



HAL
open science

Synthèse d'observateurs à grand gain filtrés et saturés pour des classes de systèmes non linéaires

Aziza Ragoubi

► **To cite this version:**

Aziza Ragoubi. Synthèse d'observateurs à grand gain filtrés et saturés pour des classes de systèmes non linéaires. Automatique / Robotique. Normandie Université; École nationale d'Ingénieurs de Monastir (Tunisie), 2023. Français. NNT : 2023NORMC216 . tel-04238289

HAL Id: tel-04238289

<https://theses.hal.science/tel-04238289>

Submitted on 12 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

En cotutelle internationale avec Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir , TUNISIE

Synthèse d'observateurs à grand gain filtrés et saturés pour des classes de systèmes non linéaires

Présentée et soutenue par
AZIZA RAGOUBI

Thèse soutenue le 12/05/2023
devant le jury composé de

M. HASSAN HAMMOURI	Professeur des universités, Université Lyon 1 Claude Bernard	Rapporteur du jury
M. AHMED SAID NOURI	Professeur des universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Rapporteur du jury
M. SALIM HADJ-SAID	Professeur des universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir	Membre du jury
M. ANIS MESSAOUD	Maître de conférences HDR, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès	Membre du jury
M. MOHAMED FAOUZI MIMOUNI	Professeur des universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir	Membre du jury
MME DOROTHÉE NORMAND-CYROT	Directeur de recherche, Ecole Supérieure d'Electricité	Membre du jury
M. MOHAMMED M'SAAD	Professeur des universités, Université de Caen Normandie	Président du jury
M. MONDHER FARZA	Professeur des universités, Université de Caen Normandie	Directeur de thèse

Thèse dirigée par **MONDHER FARZA (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes)**



*À mes parents,
À toute ma famille,
À tous ceux qui m'aiment et que j'aime,
Je dédie ce travail.*

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse sont effectués en co-tutelle au sein du laboratoire LIS, laboratoire d'ingénierie des systèmes de l'Université de Caen, France, sous la direction de Monsieur Mondher FARZA et au Laboratoire d'Automatique, Systèmes Électriques et Environnement (LAS2E) de l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Tunisie, sous la direction de Monsieur Salim HADJ SAID. Avant de présenter ces travaux, je tiens à remercier tous ceux et celles qui ont participé à l'élaboration et à la réussite de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'Université Caen Normandie, qui a bien voulu me guider jusqu'au terme de ce travail. Je lui suis reconnaissante pour sa disponibilité, ses précieux conseils et tout le soutien qu'il m'a apporté. Ses compétences et ses discussions enrichissantes ont été un atout indéniable à la réussite de ces travaux.

Mes très sincères remerciements s'adressent à mon directeur de thèse, Monsieur Salim HADJ SAID, Professeur à l'Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Monastir, pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience au cours de ces années de thèse. Je lui suis reconnaissante pour son soutien humain et moral et ses aides durant ces années de thèse.

Je voudrais également remercier M. Hassan HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, et M. Ahmed SAID NOURI, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon jury de soutenance. Je remercie par la même occasion les autres professeurs ayant accepté de faire partie du jury de thèse, Mme Dorothee NORMAND-CYROT, Dr CNRS émérite au L2S, M. Mohamed Faouzi MIMOUNI, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir et directeur de laboratoire de recherche LAS2E et M. Anis Messaoud, Maître de Conférences HDR à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, qui ont bien voulu être examinateurs de ma soutenance de thèse.

Je rends un grand hommage à Monsieur Mohammed M' SAAD, Professeur émérite à l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen, qui a aimablement accepté de présider le jury de cette thèse. Je suis très sensible à cette bienveillante attention et je le prie de recevoir ici l'expression de mes profonds respects.

Table des matières

Liste de publications	xi
Notations, Symboles et Acronymes	xiii
Table des figures	xv
Introduction générale	1
1 Contexte et problématique	1
2 Principales contributions	2
3 Organisation du rapport de thèse	4
1 État de l'Art et Positionnement	7
1.1 Introduction	8
1.2 Observabilité des systèmes non linéaires	8
1.2.1 Notion d'observabilité	8
1.2.2 Observabilité des systèmes bilinéaires	11
1.2.3 Observabilité des systèmes affines en la commande	12
1.3 Observateur à grand gain avec mesures continues	13
1.3.1 Classe des systèmes considérés	14
1.3.2 Équations de l'observateur	15
1.4 Resynthèse de l'observateur avec des mesures échantillonnées	16
1.4.1 Formulation du problème	17
1.4.2 Équations de l'observateur continu-discret	18
1.5 Inconvénients de l'observateur de type grand gain	19
1.5.1 Phénomène du peaking au régime transitoire	19
1.5.2 Sensibilité aux bruits de mesure	21
1.6 Quelques solutions de la littérature	23
1.6.1 Incorporation d'une action de Filtrage	23

1.6.2	Observateur de type grand gain à "faible puissance"	24
1.6.3	Structure en cascade avec des fonctions de saturation	26
1.7	Conclusion	29
2	Synthèse d'observateur à grand gain filtré avec réduction du phénomène de peaking	31
2.1	Introduction	32
2.2	Formulation du problème	33
2.2.1	Classe de systèmes considérés	34
2.2.2	Préliminaires	36
2.3	Synthèse de l'observateur sans peaking	37
2.3.1	Équations de l'observateur NPHGO	38
2.3.2	Réglage des paramètres de synthèse de l'observateur	58
2.4	Synthèse de l'observateur NPFHGO	59
2.4.1	Synthèse de FHGO	60
2.4.2	Equations de NPFHGO	63
2.5	Exemple	64
2.6	Conclusion	68
3	Application de l'observateur NPHGO au moteur asynchrone triphasé	69
3.1	Introduction	70
3.2	Modèle dynamique du moteur asynchrone triphasé	71
3.2.1	Équations électriques et mécaniques	71
3.2.2	Représentation d'état	73
3.3	Observabilité du moteur asynchrone triphasé	77
3.4	Synthèse d'observateur avec des mesures échantillonnées	80
3.5	Estimation des états du moteur asynchrone triphasé	82
3.5.1	Reconstruction des états de la MAS avec vitesse constante	83
3.5.2	Reconstruction des états de la MAS avec vitesse variable	86
3.6	Conclusion	86
	Conclusion générale et perspectives	89
	Bibliographie	91

Liste de publications

Revue internationale avec comité de lecture

1. M. Farza, A. Ragoubi, S. Hadj Saïd, M. M'Saad, "Improved high gain observer design for a class of disturbed nonlinear systems", *Nonlinear Dynamics*, 106 :631-655, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06876-4>

Conférences internationales

1. A. Ragoubi, S. Hadj-Saïd and M. Farza, "Peaking phenomenon inhibition in high gain observer design : Application to speed-sensorless induction motors," 2022 10th International Conference on Systems and Control (ICSC), Marseille, France, 2022, pp. 184-189, doi : 10.1109/ICSC57768.2022.9993885.
2. A. Ragoubi, M. Farza and S. Hadj-Saïd, "Output Noise Rejection based Filtered High-Gain Observer," 2019 19th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), Sousse, Tunisia, 2019, pp. 7-12, doi : 10.1109/STA.2019.8717237.

Notations, Symboles et Acronymes

Notations

x	Vecteur d'état du système
u	Entrée(s) du système
y	Sortie(s) du système
$\lambda^{(M)}(.)$	Plus grande valeur propre de la matrice carrée $(.)$
$\lambda^{(m)}(.)$	Plus petite valeur propre de la matrice carrée $(.)$
θ	Paramètre de synthèse de l'observateur à grand gain
$sat_\nu(.)$	Fonction de saturation associée à un scalaire
$Sat_\nu(.)$	Fonction de saturation associée à un vecteur
$L_f h(x)$	Dérivée de Lie de $h(x)$ le long du champ vectoriel $f(x)$
p	Nombre de paires de pôles
J_m	Inertie totale de la machine asynchrone triphasée
T_L	Couple résistant
Ω	Vitesse mécanique de rotation du rotor
ψ_r	Vecteur des flux rotoriques dans le repère fixe (α, β)
I_s	Vecteur des courants statoriques diphasés dans le repère fixe (α, β)
f_v	Coefficient du frottement visqueux
C_{em}	Couple électromagnétique
M_s	Inductance mutuelle entre deux phases du stator
M_r	Inductance mutuelle entre deux phases du rotor
M	Valeur maximale de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor

Symboles

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	Espace vectoriel de dimension n dans l'ensemble des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
I_n	Matrice identité de dimension $n \times n$
0_n	Matrice carrée nulle de dimension $n \times n$
$0_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$
\triangleq	Égal(e) par définition
$ a $	Valeur absolue du réel a
x^T	Transposée du vecteur x
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x
$(\cdot)^{-1}$	Inverse de (\cdot)
$(\cdot)^T$	Transposée de (\cdot)
$\ M\ $	Norme euclidienne de la matrice M
$\dot{x}(t)$	Dérivée temporelle de $x(t)$
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$	Dérivée partielle de (\cdot) par rapport à x
$[a, b]$	Intervalle fermé de \mathbb{R} , d'extrémités a et b
$\{1 \dots n\}$	Ensemble constitué des n premiers nombres entiers positifs
$diag(a_1 \dots a_n)$	Matrice diagonale avec a_i est son i^{me} élément diagonal, $a_i, i = 1 \dots n$
$det(A)$	Déterminant de la matrice A
$col(a_1, \dots, a_n)$	Vecteur colonne d'éléments (a_1, \dots, a_n)
$sign(\cdot)$	Fonction signe.
\square	Fin de la preuve.

Acronymes

MIMO	Multi-entrées / Multi-sorties (Multi-input / Multi-output)
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
SDP	Matrice Symétrique Définie Positive
SHGO	Observateur à Grand Gain Standard (Standard High Gain Observer)
FHGO	Observateur à Grand Gain Filtré (Filtered High Gain Observer)
NPHGO	Observateur à Grand Gain sans peaking (Non peaking High Gain Observer)
NPFHGO	Observateur à Grand Gain Filtré sans peaking (Non Peaking Filtered High Gain Observer)
CD-NPHGO	Observateur à Grand Gain Continu Discret Sans Peaking (Continuous-Discrete No peaking High Gain Observer)
Hurwitz	Matrice dont les valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives
MAS	Moteur asynchrone

Table des figures

1.1	Principe d'estimation d'état.	9
1.2	Principe d'estimation d'état avec des mesures sont échantillonnées.	17
1.3	Phénomène de peaking menant à l'instabilité du système.	22
1.4	Principe de l'observateur de type grand gain à faible puissance.	25
1.5	Principe de l'observateur en cascade.	27
1.6	Estimation des états x_3 et x_4	29
1.7	Erreurs d'observation relatives aux états x_3 et x_4	29
2.1	Évolution de $ \tilde{x}_1(t) $ à travers les secteurs S_k	39
2.2	Mesures bruitées de la sortie.	65
2.3	Estimation de l'état avec le NPFHGO.	67
2.4	Estimation des états x_1 et x_2 avec SHGO	67
3.1	Estimation des courant statoriques et des flux rotoriques	85
3.2	Estimation de la vitesse angulaire.	86
3.3	Estimation du couple de charge.	87
3.4	Erreur d'estimation de la vitesse angulaire (commande scalaire).	88

Introduction générale

1 Contexte et problématique

Dans de nombreuses applications, l'estimation de l'état actuel d'un système dynamique est indispensable soit pour être exploitée dans un contrôleur par retour d'état, soit simplement pour obtenir des informations en temps réel sur le système pour la prise de décision ou la surveillance. Une façon courante d'aborder ce problème est d'installer des capteurs dans le système physique et de concevoir ce qu'on appelle un observateur qui est un algorithme permettant de donner une estimation fiable de l'ensemble d'état du système en traitant les informations fournies par les capteurs. Une telle estimation ne peut être obtenue que si les mesures des capteurs contiennent suffisamment d'informations. Cependant, l'exploitation des capteurs est souvent limitée en pratique, ce qui conduit à l'impossibilité de mesurer toutes les grandeurs physiques du système étudié. En effet, nous n'avons accès en général qu'à une information partielle sur l'état du système à commander, non seulement à cause du coût élevé de certains capteurs et de la nécessité de leur diagnostic périodiquement mais aussi, à cause de la difficulté de leur installation pour certains procédés (capteur de flux dans les machines électriques par exemple) et le besoin de leur conditionnement. De ce fait, l'observateur (ou capteur logiciel) joue un rôle déterminant dans de nombreuses applications. Néanmoins, il n'existe pas une méthode unifiée et systématique pour la conception d'observateurs pour tous les systèmes non linéaires. Durant les quatre dernières décennies, plusieurs approches ont été adoptées pour la synthèse des observateurs non linéaires. On y distingue :

- Celle basée sur la transformation du système sous une forme affine en l'état avec des non linéarités qui ne dépendent que de la sortie,
- Celle basée sur les modes glissants,
- Celle basée sur les inégalités matricielles linéaires (LMI),
- Celle basée sur la notion de platitude,
- Celle utilisant le concept grand gain.

Parmi toutes ces approches, celle utilisant le concept de grand gain est certainement la plus connue et la plus utilisée. En effet, les observateurs de type grand gain ont été les premiers à être utilisés dans des boucles de commande et ils ont permis d'établir le principe de séparation pour plusieurs classes de systèmes non linéaires. De plus, la structure d'un observateur de type grand gain est très simple. En effet, cet observateur est une copie du système à laquelle s'ajoute un terme de correction. Pour les systèmes observables pour toute entrée, le terme de correction est le produit d'un vecteur paramétré par un

scalaire positif, θ , par l'erreur d'observation de sortie, c'est-à-dire la différence de la sortie estimée par l'observateur et la sortie réelle du système. Toutefois, l'implémentation de l'observateur de type grand gain souffre principalement de deux inconvénients majeurs qui résultent en particulier de l'intervention du paramètre de synthèse θ dans le gain de l'observateur avec des puissances importantes (allant de 1 jusqu'à la dimension du système). Le premier inconvénient est la sensibilité aux bruits de mesures. En effet, la multiplication de l'erreur de sortie entachée de bruit, par des puissances grandes du paramètre θ donne généralement des signaux très bruités et les estimés sous-jacents pourraient être inexploitable. Le second inconvénient concerne le phénomène de peaking : les variables d'état de l'observateur peuvent atteindre des valeurs très grandes pendant le régime transitoire.

Le principal objectif des recherches entreprises dans le cadre de cette thèse consiste à remédier aux deux inconvénients de l'observateur grand gain, auquel nous nous référerons par le SHGO (Standard High Gain observer), i.e. observateur à grand gain standard, à travers une resynthèse complète qui donnera lieu à une version appropriée ayant les propriétés suivantes

1. Le paramètre θ n'intervient qu'avec des puissances inférieures ou égales à 1,
2. L'amplitude du peaking est de l'ordre de M_θ où M_θ est un réel positif dépendant de θ et qui est tel que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{M_\theta}{\theta} = 0$,
3. Le terme correctif de l'observateur ne dépend plus de l'erreur d'observation de sortie mais plutôt d'une version filtrée de cette erreur. Cette version filtrée est obtenue comme étant la sortie d'un filtre, d'ordre arbitraire, dont l'entrée est l'erreur d'observation bruitée.

2 Principales contributions

La principale contribution de cette thèse réside dans la proposition d'une version de l'observateur grand gain qui permet de pallier à la fois son problème intrinsèque de peaking ainsi que sa forte sensibilité aux bruits de mesures de la sortie. Les performances de l'observateur proposé sont ensuite illustrées à travers un exemple traitant du moteur asynchrone.

La synthèse de l'observateur proposé s'est faite en trois étapes suivantes :

1. Dans la première étape, nous nous sommes focalisés sur le problème de peaking en faisant abstraction du problème de sensibilité aux bruits de mesure de la sortie. En d'autres termes, nous avons négligé le bruit de mesure de la sortie et l'avons supposé comme étant nul lors de notre analyse. Pour réduire l'amplitude du peaking, nous avons considéré des fonctions de saturation imbriquées dans le terme de correction. De manière plus précise, le terme de correction de l'observateur est le produit du paramètre de synthèse θ par un vecteur dont chaque composante est une fonction de saturation dont l'amplitude est fixée *a priori* par un réel positif, ν . La désaturation des composantes de ce vecteur se fait en cascade et à partir de la première composante. Lorsque toutes les composantes sont désaturées,

la structure de l'observateur devient identique à celle de l'observateur à grand gain standard (SHGO). On se référera à l'observateur obtenu à la fin de cette étape par NPHGO (Non Peaking High Gain Observer).

2. Pour remédier au problème de sensibilité aux bruits de mesure, le système original est augmenté par une chaîne d'intégrateurs de la sortie de longueur, m , arbitraire. Le système augmenté garde la même structure triangulaire que le système original mais la sortie considérée du système augmenté n'est plus la sortie du système original mais plutôt son intégrale d'ordre m . De ce fait et comme la structure du système augmenté est similaire à celle du système original, un observateur de type grand gain standard (SHGO) peut être synthétisé pour ce système pour estimer les états non mesurés. Il est à noter que le terme de correction de l'observateur ainsi obtenu dépend, non plus de l'erreur d'observation originale, mais de sa version filtrée : cette version filtrée est la différence entre l'estimée de l'intégrale d'ordre m de la sortie réelle d'une part et de son estimée délivrée par l'observateur d'autre part. L'observateur du système augmenté est muni par construction de capacités de filtrage et on y se référera par FHGO (Filtered High Gain Observer). En effet, cet observateur peut être interprété comme étant la cascade de deux systèmes de dimensions respectives m et n . Le premier système peut être interprété comme étant un filtre linéaire d'ordre m dont l'entrée est l'erreur d'observation bruitée. La sortie de ce filtre est une version filtrée de cette erreur bruitée et elle est utilisée dans le terme de correction de l'observateur. Il est à noter que le choix de la dimension du filtre est un compromis entre d'une part l'augmentation de la dimension de l'observateur (et de ce fait de la complexité de son implémentation) et d'autre part de l'ordre de filtrage permettant d'obtenir une sortie filtrée exploitable de l'erreur d'observation.
3. La troisième et dernière étape de la synthèse consiste à utiliser les deux premières étapes. En effet, comme l'observateur obtenu à la fin de la deuxième étape (FHGO), est de type grand gain standard (SHGO), on lui applique la procédure décrite lors de la première étape et qui permet d'atténuer de manière significative l'effet de peaking. Ainsi, l'observateur obtenu en fin de cette étape hérite des propriétés des deux observateurs obtenus en fin des étapes 1 et 2 c'est-à-dire le NPHGO et le FHGO. De ce fait, cet observateur auquel on se référera par NPFHGO (Non Peaking Filtered High Gain Observer) permet à la fois d'atténuer de manière significative l'effet du peaking et de délivrer des estimés filtrés des états du système.

Les performances et principales propriétés du NPFHGO seront illustrées à travers le modèle du moteur asynchrone. C'est un système avec 5 variables d'état et les valeurs des constantes de Lipschitz sous-jacentes sont élevées. De même, les mesures sont disponibles en temps échantillonné avec une forte cadence d'échantillonnage (en ms). Des résultats de simulation seront présentés. Les variables estimées par le NPFHGO sont comparées à leurs évolutions issues de la simulation du modèle du moteur. De plus, et pour mettre en avant les améliorations obtenues par le biais du NPFHGO, ces estimées sont comparées à celles issues d'un observateur de type grand gain standard (SHGO).

3 Organisation du rapport de thèse

Outre une introduction générale en début et une conclusion avec des perspectives à la fin, ce mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à une présentation de l'état de l'art relatif aux différents thèmes de recherche traités. Nous mettons l'accent en premier lieu sur la théorie d'observation pour les systèmes non linéaires. Puis, l'observabilité qui présente une étape primordiale avant la synthèse d'observateurs, est exposée pour certaines classes de systèmes non linéaires. Nous nous focalisons par la suite sur la démarche menant à la synthèse de l'observateur à grand gain standard (SHGO) sur lequel s'appuie nos contributions. La description de la version continu-discret qui découle du SHGO sera aussi détaillée en vue d'une exploitation ultérieure. A la fin de ce chapitre, nous mettons en avant les deux principaux inconvénients de l'observateur de type grand gain standard à savoir, le phénomène du peaking durant le régime transitoire et enfin la forte sensibilité aux bruits de mesure. Quelques solutions récemment proposées dans la littérature en vue de pallier ces inconvénients seront également présentées.

Le deuxième chapitre traite de nos principales contributions. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux systèmes non linéaires SISO représentés par une forme canonique d'observabilité, souvent appelée forme triangulaire en allusion à la structure triangulaire des non linéarités, en considérant que la sortie est disponible en temps continu et dépourvue de bruit de mesure. Un observateur à gain grand avec réduction significative du phénomène de peaking (NPHGO), dont la structure est très similaire à celle du SHGO, sera conçu pour cette classe de systèmes. La principale différence entre les deux observateurs réside dans le terme correctif du NPHGO qui s'exprime à l'aide de fonctions de saturation imbriquées. L'évolution temporelle de l'erreur d'observation est analysée sur tout l'horizon transitoire. Nous proposons tout au long de cette analyse plusieurs propositions qui mènent à un théorème mettant en évidence les principales propriétés de l'observateur conçu. Dans un deuxième temps, nous présentons la conception du NPFHGO qui s'est faite en deux étapes. Tout d'abord, un observateur avec des capacités de filtrage est synthétisé. Cette synthèse s'est faite à partir d'un système augmenté formé par le système original en amont duquel un intégrateur d'ordre m de la sortie a été considéré. De ce fait, le système augmenté a une structure triangulaire et un observateur de grand gain standard a été synthétisé pour ce système. Cet observateur permet de réduire l'effet des bruits de mesure sur les estimées produites par l'observateur. Dans une troisième et dernière étape, nous avons appliqué au système augmenté la même procédure décrite dans la première étape pour réduire le phénomène de peaking. Ceci a donné lieu à l'observateur NPFHGO qui permet de réduire de manière significative l'effet de peaking ainsi que l'effet du bruit des mesures sur les estimées.

Le troisième chapitre est consacré à l'application du NPFHGO pour l'estimation des états du moteur asynchrone triphasé à partir des mesures des courants statoriques. Comme les mesures ne sont disponibles qu'aux instants d'échantillonnage, nous commençons tout

d'abord par donner une version continu-discrète du NPFHGO. L'analyse de stabilité de l'erreur d'observation sous-jacente n'est pas détaillée mais elle peut être établie de manière directe en mimant l'analyse faite dans le cas des mesures disponibles en temps continu. Des résultats de simulation des flux rotoriques, de la vitesse mécanique et du couple de charge sont donnés et comparés à ceux issus d'un observateur de type grand gain standard (SHGO) afin d'illustrer l'apport de l'observateur proposé (NPFHGO) par rapport à l'observateur de type grand gain standard (SHGO) en termes de réduction du phénomène du peaking lors du régime transitoire et de comportement vis-à-vis des bruits de mesure.

Chapitre 1

État de l'Art et Positionnement

Sommaire

1.1	Introduction	8
1.2	Observabilité des systèmes non linéaires	8
1.2.1	Notion d'observabilité	8
1.2.2	Observabilité des systèmes bilinéaires	11
1.2.3	Observabilité des systèmes affines en la commande	12
1.3	Observateur à grand gain avec mesures continues	13
1.3.1	Classe des systèmes considérés	14
1.3.2	Équations de l'observateur	15
1.4	Resynthèse de l'observateur avec des mesures échantillonnées	16
1.4.1	Formulation du problème	17
1.4.2	Équations de l'observateur continu-discret	18
1.5	Inconvénients de l'observateur de type grand gain	19
1.5.1	Phénomène du peaking au régime transitoire	19
1.5.2	Sensibilité aux bruits de mesure	21
1.6	Quelques solutions de la littérature	23
1.6.1	Incorporation d'une action de Filtrage	23
1.6.2	Observateur de type grand gain à "faible puissance"	24
1.6.3	Structure en cascade avec des fonctions de saturation	26
1.7	Conclusion	29

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une présentation de l'état de l'art relatif aux différents thèmes de recherche abordés. Un premier volet est consacré à quelques préliminaires sur l'observabilité de certaines classes de systèmes non linéaires. Nous mettons l'accent en particulier sur la démarche menant à la synthèse de l'observateur à grand gain standard (SHGO) dans le cas où les mesures sont disponibles en temps continu. Puis, la version relative aux mesures disponibles aux instants d'échantillonnage, appelée observateur continu-discret, est donnée. Dans un deuxième volet, nous mettons en avant les principales problématiques soulevées lors de l'implémentation effective de l'observateur de type grand gain, à savoir l'occurrence du phénomène du peaking tout au long du régime transitoire et la forte sensibilité aux bruits de mesure. A la fin de ce chapitre, certaines solutions pour pallier ces problèmes sont brièvement présentées. Dans un premier temps, nous introduisons la démarche menant à l'intégration de l'action de filtrage des sorties dans les équations de l'observateur afin de réduire l'effet du bruit sur la qualité d'estimation [1]. Puis, dans l'objectif de contourner le phénomène de peaking, le concept de l'observateur de type grand gain à faible puissance proposé par [2] est décrit en détail. Nous présentons également à la fin de cette section, l'observateur grand gain modifié ayant une structure en cascade proposé dans [3] qui, à travers l'incorporation de fonctions de saturation, assure simultanément une limitation du gain de correction et une réduction significative du phénomène de peaking.

1.2 Observabilité des systèmes non linéaires

1.2.1 Notion d'observabilité

Pour commander un système non linéaire d'une manière adéquate, il est nécessaire de connaître son propre état à chaque instant. Cependant, l'exploitation des capteurs de mesures n'est pas toujours la solution idéale, étant donné que celle-ci ne peut être réalisée sans conséquences à savoir l'augmentation du coût, l'encombrement, la réduction de la fiabilité, le risque de défauts, la sensibilité additionnelle, etc. Ainsi, l'utilisation des observateurs ou "capteurs logiciels", peut présenter un remède permettant de remplacer ou de réduire le nombre de capteurs physiques. Il s'agit de reconstituer les états du système en exploitant son modèle dynamique et avec la seule connaissance des mesures entrées/sorties. Le principe d'un observateur est illustré par la figure 1.1.

La théorie d'observation des systèmes non linéaire MIMO et la littérature qui s'y rapporte sont très abondantes. Malgré les activités de recherche intenses sur ce sujet au cours de ces deux dernières décennies, le problème reste encore ouvert. Historiquement, les premières alternatives consistent naturellement en des extensions du cas linéaire. On trouve les filtres de Kalman étendus (EKF : Extended Kalman Filter), et les observateurs de Luenberger étendus qui ne peuvent garantir que la convergence locale [4] [5]. Une autre approche consiste à considérer une transformation appropriée de l'état du système permettant d'obtenir une forme où les non linéarités ne dépendent que des entrées et des sorties [6] [7]. Malgré les quelques contributions récentes proposant des algorithmes

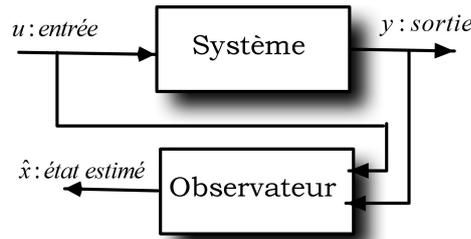


FIGURE 1.1 – Principe d'estimation d'état.

constructifs pour des formes particulières de systèmes non linéaires, il n'existe pas une démarche systématique permettant de transformer le système original sous la forme appropriée. La troisième approche est celle qui regroupe les solutions basées sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMIs : Linear Matrix Inequalities) pour l'obtention du gain de l'observateur [8, 9, 10, 11]. Dans la plupart des cas, une difficulté essentielle inhérente à cette approche réside dans l'absence de conditions nécessaires et suffisantes ou même suffisantes assurant la faisabilité des LMI considérées. Basés sur des formes canoniques observables, les observateurs issus de la théorie du grand gain sont apparus très séduisants et les contributions qui en dérivent sont de plus en plus intensifiées. Le succès de cette quatrième approche provient d'une part, du fait qu'il existe une transformation de coordonnées qui permet de mettre les systèmes SISO uniformément observables sous la forme canonique triangulaire et d'autre part, grâce au nombre réduit de paramètres de réglage qu'elle possède [12][13][14]. Néanmoins, la forte sensibilité de tels observateurs aux bruits de mesures et l'apparition des pics indésirables durant le régime transitoire représentent des handicaps sérieux qui freinent la domination de ladite approche.

Par ailleurs, avant d'entamer la synthèse de n'importe quel type d'observateur, il est nécessaire d'analyser l'observabilité du système étudié. Dans ce qui suit, nous rappellerons un ensemble de définitions correspondant aux notions fondamentales d'observabilité pour certaines classes de systèmes non linéaires.

Soit l'ensemble des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique suivant :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où ¹

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état du système,
- $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur d'entrée,
- $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie,
- $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$: vecteur des fonctions de l'état,
- $h = (h_1, h_2, \dots, h_p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$: vecteur des fonctions de sortie.

1. Pour simplifier la présentation des équations, on omettra dans la suite l'argument 't', désignant le temps, des variables d'état, des entrées et des sorties du système.

Notons que pour une entrée donnée, les trajectoires au cours du temps des variables d'état dépendent de leurs conditions initiales. Soit t_0 l'instant initial, $T > 0$ un horizon temporel et $u(t_0, t)$ une entrée, la variable t représentant le temps. On définit $x(t, x(t_0), u(t))$ la trajectoire du système lorsqu'elle existe de manière unique pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Considérons maintenant le système dynamique suivant :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z} = \kappa(z, u, y) \\ \hat{x} = \bar{\rho}(z, u, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

La propriété minimale que l'on peut exiger d'un observateur est que l'erreur d'estimation d'état $e(t)$ converge asymptotiquement vers zéro, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0. \quad (1.3)$$

L'expression (1.2) représente l'observateur du système (1.1) dont la conception repose sur la détermination des fonctions $\kappa(z, u, y)$ et $\bar{\rho}(z, u, y)$. La mise en évidence d'un observateur passe nécessairement par l'étude de son observabilité. En effet, la synthèse d'un observateur exige son observabilité. La validité de cette condition est une étape préliminaire que l'on doit toujours prendre en compte.

Dans ce qui suit, nous rappelons les principales définitions inhérentes à l'observabilité des systèmes non linéaires [15]

Définition 1.1 (*Distinguabilité-Indistinguabilité*)

Deux états initiaux $x_0, x_1 \in M$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits distinguables dans M si $\exists t \geq 0$ et $\exists u : [0, t] \rightarrow U$ une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de x_0 et x_1 restent dans M pendant la durée $[0, t]$ et vérifient $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$. Dans ce cas, on dira que u distingue x_0 et x_1 dans M . Réciproquement, deux états initiaux $x_0, x_1 \in M$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits indistinguables si $\forall t \geq 0$ et $\forall u : [0, t] \rightarrow U$ pour lesquels les trajectoires issues de x_0, x_1 restent dans M on a $y(t, x_0, u(t)) = y(t, x_1, u(t))$.

Définition 1.2 (*Observabilité*)

Un système non linéaire de la forme (1.1), est observable s'il n'admet pas de paires indistinguables.

La distinguabilité est un concept global, il arrive souvent que pour engendrer deux trajectoires à partir de x_1 et x_2 , on doit s'éloigner d'eux suffisamment. C'est dans ce contexte que la notion d'observabilité locale faible intervient

Définition 1.3 (*Observabilité locale faible*)

le système (1.1) est localement faiblement observable en x_0 s'il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 tel que pour tout voisinage ouvert $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$, l'ensemble des points qui sont indistinguables de x_0 dans V'_{x_0} via les trajectoires dans V'_{x_0} est le point x_0 lui-même.

Un système est donc localement faiblement observable si tout état x_0 peut être instantanément discerner de ses voisins. De façon analogue aux observateurs des systèmes linéaires, la vérification de cette propriété fait appel à la condition algébrique de rang.

Définition 1.4 (*Espace d'observation et observabilité au sens du rang*)

Soit un système non linéaire de la forme (1.1), l'espace d'observabilité, notée O , est le plus petit sous-espace vectoriel de fonction de V à valeur dans l'espace de sortie, contenant les sorties $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ et invariant sous l'action de la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteur $f(x, u)$, u étant fixé. On note $dO(h)$ l'espace des différentielles des éléments de $O(h)$. L'évaluation de cet espace en x_0 , caractérise l'observabilité locale faible du système (1.1) en ce point. Ainsi, il satisfait à la condition de rang d'observabilité en x_0 si :

$$\dim[dO(x_0)] = n. \quad (1.4)$$

Bien que la vérification de cette condition caractérise l'observabilité globale dans le cas linéaire, sa validation dans le cas non linéaire concerne seulement l'observabilité locale faible.

Théorème 1.1 *Le système (1.1) est localement faiblement observable en un point x_0 s'il satisfait la condition d'observabilité au sens du rang en ce point x_0 .*

D'après les définitions annoncées, on remarque que les conditions au sens du rang sont nécessaires mais elles ne sont pas suffisantes pour la synthèse des observateurs. Contrairement au cas des systèmes linéaires, le problème d'observabilité des systèmes non linéaires dépend de l'entrée appliquée. Ainsi, le problème des entrées intervient comme un élément primordial à étudier.

Définition 1.5 (*Entrées universelles*)

Une entrée admissible $u : [0, T] \rightarrow U$ est dite universelle sur $[0, T]$, si pour tout couple d'états initiaux distincts ($x_1 \neq x_2$), il existe au moins un temps $t \in [0, T]$ tel que les sorties correspondantes $y(t, x_1, u) \neq y(t, x_2, u)$.

Si l'entrée n'est pas universelle, elle est dite singulière. Par ailleurs, son absence assure que tout couple d'états initiaux sont distinguables, et fait appel à la propriété suivante :

Définition 1.6 (*U -uniforme observabilité*)

Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans U sont universelles est dit U -uniformément observable. Dans le cas où l'ensemble de toutes les entrées à valeurs bornées dans \mathbb{R}^m sont universelles, ce système sera dit \mathbb{R}^m -uniformément observable ou tout simplement uniformément observable.

1.2.2 Observabilité des systèmes bilinéaires

Soit la classe des systèmes bilinéaires décrite par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx + Fu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $(u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, et $F \in \mathbb{R}^n$.

La condition d'observabilité uniforme correspondante à cette classe de systèmes non linéaires se résume dans le théorème suivant :

Théorème 1.2 [16] *Le système affine en l'état (1.5) est uniformément observable si et seulement s'il existe une transformation de coordonnées T ($z = Tx$) qui peut le ramener sous la forme canonique suivante :*

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + u\bar{B}z + \bar{F}u \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (1.6)$$

avec

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = TBT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \bar{b}_{n1} & \cdots & \cdots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = TF \text{ et } \bar{C} = CT^{-1} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

1.2.3 Observabilité des systèmes affines en la commande

Soit maintenant la classe des systèmes non linéaires affines en la commande ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

La condition d'observabilité uniforme des systèmes qui s'écrivent sous cette forme est résumé dans le théorème suivant

Théorème 1.3 [17] *Le système (1.7) est uniformément observable si et seulement s'il existe un système de coordonnées locales sur \mathbb{R}^n qui peut le transformer en un système de la forme suivante*

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z) + \psi(z)u \\ y = Cz \end{cases} \quad (1.8)$$

avec

- A est une matrice carrée dite matrice de Brunovski (ou matrice anti-décalage) donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- C est un vecteur ligne donnée par

$$C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

- La fonction φ est définie par

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$$

- La matrice $\psi(z) = [\psi^{(1)}(z) \ \psi^{(2)}(z) \ \cdots \ \psi^{(m)}(z)]$ est telle que chacune de ces composantes possède une structure triangulaire par rapport à z :

$$\psi^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} \psi^{(i)}(z_1) \\ \psi^{(i)}(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \psi^{(i)}(z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, nous focalisons notre étude sur la synthèse des observateurs non linéaires. Une attention particulière sera réservée à l'approche de type grand gain qui présente un grand succès lors de son utilisation dans les algorithmes de commande par retour de sortie [18][19][20]. La formulation standard de l'observateur à grand gain (SHGO : standard High gain observer) pour une large classe de systèmes non linéaires MIMO sera tout d'abord détaillée. Puis, la version correspondante à l'observateur continu-discret (CD-SHGO), qui fonctionne lorsque les mesures ne sont disponibles qu'aux instants d'échantillonnage, sera présentée.

