhaustivité dans une base partiellement ordonnée :

- *Incomparabilité* : Il reflète l'échec de conclure sur une préférence entre  $\phi$  et  $\psi$ , parce que, selon un point de vue,  $\phi$  est préférable de  $\psi$ , et d'un autre point de vue, c'est l'inverse. Nous ne pouvons pas résoudre ce type d'incomparabilité, sauf à modifier les données.
- *Manque d'information* : nous savons seulement que  $\phi > \psi$  est vrai, mais rien n'est connu pour d'autres formules. Dans ce cas, l'ordre partiel compte pour toutes les ordres totaux qui étendent l'ordre partiel, en supposant qu'un seul d'entre eux sera correct.

Dans l'introduction de son papier, Halpern [67] adopte clairement la première vue. Cependant, si la relation  $>$  exprime une certitude relative, comme dans notre cas, on peut arguer que la seconde approche est la plus naturelle. En logique possibiliste l'ordre partiel entre les connaissances est justifié par un manque d'information.

Nous étudions comment faire des inférences quand on dispose d'une base de croyances propositionnelle  $\mathcal{K}$  et d'une relation partielle de certitude  $>$  entre les formules de cette base. Comme rappelé dans [25, 27], on peut procéder de plusieurs façons :

1. Voyant un ordre partiel  $>$  comme la famille d'ordres totaux qui le prolongent la base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  est traduite comme un ensemble de bases stratifiées auxquelles on peut appliquer la logique possibiliste [22].
2. Raisonner directement avec des formules de type  $\phi > \psi$  dans un langage approprié. Cette approche considère  $(\mathcal{K}, >)$  comme un ensemble d'assertions de la forme  $\phi > \psi$  dans la tradition des logiques conditionnelles [67].
3. Raisonner de façon classique avec des sous-ensembles consistants de formules choisis à l'aide de l'ordre partiel [18].
4. Introduire des niveaux absolus : généraliser la logique possibiliste avec un ensemble de degrés de certitude formant un ensemble partiellement ordonné [21].

Nous adoptons le second point de vue avec un souci de simplification du langage et de facilité de mise en œuvre en pratique. En effet, la première approche semble difficile à utiliser en pratique. La troisième approche n'utilise l'ordre partiel que comme une méta-connaissance pour traiter l'incohérence des bases classiques.

## II Objectifs de la thèse

Prolongeant les pistes ouvertes par Halpern, nous cherchons à étendre la logique possibiliste au cas partiellement ordonné et nous cherchons à proposer un cadre qui nous permette de raisonner sur des bases partiellement ordonnées. Les objectifs de cette thèse sont multiples :

1. Nous cherchons à proposer une sémantique à une base partiellement ordonnée : En fait, il y a deux façons de procéder. Si chaque formule est entendue comme l'ensemble de ses modèles et qu'une interprétation peut être associée à l'ensemble des formules qu'elle vérifie ou falsifie, on voit que la question est de construire un ordre partiel sur un ensemble à partir d'un ordre partiel sur ses parties. En accord avec la théorie des possibilités, on peut alors
  - Soit voir chaque interprétation du langage propositionnel comme un sous-ensemble de formules falsifiées dans la base, et appliquer une relation de dominance (partielle) pour construire un ordre partiel sur l'ensemble des interprétations. C'est la relation "best-out" sur les interprétations formellement introduit dans [10]. Il pénalise les modèles qui violent les formules les plus certaines.

- Soit interpréter directement l'ordre partiel sur l'ensemble des formules comme une contrainte sur les ordres partiels possibles entre des sous-ensembles de modèles.

Dans le cas d'un ordre total, les deux approches donnent les mêmes résultats si on code l'ordre total sur les formules d'une base sous la forme de poids minimaux attachés à ces formules, pourvu qu'on complète la seconde approche par un principe informationnel de moindre engagement. C'est le principe de spécificité minimale de la théorie des possibilités, qui sélectionne l'ordre total le plus compact sur les modèles (ordre *best-out*). Ce faisant, on n'interprète pas l'ordre total sur des formules comme un fragment de relation de possibilité comparative, mais comme une contrainte de priorité minimale sur chaque formule. Dans le cas de l'ordre partiel, peut-on faire coïncider ces deux approches ?

Nous étudions ces deux façons de définir une sémantique et nous choisissons la sémantique la plus adéquate pour notre problématique. Il est clair que pour définir cette sémantique dite sémantique de certitude relative, il faut utiliser une relation de dominance partielle. Donc avant d'entamer notre étude sémantique, nous passons en revue les techniques de passage d'un ordre partiel sur les éléments d'un ensemble à un ordre partiel sur ses parties, et nous étudions systématiquement les propriétés des ordres partiels ainsi obtenus.

2. Nous cherchons à proposer aussi une méthode de preuve pour raisonner avec des bases de croyances partiellement ordonnées. Nous cherchons à définir une syntaxe de type logique conditionnelle simplifiée. L'idée est d'utiliser un langage simple avec des littéraux et des conjonctions de littéraux où on n'exprime que des dominances strictes entre formules. L'intérêt d'un tel choix est d'avoir des conséquences logiques qui ont un sens (éviter d'avoir des conséquences complexes sous forme de conjonctions et disjonctions de formules). Ensuite, notre objectif est de définir un système d'inférence qui nous permet de fermer déductivement une base de connaissances partiellement ordonnées. Il est nécessaire que le système d'inférence soit correct et complet pour la sémantique de la certitude relative.
3. Une extension directe dans le cas partiellement ordonné de la logique possibiliste a été proposée par Benferhat et Prade [21], qui manipulent des paires (formules, poids symboliques) plus un ordre partiel sur les poids (et non sur les formules). Cet ordre partiel est interprété comme une connaissance partielle sur un ordre total (les poids symboliques sont des variables à valeurs sur l'intervalle unité). Donc une autre piste d'étendre la logique possibiliste dans le cas partiel, en suivant la même intuition de [21].

Nous cherchons à réviser la logique possibiliste symbolique, d'abord en supposant des contraintes d'inégalité strictes entre les poids symboliques et en mettant l'accent sur la complétion pondérée d'une base de connaissances possibiliste. La preuve de



complétude était absente dans [21], donc une étape importante vers l'extension de la logique possibiliste au cas partiel avec des poids symboliques consiste à donner une preuve de complétude de cette logique symbolique.

4. Il est également intéressant de comparer l'approche de la certitude relative avec la variante symbolique de la logique possibiliste [21]. Même dans le cas totalement ordonné, l'approche de certitude relative et la logique possibiliste ne correspondent pas entièrement :
  - L'approche de certitude relative considère l'ordre partiel sur les formules de la base comme des contraintes à respecter dans la fermeture déductive partiellement ordonnée. En revanche, les degrés attachés aux formules de la logique possibiliste ne sont que des bornes inférieures sur les niveaux de certitude qui ne contraignent pas totalement le classement final des formules dans la fermeture déductive.
  - La logique possibiliste symbolique utilise un principe de minimum de spécificité, qui tend à attribuer des niveaux de certitude aussi faibles que possible. Il aide à la sélection d'un meilleur pré-ordre sur les interprétations. Ce principe n'est pas du tout supposé dans l'approche relative de certitude.

### III Guide de lecture

Cette thèse est divisée en cinq chapitres.

Le chapitre 1 présente l'étude détaillée de différentes extensions des définitions des relations d'ordres totaux à des sous-ensembles ainsi que l'étude de leurs propriétés. Le but de ce chapitre est d'identifier la relation d'ordre partiel la plus prometteuse en termes de propriétés satisfaites par cette dernière afin de définir une logique qui rende compte de la sémantique voulue.

Le chapitre 2 constitue notre première tentative d'extension de la logique possibiliste. Pour ce faire, nous suivons une démarche sémantique. Après avoir identifié la relation d'ordre partiel qui nous intéresse, nous proposons une construction d'un ordre partiel sur les formules à partir d'un ordre partiel sur les ensemble de mondes. Nous montrons que cette construction est problématique.

Dans le chapitre 3, nous poursuivons l'extension de la logique possibiliste au cas partiel cette fois avec une approche syntaxique. Les propriétés de la relation d'ordre partiel sont utilisées comme règles d'inférence et axiomes afin de définir une logique qui est à la fois complète et correcte pour la sémantique de la certitude relative. Dans ce chapitre nous considérons aussi une approche à base de coupes inspirée de la logique possibiliste, qui s'avère incomplète mais correcte pour la sémantique de certitude relative. Nous comparons avec des travaux existant dans la littérature.

Le chapitre 4 présente une dernière extension. Plus précisément, au lieu d'utiliser des poids numériques (logique possibiliste standard), des poids symboliques sont utilisés

pour refléter l'ordre partiel entre les formules. On présente aussi une comparaison détaillée avec la logique définie dans le chapitre 4 en étudiant les différentes possibilités de traduction d'un cadre dans l'autre.

Dans le chapitre 5, nous présentons une implémentation de l'un des systèmes d'inférences définis ainsi qu'une implémentation de la logique possibiliste avec deux techniques d'inférence différentes.

Notre travail comporte par ailleurs plusieurs annexes complétant les apports des chapitres principaux de ce document.

Pour des raisons de simplification de la lecture, nous avons présenté des résultats sur les relations d'ordre total dans l'annexe A avec les définitions et les propriétés. L'annexe B récapitule l'ensemble des notations que nous utilisons tout au long de ce document.

## Panorama sur les ordres partiels

---

### Sommaire

---

1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés . . . . .	8
1.2 Comparaison d'ensembles de valeurs partiellement ordonnées . . .	11
1.3 Raffinement des relations d'ordre partiel induites entre sous-ensembles	30
1.4 Ordre partiel comme une famille d'ordres totaux . . . . .	44
1.5 Conclusion . . . . .	47

---

La question qui nous intéresse est de savoir si la construction de la théorie des possibilités, où une relation de pré-ordre total sur un ensemble permet de construire des relations d'incertitude sur ses sous-ensembles et réciproquement est encore possible dans le contexte des ordres partiels. Cette démarche est à la base de la logique possibiliste. La question a été abordée par Halpern [67]. Ce chapitre reprend et étend certains de ses résultats, et constitue un pré-requis pour construire des extensions de la logique possibiliste quand l'ordre sur les formules ou les interprétations est partiel.

Pour comparer deux sous-ensembles d'un ensemble partiellement ordonné, il existe plusieurs définitions possibles, inspirées des comparaisons de sous-ensembles d'ensembles totalement ordonnés (Annexe A.3.1). Mais le caractère partiel de l'ordre fait que des définitions équivalentes dans le cas d'un ordre total ne le sont plus ici. Dans ce chapitre nous nous intéressons aux relations d'ordre (et de pré-ordre) en général et spécifiquement aux relations d'ordre partiel, en lien avec la représentation de connaissances incertaines ou de préférences, en vue de généraliser la logique possibiliste et les formalismes similaires à des bases partiellement ordonnées. Nous nous intéressons plus particulièrement au passage d'une relation d'ordre total ou partiel sur un ensemble fini à une relation d'ordre partiel sur ses sous-ensembles.

Pour ce faire, nous commençons par donner quelques rappels sur les relations d'ordre partiel entre vecteurs dont les composantes prennent leurs valeurs sur une échelle ordonnée, et quelques propriétés de versions raffinées de ces ordres partiels. Puis nous donnons plusieurs définitions de relations d'ordre partiel entre sous-ensembles induites par la relation entre leurs éléments. Ce chapitre fournit un aperçu général sur les ordres partiels utilisés dans la littérature de l'intelligence artificielle. Il est nécessaire pour étudier l'inférence dans une base de connaissances classique partiellement ordonnée afin d'en construire une fermeture déductive partiellement ordonnée.

Ce chapitre est structuré comme suit, nous commençons par un rappel sur les ensembles ordonnés dans la section 1.1. Ensuite dans la section 1.2, nous donnons différentes définitions de relations d'ordre partiel pour ordonner des ensembles de valeurs partiellement ordonnées. Par la suite, dans la section 1.3 nous proposons un raffinement préadditif des ces relations. Dans la section 1.4, on considère une possible interprétation de l'ordre partiel comme une famille d'ordres totaux.

## 1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés

Dans cette section, nous rappelons les notions de base sur les relations d'ordre.

### 1.1.1 Relations d'ordre

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $X$ . La relation  $x\mathcal{R}y$  peut s'interpréter comme :  $x$  est au moins aussi plausible que  $y$  ou  $x$  est préféré à  $y$  au sens large, selon le contexte d'application.

$\mathcal{R}$  est une relation d'ordre [4] ssi elle vérifie pour tous  $x, y$  et  $z \in X$  :

- $x \mathcal{R} x$  (réflexivité)
- Si  $(x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x)$  alors  $x = y$  (antisymétrie)
- Si  $(x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z)$  alors  $x \mathcal{R} z$  (transitivité)

$\mathcal{R}$  est une relation d'ordre strict ssi elle vérifie pour tous  $x, y$  et  $z \in X$  :

- Si  $(x \mathcal{R} y)$  alors  $\text{non}(y \mathcal{R} x)$  (asymétrie)
- Si  $(x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z)$  alors  $x \mathcal{R} z$  (transitivité)

Une relation d'ordre strict est donc irréflexive.

Dans la suite de ce document, nous nous intéressons aux relations de pré-ordre.  $\mathcal{R}$  est un pré-ordre sur  $X$  ssi  $\mathcal{R}$  est réflexive et transitive. A partir du pré-ordre  $\mathcal{R}$  on peut définir les relations suivantes :

- $x >_{\mathcal{R}} y$  ssi  $(x \mathcal{R} y)$  et non  $(y \mathcal{R} x)$  (ordre strict associé à  $\mathcal{R}$ ).
- $x \not\sim_{\mathcal{R}} y$  ssi non  $(x \mathcal{R} y)$  et non  $(y \mathcal{R} x)$  (relation d'incomparabilité associée à  $\mathcal{R}$ ).
- $x \sim_{\mathcal{R}} y$  ssi  $(x \mathcal{R} y)$  et  $(y \mathcal{R} x)$  (relation d'équivalence associée à  $\mathcal{R}$ ).

Une relation de pré-ordre  $\mathcal{R}$  est dite totale ssi  $\forall x, y \in X, (x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x)$ .

Par exemple, dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels, la relation  $\geq$  définie  $a \geq b$  ssi la partie entière de  $a \geq$  partie entière de  $b$  est totale.

Dans le cas contraire, on dit que la relation est un pré-ordre partiel.

Par exemple la relation  $/$  dans  $\mathbb{N}$  définie par  $x/y$  ssi "x est un diviseur de y" est bien une relation de pré-ordre (elle est réflexive et transitive), mais elle ne peut être vérifiée que pour certains couples  $(x, y)$  : c'est donc une relation de pré-ordre partiel.

$X$  est dit partiellement ordonné ssi  $X$  est muni d'un pré-ordre partiel généralement noté  $\geq$ . Dans ce cas  $>$  dénote l'ordre strict associé.

### 1.1.2 Ensembles partiellement ordonnés

Dans la suite nous considérons aussi des applications  $f : \Omega \rightarrow L$  où  $S$  (appelé échelle) est un ensemble partiellement ordonné de valeurs qu'on peut attacher aux éléments de  $\Omega$ . L'application  $f$  est un ensemble flou [61] si  $L$  est un treillis complet.

Soit  $L$  un ensemble partiellement ordonné, et soit  $S \subseteq L$  :

- On note  $S^u$  ensemble des majorants de  $S$  :  $S^u = \{x \in L / \forall s \in S, x \geq s\}$ .
- On note  $S^l$  ensemble des minorants de  $S$  :  $S^l = \{x \in L / \forall s \in S, s \geq x\}$ .
- On note  $\max(S)$  l'ensemble des éléments maximaux de  $S$  :  $\max(S) = \{s \in S / \nexists s' \in S, s' > s\}$ .
- On note  $\min(S)$  l'ensemble des éléments minimaux de  $S$  :  $\min(S) = \{s \in S / \nexists s' \in S, s > s'\}$ .
- Dans le cas où  $\max(S^l)$  est réduit à un singleton, on l'appelle la borne inférieure et on la note  $\inf(S) = \max(S^l)$ .
- Dans le cas où  $\min(S^u)$  est réduit à un singleton, on l'appelle la borne supérieure et on la note  $\sup(S) = \min(S^u)$ .

#### Définition 1.

- $L$  est un treillis ssi pour toute paire d'éléments  $x, y \in L$ ,  $\inf(\{x, y\})$  et  $\sup(\{x, y\})$  existent [4, 29].
- $L$  est un treillis complet ssi pour tout  $S \subseteq L$ ,  $\inf(S)$  et  $\sup(S)$  existent.

**Remarque 1.** Soit  $L$  un treillis et  $S \subseteq L$ . On peut avoir  $S^u \cap S = \emptyset$  et  $S^l \cap S = \emptyset$ .

**Proposition 1.** [29] Tout treillis sans chaîne infinie strictement croissante ou strictement décroissante est complet.

Les opérateurs inf noté aussi  $\sqcap$  et sup noté aussi  $\sqcup$  satisfont les propriétés suivantes :

- Idempotence :  $x \sqcup x = x$  et  $x \sqcap x = x$
- Commutativité :  $x \sqcup y = y \sqcup x$  et  $x \sqcap y = y \sqcap x$
- Associativité :  $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$  et  $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$
- Absorption :  $x \sqcap (x \sqcup y) = x = (y \sqcap x) \sqcup x$

**Exemple 1.** Sur la **Figure. 1.1** (I) Le sous ensemble  $A = \{a, b\}$  admet une borne supérieure car  $A^u = \{c\}$  et  $\sup(A) = \{c\}$ , mais  $A$  n'admet pas une borne inférieure  $A^l$ . Dans (II) le sous ensemble  $B = \{a, b\}$  admet une borne inférieure  $B^l = \{e\}$  et  $\inf(B) = e$  et  $B$  admet aussi une borne supérieure car  $B^u = \{h, c, d, f\}$  et  $\min(B^u) = h$  donc  $\sup(B) = \{h\}$ .

(II) représente un treillis complet puisque  $\forall S \subseteq P, \inf(S)$  et  $\sup(S)$  existent.

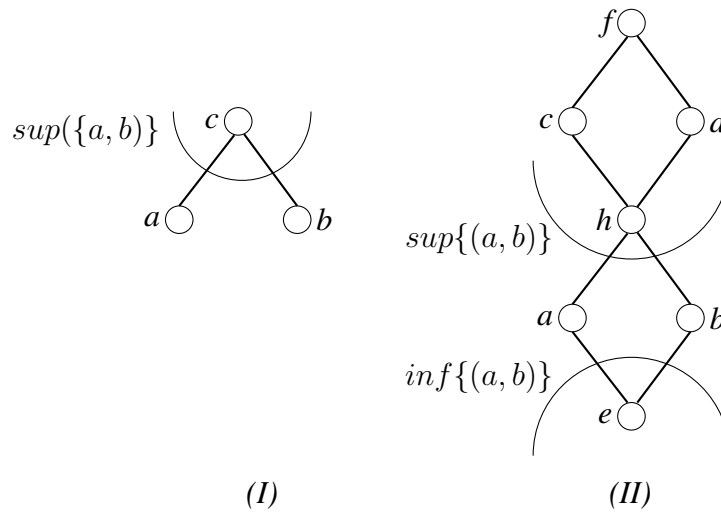


FIGURE 1.1 – Exemple de bornes inférieures et supérieures

## 1.2 Comparaison d'ensembles de valeurs partiellement ordonnées

Dans cette section, nous allons étudier les différentes possibilités de définition de relations d'ordre partiel pour comparer des ensembles de valeurs partiellement ordonnés. L'idée est de considérer les relations d'ordre total et d'essayer d'étendre chaque définition au cas partiel.

### 1.2.1 Rappel des propriétés des relations d'ordre entre sous-ensembles

On considère dans cette section un ensemble  $S$  muni d'une relation de pré-ordre partiel  $\succeq$ . Soit deux sous ensembles  $A, B \subseteq S$ . On va construire des relations  $\supseteq$  (et leur partie stricte  $\triangleright$ ) entre  $A$  et  $B$  induites par  $\succeq$  et étudier leurs propriétés, en vue de les utiliser pour définir une sémantique des bases logiques partiellement ordonnées.

Ces propriétés peuvent s'organiser comme suit :

1. Les propriétés caractérisant le type de relation : transitivité, antisymétrie, asymétrie, réflexivité.
2. Une propriété issue de la comparaison d'intervalles (propriété de Ferrers) [85] :

$$\text{Si } (A \triangleright B) \text{ et } (C \triangleright D) \text{ alors } (A \triangleright D) \text{ ou } (C \triangleright B)$$

3. Les propriétés exploitant les opérations ensemblistes d'inclusion, d'union, d'intersection.

- **Compatibilité avec l'inclusion (CI)** Si  $B \subseteq A$  alors  $A \supseteq B$
- **Préservation de l'ordre par inclusion (POI)** Si  $A \triangleright B$ ,  $A \subseteq A'$ , et  $B' \subseteq B$ , alors  $A' \triangleright B'$
- **Stabilité pour l'union (SU)** Si  $A \supseteq B$  alors  $A \cup C \supseteq B \cup C$
- **Stabilité pour l'intersection (SI)** Si  $A \supseteq B$  alors  $A \cap C \supseteq B \cap C$
- **Préadditivité (P)** Si  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$  alors  $(B \supseteq C \text{ ssi } A \cup B \supseteq A \cup C)$
- **Auto-dualité (A)**  $A \supseteq B \text{ ssi } \overline{B} \supseteq \overline{A}$

La compatibilité avec l'inclusion (CI) n'est jamais satisfaite pour une relation non réflexive, alors que la propriété (POI) a un sens à la fois pour la relation  $\supseteq$  et sa partie stricte  $\triangleright$ . (SU) n'a pas de sens pour une relation asymétrique (il suffit de prendre  $C = S$  par exemple). Les propriétés (P) et (A) ont un sens à la fois pour la relation  $\supseteq$  et sa partie stricte  $\triangleright$ . Toutes ces propriétés ont été définies et étudiées dans le cadre d'ordre totaux : (CI) et (POI) sont attendues si  $A \triangleright B$  exprime une confiance plus grande en  $A$  qu'en  $B$  ; (SU) est caractéristique des relations de

possibilité (Lewis [78], Dubois [34]) et (SI) des relations de nécessité [34] et d'encracinement épistémique en théorie de la révision [59]. Préadditivité et autodualité sont satisfaites par les mesures de probabilité [56].

4. Les propriétés typiques d'une vision qualitative (non-numérique) des ordres induits.

- **Qualitativité (Q)** Si  $A \cup B \triangleright C$  et  $A \cup C \triangleright B$ , alors  $A \triangleright B \cup C$
- **Négligeabilité (N)** Si  $A \triangleright B$  et  $A \triangleright C$ , alors  $A \triangleright B \cup C$

Il existe une forme faible de la qualitativité et de la négligeabilité. Cette forme sera notée QF et NF respectivement.

- **Qualitativité faible (QF)** Si  $A \cap B = A \cap C = B \cap C$  alors (Si  $A \cup C \triangleright B$  et  $A \cup B \triangleright C$  alors  $A \triangleright (B \cup C)$ )
- **Négligeabilité faible (NF)** Si  $A \cap B = A \cap C$  alors (Si  $A \triangleright B$  et  $A \triangleright C$  alors  $A \triangleright (B \cup C)$ )

Ces propriétés sont connues en théorie des possibilités et en logique non-monotone.

5. Les propriétés liées à la fermeture déductive de bases de connaissances partiellement ordonnées, issues de la littérature sur l'inférence non-monotone ; voir Friedman et Halpern [58], Dubois et Prade [46] et Halpern [67].

- **Clôture pour l'implication (CIM)** Si  $A \subseteq B$  et  $A \triangleright \bar{A}$  alors  $B \triangleright \bar{B}$
- **Clôture conditionnelle pour l'implication (CCI)** Si  $A \subseteq B$  et  $A \cap C \triangleright \bar{A} \cap C$  alors  $B \cap C \triangleright \bar{B} \cap C$
- **Clôture pour la conjonction (CC)** Si  $A \triangleright \bar{A}$  et  $B \triangleright \bar{B}$  alors  $(A \cap B) \triangleright \bar{A} \cap \bar{B}$
- **Clôture conditionnelle pour la conjonction (CCC)** Si  $C \cap A \triangleright C \cap \bar{A}$  et  $C \cap B \triangleright C \cap \bar{B}$  alors  $C \cap (A \cap B) \triangleright C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$
- **Disjonction à gauche (OR)** Si  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$  et  $B \cap C \triangleright B \cap \bar{C}$  alors  $(A \cup B) \cap C \triangleright (A \cup B) \cap \bar{C}$
- **Coupure (CUT)** Si  $A \cap B \triangleright A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \triangleright A \cap B \cap \bar{C}$  alors  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$
- **Monotonie faible (ou prudente) (MF)** Si  $A \cap B \triangleright A \cap \bar{B}$  et  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$  alors  $A \cap B \cap C \triangleright A \cap B \cap \bar{C}$

Ces propriétés sont intuitives si on interprète la relation  $A \triangleright \bar{A}$  comme la croyance acceptée en  $A$ , et  $A \cap C \triangleright \bar{A} \cap C$  comme la croyance acceptée en  $A$  dans le contexte  $C$  [40, 58]. Elles ne sont donc pas intéressantes à considérer pour une relation réflexive comme  $\triangleright$ .

On montre aisément :

**Proposition 2.** Soit  $\gg$  une relation binaire sur les sous-ensembles de  $S$ .



1. Si  $\gg$  satisfait CCI (resp. CCC), alors  $\gg$  satisfait CIM (resp. CC).
2. Si  $\gg$  satisfait POI, alors  $\gg$  satisfait CCI.
3. Si  $\gg$  est réflexive (R) et satisfait POI, alors  $\gg$  vérifie la compatibilité avec l'inclusion ensembliste (CI).
4. Si  $\gg$  satisfait POI et CCC, alors  $\gg$  satisfait la monotonie faible (MF).
5. Si  $\gg$  est transitive (T) et vérifie la compatibilité avec l'inclusion ensembliste (CI), alors  $\gg$  préserve l'ordre par inclusion (POI).
6. Si  $\gg$  est qualitative (Q) et préserve l'inclusion (POI), alors  $\gg$  satisfait la négligeabilité (N).
7. Si  $\gg$  est qualitative (Q) et préserve l'inclusion (POI), alors  $\gg$  est stable pour la conjonction conditionnelle (CCC).
8. Si  $\gg$  satisfait la négligeabilité (N) et préserve l'inclusion (POI), alors  $\gg$  satisfait la disjonction à gauche (OR).
9. Si  $\gg$  est qualitative (Q) et préserve l'inclusion (POI), alors  $\gg$  satisfait la coupure (CUT).
10. Si  $\gg$  est qualitative (Q) et préserve l'inclusion (POI), alors  $\gg$  satisfait la réciproque de (SU) : si  $A \cup C \gg B \cup C$  alors  $A \gg B$ .
11. Si  $\gg$  satisfait POI et elle est qualitative (Q), alors  $\gg$  est transitive.

**Preuve de la Proposition 2:**

1. Il suffit de prendre  $C = S$  et d'appliquer la propriété CCI. Idem pour CCC implique CC.
2. Supposons que  $A \subseteq B$  et  $A \cap C \gg \bar{A} \cap C$ . Alors  $A \cap C \subseteq B \cap C$  et  $\bar{B} \cap C \subseteq \bar{A} \cap C$ . D'après (POI), on obtient  $B \cap C \gg \bar{B} \cap C$ .
3. Par (R), on a  $B \gg \bar{B}$ . Supposons que  $B \subseteq A$ . Par (POI), on obtient alors  $A \gg \bar{B}$ .
4. Supposons que  $A \cap B \gg A \cap \bar{B}$  et  $A \cap C \gg A \cap \bar{C}$ .  
Par (CCC), on déduit que  $A \cap (B \cap C) \gg A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$ .  
Or,  $A \cap B \cap \bar{C} \subseteq A \cap \bar{C} \subseteq (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$ .  
Donc par (POI), on obtient  $A \cap B \cap C \gg A \cap B \cap \bar{C}$ .
5. Soit  $A \gg B$ ,  $A \subseteq A'$  et  $B' \subseteq B$ . Par (CI) on a  $A' \gg A$  et  $B \gg B'$ .  
Par (T) on déduit  $A' \gg B$  puis  $A' \gg B'$ .
6. Soit  $A \gg B$  et  $A \gg C$ .  
Par (POI) on a  $A \cup B \gg C$  et  $A \cup C \gg B$ . Puis, par (Q) on obtient  $A \gg B \cup C$ .

7. Soit  $C \cap A \gg C \cap \bar{A}$  et  $C \cap B \gg C \cap \bar{B}$ .  
 Posons  $A' = A \cap B \cap C$ ,  $B' = A \cap C \cap \bar{B}$ ,  $C' = \bar{A} \cap B \cap C$  et  $D' = C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$ . Alors  
 $A \cap C = A' \cup B'$ ,  $\bar{A} \cap C = C' \cup D'$ ,  $C \cap B = A' \cup C'$  et  $C \cap \bar{B} = B' \cup D'$ .  
 On a donc :  $A' \cup B' \gg C' \cup D'$  et  $A' \cup C' \gg B' \cup D'$ .  
 Par (POI) on a  $A' \cup B' \cup D' \gg C'$  et toujours  $A' \cup C' \gg B' \cup D'$ .  
 Par (Q) on a  $A' \gg B' \cup C' \cup D'$ . C'est-à-dire  $A \cap B \cap C \gg C \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = C \cap \overline{A \cap B}$ .
8. Supposons que  $A \cap C \gg A \cap \bar{C}$  et  $B \cap C \gg B \cap \bar{C}$ .  
 On a  $A \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C$  et  $B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C$ . Donc par (POI), on obtient  
 $(A \cup B) \cap C \gg A \cap \bar{C}$  et  $(A \cup B) \cap C \gg B \cap \bar{C}$ .  
 Puis par (N), on déduit que  $(A \cup B) \cap C \gg (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap \bar{C}$ .
9. Supposons que  $A \cap B \gg A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \gg A \cap B \cap \bar{C}$ .  
 Posons  $A' = A \cap C$ ,  $B' = A \cap B \cap \bar{C}$  et  $C' = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ .  
 On a  $C' \subseteq A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \subseteq A' \cup B'$ . Donc par (POI), on obtient que  $A' \cup B' \gg C'$ .  
 D'autre part, on a  $A \cap B \cap C \subseteq A' \cup C'$ . Donc par (POI), on obtient que  $A' \cup C' \gg B'$ .  
 En appliquant (Q), on déduit que  $A' \gg B' \cup C'$  soit encore  $A \cap C \gg A \cap \bar{C}$ .
10. Supposons que  $A \cup C \gg B \cup C$ . Par (POI),  $A \cup (C \cup B) \gg C$ . Puis par (Q),  $A \gg B \cup C$ ,  
 et encore par (POI)  $A \gg B$ .
11. Supposons que  $A \gg B$  et  $B \cup C$ . Par (POI),  $A \gg C \cup B$  et encore par (POI)  $B \gg C \cup A$ .  
 Ensuite, par (Q),  $A \cap B \gg C$  et encore une fois par (POI),  $A \gg C$ .

□

En conséquence de la proposition ci-dessus, toute relation binaire sur les sous-ensembles de  $S$  qui satisfait Q et POI satisfait aussi CCI, N, CCC, OR, CUT, MF et la réciproque de SU.

Il existe une forme encore plus faible de la qualitativité faible (resp. de la négligeabilité faible), qui est équivalente en présence de la préadditivité. Cette forme sera notée QD (resp ND) dans la suite.

- **Qualitativité pour les disjoints (QD)** Si  $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$  alors (Si  $A \cup C \triangleright B$  et  $A \cup B \triangleright C$  alors  $A \triangleright (B \cup C)$ )
- **Négligeabilité pour les disjoints (ND)** Si  $A \cap B = A \cap C = \emptyset$  alors (Si  $A \triangleright B$  et  $A \triangleright C$  alors  $A \triangleright (B \cup C)$ )

### Proposition 3.

1. Si  $\triangleright$  satisfait la qualitativité faible (QF) alors elle satisfait la qualitativité pour les disjoints (QD)
2. Si  $\triangleright$  satisfait la préadditivité (P) alors la qualitativité pour les disjoints (QD) est équivalente à la qualitativité faible (QF)

3. Si  $\triangleright$  satisfait la négligeabilité faible (NF) alors elle satisfait la négligeabilité pour les disjoints (ND)
4. Si  $\triangleright$  satisfait la préadditivité (P) alors la négligeabilité pour les disjoints (ND) est équivalente à la négligeabilité faible (NF)

**Preuve de la Proposition 3:**

1. Par définition.
2. On suppose que  $\triangleright$  satisfait la préadditivité (P) et la qualitativité pour les disjoints (QD). Soit  $A, B, C$  tels que  $A \cap B = A \cap C = B \cap C$ . Posons  $I = A \cap B = A \cap C = B \cap C$ ,  $X = A \setminus I, Y = B \setminus I, Z = C \setminus I$ . On a donc  $A = I \cup X, B = I \cup Y, C = I \cup Z$  et les ensembles  $X, Y, Z$  sont 2 à 2 disjoints. Supposons maintenant que  $A \cup C \triangleright B$  et  $A \cup B \triangleright C$ . Cela s'écrit aussi  $I \cup (X \cup Z) \triangleright I \cup Y$  et  $I \cup (X \cup Y) \triangleright I \cup Z$ . Comme  $I \cap (X \cup Y \cup Z) = \emptyset$ , la propriété P s'applique. On obtient donc l'équivalence avec  $(X \cup Z) \triangleright Y$  et  $(X \cup Y) \triangleright Z$ . On peut donc appliquer la propriété QD et obtenir que  $X \triangleright (Y \cup Z)$ . On applique de nouveau la préadditivité pour obtenir  $(I \cup X) \triangleright (I \cup Y \cup Z)$ , soit encore  $A \triangleright (B \cup C)$ . Et inversement.
3. Par définition.
4. On suppose que  $\triangleright$  satisfait la préadditivité (P) et la négligeabilité pour les disjoints (ND). La preuve de NF est analogue à celle pour la qualitativité. Soit  $A, B, C$  tels que  $A \cap B = A \cap C$ . Posons  $I = A \cap B = A \cap C, X = A \setminus I, Y = B \setminus I, Z = C \setminus I$ . On a donc  $A = I \cup X, B = I \cup Y, C = I \cup Z$  et  $X \cap Y = X \cap Z = \emptyset$ . Supposons maintenant que  $A \triangleright B$  et  $A \triangleright C$ . Cela s'écrit aussi  $I \cup X \triangleright I \cup Y$  et  $I \cup X \triangleright I \cup Z$ . On a  $I \cap (X \cup Y) = I \cap (X \cup Z) = \emptyset$ . La propriété P s'applique et permet d'obtenir l'équivalence avec  $X \triangleright Y$  et  $X \triangleright Z$ . On applique ensuite la propriété ND pour obtenir  $X \triangleright (Y \cup Z)$ . Comme  $I \cap (X \cup Y \cup Z) = \emptyset$ , on peut encore appliquer P et obtenir  $I \cup X \triangleright (I \cup Y) \cup (I \cup Z)$  soit encore  $A \triangleright (B \cup C)$ . Et inversement.

□

Il existe une version équivalente de la préadditivité.

**Proposition 4.** La relation  $\triangleright$  est préadditive ssi :

Si  $A \cup (B \cap C) = S$  alors  $(B \triangleright C \text{ ssi } A \cap B \triangleright A \cap C)$

**Preuve de la Proposition 4:** Supposons que la relation  $\triangleright$  satisfait P.

Notons que  $\overline{A} \subseteq (B \cap C)$  est équivalent à  $\overline{B \cap C} \subseteq A$ , qui s'écrit aussi  $A = \overline{B \cap C} \cup D$  avec  $D \subseteq B \cap C$ .

Posons  $A' = ((B \cap C) \setminus D), B' = A \cap B, C' = A \cap C$ .

On a  $\overline{A} \subseteq (B \cap C) \setminus D$  donc on a  $A' \cup B' = ((B \cap C) \setminus D) \cup (A \cap B) = B$  et aussi  $A' \cup C' = ((B \cap C) \setminus D) \cup (A \cap C) = C$ .

D'autre part, on a  $A' \cap A = \emptyset$  et  $B' \cup C' \subseteq A$  donc  $(B' \cup C') \cap A' = \emptyset$ .  
En appliquant la propriété P, on obtient donc que :

$$B' \succeq C' \text{ ssi } A' \cup B' \succeq A' \cup C'$$

ce qui s'écrit aussi :

$$A \cap B \succeq A \cap C \text{ ssi } B \succeq C$$

□

On a montré dans la Section 1.2.1 que si la relation  $\triangleright$  satisfait Q et POI, elle satisfait aussi CCI, N, CCC, OR, CUT, MF et la réciproque de SU. Nous proposons ci-dessous quelques résultats supplémentaires.

**Proposition 5.** *Si  $\triangleright$  satisfait POI, la qualitativité pour les disjoints (QD) et la négligeabilité pour les disjoints (ND), alors  $\triangleright$  satisfait OR, CCC, CUT et MF.*

**Preuve de la Proposition 5:**

1. On suppose :  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$  et  $B \cap C \triangleright B \cap \bar{C}$ , il faut montrer que  $(A \cup B) \cap C \triangleright (A \cup B) \cap \bar{C}$ .  
Par POI on a :  $(A \cap C) \cup (B \cup C) \triangleright A \cap \bar{C}$  et  $(A \cap C) \cup (B \cup C) \triangleright B \cap \bar{C}$ .  
Comme  $(A \cup B) \cap C \cap (A \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap C \cap (B \cap \bar{C}) = \emptyset$ , on peut appliquer ND.  
On obtient donc  $(A \cap C) \cup (B \cup C) \triangleright (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C})$ .
2. On suppose  $C \cap A \triangleright C \cap \bar{A}$  et  $C \cap B \triangleright C \cap \bar{B}$ .  
Posons  $A' = A \cap B \cap C$ ,  $B' = A \cap C \cap \bar{B}$ ,  $C' = \bar{A} \cap B \cap C$  et  $D' = C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$ . Alors  $A \cap C = A' \cup B'$ ,  $\bar{A} \cap C = C' \cup D'$ ,  $C \cap B = A' \cup C'$  et  $C \cap \bar{B} = B' \cup D'$ .  
On a donc :  $A' \cup B' \triangleright C' \cup D'$  et  $A' \cup C' \triangleright B' \cup D'$ .  
Par (POI) on a  $A' \cup B' \cup D' \triangleright C'$  et toujours  $A' \cup C' \triangleright B' \cup D'$ . Comme  $A' \cap (B' \cup D') = A' \cap C' = C' \cap (B' \cup D') = \emptyset$  on peut appliquer QD. On obtient donc  $A' \triangleright B' \cup C' \cup D'$ .  
Soit encore  $A \cap B \cap C \triangleright C \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$
3. On suppose  $A \cap B \triangleright A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \triangleright A \cap B \cap \bar{C}$ .  
Posons  $A' = A \cap C$ ,  $B' = A \cap B \cap \bar{C}$ ,  $C' = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ . On a  $C' \subseteq A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \subseteq A' \cup B'$ .  
Par POI, on obtient  $A' \cup B' \triangleright C'$ .  
D'autre part, on a  $A \cap B \cap C \subseteq A' \subseteq A' \cup C'$ . Par POI on obtient  $A' \cup C' \triangleright B'$ .  
Comme  $A' \cap B' = A' \cap C' = B' \cap C' = \emptyset$ , on peut appliquer QD. On obtient donc  $A' \triangleright B' \cup C'$  soit encore  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$ .
4. On suppose  $A \cap B \triangleright A \cap \bar{B}$  et  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$ .  
Par (CCC) on a  $A \cap B \cap C \triangleright A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$ .  
Par (POI) on a  $A \cap B \cap C \triangleright A \cap B \cap \bar{C}$  puisque  $A \cap B \cap \bar{C} \subseteq (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$

□

Une conséquence des propositions 3 et 5 est que si  $\triangleright$  satisfait POI, la qualitativité faible (QF) et la négligeabilité faible (NF), alors  $\triangleright$  satisfait OR, CCC, CUT et MF.

## 1.2.2 Transposition des propriétés à la relation duale

On définit le dual  $\triangleright^d$  d'une relation  $\triangleright$  en utilisant le complémentaire :

$$A \triangleright^d B \text{ ssi } \overline{B} \triangleright \overline{A}$$

**Proposition 6.**  $\overline{A \cup B} \triangleright^d \overline{A \cup B}$  ssi  $A \cap B \triangleright A \cap \overline{B}$

**Preuve de la Proposition 6:**  $\overline{A \cup B} \triangleright^d \overline{A \cup B}$  ssi  $\overline{\overline{A \cup B}} \triangleright \overline{\overline{A \cup B}}$  ssi  $A \cap B \triangleright A \cap \overline{B}$   $\square$

Les propriétés étudiées pour une relation  $\triangleright$  peuvent être donc transposées afin d'obtenir des propriétés pour la relation duale associée  $\triangleright^d$ .

Soit  $P$  une propriété de la relation  $\triangleright$ . Transposer  $P$  c'est écrire une propriété  $P^d$  de la relation duale  $\triangleright^d$  induite par  $P$ .  $P^d$  sera appelée duale de  $P$ .

**Proposition 7.** Si la relation  $\triangleright$  satisfait la propriété  $P$  et  $\succ = \triangleright^d$  alors  $\succ$  satisfait  $P^d$ .

**Preuve de la Proposition 7:** Dans la suite,  $\succ = \triangleright^d$ .

**Transposition de POI :** c'est elle-même.

**POI<sup>d</sup> = POI :** Si  $A \succ B$ ,  $A \subseteq A'$  et  $B' \subseteq B$  alors  $A' \succ B'$

**preuve**

On a  $\overline{B} \triangleright \overline{A}$ ,  $\overline{A'} \subseteq \overline{A}$ ,  $\overline{B} \subseteq \overline{B'}$  et  $\triangleright$  satisfait POI, donc  $\overline{B'} \triangleright \overline{A'}$ .

**Transposition de CI :** c'est elle-même.

**CI<sup>d</sup> = CI :** Si  $B \subseteq A$  alors  $A \succeq B$ .

**preuve**

Si  $B \subseteq A$  alors  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .

Comme  $\triangleright$  satisfait CI on obtient  $\overline{B} \triangleright \overline{A}$ .

**Transposition de Q :**

**Q<sup>d</sup> :** Si  $C \succ A \cap B$  et  $B \succ A \cap C$  alors  $B \cap C \succ A$ .

**preuve**

Q s'écrit : si  $A \cup B \triangleright C$  et  $A \cup C \triangleright B$  alors  $A \triangleright B \cup C$ .

$A \cup B \triangleright C$  s'écrit  $\overline{C} \succ \overline{A \cap B}$

$A \cup C \triangleright B$  s'écrit  $\overline{B} \succ \overline{A \cap C}$

Et  $A \triangleright B \cup C$  s'écrit  $\overline{B \cap C} \succ \overline{A}$ .

**Transposition de QF :**

**QF<sup>d</sup> :** Si  $A \cup B = A \cup C = B \cup C$ , alors si  $C \succ A \cap B$  et  $B \succ A \cap C$  alors  $B \cap C \succ A$ .

**preuve**

$A \cup B = A \cup C = B \cup C$  s'écrit aussi  $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap C} = \overline{B \cap C}$ .

**Transposition de QD :**

**QD<sup>d</sup> :** Si  $A \cup B = A \cup C = B \cup C = S$ , alors si  $C \succ A \cap B$  et  $B \succ A \cap C$  alors  $B \cap C \succ A$ .

**preuve**

$A \cup B = S$  s'écrit aussi  $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$  ou encore  $\bar{A} \subseteq B$ .

**Transposition de N :**

**N<sup>d</sup> ou l'adjonction ADJ :** Si  $B \succ A$  et  $C \succ A$  alors  $B \cap C \succ A$ .

**preuve**

N dit que  $\bar{A} \triangleright \bar{B}$  et  $\bar{A} \triangleright \bar{C}$  implique  $\bar{A} \triangleright \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{B \cap C}$ . Donc  $B \succ A$  et  $C \succ A$  implique  $B \cap C \succ A$ .

**Transposition de NF :**

**NF<sup>d</sup> ou l'adjonction faible ADJF :** Si  $A \cup B = A \cup C$ , alors si  $B \succ A$  et  $C \succ A$  alors  $B \cap C \succ A$ .

**Transposition de ND :**

**ND<sup>d</sup> ou l'adjonction pour les disjoints ADJD :** Si  $A \cup B = S$  et  $A \cup C = S$  (ou encore  $\bar{A} \subseteq (B \cap C)$ ), alors si  $B \succ A$  et  $C \succ A$  alors  $B \cap C \succ A$ .

**Transposition de SU :** C'est la stabilité pour l'intersection

**SU<sup>d</sup> = SI :** Si  $B \succ A$  alors  $B \cap C \succ A \cap C$ .

**preuve**

Si  $\bar{A} \triangleright \bar{B}$  et  $\triangleright$  satisfait SU alors  $\bar{A} \cup \bar{C} \triangleright \bar{B} \cup \bar{C}$ , soit encore  $B \cap C \succ A \cap C$ .

**Transposition de la pré-additivité P :** c'est elle-même.

**P<sup>d</sup> = P :**

**preuve**

Si  $\triangleright$  satisfait P, on a : si  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$  alors  $(C \triangleright B \text{ ssi } A \cup C \triangleright A \cup B)$ .

Soit encore pour la relation duale : si  $A \cup (B \cap C) = S$  alors  $B \succ C$  ssi  $A \cap B \succ A \cap C$  (P<sup>d</sup>).

D'après la proposition 4, la propriété ci-dessus est une forme équivalente de la propriété P.

Dans la suite on note  $\bar{A} \cup B$  comme  $A \rightarrow B$  (implication)

**Transposition de OR :**

**OR<sup>d</sup> :** Si  $A \rightarrow C \succ A \rightarrow \bar{C}$  et  $B \rightarrow C \succ B \rightarrow \bar{C}$  alors  $(A \cup B) \rightarrow C \succ (A \cup B) \rightarrow \bar{C}$ .

**preuve**

On a  $A \rightarrow C \succ A \rightarrow \bar{C}$  ssi  $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$  et  $B \rightarrow C \succ B \rightarrow \bar{C}$  ssi  $B \cap C \triangleright B \cap \bar{C}$ . Comme  $\triangleright$  satisfait OR, on a :  $(A \cup B) \cap C \triangleright (A \cup B) \cap \bar{C}$ , soit encore  $(A \cup B) \rightarrow C \succ (A \cup B) \rightarrow \bar{C}$ .

**Transposition de CCI :**

**CCI<sup>d</sup> :** Si  $C \rightarrow A \succ C \rightarrow \bar{A}$  et  $A \subseteq B$  alors  $C \rightarrow B \succ C \rightarrow \bar{B}$ .

**preuve**

C'est évident car  $C \rightarrow A \succ C \rightarrow \bar{A}$  veut dire  $C \cap A \triangleright C \cap \bar{A}$  et  $A \subseteq B$  ssi  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ .

**Transposition de CCC :**

**CCC<sup>d</sup> :** Si  $C \rightarrow A \succ C \rightarrow \bar{A}$  et  $C \rightarrow B \succ C \rightarrow \bar{B}$  alors  $C \rightarrow (A \cap B) \succ C \rightarrow \overline{A \cap B}$ .  
**preuve** analogue à la preuve précédente.

**Transposition de CUT :**

**CUT<sup>d</sup> :** Si  $A \rightarrow B \succ A \rightarrow \bar{B}$  et  $(A \cap B) \rightarrow C \succ (A \cap B) \rightarrow \bar{C}$  alors  $A \rightarrow C \succ A \rightarrow \bar{C}$ .  
**preuve**  
 On a  $A \cap B \triangleright A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \triangleright A \cap B \cap \bar{C}$ . On applique CUT pour  $\triangleright$  et on obtient :  
 $A \cap C \triangleright A \cap \bar{C}$ .

**Transposition de MF :**

**MF<sup>d</sup> :** Si  $A \rightarrow B \succ A \rightarrow \bar{B}$  et  $A \rightarrow C \succ A \rightarrow \bar{C}$  alors  $(A \cap B) \rightarrow C \succ (A \cap B) \rightarrow \bar{C}$ .  
**preuve** analogue à la preuve précédente.

□

### 1.2.3 Dominance sûre et dominance risquée

Nous étendons au cas partiel les définitions de dominance sûre et risquée définies dans le cas total (Annexe A.3.1).

**Définition 2** (Dominance sûre).

- *Dominance sûre stricte* :  $A \succ_{ss} B$  ssi  $\forall a \in A, \forall b \in B, a > b^1$
- *Dominance sûre large* :  $A \succeq_{sl} B$  ssi  $\forall a \in A, \forall b \in B, a \geq b^2$
- *Relation stricte associée à la dominance sûre large* :  $A \succ_{sl} B$  ssi  $A \succeq_{sl} B$  et  $\neg(B \succeq_{sl} A)^3$ .

**Proposition 8.** *La relation  $\succ_{ss}$  satisfait la monotonie faible (MF) et la clôture conditionnelle pour la conjonction (CCC).*

**Preuve de la Proposition 8:**

**CCC** On suppose que  $A \cap C \succ_{ss} \bar{A} \cap C$  et  $B \cap C \succ_{ss} \bar{B} \cap C$ . Soit  $x \in A \cap B \cap C$  et  $x' \in (\overline{A \cap B}) \cap C$ . Alors  $x \in A \cap C$  et  $x \in B \cap C$ . D'autre part,  $x' \in (C \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{B})$ . Si  $x' \in (C \cap \bar{A})$ , comme  $A \cap C \succ_{ss} \bar{A} \cap C$ , on déduit que  $x > x'$ . Si  $x' \in (C \cap \bar{B})$ , comme  $B \cap C \succ_{ss} \bar{B} \cap C$ , on déduit aussi que  $x > x'$ . Donc,  $A \cap B \cap C \succ_{ss} (\overline{A \cap B}) \cap C$ .

1. la relation  $\succ_{ss}$  est notée  $\triangleright_3$  chez Halpern [67]
2. la relation  $\succeq_{sl}$  est notée  $\triangleright_1$  chez Halpern [67]
3. la relation  $\succ_{sl}$  est notée  $\triangleright_2$  chez Halpern [67]

**MF** On suppose que  $A \cap B \succ_{Fs} A \cap \bar{B}$  et  $A \cap C \succ_{Fs} A \cap \bar{C}$ . Soit  $x \in A \cap B \cap C$  et  $x' \in A \cap B \cap \bar{C}$ . Alors  $x \in A \cap C$  et  $x' \in A \cap \bar{C}$ . Comme  $A \cap C \succ_{ss} A \cap \bar{C}$ , on en déduit que  $x > x'$ . Donc  $A \cap B \cap C \succ_{ss} A \cap B \cap \bar{C}$ .

□

Les contre-exemples suivants montrent que la dominance sûre stricte ne satisfait ni la clôture pour l'implication, ni la coupure, ni la disjonction à gauche, ni la propriété de Ferrers. En vertu de la proposition 2, elle ne satisfait donc ni (CCI), ni (POI).

**Exemple 2.** *CIM* Soit  $S = \{a, b, c\}$  avec  $a > b, a > c$  et  $b \sim c$ . Soit  $A = \{a\}$ ,  $B = \{a, b\}$ .

On a  $A \succ_{ss} \bar{A}$  et  $A \subseteq B$  mais on n'a pas  $B \succ_{ss} \bar{B}$ .

*CUT* Soit  $S = \{a, b, c\}$  avec  $c > b > a$ . Soit  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{b, c\}$  et  $C = \{a, c\}$ .

On a  $A \cap B \succ_{ss} A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \succ_{ss} A \cap B \cap \bar{C}$  mais on n'a pas  $A \cap C \succ_{Fs} A \cap \bar{C}$ .

*OR* Soit  $S = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b, c > d$ . Soit  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d\}$  et  $C = \{a, c\}$ .

On a  $A \cap C \succ_{ss} A \cap \bar{C}$  et  $B \cap C \succ_{ss} B \cap \bar{C}$  mais on n'a pas  $(A \cup B) \cap C \succ_{ss} (A \cup B) \cap \bar{C}$ .

*Ferrers* Soit  $S = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b, c > d$ . Soit  $A = \{a\}$ ,  $B = \{b\}$ ,  $C = \{c\}$  et  $D = \{d\}$ .

On a  $A \succ_{ss} B, C \succ_{Fs} D$  mais ni  $A \succ_{ss} D$ , ni  $C \succ_{ss} B$ .

**Définition 3** (Dominance risquée).

- *Dominance risquée stricte* :  $A \succ_{rs} B$  ssi  $\exists a \in A, \exists b \in B, a > b$ .
- *Dominance risquée large* :  $A \succeq_{rl} B$  ssi  $\exists a \in A, \exists b \in B, a \geq b$ .
- *Relation stricte associée à la dominance risquée large* :  $A \succ_{rl} B$  ssi  $A \succeq_{rl} B$  et  $\neg(B \succeq_{rl} A)$ .

Dans le cas où  $S$  est totalement ordonné, on a  $A \succeq_{sl} B$  ssi  $\neg(B \succ_{ss} A)$  et  $A \succ_{rs} B$  ssi  $\neg(B \succeq_{sl} A)$ .

Dans le cas partiel :

- On n'a plus  $A \succeq_{rl} B$  ssi  $\neg(B \succ_{ss} A)$  mais  $A \succeq_{rl} B$  ssi  $\neg(\forall a \in A, \forall b \in B, b > a$  ou  $a \not\approx b)$ .
- De même, on n'a plus  $A \succ_{rs} B$  ssi  $\neg(B \succ_{sl} A)$  mais  $A \succ_{rs} B$  ssi  $\neg(\forall a \in A, \forall b \in B, b \geq a$  ou  $a \not\approx b)$ .

**Exemple 3.** Soit  $S = \{a, b, c, d, e, f, o\}$  partiellement ordonné avec  $d > c > o, b > a > e > o$  et  $f > e > o$  (**Figure. 1.2**). Soit  $A = \{b\}$  et  $B = \{a, e\}$ , on a  $A \succ_{sl} B$ . Soit  $C = \{d, e\}$  et  $D = \{c, f\}$ , on a  $C \succ_{rs} D$



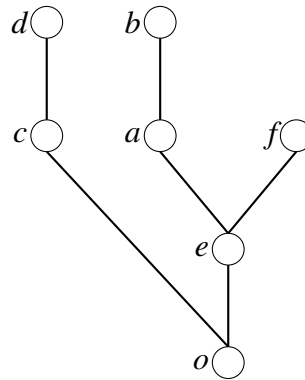


FIGURE 1.2 – L'ordre partiel de l'exemple 3

La partie stricte de la dominance sûre large diffère aussi de la dominance sûre stricte dans ce cas car elle demande  $\forall a \in A, \forall b \in B, a \geq b$  et  $\exists a \in A, b \in B, a > b$ .

Notons que la dominance sûre stricte est transitive et acyclique, la dominance sûre large est transitive, antisymétrique mais non réflexive (déjà dans le cas totalement ordonné).

Enfin on peut exprimer la relation  $\succ_{sl}$  en termes d'ensembles d'éléments maximaux :

**Proposition 9.** *Si  $S$  ne contient aucune chaîne infinie strictement croissante, ni strictement décroissante, alors*

1.  $A \succ_{ss} B$  ssi  $\min(A) \succ_{ss} \max(B)$
2.  $A \succeq_{sl} B$  ssi  $\min(A) \succeq_{sl} \max(B)$

**Preuve de la Proposition 9:**

1. Dans un sens c'est évident. Supposons  $\min(A) \succ_{ss} \max(B)$  et  $a \in A, b \in B$ . Alors, d'après l'hypothèse sur  $S$ ,  $\exists a' \in \min(A), b' \in \max(B) : a \geq a', b \leq b'$ , mais  $\forall a' \in \min(A), \forall b' \in \max(B), a' > b'$ . Donc  $a \geq a' > b' \geq b$ .
2. La preuve est semblable

□

Dans l'optique du raisonnement dans l'incertain, la dominance sûre n'est pas très intéressante, car dans sa forme stricte elle ne peut comparer que les ensembles disjoints, et dans sa forme faible elle n'est même pas réflexive. La dominance sûre permet de capturer une idée très forte de la croyance acceptée (croyance robuste) car si  $A \succ_{sl} B$  la plausibilité de n'importe quelle réalisation de  $A$  est supérieure à celle de n'importe quelle réalisation de  $B$ .

## 1.2.4 Dominance optimiste

La dominance optimiste s'inspire de la comparaison entre  $\max(A)$  et  $\max(B)$ . Dans le cas total elle peut s'exprimer de deux façons, qui ne sont plus équivalentes ici et que nous appellerons faible et forte respectivement.

### 1.2.4.1 Dominance optimiste faible

**Définition 4** (Dominance optimiste faible). *On considère trois variantes :*

- *Dominance optimiste faible stricte* :  $A \succ_{ofs} B$ <sup>4</sup> ssi  $A \neq \emptyset, \forall b \in B, \exists a \in A, a > b$
- *Dominance optimiste faible large* :  $A \succeq_{ofl} B$ <sup>5</sup> ssi  $\forall b \in B, \exists a \in A, a \geq b$ .
- *Ordre strict associé à la dominance optimiste faible large* :  $A \succ_{ofl} B$ <sup>6</sup> ssi  $A \succeq_{ofl} B$  et  $\neg(B \succeq_{ofl} A)$  ssi  $\forall b \in B, \exists a \in A, a \geq b$  et  $\exists a' \in A, \forall b \in B, \text{ soit } a' > b \text{ soit } a' \not\approx b$ .

**Exemple 3 (suite)** Soit  $A = \{b, f\}$  et  $B = \{e, a\}$ , on a :  $A \succ_{ofs} B$

La relation  $\succ_{ofs}$  est un ordre partiel strict. On a toujours  $A \succ_{ofs} \emptyset$ , sauf si  $A$  est vide. La relation  $\succeq_{ofl}$  est réflexive et transitive. On a  $A \succeq_{ofl} \emptyset$ , mais pas  $\emptyset \succeq_{ofl} B$  sauf si  $B$  est vide.

La proposition suivante indique que la dominance optimiste faible est appropriée pour la représentation de la plausibilité.

### Proposition 10.

**La dominance optimiste faible stricte  $\succ_{ofs}$  est un ordre strict qui vérifie :**

1. *la qualitatativité (Q)*
2. *la préservation de l'ordre par inclusion (POI)*

*Et donc par la proposition 2 :*

- *la réciproque de (SU)*
- *la négligeabilité (N)*
- *la clôture conditionnelle pour l'implication (CCI)*
- *la clôture conditionnelle pour la conjonction (CCC)*
- *la disjonction à gauche (OR)*

4. Halpern [67] la note  $\succ^s$

5. Halpern [67] la note  $\succeq^s$

6. Halpern [67] la note  $\succ'$ .

- la coupure (CUT)
- la monotonie faible (MF)

**La dominance optimiste faible  $\succeq_{ofl}$  large vérifie les propriétés suivantes :**

1. le respect de l'inclusion ensembliste (CI)
2. la préservation de l'ordre par inclusion (POI)
3. la négligeabilité (N)
4. la stabilité pour l'union (SU)
5. la clôture conditionnelle pour l'implication CCI
6. la disjonction à gauche (OR)
7. la coupure (CUT)

**La relation d'ordre strict  $\succ_{ofl}$  vérifie :** Les propriétés de préservation de l'ordre par inclusion (POI) et la clôture conditionnelle pour l'implication (CCI).

**Preuve de la Proposition 10:**

$\succ_{ofs}$  Q et POI ont été prouvées par Halpern. D'autre part d'après la proposition 2,  $\succ_{ofs}$  satisfait les propriétés N, CCI, CCC, la réciproque de SU, CUT, OR et MF.

$\succeq_{ofl}$  POI et N ont été prouvées par Halpern. D'autre part d'après la proposition 2, il suffit de prouver SU et CUT.

- SU :  
On suppose  $A \succeq_{ofl} B$ . Montrons que  $A \cup C \succeq_{ofl} B \cup C$ . Soit  $b \in B \cup C$ . Si  $b \in C$ , prenons  $a = b$ . On a  $a \in A \cup C$  et  $a \geq b$ . Si  $b \in B$ ,  $\exists a \in A, a \geq b$ . Donc  $\exists a \in A \cup C, a \geq b$ .
- CUT :  
On suppose  $A \cap B \succeq_{ofl} A \cap \bar{B}$ . Et on suppose  $A \cap B \cap C \succeq_{ofl} A \cap B \cap \bar{C}$ , alors  $A \neq \emptyset$  et  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ , donc  $A \cap C \neq \emptyset$ . Montrons que  $A \cap C \succeq_{ofl} A \cap \bar{C}$ . Soit  $x' \in A \cap \bar{C}$  :
  - Soit  $x' \in B$  alors  $x' \in A \cap B \cap \bar{C}$  donc  $\exists x \in A \cap B \cap C \subseteq A \cap C, x \geq x'$
  - Soit  $x' \in \bar{B}$  alors  $x' \in A \cap \bar{B}$  alors  $\exists x \in A \cap B, x \geq x'$  :
    - \* Si  $x \in C, x \in A \cap C$
    - \* Si  $x \notin C, x \in A \cap B \cap \bar{C}, \exists y \in A \cap B \cap C, y \geq x$  donc  $y \in A \cap C$  et  $y \geq x \geq x'$ .

$\succ_{ofl}$  POI a été prouvée par Halpern. D'autre part d'après la proposition 2, CCI est une conséquence de POI.

□

La relation  $\succ_{ofs}$  ne satisfait pas la propriété de Ferrers :

**Exemple 4.** Soit  $S = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b, c > d$ . Soit  $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$  et  $D = \{d\}$ .

On a  $A \succ_{ofs} B, C \succ_{ofs} D$  mais ni  $A \succ_{ofs} D$ , ni  $C \succ_{ofs} B$ .

La relation  $\succeq_{ofl}$  n'est en général pas qualitative et  $\succ_{ofl}$  ne satisfait pas la Négligeabilité, comme le montre le contre-exemple suivant donné par Halpern [67].

**Exemple 5.** Soit  $S = \{a, b\}$  avec  $a, b$  incomparables. Soit  $A = \{a\}, B = C = \{b\}$ . On a bien  $\{a, b\} \succeq_{ofl} \{b\}$  mais pas  $\{a\} \succeq_{ofl} \{b\}$ .

D'autre part, on a bien  $\{a, b\} \succ_{ofl} \{a\}$  et  $\{a, b\} \succ_{ofl} \{b\}$  mais pas  $\{a, b\} \succ_{ofl} \{a, b\}$ .

De plus, la relation  $\succ_{ofl}$  ne satisfait ni la disjonction à gauche (OR) ni la coupure (CUT).

**Exemple 6.** Soit  $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  ensemble partiellement ordonné par  $f \sim h, e \sim g, f > a, e > b, a > c$  et  $b > d$ .

**OR :** Soit  $A = \{a, c, e, g\}, B = \{b, d, f, h\}$  et  $C = \{a, b, e, f\}$  trois sous-ensembles de  $S$ .

On a  $A \cap C \succ_{ofl} A \cap \bar{C}$  et  $B \cap C \succ_{ofl} B \cap \bar{C}$  mais pas  $(A \cup B) \cap C \succ_{ofl} (A \cup B) \cap \bar{C}$ .

**CUT :** Soit  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, B = \{a, b, c, e, g, h\}$  et  $C = \{a, b, d, g, h\}$  trois sous-ensembles de  $S$ .

On a  $A \cap B \succ_{ofl} A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \succ_{ofl} A \cap B \cap \bar{C}$  mais pas  $A \cap C \succ_{ofl} A \cap \bar{C}$ .

### Proposition 11.

- Si  $A \succ_{ofs} B$  alors  $A \succeq_{ofl} B$ .
- Si  $A \succ_{ofs} B$  alors  $A \succ_{ofl} B$ . L'inverse n'est pas valide sauf si  $\succ$  est un ordre total.

### Preuve de la Proposition 11:

Si  $A \succ_{ofs} B$  alors de manière évidente  $A \succeq_{ofl} B$ . Supposons que l'on a aussi  $B \succeq_{ofl} A$ . Alors  $A \neq \emptyset, \forall b \in B, \exists a \in A, a > b$  et  $\forall a \in A, \exists b \in B, b \geq a$ . Donc  $B \neq \emptyset$  et  $\forall b \in B, \exists b' \in B, b' > b$ . Ce qui est impossible, donc  $A \succ_{ofl} B$ . □

Enfin on peut exprimer la relation  $\succ_{ofs}$  en termes d'ensembles d'éléments maximaux :

**Proposition 12.** Si  $S$  ne contient aucune chaîne infinie strictement croissante, ni strictement décroissante,

$$A \succ_{ofs} B \text{ ssi } \max(A) \succ_{ofs} \max(B) \text{ ssi } \max(A \cup B) \subseteq A \setminus B$$

**Preuve de la Proposition 12:**

L'hypothèse sur  $S$  assure que tout élément de  $S$  non maximal est strictement majoré par un élément maximal.

$\Rightarrow$ ) On suppose  $\forall b \in B, \exists a \in A a > b$ . Soit  $x \in \max(A \cup B)$ . Alors  $x \in A \cup B$ .

Si  $x \in B$  alors  $\exists a \in A, a > x$  contredit  $x \in \max(A \cup B)$  donc  $x \in A \setminus B$ .

$\Leftarrow$ ) On suppose  $\max(A \cup B) \subseteq A \setminus B$ . Soit  $b \in B$  alors  $b \notin \max(A \cup B)$ , donc il existe  $x \in \max(A \cup B), b < x$ . Comme  $\max(A \cup B) \subseteq A \setminus B$  alors  $x \in A \setminus B$  d'où  $x \in A$ .  $\square$

Il est donc clair que la relation de dominance optimiste faible stricte est la plus appropriée pour représenter la plausibilité.

**1.2.4.2 Dominance optimiste forte**

Considérons l'autre définition de la dominance optimiste, qui est plus forte que celle ci-dessus dans le cas partiel.

**Définition 5** (Dominance optimiste forte).

- *Dominance optimiste forte stricte* :  $A \succ_{oFs} B$  ssi  $\exists a \in A, \forall b \in B, a > b$
- *Dominance optimiste forte large* :  $A \succeq_{oFl} B$  ssi  $\exists a \in A, \forall b \in B, a \geq b$
- *Ordre strict associé à la dominance optimiste forte large* :  
 $A \succ_{oFl} B$  ssi  $A \succeq_{oFl} B$  et  $\neg(B \succeq_{oFl} A)$  ssi  $\exists a \in A, \forall b \in B, a \geq b$  et  $\forall b \in B, \exists a \in A, \text{ soit } a > b \text{ soit } a \not\approx b$ .

