



**HAL**  
open science

# Modélisation multidimensionnelle des pressions et teneurs en eau dans le sol et le sous-sol : effets capillaires et gravitaires en présence d'hétérogénéités et de fluctuations

Nahla Mansouri

► **To cite this version:**

Nahla Mansouri. Modélisation multidimensionnelle des pressions et teneurs en eau dans le sol et le sous-sol : effets capillaires et gravitaires en présence d'hétérogénéités et de fluctuations. Sciences de la Terre. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2016. Français. NNT : 2016INPT0060 . tel-04247599

**HAL Id: tel-04247599**

**<https://theses.hal.science/tel-04247599>**

Submitted on 18 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Hydrologie, Hydrochimie, Sols, Environnement

---

Présentée et soutenue par :

Mme NAHLA MANSOURI

le lundi 11 juillet 2016

Titre :

MODELISATION MULTIDIMENSIONNELLE DES PRESSIONS ET  
TENEURS EN EAU DANS LE SOL ET LE SOUS-SOL: EFFETS  
CAPILLAIRES ET GRAVITAIRES EN PRESENCE D'HETEROGENEITES  
ET DE FLUCTUATIONS

---

Ecole doctorale :

Sciences de l'Univers de l'Environnement et de l'Espace (SDUEE)

Unité de recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (I.M.F.T.)

Directeur(s) de Thèse :

M. RACHID ABABOU

MME RACHIDA BOUHLILA

Rapporteurs :

M. AMVROSSIOS BAGTZOGLOU, UNIVERSITE DU CONNECTICUT

M. KHEMAIES ZAYANI, UNIVERSITE DE CARTHAGE

M. SEKHAR MUDDU, INDIAN INSTITUTE OF SCIENCE

Membre(s) du jury :

M. KHEMAIES ZAYANI, UNIVERSITE DE CARTHAGE, Président

M. ABDERRAHIM JARDANI, UNIVERSITE DE ROUEN, Membre

Mme RACHIDA BOUHLILA, ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS, Membre

M. RACHID ABABOU, INP TOULOUSE, Membre

*A Riadh.*

Cette thèse est aussi la tienne.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord, à remercier les professeurs Amvrossios BAGTZO-GLOU, Sekhar MUDDU et Khemaies ZAYANI, rapporteurs de ma thèse, pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de mon manuscrit. Merci également à Abderrahim JARDANI et Marc PRAT d'avoir accepté de faire partie de mon jury et à Khemaies ZAYANI d'avoir accepté de présider mon jury.

J'adresse ma gratitude à mon directeur de thèse, Rachid ABABOU de l'IMFT pour son encadrement d'une rare précision, ses conseils toujours très justes et pour son soutien tant scientifique qu'humain pendant ma thèse. Je souhaite souligner son grand apport scientifique ainsi que ses conseils avisés qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. J'ai beaucoup appris à ses cotés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela. J'adresse ma gratitude aussi à ma codirectrice de thèse Rachida BOUHLILA de l'ENIT qui, malgré la distance, a été toujours disponible pour discuter, échanger sur les différentes parties de ce travail ou pour répondre à mes questions.

Je remercie tous les thésards de l'IMFT (les anciens et les plus récents) ; leur soutien et leur bonne humeur m'étaient d'une grande aide. Merci pour tous les bons moments partagés ensemble. Je pense surtout à : Khalil, Soumaya, Tawfik, Rouaa, Hamza, Manel, Mauricio, Hela, Benjamin. Un remerciement spécial pour Imen et Sofien : vous étiez toujours là pour moi. Je remercie également mes amis tunisiens qui m'ont toujours encouragée : Emna, Fatma, Marwen, Bilel, Maher ....

Plus personnellement, mes remerciements les plus affectueux vont aux familles MANSOURI, HMIDI et SOUISSI. Aussi, je voudrais rendre hommage à ma tante Latifa qui nous a quitté cette année et qui, si elle était encore là, elle m'aurait partagée chaleureusement ma réussite. Repose en paix chère tante.

J'adresse ma profonde reconnaissance et mon amour à mes très chers parents pour leur soutien permanent et leur confiance. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Un grand merci à mes sœurs et mon frère qui m'ont toujours soutenue dans mes choix.

Enfin, je terminerai en adressant mes remerciements à mon cher mari, Riadh, qui a toujours cru en moi et qui m'a toujours soutenu. Merci pour ton amour, ta patience dans les moments difficiles et surtout tes sacrifices.

# Abstract

---

Title : Multidimensional modeling of pressures and water contents in soils and the subsurface : capillary and gravitational effects in the presence of heterogeneity and fluctuations.

---

This doctoral research, defended at the Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, is devoted to modeling water pressure and water content in soils and in subsurface geologic formations, in the case of variably saturated flow. One of the main scientific objectives of this work is to analyze the response of unsaturated flow systems, and particularly capillary and gravitational effects, in the presence of material heterogeneities, discontinuities, and/or space-time fluctuations. Modeling is based on a generalized version of Darcy-Buckingham's law, and of Richards' flow equation. Overall, the topics developed in this PhD thesis focus on several related aspects of variably saturated water flow in the subsurface. These aspects all occur at once in most applications (drying/wetting, heterogeneity, temporal forcing), but they are "decoupled" here for convenience. A preliminary research (collaborative project IMFT / IRSN) was developed to study the 2D/3D drying process at the porous wall of a deep cylindrical excavation in response to hydro-meteorological signals. This project has motivated the design and testing of a novel approach to include cavities in the modeling domain. A detailed study of steady state infiltration was developed for the case of finely stratified soils, with parameters that vary continuously and cyclically with depth. Exact and approximate analytical solutions are calculated based on variable transformation methods and on perturbation type approximations, and they are tested numerically using a finite volume code (BIGFLOW 3D). The sensitivity of suction fluctuations vs. stratification wavelength is investigated, as well as the effect of the degree of heterogeneity, and of water table depth. Capillary barrier effects are studied for the case of unsaturated infiltration in multilayer soil systems characterized by a discontinuity of soil properties at interfaces. Numerical experiments are developed for transient infiltration towards a water table through a two-layer system, the goal being to analyze possible capillary barrier effects under various scenarios. On the other hand, we study numerically the case of a partially saturated / unsaturated soil column submitted to highly variable oscillatory pressure at the bottom of the column : this leads to vertical flow oscillations in the unsaturated zone above the water table influenced by tides (coastal beach sand). We analyze the dynamics of this oscillatory flow, where capillary and gravitational effects compete; for this purpose we use a novel method that tracks the positions of the zero flux plane in the unsaturated column. Finally, we also present, as an extension to the previous studies, a preliminary investigation of multidimensional infiltration/redistribution phenomena, particularly for the case of fully 3D random-type soil heterogeneity. The first numerical experiments of 3D infiltration are undertaken based on the single realization approach to soil heterogeneity, and assuming a uniform distribution of wetting at soil surface.

**Key-Words.** Soil hydrology ; hydrogeology ; infiltration ; stratified and multilayer soils ; subsurface cavities ; karsts ; subsurface waste disposal ; numerical modeling ; water content ; suction ; capillary and gravitational effects ; Darcy ; Richards ; hydro-meteorological and tidal fluctuations.

# Résumé

---

Titre : Modélisation multidimensionnelle des pressions et teneurs en eau dans le sol et le sous-sol : effets capillaires et gravitaires en présence d'hétérogénéités et de fluctuations.

---

Cette recherche doctorale porte sur la modélisation 3D de la dynamique des teneurs en eau dans le sol et le sous-sol lorsque les écoulements sont à saturation variable. La modélisation est basée sur une version généralisée de la loi de Darcy-Buckingham et de l'équation de Richards multidimensionnelle. Les recherches présentées dans cette thèse concernent différents volets, présentés ci-dessous, dont le fil conducteur est l'analyse de phénomènes d'écoulements en milieux poreux, contenant de fortes hétérogénéités et/ou perturbés par des fluctuations temporelles. Dans le cadre d'un partenariat de recherche entre l'IMFT et l'IRSN sur la problématique du stockage souterrain de déchets radioactifs, nous avons modélisé en 3D la dynamique du front de désaturation d'une couche argileuse autour d'une galerie souterraine ventilée, à l'aide du code volumes finis BIG-FLOW 3D. Ce travail a permis de mettre au point une approche d'immersion pour la modélisation des écoulements en milieux composites. Un autre volet de cette thèse concerne une étude analytique et numérique des profils verticaux de succion et de teneur en eau lors d'une infiltration verticale, non-saturante, dans un sol hétérogène finement stratifié. Des solutions analytiques exactes et approchées sont obtenues en régime permanent, à l'aide de transformations de variables, et sont comparées avec des solutions numériques pour différents degrés d'hétérogénéité. De même, les phénomènes de « barrière capillaire » sont étudiés analytiquement et par expérimentations numériques transitoires d'infiltration sur des systèmes bicouches, en présence d'une nappe plus ou moins profonde. D'autre part, les écoulements non-saturés sont étudiés, cette fois, en présence d'un forçage transitoire fortement oscillatoire, dans une colonne de sable fin homogène, sous l'effet de fluctuations périodiques du niveau de la surface libre. Une méthode multi-front mise au point lors d'une thèse précédente à l'IMFT est validée numériquement en montrant que cette méthode simule efficacement la dynamique oscillatoire des flux et des profils de pression avec un nombre limité de « fronts ». De plus, nous avons analysé la phénoménologie capillaire/gravitaire des écoulements oscillatoires dans la colonne grâce à un suivi dynamique du plan de flux nul. Enfin, nous présentons, comme extension aux travaux précédents, une étude préliminaire des phénomènes 3D d'infiltration et de redistribution d'eau, notamment lorsque l'hétérogénéité du sol est de type aléatoire. Les premiers essais d'infiltration permettent de tester, en réplique unique, des méthodes de prises de moyennes spatiales des champs de succion et teneur en eau et évaluer la taille minimum du domaine de calcul 3D permettant d'obtenir des profils verticaux moyens représentatifs de l'infiltration dans une réplique unique du sol aléatoire.

**Mots-Clés.** Hydrologie des sols ; sous-sol ; hydrogéologie ; infiltration ; écoulements non saturés ; sols stratifiés et multicouches ; cavités souterraines ; stockage souterrain de déchets radioactifs ; modélisation numérique ; teneurs en eau ; succion ; effets capillaires et gravitaires ; Darcy ; Richards ; fluctuations tidales et hydrométéorologiques.

# Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Modèles équationnels et numériques des écoulements non-saturés et partiellement saturés	7
1	Introduction	9
2	Notions de bases	9
2.1	Caractéristiques physiques du sol	9
2.1.1	Porosité	9
2.1.2	Teneur en eau volumique	9
2.1.3	Taux de Saturation	10
2.1.4	Viscosité	10
2.1.5	La conductivité hydraulique et la perméabilité	10
2.1.6	Charge hydraulique	11
2.2	Texture, structure et teneur en eau	11
2.2.1	Texture du sol	11
2.2.2	Structure du sol	12
2.2.3	Relation teneur en eau - pression capillaire (Courbe de rétention)	13
2.3	Différents types d'écoulement	14
2.3.1	Écoulement saturé	14
2.3.2	Écoulement non saturé	14
2.3.3	Écoulement variablement saturé	14
3	Paramétrisation du sol non saturé	15
3.1	Modèle de teneur en eau $\theta(h)$	15
3.2	Modèle de conductivité hydraulique relative $K(h)$	16
3.3	Modèle Exponentiel et le modèle VGM	17
3.4	Modèle de capacité capillaire $C(h)$	17
3.5	Modèle de diffusivité capillaire $D(h)$	18

---

4	Modèles cinétique et dynamique d'un milieu macroporeux . . .	20
4.1	Qu'est-ce qu'un milieu macroporeux? . . . . .	20
4.2	Les modèles $\theta(h)$ et $K(h)$ d'un macroporeux . . . . .	21
5	Équations qui régissent l'écoulement en milieu poreux . . . . .	22
5.1	Loi de Darcy . . . . .	22
5.2	Équation de conservation de la masse . . . . .	23
5.3	Équation de Richards . . . . .	24
6	Loi de Darcy-Ward pour les écoulements en milieu macroporeux anisotrope . . . . .	25
7	Résumé et Conclusions . . . . .	25
3	Validations de simulations numériques à saturation variable (Code Volumes Finis 3D) . . . . .	27
1	Introduction . . . . .	29
2	Description du code Volumes Finis 3D BIGFLOW . . . . .	29
2.1	Historique du code BIGFLOW . . . . .	29
2.2	Les méthodes numériques utilisées dans BIGFLOW . . . . .	30
2.2.1	Domaine de calcul . . . . .	30
2.2.2	Discrétisation en espace . . . . .	31
2.2.3	Discrétisation en temps . . . . .	32
2.3	La forme générique du code BIGFLOW . . . . .	32
2.4	Principales procédures du code . . . . .	33
2.4.1	Les conditions initiales . . . . .	34
2.4.2	Les conditions aux limites . . . . .	35
3	Tests et validation du code BIGFLOW en présence d'interfaces . . . . .	35
3.1	Barrière capillaire (Infiltration) . . . . .	35
3.1.1	Formulation des solutions analytiques . . . . .	35
3.1.2	Caractéristiques de la simulation numérique . . . . .	36
3.1.3	Analyse des résultats . . . . .	37
3.2	Problème de la rizière (Infiltration partiellement saturée) . . . . .	39
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	39
3.2.2	Nappe peu profonde . . . . .	40
3.2.3	Nappe profonde . . . . .	41
4	Tests et validation des modèles hydrodynamiques $\theta(h, x)$ et $K_{ii}(h, x)$ d'un macroporeux . . . . .	43
4.1	Évaporation naturelle d'une nappe alimentée par deux ré- servoirs . . . . .	43
4.1.1	Présentation du problème d'évaporation et solutions analytiques . . . . .	43
4.1.2	Expérimentations numériques . . . . .	44
4.1.3	Solutions numérique <i>vs.</i> Solutions analytiques . . . . .	45
4.2	Pompage localisé dans un aquifère . . . . .	47
4.2.1	Présentation du problème de pompage et solutions analytiques . . . . .	47



---

4.2.2	Expérimentations numériques . . . . .	48
4.2.3	Flux à travers les frontières . . . . .	49
4.2.4	Solutions numériques <i>vs.</i> Solutions analytiques (régime permanent) . . . . .	49
5	Conclusions . . . . .	50
4	Steady State Infiltration in Continuously Stratified Unsaturated Soils . . . . .	51
1	Introduction . . . . .	54
2	Literature review . . . . .	54
3	Characterization of periodic stratification . . . . .	58
3.1	Soil Properties . . . . .	58
3.2	Statistical interpretation . . . . .	58
4	Flux Potential and Reduced Potential . . . . .	60
4.1	The Kirchoff transform $\Phi$ : from Pressure $h$ to Flux Potential $\varphi$ . . . . .	60
4.2	The Reduced potential approach . . . . .	61
5	Analytical Solution For Cyclic Variation . . . . .	62
5.1	The special case of constant $\alpha$ , with variable $K_s(z)$ . . . . .	62
5.1.1	Analytical Expressions of Pressures and moisture profiles . . . . .	62
5.1.2	Analytical approach for the envelope of vertical fluctuations . . . . .	63
5.2	Solutions for sinusoidal $\ln K_s(z)$ and $\ln \alpha(z)$ . . . . .	65
5.2.1	Linearized solution in term of potential $\varphi$ . . . . .	66
5.2.2	Linearized solution in term of reduced potential $\tilde{\varphi}$ . . . . .	67
6	Simulation results, comparisons, and analyses . . . . .	70
6.1	Input parameters . . . . .	70
6.2	Setup of infiltration simulations . . . . .	71
6.3	Analysis of results for shallow (case 2) and deep water table (case 4) . . . . .	72
6.3.1	Shallow water table : pressure and moisture profiles . . . . .	72
6.3.2	Deep water table : pressure and moisture profiles . . . . .	75
7	Conclusion and Outlook . . . . .	78
5	Simulations multidimensionnelles d'écoulements en sols hétérogènes et aléatoires . . . . .	81
1	Introduction . . . . .	83
2	Récolement du modèle Exponentiel avec le modèle VGM . . . . .	84
2.1	Formulation de la méthode de récolement Exponentiel/VGM . . . . .	84
2.2	Propriétés hydrodynamiques des deux sols . . . . .	86
2.3	Validation numérique de l'approche du calage VGM/Exponentiel . . . . .	88

---

3	Simulations des écoulements en sols hétérogènes bicouches :	
	barrière capillaire . . . . .	90
3.1	Concepts et études antérieures . . . . .	90
3.2	Infiltration sous lame d'eau dans un système bicouche . . . . .	92
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	92
3.2.2	Analyses des résultats . . . . .	93
3.3	Injection "pulse" de durée finie dans un système bicouche . . . . .	96
3.3.1	Présentation du problème . . . . .	96
3.3.2	Analyses des résultats . . . . .	97
4	Simulations multidimensionnelles d'écoulements en sols aléatoires	101
4.1	revue bibliographique . . . . .	101
4.2	Champs aléatoires et milieux aléatoires . . . . .	102
4.2.1	Champs aléatoires statistiquement homogènes (in-	
conditionnel) . . . . .		102
4.2.2	Génération de milieux poreux aléatoires . . . . .	103
4.3	Infiltration à flux uniforme en $(x, y)$ et constant dans le	
temps . . . . .		105
4.3.1	Présentation du problème . . . . .	105
4.3.2	Analyse des résultats . . . . .	107
5	Conclusions . . . . .	109
6	Oscillatory flows in partially unsaturated soils : 1D	
	numerical experiments and analyses	111
1	Introduction . . . . .	114
2	The multi-front model . . . . .	116
2.1	General presentation of the Multi-Front model . . . . .	116
2.2	Multi-Front model parameters . . . . .	118
2.3	Applying Darcy's law and mass conservation . . . . .	119
3	Performance of the Multi-Front model . . . . .	120
3.1	Input parameters . . . . .	120
3.2	Bottom flux evolution $q_0(t)$ . . . . .	121
3.3	Total Head Profiles $H(z, t)$ . . . . .	122
4	Unsaturated flow dynamics through zero-flux planes . . . . .	123
4.1	Definition and theoretical relations for zero flux plane $Z_0(t)$	123
4.2	Results on zero flux plane dynamics ( $Z_0(t)$ ) . . . . .	124
5	Conclusions . . . . .	125
7	Désaturation au voisinage d'une cavité souter-	
	raîne : (Méthode numérique d'immersion)	127
1	Introduction . . . . .	129
2	Transmission d'une condition limite de succion . . . . .	130
2.1	Formulation du problème . . . . .	130

---

2.2	Difficultés et remèdes . . . . .	132
2.3	Résultats et discussion . . . . .	133
3	Application dessèchement tunnel roche argileuse . . . . .	134
3.1	Expérimentations numériques . . . . .	134
3.1.1	Géométrie du domaine de calcul . . . . .	134
3.1.2	Propriétés des deux milieux . . . . .	136
3.1.3	Condition initiale . . . . .	137
3.1.4	Conditions aux limites . . . . .	137
3.2	Résultats des simulations . . . . .	139
3.2.1	Bilan de masse . . . . .	139
3.2.2	Flux sortant par la face B3 . . . . .	141
3.2.3	Champs de pression . . . . .	142
4	Essai complémentaire de dessèchement en galerie cylindrique, sous succion $\psi = 9721 \text{ m}$ . . . . .	145
4.1	Présentation du test complémentaire . . . . .	145
4.2	Résultats et analyse . . . . .	146
4.2.1	Flux à travers la frontière B3 . . . . .	146
4.2.2	Profils verticaux de pression . . . . .	146
5	Conclusions . . . . .	148
8	Conclusions et perspectives . . . . .	151
	Références . . . . .	159
	Table des figures . . . . .	165
	Liste des tableaux . . . . .	173
	<b>Annexes</b> . . . . .	<b>175</b>
A		177
1	Infiltration verticale en régime permanent dans un sol homogène	178
1.1	Description du problème . . . . .	178
1.2	Écriture des solutions analytiques . . . . .	178
1.3	Valeurs critiques de $q_s/K_s$ . . . . .	179
2	Récolement du modèle Exponentiel/VGM pour un sol stratifié	180
2.1	Expressions exactes . . . . .	180
2.2	Expressions approchées . . . . .	181
B		183
1	Probabilités et variable aléatoires . . . . .	184

# Introduction générale

1

Ce mémoire de thèse intitulé « Modélisation multidimensionnelle des pressions et teneurs en eau dans le sol et le sous-sol : effets capillaires et gravitaires en présence d'hétérogénéités et de fluctuations » porte sur la modélisation 3D de la dynamique des teneurs en eau dans le sol et le sous-sol lorsque les écoulements sont à saturation variable (non-saturés ou partiellement saturés), par exemple en situation d'infiltration à partir de la surface du sol, ou en situation de dessèchement de la paroi d'une cavité souterraine, ou encore dans le cas de fluctuations temporelles hydrométéorologiques (cas des fluctuations tidales d'une nappe côtière).