1.3 Observateur à grand gain avec mesures continues

L'approche grand gain pour la synthèse d'observateurs est très répandue dans la littérature et elle s'applique à une large classe de systèmes non linéaires [21, 22, 23]. La mise en œuvre de l'observateur sous-jacent est relativement simple puisque sa structure consiste en une copie de la dynamique du système avec un terme de correction dont l'expression peut être explicitement calculée. Les principales caractéristiques de cet observateur résident d'une part dans son réglage aisé qui peut être réalisé via le choix d'un seul paramètre

de synthèse et d'autre part, dans la convergence asymptotique (exponentielle) de son erreur d'estimation qui peut être arbitrairement rapide. Dans ce qui suit et après une présentation de la classe des systèmes non linéaires à laquelle le SHGO peut être appliqué, nous donnons les équations dynamiques de l'observateur et les hypothèses requises pour sa mise en œuvre.

1.3.1 Classe des systèmes considérés

Considérons la classe des systèmes non linéaires MIMO qui sont difféomorphes à la forme triangulaire suivante

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}_q z + \varphi(u, z) + \mathcal{B}_q \bar{\varepsilon}(t) \\ y = \mathcal{C}_q z = z^1 \end{cases} \quad (1.9)$$

avec :

- L'état $z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^{q-1} \\ z^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $z^k \in \mathbb{R}^p, k = 1, \dots, q$ et $n = qp$.
- Le vecteur d'entrée $u \in \mathbb{R}^m$.
- La sortie mesurée $y \in \mathbb{R}^p$,
- \mathcal{A}_q est la matrice anti-décalage de dimension $pq \times pq$,

$$\mathcal{A}_q = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I_p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- C est la matrice d'observation de dimension $p \times pq$,

$$\mathcal{C}_q = (I_p \quad 0_p \quad \dots \quad 0_p)$$

- \mathcal{B}_q est donnée par

$$\mathcal{B}_q = (0_p \quad \dots \quad 0_p \quad I_p)^T$$

- La non linéarité $\varphi(u, z)$ admet une structure triangulaire par rapport z . Il est donné par

$$\varphi(u, z) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, z^1) \\ \varphi^2(u, z^1, z^2) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, z) \end{pmatrix},$$

- La variable $\bar{\varepsilon}(t) \in \mathbb{R}^p$ est un signal inconnu qui renferme les incertitudes du modèle et les perturbations externes.

La synthèse de l'observateur se fait sous les hypothèses suivantes généralement adoptés lorsqu'on adopte une approche grand gain :

Hypothèse H. 1.1 L'état $z(t)$ et l'entrée $u(t)$ sont bornés, i.e. $x(t) \in Z$ et $u(t) \in U$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^m$ sont des compacts.

Hypothèse H. 1.2 Les fonctions $\varphi^k(u, z)$, pour $k = 1, \dots, n$, sont Lipschitziennes par rapport x uniformément en u .

Hypothèse H. 1.3 La fonction inconnue ε est essentiellement bornée, i.e.

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 ; |\varepsilon|_\infty \triangleq \text{ess sup}_{t \geq 0} |\varepsilon(t)| \leq \delta_\varepsilon. \quad (1.10)$$

1.3.2 Équations de l'observateur

L'observateur à grand gain correspondant à la forme (1.9) se présente sous la forme suivante suivante : [24]

$$\dot{\hat{z}} = \mathcal{A}_q \hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta \Delta_{q,\theta}^{-1} K C_q \tilde{z}^1, \quad (1.11)$$

avec

- Le vecteur des états estimés $\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pq}$ où $\hat{z}^k \in \mathbb{R}^p$ pour $k = 1, \dots, q$.
- L'erreur d'estimation est $\tilde{z} = \hat{z} - z$.
- La matrice diagonale $\Delta_{q,\theta}$ est exprimée par :

$$\Delta_{q,\theta} = \text{diag}(I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p). \quad (1.12)$$

- $\theta > 0$ est le seul paramètre de synthèse de l'observateur.

- Le vecteur $K = \begin{pmatrix} K^1 \\ \vdots \\ K^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $K^i \in \mathbb{R}^p, i = 1, \dots, q$, est choisi de sorte que la matrice suivant est Hurwitz :

$$\bar{\mathcal{A}}_q \triangleq \mathcal{A}_q - K C_q. \quad (1.13)$$

Notons que comme la matrice \bar{A} est Hurwitz, il existe une matrice symétrique définie positive P et un réel $\mu > 0$ tel que :

$$\bar{A}_q^T P + P \bar{A}_q \leq -2\mu I_n, \quad (1.14)$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$.

Les principales propriétés de l'observateur (1.11) sont énoncées dans le théorème suivant.

Théorème 1.4 [24]

Considérons le système (1.9) sous les hypothèses **H. 1.1**, **H. 1.2** **H. 1.3** avec le système (1.11) et notons par $\tilde{z}(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ la différence entre ces trajectoires qui correspond en fait à l'erreur d'observation. Cette erreur est bornée comme suit :

$$\exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \forall u \in U; \forall z(t_0) \in Z; \forall k \in \{1, \dots, q\}; \forall t > t_0, \quad (1.15)$$

$$\|\tilde{z}^k(t)\| \leq \sigma_P \theta^{k-1} \left(e^{-\theta\beta(t-t_0)} \|\tilde{z}(t_0)\| + \frac{\delta_\varepsilon}{\beta\theta^q} \right), \quad (1.16)$$

où $\sigma_P = \sqrt{(\lambda^{(M)}(P))/\lambda^{(m)}(P)}$ est le nombre de conditionnement de la matrice P définie par (1.14), $\beta = \frac{\nu}{2\lambda^{(M)}(P)}$ et δ_ε est la borne essentielle de ε définie dans l'hypothèse **H.1.1**.

Remarque 1.1 A partir de la borne de l'erreur d'observation donnée par (1.16), nous pouvons facilement déduire les propriétés suivantes de l'observateur (1.11)

- a. En l'absence d'incertitude, i.e. $\delta_\varepsilon = 0$, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers 0 avec une décroissance exponentielle de l'ordre de θ , c'est-à-dire qui pourrait être rendue arbitrairement grande. Toutefois, de grandes valeurs de θ sont à éviter puisqu'elles rendent l'observateur plus sensible vis-à-vis des bruits de mesure.
- b. En présence d'incertitudes, l'erreur asymptotique d'observation reste dans une boule centrée sur 0 dont le rayon (borne ultime) est de l'ordre de $\frac{1}{\theta}$. Ici encore, la borne ultime de l'erreur d'observation asymptotique peut être rendue aussi petite que désirée en considérant de grandes valeurs de θ . Mais, pour les raisons évoquées précédemment, de telles valeurs sont à éviter.
- c. Pour des grandes valeurs de θ , le terme $\theta^{k-1} e^{-\theta\beta(t-t_0)}$ atteint de très grandes valeurs lorsque t est au voisinage de t_0 , d'où le phénomène de peaking. Ce phénomène est d'autant plus important que k est grand.

1.4 Resynthèse de l'observateur avec des mesures échantillonnées

Dans les développements précédents, il a été établi que lorsque les mesures de la sortie sont disponibles en temps continu, l'observateur de type grand gain permet de délivrer des estimations instantanées de tous les états du système et l'erreur d'observation sous-jacente

converge exponentiellement vers 0 (en absence de bruit sur ces mesures). En pratique, les mesures sont rarement disponibles en temps continu mais plutôt à certains instants d'échantillonnage qui pourraient être éventuellement non régulièrement espacés, c'est-à-dire que la période d'échantillonnage relative à l'acquisition des mesures pourrait être non constante. Dans ce cas, une resynthèse de l'observateur est nécessaire et ce pour tenir compte du processus d'échantillonnage. L'objectif de la resynthèse consiste à obtenir une version similaire à celle fonctionnant avec des mesures continues, c'est-à-dire permettant de délivrer des estimations de la sortie et des états non mesurées non seulement aux instants d'échantillonnage mais en temps continu. Le principe d'observation à partir des sorties échantillonnées est illustré sur la figure 1.2.

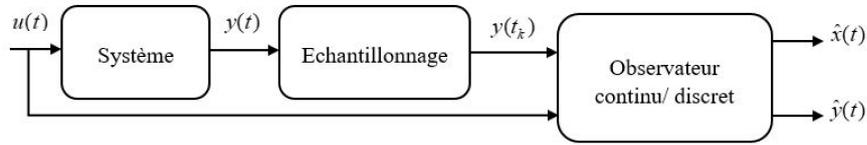


FIGURE 1.2 – Principe d'estimation d'état avec des mesures sont échantillonnées.

Plusieurs travaux dans la littérature ont considéré la synthèse d'un observateur avec un système temps continu et des mesures échantillonnées (disponibles donc en temps discret) et l'observateur résultant est souvent appelé observateur continu-discret [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Nous allons dans ce qui suit rappeler la version de l'observateur continu discret résultant de la resynthèse de l'observateur (1.11), proposée dans [28].

1.4.1 Formulation du problème

Considérons les systèmes non linéaires MIMO qui sont difféomorphes à la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}_q z(t) + \varphi(u(t), z(t)) \\ y_k = \mathcal{A}_q z(t_k) = z^1(t_k) \end{cases} \quad (1.17)$$

avec $z(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}$ est le vecteur d'entrée, \mathcal{A}_q est une matrice de dimension $n \times n$, $\varphi(u(t), x(t))$ est une fonction Lipschitzienne et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée à l'instant t_k (avec $k \in \mathbb{N}$) respectant l'inégalité suivante :

$$0 \leq t_0 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty.$$

L'intervalle entre deux mesures est borné par τ_m et τ_M , avec τ_m et τ_M sont tel que :

$$0 < \tau_m < \tau_k = t_{k+1} - t_k < \tau_M, \quad (1.18)$$

où τ_m et τ_M désignent respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de la période d'échantillonnage.

1.4.2 Équations de l'observateur continu-discret

L'observateur continu-discret pour la classe des systèmes (1.17) s'écrit sous la forme suivante [28] :

$$\hat{z}(t) = \mathcal{A}_q \hat{z}(t) + \varphi(u(t), \hat{z}(t)) - \theta \Delta_{q,\theta}^{-1} K e^{-\theta K^1(t-t_k)} (\mathcal{C}_q \hat{z}(t_k) - y(t_k)), \quad (1.19)$$

avec

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; K = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ \vdots \\ K^q \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

où K est le gain de l'observateur et il est choisi comme dans le cas où les mesures sont disponibles en temps continu, c'est-à-dire de sorte que la matrice $\bar{\mathcal{A}}_q \triangleq \mathcal{A}_q - K\mathcal{C}_q$ est Hurwitz, Δ_θ est la matrice diagonale définie par (1.12), $\theta \geq 1$ est un paramètre de synthèse et t_k représente l'instant d'échantillonnage.

Comme l'observateur (1.11) proposé dans le cas de sorties disponibles en temps continu, l'observateur (1.19) est copie du système (1.17) à laquelle s'ajoute un terme de correction qui consiste en le produit de l'erreur d'observation de sortie par un gain de correction. Ce gain intègre une fonction exponentielle dépendant de $t - t_k$ où t est le temps courant et t_k est le dernier instant d'acquisition de la mesure de la sortie.

L'erreur d'observation dépend de la période d'échantillonnage des mesures et ses principales propriétés sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 1.5 [28] *Considérons le système (1.17) sous les hypothèses **H. 1.1**, **H. 1.2** et **H. 1.3** avec le système (1.19) et notons par $\tilde{z}(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ la différence entre ces trajectoires qui correspond en fait à l'erreur d'observation. Alors $\forall u \in U, \forall \theta > \theta_0, \exists \chi_\theta, \eta_\theta(\tau_m, \tau_M) > 0$, si la borne supérieure de la période d'échantillonnage τ_M est telle que $\tau_M < \chi_\theta$, alors pour chaque $\hat{z}(0) \in Z$ et pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, nous avons :*

$$\| \tilde{z}^i(t) \| \leq \sigma_P \theta^{i-1} \left(e^{-\eta_\theta(\tau_M)(t-t_0)} \| \tilde{z}(t_0) \| + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta^q} \tau_M \left(1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}} \right) \right), \quad (1.21)$$

avec

$$\eta_\theta(\tau_M) = \beta \theta \left(1 - \frac{\tau_M}{\chi_\theta} e^{-\beta \theta \tau_M} \right), \quad \chi_\theta = \frac{\beta}{(L_\varphi + \theta) \sigma_P \|K\|}, \quad (1.22)$$

où β et σ_P ont la même signification que dans la borne (1.16), τ_m et τ_M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la période d'échantillonnage telles que définies par (1.18) et L_φ est la constante de Lipschitz de φ .

La borne de l'erreur d'observation correspondant à l'observateur continu-discret et donnée par (1.21) est à comparer à celle relative au cas où les mesures sont disponibles en temps continu, qui est donnée par (1.16). En effet, le membre droit de l'inégalité (1.21) est similaire à celui de l'inégalité (1.16) avec la différence suivante : le terme $\beta \theta$ dans (1.16)

(mesures en temps continu) est remplacé par $\eta_\theta(\tau_M)$ dans (1.21) alors que le terme $\frac{1}{\beta}$ est remplacé par $\theta\tau_M \left(1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}}\right)$. On pourra montrer que lorsque la période d'échantillonnage est constante, i.e. $\tau_M = \tau_m \stackrel{\Delta}{=} \tau$, alors la borne associée à l'erreur d'observation en continu discret tend vers celle correspondant à l'observateur avec des mesures continues, lorsque la période d'échantillonnage tend vers 0. En effet, à partir de l'expression de η_θ donnée par (1.22), on peut déduire facilement que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \eta_\theta(\tau) = \beta\theta$.

Calculons maintenant $\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta\tau \left(1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau)\tau}}\right)$. Nous avons :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta\tau \left(1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau)\tau}}\right) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \theta\tau \frac{1}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau)\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \theta\tau \frac{1}{\eta_\theta\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\theta}{\eta_\theta} = \frac{1}{\beta}. \quad (1.23)$$

De manière plus générale, il a été établi dans [28] que les fonctions :

$$\tau \mapsto \eta_\theta(\tau) \text{ et } \tau \mapsto \theta\tau \left(1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau)\tau}}\right) \text{ sont croissantes.}$$

Ainsi, les bornes obtenues dans le cas de l'observateur continu-discret sont en accord avec celles obtenues avec des mesures continues dans le temps : le taux de décroissance exponentielle de l'erreur d'observation est inversement proportionnel à l'amplitude la période d'échantillonnage alors que la borne ultime asymptotique est proportionnelle à cette amplitude. De plus, lorsque la période d'échantillonnage tend vers 0, les expressions du taux de décroissance exponentielle et de la borne ultime asymptotique tendent vers les expressions générées dans le cas des mesures continues dans le temps.

1.5 Inconvénients de l'observateur de type grand gain

Les équations de l'erreur d'observation que ce soit dans le cas où les mesures sont disponibles en temps continu (1.16) ou dans le cas des mesures échantillonnées (1.21) mettent en évidence les deux principaux inconvénients de l'observateur à grand gain, à savoir

1. Le phénomène de peaking qui a lieu tout au long du régime transitoire où de fortes fluctuations apparaissent au niveau de l'erreur d'estimation.
2. La forte sensibilité au bruit de mesures qui dégrade la qualité d'estimation d'état en régime permanent.

Dans ce qui suit, nous analysons analytiquement ces inconvénients pour pouvoir mettre l'accent sur les causes de leurs apparitions.

1.5.1 Phénomène du peaking au régime transitoire

Nous allons dans ce qui suit expliquer les raisons de l'occurrence du phénomène de peaking tout au long du régime transitoire de l'observateur. Pour ce faire, nous allons revenir à la borne de l'erreur d'observation générée dans le cas de mesures continues et donnée par l'inégalité (1.16) et que nous reproduisons ci-dessous dans un souci de clarté. Rappelons

que le phénomène de peaking ne dépend pas de la nature de disponibilité des mesures et il est aussi présent dans le cas où les mesures sont disponibles sous forme échantillonnée. Conformément à (1.16), chaque composante \tilde{z}^k , de l'erreur d'observation \tilde{z} est bornée comme suit :

$$\|\tilde{z}^k(t)\| \leq \sigma_p \left(\underbrace{\theta^{k-1} e^{-\theta\beta(t-t_0)} \|\tilde{z}(t_0)\|}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{\delta_\varepsilon}{\beta\theta^{q-k+1}}}_{\text{régime permanent}} \right).$$

Le membre droit de la borne de l'erreur d'observation est constitué de deux termes, le premier correspondant au régime transitoire et le second au régime stationnaire. Le phénomène du peaking est dû au premier terme, c'est-à-dire celui correspondant au régime transitoire et qui contient l'exponentielle décroissante. En effet, pour de grandes valeurs de θ , la fonction $t \mapsto \theta^{k-1} e^{-\theta\beta(t-t_0)}$ est de l'ordre de θ^{k-1} lorsque t évolue au voisinage de t_0 . Ainsi, l'estimée de chaque composante z^k atteint des valeurs de l'ordre de θ^{k-1} au voisinage de t_0 , c'est ce qu'on appelle le phénomène de peaking. Il est clair que le phénomène de peaking est d'autant plus important que k est grand. Ainsi, lorsque la dimension n du système est relativement grande, le phénomène de peaking devient très important puisque les estimées des dernières composantes atteignent des valeurs qui peuvent être de l'ordre de $n-1, n-2, \dots$

Plusieurs travaux de recherche se sont penchés sur ce phénomène en introduisant des saturations (voir par exemple [32], [33],[34], [35]) que ce soit dans la loi de commande ou dans la conception de l'observateur lui-même afin de prévenir ou réduire les pics. Cependant, la complexité des solutions adoptées et la lourdeur en temps d'exécution laisse encore ce problème ouvert et le phénomène de peaking reste un défi d'un point de vue numérique. Nous allons illustrer dans ce qui suit les effets du problème de peaking sur les performances d'un système asservi à travers un exemple.

Exemple d'illustration

Nous considérons le problème de stabilisation du système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + e^{(-x_2^2)} u \end{cases} \quad (1.24)$$

Dans le cas où tout le vecteur d'état est accessible à la mesure (c.a.d $y = [x_1 \ x_2]^T$), l'objectif de stabilisation peut être atteint en considérant la loi de commande linéarisante par retour d'état suivante :

$$u = -e^{(x_2^2)}(x_2^2 + x_1 + x_2). \quad (1.25)$$

En effet, en remplaçant la loi de commande (1.25) dans (1.24) nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1.26)$$

Il en ressort :

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 = 0. \quad (1.27)$$

Ainsi, le système en boucle fermée est alors stable puisque ses pôles sont situés en $-0.5 \pm j0.86$.

Supposons maintenant que nous avons accès seulement à la mesure de l'état x_1 (c.à.d $y = x_1$). Afin d'implémenter la même loi de commande sur le système (1.24), une solution consiste à concevoir un observateur de type grand standard pour l'estimation de l'état x_2 . Il est clair que le système (1.24) est sous la forme canonique d'observabilité et l'observateur de type grand gain standard suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 2\theta(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_2^2 + e^{(-\hat{x}_2^2)}u + \theta^2(y - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (1.28)$$

permet d'avoir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation puisque tous les pôles de l'observateur sont placés à la valeur -1 .

En remplaçant les états du système par leur estimé issus de l'observateur dans la loi de commande, nous obtenons :

$$u = -e^{(\hat{x}_2^2)}(\hat{x}_2^2 + \hat{x}_1 + \hat{x}_2). \quad (1.29)$$

Les résultats obtenus par l'application de cette loi de commande sont présentés. En effet, la figure (1.3) illustre l'évolution dans le temps ainsi que le plan de phase des états du système pour $\theta = 280$ et en choisissant $x(0) = [0.1 \ -0.1]^T$ et $\hat{x}_0 = [0.01 \ 0.01]^T$.

Ces résultats montrent, que lors de la combinaison de l'observateur à grand gain standard (1.28) avec la loi de commande stabilisante (1.29), une instabilité du système en boucle fermée est enregistrée (l'état \hat{x}_2 diverge).

Ceci s'explique par le fait que l'effet du peaking sur l'estimation \hat{x}_2 se répercute directement sur le signal de commande on perd ainsi la stabilité du système.

A travers cet exemple, il est important de noter que malgré l'utilisation d'une loi de commande par retour d'état stabilisante et un observateur caractérisé par une convergence asymptotique, le système bouclé peut être instable. Ainsi, la prise en considération du phénomène de peaking lors de la conception de l'observateur est une tâche à ne pas négliger pour s'assurer du problème de séparation observateur-contrôleur.

1.5.2 Sensibilité aux bruits de mesure

Le deuxième inconvénient de l'observateur à grand gain est sa forte sensibilité au bruit de mesure. Pour justifier, ce phénomène, nous allons rappeler une borne de l'erreur d'observation générée par la prise en compte de la présence de bruit sur la sortie. En effet, on suppose ici que la sortie du système (1.9) est affectée par un bruit de mesure et s'écrit comme suit :

$$y = \mathcal{C}_q z + \eta(t) = z^1 + \eta(t), \quad (1.30)$$

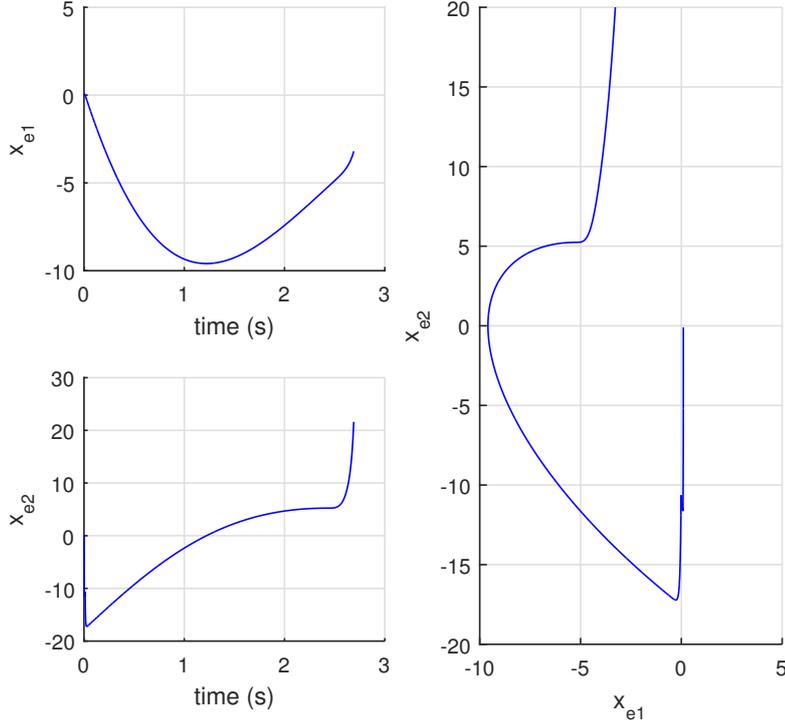


FIGURE 1.3 – Phénomène de peaking menant à l'instabilité du système.

où $\eta(t)$ est le bruit de mesure qui est supposé être essentiellement borné, i.e.

$$\exists \delta_\eta > 0; t \geq 0 \sup E_{ss} \|\eta(t)\| \leq \delta_\eta. \quad (1.31)$$

L'observateur proposé est le même que celui en absence de bruit, c'est-à-dire l'observateur de type grand gain standard (1.11).

La borne de l'erreur suivante relative à chaque composante $\hat{z}^k, k = 1, \dots, q$ de l'erreur d'observation \tilde{z} peut être déduite directement à partir de celle relative à \tilde{z} proposée dans [28] :

$$\begin{aligned} & \exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \forall u \in U; \forall z(t_0) \in Z; \forall t > t_0, \\ & \|\hat{z}^k(t)\| \leq \sigma_p \left(\theta^{k-1} e^{-\theta\beta(t-t_0)} \|\tilde{z}(t_0)\| + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{q-k+1}} + \theta^{k-1} \|K\| \delta_\eta \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

On remarque que le membre droit de l'inégalité (1.32) est similaire à celui de (1.16) mais renferme en plus un terme qui tient compte de la présence de bruit dans les mesures. Ce terme est égal à $\sigma_p \theta^{k-1} \|K\| \delta_\eta$. Ainsi, chaque composante $\hat{z}^k, k = 1, \dots, q$, de l'état estimé renferme un biais qui résulte du bruit de mesure. Ce biais est de l'ordre de θ^{k-1} et il est de ce fait d'autant plus important que k est grand, et quelque soit k ce biais est d'autant plus important que θ est grand. Ainsi, le compromis entre la vitesse de convergence de l'erreur d'observation et la sensibilité au bruit de mesure est toujours nécessaire lors du choix de θ . À cet égard, les observateurs à grand gain sont réglés pour obtenir une dynamique d'estimation suffisamment rapide sans perdre le rôle de filtrage pour les bruits de mesure (haute fréquence). Dans [36], une stratégie pour obtenir une convergence rapide tout en

réduisant l'impact du bruit de mesure consiste à utiliser une valeur élevée de θ pendant le régime transitoire, puis à la diminuer dans le régime permanent. De nombreuses autres techniques qui font varier le paramètre de synthèse de l'observateur ont été proposées [37], [38], [39], [40], [22]...etc.

1.6 Quelques solutions de la littérature

Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement quelques solutions récentes proposées dans la littérature pour pallier soit le problème de peaking, soit le problème de sensibilité aux bruits de mesures ou encore les deux problèmes à la fois.

1.6.1 Incorporation d'une action de Filtrage

Dans [1], les auteurs ont proposé un observateur de type grand gain pour la classe de système monovisible uniformément observable suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_n x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B_n \varepsilon(t) \\ y(t) = C_n x(t) + w(t) = x_1(t) + v(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

où $x^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}$ désigne l'entrée et $y(t)$ désigne la sortie mesurée, $v(t)$ est le bruit de mesure, la fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$ désigne les incertitudes de système et les matrices A_n , B_n et C_n sont données par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1,n-1} \end{pmatrix}, B_n(0 \dots 0 1)^T \in \mathbb{R}^n, C_n = (1 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad (1.34)$$

et $\varphi(u, x)$ désigne un champ vectoriel non linéaire ayant une structure triangulaire par rapport à x , i.e. $\varphi_i(u, x) = \varphi(u, x_1, \dots, x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

L'observateur à grand gain proposé prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_n \hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta K_n \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) = -\theta D_n \eta(t) + \theta^2 A_n^T \eta(t) + \theta C_n^T (C_n \hat{x}(t) - y(t)) \text{ avec } \eta(0) = 0, \end{cases} \quad (1.35)$$

où $\hat{x} = (\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\eta = (\eta_1 \dots \eta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}_i, \eta_i \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ et les matrices D_n et K_n sont des matrices diagonales avec :

$$D_n = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), K_n = \text{diag}(k_1, \dots, k_n). \quad (1.36)$$

Les coefficients δ_i et k_i , $i = 1, \dots, n$ sont des réels choisis tel que la matrice M_n suivante soit Hurwitz :

$$M_n = \begin{pmatrix} A_n & -K_n \\ C_n^T C_n & -D_n + A_n^T \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Un algorithme relativement simple a été proposé dans [1] pour le choix de ces paramètres.

L'observateur (1.35) est doté d'une action de filtrage. Pour mieux appréhender cette action, écrivons les équations de cet observateur sous la forme développée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i &= \hat{x}_{i+1} + \varphi_i(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i) - \theta k_i \eta_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n &= \varphi_n(u, \hat{x}) - \theta k_n \eta_n, \\ \dot{\eta}_1 &= -\delta_1 \eta_1 + \theta(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\eta}_i &= -\delta_i \eta_i + \theta^2 \eta_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.38)$$

Il est clair que la variable η_1 est une version filtrée de l'erreur d'observation de sortie (bruitée) $\hat{x}_1 - y$. Cette version filtrée correspond à la sortie d'un filtre d'ordre dont l'entrée est égale à $\hat{x}_1 - y$ et dont le gain statique est indépendant de θ . Chacune des autres composantes $\eta_i, i = 2, \dots, n$ correspond à la version filtrée de η_{i-1} à travers un filtre de première ordre dont le gain statique est de l'ordre de θ . Ainsi, la composante $\eta_i, i = 2, \dots, n$, peut être interprétée comme étant la version filtrée de η_1 (ou encore de $\hat{x}_1 - y$) avec un gain statique de l'ordre de θ^{i-1} .

Maintenant, il est clair que les équations des états estimés \hat{x}_i de l'observateur (1.38) sont très similaires à celles correspondant à l'observateur de type grand gain standard (1.11) et la seule différence réside dans le fait que le terme de correction $\theta^{i-1}(\hat{x}_1 - y)$ dans l'équation de (1.11) est remplacé par sa version filtrée η_i dans l'observateur (1.38).

Une borne supérieure de l'erreur d'observation associée à l'observateur (1.38) a été proposée dans [1]. Elle est très similaire à celle correspondant à l'observateur de type grand gain standard (1.11) et elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\|\tilde{x}_i(t)\| \leq \sigma_{P_{2n}} \sigma \left(\theta^{i-1} e^{-\beta\theta(t-t_0)} \|\hat{x}(t) - x(t_0)\| + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta^{n-i+1}} + \theta^{i-1} \delta_v \right) \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

où β est un constante positive indépendante de θ et $\sigma_{P_{2n}}$ est le nombre de conditionnement de la matrice symétrique définie positive P_{2n} suivante :

$$M_n^T P_{2n} + P_{2n} M_n \leq -2\mu_n I_{2n},$$

avec M_n définie par (1.37) et μ_n est un réel strictement positif.

1.6.2 Observateur de type grand gain à "faible puissance"

Dans [2] un observateur de type grand gain, dit "observateur à faible puissance" a été proposé. La version initiale de cet observateur a tout d'abord été proposée dans [41] et elle résulte de la resynthèse de l'observateur de type grand gain standard en vue d'obtenir une version dotée de capacité de filtrage. Puis, cette version a été reconsidérée dans [2] et des fonctions de saturation sur certains état ont été introduits pour pallier le problème de peaking. Nous allons dans ce qui suit présenter brièvement la version proposée dans [2].

La classe des systèmes considérée dans [2] est suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \varphi(x, d(t)) \\ y &= x_1 + v(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ représente l'état, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie mesurée, la fonction $t \mapsto \nu(t)$

représente le bruit de mesure et $t \mapsto d(t)$ est un signal borné (inconnu) qui inclut les incertitudes paramétriques de la fonction $\varphi(.,.)$ ou les perturbations inconnues; enfin ν désigne le bruit de mesure qui est supposé être essentiellement borné. La structure de l'observateur est composée de n modules, où chacun des $n - 1$ premiers modules admet une dimension de deux alors que le dernier est de dimension un (figure 1.4).

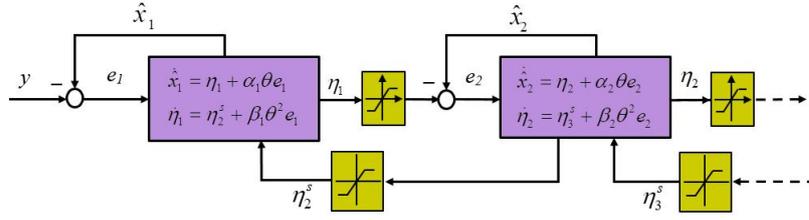


FIGURE 1.4 – Principe de l'observateur de type grand gain à faible puissance.

Ces modules s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \eta_i + \alpha_i \theta e_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n = \varphi_s(\hat{x}) + \alpha_n \theta e_n \\ \dot{\eta}_i = \text{sat}_{r_{i+2}}(\eta_{i+1}) + \beta_i \theta^2 e_i, & i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{\eta}_{n-1} = \varphi_s(\hat{x}) + \beta_{n-1} \theta^2 e_{n-1} \end{cases} \quad (1.40)$$

où $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$; $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$; $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ sont les paramètres de synthèse de l'observateur. Les variables de l'erreur d'estimation e_i , $i = 1, \dots, n$, sont définis par :

$$e_1 = y - \hat{x}_1, \quad e_i = \text{sat}_{r_i}(\eta_{i-1}) - \hat{x}_i, \quad \text{pour } i = 2, \dots, n, \quad (1.41)$$

avec $r_i = \max_{x \in X} |x_i|$ pour $i = 1, \dots, n$ et la fonction $t \mapsto \text{sat}_{r_i}(\cdot)$ représente la fonction de saturation.

Notons que les paramètres de synthèse α_i , $i = 1, \dots, n$ et β_i , $i = 1, \dots, n-1$ devraient être choisis de sorte à satisfaire une certaine condition de stabilité forte [2] qui est primordiale pour la stabilité de la version saturée de l'observateur. Il a aussi été montré que les fonctions de saturation sont désaturées après un régime transitoire et la structure de l'observateur résultant (en régime permanent) devient alors similaire à celle de l'observateur proposé dans [41]. Un algorithme (plus ou moins complexe) a été proposé dans [41] pour la détermination des coefficients de synthèse α_i et β_i .

L'observateur (1.40) possède les propriétés suivantes [2] :

(a) Il existe $\bar{p}_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, et pour tout $\bar{\nu} > 0$, il existe $\bar{p}_1 > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} |\hat{x}_i(t) - x_i(t)| &\leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ |\eta_i(t) - x_{i+1}(t)| &\leq \theta \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1.42)$$

pour tout $t \geq 0$, pour $\theta \geq 1$ et pour tout $\nu(t)$ tel que $|\nu(t)|_\infty \leq \bar{\nu}$;

(b) Il existe $\bar{\nu} > 0$ et $\theta^* \geq 1$ tels que pour tout $\nu(t)$ tel que $\theta \geq \theta^*$, il existe $T > 0$ tel que

$$|\nu(t)|_\infty \leq \frac{\bar{\nu}}{\theta^i} \implies \text{sat}_{r_{i+1}}(\eta_i(t)) = \eta_i(t), \quad \forall t \geq T, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (1.43)$$

La première inégalité de (1.42) montre que la borne de $|\hat{x}_i|_\infty$ est indépendante de θ . De ce fait, les valeurs maximales des estimations de l'état ne devraient pas présenter des pics lors du régime transitoire puisqu'elles ne dépendent pas de θ . La deuxième inégalité (1.42) indique que les valeurs maximales des variables états sont de l'ordre de θ , ce qui est rassurant du côté numérique. Notons que les variables η_i peuvent être interprétées comme étant des copies des estimés de l'état et représentent donc des variables auxiliaires qui ne seront pas utilisés dans les boucles de commande.

Par ailleurs, les inégalités données par (1.43) permettent de quantifier l'amplitude du bruit admissible en dessous de laquelle la version saturée convergera au bout d'un certain temps vers la version non saturée. On notera que l'inégalité (1.43) est assez sévère puisque pour $i = n-1$, nous obtenons le seuil de la borne maximale de $|\nu(t)|_\infty$ qui est de l'ordre de $\frac{1}{\theta^{n-1}}$. Néanmoins, ce ne sont que des bornes théoriques issues de l'analyse adoptée et les bornes obtenues dans les cas réels sont généralement un peu plus élevées.

1.6.3 Structure en cascade avec des fonctions de saturation

Dans [3], l'auteur a considéré la classe de systèmes monovariabiles suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= x_{i+1} \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \phi(w, x, u), \\ \dot{w} &= f_0(w, x, u), \\ y &= x_1, \end{cases} \quad (1.44)$$

où f_0 et ϕ sont localement Lipschitz, $w(t), u(t)$ sont bornés pour tout $t \geq 0$ et l'état $x(t)$ évolue dans un compact $X \subset \mathbb{R}^n$.

L'idée derrière cette approche est inspirée du fait que la dérivée d'un signal peut être estimée par un observateur linéaire de premier ordre ou de second ordre et que la mise en cascade de tels observateurs permet d'estimer des dérivées plus élevées d'un signal mesuré.