**Exemple 3 (suite)** Soit  $A = \{b, d\}$  et  $B = \{a, e\}$ , on a  $A \succ_{oFs} B$

La relation  $\succ_{oFs}$  est un ordre partiel strict. Si  $A \neq \emptyset, A \succ_{oFs} \emptyset$  mais jamais  $\emptyset \succ_{oFs} B$ . Comme indiqué dans Benferhat, Lagrue, Papini [18], la relation  $\succ_{oFs}$  laisse beaucoup d'incomparabilités, et la relation  $\succeq_{oFl}$  ne satisfait pas la compatibilité avec l'inclusion (CI). En effet, si  $A \subseteq B$ , il n'existe pas toujours  $b \in B$  tel que  $b \geq a, \forall a \in A$ . En fait,  $\succeq_{oFl}$  est transitive mais n'est pas réflexive.

La dominance optimiste forte satisfait les propriétés suivantes :

**Proposition 13.** *La dominance optimiste forte stricte  $\succ_{oFs}$  est un ordre strict qui vérifie :*

1. *la préservation de l'ordre par inclusion (POI)*
2. *la réciproque de (SU)*
3. *la clôture conditionnelle pour l'implication (CCI)*
4. *la monotonie faible (MF)*

**Preuve de la Proposition 13:** D'après la proposition 2, il suffit de prouver POI, la réciproque de SU et MF.

- POI :  
On suppose  $A \succ_{oFs} B$ ,  $A \subseteq A'$ ,  $B \supseteq B'$  Montrons que  $A' \succ_{oFs} B'$ .  
 $A \succ_{oFs} B$  donc  $\exists a \in A, \forall b \in B, a > b$ .  $a \in A'$  et  $\forall b \in B', b \in B$  donc  $a > b$ .
- Réciproque de (SU) :  
On suppose que  $A \cup C \succ_{oFs} B \cup C$ . Donc,  $\exists a \in A \cup C, \forall b \in B \cup C, a > b$ . Si  $a \in C$ , alors  $a \in B \cup C$  donc  $a > a$  ce qui est impossible. Donc  $a \in A$  et  $\forall b \in B, a > b$ . Donc on a bien  $A \succ_{oFs} B$ .
- MF :  
Supposons que  $A \cap B \succ_{oFs} A \cap \overline{B}$  et  $A \cap C \succ_{oFs} A \cap \overline{C}$ . Nous devons montrer que  $A \cap B \cap C \succ_{oFs} A \cap B \cap \overline{C}$ .  
 $\exists b \in A \cap B, \forall b' \in A \cap \overline{B}, b > b'$  et  $\exists c \in A \cap C, \forall c' \in A \cap \overline{C}, c > c'$ . Montrons que si  $b \in A \cap B \cap \overline{C}$  alors  $c \in A \cap B \cap C$  et  $c > b$  (resp. si  $c \in A \cap \overline{B} \cap C$  alors  $b \in A \cap B \cap C$  et  $b > c$ ).  
Supposons que  $b \in A \cap B \cap \overline{C}$ . Alors  $c > b$ , par définition de  $c$ . Si  $c \in A \cap \overline{B} \cap C$ , par définition de  $b$ , on a  $b > c$  et donc une contradiction. Donc  $c \in A \cap B \cap C$ . De la même façon on prouve que si  $c \in A \cap \overline{B} \cap C$  alors  $b > c$  et  $b \in A \cap B \cap C$ . Donc soit  $b$ , soit  $c$  est élément de  $A \cap B \cap C$ .  
 $\forall z \in A \cap B \cap \overline{C}, z \in A \cap \overline{C}$  donc  $c > z$ .
  - Si  $c \in A \cap B \cap C$  alors on a trouvé l'élément cherché dans  $A \cap B \cap C$ .
  - Si  $b \in A \cap B \cap C$  alors  $b > c$  donc  $b > z$  et on a aussi trouvé l'élément cherché dans  $A \cap B \cap C$ .

□

En revanche, la dominance optimiste forte stricte ne satisfait ni la negligéabilité, ni la qualitativité, ni la clôture conditionnelle pour la conjonction, ni la coupure (CUT) ni la disjonction à gauche (OR), comme le montrent les exemples suivants.

**Exemple 7.** Soit  $S = \{a_1, a_2, b, c\}$  avec  $a_1 > b$  et  $a_2 > c$ , et les sous-ensembles  $A = \{a_1, a_2\}$ ,  $B = \{b\}$  et  $C = \{c\}$ .  
On a  $A \succ_{oFs} B$ ,  $A \succ_{oFs} C$  mais pas  $A \succ_{oFs} (B \cup C)$ . Donc (N) n'est pas vérifiée.

D'après la proposition 2, la relation  $\succ_{oFs}$  ne vérifie donc pas la qualitativité (Q).

**Exemple 8.** Soit  $S = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b$  and  $c > d$ .

- Soit les sous-ensembles  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, c, d\}$  et  $C = \{a, c\}$ .  
On a  $A \cap B \succ_{oFs} A \cap \overline{B}$ ,  $A \cap B \cap C \succ_{oFs} A \cap B \cap \overline{C}$  mais pas  $A \cap C \succ_{oFs} A \cap \overline{C}$ .  
Donc la coupure n'est pas vérifiée.

- Soit les sous-ensembles  $A = \{a, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  et  $C = \{a, b, c, d\}$ .  
On a  $C \cap A \succ_{oFs} C \cap \bar{A}$  et  $C \cap B \succ_{oFs} C \cap \bar{B}$  mais pas  $C \cap A \cap B \succ_{oFs} C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$ .  
Donc la clôture conditionnelle pour la conjonction n'est pas vérifiée.

Supposons enfin que  $\exists a \in A \cap C, a > x, \forall x \in A \cap \bar{C}$  et  $\exists b \in B \cap C, b > x, \forall x \in B \cap \bar{C}$  avec  $a$  et  $b$  non comparables. Alors il se peut qu'il n'existe aucun  $c \in (A \cup B) \cap C$  qui tout seul domine tous les éléments de  $(A \cup B) \cap \bar{C}$ . Donc la disjonction à gauche n'est pas vérifiée.

La dominance optimiste forte stricte ne satisfait pas non plus la propriété de Ferrers.

**Exemple 4 (suite)** Soit  $S = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b, c > d$ . Soit  $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$  et  $D = \{d\}$ .

On a  $A \succ_{oFs} B, C \succ_{oFs} D$  mais ni  $A \succ_{oFs} D$ , ni  $C \succ_{oFs} B$ .

**Proposition 14.**

$$\text{Si } A \succ_{oFs} B \text{ alors } A \succeq_{oFl} B$$

$$\text{Si } A \succ_{oFs} B \text{ alors } A \succ_{oFl} B$$

L'inverse n'est pas valide sauf si  $\succ$  est un ordre total.

**Preuve de la Proposition 14:**

Si  $A \succ_{oFs} B$  alors de manière évidente  $A \succeq_{oFl} B$ . Supposons que l'on a aussi  $B \succeq_{oFl} A$ . Alors  $\exists a_1 \in A, \forall b \in B, a_1 > b$  et  $\exists b_1 \in B, \forall a \in A, b_1 \geq a$  Donc  $a_1 > b_1$  et  $b_1 \geq a_1$ , ce qui est impossible. Donc  $A \succ_{oFl} B$ .  $\square$

Les relations de dominance optimiste forte stricte et large sont plus fortes que les relations de dominance optimiste faible stricte et large.

**Proposition 15.**

$$\text{Si } A \succ_{oFs} B \text{ alors } A \succ_{ofs} B$$

$$\text{Si } A \succeq_{oFl} B \text{ alors } A \succeq_{ofl} B$$

L'inverse n'est pas valide sauf si  $\succ$  est un ordre total.

Cependant, il n'y a pas d'implication entre les relations  $\succ_{oFl}$  et  $\succ_{ofl}$  comme le montrent les exemples suivants :

**Exemple 9.** Soit  $S = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$  avec  $a_1 \sim b_1 > b_3$  et  $a_2 > b_2$ . Alors  $\{a_1, a_2\} \succ_{ofl} \{b_1, b_2, b_3\}$ , mais pas  $\{a_1, a_2\} \succ_{oFl} \{b_1, b_2, b_3\}$ .

**Exemple 10.** Soit  $S = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$  avec  $a_1 \sim b_1 > b_3$ , et  $a_1 > b_2 > a_2$ . Alors  $\{a_1, a_2\} \succ_{oFl} \{b_1, b_2, b_3\}$ , mais pas  $\{a_1, a_2\} \succ_{ofl} \{b_1, b_2, b_3\}$ .

En conclusion et au vu des propriétés satisfaites, la dominance optimiste faible apparaît plus riche en propriétés. La table 1.1 récapitule les propriétés des relations de dominance optimiste.

$$\begin{array}{ccc}
\gamma_{oFs} \Rightarrow & \gamma_{oFl} \Rightarrow & \underline{\gamma}_{oFl} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\gamma_{ofs} \Rightarrow & \gamma_{ofl} \Rightarrow & \underline{\gamma}_{ofl}
\end{array}$$

TABLE 1.1 – Les implications entre les différentes relations de dominance optimiste

## 1.2.5 Dominance pessimiste

La dominance pessimiste s'inspire de la comparaison entre  $\min(A)$  et  $\min(B)$ . Comme pour la dominance optimiste, elle peut s'exprimer de deux manières.

**Définition 6** (Dominance pessimiste faible). *On considère trois variantes :*

- *Dominance pessimiste faible stricte* :  $A \succ_{pfs} B$  ssi  $B \neq \emptyset, \forall a \in A, \exists b \in B, a > b$
- *Dominance pessimiste faible large* :  $A \succeq_{pfl} B$  ssi  $\forall a \in A, \exists b \in B, a \geq b$
- *Ordre strict associé à la dominance pessimiste faible large* :  $A \succ_{pfl} B$  ssi  $A \succeq_{pfl} B$  et  $\neg(B \succeq_{pfl} A)$ .

**Exemple 3 (suite)** Soit  $A = \{b, d\}$  et  $B = \{a, c\}$ , on a :  $A \succ_{pfs} B$

La dominance pessimiste faible large est un pré-ordre.

Voici une version plus forte de la dominance pessimiste.

**Définition 7** (Dominance pessimiste forte). *On considère trois variantes :*

- *Dominance pessimiste forte stricte* :  $A \succ_{pFs} B$  ssi  $\exists b \in B, \forall a \in A, a > b$
- *Dominance pessimiste forte large* :  $A \succeq_{pFl} B$  ssi  $\exists b \in B, \forall a \in A, a \geq b$
- *Ordre strict associé à la dominance pessimiste forte large* :  $A \succ_{pFl} B$  ssi  $A \succeq_{pFl} B$  et  $\neg(B \succeq_{pFl} A)$ .

**Exemple 3 (suite)** Soit  $A = \{b, f\}$  et  $B = \{e\}$ , on a :  $A \succ_{pFs} B$

Il existe une dualité évidente entre les dominances optimiste et pessimiste. Nous commençons par donner la définition d'un ordre inverse ensuite nous donnons la preuve de cette dualité :

**Définition 8** (Ordre inverse). *Soit  $\succeq'$  le pré-ordre inverse du pré-ordre  $\succeq$ , défini par  $a \succeq' b$  ssi  $b \succeq a$ . L'ordre strict associé  $\succ'$  vérifie donc  $a \succ' b$  ssi  $b \succ a$ .*

**Proposition 16.** *Soit un  $S$  un ensemble partiellement ordonné,  $A, B$  deux sous ensembles de  $S$ .*

$$\begin{array}{l}
A \succ_{pfs} B \text{ (resp. } \succeq_{pfl}, \succeq_{pFl}) \text{ ssi } B \succ'_{ofs} A \text{ (resp. } \succeq'_{ofl}, \succeq'_{oFl}) \\
A \succ_{pFs} B \text{ (resp. } \succeq_{pfl}, \succeq_{pFl}) \text{ ssi } B \succ'_{ofs} A \text{ (resp. } \succeq'_{ofl}, \succeq'_{oFl})
\end{array}$$



**Preuve de la Proposition 16:**  $A \succ_{pfs} B$  ssi  $B \neq \emptyset, \forall a \in A, \exists b \in B, a > b$  ssi  $B \neq \emptyset, \forall a \in A, \exists b \in B, b >' a$ . C'est la définition de  $B \succ'_{ofs} A$ . Les autres preuves sont analogues.  $\square$

Grâce à la dualité, on peut facilement obtenir des propriétés analogues à celles de la dominance optimiste.

**Proposition 17.**

$$\text{Si } A \succ_{pfs} B \text{ alors } A \succeq_{pfl} B$$

$$\text{Si } A \succ_{pfs} B \text{ alors } A \succ_{pFl} B$$

*L'inverse n'est pas valide sauf si  $\succ$  est un ordre total.*

**Proposition 18.**

$$\text{Si } A \succ_{pfs} B \text{ alors } A \succeq_{pfl} B$$

$$\text{Si } A \succ_{pfs} B \text{ alors } A \succ_{pFl} B$$

*L'inverse n'est pas valide sauf si  $\succ$  est un ordre total.*

Ces propositions découlent directement des propositions 11, 14 et de la proposition 16.

Les relations de dominance pessimiste forte stricte et large sont plus fortes que les relations de dominance pessimiste faible stricte et large.

**Proposition 19.**

$$\text{Si } A \succ_{pFs} B \text{ alors } A \succ_{pfs} B$$

$$\text{Si } A \succeq_{pFl} B \text{ alors } A \succeq_{pfl} B$$

*L'inverse n'est pas valide sauf si  $\succ$  est un ordre total.*

Cette proposition découle directement de la proposition 15 et de la proposition 16.

Cependant, il n'y a pas d'implication entre les relations  $\succ_{pFl}$  and  $\succ_{pfl}$ , comme dans le cas de la dominance optimiste.

Enfin on peut exprimer la relation  $\succ_{pfs}$  en termes d'ensembles d'éléments minimaux :

**Proposition 20.** *Si  $S$  ne contient aucune chaîne infinie strictement croissante, ni strictement décroissante, alors*

$$A \succ_{pfs} B \text{ ssi } \min(A) \succ_{pfs} \min(B) \text{ ssi } \min(A \cup B) \subseteq B \setminus A$$

Cette proposition découle directement de la proposition 12 et de la proposition 16.

D'autre part, toujours grâce à la dualité, il est possible de transposer les propriétés satisfaites par la dominance optimiste. Par exemple, la relation  $\succ_{pfs}$  satisfait :

- Si  $A \succ_{pfs} B, A' \subseteq A, B \subseteq B'$ , alors  $A' \succ_{pfs} B'$  (propriété transposée de POI)

- Si  $C \succ_{pfs} (A \cup B)$ ,  $B \succ_{pfs} (A \cup C)$ , alors  $(B \cup C) \succ_{pfs} A$  (propriété transposée de Q)

Puisque cette la relation  $\succ_{pfs}$  est la dual de la relation  $\succ_{ofs}$ , nous ne considérons par la suite que la relation  $\succ_{ofl}$ .

## 1.3 Raffinement des relations d'ordre partiel induites entre sous-ensembles

Aucune des relations définies plus haut ne satisfait la propriété de préadditivité. Celle-ci revient à considérer que la partie commune à deux ensembles ne doit jouer aucun rôle dans la comparaison. Dans la suite nous examinons comment la dominance optimiste faible est raffinée dans le cas des ordres partiels.

### 1.3.1 Comparaison préadditive

Pour comparer deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $S$ , l'approche préadditive consiste à éliminer leur partie commune puis se ramener à comparer  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$ .

**Définition 9** (Dominance préadditive).

- *Dominance préadditive stricte* :  $A \succ_{ofs}^+ B$  ssi  $A \neq B$  et  $A \setminus B \succ_{ofs} B \setminus A$ <sup>7</sup>.
- *Dominance préadditive large* :  $A \succeq_{ofl}^+ B$  ssi  $A \setminus B \succeq_{ofl} B \setminus A$ <sup>8</sup>.
- *Relation stricte associée à la dominance préadditive large* :  $A \succ_{ofl}^+ B$  ssi  $A \succeq_{ofl}^+ B$  et  $\neg(B \succeq_{ofl}^+ A)$ <sup>9</sup>.

Ce type de raffinement n'est pas nouveau. Les deux premières relations sont étudiées notamment par [28] et [60]. Elles coïncident avec  $\succeq_{ofl}$  et  $\succ_{ofs}$  sur des ensembles disjoints.

Dans le cas totalement ordonné, les relations  $\succ_{ofl}^+$  et  $\succ_{ofs}^+$  sont identiques.

Ni la relation  $\succ_{ofl}^+$ , ni sa partie stricte ne sont transitives, comme indiqué par le contreexemple suivant.

**Exemple 11.** Soit  $S = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c\}$  avec  $a_1 \sim a_2 \sim b_1$ ,  $a_1 > c$  et  $a_3 > b_2$ . Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{b_1, b_2\}$ ,  $C = \{a_1, a_2, c\}$ . On a  $A \succ_{ofl}^+ B$  mais pas  $B \succeq_{ofl}^+ A$ ,  $B \succeq_{ofl}^+ C$  mais pas  $C \succeq_{ofl}^+ B$  mais on n'a pas  $A \succeq_{ofl}^+ C$ .

7. la relation  $\succ_{ofs}^+$  est notée  $\triangleright_6$  chez Halpern [67]

8. la relation  $\succeq_{ofl}^+$  est notée  $\triangleright_4$  chez Halpern [67]

9. la relation  $\succ_{ofl}^+$  est notée  $\triangleright_5$  chez Halpern [67]

La relation  $\succ_{ofs}^+$  semble mieux fondée au vu des quelques propriétés suivantes :

**Proposition 21.** *La relation  $\succ_{ofs}^+$  est un ordre partiel strict qui satisfait :*

- la compatibilité avec l'inclusion ensembliste stricte : Si  $B \subset A$  alors  $A \succ_{ofs}^+ B$
- la préservation de l'ordre par l'inclusion (POI)
- l'auto-dualité (A)
- la préadditivité (P)
- la négligeabilité faible (NF)
- la qualitatativité faible (QF)
- la clôture conditionnelle pour la conjonction (CCC)
- la clôture conditionnelle pour l'implication (CCI)
- la disjonction à gauche (OR)
- la coupure (CUT)
- la monotonie faible (MF)

**Preuve de la Proposition 21:**

**Transitivité**

Supposons  $A \succ_{ofs}^+ B$  et  $B \succ_{ofs}^+ C$ . Prouvons que  $A \succ_{ofs}^+ C$ . Si  $C \subseteq A$  c'est vrai. Sinon il faut montrer que  $\forall c \in C \setminus A, \exists a \in A \setminus C, a > c$ .

Soit  $c \in C \setminus A$  :

- Cas où  $c \notin B$  : par  $B \succ_{ofs}^+ C$  il existe  $b \in B \setminus C, b > c$ 
  - Si  $b \in A$  on pose  $a = b$
  - Si  $b \notin A, b \in B \setminus A$  et par  $A \succ_{ofs}^+ B$  il existe  $k \in A \setminus B, k > b > c$ .
- Cas où  $c \in B$  : on a  $c \in C \setminus A$  et  $c \in B$  donc  $c \in B \setminus A$  par  $A \succ_{ofs}^+ B, \exists k \in A \setminus B, k > c$ . Donc dans les deux cas on a prouvé  $\exists k \in A \setminus B$  ou  $k \in A \setminus C, k > c$ . Supposons qu'il n'y ait aucun élément  $k$  dans  $A \setminus C$  tel que  $k > c$ .  
Posons  $X_c = \{k \in A \setminus B, k > c\}$  alors  $X_c$  est non vide. Comme il n'y a pas de chaîne infinie dans  $S, X_c$  a des éléments maximaux pour  $\geq$ . Soit  $k'$  élément maximal de  $X_c$ . Par hypothèse,  $k' \notin A \setminus C$  et  $k' \in A \setminus B$  donc  $k' \in C \setminus B$ . Par  $B \succ_{ofs}^+ C$  on déduit l'existence de  $h' \in B \setminus C$  tel que  $h' > k', k' \in A \setminus B, k' > c, h' > k'$  donc  $h' > c$  et  $h' \in B \setminus C$ .  
Par hypothèse  $h' \notin A$  donc  $h' \in B \setminus A$  et par  $A \succ_{ofs}^+ B$  il existe  $k'' \in A \setminus B, k'' > h' > c$  donc  $k'' \in X_c$  et  $k'' > k'$ , ce qui contredit la définition de  $k'$ . Il existe donc un élément de  $A \setminus C$  strictement supérieur à  $c$ .

**Compatibilité avec l'inclusion ensembliste stricte**

Supposons que  $B \subset A$ . Alors  $B \neq A$ ,  $B \setminus A = \emptyset$  et  $A \setminus B \neq \emptyset$ . Or on a toujours  $C \succ_{ofs}^+ \emptyset$  lorsque  $C \neq \emptyset$ .

**Préservation de l'ordre par l'inclusion** Supposons que  $A \succ_{ofs}^+ B$ ,  $A \subseteq A'$  et  $B' \subseteq B$ . Si  $A = A'$  alors  $A' \succ_{ofs}^+ B$ . Si  $A \subset A'$ , la propriété de compatibilité avec l'inclusion stricte permet de conclure que  $A' \succ_{ofs}^+ A$  et par transitivité que  $A' \succ_{ofs}^+ B$ .

Si  $B = B'$  alors nous avons bien  $A' \succ_{ofs}^+ B'$ . Si en revanche l'inclusion est stricte,  $B' \subset B$ , on obtient  $B \succ_{ofs}^+ B'$  et par transitivité  $A' \succ_{ofs}^+ B'$ .

**Auto-dualité**

$A \succ_{ofs}^+ B$  ssi  $A \neq B$  et  $A \setminus B \succ_{ofs} B \setminus A$  ssi  $\bar{A} \neq \bar{B}$  et  $\bar{B} \setminus \bar{A} \succ_{ofs} \bar{A} \setminus \bar{B}$  ssi  $\bar{B} \succ_{ofs}^+ \bar{A}$ .

**Préadditivité**

$\Rightarrow$ ) On suppose  $B \succ_{ofs}^+ C$ , donc  $B \neq C$  et  $\forall c \in C \setminus B, \exists b \in B \setminus C, b > c$ .

Considérons  $c \in (A \cup C) \setminus (A \cup B)$  alors  $c \notin A$ ,  $c \notin B$  donc  $c \in C \setminus B$  donc  $\exists b \in B \setminus C, b > c$ . On sait que  $b \in B$  donc  $b \in (A \cup B)$  et  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$  donc  $b \notin A$  donc  $b \in (A \cup B) \setminus (A \cup C)$  avec  $b > c$ .

$\Leftarrow$ ) On suppose  $A \cup B \succ_{ofs}^+ A \cup C$ . Considérons  $c \in C \setminus B$  alors  $c \in A \cup C$ . On sait que  $c \in C$  donc  $c \notin A$  (car  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ ) et  $c \notin B$  donc  $c \notin A \cup B$ . On a donc  $c \in (A \cup C) \setminus (A \cup B)$  et par hypothèse  $\exists b \in (A \cup B) \setminus (A \cup C), b > c$ .  $b \notin (A \cup C)$  donc  $b \notin A, b \notin C$  et  $b \in A \cup B$  donc  $b \in B$  donc  $b \in B \setminus C$  et  $b > c$ .

**Négligeabilité faible**

On a  $(A \cap B = A \cap C)$ . Si  $A \succ_{ofs}^+ B$  et  $A \succ_{ofs}^+ C$  on a  $A \neq B, A \neq C$  et  $\forall b \in B \setminus A, \exists a \in A \setminus B, a > b, \forall c \in C \setminus A, \exists a \in A \setminus C, a > c$ . Considérons  $x \in (B \cup C \setminus A)$ ,

(i) soit  $x \in B \setminus A$

(ii) soit  $x \in C \setminus A$

Cas (i) :

$\exists a \in A \setminus B, a > x$ . Si  $a \notin A \setminus (B \cup C)$  c'est que  $a \in C$ , donc  $a \in A \cap C = A \cap B$ , donc  $a \in B$  impossible car  $a \in A \setminus B$ .

Cas (ii) :

$\exists a \in A \setminus C, a > x$ . Si  $a \notin A \setminus (B \cup C)$  c'est que  $a \in B$ , donc  $a \in A \cap B = A \cap C$ , donc  $a \in C$  impossible car  $a \in A \setminus C$ .

Dans chaque cas on a trouvé  $a \in A \setminus (B \cup C), a > x$ .

D'autre part  $A \neq B \cup C$ . Sinon on aurait  $A \cap B = A \cap C = B = C$  et donc  $A = B$ , ce qui est impossible par hypothèse.

**Qualitativité faible**

On a  $A \cap B = A \cap C = B \cap C$ . Si  $(A \cup C \succ_{ofs}^+ B$  et  $A \cup B \succ_{ofs}^+ C$  on a  $A \cup C \neq B, A \cup B \neq C$  et  $\forall b \in B \setminus (A \cup C), \exists x \in A \cup C \setminus B, x > b, \forall c \in C \setminus (A \cup B), \exists y \in A \cup B \setminus C, y > c$ . Considérons  $z \in B \cup C \setminus A$  :

$z \notin A$  donc  $z \notin B \cap C$  (car  $B \cap C = A \cap B$ ). Donc :

(i) soit  $z \in B$  et alors  $z \in B \setminus (A \cup C)$ ,

(ii) soit  $z \in C$  et alors  $z \in C \setminus (A \cup B)$ .

Cas (i) :

$\exists x \in A \cup C \setminus B, x > z$ . Si  $x \in A \setminus (B \cup C)$  CQFD. Sinon,  $x \in C \setminus (A \cup B)$  et alors il existe  $x_1 \in (A \cup B) \setminus C, x_1 > x > z$  (cas (ii)).

Cas (ii) :

$\exists y \in (A \cup B) \setminus C, y > z$ . Si  $y \in A \setminus (B \cup C)$  CQFD. Sinon,  $y \in B \setminus (A \cup C)$  et alors il existe  $x_1 \in (A \cup C) \setminus B, x_1 > y > z$  (cas (i)).

Puisqu'il n'y a pas de chaîne infinie strictement croissante, cette construction s'arrête avec  $x_k \in A \setminus (B \cup C), x_k > \dots > z$ . On a donc trouvé un élément de  $A \setminus (B \cup C)$  strictement supérieur à  $z$ .

### CCC, CCI, OR, CUT, MF

Puisque  $A \cap C$  et  $\bar{A} \cap C$  (resp.  $B \cap C$  et  $\bar{B} \cap C$ ) sont disjoints, les relations  $\succ_{ofs}^+$  et  $\succ_{ofs}$  coïncident.

□

En revanche, la relation  $\succ_{ofs}^+$  ne vérifie ni la stabilité pour l'union (SU), ni sa réciproque comme le montrent les exemples suivants.

**Exemple 12.** Soit  $S = \{a, b, c, d, e, f\}$  avec  $c > d$ . Soit  $A = \{a, b, c, e\}$ ,  $B = \{a, b, d\}$  et  $C = \{c, f\}$ . On a  $A \succ_{ofs}^+ B$ , mais pas  $A \cup C \succ_{ofs}^+ B \cup C$ .

Soit  $A' = \{a, c, e\}$ ,  $B' = \{b, d\}$  et  $C' = \{b\}$ . On a  $A' \cup C' \succ_{ofs}^+ B' \cup C'$  mais pas  $A' \succ_{ofs}^+ B'$ .

La relation  $\succ_{ofs}^+$  ne satisfait pas non plus la propriété de Ferrers.

**Exemple 4 (suite)** Soit  $S = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b, c > d$ . Soit  $A = \{a\}$ ,  $B = \{b\}$ ,  $C = \{c\}$  et  $D = \{d\}$ . On a  $A \succ_{ofs}^+ B, C \succ_{ofs}^+ D$  mais ni  $A \succ_{ofs}^+ D$ , ni  $C \succ_{ofs}^+ B$ .

Même dans le cas totalement ordonné, la relation  $\succ_{ofs}^+$  est partielle.

**Exemple 13.** Soit  $S = \{a, b, c\}$  avec  $a > c, b > c$  et  $a \sim b$ . Soit  $A = \{a, c\}$  et  $B = \{b, c\}$ .  $A$  et  $B$  sont incomparables pour la relation  $\succ_{ofs}^+$ .

La propriété suivante compare la dominance optimiste faible et sa version préadditive.

**Proposition 22.** La relation  $\succ_{ofs}^+$  raffine  $\succ_{ofs}$  et la relation duale, à savoir :

- Si  $A \succ_{ofs} B$  alors  $A \succ_{ofs}^+ B$
- Si  $\bar{B} \succ_{ofs} \bar{A}$  alors  $A \succ_{ofs}^+ B$
- Si  $A \succ_{ofs}^+ B$  alors  $\bar{B} \succeq_{ofl} \bar{A}$  et  $A \succeq_{ofl} B$

Mais en général, partant d'un pré-ordre partiel sur  $S$ , la relation  $\succeq_{ofl}$  n'est pas raffinée par la relation  $\succ_{ofs}^+$ , comme indiqué par le contre exemple suivant :

**Exemple 14.** Soit  $S = \{a, b, c\}$  avec  $a$  et  $b$  incomparables et  $b \sim c$ . Soit  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{b, c\}$ . On a  $A \succeq_{ofl} B$  mais pas  $A \succ_{ofs}^+ B$ .

### 1.3.2 Comparaison de vecteurs de valeurs partiellement ordonnées

Il s'agit maintenant de proposer une extension des pré-ordres définis en Annexe A.1 pour les vecteurs, au cas où l'échelle  $L$  est partiellement ordonnée.

Nous allons utiliser l'exemple suivant pour illustrer les extensions proposées :

**Exemple 15.** Soit  $\Omega$  un ensemble fini (d'objets) et trois attributs  $v_1, v_2$  et  $v_3$  permettant d'évaluer chaque élément de  $\Omega$ . L'ensemble  $L$  est un treillis tel que :  $\sup(L) = 1$  et  $\inf(L) = 0$ . Les vecteurs des évaluations sont donnés dans la **Table 1.2** et le treillis associé est représenté dans la **Figure 1.3**.

TABLE 1.2 – Les vecteurs des évaluations des objets de l'exemple 15

$\Omega$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$\omega_1$	1	1	1
$\omega_2$	1	1	c
$\omega_3$	a	b	1
$\omega_4$	a	b	c
$\omega_5$	1	b	1
$\omega_6$	a	1	1
$\omega_7$	1	b	c

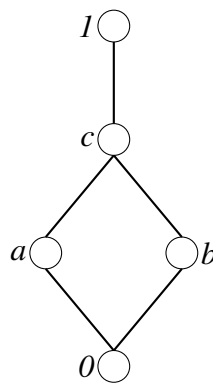


FIGURE 1.3 – Treillis associé à l'échelle  $L$  de l'exemple 15

Dans le cas d'une échelle totalement ordonnée, les relations  $\succ_{min}$ ,  $\succ_{discrimin}$  et  $\succ_{leximin}$  sont basées sur une comparaison de valeurs. Mais dans le cas d'un ordre partiel, le minimum d'un ensemble de valeurs n'est pas unique (sauf dans ce cas des treillis), c'est un ensemble de valeurs incomparables.

### 1.3.2.1 Notations

Afin de faciliter les définitions, nous commençons par donner les différentes notations utilisées par la suite :

- Soit  $\Omega$  l'ensemble des éléments à comparer,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  un ensemble d'attributs et pour chaque attribut  $v_i$  une fonction  $f_{v_i}$  définie comme suit :

$$f_{v_i} : \Omega \rightarrow L$$

A chaque élément  $\omega$  de  $\Omega$ , on associe le vecteur  $(f_{v_1}(\omega), \dots, f_{v_n}(\omega))$  dans  $L^n$ .

On confondra dans la suite de ce document l'élément  $\omega$  de  $\Omega$  et le vecteur associé  $(f_{v_1}(\omega), \dots, f_{v_n}(\omega))$  de  $L^n$ . De plus, on notera ce vecteur  $(x_1, \dots, x_n) \in X = L^n$  au lieu de  $(f_{v_1}(\omega), \dots, f_{v_n}(\omega))$ .

Etant donné deux vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  :

- $\min\{x_1, \dots, x_n\}$  sera noté  $\min x$ .
- On notera  $\mathcal{D}_{(x,x')}^x, \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}$  les ensembles résiduels des vecteurs  $x, x'$  : ce sont les ensembles de valeurs obtenus en supprimant les composantes  $i$  des vecteurs  $x, x'$ ,  $i = 1 \dots n$ , telles que  $x_i = x'_i$ . Formellement, si on note  $\mathcal{I}_{(x,x')} = \{i, x_i \neq x'_i\}$  l'ensemble d'indices où les deux vecteurs ont des composantes qui diffèrent,

$$\mathcal{D}_{(x,x')}^x = \{x_i : i \in \mathcal{I}_{(x,x')}\}.$$

On peut définir de manière équivalente :

$$\mathcal{D}_{(x,x')}^x = \{u : \exists i, x_i = u, x_i \neq x'_i\}.$$

- Soit une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ . Soit  $x$  un vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$ , on notera  $x^\sigma$  le vecteur  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  c'est à dire défini par :  $x_i^\sigma = x_{\sigma(i)}$ .
- On notera  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x$  et  $\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}$  les ensembles résiduels symétriques des vecteurs  $x, x'$ . On les définit comme suit :

$$\mathcal{S}_{(x,x')}^x = \{u : |\{i : x_i = u\}| > |\{i : x'_i = u\}|\}$$

où  $|\cdot|$  est la cardinalité. Autrement dit, on réordonne  $x'$  de manière à ce qu'un maximum de composantes  $x'_{\sigma(i)}$  se retrouve en vis-à-vis de composantes  $x_i = x'_{\sigma(i)}$ , paires que l'on va éliminer. L'ensemble  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x$  est l'ensemble des composantes de  $x$  qui restent après élimination de ces paires.

- On notera  $x^* = (x_{*1}, \dots, x_{*n})$  le vecteur obtenu en réordonnant le vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de telle sorte que  $\forall i = 1 \dots (n-1), x_{*i} \leq x_{*i+1}$ .
- On suppose que l'échelle  $S$  est munie d'une opération interne  $\bar{\cdot} : L \rightarrow L$  qui renverse l'ordre : si  $a > b$  alors  $\bar{b} > \bar{a}$ .
- On notera  $\bar{A}$  le complément de l'ensemble  $A \subseteq S$  avec  $S$  un ensemble quelconque.

On prouve facilement les résultats suivants :

**Proposition 23.**

1. Les ensembles résiduels symétriques sont des ensembles disjoints de valeurs :  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x \cap \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'} = \emptyset$
2. Il existe une permutation  $\tau$  telle que  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x = \mathcal{D}_{(x,x'^\tau)}^x$
3.  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x = \cap_{\sigma} \mathcal{D}_{(x,x'^{\sigma})}^x$  ;  $\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'} = \cap_{\sigma} \mathcal{D}_{(x^{\sigma},x')}^{x'}$
4.  $\mathcal{D}_{(x,x')}^x = \mathcal{D}_{(x^{\sigma},x'^{\sigma})}^{x^{\sigma}}$  pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$
5.  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x \subseteq \mathcal{D}_{(x,x')}^x$
6.  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x = \mathcal{S}_{(x^{\sigma_1},x'^{\sigma_2})}^{x^{\sigma_1}}$  pour toutes permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ;  
en particulier :  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x = \mathcal{S}_{(x^*,x'^*)}^{x^*}$

### 1.3.2.2 Raffinements du minimum

**Extension du min** Si  $x$  et  $x'$  sont deux vecteurs de valeurs totalement ordonnées, soit  $V(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  l'ensemble des composants de  $x$ . On peut toujours écrire  $x \succ_{\min} x'$  ssi  $\min(V(x) \cup V(x')) \subseteq V(x') \setminus V(x)$ . Cela suggère la définition suivante dans le cas partiel :

**Définition 10.**  $x \succ_{\min} x'$  ssi  $\min(V(x) \cup V(x')) \subseteq V(x') \setminus V(x)$

Grâce à la proposition 20,  $x \succ_{\min} x'$  ssi  $\min(x) \succ_{pfs} \min(x')$ .

**Exemple 15 (suite)** Sur la Table 1.2 on voit que  $\omega_1 \succ_{\min} \omega_4$  car  $\min(V(\omega_1)) = \{1\} \succ_{pfs} \min(V(\omega_4)) = \{a, b\}$

**Extension du discrimin** On fait de même avec les ensembles résiduels :

**Définition 11.**  $x \succ_{discrimin} x'$  ssi  $\min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x \cup \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}) \subseteq \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'} \setminus \mathcal{D}_{(x,x')}^x$ .

Grâce à la proposition 20,  $x \succ_{discrimin} x'$  ssi  $\min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x) \succ_{pfs} \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$ .

**Exemple 15 (suite)** Sur la Table 1.2 on voit que :  $\omega_2 \succ_{discrimin} \omega_3$  car  $\min(\mathcal{D}_{(\omega_2,\omega_3)}^{\omega_2}) = \{c\} \succ_{pfs} \min(\mathcal{D}_{(\omega_2,\omega_3)}^{\omega_3}) = \{a, b\}$ .



**Extension du leximin** Nous pouvons proposer deux définitions du leximin sur une échelle partiellement ordonnée : soit à partir de l'extension du discrimin définie ci-dessus, soit par une comparaison pessimiste des ensembles résiduels symétriques.

**Définition 12.**

1.  $x \succ_{leximin1} x'$  ssi  $x^\sigma \succ_{discrimin} x'$  pour une permutation  $\sigma$  de  $\{1 \dots n\}$
2.  $x \succ_{leximin2} x'$  ssi  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x \cup \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}) \subseteq \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'} \setminus \mathcal{S}_{(x,x')}^x = \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}$

Grâce à la proposition 20,  $x \succ_{leximin2} x'$  ssi  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) \succ_{pfs} \min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'})$ .

Les deux extensions du leximin sont équivalentes.

**Proposition 24.** Soit deux vecteurs  $x, x'$ . On a  $x \succ_{leximin1} x'$  ssi  $x \succ_{leximin2} x'$

La preuve de la proposition 24 utilise les deux résultats suivants.

**Lemme 1.** Etant donné deux vecteurs  $x$  et  $x'$  on a :

- $\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'} \setminus \mathcal{D}_{(x,x')}^x \subseteq \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'} \subseteq \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}$
- $\mathcal{D}_{(x,x')}^x \setminus \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'} \subseteq \mathcal{S}_{(x,x')}^x \subseteq \mathcal{D}_{(x,x')}^x$

**Lemme 2.** Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles :

- Si  $A \supseteq B$  alors  $\min(A) \cap B \subseteq \min(B)$ .
- Si  $\min(A) \subseteq B \subseteq A$  alors  $\min(B) = \min(A)$ .

**Preuve du Lemme 2:**

1. Soit  $a \in \min(A) \cap B$  donc  $a \in B$  et puisque  $B \subseteq A$  donc  $a \in \min(B)$  alors  $\min(A) \cap B \subseteq \min(B)$ .
2. Par (1) on a  $\min(A) = \min(A) \cap B \subseteq \min(B)$ . Il reste à montrer que  $\min(B) \subseteq \min(A)$ . Soit  $b \in \min(B)$ , si  $b \notin \min(A)$ ,  $\exists a \in A$ ,  $b > a$ . Soit  $a \in \min(A)$ , soit  $\exists a' \in \min(A)$ ,  $a' < a$  or  $\min(A) \subseteq B$  donc on a une contradiction avec  $b \in \min(B)$ . Donc  $\min(A) = \min(B)$ .

□

**Preuve de la Proposition 24:**

$\Leftarrow$ ) On suppose que  $x \succ_{leximin1} x'$  donc  $\exists \sigma$  une permutation dans  $\{1 \dots n\}$  tel que  $x^\sigma \succ_{discrimin} x'$  donc  $\min(\mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma} \cup \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'}) \subseteq \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'} \setminus \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma}$ .

On pose  $A = \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma} \cup \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'}$  et  $B = \mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^x \cup \mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^{x'}$ . On a  $B \subseteq A$  et par hypothèse on a

$\min(A) \subseteq \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma} \setminus \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'} \subseteq \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{*x'}$  (par le Lemme 1) =  $\mathcal{S}_{(x, x')}^{x'}$   $\subseteq B$ .

Par le Lemme 2 on déduit  $\min A = \min B$  donc  $\min B \subseteq \mathcal{S}_{(x, x')}^{x'}$  la définition de l'extension 2 de *leximin*.

$\Rightarrow$ ) On suppose que  $x \succ_{leximin2} x'$  donc on a  $\min(\mathcal{S}_{(x, x')}^x \cup \mathcal{S}_{(x, x')}^{x'}) \subseteq \mathcal{S}_{(x, x')}^{x'}$ . Soit  $\sigma$  la permutation de  $\{1 \dots n\}$  telle que :

$$\forall i, \text{ si } x'_i \in x, \text{ avec } x'_i = x_j, \text{ alors } \sigma(i) = j$$

On a  $\min(\mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma} \cup \mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^{x'}) \subseteq \mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^{x'}$ . Par construction de  $x^\sigma$ , on a :

$$\mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma} = \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma}$$

$$\mathcal{S}_{(x^\sigma, x')}^{x'} = \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'}$$

Donc  $\mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma}$  et  $\mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'}$  sont disjoints et  $\min(\mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x^\sigma} \cup \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'}) \subseteq \mathcal{D}_{(x^\sigma, x')}^{x'}$  ce qui est la définition de l'extension 1 de *leximin*.  $\square$

**Exemple 15 (suite)** Sur la Table 1.2 on voit que :  $\omega_7 \succ_{leximin} \omega_3$  car  $(\mathcal{S}_{(\omega_3, \omega_7)}^{\omega_3} \cup \mathcal{S}_{(\omega_3, \omega_7)}^{\omega_7}) = \{a, c\}$  et  $\min(\{a, c\}) = \{a\} \subset \mathcal{S}_{(\omega_3, \omega_7)}^{\omega_3}$ .

### 1.3.2.3 Extensions de la Pareto-dominance

Les relation de comparaison basées sur le pré-ordre de Pareto sont rappelées en Annexe A.2.1. On conserve la définition de la Pareto-dominance :

$$x \succ_{Pareto} x' \text{ ssi } \forall i = 1 \dots n, x_i \geq x'_i \text{ et } \exists j, x_j > x'_j$$

**Exemple 15 (suite)** Sur la Table 1.2 on voit que :  $\omega_3 \succ_{Pareto} \omega_4$  car  $a = a, b = b$  et  $1 > c$ .

On peut aussi conserver la définition 63 (Annexe A.2.3) pour la Pareto-dominance symétrique :

$$x \succ_{ParetoS} x' \text{ ssi } \exists \sigma \text{ tel que } x^\sigma \succ_{Pareto} x'.$$

**Exemple 15 (suite)** Sur la Table 1.2 on voit que :

$$\omega_2 \succ_{ParetoS} \omega_3 \text{ car } \exists \sigma \text{ tel que } \omega_2^\sigma = (1, c, 1) \succ_{Pareto} \omega_3 = (a, b, 1).$$

### 1.3.2.4 Comparaison des extensions

Comme dans le cas d'une échelle totalement ordonnée, certaines extensions en raffinent d'autres.

**Proposition 25.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  : Si  $x \succ_{discrimin} x'$  alors  $x \succ_{leximin} x'$ .

**Preuve de la Proposition 25:** D'après la définition 12, il suffit de prendre  $\sigma = \text{identité}$ .  $\square$

**Proposition 26.** *Soit deux vecteurs  $x, x'$  : Si  $x \succ_{\text{Pareto}} x'$  alors  $x \succ_{\text{discrimin}} x'$ .*

**Preuve de la Proposition 26:** On  $x \succ_{\text{Pareto}} x'$  ssi  $\forall i = 1..n, x_i \geq x'_i$  et  $\exists j, x_j > x'_j$ . Soit  $\mathcal{D}_{(x,x')}^x$  et  $\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}$ , les ensembles résiduels de  $x$  et  $x'$  respectivement. Dans ces vecteurs, il ne reste que des  $x_i \neq x'_i$ , donc  $x_i > x'_i$ .

Soit  $a \in \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x \cup \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$ . Si  $a \in \mathcal{D}_{(x,x')}^x$  alors  $a = x_i > x'_i$  donc il existe  $b \in (\mathcal{D}_{(x,x')}^x \cup \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$  tel que  $a > b$  ce qui contredit  $a \in \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x \cup \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$ .

Donc on a prouvé que  $a \in \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}$  et  $\min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x \cup \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}) \subseteq (\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'} \setminus \mathcal{D}_{(x,x')}^x)$ , ce qui correspond à  $x \succ_{\text{discrimin}} x'$ .  $\square$

On a encore :

**Proposition 27.** *Soit deux vecteurs  $x, x'$  : Si  $x \succ_{\text{ParetoS}} x'$  alors  $x \succ_{\text{leximin}} x'$ .*

**Preuve de la Proposition 27:** On  $x \succ_{\text{ParetoS}} x'$  ssi  $\exists \sigma$  tel que  $x^\sigma \succ_{\text{Pareto}} x'$ . Par la Proposition 26 on en déduit que  $x^\sigma \succ_{\text{discrimin}} x'$ .

Et par la Proposition 25 on déduit que  $x^\sigma \succ_{\text{leximin}} x'$ .

Donc  $x \succ_{\text{leximin}} x'$  car seuls les ensembles de composantes sont utilisés pour calculer  $\succ_{\text{leximin}}$ .  $\square$

Ce résultat étend la proposition 66 (Annexe A.2.3) au cas où  $S$  est partiellement ordonné.

La Proposition 65 (Annexe A.2.3) tient toujours car sa preuve ne suppose rien sur la relation d'ordre utilisée. On peut donc se contenter de permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(i) = i$  si  $x_i = x'_i$ .

D'après les propositions 25, 26 et 27 nous obtenons l'ordre de raffinement suivant entre les ordres partiels sur des vecteurs dans le cas d'une échelle partiellement ordonnée :

$$\succ_{\text{leximin}} \text{ raffine } \succ_{\text{discrimin}} \text{ raffine } \succ_{\text{Pareto}} \text{ et } \succ_{\text{min}} \cdot \\ \succ_{\text{leximin}} \text{ raffine } \succ_{\text{ParetoS}} \text{ raffine } \succ_{\text{Pareto}} \cdot$$

Ce sont les mêmes résultats que dans le cas total.

### 1.3.3 Comparaison de vecteurs de valeurs ou comparaison d'ensembles de valeurs

Dans cette section, nous établissons des correspondances entre la comparaison de vecteurs de valeurs partiellement ordonnées et la comparaison d'ensembles de valeurs partiellement ordonnées.

Soit  $u_1 \cdots u_p$  les éléments de  $S$ . On rappelle que l'échelle  $S$  est munie d'une opération interne  $\bar{\cdot} : L \rightarrow L$  qui renverse l'ordre ( $\bar{b} > \bar{a}$  ssi  $a > b$ ).

On complète l'échelle  $S$  en ajoutant deux éléments 0 et 1 tels que 0 (resp. 1) est strictement inférieur (resp. supérieur) à tout élément de  $S$ . On étend aussi l'opération  $\bar{\cdot}$  de telle sorte que  $\bar{1} = 0$  et  $\bar{0} = 1$ .

Un vecteur de longueur  $p$  peut être associé à chaque sous-ensemble  $A$  de  $S$  de quatre manières :

1.  $x^A$  : pour tout élément  $i = 1, \dots, p$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = u_i$  et sinon  $x_i = 0$ .
2.  $\bar{x}_A$  : pour tout élément  $i = 1, \dots, p$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = 1$  et sinon  $x_i = \bar{u}_i$ .
3.  $x_A$  : pour tout élément  $i = 1, \dots, p$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = u_i$  et sinon  $x_i = 1$ .
4.  $\bar{x}^A$  : pour tout élément  $i = 1, \dots, p$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = 0$  et sinon  $x_i = \bar{u}_i$ .

On peut alors comparer  $A$  et  $B$  en comparant les vecteurs associés.

### Proposition 28.

1.  $A \succ_{ofs} B$  ssi  $x^A \succ_{max} x^B$
2.  $A \succ_{pfs} B$  ssi  $x_A \succ_{min} x_B$
3.  $\bar{B} \succ_{ofs} \bar{A}$  ssi  $\bar{x}_A \succ_{min} \bar{x}_B$
4.  $\bar{B} \succ_{pfs} \bar{A}$  ssi  $\bar{x}^A \succ_{max} \bar{x}^B$

### Preuve de la Proposition 28:

1. D'après la proposition 12, on a  $A \succ_{ofs} B$  ssi  $\max(A \cup B) \subseteq A \setminus B$ .  
D'autre part, on définit le raffinement du maximum de manière analogue au raffinement du minimum, comme expliqué dans la Section 1.3.2.2.  
On a donc  $x^A \succ_{max} x^B$  ssi  $\max(V(x^A) \cup V(x^B)) \subseteq V(x^A) \setminus V(x^B)$ .  
On a  $V(x^A) = A \cup \{0\}$  si  $A \subset L$  et  $V(x^A) = A = L$  sinon. Donc  $V(x^A) \setminus V(x^B) = A \setminus B$ .  
On a aussi  $A \cup B \subseteq (V(x^A) \cup V(x^B)) \subseteq (A \cup B) \cup \{0\}$ . Comme 0 est strictement inférieur à tout élément de  $S$ , on obtient  $\max(V(x^A) \cup V(x^B)) = \max(A \cup B)$ . D'où le résultat.
2. D'après la proposition 20, on a  $A \succ_{pfs} B$  ssi  $\min(A \cup B) \subseteq B \setminus A$ .  
D'autre part, la définition du raffinement du min de la Section 1.3.2.2 permet d'écrire  $x_A \succ_{min} x_B$  ssi  $\min(V(x_A) \cup V(x_B)) \subseteq V(x_B) \setminus V(x_A)$ .  
On a  $V(x_A) = A \cup \{1\}$  si  $A \subset L$  et  $V(x_A) = A = L$  sinon. Donc  $V(x_B) \setminus V(x_A) = B \setminus A$ .  
Par un raisonnement analogue à celui du point 1, et comme 1 est strictement supérieur à tout élément de  $S$ , on obtient  $\min(V(x_A) \cup V(x_B)) = \min(A \cup B)$ . D'où le résultat.

3. D'après la proposition 12, on a  $\bar{B} \succ_{ofs} \bar{A}$  ssi  $\max(\bar{B} \cup \bar{A}) \subseteq \bar{B} \setminus \bar{A}$ .  
 D'autre part, on a  $\bar{x}_A \succ_{min} \bar{x}_B$  ssi  $\min(V(\bar{x}_A) \cup V(\bar{x}_B)) \subseteq V(\bar{x}_B) \setminus V(\bar{x}_A)$ .  
 On a  $V(\bar{x}_B) \setminus V(\bar{x}_A) = \{\bar{u}_i/u_i \in \bar{B} \setminus \bar{A}\}$ , et  $V(\bar{x}_A) \cup V(\bar{x}_B) = \{\bar{u}_i/u_i \in \bar{B} \cup \bar{A}\} \cup \{1\}$ .  
 Donc  $\min(V(\bar{x}_A) \cup V(\bar{x}_B)) = \min(\{\bar{u}_i/u_i \in \bar{B} \cup \bar{A}\}) = \{\bar{u}_i/u_i \in \max(\bar{B} \cup \bar{A})\}$ .  
 On obtient donc :  $\bar{x}_A \succ_{min} \bar{x}_B$  ssi  $\{\bar{u}_i/u_i \in \max(\bar{B} \cup \bar{A})\} \subseteq \{\bar{u}_i/u_i \in \bar{B} \setminus \bar{A}\}$ . D'où le résultat.
4. La preuve pour  $\bar{B} \succ_{pfs} \bar{A}$  ssi  $\bar{x}^A \succ_{max} \bar{x}^B$  est analogue. □

On a aussi :

**Proposition 29.**  $A \setminus B \succ_{ofs} B \setminus A$  ssi  $\bar{x}_A \succ_{discrimin} \bar{x}_B$

**Preuve de la Proposition 29:**

Pour alléger les notations, dans cette preuve, nous écrivons  $\mathcal{D}^x$  à la place de  $\mathcal{D}_{(x,x')}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $x$  et  $x'$ .

D'après la proposition 12, on a  $A \setminus B \succ_{ofs} B \setminus A$  ssi  $A \setminus B \neq \emptyset$  et  $\max((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \subseteq A \setminus B$ .  
 D'autre part, l'extension du discrimin proposée dans la Section 1.3.2.2 permet d'écrire :

$$\bar{x}_A \succ_{discrimin} \bar{x}_B \text{ ssi } \min(\mathcal{D}^{\bar{x}_A} \cup \mathcal{D}^{\bar{x}_B}) \subseteq \mathcal{D}^{\bar{x}_B} \setminus \mathcal{D}^{\bar{x}_A}.$$

Les vecteurs  $\bar{x}_A$  et  $\bar{x}_B$  ne contiennent que des  $\bar{u}_i$  ou des 1. Plus précisément, on a  $\bar{u}_i \in \mathcal{D}^{\bar{x}_A}$  ssi  $u_i \in \bar{A} \setminus \bar{B}$  ssi  $u_i \in B \setminus A$ . Et  $1 \in \mathcal{D}^{\bar{x}_A}$  ssi il existe  $u_i \in A \setminus B$ .

Et de même  $\bar{u}_i \in \mathcal{D}^{\bar{x}_B}$  ssi  $u_i \in A \setminus B$ .

On a donc :

- $(\mathcal{D}^{\bar{x}_A} \cup \mathcal{D}^{\bar{x}_B}) = \{\bar{u}_i/u_i \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cup \{1\}$ .
- $\mathcal{D}^{\bar{x}_B} \setminus \mathcal{D}^{\bar{x}_A} = \mathcal{D}^{\bar{x}_B} \setminus \{1\}$  si  $A \setminus B \neq \emptyset$ .

Donc, on a  $\min(\mathcal{D}^{\bar{x}_A} \cup \mathcal{D}^{\bar{x}_B}) = \{\bar{u}_i/u_i \in \max((A \setminus B) \cup (B \setminus A))\}$ . Et dans le cas où  $A \setminus B \neq \emptyset$ , on a  $\mathcal{D}^{\bar{x}_B} \setminus \mathcal{D}^{\bar{x}_A} = \{\bar{u}_i/u_i \in A \setminus B\}$ . Le résultat en découle aisément. □

**Exemple 16.** Soit  $L = \{a, b, c, d, e, f\}$  avec  $a > b > c$  et  $a > d > e > f$ .

Considérons les deux sous-ensembles  $A = \{a, b, f\}$  et  $B = \{b, c, d\}$  de  $S$ . Alors  $\bar{x}_A = (1, 1, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, 1)$  et  $\bar{x}_B = (\bar{a}, 1, 1, 1, \bar{e}, \bar{f})$ . On a  $\bar{x}_A \succ_{min} \bar{x}_B$  et  $\bar{B} \succ_{ofs} \bar{A}$ .

On a aussi  $\bar{x}_A \succ_{discrimin} \bar{x}_B$  et  $A \setminus B \succ_{ofs} B \setminus A$ .

Les comparaisons des vecteurs permettent de définir de nouvelles relations entre ensembles, comme par exemple :  $A \succ_{ParetoS} B$  ssi  $\bar{x}_A \succ_{ParetoS} \bar{x}_B$ .

**Proposition 30.** La relation définie par  $A \succ_{ParetoS} B$  ssi  $\bar{x}_A \succ_{ParetoS} \bar{x}_B$  vérifie les propriétés suivantes :

1. La compatibilité avec l'inclusion ensembliste stricte (CI)

2. La préservation de l'ordre par l'inclusion (POI)
3. L'auto-dualité (A)
4. La clôture conditionnelle pour l'implication (CCI)
5. La disjonction à gauche (OR)
6. La préadditivité (P)

**Preuve de la Proposition 30:** D'après la proposition 2, il suffit de prouver CI, POI, P, A et OR.

Soit  $\bar{x}_A = \{a_1, \dots, a_p\}$  et  $\bar{x}_B = \{b_1, \dots, b_p\}$  où  $a_i, b_i \in \{1, \bar{u}_i\}$ .

**CI :** Si  $A \subset B$  alors  $B \succ_{ParetoS} A$

Supposons que  $A \subset B$ . Alors  $\bar{B} \subset \bar{A}$ . Donc, pour tout  $i$ , si  $b_i = \bar{u}_i$  alors  $a_i = \bar{u}_i$ . Donc, pour tout  $i$ , on a  $b_i \geq a_i$ . D'autre part, l'inclusion stricte implique l'existence de  $j$  tel que  $b_j = 1$  et  $a_j = \bar{u}_j$ .

On a donc  $\bar{x}_B \succ_{Pareto} \bar{x}_A$  et donc  $\bar{x}_B \succ_{ParetoS} \bar{x}_A$ .

**POI :** Si  $A \succ_{ParetoS} B$  et  $A \subseteq A'$  et  $B \supseteq B'$  alors  $A' \succ_{ParetoS} B'$

Supposons que  $A \succ_{ParetoS} B$ . Alors  $\exists \sigma$  tel que  $\bar{x}_A^\sigma \succ_{Pareto} \bar{x}_B$ . Supposons maintenant que  $A \subset A'$  et  $B \supset B'$ . D'après la preuve de la propriété CI ci-dessus, on a  $\bar{x}_{A'} \succ_{Pareto} \bar{x}_A$  et  $\bar{x}_B \succ_{Pareto} \bar{x}_{B'}$ .

Donc, d'après la proposition 62, on a aussi  $\bar{x}_{A'}^\sigma \succ_{Pareto} \bar{x}_A^\sigma$ .

La relation  $\succ_{Pareto}$  étant transitive, il en résulte que  $\bar{x}_{A'}^\sigma \succ_{Pareto} \bar{x}_{B'}$ .

La transitivité s'applique aussi a fortiori si  $A = A'$  ou  $B = B'$ .

**A :** Supposons  $A \succ_{ParetoS} B$ . Notons que  $\forall u_i \in (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ ,  $a_i = b_i$ , donc en vertu de la proposition 65 (Annexe A), on peut supposer  $\sigma(i) = i$ . Mais alors, puisque  $B \setminus A = \bar{A} \setminus \bar{B}$ , on voit que  $\forall u_i \in B \setminus A$ ,  $\exists u_j \in A \setminus B$ ,  $\bar{u}_i \geq \bar{u}_j$  avec  $i = \sigma(j)$ . Ce qui s'écrit aussi  $\forall u_i \in \bar{A} \setminus \bar{B}$ ,  $\exists u_j \in \bar{B} \setminus \bar{A}$ ,  $\bar{u}_i \geq \bar{u}_j$  avec  $i = \sigma(j)$ . Donc, on a aussi  $\bar{x}_B^\sigma \succ_{Pareto} \bar{x}_A^\sigma$ .

**OR :** Si  $A \cap C \succ_{ParetoS} A \cap \bar{C}$  et  $B \cap C \succ_{ParetoS} B \cap \bar{C}$  alors  $(A \cup B) \cap C \succ_{ParetoS} (A \cup B) \cap \bar{C}$   
Comme  $A \cap C \succ_{ParetoS} A \cap \bar{C}$ ,  $\exists \sigma$  tel que  $\forall i$  :

- si  $u_i \notin A \cap C$  et  $u_i \notin A \cap \bar{C}$ , alors  $\sigma(i) = i$  (en vertu de la proposition 65 Annexe A).
- si  $u_i \in A \cap \bar{C}$ ,  $\exists u_j \in A \cap C$ ,  $\bar{u}_i \geq \bar{u}_j$  avec  $i = \sigma(j)$ . Avec comparaison stricte pour l'une au moins des paires  $(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ .

De même, comme  $B \cap C \succ_{ParetoS} B \cap \bar{C}$ ,  $\exists \gamma$  tel que  $\forall i$  :

- si  $u_i \notin B \cap C$  et  $u_i \notin B \cap \bar{C}$ , alors  $\gamma(i) = i$  (en vertu de la proposition 65 Annexe A).
- si  $u_i \in B \cap \bar{C}$ ,  $\exists u_j \in B \cap C$ ,  $\bar{u}_i \geq \bar{u}_j$  avec  $i = \gamma(j)$ . Avec comparaison stricte pour l'une au moins des paires  $(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ .

Nous allons construire une permutation  $\delta$  telle que  $\bar{x}_{(A \cup B) \cap C}^\delta \succ_{\text{Pareto}} \bar{x}_{(A \cup B) \cap \bar{C}}$ . Pour tout indice  $i$  :

- si  $u_i \notin (A \cup B) \cap C$  et  $u_i \notin (A \cup B) \cap \bar{C}$ , alors  $\sigma(i) = \gamma(i) = i$ . On pose  $\delta(i) = i$  (en vertu de la proposition 65 Annexe A).
- si  $u_i \in (A \cup B) \cap \bar{C}$ ,
  - Soit  $u_i \in A \cap \bar{C}$  et alors  $\exists u_j \in A \cap C, \bar{u}_i \geq \bar{u}_j$ . On a donc  $u_j \in (A \cup B) \cap C$ . On pose dans ce cas  $\delta(j) = i$ .
  - Soit  $u_i \in B \cap \bar{C}$  et alors  $\exists u_k \in B \cap C, \bar{u}_i \geq \bar{u}_k$ . On a donc  $u_k \in (A \cup B) \cap C$ . On pose dans ce cas  $\delta(k) = i$ .

**P** Si  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$  alors  $(B \succ_{\text{ParetoS}} C \text{ ssi } A \cup B \succ_{\text{ParetoS}} A \cup C)$ .

$B \succ_{\text{ParetoS}} C$  se traduit par l'existence d'une permutation  $\sigma$  telle que  $\forall i$ , si  $b_i = c_i, \sigma(i) = i$  (en vertu de la proposition 65 Annexe A) et  $\forall u_i \in C \setminus B, \exists u_j \in B \setminus C, \bar{u}_i \geq \bar{u}_j$  avec  $i = \sigma(j)$  (avec comparaison stricte pour l'une au moins des paires  $(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ ).

D'autre part, Si  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$  alors  $(A \cup C) \setminus (A \cup B) = C \setminus B$ . Donc on peut comparer  $A \cup B$  et  $A \cup C$  avec la même permutation  $\sigma$  que pour  $B$  et  $C$  (en vertu de la proposition 65 Annexe A). Donc on a bien que  $(B \succ_{\text{ParetoS}} C \text{ ssi } A \cup B \succ_{\text{ParetoS}} A \cup C)$ .

□

En revanche, la relation ne satisfait aucune des propriétés SU, Q, CCC, CUT, MF et Ferrers, comme le montrent les contre-exemples suivants :

### Exemple 17.

**SU** :  $L = \{a, b, c\}$  (voir **Figure. 1.4(a)**),  $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{b\}$ . On a  $A \succ_{\text{ParetoS}} B$  mais pas  $A \cup C \succ_{\text{ParetoS}} B \cup C$ .

**Q** :  $L = \{a, b, c, \}$  (voir **Figure. 1.4(a)**),  $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$ . On a  $A \cup B \succ_{\text{ParetoS}} C$  et  $A \cup C \succ_{\text{ParetoS}} B$  mais on n'a pas  $A \succ_{\text{ParetoS}} B \cup C$ . Le même exemple prouve que la propriété N n'est pas satisfaite.

**CCC** :  $L = \{a, b, c, d\}$  (voir **Figure. 1.4(c)**),  $A = \{b, c\}, B = \{a, c, d\}, C = \{a, b, c\}$ . On a  $A \cap C \succ_{\text{ParetoS}} \bar{A} \cap C, B \cap C \succ_{\text{ParetoS}} \bar{B} \cap C$  mais on n'a pas  $A \cap B \cap C \succ_{\text{ParetoS}} \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ .

**CUT** :  $L = \{a, b, c, d\}$  (voir **Figure. 1.4(c)**),  $A = \{a, b, c\}, B = \{a, c, d\}, C = \{c\}$ . On a  $A \cap B \succ_{\text{ParetoS}} A \cap \bar{B}$  et  $A \cap B \cap C \succ_{\text{ParetoS}} A \cap B \cap \bar{C}$  mais on n'a pas  $A \cap C \succ_{\text{ParetoS}} A \cap \bar{C}$ .

**MF** :  $L = \{a, b, c, d\}$  (voir **Figure. 1.4(d)**),  $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, c, d\}, C = \{a, b\}$ . On a  $A \cap B \succ_{\text{ParetoS}} A \cap \bar{B}$  et  $A \cap C \succ_{\text{ParetoS}} A \cap \bar{C}$  mais on n'a pas  $A \cap B \cap C \succ_{\text{ParetoS}} A \cap B \cap \bar{C}$ .

**Ferrers** :  $L = \{a, b, c, d\}$  avec  $a > b, c > d$ .  $A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{c\}$  et  $D = \{d\}$ .  
 On a  $A \succ_{\text{ParetoS}} B, C \succ_{\text{ParetoS}} D$  mais ni  $A \succ_{\text{ParetoS}} D$ , ni  $C \succ_{\text{ParetoS}} B$ .

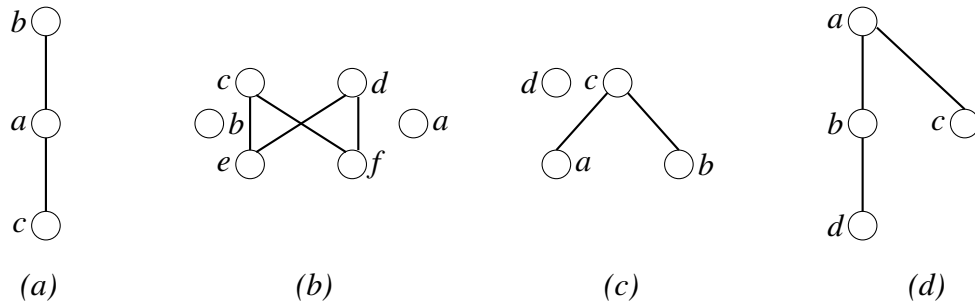


FIGURE 1.4 – Les ordres partiels utilisés dans l’exemple 17

	Ferrers	CI	POI	SU	P	A	Q	CCI	CCC	OR	CUT	MF
$\gamma_{ss}$	0	0	0	0	0	0	0	0	✓	0	0	✓
$\gamma_{oFs}$	0	0	✓	0	0	0	0	✓	0	0	0	✓
$\gamma_{ofs}$	0	0	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\gamma_{ofs}^+$	0	✓	✓	0	✓	✓	$\sqrt{(QF)}$	✓	✓	✓	✓	✓
$\gamma_{\text{ParetoS}}$	0	✓	✓	0	✓	✓	0	✓	0	✓	0	0

TABLE 1.3 – ✓ (resp. 0) signifie que la propriété est (resp. n’est pas) satisfaite par la relation

La **Table 1.3** récapitule les propriétés satisfaites par certaines des relations étudiées.

### 1.4 Ordre partiel comme une famille d’ordres totaux

Une autre manière de construire un ordre partiel sur les parties d’un ensemble  $S$  induit par un ordre partiel sur l’ensemble  $S$  est de considérer un ordre partiel sur  $S$  comme une famille d’ordres totaux qui sont compatibles avec (ou prolongent) l’ordre partiel [40] et [88].