Un des principaux objectifs scientifiques est d'analyser la réponse des écoulements souterrains à saturation variable, et ceci particulièrement les effets combinés capillaires et gravitaires (que nous essaierons d'éclairer lors des analyses), en présence d'hétérogénéités ou de fluctuations spatio-temporelles : variabilité aléatoire ou cyclique du sol, discontinuités, interfaces matérielles, et fluctuations d'origine hydrométéorologiques (sur ce dernier point, nous nous pencherons en particulier sur le cas d'une nappe côtière forcée par les marées, mais d'autres applications potentielles incluent les hyétogrammes de précipitations  $i(t)$ , ainsi que les fluctuations d'humidité de l'air et du taux d'évaporation potentielle aussi bien à la surface d'un sol qu'en sous-sol).

Sur le plan méthodologique, la modélisation que nous adoptons est macroscopique, fondée sur l'hypothèse de l'existence d'un Volume Élémentaire Représentatif, et basée sur une version généralisée de la loi de Darcy-Buckingham et de l'EDP (Equation aux Dérivées Partielles) de Richards multidimensionnelle exprimée en variables mixtes pression / teneur en eau. Notre modèle équationnel permet par exemple de représenter des excavations, des interfaces, et des hétérogénéités multidimensionnelles pour différents modèles non-linéaires des propriétés hydrodynamiques des sols (courbes de rétention d'eau et de conductivité hydraulique non-saturée), et aussi, pour divers types de conditions limites (nappe fluctuante ; drainage gravitationnel ; flux ; etc.).

Au total, les applications potentielles de cette recherche concernent le génie minier (galeries souterraines), la pollution souterraine (déchets toxiques, eaux saumâtres), l'hydrologie karstique, et l'hydrologie des sols nus ou cultivés (par exemple, prédire des eaux de pluies et des apports par irrigation en zones semi-arides : infiltration, drainage interne, formation de lames d'eau et/ou sous-écoulements).

Les recherches présentées dans ce mémoire de thèse concernent donc différents volets, dont le fil conducteur est l'analyse (théorique et numérique) de phénomènes d'écoulements en milieux poreux à saturation variable, contenant de fortes hétérogénéités et/ou perturbés par des fluc-

---

tuations temporelles d'origine hydrométéorologique. Ces différents effets prennent place tous en même temps dans la plupart des applications réelles (dessèchements / humectations, saturations partielles, hétérogénéité, forçages temporels), mais nous les avons « découplés » par commodité dans les différentes parties de cette recherche. Nous pouvons distinguer les développements suivants :

Une recherche préliminaire a été entamée, lors du démarrage de cette thèse, dans le cadre d'un partenariat de recherche entre l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) et l'Institut de Radioprotection et Sûreté Nucléaire (IRSN Fontenay-aux-Roses, France). L'objectif initial était de modéliser en 3D, à l'aide du code de calcul BIGFLOW 3D, la dynamique du front de désaturation d'une couche argileuse autour d'une galerie souterraine ventilée instrumentée, et ceci pour des échelles de temps très grandes (au moins de l'ordre du siècle, et jusqu'à des milliers de siècles). La motivation principale était que l'étude des cycles de désaturation et re-saturation dans la galerie est essentielle pour évaluer la tenue mécanique et les propriétés d'isolation d'un stockage souterrain de déchets radioactifs dans la roche argileuse (argilite). Nous avons pu bénéficier du contexte scientifique et technique de ce projet initial, et nous avons entamé un travail de modélisation des écoulements à saturation variable dans la roche en présence d'une cavité dont la paroi est soumise à une humidité relative donnée, d'où une succion fixée, obtenue par la loi de Kelvin régissant l'équilibre liquide/vapeur (la première étape seule a été modélisée : humidité relative de l'air supposée fixée plutôt que temporellement variable). Ce travail préliminaire a permis de mettre en évidence la difficulté conceptuelle et numérique qui accompagne la modélisation des écoulements dans des milieux composites (milieux poreux excavés, ou encore, microporeux/macroporeux). Nous verrons dans le chapitre 7 que notre approche de ce problème est une méthode d'« immersion », qui consiste à inclure l'excavation dans le domaine de modélisation comme un corps « macroporeux », dont le comportement hydrodynamique non linéaire est représenté, notamment, par une courbe de conductivité hydraulique non-linéairement anisotrope, avec de forts contrastes entre micro et macro poreux (une validation partielle de cette approche conceptuelle et numérique est présentée sur des cas tests).

Un autre volet de cette thèse concerne une étude analytique et numérique des profils verticaux de pression et de teneur en eau lors d'une infiltration supposée verticale, et non-saturante, à travers un sol hétérogène finement stratifié de façon cyclique (variation continue cyclique des paramètres des courbes de conductivité hydraulique et de rétention d'eau avec la profondeur). Des solutions analytiques exactes et approchées (perturbatives) sont obtenues en régime permanent, à l'aide de transformations de variables : la transformation de Khirchhoff (aboutissant à un potentiel de « flux » également appelé potentiel de Khirchhoff), et une nouvelle trans-

formation aboutissant à un potentiel réduit. Ces solutions sont analysées (effet de la longueur d'onde sur l'amplitude des fluctuations de pression) et elles sont comparées aux solutions numériques obtenues en maillage fin à l'aide du code volumes finis BIGFLOW3D (les régimes transitoires menant aux profils permanents hétérogènes sont également présentés). Cette étude est présentée dans le chapitre 4; elle fait également l'objet d'un article en anglais, qui est en préparation au moment de la rédaction de cette thèse, et qui sera très prochainement soumis pour publication dans une revue scientifique à comité de lecture.

Par ailleurs, nous nous sommes également penchés sur la phénoménologie de l'infiltration verticale à travers des systèmes multicouches ou bicouches, comportant cette fois-ci une ou plusieurs interfaces abruptes (discontinuités matérielles entre les couches) : par exemple, bicouche Limon sur Sable en présence d'une nappe plus ou moins profonde. De tels systèmes multicouches (avec discontinuité) sont étudiés analytiquement dans le chapitre 3, et par expérimentations numériques dans le chapitre 5. Dans le chapitre 3, il s'agit de valider le code volumes finis BIGFLOW3D en régime non-saturé dans le cas d'une discontinuité, ceci en profitant d'une des rares solutions analytiques disponibles pour ce type de problème (en régime permanent). Dans le chapitre 5, nous développons une étude numérique de nature « expérimentale », afin d'analyser les effets possibles de « barrière capillaire » lors de l'infiltration dans un système bicouche Limon/Sable ou Sable/Limon. Ces expérimentations numériques transitoires sont menées, en présence d'une nappe plus ou moins profonde, pour deux sols réels : le Guelph Loam, et le Fine Sand (sol expérimental caractérisé à l'IMFT dans les travaux antérieurs expérimentaux des doctorants Y. Wang et K. Alastal [14]). Nous développons aussi une méthode de récolement "matching" entre le modèle Van Genuchten / Mualem (VGM) et le modèle Exponentiel avec application pour ces deux sols en tenant compte de la discontinuité des paramètres à l'interface sable/limon.

Le cas des écoulements non-saturés est étudié, cette fois-ci, en régime transitoire fortement oscillatoire, dans une colonne de sable fin homogène, sous l'effet de fluctuations temporelles périodiques du niveau de la surface libre d'une nappe de plage. La colonne est partiellement saturée, et la condition limite inférieure est une condition de pression qui répond à un forçage tidal (nappe de plage). Ce travail est une extension d'un travail antérieur développé dans la thèse IMFT de K. Alastal (2012), qui a procédé à des expérimentations de laboratoire (colonne de sable et machine à marée) et à des analyses numériques (comprenant le développement initial d'une nouvelle méthode de modélisation multi-front). Nous nous sommes penchés ici notamment sur la validation numérique fine de la méthode multi-front pour le même scénario d'oscillations tidales. Nous montrons que la méthode permet en effet de simuler efficacement la dynamique oscillatoire des flux

---

et des profils de pression dans la colonne, avec un nombre limité de fronts (bien inférieur au nombre de nœuds nécessaires dans un modèle à grille fixe de type volumes finis). De plus, dans le cadre de cette méthode multi-front, nous avons analysé la phénoménologie capillaire/gravitaire des écoulements oscillatoires dans la colonne grâce à un suivi de la dynamique du plan de flux nul. (collaboration avec K. Alastal et D. Astruc). L'ensemble de cette étude, présentée dans le chapitre 6, fait actuellement l'objet d'un article en anglais, qui est en cours de révision au moment de la rédaction de cette thèse, et qui sera prochainement soumis pour publication dans une revue scientifique à comité de lecture.

Enfin, nous présentons dans la dernière partie du chapitre 5 une étude préliminaire des phénomènes multidimensionnels d'infiltration et de redistribution d'eau, notamment lorsque l'hétérogénéité du sol est elle-même multidimensionnelle. Cette section vise d'abord à tester l'extension des méthodes précédentes aux problèmes d'infiltration dans le cas d'hétérogénéités aléatoires pleinement multidimensionnelles, ou plus généralement, dans des sols pouvant comporter, outre une éventuelle structure en couche ou en strates, une variabilité spatiale de nature aléatoire. Les premiers tests sont utilisés pour tester la méthode de prises de moyennes des champs de pression et de teneur en eau 3D sous conditions d'apport uniforme à la surface du sol (en perspective, nous pourrions considérer des conditions d'apport d'eau localisées plutôt qu'uniformes).





Modèles équationnels et  
numériques des écoulements  
non-saturés et partiellement  
saturés

2

## Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	9
2	Notions de bases . . . . .	9
2.1	Caractéristiques physiques du sol . . . . .	9
2.1.1	Porosité . . . . .	9
2.1.2	Teneur en eau volumique . . . . .	9
2.1.3	Taux de Saturation . . . . .	10
2.1.4	Viscosité . . . . .	10
2.1.5	La conductivité hydraulique et la perméabilité . . . . .	10
2.1.6	Charge hydraulique . . . . .	11
2.2	Texture, structure et teneur en eau . . . . .	11
2.2.1	Texture du sol . . . . .	11
2.2.2	Structure du sol . . . . .	12
2.2.3	Relation teneur en eau - pression capillaire (Courbe de rétention) . . . . .	13
2.3	Différents types d'écoulement . . . . .	14
2.3.1	Écoulement saturé . . . . .	14
2.3.2	Écoulement non saturé . . . . .	14
2.3.3	Écoulement variablement saturé . . . . .	14
3	Paramétrisation du sol non saturé . . . . .	15
3.1	Modèle de teneur en eau $\theta(h)$ . . . . .	15
3.2	Modèle de conductivité hydraulique relative $K(h)$ . . . . .	16
3.3	Modèle Exponentiel et le modèle VGM . . . . .	17
3.4	Modèle de capacité capillaire $C(h)$ . . . . .	17
3.5	Modèle de diffusivité capillaire $D(h)$ . . . . .	18
4	Modèles cinétique et dynamique d'un milieu macroporeux . . . . .	20
4.1	Qu'est-ce qu'un milieu macroporeux ? . . . . .	20
4.2	Les modèles $\theta(h)$ et $K(h)$ d'un macroporeux . . . . .	21
5	Équations qui régissent l'écoulement en milieu poreux . . . . .	22
5.1	Loi de Darcy . . . . .	22
5.2	Équation de conservation de la masse . . . . .	23
5.3	Équation de Richards . . . . .	24
6	Loi de Darcy-Ward pour les écoulements en milieu macroporeux anisotrope . . . . .	25
7	Résumé et Conclusions . . . . .	25

---

## 1 Introduction

Ce chapitre purement théorique est consacré à une description phénoménologique du milieu poreux. En effet, au début de ce chapitre, nous rappelons quelques concepts de base qui interviennent dans la description des écoulements en milieux poreux (microporeux ou macroporeux). Nous présentons ensuite dans la deuxième partie une revue bibliographique de deux modèles des propriétés hydrodynamiques  $\theta(h)$  et  $K(h)$  les plus utilisés dans la littérature à savoir le modèle Van-Genuchten Mualem et le modèle Exponentiel. Une relation entre les différents paramètres de ces deux modèles sera développée. Nous définissons aussi un modèle  $(\theta(h), K(h))$  spécifique pour un milieu macroporeux. Enfin, la dernière partie introduit les équations régissant l'écoulement non saturés, ou partiellement saturés en milieux poreux isotrope ou anisotrope.

## 2 Notions de bases

### 2.1 Caractéristiques physiques du sol

#### 2.1.1 Porosité

La porosité est une propriété directement mesurable d'un milieu poreux. C'est le rapport entre le volume occupé par les vides  $V_{vide}$  et le volume total de la roche  $V_t$  (fraction entre 0 et 1).

$$\Phi = \frac{V_{vide}}{V_t} \quad (2.1)$$

Nous pouvons citer quelques valeurs pour des milieux géologiques consolidés comme : Gravier (0.25 à 0.40), Sable (0.25 à 0.50), Limon (0.35 à 0.50) et Argile (0.40 à 0.70). (Freeze et Cherry 1979 [30])

#### 2.1.2 Teneur en eau volumique

C'est le rapport entre le volume de l'eau  $V_{eau}$  contenu dans les pores (ou vides) du sol et le volume total  $V_t$  du sol considéré :

$$0 < \theta = \frac{V_{eau}}{V_t} < 1 \quad (2.2)$$

Il existe une teneur en eau minimale connue comme la teneur en eau résiduelle  $\theta_r$  qui représente une faible quantité d'eau absorbée dans les couches minces (potentiel de pression tend vers  $-\infty$ ).

### 2.1.3 Taux de Saturation

C'est le rapport entre le volume d'eau  $V_{eau}$  et volume de vides  $V_{vide}$  dans le sol, il est généralement exprimé en pourcentage :

$$S = \frac{V_{eau}}{V_{vide}} \quad (2.3)$$

Pour le sol sec, le taux de saturation est nul et lorsque le volume des vides est entièrement occupé par l'eau alors  $V_{eau} = V_{vide}$  ainsi le taux de saturation est égal à 1 (100 %).

### 2.1.4 Viscosité

C'est une propriété du fluide décrivant la capacité d'un fluide donné à résister à l'écoulement. Le coefficient de viscosité peut être défini de deux façons :

- La viscosité dynamique est la viscosité absolue  $\mu(kg/m/s)$
- La viscosité cinématique  $\nu(m^2/s)$  qui est la viscosité dynamique  $\mu$  divisée par la masse volumique  $\rho$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.4)$$

### 2.1.5 La conductivité hydraulique et la perméabilité

La perméabilité est une mesure de la capacité d'un matériau poreux de transmettre des fluides sous un gradient de potentiel appliqué. Le terme de conductivité hydraulique est le rapport entre cette perméabilité et la viscosité du fluide (généralement le fluide est l'eau). Plus un milieu est perméable plus le fluide s'écoule vite. La conductivité hydraulique et la perméabilité sont liées par la relation suivante (Freeze et Cherry 1979 [30]) :

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} = \frac{k g}{\nu} \quad (2.5)$$

avec :

- $k(m^2)$  : la perméabilité intrinsèque, c'est une propriété quantitative du matériau poreux qui est indépendante des propriétés du fluide,
- $\mu(kg/m/s)$  : la viscosité dynamique,
- $\nu(m^2/s)$  : la viscosité cinématique du fluide,
- $\rho(kg/m^3)$  : la masse volumique du fluide,
- $g(m/s^2)$  : l'accélération de la pesanteur

La conductivité hydraulique et la perméabilité intrinsèque sont des fonctions strictement croissantes avec le taux de saturation du milieu poreux. Lorsque le milieu est saturé, la conductivité hydraulique est maximum et nous parlons alors de conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ .

### 2.1.6 Charge hydraulique

En hydrogéologie, il est plus commun de remplacer la pression par la charge hydraulique équivalente. Bien que plus appropriée pour la modélisation de l'écoulement de l'eau dans des systèmes à densité constante, elle est appliquée aussi aux systèmes à densité variable et les systèmes multiphasiques. La charge est donnée par la somme du potentiel de pression relatif à la pression de l'air  $h$  et du potentiel gravitaire :

$$H = h + g_B \cdot x \quad (2.6)$$

avec :

- $g_B = \frac{-g}{|g|}$  : «  $g$  » étant le vecteur gravité
- $x$  : le vecteur des coordonnées du point dans le repère (OX, OY, OZ)
- $h$  : le potentiel de pression capillaire [m]

Le potentiel de pression  $h$  mesure la différence, exprimée en mètres d'eau, entre la pression de la phase liquide (l'eau) et celle de la phase gazeuse (l'air) :

$$-\infty \leq h = \frac{P_{eau} - P_{air}}{\rho g} \leq +\infty \quad (2.7)$$

En zone saturée,  $h$  représente la pression exercée en un point du sol par la colonne d'eau qui le surmonte. Comme le système est envahi d'eau, la pression de l'eau est plus forte que la pression d'entrée d'air ( $h > 0$ ). En zone non saturée,  $h$  représente l'intensité des forces de capillarité et d'adsorption qui attirent et lient la phase liquide à la phase solide ( $h < 0$ ).

## 2.2 Texture, structure et teneur en eau

### 2.2.1 Texture du sol

La texture du sol fait référence à la taille et à la proportion des particules minérales qui le composent. Plus spécifiquement, elle réfère à la proportion de sable (gros grains), de limon (grains moyens) et d'argile (grains fins) contenus dans le sol.

La texture du sol est le facteur qui a le plus d'effet sur la facilité et la vitesse de déplacement de l'eau dans le sol. Selon le pourcentage de chaque fraction minérale (voir le tableau.2.1), il est possible de regrouper les sols en quatre groupes :

- Sols sableux : sont principalement constitués de sables grossiers. Ils offrent une bonne aération et un bon drainage, ils sont généralement pauvres en éléments nutritifs et ont tendance à être acides.
- Sols limoneux : sont surtout formés de sables fins et de limons. Ils ont tendance à former une croûte en surface sous l'effet des pluies et des arrosages, ce qui les rend imperméables à l'eau et à l'air.