Les équations de l'observateur proposé dans [3] sont :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \theta(z_2 + \beta_1(y - z_1)) \\ \dot{z}_2 = \beta_2\theta(y - z_1) \\ \hat{x}_1 = z_1, \hat{x}_2 = M_2 \operatorname{sat}\left(\theta \frac{z_2}{M_2}\right) \\ \dot{z}_i = -\beta_i\theta(z_i + \hat{x}_{i-1}), \quad i = 3, \dots, n, \\ \hat{x}_i = M_i \operatorname{sat}\left(\beta_i\theta \frac{z_i + \hat{x}_{i-1}}{M_i}\right), \quad i = 3, \dots, n, \end{cases} \quad (1.45)$$

où $\operatorname{sat}(y) = \min\{1, |y|\} \operatorname{sign}(y)$, $M_i > \max_{x \in X} |x_i|$ pour $2 \leq i \leq n$, et β_i , $1 \leq i \leq n$, sont des constantes positives.

L'observateur (1.45) (auquel on se référera par CHGO) a la même dimension que le système original (1.44). Les états de l'observateur z_1 et z_2 sont en fait les composantes d'un filtre de second ordre dont l'entrée est y et la sortie est z_2 . L'utilisation d'un filtre de second ordre est motivée par la recherche d'une robustesse par rapport aux bruits de mesures. Chacun des autres états z_i , $i = 3, \dots, n$ est la sortie d'un filtre de premier ordre d'entrée \hat{x}_{i-1} . Ainsi, cet observateur se présente sous la forme d'une cascade où la tête est un système de second ordre et le reste des équations consiste en une chaîne de filtres de premier ordre dont les entrées sont sujettes à des fonctions de saturation. La figure 1.5 illustre la structure de l'observateur proposé dans [3].

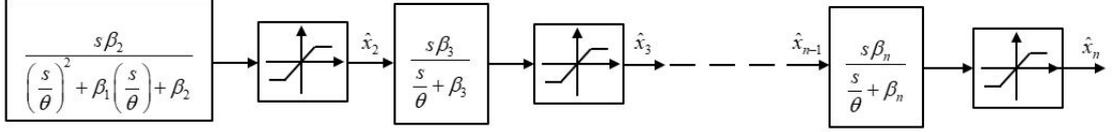


FIGURE 1.5 – Principe de l'observateur en cascade.

Le théorème suivant résume les principales propriétés de l'observateur (1.45).

Théorème 1.6 [3] *Considérons le système (1.44) et l'observateur (1.45). Alors, il existe $\theta^* > 0$ tel que pour $\theta \geq \theta^*$, les erreurs d'estimation $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1 \dots, n$, associés sont bornées. Plus précisément, il existe une constante positive a et une durée $T(\theta)$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} T(\theta) = 0$, tels que pour tout $t \geq T(\theta)$ on a :*

$$|\hat{x}_1(t)| \leq \frac{a}{\theta^2}, \quad (1.46)$$

$$|\hat{x}_i(t)| \leq \frac{a}{\theta}, \quad 2 \leq i \leq n. \quad (1.47)$$

Quelques caractéristiques de l'observateur (1.45) sont comparées avec celles à grand gain standard dans le tableau 1.1 [3].

On remarque que le gain de l'observateur (1.45) ne fait intervenir que des puissance de θ au plus égales à 1, contrairement au grand gain standard (SHGO) où cette puissance varie de 1 jusqu'à la dimension du système, notée n . De même, l'ordre maximal du peaking est de l'ordre de θ alors qu'il varie de l'ordre de $n - 1$ pour le SHGO. Par contre, l'ordre de

TABLE 1.1 – Comparaison de l'observateur à grand gain standard et celui en cascade.

Caractéristique	SHGO	HGO cascade
Dimension	n	n
Gain de l'observateur	$O(\theta^n)$	$O(\theta)$
Ordre maximal du peaking	$O(\theta^{n-1})$	$O(\theta)$
Ordre de la borne ultime asymptotique de $\ \tilde{x}_1\ $	$O(\frac{1}{\theta^n})$	$(\frac{1}{\theta^2})$
Ordre de la borne ultime asymptotique de $\ \tilde{x}_i\ $	$O(\frac{1}{\theta^{n+1-i}})$	$(\frac{1}{\theta})$

la borne ultime asymptotique pour la composante $\tilde{x}_i, i = 1, \dots, n$ est de l'ordre de $1/\theta^2$ pour $i = 1$ et de l'ordre de $1/\theta$ pour $i = 2, \dots, n$. Dans le cas du SHGO, cette borne est plus petite et elle est de l'ordre de $1/\theta^{n-i+1}$.

Les améliorations en termes de réduction du peaking apportées par l'observateur (1.45) sont claires. Cependant, pour ce qui est de son comportement vis-à-vis du bruit sur les mesures, il est similaire à celui de l'observateur SHGO [3].

Exemple

On considère le système d'ordre quatre suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \phi(x), \quad y = x_1, \quad (1.48)$$

avec :

$$\phi(x) = -(x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4) + [1 - (x_1 + 2x_2 + x_3)^2](x_2 + 2x_3 + x_4).$$

L'observateur de type grand gain standard correspondant à (1.48) s'écrit sous la forme suivante :

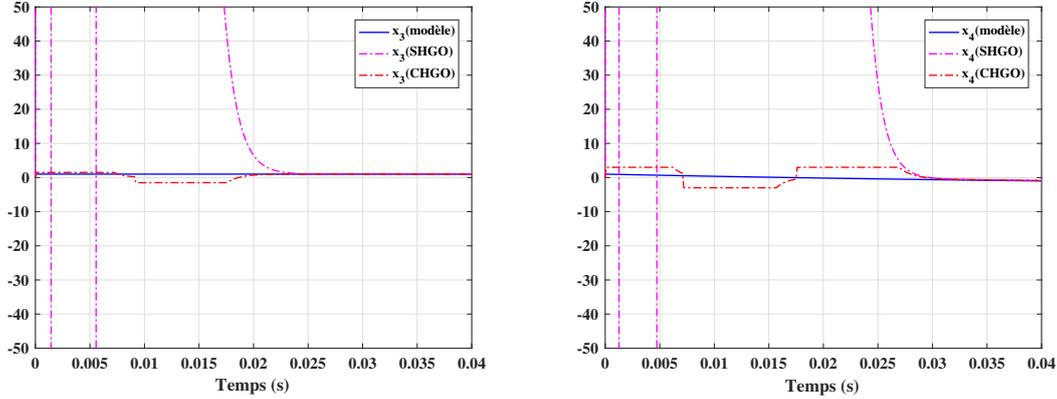
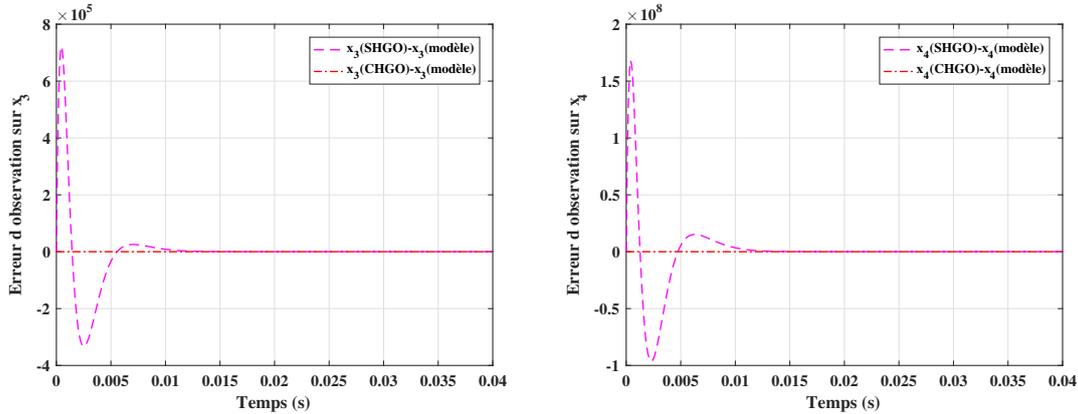
$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + 4\theta(y - z_1), & \hat{x}_1 &= z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 + 6\theta^2(y - z_1), & \hat{x}_2 &= z_2, \\ \dot{z}_3 &= z_4 + 4\theta^3(y - z_1), & \hat{x}_3 &= z_3, \\ \dot{z}_4 &= -\theta^4(y - z_1), & \hat{x}_4 &= z_4. \end{aligned}$$

D'un autre coté, l'observateur à grand gain relative à la structure (1.45) s'écrit sous forme cascade suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \theta[z_2 + 2(y - z_1)], & \hat{x}_1 &= z_1, \\ \dot{z}_2 &= \theta(y - z_1), & \hat{x}_2 &= 2\text{sat}(\theta z_2/2), \\ \dot{z}_3 &= -\theta(z_3 - \hat{x}_2), & \hat{x}_3 &= 1.5\text{sat}(\theta(z_3 + \hat{x}_2)/1.5), \\ \dot{z}_4 &= -\theta(z_4 - \hat{x}_3), & \hat{x}_4 &= 3\text{sat}(\theta(z_4 + \hat{x}_3)/3). \end{aligned}$$

Bien que l'observateur en cascade proposé ait un avantage numérique par rapport à l'observateur à grand gain standard, il présente également certains inconvénients. Il a été

mentionné dans [3] que le comportement de l'observateur en cascade vis à vis au bruit de mesure est comparable à ceux de l'observateur de type grand gain standard. En d'autres termes, ce n'est ni meilleur ni pire comme $|x(t) - \hat{x}(t)|$ a le même ordre de grandeur, $O(\theta^{n-1}\delta_v)$, dans les deux observateurs où δ_v désigne la borne du bruit de mesure.

FIGURE 1.6 – Estimation des états x_3 et x_4 .FIGURE 1.7 – Erreurs d'observation relatives aux états x_3 et x_4 .

1.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une présentation générale de l'approche d'observation de type grand gain et ses propriétés intrinsèques. Les notions d'observabilité pour certaines classes de systèmes non linéaires ont été brièvement rappelées en premier lieu. Cette étape est indispensable pour préparer la synthèse d'observateurs non linéaires. Puis, notre analyse s'est focalisée particulièrement sur la technique d'observation de type grand gain. Nous avons tout d'abord traité le cas des systèmes où les sorties sont disponibles en temps continus avant de passer au cas des sorties échantillonnées. Nous avons mis l'accent par la suite sur les inconvénients majeurs de cette approche, à savoir la forte sensibilité aux

bruits de mesure et le phénomène de peaking qui caractérise le régime transitoire. Quelques tentatives récentes proposées dans la littérature en vue de pallier ces problématiques ont été exposées dans un dernier volet. En s'inspirant de ces solutions, nous proposons dans le chapitre 2 une démarche systématique qui mène en premier lieu à remédier au problème de peaking avant l'intégration d'une action de filtrage pour surmonter la forte sensibilité aux bruits de mesure.

Chapitre 2

Synthèse d'observateur à grand gain filtré avec réduction du phénomène de peaking

Sommaire

2.1	Introduction	32
2.2	Formulation du problème	33
2.2.1	Classe de systèmes considérés	34
2.2.2	Preliminaires	36
2.3	Synthèse de l'observateur sans peaking	37
2.3.1	Équations de l'observateur NPHGO	38
2.3.2	Réglage des paramètres de synthèse de l'observateur	58
2.4	Synthèse de l'observateur NPFHGO	59
2.4.1	Synthèse de FHGO	60
2.4.2	Equations de NPFHGO	63
2.5	Exemple	64
2.6	Conclusion	68

2.1 Introduction

Comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, l'observateur à grand gain standard auquel nous nous référerons par SHGO (Standard High Gain Observer), bien qu'il soit le plus utilisé actuellement dans des boucles de commande avec retour de sortie, présente deux inconvénients majeurs, à savoir le phénomène de peaking d'une part et sa forte sensibilité aux bruits de mesure d'autre part. Quelques solutions récentes, rappelées au chapitre précédent, ont été proposées pour pallier l'un de ces problèmes ou les deux à la fois. Notre objectif consiste à proposer une solution qui soit simple à appliquer. En effet, et comme nous le détaillerons plus loin, nous allons proposer une démarche systématique en trois étapes qui permet de synthétiser un observateur permettant de pallier le problème de peaking et de sensibilité aux bruits de mesure. La première étape consiste à faire une resynthèse de l'observateur SHGO pour obtenir une version qui pallie le problème de peaking. Nous nous référerons à cette version de l'observateur par NPHGO (Non Peaking High Gain Observer). La principale caractéristique du NPHGO réside dans le fait que son terme de correction renferme des fonctions de saturation imbriquées qui seront désaturées en cascade et après un régime transitoire qui pourrait être rendu aussi court que désiré, toutes les fonctions de saturation sont désaturées et le terme de correction devient identique à celui du SHGO. Notons que nous entendons par désaturation le fait que la fonction de saturation devient égale à la fonction identité. Cette désaturation se produit donc lorsque l'amplitude de l'argument de la fonction de saturation devient inférieur au niveau de saturation. Dans la deuxième étape, le problème de la sensibilité du SHGO aux bruits de mesures de la sortie est mis en avant. Pour améliorer les performances du SHGO vis-à-vis de ces bruits, le système original, qui est sous la forme canonique triangulaire observable, est augmenté par une série d'intégrateurs en cascade de la sortie dont le nombre est égal à m , de sorte que le système augmenté résultant garde une structure triangulaire en considérant l'intégrale d'ordre m de la sortie réelle comme étant la sortie du système augmenté. Ainsi, un observateur de type SHGO peut être synthétisé pour le système augmenté. La principale caractéristique de cet observateur auquel on se référera par FHGO (Filtered High Gain Observer) réside dans sa capacité de filtrage puisque le terme de correction de l'observateur n'est plus une fonction linéaire de l'erreur d'observation de sortie mais plutôt d'une version filtrée de cette erreur qui correspond à la sortie d'un filtre d'ordre m . Les équations de ce filtre correspondent en fait aux m premières équations du FHGO. La troisième et dernière étape de la procédure de resynthèse de l'observateur consiste à appliquer la démarche proposée dans la première étape qui a permis d'obtenir le NPHGO à partir du SHGO. Cette démarche est maintenant appliquée au FHGO et elle permet de générer une version sans peaking à laquelle nous nous référerons par NPFHGO (Non Peaking Filtered High Gain Observer). En effet, l'observateur obtenu à la fin de la troisième étape, i.e. le NPFHGO, hérite à la fois des propriétés du FHGO et de celles du NPHGO : il possède intrinsèquement des propriétés de filtrage de bruit compte tenu de la présence du filtre dans ses équations. Il permet aussi de réduire de manière significative le phénomène de peaking grâce à la considération de fonctions de saturation imbriquées dans son terme de correction.

Nous proposons dans ce qui suit de détailler les trois étapes précédentes.

Pour plus de clarté, nous définissons dans ce qui suit un ensemble de variables auxquelles nous nous référerons de manière récurrente tout au long de ce chapitre.

$$A_1 = 0, A_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k} \text{ pour } k \geq 2, \quad (2.1)$$

$$B_k = (0 \cdots 0 \ 1)^T, C_k = (1 \ 0 \cdots 0) \in \mathbb{R}^k \text{ pour } k \geq 1, \quad (2.2)$$

$$\Gamma_k = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)^T \in \mathbb{R}^k, \bar{A}_k = A_k - \Gamma_k C_k, \quad (2.3)$$

$$U_k = (1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^k \text{ pour } k \geq 1, \quad (2.4)$$

$$\Delta_k(\theta) = \text{diag}(1, \frac{1}{\theta}, \cdots, \frac{1}{\theta^{k-1}}) \text{ pour } k \geq 1. \quad (2.5)$$

où le paramètre θ figurant dans l'expression de $\Delta_k(\theta)$ est un réel positif.

Nous rappelons maintenant le résultat (bien connu) suivant qui sera aussi utilisé de manière récurrente tout au long de ce chapitre.

Si A_k est une matrice Hurwitz $k \times k$, $k \geq 1$, alors il existe une matrice symétrique définie positive $k \times k$, P_k , et un scalaire $\mu_k > 0$ tels que :

$$P_k A_k + A_k^T P_k < -2\mu_k I_k. \quad (2.6)$$

Par ailleurs, soit $n \geq 1$ un entier positif et soit $\zeta^T = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\zeta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, alors pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on définit $\underline{\zeta}_k \in \mathbb{R}^k$ comme suit

$$\underline{\zeta}_k^T = (\zeta_1 \cdots \zeta_k) \in \mathbb{R}^k, k = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

2.2 Formulation du problème

Le but ultime de ce chapitre consiste à reconsidérer la synthèse de l'observateur de type grand gain standard (SHGO) pour générer une version qui permet de pallier ses problèmes intrinsèques de peaking lors du régime transitoire et de forte sensibilité aux bruits de mesures. Cette resynthèse sera détaillée tout au long de ce chapitre et se basera sur la classe des systèmes non linéaires suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_n x + \varphi(x, u) + B_n \varepsilon(t) \\ y &= C_n x + v(t) = x_1 + v(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

où l'état du système $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, les matrices A_n et C_n, B_n sont respectivement définies comme dans (2.1) et (2.2) avec $k = n$, $v(t)$ est le signal de bruit sur la mesure et la fonction $\varepsilon : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ désigne l'incertitude sur le système et elle pourrait dépendre de l'entrée et de certains paramètres inconnus du système. Elle sera traitée comme une fonction complètement inconnue qui dépend explicitement du temps t ; la fonction $\varphi(u, x) \in \mathbb{R}^n$ est

la non linéarité du système et chacune de ses composantes $\varphi_i, i = 1, \dots, n$ possède une structure triangulaire rapport à x , i.e. $\varphi_i(u, x) = \varphi_i(u, \underline{x}_i)$, $i = 1, \dots, n$ où $\underline{x}_i \in \mathbb{R}^i$ est le sous-vecteur de x défini comme en (2.7).

La classe de systèmes (2.8) appartient à une plus grande classe de systèmes considérée dans [28] pour laquelle un observateur SHGO a été proposé. Comme indiqué précédemment, notre objectif consiste à procéder à une resynthèse de cet observateur pour remédier au phénomène de peaking et à sa sensibilité aux bruits de mesure. Pour ce faire, nous allons procéder comme suit. Tout d'abord, nous allons introduire une large classe de systèmes non linéaires contenant la classe des systèmes décrite par (2.8) et dont la caractéristique principale réside dans le fait que l'expression de la sortie des systèmes décrits par cette classe ne dépend pas du bruit mais simplement de l'état du système. Cette classe de systèmes sera considérée pour la synthèse d'un observateur de type grand gain, auquel nous nous référerons par NPHGO, qui remédie au problème de peaking. Les principales propriétés de cet observateur seront énoncées et mises en avant. Ensuite, nous reviendrons au système original (2.8) et nous montrerons que ce système est effectivement inclus dans la classe de systèmes pour laquelle le NPHGO a été conçu. Ainsi, la procédure adoptée pour la synthèse de l'observateur NPHGO pourra être utilisée pour le système (2.8) et nous montrerons que l'observateur ainsi obtenu permet non seulement de remédier au problème de peaking mais aussi aux problèmes inhérents à la sensibilité aux bruits de mesures sur la sortie. Cet aspect sera détaillé plus tard.

Nous allons maintenant introduire la classe générale de systèmes contenant le système (2.8) avant de procéder à la synthèse de l'observateur NPHGO.

2.2.1 Classe de systèmes considérés

On considère la classe des systèmes non linéaires ayant la structure triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_n x + \varphi(x, u) + B_n \varepsilon(t) + B_{i_w} w(t) \\ y = C_n x = x_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

où $i_w \in \{1, \dots, n-1\}$ avec $B_{i_w}(i_w) = 1$ et $B_{i_w}(i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_w\}$, $w : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue qui varie dans le temps et dont l'introduction sera motivée plus tard. Les autres variables impliquées dans le système ont la même signification que celle donnée pour le système (2.8). Notons que pour éviter la redondance des variables utilisées, nous avons utilisé les mêmes noms des variables (état, entrée, sortie, perturbation) pour les systèmes (2.8) et (2.9).

La conception de l'observateur pour le système (2.9) nécessite l'adoption des hypothèses suivantes généralement considérés lorsqu'on poursuit une approche de type grand gain.

Hypothèse H. 2.1 *La commande $u(t)$ et l'état $x(t)$ sont bornés, i.e. $u(t) \in U$ et $x(t) \in X$ où $U \subset \mathbb{R}$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ sont des ensembles compacts. Plus précisément, il existe une constante positive ρ_M , tel que $\forall t \geq 0, |x_i(t)| \leq \rho_M, i = 1, \dots, n$.*

Hypothèse H. 2.2 Les fonctions $\varphi_k(x, u)$ pour $k = 1, \dots, n$, sont Lipschitz sur X par rapport à x uniformément en u , c'est-à-dire pour $k = 1, \dots, n$, on a :

$$\exists L_k > 0; \forall u \in U; \forall (\hat{x}, x) \in X \times X, |\varphi_k(\hat{x}_k, u) - \varphi_k(x_k, u)| \leq L_k \sum_{i=1}^k |\tilde{x}_i|, \quad (2.10)$$

où $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$.

Hypothèse H. 2.3 La fonction inconnue ε est essentiellement bornée, c'est-à-dire :

$$\exists \delta_\varepsilon > 0, \text{Ess sup}_{t \geq 0} |\varepsilon(t)| \leq \delta_\varepsilon. \quad (2.11)$$

Hypothèse H. 2.4 La fonction inconnue w est essentiellement bornée, c'est-à-dire :

$$\exists \delta_w > 0, \text{Ess sup}_{t \geq 0} |w(t)| \leq \delta_w. \quad (2.12)$$

Nous introduisons maintenant la fonction de saturation usuelle qui sera utilisée lors de la conception de l'observateur :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \text{sat}_r(z) = r \text{sat}(z/r) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq r \\ r \text{ sign}(z) & \text{si } |z| > r \end{cases}, \quad (2.13)$$

où $r > 0$ est un réel positif et $\text{sign}(\cdot)$ est la fonction usuelle signe.

De même, on définit un réel R comme suit :

$$R > \rho_M, \quad (2.14)$$

où ρ_M est défini dans l'hypothèse **H.2.1**.

On procède maintenant à la saturation des non-linéarités φ_k pour $k = 1, \dots, n$, comme suit :

$$\varphi_k^s(u, x_1, \dots, x_k) = \varphi_k(u, \text{sat}_R(x_1), \dots, \text{sat}_R(x_k)). \quad (2.15)$$

Selon l'hypothèse **H.2.2** et du fait que la fonction de saturation (2.13) est globalement Lipschitz avec une constante de Lipschitz égale à 1, les fonctions φ_i , pour $i = 1, \dots, n$, satisfont l'inégalité suivante :

$$\forall u \in U, \forall (\hat{x}, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |\varphi_k^s(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) - \varphi_k^s(u, x_1, \dots, x_k)| \leq L_k \sum_{i=1}^k |\tilde{x}_i|. \quad (2.16)$$

On en déduit que $\varphi_k^s(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) - \varphi_k^s(u, x_1, \dots, x_k)$ est uniformément bornée. En effet, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_k^s(u, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) - \varphi_k^s(u, x_1, \dots, x_k)| &\leq L_k \sum_{i=1}^k |\text{sat}_R(\hat{x}_i) - \text{sat}_R(x_i)| \\ &\leq 2L_k \sum_{i=1}^k R \\ &\leq 2nL_\varphi R, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où

$$L_\varphi = \max_{1 \leq k \leq n} L_k. \quad (2.18)$$

En utilisant les inégalités (2.16) et (2.17), nous pouvons générer deux bornes de la norme du vecteur d'erreur des non-linéarités saturées $\tilde{\varphi}^s(u, \hat{x}, x) = \varphi^s(u, \hat{x}) - \varphi^s(u, x)$. En effet, de l'inégalité (2.16), il arrive que :

$$|\tilde{\varphi}_k^s(u, \hat{x}, x)| \leq L_\varphi \sum_{i=1}^k |\tilde{x}_i| \leq L_\varphi \sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i| \leq \sqrt{n} L_\varphi \|\tilde{x}\|, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

et ainsi :

$$|\tilde{\varphi}_k^s(u, \hat{x}, x)| \leq \sqrt{n} L_\varphi \|\tilde{x}\|. \quad (2.20)$$

En se référant à l'inégalité (2.17), il vient que :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}^s(u, \hat{x}, x)\| &\leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\tilde{\varphi}_k^s(u, \hat{x}, x)| \\ &\leq 2n L_\varphi R. \end{aligned} \quad (2.21)$$

La synthèse de l'observateur sera effectuée en considérant la classe de systèmes suivante avec des non linéarités saturées :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_n x + \varphi^s(x, u) + B_n \varepsilon(t) + B_{iw} w(t) \\ y = C_n x = x_1. \end{cases} \quad (2.22)$$

où $\varphi^s(u, x) = (\varphi_1^s(u, x) \dots \varphi_n^s(u, x))^T$. Le fait de considérer le (2.22) au lieu du système original (2.9) pour la synthèse de l'observateur s'explique par le fait que le système (2.22) coïncide avec le système (2.9) sur l'ensemble X . Ainsi l'observateur qui sera conçu pour le système (2.22) pourra être utilisé pour estimer les trajectoires du système (2.9) qui évoluent toujours dans le compact X .

2.2.2 Préliminaires

Les équations de l'observateur SHGO pour le système (2.22) s'écrivent comme suit (cf. par exemple [28]) :

$$\dot{\hat{x}} = A_n \hat{x} + \varphi^s(\hat{x}, u) - \theta \Delta_n^{-1}(\theta) \Gamma_n (C_n \hat{x} - y), \quad \hat{x}(t_0) \in X, \quad (2.23)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état estimé, Γ_n est défini comme dans (2.3), pour $i = 1, \dots, n$, les coefficients γ_i sont choisis tel que $\bar{A}_n = A_n - \Gamma_n C_n$ est Hurwitz et $\Delta_n(\theta)$ est la matrice diagonale définie en (2.5) pour $k = n$ et $\theta \geq 1$.

Soit $\tilde{x} = \hat{x} - x$ l'erreur d'observation associée au SHGO (2.22). A partir (2.23) de (2.22), on obtient :

$$\dot{\tilde{x}} = A_n \tilde{x} + \tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u) - \theta \Delta_n^{-1}(\theta) \Gamma_n C_n \tilde{x} - B_n \varepsilon(t) - B_{iw} w(t), \quad (2.24)$$

où $\tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u) = \varphi^s(\hat{x}, u) - \varphi^s(x, u)$. En procédant comme dans [42], on peut montrer que les vecteurs d'erreur d'observation $\underline{x}_k(t)$ pour $k = 1, \dots, n$, où \underline{x}_k est défini dans (2.7), vérifient la propriété suivante :

$$\begin{aligned} & \exists \theta_0 > 0, \forall \theta \geq \theta_0, \forall u \in U, \forall \hat{x}(t_0) \in X, \forall t \geq t_0, \\ & \|\tilde{\underline{x}}_k(t)\| \leq \sigma_{P_n} \left(\theta^{k-1} e^{-\beta_n \theta(t-t_0)} \|\tilde{\underline{x}}(t_0)\| + \frac{\delta_\varepsilon}{\beta_n \theta^{n+1-k}} + \frac{\delta_w}{\beta_n \theta^{i_w+1-k}} \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec :

$$\beta_n = \frac{\mu_n}{2\lambda_{P_n}^{(M)}}, \quad (2.26)$$

où la matrice SDP P_n et le réel positif μ_n sont donnés par l'équation (2.6) avec $k = n$, δ_ε et δ_w sont les bornes essentielles de $|\varepsilon(t)|$ et $|w(t)|$ données respectivement dans les hypothèses **H.2.3** et **H.2.4**, $\theta_0 = \max(1, nL_\varphi/\beta_n)$, L_φ est la constante de Lipschitz introduite dans (2.17) et σ_{P_n} est le nombre de conditionnement de la matrice P_n .

Remarque 2.1 *D'après l'inégalité (2.25), et dans le cas où $\delta_w = 0$, les erreurs d'observation asymptotiques associées à x_k , $k = 1, \dots, n$, peuvent être rendues aussi petites que souhaité en choisissant θ suffisamment élevé. En effet, dans ce cas, la borne de l'erreur d'observation asymptotique est égale à $\frac{\delta_\varepsilon}{\beta_n \theta^{n+1-k}}$ et elle est, pour $k \leq n$, inférieure ou égale à $\frac{\delta_\varepsilon}{\beta_n \theta}$ qui tend vers 0 lorsque θ tend vers ∞ . Dans le cas où $\delta_w \neq 0$, cette propriété n'est plus vraie mais on peut facilement vérifier que la borne ultime de l'erreur d'observation résultante peut être rendue aussi petite que souhaité si la condition suivante sur δ_w est satisfaite :*

$$\exists \bar{\delta}_w > 0, \delta_w \leq \frac{\bar{\delta}_w}{\theta^{n-i_w}}, \quad (2.27)$$

avec $\theta > \theta_0$. Plus précisément, sous la condition (2.27), l'inégalité (2.25) devient :

$$\|\tilde{\underline{x}}(t)\| \leq \sigma_{P_n} (\theta^{k-1} e^{-\beta_n \theta(t-t_0)} \|\tilde{\underline{x}}(t_0)\| + \frac{\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_w}{\beta_n \theta^{n+1-k}}). \quad (2.28)$$

Rappelons que dans la condition (2.27) la variable n désigne la dimension de la classe de systèmes considérée et la variable i_w est l'indice de la composante d'état dont la dynamique dépend explicitement de $w(t)$.

2.3 Synthèse de l'observateur sans peaking

L'observateur que nous proposons dans ce volet est une version modifiée du SHGO (2.23). Il est principalement caractérisé par sa capacité de réduire les pics dans les variables de l'observateur pendant les périodes transitoires. Une telle amélioration des performances est obtenue par une modification appropriée du terme de correction de l'observateur par l'incorporation de fonctions de saturation. Avant de donner les équations de l'observateur proposé, on introduit la définition suivante qui est nécessaire pour la conception de l'observateur.

Définition 2.1 : Critère de la stabilité forte. Soit A_n et Γ_n respectivement la matrice carrée $n \times n$ et le vecteur colonne n définis respectivement comme en (2.1) et (2.3) avec $k = n$. On dira que les n coefficients γ_i du vecteur Γ_n , $i = 1, \dots, n$, satisfont au critère de la stabilité forte par rapport à A_n si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la matrice \bar{A}_k définie comme en (2.3) est Hurwitz.

Comme nous le détaillerons plus loin, le critère de stabilité forte est très important et il primordial pour l'analyse de la stabilité de l'erreur d'observation de la version de l'observateur inhibant le phénomène du peaking (NPHGO) tout au long du régime transitoire. Une notion similaire a été introduite dans [2] mais les structures des matrices \bar{A}_k sont différentes de celles données par (2.3). Il est clair que les composantes d'un vecteur Γ_n qui sont choisies telle que la matrice $\bar{A}_n = A_n - \Gamma_n C_n$ est Hurwitz ne satisfont pas généralement le critère de la stabilité forte. Nous donnerons plus loin un algorithme inspiré de [43] qui permet de choisir les γ_i appropriés, $i = 1, \dots, n$ satisfaisant le critère de stabilité forte donnée dans la définition 2.1.

2.3.1 Équations de l'observateur NPHGO

Les équations de l'observateur à grand gain sans phénomène de peaking (NPHGO) peuvent s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A_n \hat{x} + \varphi^s(\hat{x}, u) - \theta H(\tilde{x}_1), \quad (2.29)$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$, $\theta > 0$ et $H(\tilde{x}_1) = \begin{pmatrix} H_1(\tilde{x}_1) \\ \vdots \\ H_n(\tilde{x}_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ où les $H_i(\tilde{x}_1) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, sont définis comme suit :

$$\begin{cases} H_1(\tilde{x}_1(t)) = \text{sat}_\nu(\gamma_1 \tilde{x}_1(t)) \\ H_i(\tilde{x}_1(t)) = \text{sat}_\nu\left(\theta \frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}} H_{i-1}(\tilde{x}_1(t))\right), \quad i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.30)$$

où les $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ sont n réels positifs qui satisfont au critère de la stabilité forte donné dans la définition 2.1, θ est un paramètre de synthèse qui est choisi suffisamment élevé, notamment pour avoir $\theta > \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i}$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$, et $\nu > 0$ est aussi un paramètre de conception dont le choix sera discuté plus tard.

D'après les expressions des termes correctifs H_i , $i = 1, \dots, n$, et en tenant compte de la définition de la fonction de saturation donnée par (2.13), on peut vérifier que les expressions de ces termes dépendent de la grandeur de $|\tilde{x}_1(t)|$ et ils peuvent être exprimés

comme suit :

$$\bullet \quad Si |\tilde{x}_1(t)| > \frac{\nu}{\gamma_1}, \quad alors H(\tilde{x}_1(t)) = \nu sign(\tilde{x}_1(t))U_n. \quad (2.31)$$

$$\bullet \quad Si |\tilde{x}_1(t)| \leq \frac{\nu}{\theta^{n-1}\gamma_n}, \quad alors H(\tilde{x}_1(t)) = \Delta_n^{-1}(\theta)\Gamma_n\tilde{x}_1(t). \quad (2.32)$$

$$\bullet \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad Si \frac{\nu}{\theta^k\gamma_{k+1}} \leq |\tilde{x}_1(t)| \leq \frac{\nu}{\theta^{k-1}\gamma_k} \\ alors H(\tilde{x}_1(t)) = \begin{pmatrix} \Delta_k^{-1}(\theta)\Gamma_k\tilde{x}_1(t) \\ \nu sign(\tilde{x}_1(t))U_{n-k} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

où (Γ_n, Γ_k) , (U_n, U_{n-k}) et $(\Delta_k(\theta), \Delta_n(\theta))$ sont définis respectivement par (2.3), (2.4) et (2.5).

Avant d'énoncer les résultats qui mettent en avant les principales propriétés de l'observateur (2.29), nous introduisons quelques définitions et notations qui seront utilisées tout au long de l'analyse des propriétés de l'observateur. En effet, nous définissons la partition suivante $\{S_k\}_{-1 \leq k \leq n}$ sur l'intervalle $[0, 2R]$ où R est défini comme dans (2.14) :

$$S_{-1} = \left] \frac{\nu}{\gamma_1}, 2R \right], \quad S_k = \left] \frac{\nu}{\gamma_{k+2}\theta^{k+1}}, \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k} \right], \quad k = 0, \dots, n-2, \quad S_{n-1} = \left[0, \frac{\nu}{\gamma_n\theta^{n-1}} \right]. \quad (2.34)$$

Chaque S_k sera appelé un secteur. Pour chaque $k \in \{-1, \dots, n-2\}$, S_{k+1} est le secteur inférieur de S_k . De même, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, S_{k-1} est le secteur supérieur de S_k . Dans la suite de cette section, on suppose sans perte de généralité que $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$ (voir figure 2.1).

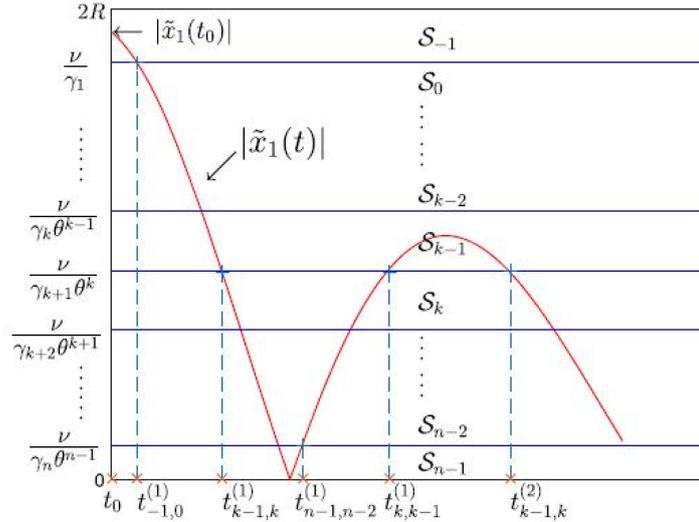


FIGURE 2.1 – Évolution de $|\tilde{x}_1(t)|$ à travers les secteurs S_k

Maintenant, nous allons mettre en avant les différents instants à partir desquels $|\tilde{x}_1(t)|$ entre ou quitte les différents secteurs S_k depuis l'instant initial t_0 . En effet, on nous donne les définitions suivantes.