Rappelons tout d’abord la définition d’un ordre total compatible avec un ordre partiel :

**Définition 13.** Soit  $(S, \geq)$  un ensemble partiellement ordonné. Une relation de pré-ordre  $\geq^i$  est dite compatible avec  $\geq$  ssi :

- $\forall a, b \in S$ , si  $a \geq b$  alors  $a \geq^i b$
- $\forall a, b \in S$ , si  $a > b$  alors  $a >^i b$



Deux principes peuvent être utilisés selon que l'on considère au moins un ordre total compatible (principe optimiste) ou tous les ordres totaux compatibles (principe pessimiste).

**Définition 14.** Soit  $(S, \geq)$  un ensemble fini partiellement ordonné et  $\geq^i, i = 1..n$  les ordres totaux qui prolongent  $\geq$ .  $\triangleright^i$  dénote la relation de comparaison de sous-ensembles de  $S$  induite par la relation  $\geq^i$ .

On définit une relation de comparaison des sous-ensembles de  $S$  par : pour tous sous-ensembles  $A, B$  de  $S$

**Principe pessimiste**  $A \triangleright B$  ssi  $\forall i = 1 \dots n, A \triangleright^i B$

**Principe optimiste**  $A \triangleright B$  ssi  $\exists i, A \triangleright^i B$

**Exemple 18.** Soit  $(S, \geq) = \{a, b, c, d, e\}$  un ensemble partiellement ordonné. Soit  $\geq_1, \geq_2$  et  $\geq_3$  trois ordres totaux qui prolongent l'ordre partiel (voir **Figure. 1.5**). Soit les sous-ensembles  $A = \{e, c\}, B = \{b, d\}$  et  $C = \{a, d\}$  :

$\forall i = 1 \dots 3, \max A >^i \max B.$

- On a  $\max C >^2 \max B$  mais  $\max B >^1 \max C.$

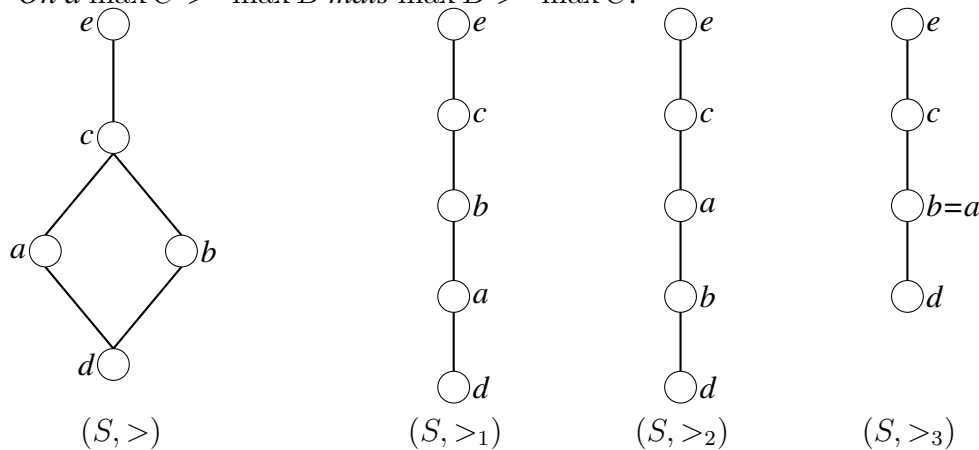


FIGURE 1.5 – Ordre partiel et les ordres totaux qui le prolongent

Cette approche nous permet de définir de nouvelles relations de comparaison sur une échelle partiellement ordonnée, dont il est intéressant d'étudier les liens avec les approches déjà présentées.

Comme nous avons montré dans la section 1.2, les définitions de la dominance optimiste et pessimiste sont duales et les dominances forte et faible présentent moins de propriétés. Nous ne considérerons donc ici que la relation de dominance optimiste.

La proposition ci-dessous exprime que le principe pessimiste permet de retrouver la dominance optimiste faible stricte.

**Proposition 31.** Soit  $(S, \geq)$  un ensemble fini partiellement ordonné et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $S$ . Soit  $\geq^i, i = 1 \cdots n$  les ordre totaux qui prolongent  $\geq$ . On a :

$$A \succ_{of_s} B \text{ ssi } \forall i = 1 \cdots n \ A \succ_{of_s}^i B$$

**Preuve de la Proposition 31:**

**Lemme 3.**  $(S, \geq)$  un ensemble fini partiellement ordonné. Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $S$  tels que  $\forall i = 1 \cdots n, a_0$  et  $a_i$  sont incomparables par  $\geq$ . Il existe un ordre total  $\geq'$  prolongeant  $\geq$  tel que  $\forall i = 1 \cdots n, a_0 \geq' a_i$ .

**Preuve du Lemme 3:** Remarquons tout d'abord que si  $a$  et  $b$  sont incomparables par  $\geq$ , on peut trouver un ordre  $\geq'$  prolongeant  $\geq$  tel que  $a \geq' b$ . Il suffit d'ajouter à  $\geq$  le couple  $a >' b$  et de prendre la fermeture transitive. Considérons maintenant  $c \in S$  tel que  $a$  et  $c$  sont incomparables par  $\geq$  et  $b$  et  $c$  incomparables par  $>$ . Alors, soit  $a >' c$ , soit  $c$  est encore incomparable avec  $a$  par l'ordre  $\geq'$ . En effet,

- si  $c \geq' a$  alors par définition de  $\geq'$ , on a  $c \geq x_1 \geq x_2 \dots \geq x_k \geq a$  ce qui contredit le fait que  $a$  et  $c$  sont incomparables par  $\geq$ .
- si  $a \geq' c$  alors on peut avoir  $a >' b \geq x_1 \geq x_2 \dots \geq x_k \geq c$ . La seule possibilité est d'avoir  $b, c$  équivalents par  $\geq$  et alors  $a >' c$ .

Donc, soit  $\geq'$  est un prolongement de  $\geq$  qui permet de préférer  $a$  à  $b$  et  $c$ . Soit on peut trouver un ordre  $\geq''$  qui prolonge  $\geq'$  (donc qui prolonge  $\geq$ ) tel que  $a \geq'' c$ . Dans ce cas on a bien un prolongement de  $\geq$  qui préfère  $a$  à  $b$  et à  $c$ .

Soit donc  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $S$  tels que  $\forall i = 1..n, a_0$  et  $a_i$  sont incomparables par  $\geq$ . Posons  $S = \max(\{a_1, \dots, a_n\})$ . Alors tous les éléments de  $S$  sont deux à deux incomparables par la relation  $>$ . En appliquant ce qui précède et en raisonnant par récurrence, on pourra construire un ordre  $\geq'$  prolongeant  $\geq$  tel que :  $\forall b \in S, a_0 \geq' b$ . Et pour  $a_i \notin S$ , comme  $S = \max(\{a_1, \dots, a_n\})$ ,  $\exists a_j \in S, a_j > a_i$ . Donc on a encore  $a_0 \geq' a_i$ . □

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $A \succ_{of_s} B$  alors  $\forall b \in B, \exists a \in A, a > b$ . La comparaison  $a > b$  reste vraie pour tous les ordres totaux  $>^i$ , par définition du prolongement.

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $\forall i = 1..n, A \succ_{of_s}^i B$ . Puisque l'ordre  $\geq^i$  est total, si on a  $A \succ_{of_s}^i B$  alors on a  $A \succ_{of_s}^i B$ . Donc  $\forall i = 1..n, \exists a_i \in A, \forall b \in B, a_i >^i b$  (1).

Raisonnons par l'absurde, et supposons que non  $(A \succ_{of_s} B)$ . Alors  $\neg(\forall b \in B, \exists a \in A, a > b)$ . Donc  $\exists b_0 \in B, \forall a \in A, \neg(a > b_0)$  (2). En appliquant ce résultat à chacun des  $a_i$ , on obtient :  $\forall i = 1..n, \neg(a_i > b_0)$  (3).

Comme  $\geq^i$  prolonge  $\geq$ , on ne peut pas avoir  $b_0 \geq a_i$  (sinon par définition du prolongement, on aurait  $b_0 \geq^i a_i$  ce qui contredirait (1)).

Donc,  $\forall i = 1..n, a_i$  et  $b_0$  sont incomparables par la relation  $\geq$ . Dans ce cas, par le Lemme 3, on sait qu'il existe un ordre total prolongeant  $\geq$ , soit  $\geq^k$ , tel que  $\forall i = 1..n, b_0 \geq^k a_i$ . Donc en particulier, on a  $b_0 \geq^k a_k$ , ce qui contredit (1).

On a donc prouvé (par l'absurde) que  $A \succ_{of_s} B$ .

□

**Exemple 18 (suite)**

- $\forall i = 1 \dots 3$ ,  $\max A >^i \max B$  et on a bien  $A \succ_{of_s} B$ .
- On a  $\max C >^2 \max B$  mais  $\max B >^1 \max C$  et ni  $B \succ_{of_s} C$ , ni  $C \succ_{of_s} B$ .

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un panorama sur les ordres partiels entre sous-ensembles d'un ensemble induits par un ordre partiel sur leurs éléments. Premièrement, nous avons fait un rappel sur les ordres sur des vecteurs à composantes avec des ordres totaux et leurs raffinements. Ensuite des extensions de ces ordres aux cas de sous-ensembles d'un ensemble partiellement ordonné ont été présentées avec une étude de leurs propriétés, complétant ainsi un travail de Halpern [67]. Nous avons aussi établi le lien entre ordres totaux et ordres partiels, en considérant un ordre partiel comme une famille d'ordres totaux, et en définissant les relations partielles entre ensembles à partir des relations issues de ces ordres totaux. Il semble que les relations partielles entre ensembles les plus intéressantes soient la dominance optimiste faible stricte et sa version préadditive.

Ce travail était nécessaire pour étudier l'inférence dans une base de connaissances classique partiellement ordonnée afin d'en construire une fermeture déductive partiellement ordonnée. En effet, le passage des formules partiellement ordonnées à des modèles partiellement ordonnés revient à ordonner les sous ensembles de formules satisfaites par chaque interprétation du langage. De même on peut ordonner partiellement les formules du langage en considérant l'ordre partiel induit sur leurs ensembles de modèles à partir de l'ordre partiel sur les interprétations. L'étude d'une telle approche sémantique, et de ses limitations, ainsi que des techniques d'inférence syntaxique lui correspondant fait l'objet de la suite de ce travail. En effet la situation est plus complexe que dans le cadre de l'ordre total où la correspondance entre ordre total sur les formules et ordre total sur les interprétations est bien connue.

## Peut-on adapter la logique possibiliste au cas partiel ?

---

### Sommaire

---

<b>2.1 Rappels sur la logique possibiliste LP</b>	<b>49</b>
<b>2.2 Fermeture déductive - Approche sémantique par extension ensembliste de l'ordre partiel</b>	<b>52</b>
<b>2.3 Conclusion</b>	<b>59</b>

---

Ce chapitre constitue une première tentative d'extension de la logique possibiliste au cas partiellement ordonné. Comme déjà mentionné dans l'introduction de ce document, nous adoptons une approche basée sur une logique de certitude relative de type logique conditionnelle comme celle utilisée dans [67]. Pour éviter d'utiliser des formules complexes qui s'interprètent mal, nous utilisons un langage simplifié.

La logique possibiliste standard propose trois méthodes d'inférence équivalentes à savoir l'inférence sémantique, l'inférence à base de coupes et l'inférence syntaxique. Il a été montré que ces trois méthodes produisent les mêmes conséquences dans le cas totalement ordonné [48]. Dans l'optique d'une application au raisonnement avec des bases de connaissances partiellement ordonnées, nous commençons par étudier deux extensions possibles. La première est à base d'une approche sémantique inspirée de la logique possibiliste. L'idée derrière cette extension consiste à utiliser l'ordre partiel sur les formules pour générer un ordre partiel sur les interprétations, ensuite ce dernier sera utilisé pour construire un ordre partiel sur tout le langage. Une deuxième extension est à base de coupes dans l'esprit de la logique possibiliste. L'idée sous-jacente est que, si on arrive à déduire une formule à partir d'une coupe  $\alpha$  (on prend les formules qui ont au moins un niveau de certitude  $\alpha$ ), alors cette formule est déductible au moins à ce niveau.

Ce chapitre est structuré comme suit. Nous rappelons les notions de base de la logique possibiliste standard dans la section 2.1. Dans la section 2.2, nous proposons une première tentative de définition de fermeture déductive basée sur une approche sémantique inspirée

de la logique possibiliste à base de la relation d'ordre partiel  $\succ_N$  et une autre à base de la relation partielle préadditive  $\succ_N^+$ . Nous montrons que chaque fois le résultat est insatisfaisant.

Nous considérons un langage propositionnel  $\mathcal{L}$  dont les formules sont notées  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , et l'ensemble des interprétations est noté  $\Omega$ .  $[\phi]$  (resp.  $[\bar{\phi}]$ ) dénote l'ensemble des modèles (resp. contre modèles) de la formule  $\phi$ .

## 2.1 Rappels sur la logique possibiliste LP

Dans le but d'étendre la logique possibiliste dans le cas partiellement ordonné, nous commençons par rappeler la version standard de la logique possibiliste LP.

### 2.1.1 Base possibiliste

La logique possibiliste est une extension de la logique classique qui manipule des formules pondérées  $(\phi_j, \alpha_j)$  où  $\phi_j$  est une formule propositionnelle et  $0 < \alpha_j \leq 1$ . La formule pondérée  $(\phi_j, \alpha_j)$  s'interprète par  $N(\phi_j) \geq \alpha_j > 0$ , avec  $N$  une mesure de nécessité [48].  $\alpha_j$  est alors vu comme le degré de certitude minimal de  $\phi_j$ .

Une base possibiliste est un ensemble de formules pondérées  $\Sigma = \{(\phi_j, \alpha_j) \mid j = 1, \dots, m\}$ . On peut lui associer une distribution de possibilité  $\pi_\Sigma$  sur  $\Omega$  de la manière suivante :

- $\forall j \pi_j(\omega) = 1$  si  $\omega \in [\phi_j]$ , et  $\pi_j(\omega) = 1 - \alpha_j$  si  $\omega \notin [\phi_j]$ .
- $\pi_\Sigma(\omega) = \min_j(\pi_j(\omega))$ .

On a bien alors  $N_\Sigma(\phi_j) \geq \alpha_j$  avec  $N_\Sigma$  définie par  $N_\Sigma(\phi) = \min_{\omega \notin [\phi]}(1 - \pi_\Sigma(\omega))$ .

Notons que l'ordre initial de la base possibiliste peut être modifié en fonction des dépendances logiques entre les formules. On peut avoir  $N_\Sigma(\phi_j) > \alpha_j$ . C'est le cas par exemple si  $\exists i, \phi_i \models \phi_j$  et  $\alpha_i > \alpha_j$ .

La fermeture (sémantique) de  $\Sigma$  est alors définie par

$$\mathcal{C}_\pi(\Sigma) = \{(\phi, N_\Sigma(\phi)) : \phi \in \mathcal{L}, N_\Sigma(\phi) > 0\}$$

Soit  $\Sigma^*$  le squelette de  $\Sigma$  défini comme suit :

**Définition 15.** Soit  $\Sigma$  une base possibiliste.

$$\Sigma^* = \{\phi : \exists \alpha > 0, (\phi, \alpha) \in \Sigma\}.$$

Comme les poids ne sont que des bornes inférieures ils n'ajoutent jamais d'inconsistance à la base. La seule cause d'inconsistance provient de l'inconsistance au sens classique de  $\Sigma^* = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ .

Si la base  $\Sigma^*$  est inconsistante,  $Cons(\Sigma) = \max_{\omega} \pi_{\Sigma}(\omega) < 1$  représente le degré de consistance de la base  $\Sigma$ . De plus,  $\forall \phi, N_{\Sigma}(\phi) \geq 1 - Cons(\Sigma)$ , et  $\mathcal{C}_{\pi}(\Sigma)^* = \mathcal{L}$ . Néanmoins, on peut considérer l'ensemble des conséquences non-triviales de  $\Sigma$  comme

$$\mathcal{C}_{\pi}^{nt}(\Sigma) = \{(\phi, \beta) : \phi \in \mathcal{L}, N_{\Sigma}(\phi) = \beta > 1 - Cons(\Sigma)\}$$

qui coïncide avec  $\mathcal{C}_{\pi}(\Sigma)$  si  $Cons(\Sigma) = 1$ .

Si on définit la coupe stricte de niveau  $\alpha$  de  $\Sigma$  comme  $\Sigma_{\alpha}^> = \{(\phi_j, \alpha_j) : \alpha_j > \alpha\}$ , il est facile de voir que  $\mathcal{C}_{\pi}^{nt}(\Sigma) = \mathcal{C}_{\pi}(\Sigma_{1-Cons(\Sigma)}^>)$ .

**Définition 16.**  $\phi$  est une conséquence plausible de  $\Sigma$  ssi :

$$N_{\Sigma}(\phi) > 1 - Cons(\Sigma)$$

ce qui revient à :  $(\phi, N_{\Sigma}(\phi)) \in \mathcal{C}_{\pi}^{nt}(\Sigma)$ .

La sémantique de la conséquence plausible est définie comme suit :  $\phi$  conséquence plausible de  $\Sigma$  ssi  $\phi$  est satisfaite dans tous les modèles préférés pour  $\pi_{\Sigma}$ . Voir [9] pour les liens avec l'inférence non-monotone dite "rationnelle".

On peut aussi définir la sémantique de la logique possibiliste en termes de satisfaction tout ou rien de  $\Sigma$  par une distribution de possibilité  $\pi$  sur  $\Omega$  comme :  $\pi \models \Sigma$  si et seulement si  $N(\phi_j) \geq \alpha_j, j = 1, \dots, m$ , avec  $N(\phi) = \min_{\omega \notin [\phi]} (1 - \pi(\omega))$  qui est le degré de nécessité de  $\phi$ . On peut montrer que  $\pi \models \Sigma$  si et seulement si  $\pi \leq \pi_{\Sigma}$ . Cela indique que la logique possibiliste repose sur la sélection de la distribution de possibilité la moins informative qui satisfait  $\Sigma$ .

### 2.1.2 Sémantique ordinaire d'une base possibiliste

La sémantique ordinaire d'une base possibiliste se définit par la relation sur les interprétations induite par la distribution  $\pi_{\Sigma}$ . On note  $\Sigma(\omega)$  (resp.  $\overline{\Sigma(\omega)}$ ) l'ensemble des formules de  $\Sigma$  satisfaites (resp. falsifiées) par l'interprétation  $\omega$ .

**Définition 17.** Soit  $\Sigma$  une base possibiliste et  $\omega, \omega' \in \Omega$  deux interprétations.

$$\omega \geq_{\Sigma} \omega' \text{ ssi } \pi_{\Sigma}(\omega) \geq \pi_{\Sigma}(\omega')$$

Il est alors possible de définir directement la sémantique d'une base possibiliste, sans passer par la distribution de possibilité  $\pi_{\Sigma}$ , notons que

$$1 - \pi_{\Sigma}(\omega) = \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j,$$

ce qui correspond à l'ordre "best-out" [10] On peut donc exprimer  $N_{\Sigma}(\phi)$  comme

$$N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \models \phi} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$$

Soit le pré-ordre complet  $\succeq_{\Sigma}$  sur  $\Omega$  défini par :

$$\omega \succeq_{\Sigma} \omega' \text{ ssi } \forall (\phi_j, \alpha_j) \text{ tel que } \phi_j \in \overline{\Sigma(\omega)}, \exists (\psi_i, \beta_i) \text{ tel que } \psi_i \in \overline{\Sigma(\omega')} \text{ et } \beta_i \geq \alpha_j$$

Il est facile de voir que  $\pi_{\Sigma}(\omega) \geq \pi_{\Sigma}(\omega')$  ssi  $\omega \succeq_{\Sigma} \omega'$ . Le pré-ordre  $\succeq_{\Sigma}$  permet de construire une fermeture déductive totalement pré-ordonnée comme suit :

$$\phi \succeq_N \psi \text{ ssi } \forall \omega \in \overline{[\phi]}, \exists \omega' \in \overline{[\psi]} \text{ et } \omega' \succeq_{\Sigma} \omega.$$

On a alors :  $\phi \succeq_N \psi$  ssi  $N_{\Sigma}(\phi) \geq N_{\Sigma}(\psi)$ .

### 2.1.3 Inférence syntaxique en logique possibiliste

Une inférence syntaxique correcte et complète pour la sémantique ci-dessus peut être définie avec les axiomes et les règles d'inférence suivants :

- On garde les axiomes de la logique classique avec un degré 1.

- $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi), 1)$
- $((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)), 1)$
- $((\neg\phi) \rightarrow (\neg\psi)) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi), 1)$

- Les règles d'inférence

- Règle d'affaiblissement : Si  $\alpha \geq \beta$  alors  $(\phi, \alpha) \vdash_{\pi} (\phi, \beta)$
- Modus Ponens :  $\{(\phi \rightarrow \psi, \alpha), (\phi, \alpha)\} \vdash_{\pi} (\psi, \alpha)$

En utilisant ce système d'inférence, nous pouvons définir  $\Sigma \vdash_{\pi} (\phi, \alpha)$  si  $(\phi, \alpha)$  se déduit de  $\Sigma$  par les règles et les axiomes.

La logique possibiliste est correcte et complète pour le système d'inférence ci-dessus, ce qui se traduit par l'égalité :

$$N_{\Sigma}(\phi) = \max\{\alpha : \Sigma \vdash_{\pi} (\phi, \alpha)\}$$

Notons que l'on a aussi

$$N_{\Sigma}(\phi) = \max\{\alpha : (\Sigma_{\alpha}^{\geq})^* \vdash \phi\}$$

où  $\Sigma_{\alpha}^{\geq} = \{(\phi_i, \alpha_i) : \alpha_i \geq \alpha\}$  est la coupe de niveau  $\alpha$  de  $\Sigma$ . L'approche par l'inférence classique sur les coupes rend compte de l'inférence en logique possibiliste.

Ce système d'inférence permet de définir syntaxiquement le degré d'inconsistance d'une base possibiliste.

**Définition 18.** *Le degré d'inconsistance de la base  $\Sigma$ , noté  $Inc(\Sigma)$ , est défini par :*

$$Inc(\Sigma) = \max\{\alpha \mid \Sigma \vdash_{\pi} (\perp, \alpha)\}$$

On peut prouver que :

- $Inc(\Sigma) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\Sigma}(\omega) = 1 - Cons(\Sigma)$
- et que  $N_{\Sigma}(\phi) = Inc(\Sigma \cup (\neg\phi, 1))$ .

## 2.2 Fermeture déductive - Approche sémantique par extension ensembliste de l'ordre partiel

Dans cette section nous allons essayer d'étendre les résultats de la logique possibiliste dans le cas partiellement ordonné en s'inspirant de ses méthodes. L'idée est de considérer un langage similaire à celui proposé par Halpern [67] (un langage de type logique conditionnelle simplifiée) et d'effectuer une extension partielle dans l'esprit de la logique possibiliste.

### 2.2.1 Extension partielle de la logique possibiliste standard

Sur le plan sémantique, on suppose qu'un état épistémique est modélisé par un pré-ordre partiel sur les interprétations d'un langage propositionnel, soit  $(\Omega, \triangleright)$ .

Si  $w$  et  $w'$  représentent deux éléments de  $\Omega$ , l'assertion  $w' \triangleright w$  est interprétée comme "  $w'$  est au moins aussi plausible que  $w$  ". Soit  $\mathcal{K}_{\triangleright}$  l'ensemble de croyances acceptées associé à  $(\Omega, \triangleright)$ . On le définit souvent comme l'ensemble déductivement clos de formules dont les modèles forment l'ensemble  $Max(\Omega, \triangleright)$ . Mais on peut vouloir aller plus loin et définir une fermeture déductive qui soit un ordre partiel induit par  $(\Omega, \triangleright)$  sur le langage,  $(\Omega, \triangleright)$  étant lui-même induit par une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$ .

La question est maintenant : comment passer de  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright)$  et réciproquement.

**De  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright)$  :** A partir d'une base partiellement ordonnée, le problème est de construire un pré-ordre partiel sur l'ensemble des interprétations de  $\mathcal{K}$ . Une approche naturelle est de comparer deux interprétations  $\omega$  et  $\omega'$  en comparant des sous-ensembles de formules de  $\mathcal{K}$  construits à partir de ces interprétations. Cette approche a été étudiée dans le cadre possibiliste pour les bases totalement ordonnées [44], mais aussi dans le cas partiellement ordonné [18].



**De**  $(\Omega, \triangleright)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N)$  : Partant d'un pré-ordre partiel de plausibilité sur  $\Omega$ , le problème est de construire un pré-ordre partiel sur l'ensemble des formules du langage  $\mathcal{L}$ . Pour cela il est naturel de comparer deux formules  $\phi$  et  $\phi'$  en comparant les ensembles de modèles ou contre-modèles de  $\phi$  et de  $\phi'$ . On note  $[\phi]$  l'ensemble des modèles de  $\phi$ , un sous-ensemble de  $\Omega$ .

Les deux transformations se ramènent au problème d'étendre un pré-ordre partiel sur un ensemble  $S$  à un ordre partiel sur l'ensemble des sous-ensembles de  $S$ . Ce problème a été notamment étudié dans le Chapitre 1.

Dans le chapitre 1, nous avons étudié plusieurs relations d'ordre partiel et nous avons constaté que les deux relations  $\succ_{ofs}$  et  $\succ_{ofs}^+$  sont les plus prometteuses. Dans la suite, nous allons utiliser ces deux relations d'ordre partiel pour définir deux méthodes d'inférence à base d'une approche sémantique dans l'esprit de la logique possibiliste.

Une fois les deux relations d'ordre partiel  $\succ_{ofs}$ ,  $\succ_{ofs}^+$  et leurs transposées caractérisées, nous allons définir une méthode d'inférence sémantique.

On définit une relation de certitude relative simple  $\succ_N$  sur des formules logiques  $\phi, \psi$  par :

$$\phi \succ_N \psi \text{ ssi } [\psi] \triangleright [\phi]$$

Puisque la relation  $\succ_{ofs}$  satisfait les propriétés : Q, POI, N, CCI, CCC, OR, CUT, MF et la réciproque de SU, alors par la proposition 7 la relation  $\succ_N$  satisfait les propriétés suivantes :

$$Q^d, \text{ POI}, N^d, \text{ CCI}^d, \text{ CCC}^d, \text{ OR}^d, \text{ CUT}^d, \text{ MF}^d \text{ et la réciproque de SI.}$$

Puisque les propriétés élémentaires sont Q, POI et les autres sont des propriétés dérivées proposition 2, les deux propriétés  $Q^d, \text{ POI}$  suffisent pour déduire les autres propriétés.

On définit aussi :

$$\phi \succ_N^+ \psi \text{ ssi } [\psi] \triangleright^+ [\phi]$$

Puisque la relation  $\triangleright^+$  satisfait les propriétés : version stricte de CI, POI, A, P, CCI, CCC, OR, CUT, MF et une forme faible de Q et N alors par les propositions 5 et 7 la relation  $\succ_N^+$  satisfait les propriétés suivantes :

version stricte de CI, POI, A, P,  $\text{CCI}^d, \text{CCC}^d, \text{OR}^d, \text{CUT}^d, \text{MF}^d$  et les formes faibles de la qualitativité et de la négligeabilité ( $\text{QF}^d$  et  $\text{NF}^d$ )

De par son auto-dualité, la relation  $\succ_N^+$  est telle que

$$\phi \succ_N^+ \psi \text{ ssi } [\psi] \triangleright^+ [\phi] \text{ ssi } [\phi] \triangleright^+ [\psi] \text{ ssi } \neg\psi \succ_N^+ \neg\phi.$$

## 2.2.2 Fermeture déductive par extension ensembliste

On note par  $(\mathcal{K}, >)$  une base de croyances partiellement ordonnée où  $\mathcal{K}$  est une base propositionnelle et  $>$  une relation d'ordre partiel de certitude entre les formules de cette base. Notons  $\mathcal{K}(\omega)$  (resp.  $\overline{\mathcal{K}(\omega)}$ ) le sous ensemble de formules de  $\mathcal{K}$  satisfaites (resp.

falsifiées) par l'interprétation  $\omega \in \Omega$ .  $[\phi]$  dénote l'ensemble des modèles de  $\phi$ , un sous-ensemble de  $\Omega$ . Le principe de construction consiste à appliquer deux fois l'extension d'un ordre partiel sur un ensemble à un ordre partiel sur ses parties avec  $\succ_{ofs}$  comme suit :

**Définition 19** (Construction d'un ordre partiel sur les interprétations). *De  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright)$  :*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \triangleright \omega' \text{ ssi } \overline{\mathcal{K}(\omega')} \succ_{ofs} \overline{\mathcal{K}(\omega)}$$

Dans l'esprit de la logique possibiliste, on définit ici la dominance sur les interprétations en termes de violation des formules les plus certaines (ordre best-out [10]). On obtient une distribution de possibilité ordinaire sur le langage. Mais, dans notre cas, certaines formules peuvent être incomparables.

**Définition 20** (Construction d'un ordre partiel sur les formules). *De  $(\Omega, \triangleright)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N)$  :*

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}, \phi \succ_N \psi \text{ ssi } \overline{[\psi]} \triangleright \overline{[\phi]}.$$

Dans le cas d'un ordre total, cela revient à définir une relation de nécessité sur  $\mathcal{L}$  [48].

La fermeture déductive partiellement ordonnée de  $(\mathcal{K}, >)$  peut être alors définie :

**Définition 21.** *La fermeture déductive  $\mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >)$  est définie par :*

$$\mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >) = \{(\phi, \psi) \in \mathcal{L}^2 : \phi \succ_N \psi\}.$$

On écrit  $(\mathcal{K}, >) \models_N \phi \succ_N \psi$  si  $(\phi, \psi) \in \mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >)$ .

En accord avec [40], on peut extraire à partir de  $\mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >)$  l'ensemble des croyances acceptées quand  $\phi$  est supposé pour être vrai :

$$\mathcal{A}_\phi(\mathcal{K}, >)_{ofs} = \{\psi : (\phi \rightarrow \psi, \phi \rightarrow \neg\psi) \in \mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >)\}$$

En effet si  $\psi \in \mathcal{A}_\phi(\mathcal{K}, >)_{ofs}$  cela veut dire que dans le contexte où on sait seulement que  $\phi$  est vrai,  $\psi$  est plus plausible que sa négation.

Aussi naturelle que puisse être cette notion de fermeture déductive (elle généralise celle de la logique possibiliste), elle s'avère problématique, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 19.** *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée avec  $\mathcal{K} = \{x, \neg x \vee y, x \wedge y, \neg x\}$  et  $>$  est l'ordre partiel strict défini par :  $\neg x \vee y > x \wedge y > \neg x$  et  $x > \neg x$ . Appliquons les définitions 19 and 20 (voir les tables 2.1 et 2.2 pour le calcul) :*

- *De  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright)$  : on obtient  $xy \triangleright \{\bar{x}y, x\bar{y}, \bar{x}\bar{y}\}$ . Notons que l'ordre partiel  $(\Omega, \triangleright)$  est compatible avec 6 ordres totaux qui le prolongent :*

$$- \quad xy \triangleright \bar{x}y \triangleright x\bar{y} \triangleright \bar{x}\bar{y}$$

- $xy \triangleright \bar{x}y \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y}$
- $xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright \bar{x}y \triangleright x\bar{y}$
- $xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y} \triangleright \bar{x}y$
- $xy \triangleright x\bar{y} \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright \bar{x}y$
- $xy \triangleright x\bar{y} \triangleright \bar{x}y \triangleright \bar{x}\bar{y}$

• De  $(\Omega, \triangleright)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N)$  : on obtient

- $x \succ_N \neg x$  puisque on a  $\overline{[\neg x]} = \{xy, x\bar{y}\} \triangleright_{ofs} [x] = \{\bar{x}y, \bar{x}\bar{y}\}$
- $x \wedge y \succ_N \neg x$  puisque on a  $\overline{[\neg x]} = \{xy, x\bar{y}\} \triangleright_{ofs} [x \wedge y] = \{x\bar{y}, \bar{x}y, \bar{x}\bar{y}\}$
- $\neg x \vee y \succ_N \neg x$  puisque on a  $\overline{[\neg x]} = \{xy, x\bar{y}\} \triangleright_{ofs} [\neg x \vee y] = \{\neg x \vee y\}$

Mais pas  $\neg x \vee y \succ_N x \wedge y$

Donc  $\{(\phi, \psi) : \phi \triangleright \psi \in (\mathcal{K}, \triangleright)\} \not\subseteq \mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, \triangleright)$  ce qui viole l'axiome de réflexivité de Tarski ( $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{B})$  pour tout opérateur de conséquence  $\mathcal{C}$ ).

TABLE 2.1 – Vecteurs associés aux interprétations

	$x$	$x \wedge y$	$\neg x \vee y$	$\neg x$
$xy$	1	1	1	$\neg x$
$x\bar{y}$	1	$x \wedge y$	$\neg x \vee y$	$\neg x$
$\bar{x}y$	$x$	$x \wedge y$	1	1
$\bar{x}\bar{y}$	$x$	$x \wedge y$	1	1

TABLE 2.2 – Vecteurs associés aux formules

	$xy$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$x$	1	1	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$x \wedge y$	1	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$\neg x \vee y$	1	$x\bar{y}$	1	1
$\neg x$	$xy$	$x\bar{y}$	1	1

Nous remarquons que, dans l'ordre définitif sur les formules,  $\neg x \vee y$  et  $x \wedge y$  sont incomparables. La raison en est que certaines informations ont été perdues lors du passage de  $(\mathcal{K}, \triangleright)$  à  $(\Omega, \triangleright)$ . En effet, si l'ordre partiel strict  $\triangleright$  de la base  $\mathcal{K}$  est interprété directement comme la partie stricte d'une relation partielle  $\succ_N$  de nécessité, l'application de la définition 20 produit les contraintes suivantes :

- par  $\neg x \vee y \succ_N x \wedge y$  nous devons avoir  $(\bar{x}y \triangleright x\bar{y} \text{ ou } \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y})$
- par  $x \wedge y \succ_N \neg x$  nous devons avoir  $(xy \triangleright x\bar{y})$  et  $(xy \triangleright \bar{x}y \text{ ou } x\bar{y} \triangleright \bar{x}y)$  et  $(xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \text{ ou } x\bar{y} \triangleright \bar{x}\bar{y})$
- par  $x \succ_N \neg x$  nous devons avoir  $(xy \triangleright \bar{x}y \text{ ou } x\bar{y} \triangleright \bar{x}y)$  et  $(xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \text{ or } x\bar{y} \triangleright \bar{x}\bar{y})$

Il est facile de voir que ces contraintes impliquent que  $xy \triangleright \{\bar{x}y, x\bar{y}, \bar{x}\bar{y}\}$  et  $(\bar{x}y \triangleright x\bar{y} \text{ ou } \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y})$ . On obtient donc une condition plus forte sur  $\Omega$ , car elle est compatible avec seulement 4 ordres totaux parmi les 6 précédents :

- $xy \triangleright \bar{x}y \triangleright x\bar{y} \triangleright \bar{x}\bar{y}$
- $xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright \bar{x}y \triangleright x\bar{y}$
- $xy \triangleright \bar{x}y \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y}$
- $xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y} \triangleright \bar{x}y$

L'ordre partiel  $\triangleright$  sur les interprétations est donc incapable de rendre compte de façon précise d'une sémantique de  $(\mathcal{K}, >)$  en termes de certitude relative au sens de la théorie des possibilités. C'est parce que l'ordre partiel sur  $\mathcal{K}$  ne peut pas toujours être caractérisé par un ordre partiel unique sur les interprétations. N'utiliser que l'ordre partiel minimal en accord avec les quatre contraintes ci-dessus se traduit par la perte de certaines connaissances de  $(\mathcal{K}, >)$  dans la fermeture  $\mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >)$ , comme illustré par l'exemple 19.

De plus, la relation  $\succ_N$  possède des propriétés qui n'apparaissent pas explicitement dans la base  $(\mathcal{K}, >)$  et dont la relation  $\triangleright$  ne tient pas compte. Par exemple si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules consistantes logiquement équivalentes et que  $(\mathcal{K}, >) = \{\phi > \psi\}$ , i.e.,  $[\phi] = [\psi] = A \neq \emptyset$ , il est évident que la relation  $\triangleright$  sera telle que  $\omega \triangleright \omega'$  si et seulement si  $\omega \in A, \omega' \notin A$ . Donc on ne peut pas retrouver  $\phi > \psi$  (qui est contradictoire avec la sémantique de la logique classique).

De même, si  $(\mathcal{K}, >) = \{x > y, x \wedge z > y \wedge z\}$ , alors  $\triangleright$  ne contient que  $xyz \triangleright \omega, \forall \omega \neq xyz, \bar{x}\bar{y}z \triangleright \bar{x}yz, \text{ et } x\bar{y}z \triangleright \bar{x}y\bar{z}$ , ce qui ne permet de retrouver ni  $x > y$  ni  $x \wedge z > y \wedge z$ . Pourtant, avec ces préférences on déduit la réciproque de SI, une propriété de  $\succ_N$ .

**Remarque 2.** Si on interprète  $(\mathcal{K}, >)$  dans l'exemple 19 par un pré-ordre total sur  $\mathcal{K}$  on obtient un pré-ordre total sur  $\Omega$ . Le principe de moindre engagement partitionne  $\mathcal{K}$  en trois bases  $\mathcal{K}_1 = \{\neg x\}$ ,  $\mathcal{K}_2 = \{x \wedge y, x\}$ ,  $\mathcal{K}_3 = \{\neg x \vee y\}$ , de niveaux de certitude croissante. On trouve alors l'ordre sur  $\Omega$  calculé dans la Table 2.3 (on met 0 si  $\omega \models \phi$  et le niveau de certitude sinon, puis on prend le maximum sur les formules pour chaque  $\omega$ ). On trouve  $xy \triangleright \bar{x}y \sim \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y}$ , qui combine les deuxième et troisième ordres totaux  $xy \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright \bar{x}y \triangleright x\bar{y}$  et  $xy \triangleright \bar{x}y \triangleright \bar{x}\bar{y} \triangleright x\bar{y}$ . La logique possibiliste opère donc un choix de moindre engagement (pré-ordre total) en accord avec les contraintes de  $(\mathcal{K}, >)$ .

 TABLE 2.3 – Cas du pré-ordre total sur  $\mathcal{K}$ 

	$x$	$x \wedge y$	$\neg x \vee y$	$\neg x$	Rank
$xy$	0	0	0	1	1
$x\bar{y}$	0	2	3	1	3
$\bar{x}y$	2	2	0	0	2
$\bar{x}\bar{y}$	2	2	0	0	2

### 2.2.3 Fermeture déductive par extension ensembliste préadditive

On pourrait penser améliorer la situation en choisissant une variante préadditive plus puissante de la dominance optimiste faible. Sous la sémantique préadditive, la construction est la suivante :

**Définition 22.**

**De**  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright^+)$  :  $\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \triangleright^+ \omega' \text{ ssi } \overline{\mathcal{K}(\omega')} \succ_{ofs}^+ \overline{\mathcal{K}(\omega)}$

**De**  $(\Omega, \triangleright^+)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N^+)$  :  $\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}, \phi \succ_N^+ \psi \text{ ssi } \overline{[\psi]} \triangleright^+ \overline{[\phi]}$ .

La notion de conséquence sémantique et la fermeture déductive sont définies de façon similaire, en remplaçant  $\succ_N$  par  $\succ_N^+$  :

**Définition 23.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée. La fermeture déductive d'une base possibiliste partiellement ordonnée est définie par :

$$\mathcal{C}^+(\mathcal{K}, >) = \{(\phi, \psi) \in \mathcal{L}^2 : \phi \succ_N^+ \psi\}.$$

On écrit  $(\mathcal{K}, >) \vDash_{N^+} \phi \succ_N^+ \psi$  si  $(\phi, \psi) \in \mathcal{C}^+(\mathcal{K}, >)$ .

Mais comme la relation  $\succ_N$ , la relation  $\succ_N^+$  ne préserve pas toujours l'ordre initial d'une base partiellement ordonnée.

Comme dans le cas de la relation  $\succ_N$ , on peut distinguer deux cas : manque d'informations en accord avec la sémantique préadditive des  $(\mathcal{K}, >)$ , base incohérente.

**Manque d'informations** On sait que la relation  $\succ_N^+$  est auto-duale, c'est à dire :

$$\phi \succ_N^+ \psi \iff \neg \psi \succ_N^+ \neg \phi$$

Donc interpréter l'ordre partiel d'une base partiellement ordonnée comme l'ordre  $\succ_N^+$  sans donner cette information explicitement dans la base peut conduire à une fermeture déductive incomplète, comme on le voit dans l'exemple suivant :

**Exemple 20.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée avec  $\mathcal{K} = \{\neg x \vee \neg y, \neg x, x \wedge y, x\}$  et  $>$  est l'ordre partiel strict défini par :  $\neg x \vee \neg y > x \wedge y > \neg x$  et  $x > \neg x$ .

Appliquons la définition 23 (voir les tables 2.4 et 2.5 pour le calcul).

- De  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright^+)$  : on obtient  $x\bar{y} \triangleright^+ \{\bar{x}\bar{y}, \bar{x}y, xy\}$
- De  $(\Omega, \triangleright^+)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N^+)$  : on obtient  $\neg x \vee \neg y \succ_N^+ x \wedge y, \neg x \vee \neg y \succ_N^+ \neg x$  et  $x \succ_N^+ x \wedge y$  mais pas  $x \wedge y \succ_N^+ \neg x$ .

TABLE 2.4 – Vecteurs associés aux interprétations

	$x$	$x \wedge y$	$\neg x \vee \neg y$	$\neg x$
$xy$	1	1	$\neg x \vee \neg y$	$\neg x$
$x\bar{y}$	1	$x \wedge y$	1	$\neg x$
$\bar{x}y$	$x$	$x \wedge y$	1	1
$\bar{x}\bar{y}$	$x$	$x \wedge y$	1	1

TABLE 2.5 – Vecteurs associés aux formules

	$xy$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$x$	1	1	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$x \wedge y$	1	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$\neg x \vee \neg y$	$xy$	1	1	1
$\neg x$	$xy$	$x\bar{y}$	1	1

La comparaison  $x \wedge y > \neg x$  a été perdue par  $\succ_N^+$  parce que la relation  $\triangleright^+$  est à nouveau peu expressive : les contraintes de la base si on les interprète comme un fragment de  $\succ_N^+$  induisent beaucoup plus de contraintes sur l'ordre entre interprétations. Il faudrait compléter la base  $(\mathcal{K}, >)$  par d'autres formules  $\phi > \psi$  induites par les hypothèses de préadditivité et d'auto-dualité, puis appliquer  $\triangleright^+$ . Par exemple, si on ajoute  $x > \neg x \vee \neg y$ , on obtient un ordre total sur  $\mathcal{K}$  :  $x > \neg x \vee \neg y > x \wedge y > \neg x$ . Ce qui produit  $x\bar{y} \triangleright^+ xy \triangleright^+ \bar{x}y$  et  $x\bar{y} \triangleright^+ xy \triangleright^+ \bar{x}\bar{y}$ .

Si on interprète  $>$  comme un fragment de  $\succ_N^+$ , ce qui impose l'auto-dualité et la préadditivité, on obtient les contraintes suivantes :

- par  $\neg x \vee \neg y \succ_N^+ x \wedge y$ , nous devons avoir  $[\overline{x \wedge y}] \triangleright^+ [\overline{\neg x \vee \neg y}]$  soit encore  $x\bar{y} \triangleright^+ xy$  ou  $\bar{x}y \triangleright^+ xy$  ou  $\bar{x}\bar{y} \triangleright^+ xy$
- par  $x \wedge y \succ_N^+ \neg x$ , nous devons avoir  $[\overline{\neg x}] \triangleright^+ [\overline{x \wedge y}]$  soit encore  $xy \triangleright^+ \bar{x}y$  et  $xy \triangleright^+ \bar{x}\bar{y}$
- par  $x \succ_N^+ \neg x$ , nous devons avoir  $[\overline{\neg x}] \triangleright^+ [\overline{x}]$

Il est facile de voir que ces contraintes impliquent que  $x\bar{y} \triangleright^+ xy \triangleright^+ \bar{x}y$  et  $x\bar{y} \triangleright^+ xy \triangleright^+ \bar{x}\bar{y}$ . On obtient donc une relation qui correspond à l'ordre total sur  $\mathcal{K}$  :  $x > \neg x \vee \neg y > x \wedge y > \neg x$ .

**Base de connaissance incohérente** Le deuxième type de problème résulte de la présence d'une incohérence avec la sémantique classique et avec les propriétés de  $\succ_N^+$  dans la base initiale.

**Exemple 21.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée avec  $\mathcal{K} = \{\neg x \vee y, \neg x, \neg y, x\}$  et  $>$  est l'ordre partiel strict défini par :  $\neg x > \neg x \vee y$ ,  $\neg y > \neg x \vee y$ ,  $x > \neg x \vee y$ .

La base est incohérente avec la sémantique classique à cause de  $\neg x > \neg x \vee y$  puisque  $[\neg x] \subset [\neg x \vee y]$ .

Voici l'ordre sur les interprétations et l'ordre sur les formules (voir les tables 2.6 et 2.7 pour le calcul) :

- De  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright^+)$  : on obtient  $\bar{x}\bar{y} \triangleright^+ \bar{x}y$  et  $x\bar{y} \triangleright^+ xy$

TABLE 2.6 – Vecteurs associés aux interprétations

	$\neg x \vee y$	$\neg x$	$\neg y$	$x$
$xy$	1	$\neg x$	$\neg y$	1
$x\bar{y}$	$\neg x \vee y$	$\neg x$	1	1
$\bar{x}y$	1	1	$\neg y$	$x$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1	1	$x$

TABLE 2.7 – Vecteurs associés aux formules

	$xy$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$\neg x \vee y$	1	$x\bar{y}$	1	1
$\neg x$	$xy$	$x\bar{y}$	1	1
$\neg y$	$xy$	1	$\bar{x}y$	1
$x$	1	1	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

- De  $(\Omega, \triangleright^+)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N^+)$  : on obtient  $\neg x \vee y \succ_N^+ \neg x$ . On a perdu les comparaisons :  $\neg y > \neg x \vee y$  et  $x > \neg x \vee y$ .

Il est clair que la fermeture déductive de la base  $(\mathcal{K}, >)$  viole l'axiome de réflexivité de Tarski à cause de l'incohérence avec la sémantique classique des formules dans l'ordre partiel initial sur la base.

Si on corrige l'ordre initial, la fermeture déductive préserve l'ordre initial :

Considérons toujours  $\mathcal{K} = \{\neg x \vee \neg y, \neg x, x \wedge y, x\}$  avec l'ordre partiel corrigé  $x > \neg x \vee y > \neg x$  et  $\neg y > \neg x \vee y > \neg x$ .

- De  $(\mathcal{K}, >)$  à  $(\Omega, \triangleright^+)$  : on obtient  $x\bar{y} \triangleright^+ xy \triangleright^+ \bar{x}y$  et  $x\bar{y} \triangleright^+ \bar{x}\bar{y} \triangleright^+ \bar{x}y$
- De  $(\Omega, \triangleright^+)$  à  $(\mathcal{L}, \succ_N^+)$  : on retrouve l'ordre initial :  $x > \neg x \vee y > \neg x$  et  $\neg y > \neg x \vee y > \neg x$

Ces exemples montrent que la relation  $\succ_N^+$  ne préserve pas toujours l'ordre partiel strict de la base initiale parce que l'ordre partiel induit sur les modèles perd ici encore une partie de l'information présente dans la base et ne prend donc pas en compte les propriétés supposées de la relation entre formules.

Ces deux exemples mettent cette sémantique en difficulté.

## 2.3 Conclusion

Ce chapitre constitue une première étape dans l'étude de la fermeture déductive d'une base propositionnelle partiellement ordonnée. Nous avons vu que les trois méthodes d'inférences en logique possibiliste standard (l'inférence sémantique, l'inférence à base de coupes et l'inférence syntaxique avec des règles d'inférence et des axiomes) sont équivalentes. En s'inspirant de ces méthodes, nous avons proposé une extension sémantique de la logique possibiliste au cas partiel. Nous avons montré que cette extension n'est pas complète puisque elle perd des comparaisons qui étaient déjà dans la base initiale (l'ordre

partiel entre les formules n'est pas représentable par un ordre partiel unique sur les interprétations).

L'inférence à partir d'une base de connaissances partiellement ordonnées est souvent effectuée dans une logique conditionnelle dans la tradition de Lewis [78]. Dans la suite, nous allons essayer d'étendre la logique possibiliste à base d'une approche syntaxique en se basant sur les propriétés des deux relations d'ordre partiel  $\succ_N$  et  $\succ_N^+$ .



**Fermeture déductive par une approche logique  
conditionnelle**

---

**Sommaire**

---

<b>3.1</b>	<b>Systèmes d'inférence pour la certitude relative</b>	<b>62</b>
<b>3.2</b>	<b>Fermeture déductive – Approche par les coupes</b>	<b>72</b>
<b>3.3</b>	<b>Comparaison avec la logique MEL</b>	<b>75</b>
<b>3.4</b>	<b>Comparaison avec les logiques conditionnelles</b>	<b>78</b>
<b>3.5</b>	<b>Approche à base de familles d'ordres totaux</b>	<b>82</b>
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>

---

Nous avons montré dans le chapitre 2 que le calcul de la fermeture sémantique d'une base partiellement ordonnée en considérant une interprétation comme un sous-ensemble de formules de la base souffre du problème de préservation de l'ordre initial de la base, que ce soit avec la relation  $\succ_N$  ou  $\succ_N^+$ . Cela est dû au fait qu'un ordre partiel sur les interprétations ne peut pas rendre compte de toutes les contraintes de l'ordre partiel entre formules.

Dans la suite, nous proposons d'adopter une approche par une inférence syntaxique plus performante, en gardant la sémantique en termes d'ordre partiel sur les sous-ensembles d'interprétations. L'idée est d'utiliser un langage conditionnel et un système d'inférence qui nous permette de fermer déductivement la base initiale tout en préservant l'ordre initial de la base, et en même temps de corriger l'ordre si nécessaire (en cas d'existence d'inconsistance). Nous proposons deux systèmes d'inférence avec axiomes et règles d'inférence élaborés dans la perspective d'obtenir un système correct et complet pour les sémantiques de certitude définies précédemment.

Au niveau syntaxique, l'idée est d'utiliser les propriétés de la relation d'ordre partiel comme des règles d'inférence et des axiomes afin de construire une logique qui nous permette de produire des nouvelles conséquences tout en garantissant la préservation de l'ordre initial de la base de connaissances. Nous proposons une nouvelle sémantique plus puissante que la sémantique présentée dans le chapitre 2. Cette sémantique est définie par une relation sur les sous-ensembles d'interprétations contrairement à la sémantique précédente qui est définie par une relation sur les interprétations.

En logique possibiliste, il existe trois méthodes d'inférence syntaxique. La première utilise un système d'inférence avec des axiomes et des règles d'inférence (voir la section 2.1.3). La deuxième utilise la méthode de réfutation. La troisième méthode consiste à utiliser des coupes appelées  $\alpha$ -coupes ( $\alpha$ -cut) [48] pour avoir les formules qui sont au dessus d'un niveau de certitude  $\alpha$ , puis à considérer ces formules comme une base classique et à appliquer l'inférence classique pour obtenir les conséquences. Nous tentons d'adapter cette approche pour faire de l'inférence sur des bases partiellement ordonnées et nous allons montrer que cette approche par les coupes est correcte (mais non complète) pour la nouvelle sémantique.

Ce chapitre est structuré comme suit, nous présentons dans la Section 3.1 deux systèmes d'inférence à base des deux relations d'ordre partiel  $\succ_N$  et  $\succ_N^+$ . Dans la section 3.2.2, l'approche à base des coupes inspirée de la logique possibiliste est proposée. Nous étudions cette approche, ses avantages et ses limites. Ensuite, nous comparons le système proposé avec différents systèmes d'inférence existants, notamment la logique MEL dans la Section 3.3, le système P dans la Section 3.4.1, la logique conditionnelle de Halpern dans la Section 3.4.2 et l'approche de prolongement par des ordres totaux dans la section 3.5.

## 3.1 Systèmes d'inférence pour la certitude relative

Dans cette section, nous proposons une extension de la logique possibiliste avec une approche syntaxique. Dans le chapitre 1 deux relations d'ordre partiel ont été identifiées, la relation de dominance optimiste faible  $\succ_{ofs}$  et sa version préadditive  $\succ_{ofs}^+$ . L'étude de ces deux relations a révélé des propriétés élémentaires qui permettent de déduire les autres propriétés. À base de ces deux relations d'ordre, nous proposons deux systèmes d'inférence où les règles d'inférence sont les propriétés élémentaires de chaque relation.

Nous commençons d'abord par définir la syntaxe ensuite nous proposons le système d'inférence pour la certitude relative et sa version préadditive.

### 3.1.1 Syntaxe

Considérons un langage propositionnel classique  $\mathcal{L}$ , on note  $\phi, \psi, \dots$  les formules propositionnelles construites à l'aide des connecteurs usuels  $\neg, \wedge, \vee$  de la logique classique et des atomes. L'idée principale de la syntaxe proposée consiste à encapsuler le

langage  $\mathcal{L}$  à l'intérieur d'un langage équipé d'un connecteur binaire  $>$  interprété comme une relation d'ordre. Formellement, un littéral  $\Phi$  de  $\mathcal{L}_{>}$  est soit de la forme  $\phi > \psi$  avec  $\phi$  et  $\psi$  des formules propositionnelles classiques de  $\mathcal{L}$ , soit  $\perp$  qui signifie la contradiction dans  $\mathcal{L}_{>}$ . Une formule de  $\mathcal{L}_{>}$  est donc soit un littéral positif  $\Phi$  de  $\mathcal{L}_{>}$ , soit de la forme  $\Psi \wedge \Phi$  avec  $\Psi, \Phi$  des formules de  $\mathcal{L}_{>}$ .

Une formule de la forme  $\phi > \psi$  peut être interprétée comme : un agent a plus de certitude dans  $\phi$  que dans  $\psi$ .

On associe à une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  un ensemble de formules de la forme  $\phi > \psi$  formant une base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{L}_{>}$ . Notons que si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \xi$  sont dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ , alors  $\phi > \xi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  aussi puisqu'on a un ordre partiel sur  $\mathcal{K}$ . Remarquons que pour retrouver  $(\mathcal{K}, >)$  à partir de  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ , il faut que chaque formule de  $\mathcal{K}$  apparaisse dans une formule de  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  (pas de formule incomparable avec toutes les autres dans  $(\mathcal{K}, >)$ ).

Dans la suite, pour chaque base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$ ,  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}} \Phi$  dénote que  $\Phi$  est une conséquence de la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  dans le système d'inférence  $\mathcal{S}$ .

### 3.1.2 Une sémantique plus puissante

Nous considérons une sémantique d'une base possibiliste définie par une relation entre ensembles d'interprétations (et non entre interprétations). L'idée est d'interpréter la formule  $\phi > \psi$  sur  $2^{\Omega}$  par  $[\phi] \triangleright [\psi]$  pour une relation de certitude relative  $\triangleright$ .

**Définition 24** (Relation de certitude relative).  $\triangleright$  est une relation de certitude relative sur  $2^{\Omega}$  ssi  $\triangleright$  satisfait les propriétés POI et  $Q^d$ .

Ensuite, nous pouvons définir un modèle de certitude relative comme suit :

**Définition 25.** Un modèle de certitude relative est une structure  $\mathcal{M} = (2^{\Omega}, \triangleright)$  où  $\triangleright$  est une relation de certitude relative sur  $2^{\Omega}$ .

On définit la satisfiabilité d'une formule  $\phi > \psi \in \mathcal{L}_{>}$  comme  $\mathcal{M} \models \phi > \psi$  ssi  $[\phi] \triangleright [\psi]$ .

La satisfiabilité de l'ensemble des formules  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  est définie par  $\mathcal{M} \models \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  ssi  $\mathcal{M} \models (\phi_i > \psi_i), \forall \phi_i > \psi_i \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ .

La conséquence sémantique associée  $\models_N$  peut alors être définie de la manière habituelle :

**Définition 26.**  $(\mathcal{K}, >) \models_N \phi > \psi$  ssi

$$\forall \mathcal{M}, \text{ si } \mathcal{M} \models \mathcal{B}_{\mathcal{K}} \text{ alors } \mathcal{M} \models \phi > \psi. \quad (3.1)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$(\mathcal{K}, >) \models_N \phi > \psi$  ssi pour tout ordre  $\triangleright$  sur  $2^{\Omega}$  vérifiant POI et  $Q^d$ , si  $\forall i = 1 \dots n, [\psi_i] \triangleright [\phi]$  alors  $\text{ovr} \psi \triangleright [\phi]$ .

Notons que nous ne pouvons pas toujours interpréter  $\phi > \psi$  dans  $(\mathcal{K}, >)$  comme  $[\phi] \triangleright [\psi]$  pour une relation de certitude relative. Par exemple, supposons  $\phi \models \psi$  et  $\phi > \psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ ; il est impossible d'avoir  $[\phi] \triangleright [\psi]$  étant donné que la relation  $\triangleright$  satisfait *POI*.

On définit la consistance d'une base partiellement ordonnée pour la sémantique de la certitude relative simple comme suit :

**Définition 27** (Rc-consistant). *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée. On dit que  $(\mathcal{K}, >)$  est consistante pour la sémantique de certitude relative simple (rc-inconsistant pour simplifier) si et seulement si il existe un modèle  $\mathcal{M} (2^{\Omega}, \triangleright)$  qui satisfait les formules de  $\mathcal{B}_{(\mathcal{K}, >)}$ .*

Considérons maintenant une autre sémantique dans laquelle  $\phi > \psi$  est interprété sur l'ensemble  $2^{\Omega}$  par une relation préadditive de type  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ . Un modèle de certitude relative préadditive est une structure  $\mathcal{M}^+ = (2^{\Omega}, \triangleright^+)$  où  $\triangleright^+$  est une relation de certitude préadditive sur  $2^{\Omega}$ .

**Définition 28** (Relation de certitude relative préadditive).  $\triangleright^+$  est une relation de certitude relative préadditive ssi  $\triangleright^+$  satisfait les propriétés : *POI, QF<sup>d</sup>, NF<sup>d</sup>, T, A, P*.

La conséquence sémantique associé  $\models_{N^+}$  peut alors être définie de la manière habituelle :

**Définition 29.**  $(\mathcal{K}, >) \models_{N^+} \phi > \psi$  ssi

$$\forall \mathcal{M}^+, \text{ si } \mathcal{M}^+ \models \mathcal{B}_{\mathcal{K}} \text{ alors } \mathcal{M}^+ \models \phi > \psi. \quad (3.2)$$

On a donc  $(\mathcal{K}, >) \models_{N^+} \phi > \psi$  ssi pour tout ordre  $\triangleright^+$  sur  $2^{\Omega}$  vérifiant *POI, QF<sup>d</sup>, NF<sup>d</sup>, T, A, P*, si  $\forall i = 1 \dots n, [\phi_i] \triangleright^+ [\psi_i]$  alors  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ .

On définit la consistance d'une base partiellement ordonnée pour la sémantique de la certitude relative préadditive comme suit :

**Définition 30** (Prc-consistant). *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée. On dit que  $(\mathcal{K}, >)$  est consistante pour la sémantique de certitude relative préadditive (prc-inconsistant pour simplifier) si et seulement si il existe un modèle  $\mathcal{M}^+ (2^{\Omega}, \triangleright^+)$  qui satisfait les formules de  $\mathcal{B}_{(\mathcal{K}, >)}$ .*

### 3.1.3 Un système d'inférence pour la certitude relative simple

Le premier système que nous considérons interprète les formules de  $\mathcal{L}_{>}$  par la relation  $\triangleright$ . L'idée est de supposer que  $>$  vérifie un certain nombre de propriétés de la relation  $\succ_N$  et de les utiliser comme règles d'inférence. On considère un axiome et 3 règles d'inférence dans le langage  $\mathcal{L}_{>}$  :

$ax_1 : \top > \perp$

$RI_1$  : Si  $\chi > \phi \wedge \psi$  et  $\psi > \phi \wedge \chi$  alors  $\psi \wedge \chi > \phi$  (Q<sup>d</sup>)

$RI_2$  : Si  $\phi > \psi$ ,  $\phi \vDash \phi'$  et  $\psi' \vDash \psi$  alors  $\phi' > \psi'$  (POI)

$RI_3$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  alors  $\perp$  (AS)

L'axiome  $ax_1$  dit que la relation d'ordre n'est pas triviale<sup>1</sup>. Les règles  $RI_1$  et  $RI_2$  correspondent aux propriétés de qualitativité et la préservation de l'ordre de l'inclusion. La règle  $RI_3$  exprime l'asymétrie de la relation  $>$ .

Nous appelons  $\mathcal{S}_1$  ce système d'inférence et  $\vdash_{\mathcal{S}_1}$  la conséquence syntaxique associée.

Le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  contient d'autres règles d'inférence dérivées. Nous avons montré dans la Section 1.2.1 que les propriétés POI et Q permettent de retrouver d'autres propriétés, donc en transposant les propriétés, par POI et Q<sup>d</sup> on peut produire les règles d'inférence suivantes :

$RI_4$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \chi$ , alors  $\phi > \chi$  (T)

$RI_5$  : Si  $\psi > \phi$  et  $\chi > \phi$  alors  $\psi \wedge \chi > \phi$  (ADJonction)

$RI_6$  : Si  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  et  $\psi \rightarrow \chi > \psi \rightarrow \neg\chi$  alors  $(\phi \vee \psi) \rightarrow \chi > (\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\chi$   
(OR<sup>d</sup>)

$RI_7$  : Si  $\chi \rightarrow \phi > \chi \rightarrow \neg\phi$  et  $\chi \rightarrow \psi > \chi \rightarrow \neg\psi$  alors  $\chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) > \chi \rightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$   
(CCC<sup>d</sup>)

$RI_8$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$  alors  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$   
(CUT<sup>d</sup>)

$RI_9$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  alors  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$   
(MF<sup>d</sup>)

Une autre règle d'inférence dérivée  $RI_{10}$  dans le système  $\mathcal{S}_1$  : Si  $\phi > \perp$  alors  $\phi > \neg\phi$

**Proposition 32.** *les règles d'inférence  $RI_4, RI_5, RI_6, RI_7, RI_8, RI_9, RI_{10}$  sont valides dans le système  $\mathcal{S}_1$ .*

**Preuve de la Proposition 32:** Les propriétés Q et POI permettent de déduire les autres propriétés de  $\succ_{ofs}$  (Proposition 10), Par conséquent, par transposition Q<sup>d</sup> et POI permettent de dériver les propriétés énumérées dans la proposition 7 pour la relation caractérisée par les règles du système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ . Pour  $RI_{10}$ , on applique  $RI_1$  à  $\varphi > \perp$  écrite sous la forme  $\varphi > \varphi \wedge \neg\varphi$ , en prenant  $\chi = \psi = \varphi, \phi = \neg\varphi$  (on utilise deux fois cette formule), pour obtenir  $\varphi \wedge \varphi > \neg\varphi$ . □

1. Cet axiome pourrait être remplacé par  $\phi \vee \neg\phi > \psi \wedge \neg\psi$ , en présence de la règle  $RI_2$ .

### Correction et complétude

Nous établissons que le système  $\mathcal{S}_1$  est correct et complet pour la sémantique de certitude relative.

Rappelons que  $(\mathcal{K}, >) \models_N \phi > \psi$  ssi pour tout ordre strict  $\triangleright$  sur  $2^\Omega$  vérifiant POI et  $Q^d$ , si  $\forall i = 1 \cdots n, \phi_i \triangleright \psi_i$  alors  $\phi \triangleright \psi$ .

**Proposition 33.** *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée.  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ .*

- **Correction :**  
Si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$  alors  $(\mathcal{K}, >) \models_N \phi > \psi$ .
- **Complétude :**  
Si  $(\mathcal{K}, >)$  est rc-consistante et  $(\mathcal{K}, >) \models_N \phi > \psi$  alors  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$ .  
Si  $(\mathcal{K}, >)$  est rc-inconsistante alors  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \perp$ .

#### Preuve de la Proposition 33:

Posons  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{(\phi_i > \psi_i), i = 1 \cdots n\}$ .

- **Correction :**  
Soit un ordre partiel strict  $\triangleright$  sur  $2^\Omega$  vérifiant POI et  $Q^d$ . Il faut montrer que si  $\forall i = 1 \cdots n, [\phi_i] \triangleright [\psi_i]$  alors  $[\phi] \triangleright [\psi]$ . On suppose que  $\phi > \psi$  est un axiome ou bien a été obtenu à partir des  $(\phi_i > \psi_i)$  par les règles d'inférence  $RI_1$  et  $RI_2$ . Il suffit donc de montrer que chacune des règles suivantes est correcte et que l'axiome  $ax_1$  est valide.
  - $ax_1$  On doit montrer que  $\forall \mathcal{M}, \mathcal{M} \models (\top > \perp)$ . Ou de façon équivalente,  $\forall \triangleright$  une relation stricte sur  $2^\Omega$  qui satisfait les propriétés POI et  $Q^d$ ,  $[\top] \triangleright [\perp]$ . On a  $[\top] = \Omega$  et  $[\perp] = \emptyset$  et  $\Omega \triangleright \emptyset$  pour  $\triangleright$  relation de certitude relative sur  $2^\Omega$ .
  - RI1** Il faut montrer que si  $[\chi] \triangleright [\phi \wedge \psi]$  et  $[\psi] \triangleright [\phi \wedge \chi]$  alors  $[\psi \wedge \chi] \triangleright [\phi]$ . C'est vrai car la relation  $\triangleright$  satisfait la qualitativité ( $Q^d$ ).
  - RI2** Il faut montrer que si  $[\phi] \triangleright [\psi]$ ,  $\phi \models \phi'$  et  $\psi' \models \psi$  alors  $[\phi'] \triangleright [\psi']$ . C'est vrai car la relation  $\triangleright$  satisfait POI.
  - RI3** En outre, nous montrons que la présence de  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  à la fois conduit à une contradiction sémantique. Cela est vrai puisque la relation  $\triangleright$  étant asymétrique, nous ne pouvons pas avoir les deux  $[\psi] \triangleright [\phi]$  et  $[\phi] \triangleright [\psi]$ .
- **Complétude :**

Nous supposons que  $(\mathcal{K}, >)$  est rc-consistante. Supposons que, pour chaque relation d'ordre  $\triangleright$  sur  $2^\Omega$  satisfaisant POI et  $Q^d$ , si  $\forall i = 1 \cdots n, [\phi_i] \triangleright [\psi_i]$  alors  $[\phi] \triangleright [\psi]$ . Nous devons montrer que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$ . Si  $\phi > \psi$  est dans  $(\mathcal{K}, >)$ , déjà prouvé.