- Sols argileux : sont généralement des sols riches qui retiennent bien l'eau et les éléments nutritifs. Ils sont toutefois mal aérés, mal drainés et ils ont tendance à être alcalins.
- Sols équilibrés : sont d'excellents sols de culture, car ils présentent un bon équilibre du point de vue de l'aération, du drainage et de la rétention de l'eau et des éléments nutritifs.

Tableau 2.1: Critères de classification du sol.

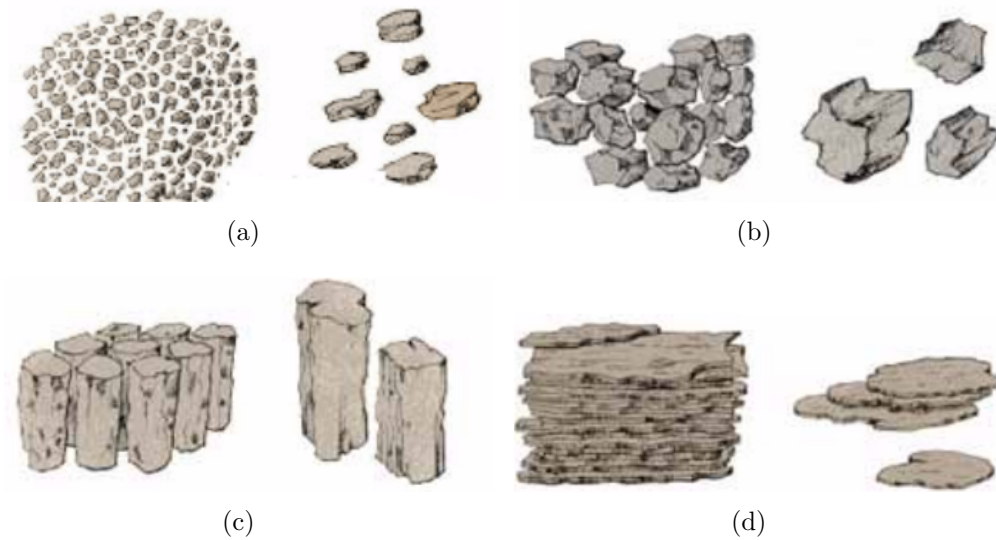
Texture du sol	Sols sableux	Sols limoneux	Sols argileux	Sols équilibrés
% du sable	> 70	0 à 20	0 à 25	40 à 60
% du limon	0 à 30	> 80	0 à 40	30 à 50
% d'argile	0 à 15	0 à 15	> 25	15 à 25

### 2.2.2 Structure du sol

La structure du sol est définie comme le mode d'organisation des particules primaires de ce sol, c'est-à-dire la manière dont les particules sont situées et reliées les unes par rapport aux autres.

Les particules isolées, une fois assemblées, apparaissent comme des particules plus grosses appelées des grumeaux qui s'organisent en agrégats. La texture du sol et sa teneur en matière organique sont les facteurs déterminants de la structure du sol. Nous pouvons distinguer quatre principaux types de structures (voir Fig.2.1) :

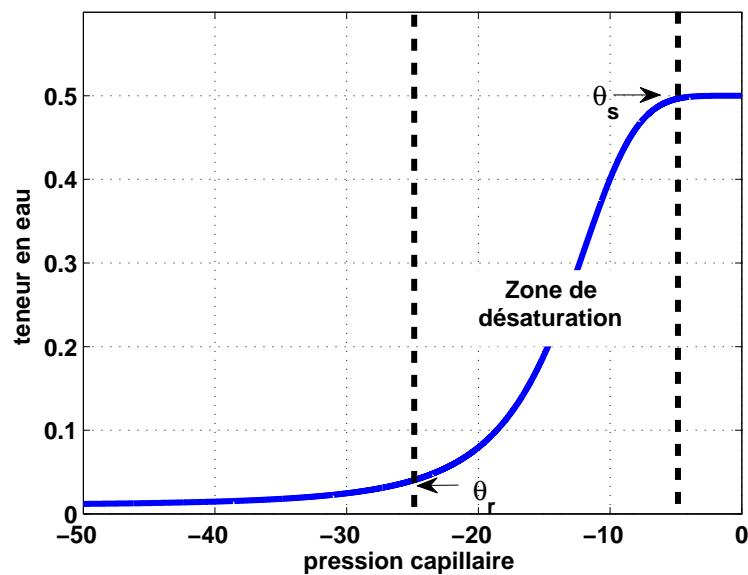
- Structure granulaire et grumeleuse (Fig.2.1(a)) : les particules individuelles de sable, limon et argile s'agrègent en petits grains presque sphériques. L'eau circule très facilement dans ces sols.
- Structure anguleuse (Fig.2.1(b)) : les particules s'agrègent en bloc presque cubique ou polyédriques dont les angles sont plus ou moins tranchants. Ces blocs indiquent la résistance du sol à la pénétration de l'eau.
- Structure en colonne (Fig.2.1(c)) : les particules ont formé des colonnes séparées par des fentes verticales minuscules mais bien visibles. L'eau circule avec beaucoup de difficulté et le drainage est médiocre.
- Structure lamellaire (Fig.2.1(d)) : les particules s'agrègent en fines plaquettes ou lamelles superposées horizontalement. Les plaquettes gênent considérablement la circulation de l'eau.



**FIGURE 2.1:** Type de structure du sol. (a) : Granuleuse et grumeleuse, (b) : Anguleuse, (c) : En colonne, (d) : Type de structure du sol.

### 2.2.3 Relation teneur en eau - pression capillaire (Courbe de rétention)

Cette courbe décrit la variation de la teneur en eau en fonction de la pression capillaire, elle est spécifique à un sol, vue que les forces de capillarité et d'absorption dépendent de la structure et de la texture du sol.



**FIGURE 2.2:** Courbe de rétention.



Lors de l'imbibition d'un sol sec, les plus petits pores sont envahis par l'eau en premier ensuite les plus gros pores. Au fur et mesure que les pores se remplissent d'eau, la pression capillaire  $h$  augmente et donc la teneur en eau augmente aussi et atteint une valeur limite appelée teneur en eau à saturation  $\theta_s$  (voir Fig.2.2). Vu que les vides interstitiels ne sont pas tous connectés et par suite le milieu poreux n'est pas complètement envahi par l'eau, la teneur en eau est rarement égale à la valeur  $\Phi$  de la porosité ( $0.8 < \frac{\theta_s}{\Phi} < 1$ , Zammit 1999 [86]).

Lors du drainage d'un sol humide, les plus gros pores contenant de l'eau se vident en premier, les plus petits en dernier. A la fin d'une phase de drainage, une petite quantité d'eau reste liée aux particules à cause des forces d'adsorption. Cette quantité d'eau qui est associée à la teneur en eau résiduelle  $\theta_r$ . est obtenue théoriquement pour de très faibles valeurs  $h$  ( $h = -\infty$ ), en fait cette eau ne circule pas dans le milieu poreux, mais il existe une teneur en eau effective  $\theta_e$  pour définir la part d'eau qui circule réellement dans le milieu.

## 2.3 Différents types d'écoulement

### 2.3.1 Écoulement saturé

C'est un écoulement en milieu poreux saturé dans lequel tous les vides sont totalement remplis d'eau. La teneur en eau volumique est égale à la porosité et la conductivité hydraulique reste constante (ne dépend pas de la pression) et elle est égale à la conductivité hydraulique à saturation.

### 2.3.2 Écoulement non saturé

C'est un écoulement en milieu poreux non saturé où les vides ne sont que partiellement remplis d'eau et le reste par l'air. Généralement, la résistance à l'écoulement de l'air est négligée (viscosité  $\approx 0$ ) et la pression de l'air est en équilibre permanent avec la pression de l'atmosphère. La teneur en eau et la conductivité hydraulique dépendent toutes les deux de la pression de l'eau.

### 2.3.3 Écoulement variablement saturé

L'écoulement de l'eau peut se faire soit en mode totalement saturé ou non saturé soit les deux à la fois. Dans le cas général, plusieurs zones saturées et non saturées peuvent coexister et leurs distributions spatiales peut évoluer dans le temps. Pour modéliser l'écoulement en milieu variablement saturé dans un seul domaine et avec une seule équation, l'équation de Richards est reformulée en variables mixtes et sous une forme conservative, avec deux variables d'état à savoir la teneur en eau et la pression (voir Ababou et al. 1988 [2]).

### 3 Paramétrisation du sol non saturé

La connaissance des propriétés hydrodynamiques d'un milieu poreux est indispensable pour la résolution numérique des équations décrivant les écoulements comme l'équation de Richards (voir section 5). Dans cette section, nous présentons une revue synthétique des différents modèles  $\theta(h)$  et  $K(\theta)$  utilisés dans ce travail (voir aussi la revue bibliographique du chapitre 4).

#### 3.1 Modèle de teneur en eau $\theta(h)$

Dans les applications hydrologiques en zone non saturée, les modèles d'humidité  $\theta(h)$  (le tableau 2.2) sont exprimés en fonction de la saturation effective  $S$  qui s'écrit sous cette forme :

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.8)$$

Où  $\theta_r$  est la teneur en eau résiduelle et  $\theta_s$  est la teneur en eau à saturation.

**Tableau 2.2:** Modèle de saturation effective (Van-Genuchten / Exponentiel).

	Van Genuchten (1980)	Exponentiel <sup>1</sup>
Modèle $\theta(h)$	$S = \left[ \frac{1}{1 + (-\alpha_{VGM}h)^n} \right]^m \quad (2.9)$	$S = e^{\beta(h-h_b)} \quad si \ h < h_b$ $\theta = \theta_s \quad si \ h > h_b \quad (2.10)$
	Burdine(1953)   Mualem(1976)	
	$m = 1 - \frac{2}{n}$   $m = 1 - \frac{1}{n}$	

- $\alpha_{VGM}$  : Paramètre de longueur capillaire inverse lié à  $\theta(h)$
- $n$  : Paramètre lié à la distribution de la taille des pores du milieu poreux.
- $\beta$  : Paramètre de longueur capillaire inverse lié à  $\theta(h)$ , en particulier, le paramètre  $\frac{1}{\beta}$  pourrait être lié à une pression caractéristique d'entrée d'eau.
- $h_b$  : Pression d'entrée d'air au-dessus de laquelle le sol est saturé ( $\theta \approx \theta_s$ )

1. Le modèle exponentiel pour  $\theta(h)$  est un modèle apparenté au modèle  $K(h)$  exponentiel de Gardner 1958 et de Rijtema 1969 (avec  $h_b = 0$ ). Il est utilisé dans plusieurs chapitres de ce travail.

### 3.2 Modèle de conductivité hydraulique relative $K(h)$

La conductivité hydraulique dépend de l'état de la pression et elle atteint sa valeur maximale à saturation. En écoulement variablement saturé, elle est définie comme le produit de la conductivité à saturation  $K_s$  et de la conductivité relative  $K_r$ . Nous avons donc :  $K(\theta) = K_s K_r(\theta)$  avec  $0 < K_r < 1$ . Les modèles fonctionnels  $K_r(S)$  (Tableau 2.3) de conductivité hydraulique sont établis à partir de modèles capillaires. Ils permettent d'obtenir la fonction  $K(h)$  (Tableau 2.4) à partir d'un modèle d'humidité, à condition que la fonction  $\theta(h)$  soit une bijection pour définir la fonction inverse  $h(\theta)$ . Il existe aussi des modèles  $K(h)$  empiriques ou proposés afin de déterminer des solutions analytiques de certains problèmes d'écoulement en milieux insaturés.

**Tableau 2.3:** Modèles fonctionnels de conductivité relatives  $K_r(S_e)$ .

Auteur (s)	Modèle $K_r(S)$
Burdine (1953)	$K_r(S) = S^{n_B+1} \left[ \int_0^S \frac{ds}{h(s)^2} \right] \left[ \int_0^1 \frac{ds}{h(s)^2} \right]^{-1} \quad (2.11)$
Mualem (1976)	$K_r(S) = S^{n_M} \left[ \int_0^S \frac{ds}{h(s)^2} \right]^2 \left[ \int_0^1 \frac{ds}{h(s)^2} \right]^{-2} \quad (2.12)$

**Tableau 2.4:** Modèles de conductivité relatives  $K_r(h)$ .

Modèle $K_r(h)$	Van-Genuchten (1980)	Burdine (1953)	$K_r(h) = \frac{1 - (-\alpha_{VGM}h)^{n-2} [1 + (-\alpha_{VGM}h)^n]^{-m}}{[1 + (-\alpha_{VGM}h)^n]^{2m}} \quad (2.13)$
		Mualem (1976)	$K_r(h) = \frac{[1 - (-\alpha_{VGM}h)^{n-1} (1 + (-\alpha_{VGM}h)^n)^{-m}]^2}{[1 + (-\alpha_{VGM}h)^n]^{m/2}} \quad (2.14)$
	Gardner (1958) Rijtema <sup>2</sup> (1969)	$K_r(h) = e^{\alpha(h-h_b)} \quad si \quad h < h_b \quad (2.15)$ $K_r(h) = 1 \quad si \quad h > h_b$	

2. Rijtema 1969 a repris le modèle de Gardner 1958 (avec  $h_b = 0$ ) qui ne décrit bien le sol que sur des plages restreintes de  $h$ . Il a introduit la pression d'entrée d'air ( $h_b = 0$ )

### 3.3 Modèle Exponentiel et le modèle VGM

Noter, à partir d'ici, que nous considérons que le "modèle" du sol sera défini par les paires de courbes  $(\theta(h), K(\theta))$  ou bien  $(\theta(h), K(h))$ . Nous avons donc ici les deux "modèles" suivants :

- Le modèle VGM (Van-Genuchten Mualem) est défini par :  
 $\theta(h)$  : (Equation.2.9)  
 $K(h)$  : (Equation.2.14)
- Le modèle Exponentiel qui a été présenté par Mckee et Bumb 1984 [50] est défini par :  
 $\theta(h)$  : (Equation.2.10)  
 $K(h)$  : (Equation.2.15)

### 3.4 Modèle de capacité capillaire $C(h)$

La capacité capillaire d'un sol est une caractéristique des phénomènes de stockage et de déstockage de l'eau dans le sol. Elle est définie comme étant la pente de la relation  $\theta(h)$  et elle représente la variation de teneur en eau par unité de variation de la pression. Elle apparaît dans l'équation de Richards sous la forme suivante :

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh} \quad (2.16)$$

**Tableau 2.5:** Modèles de capacité capillaire en fonction de  $h$ .

Auteur (s)		Fonction $C(h)$
Van-Genuchten (1980)	Burdine (1953)	$C(h) = \alpha_{VGM}(\theta_s - \theta_r)(n - 2) \frac{(-\alpha_{VGM}h)^{n-1}}{[1 + (-\alpha_{VGM}h)^n]^{\frac{2n-2}{n}}} \quad (2.17)$
	Mualem (1953)	$C(h) = \alpha_{VGM}(\theta_s - \theta_r)(n - 1) \frac{(-\alpha_{VGM}h)^{n-1}}{[1 + (-\alpha_{VGM}h)^n]^{\frac{2n-1}{n}}} \quad (2.18)$
Exponentiel		$C(h) = \beta(\theta_s - \theta_r)e^{\beta(h-h_b)} \quad (2.19)$

pour mieux décrire les sols ( $h < h_b$ )

Tableau 2.6: Modèles de capacité capillaire en fonction de  $S_e$ .

Auteur (s)		Fonction $C(S_e)$
Van-Genuchten (1980)	Burdine (1953)	$C(S) = \alpha_{VGM}(\theta_s - \theta_r)(n - 2) \frac{\left(S^{\frac{n}{1-n}} - 1\right)^{\frac{n-1}{n}}}{S^{\frac{2-2n}{n-1}}} \quad (2.20)$
	Mualem (1953)	$C(S) = \alpha_{VGM}(\theta_s - \theta_r)(n - 1) \frac{\left(S^{\frac{n}{1-n}} - 1\right)^{\frac{n-1}{n}}}{S^{\frac{1-2n}{n-1}}} \quad (2.21)$
Exponentiel		$C(S) = \beta(\theta_s - \theta_r)S \quad (2.22)$

Le tableau 2.5 et le tableau 2.6 présentent les modèles de capacité capillaire respectivement en fonction de la pression ( $h$ ) ou de la saturation effective ( $S_e$ ).

La fonction  $C(h)$  (Eq.2.18) du modèle de Van-Genuchten Mualem (VGM) s'annule à saturation en  $h = 0$  et présente un maximum  $C_{max}$  (Eq.2.23) pour une pression  $h_{max} \neq 0$  (Eq.2.24) pour laquelle la courbe  $S(h)$  marque un point d'inflexion.

$$C_{max} = \alpha(\theta_s - \theta_r)(n - 1) \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{2n-1}{n}}} \quad (2.23)$$

$$h_{max} = -\frac{1}{\alpha_{VGN}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.24)$$

Nous pouvons constater aussi que la capacité capillaire du modèle exponentiel (Eq.2.19) est une fonction monotone croissante jusqu'à  $h = 0$ .

### 3.5 Modèle de diffusivité capillaire $D(h)$

La diffusivité hydraulique  $D(m^2/s)$  (voir le tableau.2.7) du sol est un concept introduit par Childs et Collis-George 1950 [26], elle est définie comme le rapport de la conductivité hydraulique du sol à la fonction inverse de sa capacité capillaire. Nous ne pouvons utiliser cette équation que pour des sols homogènes non saturés car pour le sol saturé ( $h = 0$ ), la capacité s'annule et par suite la diffusivité devient infinie. Cette grandeur est écrite de la forme suivante :

$$D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} \quad (2.25)$$

Chaque type de sol a une courbe de diffusivité hydraulique dont les segments croissants peuvent être approchés par une relation empirique de la forme (Musy, Soutter 1991 [53]) :

$$D(\theta) = ae^{b\theta} \quad (2.26)$$

Nous constatons d'après l'expression de la diffusivité du modèle exponentiel (Eq.2.30) que pour  $\alpha = \beta$ , la diffusivité hydraulique devient constante et définit ainsi un sol linéaire. Dans le cas où les deux paramètres sont différents et surtout pour  $\beta = \frac{\alpha}{3}$ , la diffusivité hydraulique devient plus réaliste, elle est une fonction de puissance de la saturation effective.

$$D(S) = \frac{K_s}{\beta(\theta_s - \theta_r)} S^2 \quad (2.27)$$

**Tableau 2.7:** Modèles de diffusivité hydraulique en fonction de  $S$ .

Auteur (s)		Fonction $D(S)$
Van-Genuchten (1980)	Burdine (1953)	$D(S) = \frac{K_s S^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( 1 - S^{\frac{n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \right]^2}{\alpha_{VGM}(\theta_s - \theta_r)(n-2) \left( S^{\frac{n}{2-n}} - 1 \right)^{\frac{n-2}{n}} S_e^{\frac{2n-2}{n-1}}} \quad (2.28)$
	Mualem (1976)	$D(S) = \frac{K_s S^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]^2}{\alpha_{VGM}(\theta_s - \theta_r)(n-1) \left( S_e^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{\frac{n-1}{n}} S_e^{\frac{2n-2}{n-1}}} \quad (2.29)$
Exponentiel		$D(S) = \frac{K_s}{\beta(\theta_s - \theta_r)} S^{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \quad (2.30)$

## 4 Modèles cinétique et dynamique d'un milieu macroporeux

### 4.1 Qu'est-ce qu'un milieu macroporeux ?

Un milieu macroporeux peut être considéré comme étant un milieu poreux très ouvert, tels que les sols grossiers, les digues en agrégats grossiers, les bancs de galets et les milieux très fissurés (sols à fentes de dessèchement, trous de vers, fissures de dissolution en aquifères karstiques, etc.).