- Si $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte le secteur S_{k-1} et entre dans S_k pour $k = 0, \dots, n-1$, pour la $i^{\text{ème}}$ fois, à un instant de temps fini, alors un tel instant de temps sera noté $t_{k-1,k}^{(i)}$ et nous diront que $t_{k-1,k}^{(i)}$ existe. Selon cette définition, l'instant $t_{k-1,k}^{(i)}$ est tel que :

$$|\tilde{x}_1(t_{k-1,k}^{(i)-})| > \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k} \text{ et } |\tilde{x}_1(t_{k-1,k}^{(i)})| = \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k}, \quad (2.35)$$

avec $t_{k-1,k}^{(i)-} = \lim_{h \rightarrow 0} (t_{k-1,k}^{(i)} - h)$ où h est un réel strictement positif.

Plus précisément, $t_{k-1,k}^{(i)}$ est l'instant auquel $|\tilde{x}_1(t)|$ entre dans le secteur S_k .

- De même, si $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_k et entre dans S_{k-1} , $k = 0, \dots, n-1$, pour la $i^{\text{ème}}$ fois, alors un tel instant de temps sera noté par $t_{k,k-1}^{(i)}$ et on dira que $t_{k,k-1}^{(i)}$ existe. Étant donné que $|\tilde{x}_1(t)|$ est continue, on supposera que l'instant $t_{k,k-1}^{(i)}$ est tel que :

$$|\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| = \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k} \text{ et } |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)+})| > \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k}, \quad (2.36)$$

avec $t_{k,k-1}^{(i)+} = \lim_{h \rightarrow 0} (t_{k,k-1}^{(i)} + h)$ où h est un réel strictement positif. Plus précisément,

$t_{k,k-1}^{(i)}$ est l'instant auquel $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte le secteur S_k .

Dans ce qui suit, nous allons énoncer un ensemble de propositions avant de donner le théorème principal qui résume les principales propriétés de l'erreur d'observation associée au système (2.22) et à l'observateur (2.29). Dans toutes ces propositions, les hypothèses de **H.2.1** à **H.2.4** sont supposées satisfaites.

Proposition 2.1 *Supposons que $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. Alors :*

(i) $t_{-1,0}^{(1)} > 0$ existe et $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{-1,0}^{(1)} - t_0) = 0$.

(ii) $\exists \alpha_{-1,0,\theta}^{(1)} > 0, \forall t \leq t_{-1,0}^{(1)}, \|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{-1,0,\theta}^{(1)}$ où $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{-1,0,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$.

Preuve de la proposition 2.1 *D'après (2.22) et (2.29), il vient que :*

$$\dot{\tilde{x}} = A_n \tilde{x} + \tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u) - \theta H(\tilde{x}_1) - B_n \varepsilon(t) - B_{i_w} w(t), \quad (2.37)$$

où $\tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u) = \varphi^s(\hat{x}, u) - \varphi^s(\hat{x}, u)$. Comme $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$, alors, on a $|\gamma_1 \tilde{x}_1(t_0)| > \nu$. De plus, d'après la continuité de $|\tilde{x}_1(t)|$ par rapport au temps, il existe $t > t_0$ tel que pour tout $s \in [t_0, t]$, on a $|\gamma_1 \tilde{x}_1(s)| > \nu$. De ce fait, il est clair que \tilde{x}_1 garde un signe constant sur l'intervalle $[t_0, t]$ et de ce fait on a $H(\tilde{x}_1(t)) = \nu \text{sign}(\tilde{x}_1(t))U_n = \nu \text{sign}(\tilde{x}_1(t_0))U_n$ où U_n est défini comme en (2.4) avec $k = n$.

La solution de l'équation (2.37) peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= e^{A_n(t-t_0)}\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_n(t-s)}\tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u)ds - \nu\theta\text{sign}(\tilde{x}_1(t)) \int_{t_0}^t e^{A_n(t-s)}U_n ds - \\ &\int_{t_0}^t e^{A_n(t-s)}B_n\varepsilon(s)ds - \int_{t_0}^t e^{A_n(t-s)}B_{i_w}w(s)ds.\end{aligned}\quad (2.38)$$

La première composante \tilde{x}_1 peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= \tilde{x}_1(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(t-t_0)^k}{k!} \tilde{x}_{k+1}(t_0) \right) + \sum_{k=1}^n \left(\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \tilde{\varphi}_k^s(\hat{x}, x, u)ds \right) \\ &- \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{i_w-1}}{(i_w-1)!} w(s)ds - \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varepsilon(s)ds - \nu\theta\text{sign}(\tilde{x}(t)) \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!}.\end{aligned}$$

En multipliant les deux équations ci-dessus par $\text{sign}(\tilde{x}_1(t)) = \text{sign}(\tilde{x}_1(t_0))$, on obtient :

$$\begin{aligned}|\tilde{x}_1(t)| &= |\tilde{x}_1(t_0)| + \text{sign}(\tilde{x}_1(t_0)) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(t-t_0)^k}{k!} \tilde{x}_{k+1}(t_0) \right) \\ &+ \text{sign}(\tilde{x}_1(t_0)) \sum_{k=1}^n \left(\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \tilde{\varphi}_k^s(\hat{x}, x, u)ds \right) - \text{sign}(\tilde{x}_1(t_0)) \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{i_w-1}}{(i_w-1)!} w(s)ds \\ &- \text{sign}(\tilde{x}_1(t_0)) \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varepsilon(s)ds - \nu\theta \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \\ &\leq |\tilde{x}_1(t_0)| + \|\tilde{x}(t_0)\| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} + \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} |\tilde{\varphi}_k^s(\hat{x}, x, u)|ds + \\ &\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{i_w-1}}{(i_w-1)!} |w(s)|ds + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} |\varepsilon(s)|ds - \nu\theta \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Nous allons procéder maintenant à la majoration de certains termes du membre droit de l'inégalité ci-dessus. En effet, d'après (2.17), il vient que :

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \left(\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} |\tilde{\varphi}_k^s(\hat{x}, x, u)|ds \right) \leq 2nL_\varphi R \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!}.\quad (2.40)$$

De même, d'après (2.11) et (2.12), nous obtenons

$$\int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} |\varepsilon(s)|ds \leq \delta_\varepsilon \frac{(t-t_0)^n}{(n)!} \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{i_w-1}}{(i_w-1)!} |w(s)|ds \leq \frac{(t-t_0)^{i_w}}{(i_w)!} \delta_w.\quad (2.41)$$

En exploitant les bornes (2.40) et (2.41) dans l'inégalité (2.39), il arrive que :

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\tilde{x}_1(t_0)| + (\delta_{-1,0} + \delta_w + 2nL_\varphi R - \nu\theta) \sum_{k=1}^n \frac{\tau^k}{k!},\quad (2.42)$$

où $\tau = t - t_0$ et $\delta_{-1,0} = \max(\|\tilde{x}(t_0)\|, \delta_\varepsilon)$.

Choisissons maintenant le réel θ suffisamment grand de sorte qu'il satisfasse l'inégalité suivante :

$$\theta > \theta_{-1,0}^{(1)} = \frac{2}{\nu}(\delta_{-1,0} + \delta_w + 2nL_\varphi R). \quad (2.43)$$

Avec θ choisi comme ci-dessus, l'inégalité (2.42) implique :

$$|\tilde{x}_1| \leq |\tilde{x}_1(t_0)| - \frac{\nu\theta}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \leq |\tilde{x}_1(t_0)| - \frac{\nu\theta}{2}\tau. \quad (2.44)$$

Posons

$$\tau_{-1,0}^{(*)} = \frac{|\tilde{x}_1(t_0)| - \frac{\nu}{\gamma_1}}{\frac{\nu\theta}{2}}. \quad (2.45)$$

Notons que $\tau_{-1,0}^{(*)} > 0$, puisque $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. Soit maintenant l'instant $t_{-1,0}^{(*)} = t_0 + \tau_{-1,0}^{(*)}$. À partir de l'inégalité (2.44) et avec $t = t_{-1,0}^{(*)}$, on obtient :

$$|\tilde{x}_1(t_{-1,0}^{(*)})| \leq |\tilde{x}_1(t_0)| - \frac{\nu\theta}{2}\tau_{-1,0}^{(*)} = \frac{\nu}{\gamma_1}. \quad (2.46)$$

Ainsi et selon l'inégalité (2.46), $|\tilde{x}_1(t)|$ entre en S_0 après avoir évolué dans le secteur S_{-1} pendant une période de temps qui ne dépasse pas $\tau_{-1,0}^{(*)}$. Donc, $t_{-1,0}^{(1)}$ existe et on a :

$$\tau_{-1,0}^{(1)} = t_{-1,0}^{(1)} - t_0 \leq \tau_{-1,0}^{(*)}.$$

Or, d'après (2.45), on a $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{-1,0}^{(*)} = 0$ ce qui implique que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{-1,0}^{(1)} = 0$ et donc le point (i) de la proposition est prouvé.

Pour démontrer l'existence du réel positif $\alpha_{-1,0,\theta}^{(1)}$ requis par le point (ii), on revient à (2.38) et on utilisera les inégalités (2.11), (2.12) et (2.21). En effet, à partir de l'équation (2.38) et pour tout $t_0 \leq t \leq t_{-1,0}^{(1)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq e^{A_n(t-t_0)}\|\tilde{x}(t_0)\| + \left(2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{n}\theta + \delta_w + \delta_\varepsilon\right) \int_{t_0}^t \|e^{A_n(t-s)}\| ds \\ &\leq \|\tilde{x}(t_0)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A_n^k\| \frac{(t-t_0)^k}{k!} \\ &\quad + (2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{n}\theta + \delta_w + \delta_\varepsilon) \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n \|A_n^{k-1}\| \frac{(t-s)^k}{(k-1)!} ds \\ &\leq 2\sqrt{n}R \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} + (2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{n}\theta + \delta_w + \delta_\varepsilon) \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \\ &\leq (2\sqrt{n}(nL_\varphi + 1)R + \nu\sqrt{n}\theta + \delta_w + \delta_\varepsilon) \sum_{k=1}^n (t_{-1,0}^{(1)} - t_0)^k \\ &\triangleq \alpha_{-1,0,\theta}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

En combinant l'égalité (2.47) donnant l'expression de $\alpha_{-1,0,\theta}^{(1)}$ avec le fait que :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{-1,0}^{(1)} - t_0) = 0,$$

on déduit que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \alpha_{-1,0,\theta}^{(1)}/\theta = 0$. La preuve de la proposition 2.1 est terminée. \square

Le comportement de $|\tilde{x}_1(t)|$ pour $t \geq t_{-1,0}^{(1)}$ sera détaillé par quatre propositions qui sont énoncées dans ce qui suit. La première de ces propositions peut être interprétée comme une généralisation de la proposition 2.1 puisqu'elle détaille l'évolution de $|\tilde{x}_1(t)|$ à partir du secteur S_{-1} jusqu'au secteur S_{n-1} .

Proposition 2.2 *Supposons que $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. Alors pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a :*

- (i) $t_{k-1,k}^{(1)} > 0$ existe et $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{k-1,k}^{(1)} - t_0) = 0$,
- (ii) $\exists \alpha_{k-1,k,\theta}^{(1)} > 0, \forall t \leq t_{k-1,k}^{(1)}, \|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{k-1,k,\theta}^{(1)}$, où $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{k-1,k,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$.

Preuve de la proposition 2.2 *Cette proposition sera démontrée par récurrence sur k . En effet, pour $k = 0$, le résultat est fourni par la proposition 2.1.*

Maintenant, soit k fixé dans $\{1, \dots, n-1\}$ et supposons que les points (i) et (ii) de la proposition 2.2 sont satisfaits pour $k-1$, c.à.d :

- (i) $t_{k-2,k-1}^{(1)} > 0$ existe et $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{k-2,k-1}^{(1)} - t_0) = 0$.
- (ii) $\exists \alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} > 0, \forall t \leq t_{k-2,k-1}^{(1)}, \|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}$, avec

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0. \quad (2.48)$$

Soit $t > t_{k-2,k-1}^{(1)}$ tel que $\forall s \in [t_{k-2,k-1}^{(1)}, t], |\tilde{x}_1(s)| \in S_{k-1}$. Du fait que $|\tilde{x}_1(s)| \in S_{k-1}$, alors en utilisant (2.33) et (2.34), les composantes de $H(\tilde{x}_1(s))$ peuvent s'exprimer comme suit pour tout $s \in [t_{k-2,k-1}^{(1)}, t]$:

$$\begin{cases} H_j(\tilde{x}_1(s)) = \gamma_j \theta^{j-1} \tilde{x}_1(s) \text{ pour } j = 1, \dots, k. \\ H_j(\tilde{x}_1(s)) = \nu \text{sign}(\tilde{x}_1(s)) \text{ pour } j = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.49)$$

La solution de l'équation (2.37) peut être exprimée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= e^{A_n(t-t_{k-2,k-1}^{(1)})} \tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)}) + \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t e^{A_n(t-s)} \tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u) ds \\ &\quad - \theta \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t e^{A_n(t-s)} H(\tilde{x}_1(s)) ds - \int_{t_{k-1,k-1}^{(1)}}^t e^{A_n(t-s)} B_n \varepsilon(s) ds \\ &\quad - \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t e^{A_n(t-s)} B_{iw} w(s) ds. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En procédant comme dans la preuve de la proposition 2.1, c'est-à-dire en remplaçant les composantes de $H(\tilde{x}_1(t))$ par leurs expressions données par (2.49) et en tenant compte du fait que $\text{sign}(\tilde{x}_1(t)) = \text{sign}(\tilde{x}_1(s))$ pour tout $s \in [t_{k-2,k-1}^{(1)}, t]$, la valeur absolue de la première composante l'erreur d'observation $|\tilde{x}_1(t)|$ peut être bornée comme suit :

$$\begin{aligned}
 |\tilde{x}_1| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} |\tilde{x}_{j+1}(t_{k-2,k-1}^{(1)})| \right) + \sum_{j=1}^n \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t \left(\frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} |\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| ds \right) \\
 &- \theta \left(\sum_{j=1}^k \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t \theta^{j-1} \gamma_j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} |\tilde{x}_1(s)| ds + \nu \sum_{j=k+1}^n \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} ds \right) \\
 &+ \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} |\varepsilon(s)| ds + \int_{t_{k-2,k-1}^{(1)}}^t \frac{(t-s)^{i_w-1}}{(i_w-1)!} |w(s)| ds. \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\|\tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)})\| \leq \alpha_{k-2,k-1}^{(1)}. \tag{2.52}$$

Compte tenu de la propriété de Lipschitz (2.17), des bornes fournies par (2.11) et (2.12) et de (2.52), l'inégalité (2.51) conduit à :

$$\begin{aligned}
 |\tilde{x}_1(t)| &\leq |\tilde{x}_1(t_{k-2,k-1}^{(1)})| + \alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} + 2nL_\varphi R \sum_{j=1}^n \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} \\
 &- \theta \nu \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} + \delta_\varepsilon \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^n}{n!} + \delta_w \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^{i_w}}{i_w!} \\
 &\leq |\tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)})| + (\delta_{k-2,k-1}^{(1)} + \delta_w + 2nL_\varphi R) \sum_{j=1}^n \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} \\
 &- \theta \nu \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!}, \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

où $\delta_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} = \max(\alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}, \delta_\varepsilon)$.

Posons :

$$\bar{\delta}_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} = \delta_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} + \delta_w + 2nL_\varphi R. \tag{2.54}$$

Comme $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$, alors $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\delta_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}/\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\bar{\delta}_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$. Par conséquent, il existe $\theta_{k-1,k}^{(1)} > 0$ tel que :

$$\forall \theta > \theta_{k-1,k}^{(1)}, \quad \bar{\delta}_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} \leq \frac{\nu\theta}{2}. \tag{2.55}$$

En combinant (2.53), (2.54) et (2.55), nous obtenons :

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)})| + \bar{\delta}_{k-2,k-1}^{(1)} \sum_{j=1}^n \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} - \frac{\theta\nu}{2} \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} \quad (2.56)$$

$$\leq |\tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)})| + \bar{\delta}_{k-2,k-1}^{(1)} \sum_{j=1}^k \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j}{j!} - \frac{\theta\nu}{2} \frac{(t - t_{k-2,k-1}^{(1)})^{k+1}}{(k+1)!} \quad (2.57)$$

$$\triangleq P_{k-1,k}^{(1)}(\tau) + \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k}, \quad (2.58)$$

avec $\tau = t - t_{k-2,k-1}^{(1)}$ et $P_{k-1,k}^{(1)}$ est le polynôme en τ suivant :

$$P_{k-1,k}^{(1)}(\tau) \triangleq a_{0,k-1,k}^{(1)} + \sum_{j=1}^k a_{j,k-1,k}^{(1)} \tau^j - \theta a_{k+1,k-1,k}^{(1)} \tau^{k+1}, \quad (2.59)$$

où

$$\begin{cases} a_{0,k-1,k}^{(1)} = |\tilde{x}_1(t_{k-2,k-1}^{(1)})| - \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k} = \frac{\nu}{\gamma_k\theta^{k-1}} - \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k} \\ a_{j,k-1,k}^{(1)} = \frac{\bar{\delta}_{k-1,k,\theta}^{(1)}}{j!}, j = 1, \dots, k \text{ et } a_{k+1,k-1,k}^{(1)} = \frac{\nu}{2(k+1)!} \end{cases} \quad (2.60)$$

A partir de (2.58), il est clair que si $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau) \leq 0$ alors $|\tilde{x}_1(t)| \leq \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k}$.

Autrement dit, si $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau) \leq 0$, alors nous sommes certains que $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_{k-1} et entre dans S_k . Ceci nous amène à étudier le signe de $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau)$. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Compte tenu des expressions des coefficients $a_{j,k-1,k}^{(1)}$, $j = 0, \dots, n$, données par (2.60), il est clair que ces coefficients sont positifs. D'après la règle des signes de Descartes [44], le nombre de racines positives du polynôme $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau)$ est égal à 1. Cela signifie qu'il existe un seul réel $\tau_{k-1,k}^* > 0$, tel que $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau_{k-1,k}^*) = 0$. Comme $P_{k-1,k}^{(1)}(0) = a_{0,k-1,k}^{(1)} > 0$, on a $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau) \leq 0, \forall \tau \geq \tau_{k-1,k}^*$.

Notons que l'inégalité (2.58) est valide tant que $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans le secteur S_{k-1} et que $|\tilde{x}_1(t)|$ ne peut pas revenir en S_{k-2} avant le changement de son signe. En d'autres termes, depuis l'instant $t_{k-2,k-1}^{(1)}$, $|\tilde{x}_1(t)|$ a évolué dans le secteur S_{k-1} qu'il quitte pour entrer dans S_k à un instant que l'on notera $t_{k-1,k}^{(1)}$. D'après (2.58), la période au cours la quelle $|\tilde{x}_1(t)|$ a évolué dans S_{k-1} est au plus égale à $\tau_{k-1,k}^*$, i.e.

$$\tau_{k-1,k}^{(1)} \triangleq t_{k-1,k}^{(1)} - t_{k-2,k-1}^{(1)} \leq \tau_{k-1,k}^*. \quad (2.61)$$

Calculons maintenant la limite de $\tau_{k-1,k}^{(1)}$ lorsque θ tend vers ∞ . En effet, comme $\tau_{k-1,k}^*$ est une racine de $P_{k-1,k}^{(1)}(\tau) = 0$, alors d'après (2.59), elle vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{a_{0,k-1,k}^{(1)}}{\theta} + \sum_{j=1}^k \frac{a_{j,k-1,k}^{(1)}}{\theta} (\tau_{k-1,k}^*)^j - a_{k+1,k-1,k}^{(1)} (\tau_{k-1,k}^*)^{k+1} = 0. \quad (2.62)$$

Selon (2.54), nous avons $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\bar{\delta}_{k-1,k,\delta}^{(1)}}{\theta} = 0$ et de ce fait on obtient $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{j,k-1,k}^{(1)}}{\theta} \right) = 0$, pour $j = 0, \dots, k$. Il en découle que :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (a_{k+1,k-1,k}^{(1)} (\tau_{k-1,k}^*)^{k+1}) = 0.$$

Puisque $a_{k+1,k-1,k}^{(1)} = \frac{\nu}{2(k+1)!}$, la dernière égalité implique que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\tau_{k-1,k}^*) = 0$ et compte tenu de l'inégalité (2.61), on obtient :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\tau_{k-1,k}^{(1)}) = 0.$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{k-1,k}^{(1)} - t_0) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{k-2,k-1}^{(1)} - t_{k-2,k-1}^{(1)} + t_{k-2,k-1}^{(1)} - t_0) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\tau_{k-1,k}^{(1)} + t_{k-2,k-1}^{(1)} - t_0) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{k-1,k}^{(1)} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le point (i) de la proposition étant prouvé, il reste à montrer l'existence du réel $\alpha_{k-1,k,\theta}^{(1)}$ requis par le point (ii).

En procédant comme dans la preuve de la proposition 2.1, il vient que pour $\forall t \in [t_{k-2,k-1}^{(1)}, t_{k-1,k}^{(1)}]$ (à comparer avec (2.47)) :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \|\tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)})\| + (\|\tilde{x}(t_{k-2,k-1}^{(1)})\| + 2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{\theta} + \delta_w + \delta_\varepsilon) \sum_{j=1}^n (t_{k-1,k}^{(1)} - t_{k-2,k-1}^{(1)})^j \\ &\leq \alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} + (\alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)} + 2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{\theta} + \delta_w + \delta_\varepsilon) \sum_{j=1}^n (\tau_{k-1,k}^{(1)})^j \\ &\triangleq \alpha_{k-1,k,\theta}^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$ et d'autre part, nous avons $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\tau_{k-1,k}^{(1)}) = 0$. Compte tenu de l'expression de $\alpha_{k-2,k-1,\theta}^{(1)}$ donnée en (2.63), on déduit que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{k-1,k,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$. Ceci termine la preuve de la proposition 2.2 \square

D'après la proposition 2.2, $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte successivement le secteur S_{k-1} pour entrer dans S_k pour $k = 0, \dots, n-1$. Cela signifie en particulier que $|\tilde{x}_1(t)|$ entre dans le secteur S_{n-1} à l'instant $t_{n-2,n-1}^{(1)}$ et nous avons :

$$\forall t \leq t_{n-2,n-1}^{(1)}, \|\tilde{x}\| \leq \alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)} \text{ où } \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0. \tag{2.64}$$

L'évolution au cours du temps de $|\tilde{x}_1(t)|$ dans le secteur S_{n-1} est décrite dans la proposition suivante.

Proposition 2.3 Si $t_{n-1,n-2}^{(1)}$ existe et si la borne δ_w de $w(t)$ donnée dans l'hypothèse **H.2.4** satisfait la condition (2.27), alors on a :

- (i) $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{n-1}^{(1)} = 0$ où $\tau_{n-1}^{(1)} = t_{n-1,n-2}^{(1)} - t_{n-2,n-1}^{(1)} = 0$,
- (ii) $\exists \alpha_{n-1,n-2,\theta}^{(1)} > 0, \forall t \leq t_{k-1,k}^{(1)}, \|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{n-1,n-2,\theta}^{(1)}$ où $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-1,n-2,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$.

On remarque que la proposition 2.3 traite le cas où $t_{n-1,n-2}^{(1)}$ existe. L'inexistence d'un tel instant signifie que pour $t \geq t_{n-2,n-1}^{(1)}$, $|\tilde{x}_1(t)|$ reste évoluer dans S_{n-1} et ne le quitte jamais. Dans un tel cas et d'après (2.32), on aura pour tout $t \leq t_{n-2,n-1}^{(1)}$, $H(\tilde{x}_1) = \Delta_n^{-1}(\theta)\Gamma_n\tilde{x}_1$ et les équations de l'observateur (2.29) coïncideront avec celles du SHGO (2.23). Si l'instant $t_{n-1,n-2}^{(1)}$ existe, alors d'après la proposition 2.3, la période de temps pendant laquelle $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans S_{n-1} tend vers zéro lorsque θ tend vers l'infini. De plus, le vecteur d'erreur d'observation reste borné par $\alpha_{n-1,n-2,\theta}^{(1)}$ pour tout $t \geq t_{n-1,n-2}^{(1)}$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-1,n-2,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$.

Preuve de la proposition 2.3 Soit $t > t_{n-2,n-1}^{(1)}$ tel que $|\tilde{x}_1(t)| \in S_{n-1}$, i.e. $|\tilde{x}_1(t)| \leq \frac{\nu}{\theta^{n-1}\gamma_n}$. Selon (2.33), $H(\tilde{x}_1(t)) = \Delta_n^{-1}(\theta)\Gamma_n\tilde{x}_1(t)$. De plus, puisque la borne supérieure δ_w satisfait (2.27), alors chaque composante de l'erreur d'observation satisfait une inégalité similaire à (2.28) qui s'écrit en tenant compte de (2.64) comme suit :

$$|\tilde{x}_i(t)| \leq \sigma_{P_n} \left(\theta^{i-1} e^{-\beta_n \theta (t - t_{n-2,n-1}^{(1)})} \alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)} + \frac{\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_w}{\theta^{n+1-i}\beta_n} \right), i = 1, \dots, n. \quad (2.65)$$

Remarquons que pour $i = 1$, on obtient :

$$|\tilde{x}_1(t)| = |\tilde{x}_1(t)| \leq \sigma_{P_n} \left(e^{-\beta_n \theta (t - t_{n-2,n-1}^{(1)})} \alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)} + \frac{\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_w}{\theta^n \beta_n} \right). \quad (2.66)$$

Si la séquence $\{t_{n-1,n-2}^{(i)}\}_{i \geq 1}$ n'est pas vide, alors $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_{n-1} et entre dans S_{n-2} à l'instant $t_{n-1,n-2}^{(1)}$. En utilisant (2.66), on obtient pour $t = t_{n-1,n-2}^{(1)}$:

$$|\tilde{x}_1(t_{n-1,n-2}^{(1)})| = \frac{\nu}{\gamma_n \theta^{n-1}} = \sigma_{P_n} \left(\alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)} e^{-\theta \beta_n \tau_{n-1}^{(1)}} + \frac{\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_w}{\theta^n \beta_n} \right).$$

On peut vérifier que l'égalité ci-dessus donne :

$$\tau_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{\theta \beta_n} \log \left(\frac{\beta_n \sigma_{P_n} \alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)} \gamma_n \theta^n}{\theta \nu \beta_n - \sigma_{P_n} (\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_w)} \right). \quad (2.67)$$

Il est clair d'après (2.67) que :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{n-1}^{(1)} = 0. \quad (2.68)$$

Cherchons maintenant à trouver une borne supérieure de $\|\tilde{x}(t)\|$ pour $t \leq t_{n-1,n-2}^{(1)}$. En effet, comme dans les preuves des propositions 2.1 et 2.2, on peut montrer pour tout

$t \leq t_{n-1,n-2}^{(1)}$, que (comparer avec (2.47) et (2.63)) :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\tilde{x}(t_{n-2,n-1}^{(1)})\| + \left(\|\tilde{x}(t_{n-2,n-1}^{(1)})\| + 2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{n}\theta + \delta_\varepsilon + \delta_w \right) \sum_{k=1}^n \left(t_{n-1,n-2}^{(1)} - t_{n-2,n-1}^{(1)} \right)^k.$$

En tenant compte du fait que $\|\tilde{x}(t_{n-2,n-1}^{(1)})\| \leq \alpha_{n-2,n-1}^{(1)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \alpha_{n-2,n-1}^{(1)} + \left(\|\tilde{x}(t_{n-2,n-1}^{(1)})\| + 2n\sqrt{n}L_\varphi R + \nu\sqrt{n}\theta + \delta_\varepsilon + \delta_w \right) \sum_{k=1}^n \left(\tau_{n-1}^{(1)} \right)^k \\ &\triangleq \alpha_{n-1,\theta}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Comme $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-2,n-1,\theta}^{(1)}/\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{n-1}^{(1)} = 0$, on peut facilement déduire de l'expression de $\alpha_{n-1,\theta}^{(1)}$ donnée par (2.69) que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$, ce qui termine la preuve. \square

Nous procédons maintenant à l'analyse du comportement de $|\tilde{x}_1(t)|$ pour $t > t_{n-1,n-2}^{(1)}$ à travers la proposition suivante.

Proposition 2.4 Si $t_{n-1,n-2}^{(1)}$ existe et si la borne δ_w de $w(t)$ donnée dans l'hypothèse **H.2.4** vérifie la condition (2.27), alors il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que :

- (i) $t_{k-1,k}^{(2)}$ existe et $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{k-1}^{(1)} = 0$ où $\tau_{k-1}^{(1)} = t_{k-1,k}^{(2)} - t_{k,k-1}^{(1)}$,
- (ii) $\exists \alpha_{k-1,\theta}^{(1)} > 0, \forall t \leq t_{k-1,k}^{(2)}, \|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{k-1,\theta}^{(1)}$ où $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{k-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$.

D'après la proposition 2.4 et dans le cas où $t_{n-1,n-2}^{(1)}$ existe, il existe un secteur S_{k-1} avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que, lorsque $|\tilde{x}_1(t)|$ entre dans ce secteur (à l'instant $t_{k,k-1}^{(1)}$), $|\tilde{x}_1(t)|$ reste évoluer dans ce secteur pendant une durée qui tend vers 0 lorsque θ tend vers l'infini. Après cette période du temps, $|\tilde{x}_1(t)|$ n'entre pas dans le secteur supérieur S_{k-2} mais revient dans le secteur inférieur S_k à l'instant $t_{k-1,k}^{(2)}$. On rappelle que, $t_{k-1,k}^{(2)}$ correspond à l'instant auquel $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_{k-1} pour entre pour la deuxième fois dans le secteur S_k . Notant que l'existence de l'instant $t_{k-1,k}^{(1)}$ (l'instant où le même scénario s'est produit pour la première fois) a été établie par la proposition 2.2.

Preuve de la proposition 2.4 Soit $t > t_{n-1,n-2}^{(1)}$ tel que $\forall s \in]t_{n-1,n-2}^{(1)}, t]$, $|\tilde{x}_1(s)| \in S_{n-2}$. En procédant comme dans la preuve de la proposition 2.2, on peut montrer que pour θ assez grand, on a (comparer avec l'inégalité (2.57)) :

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\tilde{x}_1(t_{n-1,n-2}^{(1)})| + \bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(t - t_{n-1,n-2}^{(1)})^j}{j!} - \frac{\theta\nu}{2} \frac{(t - t_{n-1,n-2}^{(1)})^n}{n!},$$

où $\bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)}, \theta = \max(\alpha_{n-1,\theta}^{(1)}, \delta_\varepsilon) + \delta_w + 2nL_\varphi R$.

En posant $\tau = t - t_{n-1,n-2}^{(1)}$, il vient que :

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\tilde{x}_1(t_{n-1,n-2}^{(1)})| + \bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tau^j}{j!} - \frac{\theta\nu}{2} \frac{\tau^n}{n!} = \frac{\nu}{\gamma_n \theta^{n-1}} + \bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tau^j}{j!} - \frac{\theta\nu}{2} \frac{\tau^n}{n!}. \quad (2.70)$$

D'après la définition de $\bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)}$ et comme $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0$, on obtient :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)}/\theta) = 0.$$

Maintenant, deux scénarios sont possibles pour l'évolution de $|\tilde{x}_1(t)|$. Le premier scénario correspond au cas où $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_{n-2} et entre dans le secteur supérieur S_{n-3} . Le second correspond au cas où $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans S_{n-2} pendant un certain temps avant de revenir au secteur inférieur S_{n-1} . Afin d'analyser l'évolution temporelle de $|\tilde{x}_1(t)|$ et notamment pour identifier le scénario selon lequel $|\tilde{x}_1(t)|$ va évoluer, on introduit le polynôme en τ suivant :

$$P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau) \triangleq a_{0,n-1,n-2}^{(1)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j,n-1,n-2}^{(1)} \tau^j - \theta a_{n,n-1,n-2}^{(1)} \tau^n, \quad (2.71)$$

où

$$a_{0,n-1,n-2}^{(1)} = \frac{\nu}{\gamma_n \theta^{n-1}} - \frac{\nu}{\gamma_{n-1} \theta^{n-2}}, \quad a_{j,n-1,n-2}^{(1)} = \frac{\bar{\delta}_{n-1,\theta}^{(1)}}{j!}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad a_{n,n-1,n-2}^{(1)} = \frac{\nu}{2n!}. \quad (2.72)$$

L'inégalité (2.70) peut s'exprimer à l'aide du polynôme $P_{n-1,n-2}^{(1)}$ comme suit :

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau) + \frac{\nu}{\gamma_{n-1} \theta^{n-2}}. \quad (2.73)$$

En se basant sur l'inégalité précédente, on déduit la propriété suivante :

$$\text{Si } |\tilde{x}_1(t)| > \frac{\nu}{\gamma_{n-1} \theta^{n-2}}, \text{ alors } P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau) > 0. \quad (2.74)$$

La propriété (2.74) signifie que s'il existe un instant t auquel $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_{n-2} et entre dans S_{n-3} , alors cet instant t est tel que $P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau) > 0$ où $\tau = t - t_{n-1,n-2}^{(1)}$. Cette remarque nous amène à étudier le signe de $P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau)$. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

À partir des expressions des coefficients de $P_{n-1,n-2}^{(1)}$ données par (2.72), il est clair que :

$$a_{0,n-1,n-2}^{(1)} < 0 \text{ et que } a_{j,n-1,n-2}^{(1)} > 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Compte tenu de l'expression de $P_{n-1,n-2}^{(1)}$ donnée par (2.71), le nombre de changements des signes des coefficient dans ce polynôme est égal à 2 et de ce fait le nombre de racines positives réelles de ce polynôme est soit égal à 2, soit égal à 0. Nous allons analyser ces deux cas.

Cas 1 : $P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau)$ admet deux racines réelles positives.

On note par τ_1 et τ_2 ces racines. Comme $P_{n-1,n-2}^{(1)}(0) = a_{0,n-1,n-2}^{(1)} < 0$, on en déduit que $\forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[$, $P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau) > 0$ et $\forall \tau \notin [\tau_1, \tau_2]$, $P_{n-1,n-2}^{(1)}(\tau) \leq 0$. De plus,

en utilisant des développements similaires à ceux de la preuve de la proposition 2.2, on peut montrer que les deux racines réelles positives τ_1 et τ_2 sont telles que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_i = 0$, $i = 1, 2$ et cela implique que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{n-2, n-3}^{(1)} = 0$. On peut aussi montrer qu'il existe $\alpha_{n-2, n-3, \theta}^{(1)}$ tel que pour tout $t \leq t_{n-2, n-3}^{(1)}$, $\|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{n-2, n-3, \theta}^{(1)}$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-2, n-3, \theta}^{(1)}/\theta) = 0$. Pour mieux appréhender la signification des périodes τ_1 et τ_2 , on notera que l'instant τ_1 est tel que $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte le secteur S_{n-2} pour entrer dans le secteur supérieur S_{n-3} à l'instant $t_{n-2, n-3}^{(1)} \triangleq t_{n-1, n-2}^{(1)} + \tau_1$. A partir de cet instant, $|\tilde{x}_1(t)|$ évoluera dans le secteur S_{n-3} et éventuellement dans d'autres secteurs supérieurs à S_{n-3} . Notons que l'inégalité (2.73) n'est valide que si $\tilde{x}_1(t)$ évolue au sein du secteur S_{n-2} et de ce fait à partir de l'instant $t_{n-2, n-3}^{(1)}$, cette inégalité n'est plus valide mais elle a permis toutefois d'établir le fait qu'à cet instant ($t_{n-2, n-3}^{(1)}$), l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ a quitté S_{n-2} après y avoir évolué pendant une certaine période τ_1 pour entrer dans S_{n-3} .