Sinon, considérons l'ordre partiel strict  $\triangleright$  défini sur  $2^\Omega$  comme la plus petite relation contenant les paires  $[\phi_i] \triangleright [\psi_i]$  et fermée pour les propriétés  $Q^d$ , POI. Cette relation existe puisque

$(\mathcal{K}, >)$  est rc-consistante. Selon l'hypothèse nous avons  $[\phi] \triangleright [\psi]$ . Et, par définition de  $\triangleright$ , la paire  $([\phi], [\psi])$  est obtenue par applications successives des propriétés  $Q^d$ , POI. Ceci revient à obtenir  $\phi > \psi$  par applications successives des règles d'inférence  $RI_1$  et  $RI_2$ .

Il reste à prouver que si  $(\mathcal{K}, >)$  est rc-inconsistante,  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \perp$ .

Notons que, comme  $\mathcal{L}_{>}$  ne contient que des contraintes de comparaison atomiques et leur conjonction, la seule forme d'incohérence vient de la présence à la fois de  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  déduites de  $(\mathcal{K}, >)$ . Ceci est la seule façon d'obtenir  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \perp$ . Dans ce cas, nous savons que  $(\mathcal{K}, >)$  n'a pas de modèle de certitude relative.

Donc si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \perp$  ne tient pas, alors la relation  $>$  obtenue sur  $\mathcal{L}_{>}$  par la fermeture syntaxique sera asymétrique et transitive, et sera donc la relation  $\succ$  sur  $2^\Omega$  défini par  $[\phi] \succ [\psi]$  si et seulement si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \phi > \psi$ . De plus,  $\succ$  sera la plus petite relation contenant les paires  $([\phi_i], [\psi_i])$  avec  $\phi_i > \psi_i$  dans  $(\mathcal{K}, >)$ , et fermée pour les propriétés  $Q^d$ , POI. C'est un modèle de certitude relative de  $(\mathcal{K}, >)$ , qui est donc rc-consistante.

□

Notons que la seule forme possible d'inconsistance syntaxique qui peut être détectée dans  $(\mathcal{K}, >)$  est quand  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \phi > \psi$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \psi > \phi$ .

Par construction, la relation d'inférence  $\vdash_{S_1}$  ne perd aucune formule  $\phi > \psi$  initialement présente dans la base, contrairement à l'inférence en utilisant la construction sémantique.

**Exemple 22.** Soit  $\mathcal{K} = \{\phi, \psi, \neg\phi, \neg\psi\}$  avec  $>$  l'ordre partiel défini par :  $\phi > \neg\phi$  et  $\psi > \neg\psi$ .

Par  $RI_7$  on produit  $\phi \wedge \psi > \neg\phi \vee \neg\psi$ , puis par  $RI_2$  on obtient  $\psi > \neg\phi$ .

**Exemple 23.** Soit  $\mathcal{K} = \{\psi, \phi \wedge \psi\}$  avec  $>$  l'ordre partiel défini par  $\psi > \phi \wedge \psi$ . Si on applique  $RI_1$  avec  $\psi = \chi$  alors  $\psi > \phi$ .

### 3.1.4 Un système d'inférence pour la certitude préadditive

Le deuxième système que nous considérons est inspiré de la fermeture par la relation  $\succ_N^+$ . Puisqu'on considère une règle issue de la propriété de pré-additivité, grâce à la proposition 5, il suffit de prendre les règles inspirées des formes les plus faibles de la qualitativité et de la négligeabilité.

$ax_1$  : Si  $\phi \not\equiv \perp$  alors  $\phi > \perp$

$RI_1$  : Si  $\models \phi \vee \psi$  et  $\models \phi \vee \chi$  et  $\models \psi \vee \chi$ , alors si  $\chi > \phi \wedge \psi$  et  $\psi > \phi \wedge \chi$  alors  $\psi \wedge \chi > \phi$  ( $QF^d$ )

$RI_2$  : Si  $\phi > \psi$ ,  $\phi \models \phi'$  et  $\psi' \models \psi$  alors  $\phi' > \psi'$  (POI)

$RI_3$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  alors  $\perp$  (AS)

$RI_4$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \chi$  alors  $\phi > \chi$  (T)

$RI_5$  : Si  $\models \phi \vee \psi$  et  $\models \phi \vee \chi$ , alors si  $\psi > \phi$  et  $\chi > \phi$  alors  $\psi \wedge \chi > \phi$  (NF<sup>d</sup>)

$RI_{10}$  : Si  $\phi > \psi$  alors  $\neg\psi > \neg\phi$  (Autodualité)

$RI_{11}$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\neg\chi \models \phi \wedge \psi$  alors  $\phi \wedge \chi > \psi \wedge \chi$  ( $\Rightarrow$  P)

$RI_{12}$  : Si  $\phi \wedge \chi > \psi \wedge \chi$  et  $\neg\chi \models \phi \wedge \psi$  alors  $\phi > \psi$  ( $\Leftarrow$  P)

Nous appelons  $\mathcal{S}_2$  ce système d'inférence et  $\vdash_{\mathcal{S}_2}$  la conséquence syntaxique associée.

Notons que les règles d'inférence  $RI_4$  et  $RI_5$  étaient dérivables dans le système  $\mathcal{S}_1$  ce qui n'est pas le cas pour le système  $\mathcal{S}_2$ . Ces deux règles d'inférence étaient déduites en utilisant les règles  $RI_1$  et  $RI_2$ , mais puisque dans le système  $\mathcal{S}_2$  la règle  $RI_1$  est plus faible à cause des pré-conditions qu'on rajoute, les deux règles  $RI_4$  et  $RI_5$  ne sont pas dérivables.

Ce système d'inférence  $\mathcal{S}_2$  contient d'autres règles d'inférence dérivées.

$RI_6$  : Si  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  et  $\psi \rightarrow \chi > \psi \rightarrow \neg\chi$  alors  $(\phi \vee \psi) \rightarrow \chi > (\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\chi$  (OR<sup>d</sup>)

$RI_7$  : Si  $\chi \rightarrow \phi > \chi \rightarrow \neg\phi$  et  $\chi \rightarrow \psi > \chi \rightarrow \neg\psi$  alors  $\chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) > \chi \rightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$  (CCC<sup>d</sup>)

$RI_8$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$  alors  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  (CUT<sup>d</sup>)

$RI_9$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  alors  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$  (MF<sup>d</sup>)

$RI_{13}$  : Si  $\psi \models \phi$  et non  $\phi \models \psi$  alors  $\phi > \psi$  (version stricte de CI)

D'après les propositions 3, 5, les propriétés OR, CCC, CUT et MF se déduisent des propriétés POI, de la qualitativité faible et de la négligeabilité faible. En transposant ces propriétés, on obtient donc les propriétés OR<sup>d</sup>, CCC<sup>d</sup>, CUT<sup>d</sup> et MF<sup>d</sup> qui produisent comme règles dérivées les règles  $RI_6, RI_7, RI_8, RI_9$ .

D'autre part, on peut montrer que la règle  $RI_{13}$  (correspondant à la version stricte de la propriété CI) se déduit des règles  $RI_2, RI_{10}, RI_{11}$  et de l'axiome  $ax_1$ .

**Proposition 34.** *La règle  $RI_{13}$  se déduit des règles  $RI_2, RI_{10}, RI_{11}$  et de l'axiome  $ax_1$ .*

**Preuve de la Proposition 34:** Remarquons tout d'abord que les règles  $RI_{10}$  et  $RI_{11}$  permettent de dériver une forme duale de la règle  $RI_{11}$  : Si  $\chi \models \neg\psi \wedge \neg\phi$  alors si  $\phi > \psi$  alors  $\phi \vee \chi > \psi \vee \chi$ .

Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux formules telles que  $\psi \models \phi$  et non  $\phi \models \psi$ . Posons  $\chi = \phi \wedge \neg\psi$ . Comme  $\psi \models \phi$ , on a  $(\psi \vee \chi) \equiv \phi$ . Comme on n'a pas  $\phi \models \psi$ , on a  $\chi \not\models \perp$ .

Par l'axiome  $ax_1$  on obtient  $\chi > \perp$ . Comme  $\psi \models \neg\chi (\wedge \neg\perp)$ , la forme duale de  $RI_{11}$  s'applique et on obtient  $\chi \vee \psi > \perp \vee \psi$ . Puis par  $RI_2$ , on obtient  $\phi > \psi$ .  $\square$



### Correction et complétude

Comme pour le système  $\mathcal{S}_1$ , nous considérons une sémantique par une relation sur un ensemble d'interprétations. Plus précisément, nous établissons que le système  $\mathcal{S}_2$  est correct et complet pour la sémantique de la certitude préadditive.

Rappelons que  $(\mathcal{K}, >) \models_{N^+} \phi > \psi$  ssi pour tout ordre strict  $\triangleright^+$  sur  $2^\Omega$  vérifiant POI,  $\text{QF}^d$ ,  $\text{NF}^d$ , T, A, P, si  $\forall i = 1 \cdots n, [\phi_i] \triangleright^+ [\psi_i]$  alors  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ .

**Proposition 35.** *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée.  $\psi, \psi \in \mathcal{L}$ .*

- **Correction :**

*Si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi > \psi$  alors  $(\mathcal{K}, >) \models_{N^+} \phi > \psi$*

- **Complétude :**

*Si  $(\mathcal{K}, >)$  est prc-consistante et  $(\mathcal{K}, >) \models_{N^+} \phi > \psi$  alors  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi > \psi$ .*

*Si  $(\mathcal{K}, >)$  est prc-inconsistante alors  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \perp$ .*

#### Preuve de la Proposition 35:

Posons  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{(\phi_i > \psi_i), i = 1 \cdots n\}$ .

- **Correction :**

Soit  $\triangleright^+$  ordre partiel strict sur  $2^\Omega$  vérifiant POI,  $\text{QF}^d$ ,  $\text{NF}^d$ , T, A, P. Il faut montrer que si  $\forall i = 1 \cdots n, [\phi_i] \triangleright^+ [\psi_i]$  alors  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ . On suppose que  $\phi > \psi$  a été obtenu à partir des  $(\phi_i > \psi_i)$  par les règles d'inférence  $RI_1, RI_2, RI_3, RI_4, RI_5, RI_{10}, RI_{11}$  et  $RI_{12}$ . Il suffit donc de montrer que chacune des règles est correcte et que l'axiome  $ax_1$  est valide. La preuve est analogue à celle de la proposition 33.

$ax_1$  On doit montrer que  $\forall \mathcal{M}^+, \mathcal{M}^+ \models (\top > \perp)$ . Ou de façon équivalente,  $\forall \triangleright^+$  une relation stricte sur  $2^\Omega$  qui satisfait les propriétés POI,  $\text{QF}^d$ ,  $\text{NF}^d$ , T, A, P.  $[\top] \triangleright^+ [\perp]$  puisque on a  $[\top] = \Omega$  et  $[\perp] = \emptyset$  et  $\Omega \triangleright^+ \emptyset$  pour  $\triangleright^+$  une relation partiel préadditive de certitude préadditive sur  $2^\Omega$ .

**RI1** Il faut montrer que si  $\models \phi \vee \psi$  et  $\models \phi \vee \chi$  et  $\models \psi \vee \chi$  et si  $[\chi] \triangleright^+ [\phi \wedge \psi]$  et  $[\psi] \triangleright^+ [\phi \wedge \chi]$  alors  $[\psi \wedge \chi] \triangleright^+ [\phi]$ . C'est vrai car la relation  $\triangleright^+$  satisfait la qualitativité faible (QF).

**RI2** Il faut montrer que si  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ ,  $\phi \models \phi'$  et  $\psi' \models \psi$  alors  $[\phi'] \triangleright^+ [\psi']$ . C'est vrai car la relation  $\triangleright^+$  satisfait POI.

**RI3** En outre, nous montrons que la présence de  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  à la fois conduit à une contradiction sémantique. Cela est vrai puisque la relation  $\triangleright^+$  étant asymétrique, nous ne pouvons pas avoir les deux  $[\psi] \triangleright^+ [\phi]$  et  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ .

**RI4** Il faut montrer si  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$  et  $[\psi] \triangleright^+ [\chi]$  alors  $[\phi] \triangleright^+ [\chi]$ . Cela est vrai puisque la relation  $\triangleright^+$  est transitive.

- RI5** : Il faut montrer si  $\models \phi \vee \psi$  et  $\models \phi \vee \chi$ , alors si  $[\psi] \triangleright^+ [\phi]$  et  $[\chi] \triangleright^+ [\phi]$  alors  $[\psi] \triangleright^+ [\phi \wedge \chi]$ . Cela est vrai puisque la relation  $\triangleright^+$  satisfait la négligeabilité faible  $\text{NF}^d$ .
- RI11** : Il faut montrer si  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$  et  $\neg \chi \models \phi \wedge \psi$  alors  $[\phi \wedge \chi] \triangleright^+ [\psi \wedge \chi]$ . Cela est vrai puisque la relation  $\triangleright^+$  est préadditive.
- RI12** : Il faut montrer si  $[\phi \wedge \chi] \triangleright^+ [\psi \wedge \chi]$  et  $\neg \chi \models \phi \wedge \psi$  alors  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ . Cela est vrai puisque la relation  $\triangleright^+$  est préadditive.

• **Complétude :**

Comme pour la preuve de la proposition 33, nous supposons que  $(\mathcal{K}, >)$  est prc-consistante. Supposons que, pour chaque relation d'ordre  $\triangleright^+$  sur  $2^\Omega$  satisfaisant POI,  $\text{QF}^d$ ,  $\text{NF}^d$ , T, A, P, si  $\forall i = 1 \dots n, \phi_i \triangleright^+ \psi_i$  alors  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ . Nous devons montrer que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi > \psi$ . Si  $\phi > \psi$  est dans  $(\mathcal{K}, >)$ , déjà prouvé.

Sinon, considérons l'ordre partiel strict  $\triangleright^+$  défini sur  $2^\Omega$  comme la plus petite relation contenant les paires  $[\phi_i] \triangleright^+ [\psi_i]$  et fermée pour les propriétés T, POI,  $\text{QF}^d$ ,  $\text{NF}^d$ , A, P.

Cette relation existe puisque  $(\mathcal{K}, >)$  est prc-consistante. Selon l'hypothèse, nous avons  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ . Et, par définition, de  $\triangleright^+$ , la paire  $([\phi], [\psi])$  est obtenue par applications successives de POI,  $\text{QF}^d$ , T,  $\text{NF}^d$ , A, P. Ceci revient à obtenir  $\phi > \psi$  par applications successives des règles d'inférence  $RI_1, RI_2, RI_3, RI_4, RI_5, RI_{10}, RI_{11}$  et  $RI_{12}$ .

Il reste à prouver que si  $(\mathcal{K}, >)$  est prc-inconsistante,  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \perp$ .

Notez que, comme  $\mathcal{L}_>$  ne contient que des contraintes de comparaison atomiques et leur conjonction, la seule forme d'incohérence vient de la présence à la fois de  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  déduites de  $(\mathcal{K}, >)$ . Ceci est la seule façon d'obtenir  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \perp$ . Dans ce cas, nous savons que  $(\mathcal{K}, >)$  n'a pas de modèle de certitude préadditive.

Donc si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \perp$  ne tient pas, alors la relation  $>$  obtenue sur  $\mathcal{L}_>$  par la fermeture syntaxique sera asymétrique et transitive, et sera donc la relation  $\triangleright^+$  sur  $2^\Omega$  défini par  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$  si et seulement si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi > \psi$ . De plus,  $\triangleright^+$  sera la plus petite relation contenant les paires  $([\phi_i], [\psi_i])$  avec  $\phi_i > \psi_i$  dans  $(\mathcal{K}, >)$ , et fermée pour les propriétés POI,  $\text{QF}^d$ ,  $\text{NF}^d$ , T, A, P. C'est un modèle de  $(\mathcal{K}, >)$ , qui est donc prc-consistante.

□

Notons que la seule forme possible d'inconsistance syntaxique qui peut être détectée dans  $(\mathcal{K}, >)$  est quand  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi > \psi$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \psi > \phi$ .

Par construction, la relation d'inférence  $\vdash_{\mathcal{S}_2}$  ne perd aucune formule  $\phi > \psi$  initialement présente dans la base, contrairement à l'inférence en utilisant la construction sémantique préadditive.

**Exemple 24.** Soit  $\mathcal{K} = \{\neg\phi \vee \neg\psi, \neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi\}$  munie de l'ordre partiel défini par :  $\neg\phi \vee \neg\psi > \phi \wedge \psi > \neg\phi$  et  $\phi > \neg\phi$ .

Par  $RI_{10}$  sur la formule  $\phi \wedge \psi > \neg\phi$  on obtient  $\phi > \neg(\phi \wedge \psi)$  et par  $RI_2$  on obtient  $\phi > \neg\phi \vee \neg\psi$ .

**Exemple 23 (suite)** Avec le système  $\mathcal{S}_2$ , la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{\phi > \phi \wedge \psi\}$  n'apporte aucune information, car  $\phi > \phi \wedge \psi$  est une tautologie de  $\mathcal{S}_2$ , de même que  $\psi > \phi \wedge \psi$  (règle  $RI_{13}$ ). Mais, de par la symétrie de ces résultats, on ne peut plus inférer  $\phi > \psi$  comme dans  $\mathcal{S}_1$ .

Cet exemple montre que la relation sur  $\mathcal{L}_{>}$  induite dans  $\mathcal{S}_2$  ne raffine ni n'est raffinée par celle induite dans  $\mathcal{S}_1$ , contrairement au cas d'un ordre total.

### 3.1.5 Inconsistance des bases partiellement ordonnées

Classiquement, l'inconsistance est définie comme suit :

**Définition 31.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base de formules partiellement ordonnée. On peut définir deux sortes d'inconsistance :

**Inconsistance syntaxique :**  $(\mathcal{K}, >)$  est inconsistante ssi  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}} \perp$  ssi  $\exists \phi, \psi \in \mathcal{L}$  tel que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}} \phi > \psi$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}} \psi > \phi$  par un système  $\mathcal{S}$ .

**Inconsistance sémantique :**  $(\mathcal{K}, >)$  est inconsistante ssi il n'existe pas de modèle de  $(\mathcal{K}, >)$  (pour la sémantique considérée)

Par exemple si l'on considère la sémantique de certitude relative (définition 26),  $(\mathcal{K}, >)$  n'a pas de modèle se traduit par : Il n'existe pas de relation  $\triangleright$  sur  $2^{\Omega}$  vérifiant POI et  $Q^d$  telle que pour tout couple  $\phi > \psi$  de  $(\mathcal{K}, >)$ , on ait  $[\phi] \triangleright [\psi]$ .

Pour l'inférence syntaxique dans le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}_2$ ),  $(\mathcal{K}, >)$  est inconsistante ssi  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \psi > \phi$  (resp. avec  $\vdash_{\mathcal{S}_2}$ ).

Pour l'inférence basée sur la relation  $\succ_N$  (resp.  $\succ_N^+$ ), on pourrait définir l'inconsistance d'une base  $(\mathcal{K}, >)$  comme suit : il n'est pas possible d'interpréter l'ordre  $>$  sur  $\mathcal{K}$  comme la relation  $\succ_N$  (resp.  $\succ_N^+$ ).

Le fait que les deux systèmes d'inférence étudiés plus haut sont corrects et complets indique que les deux notions d'inconsistance sont équivalentes dans ces systèmes, et qu'ils peuvent la détecter syntaxiquement.

**Exemple 25.** Soit  $\mathcal{K} = \{\phi, \phi \wedge \psi\}$  avec  $\phi \wedge \psi > \phi$ .

**Construction sémantique :**

**Cas  $\succ_N$  :** Il n'est pas possible d'interpréter  $\phi \wedge \psi > \phi$  comme  $\phi \wedge \psi \succ_N \phi$ .

**Cas  $\succ_N^+$  :** Il n'est pas possible d'interpréter  $\phi \wedge \psi > \phi$  comme  $\phi \wedge \psi \succ_N^+ \phi$ . De plus, la fermeture déductive contient  $\phi \succ_N^+ \phi \wedge \psi$ .

**Inférence syntaxique :**

**Cas  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  :** On a  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi \wedge \psi > \phi$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi > \phi \wedge \psi$ . On voit donc que  $\{\phi \wedge \psi > \phi, \phi \wedge \psi > \phi\}$  et  $\{\phi \wedge \psi > \phi, \phi > \phi \wedge \psi\}$  sont inconsistants au sens de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  et que l'inférence syntaxique détecte cette inconsistance dans  $(\mathcal{K}, >)$ .

## 3.2 Fermeture déductive – Approche par les coupes

Cette méthode est inspirée de la logique possibiliste [48] dans laquelle on peut décrire l'inférence en utilisant les bases classiques formées en considérant les formules de certitude supérieure à un niveau donné, et en faisant varier ce niveau. Pour chaque niveau, on applique la logique classique.

### 3.2.1 Inférence syntaxique

Partant d'une base logique munie d'un ordre partiel strict  $>$ , l'idée est ici de conclure  $\phi > \psi$  lorsque  $\phi$  est classiquement déductible à partir des formules consistantes  $C_i$  telles que  $\forall i, C_i > \psi, C_i, \psi \in \mathcal{K}$ .

**Définition 32** (Inférence par les coupes). *Soit  $\psi \in \mathcal{K}$ , on définit  $\mathcal{K}_\psi^> = \{\gamma \mid \gamma \in \mathcal{K} \text{ et } \gamma > \psi\}$ . La formule  $\phi > \psi$  se déduit d'une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$ , ce qu'on note  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$ , ssi  $\mathcal{K}_\psi^>$  est consistante et  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi$  (classiquement).*

La fermeture déductive par les coupes d'une base partiellement ordonnée  $\mathcal{C}_c(\mathcal{K}, >)$  est définie par :

$$\mathcal{C}_c(\mathcal{K}, >) = \{\phi > \psi \in \mathcal{L}_> : (\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi\}.$$

**Proposition 36.** *La relation dans  $\mathcal{L}_>$  définie par  $\mathcal{C}_c(\mathcal{K}, >)$  satisfait l'axiome  $N^d$ .*

**Preuve de la Proposition 36:** Supposons  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi_1 > \psi$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi_2 > \psi$  cela veut dire  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi_1$  et  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi_2$  donc  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ , donc  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi_1 \wedge \phi_2 > \psi$ .  $\square$

En revanche, POI n'est pas satisfaite : si  $\phi_1 > \psi$  et  $\phi_1 \models \phi_2$  alors  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi_2$  donc  $\phi_2 > \psi$ . Mais si  $\phi > \psi_2$  et  $\psi_1 \models \psi_2$  on n'a pas forcément  $\phi > \psi_1$  car  $\psi_1$  peut ne pas apparaître dans  $\mathcal{K}$ .

Cette inférence pallie certaines insuffisances de la fermeture sémantique par extension ensembliste de l'ordre partiel :

**Exemple 26.** *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  base partiellement ordonnée avec  $\mathcal{K} = \{\phi, \neg\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi, \neg\phi\}$  et  $>$  est l'ordre partiel strict défini par :  $\neg\phi \vee \psi > \phi \wedge \psi > \neg\phi$  et  $\phi > \neg\phi$ .*

*On a  $\mathcal{K}_{\neg\phi}^> = \{\phi, \phi \wedge \psi, \neg\phi \vee \psi\}$  et  $\mathcal{K}_{\neg\phi}^> \vdash \psi$  donc  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \psi > \neg\phi$ .*

*On a  $\mathcal{K}_{\phi \wedge \psi}^> = \{\neg\phi \vee \psi\}$  et  $\mathcal{K}_{\phi \wedge \psi}^> \vdash \neg\phi \vee \psi$  donc  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \neg\phi \vee \psi > \phi \wedge \psi$ .*

*On voit bien que l'on a gardé la comparaison  $\neg\phi \vee \psi > \phi \wedge \psi$ . Ce n'est pas le cas avec la fermeture sémantique par extension ensembliste de l'ordre partiel de la Section 2.2.2.*

En fait on montre que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$  dès que  $\phi > \psi$  est dans la base initiale pourvu que  $\mathcal{K}_\psi^>$  soit consistant. En revanche, dans l'exemple  $\mathcal{K} = \{\neg\phi, \phi, \psi\}$  avec  $\neg\phi > \psi, \phi > \psi$  on n'aura ni  $\neg\phi > \psi$ , ni  $\phi > \psi$  car  $\mathcal{K}_\psi^> = \{\phi, \neg\phi\}$  est classiquement inconsistante.

Cependant, cette relation d'inférence présente d'autres inconvénients :

- Il est supposé que la relation  $>$  est irréflexive et transitive (c'est une relation d'ordre partiel sur  $\mathcal{K}$ ). Mais,  $>$  sur  $2^\Omega$  ne peut être ni l'un ni l'autre. L'irréflexivité de  $>$  est perdue en cas d'inconsistance des coupures comme le montre l'exemple 27, où  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \psi > \psi$ .
- $>$  est généralement non transitive.

L'exemple suivant montre la perte de la transitivité.

**Exemple 27.** Soit  $\mathcal{K} = \{\delta, \xi, \gamma, \psi\}$  une base équipée d'une relation d'ordre partiel strict défini par  $\delta > \xi$  et  $\gamma > \psi$ . Supposons que  $\delta \models \psi$  et  $\gamma \models \phi$ . Donc, nous avons  $\psi > \xi$  et  $\phi > \psi$ . Mais, nous n'avons pas  $\phi > \xi$ , parce que  $\mathcal{K}_\xi = \{\delta\}$  et il n'a pas été supposé que  $\delta \models \phi$ . Donc, nous pouvons prendre  $\delta = x \wedge y$ ,  $\xi = \neg x$ ,  $\gamma = \neg y$ ,  $\psi = x$ ,  $\phi = \neg x \vee \neg y$ .

En fait, il est clair que chaque fois  $\phi > \psi \in \mathcal{C}_c(\mathcal{K}, >)$ , on considère que  $\psi \in \mathcal{K}$ . Autrement dit, si  $\psi \notin \mathcal{K}$ , il est pas possible de déduire quoi que ce soit de la forme  $\phi > \psi$ .

**Remarque 3.** Au lieu de  $\mathcal{K}_\psi^>$  on pourrait utiliser  $\mathcal{K}_\psi^> \cup \{\psi\}$ . Mais si on ne sait pas représenter la dominance au sens large, on ne peut pas exprimer que  $\phi \geq \psi$  si  $\mathcal{K}_\psi^> \cup \{\psi\} \vdash \phi$  mais pas  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi$ .

### 3.2.2 Etude sémantique

Nous avons vu dans la section précédente que l'approche par les coupes était trop faible pour définir une fermeture déductive d'une base partiellement ordonnée. Le point faible de cette approche réside dans le fait que nous pouvons pas déduire une comparaison  $\phi > \psi$  si  $\psi \notin \mathcal{K}$ , ce qui limite cette approche en termes de conséquences produites. Néanmoins, cette approche reste correcte pour la sémantique de certitude relative d'où l'intérêt de poursuivre l'étude de cette approche.

Notons que l'on ne peut pas toujours interpréter  $\phi > \psi$  dans  $(\mathcal{K}, >)$  par  $[\phi] \triangleright [\psi]$ . Voir l'exemple ci-dessous. Cela revient à exprimer qu'il n'existe pas de modèle pour la sémantique de certitude relative.

**Exemple 28.** Soit  $\mathcal{K} = \{\neg\phi, \neg\psi, \neg\phi \vee \psi\}$  et  $>$  l'ordre partiel strict défini par :  $\neg\phi > \neg\phi \vee \psi$  et  $\neg\psi > \neg\phi \vee \psi$ .

On a bien  $\mathcal{K}_{\neg\phi \vee \psi}^> = \{\neg\phi, \neg\psi\} \vdash \neg\phi$ . Mais la base  $(\mathcal{K}, >)$  est rc-inconsistante. En effet, il n'existe pas de relation d'ordre partiel strict  $\triangleright$  sur  $2^\Omega$  vérifiant les propriétés POI et  $Q^d$  telle que  $[\neg\phi] \triangleright [\neg\phi \vee \psi]$ . L'inférence  $\mathcal{K}_{\neg\phi \vee \psi}^> \vdash \neg\phi$  n'a donc pas de sens.

La proposition suivante exprime que l'inférence syntaxique  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$  (définition 32) est correcte pour la sémantique de certitude relative.

**Proposition 37.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée.<sup>2</sup> Pour toute formule  $\psi$  de  $\mathcal{K}$ , si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$  alors  $(\mathcal{K}, >) \models_N \phi > \psi$ . La réciproque est fausse.

2. Notons que le résultat est trivial si la base  $(\mathcal{K}, >)$  n'a pas de modèle pour la sémantique de certitude relative.

**Preuve de la Proposition 37:** Supposons que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$ . Alors par définition  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi$  et  $\mathcal{K}_\psi^>$  est consistante. Soit  $\mathcal{K}_\psi^> = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ . Comme  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\} \vdash \phi$ , on a  $[\gamma_1 \wedge \gamma_2 \cdots \gamma_p] \subseteq [\phi]$ . Comme  $\forall i, \gamma_i > \psi$ , par hypothèse  $\forall i, [\gamma_i] \triangleright [\psi]$ . S'il n'y a pas de telle relation  $\triangleright$  la base  $(\mathcal{K}, >)$  est inconsistante. Supposons le contraire. Comme la relation  $\triangleright$  satisfait  $Q^d$  et POI, elle satisfait aussi l'adjonction. On a donc  $[\gamma_1 \wedge \gamma_2 \cdots \gamma_p] \triangleright [\psi]$ . Comme la relation  $\triangleright$  satisfait POI, on en conclut que  $[\phi] \triangleright [\psi]$ .  $\square$

Voici un contre-exemple pour la réciproque :

**Exemple 29 (Contre-exemple).** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée avec  $\mathcal{K} = \{\phi, \psi, \neg\phi, \neg\psi\}$  et  $>$  l'ordre partiel strict défini par :  $\phi > \neg\phi$  et  $\psi > \neg\psi$ . On a  $[\phi] \triangleright [\neg\psi]$  mais pas  $\mathcal{K}_{\neg\psi}^> \vdash \phi$ .

En effet, par hypothèse on a  $[\phi] \triangleright [\neg\phi]$  et  $[\psi] \triangleright [\neg\psi]$ . La relation  $\triangleright$  satisfait  $Q^d$  et POI donc aussi  $CCC^d$ . Par  $CCC^d$ , on déduit que  $[\phi \wedge \psi] \triangleright [\phi \wedge \psi] = [\neg\phi \vee \neg\psi]$ . Puis par POI,  $[\phi] \triangleright [\neg\psi]$ .

Cependant, on n'a pas  $\mathcal{K}_{\neg\psi}^> \vdash \phi$  puisque  $\mathcal{K}_{\neg\psi}^> = \{\psi\}$ .

La proposition suivante exprime que l'inférence syntaxique  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$  (définition 32) est correcte pour la sémantique de certitude préadditive, sous certaines conditions satisfaites par la relation  $>$ .

**Proposition 38.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée<sup>3</sup> telle que  $\forall \psi \in \mathcal{K}, \forall \gamma_i \in \mathcal{K}$  telle que  $\gamma_i > \psi, \neg\psi \vDash \gamma_i$ . Pour toute formule  $\psi$  de  $\mathcal{K}$ , si  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$  alors  $(\mathcal{K}, >) \vDash_{N^+} \phi > \psi$ .

La réciproque est fausse.

**Preuve de la Proposition 38:** Supposons que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$ . Alors  $\mathcal{K}_\psi^> \vdash \phi$  et  $\mathcal{K}_\psi^>$  est consistante..

Soit  $\mathcal{K}_\psi^> = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ . Comme  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\} \vdash \phi$ , on a  $[\gamma_1 \wedge \gamma_2 \cdots \gamma_p] \subseteq [\phi]$ . Mais comme  $\forall i, \gamma_i > \psi$  donc par hypothèse  $[\gamma_i] \triangleright^+ [\psi]$ . D'autre part par hypothèse sur la relation  $>$ , on a  $\forall i, j, \neg\psi \vDash \gamma_i$  et  $\neg\psi \vDash \gamma_j$ . Donc, on a par  $NF^d$ ,  $[\gamma_1 \wedge \gamma_2 \cdots \gamma_p] \triangleright^+ [\psi]$ , donc par POI,  $[\phi] \triangleright^+ [\psi]$ .  $\square$

Voici un contre-exemple pour la réciproque :

**Exemple 29 (suite)** On a  $[\phi] \triangleright^+ [\neg\psi]$ .

En effet, par hypothèse on a  $[\phi] \triangleright^+ [\neg\phi]$  et  $[\psi] \triangleright^+ [\neg\psi]$ . La relation  $\triangleright^+$  satisfait  $QF^d$  et POI donc aussi  $CCC^d$ . Par  $CCC^d$ , on déduit que  $[\phi \wedge \psi] \triangleright^+ [\phi \wedge \psi] = [\neg\phi \vee \neg\psi]$ . Puis par POI, on obtient  $[\phi] \triangleright^+ [\neg\psi]$ .

Cependant, on n'a pas  $\mathcal{K}_{\neg\psi}^> \vdash \phi$ .

3. Notons que le résultat est trivial si la base  $(\mathcal{K}, >)$  n'a pas de modèle pour la sémantique de certitude préadditive.

Cette méthode d'inférence est trop faible pour définir une fermeture déductive complète mais elle reste correcte pour la sémantique de certitude relative. D'autre part, un point positif de cette méthode est la simplicité puisqu'on utilise la déduction classique. Donc d'un point de vue calculatoire, elle sera utile par la suite pour une implémentation d'un système d'inférence de certitude relative avec des formules de la forme  $\phi > \psi$ .

### 3.3 Comparaison avec la logique MEL

Les auteurs de [6] proposent une logique appelée MEL dont la syntaxe permet d'exprimer que la valeur de vérité d'une formule propositionnelle est connue ou inconnue. L'information est dite incomplète, quand la vérité d'au moins une proposition reste inconnue. Pour cela on encapsule les formules propositionnelles dans un opérateur de croyance ou de connaissance ce qui permet de distinguer entre ne pas connaître la vérité d'une proposition et savoir qu'elle est fausse. On se place dans le contexte d'un agent qui raisonne sur ce qu'il sait des connaissances d'un autre agent. Nous allons montrer que le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  généralise la logique MEL.

#### 3.3.1 La logique MEL

La logique MEL permet d'encapsuler le langage  $\mathcal{L}$  à l'intérieur d'un langage équipé de la modalité  $\Box$ . Formellement, pour construire une formule atomique de la logique MEL, il suffit de rajouter le connecteur unaire  $\Box$  de nécessité devant les formules de  $\mathcal{L}$ .

Le langage de la logique MEL,  $\mathcal{L}_\Box$ , dont les formules sont notées  $\Phi, \Psi, \dots$ , est généré à partir de l'ensemble des formules atomiques à l'aide des connecteurs logiques  $\wedge, \neg$  :

$$\forall \phi \in \mathcal{L}, \Box\phi \in \mathcal{L}_\Box, \neg\Phi \in \mathcal{L}_\Box, \quad \Phi \wedge \Psi \in \mathcal{L}_\Box, \quad \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{L}_\Box$$

On définit ensuite la modalité  $\Diamond$  de possibilité comme suit :

$$\Diamond\phi := \neg\Box\neg\phi$$

On interprète  $\Box\phi$  par "l'agent croit ou sait que  $\phi$  est vrai".

La logique MEL est axiomatisée par le système suivant :

**Axiomes de la logique propositionnelle :**  $\Phi, \Psi, \Gamma \in \mathcal{L}_\Box$

- $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$
- $(\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Gamma)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Gamma))$
- $((\neg\Phi) \rightarrow (\neg\Psi)) \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$

**Axiome K :**  $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$

**Axiome N :** si  $\vdash_{LP} \phi$  alors  $\Box\phi$

**Axiome D :**  $\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$

**Règle d'inférence :** Si  $\Phi$  et  $(\Phi \rightarrow \Psi)$  alors  $\Psi$

Un modèle de MEL est un sous-ensemble non vide  $E$  d'interprétations. La formule  $\Box\phi$  est satisfaite dans l'état épistémique  $E$  ssi  $E \subseteq [\phi]$ , c'est à dire ssi la formule  $\phi$  est vraie dans toutes les interprétations compatibles avec l'état épistémique de l'agent. On utilise la définition standard de la satisfiabilité pour les formules complexes. On montre [6] que MEL est sain et complet pour cette sémantique.

### 3.3.2 Comparaison avec le système d'inférence $\mathcal{S}_1$

Nous allons considérer une restriction du langage  $\mathcal{L}_>$  ce qui nous conduira à une simplification des axiomes du système  $\mathcal{S}_1$ . Si nous considérons la restriction de  $\mathcal{L}_>$  aux littéraux de la forme  $\phi > \neg\phi$  où  $\phi \in \mathcal{L}$ . En simplifiant les axiomes et règles d'inférence du système  $\mathcal{S}_1$ , on peut montrer que ce système simplifié appelé  $\mathcal{S}_{MEL}$  est un fragment de la logique MEL :

$ax_1$  :  $\top > \perp$

$RI_2$  : Si  $\phi > \neg\phi$  et  $\phi \models \phi'$  alors  $\phi' > \neg\phi'$

$RI_3$  : Si  $\phi > \neg\phi$  et  $\neg\phi > \phi$  alors  $\perp$

$RI_7$  : Si  $\phi > \neg\phi$  et  $\psi > \neg\psi$  alors  $(\phi \wedge \psi) > \neg(\phi \wedge \psi)$

Cette dernière règle d'inférence est  $CCC^d$  qui est conséquence de  $\mathcal{S}_1$ .

D'autre part, si nous enrichissons notre langage  $\mathcal{L}_>$  avec la négation (juste devant des littéraux), nous pouvons montrer que la logique MEL est un fragment du système  $\mathcal{S}_1$ . Considérons des littéraux de la forme  $\phi > \neg\phi$  et  $\neg(\phi > \neg\phi)$  où  $\phi \in \mathcal{L}$ . Réécrivons maintenant les axiomes et règles d'inférence du système  $\mathcal{S}_1$ . On ne peut plus écrire la qualitatativité  $Q^d$ .

$ax_1$  :  $\top > \perp$

$RI_2$  : Si  $\phi > \neg\phi$  et  $\phi \models \phi'$  alors  $\phi' > \neg\phi'$

$RI'_3$  : Si  $\phi > \neg\phi$  alors  $\neg(\neg\phi > \phi)$

$RI_7$  : Si  $\phi > \neg\phi$  et  $\psi > \neg\psi$  alors  $(\phi \wedge \psi) > \neg(\phi \wedge \psi)$



On note ce système simplifié par  $\mathcal{S}'_{MEL}$

Posons  $\Box\phi = (\phi > \neg\phi)$  pour  $\phi \in \mathcal{L}$  alors  $\Diamond\phi$  représente  $\neg(\neg\phi > \phi)$ . Nous allons montrer que le système axiomatique  $\mathcal{S}'_{MEL}$  permet de retrouver le système de la logique MEL :

**Axiome K :**  $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$

Il suffit de montrer que la règle d'inférence suivante est dérivée de  $\mathcal{S}_1$  :

si  $(\phi \rightarrow \psi) > \neg(\phi \rightarrow \psi)$  et  $\phi > \neg\phi$  alors  $\psi > \neg\psi$ .

On suppose que :  $(\phi \rightarrow \psi) > \neg(\phi \rightarrow \psi)$  et  $\phi > \neg\phi$  :

Par  $RI_7$  on obtient :  $\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi) > \neg(\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi))$ . Puis par  $RI_2$  on obtient :  $\psi > \neg\psi$ .

**Axiome N :** si  $\vdash_{LP} \phi$  alors  $\Box\phi$

On utilise l'axiome de  $\mathcal{S}_1$  et la règle  $RI_2$ .

**Axiome D :**  $\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$ .

Il suffit de montrer que la règle d'inférence : si  $\phi > \neg\phi$  alors  $\neg(\neg\phi > \phi)$  est dérivée de  $\mathcal{S}_1$ .

C'est la règle  $RI_3$ .

Notons que cette règle n'est pas dérivable avec la première restriction à cause de l'absence de la négation. Donc pour cette raison, la première simplification du système  $\mathcal{S}_1$  reste un fragment de la logique MEL.

Inversement on peut déduire les axiomes  $ax_1, RI_2, RI'_3, RI_7$  à partir de ceux de MEL :

- $ax_1$  c'est  $\Box\top$  donc N
- $RI_2$  s'écrit en MEL : Si  $\phi \vDash \phi'$  alors  $\Box\phi \vDash \Box\phi'$  C'est vrai en MEL (monotonie de  $\Box$ ).
- $RI'_3$  dit que  $\Box\phi \wedge \Box\neg\phi$  est une contradiction (c'est vrai car c'est  $\Box(\phi \wedge \neg\phi)$ ).
- $RI_7$  est l'inférence  $\Box\phi \wedge \Box\psi \vdash \Box\phi \wedge \psi$ , valide dans le système KD.

Considérons pour terminer le point de vue sémantique. Rappelons que la sémantique du système  $\mathcal{S}_1$  a été définie (définition 26) à partir d'une relation d'ordre partiel strict  $\triangleright$  sur  $2^\Omega$  qui satisfait les propriétés POI et  $Q^d$ . Soit  $\mathcal{M} = (2^\Omega, \triangleright)$ . On a donc :

$$M \vDash_N (\phi > \neg\phi) \text{ ssi } [\phi] \triangleright [\neg\phi]$$

Mais un modèle de MEL est un sous-ensemble non-vide d'interprétations  $E \subseteq 2^\Omega$ . On peut associer à tout ensemble  $E$  un ordre partiel sur les sous ensembles d'interprétations, en complétant la relation  $E \triangleright \bar{E}$  par POI.

Il est facile de voir que la relation  $\triangleright_E$  ainsi obtenue est de la forme  $A \triangleright_E \bar{A}$  si et seulement si  $E \subseteq A$ . Elle satisfait les axiomes  $ax_1, RI_2, RI'_3, RI_7$ . Inversement il faut montrer

que si  $\triangleright$  satisfait ces axiomes alors il existe un sous-ensemble non-vidé d'interprétations  $E \subseteq 2^\Omega$  tel que  $\triangleright = \triangleright_E$ . Pour le voir, notons que la relation  $\triangleright$  n'est pas vide ( $ax_1$ ) et ne compare que des ensembles  $A \triangleright \bar{A}$  avec  $A \neq \emptyset$ . Et on ne peut alors avoir  $\bar{A} \triangleright A$  en même temps ( $RI'_3$ ). Définissons l'ensemble  $E_\triangleright$  comme le plus petit ensemble  $A$  tel que  $A \triangleright \bar{A}$ .  $E_\triangleright$  existe, car sinon, si on en avait deux,  $A$  et  $B$ , on aurait aussi  $A \cap B \triangleright \overline{A \cap B}$ , ce qui contredit l'hypothèse. De plus  $E_\triangleright$  n'est pas vide car sinon on aurait  $\perp > \top$  ce qui avec  $RI'_3$  contredirait  $ax_1$ . On voit qu'on a défini ainsi une bijection entre les modèles de MEL et ceux de la restriction  $S'_{MEL}$  de  $S_1$  car clairement  $E_{\triangleright_E} = E$  et donc

$E$  est un modèle de MEL si et seulement si  $\triangleright_E$  est un modèle de  $ax_1, RI_2, RI'_3, RI_7$ .

## 3.4 Comparaison avec les logiques conditionnelles

Dans cette section nous comparons le système  $S_1$  avec les travaux existants sur les logiques conditionnelles. Nous commençons par le système P.

### 3.4.1 Comparaison avec le système P

Le système  $P$  [73] est un système d'inférence, défini axiomatiquement, permettant de décrire les propriétés d'une relation d'inférence non monotone  $\vdash$ . Soit  $\phi, \psi$  deux formules de  $\mathcal{L}$ ,  $\phi \vdash \psi$  s'interprète par "Généralement, si  $\phi$  alors  $\psi$ ".

#### 3.4.1.1 Le système P

Le système  $P$  est constitué d'un schéma d'axiomes :

**R**  $\alpha \vdash \alpha$

et de 5 règles d'inférence :

**LLE** : Si  $\alpha \equiv \alpha'$  et  $\alpha \vdash \beta$  alors  $\alpha' \vdash \beta$

**RW** : Si  $\beta \models \beta'$  et  $\alpha \vdash \beta$  alors  $\alpha \vdash \beta'$

**OR** : Si  $\alpha \vdash \delta$  et  $\beta \vdash \delta$  alors  $\alpha \vee \beta \vdash \delta$

**CM** : Si  $\alpha \vdash \beta$  et  $\alpha \vdash \delta$  alors  $\alpha \wedge \beta \vdash \delta$

**CUT** : Si  $\alpha \wedge \beta \vdash \delta$  et  $\alpha \vdash \beta$  alors  $\alpha \vdash \delta$

### 3.4.1.2 Comparaison avec le système d'inférence $\mathcal{S}_1$

Nous allons considérer une restriction du langage  $\mathcal{L}_{>}$  qui permet d'exprimer les connaissances conditionnelles  $\alpha \sim \beta$ . Nous montrerons ensuite que le système axiomatique  $\mathcal{S}_1$  permet de retrouver l'axiomatique de  $P$ .

Considérons la restriction de  $\mathcal{L}_{>}$  aux littéraux de la forme  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  où  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ .

Posons maintenant  $\phi \sim \psi$  ssi  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  pour  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ . Nous allons montrer que la relation  $\sim$  ainsi définie satisfait les règles d'inférence du système  $P$ .

**LLE :** Il suffit de montrer que la règle suivante est dérivée du système  $\mathcal{S}_1$  : Si  $\phi \equiv \phi'$  et  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  alors  $\phi' \rightarrow \psi > \phi' \rightarrow \neg\psi$ .

Remarquons que si  $\phi \equiv \phi'$  alors  $\phi \rightarrow \psi \models \phi' \rightarrow \psi$  et  $\phi' \rightarrow \neg\psi \models \phi \rightarrow \neg\psi$ . On applique ensuite la règle  $RI_2$ .

**RW :** Il suffit de montrer que la règle suivante est dérivée du système  $\mathcal{S}_1$  : Si  $\psi \models \psi'$  et  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  alors  $\phi \rightarrow \psi' > \phi \rightarrow \neg\psi'$ . Remarquons que si  $\psi \models \psi'$  alors  $\phi \rightarrow \psi \models \phi \rightarrow \psi'$  et  $\phi \rightarrow \neg\psi' \models \phi \rightarrow \neg\psi$ . On applique ensuite la règle  $RI_2$ .

**OR :** Il suffit de montrer que la règle suivante est dérivée du système  $\mathcal{S}_1$  : Si  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  et  $\psi \rightarrow \chi > \psi \rightarrow \neg\chi$  alors  $\phi \vee \psi \rightarrow \chi > \phi \vee \psi \rightarrow \neg\chi$ . Il s'agit exactement de la règle  $RI_6$ .

**CM :** Il suffit de montrer que la règle suivante est dérivée du système  $\mathcal{S}_1$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  alors  $\phi \wedge \psi \rightarrow \chi > \phi \wedge \psi \rightarrow \neg\chi$ . Il s'agit exactement de la règle  $RI_9$ .

**CUT :** Il suffit de montrer que la règle suivante est dérivée du système  $\mathcal{S}_1$  : Si  $\phi \wedge \psi \rightarrow \chi > \phi \wedge \psi \rightarrow \neg\chi$  et  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  alors  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$ . Il s'agit exactement de la règle  $RI_8$ .

Donc la logique  $\mathcal{S}_1$  permet de coder le système  $P$ .

Sur le plan sémantique, les auteurs [73] considèrent des structures dites préférentielles. Une telle structure consiste en un ensemble d'états  $S$ , un ordre partiel  $\succ$  sur  $S$  et une fonction  $f$  qui affecte à chaque état  $s$  une interprétation  $f(s) \in \Omega$  d'un langage propositionnel  $\mathcal{L}$ . Une structure  $(S, \succ, f)$  satisfait  $\alpha \sim \beta$  si et seulement si  $\beta$  est vraie dans tous les états maximaux  $s$  tels que  $f(s) \models \alpha$ . Il est facile de voir que

$$(S, \succ, f) \models \alpha \sim \beta \text{ si et seulement si } \forall s : f(s) \models \alpha \wedge \neg\beta, \exists s' : f(s') \models \alpha \wedge \beta \text{ et } s' \succ s$$

En fait cette sémantique, proche des celles des relations de type  $\succ_{ofs}$  est celle adoptée par Halpern [67] pour les bases partiellement ordonnées.

Il existe une sémantique alternative en termes de familles de distributions de possibilité  $\pi$  sur  $S$  telles que  $\alpha \sim \delta$  si et seulement si  $\Pi(\alpha \wedge \delta) > \Pi(\alpha \wedge \neg\delta)$  (Benferhat et al. [13]). Voir [14] pour une comparaison des sémantiques du système  $P$ .

### 3.4.2 La logique de la vraisemblance relative de Halpern

Halpern [67] utilise la relation  $\succ_{ofs}$  sur une algèbre  $\mathcal{F}$  de sous-ensembles de  $\Omega$  et donne une condition suffisante pour qu'elle s'exprime comme issue d'une relation d'ordre partiel sur  $\Omega$ . Cette condition dit qu'il faut que  $\Omega$  possède suffisamment d'éléments.

L'exemple suivant est fourni : soit  $\Omega$  partitionné en  $A, B, C$ , et  $B \cup C > A$ ,  $\Omega > A$ ,  $X > \emptyset, \forall X \in \mathcal{F}$ . La relation  $>$  sur  $2^\Omega$  est qualitative et satisfait POI. Alors pour que  $>$  soit une relation de dominance optimiste faible stricte pour un ordre partiel  $(\Omega, \succ)$ , ( $> = \succ_{ofs}$ ) on doit avoir les faits suivants :

- Supposons que  $A, B, C$  soient des singletons sur  $2^\Omega$ . Ils sont incomparables pour la relation  $>$ . Donc  $\succ$  ne compare aucun élément et on ne peut pas avoir  $> = \succ_{ofs}$  sur l'algèbre induite par  $A, B, C$ .
- Si on suppose que  $A$  contient deux éléments  $a_1, a_2$ , on peut supposer que  $B \cup C > A$  parce que  $b \succ a_1$  et  $c \succ a_2$ . Dans ce cas on a bien  $> = \succ_{ofs}$  sur  $\mathcal{F}$ .  $A, B, C$  restent incomparables<sup>4</sup>. Notons que, dans ce second cas, la relation  $\succ_{ofs}$  sur  $2^\Omega$  contient plus que  $>$ .

Donc si on part d'un ordre partiel  $>$  de dominance optimiste faible sur  $2^\Omega$ , on doit trouver un autre ensemble  $S$  plus grand que  $\Omega$  au sens où il existe une application surjective  $f : S \rightarrow \Omega$ .  $\Omega$  est assimilé à la partition des classes d'équivalences induites par  $f$  sur  $S$  selon la relation  $s \approx_f s'$  si et seulement si  $f(s) = f(s')$ . Cela correspond exactement aux structures préférentielles de Kraus, Lehmann et Magidor [73] pour la sémantique du système P.

Dans sa logique de vraisemblance relative, Halpern axiomatise  $>$  directement. Mais il considère un calcul propositionnel sur les formules de vraisemblance relative (de la forme  $\phi \gg \psi$ ), alors que notre approche n'accepte que les conjonctions de formules de certitude relative.

Si on transpose les axiomes de Halpern en ceux de certitude relative, on trouve :

- $\neg(\phi > \phi)$  (c'est une conséquence de la règle  $RI_3$ )
- Qualitativité duale. C'est  $RI_1$ .
- POI. C'est  $RI_2$ .
- Pour toute tautologie  $\phi : \neg(\neg\phi > \perp)$ . C'est  $ax_1$ .

Halpern ne donne pas  $RI_3 : \phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  implique  $\perp$ .

En fait Halpern n'a pas besoin de  $RI_3$  car il suppose un calcul propositionnel sur les atomes  $\phi > \psi$ .

4. Cette remarque corrige une erreur à la page 8 de [67].

Halpern introduit un opérateur  $K$  avec  $K\phi$  un raccourci pour  $\neg(\neg\phi \gg \perp)$ , soit  $\neg(\top > \phi)$ , en termes de certitude relative. Ce qui permet d'écrire *POI* dans la syntaxe comme

$$K(\neg\phi \vee \phi') \wedge K(\neg\psi' \vee \psi) \wedge (\phi > \psi) \vdash (\phi' > \psi')$$

La preuve de complétude s'appuie sur des relations d'ordre partiel sur un ensemble d'états  $S$  plus grand que l'ensemble des interprétations du langage propositionnel des formules  $\phi, \psi$ , suffisamment grand pour interpréter la fermeture syntaxique d'une base partiellement ordonnée par un ordre partiel sur  $S$ , avec :

- $s \models \phi$  si et seulement si  $f(s) \models \phi$  (au sens de la logique propositionnelle, car  $f(s)$  est une interprétation du langage qui contient  $\phi$ )
- $(S, \succ) \models \phi > \psi$  si et seulement si  $\forall s$ , tel que  $s \models \psi$ , il existe  $s' \models \phi : s' \succ s$ .

Notre sémantique est plus simple au sens où on se base directement sur une relation entre sous-ensembles  $[\phi], [\psi]$  sans faire appel à un hypothétique ensemble d'états plus fins que l'ensemble d'interprétations du langage. Le recours à  $S$  est d'autant plus contestable que l'on peut voir l'ordre partiel entre ensembles de modèles comme une spécification incomplète d'un ordre total de type fonction de nécessité sur le langage. Chacun d'eux correspond à un ordre total sur les interprétations plus facile à interpréter qu'un ordre partiel sur un ensemble abstrait.

### 3.4.3 Le système de Lewis

Les travaux de Halpern étendent ceux de Lewis [78] consacrés à une logique de la possibilité relative, une formule élémentaire  $\phi \geq \psi$  pouvant être vue comme l'inégalité  $\Pi([\phi]) \geq \Pi([\psi])$ . Cette logique appelée VN a pour axiomes :

VN0 Axiomes de la logique propositionnelle

VN1 Transitivité de  $\geq$

VN2 Totalité :  $(\phi \geq \psi) \vee (\psi \geq \phi)$

VN3  $ax_1 : \neg(\perp \geq \top)$

et pour règles d'inférence le modus ponens et la règle suivante (utilisant l'opérateur  $K$  de Halpern) :

$$\text{VN4 : Si } K(\neg\phi \vee (\bigvee_{i=1}^n \psi_i)) \text{ alors } \bigvee_{i=1}^n (\psi_i \geq \phi)$$

Fariñas et Herzig [33] ont montré que ce système est équivalent aux axiomes des possibilités comparatives (Dubois [34]), à savoir : VN0, VN1, VN2, VN3,  $\top \geq \phi$ , et l'axiome de stabilité pour l'intersection

$$\text{SI : Si } \phi \geq \psi \text{ alors } (\phi \vee \chi \geq \psi \vee \chi)$$

plus l'indépendance de  $\geq$  pour la syntaxe.

Dans le cas de l'ordre partiel, l'axiome  $Q^d$  remplace VN1 et VN4. Notons que l'axiome de totalité demande que le langage contienne des disjonctions de comparaisons élémentaires, contrairement à notre cadre. Bendova et Hajek [8] ont élaboré un système de possibilité comparative en autorisant l'emboîtement des comparaisons, et en comparant ce formalisme à la logique temporelle (car l'ordre total de plausibilité s'apparente à une trajectoire temporelle).

D'un point de vue sémantique, un modèle de VN peut être représenté par une relation de pré-ordre total (et non partiel) sur l'ensemble des interprétations du langage. Une base de formules munie d'une relation reflexive peut être interprétée de cette façon.

### 3.5 Approche à base de familles d'ordres totaux

L'idée est de considérer une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  comme la famille de bases totalement ordonnées la prolongeant [88]. Cette idée présuppose une vision particulière de  $(\mathcal{K}, >)$ .

**Définition 33.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée. Soit  $>^i$  un ordre total sur  $\mathcal{K}$ ,  $>^i$  prolonge<sup>5</sup>  $>$  ssi :

$$\text{Pour tous } \phi, \psi \in \mathcal{K}, \text{ si } \phi > \psi \text{ alors } \phi >^i \psi$$

Dans certains cas, l'ordre  $>^i$  n'est pas cohérent avec une mesure de nécessité  $N$ . En particulier on peut avoir  $\phi >^i \phi \vee \psi$ .

**Exemple 30.** Soit  $(\mathcal{K}, >)$  la base partiellement ordonnée définie par  $\mathcal{K} = \{\phi, \neg\phi, \neg\phi \vee \psi, \psi, \chi\}$  avec  $\neg\phi \vee \psi > \chi > \psi$  et  $\phi > \neg\phi$ .

Considérons l'ordre total prolongeant  $>$  défini par :  $\phi > \neg\phi \vee \psi > \chi > \psi > \neg\phi$ . Supposons qu'une mesure de nécessité existe qui soit en accord avec cet ordre total. Dans ce cas, on obtient  $N(\psi) > N(\chi)$ , car  $N(\psi) \geq N(\phi \wedge (\neg\phi \vee \psi)) = \min(N(\phi), N(\neg\phi \vee \psi)) > N(\chi)$  alors que  $\chi > \psi \in (\mathcal{K}, >)$  impose  $N(\chi) > N(\psi)$ . Ce prolongement n'est pas admissible.

Nous supposerons dans la suite que la base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  est consistante pour la sémantique de  $\mathcal{S}_1$ . Sinon, on ne pourra pas interpréter  $(\mathcal{K}, >)$  comme une relation d'ordre partiel vérifiant  $POI$  et  $Q^d$  entre les ensembles de modèles, et donc aucune des bases totalement ordonnées la prolongeant ne sera la restriction d'une relation de nécessité entre les ensembles de modèles.

De plus, même si  $(\mathcal{K}, >)$  est consistante pour la sémantique de  $\mathcal{S}_1$ , tous ses prolongements totaux ne le seront peut-être pas. Par exemple si  $(\mathcal{K}, >) = \{\phi \vee \psi > \phi, \psi > \chi\}$ ,

5. On dit aussi que  $>^i$  est une extension linéaire de  $>$

l'ordre total  $\psi > \chi > \phi \vee \psi > \phi$  viole POI. Donc on se restreindra aux prolongements, dits *admissibles*, qui respectent les axiomes de  $\mathcal{S}_1$ .

Nous allons comparer l'inférence prudente basée sur les prolongements admissibles avec l'inférence définie dans le système  $\mathcal{S}_1$ .

Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée consistante au sens de  $\mathcal{S}_1$ . Soit  $N_i, i = 1 \cdots p$  des mesures de nécessité codant les prolongements admissibles de  $(\mathcal{K}, >)$ . Soit  $\phi, \psi$  deux formules de  $\mathcal{L}$ . Il s'agit de comparer les assertions  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$  et  $\forall i = 1 \cdots p N_i(\phi) > N_i(\psi)$ .

Soit  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$ . On peut distinguer 2 cas :

- $\phi > \psi \in (\mathcal{K}, >)$
- $\phi > \psi$  a été obtenu comme conclusion des règles d'inférence  $RI_1, RI_2$

Pour le second cas, il est facile de prouver que l'inférence prudente de la forme  $\forall i = 1 \cdots p N_i(\phi) > N_i(\psi)$  respecte chacune des règles  $RI_1, RI_2$  :

$RI_1$  : Supposons que  $\forall i = 1 \cdots p N_i(\chi) > N_i(\phi \wedge \psi)$  et  $N_i(\psi) > N_i(\phi \wedge \chi)$ .

Alors  $\forall i = 1 \cdots p, N_i(\chi) > \min(N_i(\phi), N_i(\psi))$  et  $N_i(\psi) > \min(N_i(\phi), N_i(\chi))$ .

Donc  $N_i(\psi \wedge \chi) = \min(N_i(\psi), N_i(\chi)) > \min(N_i(\phi), N_i(\psi), N_i(\chi))$ .

Donc on a  $\forall i = 1 \cdots p, N_i(\psi \wedge \chi) > N_i(\phi)$ .

$RI_2$  : Supposons que  $\forall i = 1 \cdots p N_i(\phi) > N_i(\psi)$  et que  $\phi \vDash \phi'$  et  $\psi' \vDash \psi$ .

Alors  $\forall i = 1 \cdots p, N_i(\phi') \geq N_i(\phi) > N_i(\psi) \geq N_i(\psi')$

Il faut donc se restreindre aux prolongements admissibles sur  $(\mathcal{K}, >)$  pour pouvoir comparer les deux approches.

**Proposition 39.** *Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée consistante pour  $\mathcal{S}_1$ . Soit  $N_i, i = 1 \cdots p$  des mesures de nécessité codant les prolongements admissibles de  $(\mathcal{K}, >)$ . Soit  $\phi, \psi$  deux formules de  $\mathcal{L}$ .*

$$\text{Si } (\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi \text{ alors } \forall i = 1 \cdots p, N_i(\phi) > N_i(\psi)$$

**Preuve de la Proposition 39:** Si  $>^1$  est un prolongement admissible, alors la base ordonnée  $(\mathcal{K}, >^1)$  est consistante. Il est évident que comme elle contient plus de connaissances que  $(\mathcal{K}, >)$ , toute conclusion au sens de  $\mathcal{S}_1$  de  $(\mathcal{K}, >)$  en sera une au sens de  $\mathcal{S}_1$  de  $(\mathcal{K}, >^1)$ . Comme les règles d'inférence de  $\mathcal{S}_1$  sont valides pour l'inférence d'inégalités  $N_1(\phi) > N_1(\psi)$  à partir d'inégalités de même type construites à partir de  $(\mathcal{K}, >^1)$ ,  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$  implique donc  $N_1(\phi) > N_1(\psi)$ .

Ceci est valable pour tous les prolongements admissibles. □

Il reste à étudier la réciproque. Nous avons des raisons de penser qu'elle est vraie. En effet dans la sémantique, l'ordre partiel sur les ensembles d'interprétations induit par la fermeture de  $(\mathcal{K}, >)$  par  $\mathcal{S}_1$  est complètement représentable par la famille d'ordres totaux de type nécessité  $N_i$  qui le prolongent sur tous les sous-ensembles d'interprétations. Donc l'ensemble des conséquences par  $\mathcal{S}_1$  semble être l'intersection des conséquences de la forme  $N_i(\phi) > N_i(\psi)$  pour chaque mesure de nécessité qui prolonge  $(\mathcal{K}, >)$ . C'est une variante du théorème qui dit que les conséquences du système P sont les intersections de toutes les fermetures rationnelles (au sens KLM) de la base conditionnelle initiale.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini deux systèmes d'inférence syntaxique  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Nous avons montré que  $\mathcal{S}_1$  est correct et complet pour la sémantique de certitude relative. Tandis que  $\mathcal{S}_2$  est correct et complet pour la sémantique de certitude préadditive. Cette extension à base d'une approche syntaxique a donné de bons résultats par rapport à l'approche testée dans le chapitre 2 (approche sémantique). Des comparaisons détaillées avec des approches existantes dans la littérature sont données, notamment une comparaison avec la logique MEL [6], le système P [73], la logique de vraisemblance [67] et l'approche de prolongement par des ordres totaux [20, 88].

Dans le chapitre suivant, nous poursuivons l'extension de la logique possibiliste au cas partiellement ordonné. L'extension sera dans un cadre possibiliste où les formules seront associées à des poids symboliques. Les poids numériques de la logique possibiliste standard seront remplacés par des variables qualitatives ce qui permettra de coder l'ordre partiel sur les formules.



## Logique possibiliste symbolique

---

### Sommaire

---

4.1	Logique possibiliste avec des poids symboliques (LPS) . . . . .	86
4.2	Comparaison avec système d'inférence $\mathcal{S}_1$ . . . . .	95
4.3	Application aux CP-nets . . . . .	106
4.4	Conclusion . . . . .	116

---

La logique possibiliste [44, 74] est une approche pour raisonner sous incertitude qui utilise des bases propositionnelles totalement ordonnées. Une extension naturelle de la logique possibiliste a proposé d'utiliser des poids symboliques partiellement ordonnés attachés aux formules [16, 21]. Cette extension sera appelée dans la suite logique possibiliste symbolique ou LPS. Les poids symboliques représentent des valeurs de certitude inconnues sur une échelle totalement ordonnée. Seule la connaissance partielle sur les poids est disponible, sous la forme de contraintes d'inégalité faible. Une proposition similaire plus ancienne a été proposée dans [47]. L'objectif de cette représentation était d'exprimer des dépendances entre des contextes d'une formule possibiliste en utilisant des poids symboliques (ordre certitude).

Cette généralisation de la logique possibiliste diffère des autres approches qui représentent des ensembles de formules équipés d'un ordre partiel dans une configuration de logique conditionnelle [67]. Elle contraste aussi avec une autre ligne de recherche qui considère un ordre partiel sur les poids comme une famille d'ordre totaux, donc considérer une base possibiliste symbolique comme un ensemble de bases possibilistes habituelles (des poids connus sur une échelle totalement ordonnée) [17].

Dans ce chapitre, nous allons revoir l'extension de la logique possibiliste standard au cas partiellement ordonné en utilisant des poids symboliques. Nous commençons par présenter cette extension dans la section 4.1. Ensuite, nous comparons cette logique avec

le système  $\mathcal{S}_1$  en montrant les différentes traductions dans la section 4.2. Une application directe de cette logique dans le traitement des préférences par les réseaux de préférences conditionnelles (CP-nets) est présentée dans la section 4.3.

## 4.1 Logique possibiliste avec des poids symboliques (LPS)

Nous considérons maintenant que l'on ne dispose que de connaissances partielles sur l'ordre entre les poids des formules. Nous utilisons alors des poids symboliques et des contraintes sur ces poids symboliques. Cette approche a été proposée dans [16, 21]. Nous revisitons cette proposition par l'utilisation de contraintes strictes contrairement à la proposition originale. Nous complétons aussi la proposition originale en donnant la preuve que LPS est correcte est complète.

### 4.1.1 Syntaxe de la LPS

Une base possibiliste symbolique est un ensemble de formules pondérées. Mais on considère ici que l'on ne dispose que de connaissances partielles sur l'ordre total entre les poids des formules. On utilise alors des poids symboliques et des contraintes sur ces poids symboliques. Cette idée a été d'abord proposée dans [16]. L'ensemble  $\mathcal{P}$  des poids symboliques  $\alpha_j$  est obtenu à l'aide d'un ensemble fini  $H$  de variables  $a_1, \dots, a_k, \dots$  sur  $]0, 1]$  et de max / min expressions construites sur  $H$  :

$$H \subset \mathcal{P}, 0, 1 \in \mathcal{P},$$

$$\text{et si } \alpha, \beta \in \mathcal{P} \text{ alors } \max(\alpha, \beta), \min(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}.$$

Les éléments de  $H$  sont appelés poids symboliques élémentaires.

Soit  $\Sigma = \{(\phi_i, \alpha_i), i = 1, \dots, n\}$  une base en LPS, avec  $\alpha_i$  une expression max / min construite sur  $H$ . Une formule  $(\phi_i, \alpha_i)$  est toujours interprétée comme  $N(\phi_i) \geq \alpha_i$ .