Ces milieux grossiers qui sont caractérisés par des vitesses d'écoulements importantes se trouvent généralement en surface ou au sein de milieux « microporeux ». A cause de la discontinuité macroporeux/microporeux, il se pose un problème de modélisation des échanges de masses d'eau entre ces deux types de milieux, c'est à dire du couplage d'écoulements, dont les échelles de temps et d'espace caractéristiques peuvent être très différentes.

Cette approche originale, que nous allons présenter, conduit à prendre en compte explicitement deux effets distincts : (Ababou et al.(2002)[12])

- Effets dynamiques : à cause du fort nombre de Reynolds, la perte de charge n'est plus linéaire, les effets inertiels deviennent importants et la loi de Darcy est remplacée par la loi quadratique en vitesse d'Ergun-Ward-Forchheimer.
- Effet cinétiques : La courbe de rétention teneur en eau/pression est une fonction en escalier (ou quasi-escalier, vue la discrétisation numérique) conduisant à une imbibition ou drainage instantané de la porosité à tout endroit où il existe une surface libre.

Ainsi et pour mieux gérer les mouvements de surface libre en milieux macroporeux, il est nécessaire de paramétrer la relation  $\theta(h)$  qui traduit les propriétés cinétiques de remplissage/vidange et la relation  $K(h)$  qui traduit les propriétés dynamiques de perte de charge de l'écoulement selon la direction et le degré de saturation.

## 4.2 Les modèles $\theta(h)$ et $K(h)$ d'un macroporeux

Le modèle de teneur en eau  $\theta(h)$  est une fonction Heaviside ("fonction saut<sup>3</sup>") et le modèle  $K(h)$  de conductivité hydraulique d'un milieu macroporeux est défini de la même façon .

Ces fonctions particulières (voir la figure.2.3) ne demandent comme paramètres que la conductivité à saturation et la porosité efficace. Elles peuvent être associées au modèle d'infiltration de Green et Ampt 1911 [33] qui supposent un front d'infiltration abrupt dans un sol initialement sec.

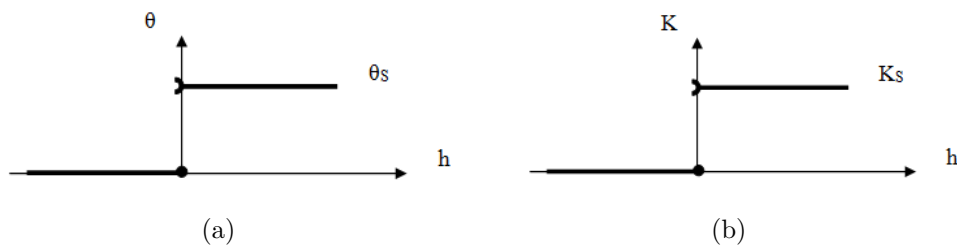


FIGURE 2.3: Modèle d'un milieu macroporeux par Larabi 1994 [43].

Ces modèles ont été introduits par Larabi 1994 [43] dans un code à éléments finis (GEOPROF) dans une méthode de modélisation des écoulements 3D saturés à surface libre en milieux poreux hétérogènes. Il a aussi introduit en 1994, une conductivité hydraulique relative  $K_d$  pour les zones non saturées pour éviter des problèmes numériques liés à la singularité de la matrice des conductivités.

La valeur de  $K_d$  doit être très petite relativement à la valeur à saturation  $K_s$  et peut être prise de l'ordre de  $K_s/100$  . Le calcul explicite de la capacité capillaire  $C(h)$  en chaque nœud du domaine donne toujours une valeur nulle, ce qui empêche tout amorcement d'un mouvement de la surface libre.

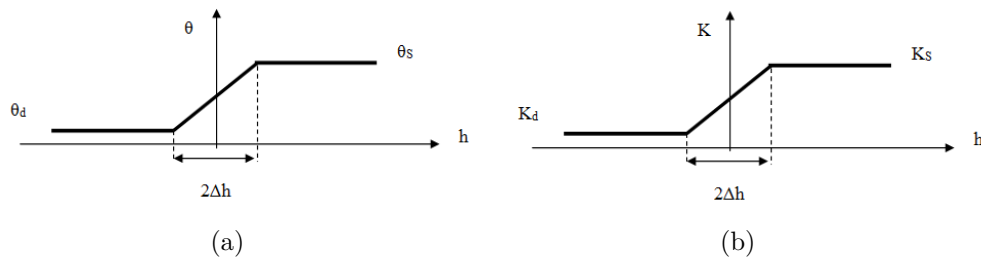


FIGURE 2.4: Modèle d'un milieu macroporeux par Sbai 1999 [68] .

3. Comme  $h = h(x,t)$ , la fonction saut  $U(h)$  devient en fait une fonction linéaire par morceaux de "h" à cause de la discretisation numérique de  $x$  et  $t$



En 1999, Sbai [68] a légèrement modifié ces fonctions idéales pour le code GeoProf à éléments finis. Pour ce modèle, la capacité capillaire est non nulle aux nœuds dont la pression est comprise entre  $-\Delta h$  et  $\Delta h$ , ce qui autorise le mouvement de la surface libre située en ces nœuds.

En 2000, Trégarot [73] a repris ces modifications pour les adapter au code volumes finis BIGFLOW (voir chapitre 3). Il a essayé de définir une valeur de  $\Delta h$  qui doit être de telle sorte que deux nœuds situés de chaque côté d'une surface libre ( $h = 0$ ) sont caractérisés par une capacité capillaire non nulle. D'où la valeur suivante de  $\Delta h = \text{Max}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

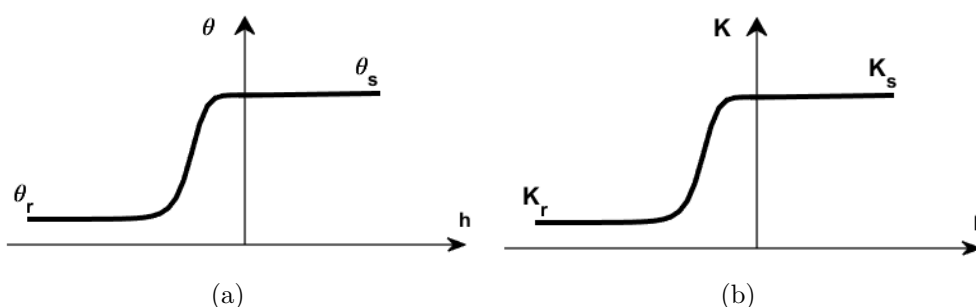


FIGURE 2.5: Modèle d'un milieu macroporeux 2016.

Dans ce travail, les relations  $\theta(h)$  et  $K(h)$  sont définies en utilisant le modèle de VGM et en se basant sur le fait qu'un milieu macroporeux correspond au cas asymptotique où (cf. la figure 2.5) :

- Le paramètre d'échelle ou la longueur capillaire " $\frac{1}{\alpha}$ " tend vers zéro.
- Le paramètre de forme " $n.m = n(1 - \frac{1}{n}) = n - 1$ " tend vers l'infini.

## 5 Équations qui régissent l'écoulement en milieu poreux

### 5.1 Loi de Darcy

La loi de Darcy exprime la densité de flux  $\vec{q}$  [ $m/s$ ] proportionnellement au gradient de charge hydraulique  $\vec{\nabla}H$ . La loi a été formulée par Henry Darcy 1856 [34] en se basant sur des résultats des expériences 1D dans des colonnes formées de sable homogène et isotrope, et elle a été généralisée plus tard par Buckingham 1907 [22] pour les écoulements saturés et non saturés en milieux hétérogènes.

La densité de flux  $\vec{q}$  est aussi appelée la vitesse de filtration. Elle est reliée à la vitesse "u" d'écoulement par la relation suivante :  $\vec{q} = \theta_e \vec{u}$ , où  $\theta_e$  est la teneur en eau effective du milieu poreux. La loi de Darcy-Buckingham est exprimée comme suit :

$$\vec{q} = -\mathbf{K}(h, \vec{x}) \vec{\nabla} H = -\mathbf{K}(h, \vec{x}) \vec{\nabla} (h + g_B \cdot \vec{x}) \quad (2.31)$$

avec :

- $\vec{q} (m/s)$  : Vecteur densité de flux
- $H (m)$  : Charge hydraulique
- $h (m)$  : Pression relative de l'eau
- $g_B$  : Vecteur de gravité normalisé,  $g_B = -\vec{g}/g$
- $\vec{x}$  : Vecteur des coordonnées du point.

$\mathbf{K} (m/s)$  représente le tenseur des conductivités hydrauliques (écrite sous une forme matricielle) :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{YZ} \\ K_{ZX} & K_{ZY} & K_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Si le repère principal d'anisotropie est  $(OX, OY, OZ)$  alors le tenseur  $\mathbf{K}$  peut également être réduit à (Freeze et Cherry 1979) :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & K_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & K_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

La loi de Darcy n'est valide que pour un écoulement laminaire, ce qui est généralement le cas dans les milieux poreux. La vérification de cette condition se fait grâce à l'utilisation du nombre de Reynolds  $Re$  (paramètre adimensionnel) qui mesure le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité pour quantifier l'importance relative de ces deux types de force. Le nombre de Reynolds est donné par la relation suivante :

$$Re = \frac{qD}{\nu} \quad (2.34)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $D$  est une longueur ou un diamètre représentatif de l'écoulement.

## 5.2 Équation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse traduit le fait que la vitesse de décroissance de la teneur en eau par unité de volume de milieu poreux est égale à la divergence du flux.

Ce principe peut s'écrire sous la forme suivante (ABABOU 2008 [9]) :

$$\frac{\partial \theta_e(h)}{\partial t} = \frac{\partial [\theta(h) - \theta_r]}{\partial t} = -\nabla \vec{q} \quad (2.35)$$

avec :

- $\theta_e(m^3/m^3)$  : Teneur en eau volumique effective
- $\theta_r(m^3/m^3)$  : Teneur en eau résiduelle
- $\vec{q}(m/s)$  : Vecteur de flux

**Prise en compte de la compressibilité** : L'équation de conservation de la masse en présence de compressibilité est de la forme suivante :

$$\frac{\partial \Theta(h)}{\partial t} = -\nabla \vec{q} \quad (2.36)$$

La quantité  $\Theta(h)$  qui représente la teneur en eau totale (volume d'eau par unité de volume de l'espace) tient compte de l'effet de la compressibilité et l'équilibre capillaire air/eau. Quant à  $\theta(h)$ , il tient compte seulement de l'équilibre air/eau sans les effets de la compressibilité.

$$\Theta(h) = \theta(h) + S_s U(h) \quad (2.37)$$

avec :

- $U(h) = \text{Max}(0, h)$
- $S_s$  : Coefficient d'emménagement spécifique élastique ( $m^3/m^3/m$  ou  $m^{-1}$ ), c'est le volume d'eau libéré ou emmagasiné dans une unité de volume du milieu poreux, pour une unité de variation temporelle de la charge hydraulique ou de la pression.

### 5.3 Équation de Richards

Dans le cas général d'écoulement variablement saturé, l'effet de déplacement de l'air est négligé à cause de la grande différence avec la viscosité dynamique de l'eau. Dans ce cas le problème variablement saturé d'écoulement à deux phases (air/liquide) est réduit à un problème d'écoulement monophasique où l'air est considéré en équilibre statique.

De plus, nous associons à cette approximation le fait que la phase air est connectée à l'atmosphère. L'équation de Richards est obtenue en insérant la loi de Darcy-Buckingham dans l'équation de conservation de la masse en admettant que l'air reste à pression constante et l'eau est incompressible.

Elle est exprimée comme suit :

$$\frac{\partial \theta_e(h)}{\partial t} = \text{div} [K(h, \vec{x}) \text{grad}(h + \vec{g}_B \cdot \vec{x})] \quad (2.38)$$

En utilisant la règle de dérivation de Leibnitz ( $\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \frac{\partial \theta_e}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$ ) avec  $C = \frac{\partial \theta_e}{\partial h}$ , l'équation de Richards, en fonction de la pression, est écrite sous cette forme :

$$C(h, \vec{x}) \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div} [K(h, \vec{x}) \text{grad} (h + \vec{x} \cdot \vec{q})] \quad (2.39)$$

En introduisant la diffusivité capillaire  $D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta}$  dans l'équation de Richards, nous obtenons, pour un milieu homogène, l'équation de diffusion de teneur en eau, où l'inconnue est  $\theta$  :

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = \text{div} [D(\theta) \overrightarrow{\text{grad}} \theta] + \frac{dK(\theta)}{d\theta} (\vec{g}_B \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta) \quad (2.40)$$

Nous n'utilisons pas cette équation, car elle n'est valable que pour  $h \leq 0$ .

## 6 Loi de Darcy-Ward pour les écoulements en milieu macroporeux anisotrope

Une loi de perte de charge linéaire + quadratique en vitesse a été proposée par Trégarot [73] pour représenter la dynamique des écoulements en milieu macroporeux partiellement saturé isotrope ou anisotrope. Cette loi généralisée reprend, pour les milieux partiellement saturés, la loi inertielle quadratique développée par Forchheimer, Ward, puis ensuite Knupp et Lage 1995 [42] pour les milieux totalement saturés. Cette nouvelle loi a été incorporée au code BIGFLOW 3D, en généralisation de la loi de Darcy non saturée. Pour les détails, voir la thèse de Trégarot [73].

## 7 Résumé et Conclusions

Ce chapitre est consacré à la présentation des modèles hydrodynamiques (modèle Exponentiel et modèle VGM) des propriétés hydrodynamiques  $\theta(h)$  et  $K(\theta)$  utilisées dans ce travail ainsi que des équations générales de l'écoulement pour les milieux saturés ou non, et plus généralement, pour les régimes d'écoulement variablement saturés (dans le temps) et partiellement saturés (en espace) : par exemple, ceci peut se produire dans un scénario d'inondation, provoquant dans une première phase la formation de nappes superficielles ou perchées, et suivi par une deuxième phase de drainage interne et/ou d'évaporation.

De même, nous avons défini deux notions originales qui généralisent la loi de Darcy et la relation pression-teneur en eau, en introduisant dans les modèles :

- un comportement macroporeux dynamique inertiel (pour les écoulements rapides dans les zones saturées des milieux grossiers),

- ainsi qu'un comportement macroporeux cinétique (pour représenter les phénomènes de saturation/désaturation des milieux grossiers),
- et enfin, un comportement de conduction hydraulique anisotrope non-linéaire en pression, pour représenter les phénomènes de transmission dans des directions privilégiés (par exemple dans certaines zones grossières ou excavées des milieux macroporeux).

Validations de simulations  
numériques à saturation  
variable (Code Volumes  
Finis 3D)

3

## Sommaire

1	Introduction . . . . .	29
2	Description du code Volumes Finis 3D BIGFLOW . . . . .	29
2.1	Historique du code BIGFLOW . . . . .	29
2.2	Les méthodes numériques utilisées dans BIGFLOW . . . . .	30
2.2.1	Domaine de calcul . . . . .	30
2.2.2	Discrétisation en espace . . . . .	31
2.2.3	Discrétisation en temps . . . . .	32
2.3	La forme générique du code BIGFLOW . . . . .	32
2.4	Principales procédures du code . . . . .	33
2.4.1	Les conditions initiales . . . . .	34
2.4.2	Les conditions aux limites . . . . .	35
3	Tests et validation du code BIGFLOW en présence d'interfaces . . . . .	35
3.1	Barrière capillaire (Infiltration) . . . . .	35
3.1.1	Formulation des solutions analytiques . . . . .	35
3.1.2	Caractéristiques de la simulation numérique . . . . .	36
3.1.3	Analyse des résultats . . . . .	37
3.2	Problème de la rizière (Infiltration partiellement saturée) . . . . .	39
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	39
3.2.2	Nappe peu profonde . . . . .	40
3.2.3	Nappe profonde . . . . .	41
4	Tests et validation des modèles hydrodynamiques $\theta(h,x)$ et $K_{ii}(h,x)$ d'un macroporeux . . . . .	43
4.1	Évaporation naturelle d'une nappe alimentée par deux réservoirs . . . . .	43
4.1.1	Présentation du problème d'évaporation et solutions analytiques . . . . .	43
4.1.2	Expérimentations numériques . . . . .	44
4.1.3	Solutions numérique <i>vs.</i> Solutions analy- tiques . . . . .	45
4.2	Pompage localisé dans un aquifère . . . . .	47
4.2.1	Présentation du problème de pompage et solutions analytiques . . . . .	47
4.2.2	Expérimentations numériques . . . . .	48
4.2.3	Flux à travers les frontières . . . . .	49
4.2.4	Solutions numériques <i>vs.</i> Solutions analy- tiques (régime permanent) . . . . .	49
5	Conclusions . . . . .	50

## 1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons le Code BIGFLOW qui utilise une méthode de discrétisation en Volumes Finis (V.F.) et qui est utilisé dans cette thèse pour simuler l'écoulement 1D/3D en milieu poreux variablement saturé. Dans le but de valider ce code, nous allons utiliser des solutions analytiques établies par Ross 1990 [65], lors de son étude du phénomène de la barrière capillaire de diversion le long d'une interface horizontale ainsi que des solutions analytiques développées par nous même pour le problème de la rizière. L'étude dans des conditions simplifiées, du comportement hydrodynamique d'un milieu macroporeux anisotrope fera l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. Nous allons modéliser les extractions naturelles que se soient infiltration ou évaporation et aussi les extractions artificielles telles que le pompage ou/et l'injection en utilisant les modèles hydrodynamiques  $\theta(h)$  et  $K(h)$  d'un milieu macroporeux présentés dans le chapitre 2 (section 4.2).

## 2 Description du code Volumes Finis 3D BIGFLOW

### 2.1 Historique du code BIGFLOW

BIGFLOW (Ababou et Bagtzoglou 1993 [7]) est un outil numérique qui modélise des systèmes d'écoulements 3D en milieux poreux hétérogènes anisotropes saturés ou variablement saturés. Il modélise aussi des écoulements 2D plans, verticalement intégrés, en nappes souterraines et/ou superficielles. Les échelles d'étude peuvent aller de quelques 100m (3D) jusqu'à 100km (2D) ou plus.

Ce code est très utile pour réaliser des simulations directes des écoulements souterrains dans un milieu poreux très hétérogène et une grille très dense (10 millions de nœuds). L'approche utilisée pour modéliser les différents types d'écoulements est un modèle à une équation, de forme similaire à l'équation de Richards généralisée [Trégarot, 2000], obtenu à partir de l'équation de conservation de la masse, et une loi de comportement généralisée qui peut être linéaire (Darcy-Buckingham), ou non linéaire (Darcy-Forchheimer).

- 1987 : BIGFLOW (3D), code de recherche universitaire (Ababou, Gelhar & McLaughlin), MIT, Cambridge, Massachusetts, USA.
- 1993 : BIGFLOW 1.1 (3D), code du domaine public (Ababou, Bagtzoglou), US Nuclear Reg. Comm. (Washington D.C) & SwRI/CNWRA (San Antonio TX).