Cas 2 : $P_{n-1, n-2}^{(1)}(\tau)$ n'admet aucune racine.

Dans ce cas, $P_{n-1, n-2}^{(1)}(\tau)$ garde le même signe pour tout τ .

Comme $P_{n-1, n-2}^{(1)}(0) = a_{0, n-1, n-2}^{(1)} < 0$, on en déduit que $\forall \tau \geq 0$, $P_{n-1, n-2}^{(1)}(\tau) < 0$, ce qui conduit à travers l'inégalité (2.73) au fait que $|\tilde{x}_1(t)| < \frac{\nu}{\gamma_{n-1}\theta^{n-2}}$. Autrement dit, $|\tilde{x}_1(t)|$ ne peut pas entrer dans S_{n-3} et reste évoluer dans S_{n-2} . Analysons maintenant l'évolution dans le temps de $|\tilde{x}_1(t)|$ dans le secteur S_{n-2} . Pour ce faire, posons $\tau = t - t_{n-1, n-2}^{(1)}$ et considérons le polynôme en τ suivant :

$$\begin{aligned} P_{n-2}^{(1)}(\tau) &= \left(|\tilde{x}_1(t_{n-1, n-2}^{(1)})| - \frac{\nu}{\gamma_n \theta^{n-1}} \right) + \bar{\delta}_{n-1, \theta}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tau^j}{j!} - \frac{\theta \nu \tau^n}{2 n!} \\ &= \bar{\delta}_{n-1, \theta}^{(1)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tau^j}{j!} - \frac{\theta \nu \tau^n}{2 n!} \triangleq \sum_{j=1}^{n-1} a_{j, n-1, n-2}^{(1)} \tau^j - \theta a_{n, n-1, n-2} \tau^n, \end{aligned} \quad (2.75)$$

où les $a_{j, n-1, n-2}^{(1)}$, $j = 1, \dots, n$ sont définies en (2.72).

L'inégalité (2.70) peut s'écrire à l'aide du polynôme $P_{n-2}^{(1)}$ comme suit :

$$|\tilde{x}_1| \leq P_{n-2}^{(1)}(\tau) + \frac{\nu}{\gamma_n \theta^{n-1}}. \quad (2.76)$$

A partir de cette inégalité, on peut déduire la propriété suivante :

$$\text{Si } P_{n-2}^{(1)}(\tau) < 0, \text{ alors } |\tilde{x}_1(t)| < \frac{\nu}{\gamma_n \theta^{n-1}}. \quad (2.77)$$

D'après l'inégalité ci-dessus, i.e. l'inégalité (2.77), dès que $P_{n-2}^{(1)}(\tau)$ devient strictement négative, l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte le secteur S_{n-2} pour entrer dans le secteur

inférieur \mathcal{S}_{n-1} . Ceci nous suggère d'étudier le signe de $P_{n-2}^{(1)}(\tau)$ et c'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Remarquons tout d'abord que $\tau = 0$ est une racine de $P_{n-2}^{(1)}(\tau) = 0$ et que $\frac{P_{n-2}^{(1)}(\tau)}{\tau}$ est un polynôme en τ dont le nombre de changement de signes des coefficients est égal à 1 avec $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{n-2}^{(1)}(\tau)}{\tau} > 0$. De ce fait, le polynôme $P_{n-2}^{(1)}(\tau)$ reste positif lorsque τ est compris entre ses deux racines réelles non négatives, soit $\tau \in]0, \tau_{n-2}^*]$. Dès que $\tau > \tau_{n-2}^*$, on aura $P_{n-2}^{(1)}(\tau) < 0$ et $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte \mathcal{S}_{n-2} pour revenir à \mathcal{S}_{n-1} au plus tard à l'instant $t = t_{n-1, n-2}^{(1)} + \tau_{n-2}^*$. D'après les définitions adoptées et comme $|\tilde{x}_1(t)|$ entre dans \mathcal{S}_{n-1} pour la seconde fois, on en déduit que $t_{n-2, n-1}^{(2)}$ existe et on a $t_{n-2, n-1}^{(2)} \leq t_{n-1, n-2}^{(1)} + \tau_{n-2}^*$ ou de manière équivalente $\tau_{n-2}^{(1)} \triangleq t_{n-2, n-1}^{(2)} - t_{n-1, n-2}^{(1)} \leq \tau_{n-2}^*$.

En utilisant des développements similaires à ceux de la preuve de la proposition 2.2, on peut montrer que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{n-2}^{(1)} = 0$ et qu'il existe $\alpha_{n-2, \theta}^{(1)}$ tel que pour tout $t \leq t_{n-2, n-1}^{(1)}$, $\|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{n-2, \theta}^{(1)}$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \alpha_{n-2, \theta}^{(1)}/\theta = 0$.

Pour résumer, dans les développements ci-dessus décrivant le comportement de $|\tilde{x}_1(t)|$ à la sortie de \mathcal{S}_{n-1} , nous avons montré que l'évolution de $\tilde{x}_1(t)$ à partir du moment où il quitte \mathcal{S}_{n-1} et entre dans le secteur \mathcal{S}_{n-2} se déroule conformément à l'un des deux scénarios suivants :

1. Dans le premier scénario, l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte \mathcal{S}_{n-2} et entre dans \mathcal{S}_{n-3} à un instant $t_{n-2, n-3}^{(1)} = t_{n-1, n-2}^{(1)} + \tau_{n-2, n-3}^{(1)}$. De plus, il existe $\alpha_{n-2, n-3, \theta}^{(1)}$ tel que pour tout $t \leq t_{n-2, n-3}^{(1)}$, $\|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{n-2, n-3, \theta}^{(1)}$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-2, n-3, \theta}^{(1)}/\theta) = 0$,
2. Dans le deuxième scénario, l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ reste évoluer dans le secteur \mathcal{S}_{n-2} pendant une période de temps égale à $\tau_{n-2}^{(1)}$ puis revient dans \mathcal{S}_{n-1} à l'instant $t_{n-2, n-1}^{(2)}$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tau_{n-2}^{(1)} = 0$. De plus, il existe $\alpha_{n-2, \theta}^{(1)}$ tel que pour tout $t \leq t_{n-2, n-1}^{(1)}$, $\|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_{n-2, \theta}^{(1)}$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_{n-2, \theta}^{(1)}/\theta) = 0$.

Les réels $t_{k, k+1}^{(2)}$, $\tau_k^{(1)}$ et $\alpha_{k, \theta}^{(1)} > 0$ requis par la proposition sont obtenus lorsque le deuxième scénario se produit et on a $k = n - 2$. Dans le cas où le premier scénario se produit, le même raisonnement peut être poursuivi pour analyser le comportement de $|\tilde{x}_1(t)|$ à partir de l'instant où il quitte \mathcal{S}_{n-2} et entre dans \mathcal{S}_{n-3} . Il est facile de voir que $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue toujours selon les deux scénarios exclusifs ci-dessus. Dès que le second scénario se produit à l'intérieur d'un secteur k , les paramètres requis par la proposition sont obtenus. Notez que k est supposé être dans $\{1, \dots, n - 1\}$ dans l'énoncé de la proposition, c'est-à-dire le cas $k = 0$ n'a pas été considéré. En effet, nous allons montrer que si $|\tilde{x}_1(t)|$ atteint le secteur \mathcal{S}_0 , seul le deuxième scénario se produira. Pour ce faire, supposons que $|\tilde{x}_1(t)$ évolue dans le secteur \mathcal{S}_0 supposons qu'il existe un instant $t_a > t_{-1, 0}^{(1)}$ tel que $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte

S_0 et entre en S_{-1} à l'instant t_a . D'après la notation adoptée, on a $|\tilde{x}_1(t_a)| = \frac{\nu}{\gamma_1}$ et $|\tilde{x}_1(t_a^+)| > \frac{\nu}{\gamma_1}$. En tenant compte la continuité de $|\tilde{x}_1(t)|$, il existe $t > t_a$ tel que $\forall s \in]t_a, t]$, $|\tilde{x}_1(s)| \in S_{-1}$, i.e.

$$|\tilde{x}_1(t)| > \frac{\nu}{\gamma_1}. \quad (2.78)$$

Puisque $|\tilde{x}_1(s)|$ évolue dans S_{-1} pour tout $s \in]t_a, t]$, on peut procéder comme dans la preuve de la proposition 2.1 pour obtenir l'inégalité suivante (comparer avec (2.44)) :

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |\tilde{x}_1(t_a)| - \frac{\nu\theta}{2}(t - t_a). \quad (2.79)$$

Notons que l'inégalité ci-dessus (2.79) est valable sous des hypothèses similaires à celles adoptées pour générer l'inégalité (2.44). En particulier, le paramètre de conception θ est supposé être suffisamment élevé et satisfait en particulier :

$$\theta > \frac{2}{\nu}(\max(\|\tilde{x}(t_a)\|, \delta_\varepsilon) + \delta_w + 2nL_\varphi R). \quad (2.80)$$

Le choix de θ comme dans (2.80) est possible puisque $\|\tilde{x}(t_a)\| \leq \alpha_\theta$ avec $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\theta}{\theta} = 0$.

En combinant (2.79) avec le fait que $t > t_a$ conduit à $|\tilde{x}_1(t)| \leq |\tilde{x}_1(t_a)| = \frac{\nu}{\gamma_1}$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité (2.78). Ainsi, l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ ne peut pas quitter S_0 pour entrer dans S_{-1} mais elle évoluera selon le deuxième scénario, c'est-à-dire qu'elle quittera le secteur S_0 pour entrer en S_1 . Ceci termine la preuve de la proposition 2.4. \square

Remarque 2.2 D'après la proposition 2.4, $t_{k-1,k}^{(2)}$ ne peut exister que pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Nous avons effectivement montré dans la preuve de cette proposition que k ne peut pas être égal à zéro, c'est-à-dire que $t_{-1,0}^{(2)}$ n'existe pas. Autrement dit, l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ ne peut jamais revenir en S_{-1} après l'instant $t_{-1,0}^{(1)}$. Cela signifie également que la séquence $\{t_{-1,0}^{(i)}\}_{i \leq 1}$ est finie et est réduite à $t_{-1,0}^{(1)}$.

Remarque 2.3 Il faut souligner que la situation de $|\tilde{x}_1(t)|$ à l'instant $t_{k-1,k}^{(2)}$ est similaire à sa situation à l'instant $t_{k-1,k}^{(1)}$. Ainsi, l'évolution temporelle de $|\tilde{x}_1(t)|$ à partir de l'instant $t_{k-1,k}^{(2)}$ est similaire à son évolution après l'instant $t_{k-1,k}^{(1)}$ qui a été détaillée dans les propositions 2.2, 2.3 et 2.4. D'après ces propositions et en prenant en considération la remarque 2.2, depuis l'instant initial, $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans les secteurs S_0, \dots, S_{n-1} . Elle y séjourne dans chaque secteur $S_i, i = 0, \dots, n-1$, une période de temps T_i qui tend vers 0 lorsque θ tend vers l'infini. De plus, la norme du vecteur d'erreur $\|x(t)\|$ reste bornée à l'entrée et à la sortie de chaque secteur. Plus précisément, on a :

a- Pour tout $t \geq t_{-1,0}^{(1)}$, $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans l'un des secteurs S_0, \dots, S_{n-1} . De plus, la durée au quelle $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans chacun de ces secteurs tend vers 0 lorsque θ tend vers l'infini.

b- Pour tout temps fini $T > 0$

$$\exists \alpha_\theta > 0, \forall t \leq T, \|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_\theta \text{ où } \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_\theta/\theta) = 0. \quad (2.81)$$

Dans la suite, nous allons montrer qu'il existe un instant $|\tilde{x}_1(t)|$, tel que $\tilde{x}_1(t)$ entre à cet instant pour la dernière fois dans le secteur S_{n-1} et ne le quittera plus. On remarque qu'à partir de cet instant, les équations de l'observateur (2.29) coïncident avec celles du SHGO (2.23). Ce résultat est énoncé dans la proposition suivante :

Proposition 2.5 *Si la borne δ_w de $w(t)$ donnée dans l'hypothèse **H.2.4** satisfait la condition (2.27), alors, la suite $\left\{t_{k-1,k}^{(i)}\right\}_{i \geq 1}$ est finie pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Preuve de la proposition 2.5

Notons par i_k le nombre des termes de la séquence $\left\{t_{k-1,k}^{(i)}\right\}_{i \geq 1}$ lorsque cette séquence est finie. La preuve de la proposition sera faite par récurrence sur k . En effet, pour $k=0$ on a $i_0=1$ puisque nous avons démontré à la fin de la Proposition 2.4 que $|\tilde{x}_1(t)|$ ne quitte jamais le secteur S_{-1} après l'instant $t_{-1,0}^{(1)}$ (cf Remarque 2.2).

Soit maintenant un entier k fixé dans $\{1, \dots, n-1\}$, et supposons que pour $\forall j \in \{1, \dots, k-1\}$, la suite $\left\{t_{j-1,j}^{(i)}\right\}_{i \geq 1}$ est finie. Pour prouver la proposition il suffit de prouver que la séquence $\left\{t_{k-1,k}^{(i)}\right\}_{i \geq 1}$ est finie. C'est ce que nous allons établir dans ce qui suit.

D'après l'hypothèse de récurrence, la séquence $\left\{t_{k-2,k-1}^{(i)}\right\}_{i \geq 1}$ est finie et nous avons par conséquent :

$$\forall t \geq t_{k-2,k-1}^{(i_{k-1})}, |\tilde{x}_1(t)| \leq \frac{\nu}{\gamma_k \theta^{k-1}}. \quad (2.82)$$

Sans perte de généralités, nous allons supposer dans ce qui suit que $i_w \leq k$.

D'après (2.33), les k premières équations de l'erreur d'observation associées à l'observateur (2.29) peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante pour tout $t \geq t_{k-2,k-1}^{(i_{k-1})}$:

$$\dot{\tilde{x}}_k = A_k \tilde{x}_k + \tilde{\varphi}_k^s(\hat{x}_k, \underline{x}_k, u) - \theta \Delta_k^{-1}(\theta) \Gamma_k C_k^T \tilde{x}_1(t) + B_k \tilde{x}_{k+1}(t) - \bar{B}_{i_w,k} w(t), \quad (2.83)$$

où $\tilde{x}_k, \hat{x}_k, \underline{x}_k, \varphi_k^s \in \mathbb{R}^k$ sont les sous-vecteurs respectifs de \tilde{x}, \hat{x}, x et φ^s définis comme dans (2.7), A_k comme dans (2.1), (B_k, C_k) comme dans (2.2), Γ_k comme dans (2.3), Δ_k comme dans (2.5) et $\bar{B}_{i_w,k} \in \mathbb{R}^k$ est tel que $\bar{B}_{i_w,k}(i_w) = 1$ et $\bar{B}_{i_w,k}(i) = 0, i \in \{1, \dots, k\} \setminus i_w$. Comme $\bar{A}_k = A_k - \Gamma_k C_k$ est Hurwitz, alors il existe une matrice SDP P_k et un réel positif μ_k vérifiant l'inégalité (2.6).

Remarquons que le système d'erreurs (2.83) a la même structure que le système d'erreurs (2.24) et le terme $\tilde{x}_{k+1}(t)$ dans (2.83) joue le rôle de $\varepsilon(t)$ dans (2.24). De plus, on rappelle que d'après (2.81), on a :

$$|\tilde{x}_j(t)| \leq \alpha_\theta, j = 1, \dots, n, \quad (2.84)$$

pour tout $t < T$ où $T > 0$ est un nombre positif fixé arbitrairement grand.

Comme la borne supérieure δ_w est supposée satisfaire l'inégalité (2.27), l'erreur d'observation $\tilde{x}_j, j = 1, \dots, k$, satisfait une inégalité similaire à (2.28) pour tout $t \geq t_{k-2,k-1}^{(i_{k-1})}$.

Une telle inégalité s'écrit comme suit :

$$|\tilde{x}_j(t)| \leq \left(\theta^{k-1} e^{-\theta \beta_k (t - t_{k-2,k-1}^{i_{k-1}})} + \frac{1}{\theta \beta_k} \right) \sigma_{P_k} \bar{\alpha}_\theta, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.85)$$

où β_k est défini comme dans (2.26) où n est remplacé par k , $P_k = P_k^T$ et

$$\bar{\alpha}_\theta = \alpha_\theta + \bar{\delta}_w. \quad (2.86)$$

Soit $t_{k-1}^* > t_{k-2,k-1}^{i_{k-1}}$ tel que :

$$\theta^{k-1} e^{-\theta \beta_k (t_{k-1}^* - t_{k-2,k-1}^{i_{k-1}})} = \frac{1}{\theta \beta_k} \text{ i.e. } t_{k-1}^* = t_{k-2,k-1}^{i_{k-1}} + \frac{1}{\theta \beta} (k \log(\theta_k) + \log(\beta_k)). \quad (2.87)$$

D'après la définition de t_{k-1}^* et en se référant à (2.85), on a :

$$\forall t \geq t_{k-1}^*, |\tilde{x}_j(t)| \leq 2 \frac{\sigma_{P_k}}{\beta_k} (\bar{\alpha}_\theta / \theta), \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.88)$$

Rappelons que compte tenu de l'hypothèse de récurrence et puisque $t \geq t_{k-2,k-1}^{i_{k-1}}$, l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ ne peut pas revenir à S_{k-2} . Ainsi, d'après la remarque 2.3, $\forall t \geq t_{k-1}^*$, $|\tilde{x}_1(t)|$ évoluera à travers les secteurs S_{k-1}, \dots, S_{n-1} .

Considérons maintenant un instant $t_{k,k-1}^{(i)} > t_{k-1}^*$, où i est un entier positif, à partir duquel $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_k et entre dans S_{k-1} pour la $n^{\text{ème}}$ fois. Remarquons que si un tel instant n'existe pas alors la récurrence est prouvée.

Soit

$$\eta_k \triangleq 6 \frac{\bar{L}_\varphi \sigma_{P_k}}{\beta_k} + 1 \text{ avec } \bar{L}_\varphi = \max(L_\varphi, 1). \quad (2.89)$$

Nous allons maintenant démontrer la propriété suivante qui sera utilisée par la suite dans la preuve de la proposition :

$$\forall \bar{\theta}_0 > 0, \forall \theta > \bar{\theta}_0, \exists t_{k,k-1}^{(i)} > t_{k,k-1}^{(i)}, \frac{\eta_k}{\theta} \sum_{j=1}^k \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \leq \frac{1}{2} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!}, \quad (2.90)$$

où $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{k,k-1}^{(i)} - t_{k,k-1}^{(i)}) = 0$.

Pour prouver la propriété (2.90), posons $\bar{\tau} = t - t_{k,k-1}^{(i)}$ et considérons le polynôme en $\bar{\tau}$ suivant :

$$\bar{P}(\bar{\tau}) = \left(\frac{\eta_k}{\theta} \sum_{j=1}^k \frac{\bar{\tau}^{j-1}}{j!} \right) - \frac{1}{2} \frac{\bar{\tau}^{k-1}}{k!}. \quad (2.91)$$

En se basant sur la règle des signes de Descartes, l'équation $\bar{P}(\bar{\tau}) = 0$ admet une unique racine réelle positive que l'on notera $\bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)}$. Puisque $\bar{P}(0) = \frac{\eta_k}{\theta} > 0$, on a $\forall \bar{\tau} > \bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)}$, $\bar{P}(\bar{\tau}) < 0$ ce qui implique aussi que $\bar{\tau} \bar{P}(\bar{\tau}) \leq 0$. D'après la définition de $\bar{\tau}$, l'expression

du réel positif $\bar{t}_{k,k-1}^{(i)}$ requis par la propriété (2.90) est $\bar{t}_{k,k-1}^{(i)} = t_{k,k-1}^{(i)} + \bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)}$. De plus et compte tenu de l'expression de l'expression de $\bar{P}(\bar{\tau})$ donnée par (2.91), $\bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)}$ satisfait l'égalité suivante :

$$\frac{\eta_k}{\theta} \sum_{j=1}^k \frac{(\bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)})^{j-1}}{j!} = \frac{1}{2} \frac{(\bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)})^{k-1}}{k!}.$$

Le membre gauche de l'égalité ci-dessus est un polynôme en $\bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)}$ et tous ses coefficients tendent vers zéro quand θ tend vers l'infini. Ceci implique que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \bar{\tau}_{k,k-1}^{(i)} = 0$ et la propriété (2.90) est donc prouvée.

Soit maintenant $t > t_{k,k-1}^{(i)}$ tel que $|\tilde{x}_1(t)| \in S_{k-1}$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} |\tilde{x}_{j+1}(t_{k,k-1}^{(i)})| + \sum_{j=1}^n \int_{t_{k,k-1}^{(i)}}^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} |\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| ds \\ &+ \delta_\varepsilon \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^n}{n!} + \delta_w \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^{i_w}}{i_w!} - \theta \nu \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Puisque δ_w satisfait (2.27) et du fait que $n - i_w \geq 1$, nous pouvons déduire à partir de l'inégalité précédente (2.92), l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} |\tilde{x}_{j+1}(t_{k,k-1}^{(i)})| + \sum_{j=1}^n \int_{t_{k,k-1}^{(i)}}^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} |\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| ds \\ &+ \delta_\varepsilon \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^n}{n!} + \frac{\bar{\delta}_w}{\theta} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^{i_w}}{i_w!} - \theta \nu \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \\ &\triangleq \underline{Q}(t) + \bar{Q}(t), \end{aligned} \quad (2.93)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} |\tilde{x}_{j+1}(t_{k,k-1}^{(i)})| + \sum_{j=1}^k \int_{t_{k,k-1}^{(i)}}^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} |\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| ds \\ \quad + \frac{\bar{\delta}_w}{\theta} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^{i_w}}{i_w!}, \\ \bar{Q}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} |\tilde{x}_{j+1}(t_{k,k-1}^{(i)})| + \sum_{j=k+1}^n \int_{t_{k,k-1}^{(i)}}^t \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} |\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| ds \\ \quad + \delta_\varepsilon \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^n}{n!} - \theta \nu \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \end{array} \right. \quad (2.94)$$

Notons que compte tenu des inégalités (2.17) et (2.81), nous avons pour tout $j \in \{k+1, \dots, n\}$:

$$|\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| \leq 2nL_\varphi R \text{ et } |\tilde{x}_j(t^{(i)})| \leq \alpha_\theta. \quad (2.95)$$

Nous allons maintenant procéder à la majoration de \bar{Q} puis à celle \underline{Q} .

En utilisant (2.88) et (2.95), on peut borner $\bar{Q}(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}(t) &\leq \bar{\alpha}_\theta \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!} + \alpha_\theta \sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} + 2nL_\varphi R \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \\
 &+ \delta_\varepsilon \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^n}{n!} - \theta\nu \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \\
 &\leq \bar{\alpha}_\theta \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!} + (\delta_\theta + 2nL_\varepsilon R - \theta\nu) \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!}, \tag{2.96}
 \end{aligned}$$

où $\bar{\alpha}_\theta$ est donné par (2.86), $\delta_\theta = \max(\alpha_\theta, \delta_\varepsilon)$.

Notons que comme $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\bar{\alpha}_\theta/\theta) = 0$, on a $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\delta_\theta/\theta) = 0$.

Maintenant, choisissons θ assez grand et en particulier satisfaisant $\delta_\theta + 2nL_\varphi R - \nu\theta \leq \frac{-\nu\theta}{2}$. Notons qu'un tel choix est possible puisque $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (\delta_\theta/\theta) = 0$. Avec un tel choix de θ , l'inégalité (2.96) devient :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}(t) &\leq \bar{\alpha}_\theta \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!} - \frac{\theta\nu}{2} \sum_{j=k+1}^n \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \\
 &\leq \bar{\alpha}_\theta \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!} - \frac{\theta\nu}{2} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^{k+1}}{k!}. \tag{2.97}
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant procéder à la majoration de $\underline{Q}(t)$.

D'après (2.88) et puisque $t_{k,k-1}^{(i)} > t_{k-1}^*$, on a pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$:

$$|\tilde{x}_{j+1}(t_{k,k-1}^{(i)})| \leq 2 \frac{\sigma_{P_k}}{\beta_k} (\bar{\alpha}_\theta/\theta). \tag{2.98}$$

De même, en combinant (2.88) avec l'inégalité relative au caractère Lipschitz des non linéarités donnée par (2.17), on obtient pour tout $s \in [t_{k,k-1}^{(i)}, t]$, et pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$|\tilde{\varphi}_j^s(\hat{x}, x, u)| \leq 2L_\varphi |\tilde{x}_j| \leq 4 \frac{L_\varphi \sigma_{P_k}}{\beta_k} (\bar{\alpha}_\theta/\theta). \tag{2.99}$$

En utilisant les inégalités (2.98) et (2.99) et le fait que $1 \leq i_w \leq k$, le terme $\underline{Q}(t)$ défini par (2.94) peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned}
 \underline{Q}(t) &\leq |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| + 2 \frac{\sigma_{P_k}}{\beta_k} (\bar{\alpha}_\theta) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} + (4 \frac{L_\varphi \sigma_{P_k}}{\beta_k} (\bar{\alpha}_\theta) + \frac{\bar{\delta}_w}{\theta}) \sum_{j=1}^k \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \\
 &\leq |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| + (6 \frac{\bar{L}_\varphi \sigma_{P_k}}{\beta_k} + 1) \frac{\bar{\alpha}_\theta}{\theta} \sum_{j=1}^k \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \text{ puisque } \bar{\delta}_w \leq \bar{\alpha}_\theta \\
 &= |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| + \frac{\eta_k}{\theta} \sum_{j=1}^k \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^j}{j!} \bar{\alpha}_\theta, \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

où η_k et \bar{L}_φ sont définis en (2.89).

En utilisant la propriété (2.90), on obtient à partir l'inégalité (2.100), l'inégalité suivante pour tout $t \geq \bar{t}_{k,k-1}^{(i)}$ où l'instant $\bar{t}_{k,k-1}^{(i)} > \bar{t}_{k,k-1}^{(i)}$ est donné par la propriété (2.90) :

$$\underline{Q}(t) \leq |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| + \frac{\bar{\alpha}_\theta (t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{2 k!}. \quad (2.101)$$

En combinant (2.93), (2.97) et (2.101), on obtient pour tout $t \geq \bar{t}_{k-1,k}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1(t)| &\leq |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| + \frac{3}{2} \bar{\alpha}_\theta \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!} - \frac{\nu\theta (t - t_{k,k-1}^{(i)})^{k+1}}{2 (k+1)!} \\ &\leq |\tilde{x}_1(t_{k,k-1}^{(i)})| + \frac{3}{2} \bar{\alpha}_\theta \frac{(t - t_{k,k-1}^{(i)})^k}{k!} - \frac{\nu\theta (t - t_{k,k-1}^{(i)})^k (t - \bar{t}_{k,k-1}^{(i)})}{2 (k+1)!} \\ &= \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k} + \frac{\nu\theta}{2(k+1)!} (t - t_{k,k-1}^{(i)})^k \left(\frac{3(k+1)\bar{\alpha}_\theta}{\nu\theta} - (t - \bar{t}_{k,k-1}^{(i)}) \right). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Considérant maintenant l'instant $t_{k,k-1}^*$ défini comme suit :

$$t_{k,k-1}^* = \bar{t}_{k,k-1}^{(i)} + \frac{3(k+1)\bar{\alpha}_\theta}{\nu\theta}. \quad (2.103)$$

Il est clair à partir de (2.102) et (2.103), que pour tout $t \geq t_{k,k-1}^*$, $|\tilde{x}_1(t)| \leq \frac{\nu}{\gamma_{k+1}\theta^k}$, i.e.

$t_{k,k-1}^{(i)} = t_{k,k-1}^*$. Ceci termine la preuve de la Proposition 2.5. \square

Selon la proposition 2.5, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, le nombre de termes la séquence $\left\{ t_{k-1,k}^{(i)} \right\}_{i \geq 1}$, noté i_k , est fini. En particulier, pour $k = n-1$, il existe un instant fini $t_{n-2,n-1}^{(i_{n-1})}$, tel que pour tout $t \geq t_{n-2,n-1}^{(i_{n-1})}$, $|\tilde{x}_1(t)|$ ne quitte jamais S_{n-1} . Cela signifie que, pour $t \geq t_{n-2,n-1}^{(i_{n-1})}$, les équations de l'observateur (2.29) coïncident avec celles du SHGO (2.23).

Par ailleurs, comme la durée de séjour de $|\tilde{x}_1(t)|$ dans chaque secteur S_k pour $k = -1, \dots, n-1$ tend vers 0 quand θ tend vers l'infini, on en déduit que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{n-2,n-1}^{(i_{n-1})} - t_0) = 0$.

Remarque 2.4 Le résultat donné par la proposition 2.5, i.e. i_k est fini, signifie notamment que pour chaque $k = 1, \dots, n$, il existe un instant à partir duquel les k premières équations de l'observateur NPHGO (2.29) coïncident avec leurs contreparties de l'observateur SHGO (2.23) puisque chaque fonction de saturation impliquée dans le terme correctif du NPHGO devient égale à la fonction identité. La notion de stabilité forte exigée permet de traiter chaque sous-système composé par les k premières équations du NPHGO comme un système perturbé et une limite ultime appropriée est générée. Lorsque $k = n$, le système global, i.e. le NPHGO, coïncide avec le SHGO. Comme nous l'avons noté précédemment, le concept de stabilité forte a été utilisé dans [45, 2] même si les développements et arguments utilisés dans ces références sont assez différents de ceux détaillés dans ce chapitre.

Les propriétés principales de l'observateur (2.29) résultent directement des propositions énoncées ci-dessus et elles sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Considérons le système (2.22) sous les hypothèses **H.2.1**, **H.2.2**, **H.2.3** et **H.2.4** avec l'observateur (2.29) et supposons que la borne δ_w de $w(t)$ donnée par l'hypothèse **H.2.4** satisfait la condition (2.27). Alors, chaque composante $\tilde{x}_i = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$, pour $i = 1, \dots, n$, de l'erreur d'observation satisfait les propriétés suivantes :*

$$\exists \theta^* \geq 0; \forall \theta \geq \theta^*, \exists t_{n-2, n-1}^{(i_{n-1})} > 0, \exists \alpha_\theta > 0; \forall u \in U, \forall \hat{x}(t_0) \in X, \text{ on a,} \\ (i) \quad \forall t; t_0 \leq t \leq t_{n-2, n-1}^{(i_{n-1})}, \|\tilde{x}_i(t)\| \leq \alpha_\theta, \quad (2.104)$$

$$(ii) \quad \forall t \geq t_{n-2, n-1}^{(i_{n-1})}, \|\tilde{x}_i(t)\| \leq \min \left\{ \alpha_\theta, \sigma_{P_n} (\theta^{i-1} e^{-\beta_n \theta (t - t_{n-2, n-1}^{(i_{n-1})})} \alpha_\theta + \frac{\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_w}{\theta^{n+1-i} \beta_n}) \right\} \quad (2.105)$$

où β_n est défini par (2.26), P_n est donné par (2.6) pour $k = n$ et $A_k = \bar{A}_n$ où \bar{A}_n est définis comme dans (2.3) et $\delta_\varepsilon, \bar{\delta}_w$ sont tels que définis par (2.11) et (2.27), respectivement. De plus, on a $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (t_{n-2, n-1}^{(i_{n-1})} - t_0) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\alpha_\theta / \theta) = 0$.

Remarque 2.5 *Dans l'analyse de l'évolution temporelle de $|\tilde{x}_1(t)|$ réalisée à travers les Propositions 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5, on a supposé que la condition initiale $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. Dans le cas où $|\tilde{x}_1(t_0)| \in \{S_k^*\}$ où $k^* \in \{0, \dots, n-2\}$, on peut montrer que l'évolution dans le temps de $|\tilde{x}_1(t)|$ est toujours similaire à celle décrite dans le cas où $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$ à une différence mineure près. En effet, en procédant comme dans la preuve de la proposition 2.2, on peut montrer que $|\tilde{x}_1(t)|$ traversera d'abord les secteurs inférieurs jusqu'à entrer dans S_{n-1} comme dans le cas où $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. Puis, si l'erreur $|\tilde{x}_1(t)|$ quitte S_{n-1} , elle pourra évoluer dans les secteurs supérieurs puis reviendra vers les secteurs inférieurs comme dans le cas où $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. Notons que le secteur le plus haut que peut atteindre $|\tilde{x}_1(t)|$ pour la première (et dernière) fois lorsqu'elle quitte S_{n-1} peut être éventuellement S_{-1} et ceci n'était pas possible lorsque $|\tilde{x}_1(t_0)| \in S_{-1}$. La suite de l'évolution de $|\tilde{x}_1(t)|$ reste similaire à celui décrit dans les propositions ci-dessus.*

2.3.2 Réglage des paramètres de synthèse de l'observateur

Le terme correctif d'observateur (2.29)-(2.30) fait apparaître trois paramètres de synthèse, le vecteur Γ_n et les réels positifs θ et ν . Comme indiqué précédemment, les n coefficients γ_i du vecteur Γ_n doivent satisfaire le critère de stabilité forte par rapport à A_n et énoncé dans la définition 2.1. Dans ce qui suit, nous allons proposer deux méthodes qui permettent de choisir ces coefficients. On se référera à chacune de ces méthodes respectivement par Approche 1 et Approche 2.

Approche 1 : *On commence par fixer les pôles de la matrice \bar{A}_n à des valeurs prédéfinies de sorte qu'elle soit Hurwitz puis on calcule Γ_n correspondant. Ceci peut être facilement réalisé par exemple en appelant l'une des fonctions standard de matlab 'acker' ou 'place'. Après l'obtention des γ_i , on vérifie si le critère de stabilité forte est satisfait en calculant les zéros des $n-1$ polynômes :*

$$P_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \lambda^i, k = 1, \dots, n-1.$$

Le critère de stabilité forte est satisfait si toutes les racines de chaque polynôme ont des parties réelles négatives. Si le critère n'est pas satisfait, on peut repartir dès le départ en fixant d'autres pôles de \bar{A}_n . Si le critère n'est pas satisfait après quelques tentatives, on utilise la deuxième approche.

Approche 2 : Cette approche est basée sur le théorème 3 de [43] qui fournit un algorithme récursif permettant de générer les coefficients γ_i qui satisfont au critère de stabilité forte. L'algorithme correspondant est décrit dans ce qui suit.

Soit $\delta \approx 4,07959$ l'unique racine réelle de $X^3 - 5X^2 + 4X - 1 = 0$ et soit $\alpha > 0$ un réel positif fixé. Les valeurs des $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ sont calculées comme suit :

$$\gamma_1 = \alpha, \gamma_2 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\delta}} \text{ et } \gamma_k = \frac{\gamma_{k-1}^2}{\sqrt{\delta}\gamma_{k-2}}, k = 3, \dots, n. \quad (2.106)$$

À première vue, la deuxième approche semble plus attrayante que la première puisqu'elle permet de fournir les coefficients γ_i appropriés de manière directe. Cependant, la première approche ne doit pas être systématiquement rejetée. En effet, lorsque la dimension du système est relativement faible, disons inférieure à 10, l'exigence de stabilité forte est souvent satisfaite lorsque les coefficients γ_i sont choisis tels que la matrice \bar{A}_n est Hurwitz avec des valeurs propres prédéfinies. Ce problème a été vérifié numériquement en simulation en considérant de nombreux ensembles de valeurs propres prédéfinies pour \bar{A}_n . Par exemple, si toutes les valeurs propres de \bar{A}_n sont affectées à (-1) , alors l'exigence de stabilité forte est satisfaite pour tout n inférieur ou égal à 11.