Soit  $\hat{\Sigma}$  la complétion pondérée de  $\Sigma$  définie comme suit :

**Définition 34.** Soit  $\Sigma$  une base possibiliste. La complétion pondérée de  $\Sigma$  est  $\hat{\Sigma} = \{(\phi, N_\Sigma(\phi)) : \phi \in \Sigma^*\}$  avec  $\Sigma^* = \{\phi : \exists \alpha > 0, (\phi, \alpha) \in \Sigma\}$ .

### 4.1.2 Contraintes entre les poids

La connaissance sur l'ordre entre les poids symboliques est codée par un ensemble  $C = \{\alpha_j > \beta_j, j = 1, \dots, s\}$  de contraintes strictes entre des expressions max / min. Tout ensemble fini de contraintes peut se mettre sous la forme équivalente d'un ensemble de contraintes canoniques :

$$\max_{k=1 \dots n} a_{ik} > \min_{\ell=1 \dots m} b_{i\ell} \quad a_{ik}, b_{i\ell} \in H$$

Ce qui veut dire  $\exists k \in \{1 \dots n\}, \exists \ell \in \{1 \dots m\}, a_{ik} > b_{i\ell}$ .

**Définition 35.**  $C \models \alpha > \beta$  ssi toute valuation des symboles apparaissant dans  $\alpha, \beta$  (sur  $]0, 1[$ ) qui satisfait les contraintes dans  $C$  satisfait aussi  $\alpha > \beta$ .

Dans cet article,  $\alpha > \beta$  veut dire que cette inégalité tient dans toutes les instances de  $\alpha, \beta$  conformes aux contraintes. Comme on s'intéresse seulement à savoir si une formule  $\phi$  est plus certaine qu'une autre  $\psi$ , on se donne des contraintes strictes explicites dans  $C$ .

**Remarque 4.** Dans [21],  $C \models \alpha > \beta$  veut dire  $C \models \alpha \geq \beta$  et  $C \not\models \beta \geq \alpha$  ce qui ressemble à l'ordre de Pareto strict entre vecteurs ( $C \models \alpha > \beta$  si dans toutes les instances de  $\alpha, \beta$  conformes aux contraintes, on a  $\alpha \geq \beta$  et dans au moins une on a  $\alpha > \beta$ ). Avec cette vision, de  $\Sigma = \{(\phi, a), (\psi, b)\}$  et  $C = \emptyset$  on peut inférer  $N_\Sigma(\phi \vee \psi) > N_\Sigma(\phi)$ . En effet, on voit que  $N_\Sigma(\phi) = a, N_\Sigma(\phi \vee \psi) = \max(a, b), C \models \max(a, b) \geq a$  mais pas  $C \models a \geq \max(a, b)$ . Cela revient à définir inégalité stricte comme l'impossibilité d'en prouver une large, ce qui est non-monotone, car on interprète par défaut les contraintes larges par des contraintes strictes. Cela semble problématique, sauf à supposer que des variables distinctes prennent toujours des valeurs distinctes comme dans [16]. Dans notre cadre,  $p > q$  veut dire que l'inégalité tient pour toute instantiation de  $p, q$  en accord avec les contraintes de  $C$  (qui ne contient que ce type de contraintes).

**Remarque 5.** Comme on s'intéresse aux expressions de la forme  $\phi > \psi$ , on se donne des contraintes strictes explicites dans  $C$ . Mais on pourrait bien autoriser également des contraintes larges  $\alpha_i \geq \beta_j$ , en interprétant explicitement  $\beta \geq \alpha$  comme  $(\beta > \alpha) \vee (\beta = \alpha)$  et en définissant  $C \models \alpha \geq \beta$  si toute valuation des symboles apparaissant dans  $\alpha, \beta$  (sur  $]0, 1[$ ) qui satisfait les contraintes dans  $C$  satisfait aussi  $\alpha \geq \beta$ .

### 4.1.3 Sémantique d'une base possibiliste avec poids symboliques

La sémantique d'une base possibiliste avec poids symboliques peut être définie de deux manières, comme dans le cas de la logique possibiliste standard.

La première définition est basée sur la construction d'une distribution de possibilité associée à la base possibiliste. Cette distribution de possibilité est un ensemble d'expressions symboliques de  $\mathcal{P}$ , une pour chaque interprétation.

Cependant, la présence des termes de la forme  $1 - \cdot$  empêche  $\pi_\Sigma(\omega)$  de figurer dans  $\mathcal{P}$ . Alors, dans le cas de la LPS, il est plus commode de représenter une distribution d'impossibilité  $\iota_\Sigma = 1 - \pi_\Sigma$ , notamment  $\forall \omega \in \Omega$  :

$$\iota_\Sigma(\omega) = 1 - \pi_\Sigma(\omega) = \begin{cases} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j, & (\in \mathcal{P}) \\ 0 & \text{if } \Sigma(\omega) = \Sigma^* \end{cases}$$

**Définition 36.** Soit  $\Sigma$  une base possibiliste avec des poids symboliques et  $\omega, \omega' \in \Omega$  deux interprétations. La relation de plausibilité entre interprétations est définie par :

$$\omega >_\Sigma \omega' \text{ ssi } C \models \iota_\Sigma(\omega) < \iota_\Sigma(\omega')$$

$$\omega \geq_{\Sigma} \omega' \text{ ssi } C \models \iota_{\Sigma}(\omega) \leq \iota_{\Sigma}(\omega').$$

La relation  $\geq_{\Sigma}$  est un préordre partiel sur les interprétations et  $>_{\Sigma}$  un ordre partiel. On peut donc exprimer  $N_{\Sigma}(\phi)$  comme

$$N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$$

La relation  $>_{\Sigma}$  permet de construire une fermeture déductive partiellement ordonnée comme suit :

$$\phi \succ_N \psi \text{ ssi } \forall \omega \notin [\phi], \exists \omega' \notin [\psi] \text{ et } \omega' >_{\Sigma} \omega.$$

On a alors :  $\phi \succ_N \psi \text{ ssi } C \models N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi)$ .

On peut aussi définir directement la sémantique d'une base possibiliste symbolique sans passer par la distribution de possibilité  $\pi_{\Sigma}$ . Soit  $\Sigma(\omega)$  l'ensemble des formules satisfaites par l'interprétation  $\omega$ . Cette deuxième sémantique considère les formules violées de plus grande certitude (ordre best out [10]) :

**Définition 37.**  $\omega \triangleright_{\Sigma} \omega' \text{ ssi } \forall (\phi_j, \alpha_j) \in \Sigma \text{ t.q. } \phi_j \notin \Sigma(\omega), \exists (\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma \text{ t.q. } \phi_i \notin \Sigma(\omega') \text{ et } C \models \alpha_i > \alpha_j$

Cette sémantique, équivalente à l'autre quand les poids sont connus, est plus exigeante en LPS car pour avoir  $\omega \triangleright_{\Sigma} \omega'$ ,  $\alpha_i > \alpha_j$  doit être vrai pour toutes les instances des poids symboliques.

**Proposition 40.** *Soit  $\Sigma$  une base possibiliste symbolique avec des contraintes strictes.*

- $\omega \triangleright_{\Sigma} \omega'$  implique  $\omega >_{\Sigma} \omega'$ .
- $\forall \omega \in \overline{[\phi]}, \exists \omega' \in \overline{[\psi]}, \omega' \triangleright_{\Sigma} \omega$  implique  $N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi)$

Où  $N_{\Sigma}(\phi)$  est la max / min expression.

$$N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j \quad (4.1)$$

**Preuve de la Proposition 40:** On suppose que les contraintes dans  $C$  sont strictes.

1.  $\omega \triangleright_{\Sigma} \omega' \text{ ssi } \forall (\phi_j, \alpha_j) \in \Sigma \text{ tel que } \phi_j \in \overline{\Sigma(\omega)}, \text{ il y a } (\phi_i, \alpha_i) \in \Sigma \text{ tel que } \phi_i \in \overline{\Sigma(\omega')} \text{ et } \alpha_i > \alpha_j \text{ pour chaque instanciation des poids élémentaires apparaissant dans } C$ . En plus,

$$C \models \iota_{\Sigma}(\omega) < \iota_{\Sigma}(\omega') \text{ ssi } C \models \left( \max_{j=1, \dots, m} \iota_j(\omega) < \max_{k=1, \dots, \ell} \iota_k(\omega') \right)$$

si et seulement si pour chaque instanciation des poids élémentaires apparaissant dans  $C$ , il ya un indice  $k$  tel que  $\iota_k(\omega') > 0$ , et pour tous  $h$  tel que  $\iota_h(\omega) > 0, \iota_h(\omega) < \iota_k(\omega')$  (les dernières expressions sont les minima de certains termes  $\alpha_i$  ou  $\alpha_j$ )

si et seulement si pour chaque instanciation des poids élémentaires apparaissant dans  $C$  et tous  $j$  tel que  $\omega \not\models \phi_j$ , il y a un indice  $i$  tel que  $\omega' \not\models \phi_i : \alpha_j < \alpha_i$ .

Alors  $\omega \triangleright_{\Sigma} \omega'$  implique  $C \models \iota_{\Sigma}(\omega) < \iota_{\Sigma}(\omega')$ , qui exige que  $\alpha_i > \alpha_j$  pour chaque interprétation des poids élémentaires apparaissant dans  $C$  avec les indices  $i$  et  $j$  fixés, alors que dans ce dernier le choix de  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  dépend de chaque instanciation.

2. De la même façon que le point précédent et la définition de  $N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \notin [\phi]} \iota_{\Sigma}(\omega)$ .

□

Notons que dans l'expression 4.1 de  $N_{\Sigma}(\phi)$ , on peut se restreindre aux  $\Sigma(\omega)$  qui sont maximales pour l'inclusion.<sup>1</sup>

Dans la suite, nous adoptons la sémantique la moins exigeante de la LPS basée sur la comparaison des expressions symboliques  $N_{\Sigma}(\phi)$ .

La sémantique de la logique possibiliste permet de remplacer une conjonction pondérée  $(\bigwedge_i \phi_i, \alpha)$  par l'ensemble de formules  $(\phi_i, \alpha)$ . En effet,  $N(\phi \wedge \psi) = \min(N(\phi), N(\psi))$  donc par le principe de spécificité minimale, on associe le même poids aux formules  $\phi$  et  $\psi$  (mais celui-ci peut être modifié par l'inférence). En conséquence, on peut se restreindre à des bases de clauses pondérées.

#### 4.1.4 Inférence syntaxique en LPS

Une inférence syntaxique peut être définie avec les axiomes et les règles d'inférence suivants :

1. On garde les axiomes de la logique classique avec un degré 1.

- a  $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi), 1)$
- b  $((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)), 1)$
- c  $((\neg\phi) \rightarrow (\neg\psi)) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi), 1)$

2. On utilise les règles d'inférence suivantes :

- Affaiblissement :  $(\phi, \alpha) \vdash_{\pi} (\phi, \min(\alpha, \beta)), \forall \beta$
- Modus Ponens :  $\{(\phi \rightarrow \psi, \alpha), (\phi, \alpha)\} \vdash_{\pi} (\psi, \alpha)$
- Règle de fusion :  $\{(\phi, \alpha), (\phi, \beta)\} \vdash_{\pi} (\phi, \max(\alpha, \beta))$

On en déduit la règle du Modus Ponens Pondéré :

$$\{(\phi \rightarrow \psi, \alpha), (\phi, \beta)\} \vdash_{\pi} (\psi, \min(\alpha, \beta))$$

#### Exemple 31.

$\Sigma = \{(\phi, \alpha), (\neg\phi \vee \psi, \beta), (\neg\psi, \gamma)\}$  On a l'inférence suivante :  $(\Sigma, \mathcal{C}) \vdash_{\pi} (\psi, \min(\alpha, \beta))$ .

---

1. Cela est dû au fait que les poids ont des valeurs symboliques dans un ensemble totalement ordonné, de sorte que  $\max_{j \in A} p_j \leq \max_{j \in B} p_j$ , lorsque  $A \subset B$ . Cette affirmation est fautive si l'on considère  $\mathcal{C}$  comme un ordre partiel strict abstrait sur  $H$ .

Dans le cas de poids connus (numériques par exemple), la logique possibiliste est correcte et complète pour le système d'inférence ci-dessus, ce qui se traduit par l'égalité :

$$N_{\Sigma}(\phi) = \max\{\alpha : \Sigma \vdash_{\pi} (\phi, \alpha)\}$$

Ce système d'inférence permet de définir le degré d'inconsistance d'une base possibiliste syntaxiquement. Le degré d'inconsistance de la base  $\Sigma$ , noté  $Inc(\Sigma)$ , est défini par :

$$Inc(\Sigma) = \max\{\alpha | \Sigma \vdash_{\pi} (\perp, \alpha)\}$$

On peut prouver que :

- $Inc(\Sigma) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi_{\Sigma}(\omega)$
- et que  $N_{\Sigma}(\phi) = Inc(\Sigma \cup (\neg\phi, 1))$ .

Comme en logique possibiliste standard, la fermeture déductive d'une base en LPS s'obtient en calculant  $N_{\Sigma}(\phi)$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{L}$  sous la forme d'une expression symbolique max / min. Si  $\Sigma^*$  dénote l'ensemble des formules apparaissant dans  $\Sigma$ , et  $B$  est un sous-ensemble de  $\Sigma^*$  qui implique  $\phi$ , il est clair que  $\Sigma \vdash_{\pi} (\phi, \min_{\phi_j \in B} \alpha_j)$ , et donc on peut calculer par la déduction syntaxique l'expression valant la force avec laquelle  $\phi$  se déduit de  $\Sigma$  :

$$N_{\Sigma}^+(\phi) = \max_{B \subseteq \Sigma^*, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j. \quad (4.2)$$

On a  $N_{\Sigma}^+(\phi) = N_{\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}}^+(\perp)$ , où le degré d'inconsistance est formalisé par l'expression  $N_{\Sigma}^+(\perp)$ .

Comme dans le cas standard, on définit l'inférence plausible en logique possibiliste avec des poids symboliques.

**Définition 38.**  $\phi$  est une conséquence plausible de  $(\Sigma, C)$ , noté  $(\Sigma, C) \vdash_{PL} \phi$  ssi :

$$C \models N_{\Sigma}(\phi) > Inc(\Sigma) = N_{\Sigma}^+(\perp)$$

**Exemple 31 (suite)** On ajoute  $C = \{\alpha > \gamma, \beta > \gamma\}$ ,  $N_{\Sigma}^+(\psi) = \min(\alpha, \beta)$ ,  $N_{\Sigma}^+(\neg\psi) = \gamma$ , et  $N_{\Sigma}^+(\perp) = \min(\alpha, \beta, \gamma)$ . Comme  $C \models \min(\alpha, \beta) > \gamma$ , on a bien  $N_{\Sigma}^+(\psi) > N_{\Sigma}^+(\perp)$ , et  $\psi$  est une conséquence plausible de  $(\Sigma, C)$ .

**Exemple 32.** Soit  $\Sigma = \{(\phi, \max(\alpha, \beta)), (\neg\phi \vee \psi, \min(\gamma, \delta)), (\neg\psi, \varepsilon)\}$ , avec  $C = \{\alpha > \varepsilon, \gamma > \alpha, \delta > \varepsilon\}$ .  $Inc(\Sigma) = \min(\max(\alpha, \beta), \min(\gamma, \delta), \varepsilon) = \varepsilon$   
 $N_{\Sigma}(\psi) = \min(\max(\alpha, \beta), \min(\gamma, \delta))$ . On a  $C \models (N_{\Sigma}(\psi) > \varepsilon)$ . On a donc  $(\Sigma, C) \vdash_{PL} \psi$ .

### 4.1.5 Preuve de complétude

Avec des poids connus on a, de par le caractère totalement ordonné de l'échelle de poids,

$$N_{\Sigma}(\phi) = \max\{\alpha : (\Sigma_{\alpha}^{\geq})^* \vdash \phi\}$$

où  $\Sigma_{\alpha}^{\geq} = \{(\phi_i, \alpha_i) : \alpha_i \geq \alpha\}$  est la coupe de niveau  $\alpha$  de  $\Sigma$ , et  $\Sigma^*$  est l'ensemble des formules apparaissant dans  $\Sigma$ . L'approche par l'inférence classique sur les coupes rend compte de l'inférence en logique possibiliste, et permet de prouver sa complétude en se ramenant à la complétude de la logique classique. Cette méthode ne marche plus avec des poids symboliques.

Pour prouver la complétude de la version symbolique de la logique possibiliste, il faut montrer l'égalité  $N_{\Sigma}(\phi) = N_{\Sigma}^+(\phi)$ , ou plus précisément que l'expression symbolique de  $N_{\Sigma}^+(\phi)$  obtenue par le système d'axiomes et de règles d'inférence de la LPS peut se ré-écrire avec la même expression que celle de  $N_{\Sigma}(\phi)$  construite sémantiquement. On ne suppose pas de contraintes entre les poids. Dans cette section, nous donnons une preuve de cette complétude :

**Proposition 41.** *La logique possibiliste symbolique est correcte et complète pour le système d'inférence ci-dessus, soit  $N_{\Sigma}(\phi) = N_{\Sigma}^+(\phi)$ .*

Nous allons étudier séparément les cas  $\Sigma^*$  consistante et  $\Sigma^*$  inconsistante.

#### 4.1.5.1 Bases consistantes

On suppose la base  $\Sigma^*$  consistante. Il faut montrer que

$$N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$$

s'écrit aussi

$$N_{\Sigma}^+(\phi) = \max_{B \subseteq \Sigma^*, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j.$$

Notons que :

- Pour  $N_{\Sigma}^+(\phi)$ , on peut se limiter aux sous-bases minimales pour l'inclusion  $B_i, i = 1, n$  de  $\Sigma^*$  qui impliquent  $\phi$  :  $N_{\Sigma}^+(\phi) = \max_{i=1}^n \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j$ .<sup>2</sup>
- Pour  $N_{\Sigma}(\phi)$ , on peut de même se limiter aux instantiations  $\omega$  telles que  $\omega \not\models \phi$  et  $\Sigma(\omega)$  maximal pour l'inclusion :  $N_{\Sigma}(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi, \Sigma(\omega) \text{ maximal}} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j$ .

On peut simplifier l'écriture en remarquant que les sous-bases de la forme  $\Sigma(\omega)$  maximales pour l'inclusion telles que  $\omega \not\models \phi$  sont exactement les sous-bases maximales de  $\Sigma^*$  consistantes avec  $\neg\phi$ . On les notera dans la suite  $M_{\neg\phi} \in \mathcal{M}_{\neg\phi}$ . On peut donc écrire :  $N_{\Sigma}(\phi) = \min_{M_{\neg\phi} \in \mathcal{M}_{\neg\phi}} \max_{\phi_j \notin M_{\neg\phi}} \alpha_j$ .

2. Cela est dû au fait que les poids symboliques sont à valeurs dans un ensemble totalement ordonné, et donc, si  $A \subset B$ ,  $\min_{\phi_j \in B} \alpha_j \leq \min_{\phi_j \in A} \alpha_j$ , affirmation non-valide si on considère  $C$  comme un ordre partiel strict abstrait sur  $H$ .

**Lemme 4.** Si  $\Sigma^*$  est une base minimale pour l'inclusion qui implique  $\phi$  alors  $N_\Sigma(\phi) = N_{\Sigma^*}^+(\phi)$ .

**Preuve :**  $N_{\Sigma^*}^+(\phi) = \min_{\phi_j \in \Sigma^*} \alpha_j$ . Alors,  $\forall \omega, \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j \geq N_{\Sigma^*}^+(\phi)$  donc  $N_\Sigma(\phi) \geq N_{\Sigma^*}^+(\phi)$ .

Réciproquement, si  $\phi_k \in \Sigma^*$ ,  $\Sigma^* \setminus \{\phi_k\} \not\vdash \phi$ . Donc il y a un modèle  $\omega_k$  de  $\Sigma^* \setminus \{\phi_k\}$  qui n'est pas un modèle de  $\phi$ . Donc  $\Sigma(\omega_k) = \Sigma^* \setminus \{\phi_k\}$ . Alors on voit que

$$N_\Sigma(\phi) = \min_{\omega \not\models \phi} \max_{j: \phi_j \notin \Sigma(\omega)} \alpha_j \leq \min_{\phi_k \in \Sigma^*} \alpha_k = N_{\Sigma^*}^+(\phi).$$

**Corollaire 1.** Dans le cas général,  $N_\Sigma(\phi) \geq N_{\Sigma^*}^+(\phi)$ .

**Preuve :** Pour toute sous-base  $B \subset \Sigma$ ,  $N_\Sigma(\phi) \geq N_B(\phi)$ . Si  $B$  est minimal qui implique  $\phi$ ,  $N_B(\phi) = N_B^+(\phi)$ . Or,  $N_{\Sigma^*}^+(\phi) = \max_{i=1}^n N_{B_i}(\phi)$ . Donc  $N_\Sigma(\phi) \geq N_{\Sigma^*}^+(\phi)$ .

On peut réécrire, par distributivité, le degré de nécessité syntaxique, en utilisant les hitting sets minimaux de l'ensemble  $\{B_1, \dots, B_n\}$ , une notion introduite dans la formalisation du raisonnement abductif [83].

**Définition 39.** Soit  $\mathcal{S}$  une collection d'ensembles. Un hitting-set de  $\mathcal{S}$  est un ensemble  $H \subseteq \cup_{B \in \mathcal{S}} B$  tel que  $H \cap B \neq \emptyset$  pour chaque  $B \in \mathcal{S}$ . Un hitting-set  $H$  de  $\mathcal{S}$  est minimal si et seulement si aucun sous-ensemble strict de  $H$  n'est un hitting-set de  $\mathcal{S}$ .

En indiquant tous les hitting sets minimaux (pour l'inclusion)  $H_s$  de  $\{B_1, \dots, B_n\}$  par  $s \in \mathcal{S}$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} N_{\Sigma^*}^+(\phi) &= \max_{i=1}^n \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j. \\ &= \min_{s \in \mathcal{S}} \max_{\phi_j \in H_s} \alpha_j. \end{aligned}$$

Si  $\overline{\Sigma(\omega)}$  est le complémentaire de  $\Sigma(\omega)$  dans  $\Sigma$  :

**Lemme 5.**  $\forall \omega \not\models \phi, \overline{\Sigma(\omega)}$  contient un hitting set de  $\{B_1, \dots, B_n\}$  (soit :  $\forall i, B_i \cap \overline{\Sigma(\omega)} \neq \emptyset$ ).

**Preuve :** Soit  $\omega \not\models \phi$  tel que  $\exists B_i, B_i \cap \overline{\Sigma(\omega)} = \emptyset$ . Alors  $B_i \subseteq \Sigma(\omega)$ . Mais comme  $\Sigma(\omega) \not\vdash \phi$  par hypothèse,  $B_i \not\vdash \phi$  de même. Ce qui contredit le fait que  $B_i \vdash \phi$ .

En particulier ce résultat est vrai pour les  $\overline{\Sigma(\omega)}$  minimaux pour l'inclusion. On obtiendra donc la complétude si on montre que :

**Lemme 6.** Le complémentaire de tout hitting set minimal  $H_s$  de  $\{B_1, \dots, B_n\}$  est une sous-base maximale de  $\Sigma^*$  consistante avec  $\neg \phi$  (appelée  $M_{\neg \phi}$  ci-dessus).



**Preuve :** Soit un hitting set minimal  $H_s = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  de  $\{B_1, \dots, B_n\}$  avec  $\phi_i \in B_i$ . Considérons l'ensemble  $\overline{H_s}$ . Cet ensemble est consistant, et il est consistant avec  $\neg\phi$ . Car sinon,  $\overline{H_s} \vdash \phi$  et donc  $\exists B_i \subseteq \overline{H_s}$  (tel que  $B_i \vdash \phi$ ). C'est impossible car par définition de  $H_s$ ,  $H_s \cap B_i \neq \emptyset$ . Donc  $\overline{H_s}$  est consistant avec  $\neg\phi$ . De plus  $\overline{H_s}$  est bien maximal consistant avec  $\neg\phi$ . En effet, si on ajoute  $\phi_i \in H_s$  à  $\overline{H_s}$ , alors  $H_s \setminus \{\phi_i\}$  n'est plus un hitting set. Il existe donc  $B_j$  tel que  $H_s \setminus \{\phi_i\} \cap B_j = \emptyset$ . Alors  $B_j \subseteq \overline{H_s} \cup \{\phi_i\}$  et donc  $\overline{H_s} \cup \{\phi_i\} \vdash \phi$  ce qui prouve que  $\overline{H_s} \cup \{\phi_i\}$  n'est pas consistant avec  $\neg\phi$ . Donc  $\exists M_{\neg\phi} = \overline{H_s}$ .

**Corollaire 2.**  $N_\Sigma(\phi) \leq N_\Sigma^+(\phi)$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} N_\Sigma^+(\phi) &= \min_{s \in \mathcal{S}} \max_{\phi_j \in H_s} \alpha_j \\ &= \min_{M_{\neg\phi} = \overline{H_s}, s \in \mathcal{S}} \max_{\phi_j \notin M_{\neg\phi}} \alpha_j \\ &\geq \min_{M_{\neg\phi} \in \mathcal{M}_{\neg\phi}} \max_{\phi_j \notin M_{\neg\phi}} \alpha_j = N_\Sigma(\phi) \end{aligned}$$

En fait, il y a une bijection entre l'ensemble des sous-bases maximales de  $\Sigma^*$  consistantes avec  $\neg\phi$  et l'ensemble des hitting sets minimaux  $H_s = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  de  $\{B_1, \dots, B_n\}$ , à savoir  $\mathcal{M}_{\neg\phi} = \{\overline{H_s}, s \in \mathcal{S}\}$

**Corollaire 3.** Pour toute sous-base maximale de  $\Sigma^*$  consistante avec  $\neg\phi$ ,  $M_{\neg\phi}$ , il y a un hitting set minimal  $H_s$  de  $\{B_1, \dots, B_n\}$  tel que  $M_{\neg\phi} = \overline{H_s}$

**Preuve :**  $\overline{M_{\neg\phi}}$  est un sous-ensemble minimal de la forme  $\overline{\Sigma(\omega)}$  avec  $\omega \models \neg\phi$ . Par le Lemme 5,  $\overline{\Sigma(\omega)}$  contient un hitting set minimal  $H_s$ . Par le Lemme 6, son complémentaire est une sous-base maximale de  $\Sigma^*$  consistante avec  $\neg\phi$ . Ce ne peut donc être que  $M_{\neg\phi}$ .

#### 4.1.5.2 Cas des bases inconsistantes

Si la base  $\Sigma^*$  est inconsistante, on a les résultats suivants :

- Soit  $I_1, \dots, I_p$  les sous bases minimales inconsistantes de  $\Sigma^*$ . Alors le degré d'inconsistance de  $\Sigma$  est  $Inc(\Sigma) = \max_{k=1}^p \min_{\phi_j \in I_k} \alpha_j$ , et  $N_\Sigma^+(\phi) = \max(Inc(\Sigma), \max_{i=1}^n \min_{\phi_j \in B_i} \alpha_j)$ , les  $B_i$  étant les bases minimales (consistantes ou pas) qui impliquent  $\phi$ .
- On remarque que  $N_\Sigma^+(\phi) \geq Inc(\Sigma)$  mais on n'a jamais d'inégalité stricte si on n'en pose pas. On peut avoir une inclusion stricte de l'ensemble des poids de  $N_\Sigma^+(\phi)$  dans l'ensemble des poids de  $Inc(\Sigma)$ .
- On garde la même définition pour  $N_\Sigma(\phi)$  que dans le cas consistant, mais ici,  $\forall \omega, \Sigma(\omega) \subset \Sigma$  (car  $\Sigma(\omega)$  est consistant).

Si  $\Sigma^*$  est inconsistante, alors parmi les bases minimales qui impliquent  $\phi$  certaines peuvent être inconsistantes. Mais certaines bases inconsistantes  $I_i$  peuvent ne pas figurer parmi elles. Par exemple, si  $\Sigma = \{(\phi, a), (\neg\phi, b)\}$  la seule base minimale qui implique  $\phi$  est  $\{\phi\}$ . On peut voir ici que

$$\begin{aligned} N_{\Sigma}^+(\phi) &= \max_{B \subseteq \Sigma^*, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j \\ &= \max(\min(a, b), a) = a = N_{\Sigma}(\phi). \end{aligned}$$

De même,  $N_{\Sigma}^+(\neg\phi) = b$ . On a donc  $N_{\Sigma}^+(\perp) = \min(a, b) \leq N_{\Sigma}^+(\phi)$  et  $N_{\Sigma}^+(\perp) \leq N_{\Sigma}^+(\neg\phi)$  seulement. On a bien  $\{a\} \subset \{a, b\}$  mais on ne peut en conclure que  $N_{\Sigma}^+(\perp) < N_{\Sigma}^+(\neg\phi)$ .

Pour la preuve de complétude :

- Le Lemme 4 peut être reconduit, mais alors  $\Sigma^*$  est une base minimale inconsistante qui implique  $\phi$ , aucune de ses sous-bases ne l'impliquant.
- Le corollaire 1 est valide en notant que minimal n'exclut pas inconsistant.
- Pour le Lemme 5,  $\Sigma(\omega)$  est toujours consistant. Donc si  $B_i$  est inconsistant, on ne peut avoir  $B_i \subset \Sigma(\omega)$ .
- La preuve du Lemme 5 peut être reconduite telle quelle, car les  $\overline{H}_s$  sont bien consistants, comme les  $M_{\neg\phi}$ .

Donc la preuve de complétude résiste à l'épreuve de l'inconsistance de la base. On peut aussi montrer que le raisonnement par réfutation est valide :

**Proposition 42.**  $N_{\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}}(\perp) = N_{\Sigma}(\phi)$ .

**Preuve :** Il suffit de remarquer qu'une base minimale inconsistante de  $[\Sigma \cup \{(\neg\phi, 1)\}]^*$  est soit une base minimale inconsistante de  $\Sigma^*$ , soit une base minimale inconsistante  $B$  qui contient  $\neg\phi$  donc  $B \setminus \{\neg\phi\}$  est une base minimale consistante qui implique  $\phi$ .

#### 4.1.6 Fermeture déductive ordonnée d'une base possibiliste avec poids symboliques

On peut remarquer que l'inférence en LPS permet juste de déduire des formules avec des poids symboliques  $N_{\Sigma}(\phi)$  et non pas des couples de la forme  $\phi > \psi$  comme on a vu avec les systèmes d'inférences  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Mais on peut exploiter  $C$  pour comparer ces poids  $N_{\Sigma}(\phi)$  et conclure  $\phi > \psi$  le cas échéant.

Formellement, soit  $(\Sigma, C)$  une base possibiliste avec des poids symboliques, soit  $\phi$  et  $\psi$  deux formules. On définit :

**Définition 40.**  $(\Sigma, \mathcal{C})$  implique que  $\phi$  est plus certain que  $\psi$  (notée par  $(\Sigma, \mathcal{C}) \vdash_{\pi} \phi > \psi$ ) ssi

$$C \models N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi)$$

**Exemple 33.** Soit  $\Sigma = \{(\phi, \alpha), (\neg\phi \vee \psi, \beta), (\neg\phi, \gamma), (\neg\psi, \varepsilon)\}$  et  $C = \{\alpha > \beta, \beta > \gamma, \beta > \varepsilon\}$ .

On a  $N_{\Sigma}(\psi) = \min(\alpha, \beta) = \beta$  et  $N_{\Sigma}(\phi) = \alpha$ .

Donc  $(\Sigma, \mathcal{C}) \vdash_{\pi} \phi > \psi$ .

En conséquence on peut voir la fermeture déductive d'une base possibiliste symbolique comme un ordre partiel sur le langage  $\mathcal{L}$  et la comparer avec le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  sur des bases partiellement ordonnées, pourvu qu'on puisse traduire ces dernières en LPS.

Les auteurs dans [18, 19, 88] ont proposé de coder une base possibiliste partiellement ordonnée par une famille de bases possibilistes totalement ordonnées admissibles (voir section 3.5). Ils ont montré que :

$$(\Sigma, \mathcal{C}) \vdash_{\pi} \phi > \psi \text{ ssi } (\Sigma, >^i) \vdash_{\pi} N_{\Sigma}^i(\phi) > N_{\Sigma}^i(\psi) \forall i$$

où  $(\Sigma, >^i)$  est une base totalement ordonnée admissible. Mais, en pratique, il semble difficile de calculer cette inférence en utilisant toutes les bases  $(\Sigma, >^i)$ .

On exclut la comparaison avec le système d'inférence  $\mathcal{S}_2$  puisque il est clair que le système  $\mathcal{S}_2$  est différent de la LPS. Dans le cas où  $\mathcal{C}$  la base de contraintes sur les poids symboliques est vide, on ne peut rien déduire tandis que avec le système  $\mathcal{S}_2$  on peut grâce à la règle  $RI_{13}$  (voir section 3.1.4). Le constat est le même par rapport à la logique classique.

## 4.2 Comparaison avec système d'inférence $\mathcal{S}_1$

Dans cette section, nous allons comparer le système  $\mathcal{S}_1$  avec l'approche possibiliste symbolique. Dans la configuration possibiliste symbolique, nous modélisons l'affirmation " $\phi$  plus certain que  $\psi$ " par des paires  $(\phi, \alpha), (\psi, \beta)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des degrés de certitude symboliques minimaux, tels que  $\alpha > \beta$ .

### 4.2.1 Traduction d'une base partiellement ordonnée en une base possibiliste avec poids symboliques

Nous définissons tout d'abord la traduction d'une base partiellement ordonnée en une base possibiliste avec poids symboliques. Une base partiellement ordonnée est codée par un ensemble de paires de la forme  $\phi > \psi \in \mathcal{L}_{>}$ . Nous devons donc tout d'abord attacher des poids symboliques aux formules puis écrire des contraintes sur ces poids induites par

la relation  $>$ .

Formellement, soit  $\eta : \mathcal{K} \rightarrow H$  une fonction injective qui associe à chaque formule de  $\mathcal{K}$  un poids symbolique élémentaire (une variable sur  $]0, 1[$ ) c.à.d pour chaque formule un poids différent est attribué.

On construit un ensemble de contraintes  $C$  tel que  $a > b$  ssi  $a = \eta(\phi), b = \eta(\psi)$  et  $\phi > \psi$ . Formellement :

**Définition 41.** Une base partiellement ordonnée,  $(\mathcal{K}, >)$  est traduite par la base  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$ <sup>3</sup> en LPS :

- $\Sigma_{\mathcal{K}} = \{(\phi, \eta(\phi)), \phi \in \mathcal{K}\}$
- $C_{\mathcal{K}} = \{a > b : (\phi, a), (\psi, b) \in \Sigma_{\mathcal{K}} \text{ et } \phi > \psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}\}$ .

**Remarque 6.** Notons que  $C_{\mathcal{K}}$  définit un ordre partiel entre les poids. Mais ces poids expriment de la connaissance incomplète sur un ordre total obtenu en leur affectant une valeur dans  $]0, 1[$ .

Soit  $(\mathcal{K}, >)$  une base partiellement ordonnée et  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$  sa traduction (selon la définition 41). L'exemple suivant illustre le fait que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi \Rightarrow (\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}}) \vdash_{\pi} \phi > \psi$  peut ne pas tenir si  $(\mathcal{K}, >)$  est rc-inconsistante (définition 31).

**Exemple 34.** Soit  $\mathcal{K} = \{\neg\phi, \neg\psi, \neg\phi \vee \psi\}$  avec  $\neg\phi > \neg\phi \vee \psi$  et  $\neg\psi > \neg\phi \vee \psi$ . On traduit  $(\mathcal{K}, >)$  par  $\Sigma_{\mathcal{K}} = \{(\neg\phi \vee \psi, a), (\neg\phi, b), (\neg\psi, c)\}$  et  $C_{\mathcal{K}} = \{c > a, b > a\}$ . On pourra noter que la base  $(\mathcal{K}, >)$  est inconsistante pour la sémantique de certitude relative, mais  $\Sigma_{\mathcal{K}}$  ne l'est pas pour la logique possibiliste. La logique possibiliste va corriger le poids de  $\neg\phi \vee \psi$ , parce que  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\neg\phi \vee \psi) = b$ . Donc, nous n'avons pas  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}}) \vdash_{\pi} \neg\phi > \neg\phi \vee \psi$ .

Cependant, ce type de codage peut également ajouter des informations non désirées, comme illustré par l'exemple suivant.

**Exemple 35.** Soit  $\mathcal{K} = \{\neg\phi \vee \psi, \phi \wedge \psi\}$  avec  $\neg\phi \vee \psi > \phi \wedge \psi$ . Posons  $a = \eta(\neg\phi \vee \psi)$  et  $b = \eta(\phi \wedge \psi)$ . On obtient  $\Sigma_{\mathcal{K}} = \{(\neg\phi \vee \psi, a), (\phi \wedge \psi, b)\}$  et  $C_{\mathcal{K}} = \{a > b\}$ . En logique possibiliste, on peut remplacer  $(\phi \wedge \psi, b)$  par  $(\phi, b), (\psi, b)$ . On obtient donc  $\Sigma = \{(\neg\phi \vee \psi, a), (\phi, b), (\psi, b)\}$  qui est sémantiquement équivalente à  $\Sigma_{\mathcal{K}}$ . Clairement,  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\neg\phi \vee \psi) > N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\neg\phi)$  et  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\neg\phi \vee \psi) > N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\psi)$ . Et cependant de  $\neg\phi \vee \psi > \phi \wedge \psi$  on ne peut pas déduire  $\neg\phi \vee \psi > \phi$  ni  $\neg\phi \vee \psi > \psi$ , ni dans  $\mathcal{S}_1$ , ni dans  $\mathcal{S}_2$ . En fait, la logique possibiliste s'appuyant sur le principe de minimum de spécificité (de moindre information), elle interprète  $\Sigma_{\mathcal{K}}$  et  $\Sigma$  par la même distribution de possibilité qui est telle que  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\phi \wedge \psi) = N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\phi) = N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\psi)$ . C'est donc parce que par défaut la logique possibiliste suppose que  $\phi$  et  $\psi$  ont le même degré de certitude que  $\phi \wedge \psi$  qu'on peut parvenir à ces conclusions. Ni  $\mathcal{S}_1$ , ni  $\mathcal{S}_2$  car ils n'utilisent le principe de moindre information.

3. On devrait en fait noter la base possibiliste obtenue par  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{B}_{\mathcal{K}}})$ .

Dans l'objectif d'une comparaison avec le système  $\mathcal{S}_1$ , pour avoir une traduction fidèle en logique possibiliste, on doit donc se restreindre à des cas particuliers de bases partiellement ordonnées  $(\mathcal{K}, >)$  où on n'a pas de conjonctions dominées (conjonctions dans la partie droite d'une formule de  $\mathcal{L}_{>}$ ).

D'autre part, sous la sémantique de certitude relative, on a  $\phi \wedge \chi > \psi \iff \phi > \psi$  et  $\chi > \psi$  (propriétés POI et  $N^d$ ). Donc, on peut toujours se ramener à des contraintes  $\phi > \psi$  où  $\phi$  est une clause.

Remarquons aussi que si pour une formule consistante  $\phi$ ,  $(\phi, \alpha) \in \Sigma_{\mathcal{K}}$ , cela implique  $\alpha > 0$  donc  $\phi > \perp$ , ce qui n'est pas non plus précisé dans  $(\mathcal{K}, >)$ . Donc cela implique que toute formule apparaissant dans  $(\mathcal{K}, >)$  est interprétée comme une croyance, si faible soit-elle. Si on affirme  $\phi > \psi$  c'est que  $\psi$  est présente dans la base de croyances de l'agent. Cette remarque interdit donc une base partiellement ordonnée de la forme  $\phi > \psi, \phi > \neg\psi, \psi > \perp, \neg\psi > \perp$  pour  $\mathcal{S}_1$ . En effet, l'affirmation de  $\phi > \psi$  (resp.  $\phi > \neg\psi$ ) produit par la règle  $RI_{10}$  la formule  $\psi > \perp$  (resp.  $\neg\psi > \perp$ ). Et la présence de  $\psi > \perp, \neg\psi > \perp$  produit une contradiction.

Les remarques ci-dessus conduisent à considérer les restrictions suivantes :

1. On ne considère que des bases  $(\mathcal{K}, >)$  qui sont  $\mathcal{S}_1$  rc-consistantes.
2. On suppose que les formules de la base  $\mathcal{K}$  sont des clauses.
3. On suppose que toutes les formules  $\phi$  de  $\mathcal{K}$  sont telles que  $\phi > \perp$  (i.e.  $\inf(\mathcal{K}) = \{\perp\}$ ).

On peut donc proposer le résultat suivant :

**Proposition 43.** *Si  $(\mathcal{K}, >)$  est consistante pour la sémantique de certitude relative et ne contient que des clauses et que  $\inf(\mathcal{K}) = \{\perp\}$  alors  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi \iff (\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}}) \vdash_{\pi} \phi > \psi$ .*

**Preuve de la Proposition 43:**

Si  $(\mathcal{K}, >)$  est consistante pour la sémantique de certitude relative, l'ordre partiel sur  $\mathcal{K}$  est un fragment de l'ordre partiel résultant sur le langage. Cet ordre partiel satisfait  $Q^d$  et POI, donc est prolongeable par un ordre de type nécessité. Dans ce cas, l'ordre sur les formules de  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$  ne sera pas altéré par la déduction (sinon on contredirait dans  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$  une formule de  $\mathcal{L}_{>}$  dans  $(\mathcal{K}, >)$ ). Donc on peut supposer que  $\eta(\phi) = N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(\phi)$  où  $\phi$  est une clause. On va montrer que les axiomes et règles d'inférence de  $\mathcal{S}_1$  sont validés par la logique possibiliste LPS.

- $ax_1$  : la traduction de  $\top > \perp$  est  $(\top, 1)$ , axiome de la LPS.
- On ne peut pas appliquer  $RI_1$  car  $\mathcal{K}$  ne contient que des clauses. On peut appliquer la règle plus faible  $RI_5$  car  $\Sigma = \{(\phi, a), (\psi, b), (\chi, c)\}$  avec  $a > c$  et  $b > c$ , implique bien  $N_{\Sigma}(\phi \wedge \psi) = \min(a, b) > N_{\Sigma}(\chi) = c$ .

- Pour  $RI_3$ , on procède de même.

□

L'inverse est faux comme illustré par :

**Exemple 36.** Soit  $\mathcal{K} = \{p, q, r\}$  avec  $\{p > \perp, q > \perp, r > \perp, p > q, p > r\}$  pour des atomes  $p, q, r$ . La traduction en base possibiliste donne  $\Sigma_{\mathcal{K}} = \{(p, a), (q, b), (r, c)\}$  avec des poids symboliques et  $C_{\mathcal{K}} = \{a > b, a > c\}$ . On a  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(q \vee r) \geq \max(c, b)$  et  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(q \vee r) = \max(c, b)$  par le minimum de spécificité. Donc on a  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}}) \vdash_{\pi} (p > q \vee r)$ . Mais on ne peut pas en déduire  $p > q \vee r$ , à l'aide du système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ .

Les exemples 35 et 36 montrent que la LPS peut parfois déduire des conclusions non-valides dans  $\mathcal{S}_1$ . Néanmoins il est facile de voir que si les clauses  $\phi, \psi$  sont dans  $\mathcal{K}$ , on a  $(\phi, a), (\psi, b) \in \Sigma_{\mathcal{K}}$  avec  $a > b$  seulement si  $\phi > \psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ .

Si dans une formule  $\phi > \psi \in (\mathcal{K}, >)$ ,  $\psi$  est une conjonction plutôt qu'une clause, une traduction systématique de  $\phi > \psi$  en  $\{(\phi, a), (\psi, b)\}$  avec  $a > b$  peut empêcher des conséquences valides dans le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ , obtenues par exemple par la règle  $RI_1$ , d'être déduites en LPS avec la traduction d'une base partiellement ordonnée proposée ci-dessus.

**Exemple 37.** Soit  $\mathcal{K} = \{p, q, p \wedge r, q \wedge r\}$  avec  $\{p > r \wedge q > \perp, q > p \wedge r > \perp\}$ . Par  $RI_1$  on déduit  $p \wedge q > r$ . La traduction en base possibiliste donne  $\Sigma_{\mathcal{K}} = \{(p, a), (r \wedge q, b), (q, c), (p \wedge r, d)\}$  avec  $C_{\mathcal{K}} = \{a > b, c > d\}$ . On peut vérifier que :

- $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p) = \max(a, d); N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(q) = \max(b, c)$ .
- Donc  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p \wedge q) = \min(\max(a, d), \max(b, c))$  et  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(r) = \max(b, d)$

Mais on n'a pas  $\min(\max(a, d), \max(b, c)) > \max(b, d)$  donc pas  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}}) \vdash_{\pi} (p \wedge q > r)$ . En fait on a seulement  $\min(\max(a, d), \max(b, c)) \geq \max(b, d)$ .

Par exemple, avec  $a = 0.6, b = 0.4, c = 0.9, d = 0.8$ , on trouve  $\min(\max(a, d), \max(b, c)) = \max(b, d)$ . Mais on a alors  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p \wedge r) > N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p)$ , ce qui est impossible.

On peut donc ajouter les contraintes  $a \geq d$  et  $c \geq b$  pour être en accord avec l'inférence classique. Alors,  $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p \wedge q) = \min(a, c)$ , mais on ne peut conclure que  $\min(a, c) \geq \max(b, d)$ . On a  $\min(a, c) = \max(b, d)$  si et seulement si  $a = d$  ou  $b = c$ , mais cela revient à écrire par exemple  $c > a = d > b$ , soit :

$N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(q) > N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p \wedge r) = N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p) > N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(q \wedge r)$ , soit encore  $c > \min(a, e) = a > \min(c, e)$  en posant  $e = N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(r)$ . C'est impossible. En particulier on ne peut pas remplacer  $e$  par  $\max(b, d)$ . On voit donc que l'utilisation de 4 variables  $a, b, c, d$  dans la traduction introduit des degrés de liberté supplémentaires dans la base en LPS, non présents dans  $(\mathcal{K}, >)$ .

En effet on a les contraintes non prises en compte :  $b = \min(c, e)$ , et  $d = \min(a, e)$  qui exploitent l'axiome des mesures de nécessité ! De plus, comme  $a > \min(c, e)$  (car  $p > q \wedge r$ ) et  $c > \min(a, e)$  (car  $q > p \wedge r$ ), on a  $\min(a, c) > e$  (ce qui implique  $a > d$  et  $c > b$ ). Si on ajoute ces contraintes on a :

- $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p \wedge q) = \min(a, c)$
- $N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(r) = \max(b, d) = \max(\min(a, e), \min(c, e)) = e < N_{\Sigma_{\mathcal{K}}}(p \wedge q)$

Ce qui permet de retrouver l'inférence de  $\mathcal{S}_1$  dans la LPS.

L'exemple ci-dessus montre comment la traduction de  $(\mathcal{K}, >)$  pourrait être étendue au cas de formules quelconques  $\phi > \psi$  :

- Mettre  $\phi$  et  $\psi$  en forme normale conjonctive :  $\wedge_i \phi_i$ , et  $\wedge_j \psi_j$ , où  $\phi_i$  et  $\psi_j$  sont des clauses.
- Remplacer  $\phi > \psi$  par  $\{\phi_i > \psi\}_i$ .
- Traduire chaque  $\phi_i > \psi$  en LPS comme  $\{(\phi_i, a_i), (\psi_j, b_j), \forall j\}$  en posant comme contrainte  $a_i > \min_j b_j$ .

C'est un problème ouvert de savoir si ce serait suffisant pour assurer l'inverse de la proposition 43. Il est peu probable que ce soit vrai, en raison de la présence du principe de minimum de spécificité à l'œuvre dans SPL.

## 4.2.2 Traduction d'une base possibiliste avec des poids symboliques en une base partiellement ordonnée

Il s'agit maintenant de traduire une base possibiliste avec des contraintes sur les poids symboliques en un ensemble de formules partiellement ordonné. On sait qu'une formule possibiliste  $(\phi, \alpha)$  est interprétée comme  $N(\phi) \geq \alpha$  avec  $N$  une mesure de nécessité. Considérons deux formules possibilistes  $(\phi, \alpha)$  et  $(\psi, \beta)$  avec  $\alpha > \beta \in C$ . Une idée naturelle est de poser que  $\phi > \psi$ .

Cependant il se peut que dans la fermeture déductive, on trouve  $N_{\Sigma}(\psi) = \beta'$  avec  $\beta' > \alpha'$ . Avant de faire la traduction, il faut donc s'assurer que les formules de  $\Sigma$  sont affectées du poids maximal.

**Définition 42.** Soit  $(\Sigma, C)$  une base possibiliste qui ne contient que des clauses, et  $C$  l'ensemble des contraintes sur les poids symboliques. La base symbolique induite par  $(\Sigma, C)$  définie par :

$$\hat{\Sigma} = \{(\phi, N_{\Sigma}(\phi)) : \phi \in \Sigma^*\}$$

( $N_{\Sigma}(\phi)$  est calculé par l'équation (4.1)) est appelée la complétion pondérée de  $(\Sigma, C)$  avec  $\Sigma^* = \{\phi : \exists \alpha > 0, (\phi, \alpha) \in \Sigma\}$ .

Nous pouvons donc construire des paires dans  $(\mathcal{K}, >)$  en comparant les poids des formules de  $\hat{\Sigma}$ , à l'aide des contraintes de  $C$ . Des formules particulières de  $\hat{\Sigma}$  sont les formules  $(\phi, \alpha)$  telles que  $C \models \alpha > Inc(\Sigma)$ . Seules ces formules doivent apparaître dans  $\mathcal{K}$ . Une telle formule peut se traduire par la paire  $(\phi > \perp)$ . On ajoutera donc à  $(\mathcal{K}, >)$  les contraintes de domination stricte entre les formules  $\phi$  de  $\Sigma^*$ , ainsi que  $\phi > \perp$ , si  $C \models N_{\Sigma}(\phi) > Inc(\Sigma)$ .



**Définition 43.** Soit  $(\Sigma, C)$  une base possibiliste avec des contraintes sur les poids symboliques. On construit  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$  de la manière suivante :

- $\mathcal{K} = \{\phi \in \Sigma^* : N_\Sigma(\phi) > Inc(\Sigma)\} \cup \{\perp\}$
- L'ordre partiel strict sur  $\mathcal{K}$  est défini par  $\{\phi > \psi : (\phi, p) \in \hat{\Sigma}, (\psi, q) \in \hat{\Sigma}, C \models p > q > Inc(\Sigma)\} \cup \{\phi > \perp : \phi \in \Sigma^* \text{ et } C \models (N_\Sigma(\phi) > Inc(\Sigma))\}$ .

Notons que les bases partiellement ordonnées  $(\mathcal{K}, >)$  ne contiennent pas toujours les déclarations de la forme  $\phi > \perp$ , tandis que les bases partiellement ordonnées de la forme  $(\mathcal{K}, >)_\Sigma$  contiendront toujours ce genre de formules.

**Exemple 38.** Soit  $\Sigma = \{(p, a), (\neg q, c), (\neg p, d), (q, e), (\neg p \vee q, b)\}$  avec  $C = \{a > b, b > d, d > e, a > c, c > e\}$ .

- $Inc(\Sigma) = N_\Sigma(\perp) = \max(d, \min(b, c))$
- $N_\Sigma(q) = \max(e, \min(a, b)) = b$ . Donc  $(q, b) \in \hat{\Sigma}$
- $N_\Sigma(\neg p) = \max(d, \min(b, c))$ . Donc  $(\neg p, \max(d, \min(b, c))) \in \hat{\Sigma}$ .

Donc  $\hat{\Sigma} = \{(\neg p, \max(d, \min(b, c))), (p, a), (\neg q, c), (\neg p \vee q, b), (q, b)\}$  avec  $C \models a > Inc(\Sigma)$ . Seul  $p$  échappe sûrement à l'inconsistance. On a donc  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$  défini par  $\{(p > \perp)\}$ .

On voit donc que la présence d'inconsistance dans la base  $(\Sigma, C)$  va empêcher une traduction fidèle de  $(\Sigma, C)$  en  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$ . Dans la suite on ne considère que des bases  $(\Sigma, C)$  où  $\Sigma^*$  est consistante. Un point important à noter est que puisque  $\Sigma^*$  est supposée consistante, on a pour sa traduction  $\mathcal{K}_{(\Sigma, C)} = \Sigma^*$  qui sera consistante aussi. D'autre part, comme  $N_\Sigma$  définit un ordre partiel sur le langage compatible avec les axiomes de  $\mathcal{S}_1$ , la traduction de  $\hat{\Sigma}$  sous forme ordinaire en  $(\mathcal{K}, >)$  sera consistante au sens de  $\mathcal{S}_1$  (re-consistante).

Partant d'une base possibiliste avec des poids symboliques, nous allons comparer l'inférence possibiliste de relations  $N_\Sigma(\phi) > N_\Sigma(\psi)$  entre formules (Définition 40) et la fermeture de la base partiellement ordonnée associée. Nous allons considérer successivement la fermeture par les coupures et la fermeture par les systèmes d'inférence  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ .

**Proposition 44.** Soit  $(\Sigma, C)$  une base possibiliste avec des poids symboliques consistante (telle que  $Inc(\Sigma) = 0$ ), et  $(\mathcal{K}, >)$ <sup>4</sup> sa traduction (selon la définition 43). Soit  $\psi \in \mathcal{K}$ , on a :

$$(\Sigma, C) \vdash_\pi \phi > \psi \text{ ssi } (\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi.$$

4. strictement parlant  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$



**Preuve de la Proposition 44:**

$\Rightarrow$ ) On suppose que  $(\Sigma, C) \vdash_{\pi} \phi > \psi$ , cela signifie que  $C \models (N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi))$ . posons  $\alpha = N_{\Sigma}(\phi)$  et  $\beta = N_{\Sigma}(\psi)$ . On a  $\alpha > \beta > 0$ .  $\mathcal{K}\psi\psi = \{\psi \in \mathcal{K} : \psi > \psi\}$  et  $\psi > \psi$  implique que  $(\psi, \gamma) \in \hat{\Sigma}$  et  $C \models \gamma > \beta$ .

Comme  $\beta > 0$ ,  $\mathcal{K}\psi\psi$  est un ensemble classiquement consistant de formules. D'autre part,  $\mathcal{K}\psi\psi$  contient  $(\Sigma_{\alpha}^{>})^*$  (où  $\Sigma_{\alpha}^{>} = \{(\phi_j, \alpha_j) : \alpha_j > \alpha\}$ ) et  $(\Sigma_{\alpha}^{>})^* \vdash \phi$ . Donc  $\mathcal{K}\psi\psi \vdash \phi$ .

$\Leftarrow$ ) Réciproquement,  $\mathcal{K}\psi\psi$  est consistante et si  $\mathcal{K}\psi\psi \vdash \phi$ , on a  $\mathcal{K}\psi\psi = \{\psi_i \in \mathcal{K} : \psi_i > \psi\} \vdash \phi$ . Donc :  $(\psi_i, \gamma_i), (\psi, \beta) \in \hat{\Sigma}$  et  $C \models \gamma_i > \beta$ , et  $C \models \min(\gamma_i) > \beta$ . Clairement,  $Inc(\Sigma \cup (\neg\psi, 1)) = \beta$  et  $N_{\Sigma}(\phi) \geq \min(\gamma_i) > \beta = N_{\Sigma}(\psi)$ . Donc  $(\Sigma, C) \vdash_{\pi} \phi > \psi$ . □

**Remarque 7.** *On n'a pas de résultat analogue si l'on part d'une base de clauses partiellement ordonnée au lieu de sa complétion pondérée. Dans le cas de bases partiellement ordonnées, les comparaisons initiales sont des contraintes respectées dans la fermeture alors qu'en logique possibiliste les contraintes sont de la forme  $N(\phi) \geq \alpha$ , et les poids peuvent être modifiés dans la complétion pondérée.*

On considère maintenant l'inférence syntaxique dans le système  $\mathcal{S}_1$  pour la traduction d'une base en LPS.

On peut montrer que cette inférence est moins productive que l'inférence possibiliste.

**Proposition 45.** *Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  base possibiliste consistante avec des poids symboliques et  $(\mathcal{K}, >)$  sa traduction (selon la définition 43).*

$$(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi \Rightarrow (\Sigma, \mathcal{C}) \vdash_{\pi} \phi > \psi$$

**Preuve de la Proposition 45:**

On suppose que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$ . On raisonne par induction sur le nombre d'étapes en utilisant les règles d'inférence du système  $\mathcal{S}_1$ ,  $RI_1$ ,  $RI_2$  et  $RI_3$  :

**Cas où  $\phi > \psi \in (\mathcal{K}, >)$  :** cela signifie que  $(\phi, \alpha) \in \hat{\Sigma}$ ,  $(\psi, \beta) \in \hat{\Sigma}$  et  $C \models \alpha > \beta$ .

Ou encore  $C \models N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi)$ . Ce qui est exactement la définition de  $(\Sigma, \mathcal{C}) \vdash_{\pi} \phi > \psi$ .

**Si on applique  $RI_1$  :** Soit  $\phi = p \wedge q$  et  $\psi = r$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} q > p \wedge r$  et  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} p > q \wedge r$ .

On sait donc que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} q \wedge p > r$ . Par hypothèse d'induction :

$$N_{\Sigma}(q) > N_{\Sigma}(p \wedge r) = \min(N_{\Sigma}(p), N_{\Sigma}(r))$$

$$N_{\Sigma}(p) > N_{\Sigma}(q \wedge r) = \min(N_{\Sigma}(q), N_{\Sigma}(r))$$

Donc  $\min(N_{\Sigma}(p), N_{\Sigma}(q)) > \min(N_{\Sigma}(p), N_{\Sigma}(q), N_{\Sigma}(r))$ , soit  $N_{\Sigma}(p \wedge q) > \min(N_{\Sigma}(p \wedge q), N_{\Sigma}(r))$ . Ceci implique  $N_{\Sigma}(p \wedge q) > N_{\Sigma}(r)$ . Soit  $N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi)$ .

**Si on applique  $RI_2$  :** On a  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi' > \psi'$  avec  $\phi' \models \phi$  et  $\psi' \models \psi$ .

Par hypothèse  $N_{\Sigma}(\phi') > N_{\Sigma}(\psi')$ . On a aussi  $N_{\Sigma}(\phi) \geq N_{\Sigma}(\phi')$  et  $N_{\Sigma}(\psi') \geq N_{\Sigma}(\psi)$ . Donc  $N_{\Sigma}(\phi) > N_{\Sigma}(\psi)$ .

Si on applique  $RI_3$  : la comparaison stricte par  $N_\Sigma$  est asymétrique. □

**Remarque 8.** On notera la différence avec la preuve de la Proposition 43 quand on traduit  $(\mathcal{K}, >)$  en  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$ , notamment pour la règle  $RI_1$ . On s'est alors restreint à des clauses dans  $\mathcal{K}$ , parce que la traduction de  $\phi > \psi$  en  $\{(\phi, a), (\psi, b)\}$  qui attache des poids indépendants aux formules est problématique si  $\psi$  est une conjonction : l'exemple 37 montre que  $(\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$  ne permet pas de retrouver cette règle d'inférence en LPS, car la traduction ne préserve pas toute l'information. Mais ici, on suppose qu'on dispose de la mesure de nécessité symbolique  $N_\Sigma$ . Elle vérifie donc  $RI_1$ .

L'exemple suivant montre que la réciproque est fautive en général.

**Exemple 39.** Soit  $p, q, r$  des atomes et  $\Sigma = \{(p, \alpha), (q, \beta), (r, \gamma)\}$  une base possibiliste avec des poids symboliques et  $C = \{\alpha > \beta, \alpha > \gamma\}$ . On a  $(\Sigma, C) \vdash (q \vee r, \max(\gamma, \beta))$ . Donc on a  $(\Sigma, C) \vdash_\pi (p > q \vee r)$ .

La traduction de la base possibiliste donne  $(\mathcal{K}, >)$  défini par  $\{p > \perp, q > \perp, r > \perp, p > q, p > r\}$ .

On ne peut pas en déduire  $p > q \vee r$ , à l'aide du système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ .

**Remarque 9.** La réciproque est fautive parce qu'en LPS on applique le principe de moindre engagement. Dans l'exemple ci-dessus, on conclut  $N_\Sigma(q \vee r) = \max(\gamma, \beta)$  alors qu'en toute rigueur on n'a que  $N_\Sigma(q \vee r) \geq \max(\gamma, \beta)$  pour les mesures de nécessité qui satisfont la base  $(\Sigma, C)$ .

En revanche, le résultat suivant présente un cas particulier de réciproque pour les formules déjà présentes dans la base possibiliste.

**Proposition 46.** Soit  $(\Sigma, C)$  base possibiliste consistante avec des poids symboliques et  $(\mathcal{K}, >)$  sa traduction (selon la définition 43). Pour toute formule  $\psi \in \Sigma^*$

$$(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi \text{ ssi } (\Sigma, C) \vdash_\pi \phi > \psi$$

**Preuve de la Proposition 46:** Soit  $\psi \in \Sigma^*$ , alors  $\psi \in \mathcal{K}$  et  $\psi \neq \perp$ . Supposons que  $(\Sigma, C) \vdash_\pi \phi > \psi$ . Par la proposition 44 on a  $(\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi$ . Par la proposition 37, on a ensuite  $(\mathcal{K}, >) \vDash_N \phi > \psi$ , puis par la proposition 33  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi$ . □

Enfin, on peut montrer que la logique possibiliste avec des poids symboliques n'est pas en accord avec l'inférence à l'aide de la fermeture par le système d'inférence  $\mathcal{S}_2$ .

**Exemple 40.** Soit  $\Sigma = \{(\phi, \alpha), (\neg\psi, \beta)\}$  une base possibiliste de clauses avec des poids symboliques avec  $C = \{\alpha > \beta\}$ . Soit  $(\mathcal{K}, >)$  défini par  $\{\phi > \perp, \neg\psi > \perp, \phi > \neg\psi\}$  sa traduction.

On a  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_2} \phi \vee \neg\psi > \phi$  par  $RI_{12}$ .

Avec l'approche possibiliste on a :  $N_\Sigma(\phi \vee \neg\psi) = \alpha$ . Alors  $(\Sigma, C) \not\vdash_\pi \phi \vee \neg\psi > \phi$ .

Ce n'est pas surprenant car déjà, le système  $\mathcal{S}_2$  infère plus que la logique classique.

**Exemple 39 (suite)** Soit  $\Sigma = \{(p, \alpha), (q, \beta), (r, \gamma)\}$  une base possibiliste avec des poids symboliques et  $C = \{\alpha > \beta, \alpha > \gamma\}$ . On a  $(\Sigma, C) \vdash_{\pi} (q \vee r, \max(\gamma, \beta))$ . Donc on a  $(\Sigma, C) \vdash_{\pi} (p > q \vee r)$ .

La traduction de la base possibiliste donne  $(\mathcal{K}, >)$  défini par  $\{p > \perp, q > \perp, r > \perp, p > q, p > r\}$ .

Même à l'aide du système d'inférence  $\mathcal{S}_2$ , on ne peut en déduire  $p > q \vee r$ .

Une perspective de ce travail est de mettre en évidence d'autres cas particuliers de bases possibilistes avec poids symboliques pour lesquels l'inférence possibiliste implique l'inférence dans le système  $\mathcal{S}_1$  ou  $\mathcal{S}_2$ .

### 4.2.3 Traduction fidèle entre base possibiliste et base partiellement ordonnée

Partant d'une base possibiliste avec poids symboliques  $(\Sigma, C)$ , nous avons vu un codage par une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$ . On peut reconstruire une base possibiliste  $\Sigma_{(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}}$  avec l'approche définie plus haut. Notons que les conditions imposées (clauses dans  $\mathcal{K}$ ; consistance; et  $\phi > \perp, \forall \phi \in \mathcal{K}$ ) peuvent être vérifiées car  $\Sigma$  peut être exprimée avec des clauses seulement. Il s'agit de comparer la base initiale  $(\Sigma, C)$  et la base obtenue en retour  $\Sigma_{(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}}$  à partir de  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$ .

Quand on s'intéresse au processus de traduction d'un formalisme vers un autre et à la notion de traduction fidèle, deux niveaux peuvent être étudiés : le niveau syntaxique du contenu des bases traduites (les formules apparaissant dans les bases), le niveau de la sémantique ou encore de façon équivalente, le niveau de la fermeture déductive.

Soit deux formalismes de représentation (des langages)  $\mathcal{L}_i$  et  $\mathcal{L}_j$  et  $\mathcal{T}_{ij}$  (resp.  $\mathcal{T}_{ji}$ ) un opérateur de traduction de  $\mathcal{L}_i$  vers  $\mathcal{L}_j$  (resp. de  $\mathcal{L}_j$  vers  $\mathcal{L}_i$ ). Étant donné  $X$  une base logique écrite dans le formalisme  $\mathcal{L}_i$ ,

- $\mathcal{C}_i(X)$  dénote la fermeture déductive associée
- $\mathcal{T}_{ij}(X)$  dénote la traduction de  $X$  dans le formalisme  $\mathcal{L}_j$

Les deux premières notions ne font intervenir qu'une seule traduction.

**Définition 44.** [Traduction indépendante de la syntaxe] La traduction  $\mathcal{T}_{ij}$  est dite indépendante de la syntaxe ssi pour toutes bases  $X$  et  $Y$  écrites dans le formalisme  $\mathcal{L}_i$  :

$$\text{Si } \mathcal{C}_i(X) = \mathcal{C}_i(Y) \text{ alors } \mathcal{C}_j(\mathcal{T}_{ij}(X)) = \mathcal{C}_j(\mathcal{T}_{ij}(Y)).$$

La traduction d'une base possibiliste avec poids symboliques vers une base partiellement ordonnée n'est pas indépendante de la syntaxe comme illustré par l'exemple suivant :

**Exemple 41.** Considérons les deux bases possibilistes :

- $\Sigma_1 = \{(p \wedge q, \alpha), (r, \beta)\}$  avec  $C = \{\beta > \alpha\}$
- $\Sigma_2 = \{(p, \alpha), (q, \alpha), (r, \beta)\}$  avec  $C = \{\beta > \alpha\}$

et leur codage par une base partiellement ordonnée :

- $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma_1, C)}$  défini par  $\{p \wedge q > \perp, r > \perp, r > p \wedge q\}$
- $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma_2, C)}$  défini par  $\{p > \perp, r > \perp, q > \perp, r > p, r > q\}$

$\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux bases sémantiquement équivalentes, c'est-à-dire l'ordre strict induit par la base  $\Sigma_1$  ( $>_{\Sigma_1}$ ) et l'ordre strict induit par la base  $\Sigma_2$  ( $>_{\Sigma_2}$ ) sont identiques. En revanche, les bases  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma_1, C)}$  et  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma_2, C)}$  ne sont pas sémantiquement équivalentes (au sens de la définition 26) et ne produisent pas les mêmes conclusions dans le système  $\mathcal{S}_1$ . Par exemple  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma_1, C)} \not\vdash_{\mathcal{S}_1} \{r > p, r > q\} \subset (\mathcal{K}, >)_{(\Sigma_2, C)}$ .