- 2000 : BIGFLOW (2D/3D) code de recherche universitaire (Ababou & Trégarot) Institut de mécanique des Fluides de Toulouse, France
- 2004 : BF-Python (2D/3D), version résultante des versions précédentes, qui contient une nouvelle option de l'intrusion saline en aquifère côtier [Albitar A. & Ababou R.]
- 2009 : BF-Python (2D/3D), version résultante de versions précédentes, qui contient une nouvelle option de conditions aux limites temporellement variables [Alastal K., Wang Y. & Ababou R.]
- 2011 : BF-Matlab (3D), version de BIGFLOW avec une interface Matlab [Alastal K. & Ababou R.]
- 2013 : BF-Matlab (3D), version résultante des précédentes qui contient une nouvelle condition limite CL de succion sous forme de rampe temporelle, permettant d'atteindre progressivement la CL de succion prescrite par l'utilisateur [Mansouri N., & Ababou R.]

## 2.2 Les méthodes numériques utilisées dans BIGFLOW

BIGFLOW utilise la méthode des volumes finis 3D sur une grille régulière cartésienne (dans ce cas, la méthode est proche des différences finies 3D). Les pressions et les teneurs en eau "nodales" ( $h_{ijk}$  et  $T_{ijk}$ ) sont calculées aux centres des cellules volumes finis, qui sont centrées sur les nœuds. Une variable nodale représentent une moyenne volumique sur chaque cellule.

Cette méthode peut être adaptée à des frontières physiques non planes et non rectangulaires spécifiées à l'intérieur du domaine de calcul par des zones de très faibles conductivités entre les limites du domaine de calcul et les limites du domaine physique à modéliser.

### 2.2.1 Domaine de calcul

Les équations d'écoulements sont discrétisées en chaque nœud d'une grille composée de mailles rectangulaires de taille constante  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  dans chaque direction  $Ox, Oy$  et  $Oz$ . Cette grille forme un domaine de calcul parallélépipédique. L'origine  $O$  de ce repère est située au nœud inférieur gauche de la grille. L'utilisateur fixe le nombre de nœuds  $Nx, Ny, Nz$  et la taille des mailles  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  dans chaque direction. La taille du domaine est définie par les longueurs  $Lx, Ly$  et  $Lz$ , directement calculées par le code :  $Li = \Delta i(Ni - 1), i = x, y, z$ .

Le calcul s'effectue sur les nœuds internes du domaine, nous pouvons limiter la dimension des écoulements en réduisant le nombre de nœuds à 3 dans la direction non concernée par les écoulements (1 nœud interne + 2 nœuds

frontière) et en imposant une condition de flux nul sur les faces perpendiculaires à cette direction. Par exemple, pour simuler un écoulement vertical selon l'axe  $Oz$ , nous imposons  $Nx = Ny = 3$ .

### 2.2.2 Discrétisation en espace

La discrétisation en espace de l'équation de Richards consiste à appliquer le principe de conservation de la masse à chaque cellule du domaine (la figure 3.1), centrée au nœud  $(i,j,k)$ . Ainsi, la variation de masse de la cellule  $(i,j,k)$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  (produit de la variation de la teneur en eau calculée au nœud  $(i,j,k)$  et du volume de la cellule  $\Delta x \Delta y \Delta z$ ), est égale au produit de la durée  $\Delta t$  et de la somme algébrique des flux d'eau entrant ou sortant par les faces de la cellule.

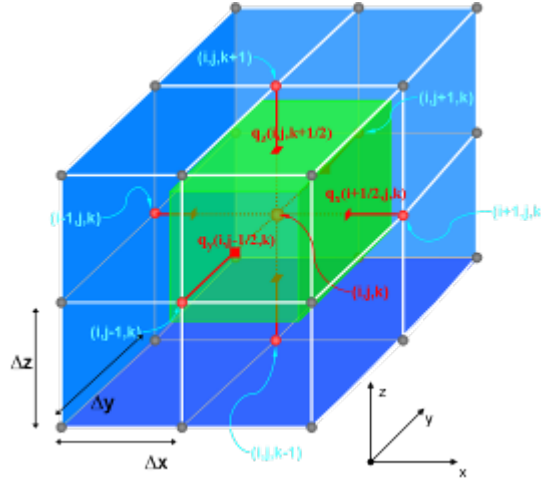


FIGURE 3.1: Molécule Volumes Finis du code BIGFLOW 3D.

Les flux entrant ou sortant par les faces de la cellule sont calculés aux positions mi-nodales (entre deux nœuds) par la loi de Darcy généralisée. Par exemple, la composante selon  $Ox$  de la densité de flux à la position mi-nodale  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$  située entre les nœuds adjacents  $(i, j, k)$  et  $(i + 1, j, k)$  s'écrit sous forme discrète : (cf. Figure.3.1)

$$(q_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} = -(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k} \left[ \frac{h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}}{\Delta x} + (g_{Bx})_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (3.1)$$

- $h_{i,j,k}$  et  $h_{i+1,j,k}$  : pressions nodales aux positions  $(i,j,k)$  et  $(i + 1,j,k)$
- $(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k}$  : composante selon la direction principale d'anisotropie  $Ox$  de la conductivité mi-nodale
- $(g_{Bx})_{i+\frac{1}{2},j,k}$  : valeur mi-nodale de la composante selon  $Ox$  du vecteur opposé à la gravité  $g_B = -g / |g|$ .

La valeur de la conductivité mi-nodale doit être estimée puisque la pression dont elle dépend n'est calculée qu'aux positions nodales. BIGFLOW propose quatre schémas de pondération pour obtenir la valeur de  $(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k}$  :

- le maximum :

$$(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k} = \max\{K_{xx}(h_{i,j,k}); K_{xx}(h_{i+1,j,k})\} \quad (3.2)$$

- la moyenne harmonique :

$$(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{2 K_{xx}(h_{i,j,k}) \times K_{xx}(h_{i+1,j,k})}{K_{xx}(h_{i,j,k}) + K_{xx}(h_{i+1,j,k})} \quad (3.3)$$

- la moyenne arithmétique :

$$(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{K_{xx}(h_{i,j,k}) + K_{xx}(h_{i+1,j,k})}{2} \quad (3.4)$$

- la moyenne géométrique :

$$(K_{xx})_{i+\frac{1}{2},j,k} = \sqrt{K_{xx}(h_{i,j,k}) \times K_{xx}(h_{i+1,j,k})} \quad (3.5)$$

### 2.2.3 Discrétisation en temps

Dans BIGFLOW, le terme de dérivée temporelle est discrétisé selon le schéma d'Euler aval, schéma totalement implicite de 1<sup>er</sup> ordre (en omettant les indices de la discrétisation spatiale vue précédemment) :

$$\frac{\theta^{n+1}(h) - \theta^n(h)}{\Delta t_{n+1}} - \text{div} [K(h)\nabla h]^{n+1} - \text{div} [K(h)g_B]^{n+1} = 0 \quad (3.6)$$

La mise en place du schéma implicite nécessite l'utilisation de procédures de linéarisations itératives en raison des termes inconnus  $\theta^{n+1}$  et  $K^{n+1}$  de l'équation 3.7. BIGFLOW utilise le schéma itératif de linéarisation de Picard qui consiste à calculer la solution  $h^{n+1,k+1}$  à la  $(k+1)$ <sup>ième</sup> itération du  $(n+1)$ <sup>ième</sup> pas de temps en utilisant la valeur de la conductivité  $K(h^{n+1},k)$  calculée à partir de la solution  $h^{n+1,k}$  de l'itération précédente. Le schéma de Picard standard s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\theta^{n+1,k+1} - \theta^n}{\Delta t_{n+1}} - \text{div} [K^{n+1,k}\nabla h^{n+1,k+1}] - \text{div} [K^{n+1,k}g_B] = 0 \quad (3.7)$$

## 2.3 La forme générique du code BIGFLOW

Nous présentons dans cette partie les différentes équations intégrées dans le code BIGFLOW, régissant les écoulements souterrains 2D et 3D. Les différents modèles d'écoulement de BIGFLOW sont décrits par des équations génériques, dont la forme générale est la suivante :

**Loi de comportement :**

$$\hat{q} = -\hat{T}(\hat{h}, \Delta\hat{h}, x)\nabla(\hat{h}, \hat{g}(x) \cdot x) \quad (3.8)$$

**Loi de conservation de la masse :**

$$\frac{\partial\hat{\theta}_e(\hat{h}, x)}{\partial t} = -div[\hat{q}] \quad (3.9)$$

En combinant les deux équations, nous obtenons l'équation générale des écoulements :

$$\frac{\partial\hat{\theta}_e(\hat{h}, x)}{\partial t} = div[\hat{T}(\hat{h}, \Delta\hat{h}, x)\nabla(\hat{h})] + div[\hat{T}(\hat{h}, \Delta\hat{h}, x)\hat{g}(x)] \quad (3.10)$$

BIGFLOW est ainsi un modèle 3D spatialement distribué [73], qui permet aux relations  $\theta(h, x)$  et  $K(h, x)$  de varier dans l'espace, en définissant la géométrie et la taille du domaine d'intérêt, et en spécifiant des conditions aux limites et initiale dans l'espace en termes du potentiel de pression  $h$  ou de la densité de flux normale ( $\vec{q} \cdot \vec{n}$ ). Nous présentons dans le tableau 3.1, les différents modèles 3D qui dérivent de l'équation générique utilisée dans le code BIGFLOW.

**Tableau 3.1:** Variable et paramètres de l'équation d'écoulement générique de BIGFLOW, option 3D.

Modèle d écoulement 3D	$\hat{h}$	$\hat{\theta}_e$	$\hat{T}$	$\hat{g}$
Var.Sat. (Darcy-Richards)	$h$	$\theta_e$	$K(h)$	$\frac{-g}{ g }$
Var.Sat. (Ward-Richards)	$h$	$\theta_e$	$\tilde{K}$	$\frac{-g}{ g }$
Var.Sat. (Macroporeux)	$h$	$\theta_e$	$K(h)$	$\frac{-g}{ g }$
Tot.Sat. (Aquifère confiné)	$H$	$S_s$	$K_s$	0

## 2.4 Principales procédures du code

Une interface graphique avec "Python 2.3" a été développée pour permettre l'entrée des données et l'analyse des résultats. Elle comprend 3 phases principales (cf. Figure.3.2) :

- Phase de pré-traitement : la création des informations de base qui caractérisent la simulation et qui sont lues dans le fichier principal INPUT1. Ces informations concernent : la géométrie du domaine, le module d'écoulements, les conditions limites et initiales, les méthodes numériques et les propriétés hydrodynamiques.

- Phase de traitement : la phase d'exécution du code. Les sorties du code (bilan de masse, pression, teneur en eau,...) sont enregistrées dans des fichiers appropriés.
- Phase de post-traitement : permet l'analyse des écoulements simulés en traitant les sorties enregistrées. Par exemple, le fichier OUT13 permet de suivre dans le temps les débits échangés aux frontières du système et le volume d'eau emmagasiné dans le système, ou libéré par le système. Des logiciels de visualisation graphique (eg. *GnuPlot*, *MATLAB*, *Mayavi*, ...) sont utilisés dans cette phase.

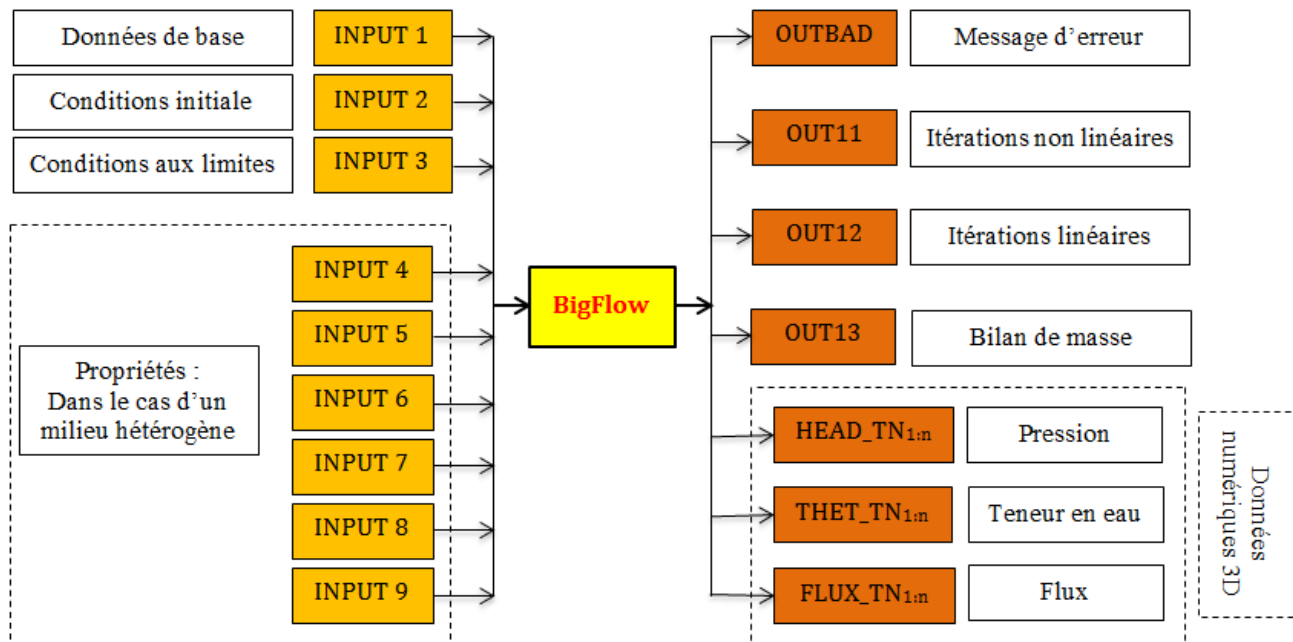


FIGURE 3.2: Schéma des entrées/sorties du code BIGFLOW .

#### 2.4.1 Les conditions initiales

La condition initiale d'un système est exprimée en fonction du potentiel. Il s'agit du potentiel de pression  $h$  pour les écoulements 3D variablement saturés (rappelons que  $h = \frac{P - P_{atm}}{\rho g}$ ), et de la charge hydraulique totale  $H$  pour les écoulements 3D totalement saturés.

Le potentiel peut être défini de façon uniforme dans le domaine, ou par un profil linéaire, c'est le cas d'un profil de pression d'équilibre hydrostatique, ou encore par un champ 3D non uniforme (lu dans un fichier).

### 2.4.2 Les conditions aux limites

La définition des conditions aux limites (*CL*) imposées sur les six faces (*A1*, *B1*, *A2*, *B2*, *A3*, *B3*) du domaine, constitue l'une des opérations les plus importantes pour représenter, le plus physiquement possible, les processus hydrologiques d'un bassin. En effet, les *CL* représentent un forçage sur le système étudié, rompant le plus souvent avec une situation initiale (éventuellement d'équilibre), qui se traduit par des mouvements de masses d'eau. Il existe deux principaux types de conditions limites qui sont :

- Une condition de potentiel, dite de Dirichlet : employée par exemple pour simuler une infiltration sous lame d'eau, ou pour simuler le niveau d'un réservoir d'eau.
- Une condition de flux normal, dite de Neumann : employée par exemple pour simuler l'infiltration d'une pluie.

Il existe aussi une condition particulière, appelée condition de drainage gravitaire qui consiste à imposer un gradient de pression nul ( $dh/dz = 0$ ) à la frontière inférieure (si elle est horizontale) ; cette *CL* est transparente pour l'écoulement : elle laisse passer un flux gravitationnel descendant à travers cette frontière.

Des conditions aux limites non uniformes et/ou de type mixte peuvent être définies séparément pour chacune des six faces. Des conditions non uniformes signifient que les valeurs des conditions limites sont distribuées sur une face.

## 3 Tests et validation du code BIGFLOW en présence d'interfaces

### 3.1 Barrière capillaire (Infiltration)

Nous allons modéliser, dans cette section, le phénomène d'infiltration en présence de barrière capillaire et valider le code BIGFLOW en utilisant des solutions analytiques développées par Ross 1990 [65]. Par exemple, un sol bicouche (un limon fin en haut et un sable au dessous) peut constituer en certains cas une barrière capillaire (possibilité d'accumulation d'eau à l'interface limon-sable).

#### 3.1.1 Formulation des solutions analytiques

Dans cette partie, nous reprenons la démonstration de la solution proposée par Ross 1990 [65] en utilisant notre propre notation. Ross a supposé qu'un flux  $q$  est appliqué à la surface du domaine ( $z \rightarrow -\infty$ ). Au niveau de

l'interface entre les deux sols (situé à  $z = 0 \text{ m}$ ), la succion du sol fin ( $\psi_{SF}$ ) est égale à la succion du sol grossier ( $\psi_{SG}$ ). Nous rappelons que la conductivité hydraulique relative est sous cette forme  $K_r = e^{\alpha\psi}$ . En utilisant cette expression, nous obtenons cette relation :

$$K_r^{SF}(0) = \left(K_r^{SG}(0)\right)^{\frac{\alpha_{SF}}{\alpha_{SG}}} \quad (3.11)$$

avec  $\alpha_{SF}$  et  $\alpha_{SG}$  sont des paramètres liés à l'inverse de la valeur d'entrée de l'eau dans le sol respectivement fin et grossier.

En se basant sur le fait qu'à la limite supérieure, le flux doit être égal à la conductivité hydraulique ( $K_r(-\infty) = \frac{q}{K_s^{SF}}$ ), la solution, pour un sol fin de l'équation d'écoulement en régime permanent, est la suivante :

$$\psi(z) = \frac{1}{\alpha_{SF}} \left[ \left( \left( \frac{q}{K_s^{SG}} \right)^{\frac{\alpha_{SF}}{\alpha_{SG}}} - \frac{q}{K_s^{SF}} \right) e^{\alpha_{SF}z} + \frac{q}{K_s^{SF}} \right] \quad (3.12)$$

avec  $K_s^{SG}$  et  $K_s^{SF}$  sont les conductivités hydrauliques à saturation respectivement du sol grossier et du sol fin.

### 3.1.2 Caractéristiques de la simulation numérique

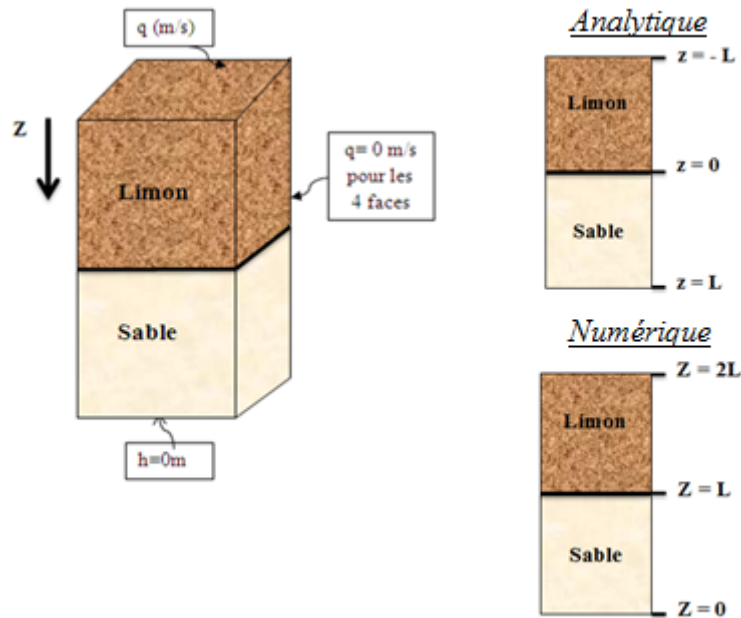


FIGURE 3.3: Représentation schématique de la colonne.