Le choix des paramètres de conception θ et ν doit être réalisé par une approche de type essai/erreur. Il est bien connu que dans le cas du SGHO, des valeurs relativement élevées de θ permettent une convergence rapide de l'erreur d'observation vers zéro mais amplifient le phénomène de peaking. Comme le comportement vis-à-vis du phénomène de peaking ayant été significativement amélioré, l'utilisation de valeurs relativement élevées pour le paramètre θ dans l'observateur (2.29) n'est plus déconseillée. Concentrons-nous maintenant sur le niveau de saturation ν et supposons que la valeur de θ est fixe. Il est clair que pour des valeurs très élevées de ν , le phénomène de peaking est toujours présent et le comportement du NPHGO devient identique à celui du SHGO. Cependant, des valeurs très faibles de ν peuvent conduire à des périodes transitoires plus longues de l'observateur. Cela signifie que la période pendant laquelle l'erreur d'observation $|\tilde{x}_1(t)|$ évolue dans chaque secteur S_k avant de le quitter devient plus longue. Plus précisément, si ν est choisi de telle sorte que le produit $\nu\theta$ ne soit pas assez élevé, alors la période transitoire devient plus longue et le processus de saturation peut échouer (voir l'équation (2.45) et les équations (2.58),(2.60)).

2.4 Synthèse de l'observateur NPFHGO

Nous allons maintenant revenir au système original (2.8) puisque notre objectif consiste à faire une resynthèse de l'observateur à grand gain pour ce système. Nous montrerons plus loin comment on pourra transformer ce système pour générer une version qui tient

compte du bruit sur la sortie et qui se met sous la forme du système général (2.9) dont l'expression de la sortie est indépendante du bruit de mesure. Pour des raisons de clarté, nous reproduisons ci-dessous les équations du système (2.8) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_n x + \varphi(x, u) + B_n \varepsilon(t) \\ y &= C_n x + v(t) = x_1 + v(t) \end{cases} \quad (2.107)$$

Notons qu'en l'absence de bruits sur la mesure, i.e. $v(t) \equiv 0$, le système (2.107) coïncide avec (2.9) où $w(t) = 0$ et donc un observateur de type NPHGO similaire à (2.29) peut être conçu pour le système (2.107). Nous allons maintenant nous intéresser au cas plus général où $v(t) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque la sortie du système est corrompue par un bruit additif $v(t)$. On montrera comment le système (2.107) peut être augmenté par un intégrateur multiple de la sortie bruitée conduisant à un système augmenté dont la structure est similaire à celle du système (2.9). En conséquence, un observateur de type SHGO similaire à l'observateur (2.23) mais possédant des capacités de filtrage, et auquel on se référera par FHGO, peut être conçu pour le système ainsi augmenté. Puis, en exploitant le fait que la structure du FHGO est similaire à celle du SHGO, on appliquera au FHGO la même procédure adoptée pour concevoir le NPHGO à partir du SHGO. L'observateur résultant de l'application de cette procédure héritera les propriétés du NPHGO en termes de réduction du niveau de peaking et du FHGO en termes d'amélioration de la sensibilité au bruits de mesure. On se référera à cet observateur par NPFHGO.

2.4.1 Synthèse de FHGO

De nombreuses approches pour la resynthèse de l'observateur SHGO ont été proposées pour réduire sa sensibilité aux bruits de mesure soit en mettant à jour de manière appropriée le paramètre de synthèse θ [37, 38, 21] ou en remplaçant dans le terme correctif de l'observateur l'erreur d'observation de sortie par une version filtrée fournie par un filtre linéaire mis en cascade avec le système original [1, 46, 47]. Le principal inconvénient de l'approche où un filtre linéaire est considéré réside dans le fait que la puissance du paramètre de synthèse θ augmente d'une quantité égale à l'ordre du filtre, ce qui conduit à l'amplification du phénomène de peaking. Comme ce phénomène a déjà été maîtrisé grâce aux fonctions de saturation, nous allons adopter l'approche utilisant une version filtrée de l'erreur d'observation de sortie pour remédier à la sensibilité de l'observateur aux signaux à hautes fréquences. Dans [46], un simple intégrateur de la sortie a été considéré pour obtenir le système augmenté alors qu'un intégrateur multiple d'ordre $m \geq 1$ a été considéré dans [47]. En procédant comme dans [46, 47] où des propriétés de filtrage intéressantes des observateurs sous-jacents ont été mises en avant, on propose d'augmenter le système (2.22) par une cascade d'intégrateurs de la sortie comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} &= A_m z + B_m y \\ \dot{x} &= A_n x + \varphi^s(x, u) + B_n \varepsilon(t) \\ \bar{y}(t) &= z_1(t) \end{cases} \quad (2.108)$$

où $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, A_m et B_m sont définis comme en (2.1) et (2.2) pour $k = m$. Notons

que la sortie du système (2.108) est non pas la sortie y du système original (2.107) mais plutôt son intégrale d'ordre m , $z_1(t)$. On montrera plus tard, après avoir donné les équations de l'observateur résultant, que les m premières équations de l'observateur peuvent être interprétées comme étant un filtre linéaire d'ordre m dont l'entrée est l'erreur d'observation bruitée et la sortie est une version filtrée d'ordre m de cet erreur. C'est cette version filtrée de l'erreur d'observation de sortie qui sera utilisée dans le terme correctif de l'observateur.

Comme $y = C_n x + v(t)$, le système (2.108) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m & B_m C_n \\ 0_{m \times n} & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^s(x, u) \end{pmatrix} + B_{n+m} \varepsilon(t) + \begin{pmatrix} B_m \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \\ \bar{y} = C_{n+m} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = z_1, \end{cases} \quad (2.109)$$

où B_{n+m} est comme dans (2.2) avec $k = n + m$.

En tenant compte de la structure des matrices A_m , A_n et B_m , on peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} A_m & B_m C_n \\ 0_{m \times n} & A_n \end{pmatrix} = A_{n+m}, \quad (2.110)$$

où A_{n+m} est comme dans (2.1) avec $k = n + m$.

En tenant compte de l'égalité ci-dessus, le système augmenté (2.109) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = A_{n+m} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^s(x, u) \end{pmatrix} + B_{n+m} \varepsilon(t) + \begin{pmatrix} B_m \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \\ \bar{y} = C_{n+m} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = z_1, \end{cases} \quad (2.111)$$

où C_{n+m} est comme dans (2.2) avec $k = n + m$.

Il est clair que la structure du système (2.111) est similaire à celle du système (2.9) avec $w(t) = v(t)$. En conséquence, un observateur de type SHGO peut être conçu pour ce système. Les équations du SHGO sous-jacent peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{z}} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = A_{n+m} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^s(\hat{x}, u) \end{pmatrix} - \theta \Delta_{n+m}^{-1}(\theta) \Gamma_{n+m} (\hat{z}_1 - z_1), \quad (2.112)$$

où $\hat{z} \in \mathbb{R}^m$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ sont les estimations respectives de z et x , Δ_{n+m} est une matrice diagonale définie comme dans (2.5) et $\Gamma_{n+m}^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, où les coefficients

γ_i pour $i = 1, \dots, n + m$ sont des réels positifs satisfaisant au critère de stabilité forte par rapport à A_{n+m} . Notons que les équations de l'observateur ci-dessus dépendent de la variable z (ou plus précisément z_1) dont la dynamique est régie par les m premières équations différentielles ordinaires scalaires (EDO) du système (2.108). D'où le nombre d'EDO scalaires constituant l'observateur est égal à $(n + 2m)$. Afin de réduire le nombre de ces équations à $(n + m)$, on procède comme suit.

Tout d'abord, on peut vérifier les égalités suivantes :

$$\Delta_{n+m}(\theta) = \text{diag}(\Delta_m(\theta), \frac{1}{\theta^m} \Delta_n(\theta)), \Gamma_{n+m} = (\Gamma_m^T \ \Gamma_{m+1, n+m}^T)^T, \quad (2.113)$$

où Δ_{n+m} , Δ_m et Δ_n sont des matrices diagonales définies comme dans (2.5), $\Gamma_m^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ et $\Gamma_{m+1, n+m}^T = (\gamma_{m+1} \dots \gamma_{n+m})$. En utilisant les égalités (2.110) et (2.113), les équations de l'observateur (2.112) peuvent s'écrire sous la forme développée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A_m \hat{z} + B_m \hat{x}_1 - \theta \Delta_m^{-1}(\theta) \Gamma_m (\hat{z}_1 - z_1), \\ \dot{\hat{x}} &= A_n \hat{x} + \varphi^s(\hat{x}, u) - \theta^m \Delta_n^{-1}(\theta) \Gamma_{m+1, n+m} (\hat{z}_1 - z_1). \end{cases} \quad (2.114)$$

Le système (2.114) est constitué de deux sous-systèmes en cascade où \hat{z} et \hat{x} sont les états respectifs de ces sous-systèmes. Il est clair que la dérivée temporelle de \hat{x} est liée à celle de \hat{z} par le terme $\hat{z}_1 - z_1$, uniquement.

Soient $\eta = \hat{z} - z \in \mathbb{R}^m$ et η_i la i ème composante de η pour $i = 1, \dots, m$.

En utilisant les premières équations respectives des systèmes (2.108) et (2.114) ainsi que les égalités (2.113), les équations de l'observateur (2.114) peuvent être écrites en utilisant les états η et \hat{x} comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_m \eta(t) + B_m C_n \hat{x} - B_m y \\ A_n \hat{x} + \varphi^s(\hat{x}, u) \end{pmatrix} - \theta \Delta_{n+m}^{-1}(\theta) \Gamma_{n+m} \eta_1 \\ &= A_{n+m} \begin{pmatrix} \eta \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_m y \\ \varphi^s(\hat{x}, \eta) \end{pmatrix} - \theta \Delta_{n+m}^{-1}(\theta) \Gamma_{n+m} \eta_1. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Notons que $\eta(t_0) = 0$ est une valeur initiale appropriée pour l'EDO régissant η puisqu'elle réduit la période transitoire du filtre.

Il est clair que le système (2.115) qui fournit une estimation filtrée de l'état x , i.e. \hat{x} , ne nécessite que la résolution de $n + m$ EDO scalaires. Les m premiers EDO peuvent être interprétés comme étant un filtre linéaire d'ordre m dont l'entrée est l'erreur d'observation de la sortie bruitée, c'est-à-dire $C_n \hat{x}(t) - y(t)$, et la sortie filtrée résultante fournie par ce filtre, c'est-à-dire $\eta_1 = C_m \eta$, est ensuite utilisée dans le terme de correction des deux sous-systèmes (observateur global). De plus et puisque la structure de l'observateur (2.115) est similaire à celle de l'observateur de type SHGO (2.23), alors le même processus de conception utilisé pour obtenir (2.29) à partir (2.23) peut être utilisé pour dériver les équations d'un NPFNGHO qui hérite à la fois les propriétés du NPHGO et celles du FHGO.

Avant de donner les équations de l'observateur, nous allons générer une borne supérieure de l'erreur d'observation sous-jacente sous l'hypothèse que le bruit des mesures de sortie

$v(t)$ est essentiellement borné et satisfait une condition similaire à (2.27). En se rappelant de la signification des variables impliquées dans (2.27) (voir, Remarque 2.1), la condition sous-jacente peut être obtenue en remplaçant dans (2.27) n et i_w respectivement par $(n+m)$ et m , c'est-à-dire que la condition (2.27) s'écrit comme suit :

$$\exists \bar{\delta}_v > 0 \text{ tel que } \delta_v \leq \frac{\bar{\delta}_v}{\theta^{(n+m)-m}} = \frac{\bar{\delta}_v}{\theta^n}. \quad (2.116)$$

Pour résumer, le bruit des mesures de sortie $v(t)$ satisfait :

$$\exists \bar{\delta}_v > 0 \text{ tel que } Ess \sup_{t \geq 0} |v(t)| \leq \frac{\bar{\delta}_v}{\theta^n}. \quad (2.117)$$

Soit $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$ où $\tilde{x} = \hat{x} - x$ est l'erreur d'observation associée à l'observateur (2.115) et au système (2.111). Alors, chaque composante de l'erreur d'observation, ξ_i , $i = 1, \dots, m+n$, satisfait une inégalité semblable à (2.28). En particulier, pour $i = 1, \dots, n$, on a $\xi_{m+i} = \hat{x}_i$ avec :

$$\begin{aligned} &\exists \bar{\theta}_0 > 0 \text{ tel que, } \forall \theta \geq \bar{\theta}_0, \forall u \in U, \forall \hat{x}(t_0) \in X, \forall t \geq t_0, \text{ on a} \\ &\|\tilde{x}_i(t)\| \leq \sigma_{P_{n+m}} (\theta^{m+i-1} e^{-\beta_{n+m}\theta(t-t_0)} \|\tilde{x}(t_0)\| + \frac{\delta_\varepsilon + \bar{\delta}_v}{\theta^{n+1-i}\beta_{n+m}}), \end{aligned} \quad (2.118)$$

où β_{n+m} est défini comme dans (2.26) en substituant n par $n+m$, la matrice symétrique définie positive P_{n+m} est donnée par l'équation (2.6) pour $k = n+m$, δ_ε et $\bar{\delta}_v$ sont donnés respectivement (2.11) et (2.117), $\bar{\theta}_0 = \max(1, 2(n+m)L_\varphi/\beta_{n+m})$ et L_φ est la constante de Lipschitz comme dans l'inégalité (2.25).

On remarque que $\|\xi(t_0)\|$ a été remplacé par $\|\tilde{x}(t_0)\|$ dans le membre droit de l'inégalité (2.118) puisque $\eta(t_0) = 0$ et donc $\|\xi(t_0)\| = \|\tilde{x}(t_0)\|$. On remarque aussi que la puissance de θ multipliant l'exponentielle décroissante dans (2.118) est $m+i-1$ alors qu'elle n'était que $i-1$ dans la borne associée au SHGO et donnée par l'inégalité (2.28). Cela signifie qu'un inconvénient résultant de l'ajout du filtre est l'amplification du phénomène de peaking du FHGO par rapport au SHGO. Néanmoins, l'augmentation de cette puissance n'a pas d'impact significatif puisque le FHGO sous-jacent sera resynthétisé pour donner lieu à un observateur de type NPFHGO où le phénomène de peaking est réduit de manière significative.

Remarque 2.6 *On remarque que la condition (2.117) est très similaire à celle dérivée dans [2]. Cette condition est assez conservatrice puisqu'elle exige que la borne essentielle du bruit de mesure de sortie en sortie soit relativement petite et plus exactement de l'ordre de $1/\theta^{-n}$ où n est la dimension du système d'origine avec des sorties bruitées. Néanmoins, l'indépendance de cette condition à l'ordre du filtre, m , est à souligner.*

2.4.2 Equations de NPFHGO

Comme indiqué ci-dessus, la même procédure de resynthèse ayant permis de générer les équations de l'observateur de type NPHGO (2.29) à partir de sa version SHGO sous-jacente (2.23), peut être appliquée à l'observateur FHGO (2.115) pour obtenir les

équations de l'observateur de type NPFHGO. En effet, les équations de l'observateur de type NPFHGO peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = A_{n+m} \begin{pmatrix} \eta \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \phi^s(\eta, \hat{x}, x, u) - \theta H(\eta_1), \quad \eta(t_0) = 0, \quad \hat{x}(t_0) \in X, \quad (2.119)$$

où $\phi^s(\eta, \hat{x}, x, u) = \begin{pmatrix} -B_m y \\ \tilde{\varphi}^s(\hat{x}, x, u) \end{pmatrix}$, $H(\eta_1) \in \mathbb{R}_{n+m}$ et les composantes correspondantes $H_i(\eta_1) \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, \dots, n + m$, sont définies comme suit (comparer avec (2.30)) :

$$H_1(\eta_1) = \text{sat}_\nu(\gamma_1 \eta_1) \text{ et } H_i(\eta_1) = \text{sat}_\nu\left(\theta \frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}} H_{i-1}(\eta_1)\right) \text{ pour } i = 2, \dots, n + m, \quad (2.120)$$

où les $\gamma_i, i = 1, \dots, n + m$ satisfont au critère de stabilité forte par rapport à A_{n+m} donné dans la Définition 2.1.

Rappelons que l'observateur (2.119) hérite simultanément des principales propriétés de l'observateur de type NPHGO (2.29) en termes de réduction significative du pic des variables d'état de l'observateur ainsi que celles de l'observateur de type FHGO (2.115) en termes d'amélioration de la sensibilité de l'observateur aux signaux à hautes fréquences.

2.5 Exemple

Dans ce qui suit, les performances et les principales propriétés du NPFHGO proposé sont illustrées et comparées à celles du SHGO à travers un exemple relatif à un mono-bras de bras introduit dans [48] et utilisé dans [1]. Le modèle mathématique du bras de robot est décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \bar{K}/(J_2 N)x_3 - (F_2/J_2)x_2 - (\bar{K}/J_2)x_1 - (\bar{m}gd/J_2)\cos(x_1) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = (1/J_1)u - \bar{K}/(J_1 N)x_1 - \bar{K}/(J_2 N)x_3 - (F_1/J_1)x_4 + \varepsilon(t), \\ y = x_1 + v(t), \end{cases} \quad (2.121)$$

où $\varepsilon(t)$ et $v(t)$ désignent respectivement la perturbation et le bruit de mesure, $J_1, J_2, \bar{K}, N, \bar{m}, g, d, F_1$ et F_2 sont les paramètres du modèle qui sont des constantes positives. La séquence de contrôle $\{u(t)\}$ est la même que celle est considérée dans [48], i.e. :

$$u = \text{sat}_M \{ mgdJ_1/(J_2 N) - (J_1 J_2 N/\bar{K}) (L^4 c_1 x_1 + L^3 c_2 x_2 + L^2 c_3 (\bar{K}/(J_2 N)x_3 - (mgd/J_2)) + Lc_4 \bar{K}/(J_2 N)x_1) \},$$

avec $M > 0$ et sat_M défini comme dans (2.13), les $c_i, i = 1, \dots, 4$ et L sont des constantes positives. En utilisant le fait que $\bar{K}/(J_2 N) = 1$, il est facile de vérifier que le système (2.121) est sous la forme (2.9) et par conséquent un observateur de type NPFHGO (ainsi qu'un SHGO) peuvent être conçus. En effet, un NPFHGO de la forme (2.119) a été conçu avec un filtre d'ordre 2, soit $m = 2$.

Les paramètres du système (2.121) sont choisis comme suit $F_1 = 0.1$, $F_2 = 0.15$, $J_1 = 0.15$, $J_2 = 0,2$, $\bar{K} = 0,4$, $N = 2$, $\bar{m} = 0,8$, $g = 9,81$ et $d = 0,6$.

La commande $u(t)$ est calculée avec les paramètres suivants $c_1 = 4$, $c_2 = 7,91$, $c_3 = 6,026$, $c_4 = 1,716$, $L = 3$ et $M = 200$.

Dans la simulation, l'incertitude a été choisie comme $\varepsilon(t) = \sin(5t)$, et la sortie $y(t)$ a été corrompue par un bruit gaussien additif $v(t)$ avec une valeur moyenne nulle et un écart type égal à 0,004 comme illustrée à la figure 2.2.

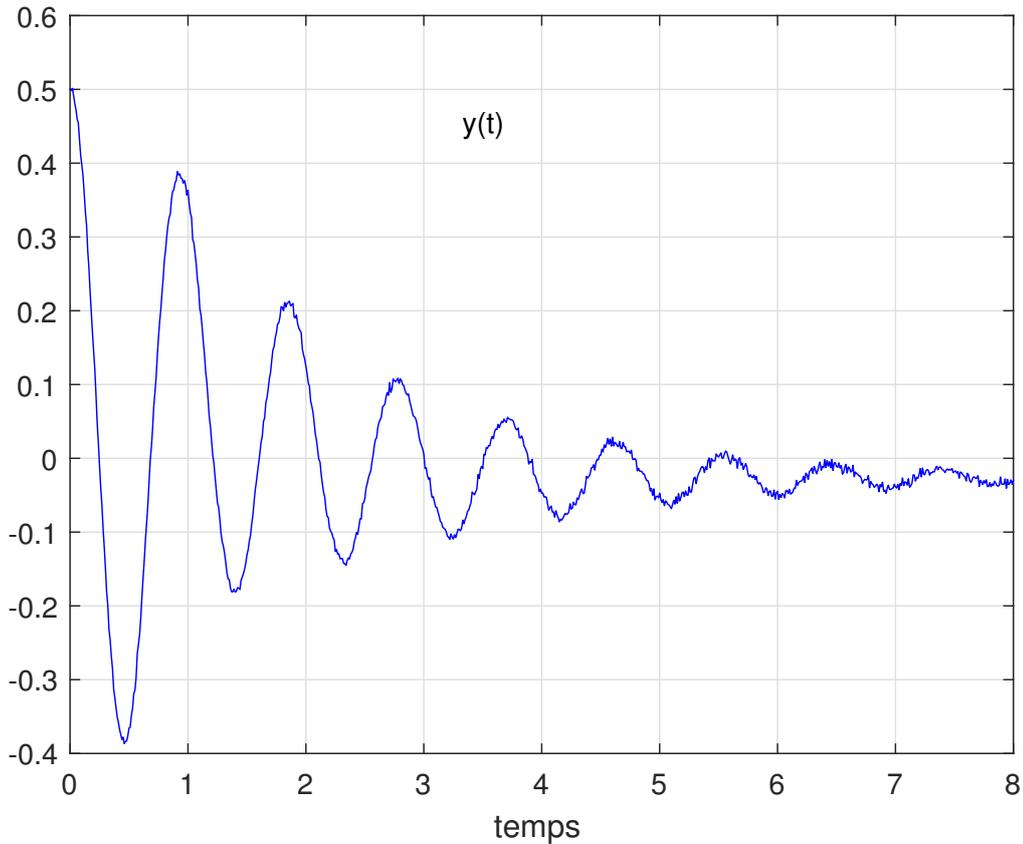


FIGURE 2.2 – Mesures bruitées de la sortie.

Les conditions initiales du système (2.121) et l'observateur ont été choisies comme dans [48, 1], i.e. $x^T(0) = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Pour ces valeurs initiales, les variables d'état du système (2.121) sont bornées comme suit

$$\begin{aligned} x_1(t) &\in [-0,26 \ 0,51], & x_2(t) &\in [-2,63 \ 2,06], \\ x_3(t) &\in [0,5 \ 38,8], & x_4(t) &\in [-95,94 \ 127,56]. \end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur du niveau R pour saturer les non-linéarités dans l'observateur doit être choisi au moins supérieur à la valeur absolue maximale des bornes des intervalles précédents, i.e. $R > \rho_M = 127,56$. Une règle générale qui peut être adoptée pour choisir

R est de le fixer à une valeur arbitrairement grande. En effet, les résultats de simulation qui sont présentés plus loin ont été obtenus en fixant $R = 1000$. D'autres simulations avec d'autres valeurs de $R (> \rho_M)$ ont été réalisées et elles ont conduit aux mêmes résultats.

La valeur de θ a été fixée à 150, ν à 0.1 et les coefficients γ_i pour $i = 1, \dots, 6$ sont choisis tels que les pôles de la matrice \bar{A}_6 soient situés en -1 . Les valeurs choisies des λ_i satisfont au critère de forte stabilité par rapport à A_6 . En d'autres termes, nous avons adopté l'approche 1 décrite précédemment pour satisfaire le critère de stabilité forte.

A titre de comparaison, un SHGO sous la forme (2.24) a été également conçu pour le système (2.121) et il a été simulé avec un gain $\Gamma = [4 \ 6 \ 4 \ 1]^T$ de telle sorte que toutes les valeurs propres de la partie linéaire de l'observateur soient situées en (-1) . La même valeur de $\theta (= 150)$ a également été utilisée.

Les estimations des états du système fournies par le NPFHGO sont données dans la figure 2.1 où elles sont comparées à leurs vraies valeurs (sans bruit) issues de la simulation du modèle. Ces estimations filtrées et ne comportant pas de pics confirment les propriétés décrites du NPFHGO en terme de réduction significative du phénomène de peaking et en termes d'une nette amélioration de la sensibilité de l'observateur aux bruits de mesure. À titre de comparaison, les estimations fournies par le SHGO ont été reproduites dans la figure 2.4 où elles sont comparées à leurs vraies valeurs (sans bruit) issues de la simulation du modèle. Les estimations obtenues mettent bien en évidence le phénomène de peaking du SHGO durant le régime transitoire ainsi que sa sensibilité aux bruits de mesure.

Toujours dans un but de comparaison, nous avons reporté dans le tableau (2.1) la norme infinie de chaque composante de l'erreur d'observation, notée $\|\tilde{x}_i\|_\infty, i = 1, \dots, 4$, relative à chacun des deux observateurs. Encore une fois, les résultats obtenus confirment le gain en performance tant au niveau de peaking qu'au niveau de la sensibilité aux bruits de mesure obtenue par la considération du NPFHGO.

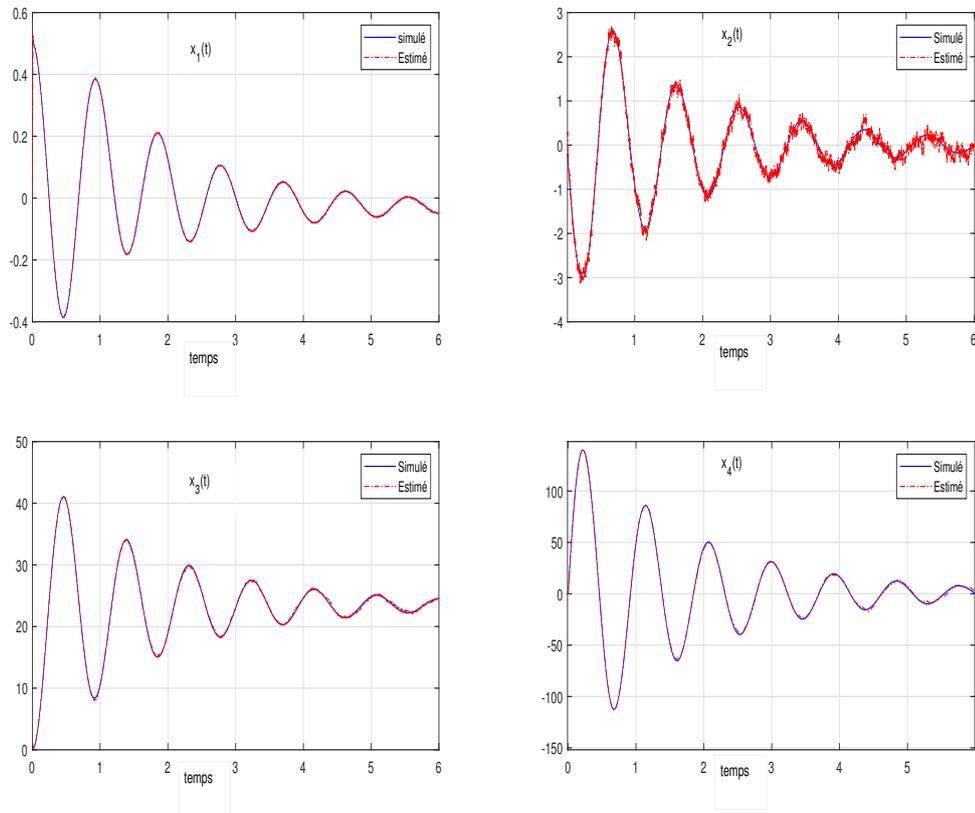


FIGURE 2.3 – Estimation de l'état avec le NPFHGO.

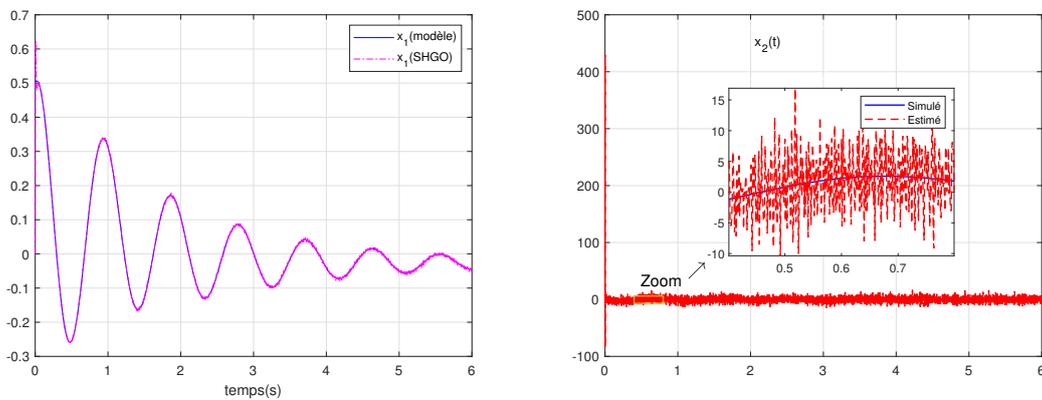


FIGURE 2.4 – Estimation des états x_1 et x_2 avec SHGO

	<i>NPFHGO</i>	<i>SHGO</i>
$\ \tilde{x}_1\ _\infty$	0.5	0.5
$\ \tilde{x}_2\ _\infty$	0.5	92.9466
$\ \tilde{x}_3\ _\infty$	0.6296	$8.14 \cdot 10^3$
$\ \tilde{x}_4\ _\infty$	4.6858	$2.82 \cdot 10^5$

TABLE 2.1 – Comparaison du phénomène de peaking entre NPFHGO et SHGO

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une resynthèse de l'observateur de type grand gain standard (SHGO) pour remédier à ses problèmes intrinsèques, à savoir le phénomène de peaking au cours du régime transitoire et sa sensibilité aux signaux à hautes fréquences. La resynthèse a été réalisée en trois étapes. La première étape a consisté à proposer un observateur, NPHGO, ayant une structure très similaire à celle du SHGO et dont le terme de correction s'exprime à l'aide de fonctions de saturation imbriquées. Après un régime transitoire, toutes les fonctions de saturation sont désaturées et la structure de l'observateur proposé devient similaire à celle du SHGO. L'observateur ainsi proposé, i.e. le NPHGO, a permis de réduire de manière significative le phénomène de peaking. Dans la deuxième étape et pour faire face au problème de sensibilité aux bruits de mesure, le système original a été augmenté par une intégrateur multiple d'ordre m de la sortie et un observateur de type SHGO, appelé FHGO, a été synthétisé pour le système augmenté. L'erreur d'observation de la sortie du FHGO est la différence entre l'intégrateur d'ordre m de la sortie d'une part et son estimée d'autre part. Ainsi, les m premières équations de l'observateur FHGO agissent comme un filtre linéaire d'ordre m dont l'entrée est l'erreur d'observation de sortie bruitée et dont la sortie est égale à une version filtrée qui est utilisée dans le terme de correction de l'observateur. Cette structure a permis au FHGO d'avoir des propriétés de filtrage intrinsèques. Dans la troisième et dernière étape de resynthèse, la procédure de saturation considérée dans la première étape pour générer le NPHGO à partir du SHGO a été appliquée au FHGO permettant ainsi de générer une version de cet observateur, appelée NPFHGO, qui hérite à la fois des propriétés du NPHGO et du FHGO. En d'autres termes, le NPFHGO permet de réduire de manière significative le phénomène de peaking tout en possédant des propriétés intrinsèques de filtrage. Les performances de l'observateur NPFHGO, ont été illustrées à travers un exemple d'ordre 4 traitant d'un bras de robot. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux issus de la simulation d'un observateur de type SHGO et ils ont clairement confirmé les propriétés du NPFHGO aussi bien en termes de réduction significative du phénomène de peaking qu'en termes d'une nette amélioration de la sensibilité de l'observateur aux bruits de mesure.

Chapitre 3

Application de l'observateur NPHGO au moteur asynchrone triphasé

Sommaire

3.1	Introduction	70
3.2	Modèle dynamique du moteur asynchrone triphasé	71
3.2.1	Équations électriques et mécaniques	71
3.2.2	Représentation d'état	73
3.3	Observabilité du moteur asynchrone triphasé	77
3.4	Synthèse d'observateur avec des mesures échantillonnées . . .	80
3.5	Estimation des états du moteur asynchrone triphasé	82
3.5.1	Reconstruction des états de la MAS avec vitesse constante . . .	83
3.5.2	Reconstruction des états de la MAS avec vitesse variable	86
3.6	Conclusion	86

3.1 Introduction

Depuis plusieurs décennies, la machine asynchrone triphasé (MAS) a envahi le milieu industriel grâce à ses avantages indéniables par rapport à la machine à courant continu en matière de robustesse, faible coût d'achat, facilité d'entretien, rendement plus élevé, etc. Ainsi, le variateur de vitesse asynchrone est devenu un actionneur électrique fréquemment utilisé dans plusieurs domaines d'application. On trouve au moins 80% des procédés industriels utilisant ces machines, notamment dans diverses applications (produits ménagers, grues de levage, convoyeurs à rouleaux, véhicules électriques, ...). Cependant, un contrôle précis de ces machines reste un défi en raison du modèle non linéaire fortement couplé qu'elles possèdent, l'existence des variables non mesurables côté rotor et aussi à cause de la présence des incertitudes et de perturbations [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57]. Le problème devient encore plus difficile si l'on considère également l'indisponibilité de capteurs de position/vitesse [58, 59, 60, 61]. Il est bien connu que l'élimination de l'encodeur du rotor est généralement recommandée car elle permet une minimisation du coût d'installation et une réduction de la sensibilité aux bruits électromagnétiques, et par la suite une amélioration de la fiabilité. Ainsi, plusieurs travaux se sont focalisés sur le remplacement de l'encodeur du rotor par un schéma d'observation pour produire des entraînements sans capteur qui préservent les mêmes performances que celles en présence de ce dernier [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68].

L'approche d'observation de type grand gain standard (SHGO) apporte un outil utile pour l'estimation des variables de la machine asynchrone, que ce soit à des fins de contrôle ou de diagnostic [69, 70]. Son succès est relié principalement à sa simplicité de réglage (avec un seul paramètre de conception) et à sa capacité à ajuster la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation lorsque les mesures de sortie sont exemptes de bruits. Des études pertinentes et plusieurs approches récentes sont utilisées pour le contrôle sans capteur de vitesse des machines asynchrones en utilisant l'observateur à grand gain. Parmi elles, la méthode de commande proposée dans [71] permet d'estimer la vitesse initiale sans dépassement avec des performances dynamiques et de robustesse vis-à-vis à la variation de la constante de temps du rotor et aux perturbations. Dans [64], l'observateur de vitesse/flux est combiné avec un contrôleur ayant une structure cascade qui possède trois boucles imbriquées en vue d'améliorer les performances dynamiques et la robustesse face à des incertitudes paramétriques. Plus récemment un observateur adaptatif dont le gain est issu de la résolution d'une équation différentielle de Lyapunov est proposé dans [72]. A partir seulement des mesures des courants statoriques, une estimation de la vitesse angulaire, du couple de charge et du flux rotorique, ainsi qu'une identification de l'inductance et la résistance du rotor ont été établies au détriment d'un nombre important d'ODEs à résoudre pour chaque itération.

Malgré son importance pour la préservation des performances de poursuite dans le régime transitoire, les résultats relatifs à la conception de lois de commande sans capteur de vitesse qui tiennent compte de l'inhibition des pics indésirables dans la conception de l'observateur sont encore très peu nombreux dans la littérature. A notre connaissance, la seule étude concerne les travaux récents donnés dans [59], où une version améliorée des observateurs à grand gain communs est proposée en vue de contourner le problème de peaking. Dans ce cas, le gain de l'observateur, qui dépend d'un paramètre de conception

issue de la résolution en ligne de l'équation de Riccati, garantit un meilleur compromis entre la convergence rapide de l'erreur d'estimation et la rejection du bruit. Les auteurs montrent que l'adaptation du gain de correction induit une faible erreur d'estimation pendant le régime transitoire et empêche ainsi les états du système à présenter des forts pics. Dans ce contexte, nous proposons d'appliquer, les algorithmes d'observation conçus dans le chapitre 2, sur le modèle non linéaire MIMO de la machine asynchrone triphasée en vue d'obtenir une estimation rapide et précise des états sans avoir des pics importants au cours du régime transitoire.