**Définition 45.** [Traduction fidèle pour la fermeture] La traduction  $\mathcal{T}_{ij}$  est dite fidèle pour la fermeture ssi pour toute base  $X$  écrite dans le formalisme  $\mathcal{L}_i$  :

$$\mathcal{C}_j(\mathcal{T}_{ij}(X)) = \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{C}_i(X)).$$

La traduction d'une base partiellement ordonnée vers une base possibiliste avec poids symboliques n'est pas toujours fidèle pour la fermeture comme illustré par les exemples 35 et 36 parce que la LPS utilise le principe de spécificité minimale, mais pas  $\mathcal{S}_1$ . Notons  $\mathcal{T}(\mathcal{K}, >) = (\Sigma_{\mathcal{K}}, C_{\mathcal{K}})$ ,  $\mathcal{C}_1$  la fermeture selon  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{C}_{\pi}$  la fermeture en LPS. Si  $\mathcal{K}$  ne contient que des clauses, en vertu de la Proposition 43, on a seulement  $\mathcal{C}_{\pi}(\mathcal{T}(\mathcal{K}, >)) \supset \mathcal{T}(\mathcal{C}_1(\mathcal{K}, >))$ .

La fidélité pour la fermeture est plus forte que l'indépendance pour la syntaxe. Considérons  $X$  et  $Y$  deux bases écrites dans le formalisme  $\mathcal{L}_i$ , telles que  $\mathcal{C}_i(X) = \mathcal{C}_i(Y)$ . Si la traduction est fidèle pour la fermeture, on a  $\mathcal{C}_j(\mathcal{T}_{ij}(X)) = \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{C}_i(X)) = \mathcal{T}_{ij}(\mathcal{C}_i(Y)) = \mathcal{C}_j(\mathcal{T}_{ij}(Y))$ .

Enfin la dernière notion considère les traductions dans les deux sens.

**Définition 46.** [Traduction fidèle pour la syntaxe] La traduction  $\mathcal{T}_{ij}$  est dite fidèle pour la syntaxe ssi pour toute base  $X$  écrite dans le formalisme  $\mathcal{L}_i$  :

$$X = \mathcal{T}_{ji}(\mathcal{T}_{ij}(X)).$$

La traduction d'une base possibiliste avec poids symboliques vers une base partiellement ordonnée n'est pas fidèle pour la syntaxe comme illustré par l'exemple suivant :

**Exemple 42.** Soit  $\Sigma = \{(p, a), (q, a), (r, b)\}$  et  $C = \{b > a\}$ .

Le codage par une base partiellement ordonnée produit  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma, C)}$  défini par  $\{p > \perp, r > \perp, q > \perp, r > p, r > q\}$ .

Le codage de cette dernière base par une base possibiliste produit maintenant

$\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}} = \{(p, \alpha_1), (q, \alpha_2), (r, \beta)\}$  avec  $C' = \{\beta > \alpha_1, \beta > \alpha_2\}$ .

Les bases  $(\Sigma, C)$  et  $(\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}, C')$  sont différentes.

Notons cependant que les relations strictes induites sur les interprétations ( $>_\Sigma$  et  $>_{\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$ ) sont identiques<sup>5</sup>.

Cet exemple illustre le résultat suivant, qui exprime que si l'on part d'une base possibiliste  $(\Sigma, C)$  avec des poids symboliques élémentaires, les bases  $\hat{\Sigma}$  et  $\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$  sont syntaxiquement équivalentes, au sens où elles définissent le même ordre strict sur les formules de  $\Sigma$  :

**Proposition 47.** *Soit  $\Sigma$  une base possibiliste avec des poids symboliques élémentaires.*

$$\omega >_{\hat{\Sigma}} \omega' \text{ ssi } \omega >_{\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}} \omega'$$

**Preuve de la Proposition 47:**

$\Rightarrow$ ) Par hypothèse  $\omega >_{\hat{\Sigma}} \omega'$ . Soit  $(\phi_j, a_j) \in \Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$ . Donc  $\phi_j \in (\mathcal{K}, >)_{(\Sigma,C)}$  avec  $a_j = \eta(\phi_j)$  (Définition 41). Comme  $\phi_j \in (\mathcal{K}, >)_{(\Sigma,C)}$ , on a  $(\phi_j, \alpha_j) \in \hat{\Sigma}$  avec  $\alpha_j = N_\Sigma(\phi_j)$ . Si  $\phi_j$  est fautive dans  $\omega$ , il existe par hypothèse  $(\psi_i, \beta_i) \in \hat{\Sigma}$  tel que  $\psi_i$  est fautive dans  $\omega'$  et  $C \models (\beta_i > \alpha_j)$ . Par construction de  $(\mathcal{K}, >)_{(\Sigma,C)}$ , on a alors  $(\psi_i > \phi_j) \in (\mathcal{K}, >)_{(\Sigma,C)}$ . Donc,  $(\psi_i, \eta(\psi_i)) \in \Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$ ,  $(\phi_j, \eta(\phi_j)) \in \Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$  et  $\eta(\psi_i) > \eta(\phi_j) = a_j$  dans l'ensemble des contraintes associée à  $\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$ . On a donc bien prouvé que  $\omega >_{\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}} \omega'$ .

$\Leftarrow$ ) Par hypothèse  $\omega >_{\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}} \omega'$ . Soit  $(\phi_j, \alpha_j) \in \hat{\Sigma}$  tel que  $\phi_j$  est fautive dans  $\omega$ . Alors  $\phi_j \in (\mathcal{K}, >)_{(\Sigma,C)}$  et  $(\phi_j, \eta(\phi_j) = a_j) \in \Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$ . Par hypothèse, il existe  $(\psi_i, b_i) \in \Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$  tel que  $\psi_i$  est fautive dans  $\omega'$  et  $C \models (b_i > a_j)$ . On a  $b_i = \eta(\psi_i)$ ,  $a_j = \eta(\phi_j)$ . Par construction de l'ensemble des contraintes associé à  $\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}$ ,  $C \models (b_i > a_j)$  implique que soit  $(\psi_i, \phi_j) \in (\mathcal{K}, >)$ , soit il existe une suite finie  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  de formules telles que  $(\psi_i, \gamma_1) \in (\mathcal{K}, >)$ ,  $(\gamma_1, \gamma_2) \in (\mathcal{K}, >)$ ,  $\dots$ ,  $(\gamma_l, \phi_j) \in (\mathcal{K}, >)$ . Dans ce dernier cas, les formules  $\psi_i, \gamma_1, \dots, \gamma_l, \phi_j$  sont toutes dans  $\hat{\Sigma}$  avec  $C \models (N_\Sigma(\psi_i) > N_\Sigma(\gamma_1), (N_\Sigma(\gamma_1) > N_\Sigma(\gamma_2), \dots, (N_\Sigma(\gamma_l) > N_\Sigma(\phi_j))$ . On a donc  $C \models (N_\Sigma(\psi_i) > N_\Sigma(\phi_j) = \alpha_j)$ . Or  $(\psi_i, N_\Sigma(\psi_i)) \in \hat{\Sigma}$ . On a donc bien prouvé que  $\omega >_{\hat{\Sigma}} \omega'$ .  $\square$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 48.** *Soit  $\Sigma$  une base possibiliste en forme clausale avec des poids symboliques élémentaires. On a :*

$$N_\Sigma(\phi) > N_\Sigma(\psi) \text{ ssi } N_{\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}}(\phi) > N_{\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}}(\psi), \forall \phi, \psi \in \Sigma$$

5. Mais pas les relations de pré-ordre partiel car  $p \geq_\Sigma q$ ,  $q \geq_\Sigma p$  pour  $(\Sigma, C)$  mais  $p$  et  $q$  sont incomparables pour  $(\Sigma_{(\mathcal{K},>)_{(\Sigma,C)}}, C')$ .

**Preuve de la Proposition 48:** C'est une conséquence immédiate de la proposition 47 et de la définition de  $N_{\Sigma}(\phi)$  et de  $N_{\Sigma(\mathcal{K},>)(\Sigma,c)}(\phi)$ . □

## 4.3 Application aux CP-nets

En logique possibiliste, les propositions classiques expriment des buts, et les poids sont les niveaux de priorité qui expriment à quel point ces objectifs sont impératifs. Le mérite d'une représentation des préférences fondée sur une base logique est également la capacité de pouvoir raisonner sur les préférences, en particulier pour traiter leur possible incompatibilité. Une série de publications [41, 42, 52, 69, 71] ont abordé la question de la représentation des réseaux de préférences conditionnelles ("CP-nets") un cadre très connu dans la représentation des préférences, à l'aide d'une base de formules en logique possibiliste. Puisque les CP-nets peuvent laisser des incomparabilités entre les interprétations, la représentation en logique possibiliste doit utiliser des poids symboliques partiellement ordonnés [21] pour laisser la place à des incompatibilités.

Dans cette section, nous allons étudier la question de la traduction des CP-nets en logique possibiliste symbolique. On commence par présenter le cadre des CP-nets. Ensuite nous donnons des résultats de traduction et nous montrons les points de divergence entre ces deux représentations. Une application pour traiter des requêtes de préférence en logique possibiliste symbolique a été proposée dans [55].

### 4.3.1 Réseaux de préférences conditionnelles (CP-nets)

Un CP-net [24] est une représentation graphique de structures de préférences fournies par l'utilisateur. Le cadre des CP-nets rappelle celui des réseaux bayésiens, mais la nature de la relation entre les nœuds d'un CP-net est généralement plus faible que les relations probabilistes dans les réseaux bayésiens (c'est juste une relation de préférence partielle). L'objectif du modèle graphique est de capturer les déclarations qualitatives de dépendances conditionnelles sur les préférences.

**Définition 47** (CP-net). *Un CP-net  $\mathcal{CP}$  sur un ensemble de variables booléennes  $V = \{X_1, \dots, X_n\}$  est un graphe orienté, ayant pour nœuds  $X_1, \dots, X_n$ , tel qu'un arc existe entre  $X_i$  et  $X_j$  si la préférence sur la variable  $X_j$  est conditionnée par la valeur de  $X_i$ . chaque nœud  $X_i \in V$  est associé avec une table de préférences conditionnelles  $CPT(X_i)$ , qui indique la préférence stricte ( $x_i > \neg x_i$  ou  $\neg x_i > x_i$ ) pour chaque instantiation des variables associées aux nœuds parents de  $X_i$  (s'il y a lieu).*

Un CP-net  $\mathcal{CP}$  définit un ordre partiel  $\succ_{\mathcal{CP}}$  sur  $\Omega$  l'ensemble des instantiations des variables de  $V$ . La définition de cet ordre partiel utilise la notion de "flip" :

**Définition 48** (Flip de dégradation). *Un flip de dégradation consiste à changer une instantiation  $\omega_1$  en  $\omega_2$  en modifiant la valeur de vérité d'une seule variable  $X_i$ , de sorte que  $\omega_1$  est préférée par rapport à  $\omega_2$ .*

**Définition 49** (Flip d'amélioration). *Un flip d'amélioration consiste à changer une instantiation  $\omega_1$  en  $\omega_2$  en modifiant la valeur de vérité d'une seule variable  $X_i$ , de sorte que  $\omega_2$  est préférée par rapport à  $\omega_1$ .*

Autrement dit, un flip compare deux instantiations de  $V$  qui ne diffèrent que sur une seule variable (que ce soit un flip de dégradation ou un flip d'amélioration), selon la table de préférence conditionnelle de cette variable.

**Exemple 43.** *Soit  $\mathcal{CP}$  un CP-net sur  $V = \{X, Y, Z\}$ . Soit la préférence suivante  $\phi = x > \neg x$ . Soit les instantiations  $\omega_1 = xyz$ ,  $\omega_2 = \neg xyz$  et  $\omega_3 = \neg x \neg yz$  :*

- *De  $\omega_1$  à  $\omega_2$  il y a un flip dégradation puisque on a changé la préférence sur la variable  $X$  et on a gardé la valeur des variables  $Y, Z$ .*
- *Il n'y a pas de flip entre  $\omega_1$  et  $\omega_3$  puisque elles diffèrent de plus d'une variable.*

Pour définir l'ordre associé au CP-net on applique le principe ceteris paribus aux variables qui ne figurent pas dans le tableau (les autres variables autre la variable impliquée dans le flip auront les mêmes valeurs dans l'instantiation).

**Définition 50** (Ordre CP-net). *Un CP-net  $\mathcal{CP}$  définit un ordre partiel  $\succ_{\mathcal{CP}}$  sur les instantiations de  $V = \{X_1, \dots, X_n\}$  tel que  $\omega_1 \succ_{\mathcal{CP}} \omega_2$  ssi il y a une séquence de flips de dégradation (ou une séquence de flips d'amélioration selon la nature de l'ordre que nous voulons définir ascendant ou descendant) qui change  $\omega_1$  en  $\omega_2$ .*

On note par  $Pa(X)$  l'ensemble des parents directs de  $X$ , et par  $ch(X)$  l'ensemble des successeurs directs (fils) de  $X$ . L'ensemble d'instantiations d'un groupe de variables  $S \subseteq V$  est noté par  $Inst(S)$ .  $Inst(S) \subseteq \Omega$ .

Étant donné un CP-net  $\mathcal{CP}$ , pour chaque nœud  $X_i, i = 1, \dots, n$ , chaque item dans la table de préférences conditionnelles  $CPT(X_i)$  est de la forme  $\phi = u : \star x_i > \star \neg x_i$ , où  $u \in Inst(Pa(X_i))$ ,  $\star$  est à remplacer par rien si la préférence est  $x_i > \neg x_i$ , et par  $\neg$  sinon.

**Exemple 44.** [24]. *La Figure 4.1(a) illustre un CP-net sur des préférences pour une tenue de soirée. Il implique les variables  $J, P$ , et  $S$ , qui se rapportent respectivement à la veste, au pantalon et à la chemise :*

- *Le noir ( $b$ ) est préféré au blanc ( $w$ ) pour la veste et le pantalon :  $P_b > P_w$  et  $J_b > J_w$*



- La préférence d'une chemise rouge plutôt que blanche est conditionnée par la ou les couleurs de la veste et du pantalon : s'ils ont la même couleur, alors une chemise blanche rendra la tenue trop terne, et donc une chemise rouge est préférée dans ce cas :  $P_b \wedge J_w : S_r > S_w ; P_w \wedge J_w : S_r > S_w$ .
- Sinon, si la veste et le pantalon sont de couleurs différentes, alors une chemise rouge rendra la tenue trop inharmonieuse, et donc une chemise blanche sera préférée.  $P_b \wedge J_w : S_w > S_r ; P_w \wedge J_b : S_w > S_r$ .
- L'ordre CP-net dans cet exemple est un ordre ascendant défini par des flips d'amélioration (**Figure. 4.1(b)**). L'instanciation préférée est  $J_b P_b S_r$ .

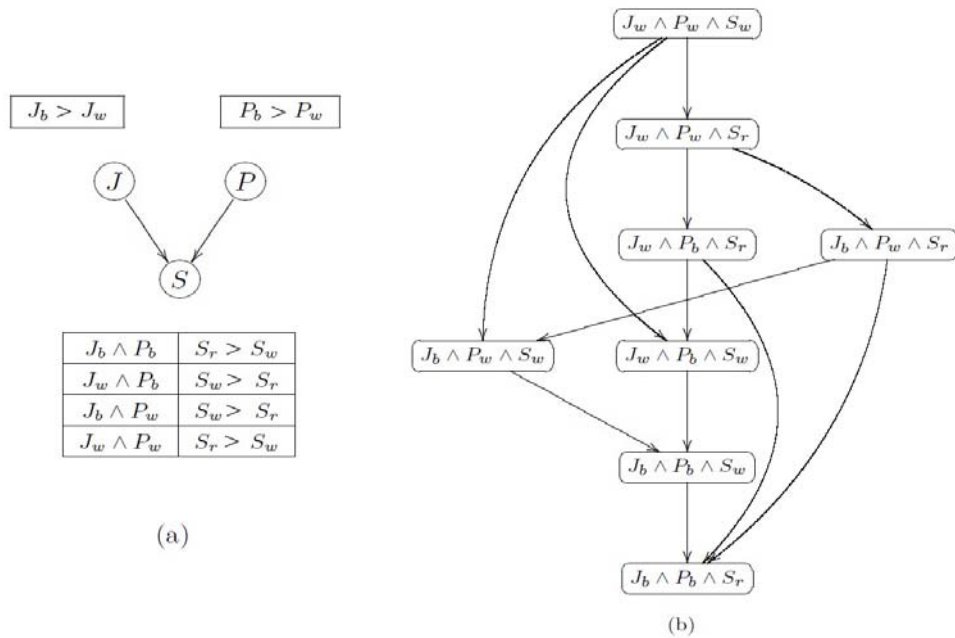


FIGURE 4.1 – Le CP-net de l'exemple 44 et l'ordre partiel induit

### 4.3.2 Codage des CP-nets en logique possibiliste

Étant donné un CP-net  $\mathcal{CP}$ , chaque entrée dans la table de préférences conditionnelles  $CPT(X_i)$  de la forme  $\phi = u : \star x_i > \star \neg x_i$ , où  $u \in Inst(Pa(X_i))$  est codée en logique possibiliste par une contrainte de la forme  $N(\neg u \vee \star x_i) \geq \alpha > 0$ , où  $N$  est une mesure de nécessité [48], ce qui est équivalent ici à une contrainte sur une mesure de nécessité conditionnelle  $N(\star x_i | u) \geq \alpha$ , et donc à  $\Pi(\neg \star x_i | u) \leq 1 - \alpha < 1$ , où  $\Pi(p) = 1 - N(\neg p)$  est la mesure de possibilité duale associée à  $N$ . Elle exprime qu'avoir  $\neg \star x_i$  est en quelque



sorte peu satisfaisant, avec une possibilité de  $\neg \star x_i$  bornée par une valeur maximale  $1 - \alpha$ . Il est clair que la satisfaction de  $\neg \star x_i$  est d'autant plus impossible que  $\alpha$  est grand.

Le codage d'un CP-net en logique possibiliste est effectué comme suit :

- Selon les conventions ci-dessus, chaque entrée de la forme  $u : \star x_i > \star \neg x_i$  dans la table de préférences conditionnelles  $CPT(X_i)$  du nœud  $X_i, i = 1, \dots, n$  est codée par la clause en logique possibiliste  $(\neg u \vee \star x_i, \alpha_i)$ , où  $\alpha_i > 0$  est un poids symbolique.
- Puisque le même poids est attaché à chaque clause construite à partir de  $CPT(X_i)$ , l'ensemble des clauses pondérées induites par  $CPT(X_i)$  est donc équivalent à la conjonction pondérée  $\phi_i = (\bigwedge_{u \in Inst(Pa(X_i))} (\neg u \vee \star x_i), \alpha_i)$ , une par variable que l'on peut aussi écrire :

$$((\neg(\bigvee_{u \in A_i^+} u) \vee x_i) \wedge ((\neg(\bigvee_{u \in A_i^-} u) \vee \neg x_i), \alpha_i)$$

Où  $\{A_i^+, A_i^-\}$  est une partition de  $Inst(Pa(X_i))$ , tel que  $x_i > \neg x_i$  sur  $A_i^+$  et  $\neg x_i > x_i$  sur  $A_i^-$ .

- Des contraintes additionnelles sur les poids sont ajoutées. Dans un CP-net la priorité du nœud père est plus importante que la priorité de tous les nœuds fils. Le poids  $\alpha_i$  attaché au nœud  $X_i$ , est donc supposé être strictement plus petit que le poids de chacun de ses parents :  $\alpha_i < \alpha_j \forall X_j \in Pa(X_i)$ .

On obtient ainsi une base possibiliste partiellement ordonnée  $(\Sigma, \mathcal{C})$ .  $\mathcal{C}$  représente les contraintes sur les poids associés aux formules qui représentent les préférences.

**Exemple 44 (suite)** Le codage du CP-net produit :

- $\Sigma = \{\phi_P, \phi_J, \phi_S\}$

avec :

- $\phi_P = (P_b, \alpha)$  (pas de contexte alors on met que la préférence  $P_b$ )
- $\phi_J = (J_b, \beta)$  (pas de contexte alors on met que la préférence  $J_b$ )
- $\phi_S = ((J = P) \vee S_w) \wedge ((\neg(J = P) \vee S_r), \gamma)$
- On rajoute les contraintes sur les poids symboliques  $\mathcal{C} = \{\gamma < \alpha \text{ et } \gamma < \beta\}$ .

Notons  $\overline{\Sigma(\omega)} \subseteq \Sigma$ , l'ensemble des formules falsifiées par l'interprétation  $\omega \in \Omega$ . Pour chaque interprétation  $\omega$ , nous associons un vecteur  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega)$  obtenu comme suit. Pour chaque formule pondérée  $\phi_i$  dans la base possibiliste  $\Sigma$  satisfaite par  $\omega$ , on met 1 dans la  $i^{eme}$  composante du vecteur, et  $1 - \alpha_i$  sinon, en accord avec la sémantique de la logique possibiliste. Par construction,  $L = \{1, 1 - \alpha_i, i = 1 \dots, n\}$ , avec  $1 > 1 - \alpha_i, \forall i$ . Le vecteur  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega)$  a un format spécifique. À savoir sa composante  $v_i$  (un par nœud du CP-net) se trouve dans  $\{1, 1 - \alpha_i\}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous considérons les différents ordres partiels possibles pour comparer ces vecteurs dans la section suivante.

### 4.3.3 CP-nets vs logique possibiliste : contre-exemples

Il a été affirmé que l'ordre des CP-nets peut être capturé à l'aide du codage expliqué dans la section 4.3.1 en appliquant l'ordre *Pareto symétrique* [69, 71] (voir la section A.2.3), ou l'ordre *leximin* [52] (voir la section A.1.1.3), aux vecteurs  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega)$ . Ce n'est en effet vrai que pour des familles particulières de CP-nets, comme le montre l'exemple ci-dessous. Mais le codage possibiliste des CP-nets avec l'utilisation de l'un des ordres précédemment cités ne conduit pas toujours à une représentation exacte des CP-nets dans le cas général, comme nous allons le voir sur d'autres exemples.

Considérant l'exemple 44, à nouveau, le tableau 4.1 donne les degrés de satisfaction des clauses possibilistes codant les trois préférences élémentaires, et les huit instantiations possibles, où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les poids attachés aux nœuds  $J, P, S$ , respectivement.

TABLE 4.1 – Options possibles dans l'exemple 44.

$\Omega$	$\phi_P$	$\phi_J$	$\phi_S$
$P_b J_b S_r$	1	1	1
$P_b J_b S_w$	1	1	$1-\gamma$
$P_b J_w S_w$	1	$1-\beta$	1
$P_w J_b S_w$	$1-\alpha$	1	1
$P_b J_w S_r$	1	$1-\beta$	$1-\gamma$
$P_w J_b S_r$	$1-\alpha$	1	$1-\gamma$
$P_w J_w S_r$	$1-\alpha$	$1-\beta$	1
$P_w J_w S_w$	$1-\alpha$	$1-\beta$	$1-\gamma$

Nous introduisons les contraintes suivantes,  $\alpha > \gamma$  et  $\beta > \gamma$  entre les poids symboliques, qui donnant la priorité aux contraintes associées aux nœuds pères  $J, P$  sur celles correspondant au nœud fils  $S$ . Ensuite, l'application de l'ordre *Pareto symétrique*, ou de l'ordre *leximin*, nous permet d'ordonner les instantiations. On peut vérifier que l'ordre des instantiations obtenu par ces deux ordres appliqués aux vecteurs  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega)$  coïncide avec l'ordre induit par le CP-net, comme indiqué sur la Figure. 4.1(b) :

- $bbr^6 \succ_{CP} bbw \succ_{CP} bww \succ_{CP} bwr \succ_{CP} bwr \succ_{CP} wwr \succ_{CP} www$ .
- $bbr \succ_{CP} bbw \succ_{CP} wbw \succ_{CP} wbr \succ_{CP} wwr \succ_{CP} www$ .

Afin de fournir une discussion claire sur la représentation en logique possibiliste, nous établissons d'abord que la préférence entre les vecteurs d'instantiations, qui ne diffèrent que par un seul "flip" de variable (définition 48 ou définition 49), dépend uniquement des instantiations de la variable correspondante et de ses fils :

6. La notation exacte de ce genre d'instantiation est  $P_b J_b S_r$  mais pour simplifier l'écriture on la note  $bbr$

**Proposition 49.** Soit  $X_i$  un nœud dans un CP-net  $\mathcal{CP}$ . Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  la base en logique possibiliste avec des poids partiellement ordonnés associée au CP-net  $\mathcal{CP}$ . Si le CP-net contient la préférence  $u : x_i > \neg x_i$  (resp :  $u : \neg x_i > x_i$ ), la préférence associée dépend uniquement des interprétations de la variable  $X_i$  et de celles de ses fils.

**Preuve de la Proposition 49:** Voir la preuve de la proposition 2 page 187 dans [53].  $\square$

En raison de la structure particulière des CP-nets, et puisque nous avons montré que la préférence est uniquement liée à un nœud et les nœuds fils (Proposition 49), nous devons considérer les trois structures élémentaires suivantes :

- *cas A* : Deux nœuds pères et un nœud fils (voir Figure 4.2(a)) ;
- *cas B* : un nœud père et deux nœuds fils (voir Figure 4.2(b)) ;
- *cas c* : Un nœud père, un nœud fils et un nœud petit-fils (voir Figure 4.2(c)).

Donc, tout CP-net est une combinaison de ces trois cas élémentaires (avec peut-être plus de nœuds pères ou plus de nœuds fils). L'exemple suivant montre dans quel cas un ordre particulier induit par  $(\Sigma, \mathcal{C})$  ne parvient pas à capturer exactement l'ordre des instantiations induit par le CP-net.

**Exemple 45.**  $V = \{X, Y, Z\}$  est l'ensemble des variables de la figure **Figure. 4.2**. Les contraintes de préférences sont de la forme :  $\phi_1 = x > \bar{x}$ ,  $\phi_2 = y > \bar{y}$ ,  $\phi_3 = (X \equiv Y : z > \bar{z}, \neg(X \equiv Y) : \bar{z} > z)$ ,  $\phi_4 = (x : z > \bar{z}, \bar{x} : \bar{z} > z)$ ,  $\phi_5 = (x : y > \bar{y}, \bar{x} : \bar{y} > y)$  et  $\phi_6 = (y : z > \bar{z}, \bar{y} : \bar{z} > z)$ . Les bases possibilistes des différents cas de la **Figure. 4.2** sont obtenues comme suit :

- $\Sigma_a = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$  :
  - $\phi_1 = (x, \alpha_1)$
  - $\phi_2 = (y, \alpha_2)$
  - $\phi_3 = (((\neg(x \wedge y) \wedge \neg(\neg x \wedge \neg y)) \vee z) \wedge (\neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(\neg x \wedge y)) \vee \neg z), \alpha_3)$
 avec  $\min(\alpha_1, \alpha_2) > \alpha_3$ .
- $\Sigma_b = \{\phi_1, \phi_4, \phi_5\}$  :
  - $\phi_4 = ((\neg x \vee z) \wedge (x \vee \neg z), \alpha_4)$
  - $\phi_5 = ((\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y), \alpha_5)$

avec  $\alpha_1 > \min(\alpha_4, \alpha_5)$ ,

- $\Sigma_c = \{\phi_1, \phi_5, \phi_6\}$  :
  - $\phi_6 = \left( \underbrace{(\neg y \vee z)}_{\phi^+} \wedge \underbrace{(y \vee \neg z)}_{\phi^-} \right), \alpha_6$

avec  $\alpha_1 > \alpha_5 > \alpha_6$ .

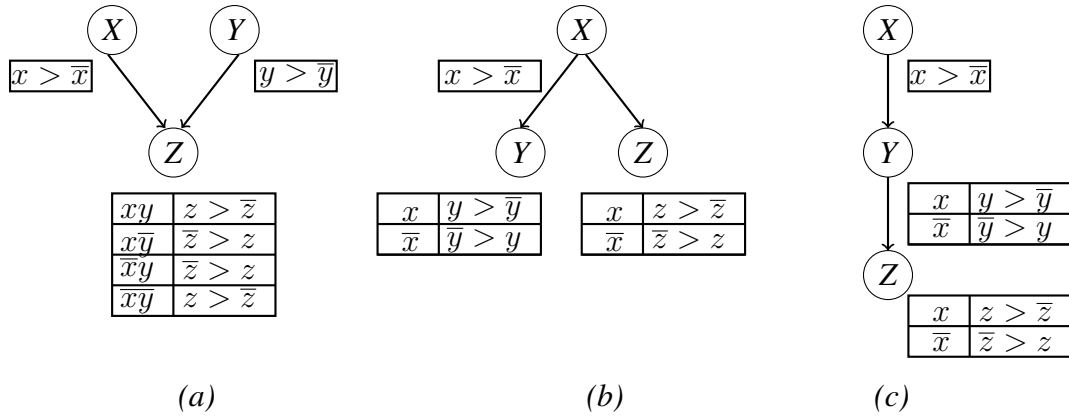


FIGURE 4.2 – Exemples de cas élémentaires de CP-nets

Les résultats sont les suivants :

- Dans le 1<sup>er</sup> cas ( $\mathcal{CP}_a$ ) (connexion convergente), les ordres *Pareto symétrique* et *leximin* sont en mesure de capturer l'ordre CP-net exactement. Mais, l'ordre *min* ne parvient pas à distinguer entre les instantiations  $\{\bar{x}yz, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$  et entre  $\{x\bar{y}\bar{z}, x\bar{y}z\}$ .
- Dans le 2<sup>eme</sup> cas ( $\mathcal{CP}_b$ ) (connexion divergente), l'ordre *Pareto symétrique* n'est pas capable de capturer l'ordre CP-net exactement, en laissant les deux instantiations  $\omega = x\bar{y}\bar{z}$  et  $\omega' = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$  incomparables (tandis que le nœud X dans le CP-net assure que  $x\bar{y}\bar{z} \succ_{\mathcal{CP}} \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ). Sinon, la représentation est exacte. Les vecteurs

TABLE 4.2 – Les choix possibles dans l'Exemple 45.

$\Omega$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_1$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_1$	$\phi_5$	$\phi_6$
$xyz$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$xy\bar{z}$	1	1	$1-\alpha_3$	1	$1-\alpha_4$	1	1	1	$1-\alpha_6$
$x\bar{y}z$	1	$1-\alpha_2$	$1-\alpha_3$	1	1	$1-\alpha_5$	1	$1-\alpha_5$	$1-\alpha_6$
$x\bar{y}\bar{z}$	1	$1-\alpha_2$	1	1	$1-\alpha_4$	$1-\alpha_5$	1	$1-\alpha_5$	1
$\bar{x}yz$	$1-\alpha_1$	1	$1-\alpha_3$	$1-\alpha_1$	$1-\alpha_4$	$1-\alpha_5$	$1-\alpha_1$	$1-\alpha_5$	1
$\bar{x}y\bar{z}$	$1-\alpha_1$	1	1	$1-\alpha_1$	1	$1-\alpha_5$	$1-\alpha_1$	$1-\alpha_5$	$1-\alpha_6$
$\bar{x}\bar{y}z$	$1-\alpha_1$	$1-\alpha_2$	1	$1-\alpha_1$	$1-\alpha_4$	1	$1-\alpha_1$	1	$1-\alpha_6$
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$1-\alpha_1$	$1-\alpha_2$	$1-\alpha_3$	$1-\alpha_1$	1	1	$1-\alpha_1$	1	1

associés à ces deux instantiations sont  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega) = (1, 1 - \alpha_4, 1 - \alpha_5)$  et  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega') = (1 - \alpha_1, 1, 1)$ . Ces vecteurs sont incomparables par *Pareto symétrique*. En effet  $\nexists \sigma$  tel que  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega) \succ_{\text{ParetoS}} \mathcal{F}_\Sigma(\omega^\sigma)$ , puisque  $1 - \alpha_1 < \min(1 - \alpha_4, 1 - \alpha_5)$  tandis que  $1 > \min(1 - \alpha_4, 1 - \alpha_5)$ . Sinon, l'ordre *min* est en mesure de comparer ces deux instantiations  $x\bar{y}\bar{z} \succ_c \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , mais il ne parvient pas à distinguer entre les instantiations  $\{\bar{x}yz, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}\}$  et entre  $\{x\bar{y}\bar{z}, xy\bar{z}\}$ . Mais l'ordre *leximin* capture exactement l'ordre CP-net.

- Dans le 3<sup>eme</sup> cas ( $\mathcal{CP}_c$ ) (connexion série), les deux ordres *leximin* et *min* ne parviennent pas à capturer exactement l'ordre CP-net : les deux instantiations  $\omega = x\bar{y}z$  et  $\omega' = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$  deviennent comparables tandis que le CP-net ne peut pas les comparer. Puisque  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega) = (1, 1 - \alpha_5, 1 - \alpha_6)$  et  $\mathcal{F}_\Sigma(\omega') = (1 - \alpha_1, 1, 1)$ , avec  $\min(\mathcal{F}_\Sigma(\omega)) = 1 - \alpha_5, c(\mathcal{F}_\Sigma(\omega')) = 1 - \alpha_1$  et  $1 - \alpha_1 < 1 - \alpha_5$ , on a  $\omega \succ_{\text{leximin}} \omega'$  et  $\omega \succ_c \omega'$ . Mais dans ce cas, l'ordre *Pareto symétrique* capture exactement l'ordre CP-net.

Pour résumer, comme on l'observe dans l'exemple, l'ordre *Pareto symétrique* ne compare pas deux instantiations quand la variable concernée a plus d'un nœud fils comme dans cas  $\mathcal{CP}(b)$  (**Figure. 4.2** (b)). En outre, dans  $\mathcal{CP}(c)$  (**Figure. 4.2** (c)) les ordres *leximin* et *min* brisent l'incompatibilité de certaines instantiations dans l'ordre induit par le CP-net.

#### 4.3.4 Les relations entre les préférences de la logique possibiliste et les CP-nets

Comme indiqué dans l'exemple 45 de la section précédente, l'ordre *Pareto symétrique* n'est pas assez raffiné pour capturer l'ordre d'un CP-net en général, tandis que l'ordre *leximin* peut comparer certaines instantiations qui sont incomparables dans le CP-net. Dans cette section, nous allons établir les conditions dans lesquelles l'approche possibiliste peut capturer exactement l'ordre CP-net. Est-ce que l'ordre *Pareto symétrique* est

toujours moins raffiné (au sens large) que l'ordre CP-net ? Est-ce que l'ordre *leximin* est toujours plus raffiné (au sens large) que l'ordre CP-net ? Tout d'abord, nous prouvons que toute comparaison stricte obtenue par l'ordre *Pareto symétrique* est obtenue dans l'ordre CP-net.

**Proposition 50.** [53] *Soit CP un CP-net acyclique et  $(\Sigma, \mathcal{C})$  la base possibiliste partiellement ordonnée associée à ce CP-net.*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \succ_{\text{ParetoS}} \omega' \Rightarrow \omega \succ_{\text{CP}} \omega'$$

**Preuve de la Proposition 50:** Voir la preuve de la proposition 3 page 189 dans [53]. □

Nous avons remarqué qu'il y a des cas où l'ordre *Pareto symétrique* avec le codage possibiliste capture exactement l'ordre des CP-nets. La proposition suivante indique une classe de situations particulières où c'est effectivement le cas.

**Proposition 51.** [53] *Soit CP un CP-net acyclique tel que chaque nœud a au plus un fils. Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  la base possibiliste partiellement ordonnée associée au CP-net CP.*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \succ_{\text{ParetoS}} \omega' \iff \omega \succ_{\text{CP}} \omega'$$

**Preuve de la Proposition 51:**

Voir la preuve de la proposition 4 page 190 dans [53]. □

Nous avons également remarqué sur quelques exemples que l'ordre *leximin* est plus raffiné que l'ordre induit par le CP-net. La proposition suivante établit que toute comparaison stricte obtenu par un CP-net est également valable dans son homologue possibiliste en utilisant l'ordre *leximin* :

**Proposition 52.** [53] *Soit CP un CP-net acyclique. Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  sa base possibiliste partiellement ordonnée associée. Soit  $\succ_{\text{leximin}}$  l'ordre partiel associé à  $(\Sigma, \mathcal{C})$ .*

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \succ_{\text{CP}} \omega' \Rightarrow \omega \succ_{\text{leximin}} \omega'$$

**Preuve de la Proposition 52:** Voir la preuve de la proposition 5 page 190 dans [53]. □

### 4.3.5 Discussion

La représentation des préférences en logique possibiliste a été initialement préconisée dans [11, 15]. Son utilisation avec des poids symboliques pour l'approximation des CP-nets booléens acycliques [24] et les TCP-nets [87], a été discutée dans [41, 42, 70]. Puis,

une représentation des CP-nets a été proposée avec l'utilisation de l'ordre *Pareto symétrique* [69, 71], et rappelée dans [52, 66] en utilisant l'ordre *leximin*. Ces représentations ont été présentées comme étant fidèles dans le cas général (sans fournir les preuves). Il s'avère que la représentation en utilisant l'ordre *Pareto symétrique* n'est exacte que pour une famille particulière de CP-nets. Nous avons montré que c'est effectivement le cas pour les CP-nets où les nœuds ont au plus un nœud fils. Nous avons également prouvé qu'en général c'est une approximation par en-dessous, tandis que l'utilisation de l'ordre *leximin* conduit à une approximation par en-dessus. Ainsi, la sémantique possibiliste qui pourrait mener à une représentation exacte de tout CP-net (acyclique) dans le cas général est encore à trouver (si elle existe). Cependant, l'ordre partiel induit par l'approche CP-net peut paraître quelque peu discutable, comme on peut le voir dans la suite. Ce fait met en question l'exacte représentabilité des CP-nets avec une autre approche qui traite les préférences d'une manière générale, comme l'approche possibiliste.

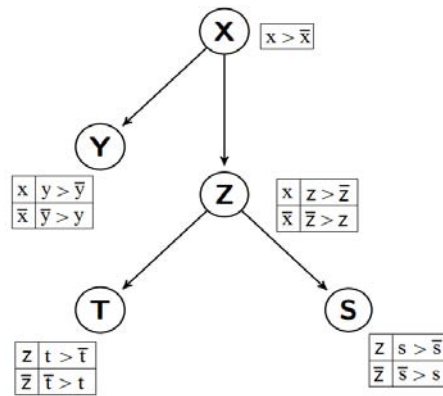


FIGURE 4.3 – CP-net de l'exemple 46

**Exemple 46.** *Considérons le CP-net de la Figure 4.3 sur les variables  $V = \{X, Y, S, Z, T\}$ . Soient les interprétations  $\omega_1 = xyz\bar{s}\bar{t}$ ,  $\omega_2 = x\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t}$ ,  $\omega_3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t}$  et  $\omega_4 = xyz\bar{s}\bar{t}$ .*

*On remarque que  $\omega_1$  falsifie les préférences des deux nœuds petits-fils S, T, mais  $\omega_2$  falsifie les préférences des deux nœuds fils Y, Z. Par ailleurs,  $\omega_3$  falsifie les préférences du nœud père X et  $\omega_4$  falsifie les préférences du nœud fils Z et d'un nœud petit-fils T. L'ordre donné par le CP-net est le suivant  $\omega_1 \succ_{CP} \omega_2 \succ_{CP} \omega_3$ ,  $\omega_1 \succ_{CP} \omega_4$ , mais il ne dit rien sur  $\omega_4$  vs.  $\omega_3$  et  $\omega_2$ . Ainsi, falsifier les préférences des nœuds petit-fils S, T (comme dans  $\omega_1$ ) est mieux que de falsifier les préférences des nœuds fils Y, Z (comme dans  $\omega_2$ ), ce qui est mieux que de falsifier les préférences d'un nœud père X (comme dans  $\omega_3$ ), ce qui est en accord avec les priorités implicites de CP-net. Mais il est gênant que la violation des préférences d'un nœud fils Z et d'un nœud petit-fils T (comme dans  $\omega_4$ ) soit incomparable avec la violation des préférences de deux nœuds fils Y, Z (comme dans  $\omega_2$ ), et aussi incomparable avec la seule violation des préférences d'un nœud père X (comme dans  $\omega_3$ ).*

*Ce comportement n'est pas validé par l'approche possibiliste en utilisant l'ordre leximin.*

On a vu dans la section 4.3.1 que la traduction (éventuellement approchée) des CP-nets en logique possibiliste peut être réalisée en introduisant une relation d'ordre entre les poids symboliques attachés aux formules possibilistes qui codent les préférences des nœuds du CP-net, le CP-net donnant la priorité aux nœuds pères sur ses nœuds fils. D'un point de vue représentation des préférences, cet état de fait peut être gênant si les préférences les plus importantes ne sont pas effectivement celles associées aux nœuds pères [66, 71]. De plus, il s'avère que cette priorité entre les nœuds dans les CP-nets n'est pas transitive en général, comme le montre l'exemple 46 (voir [54] pour plus de détails), contrairement à ce que la représentation graphique semble exprimer. Cela peut remettre en question la fiabilité de la représentation des préférences de l'utilisateur par ces réseaux orientés acycliques. Ainsi, on peut penser que les CP-nets prennent en compte des informations supplémentaires concernant la transitivité entre la priorité de nœuds.

Plusieurs questions restent donc ouvertes, notamment celle de déterminer les différents points de divergences entre les CP-nets et le cadre possibiliste. Toutes les informations implicitement codées dans un CP-net peuvent-elles être exprimées dans une logique propositionnelle pondérée ? et quel est le cadre qui est le plus en accord avec la représentation fidèle des préférences de l'utilisateur ?

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle version de la logique possibiliste avec des contraintes strictes entre des poids mal connus. Elle diffère des logiques conditionnelles [67] où ces contraintes sont imposées, tandis qu'en LPS, elles peuvent être remises en cause, grâce à l'usage du principe de spécificité minimale, si les contraintes initiales contredisent la déduction classique.

Notre cadre est une alternative à l'approche originelle de [16, 21] à base de contraintes lâches. Dans le futur, il serait intéressant de manipuler des contraintes d'inégalité strictes et larges, puisque notre cadre autorise aussi l'inférence des inégalités larges (par la règle d'affaiblissement).

Nous avons montré aussi les différences entre la logique de certitude relative et la LPS :

- Une base possibiliste peut être représentée par un seul ordre faible sur les interprétations, alors que ce n'est pas le cas pour les bases partiellement ordonnées. L'utilisation d'un ordre partiel unique induit par  $(\mathcal{K}, >)$  peut engendrer une perte d'informations. Donc, la sémantique de la logique possibiliste habituelle ne peut pas être utilisée dans le cas partiellement ordonné, ce qui justifie l'utilisation de la sémantique en termes d'ordre partiel entre états épistémiques, ce qui paraît plus naturel que celle utilisée par Halpern [67].



- L'inférence possibiliste peut être réduite à l'inférence classique sur les coupes de la base totalement ordonnée, bien que cette approche devienne incomplète dans le cas partiellement ordonné.
- La logique possibiliste évite les incohérences causées par le classement original de formules, parce que l'ordre est interprété comme une borne inférieure de certitude sur les formules et peut être révisé, tandis que dans l'approche de certitude relative, le classement des formules est appliqué et il est compris comme un fragment à part entière de l'ordre de certitude sur le langage.
- La logique possibiliste repose sur le principe de spécificité minimale qui aide à la sélection d'un d'ordre unique sur les interprétations, dans l'esprit de la fermeture rationnelle [77] ou le système Z de Pearl [82], tandis que l'approche de certitude relative ne fait pas appel à lui et elle est plus prudente.

La forme de la logique possibiliste la plus proche de l'encodage de la logique conditionnelle d'une base partiellement ordonnée est LPS, lorsque les poids sont des représentations symboliques de valeurs de certitude mal connues avec des contraintes sur leur classement. Une contribution importante de cette étude est la comparaison entre LPS et les bases partiellement ordonnées, sous la forme de traductions réciproques partielles. Une application du cadre possibiliste symbolique a été proposée pour la représentation des préférences, plus spécifiquement par une traduction des CP-nets en LPS. La question d'une représentation en LPS exacte de tout CP-net reste ouverte, même si les écarts entre les deux représentations semblent plus importants que prévu [3, 7].

Dans le chapitre suivant, nous proposons une implémentation du système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  vu dans le chapitre 3 et une implémentation de la LPS avec deux méthodes d'inférence syntaxique.

**Inférence sur des bases partiellement ordonnées :  
Implémentation**

---

**Sommaire**

---

<b>5.1</b>	<b>Solveur SAT et inférence classique</b>	<b>119</b>
<b>5.2</b>	<b>Implémentation du système d'inférence <math>\mathcal{S}_1</math></b>	<b>120</b>
<b>5.3</b>	<b>Implémentation du système d'inférence possibiliste</b>	<b>128</b>
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>146</b>

---

Dans ce chapitre, nous proposons d'implémenter deux familles différentes de logiques. L'implémentation de telles logiques consiste à donner des réponses à certaines interrogations de la forme : est-ce qu'une formule  $\phi$  est plus certaine (plausible ou préférée selon l'interprétation des formules de la base de connaissances) que  $\psi$  ?

Dans le chapitre 3, nous avons proposé deux systèmes d'inférence : le système  $\mathcal{S}_1$  basé sur la relation de dominance faible et le système  $\mathcal{S}_2$  son raffinement pré-additif. Nous avons montré des résultats de comparaison du système  $\mathcal{S}_1$  avec plusieurs travaux existants, notamment le système P, la logique des conditionnels, la logique modale et la logique possibiliste. Dans la suite, nous proposons une implémentation de ce système et la stratégie d'utilisation de ses règles d'inférence.

Nous avons aussi considéré l'extension de la logique possibiliste dans le cas partiel en utilisant des poids symboliques. Une comparaison détaillée a été proposée entre ces approches qui a révélé un lien d'implication dans le sens où chaque conséquence d'une base partiellement ordonnée déduite en utilisant le système  $\mathcal{S}_1$  est aussi une conséquence de la base possibiliste associée. Nous allons implémenter cette logique avec deux méthodes d'inférence : une basée sur le calcul des sous-bases minimales inconsistantes et l'autre inspirée des concepts des ATMS.

Ce chapitre est structuré comme suit : la section 5.1 est dédiée au problème SAT et son utilisation pour l'inférence classique. Dans la section 5.2, on montre le processus et les étapes d'implémentation du système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  avec toutes les procédures nécessaires. La section 5.3 détaille l'implémentation des deux méthodes d'inférence en logique possibiliste symbolique.

## 5.1 Solveur SAT et inférence classique

Nous commençons par présenter un solveur SAT que l'on utilise par la suite pour répondre à des questions en logique classique.

### 5.1.1 Solveur SAT

Un solveur SAT est un programme qui décide si une formule de logique propositionnelle sous forme causale est satisfiable (ou consistante) ou non [65]. Un problème SAT est un problème de décision dont le but est de savoir s'il existe une solution à une série d'équations logiques données (ensemble de clauses propositionnelles). Résoudre un problème SAT revient donc à décider s'il existe, ou non, une configuration d'affectations "Vrai/Faux" à des variables d'entrée qui permette de satisfaire une expression logique sous la forme conjonctive (dans le cas satisfiable, le solveur SAT fournit une interprétation qui satisfait toutes les clauses).

**Définition 51.** *Soit  $B$  une base de clauses propositionnelles.  $SAT(B)$  est résolu positivement (i.e. admet pour réponse oui) si et seulement si  $B$  est satisfiable.*

Un solveur SAT ne prend en entrée que des clauses. Cependant, dans un langage propositionnel, les formules propositionnelles sont quelconques. Donc avant de générer le problème SAT associé à une formule propositionnelle, il faut transformer cette formule en clauses. Il existe dans la littérature des méthodes efficaces pour transformer une formule propositionnelle quelconque sous forme clausale [76].

Un solveur SAT nous permet donc de tester la consistance ou l'inconsistance d'une base propositionnelle. Etant donné une base propositionnelle  $B$ , on considère la conjonction de toutes les clauses issues de la base  $B$ .

#### Exemple 47.

- Si on considère la base  $B = \{\neg x \vee y, x\}$ , en générant le problème SAT associé, on trouve que  $SAT(B)$  est résolu positivement donc  $B$  est consistante.
- Si on considère la base  $B = \{x, \neg x \vee y, x \wedge \neg x \vee (x \wedge y), \neg x, \neg y\}$ . On transforme la base en forme clausale  $B' = \{x, \neg x \vee y, y, \neg x, \neg y\}$ .  $SAT(B')$  est résolu négativement donc  $B$  est inconsistante.

### 5.1.2 Problème d'inférence

Comme on a vu dans la sous-section précédente, un solveur SAT répond essentiellement à des questions de satisfiabilité ou non-satisfiabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles.

Dans notre implémentation, nous allons utiliser un solveur SAT pour répondre à des questions de la forme  $B \vdash \phi$  où  $B$  est une base logique composée de formules propositionnelles et  $\phi$  est une formule propositionnelle.

Étant donné une base  $B$ , répondre à la question  $B \vdash \phi$  revient à construire un problème SAT pour la base  $B \cup \{\neg\phi\}$  et établir que ce problème est résolu négativement.

**Exemple 47 (suite)** On considère la base  $B = \{\neg x \vee y, x\}$ . On cherche à montrer que  $B \vdash y$ .  $B' = B \cup \{\neg y\} = \{\neg x \vee y, x, \neg y\}$ .  $\text{SAT}(B')$  est résolu négativement donc  $B \vdash y$ .

## 5.2 Implémentation du système d'inférence $\mathcal{S}_1$

Dans le chapitre 3, nous avons présenté deux systèmes d'inférence  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Dans cette section, nous avons choisi d'implémenter le système  $\mathcal{S}_1$  compte tenu des applications potentielles de ce système (représentation des préférences, et liens avec les systèmes d'inférence existant dans la littérature). Dans la suite, nous détaillons le processus d'inférence du système  $\mathcal{S}_1$  ainsi que les procédures à utiliser. Avant de commencer, nous rappelons le langage utilisé.

### 5.2.1 Rappel sur la syntaxe

Une formule de  $\mathcal{L}_>$  est donc soit un littéral  $\Phi$  de  $\mathcal{L}_>$ , soit de la forme  $\Psi \wedge \Phi$  avec  $\Psi, \Phi$  des formules de  $\mathcal{L}_>$ . Une base  $\mathcal{B}$  est un sous-ensemble fini de  $\mathcal{L}_>$ . Dans la suite on ne raisonnera qu'à partir de bases ne contenant que des littéraux positifs de la forme  $\phi > \psi$  (même si la fermeture déductive de  $\mathcal{B}$  pourra contenir des littéraux négatifs). Une telle formule peut être interprétée comme : un agent a plus de certitude dans  $\phi$  que dans  $\psi$ .

On associe à une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  un ensemble de formules de la forme  $\phi > \psi$  formant une base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  de  $\mathcal{L}_>$ . Notons que si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \xi$  sont dans  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ , alors  $\phi > \xi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  puisqu'on a un ordre partiel sur  $\mathcal{K}$ . Remarquons que pour retrouver  $(\mathcal{K}, >)$  à partir de  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ , il faut que chaque formule de  $\mathcal{K}$  apparaisse dans une formule de  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  (il n'y a pas de formule incomparable avec toutes les autres dans  $(\mathcal{K}, >)$ ).

Dans la suite, pour chaque base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$ ,  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}} \Phi$  dénote que  $\Phi$  est une conséquence de la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  dans le système d'inférence  $\mathcal{S}$ .

### 5.2.2 Processus d'inférence avec le système $\mathcal{S}_1$

Le système  $\mathcal{S}_1$  est un système d'inférence syntaxique constitué de 2 axiomes et 3 règles d'inférence. Nous avons déjà montré qu'il est correct et complet pour la sémantique de certitude relative :

#### Axiomes

$ax_1 : \top > \perp$

#### Règles primitives

$RI_1$  : Si  $\chi > \phi \wedge \psi$  et  $\psi > \phi \wedge \chi$  alors  $\psi \wedge \chi > \phi$

$RI_2$  : Si  $\phi > \psi$ ,  $\phi \vDash \phi'$  et  $\psi' \vDash \psi$  alors  $\phi' > \psi'$

$RI_3$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \phi$  alors  $\perp$

#### Règles dérivées

$RI_4$  : Si  $\phi > \psi$  et  $\psi > \chi$  alors  $\phi > \chi$ .

$RI_5$  : Si  $\psi > \phi$  et  $\chi > \phi$  alors  $\psi \wedge \chi > \phi$

$RI_6$  : Si  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  et  $\psi \rightarrow \chi > \psi \rightarrow \neg\chi$  alors  $(\phi \vee \psi) \rightarrow \chi > (\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\chi$

$RI_7$  : Si  $\chi \rightarrow \phi > \chi \rightarrow \neg\phi$  et  $\chi \rightarrow \psi > \chi \rightarrow \neg\psi$  alors  $\chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) > \chi \rightarrow \neg(\phi \wedge \psi)$

$RI_8$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$  alors  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$

$RI_9$  : Si  $\phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  et  $\phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  alors  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$

$RI_{10}$  : Si  $\phi > \perp$  alors  $\phi > \neg\phi$

L'implémentation de ce système consiste à utiliser chaque règle d'inférence primitive. Cependant, l'utilisation des règles d'inférence nécessite une stratégie.

Étant donné une base partiellement ordonnée, on considère une formule de notre langage  $\Phi \in \mathcal{L}_>$  de la forme  $\phi > \psi$ . Le système  $\mathcal{S}_1$  cherche à répondre à des questions du genre  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{\mathcal{S}_1} \phi > \psi?$  en utilisant les règles d'inférence décrites ci-dessus, à partir de la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ .

Il est clair que la seule règle d'inférence qui nous permet de déduire des littéraux comportant des nouvelles formules du langage  $\mathcal{L}$  est la règle d'inférence  $RI_2$ .

On note  $\Phi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  la possibilité de déduire  $\Phi$  en utilisant les règles d'inférence  $RI_1$ ,  $RI_2$  et  $RI_3$  du système  $\mathcal{S}_1$  sur la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ . Ce processus n'est utile que dans le cas où la formule  $\Phi$  n'est pas présente dans la base initiale.

Pour déduire la formule  $\Phi$  avec le système  $\mathcal{S}_1$  on distingue deux cas :

1. La formule à déduire  $\Phi$  contient une conjonction dans la partie gauche. Dans ce cas, seule la règle  $RI_1$  permet de déduire cette formule puisque la règle  $RI_2$  ne peut pas affaiblir la partie gauche d'une formule de la forme  $\phi > \psi$ . La stratégie consiste à vérifier les hypothèses d'une possible application de la règle d'inférence  $RI_1$  qui nous donne comme résultat la formule initiale. Soit la formule à déduire  $\phi \wedge \chi > \psi$ , il faut et il suffit de vérifier que  $\phi > \psi \wedge \chi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  et  $\psi > \phi \wedge \chi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ .
2. La formule à déduire  $\Phi$  ne contient pas de conjonction dans la partie gauche. Dans ce cas, seule la règle  $RI_2$  nous permet de déduire cette formule (si cette formule n'est pas déjà dans la base).

Notre stratégie d'utilisation des règles d'inférence consiste à fermer la base par les règles d'inférence  $RI_1, RI_3$  pour générer  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ , un fragment de la fermeture déductive partiellement ordonnée. A nouveau, on distingue deux cas :

- (a)  $RI_2$  permet de déduire la formule  $\Phi$  à partir de la fermeture intermédiaire  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ .
- (b)  $RI_2$  ne permet pas de déduire la formule. Dans ce cas,
  - On cherche une formule  $\Upsilon$  de la forme  $\xi > \psi$  et une autre formule  $\Xi$  de la forme  $\chi > \xi$  telle que  $\chi \wedge \xi \vdash \phi$ . L'idée est de pouvoir appliquer la règle d'inférence  $RI_1$  pour obtenir une formule de la forme  $\xi \wedge \chi > \psi$ .
  - On vérifie que  $\xi > \psi \wedge \chi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  et  $\chi > \psi \wedge \xi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ ,
  - Par la règle  $RI_2$ , puisque  $\xi \wedge \chi \vdash \phi$  et  $\psi \vdash \psi$ , on déduit  $\phi > \psi$ .

On essaye avec tous les couples de formules possibles. En cas d'échec la formule  $\Phi$  n'est pas déductible dans le système  $\mathcal{S}_1$ .

Notons qu'à chaque utilisation des règles d'inférence  $RI_1, RI_2$  on applique la règle  $RI_3$ . Cette règle sert essentiellement à détecter l'inconsistance dans la base.

**Exemple 48.** Soit  $(\mathcal{K}, >) = \{\phi > \neg\phi \vee \psi, \neg\phi \vee \psi > \neg\phi, \neg\phi \vee \psi > \neg\psi\}$  une base partiellement ordonnée.

On veut savoir si  $\psi > \neg\psi$  se déduit de  $(\mathcal{K}, >)$  par  $\mathcal{S}_1$ .

Puisque il n'y a pas de conjonction dans la partie gauche, on est dans le second cas. Par  $RI_2$  on ne peut rien déduire.

On est donc dans le cas (2b). On considère les deux formules :

- $\Upsilon = \neg\phi \vee \psi > \neg\psi$  car elle contient  $\neg\psi$  dans sa partie droite ;
- $\Xi = \phi > \neg\phi \vee \psi$ , puisque  $(\neg\phi \vee \psi) \wedge \phi \vdash \psi$

On vérifie que :

- $(\neg\phi \vee \psi) > \neg\psi \wedge \phi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  par  $RI_2$  sur la fermeture  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$
- $\phi > (\neg\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi \in \mathcal{C}_{1,2,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  par  $RI_2$  sur la fermeture  $\mathcal{C}_{1,3}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$

Donc on déduit  $\phi \wedge (\neg\phi \vee \psi) > \neg\psi$  et par  $RI_2$  que  $(\mathcal{K}, >) \vdash_{S_1} \psi > \neg\psi$ .

L'étape (2b) consiste en fait à appliquer les règles d'inférence dérivées (i.e. à refaire les preuves des règles dérivées à partir des deux règles  $RI_1, RI_3$ ). Nous proposons donc de remplacer cette étape par la fermeture de la base par les règles d'inférence  $RI_1, RI_3, RI_4, RI_5, RI_6, RI_7, RI_8, RI_9$  que l'on note par  $\mathcal{C}_{\{1,3,4,5,6,7,8,9\}}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ , suivie de l'application de la règle  $RI_2$  sur cette fermeture partielle.

L'ordre d'application des règles est le suivant :  $RI_4, RI_5, RI_1, RI_6, RI_7, RI_8, RI_9$ . Il est justifié par le fait que les règles  $RI_4, RI_5$  produisent des conséquences très utiles. On génère ensuite les conséquences possibles par  $RI_1$  (on commence par  $RI_4, RI_5$  pour générer autant de conséquences possibles pour cette règle) et en dernière position, les autres règles qui sont moins essentielles. Notons qu'à chaque utilisation d'une règle d'inférence, on vérifie la possibilité d'appliquer les règles précédentes, par exemple si on produit une conséquence avec la règle  $RI_1$  alors on considère les deux règles  $RI_4, RI_5$ . La règle  $RI_3$  sert essentiellement à détecter l'inconsistance dans la base, donc elle sera appliquée à la fin.

Le processus d'inférence est résumé dans l'algorithme 1. Il prend en entrée une base partiellement ordonnée et une formule à déduire. Il donne en sortie une réponse Vrai (True) ou Faux (False) pour la déductibilité de la formule à partir de la base  $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  :

---

**Algorithm 1**  $inf\_Sys\_1(\mathcal{B}_{\mathcal{K}}, \phi > \psi)$

---

```

1: if  $\phi > \psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$  then
2:   return True ; ▷ le cas où la conséquence existe dans la base
3: end if
4: if  $\phi = \varphi \wedge \chi$  then ▷ Point 1, la conséquence contient une conjonction à gauche
5:   return  $inf\_Sys\_1(\mathcal{B}_{\mathcal{K}}, \varphi > \chi \wedge \psi) \wedge inf\_Sys\_1(\mathcal{B}_{\mathcal{K}}, \chi > \psi \wedge \varphi)$  ;
6: else
7:    $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} := \mathcal{C}_{1,3,4,5,6,7,8,9,10}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  ;
8:   for  $\Phi \in (\mathcal{K}, >)$  do
9:     if  $\phi > \psi \in \mathcal{C}_2(\Phi)$  then
10:      return True ; ▷ Point 2
11:     end if
12:   end for
13: end if
14: return False ;

```

---

### 5.2.3 Implémentation des règles d'inférence

L'implémentation de chaque règle d'inférence consiste à vérifier les hypothèses de cette dernière et générer la conséquence si toutes les hypothèses sont vraies.

Nous pouvons voir que la règle d'inférence  $RI_2$  est particulière puisque dans ses hypothèses elle fait appel à la déduction classique. Donc pour utiliser cette règle d'inférence nous devons faire appel à un solveur SAT classique.

### 5.2.3.1 Implémentation des règles d'inférence primitives

L'implémentation des 3 règles d'inférence primitives est résumée dans l'algorithme 2.

---

#### Algorithm 2 Règles d'inférence $RI_1, RI_2, RI_3$

---

```

1: procedure Regle_inference1( $\psi > \phi \wedge \chi, \chi > \phi \wedge \psi$ )
   ▷ Règle d'inférence  $RI_1$ 
2:    $\Phi := \psi \wedge \chi > \phi$ 
3:   return  $\Phi$ 
4: end procedure
5:
6: procedure Regle_inference2( $\phi > \psi, \phi' > \psi'$ )
   ▷ Règle d'inférence  $RI_2$ 
7:   On génère le problème SAT  $\phi \models \phi' \text{ SAT}(\{\phi \wedge \neg\phi'\})$ 
8:   On génère le problème SAT  $\psi' \models \psi \text{ SAT}(\{\psi' \wedge \neg\psi\})$ 
9:   if not( $\text{SAT}(\{\phi \wedge \neg\phi'\})$ ) and not( $\text{SAT}(\{\psi' \wedge \neg\psi\})$ ) then
10:     $\Phi := \phi' > \psi'$ 
11:   return  $\Phi$ 
12:   end if
13: end procedure
14:
15: procedure Regle_inference3( $\phi > \psi, \psi > \phi$ )
   ▷ Règle d'inférence  $RI_3$ 
16:    $\Phi := \perp$ 
17:   return  $\Phi$ 
18: end procedure

```

---

### 5.2.3.2 Règles d'inférence dérivées

L'implémentation des règles d'inférence dérivées est résumée dans l'algorithme 3.



**Algorithm 3** Règles d'inférence dérivées

---

```

1: procedure Regle_inference4( $\Psi = \phi > \psi, \Xi = \chi > \xi$ )           ▷ Règle dérivée RI4
2:   if  $\psi = \chi$  then
3:      $\Phi = \phi > \xi$ 
4:   else
5:     if  $\xi = \phi$  then
6:        $\Phi := \chi > \psi$ 
7:     return  $\Phi$ 
8:   end if
9: end if
10: end procedure
11:
12:
13: procedure Regle_inference5(( $\Psi, \Xi$ ))                               ▷ Règle dérivée RI5
14:   if  $\Psi = \phi > \chi$  and  $\Xi = \psi > \chi$  then
15:      $\Phi := \phi \wedge \psi > \chi$ 
16:   return  $\Phi$ 
17: end if
18: end procedure
19:
20:
21: procedure Regle_inference6(( $\Psi, \Xi$ ))                               ▷ Règle dérivée RI6
22:   if  $\Psi = \phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  and  $\Xi = \psi \rightarrow \chi > \psi \rightarrow \neg\chi$  then
23:      $\Phi := (\phi \vee \psi) \rightarrow \chi > (\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\chi$ 
24:   return  $\Phi$ 
25: end if
26: end procedure
27:
28:

```

---

---

```

1: procedure Regle_inference7(( $\Psi, \Xi$ )) ▷ Règle dérivée  $RI_7$ 
2:   if  $\Psi = \phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  and  $\Xi = \phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  then
3:      $\Phi := \phi \rightarrow (\psi \wedge \chi) > \phi \rightarrow \neg(\psi \wedge \chi)$ 
4:
5:     return  $\Phi$ 
6:   end if
7: end procedure
8: procedure Regle_inference8(( $\Psi, \Xi$ )) ▷ Règle dérivée  $RI_8$ 
9:
10:  if  $\Psi = \phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  and  $\Xi = (\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$  then
11:     $\Phi := \phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$ 
12:    return  $\Phi$ 
13:  end if
14: end procedure
15:
16: procedure Regle_inference9(( $\Psi, \Xi$ )) ▷ Règle dérivée  $RI_9$ 
17:
18:  if  $\Psi = \phi \rightarrow \chi > \phi \rightarrow \neg\chi$  and  $\Xi = \phi \rightarrow \psi > \phi \rightarrow \neg\psi$  then
19:     $\Phi := (\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi > (\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$ 
20:    return  $\Phi$ 
21:  end if
22: end procedure
23: procedure Regle_inference10(( $\Psi$ )) ▷ Règle dérivée  $RI_9$ 
24:
25:  if  $\Psi = \phi > \perp$  then
26:     $\Phi := \phi > \neg\phi$ 
27:    return  $\Phi$ 
28:  end if
29: end procedure

```

---

**Exemple 48 (suite)**  $(\mathcal{K}, >) = \{\phi > \neg\phi \vee \psi, \neg\phi \vee \psi > \neg\phi, \neg\phi \vee \psi > \neg\psi\}$ .

On veut savoir si  $\psi > \neg\psi$  se déduit de  $(\mathcal{K}, >)$  par  $\mathcal{S}_1$ .

On ferme d'abord la base avec les règles d'inférence autres que  $RI_2$ , on obtient donc  $\mathcal{C}_{\{1,3,4,5\}}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$  :

$$ParRI_4 : \phi > \neg\phi; \quad (5.1)$$

$$ParRI_4 : \phi > \neg\psi; \quad (5.2)$$

$$ParRI_5 : \phi \wedge (\neg\phi \vee \psi) > \neg\psi; \quad (5.3)$$

$$ParRI_5 : \phi \wedge (\neg\phi \vee \psi) > \neg\phi; \quad (5.4)$$

Ensuite en utilisant la règle d'inférence  $RI_2$  sur la formule  $\phi \wedge (\neg\phi \vee \psi) > \neg\psi$  (5.3) on trouve :  $\psi > \neg\psi \in \mathcal{C}_{1,2,3,4,5,6,7,8,9}(\mathcal{B}_{\mathcal{K}})$ .

## 5.2.4 Implémentation du système d'inférence par les coupes

Dans cette partie nous présentons l'implémentation de l'inférence par les coupes. Nous rappelons d'abord les principes de cette inférence.