Le domaine de calcul est une colonne verticale de hauteur égale à  $5\text{m}$  selon la direction  $Oz$ , comprenant deux couches (système "limon sur sable"). La couche supérieure est composée d'un sol fin (limon) et la couche inférieure

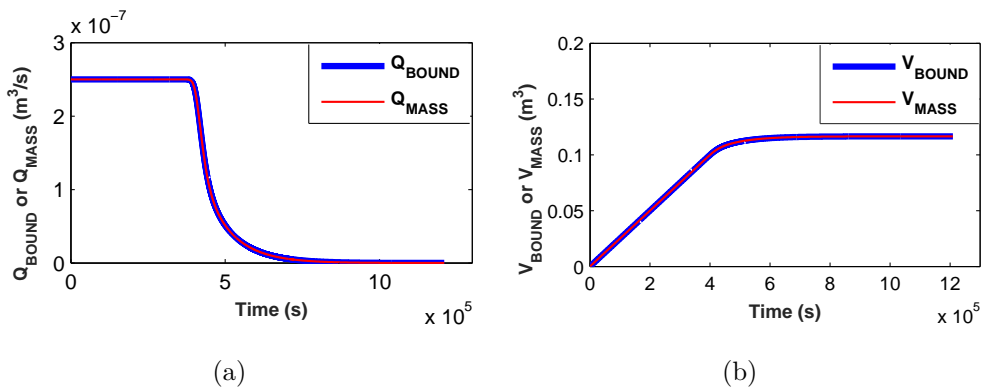
est un sol grossier (sable), elles sont séparées par une interface horizontale qui est située au milieu du domaine  $L = 2.5m$ . La taille d'une maille de calcul est de  $1mm$  selon  $Oz$ . Ainsi la grille de calcul comporte  $3 \times 3 \times 501$  nœuds. Pour comparer la solution numérique  $\psi^{Numérique}$  et la solution analytique  $\psi^{Analytique}$  développée par Ross, nous avons eu recours à prendre en compte de la relation suivante :  $Z = L - z$  (voir la figure 3.3).

**Tableau 3.2:** Propriétés hydrodynamiques (problème de la barrière capillaire).

Paramètres		Limon	Sable
$K_s(m/s)$		$3.66E - 6$	$1.50E - 4$
$\theta_s(m^3/m^3)$		0.52	0.40
modèle	$\alpha(m^{-1})$	0.60	6.00
	$\beta(m^{-1})$	0.20	2.00

Initialement, le profil de pression hydrostatique  $h = -z$  est une condition initiale. Pour les conditions aux limites, nous imposons un flux nul sur les frontières latérales, une pression  $h = 0$  (Nappe libre) sur la surface inférieure et un flux entrant égal à  $1E - 6m/s$  sur la surface supérieure. Les propriétés hydrodynamiques des deux milieux de la colonne sont définies par le modèle exponentiel et elles sont présentées dans le tableau 3.2.

### 3.1.3 Analyse des résultats



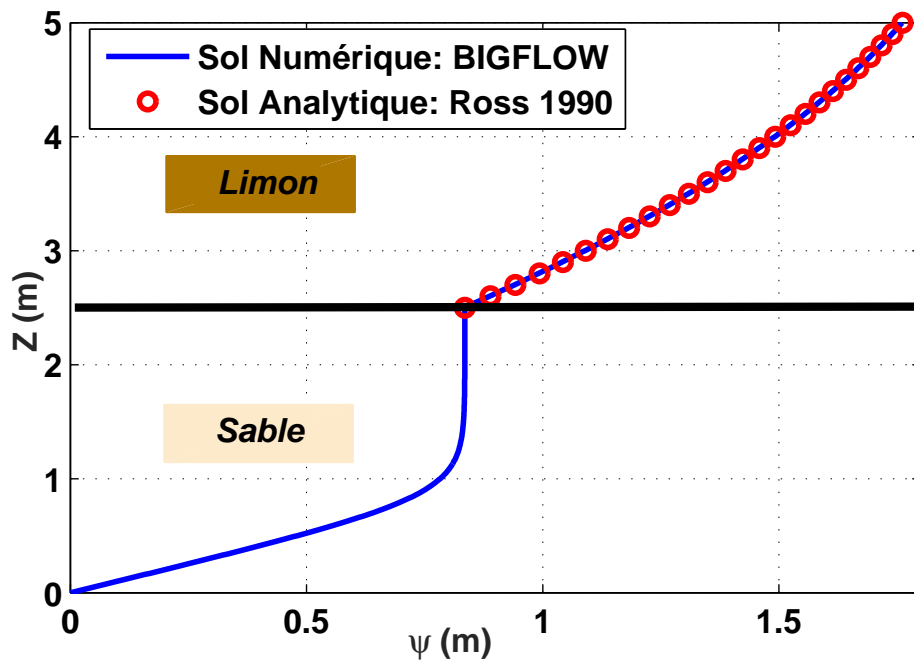
**FIGURE 3.4:** Résultats BIGFLOW du phénomène de la barrière capillaire « colonne 1D : interface horizontal limon-sable à  $z = 2.5m$  » : (a) Comparaison du flux net  $Q_{bound}(log(t))$  calculé aux frontières avec le flux  $Q_{mass}(log(t))$  calculé par bilan de masse sur une période de deux semaines; (b) Comparaison du volume net  $V_{bound}(t)$  calculé par les flux aux frontières avec le volume  $V_{mass}(t)$  calculé par bilan de masse.



Nous avons simulé l'infiltration de l'eau dans le sol en régime transitoire jusqu'à ce que le régime permanent soit bien établi (Temps= 2 semaines). Les informations extraites des fichiers OUT13 (bilan de masse) montrent que la simulation a bien convergé (voir la figure 3.4 : Les courbes sont confondues car le bilan de masse est excellent).

Nous nous sommes appuyés, pour notre validation, sur le profil de succion dans le sol fin (voir la figure 3.5) qui montre une parfaite superposition de la courbe bleue (Solution numérique : Volumes Finis BIGFLOW) et les symboles rouges (Solution analytique Matlab). Nous observons aussi la discontinuité de gradient de succion à l'interface limon-sable.

Pour une étude plus approfondie des phénomènes de barrières capillaires en Infiltration, ces résultats sont complétés par des simulations présentées dans le chapitre 5.



**FIGURE 3.5:** Résultats de comparaison Volumes Finis (BIGFLOW) & Analytiques (MATLAB) du phénomène de barrière capillaire (colonne 1D : limon sur sable avec interface à  $Z = 2.5m$ ) : Profil de succion.

## 3.2 Problème de la rizière (Infiltration partiellement saturée)

### 3.2.1 Présentation du problème

Nous étudions, dans cette partie, l'infiltration 1D bicouche en régime permanent sous lame d'eau superficielle fixée  $H_0$  et en présence d'une nappe. La lame d'eau superficielle  $H_0$  représente une condition d'inondation ou submersion, e.g. irrigation par planche.

Le but de cette étude est de calculer le taux d'infiltration permanent " $q_0$ " ainsi le profil de pression " $h(z)$ " dans la rizière bi-couche, dont le sous-sol est constitué de deux couches : la couche supérieure ( $z_I \leq z \leq z_s$ ) est un milieu fin et la couche inférieure d'extension semi-infinie vers le bas est un milieu grossier. Une nappe libre est située au dessous de l'interface fin/grossier à  $z = 0$  (voir la figure 3.6).

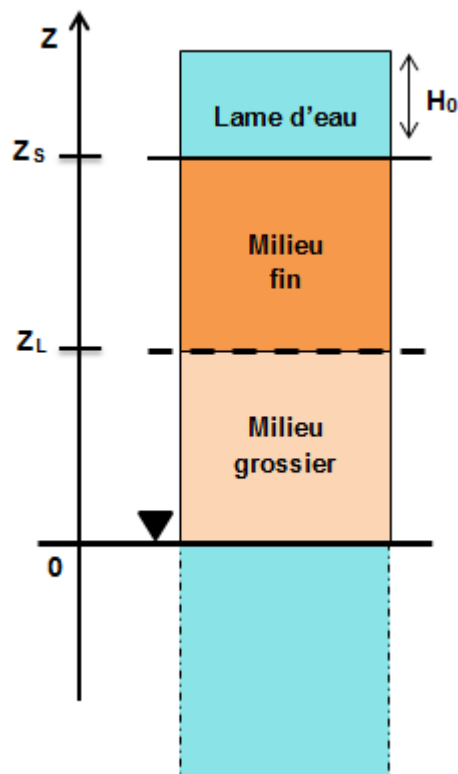


FIGURE 3.6: Représentation schématique du problème de la rizière bicouche.

Le problème de la rizière est simulé numériquement à l'aide du code Volumes Finis BIGFLOW, deux cas sont distingués selon la profondeur de la nappe. Les propriétés hydrodynamiques des deux milieux de la colonne sont définies par le modèle exponentiel (cf. l'équation 2.15) et elles sont présentées dans le tableau 3.3.

Noter que les pressions d'entrée d'air (bubbling pressure  $h_b$ ) sont différentes pour les deux couches de sol. Ces paramètres vont jouer un rôle dans le régime d'infiltration; les couches de sols pourront rester saturées en eau (ou non), selon la lame d'eau superficielle  $H_0$  et les profondeurs  $D_1$  et  $D_2$  :

Nappe peu profonde :  $H_0 = z_s = z_I = 0.2m$

Nappe profonde :  $H_0 = 0.80m$  ;  $z_s = 1.0m$  ;  $z_I = 0.8m$

**Tableau 3.3:** Propriétés hydrodynamiques (problème de la rizière).

Paramètres		Milieu 1 : fin	Milieu 2 : grossier
$K_s(m/h)$		$K_{S1}$	$K_{S2}$
		$3.20 E - 4$	$1.40 E - 1$
Modèle	$\alpha (m^{-1})$	1.28	11.2
Exponentiel	$h_b (m)$	-0.64	-0.23

### 3.2.2 Nappe peu profonde

Dans le cas d'une nappe peu profonde, nous supposons que la pression  $h(z)$  reste partout supérieure à la pression d'entrée d'air  $h_b$  et donc la conductivité hydraulique  $K(h)$  est égale à la conductivité hydraulique à saturation pour les deux milieux.

Une solution analytique est alors facilement obtenue en appliquant la loi de Darcy aux deux milieux, avec une condition de continuité à l'interface. Nous obtenons donc les expressions suivantes de pression  $h_1(z)$  et  $h_2(z)$  pour chaque milieu ainsi que le taux d'infiltration  $q_0 (m/h)$ .

- Milieu fin :  $z_I \leq z \leq z_s$

$$h_1(z) = h_s + \left(\frac{q_0}{K_{S1}} + 1\right)(z_s - z) \quad (3.13)$$

- Milieu grossier :  $0 \leq z \leq z_I$

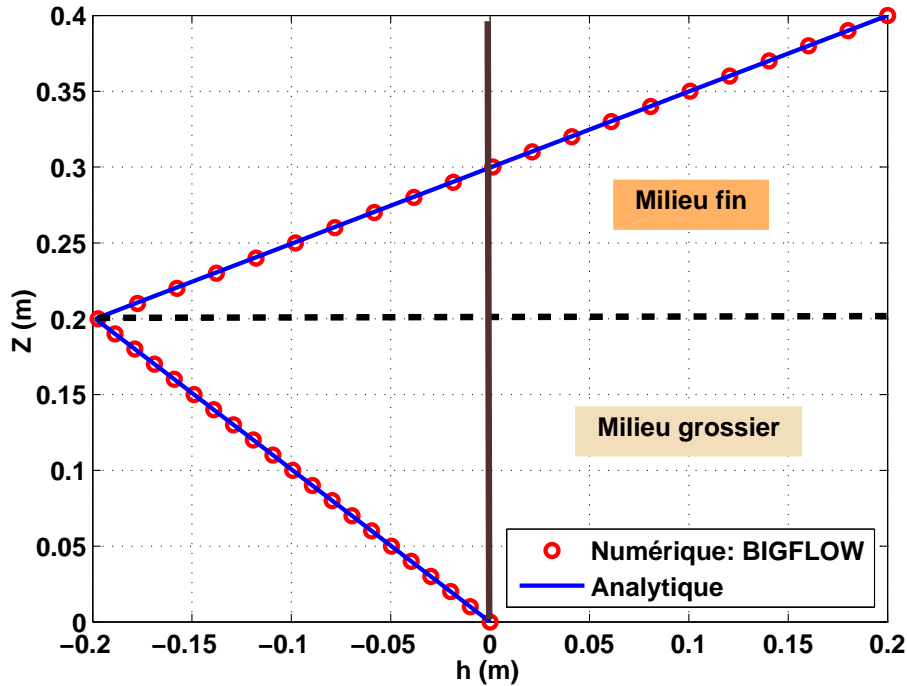
$$h_2(z) = -\left(\frac{q_0}{K_{S2}} + 1\right)z \quad (3.14)$$

- Continuité de pression à l'interface : pour  $z = z_I$  ;  $h_1(z_I) = h_2(z_I)$

$$q_0 = -K_{S1}K_{S2} \frac{h_s + z_s}{(K_{S1} - K_{S2})z_I + K_{S2}z_s} \quad (3.15)$$

Le flux d'infiltration dans ce cas est égale à  $q_0 = -9.5710^{-4}m/h$ , ce qui est confirmé par le résultat numérique.

La figure 3.8 illustre une comparaison entre deux profils de pressions  $h(z)$  obtenus analytiquement et numériquement. La superposition de deux courbes ainsi que le taux d'infiltration montre que le problème est parfaitement simulé par BIGFLOW. La valeur de pression à l'interface  $h = -2m$  confirme que le système bicouche est totalement saturé, car cette pression est inférieure aux pressions d'entrée d'air de deux couches.



**FIGURE 3.7:** Profil de pression BIGFLOW-MATLAB pour le problème de la rizière bicouche (sol fin sur sol grossier avec interface à  $z = -0.2m$ ) pour une nappe peu profonde. La ligne horizontale (tirets) représente l'interface, la ligne noire représente la séparation entre zone saturée ( $h > 0$ ) et zone non saturée ( $h < 0$ ).

### 3.2.3 Nappe profonde

Dans cette partie, la nappe est profonde et nous supposons que les sols au-dessus de la nappe ne sont pas nécessairement partout saturés. Plus précisément, nous supposons que le milieu fin est totalement saturé tandis que le milieu grossier se désature ( $h_2 < h_{b2}$ ).

La résolution analytique dans ce cas est différente pour les deux milieux. Pour le milieu grossier qui est non saturé, nous utilisons la transformée de Kirchhoff (voir chapitre 4). Sans entrer dans les détails, les expressions des pressions pour chaque milieu ainsi que le taux d'infiltration  $q_0$  ( $m/h$ ) sont :

- Milieu fin (saturé) :  $z_I < z \leq z_s$

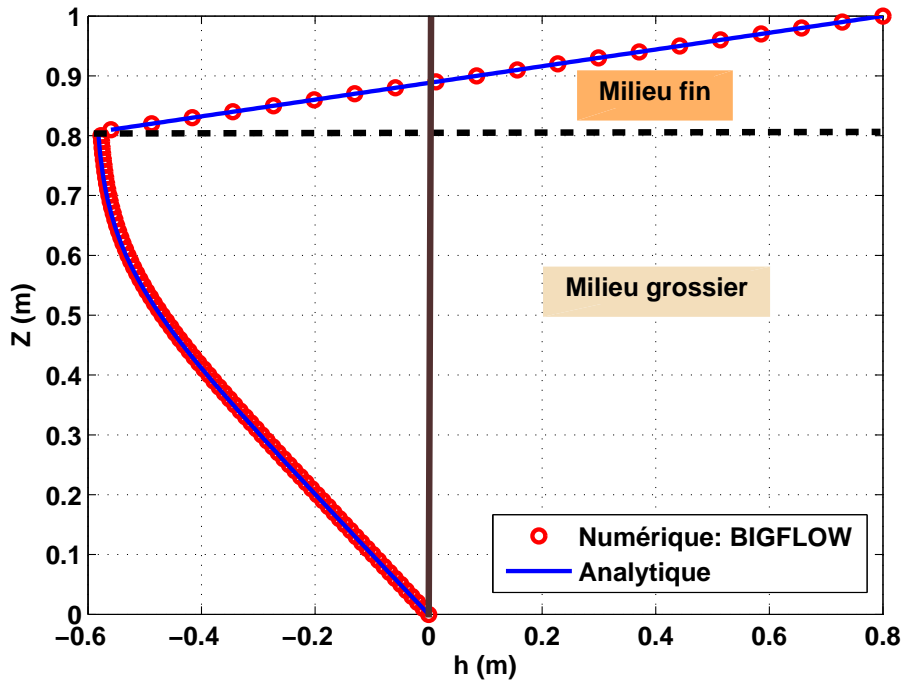
$$h_1(z) = h_s + \left( \frac{q_0}{K_{S1}} + 1 \right) (z_s - z) \quad (3.16)$$

- Milieu grossier (non saturé) :  $0 \leq z \leq z_I$

$$h_2(z) = \frac{1}{\alpha_2} \ln \left( \frac{-q_0}{K_{S2}} + \left( \frac{q_0}{K_{S2}} + e^{-\alpha_2 h_{b2}} \right) e^{-\alpha_2 z} \right) + h_{b2} \quad (3.17)$$

- Le taux d'infiltration est calculé en utilisant la fonction "fzero" du MATLAB, où la fonction à résoudre est  $f(q_0) = h_1(z_I) - h_2(z_I) = 0$  (continuité de pression à l'interface pour  $z = z_I$ ).

Dans le cas d'une nappe profonde, le taux d'infiltration est égal à  $q_0 = 2.6 \text{ E} - 3 \text{ m/h}$ . Les profils de pression obtenue analytiquement et numériquement sont confondus (voir figure 3.8). Nous constatons que pour  $0.2 \text{ m} < z < 0.8 \text{ m}$ ;  $h(z) < h_{b2}$  et pour  $z > 0.8 \text{ m}$ ;  $h(z) > h_{b1}$ , donc les hypothèses de désaturation du milieu grossier et saturation du milieu fin sont validés.



**FIGURE 3.8:** Profil de pression BIGFLOW-MATLAB pour le problème de la rizière bicouche (sol fin sur sol grossier) pour une nappe profonde  $P1 + P2 = 1.0 \text{ m}$ .

## 4 Tests et validation des modèles hydrodynamiques $\theta(h,x)$ et $K_{ii}(h,x)$ d'un macroporeux

Dans cette partie, nous allons tester deux nouveaux modèles  $\theta(h)$  et  $K_{ii}(h,x)$  proposés dans cette thèse (voir la figure 2.4) pour un système macroporeux/microporeux, dans lequel le microporeux est un milieu poreux classique Darcéen (sol, roche), tandis que le macroporeux peut représenter un milieu très grossier ou même une excavation).

Cette étude est menée ici en s'appuyant sur les études numériques précédentes traitées par Trégarot en 2000 et dans lesquels, il a utilisé les modèles présentés dans le chapitre précédent (voir la figure 2.5). Nous allons modéliser à l'aide du code BIGFLOW des apports ou des extractions qui peuvent être naturelles (infiltration ou évaporation) ou artificielles (pompage en injection ou extraction).

Vue les difficultés de ce problème (discontinuité nappe/aquifère combinée avec anisotropie), la convergence du solveur non linéaire est difficile à obtenir. Nous avons recours à une simulation en régime transitoire pour résoudre ce problème.