3.2 Modèle dynamique du moteur asynchrone triphasé

La machine asynchrone triphasée est constituée d'un stator (inducteur) et d'un rotor (induit). Le stator est un bobinage triphasé logé dans des encoches et relié à la source d'alimentation : c'est la partie statique de la machine qui admet une forme cylindrique. Alors que le rotor présente la partie tournante et il ne possède aucune liaison électrique avec le stator. Deux types de rotor peuvent être distingués : rotor à cage d'écureuil et rotor bobiné. En effet, le premier est constitué de barres conductrices (cuivre ou aluminium) formant un tambour. Les extrémités de ces barres sont réunies par deux couronnes également conductrices. Ce rotor non connecté est en court-circuit, ce qui signifie que le moteur est dépourvu de collecteur et de ballais. Cependant, le deuxième type de rotor est relié à l'extérieur via un collecteur à trois bagues, et court-circuité en fonctionnement normal. Ainsi, la modification des propriétés électromécaniques de la machine est effectuée à travers ce dispositif.

L'inducteur engendre un champ magnétique tournant à la pulsation de synchronisme ω_s . En conséquence, les courants induits créés au niveau du rotor, siège de l'induction électromagnétique, ont la même pulsation. Selon la loi de Lenz, ces courants tendent à s'opposer à la variation de flux et entraînent la mise en rotation du rotor à une vitesse ω . Les courants rotoriques ont une pulsation inférieure à celle de synchronisme : $\omega_r = \omega_s - p\omega$.

3.2.1 Équations électriques et mécaniques

Pour illustrer les équations électriques et mécaniques de la machine asynchrone, certaines hypothèses simplificatrices sont généralement admises :

- La force magnétomotrice créée au niveau de chacune des phases, aussi bien du côté stator que du côté rotor est de répartition spatiale sinusoïdale.
- L'entrefer est d'épaisseur uniforme et l'effet d'encoche est négligé.
- La saturation du circuit magnétique, l'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables.
- Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température et on néglige l'effet de peau.

3.2.1.1 Équations électriques

Les équations différentielles matricielles reliant les tensions triphasées du stator ($U_{sa,b,c}$), les courants statoriques ($I_{sa,b,c}$), les courants rotoriques ($I_{ra,b,c}$) et les flux magnétiques ($\psi_{ra,b,c}, \psi_{sa,b,c}$) s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} 0 &= R_r I_{ra,b,c} + \frac{d(\psi_{ra,b,c})}{dt} \\ U_{sa,b,c} &= R_s I_{sa,b,c} + \frac{d(\psi_{sa,b,c})}{dt} \end{cases} \quad (3.1)$$

où R_r et R_s désignent respectivement la résistance rotorique et statorique et les indices r et s font référence au rotor et au stator.

La relation matricielle entre les flux magnétiques et les courants s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \psi_{sa,b,c} \\ \psi_{ra,b,c} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} I_{sa,b,c} \\ I_{ra,b,c} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où Λ représente la matrice symétrique des inductances et elle s'exprime comme suit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} [l_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [l_r] \end{pmatrix},$$

avec

$$[l_s] = \begin{pmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{pmatrix}, [l_r] = \begin{pmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{pmatrix}, [M_{sr}] = [M_{rs}] = \begin{pmatrix} M_1 & M_3 & M_2 \\ M_2 & M_1 & M_3 \\ M_3 & M_2 & M_1 \end{pmatrix},$$

$$(M_1 = M \cos(\omega_r t), M_2 = M \cos(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}), M_3 = M \cos(\omega_r t - \frac{4\pi}{3})),$$

et

- M_s : inductance mutuelle entre deux phases du stator.
- M_r : inductance mutuelle entre deux phases du rotor.
- M : valeur maximale de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor.

3.2.1.2 Équations mécaniques

Afin d'avoir un modèle complet du système, on applique le principe fondamental de la dynamique au rotor de la machine. L'équation mécanique gouvernant le mouvement de ce dernier est la suivante :

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_{em} - T_L - f_v \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{C_{em}}{J} - \frac{f_v}{J} \omega - \frac{1}{J} T_L, \quad (3.3)$$

avec :

- ω : vitesse mécanique de rotation de rotor,
- J : inertie totale de système,
- T_L : couple résistant,
- f_v : coefficient du frottement visqueux,

- C_{em} : couple électromagnétique.

Le couple électromagnétique est donné par :

$$C_{em} = pI_r^T \frac{d}{d\theta} [M_{rs}] I_s. \quad (3.4)$$

3.2.2 Représentation d'état

Pour avoir un modèle de commande de la machine asynchrone triphasée, nous pouvons transformer ses équations différentielles du repère triphasé vers un repère diphasé fixe (Repère de Concordia). Dans ce qui suit nous rappelons cette transformation et nous exposons un modèle dynamique réduit qui servira à la synthèse de l'observateur.

3.2.2.1 Transformation triphasé - diphasé

Cette transformation fait appel aux grandeurs physiques de la machine asynchrone telles que les courants, les tensions et les flux. Un système triphasé équilibré (x_a, x_b, x_c) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_a(t) = A \cos(\omega t) \\ x_b(t) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ x_c(t) = A \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (3.5)$$

Le fait de dire que le système (3.5) est équilibré, implique qu'à chaque instant on a

$$x_a(t) + x_b(t) + x_c(t) = 0. \quad (3.6)$$

Sachant que la matrice de Concordia (T_{32}) admet la forme suivante :

$$T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

nous aboutissons à la représentation diphasée (x_α, x_β) comme suit :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = T_{32}^T \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Une représentation triphasée (x_a, x_b, x_c) peut être générée à partir de la représentation diphasée (x_α, x_β) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = T_{32} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

avec $T_{32}^T T_{32} = I_3$, où I_3 est la matrice identité de dimension 3×3 .

3.2.2.2 Modèle d'état non linéaire de la machine asynchrone dans le repère fixe (α, β)

Ce modèle est obtenu moyennant l'application de la transformation de Concordia (3.7). Cette transformation consiste à réécrire les équations des grandeurs physiques de la machine asynchrone (tension, courant et flux magnétiques) dans le repère fixe diphasé (α, β) . L'application de cette transformation aux grandeurs statoriques triphasées, donne l'équation suivante :

$$\begin{cases} x_{sa} = A \cos(\omega_s t) \\ x_{sb} = A \cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}) \\ x_{sc} = A \cos(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow X_{s_{abc}} = T_{32} X_{s_{\alpha\beta}}. \quad (3.10)$$

En adoptant la même transformation pour les grandeurs rotoriques triphasées, nous aboutissons à :

$$\begin{cases} x_{ra} = A \cos(\omega_r t) \\ x_{rb} = A \cos(\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) \\ x_{rc} = A \cos(\omega_r t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow X_{r_{abc}} = T_{32} P(\omega_r t) X_{r_{\alpha\beta}}. \quad (3.11)$$

Or, les équations électriques (3.1) deviennent dans le repère triphasé (a, b, c) sous la forme développée suivante

$$\begin{cases} 0 = R_r \begin{pmatrix} I_{ra} \\ I_{rb} \\ I_{rc} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{rc} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_{sa} \\ U_{sb} \\ U_{sc} \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} I_{sa} \\ I_{sb} \\ I_{sc} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.12)$$

ce qui se traduit par les relations suivantes dans le repère fixe diphasé (α, β)

$$\begin{cases} 0 = R_r T_{32} P(\omega_r t) \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left(T_{32} P(\omega_r t) \begin{pmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{pmatrix} \right) \\ T_{32} \begin{pmatrix} U_{s\alpha} \\ U_{s\beta} \end{pmatrix} = R_s T_{32} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left(T_{32} \begin{pmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{pmatrix} \right). \end{cases} \quad (3.13)$$

Par ailleurs, nous avons les propriétés suivantes des matrices de rotation

$$\begin{cases} P(\theta_1)P(\theta_2) = P(\theta_1 + \theta_2), \\ \frac{d}{dt} (P(\theta_1(t))) = \frac{d(\theta_1(t))}{dt} P(\theta_1(t) + \frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (3.14)$$

D'après (3.13) et (3.14), il en ressort :

$$\begin{cases} 0 &= R_r \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + \omega_r \begin{pmatrix} \psi_{r\alpha} \\ -\psi_{r\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\psi}_{r\alpha} \\ \dot{\psi}_{r\beta} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} U_{s\alpha} \\ U_{s\beta} \end{pmatrix} &= R_s \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\psi}_{s\alpha} \\ \dot{\psi}_{s\beta} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.15)$$

En adoptant la même procédure pour le flux (3.2), nous aboutissons à

$$\begin{cases} T_{32}P(\omega_r t) \begin{pmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{pmatrix} &= L_r T_{32}P(\omega_r t) \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + M T_{32} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix}, \\ T_{32} \begin{pmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{pmatrix} &= M T_{32}P(\omega_r t) \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + L_s T_{32} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.16)$$

ce qui permet d'avoir

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\beta} \end{pmatrix} &= L_r \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \psi_{s\alpha} \\ \psi_{s\beta} \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + L_s \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Les équations électriques du modèle d'état non linéaire de la MAS sont obtenues en dérivant le système (3.17), puis en y substituant (3.15).

Par ailleurs, l'équation différentielle de la vitesse mécanique (3.3) peut être réécrite dans le repère de Concordia comme suit :

$$\dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r}(\psi_{r\alpha}I_{s\beta} - \psi_{r\beta}I_{s\alpha}) - \frac{f_v}{J}\omega - \frac{1}{J}T_L. \quad (3.18)$$

En résumé et en tenant compte de l'équation mécanique (3.18), la représentation du modèle dans le référentiel (α, β) fixe, prend la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{I} = KA(\omega)\psi - \gamma I + \frac{1}{\sigma L_s}u \\ \dot{\psi} = -A(\omega)\psi + \frac{M}{T_r}I \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r}I^T J_2 \psi - \frac{1}{J}T_L \\ \dot{T}_L = \varepsilon_{T_L} \\ y(t_k) = I(t_k) \end{cases} \quad (3.19)$$

où

$u = \begin{pmatrix} u_{\alpha_s} \\ u_{\beta_s} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} I_{\alpha_s} \\ I_{\beta_s} \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha_r} \\ \psi_{\beta_s} \end{pmatrix}$, w et T_L désignent respectivement le vecteur de tension statorique, le vecteur de courant statorique, le vecteur de flux rotorique, la vitesse angulaire du rotor et le couple de charge, ε_{T_L} est une fonction constante par morceaux, inconnue ; p et J sont respectivement le nombre de paire de pôles du stator et le moment d'inertie, la matrice carrée $A(\omega)$ s'exprime comme suit

$$A(\omega) = \frac{1}{T_r} I_2 - p\omega J_2, \text{ où } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_2 \text{ est la matrice identité d'ordre 2.}$$

Les autres paramètres se définissent comme suit

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_r L_s}, \quad T_r = \frac{R_r}{L_r}, \quad K = \frac{M}{\sigma L_r L_s} \text{ et } \gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2},$$

où R_s , R_r , L_s , L_r et M désignent les résistances, les inductances statoriques (resp. rotoriques) par phase et l'inductance mutuelle.

Le système (3.19) appartient à la classe des systèmes non linéaires MIMO suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + \bar{B}\varepsilon_{T_L}(t) \\ y = \bar{C}x \end{cases} \quad (3.20)$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\text{avec } x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = I, \quad x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \psi \text{ et } x^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ T_L \end{pmatrix},$$

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} KA(x_1^3)x^2 - \sigma x^1 + \frac{1}{\gamma L_s}u \\ -A(x_1^3)x^2 + \frac{M}{T_r}x^1 \\ \frac{pM}{JL_r}x_1^T J_2 x^2 - \frac{1}{J}x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0_{1 \times 5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{C} = (I_2 \quad 0_2 \quad 0_2). \quad (3.23)$$

Ce modèle sera considéré dans la synthèse d'un observateur à grand gain avec inhibition du phénomène de peaking pour les moteurs asynchrones triphasés, et ceci en utilisant seulement les courants statoriques (sans capteur mécanique).

Néanmoins, avant toute procédure de synthèse d'observateurs, il est nécessaire d'analyser l'observabilité de ce système.

3.3 Observabilité du moteur asynchrone triphasé

L'étude d'observabilité des moteurs asynchrones triphasés a été largement traité dans la littérature dans le cas de présence des informations sur la vitesse et dans le cas où les mesures de la vitesse sont indisponibles. Pour le cas avec mesure de vitesse (outre les courants statoriques), aucun problème ne se pose et le système est toujours observable. Cependant, dans le cas sans mesure de vitesse, l'étude d'observabilité nécessite une attention particulière. Pour établir une condition suffisante sur l'observabilité du système (3.20), nous transformons, dans un premier temps, le modèle du moteur en la forme canonique d'observabilité, puis nous donnons la condition qui garantit que cette transformation d'état est un difféomorphisme.

Considérons la transformation d'état suivante [70]

$$\Upsilon : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

$$x \mapsto z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} = \Upsilon(x) = \begin{pmatrix} \Upsilon^1(x) \\ \Upsilon^2(x) \\ \Upsilon^3(x) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned} z^1 &= \Upsilon^1(x) = x^1, \\ z^2 &= \Upsilon^2(x) = KA(x_1^3)x^2, \\ z^3 &= \Upsilon^3(x) = -pKJ_2(\dot{x}_1^3x^2 + x_1^3\dot{x}^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En dérivant par rapport au temps les variables z_1 , z^2 et z_3 , nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= KA(x_1^3)x^2 - \gamma z^1 + \frac{1}{\sigma L_s}u \\ &= z^2 - \gamma z^1 + \frac{1}{\sigma L_s}u, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}^2 &= -pKJ_2(\dot{x}_1^3x^2 + x_1^3\dot{x}^2) + \frac{1}{T_r}(-z^2 + \frac{MK}{T_r}z^1) \\ &= z^3 + \varphi^2(z^1, z^2), \end{aligned} \quad (3.27)$$

et

$$\dot{z}_3 = \frac{\partial \Upsilon^3(x)}{\partial x^1} \dot{x}^1 + \frac{\partial \Upsilon^3(x)}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial \Upsilon^3(x)}{\partial x^3} \dot{x}^3. \quad (3.28)$$

Cette transformation rend le système (3.20) sous la forme canonique d'observabilité. Ce dernier peut être ré-écrit dans les coordonnées z comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} &= \mathcal{A}_3 z + \varphi(z, u) + \mathcal{B}_3 b(z) \varepsilon_{TL}(t) \\ y &= \mathcal{C}_3 z = x^1, \end{cases} \quad (3.29)$$

où

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 2} & I_4 \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 4} \end{pmatrix}, \mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\varphi(z, u) = \begin{pmatrix} \varphi^1(z^1, u) = -\gamma z^1 + \frac{1}{\sigma L_s}u \\ \varphi^2(z^1, z^2, u) = \frac{1}{T_r}(-z^2 + z^1 \frac{MK}{T_r}) \\ \varphi^3(z, u) \triangleq \frac{\partial \Upsilon^3(x)}{\partial x^1} \dot{x}^1 + \frac{\partial \Upsilon^3(x)}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial \Upsilon^3(x)}{\partial x^3} \dot{x}^3 \end{pmatrix}, b(z) = \frac{pK}{J} J_2 x^2. \quad (3.31)$$

Comme le système (3.29) est observable pour toute entrée, alors le système (3.20) est observable pour toute entrée si et seulement si la transformation d'état Υ est un difféomorphisme. Autrement dit le système (3.20) est observable si la matrice jacobienne de la transformation d'état Υ est inversible. En se référant à (3.25) la matrice jacobienne peut être exprimée comme suit

$$J_{\Upsilon}(x) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \frac{\partial \Upsilon^2}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial \Upsilon^2}{\partial x^3}(x) \\ \frac{\partial \Upsilon^3}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial \Upsilon^3}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial \Upsilon^3}{\partial x^3}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Cette matrice est du rang plein si et seulement si la sous matrice suivante est de rang plein

$$L_{\Upsilon}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Upsilon^2}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial \Upsilon^2}{\partial x^3}(x) \\ \frac{\partial \Upsilon^3}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial \Upsilon^3}{\partial x^3}(x) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

où

$$\begin{aligned} L_1(x) &= KA(x_1^3), \\ L_2(x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Upsilon^2}{\partial x_1^3}(x) & \frac{\partial \Upsilon^2}{\partial x_2^3}(x) \end{bmatrix} = [-pK J_2 x^2 \quad 0_{2 \times 1}], \\ L_3(x) &= -pK J_2 (\dot{x}_1^3 I_2 + \frac{pM}{J L_r} x^2 x^{1T} J_2) + pK J_2 x_1^3 A(x_1^3), \\ L_4(x) &= -pK J_2 \begin{bmatrix} \dot{x}^2 + p x_1^3 J_2 x^2 & -\frac{1}{J} x^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme le déterminant de la matrice $A(x_1^3)$ est non nul, alors la matrice L_1 est inversible. nous pouvons alors écrire la sous matrice L_{Υ} comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure L_s et d'une matrice triangulaire inférieure L_i :

$$L_{\Upsilon}(x) = L_i(x) L_s(x), \quad (3.34)$$

où :

$$L_i = \begin{bmatrix} I_2 & 0_2 \\ L_3(x) L_1^{-1}(x) & L_4(x) - L_3(x) L_1^{-1}(x) L_2(x) \end{bmatrix}, L_s = \begin{bmatrix} L_1(x) & L_2(x) \\ 0_2 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Comme la matrice $L_1(x)$ est inversible, alors la matrice $L_{\Upsilon}(x)$ est de rang plein si et seulement si la matrice triangulaire inférieure L_i est de plein rang. Plus précisément, pour que le système (3.20) soit observable, il faut que la matrice

$$L_{i2} \triangleq L_4(x) - L_3(x) L_1^{-1}(x) L_2(x) \quad (3.36)$$

soit de rang plein. Autrement dit, le système (3.20) est inversible si et seulement si les colonnes de la matrice L_{i2} sont linéairement indépendantes.

Il est clair que L_{i2} est une matrice à deux colonnes, soit $L_{i2} \triangleq [C_1 \ C_2]$ avec

$$\begin{aligned}
C_1 &= -pK J_2 \left(\dot{x}^2 + p x_1^3 J_2 x^2 + \left(\dot{x}_1^3 I_2 + \frac{pM}{JL_r} x^2 x^{1T} J_2 - x_1^3 A(x_1^3) \right) A^{-1}(x_1^3) p J_2 x^2 \right) \\
&= -pK J_2 \left(\dot{x}^2 + p x_1^3 J_2 x^2 + \left(\dot{x}_1^3 A^{-1}(x_1^3) + \frac{pM}{JL_r} x^2 x^{1T} J_2 A^{-1}(x_1^3) - x_1^3 I_2 \right) p J_2 x^2 \right) \\
&= -pK J_2 \left(\dot{x}^2 + \left(\dot{x}_1^3 A^{-1}(x_1^3) + \frac{pM}{JL_r} x^2 x^{1T} J_2 A^{-1}(x_1^3) \right) p J_2 x^2 \right) \\
&\triangleq -pK J_2 N
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$C_2 = \frac{pK}{J} J_2 x^2. \tag{3.38}$$

Comme $\det(L_{i2}) = -(pK)^2 x^{2T} J_2 N$, alors L_{i2} est inversible si et seulement si $x^{2T} J_2 N \neq 0$. Or,

$$\begin{aligned}
x^{2T} J_2 N &= x^{2T} J_2 \left(\dot{x}^2 + \left(\dot{x}_1^3 A^{-1}(x_1^3) + \frac{pM}{JL_r} x^2 x^{1T} J_2 A^{-1}(x_1^3) \right) p J_2 x^2 \right) \\
&= x^{2T} J_2 \dot{x}^2 + p x^{2T} J_2 \dot{x}_1^3 A^{-1}(x_1^3) J_2 x^2 + \frac{pM}{JL_r} x^{2T} J_2 x^2 x^{1T} J_2 A^{-1}(x_1^3) J_2 x^2.
\end{aligned}$$

Etant donné que $x^{2T} J_2 x^2 = 0$, il en ressort

$$\begin{aligned}
x^{2T} J_2 N &= x^{2T} J_2 \dot{x}^2 + p \dot{x}_1^3 x^{2T} J_2 A^{-1}(x_1^3) J_2 x^2 \\
&= x^{2T} J_2 \dot{x}^2 + p \dot{x}_1^3 \frac{1}{(p x_1^3)^2 + (\frac{1}{T_r})^2} x^{2T} J_2 A^{-1} \\
&= x^{2T} J_2 \dot{x}^2 - \frac{p \dot{x}_1^3}{T_r ((p x_1^3)^2 + (\frac{1}{T_r})^2)} x^{2T} x^2.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ainsi, pour que le transformation d'état Υ soit un difféomorphisme il faut que

$$x^{2T} J_2 \dot{x}^2 - \frac{p \dot{x}_1^3}{T_r ((p x_1^3)^2 + (\frac{1}{T_r})^2)} x^{2T} x^2 \neq 0, \tag{3.40}$$

ou autrement dit, le système (3.19) est observable si

$$\psi^T J_2 \dot{\psi} - \frac{p \dot{w}}{T_r ((p w)^2 + (\frac{1}{T_r})^2)} \psi^T \psi \neq 0. \tag{3.41}$$

Cette condition (3.41) peut s'exprimer en fonction de la phase du flux rotorique définie par $v = \arctan \left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \right)$ comme suit

$$\dot{v} \neq \frac{p \dot{w}}{T_r ((p w)^2 + (\frac{1}{T_r})^2)}, \tag{3.42}$$

avec $\dot{\psi} = \frac{\psi^T J_2 \dot{\psi}}{\psi^T \psi}$.

En Prenant l'intégrale des deux membres de l'équation (3.42), la condition (3.38) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\arctan\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right) - \arctan(pT_r w) \text{ n'est pas constante} \quad (3.43)$$

Notez que bien que la démarche adoptée ici diffère de celle adoptée dans [73], nous aboutissons à la même condition d'observabilité (3.43).

En tenant compte de cette condition, nous abordons dans ce qui suit la synthèse d'observateurs pour la MAS.

3.4 Synthèse d'observateur avec des mesures échantillonnées

Étant donné que les mesures du courant statoriques ne sont disponibles qu'aux instants d'échantillonnage, nous proposons dans cette partie une extension de la procédure d'observation avec inhibition du phénomène de peaking dans le cas de mesures échantillonnées. Nous rappelons que l'approche du HGO continu-discret a été exposée au chapitre 1. Dans ce volet, en s'inspirant du développement donné dans le chapitre 2, nous proposons une resynthèse de l'observateur à grand gain continu-discret pour qu'il soit capable de contourner le phénomène de peaking.

Rappelons que la classe des systèmes non linéaires considérée s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \mathcal{A}_q z(t) + \varphi(u(t), z(t)) + \mathcal{B}_q \varepsilon(t) \\ y(t_k) = \mathcal{C}_q z(t_k) \end{cases} \quad (3.44)$$

avec $z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $z^k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_p^k \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots, q$, où les matrices \mathcal{A}_q , \mathcal{B}_q et \mathcal{C}_q sont les

mêmes que dans le système (1.9).

Supposons que le système (3.44) satisfait les hypothèses **H.1.1**, **H.1.2** et **H.1.3** considérées pour le système (1.9). Alors, l'observateur continu-discret CD-SHGO correspondant est donné, pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$ par :

$$\dot{\hat{z}}(t) = \mathcal{A}_q \hat{z}(t) + \varphi(u(t), \hat{z}(t)) - \theta \Delta_{q,\theta}^{-1} e^{-\theta g_1(t-t_k)} \mathcal{G}_q (\mathcal{C}_q \hat{z}(t_k) - y(t_k)), \quad (3.45)$$

avec $\theta > 1$ et $\Delta_{q,\theta}$ est une matrice diagonale par bloc définie comme suit :

$$\Delta_{q,\theta} = \text{diag} \left(I_p, \frac{I_p}{\theta}, \dots, \frac{I_p}{\theta^{q-1}} \right) \quad (3.46)$$

et $\mathcal{G}_q = \begin{pmatrix} g_1 I_p \\ \vdots \\ g_q I_p \end{pmatrix}$ tel que $\mathcal{A}_q - \mathcal{G}_q \mathcal{C}_q$ est Hurwitz.

Il a été montré que chaque composant du vecteur de l'erreur d'observation est bornée à

travers l'inégalité suivante :

$$\|\tilde{z}^i\| \leq \sigma_P \left(\theta^{i-1} e^{-\eta\theta(t-t_0)} \|\tilde{z}(t_0)\| + \frac{\tau_M \delta_\varepsilon (2 - e^{-\eta\theta\tau_m})}{\theta^{q+1-i} (1 - e^{-\eta\theta\tau_m})} \right), \quad (3.47)$$

Au cours du régime transitoire (pour $t \simeq t_0$), avec des valeurs relativement élevées du paramètre de synthèse θ , il est clair que des fortes fluctuations peuvent prendre lieu au niveau de l'erreur d'estimation. Un tel comportement provoque une dégradation des performances de poursuite et peut même conduire à l'instabilité [19].

En suivant la même démarche que celle utilisée dans le chapitre 2 (cas de sortie disponible en temps continu), nous proposons l'observateur à grand gain continu-discret permettant l'inhibition du phénomène de peaking (qu'on note CD-NPHGO) et qui s'écrit sous la forme suivante

$$\dot{\hat{z}} = \mathcal{A}_q(\hat{z}, u) + \varphi(u, \hat{z}) - \theta e^{-g_1\theta(t-t_k)} H(\tilde{z}^1(t_k)), \quad (3.48)$$

où les $H_i(\tilde{z}^1(t_k)) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, q\}$ sont définis comme suit

$$\begin{cases} H_1(\tilde{z}^1(t_k)) = \text{Sat}_\nu(g_1 \tilde{z}^1(t_k)), \\ H_i(\tilde{z}^1(t_k)) = \text{Sat}_\nu(\theta \frac{g_i}{g_{i-1}} H_{i-1}(\tilde{z}^1(t_k))) \text{ pour } i = 2, \dots, q, \end{cases} \quad (3.49)$$

où les $g_i, i = 1, \dots, q$ satisfont la condition de stabilité forte par rapport à \mathcal{A}_q donnée dans la définition 2.1, θ est un paramètre de synthèse qui est choisi suffisamment élevé, notamment pour avoir $\theta > \frac{g_{i-1}}{g_i}$ pour $i \in \{2, \dots, q\}$, $\nu > 0$ est aussi un paramètre de conception dont le choix est comme décrit dans le chapitre 2 et la fonction Sat_ν est définie comme suit :

$$\text{Sat}_\nu : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \nu \min(|x_1|, 1) \text{sign}(x_1) \\ \vdots \\ \nu \min(|x_p|, 1) \text{sign}(x_p) \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

D'après le théorème 2.1 et en tenant compte de l'expression de l'observateur synthétisé dans le chapitre 2 pour des sorties disponibles en temps continu (2.29), nous énonçons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *Considérons le système (3.44) soumis aux hypothèses **H.1.1**, **H.1.2** et **H.1.3** et l'observateur (3.48). Alors, chaque composante \tilde{z}^i pour, $i = 1, \dots, q$, de l'erreur d'observation satisfait à la propriété suivante :*

$\exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \exists t^* > 0; \exists \alpha_\theta > 0; \forall u \in U; \forall \hat{z}(t_0) \in Z$; on a :

$$(i) \quad \forall 0 \leq t < t^*, \|\tilde{z}^i(t)\| \leq \alpha_\theta \quad (3.51)$$

$$(ii) \quad \forall t > t^*, \|\tilde{z}^i(t_k)\| \leq \min \left\{ \alpha_\theta, \sigma_P \theta^{i-1} \left(T(\theta) \alpha_\theta + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta^q} \tau_M N(\theta) \right) \right\} \quad (3.52)$$

avec $T(\theta) = e^{-\eta\theta(\tau_M)(t-t_0)}$ et $N(\theta) = 1 + \frac{1}{1 - e^{-\eta\theta(\tau_M)\tau_m}}$ où $\eta\theta(\tau_M)$ est défini par (1.22), β et σ_P ont la même signification que dans la borne (1.16), τ_m et τ_M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la période d'échantillonnage telles que définies par (1.18).

Remarque 3.1 *La démonstration de convergence de l'erreur d'observation s'effectue d'une façon similaire à celle du cas continu. En effet, nous pouvons remarquer que les cinq propositions données dans le chapitre 2 sont valables ici et mènent au corollaire précédent.*

Remarque 3.2 *L'item (i) du Corollaire 3.1, résume les propriétés de l'observateur en régimes transitoires, où le vecteur d'erreur d'observation reste borné par α_θ , ce qui conduit à empêcher les forts dépassements. Quant au deuxième item (ii), il résume les propriétés de l'observateur en régime permanent, où le comportement de $\|\tilde{z}^i\|$ n'est pas affecté par les fonctions de saturation imbriquées, et pour $t > t^*$, les équations du CD-NPHGO (3.48) coïncident avec celles du CD-SHGO (3.45).*

3.5 Estimation des états du moteur asynchrone triphasé

L'estimation des variables d'état magnétiques et mécaniques des moteurs asynchrone triphasée est conditionnée par l'existence du difféomorphisme $\Upsilon(x(t))$ (eq 3.30) qui transforme le modèle du système initial (3.19) sous la forme observable (3.29). Nous supposons que la condition (3.43) est satisfaisante, c-à-d $\Upsilon(x(t))$ est inversible. Autrement dit, nous désirons travailler dans un mode de fonctionnement assez loin de la zone d'inobservabilité décrite par (3.43) (cette zone ne peut avoir lieu que pour des très faibles vitesses).

L'observateur à grand gain standard continu-discret (CD-SHGO) correspondant à la forme observable (3.29) s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = \mathcal{A}_3 \hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) - \theta \Delta_{3,\theta}^{-1} e^{-\theta g_1(t-t_k)} \mathcal{G}_q (\mathcal{C}_q \hat{z}(t_k) - y(t_k)) \\ y(t_k) = \mathcal{C}_3 z(t_k) = z^1(t_k) \end{cases} \quad (3.53)$$

avec \mathcal{A}_3 et $\varphi(\hat{z}, u)$ sont comme donnés dans (3.30) et θ est le seul paramètre de synthèse de l'observateur.

Par ailleurs, l'observateur à grand gain continu discret avec inhibition du phénomène de peaking (CD-NPHGO) associé à cet observateur s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = \mathcal{A}_3 \hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) - \theta e^{-g_1 \theta(t-t_k)} H(\tilde{z}^1(t_k)) \\ y(t_k) = \mathcal{C}_3 z(t_k) = z^1(t_k) \end{cases} \quad (3.54)$$

avec $H_i(\tilde{z}^1(t_k)) \in \mathbb{R}^2, \forall i \in \{1, \dots, 3\}$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} H_1(\tilde{z}^1(t_k)) = \text{Sat}_\nu(g_1 \tilde{z}^1(t_k)) \\ H_i(\tilde{z}^1(t_k)) = \text{Sat}_\nu(\theta \frac{g_i}{g_{i-1}} H_{i-1}(\tilde{z}^1(t_k))) \text{ pour } i = \{2, 3\} \end{cases} \quad (3.55)$$

L'estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ de (3.20), peut s'obtenir à partir de $\hat{x}(t) = \Upsilon^{-1}(\hat{z}(t))$.

Nous pouvons exprimer l'équation de l'observateur directement dans les coordonnées originales en x . En effet, en tenant compte du fait que :

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \Upsilon(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} \quad (3.56)$$

l'équation de l'observateur dans les coordonnées originales s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \theta e^{-g_1\theta(t-t_k)} \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}(\hat{x}(t)) \right)^{-1} H(\tilde{x}^1(t_k)) \quad (3.57)$$

où la fonction $f(x, u)$ est donnée par (3.22).

3.5.1 Reconstruction des états de la MAS avec vitesse constante

Nous présentons dans ce paragraphe, les résultats de simulation dans le cas où le moteur asynchrone triphasé fonctionne avec sa vitesse nominale ($\omega = 157rd/s$). En vue d'évaluer la qualité d'estimation, nous proposons des variations importantes du couple résistant au cours du fonctionnement. Le scénario de variation imposé au couple de charge est composé de deux paliers qui sont appliqués aux instants $t_1 = 0.25s$ et $t_2 = 0.5s$ avec respectivement les valeurs suivantes : $T_{L_1} = 5Nm$ et $T_{L_2} = 9.5Nm$ (*charge nominale*), sachant que le moteur commence son fonctionnement avec un $T_{L_0} = 0Nm$ (fonctionnement à vide).

L'implémentation de l'algorithme SHGO nécessite le choix du paramètre de conception θ_1 qui peut être choisi suffisamment élevé pour assurer une estimation rapide de l'état. En effet, comme indiqué plus haut, les sorties sont supposées dépourvues de bruit de mesure. Nous avons sélectionné lors de la simulation $\theta_1 = 2000$. Étant donné que l'algorithme NPHGO possède la capacité d'éliminer les pics indésirables au niveau de l'erreur d'estimation, la valeur de son paramètre θ_1 peut être choisie plus élevée que celle utilisée dans la structure SHGO. Mais afin de pouvoir comparer les résultats issus de ces deux algorithmes (SHGO et NPHGO), nous conservons la même valeur de θ_1 . En outre, un autre paramètre doit être ajusté au niveau de l'algorithme NPHGO, qui est ν_1 . Il convient de noter que des grandes valeurs de cette constante ν_1 , n'éliminent pas les pics indésirables en regime transitoire (on aura le comportement que celui de l'algorithme SHGO). Cependant, des valeurs relativement faibles de ν_1 entraînent généralement un régime transitoire assez long. Ainsi, il est recommandé de choisir ν_1 de manière à ce que le produit de $\nu_1\theta_1$ ne soit pas assez élevé. Ceci peut être effectué par l'approche d'essai-erreur.

La figure (3.1), illustre la reconstruction des composants du courant statorique et des composants du flux rotorique, alors que les figures (3.2) et (3.3) représentent respectivement l'évolution temporelle de la vitesse mécanique et du couple de charge.

Notez que la première courbe de chaque légende représente l'état réel simulé (issu du modèle de simulation construit à partir des équations electro-mécaniques de la MAS) est qui n'est pas accessible à la mesure. Le deuxième signal des graphes (a) et (b) de la figure (3.1) fait référence à la mesure disponible et qui est utilisé comme entrée du système d'observation (i.e. le courant statorique échantillonné et bloqué). Par ailleurs, les deux dernières courbes des figures (3.1), (3.2) et (3.3), correspondent à des estimations issues de l'application des procédures SHGO et NPHGO respectivement.

Comme le montre la figure (3.1) les deux algorithmes d'observation présentent des résultats très similaires, avec une légère supériorité dans le cas du NPHGO dans l'estimation du flux. En effet, une reconstruction complète des courants statoriques entre les instants d'échantillonnage ainsi qu'une estimation parfaite des composantes non mesurables du

P_n	p	L_s	L_r	M	R_s	R_r	J
$1.5kw$	2	$.13H$	$.07H$	$.08H$	3.9Ω	3.9Ω	$.02kgm^2$

TABLE 3.1 – Paramètres du moteur asynchrone.

flux rotorique sont enregistrées. Rappelons que le CD-SHGO, comme prouvé expérimentalement dans [74], présente de meilleures performances que le SHGO dans le cas de sorties échantillonnées.

Sur la figure (3.2), il est distinguable que l'estimation de la vitesse mécanique est bien établie en régime permanent pour les deux structures d'observation. Néanmoins, au régime transitoire nous remarquons que l'algorithme SHGO présente de fortes ondulations, que ce soit au niveau de la vitesse angulaire (figure (3.2)) ou au niveau du couple résistant (figure (3.3)). La structure NPHGO présente, au contraire, des pics significativement réduits. Ce qui prouve l'apport lucide de la structure proposée dans la réduction du problème de peaking. De plus, même après la disparition des pics, il est clair que la vitesse angulaire et que le couple de charge sont plus raliés aux vrais valeurs dans le cas du NPHGO, alors que l'erreur d'estimation est biaisée dans le cas du SHGO.

En outre, à travers quelques indicateurs donnés dans le tableau 3.5.1, nous effectuons une analyse qualitative qui permettra de mettre en évidence les avantages de la structure d'observation NPHGO proposée par rapport à celle de SHGO.