### 5.2.4.1 Rappel sur l'inférence avec les coupes

Une autre méthode d'inférence de la logique possibiliste a été proposée dans la section 3.2. L'idée est d'utiliser l'inférence classique sur une partie de la base partiellement ordonnée calculée en utilisant les coupes.

La fermeture déductive par les coupes d'une base partiellement ordonnée est définie par :

$$\mathcal{C}_c(\mathcal{K}, >) = \{\phi > \psi \in \mathcal{L}_> : (\mathcal{K}, >) \vdash_c \phi > \psi\}.$$

Nous avons vu que l'inférence par les coupes était une inférence correcte mais trop faible pour calculer toute la fermeture déductive du système  $\mathcal{S}_1$  (Proposition 37).

### 5.2.4.2 Implémentation de l'inférence avec les coupes

Cette inférence est basée sur l'inférence classique. Étant donné une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  et deux formules  $\phi, \psi$ , pour montrer que  $\phi > \psi$ , la première étape consiste à calculer la coupe au niveau  $\psi$  c'est à dire toutes les formules dans  $\mathcal{K}$  qui dominent  $\psi$ . Ensuite, par déduction classique, on vérifie si les formules qui appartiennent à la coupe permettent d'inférer la formule  $\phi$ . Notons que si  $\psi \notin \mathcal{K}$ , il est impossible de déduire des conséquences de la forme  $\phi > \psi$ . L'algorithme 4 résume cette procédure.

---

#### Algorithm 4 Inf\_Coup( $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}, \phi > \psi$ )

---

```

1: if  $\psi \notin \mathcal{K}$  then
2:   return False ;
3: else
4:    $\mathcal{K}_\psi^> := \{\gamma \mid \gamma > \psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}\}$  ;
5:   On génère le problème  $SAT(\mathcal{K}_\psi^> \cup \{\neg\phi\})$  ;
6:   return  $not(SAT(\mathcal{K}_\psi^> \cup \{\neg\phi\}))$  ;
7: end if

```

---

Nous avons montré que l'inférence par les coupes est correcte, donc tout ce qu'on déduit avec cette inférence est une conséquence du système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ . Il est clair que l'inférence par les coupes nécessite peu de calculs, donc on pourra l'intégrer dans le processus d'inférence du système  $\mathcal{S}_1$ . Étant donné une base partiellement ordonnée  $(\mathcal{K}, >)$  et deux formules  $\phi, \psi$ , on commence par tester la déductibilité par l'inférence par les coupes, puis en cas d'échec on procède par l'inférence dans  $\mathcal{S}_1$ .

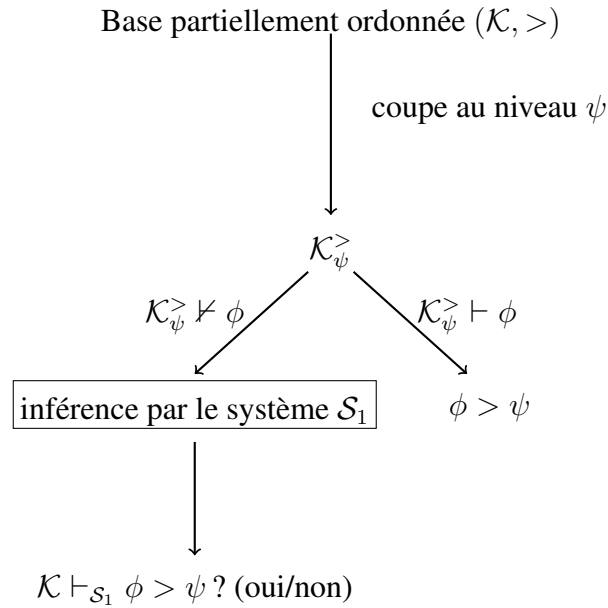


FIGURE 5.1 – Schéma explicatif du processus d'inférence du système  $\mathcal{S}_1$  fusionné avec le système d'inférence par les coupes

### 5.3 Implémentation du système d'inférence possibiliste

Nous avons vu que le système d'inférence possibiliste avec des poids symboliques est plus puissant que le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ , puisque toute conséquence du système  $\mathcal{S}_1$  est une conséquence du système d'inférence possibiliste symbolique (Proposition 45). En effet, ce dernier utilise le principe de spécificité minimale pour compléter l'ordre partiel. Dans cette section, nous allons présenter deux méthodes d'inférence syntaxique qui calculent le degré de nécessité d'une formule possibiliste. La première méthode est basée sur l'utilisation de la notion de sous-base inconsistante minimale. La seconde est inspirée du raisonnement abductif. Nous supposons que les poids portant sur des formules de la base possibiliste sont élémentaires, avec possibilité d'attribuer le même poids à différentes formules.

#### 5.3.1 Vers une méthode d'inférence en logique possibiliste symbolique

Nous calculons le degré syntaxique  $N_\Sigma^+$  défini au chapitre 4 (équation 4.2) :

$$N_\Sigma^+(\phi) = \max_{B \subseteq \Sigma^*, B \vdash \phi} \min_{\phi_j \in B} \alpha_j.$$

Pour des raisons de simplification, dans la suite de ce rapport, ce degré de nécessité syntaxique sera noté  $N_{\Sigma}(\phi)$ <sup>1</sup>.

Calculer le degré de nécessité (syntaxique) d'une formule  $\phi$  revient à trouver tous les sous-bases minimales pour l'inclusion qui infèrent  $\phi$ .

Certaines des sous-bases minimales qui impliquent  $\phi$  peuvent être inconsistantes. Dans ce cas, elles sont minimales inconsistantes dans  $\Sigma^*$ .

**Lemme 7.** *Soit  $B \subseteq \Sigma^*$  inconsistante et minimale qui implique  $\phi$ . Alors  $B$  est minimale inconsistante dans  $\Sigma^*$ .*

**Preuve du Lemme 7:** Soit  $B \subseteq \Sigma^*$  avec  $B$  inconsistante et minimale qui implique  $\phi$ . Supposons que  $B' \subset B$  est minimale inconsistante. Alors  $B' \vdash \phi$  ce qui contredit l'hypothèse sur  $B$ .  $\square$

Donc si  $B \subseteq \Sigma^*$  est une sous-base minimale qui implique  $\phi$ , soit  $B$  est une sous-base consistante, soit  $B$  est inconsistante minimale dans  $\Sigma^*$ . Cependant, il peut arriver que certaines sous-bases minimales inconsistantes dans  $\Sigma^*$  ne soient pas des sous-bases minimales qui impliquent  $\phi$ .

**Proposition 53.** *Soit  $B_1, \dots, B_k$  les sous-bases minimales consistantes dans  $\Sigma^*$  qui impliquent  $\phi$ . Soit  $I_1, \dots, I_l$  les sous-bases minimales inconsistantes dans  $\Sigma^*$  qui ne contiennent aucune base  $B_j$ . On a :*

$$N_{\Sigma}(\phi) = \max(\max_{i=1}^k \min_{\phi_j \in B_i} p_j, \max_{i=1}^l \min_{\phi_j \in I_i} p_j)$$

Notons que  $B \subseteq \Sigma^*$  est minimale impliquant  $\phi$  ssi  $B$  minimale telle que  $B \cup \{\neg\phi\}$  est inconsistante.

**Proposition 54.** *Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  une base possibiliste symbolique et  $B$  une sous-base de  $\Sigma^*$ .*

1. *Si  $K$  est une sous-base inconsistante minimale de  $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$  qui contient  $\neg\phi$ , alors  $K \setminus \{\neg\phi\}$  est minimale consistante impliquant  $\phi$ .*
2. *Si  $B$  est minimale consistante impliquant  $\phi$  alors  $B \cup \{\neg\phi\}$  est une sous-base inconsistante minimale de  $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$ .*

**Preuve de la Proposition 54:**

1) Soit  $K \subseteq \Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$  telle que  $\neg\phi \in K$  et  $K$  est minimale inconsistante dans  $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$ . Soit  $B = K \setminus \{\neg\phi\}$  où  $B \subseteq \Sigma^*$ .  $B$  est consistante, puisque  $K$  est minimale inconsistante, et  $B \vdash \phi$  puisque  $B \cup \{\neg\phi\}$  est inconsistante. Supposons que  $B$  n'est pas minimale qui implique  $\phi$ , il existe  $B' \subset B$  tel que  $B' \vdash \phi$ . Donc  $B' \cup \{\neg\phi\}$  est inconsistante et  $B' \cup \{\neg\phi\} \subset K$  contradiction avec l'hypothèse sur  $K$ .

1. D'après la proposition 41  $N_{\Sigma}(\phi) = N_{\Sigma}^{\perp}(\phi)$

2) Soit  $B \subseteq \Sigma^*$  minimale qui implique  $\phi$  et supposons que  $B$  est consistante. Soit  $K = B \cup \{\neg\phi\}$ ,  $K$  est inconsistante dans  $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$  et contient  $\neg\phi$ . Supposons que  $K$  n'est pas minimale inconsistante dans  $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$ . Il existe  $K' \subset K$  telle que  $K'$  est inconsistante, nous pouvons même supposer que  $K'$  est minimale inconsistante.

- Soit  $\neg\phi \in K'$ , donc par le premier point, on a  $K' \setminus \{\neg\phi\}$  est minimale qui implique  $\phi$  et  $K' \setminus \{\neg\phi\} \subset K \setminus \{\neg\phi\} = B$  contradiction avec l'hypothèse sur  $B$ .
- Soit  $\neg\phi \notin K'$ , alors  $K' \subset B$ , puisque  $K'$  est inconsistante,  $B$  est également inconsistante, ce qui contredit l'hypothèse sur  $B$ .

Alors  $K$  est inconsistante dans  $\Sigma^* \cup \{\neg\phi\}$ . □

Par la proposition 53 et la proposition 54, afin de calculer  $N_\Sigma(\phi)$ , nous devons déterminer :

- $\{B \subseteq \Sigma^* \mid B \cup \{\neg\phi\} \text{ est une sous-base minimale inconsistante dans } \Sigma^* \cup \{\neg\phi\}\}$
- Les sous-bases minimales inconsistantes dans  $\Sigma^*$  qui ne contiennent aucune des  $B_i$  du premier ensemble.

Le calcul ci-dessus revient à un problème bien connu dans la littérature [5, 64, 68, 75, 79] qui consiste à déterminer l'ensemble des sous-bases minimales inconsistantes d'un ensemble  $S$ , noté par  $MIS(S)$ .

Notons

$$\mathcal{B}^+(\phi) = \{B \subseteq \Sigma^* \mid B \cup \{\neg\phi\} \in MIS(\Sigma^* \cup \{\neg\phi\})\}$$

et

$$\mathcal{B}_i(\phi) = \{B \in MIS(\Sigma^*) \mid B \text{ ne contient aucune base de } \mathcal{B}^+(\phi)\}.$$

Soit  $\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{B}^+(\phi) \cup \mathcal{B}_i(\phi)$ . Alors le degré de nécessité d'une formule  $\phi$  peut être calculé par l'expression :

$$\max_{B_i \in \mathcal{B}(\phi)} \min_{\phi_j \in B_i} p_j \tag{5.5}$$

Dans la suite, nous proposons plusieurs procédures qui nous permettront de calculer l'ensemble  $MIS(S)$ .

### 5.3.2 Calcul des sous-bases minimales inconsistantes

Dans la littérature, il existe plusieurs stratégies possibles pour calculer les sous-bases minimales inconsistantes d'une base propositionnelle. Dans la suite, nous rappelons ces stratégies avant d'en choisir une. Notons que ces stratégies portent sur des bases propositionnelles sous forme clausale.

### 5.3.2.1 Stratégie Bottom-up

Cette stratégie (proposée dans [75] dans un contexte différent), consiste à commencer la génération par des sous-bases inconsistantes qui contiennent au moins deux clauses.

Étant donné une base propositionnelle  $S$ , on génère toutes les bases possibles  $B_i$  qui contiennent exactement deux clauses. Si une base  $B_i$  est inconsistante alors on la rajoute à l'ensemble des sous-bases minimales inconsistantes, sinon à chaque itération on rajoute aux bases consistantes  $B_i$  une nouvelle formule tout en assurant que les nouvelles bases restent minimales, puis on refait les tests jusqu'à ce que l'on trouve des bases inconsistantes.

Pour éviter de faire des calculs inutiles, on commence par tester si la base  $S$  est inconsistante pour être certain qu'il y ait au moins une sous-base inconsistante. L'algorithme 5 calcule les sous-bases minimales inconsistantes d'un ensemble  $S$  via la stratégie Bottom-up.

---

#### Algorithm 5 MI\_B( $S$ )

---

```

1:  $MIS = \emptyset$ ;
2: if  $SAT(S)$  then
3:   return  $MIS$ ;
4: else
5:    $\mathcal{B} = \{\{\phi_i, \phi_j\}, \dots, \{\phi_n, \phi_m\}\}$ ;
6:    $MIS := Bottom\_up(\mathcal{B}, S, \emptyset)$ ;
7: end if
8: return  $MIS$ ;

```

---

L'algorithme 6 calcule à chaque itération des sous-bases minimales inconsistantes. Il prend en entrée  $\mathcal{B}$  l'ensemble des sous-bases candidates (au départ, chaque sous-base contient deux clauses, puis à chaque itération on rajoute une clause à chaque sous-base),  $S$  l'ensemble des clauses et  $MIS$  l'ensemble des sous-bases minimales inconsistantes déjà calculées.

**Algorithm 6** Bottom\_up( $\mathcal{B}, S, MIS$ )

---

```

1: if  $\mathcal{B} = \emptyset$  then
2:   return  $\emptyset$ ;
3: else
4:    $\mathcal{B}_{next} := \emptyset$ ;
5:   for  $B_j \in \mathcal{B}$  do
6:     if  $\text{not}(SAT(B_j))$  then
7:       add  $B_j$  to  $MIS$ ;
8:     else
9:       add  $B_j$  to  $\mathcal{B}_{next}$ ;      ▷ Stocker les bases  $B_j$  consistantes pour la suite
10:    end if
11:  end for
12:  for  $B_j \in \mathcal{B}_{next}$  do      ▷ Pour chaque base consistante on rajoute à cette base une
    formule
13:    for  $\phi_i \in S$ , and  $\phi_i \notin B_j$  do      ▷ Choisir une formule  $\phi_i$  dans  $S$ 
14:      if  $B_j \cup \{\phi_i\}$  ne contient pas une sous-base de  $MIS$  then
15:        remplacer  $B_j$  par  $B_j \cup \{\phi_i\}$  dans  $\mathcal{B}_{next}$ ;
16:      end if
17:    end for
18:  end for
19:  return Bottom_up( $\mathcal{B}_{next}, S, MIS$ );
20: end if

```

---

**Exemple 49.** Soit  $S = \{x, \neg y, \neg x, \neg x \vee y\}$ .

Les sous-bases minimales inconsistantes sont (voir Figure 5.2) :

- $\{x, \neg x\}$
- $\{x, \neg x \vee y, \neg y\}$



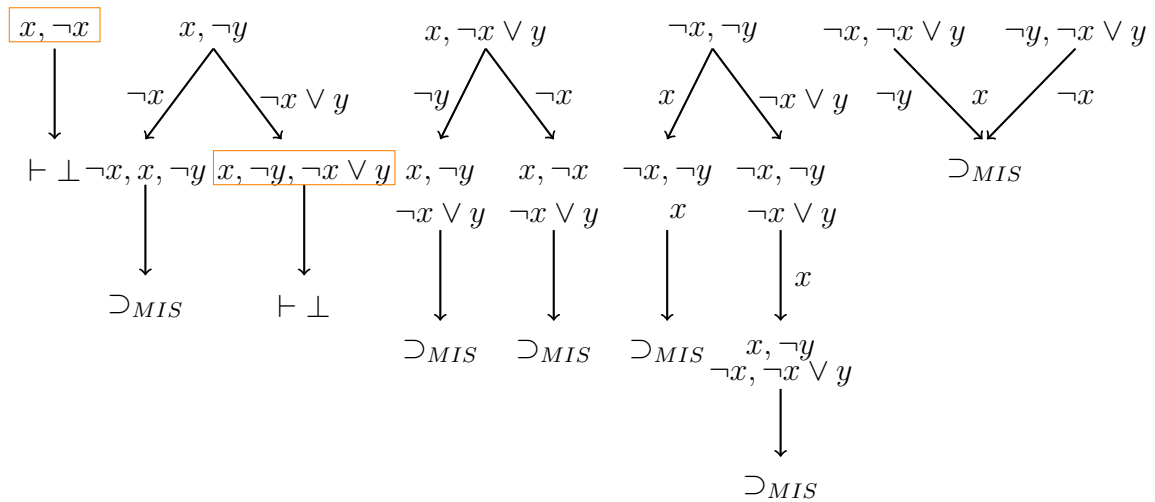


FIGURE 5.2 – Calcul des sous-bases minimales inconsistantes avec la stratégie Bottom-up

### 5.3.2.2 Stratégie Top-down

Cette stratégie présentée dans [75] consiste à commencer par la base entière en essayant d'enlever à chaque itération une formule.

Étant donné une base propositionnelle  $S$ , on commence par tester si la base  $S$  est inconsistante car si la base  $S$  est consistante on arrête la génération. Dans le cas contraire, la première itération consiste à enlever une formule de la base  $S$ , puis on recommence sur chaque base tant qu'elle est inconsistante. Si on trouve une base  $B_i$  consistante on rajoute  $B_i \cup \{\phi_i\}$  (où  $\phi_i$  est la dernière formule enlevée) à l'ensemble des sous-bases minimales inconsistantes  $MIS$ , en respectant la minimalité de  $MIS$ .

La procédure est résumée dans l'algorithme 7. Cet algorithme prend en entrée une base propositionnelle  $S$  et donnera en sortie les sous-bases minimales inconsistantes. Cet algorithme fait appel à l'algorithme 8 qui calcule les sous-bases minimales inconsistantes d'une sous-base  $B_i$ . Il prend en entrée une sous-base  $B_i$ , une formule  $\phi$ , la dernière formule enlevée de la sous-base  $B_i$  et l'ensemble des sous-bases minimales inconsistantes  $MIS$ . Chaque sous-base minimale inconsistante trouvée sera stockée dans  $MIS$ .

---

#### Algorithm 7 MI\_T( $S$ )

---

```

1:  $MIS := \emptyset$ ;
2: if  $SAT(S)$  then
3:   return  $MIS$ ;
4: else
5:    $MIS := Top\_down(S, \perp, \emptyset)$ ;
6: end if
7: return  $MIS$ ;
    
```

---

**Algorithm 8**  $\text{Top\_down}(B_i, \phi, MIS)$ 


---

```

1: if  $SAT(B_i)$  then
2:    $\text{update}(B_i \cup \{\phi\}, MIS)$ ;
3: else
4:   for  $\phi_i \in B_i$  do                                 $\triangleright$  Choisir une formule  $\phi_i$  dans  $B_i$ 
5:      $MIS := MIS \cup \text{Top\_down}(B_i \setminus \{\phi_i\}, \phi_i, MIS)$ ;
6:   end for
7: end if

```

---

L'algorithme 9 permet de mettre à jour l'ensemble des sous-bases minimales inconsistantes MIS calculées. Il prend en entrée une base propositionnelle  $B$  et l'ensemble  $MIS$ . En sortie, l'ensemble MIS sera mis à jour.

**Algorithm 9**  $\text{update}(B, MIS)$ 


---

```

1: for  $B_j \in MIS$  do
2:   if  $B_j \subseteq B$  then
3:     return;
4:   else
5:     if  $B \subset B_j$  then
6:        $MIS := MIS \setminus B_j$ ;
7:     end if
8:   end if
9: end for
10:  $\text{add } B \text{ to } MIS$ ;

```

---

**Exemple 49 (suite)** Soit  $S = \{x, \neg y, \neg x, \neg x \vee y\}$ .

Les bases minimales inconsistantes sont (voir Figure 5.3) :

- $\{x, \neg x\}$
- $\{x, \neg x \vee y, \neg y\}$

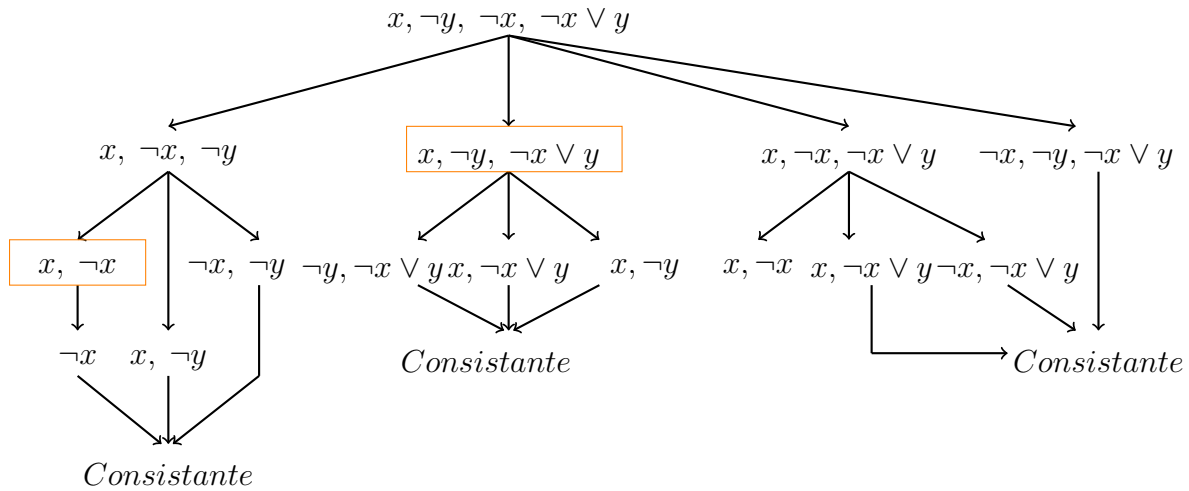


FIGURE 5.3 – Calcul des sous-bases minimales inconsistantes avec la stratégie Top-down

### 5.3.2.3 Calcul à partir des sous-bases maximales consistantes

Une autre stratégie consiste à calculer les sous-bases minimales inconsistantes à partir des sous-bases maximales consistantes (MCS) grâce à la dualité qui existe entre les deux ensembles [5, 64, 68, 79]. L'ensemble des sous-bases maximales consistantes est défini comme suit :

**Définition 52.** Soit  $S$  une base propositionnelle.  $B \subseteq S$  est une sous-base maximale consistante de  $S$  si et seulement si

- $B \not\vdash \perp$
- $\forall B' \supset B, B' \vdash \perp$

On note par  $MCS(S)$  l'ensemble des sous-bases maximales consistantes de  $S$ .

Les auteurs dans [68] ont justifié ce choix de stratégie de calcul par le fait que vérifier la consistance (satisfiabilité) d'une base est plus facile que vérifier son inconsistance. Pour définir les  $MIS(S)$  à partir de  $MCS(S)$ , on utilise la notion de hitting-set introduite par Reiter [83] (Définition 39). Cette notion est aussi connue sous le nom "Hypergraph Transversals" [62].

**Définition 53.** Soit  $S$  une base propositionnelle. On définit le "négatif" de l'ensemble  $MCS(S)$  par :

$$MCS^c(S) = \{S \setminus B \mid B \in MCS(S)\}$$

La première étape consiste donc à calculer l'ensemble  $MCS(S)$ . On peut trouver dans la littérature de nombreux algorithmes [23, 32, 63, 64, 68]. Un algorithme nommé AMC1 [23] nous semble plus efficace, puisque il minimise le nombre d'appels à un solveur SAT. Cet algorithme est basé sur la procédure Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL) pour décider la satisfiabilité d'une formule propositionnelle sous forme conjonctive. La procédure est résumée dans l'algorithme 10.

Elle utilise la notion de littéral pur défini comme suit :

Soit  $Cl$  un ensemble de clauses,  $L$  est un littéral pur dans  $Cl$  si et seulement si  $\neg L$  n'est dans aucune clause de  $Cl$ .

Pour éviter de considérer une variable propositionnelle plusieurs fois dans les sous-bases maximales consistantes, on utilise une méthode de marquage. Au départ, toutes les variables sont dans l'état "non-marqué", puis à chaque utilisation d'une variable propositionnelle, son état sera changé en "marqué" pour dire que cette variable a été considérée dans une sous-base maximale, et on refait le même traitement avec une autre variable non-marquée. La procédure est donc décrite comme suit :

1. Un littéral pur n'est jamais une source d'inconsistance. Donc une clause qui contient un littéral pur est présente dans toutes les sous-bases maximales consistantes. La première étape consiste à chercher  $\Delta$  la sous-base qui contient tous les clauses qui contiennent au moins un littéral pur.
2. Les clauses qui restent contiennent des littéraux non purs, donc pour chaque variable  $v$  non-marquée, on construit deux sous-bases maximales, la première contient les clauses qui incluent le littéral  $v$  et les clauses de la base  $\Delta$ . On note cette base  $\Delta_1$ . De même, on construit une autre sous-base qui contient les clauses qui incluent  $\neg v$  et les clauses de la base  $\Delta$ , on note cette base  $\Delta_2$ . On marque chaque variable considérée et on refait le même traitement avec une autre variable non-marquée sur les bases  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  séparément.
3. Si on a exploré toutes les variables de la base (toutes les variables sont marquées), on vérifie que les sous-bases construites sont maximales consistantes (i.e. si on rajoute une formule à une telle base elle devient inconsistante).

On utilise un tableau de booléens ( $Marq$ ) pour marquer les variables. On note par  $v_\ell$  la variable propositionnelle du littéral  $\ell$ . L'algorithme 10 prend en entrée une base propositionnelle sous forme clausale et il donne en sortie l'ensemble des sous-bases maximales consistantes  $MCS(S)$ . L'algorithme 11 prend en entrée une base propositionnelle sous forme clausale  $S$ , une sous-base  $\Delta$  (une sous-base maximale consistante en construction) et un tableau de marquage de variables  $Marq$ , et donne en sortie les sous-bases maximales consistantes de  $S$ .

**Algorithm 10** MCS( $S$ )

---

```

1:  $MCS := \emptyset$ ;
2:  $\mathcal{V} :=$  l'ensemble des variables ;
3:  $\forall v \in \mathcal{V}, Marq[v] := false$ ;           ▷ On étiquette toutes les variables de  $S$  comme
   non-marquées
4: return Find-MC-Subsets( $S, \emptyset, Marq, \emptyset$ );

```

---

**Algorithm 11** Find-MC-Subsets( $S, \Delta, Marq, MCS$ )

---

```

1: if  $\forall v \in \mathcal{V}, Marq[v] = true$  then                                     ▷ le point 3
2:    $D := \{\vee C \mid C \in (S \setminus \Delta)\}$ ;
3:   if  $not(SAT(\Delta \cup D))$  then
4:     add  $\Delta$  to  $MCS$ ;
5:     return  $MCS$ ;
6:   end if
7: else
8:   if  $\exists \ell$  littéral pur  $\in S \setminus \Delta$  et  $Marq[v_\ell] = false$  then       ▷ le point 1
9:      $\Delta := \Delta \cup \{C \mid C \in (S \setminus \Delta) \wedge \ell \text{ et } \ell \in C\}$ ;
10:     $Marq[v_\ell] := true$ ;
11:    return Find-MC-Subsets( $S, \Delta, Marq$ );
12:   else                                                                 ▷ le point 2
13:      $\exists x$  variable non-marquée
14:      $Marq(x) := true$ ;
15:      $\Delta_1 := \Delta \cup \{C \mid C \in (S \setminus \Delta) \text{ et } x \in C\}$ ;
16:      $\Delta_2 := \Delta \cup \{C \mid C \in (S \setminus \Delta) \text{ et } \neg x \in C\}$ ;
17:      $MC_1 :=$  Find-MC-Subsets( $S, \Delta_1, Marq, MCS$ );
18:      $MC_2 :=$  Find-MC-Subsets( $S, \Delta_2, Marq, MCS$ );
19:     return  $MC_1 \cup MC_2$ ;
20:   end if
21: end if

```

---

**Exemple 50.** Soit  $\mathcal{K} = \{\neg x \vee z, \neg y \vee z, x, y, z, \neg z\}$  une base propositionnelle de clauses et  $V = \{x, y, z\}$  l'ensemble des variables.

On calcule  $MCS(\mathcal{K})$  : Soit  $Marq = [false, false, false]$ .

On calcule  $Find\text{-}MC\text{-}Subsets(\{\mathcal{K}, \emptyset, [false, false, false]\})$ ;

Il n'y a aucun littéral pur.  $\Delta = \emptyset$ .

Ligne 12 : soit  $z$  variable non-marquée.

$\Delta_1 = \{\neg x \vee z, \neg y \vee z, z\}$  et  $\Delta_2 = \{\neg z\}$ ;

On calcule  $Find\text{-}MC\text{-}Subsets(\mathcal{K}, \Delta_1, [false, false, true])$  :

Ligne 7 :  $\ell = x$  dans  $\mathcal{K} \setminus \Delta_1 = \{x, y, \neg z\}$  donc  $Marq = [true, false, true]$ .

$\Delta_1 = \{\neg x \vee z, \neg y \vee z, z, x\}$

On calcule  $\text{Find-MC-Subsets}(\mathcal{K}, \Delta_1, [\text{true}, \text{false}, \text{true}]) :$

Ligne 7 :  $\ell = y$  dans  $\mathcal{K} \setminus \Delta_1 = \{y, \neg z\}$  donc  $\text{Marq} = [\text{true}, \text{true}, \text{true}]$ .

$\Delta_1 = \{\neg x \vee z, \neg y \vee z, z, x, y\}$

On calcule  $\text{Find-MC-Subsets}(\mathcal{K}, \Delta_1, [\text{true}, \text{true}, \text{true}]) :$

Ligne 1 :  $D = \{\neg z\}$ ,  $\text{not}(\text{SAT}(\Delta_1 \cup D))$ . Donc  $\Delta_1 \in \text{MC}$ .

On refait la même procédure avec  $\Delta_2$ . Donc les sous-bases maximales consistantes de  $\mathcal{K}$  sont :

- $MC_1 = \{\neg x \vee z, \neg y \vee z, z, x, y\}$
- $MC_2 = \{\neg z, x, \neg y \vee z\}$
- $MC_3 = \{\neg z, x, y\}$
- $MC_4 = \{\neg z, \neg x \vee z, y\}$
- $MC_5 = \{\neg z, \neg x \vee z, \neg y \vee z\}$

### 5.3.2.4 Calcul des hitting-sets minimaux (HSM)

Après avoir calculé l'ensemble des sous-bases maximales consistantes, calculer les sous-bases minimales inconsistantes revient à calculer des hitting-sets [68, 80].

La calcul des hitting-sets minimaux a été largement étudié dans la littérature [1, 80, 83]. Pour notre implémentation nous considérons une heuristique proposée dans [1]. La procédure est inspirée de l'algorithme STACCATO. L'idée est d'attribuer à chaque élément le nombre d'occurrences de cet élément dans la collection d'ensembles dont on calcule les hitting-sets.

Il est facile de voir qu'un élément présent dans tous les ensembles est un hitting-set minimal à lui tout seul. La procédure se base sur ce résultat en commençant par l'élément qui a le plus grand nombre d'occurrences.

Étant donné un ensemble d'ensembles  $\mathcal{S}$ , on choisit un ensemble  $X$  qui a le plus grand score, le score étant défini par la somme des nombres d'occurrences de ses éléments.

- Le calcul des hitting-sets minimaux se fait en choisissant à chaque itération l'élément qui a le plus grand nombre d'occurrences dans  $X$
- Lorsqu'on a traité un élément de  $X$ , on le supprime de tous les ensembles de  $\mathcal{S}$  qui le contiennent et on recommence sur la collection réduite jusqu'à ce qu'on épuise les éléments de  $X$ .

On utilise une liste  $Occ$  qui contient les nombres d'occurrences des éléments des ensembles de  $\mathcal{S}$ , cette liste est mise à jour à chaque itération.

L'algorithme 12 prend en entrée une collection d'ensembles  $\mathcal{S}$  et donne en sortie la liste des hitting-sets minimaux. L'algorithme 13 prend en entrée l'ensemble d'ensembles

$\mathcal{S}$ , le hitting-set en construction  $HSC$ , l'élément ayant le plus grand nombre d'occurrences  $e$ , les nombres d'occurrences des éléments  $Occ$  et l'ensemble des hitting-sets minimaux  $MIS$ .

---

**Algorithm 12** ALL\_HSM( $\mathcal{S}$ )
 

---

```

1:  $HIS := \emptyset$ ;
2:  $Occ :=$  la liste des occurrences des éléments des ensembles de  $\mathcal{S}$ ;
3:  $X :=$  l'élément de  $\mathcal{S}$  qui a le plus grand score;
4: for  $e \in X$  avec  $e$  l'élément ayant le plus grand nombre d'occurrences do
5:   HSM( $\mathcal{S}, \emptyset, e, Occ, HIS$ );
6:    $\mathcal{S} := \{B_i \setminus \{e\} \mid B_i \in \mathcal{S}\}$ ;
7: end for
8: return  $HIS$ ;

```

---



---

**Algorithm 13** HSM( $\mathcal{S}, HSC, e, Occ, HIS$ )
 

---

```

1: if  $\mathcal{S} = \emptyset$  then
2:   return  $\emptyset$ 
3: end if
4: if  $Occ(e) = |\mathcal{S}|$  then
5:    $HIS := HIS \cup \{HSC \cup \{e\}\}$ ;
6:    $\mathcal{S} := \{B_i \setminus \{e\} \mid B_i \in \mathcal{S}\}$ ;
7: end if
8:  $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus \{B_i \mid e \in B_i\}$ ;
9:  $Occ' :=$  la liste des occurrences des éléments dans  $\mathcal{S}'$ ;
10:  $e'$  élément l'élément ayant le plus grand nombre d'occurrences dans  $\mathcal{S}'$ ;
11: return HSM( $\mathcal{S}', HSC \cup \{e\}, e', Occ', HIS$ );

```

---

**Exemple 50 (suite)** Si on considère l'ensemble MCS de l'exemple 50, on calcule les MIS en calculant les hitting-sets minimaux sur  $MCS^e(S)$ . On a :

- $\mathcal{K} = \{z, \neg x \vee z, \neg y \vee z, x, y, \neg z\}$
- $MCS(\mathcal{K}) = \{\{z, \neg x \vee z, \neg y \vee z, x, y\}, \{\neg z, x, y\}, \{\neg z, x, \neg y \vee z\}, \{\neg z, \neg x \vee z, y\}, \{\neg z, \neg x \vee z, \neg y \vee z\}\}$
- $\mathcal{S} = MCS^e(\mathcal{K}) = \{\{\neg z\}, \{\neg x \vee z, y, z\}, \{\neg x \vee z, \neg y \vee z, z\}, \{x, \neg y \vee z, z\}, \{x, y, z\}\}$

On calcule ALL\_HSM( $\mathcal{S}$ ) :

Les nombres d'occurrences des clauses de la base  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{S}$  sont  $Occ = \{(z, 4), (\neg x \vee z, 2), (\neg y \vee z, 2), (x, 2), (y, 2), (\neg z, 1)\}$ .

$X = \{\neg x \vee z, y, z\}$  a le plus grand score :  $Occ(\neg x \vee z) + Occ(y) + Occ(z) = 2 + 2 + 4 = 8$ .

Soit  $e = z$ .

On commence par l'élément  $(z, 4)$ , on calcule  $\text{HSM}(\mathcal{S}, \emptyset, z, \text{Occ}, \emptyset)$  :

$\text{Occ}(z)$  est inférieur à la taille de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Donc on a :  $\mathcal{S}' = \{\{\neg z\}\}$  et  $\text{Occ}' = \{(\neg z, 1)\}$ .

On calcule  $\text{HSM}(\mathcal{S}', \{z\}, \neg z, \text{Occ}', \emptyset)$  :

On a  $\text{Occ}(\neg z) = |\mathcal{S}'|$ , alors  $\{z, \neg z\} \in \text{MIS}$  et  $\mathcal{S}' = \emptyset$ .

On supprime  $z$  alors  $\mathcal{S} = \{\{\neg z\}, \{\neg x \vee z, \neg y \vee z\}, \{\neg x \vee z, y\}, \{\neg y \vee z, x\}, \{x, y\}\}$

Le prochain élément est  $(\neg x \vee z, 2)$  et on refait la même procédure avec l'ensemble réduit.

Au final, on trouve ces trois sous-bases minimales inconsistantes :

- $\{z, \neg z\}$
- $\{\neg x \vee z, x, \neg z\}$
- $\{\neg y \vee z, y, \neg z\}$

Parmi les trois stratégies de calcul des sous-bases minimales consistantes, la troisième est la plus efficace puisque la recherche des sous-bases maximales consistantes est un problème plus simple que celle des sous-bases minimales inconsistantes [68]. D'un point de vue des appels au solveur SAT, cette troisième stratégie utilise moins d'appels que les deux autres. C'est donc celle que nous utiliserons pour notre implémentation.

### 5.3.3 Inférence d'un couple $\phi > \psi$ en logique possibiliste symbolique

La différence entre l'inférence possibiliste symbolique et l'inférence du système  $\mathcal{S}_1$  est qu'en logique possibiliste symbolique (ou standard), on infère une formule et son poids associé. Cependant, l'inférence d'un couple de formules de la forme  $\phi > \psi$  est possible dès lors que les deux poids associés aux deux formules sont comparables. Nous rappelons que le degré de nécessité est calculé en utilisant l'équation 4.2.

Le but de LPS est de comparer les degrés de certitude d'un couple de formules via les poids associés aux deux formules (les degrés de nécessité dans la fermeture déductive) en accord avec la définition 40.

**Exemple 51.** Soit  $\Sigma = \{(\phi, a), (\neg\phi \vee \psi, b), (\neg\phi, c), (\neg\psi, s)\}$  et  $\mathcal{C} = \{a > b, b > c, b > s\}$ . Alors,  $N_\Sigma(\psi) = \max(\min(a, b), \min(a, c), \min(a, b, s)) = \max(b, c) = b$  et  $N_\Sigma(\phi) = a$ . Donc,  $(\Sigma, \mathcal{C})$  permet de déduire  $\phi > \psi$ .

Notons qu'en logique possibiliste, pour comparer deux formules possibilistes en comparant leurs degrés de certitude, par la définition 40 il faut que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{C}$  soit non vide. Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est vide, aucune inégalité stricte ne peut être déduite entre les poids des formules.



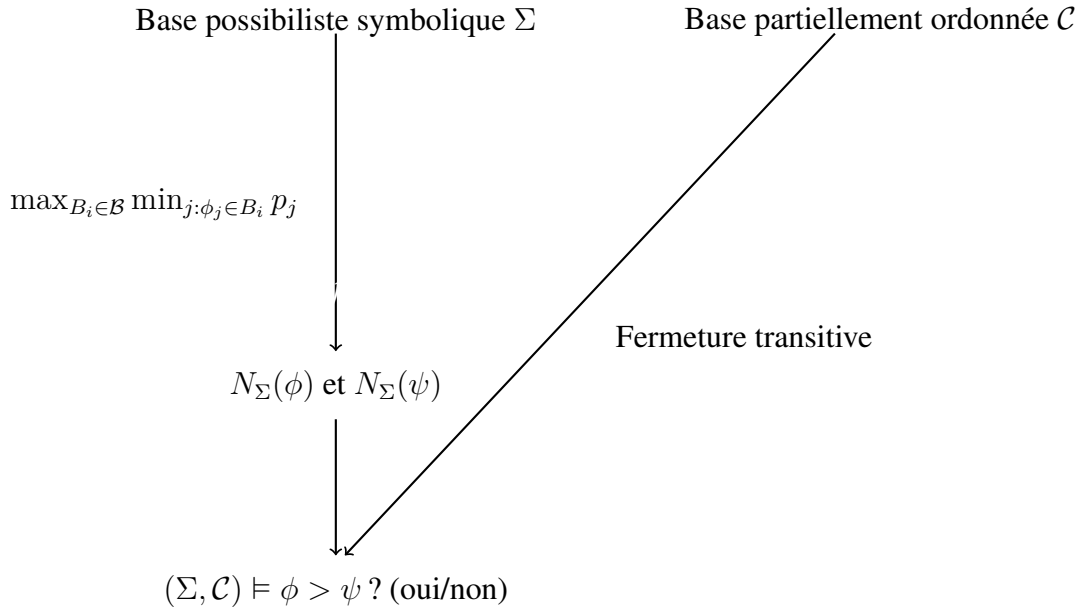


FIGURE 5.4 – Schéma explicatif du processus d’inférence possibiliste symbolique

Étant donné deux formules  $\phi, \psi$ , une première étape consiste à calculer les degrés de nécessité de chaque formule. Donc on obtient deux max / min expressions. On cherche à comparer  $N_\Sigma(\phi)$  et  $N_\Sigma(\psi)$  :

$$\max_{B_i \in \mathcal{B}} \min_{j: \phi_j \in B_i} a_j > \max_{B_j \in \mathcal{B}} \min_{i: \phi_i \in B_j} b_j$$

est de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \max(\min(a_1, \dots, a_n)) & & \max(\min(b_1, \dots, b_m)) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & > & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \min(a'_1, \dots, a'_p) & & \min(b'_1, \dots, b'_q) \end{array}$$

Donc  $N_\Sigma(\phi) > N_\Sigma(\psi)$  si et seulement si pour toute expression  $\min(b_1, \dots, b_m)$  dans  $N_\Sigma(\psi)$ , il existe une expression  $\min(a_1, \dots, a_n)$  dans  $N_\Sigma(\phi)$  telle que  $\min(a_1, \dots, a_n) > \min(b_1, \dots, b_m)$ .

De plus une expression de la forme  $\min(E_1)$  domine une autre expression de la même forme  $\min(E_2)$  où  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous ensembles de poids, si et seulement si  $\forall p \in E_1, \exists q \in E_2, p > q$ .

L'algorithme 14 décide si une min expression en domine une autre. Cet algorithme prend deux ensembles de poids  $F$  et  $G$  et un ensemble de contraintes sur les poids symboliques  $\mathcal{C}$ . Il donne en sortie la décision si  $F$  domine  $G$  ou non.

---

**Algorithm 14**  $Comp\_Min(F, G, \mathcal{C})$ 


---

```

1: Dec :=false ;
2: while Dec=false and  $b_i \in G$  do
3:   Dec :=true ;
4:   while Dec=true and  $a_i \in F$  do
5:     Dec :=Dec  $\wedge a_i > b_i \in \mathcal{C}$  ;
6:   end while
7: end while
8: return Dec ;

```

---

L'algorithme 15 décide si une max expression en domine une autre. Il prend en entrée  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux familles d'ensembles de poids et un ensemble de contraintes sur les poids symboliques  $\mathcal{C}$ . Il donne en sortie la décision si  $\mathcal{F}$  domine  $\mathcal{G}$  ou non.

---

**Algorithm 15**  $Comp\_Max(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 


---

```

1: Dec :=false ;
2: while Dec=false and  $E_j \in \mathcal{F}$  do
3:   Dec :=true ;
4:   while Dec=true and  $E_i \in \mathcal{G}$  do
5:     Dec :=Dec  $\wedge Comp\_Min(E_i, E_j, \mathcal{C})$  ;
6:   end while
7: end while
8: return Dec ;

```

---

**Exemple 52.** Soit  $\Sigma = \{(\neg\phi \vee \psi, a), (\phi, b), (\neg\psi, c), (\psi, d), (\neg\phi, e)\}$  une base possibiliste symbolique avec  $\mathcal{C} = \{a > d, d > e, b > e, c > e, d > c\}$ .

On cherche à comparer  $N_\Sigma(\psi)$  et  $N_\Sigma(\neg\phi)$ . On calcule  $N_\Sigma(\psi)$  :

Soit  $\Sigma^* = \{\neg\phi \vee \psi, \phi, \psi, \neg\psi, \neg\phi\}$ . Les éléments de  $MIS(\Sigma^* \cup \{\neg\psi\})$  qui contiennent  $\neg\psi$  sont :

- $\{\psi, \neg\psi\}$
- $\{\neg\phi \vee \psi, \phi, \neg\psi\}$

Les éléments de  $MIS(\Sigma^*)$  qui ne contiennent aucune  $B_i \in MIS(\Sigma^* \cup \{\neg\psi\})$  sont :

- $\{\phi, \neg\phi\}$

$$\begin{aligned} N_{\Sigma}(\psi) &= \max(d, \min(a, b), \min(b, e)) \\ &= \max(d, \min(a, b)) \end{aligned}$$

On calcule maintenant  $N_{\Sigma}(\neg\phi)$  :

Les éléments de  $MIS(\Sigma^* \cup \{\phi\})$  qui contiennent  $\phi$  sont :

- $\{\phi, \neg\phi\}$
- $\{\neg\phi \vee \psi, \phi, \neg\psi\}$

Les éléments de  $MIS(\Sigma^*)$  qui ne contiennent aucune  $B_i \in MIS(\Sigma^* \cup \{\phi\})$  sont :

- $\{\psi, \neg\psi\}$

$$N_{\Sigma}(\neg\phi) = \max(e, \min(a, c), \min(c, d)) = c$$

On conclut que  $\psi > \neg\phi$  puisque  $\max(d, \min(a, b)) \geq d > c$ .

Plutôt que d'appliquer ces tests de manière brute, il est naturel d'utiliser les ensembles de poids élémentaires au lieu de formules, et de simplifier les expressions de  $N_{\Sigma}(\phi)$  et  $N_{\Sigma}(\psi)$  avant de les comparer. La technique présentée dans la section suivante est utile à cet effet.

### 5.3.4 Inférence syntaxique basée sur les ATMS

Dans cette section nous présentons une méthode d'inférence pour la logique possibiliste symbolique inspirée d'une approche utilisée pour le raisonnement abductif. Cette approche utilise les concepts des ATMS [30,31]. Il existe des travaux antérieurs qui lient la LPS et les ATMS, une version possibiliste des ATMS a été proposée dans [43]. Dans [35], les ATMS sont utilisés pour faire de la décision qualitative en logique possibiliste.

#### 5.3.4.1 Rappel sur les ATMS (Assumption-base Truth Maintenance Systems)

Dans cette section, nous rappelons les concepts de base des ATMS. Un ATMS a pour but de gérer les interdépendances dans une base de connaissances. Les mécanismes spécifiques d'un ATMS sont fondés sur la distinction entre deux ensembles de données  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{A}$  (représentées par des variables propositionnelles), où  $\mathcal{A}$  est un ensemble d'hypothèses et  $\mathcal{J}$  est une base de justifications (connaissances). L'idée de base est que les hypothèses sont des données primitives, toutes les autres données peuvent en être dérivées. Ce sont les paramètres qui caractérisent les différentes situations pour un problème donné, ce problème est décrit par un ensemble de clauses appelés justifications. Tout ensemble d'hypothèses peut caractériser une situation.

**Définition 54** (Environment). *On appelle environnement tout sous-ensemble  $E \subset \mathcal{A}$ .*

La principale vocation d'un ATMS est de répondre à deux questions. La première est la suivante : “Étant donné un ensemble de justifications, quels sont les environnements menant à une contradiction” ? On répond à cette question par le concept de *nogood*.

**Définition 55** (Nogood). *Un nogood  $E$  est un environnement incohérent minimal, c'est à dire :  $E$  est minimal pour l'inclusion tel que  $\mathcal{J} \cup E \vdash \perp$*

La deuxième question est : “Sur la base de l'ensemble des justifications, quels environnements permettent de croire en une donnée” ? On répond à cette question par le concept de label.

**Définition 56** (Label). *Soit  $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  la base d'un ATMS et  $\phi$  une donnée.  $Label(\phi)$  est un ensemble d'environnements tel que :*

- aucun  $E_i \in Label(\phi)$  ne contient un nogood (Cohérence);
- si  $E_i \in Label(\phi)$  alors  $\mathcal{J} \cup E_i \vdash \phi$  (Correction);
- $\forall E_i$ , tel que  $\mathcal{J} \cup E_i \vdash \phi$ ,  $E_i$  contient un élément de  $Label(\phi)$  (Complétude);
- $\forall E_i \in Label(\phi)$ ,  $\nexists E_j \in Label(\phi)$  et  $E_j \subset E_i$  (Minimalité).

Notons que l'ATMS de base a été étendu pour pouvoir calculer le label d'une formule propositionnelle quelconque, via un codage par des hypothèses supplémentaires.

### 5.3.4.2 Codage d'une base possibiliste symbolique et adaptation

L'idée est de considérer les poids impliqués dans le calcul de  $N_\Sigma(\phi)$  comme des hypothèses qui expliquent la certitude de  $\phi$ .

Étant donné  $(\Sigma, \mathcal{C})$ , la base possibiliste  $\Sigma$  est codée par une paire  $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$  comme suit : chaque poids élémentaire  $a_i$  est associé à une variable propositionnelle (pour simplifier, nous notons aussi  $a_i$  la variable propositionnelle correspondante) et chaque formule possibiliste  $(\phi_i, a_i)$  est codée par la formule propositionnelle  $\neg a_i \vee \phi_i$ .

**Définition 57.** *Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  une base possibiliste symbolique. La base ATMS associée est  $(\mathcal{J}_\Sigma, \mathcal{A})$  où :*

- $\mathcal{J}_\Sigma = \{\neg p \vee \phi \mid (\phi, p) \in \Sigma\}$
- $\mathcal{A} = \{p_i \mid (\psi_i, p_i) \in \Sigma\}$

Dans le but de calculer  $N_\Sigma(\phi)$ , nous devons calculer les sous-bases de  $\Sigma^*$  qui sont minimales consistantes impliquant  $\phi$ , et puis certaines des sous-bases inconsistantes minimales de  $\Sigma^*$ . De plus, pour calculer  $N_\Sigma(\phi)$ , nous avons seulement besoin des poids associés aux formules appartenant à ces sous-bases.

Avec le codage de la définition 57, il est facile de voir que chaque sous-base consistante de  $\Sigma^*$  qui est minimale impliquant  $\phi$  correspond exactement à un environnement dans  $Label(\phi)$  par rapport à la base  $(\mathcal{J}_\Sigma, \mathcal{A})$ . Et chaque sous-base inconsistante minimale de  $\Sigma^*$  correspond exactement à un *nogood* par rapport à la base  $(\mathcal{J}_\Sigma, \mathcal{A})$ .

**Proposition 55.** Soit  $(\Sigma, \mathcal{C})$  une base possibiliste symbolique et la base ATMS associée  $(\mathcal{J}_\Sigma, \mathcal{A})$ . Soit  $\mathcal{U}(\phi) = \{U_1, \dots, U_k\}$  l'ensemble des nogoods utiles pour  $\phi$ , c.à.d. les nogoods qui ne contiennent pas d'environnement de  $\text{Label}(\phi)$ .

$$N_\Sigma(\phi) = \max(\max_{E \in \text{Label}(\phi)} \min_{a \in E} a, \max_{i=1}^k \min_{a \in U_i} a)$$

**Exemple 52 (suite)** On considère la même base possibiliste symbolique

$\Sigma = \{(\neg\phi \vee \psi, a), (\phi, b), (\neg\psi, c), (\psi, d), (\neg\phi, e)\}$  avec  $\mathcal{C} = \{a > d, d > e, b > e, c > e, d > c\}$ .

Cette base sera traduite par :

- $\mathcal{J}_\Sigma = \{\neg a \vee \neg\phi \vee \psi, \neg b \vee \phi, \neg c \vee \neg\psi, \neg d \vee \psi, \neg e \vee \neg\phi\}$
- $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e\}$ .

Calculons  $N_\Sigma(\psi)$  :

Par la proposition 55,  $N_\Sigma(\psi) = \max(\max_{E \in \text{Label}(\psi)} \min_{a \in E} a, \max_{i=1}^k \min_{a \in U_i} a)$ .

On a :

- $\text{Label}(\psi) = \{\{d\}, \{a, b\}\}$
- $\mathcal{U}(\psi) = \{\{b, e\}\}$

Donc  $N_\Sigma(\psi) = \max(d, \min(a, b), \min(b, e))$ .

Il reste ensuite à comparer les poids symboliques en utilisant la procédure présentée dans la section précédente.

### 5.3.5 Comparaison avec l'inférence possibiliste symbolique

L'un des avantages de la dernière méthode réside dans le fait que tout est calculé seulement en termes de poids (dans le label de la formule et les nogoods utiles). Puis, les contraintes sur les poids sont utilisées à la fin pour simplifier les expressions max / min, alors que dans la méthode de la section 5.3.3, nous utilisons toutes les formules de la base possibiliste symbolique. De plus, dans la méthode ATMS, on peut penser à exploiter les contraintes pour simplifier les ensembles de poids impliqués dans la comparaison des degrés de nécessité au moment du calcul des ensembles (label et nogoods utiles).

Il est donc naturel de simplifier les expressions  $N_\Sigma(\phi)$  et  $N_\Sigma(\psi)$  avant de les comparer,

- en remplaçant chaque ensemble de poids  $B \in \text{Label}(\phi) \cup \mathcal{U}(\phi)$  par l'ensemble réduit de poids  $W = \min_{\mathcal{C}}(B)$  constitué par les poids minimaux dans  $B$  selon l'ordre partiel défini par les contraintes  $\mathcal{C}$ ,
- ensuite par la suppression des ensembles  $W$  dominés, dans le sens où  $\mathcal{C} \models \min\{a \in W'\} > \min\{a \in W\}$  par l'algorithme 14.

Nous pouvons appliquer ces simplifications dès que les éléments des labels ou nogoods utiles sont produits.

**Exemple 53.** *Considérons la base possibiliste  $\Sigma = \{(\neg\phi \vee \psi, a), (\phi, b), (\neg\psi, c), (\neg\phi, e)\}$  avec  $\mathcal{C} = \{a > b, a > c, b > e, c > e\}$ . Nous voulons vérifier si  $\mathcal{C} \models N_\Sigma(\psi) > N_\Sigma(\neg\phi)$ . Notons que  $\text{Label}(\psi) = \{\{a, b\}\}$  et  $\mathcal{U}(\psi) = \{\{b, e\}\}$ . De même on calcule  $\text{Label}(\neg\phi) = \{\{a, c\}, \{e\}\}$ , concernant les nogoods, aucun n'est utile. En utilisant  $\mathcal{C}$  on peut réduire  $\{a, b\}$  à  $\{b\}$  et  $\{b, e\}$  à  $\{e\}$  et le degré de nécessité de  $\psi$  à  $b$ , puisque  $b > e \in \mathcal{C}$ . De même, on peut réduire  $\{a, c\}$  à  $\{c\}$  et le degré de nécessité de  $\neg\phi$  à  $c$  puisque  $c > e \in \mathcal{C}$ . On a  $b > c \notin \mathcal{C}$ , nous ne pouvons pas conclure que  $\psi > \neg\phi$  (ni l'inverse).*

En général, la suppression des ensembles de poids dominés peut être obtenue au moyen de l'algorithme 14 appliqué à toutes les paires d'ensembles réduits dans  $\text{Label}(\phi) \cup \mathcal{U}(\phi)$ .

Finalement, nous pouvons comparer l'ensemble des sous-ensembles réduits non-dominés de  $\text{Label}(\phi) \cup \mathcal{U}(\phi)$  et de  $\text{Label}(\psi) \cup \mathcal{U}(\psi)$ , dans le but de décider si  $\phi > \psi$ , en utilisant l'algorithme 15.

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre est une autre étape dans l'étude de l'inférence d'une base propositionnelle partiellement ordonnée. Nous avons présenté l'implémentation de deux systèmes d'inférence à partir de bases partiellement ordonnées qui appartiennent à deux familles de logiques différentes. Nous avons d'abord présenté une méthode de preuve pour la logique du système  $\mathcal{S}_1$  qui est un fragment de logique conditionnelle. Nous avons montré comment utiliser les règles d'inférence de ce système afin de raisonner sur des bases partiellement ordonnées.

Nous avons aussi présenté une version de la logique possibiliste avec des poids symboliques partiellement ordonnés avec son implémentation. Cette logique est différente du cadre des logiques conditionnelles [26, 67] par l'utilisation du principe de spécificité minimale qui est plus productif.

Deux méthodes d'inférence syntaxique pour cette logique sont définies qui nous permettent de déduire de nouvelles formules avec des poids symboliques complexes (degrés de nécessité de formules). La première méthode nécessite l'énumération des sous-ensembles minimaux inconsistants pour calculer les degrés de nécessité. La deuxième méthode se base sur l'utilisation du formalisme ATMS. Elle permet de prendre en compte les contraintes sur les poids d'une manière plus directe et facilite la comparaison des degrés de nécessité symboliques.

---

# CONCLUSION

---

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Résumé conclusif</b> . . . . .	<b>147</b>
<b>II</b>	<b>Perspectives</b> . . . . .	<b>148</b>

---

## I Résumé conclusif

Ce travail est essentiellement consacré à l'extension de la logique possibiliste standard avec des bases de connaissances totalement ordonnées au cas partiel avec des bases partiellement ordonnées. Plus spécifiquement, les principales contributions sont :

- Étude des possibles extensions des relations d'ordre partiel sur les éléments d'un ensemble à un ordre partiel sur ses parties ainsi que des propriétés de chaque relation obtenue.
- Étude détaillée du passage d'un ordre sur les formules à un ordre sur les interprétations et vice versa.
- Extension de la logique possibiliste au cas partiellement ordonné par le biais d'une relation d'ordre partiel. L'extension a été effectuée en faisant plusieurs tentatives, une à base d'une approche sémantique qui ne donne pas de bons résultats. Elle perd des connaissances dans le processus de raisonnement. Une à base de coupe qui s'avère incomplète. La dernière approche à base d'une approche syntaxique qui est la piste la plus prometteuse et qui donne de bons résultats.
- Définition de deux systèmes d'inférence à base de deux relations d'ordre partiel qui satisfont le plus de propriétés.
- Extension de la logique possibiliste au cas partiellement ordonné avec des poids symboliques. Une preuve originale de complétude de cette logique est donnée.

Deux techniques d'inférence possibiliste ont été définies, une utilisant la notion de sous-bases minimales inconsistantes et l'autre utilisant les notions d'ATMS dans le raisonnement abductif.

- Implémentation des notions étudiées.

## II Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse a répondu à plusieurs questions concernant le raisonnement sur des bases partiellement ordonnées ainsi que l'extension de la logique possibiliste au cas partiellement ordonné. Il a ainsi ouvert de nombreuses pistes prometteuses :

Le chapitre 3 propose deux systèmes d'inférence  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  avec un langage très restreint où un atome est un couple de formules propositionnelles ordonnées avec une relation de certitude relative et où l'on ne considère que des conjonctions d'atomes. Le but était d'utiliser le langage le plus simple possible pour éviter d'avoir des formules (conséquence) trop difficiles à interpréter.

- Un travail d'enrichissement de ce langage s'impose avec l'intégration des formules négatives (de la forme  $\neg(\phi > \psi)$ ) avec une sémantique adéquate. Les deux systèmes d'inférence sont incapables de déduire des formules avec des négations. Rajouter à ces systèmes des règles adaptées permettrait de renforcer les deux systèmes.
- D'autre part, dans le cadre de cette thèse, on s'est restreint à la relation partielle stricte  $\succ_{ofs}$  et sa version préadditive stricte  $\succ_{ofs}^+$ . Il est intéressant d'étendre ces deux systèmes avec une relation de pré-ordre, donc réflexive. Une piste consiste à considérer une relation de pré-ordre partiel pour définir un système d'inférence en suivant la démarche utilisée dans ce travail. La deuxième piste consiste à garder les deux systèmes tels qu'ils sont et rajouter des règles d'inférence qui caractérisent la relation d'équivalence. Cette dernière nous semble la plus simple à mettre en œuvre.
- Par ailleurs, seul le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$  a été comparé avec les autres travaux existants. Ce choix a été guidé par la ressemblance entre le système  $\mathcal{S}_1$  et la logique possibiliste symbolique. Cependant, le système  $\mathcal{S}_2$  reste inexploré. Il faut noter que ce système est un peu particulier, même sur une base logique classique, nous pouvons introduire des niveaux de certitude avec la règle  $RI_{13} = \text{Si } \psi \vDash \phi \text{ et non } \phi \vDash \psi \text{ alors } \phi > \psi$ . En logique possibiliste symbolique, si l'ensemble des contraintes sur les poids symboliques est vide, on ne peut rien déduire. Ce n'est pas le cas avec le système d'inférence  $\mathcal{S}_2$  toujours grâce à la règle  $RI_{13}$ .

Le chapitre 4 présente l'extension de la logique possibiliste avec des poids symboliques. Comme pour la logique possibiliste standard, le langage est restreint aux formules



atomiques et leurs conjonctions. La suite de cette extension sera de proposer une logique possibiliste symbolique généralisée avec des conjonctions et des négations de formules pondérées. D'autres perspectives peuvent être considérées :

- D'une part, on pourrait étendre la comparaison entre logique possibiliste et logique de certitude relative à la comparaison entre logique possibiliste généralisée (qui admet des disjonctions et des négations de formules pondérées [51] et logiques modales conditionnelles et aussi traiter les contraintes faibles entre poids symboliques ( $a \geq b$ )).
- D'autre part il serait intéressant de confronter les bases possibilistes symboliques et les bases partiellement ordonnées pour la représentation des préférences, en les comparant aussi avec des modèles graphiques. Quelques résultats préliminaires apparaissent dans [55].
- D'un point de vue applicatif, nous avons étudié la question de représentabilité du cadre des CP-nets en logique possibiliste symbolique. Il sera intéressant de proposer soit un codage possibiliste qui capture la représentation des CP-nets (un codage avec une structure graphique en utilisant les réseaux possibilistes), soit une preuve formelle qui montre la divergence entre les deux cadres.
- Enfin le travail autour de l'approche préadditive de la certitude relative devra être poursuivi pour éventuellement la comparer avec la logique des pénalités [86].

Une question importante, qui a été seulement abordée dans le Chapitre 5, concerne l'implémentation des logiques décrites dans cette thèse :

- Ces approches devraient être expérimentées sur des problématiques de l'IA. Nous souhaitons utiliser les systèmes d'inférence proposés pour le traitement de préférences. Nous avons montré [53] que la LPS peut être utilisée pour représenter des préférences (traduction du cadre CP-net en LPS), une étude similaire peut être faite en utilisant le système d'inférence  $\mathcal{S}_1$ .

Nous pouvons aussi appliquer ces méthodes d'inférence pour la fusion et la révision des connaissances. Concernant la fusion, si nous considérons un multi-ensemble de bases de croyances partiellement ordonnée, chacune de ces bases de croyances représentant un point de vue local fourni par une certaine source d'information unique. L'ordre partiel peut être présent sur deux niveaux, premièrement sur les connaissances fournies par la source d'information et deuxièmement, un ordre partiel entre les sources d'information qui représente le degré de confiance en chaque source d'information. Étudier les opérateurs de fusion dans le cas partiel nous semble intéressant.

Concernant la révision des connaissances. Si nous considérons une base de connaissances partiellement ordonnée, nous pouvons étudier la modification des connaissances initiales avec de nouvelles connaissances dans une configuration partielle.

---

Redéfinir les opérateurs de révision dans le cas partiellement ordonné est une piste d'application de nos résultats dans la suite des travaux de Lindström [81].

- Pour l'implémentation de logique possibiliste symbolique, nous avons exploité des liens entre la LPS et les méthodes de type ATMS, et de diagnostic en logique selon Reiter [83]. Cependant, on n'a pas exploité toute la performance du cadre ATMS. Une possible amélioration de la méthode d'inférence basée sur les ATMS consisterait à prendre en compte les contraintes sur les poids symboliques plus tôt dans le processus d'inférence. L'idée la plus simple est de coder les contraintes sur les poids symboliques par des formules logiques et de les intégrer dans la base des justifications. Les auteurs dans [21] ont trouvé un codage logique pour des contraintes larges ( $\geq$ ), ce qui n'est pas le cas dans notre cadre. Il n'est pas clair qu'on puisse le faire pour des contraintes strictes.

---

## Bibliographie

---

- [1] R. Abreu and A. Gemund. A Low-Cost Approximate Minimal Hitting Set Algorithm and its Application to Model-Based Diagnosis. In *Proceedings of Symposium on Abstraction, Reformulation and Approximation*, 2009.
- [2] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.
- [3] N. Ben Amor, D. Dubois, H. Gouider, and H. Prade. Possibilistic conditional preference networks. In *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, volume 9161 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 36–46, 2015.
- [4] A. Arnold and I. Guessarian. *Mathématique pour l’informatique*. Masson, 2003.
- [5] J. Bailey and P. Stuckey. Discovery of minimal unsatisfiable subsets of constraints using hitting set dualization. 3350 :174–186, 2005.
- [6] M. Banerjee and D. Dubois. A simple logic for reasoning about incomplete knowledge. *International Journal of Approximate Reasoning*, 55(2) :639 – 653, 2014.
- [7] N. Ben Amor, D. Dubois, H. Gouider, and H. Prade. Possibilistic networks : A new setting for modeling preferences. In *Scalable Uncertainty Management*, volume 8720 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–7, 2014.
- [8] K. Bendová and P. Hájek. Possibilistic logic as tense logic. In M. Singh N. Piera, editor, *Qualitative Reasoning and Decision Technologies*, pages 441–450. CIMNE, 1993.
- [9] S. Benferhat. *Raisonnement non-monotone et traitement de l’inconsistance en logique possibiliste*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.), 118, route de Narbonne 31062 Toulouse cedex. France, February 1994.

- 
- [10] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, Jerome Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the 13th international joint conference on Artificial intelligence-Volume 1*, pages 640–645. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1993.
- [11] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic logic representation of preferences : relating prioritized goals and satisfaction levels expressions. In *Proceedings of 15th. European Conference on Artificial Intelligence, Lyon, July 21-26, 2002*, pages 685–689. IOS Press, 2002.
- [12] S. Benferhat, D. Dubois, Souhila Kaci, and H. Prade. Bipolar possibility theory in preference modeling : Representation, fusion and optimal solutions. *Information Fusion*, 7(1) :135–150, 2006.
- [13] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Connaissances conditionnelles et exceptions : Du raisonnement non-monotone à la théorie des possibilités. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 9(4) :475–521, 1995.
- [14] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. *Journal of Logic and Computation*, 9(6) :873–895, 1999.
- [15] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Towards a possibilistic logic handling of preferences. *Applied Intelligence*, 14 :303–317, 2001.
- [16] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Logique possibiliste avec calcul symbolique sur des poids partiellement contraints (regular paper). In *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), Nantes*, pages 67–74, novembre 2004.
- [17] S. Benferhat, S. Lagrue, and O. Papini. A possibilistic handling of partially ordered information. In *Proceedings of the 19th Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence, Acapulco*, pages 29–36, 2003.
- [18] S. Benferhat, S. Lagrue, and O. Papini. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic logic framework. *Fuzzy Sets and Systems*, 144(1) :25–41, 2004.
- [19] S. Benferhat, S. Lagrue, and S. Yahi. Bridging possibilistic conditional knowledge bases and partially ordered bases. In *Logics in Artificial Intelligence - 12th European Conference, JELIA 2010, Helsinki, Finland, September 13-15, 2010. Proceedings*, volume 6341 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 38–50. Springer, 2010.
- [20] S. Benferhat, S.n Lagrue, and O. Papini. A possibilistic handling of partially ordered information. In *Proceedings of the Nineteenth conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 29–36. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2002.