### 4.1 Évaporation naturelle d'une nappe alimentée par deux réservoirs

#### 4.1.1 Présentation du problème d'évaporation et solutions analytiques

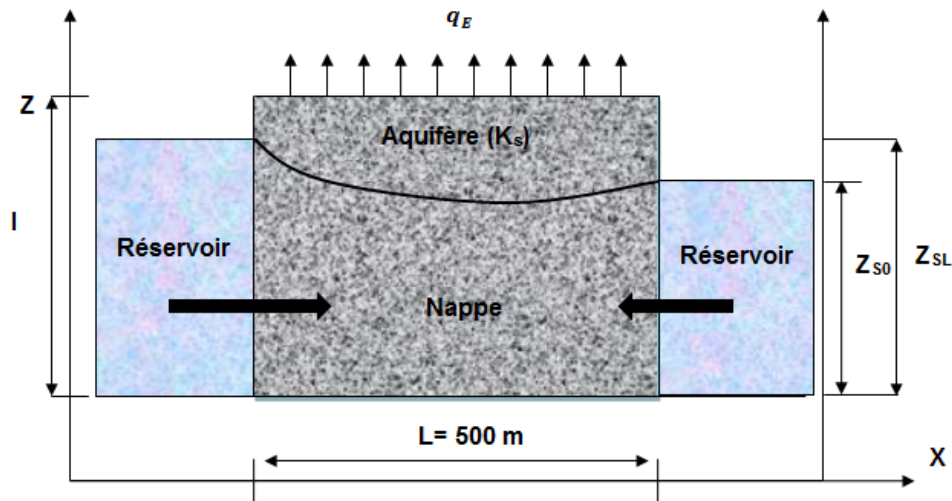
Le domaine simulé (voir la figure 3.9) est un aquifère homogène de conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ , de longueur  $L$  et de hauteur  $l$ , contenant une nappe libre, compris entre deux réservoirs de cotes  $Z_{S0}$  et  $Z_{SL}$ . La surface de l'aquifère (surface du sol), est soumise à un taux d'évaporation uniforme et constant  $q_E = 10^{-3}m/j$  et alimentée par la nappe (la nappe est ré-alimentée par les flux venants de deux réservoirs).

En se basant sur les hypothèses de Dupuit 1863 [27] (écoulements quasi-horizontaux : vitesses verticales négligées, pression verticalement hydrostatique), des expressions analytiques de la cote de la surface libre  $Z_S(x)$  (Eq.3.18) ainsi que des débits spécifiques  $Q_{S0}$ (Eq.3.19) et  $Q_{SL}$ (Eq.3.20) sont calculées et elles sont de la forme suivante :

$$Z_S(x) = \sqrt{Z_{S0}^2 - \frac{q_E}{K_s}(l-x)x + \frac{Z_{S0}^2 - Z_{SL}^2}{L}x} \quad (3.18)$$

$$Q_{S0} = \frac{q_E}{2L}(Z_{S0}^2 - Z_{SL}^2) + \frac{q_E L}{2} \quad (3.19)$$

$$Q_{SL} = \frac{q_E}{2L}(Z_{S0}^2 - Z_{SL}^2) - \frac{q_E L}{2} \quad (3.20)$$



**FIGURE 3.9:** Représentation schématique d'une nappe comprise entre deux rivières et soumise à un flux d'évaporation réparti uniformément sur la surface du sol.

#### 4.1.2 Expérimentations numériques

Le problème est résolu numériquement par BIGFLOW en régime transitoire jusqu'à atteindre un régime permanent avec  $Z_{SL} = 4.5m$  et  $Z_{S0} = 4m$ . Le domaine de calcul est de taille  $L_j = (500m, 2m, 5m)$ , la taille des mailles dans les directions respectives  $OX1, OX2, OX3$  est de  $\Delta x_j = (1m, 1m, 0.1m)$  et le nombre total de maille est  $(501, 3, 51)$ .

Nous supposons, comme condition initiale, une pression hydrostatique  $h = 4.5 - z$ . Le tableau 3.4 présente les conditions aux limites imposées pour simuler ce problème.

**Tableau 3.4:** Conditions aux limites (Évaporation naturelle d'une nappe).

BC's	Faces 1 $\perp X_1 = X$	Faces 2 $\perp X_2 = Y$	Faces 3 $\perp X_3 = Z$
Faces A : $X_i = 0$	$h(x,y,z) = 4.5 - z$ (zone 1) $q_x = 0$ (zone 2)	$q_y = 0$ Pas d'écoulement // à Y Confinement 2D	$q_z = 0$ Pas d'écoulement // à Z Confinement 2D
Faces B : $X_i = L_i$	$h(x,y,z) = 4.5 - z$ (zone 1') $q_x = 0$ (zone 2')	$q_y = 0$ Pas d'écoulement // à Y Confinement 2D	$q_E = 10^{-3}m/j$ Flux d'évaporation

Le modèle VGM est utilisé pour définir  $\theta(h)$  et  $K(h)$  de l'aquifère "macro-

poreux" en choisissant les paramètres  $(\alpha_{VGM}, n)$  de façon que les courbes  $K(h)$  et de  $\theta(h)$  soient raides et donc la conductivité hydraulique tend plus rapidement à s'annuler avec une diminution rapide de la teneur en eau.

L'idée principale est de manipuler les propriétés hydrodynamiques du sol (dans le modèle numérique saturé/non-saturé) de façon à transmettre la condition d'évaporation du sol vers la nappe tout en respectant les hypothèse de Dupuit (écoulement plan, verticalement hydrostatique). Nous supposons, donc, que le milieu est caractérisé par une anisotropie tridimensionnelle et une isotropie plane en terme de conductivité hydraulique relative :

$$[K_{rxx}(h) = K_{ryy}(h)] \neq K_{rzz}(h) = 1$$

Nous supposons aussi que la conductivité hydraulique à saturation est constante dans toutes les directions. Noter que ceci revient à adopter une fonction conductivité-pression  $K(h)$  qui est "nonlinéairement anisotrope", puisque la fonction  $K(h)$  est différente verticalement et horizontalement.

Les propriétés hydrodynamiques de l'aquifère utilisés dans cette simulation sont :  $K_s = 10m/j$ ,  $K_d = 10^{-2}m/j$ ,  $\theta_s = 1m^3/m^3$ ,  $n = 8$  et  $\alpha_{VGM} = 20m^{-1}$ .

L'introduction d'une conductivité résiduelle  $K_d$  affectée aux nœuds du domaine de calcul correspondant aux zones non saturées, permet d'éviter des problèmes numériques liés à la singularité de la matrice des conductivités.

#### 4.1.3 Solutions numérique vs. Solutions analytiques

Les informations qui sont extraites des fichiers OUT13 (bilan de masse) et OUT12 (convergence externe du schéma de Picard) montrent que la simulation a bien convergé. Le tableau.3.5 présente les valeurs calculées numériquement et analytiquement des débits spécifiques  $Q_{S0}$  et  $Q_{SL}$ .

**Tableau 3.5:** Valeur des débits spécifiques.

Débit spécifique	Analytique	Numérique (18 jours)
$Q_{S0}$	$0.2925 m^2/j$	$0.2885 m^2/j$
$Q_{SL}$	$-0.2075 m^2/j$	$-0.2015 m^2/j$

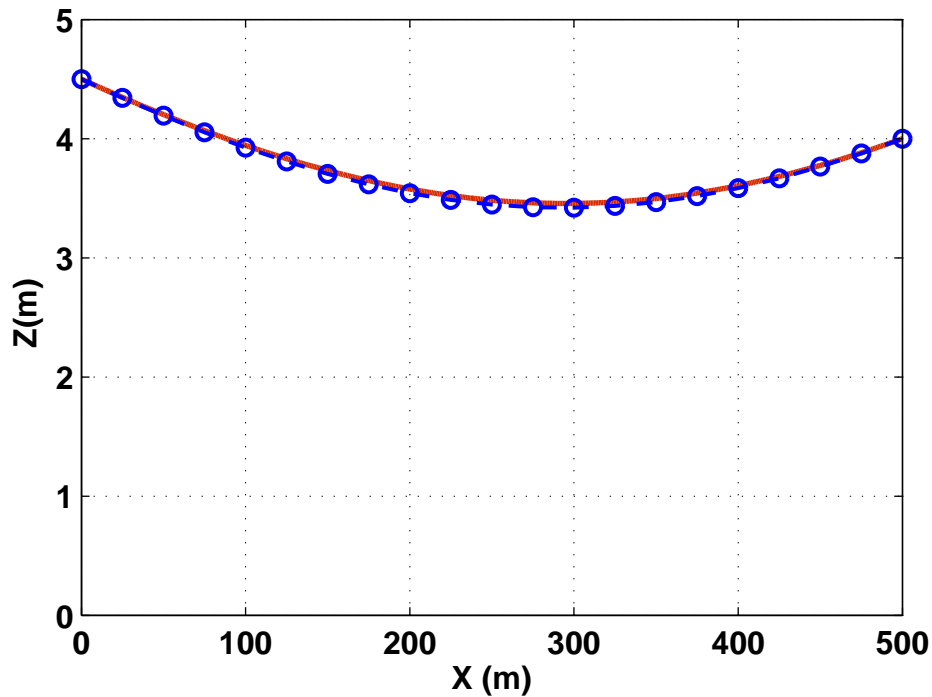
Noter que  $Q_{S0}$  est le débit spécifique ( $m^2/j$ ) entrant à gauche dans l'aquifère (donc  $Q_{S0} > 0$  vectoriellement), et  $Q_{SL}$  est le débit spécifique entrant à droite dans l'aquifère ( $Q_{SL} < 0$  vectoriellement). En régime permanent, nous devons avoir  $Q_{S0} - Q_{SL} = q_E L$  où  $q_E$  est le flux d'évaporation ( $m/j$ ) et  $L$  la largeur de l'aquifère (largeur de la surface évaporante de sol en



coupe verticale). Plus précisément, nous pouvons définir un critère d'erreur en débit net comme suit :

$$\epsilon = \frac{Q_{s0} - Q_{SL}}{q_E L} - 1$$

Nous constatons donc une bonne reproduction des débits justifiée par une très faible erreur (de l'ordre de  $10^{-2}$ ). Nous pouvons conclure aussi que le taux d'évaporation  $q_E$  est suffisamment élevé pour que le flux du réservoir à droite du domaine  $Q_{SL}$  soit inférieur à zéro et donc il est un flux entrant ( $Q_{SL} < 0$ ).



**FIGURE 3.10:** Représentation de la surface libre de la nappe ( $h = 0m$ ) à  $T = 18\text{jours}$  : solution analytique (*courbe bleu*), solution numérique ( $n = 8$ ) (*courbe rouge*) .

La figure 4.1.3 montre que la solution analytique et la solution numérique donnant la position de la surface libre sont parfaitement confondues pour un macroporeux très raide avec  $n = 8$ . Ce test prouve que l'eau est directement prélevée de la zone saturée à partir de sa surface libre. Ce résultat est obtenu sans connaître à l'avance la position de la surface libre et grâce au modèle de conductivité d'un milieu macroporeux, proposé pour la composante verticale.

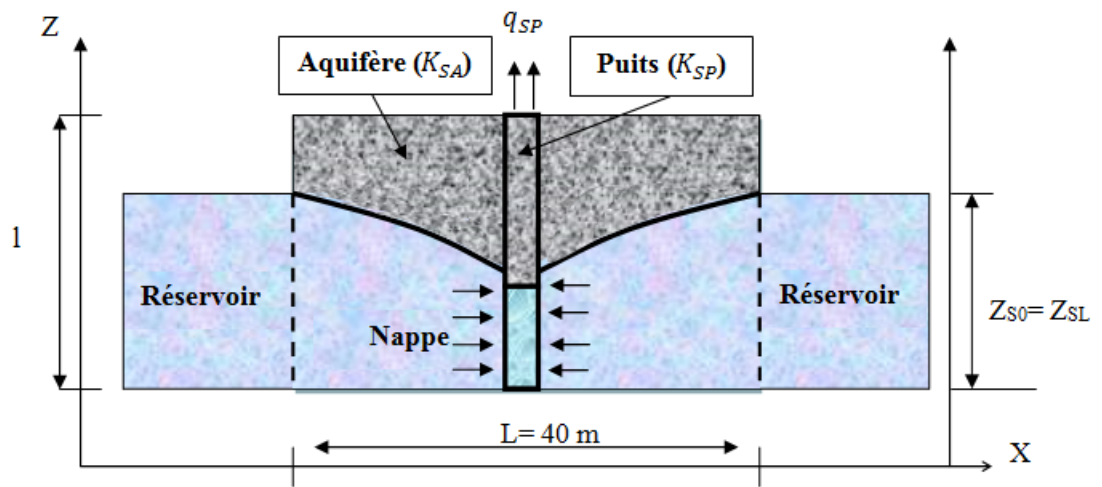
Ceci confirme que le phénomène d'évaporation simulé en imposant un flux

sortant à la surface d'un aquifère partiellement saturé, à comportement "macroporeux" anisotrope et à écoulement plan (selon les hypothèses de Dupuit), est correctement reproduit par BIGFLOW.

## 4.2 Pompage localisé dans un aquifère

### 4.2.1 Présentation du problème de pompage et solutions analytiques

Nous considérons un aquifère homogène de conductivité hydraulique à saturation  $K_{SA}$  qui contient une nappe reposant sur un substratum horizontal. (voir la figure 3.11)



**FIGURE 3.11:** Représentation schématique d'une nappe comprise entre deux rivières et soumise à un pompage ponctuel. .

Initialement, la nappe est en équilibre hydrostatique avec deux réservoirs de même niveau constant  $Z_{S0} = Z_{SL}$ . Nous réalisons un pompage dans cette nappe, à partir d'un puits placé au centre du domaine et représenté comme une excavation macroporeuse partiellement saturée/non-saturée. Le pompage se fait en imposant un flux de pompage  $q_{SP}$  au nœud surfacique appartenant au puits. Nous définissons le débit spécifique de pompage  $Q_{SP}(m^2/j)$  comme étant le produit entre le flux d'évaporation  $q_{SP}(m/j)$  et la largeur occupée par le puits.

Vue l'existence d'un plan de symétrie par rapport à l'axe verticale passant par le centre du puits, l'équation 3.21 est la solution analytique de ce problème pour la moitié du domaine (solution de l'équation de Dupuit Boussinesq 1D selon OX).

$$Z_S(x) = \sqrt{Z_{SP}^2 + \frac{Q_{SP}}{K_{SA}} \left(x - \frac{L}{2}\right)} \quad x \in \left[\frac{L}{2}, L\right] \quad (3.21)$$

avec :

$$Z_{SP} = \left( Z_{SL}^2 - \frac{Q_{SP}L}{2K_{SA}} \right)^{1/2} \quad (3.22)$$

#### 4.2.2 Expérimentations numériques

Le domaine de calcul est une section verticale de taille  $L_j = (40m, 2m, 20m)$  avec deux réservoirs localisés à un niveau  $Z_{S0} = Z_{SL} = 10m$ . La taille des mailles dans les directions respectives  $OX1, OX2, OX3$  est de  $\Delta x_{j(j=1:3)} = (0.5m, 1m, 0.1m)$  et le nombre total de maille est  $(81, 3, 201)$ . Le puits est représenté par une ligne verticale de nœuds (nœuds 41 selon OX), d'où le nombre total de ses mailles est  $(1, 3, 201)$ .

La condition initiale de ce problème est une pression hydrostatique  $h(x, y, z) = 10 - z$ . Nous présentons dans le tableau 3.6 les conditions aux limites utilisés dans cette simulation.

**Tableau 3.6:** Conditions aux limites (Pompage localisé dans un aquifère).

BC's	Faces 1 $\perp X_1 = X$	Faces 2 $\perp X_2 = Y$	Faces 3 $\perp X_3 = Z$
Faces A : $X_i = 0$	$h(x, y, z) = 10 - z$ (zone 1) $q_x = 0$ (zone 2)	$q_y = 0$ Pas d'écoulement // à Y Confinement 2D	$q_z = 0$ Pas d'écoulement // à Z Confinement 2D
Faces B : $X_i = L_i$	$h(x, y, z) = 10 - z$ (zone 1') $q_x = 0$ (zone 2')	$q_y = 0$ Pas d'écoulement // à Y Confinement 2D	$q_E = 80m/j$ (puits) $q = 0$ (Aquifère)

Pour assurer le pompage, nous supposons que la conductivité hydraulique relative du puits selon les directions principales  $OX$  et  $OY$  (quasi-horizontales) est différent de celle selon la direction principale  $OZ$  (quasi-verticale) :  $[K_{rP_{xx}}(h) = K_{rP_{yy}}(h)] \neq K_{rP_{zz}}(h) = 1$ . Le puits et l'aquifère sont considérés comme des milieux macroporeux. Les propriétés hydrodynamiques utilisées dans cette simulation sont  $K_{SA} = 10m/j$ ,  $K_{SP} = 10^3m/j$ ,  $\theta_{SP} = 1m^3/m^3$ ,  $K_d = 10 - 2m/j$ ,  $\alpha = 10m^{-1}$ ,  $n = 3.5$ .

Vue la discontinuité (nappe/acquière) combinée avec l'anisotropie et la convergence difficile du solveur non-linière, le problème est résolu numériquement par BIGFLOW en régime transitoire jusqu'à atteindre le régime permanent et en imposant un débit spécifique de pompage  $Q_{SP} = 40m^2/j$  ( $q_{SP} = 80m/j$ , le puits occupe  $0.5m$  de largeur).

### 4.2.3 Flux à travers les frontières

Notons d'abord que les faces  $A1$  et  $B1$  sont les frontières de deux réservoirs  $S0$  et  $SL$ , et la face  $B3$  est la frontière du domaine de calcul sur laquelle nous avons imposé un débit spécifique de pompage  $Q_{SP} = 40m^2/j$ . D'après la figure 3.12, nous constatons que nous avons largement atteint un régime asymptotique d'écoulement permanent ( $T = 15j$ ours). Le débit net total entrant ou sortant par l'ensemble des faces du domaine est défini comme suit :

$$Q_{net} = (QA_1 + QA_2 + QA_3) - (QB_1 + QB_2 + QB_3)$$

Dans notre cas et en régime permanent, nous avons un débit total nul ( $Q_{net} = 1E - 13 m^2/j$ ), ce qui signifie un bon bilan de masse et donc ce test est bien reproduit par BIGFLOW.