Nous désignons par $T_{0.05}$ le temps nécessaire pour que l'erreur relative ($i.e.e_x = \frac{|x(t) - \hat{x}(t)|}{x(t)}$)

	<i>SHGO</i>	<i>NPHGO</i>
$T_{0.05}(\tilde{\omega})$	0.095s	0.045s
$T_{0.05}(\tilde{T}_L)$	0.22s	0.15s
$RMSE(\tilde{\omega})$	6.17	1.75
$RMSE(\tilde{T}_L)$	1.34	0.88

TABLE 3.2 – Indicateurs qualitatifs pour les algorithmes SHGO et NPHGO.

se stabilise dans une bande égale à 0.05%. Par ailleurs, nous définissons par RMSE l'erreur quadratique moyenne pour l'ensemble de 10093 échantillons utilisés dans cette simulation.

Le tableau 3.5.1 montre que le temps de convergence et l'indicateur RMSE, que ce soit pour la vitesse angulaire ou pour le couple de charge, sont beaucoup plus faibles dans le cas de l'algorithme NPHGO.

En conclusion, deux caractéristiques principales de l'observateur proposé sont à souligner. La première concerne la limitation du gain au régime transitoire. En effet, ce dernier devient proportionnel au paramètre θ au lieu de croître jusqu'à une puissance égale à la dimension du système (cas du SHGO). Le deuxième avantage est visible lorsque les sorties du système sont exemptes de bruits de mesure. Dans ce cas, il y a possibilité d'augmenter considérablement le paramètre de conception θ sans avoir de fortes ondulations au régime transitoire. En effet, grâce aux fonctions de saturation imbriquées dans le terme de correction de l'observateur, la majorité des pics visualisés avant le régime permanent (cas du SHGO) sont quasiment inhibés, et par conséquent une amélioration du temps de

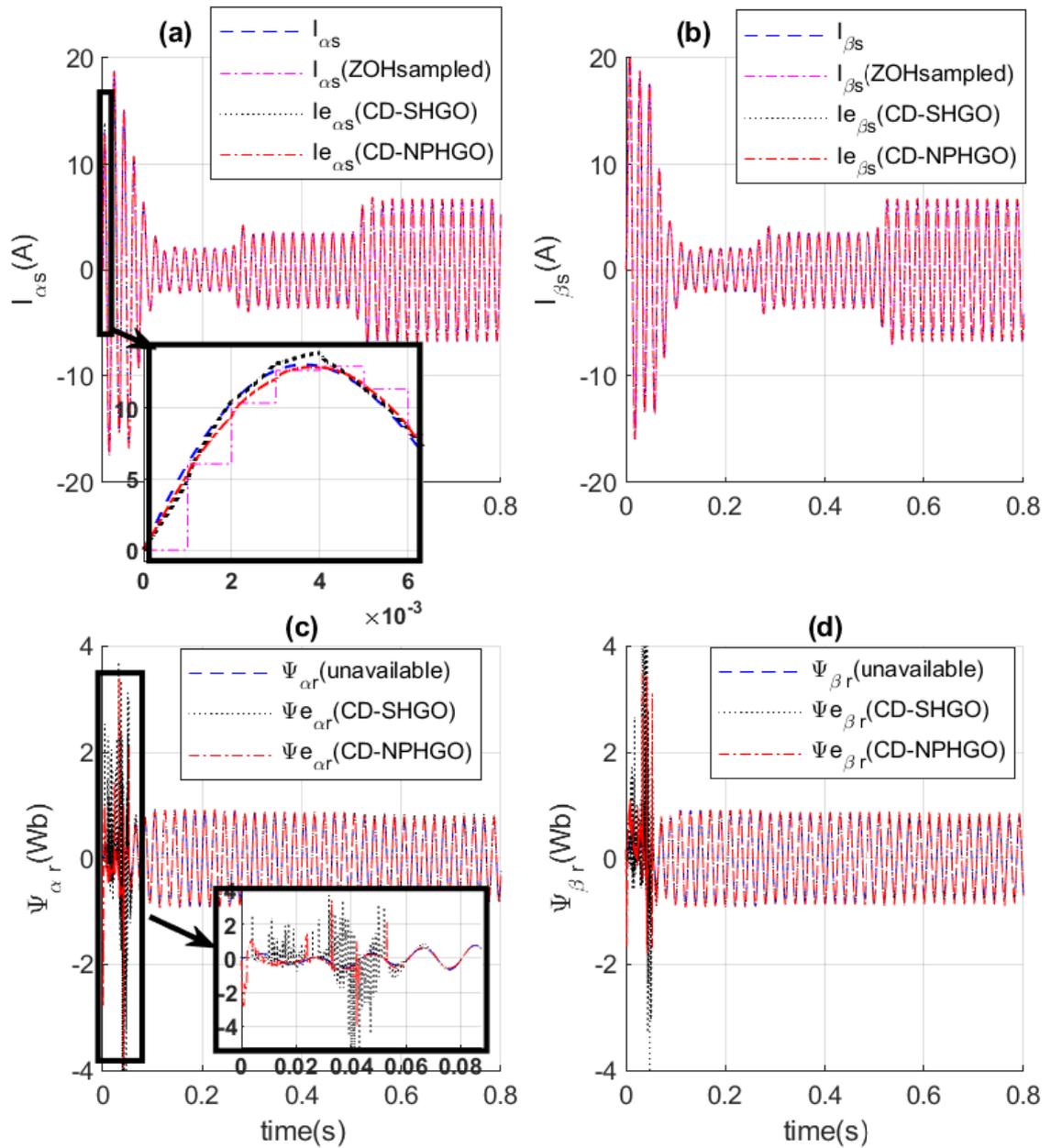


FIGURE 3.1 – Estimation des courant statoriques et des flux rotoriques

convergence de l'erreur d'estimation est obtenue.

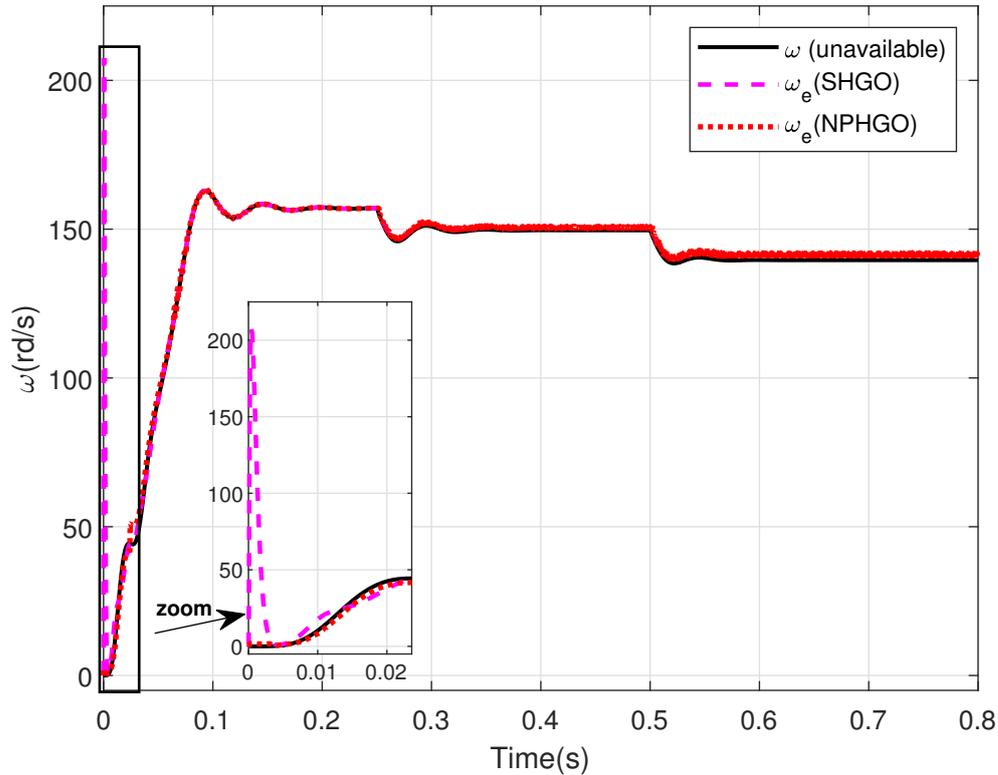


FIGURE 3.2 – Estimation de la vitesse angulaire.

3.5.2 Reconstruction des états de la MAS avec vitesse variable

Pour évaluer la qualité d'estimation des états du moteur asynchrone triphasé dans le cas d'une vitesse variable au cours du temps, nous proposons la technique de commande scalaire : tension/fréquence $(V/F) = \text{constante}$. La loi de variation de la fréquence est représentée sur la figure 6(a) avec le même profil de variation du couple résistant que celui utilisé au niveau de la vitesse constante. La figure 6(b) illustre l'erreur d'estimation de la vitesse mécanique dans les deux cas : SHGO et NPHGO. Nous distinguons une nette atténuation de l'erreur d'observation dans le cas du NPHGO. En effet, les pics indésirables sont quasiment inhibés, de plus l'erreur d'estimation de la vitesse angulaire n'est plus biaisée.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la synthèse d'une structure d'observation de type grand gain avec inhibition du phénomène de peaking (NPHGO) pour les moteurs asynchrone triphasés dépourvus de capteurs de vitesse. Après une présentation du modèle non linéaire MIMO de ce type de moteurs, une transformation appropriée de son état a été effectuée pour obtenir une forme canonique pour laquelle la conception de l'observateur est plus

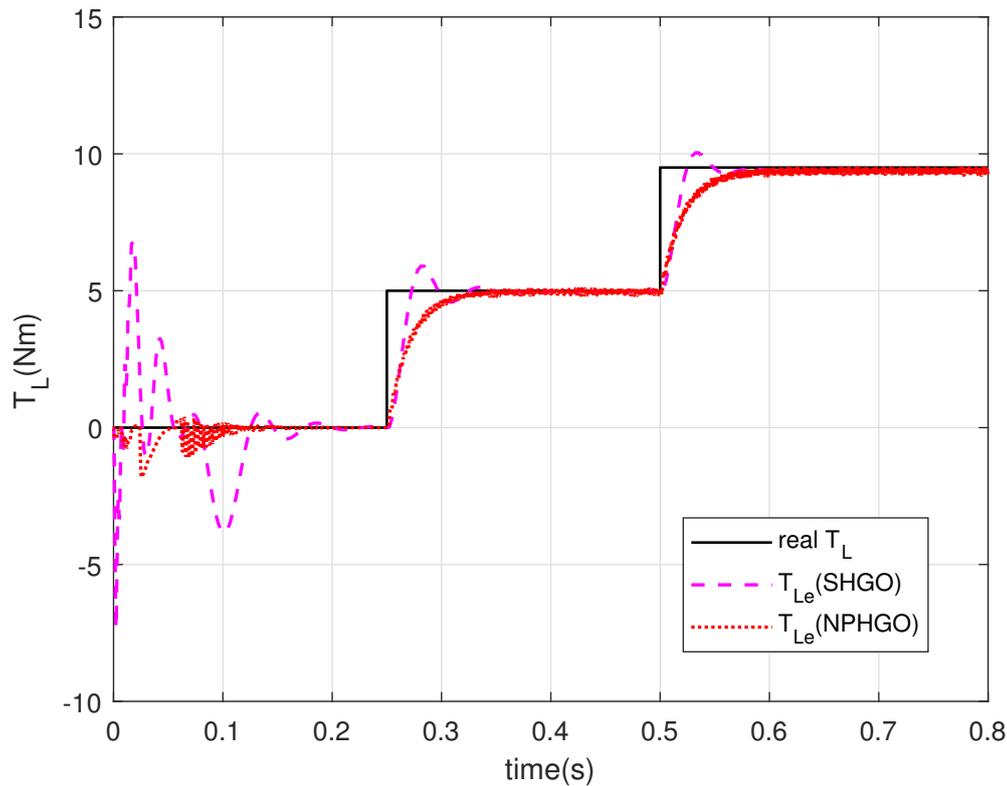


FIGURE 3.3 – Estimation du couple de charge.

aisée et à travers laquelle l'observabilité du système a été étudiée. Puis, tenant compte de la nature échantillonnée des mesures du courant statorique, une reformulation de l'observateur synthétisé au deuxième chapitre a été proposée pour la reconstruction du flux rotorique, la vitesse angulaire et le couple de charge de la MAS. Nous avons montré, à travers une comparaison avec le SHGO, que les performances issues de l'application de l'algorithme NPHGO en régime transitoire sont fortement améliorées en termes d'élimination des pics indésirables, de rapidité de la convergence de l'erreur d'observation et de la précision de l'estimation.

Nous tentons, à moyens termes, d'appliquer l'algorithme NPFHGO sur le modèle de la machine asynchrone intégrant l'action de filtrage en vue de contourner le problème inévitable des bruits de mesures dans les courants statoriques. L'implémentation effective des algorithmes d'observation conçus sur des supports numériques à savoir une carte Dspace ou un module FPGA est également parmi nos futures ambitions de recherche.

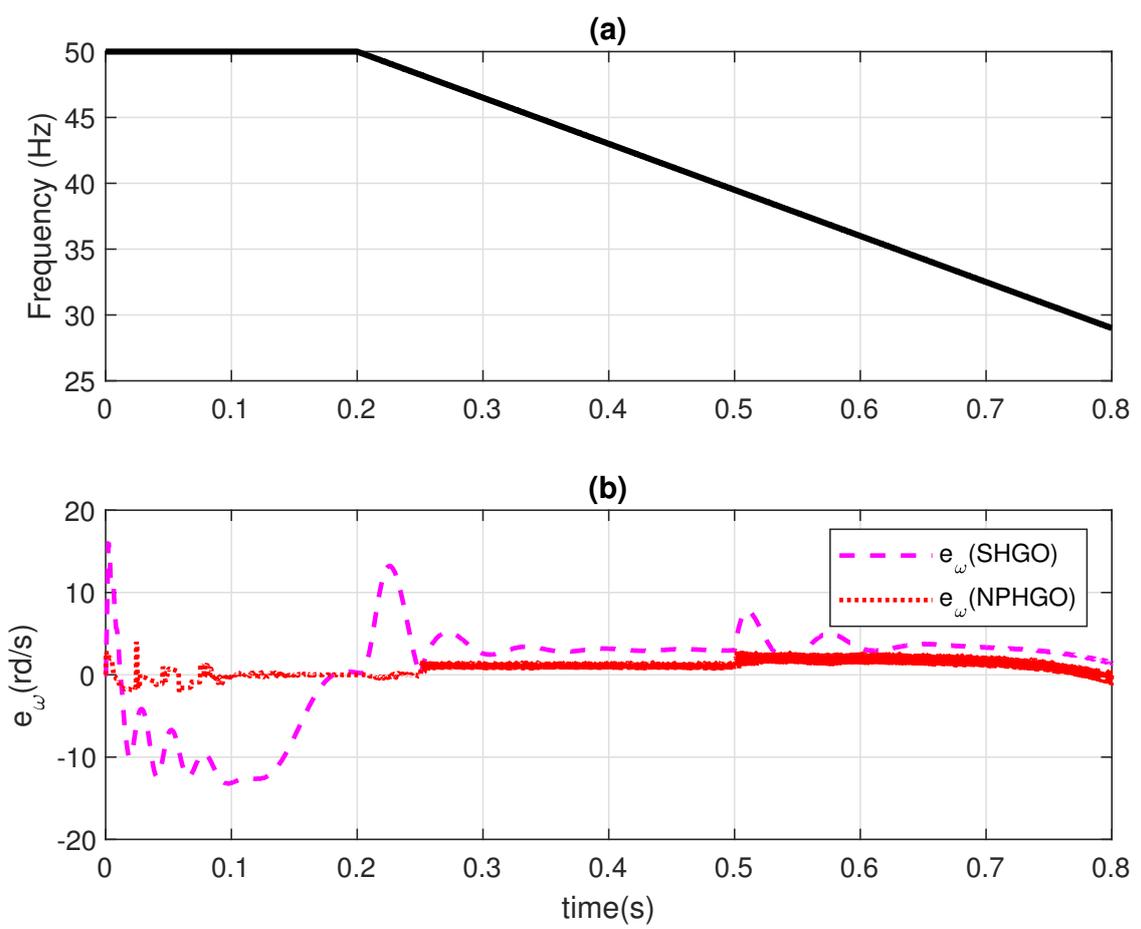


FIGURE 3.4 – Erreur d'estimation de la vitesse angulaire (commande scalaire).

Conclusion générale et perspectives

Les travaux de cette thèse ont porté principalement sur la resynthèse de l'observateur de type grand gain standard pour pallier ses deux problèmes intrinsèques, à savoir le phénomène de peaking lors du régime transitoire de l'observateur d'une part et la forte sensibilité de l'observateur aux signaux à hautes fréquences.

Pour ce faire, une resynthèse de l'observateur a été proposée et elle s'est effectuée en trois étapes. Dans la première étape, le phénomène de peaking a été mis en avant et l'objectif était de faire une resynthèse pour pallier ce problème. Ainsi, un observateur, auquel on s'est référé par NPHGO (Non peaking High Gain Observer), dont la structure est similaire à celle du SHGO a été proposé. La seule différence entre la structure du NPHGO avec celle du SHGO réside dans l'expression du terme de correction du NPHGO qui s'exprime à l'aide de fonctions de saturations imbriquées. Il a été montré que ces fonctions se désaturent de manière successive et lorsque toutes ces fonctions sont désaturées, la structure du NPHGO coïncide avec celle du SHGO. La caractéristique principale du NPHGO réside dans le fait que ses variables d'états sont bornées par une constante α_θ qui est telle que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\theta}{\theta} = 0$. De plus, la durée de temps requise pour la désaturation de toutes les fonctions de saturation est égale à la durée du régime transitoire de l'observateur SHGO et de ce fait, après ce régime, le NPHGO recouvre les propriétés du SHGO en régime permanent, en particulier une vitesse de convergence arbitrairement rapide de l'erreur d'observation. Notons que la durée du régime transitoire peut être rendue aussi petite que désirée par le choix de valeurs de θ suffisamment élevées. La deuxième étape de resynthèse s'est focalisée sur la sensibilité aux bruits de mesure et l'objectif consiste à générer une version du SHGO qui permet de fournir des estimés bien filtrés de l'état lorsque la sortie du système est bruitée. Pour ce faire, le système original a été augmenté par un intégrateur multiple d'ordre m de la sortie réelle du système et la sortie du système augmenté a été prise égale à cet intégrateur. Le système ainsi augmenté a gardé la structure triangulaire du système de départ et un observateur de type SHGO, auquel nous nous sommes référés par FHGO, a été synthétisé pour ce système. La principale caractéristique de cet observateur réside dans le fait que le terme de correction dépend de l'erreur entre la version filtrée d'ordre m de la sortie et de son estimée délivrée par l'observateur. Cette erreur peut être interprétée comme étant la sortie d'un filtre linéaire d'ordre m dont l'entrée est égale à l'erreur d'observation bruitée. Ce filtre fait partie de l'observateur et plus précisément, ses équations correspondent aux m premières équations de l'observateur, i.e. du FHGO. De ce fait, le FHGO possède intrinsèquement, i.e. par construction, des propriétés de filtrage. La dernière et troisième étape de la resynthèse de l'observateur de type SHGO, consiste à appliquer à l'observateur synthétisé lors de la deuxième étape, i.e. FHGO, le même

processus considéré lors de la première étape pour générer le NPHGO à partir du SHGO. L'application de ce processus a permis d'obtenir un observateur, auquel nous nous sommes référé par NPFHGO, qui permet de pallier au problème de peaking tout en héritant les capacités de filtrage du FHGO.

Les performances de l'observateur résultant de la procédure de resynthèse, i.e. le NPFHGO, ont été illustrées en simulation à travers un système d'ordre 4 modélisant le bras d'un robot. Les résultats d'estimation obtenus ont été comparés à ceux issus de la simulation d'un observateur de type SHGO et ils ont clairement confirmé les propriétés du NPFHGO aussi bien en termes de réduction significative du phénomène de peaking qu'en termes d'une nette amélioration de la sensibilité de l'observateur aux bruits de mesure.

Par ailleurs et dans une perspective de validation expérimentale, nous avons consacré le dernier chapitre de cette thèse à l'application d'une version échantillonnée de l'observateur NPHGO au moteur asynchrone pour l'estimation des flux rotoriques, de la vitesse mécanique et du couple de charge à partir des mesures de courants statoriques. Notons que la structure de l'observateur utilisée est inspirée de celle de l'observateur sous-jacent travaillant avec des mesures continues et pour lequel l'étude complète de stabilité et de convergence a été détaillée. Les résultats d'estimation obtenus pour le moteur asynchrone ont aussi clairement montré la capacité de l'observateur proposé à réduire l'effet de peaking tout en délivrant des estimées aussi consistantes que celles obtenues par le SHGO. Ces résultats devront être complétés par une analyse plus complète de la stabilité et la convergence de la version continu-discret utilisée du NPHGO. Aussi, l'action de filtrage devra être intégrée pour améliorer la qualité des estimés en présence des bruits de capteurs.

Les travaux engagés dans cette thèse ont ouvert plusieurs perspectives dont nous citerons quelques unes. Le premier point concerne l'extension de la resynthèse de l'observateur aux cas où les mesures de la sortie ne sont plus disponibles en temps continu. Pour ce faire, on adoptera une démarche similaire à celle présentée dans [75] où une synthèse d'un observateur de type grand gain standard a été présenté dans un contexte général prenant en compte toutes les formes possibles sous lesquelles les mesures des sorties peuvent être disponibles, en temps continu, sous forme d'échantillons et avec éventuellement des retards sur la sortie dans les deux cas. Les étapes d'analyse de stabilité et de convergence de l'erreur d'observation sous-jacente sont très similaires à celles adoptées lorsqu'on a affaire à un observateur à grand gain standard fonctionnant avec des mesures disponibles en temps continu.

Un autre axe auquel nous allons nous intéresser consiste en la validation expérimentale de l'observateur proposé sur un banc de moteur asynchrone. Dans ce cadre, la carte FPGA de type "Spartan 3E" est retenue comme support numérique d'implémentation étant donné ses grandes capacités à gérer des systèmes à cadence d'échantillonnage élevée.

Bibliographie

- [1] C. Tréangle, M. Farza, and M. M'Saad. Filtered high gain observer for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs. *Automatica*, 101 :197–206, 2019.
- [2] D. Astolfi, L. Marconi, L. Praly, and A.R. Teel. Low-power peaking-free high-gain observers. *Automatica*, 98 :169–179, 2018.
- [3] H.K. Khalil. Cascade high-gain observers in output feedback control. *Automatica*, 80 :110–118, 2017.
- [4] T. Saheb. *Commande sans capteur mécanique de la machine asynchrone*. PhD thesis, IREENA, 2004.
- [5] I. Zein. *Application du filtre de Kalman et de l'observateur de Luenberger à la commande et à la surveillance de la machine asynchrone*. PhD thesis, Compiègne, 2000.
- [6] A.J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1) :47–52, 1983.
- [7] A.J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2) :197–216, 1985.
- [8] R. Rajamani. Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401, 1998.
- [9] M. Arcak and P. Kokotović. Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930, 2001.
- [10] D. Koenig. Observer design for unknown input nonlinear descriptor systems via convex optimization. *IEEE Transactions on Automatic control*, 51(6) :1047–1052, 2006.
- [11] A. Zemouche and M. Boutayeb. On LMI conditions to design observers for lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2) :585–591, 2013.
- [12] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6) :875–880, 1992.
- [13] J.P. Gauthier and I.A.K Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM journal on control and optimization*, 32(4) :975–994, 1994.
- [14] A.M. Boker and H.K. Khalil. Nonlinear observers comprising high-gain observers and extended Kalman filters. *Automatica*, 49(12) :3583–3590, 2013.
- [15] G. Bornard, F. Celle-Couenne, and G. Gilles. Observability and observers. In *Non-linear systems*, pages 173–216. Springer, 1995.

- [16] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13(3) :243–254, 1977.
- [17] J. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :922–926, 1981.
- [18] A.N. Atassi and H.K. Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9) :1672–1687, 1999.
- [19] S. Hadj Saïd, F. M’Sahli, M.F. Mimouni, and M. Farza. Adaptive high gain observer based output feedback predictive controller for induction motors. *Computers & Electrical Engineering*, 39(2) :151–163, 2013.
- [20] K. Esfandiari and M. Shakarami. Bank of high-gain observers in output feedback control : Robustness analysis against measurement noise. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 51(4) :2476–2487, 2019.
- [21] M. Oueder, M. Farza, R.B. Abdennour, and M. M’Saad. A high gain observer with updated gain for a class of MIMO non-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 61(2) :298–308, 2012.
- [22] R.G. Sanfelice and L. Praly. On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise. *Automatica*, 47(10) :2165–2176, 2011.
- [23] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1494–1496. IEEE, 1991.
- [24] M. Farza, M. M’saad, and M. Sekher. A set of observers for a class of nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1) :765–770, 2005.
- [25] A. Adil, A. Hamaz, I. N’Doye, A. Zemouche, T.M. Laleg-Kirati, and F. Bedouhene. On high-gain observer design for nonlinear systems with delayed output measurements. *Automatica*, 141 :110281, 2022.
- [26] A. Adil, A. Zemouche, A. Hamaz, T.M. Laleg-Kirati, I. N’Doye, and F. Bedouhene. High-gain observer design for nonlinear systems with delayed outputs. In *IFAC-PapersOnLine*, volume 53, pages 5057–5062. IEEE, 2020.
- [27] O. Hernández-González, M.E. Guerrero-Sánchez, M. Farza, T. Ménard, M. M’Saad, and R. Lozano. High gain observer for a class of nonlinear systems with coupled structure and sampled output measurements : application to a quadrotor. *International Journal of Systems Science*, 50(5) :1089–1105, 2019.
- [28] M. Farza, I. Bouraoui, T. Ménard, R.B. Abdennour, and M. M’Saad. Sampled output observer design for a class of nonlinear systems. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 312–317. IEEE, 2014.
- [29] M. Nadri, H. Hammouri, and R.M. Grajales. Observer design for uniformly observable systems with sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :757–762, 2012.
- [30] I. Karafyllis and C. Kravaris. From continuous-time design to sampled-data design of observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(9) :2169–2174, 2009.

- [31] M. Nadri and H. Hammouri. Design of a continuous-discrete observer for state affine systems. *Applied Mathematics Letters*, 16(6) :967–974, 2003.
- [32] F. Esfandiari and H.K. Khalil. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of control*, 56(5) :1007–1037, 1992.
- [33] A. Teel and L. Praly. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Systems & Control Letters*, 22(5) :313–325, 1994.
- [34] A.R. Teel. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE transactions on Automatic Control*, 41(9) :1256–1270, 1996.
- [35] A. Tornambè. Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 19(3) :193–204, 1992.
- [36] H.K. Khalil and L. Praly. High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6) :993–1015, 2014.
- [37] J.H. Ahrens and H.K. Khalil. High-gain observers in the presence of measurement noise : A switched-gain approach. *Automatica*, 45(4) :936–943, 2009.
- [38] N. Boizot, E. Busvelle, and J.P. Gauthier. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46(9) :1483–1488, 2010.
- [39] R. Marino and G.L. Santosuosso. Nonlinear observers of time derivatives from noisy measurements of periodic signals. In *Nonlinear control in the year 2000 volume 2*, pages 123–135. Springer, 2001.
- [40] A.A. Prasov and H.K. Khalil. A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :569–580, 2012.
- [41] D. Astolfi and L. Marconi. A high-gain nonlinear observer with limited gain power. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(11) :3059–3064, 2015.
- [42] I. Bouraoui, M. Farza, T. Ménard, R.B. Abdenmour, M. M’Saad, and H. Mosrati. Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs-application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55 :78–87, 2015.
- [43] D.K. Dimitrov and J.M. Peña. Almost strict total positivity and a class of Hurwitz polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 132(2) :212–223, 2005.
- [44] A.A. Albert. An inductive proof of Descartes’ rule of signs. *The American Mathematical Monthly*, 50(3) :178–180, 1943.
- [45] A.R. Teel. Further variants of the Astolfi/Marconi high-gain observer. In *2016 american control conference (acc)*, pages 993–998. IEEE, 2016.
- [46] K.K. Busawon and P. Kabore. Disturbance attenuation using proportional integral observers. *International Journal of control*, 74(6) :618–627, 2001.
- [47] S. Ibrir. Robust state estimation with q-integral observers. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, volume 4, pages 3466–3471. IEEE, 2004.
- [48] L. Wang, D. Astolfi, L. Marconi, and H. Su. High-gain observers with limited gain power for systems with observability canonical form. *Automatica*, 75 :16–23, 2017.

- [49] F. Shiravani, P. Alkorta, J.A. Cortajarena, and O. Barambones. An integral sliding mode stator current control for industrial induction motor. *Mathematics*, 10(15) :2765, 2022.
- [50] M.S. Mousavi, S.A. Davari, V. Nekoukar, C. Garcia, and J. Rodriguez. Integral sliding mode observer-based ultra-local model for finite-set model predictive current control of induction motor. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 2021.
- [51] B.L.G. Costa, C.L. Graciola, B.A. Angélico, A. Goedel, M.F. Castoldi, and W.C. de Andrade Pereira. A practical framework for tuning dtc-svm drive of three-phase induction motors. *Control Engineering Practice*, 88 :119–127, 2019.
- [52] M. Habibullah, D.D.C. Lu, D. Xiao, J.E. Fletcher, and M.F. Rahman. Predictive torque control of induction motor sensorless drive fed by a 3l-npc inverter. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 13(1) :60–70, 2016.
- [53] B. Wang, X. Chen, Y. Yu, G. Wang, and D. Xu. Robust predictive current control with online disturbance estimation for induction machine drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 32(6) :4663–4674, 2016.
- [54] H. Rehman and L. Xu. Alternative energy vehicles drive system : Control, flux and torque estimation, and efficiency optimization. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(8) :3625–3634, 2011.
- [55] J.W. Finch and D. Giaouris. Controlled ac electrical drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(2) :481–491, 2008.
- [56] T.K. Boukas and T.G. Habetler. High-performance induction motor speed control using exact feedback linearization with state and state derivative feedback. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 19(4) :1022–1028, 2004.
- [57] R. Marino, S. Peresada, and P. Valigi. Adaptive input-output linearizing control of induction motors. *IEEE Transactions on Automatic control*, 38(2) :208–221, 1993.
- [58] Y. Ren, R. Wang, S.J. Rind, P. Zeng, and L. Jiang. Speed sensorless nonlinear adaptive control of induction motor using combined speed and perturbation observer. *Control Engineering Practice*, 123 :105166, 2022.
- [59] A. Kadrine, Z. Tir, O.P. Malik, M.A. Hamida, A. Reatti, and A. Houari. Adaptive non-linear high gain observer based sensorless speed estimation of an induction motor. *Journal of the Franklin Institute*, 357(13) :8995–9024, 2020.
- [60] A.D. Callegaro, S. Nalakath, L.N. Srivatchan, D. Luedtke, and M. Preindl. Optimization-based position sensorless control for induction machines. In *2018 IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC)*, pages 460–466. IEEE, 2018.
- [61] J. Holtz. Sensorless control of induction machines-with or without signal injection? *IEEE transactions on industrial electronics*, 53(1) :7–30, 2006.
- [62] L. Yousfi, S. Aoun, and M. Sedraoui. Speed sensorless vector control of doubly fed induction machine using fuzzy logic control equipped with luenberger observer. *International Journal of Dynamics and Control*, pages 1–13, 2022.

- [63] C. Luo, B. Wang, Y. Yu, C. Chen, Z. Huo, and D. Xu. Decoupled stator resistance estimation for speed-sensorless induction motor drives considering speed and load torque variations. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 8(2) :1193–1207, 2019.
- [64] Y. Wang, L. Zhou, S.A. Bortoff, A. Satake, and S. Furutani. An approximate high gain observer for speed-sensorless estimation of induction motors. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(1) :53–63, 2018.
- [65] A. Tilli and C. Conficoni. Semiglobal uniform asymptotic stability of an easy-to-implement pll-like sensorless observer for induction motors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(11) :3612–3618, 2016.
- [66] M. Habibullah and D.C. Lu. A speed-sensorless fs-ptc of induction motors using extended Kalman filters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(11) :6765–6778, 2015.
- [67] X. Zhang. Sensorless induction motor drive using indirect vector controller and sliding-mode observer for electric vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(7) :3010–3018, 2013.
- [68] X. Sun, L. Chen, Z. Yang, and H. Zhu. Speed-sensorless vector control of a bearingless induction motor with artificial neural network inverse speed observer. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 18(4) :1357–1366, 2012.
- [69] O. Hernández, T. Múard, M. Farza, C.M. Astorga-Zaragoza, and G.V. Guerrero-Ramirez. Continuous-discrete time observer for a class of state affine nonlinear systems : application to an induction motor. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering, IJ-STA*, 10(1) :2072–2078, 2016.
- [70] A. Dib, M. Farza, M. M’Saad, P. Dorléans, and J.F. Massieu. High gain observer for sensorless induction motor. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :674–679, 2011.
- [71] L. Gou, C. Wang, M. Zhou, and X. You. Integral sliding mode control for starting speed sensorless controlled induction motor in the rotating condition. *IEEE Transactions on Power electronics*, 35(4) :4105–4116, 2019.
- [72] M. Farza, M. M’saad, T. Ménard, A. Ltaief, and T. Maatoug. Adaptive observer design for a class of nonlinear systems. application to speed sensorless induction motor. *Automatica*, 90 :239–247, 2018.
- [73] C.C. De Wit, A. Youssef, J.P. Barbot, P. Martin, and F. Malrait. Observability conditions of induction motors at low frequencies. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187)*, volume 3, pages 2044–2049. IEEE, 2000.
- [74] M. Besbes, S. Hadj Saïd, and F. M’Sahli. Hdl coder-based fpga implementation of a continuous-discrete time observer for sensorless induction machine. *IETE Journal of Research*, 68(3) :1905–1913, 2022.
- [75] F. Ramírez-Rasgado, O. Hernández-González, M. Farza, M. M’Saad, C.M. Astorga-Zaragoza, and B. Dahhou. On high-gain observer redesign with respect to the nature of the available outputs. In *2022 10th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 190–195. IEEE, 2022.

Résumé

Dans cette thèse, la resynthèse de l'observateur de type grand gain standard est considérée pour pallier le phénomène de peaking, se produisant au cours du régime transitoire, et la sensibilité aux signaux à hautes fréquences. Cette resynthèse a permis de générer un observateur ayant intrinsèquement des capacités de filtrage et comportant des fonctions de saturation imbriquées dans son terme de correction. La structure de l'observateur consiste en la cascade de deux sous-système, le premier sous-système situé en amont de la cascade se comporte comme un filtre linéaire dont l'entrée est l'erreur d'observation bruitée. La sortie du filtre est une version filtrée de cette erreur qui est utilisée dans le terme de correction de l'observateur. Les fonctions de saturation impliquées dans ce terme se désactivent de manière successive et lorsqu'elles sont toutes désactivées, la structure de l'observateur coïncide avec celle du grand gain standard augmenté d'un filtre. Les performances de l'observateur proposé sont illustrées en simulation à travers un exemple traitant d'un bras de robot ainsi qu'à travers le modèle du moteur asynchrone pour l'estimation des flux rotoriques, de la vitesse et du couple de charge à partir des mesures des courants statoriques. Les estimations obtenues sont discutées et comparées à celles issues d'un observateur de type grand gain standard.

Abstract

In this thesis, the redesign of the standard high gain observer is considered to overcome the peaking phenomenon, occurring during the transient periods, and its sensitivity to high frequency signals. This redesign allowed to generate an observer with intrinsic filtering capabilities and the corrective term of which involves nested saturation functions. The structure of the observer consists in the cascade of two subsystems, the first subsystem located at the head of the cascade acts like a linear filter the input of which is the noisy observation error. The filter output is a filtered version of this error and it is used in the observer correction term. The saturation functions involved in this term are deactivated successively and when they are all deactivated, the structure of the observer coincides with that of the standard high gain observer which is augmented with a filter. The performance and main properties of the proposed observer are highlighted in simulation through an example dealing with a robot arm as well as through the asynchronous motor model for the estimation of rotor fluxes, motor speed and load torque from the stator current measurements. The obtained estimates are discussed and compared with their counterparts issued from a standard high gain observer.