- [21] S. Benferhat and H. Prade. Encoding formulas with partially constrained weights in a possibilistic-like many-sorted propositional logic. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1281–1286, 2005.
- [22] S. Benferhat and S. Yahi. Etude comparative des relations d’inférence à partir de bases de croyance partiellement ordonnées. *Revue d’Intelligence Artificielle*, 26 :39–61, 2012.
- [23] E. Birnbaum and E. L. Lozinskii. Consistent subsets of inconsistent systems : structure and behaviour. *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, 15(1) :25–46, 2003.
- [24] C. Boutilier, R. I. Brafman, C. Domshlak, H. Hoos, and D. Poole. CP-nets : A tool for representing and reasoning with conditional ceteris paribus preference statements. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 21 :135–191, 2004.
- [25] C. Cayrol and D. Dubois. Sur la sémantique des bases partiellement ordonnées. In *Actes des Sixièmes journées d’Intelligence Artificielle Fondamentale*, pages 51–58, 2012.
- [26] C. Cayrol, D. Dubois, and F. Touazi. On the deductive closure of a partially ordered propositional belief base. *Huitièmes journées d’Intelligence Artificielle Fondamentale, Angers*, 2014.
- [27] C. Cayrol, D. Dubois, and F. Touazi. On the semantics of partially ordered bases. In Christoph Beierle and Carlo Meghini, editors, *Foundations of Information and Knowledge Systems - 8th International Symposium*, volume 8367 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 136–153. Springer, 2014.
- [28] C. Cayrol, V. Royer, and C. Saurel. Management of preferences in assumption-based reasoning. In R. Yager and B. Bouchon, editors, *Advanced methods in AI. Lecture notes in computer science 682*, pages 13–22. Springer Verlag, 1992.
- [29] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to lattices and order / B.A. Davey, H.A. Priestley*. Cambridge University Press, Cambridge [England] ; New York :, 1990.
- [30] J. De Kleer. An assumption-based tms. *Artificial intelligence*, 28(2) :127–162, 1986.
- [31] J. De Kleer. A general labeling algorithm for assumption-based truth maintenance. In *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 188–192, 1988.
- [32] M. G. de la Banda, P. J Stuckey, and J. Wazny. Finding all minimal unsatisfiable subsets. In *Proceedings of the 5th ACM SIGPLAN international conference on Principles and practice of declarative programming*, pages 32–43. ACM, 2003.

- [33] L. del Cerro and A. Herzig. A modal analysis of possibility theory. In Philippe Jorrand and Jozef Kelemen, editors, *Fundamentals of Artificial Intelligence Research, International Workshop FAIR '91, Smolenice, Czechoslovakia, September 8-13, 1991, Proceedings*, volume 535 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 11–18. Springer, 1991.
- [34] D. Dubois. Belief structures, possibility theory and decomposable confidence measures on finite sets. *Computers and Artificial Intelligence (Bratislava)*, 5 :403–416, 1986.
- [35] D. Dubois, D. Berre, H. Prade, and R. Sabbadin. Using possibilistic logic for modeling qualitative decision : Atms-based algorithms. *Fundam. Inf.*, 37(1,2) :1–30, 1999.
- [36] D. Dubois and H. Fargier. A unified framework for order-of-magnitude confidence relations. In *Proceedings of the 20th Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 138–145. AUAI Press, 2004.
- [37] D. Dubois, H. Fargier, and J. Bonnefon. On the qualitative comparison of decisions having positive and negative features. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 32 :385–417, 2008.
- [38] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Refinements of the maximin approach to decision-making in fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, 81 :103–122, 1996.
- [39] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Possibilistic likelihood relations. In *Proceedings of 7th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU'98)*, pages 1196–1202, Paris, 1998.
- [40] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Ordinal and probabilistic representations of acceptance. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 22 :23–56, 2004.
- [41] D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. CP-nets and possibilistic logic : Two approaches to preference modeling. Steps towards a comparison. In *Proceedings of of Multidisciplinary International Joint Conference on Artificial Intelligence'05 Workshop on Advances in Preference Handling, Edinburg, July 31-Aug. 1, 2005*, 2005.
- [42] D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Approximation of conditional preferences betworks “CP-nets” in possibilistic logic. In *IEEE International Conference on Fuzzy Syst.(FUZZ-IEEE), Vancouver, July 16-21, 2006*.
- [43] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. A possibilistic assumption-based truth maintenance system with uncertain justifications, and its application to belief revision. In *Workshop on Truth Maintenance Systems, European Conference on Artificial Intelligence*, pages 87–106. Springer-Verlag, 1991.

- 
- [44] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, J.A. Robinson, and D. Nute, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol. 3*, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [45] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory*. Plenum Press, New York (NY), 1988.
- [46] D. Dubois and H. Prade. Numerical representations of acceptance. In *Proc of the Eleventh Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Montreal, Quebec, August 18-20*, pages 149–156, 1995.
- [47] D. Dubois and H. Prade. Combining hypothetical reasoning and plausible inference in possibilistic logic. *Multiple Valued Logic*, 1 :219–239, 1996.
- [48] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets and Systems*, 144(1) :3–23, 2004.
- [49] D. Dubois and H. Prade. A bipolar possibilistic representation of knowledge and preferences and its applications. In *Proceedings of of WILF (LNCS 3849)*, pages 1–10, 2006.
- [50] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic– an overview. In Dov Gabbay and John Woods, editors, *Computational Logic*, volume 9 of *THE HANDBOOK of the HISTORY of LOGIC*, pages 1–60. Elsevier, 2014.
- [51] D. Dubois, H. Prade, and Steven Schockaert. Reasoning about uncertainty and explicit ignorance in generalized possibilistic logic. In *Proceedings of 21st European Conference on Artificial Intelligence, Prague*, 2014.
- [52] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. Handling partially ordered preferences in possibilistic logic - A survey discussion -. *European Conference on Artificial Intelligence - Workshop on Weighted Logics for Artificial Intelligence*, pages 91–98, 2012.
- [53] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. Conditional preference nets and possibilistic logic. In *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, pages 181–193. Springer, 2013.
- [54] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. Conditional preference-nets, possibilistic logic, and the transitivity of priorities. In *Proceedings of International Conference on Innovative Techniques and Applications of Artificial Intelligence, Cambridge, England, UK, December 10-12, 2013*, pages 175–184, 2013.
- [55] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. A possibilistic logic approach to conditional preference queries. In *Flexible Query Answering Systems - 10th International Conference, FQAS 2013, Granada, Spain, September 18-20, 2013. Proceedings*, pages 376–388, 2013.

- [56] P. Fishburn. The axioms of subjective probability. *Statistical Science*, 1(3) :335–358, 1986.
- [57] P. Fishburn. *Interval Orderings*. Wiley, New-York, 1987.
- [58] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measures : A user’s guide. In *Proc of the Eleventh Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Montreal, Quebec, August 18-20*, pages 175–184, 1995.
- [59] P. Gärdenfors and D. Makinson. Nonmonotonic inference based on expectations. *Artificial Intelligence*, 65 :197–245, 1994.
- [60] H. Geffner. *Default reasoning : Causal and Conditional Theories*. MIT Press, 1992.
- [61] J.A. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18 :145–174, 1967.
- [62] G. Gottlob. Hypergraph transversals. In Dietmar Seipel and JoséMaría Turull-Torres, editors, *Foundations of Information and Knowledge Systems*, volume 2942 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–5. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [63] E. Grégoire, B. Mazure, and C. Piette. Extracting muses. pages 387–391, 2006.
- [64] E. Grégoire, B. Mazure, and C. Piette. Using local search to find msses and muses. *European Journal of Operational Research*, 199(3) :640 – 646, 2009.
- [65] É. Grégoire, B. Mazure, and C. Piette. Sous-formules minimales insatisfaisables. In Lakhdar Saïs, editor, *Problème SAT : progrès et défis*, pages 221–242. Hermès, 2008.
- [66] A. HadjAli, S. Kaci, and H. Prade. Database preference queries - A possibilistic logic approach with symbolic priorities. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 63(3-4) :357–383, 2011.
- [67] J. Y. Halpern. Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures. *Journal of Artificial intelligence Research*, 7 :1–24, 1997.
- [68] W. Liu K. McAreavey and P. Miller. Computational approaches to finding and measuring inconsistency in arbitrary knowledge bases. *International Journal of Approximate Reasoning*, 55(8) :1659 – 1693, 2014.
- [69] S. Kaci. *Working With Preferences : Less Is More*. Springer, 2012.
- [70] S. Kaci and H. Prade. Relaxing ceteris paribus preferences with partially ordered priorities. In *European Conference on Symbolic and Quant. Approaches to Reas. with Uncert, Hammamet,30-Nov.2*, pages 660–671, 2007.



- [71] S. Kaci and H. Prade. Mastering the processing of preferences by using symbolic priorities. In *18th European Conference on Artificial Intelligence*, pages 376–380, 2008.
- [72] S. Kaci and L. van der Torre. Reasoning with various kinds of preferences : Logic, non-monotonicity and algorithms. *Annals of Operations Research*, 163(1) :89–114, 2008.
- [73] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. 1990.
- [74] J. Lang. *Logique possibiliste : aspects formels, déduction automatique et applications*. PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse, 1991.
- [75] J. Lang. Possibilistic logic : Complexity and algorithms. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 5 of *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, pages 179–220. 2000.
- [76] M. Lange and H. Leiß. To cnf or not to cnf ? an efficient yet presentable version of the cyk algorithm. *Informatica Didactica*, 8 :2008–2010, 2009.
- [77] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail ? *Artificial Intelligence*, 55 :1–60, 1992.
- [78] D. Lewis. Counterfactuals and comparative possibility. *Journal of Philosophical Logic*, 2(4) :418–446, 1973.
- [79] M. Liffiton and K. Sakallah. On finding all minimally unsatisfiable subformulas. In *Theory and Applications of Satisfiability Testing*, volume 3569 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 173–186. 2005.
- [80] M. Liffiton and K. Sakallah. Algorithms for computing minimal unsatisfiable subsets of constraints. *Journal of Automated Reasoning*, 40(1) :1–33, 2008.
- [81] S. Lindström and W. Rabinowicz. Epistemic entrenchment with incomparabilities and relational belief revision. In M. Moreau A. Fuhrmann, editor, *The logic of Theory Change*, volume 465 of *LNCS*, pages 93–126. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [82] J. Pearl. System Z : A natural ordering of defaults with tractable applications to default reasoning. In M. Vardi, editor, *Proceedings of of the 3<sup>rd</sup> Conference of Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, pages 121–135. Morgan-Kaufmann, 1990.
- [83] R Reiter. A theory of diagnosis from first principles. *Artif. Intell.*, 32(1) :57–95, 1987.

- 
- [84] N. Rescher. *Plausible Reasoning*. Van Gorcum, Amsterdam, 1976.
- [85] M. Roubens and P. Vincke. *Preference Modelling*. Number 250 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, Berlin, 1985.
- [86] F. D. De Saint-cyr, J.e Lang, P. Sabatier, and T. Schiex. Penalty logic and its link with dempster-shafer theory. In *In Proceedings of of the 10 th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 204–211, 1994.
- [87] N. Wilson. Extending CP-nets with stronger conditional preference statements. In *Proceedings of 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'04)*, pages 735–741, 2004.
- [88] S. Yahi, S. Benferhat, S. Lagrue, M. Sérayet, and O. Papini. A lexicographic inference for partially preordered belief bases. In G. Brewka and J. Lang, editors, *KR*, pages 507–517. AAAI Press, 2008.

## Résultats sur les bases totalement ordonnées

---

Dans cette annexe, nous présentons des résultats sur les relations d'ordre total. Ce travail a été nécessaire pour étendre les définitions du cas total au cas partiel. Dans la section A.1, nous présentons les relations d'ordre total induit par les comparaisons des vecteurs. Dans la section A.2, nous présentons les relations basées sur la relation Pareto. Pour finir, dans la section A.3.1, nous présentons les relations d'ordre total basées sur la comparaison d'ensembles totalement ordonnés.

### A.1 Les pré-ordres partiels induits par la comparaison de vecteurs de valeurs totalement ordonnées

Dans cette partie, on considère que  $L$  est un ensemble fini totalement ordonné, avec un élément maximal 1 et un élément minimal 0 (c'est à dire une chaîne finie). Nous consacrons ici notre discussion aux pré-ordres partiels induits sur des ensembles ou des vecteurs de valeurs totalement ordonnées. Les éléments à comparer sont alors associés à des vecteurs.

#### A.1.1 Relations de comparaison basées sur le Min

Tout au long de cette section, nous allons utiliser l'exemple suivant :

**Exemple 54.** Soit trois attributs  $M$ ,  $P$  et  $LI$  qui référencent les modules scolaires *Mathématique*, *Physique* et *Littérature* respectivement. Soit un ensemble d'étudiants  $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ . A chaque étudiant nous associons les notes qui correspondent aux modules  $M$ ,  $P$  et  $LI$ . La Table A.1 donne les vecteurs de notes dans  $L = \{0, 1, \dots, 20\}$  ainsi obtenus.

TABLE A.1 – Vecteurs associés aux éléments de l'exemple 54.

$\Omega$	$M$	$P$	$LI$
$A$	14	14	10
$B$	11	14	10
$C$	16	14	9
$D$	12	12	12
$E$	14	9	15
$F$	18	16	17
$G$	7	6	8
$H$	11	12	18

### A.1.1.1 Le pré-ordre Min

**Définition 58.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  :

$$x \succeq_{\min} x' \text{ si et seulement si } \min(x) \geq \min(x')$$

**Exemple 54 (suite)** Si on prend les deux étudiants  $D(12, 12, 12)$  et  $G(7, 6, 8)$ ,

$$D \succ_{\min} G$$

$\succeq_{\min}$  est un pré-ordre total sur  $L^n$ . Même si elle est naturelle dans un contexte qualitatif, cette relation est fort peu discriminante car elle ne se focalise que sur une composante de chaque vecteur. Les relations qui suivent n'ont pas ce défaut, tout en suivant le même principe de classement.

### A.1.1.2 L'ordre partiel strict discrimin

Pour commencer, les composantes identiques des vecteurs sont supprimées et les minimums des composantes restantes pour chaque vecteur sont comparés [38].

**Définition 59.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  et leurs ensembles résiduels  $\mathcal{D}_{(x,x')}^x$  et  $\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'}$  :

$$x \succ_{\text{discrimin}} x' \text{ si et seulement si } \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x) > \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$$

La relation  $\succ_{\text{discrimin}}$  est un ordre partiel strict (pour la preuve voir [38]). La relation non stricte  $x \succeq_{\text{discrimin}} x'$  si et seulement si  $\neg(x' \succ_{\text{discrimin}} x)$  si et seulement si  $\min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x) \geq \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$  n'est ni transitive, ni antisymétrique.

**Proposition 56.** Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1 \dots n\}$ ,  $x \succ_{\text{discrimin}} x'$  si et seulement si  $x^\sigma \succ_{\text{discrimin}} x'^\sigma$ .

En effet, ce sont les mêmes paires de composantes qui apparaissent en vis à vis mais pas avec le même indice.

**Exemple 54 (suite)** Si on prend les deux étudiants  $A(14, 14, 10)$  et  $B(11, 14, 10)$ ,

$$A \succ_{discrimin} B \text{ mais } A \sim_{min} B$$

L'ordre partiel strict *discrimin* pallie les déficiences du pré-ordre *min*, en le raffinant.

**Proposition 57.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  : si  $x \succ_{min} x'$  alors  $x \succ_{discrimin} x'$ .

### A.1.1.3 Le pré-ordre total leximin

L'ordre total strict *leximin* est fortement lié à l'ordre lexicographique usuel que nous connaissons. Nous proposons quatre définitions dont on montrera qu'elles sont équivalentes :

**Définition 60.** Soit  $x, x'$  deux vecteurs :

1. On calcule les vecteurs réordonnés  $x^*(x_{*1}, \dots, x_{*n})$  et  $x'^*(x'_{*1}, \dots, x'_{*n})$

$$x \succ_{leximin1} x' \text{ si et seulement si} \\ \exists k \leq n, \text{ tel que } \forall i < k, x_{*i} = x'_{*i} \text{ et } x_{*k} > x'_{*k} \text{ [12] [38]}$$

2. On calcule les vecteurs réordonnés  $x^*(x_{*1}, \dots, x_{*n})$  et  $x'^*(x'_{*1}, \dots, x'_{*n})$

$$x \succ_{leximin2} x' \text{ si et seulement si } x^* \succ_{discrimin} x'^* \text{ [12] [38]}$$

3. Soit  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x$  et  $\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}$  les ensembles résiduels symétriques

$$x \succ_{leximin3} x' \text{ si et seulement si } \min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) > \min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'})$$

4. En termes de permutations

$$x \succ_{leximin4} x' \text{ si et seulement s'il existe une permutation } \sigma \text{ de } \{1 \dots n\} \text{ telle que} \\ x^\sigma \succ_{discrimin} x'$$

**Proposition 58.** Soit  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux permutations de  $\{1 \dots n\}$

$$x \succ_{leximin2} x' \text{ si et seulement si } x^\sigma \succ_{leximin2} x'^{\sigma'}$$

En effet,  $(x^\sigma)^* = x^*$  et  $(x'^{\sigma'})^* = x'^*$

**Proposition 59.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  :

$$\text{Si } x \succ_{discrimin} x' \text{ alors } x \succ_{leximin2} x'.$$

mais le contraire est faux.

La preuve de cette proposition est disponible dans [38].

Le lemme suivant est utile pour la suite :

**Lemme 8.**  $\exists D \subseteq L, \mathcal{D}_{(x,x')}^x = \mathcal{S}_{(x,x')}^x \cup D$  and  $\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'} = \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'} \cup D$ .

**Preuve du Lemme 8:** Il suffit de choisir pour  $D$  l'ensemble des valeurs  $u$  telles que  $\exists i \neq j, x_i = x'_j = u, x'_i \neq x_i, x'_j \neq x_j$ .

□

Nous prouvons maintenant que les quatre définitions de la relation *leximin* sont équivalentes.

### Preuve *leximin1* $\equiv$ *leximin2*

$\Rightarrow$ ) Supposons  $\exists k \leq n$  tel que  $\forall i < k, x_i^* = x_i^{'*}$  et  $x_k^* > x_k^{'*}$  alors dans les ensembles résiduels de  $x^*$  et  $x^{'*}$  se trouvent respectivement  $x_{*k}^*$  et  $x_{*k}^{'*}$  : Donc  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*}) = x_{*k}^*$  et  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^{'*}}) = x_{*k}^{'*}$ , d'où  $x^* \succ_{discrimin} x^{'*}$  et la définition *leximin2* est satisfaite.

$\Leftarrow$ ) Supposons  $x^* \succ_{discrimin} x^{'*}$ . Les vecteurs  $x^*$  et  $x^{'*}$  étant ordonnés, le minimum des ensembles résiduels est la première composante qui n'a pas été supprimée.

Donc  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*}) = x_{*k}^*$  et  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^{'*}}) = x_{*k}^{'*}$ .

$x^* \succ_{discrimin} x^{'*}$  se traduit donc par  $x_{*k}^* > x_{*k}^{'*}$ , de plus  $\forall i < k$ , les composantes d'indice  $i$  ont été supprimées, donc  $x_i^* = x_i^{'*}$  d'où la définition *leximin1*. □

### Preuve *leximin2* $\equiv$ *leximin3*

Remarquons tout d'abord que les vecteurs  $x^*$  et  $x^{'*}$  étant ordonnés, le minimum des ensembles résiduels est la première composante qui n'a pas été supprimée.

On notera dans la suite de cette preuve  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*}) = x_{*k}^*$  et  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^{'*}}) = x_{*k}^{'*}$ .

$\Rightarrow$ )  $x \succ_{leximin2} x'$  si et seulement si  $x^* \succ_{discrimin} x^{'*}$  si et seulement si  $\min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*}) > \min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^{'*}})$ .

On a donc  $x_{*k}^* > x_{*k}^{'*}$ .

Par construction,  $\mathcal{S}_{(x,x')}^x \subseteq \mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*}$  donc  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) \geq \min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*})$ .

On a donc  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) \geq x_{*k}^*$  et  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}) \geq x_{*k}^{'*}$ .

- Si  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}) = x_{*k}^{'*}$ , on a  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) \geq x_{*k}^* > x_{*k}^{'*} = \min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'})$ , ce qui prouve que  $x \succ_{leximin3} x'$
- Sinon, on a  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}) = x_{*j}^{'*} > x_{*k}^{'*}$ , donc  $j > k$  et  $x_{*k}^{'*} \notin \mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}$ . Donc il existe  $x_{*l}, l \geq k$  tel que  $x_{*l} = x_{*k}^{'*}$ . Comme  $x_{*k}^* \neq x_{*k}^{'*}$  et  $l \geq k$ , on a  $x_{*l} > x_{*k}^*$ . On en déduit que  $x_{*k}^{'*} > x_{*k}^*$ , ce qui contredit l'hypothèse.

$\Leftarrow$ )  $x \succ_{leximin3} x'$  si et seulement si  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) > \min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'})$ .

On sait que  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) \geq \min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^*})$  et  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^{x'}) \geq \min(\mathcal{D}_{(x^*,x^{'*})}^{x^{'*}})$ . Si  $\min(\mathcal{S}_{(x,x')}^x) =$

$\min(\mathcal{D}_{(x^*, x'^*)}^{x^*})$ , on a  $\min(\mathcal{D}_{(x^*, x'^*)}^{x^*}) > \min(\mathcal{D}_{(x^*, x'^*)}^{x'^*})$  ce qui prouve que  $x \succ_{leximin2} x'$ .  
 Sinon, on a  $\min(\mathcal{S}_{(x, x')}^x) = x_{*j} > \min(\mathcal{D}_{(x^*, x'^*)}^{x^*}) = x_{*k}$ . Alors  $x_{*k} \notin \mathcal{S}_{(x, x')}^x$  et donc il existe  $x'_{*l}, l \geq k$  tel que  $x'_{*l} = x_{*k}$ . Comme  $l \geq k$ , on a  $x'_{*l} \geq x'_{*k}$ . Or  $x_{*k} \in \mathcal{D}_{(x^*, x'^*)}^{x^*}$  donc  $x_{*k} \neq x'_{*k}$ . On obtient donc  $x_{*k} = x'_{*l} > x'_{*k}$ , ce qui prouve que  $x \succ_{leximin2} x'$ .  $\square$

### Preuve $leximin2 \equiv leximin4$

$\Rightarrow$ ) Soit  $x \succ_{leximin2} x'$  c'est à dire  $x^* \succ_{discrimin} x'^*$ . Soit  $\phi$  (resp  $\phi'$ ) la permutation permettant d'ordonner  $x$  (resp  $x'$ ). On a  $x^* = x^\phi$  et  $x'^* = x'^{\phi'}$ . Alors  $x^\phi \succ_{discrimin} x'^{\phi'}$ . On applique la proposition 56, donc  $(x^\phi)^{\phi^{-1}} \succ_{discrimin} x'$  on pose  $\sigma = \phi\phi'^{-1}$  on trouve la définition de  $leximin4$ .

$\Leftarrow$ ) Soit  $x \succ_{leximin4} x'$  alors  $x^\sigma \succ_{discrimin} x'$ . On a par la proposition 59  $a \succ_{discrimin} b \Rightarrow a \succ_{leximin2} b$  alors  $x^\sigma \succ_{leximin2} x'$  et par la proposition 58 on a aussi  $x \succ_{leximin2} x'$ .  $\square$

Puisque les quatre définitions sont équivalentes, on notera le pré-ordre  $leximin$  par  $\succ_{leximin}$ .

**Exemple 54 (suite)** Si on prend les deux étudiants  $C(16, 14, 9)$  et  $E = (14, 9, 15)$ . Soit leurs vecteurs réordonnés  $C^*(9, 14, 16)$  et  $E^*(9, 14, 15)$ .

$$C \succ_{leximin} E \text{ mais } C \not\prec_{discrimin} E \text{ et } C \sim_{min} E.$$

La version non-strict de  $leximin$   $x \succeq_{leximin} x'$  si et seulement si  $\neg(x' \succ_{leximin} x)$  est une relation de pré-ordre total. La relation d'équivalence associée  $x \sim_{leximin} x'$  est équivalente à  $x^* = x'^*$ , c'est à dire que les deux vecteurs ont les mêmes composantes, mais pas nécessairement placées au même endroit.

**Remarque 10.** On peut mener la même étude en remplaçant le minimum par le maximum, avec des résultats similaires.

## A.2 Relations de comparaison basées sur le pré-ordre de Pareto

### A.2.1 Le pré-ordre de Pareto

Une vision naturelle de la dominance de  $x$  sur  $x'$  est de demander que chaque composante de  $x$  domine sa contrepartie dans  $x'$  :

**Définition 61.** Soit  $x, x'$  deux vecteurs :

$$\begin{aligned} x \succeq_{Pareto} x' \text{ si et seulement si } \forall i = 1 \dots n, x_i \geq x'_i \\ x \succ_{Pareto} x' \text{ si et seulement si } \forall i = 1 \dots n, x_i \geq x'_i \text{ et } \exists j, x_j > x'_j \end{aligned}$$

La relation  $\succ_{Pareto}$  est un préordre partiel dont l'équivalence associée est l'égalité de vecteurs. Par ailleurs, la relation  $\succ_{discrimin}$  raffine  $\succ_{Pareto}$ .

**Proposition 60.** *Soit deux vecteurs  $x, x'$  :*

$$\text{Si } x \succ_{Pareto} x' \text{ alors } x \succ_{discrimin} x'.$$

**Preuve de la Proposition 60:** Par définition : si  $x \succ_{Pareto} x'$  alors  $\forall i = 1 \dots n, x_i \geq x'_i$  et  $\exists j, x_j > x'_j$ . Donc dans les ensembles résiduels, il ne reste que des couples  $(x_i \in \mathcal{D}_{(x,x')}^x, x'_i \in \mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$  avec  $x_i > x'_i$  et il existe au moins un tel couple puisque  $x_j > x'_j$ . Donc,  $\min(\mathcal{D}_{(x,x')}^x) > \min(\mathcal{D}_{(x,x')}^{x'})$ .  
□

En revanche, l'ordre du minimum ne raffine pas celui de Pareto. Mais on trouve toujours au moins un vecteur Pareto-maximal parmi les vecteurs min-optimaux [38]. Donc, de par les Propositions 57 et 60, les solutions maximales au sens de  $\succ_{discrimin}$  se trouveront dans l'intersection des solutions maximales au sens de Pareto et des solutions maximales au sens de  $\succ_{min}$ .

**Exemple 54 (suite)** Si on prend les deux étudiants  $A(14, 14, 10)$  et  $B(11, 14, 10)$ ,

$$A \succ_{Pareto} B \text{ mais } A \sim_{min} B$$

Si on prend les deux résultats des étudiants  $D(12, 12, 12)$  et  $E(14, 9, 15)$  :

$$D \succ_{discrimin} E \text{ mais non } D \succ_{Pareto} E$$

## A.2.2 Le pré-ordre Pareto-Ordonné

C'est une variante du pré-ordre *Pareto* avec un réordonnement des composantes des vecteurs.

**Définition 62.** *Soit  $x, x'$  deux vecteurs. On calcule les vecteurs réordonnés  $x^*(x_{*1}, \dots, x_{*n})$  et  $x'^*(x'_{*1}, \dots, x'_{*n})$ .*

$$x \succeq_{PO} x' \text{ si et seulement si } x^* \succeq_{Pareto} x'^*$$

**Exemple 54 (suite)** Si on prend les deux résultats des étudiants  $H(11, 12, 18)$  et  $B(11, 14, 10)$ . Les vecteurs réordonnés sont  $H^*(11, 12, 18)$  et  $B^*(10, 11, 14)$  :

$$H \succ_{PO} B \text{ car } H^* \succ_{Pareto} B^*, \text{ mais non } H \succ_{Pareto} B$$



### A.2.3 Pareto Symétrique

C'est une variante de *Pareto* avec une permutation.

**Définition 63.** Soit  $x, x'$  deux vecteurs :

$$x \succ_{\text{Pareto}S} x' \text{ si et seulement si il existe une permutation } \sigma \text{ de } \{1 \dots n\} \text{ telle que } x^\sigma \succ_{\text{Pareto}} x'$$

**Exemple 54 (suite)** Si on prend les deux résultats des étudiants  $F(18, 16, 17)$  et  $H(11, 12, 18)$ . Soit la permutation  $\sigma : \sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$ , alors  $F^\sigma(17, 16, 18)$  :

$$F \succ_{\text{Pareto}S} H \text{ car } F^\sigma \succ_{\text{Pareto}} H.$$

On obtient encore une propriété de raffinement :

**Proposition 61.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  : Si  $x \succ_{\text{Pareto}} x'$  alors  $x \succ_{\text{Pareto}S} x'$

**Preuve de la Proposition 61:** Il suffit de prendre  $\sigma = \text{identité}$ . □

Nous allons maintenant prouver que ces deux variantes du pré-ordre *Pareto* sont équivalentes. La preuve s'appuiera sur les deux propriétés suivantes.

**Proposition 62.** Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1 \dots n\}$  et  $x, x'$  deux vecteurs

$$\text{Si } x \succ_{\text{Pareto}} x' \text{ alors } x^\sigma \succ_{\text{Pareto}} x'^\sigma$$

**Preuve de la Proposition 62:**  $\forall i = 1 \dots n$  on a  $x_i \geq x'_i$  et  $x_j > x'_j$ . Soit  $k \in \{1 \dots n\}$ ,  $x_{\sigma(k)} \geq x'_{\sigma(k)}$ . Soit  $l$  tel que  $\sigma(l) = j$  alors  $x_{\sigma(l)} > x'_{\sigma(l)}$ . □

**Proposition 63.** Soit  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux permutations de  $\{1 \dots n\}$  et  $x$  un vecteur :

$$(x^{\sigma_1})^{\sigma_2} = x^{\sigma_1\sigma_2}$$

**Preuve de la Proposition 63:** Pour tout  $i \in \{1 \dots n\}$ , par définition de  $x^\sigma : (x^{\sigma_1})^{\sigma_2}(i) = x_{\sigma_2(i)}^{\sigma_1} = x_{\sigma_1(\sigma_2(i))} = x_{(\sigma_1\sigma_2)(i)}$  □

**Proposition 64.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  :  $x \succ_{\text{Pareto}S} x'$  si et seulement si  $x \succ_{PO} x'$

**Preuve de la Proposition 64:**

$\Rightarrow$ ) On suppose  $x \succ_{\text{Pareto}S} x'$ . Soit  $\sigma$  une permutation telle que :  $x^\sigma \succ_{\text{Pareto}} x'$ . Soit  $\phi$  la permutation de  $\{1 \dots n\}$  qui permet de réordonner  $x'$ . On a donc  $x_i^* = x'_{\phi(i)}$  et  $x'_{\phi(1)} \leq x'_{\phi(2)} \leq$

$\dots \leq x'_{\phi(n)}$ .

Par la propriété 62, on obtient :

$$x^{\sigma\phi} \succ_{Pareto} x'^{\phi} = x'^*$$

$\forall i \in \{1 \dots n\}, x_{\sigma\phi(i)} \geq x'_i$  et  $\exists j, x_{\sigma\phi(j)} > x'_j$ .

Soit  $k_1$  tel que  $x_{\sigma\phi(k_1)}$  est le plus petit des  $x_i, i = 1 \dots n$ . On a  $x_{\sigma\phi(k_1)} \geq x'_{k_1} \geq x'_1$  donc on peut permuter  $x_{\sigma\phi(k_1)}$  et  $x_{\sigma\phi(1)}$ .

On recommence cette opération :

Etape  $l$

$x_{\sigma\phi(k_1)} \leq \dots \leq x_{\sigma\phi(k_l)}$  avec  $k_l \geq l$  et  $x'_1 \leq \dots \leq x'_n$ .

Soit  $k_{l+1}$  tel que  $x_{\sigma\phi(k_{l+1})}$  est le plus petit des  $x_i, i \in \{l \dots n\}$ , alors  $x_{\sigma\phi(k_{l+1})} \geq x'_{k_{l+1}}$  et  $k_{l+1} \geq l+1$

donc  $x'_{k_{l+1}} \geq x'_{l+1}$ .

On peut donc permuter  $x_{\sigma\phi(k_{l+1})}$  et  $x_{\sigma\phi(l+1)}$ . A la fin, on a réordonné le vecteur  $x^{\sigma\phi}$  par ordre croissant des composantes et on a donc :

$$x^* \succ_{Pareto} x'^* \text{ c'est à dire } x \succ_{PO} x'$$

$\Leftarrow$ ) On suppose  $x \succ_{PO} x'$  c'est à dire  $x^* \succ_{Pareto} x'^*$ . Soit  $\phi$  (resp.  $\phi'$ ) la permutation de  $\{1 \dots n\}$  qui permet de réordonner  $x$  (resp.  $x'$ ).  $x_{\phi(1)} \leq \dots \leq x_{\phi(n)}$  et  $x'_{\phi'(1)} \leq \dots \leq x'_{\phi'(n)}$ . On a donc  $x^{\phi} \succ_{Pareto} x'^{\phi'}$ . Par la propriété 62, on obtient :  $(x^{\phi})^{\phi'^{-1}} \succ_{Pareto} (x'^{\phi'})^{\phi'^{-1}}$  et par la propriété 63,  $x^{\phi\phi'^{-1}} \succ_{Pareto} x'$ .

Prenons  $\sigma = \phi\phi'^{-1}$  on obtient  $x \succ_{ParetoS} x'$ .  $\square$

L'intérêt de ce résultat est que la version ordonnée est plus facile à vérifier, alors que l'autre version est d'une formulation plus générale.

**Proposition 65.** Soit deux vecteurs  $x, y$ , tels que  $x \succeq_{PS} y$  alors il existe une permutation  $\sigma$  telle que  $\sigma(i) = i$  si  $x_i = y_i$  qui vérifie  $x^{\sigma} \succeq_{Pareto} y$ .

**Preuve de la Proposition 65:** Si  $x \succeq_{PS} y$ , soit  $\sigma$  une permutation telle que  $x^{\sigma} \succeq_{Pareto} y$  (qui existe par hypothèse). Supposons  $x_i = y_i$  mais  $\sigma(i) = k \neq i$ . Dans ce cas, on a  $x_{\sigma(i)} = x_k \geq y_i$  et si  $q$  est l'entier tel que  $\sigma(q) = i$  on a  $x_{\sigma(q)} = x_i \geq y_q$ . On peut échanger les indices  $i$  et  $q$  dans la permutation  $\sigma$ , soit  $\tau(j) = \sigma(j)$  sauf si  $j = i, q$  et on pose  $\tau(i) = i, \tau(q) = k$ . Notons que  $x_k \geq y_i = x_i \geq y_q$  soit  $x_{\tau(i)} \geq y_i$  et  $x_{\tau(q)} \geq y_q$ . Donc  $\tau$  est une permutation admissible telle que  $x^{\tau} \succ_{Pareto} y$ . Mais elle satisfait  $\tau(i) = i$ . S'il existe encore un  $j$  tel que  $y_j = x_j$  et  $\tau(j) \neq j$ , on recommence la procédure, et ainsi de suite jusqu'à atteindre une permutation  $\sigma'$  telle que  $\sigma'(i) = i$  si  $x_i = y_i$ .  $\square$

Notons en corollaire que si on note  $x_{\Delta}, y_{\Delta}$  les vecteurs obtenus en enlevant les composantes  $i$  telles que  $x_i = y_i$  alors  $x \succ_{ParetoS} y$  ssi  $x_{\Delta} \succ_{ParetoS} y_{\Delta}$ .

**Proposition 66.** Soit deux vecteurs  $x, x'$  : Si  $x \succ_{PO} x'$  alors  $x \succ_{leximin} x'$

**Preuve de la Proposition 66:** Par définition  $x \succ_{PO} x'$  si et seulement si  $x^* \succ_{Pareto} x'^*$  et par la proposition 60 on  $x^* \succ_{Pareto} x'^* \Rightarrow x^* \succ_{discrimin} x'^*$ . Par définition  $x^* \succ_{discrimin} x'^* \Leftrightarrow x \succ_{leximin_2} x'$  donc  $x \succ_{PO} x' \Rightarrow x \succ_{leximin} x'$ .

□

La réciproque est fautive, comme le montre le contre exemple suivant :  
Soit les deux vecteurs  $x = (0, 1, 4, 3)$  et  $x' = (0, 1, 2, 5)$ . On a  $x \succ_{leximin} x'$  mais pas  $x \succ_{PO} x'$ .

D'après les propositions 59, 60, 61, 64 et 66, nous obtenons l'ordre de raffinement suivant entre les ordres partiels dans le cas d'une échelle totalement ordonnée :

$$\begin{aligned} \succ_{leximin} \text{ raffine } \succ_{discrimin} \text{ qui raffine } \succ_{Pareto} \text{ et } \succ_{min} . \\ \succ_{leximin} \text{ raffine } \succ_{Pareto} \text{ et } \succ_{PO} \text{ qui raffine } \succ_{Pareto} . \end{aligned}$$

**Remarque 11.** On peut faire la même étude en remplaçant le minimum par le maximum, avec des résultats similaires. On obtient alors les relations  $\succ_{discrimax}$  et  $\succ_{leximax}$ .

## A.3 Raisonnement avec des bases totalement ordonnées

Dans cette section, nous présentons les différentes définitions des relations de dominance sur des ensembles totalement ordonnés. Nous discutons aussi les différentes applications de ce genre de relations dans des problématiques de l'intelligence artificielle.

### A.3.1 Comparaison d'ensembles de valeurs totalement ordonnées

Nous allons maintenant établir des correspondances entre la comparaison de vecteurs de valeurs de  $L^n$  et la comparaison d'ensembles de valeurs. L'échelle  $L$  est toujours supposée totalement ordonnée. Il y a deux différences entre comparer des vecteurs et comparer leurs ensembles de composantes :

- On n'a plus de correspondances entre composantes dans le cas des ensembles
- Les ensembles à comparer ne sont pas forcément de même taille.

Notons que l'ordre basé sur le minimum ou le maximum ne fait pas la différence entre les deux approches. Soit deux sous ensembles  $A, B \subseteq L$ . Une idée naturelle est donc de comparer  $A$  et  $B$  en comparant leurs éléments maximaux (resp. minimaux). On construit quatre familles de relations :

**Définition 64.** Il y a quatre façons de comparer des sous-ensembles d'éléments totalement ordonnés :

- **Dominance sûre**  
Version stricte :  $A \succ_s B$  si et seulement si  $\min(A) > \max(B)$  ;  
Version large :  $A \succeq_s B$  si et seulement si  $\min(A) \geq \max(B)$
- **Dominance pessimiste**  
Version stricte :  $A \succ_p B$  si et seulement si  $\min(A) > \min(B)$  ;  
Version large :  $A \succeq_p B$  si et seulement si  $\min(A) \geq \min(B)$
- **Dominance optimiste**  
Version stricte :  $A \succ_o B$  si et seulement si  $\max(A) > \max(B)$  ;  
Version large :  $A \succeq_o B$  si et seulement si  $\max(A) \geq \max(B)$
- **Dominance non sûre (risquée)**  
Version stricte :  $A \succ_r B$  si et seulement si  $\max(A) > \min(B)$  ;  
Version large :  $A \succeq_r B$  si et seulement si  $\max(A) \geq \min(B)$

On peut clairement exprimer ces définitions sous les formes équivalentes suivantes :

- **Dominance sûre :**  
 $A \succ_s B$  si et seulement si  $\forall a \in A, \forall b \in B, a > b$  ;  
 $A \succeq_s B$  si et seulement si  $\forall a \in A, \forall b \in B, a \geq b$
- **Dominance pessimiste**  
 $A \succ_p B$  si et seulement si  $\forall a \in A, \exists b \in B, a > b$  si et seulement si  $\exists b \in B, \forall a \in A, a > b$  ;  
 $A \succeq_p B$  si et seulement si  $\forall a \in A, \exists b \in B, a \geq b$  si et seulement si  $\exists b \in B, \forall a \in A, a \geq b$
- **Dominance optimiste :**  
 $A \succ_o B$  si et seulement si  $\forall b \in B, \exists a \in A, a > b$  si et seulement si  $\exists a \in A, \forall b \in B, a > b$  ;  
 $A \succeq_o B$  si et seulement si  $\forall b \in B, \exists a \in A, a \geq b$  si et seulement si  $\exists a \in A, \forall b \in B, a \geq b$
- **Dominance non sûre (risquée)**  
 $A \succ_r B$  si et seulement si  $\exists a \in A, b \in B, a > b$  ;  
 $A \succeq_r B$  si et seulement si  $\exists a \in A, b \in B, a \geq b$

La dominance sûre  $\succ_s$  est un ordre partiel strict alors que  $\succeq_s$  n'est pas réflexive. La dominance sûre stricte satisfait la propriété dite de Ferrers [85] :

$$(A \succ_s B) \wedge (C \succ_s D) \Rightarrow (A \succ_s D) \vee (C \succ_s B)$$

En effet il est facile de voir que  $\min(A) > \max(B)$  et  $\min(C) > \max(D)$  sont incompatibles avec  $\max(D) \geq \min(A)$  et  $\max(B) \geq \min(C)$ . Si  $A$  et  $B$  sont des intervalles réels, la dominance sûre  $\succ_s$  coïncide avec l'ordre d'intervalle de Fishburn [57].

La dominance risquée n'est pas transitive. De plus,  $\neg(A \succ_s B)$  si et seulement si  $B \succeq_r A$ .

En revanche les comparaisons pessimistes et optimistes non strictes sont des relations de pré-ordre totales, les versions strictes étant des ordres stricts. Il existe aussi une relation de dualité entre les dominances optimiste et pessimiste :  $A \succeq_o B$  si et seulement si  $B \succeq'_p A$  si on note  $\succeq'$  l'ordre inverse de  $\succeq$  sur l'échelle  $L$ . C'est-à-dire  $a \succeq' b$  si et seulement si  $b \succeq a$ .

Notons qu'on peut aussi définir une relation d'ordre partiel à partir des comparaisons pessimistes et optimistes :  $A \succ B$  si et seulement si  $A \succ_p B$  et  $A \succ_o B$ .

Soit  $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_p < 1 = u_{p+1}$  les éléments de  $L$  écrits dans l'ordre croissant.

Un vecteur de longueur  $p + 1$  peut être associé à chaque sous-ensemble  $A$  de  $L$  de quatre façons :

1.  $x^A$  : pour tout élément  $i = 1, \dots, p + 1$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = u_i$  et sinon  $x_i = 0$ .
2.  $\bar{x}_A$  : pour tout élément  $i = 1, \dots, p + 1$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = 1$  et sinon  $x_i = \bar{u}_i$  où  $\bar{\cdot}$  est la fonction qui renverse l'ordre sur  $L$ .
3.  $x_A$  : pour tout élément  $i = 0, \dots, p$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = u_i$  et sinon  $x_i = 1$ .
4.  $\bar{x}^A$  : pour tout élément  $i = 0, \dots, p$ , si  $u_i \in A$  alors  $x_i = 0$  et sinon  $x_i = \bar{u}_i$  où  $\bar{\cdot}$  est la fonction qui renverse l'ordre sur  $L$ .

Notons que les deux premières représentations ne permettent pas de faire la différence entre  $A$  et  $A \setminus \{0\}$  si  $0 \in A$ . De même les deux dernières représentations ne permettent pas de faire la différence entre  $A$  et  $A \setminus \{1\}$  si  $1 \in A$ . Les vecteurs  $x^A$  et  $\bar{x}_A$  conviennent donc pour représenter  $A$  tel que  $0 \notin A$ , alors que les vecteurs  $x_A$  et  $\bar{x}^A$  conviennent pour  $A$  tel que  $1 \notin A$ .

On peut alors comparer  $A$  et  $B$  en comparant les vecteurs associés. Par exemple :

**Proposition 67.** *On montre que :*

$\max(A) > \max(B)$  si et seulement si  $x^A \succ_{\max} x^B$ .

$\max(\bar{B}) > \max(\bar{A})$  si et seulement si  $\bar{x}_A \succ_{\min} \bar{x}_B$ .

$\min(A) > \min(B)$  si et seulement si  $x_A \succ_{\min} x_B$ .

$\min(\bar{B}) > \min(\bar{A})$  si et seulement si  $\bar{x}^A \succ_{\max} \bar{x}^B$ .

**Preuve de la Proposition 67:**

1. Pour la seconde équivalence :  $\min(\bar{x}_A) = \bar{u}_j$  signifie  $u_j \notin A$ , et  $\forall u_i \notin A, u_i \leq u_j$ ; donc  $\max(\bar{A}) = u_j$ ;  
 $\min(\bar{x}_B) = \bar{u}_k$  signifie  $u_k \notin B$ , et  $\forall u_i \notin B, u_i \leq u_k$ ; donc  $\max(\bar{B}) = u_k$ . Donc  $\bar{x}_A \succ_{\min} \bar{x}_B$  si et seulement si  $\min(\bar{x}_A) > \min(\bar{x}_B)$  si et seulement si  $\bar{u}_j > \bar{u}_k$  si et seulement si  $u_k > u_j$  si et seulement si  $\max(\bar{B}) > \max(\bar{A})$ .

2. Les autres résultats s'obtiennent de même. □

On remarque ensuite que ces vecteurs sont particuliers car, par exemple, la composante  $i$  de  $x^A$  (resp.  $\bar{x}_A$ ) ne contient que  $u_i$  (resp. 1) ou 0 (resp.  $\bar{u}_i$ ). En conséquence, on montre aisément que :

**Proposition 68.**  $x^A \succ_{discrimax} x^B$  si et seulement si  $\max(A \setminus B) > \max(B \setminus A)$ .

$x_A \succ_{discrimin} x_B$  si et seulement si  $\min(A \setminus B) > \min(B \setminus A)$ .

$\bar{x}_A \succ_{discrimin} \bar{x}_B$  si et seulement si  $\max(A \setminus B) > \max(B \setminus A)$ .

$\bar{x}^A \succ_{discrimax} \bar{x}^B$  si et seulement si  $\min(A \setminus B) > \min(B \setminus A)$ .

**Preuve de la Proposition 68:** Les vecteurs  $x^A, x^B$  ne contiennent en composante  $i$  que 0 ou un  $u_i > 0$ . Donc,  $\mathcal{D}_{(x^A, x^B)}^{x^A}$  et  $\mathcal{D}_{(x^A, x^B)}^{x^B}$  sont tels que si  $u_i \in \mathcal{D}_{(x^A, x^B)}^{x^A}$  alors  $0 \in \mathcal{D}_{(x^A, x^B)}^{x^B}$  et réciproquement. Donc, les valeurs  $u_j$  communes à  $A$  et  $B$  n'apparaissent pas dans les ensembles résiduels. Donc  $\max \mathcal{D}_{(x^A, x^B)}^{x^A} = \max(A \setminus B)$ , ce qui prouve la première équivalence. On pourrait aussi remarquer que  $u_i \neq 0$  appartient à  $\mathcal{D}_{(x^A, x^B)}^{x^A}$  ssi  $u_i$  appartient à  $A \setminus B$ .

Pour la troisième, les vecteurs  $\bar{x}_A, \bar{x}_B$  ne contiennent en composante  $i$  que 1 ou  $\bar{u}_i$ . Les ensembles résiduels  $\mathcal{D}_{(\bar{x}_A, \bar{x}_B)}^{\bar{x}_A}$  et  $\mathcal{D}_{(\bar{x}_A, \bar{x}_B)}^{\bar{x}_B}$  sont tels que si  $\bar{u}_i \in \mathcal{D}_{(\bar{x}_A, \bar{x}_B)}^{\bar{x}_A}$  alors  $1 \in \mathcal{D}_{(\bar{x}_A, \bar{x}_B)}^{\bar{x}_B}$  et réciproquement. Mais  $(\bar{x}_A)_i = \bar{u}_i$  si et seulement si  $u_i \notin A$ . Donc, les valeurs  $u_j$  communes à  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  n'induisent pas de valeurs  $\bar{u}_i$  dans les ensembles résiduels. Donc

$$\min \mathcal{D}_{(\bar{x}_A, \bar{x}_B)}^{\bar{x}_A} = \min\{\bar{u}_i : u_i \in \bar{A} \setminus \bar{B}\} = \overline{\max(B \setminus A)}$$

car  $\bar{A} \setminus \bar{B} = B \setminus A$ . Ce qui prouve la troisième équivalence. □

Enfin les ordres leximax et discrimax sont équivalents sur les vecteurs de type  $x^A$ . En effet, hormis la présence de 0, les vecteurs  $x^A$  sont déjà ordonnés. D'autre part, il y a au plus une seule occurrence de chaque  $u_i$  dans un vecteur. Donc la seule différence entre l'ensemble résiduel et l'ensemble résiduel symétrique est la présence de 0. Et 0 n'intervient pas dans le calcul du maximum. Le raisonnement est similaire pour prouver que les ordres leximin et discrimin sont équivalents sur les vecteurs de type  $\bar{x}_A$ .

## A.3.2 Applications

Le formalisme ci-dessus s'applique à la représentation de l'incertain et des préférences.

### A.3.2.1 Incertitude

On considère un ensemble d'états  $S$ . On suppose qu'on dispose d'une application  $\pi : S \rightarrow L$  interprétée comme une distribution de possibilité.  $\pi(s)$  est le degré de plausibilité

pour que  $s$  soit le monde réel et on suppose  $\pi(s) = 1$  pour un élément  $s$ . Les sous-ensembles  $A$  et  $B$  sont des propositions ou des événements. On définit quatre fonctions d'ensemble [49] :

- La mesure de possibilité faible (potentielle)  $\Pi(A) = \max_{s \in A} \pi(s)$
- La mesure duale de nécessité forte (réelle)  $N(A) = \min_{s \notin A} 1 - \pi(s) = 1 - \Pi(\bar{A})$
- La mesure de possibilité forte (réelle)  $\Delta(A) = \min_{s \in A} \pi(s)$
- La mesure duale de nécessité faible (potentielle)  $\nabla(A) = \max_{s \notin A} 1 - \pi(s) = 1 - \Delta(\bar{A})$

Alors, si on utilise le préordre ordre total  $\geq_\pi$  induit sur  $S$  par  $\pi$ .

- $\max(A) \geq \max(B)$  si et seulement si  $\Pi(A) \geq \Pi(B)$  ( $A \succeq_o B$ )
- $\max(\bar{B}) \geq \max(\bar{A})$  si et seulement si  $N(A) \geq N(B)$  ( $\bar{B} \succeq_o \bar{A}$ )
- $\min(A) \geq \min(B)$  si et seulement si  $\Delta(A) \geq \Delta(B)$
- $\min(\bar{B}) \geq \min(\bar{A})$  si et seulement si  $\nabla(A) \geq \nabla(B)$

Dans ce cas, l'ordre optimiste entre  $A$  et  $B$  est une relation de possibilité comparative ( $A \succeq_\Pi B$ ) au sens de Lewis [78] et [34], et l'ordre optimiste entre  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ , qui exprime la certitude relative ( $A \succeq_N B$ ) entre  $A$  et  $B$ , est relié à l'enracinement épistémique en théorie de la révision [2]. Ces relations vérifient les propriétés caractéristiques suivantes :

- **Stabilité pour l'union (SU)** Si  $A \succeq_\Pi B$  alors  $A \cup C \succeq_\Pi B \cup C$
- **Stabilité pour l'intersection (SI)** Si  $A \succeq_N B$  alors  $A \cap C \succeq_N B \cap C$

Notons que d'autres propriétés s'ensuivent :

- **Qualitativité (Q)** Si  $A \cup B \succ_\Pi C$  et  $A \cup C \succ_\Pi B$ , alors  $A \succ_\Pi B \cup C$
- **Négligeabilité (N)** Si  $A \succeq_\Pi B$  et  $A \succeq_\Pi C$ , alors  $A \succeq_\Pi B \cup C$

L'extension discrimax de  $\succeq_\Pi$  a été étudiée dans [36, 39]. Cette relation d'incertitude raffine à la fois  $\succeq_\Pi$  et  $\succeq_N$  et vérifie les propriétés suivantes, qui sont celles des ordres induits par les probabilités :

- **Préadditivité (P)** Si  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$  alors  $(B \succ_{discrimax} C$  si et seulement si  $A \cup B \succ_{discrimax} A \cup C)$
- **Auto-dualité (A)**  $A \succ_{discrimax} B$  si et seulement si  $\bar{B} \succ_{discrimax} \bar{A}$

L'extension leximax de  $\succeq_\Pi$  (cas fini) aussi étudiée dans [36, 39] est représentable par une relation de type  $P(A) \geq P(B)$  où  $P$  un type particulier de probabilités dites à *grandes marches* telles que  $\forall s, s' \in S, P(s) \geq P(s')$  si et seulement si  $\pi(s) \geq \pi(s')$ , et  $P(s) > \sum_{s': P(s') < P(s)} P(s')$ .

### A.3.2.2 Préférences

Dans le cas de préférences,  $A \succeq B$  exprime que la vérité de la proposition dont  $A$  est l'ensemble des modèles est préférée à la vérité de la proposition dont  $B$  est l'ensemble des modèles.

L'interprétation d'une telle assertion dépend de l'attitude de l'agent, ce qui conduit aux quatre familles de relations proposées dans la Définition 64.

La dominance sûre correspond à un point de vue très prudent, comme dans la comparaison d'intervalles [57]. Les dominances pessimiste et optimiste correspondent à des points de vue intermédiaires qui présentent tous deux un intérêt comme cela a été montré par Benferhat *et al.* [15], Kaci and van den Torre [69, 72].

### A.3.2.3 Décision multicritère

Dans ce cadre,  $S$  est un ensemble de critères, et  $A \succeq B$  exprime que l'ensemble de critères  $A$  est plus important que l'ensemble de critères  $B$ . Si l'importance relative des critères individuels est vue de façon lexicographique (le saut entre un critère et un autre critère moins important est qualitatif), on peut considérer que l'importance du groupe  $A$  reflète l'importance des critères les plus importants dans  $A$ , ce qui justifierait de définir l'ordre  $\succeq$  par la dominance optimiste. Ce modèle a été utilisé dans le cadre de l'évaluation de la décision multifacteurs bipolaire [37].



---

ANNEXE B

---

**Notations**

---

Notation	Notion
<b>Notions de base</b>	
Un langage	$\mathcal{L}$
Un langage doté d'une relation d'ordre	$\mathcal{L}_>$
Ensemble d'interprétations	$\Omega$
Une interprétation	$\omega$
Une échelle	$L$
Opérations sur les ensembles	$\cap, \cup, \subset$ $\setminus, \max, \min$
Complément d'un ensemble $S$	$\overline{S}$
Les formules propositionnelles	$\phi, \psi, \dots$
Relation d'ordre strict sur les formules	$>$
Relation d'ordre strict sur les interprétations	$\triangleright$
Inférence syntaxique classique	$\vdash$
Inférence sémantique classique	$\models$
Opérateur logique classique	$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$
Tautologie	$\top$
Contradiction	$\perp$
Modèles d'une formule propositionnelle $\phi$	$[\phi]$
Les contre-modèles d'une formule propositionnelle $\phi$	$[\overline{\phi}]$
Formules satisfaites par une interprétation $\omega$	$\mathcal{K}(\omega)$
Formules falsifiées par une interprétation $\omega$	$\overline{\mathcal{K}(\omega)}$
<b>Relations d'ordres sur des ensembles</b>	
Relation de dominance optimiste faible stricte	$\succ_{ofs}$
Relation de dominance optimiste faible large	$\succeq_{ofl}$
Relation de dominance optimiste faible stricte associée à la dominance optimiste faible large	$\succ_{ofl}$
Relation de dominance optimiste forte stricte	$\succ_{oFs}$

Relation de dominance optimiste forte large	$\succ_{oFl}$
Relation de dominance optimiste forte stricte associée à la dominance optimiste forte large	$\succ_{oFl}$
Relation de dominance pessimiste faible stricte	$\succ_{pfs}$
Relation de dominance pessimiste faible large	$\succ_{pfl}$
Relation de dominance pessimiste faible stricte associée à la dominance pessimiste faible large	$\succ_{pfl}$
Relation de dominance sûre stricte	$\succ_{ss}$
Relation de dominance sûre large	$\succ_{sl}$
Relation de dominance sûre stricte associée à la dominance sûre large	$\succ_{sl}$
Relation de dominance risqué stricte	$\succ_{rs}$
Relation de dominance risqué large	$\succ_{rl}$
Relation de dominance risqué stricte associée à la dominance sûre large	$\succ_{rl}$
Relation de dominance préadditive stricte	$\succ_{ofs}^+$
Relation de dominance préadditive large	$\succ_{ofl}^+$
Relation de dominance préadditive stricte associée à la dominance préadditive large	$\succ_{ofl}^+$
<b>Relations d'ordres sur des vecteurs</b>	
Relation de dominance min	$\succ_{\min}$
Relation de dominance discrimin	$\succ_{discrimin}$
Relation de dominance leximin	$\succ_{leximin}$
Relation de dominance Pareto	$\succ_{Pareto}$
Relation de dominance Pareto symétrique	$\succ_{ParetoS}$
<b>Logique conditionnelle</b>	
Formule en logique conditionnelle	$\Phi = \phi > \psi$
Base partiellement ordonnée	$(\mathcal{K}, >)$
Ordre partiel sur les formules	$\succ_N$
Ordre partiel pré-additif sur les formules	$\succ_N^+$
Coupe de niveau $\psi$	$\mathcal{K}_\psi^>$
Système d'inférence $\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_1$
Système d'inférence $\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_2$
Inférence syntaxique par le système $\mathcal{S}_1$	$\vdash_{\mathcal{S}_1}$
Inférence syntaxique par des coupes	$\vdash_c$
Fermeture déductive partiellement ordonnée	$\mathcal{C}_{ofs}(\mathcal{K}, >)$
Fermeture déductive partiellement ordonnée à base d'une relation préadditive	$\mathcal{C}^+(\mathcal{K}, >)$
La fermeture déductive par les coupes	$\mathcal{C}_c(\mathcal{K}, >)$
<b>Logique possibiliste</b>	
Formule possibiliste	$(\phi, p)$

poids symbolique	$p$
Base possibiliste standard	$\Sigma$
Base possibiliste symbolique	$(\Sigma, \mathcal{C})$
Les formules qui apparaissent dans une base possibiliste $\Sigma$	$\Sigma^*$
Ensemble de contraintes sur les poids symboliques	$\mathcal{C}$
Distribution de possibilité d'une interprétation $\omega$	$\pi(\omega)$
Distribution de impossibilité d'une interprétation $\omega$	$\iota(\omega)$
Mesure de possibilist� d'une formule $\phi$	$\Pi(\phi)$
Mesure de nécessite sémantique d'une formule $\phi$	$N(\phi)$
Degré de nécessite syntaxique d'une formule $\phi$	$N^+(\phi)$
Degré d'inconsistance de la base possibiliste $\Sigma$	$Inc(\Sigma)$
Inférence syntaxique en logique possibiliste	$\vdash_\pi$
Fermeture déductive d'une base possibiliste $\Sigma$	$\mathcal{C}_\pi(\Sigma)$
Traduction d'une base possibiliste $\Sigma$ en une base partiellement ordonnée	$\mathcal{K}_\Sigma$
Traduction d'une base partiellement ordonnée $\mathcal{K}$ en une base possibiliste	$\Sigma_{\mathcal{K}}$
<b>Autres</b>	
Sous-base minimales inconsistantes	$MIS$
Sous-base maximales consistantes	$MCS$
Assumption-based Truth Maintenance Systems	$ATMS$
Base de justifications en ATMS	$\mathcal{J}$
Base d'hypothèses en ATMS	$\mathcal{A}$
Traduction d'une base possibiliste $\Sigma$ en ATMS	$\mathcal{J}_\Sigma$
�tiquette qui supporte une formule $\phi$	$Label(\phi)$
Un nogood dans un ATMS	$Nogood$
L'ensemble des nogoods utiles pour une formule $\phi$	$\mathcal{U}(\phi)$
Problème SAT associé à une base propositionnelle $B$	$SAT(B)$

TABLE B.1 – Table de notations

## Liste des publications

---

### Conférences nationales :

- D. Dubois, H. Prade, F. Touazi : Réseaux de préférences conditionnelles et logique possibiliste. In *7<sup>ème</sup> Journées de l'Intelligence Artificielle Fondamentale*, pages 127-13 (2013).
- C. Cayrol, D. Dubois, and F. Touazi : On the deductive closure of a partially ordered propositional belief base. *8<sup>ème</sup> Journées de l'Intelligence Artificielle Fondamentale*, Angers, 2014
- C. Cayrol, D. Dubois, F. Touazi. La logique possibiliste avec poids symboliques : une preuve de complétude. *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2015)*, Poitiers, Cepaduès Editions, p. 169-176, novembre 2015.

### Conférences internationales :

- D. Dubois, H. Prade, F. Touazi : Conditional preference networks and possibilistic logic. In *Proceedings 12th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU)*, July, 2013. p. 7-10.
- D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi : A possibilistic logic approach to conditional preference queries. In *Proceedings 10th International Conference on Flexible Query Answering Systems (FQAS)*, Granada, September 18-20. , pages 376–388, 2013.
- D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi : Conditional preference-nets, possibilistic logic, and the transitivity of priorities. In *Proceedings of International Conference on Innovative Techniques and Applications of Artificial Intelligence*, Cambridge, England, UK, December 10-12, pages 175–184, 2013.
- C. Cayrol, D. Dubois, F. Touazi, On the semantics of partially ordered bases, in : C. Beierle, C. Meghini (Eds.), *Foundations of Information and Knowledge*

Systems, in : Lecture Notes in Computer Science, vol.8367, Springer, 2014, pp.136–153.

- C. Cayrol, D. Dubois, F. Touazi, Symbolic possibilistic logic : completeness and inference methods, in : S. Destercke, T. Denoeux (Eds.), Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty. Proceedings, in : Lecture Notes in Computer Science, vol.9161, Springer, 2015, pp.485–495.

**Articles de revue :**

- D. Dubois, A. Hadjali, H. Prade, F. Touazi : Erratum to : Database preference queries - a possibilistic logic approach with symbolic priorities. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2015, pages 359-363.
- F. Touazi, C. Cayrol and D. Dubois : Possibilistic reasoning with partially ordered beliefs. *Journal of Applied Logic*, Volume 13, Issue 4, Part 3, December 2015, pages 770-798.

# Reasoning with partially ordered belief bases

---

## Abstract

---

In this thesis, we present results on the extension of the existing methods for reasoning with totally ordered belief bases to the partially ordered case. The idea is to reason from logical bases equipped with a partial order expressing relative certainty and to construct a partially ordered deductive closure. The difficult part lies in the fact that equivalent definitions in the totally ordered case are no longer equivalent in the partially ordered case. At the syntactic level we can either use a language expressing pairs of related formulas and axioms describing the properties of the ordering, or use formulas with partially ordered symbolic weights attached to them in the spirit of possibilistic logic. A possible semantics consists in assuming that the partial order on formulas stems from a partial order on interpretations. It requires the capability of inducing a partial order on subsets of a set from a partial order on its elements so as to extend possibility theory functions. Among different possible definitions of induced partial order relations, we select the one generalizing necessity orderings (closely related to epistemic entrenchments). We study such a semantic approach inspired from possibilistic logic, and show its limitations when relying on a unique partial order on interpretations. We propose a more general sound and complete approach to relative certainty, inspired by conditional modal logics, in order to get a partial order on the whole propositional language. Some links between our approach and several inference systems, namely conditional logic, modal epistemic logic and non-monotonic preferential inference are established. Possibilistic logic with partially ordered symbolic weights proposed by Benferhat and Prade is also revisited and we continue the study by proving a completeness result. A comparison with the relative certainty approach is made via mutual translations. We compare this approach with the relative certainty approach. We study the question of the translation of a partially ordered base into a symbolic possibilistic base and vice versa. The results for this translation highlight different assumptions underlying the two logics. We also offer steps toward implementation tools for the inference of relative certainty and for the symbolic possibilistic system.

**Mots clefs:** Partially ordered belief bases, Relative certainty, Possibilistic logic

---

# Raisonnement avec des croyances partiellement ordonnées

soutenue le 18 Mars 2016 par

**Fayçal Touazi**

Sous la direction de

Claudette Cayrol  
Professeur d'Université  
Université Paul Sabatier

Didier Dubois  
Directeur de recherche  
IRIT

À INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE DE TOULOUSE

En vue de l'obtention du :

DOCTORAT DE INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

En INFORMATIQUE

---

## Résumé

---

Dans le cadre de cette thèse, nous présentons l'extension des résultats sur le raisonnement avec des bases de croyances totalement ordonnées au cas partiellement ordonné. L'idée est de raisonner avec des bases logiques équipées d'un ordre partiel exprimant la certitude relative et de construire une fermeture déductive partiellement ordonnée. Au niveau syntaxique, nous pouvons soit utiliser un langage exprimant des paires de formules et des axiomes décrivant les propriétés de l'ordre, ou utiliser des formules en relation avec des poids symboliques partiellement ordonnés dans l'esprit de la logique possibiliste. Une sémantique possible consiste à supposer que cet ordre provient d'un ordre partiel sur les modèles. Elle exige la capacité d'induire un ordre partiel sur les sous-ensembles d'un ensemble, à partir d'un ordre partiel sur ses éléments. Parmi plusieurs définitions de relations d'ordre partiel ainsi définies, nous sélectionnons la plus pertinente pour représenter la notion de certitude relative, en accord avec la théorie des possibilités. Nous montrons les limites d'une sémantique basée sur un ordre partiel unique sur les modèles et proposons une sémantique plus générale qui utilise une relation d'ordre partiel entre les ensembles de modèles. Nous utilisons un langage de plus haut niveau qui exprime des conjonctions de paires de formules en relation, avec des axiomes qui décrivent les propriétés de la relation. Nous proposons deux approches syntaxiques pour inférer de nouvelles paires de formules à partir d'une base partiellement ordonnée, et compléter ainsi l'ordre sur le langage propositionnel. L'une des inférences est proche des logiques conditionnelles de Lewis (qui traite le cas totalement ordonné) et d'un travail de Halpern. Elle est également proche du Système P. Nous reprenons la logique possibiliste symbolique proposée par Benferhat et Prade et comparons cette approche avec l'approche par certitude relative. Pour cela nous poursuivons l'étude de la logique possibiliste symbolique en démontrant un résultat de complétude. Nous étudions la question de la traduction d'une base partiellement ordonnée en base possibiliste symbolique et inversement. Nous proposons enfin des pistes pour une implémentation du système d'inférence de certitude relative et du système possibiliste symbolique

**Mots clefs:** Bases de croyances partiellement ordonnées, certitude relative, Logique possibiliste.

---