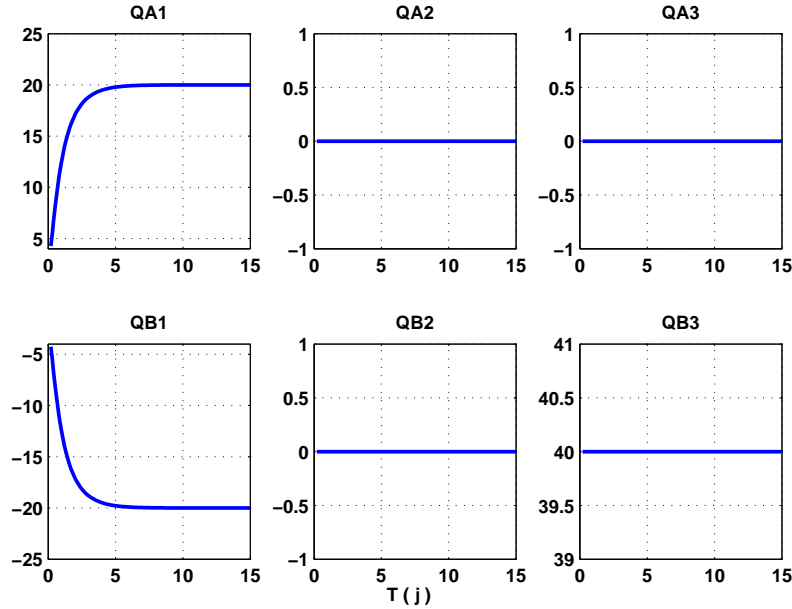
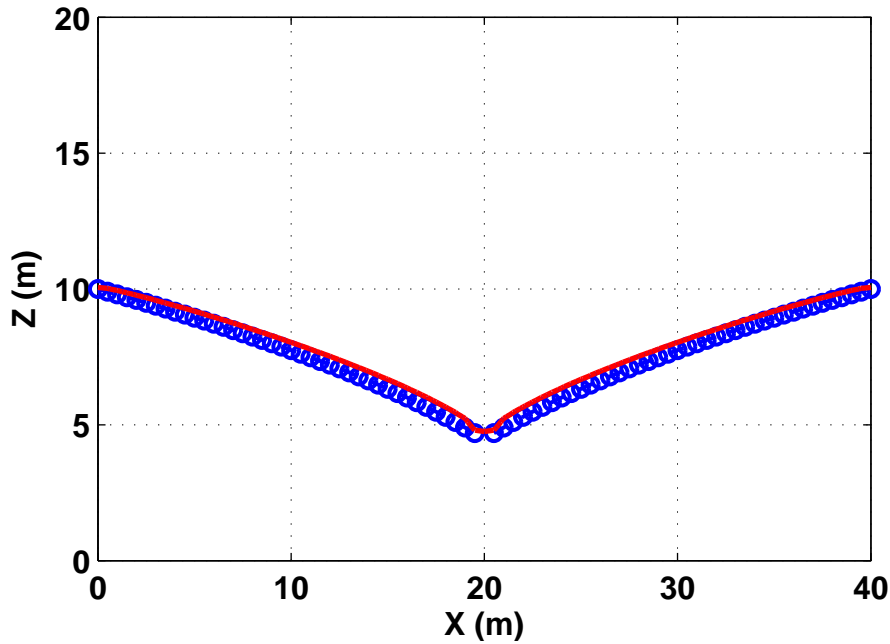


FIGURE 3.12: Variation du flux à travers les frontières en fonction du temps.

### 4.2.4 Solutions numériques vs. Solutions analytiques (régime permanent)

La figure 3.13 montre une superposition de la solution analytique donnant la position de la surface libre à la solution numérique ( $T = 15j$ ours). Nous pouvons constater aussi que l'écoulement de l'eau reste quasi-horizontale au niveau du puits. L'extraction de l'eau d'une façon localisée (imposée en un seul nœud) et avec un fort débit est bien gérée par BIGFLOW, même en présence des hétérogénéités qui étaient nécessaires pour distribuer l'extraction dans le domaine à la verticale des nœuds surfaciques.



**FIGURE 3.13:** Représentation de la surface libre de la nappe ( $h = 0m$ ) à  $T = 15\text{jours}$  : solution analytique (*courbe bleu*), solution numérique (*courbe rouge*).

## 5 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre une description du code Volumes Finis BIGFLOW utilisé dans cette thèse pour simuler des écoulements en milieux poreux variablement saturés. Dans le but de le valider, nous avons modélisé l'écoulement 1D en présence d'interface en étudiant d'une part, le phénomène de barrière capillaire et d'autre part le problème de la rizière. Les résultats numériques obtenus à l'aide du code BIGFLOW en régime permanent sont comparées par des solutions analytiques développées par Ross 1990 (barrière capillaire) ou par nous même (rizière).

Le code BIGFLOW peut aussi bien modéliser les apports ou des extractions qui peuvent être naturelles (infiltration ou évaporation) ou artificielles (pompage en injection ou extraction). Ces tests nous permettent de valider les modèles hydrodynamiques  $\theta(h)$  et  $K_{ii}(h,x)$  présentant des sauts et/ou de l'anisotropie généralisée (non-linéaire). Ces modèles peuvent être, éventuellement, utilisés dans des problèmes similaires comme par ailleurs celui de dessèchement d'un milieu argileux autour d'une galerie ventilée où le flux d'extractions est remplacé par une condition de succion (cf. chapitre 7).

Steady State Infiltration in  
Continuously Stratified  
Unsaturated Soils

4

## Sommaire

1	Introduction . . . . .	54
2	Literature review . . . . .	54
3	Characterization of periodic stratification . . . . .	58
3.1	Soil Properties . . . . .	58
3.2	Statistical interpretation . . . . .	58
4	Flux Potential and Reduced Potential . . . . .	60
4.1	The Kirchhoff transform $\Phi$ : from Pressure $h$ to Flux Potential $\varphi$ . . . . .	60
4.2	The Reduced potential approach . . . . .	61
5	Analytical Solution For Cyclic Variation . . . . .	62
5.1	The special case of constant $\alpha$ , with variable $K_s(z)$ . . . . .	62
5.1.1	Analytical Expressions of Pressures and moisture profiles . . . . .	62
5.1.2	Analytical approach for the envelope of vertical fluctuations . . . . .	63
5.2	Solutions for sinusoidal $\ln K_s(z)$ and $\ln \alpha(z)$ . . . . .	65
5.2.1	Linearized solution in term of potential $\varphi$ . . . . .	66
5.2.2	Linearized solution in term of reduced po- tential $\tilde{\varphi}$ . . . . .	67
6	Simulation results, comparisons, and analyses . . . . .	70
6.1	Input parameters . . . . .	70
6.2	Setup of infiltration simulations . . . . .	71
6.3	Analysis of results for shallow (case 2) and deep water table (case 4) . . . . .	72
6.3.1	Shallow water table : pressure and moisture profiles . . . . .	72
6.3.2	Deep water table : pressure and moisture profiles . . . . .	75
7	Conclusion and Outlook . . . . .	78

---

Ce chapitre de thèse, rédigé en anglais, est basé sur un article qui a été récemment soumis pour publication dans "Transport in Porous Media", revue scientifique internationale à comité de lecture.

Ce chapitre porte sur l'étude analytique de l'infiltration verticale, en régime permanent, dans un sol non-saturé continument stratifié de façon cyclique, sous flux fixé et en présence d'une nappe libre située à une profondeur finie  $L$ . Nous supposons que les courbes de conductivité hydraulique et de rétention d'eau sont des fonctionnelles exponentielles de la pression relative  $h$ . Les paramètres ( $K_s(z), \alpha(z)$  et  $\beta(z)$ ) qui interviennent dans ces courbes sont fonction de la profondeur, et varient cycliquement avec la profondeur. Pour éviter que les fluctuations de ces paramètres les amènent à devenir négatifs, nous proposons, plus précisément, que les log-paramètres (plutôt que les paramètres eux-mêmes) soient des fonctions harmoniques de la profondeur.

Nous cherchons à obtenir analytiquement, dans ces conditions d'infiltration, les profils de pression et d'humidité dans le sol. A cause des interactions complexes entre la non-linéarité de l'équation d'écoulement et l'hétérogénéité du sol, les solutions analytiques que nous pouvons les obtenir sont généralement approximatives et limitées à une plage modérée de variabilité. Dans ce chapitre, nous avons développé des solutions analytiques exactes et approchées (de type perturbatives) en utilisant deux transformations de variables : la première est la transformation de Khirchhoff qui aboutit à une variable appelée potentiel de « flux » (ou de Kirchhoff), et la deuxième est une nouvelle transformation, introduite ici pour la première fois, et qui aboutit à un potentiel « réduit » (reduced potential). Ces solutions analytiques sont présentées, tracées, et validées par des simulations numériques directes à l'aide d'un solveur Volumes Finis de l'équation de Richards pour les milieux souterrains hétérogènes (BIGFLOW 3D), et un solveur ODE non linéaire ("ode23t" de MATLAB). Les résultats sont encourageants pour une variabilité modérée, de l'ordre de 100% de coefficient de variation pour  $K_S$ , et jusqu'à 15% pour  $\alpha$ . De plus, dans le cas où seule la conductivité hydraulique à saturation  $K_S$  est variable (les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  étant alors constants), nous avons analysé l'effet de la longueur d'onde sur l'amplitude des fluctuations de pression pour une nappe profonde, ce qui mène à identifier une longueur capillaire caractéristique.



This PhD thesis chapter is based on a draft article submitted for publication in an international, peer reviewed scientific journal. At the time of this writing, the contents of this thesis chapter are unpublished.

## 1 Introduction

Analytical solutions for unsaturated flow in heterogeneous soils are difficult to obtain because of the complex interactions between non-linearity and heterogeneity. For this reason, the solutions of such infiltration problems are usually approximate and limited to a moderate range of variability.

Specifically, in this chapter, we analyze vertical infiltration at steady state in continuously and periodically stratified soils, in the presence of a finite depth water table (note, in this work,  $z$  represents the elevation above the water table :  $z = 0$  at the water table, and  $z = L$  at soil surface). We take the two log-parameters  $\ln K_s(z)$ ,  $\ln \alpha(z)$ , and  $\ln \beta(z)$  to be cyclic functions of elevation  $z$ ; they are represented by their mean value, their amplitude, and their wavelength  $\lambda$ . In other words, the log-parameters of the unsaturated conductivity curve vary sinusoidally (or harmonically) with  $z$ . This corresponds to the case of a continuously stratified soil with periodic spatial structure. It should be noted that the parameters themselves ( $K_s(z)$ ,  $\alpha(z)$ , and  $\beta(z)$ ) do not vary harmonically with  $z$  : instead, they vary as exponentials of harmonic sine/cosine functions, and they remain positive for all amplitudes.

The solution of the (transformed) infiltration equation is most difficult in this case. We will introduce heuristic linearization approximations, to be distinguished from usual perturbation expansions. This approach, as will be seen, leads to encouraging results, which capture the main effects of soil stratification on pressure & moisture profiles ( $h(z)$ ,  $\theta(z)$ ), and this within a reasonable range of soil heterogeneity ( $\ln K_s(z)$ ,  $\ln \alpha$ , and  $\ln \beta(z)$ ).

In summary, these solutions are obtained by solving transformed versions of the pressure based Richards flow equation, in terms of a *Kirchhoff "Flux Potential"*  $\varphi(z)$  as described in section 4, or in terms of a new *"Reduced Potential"* presented in sub-section 4.2.

## 2 Literature review

Several analytical solutions for infiltration problems in unsaturated soils have been presented in the literature. In these solutions, the unsaturated hydrodynamic properties of the soil are usually nonlinear functions of water pressure or moisture content. Furthermore, these constitutive relationships can be taken either homogeneous or variable in space (via

heterogeneous parameters). In the latter case, the difficulty of solving the nonlinear infiltration equation is compounded by the spatial variability of the parameters (such as saturated conductivity, capillary length scale, etc.).

The spatial variability of soils has been described in the literature in different ways : probabilistically (e.g. continuous random field fluctuations, or else, discrete layers with random parameters in each layer); deterministically (e.g. monotonous variation with depth, or discrete deterministic layers, or else, continuous cyclic stratification as proposed in his paper). We present below, briefly, a few of the cases that have been examined in the literature concerning infiltration in soils.

In the case of homogeneous soils, Philip ([57] [58]) developed a nonlinear quasi-analytical solution for the moisture based ( $\theta$  based) form of Richards' equation for vertical flow in a homogeneous unsaturated soil :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

where " $z$ " is depth (downwards). This moisture-based equation is valid only for strictly unsaturated conditions with non positive pressure " $h$ ". Philip further assumed a semi-infinite homogeneous soil, with uniform initial conditions below soil surface, and a constant pressure head or moisture boundary condition at soil surface. He then obtain a quasi-analytical solution for the iso-values  $z(\theta, t)$  expressed in the form of an infinite power series expansion in terms of  $\sqrt{t}$ . This solution can be used to obtain the transient moisture content profiles  $\theta(z, t)$ , and the infiltration rate, or surface flux  $q_0(t)$  (which is also denoted  $i(t)$  in the literature). Philip's nonlinear solution for 1D infiltration in a semi-infinite homogeneous soil column has served for validation tests of the BIGFLOW numerical code to be used later in this paper (Ababou & Bagtzoglou 1993 [7]; Alastal 2012 [14]).

Warrick 1975 [79] developed a 1D linearized analytical solution for transient infiltration in a homogeneous soil column for the case of "arbitrary input", accommodating transient flux for the top boundary condition. Warrick used the Kirchhoff transform, with hypotheses such that the transformed equation is fully linear, or "linearized". For transient flow, the required hypotheses are : (i) the capillary moisture diffusivity must be taken constant ( $D(\theta) = D_0$ ) in order to linearize the transient term; and (ii) the gravitational celerity ( $U = -d \ln K / d \psi$ ) must also be taken constant in order to linearize the spatial term. These hypotheses are satisfied with the exponential model ( $K(\psi), \theta(\psi)$ ), provided however that the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  of the two exponential curves be equal. For steady state flow, on the other hand, the moisture parameter  $\beta$  does not intervene in the equation,

and full linearization is achieved with the sole condition that the  $K(\psi)$  curve be exponential (log-slope  $\alpha = -d \ln K / d \psi$  independent of suction), which is a less restrictive than for transient flow.

Broadbridge 1987 ([21]) focus on several types of "exactly integrable" unsaturated flow equations with spatial heterogeneity; for example the case  $D(\theta) = a(b - \theta)^{-2}$  is treated using a Lie-Backlund transformation. Some applications to continuously varying  $D(\theta, x)$  with continuous but only piecewise differentiable coefficients in the case of scale-heterogeneous media. They also treated evaporation from a water table, and transient G-Ampt infiltration.

Concerning non-homogeneous soils, Philip and co-authors [59] [60] presented analytical solutions for infiltration in inhomogeneous soils (in multi-dimensions) with depth-dependent, exponentially increasing or decreasing saturated conductivity. In these analytical studies, the unsaturated hydraulic conductivity depended on both suction  $\psi$  and depth  $Z$  as follows :  $K(\psi, Z) = K_{S0} \times \exp(\rho Z) \times \exp(-\alpha \psi)$ . However, it should be observed that the  $\alpha$  parameter remained constant. Furthermore, the solution of similar infiltration problems with oscillatory rather than monotonous variability is a more challenging task.

Discrete multi-layered systems have also been considered in the literature. Thus, Ross 1990 [65] analyzed deterministically the vertical or quasi-vertical flow in a two-layer soil system, with either horizontal or slightly dipped interface. The solution was obtained in an infinite soil column around the layers interface using the Kirchhoff transform. In both cases, the unsaturated conductivity curve is a decreasing exponential function of suction (Gardner model), and the two-layer system is assumed unsaturated everywhere. The parameters of the Gardner conductivity curve ( $\alpha$  and  $K_S$ ) are different in each layer. The work focuses on the solution for the dipped interface, which is analyzed in terms of the capacity of the interface to divert flow laterally (this analysis seems restricted to small dip angles).

Warrick 2005 [80] solved numerically the discrete infiltration equation in an N-layer system, with repeated sub-layers. Each sublayer corresponded to a soil represented by its Van Genuchten–Mualem curves (e.g., alternating sand and sandy loam). This results in a system of non-linear ODE's across layers, which was solved using MathCad and an adaptive Runge-Kutta solver. The goal of this numerical procedure was to characterize, globally, the effective unsaturated conductivity of the semi-infinite soil column under different conditions.

On the other hand, a number of authors have studied vertical infiltration (steady and transient) in randomly heterogeneous unsaturated soils, with log-normally distributed, spatially correlated random field parameters, either numerically (direct simulations) or analytically (e.g. random perturbation approaches) : Ababou et al.1988 [2] ; Polmann et al. 1991[62] ; Ababou 1991[4] ; Yeh 1989 [82] ; Ababou 1990 [3] ; Gelhar 1993[32] ; Zhang 2002[87] ; Lu et al. 2004[45] ; Lu et al. 2007[46] ; Khaleel et al. 2002[40]. In comparison, we will develop in this work the case of a cyclic pattern of vertical heterogeneity : this may be viewed as a deterministic version of the case of perfectly stratified stochastic soils with vertically auto-correlated soil parameters (random fields).

In the case of one-dimensional multi-layered soils, Yeh 1989 [82] considered a vertically heterogeneous soil with random field properties  $\ln K_s(z)$  and  $\alpha(z)$  from Gardner's exponential conductivity model. This stochastic infiltration problem was solved based on a Fourier spectral representation of the perturbed and linearized infiltration equation. In order to test this perturbation solution, the author developed an auxiliary recursive solution of the stochastic infiltration problem, as follows. He discretized the soil into  $N$  layers and solved the one-dimensional steady flow equation recursively from layer  $n = 1$  (soil surface) to layer  $n = N$  (water table), assuming implicitly that the suction profile remains unsaturated at all depths. The variability of the random soil was moderate, especially for  $\alpha$ . The coefficient of variation was on the order of unity for  $K_S$ , but only 14% for  $\alpha$ .

Lu, Zhang et al. 2007 [46] (see also Lu & Zhang 2004 [45]) analyzed a multi-layer soil system probabilistically. They used the Kirchoff transform to study steady infiltration in a mono-layer and a three-layered random soil, based on the exponential Gardner model for conductivity *vs.*, and on Mualem's functional model ([52]) for the water retention curve. The heterogeneous parameters in each layer were a random field  $\ln K_s(z)$ , and a random constant  $\ln \alpha$ . Thus, although random, the parameter  $\alpha$  is not spatially variable within each layer. The two random parameters were assumed independent, not cross-correlated between layers, and less realistically perhaps, not cross-correlated to each other within each layer. The steady infiltration flux  $q_0$  was taken to be a random constant (indeed, due to steady mass conservation, each random replicate of  $q_0$  must be constant in space, and this throughout all layers).

Based on these hypotheses, the authors [46] developed an approximate perturbation expansion of the Kirchoff-based random infiltration equation to zero and first order in terms of parameters standard deviations. They analyzed the vertical profiles of pressure head  $h$  and moisture content  $\theta$  (mean and variance), for different flux variability (or flux uncertainty). The authors [46] tested their random analytical solutions by running Monte

Carlo simulations, where each simulation was an implementation of the "exact" recursive layer-to-layer algorithm of [82]). There was a good fit between the vertical profiles of computed *vs.* analytical moisture moments (mean and variance), albeit for a moderate range of variability due to the approximate nature of the first-order solution (coefficient of variation limited to roughly 100% for  $K_s$ , and to 10% for  $\alpha$ ).

### 3 Characterization of periodic stratification

#### 3.1 Soil Properties

In this study, based on the exponential model ( $K(\psi), \theta(\psi)$ ), it is assumed that the logarithms of  $K_s$  (4.1a), of  $\alpha$  (4.1b), and of  $\beta$  (4.1c), can all vary cyclically with elevation ( $z$ ). As a consequence, the parameters themselves are exponentials of harmonic functions of  $z$ , as follows :

$$K_s(z) = K_s^o e^{\kappa \cos(\omega z + \varphi_K)} \quad (4.1a)$$

$$\alpha(z) = \alpha_o e^{a \cos(\omega z + \varphi_\alpha)} \quad (4.1b)$$

$$\beta(z) = \beta_o e^{b \cos(\omega z + \varphi_\beta)} \quad (4.1c)$$

where :

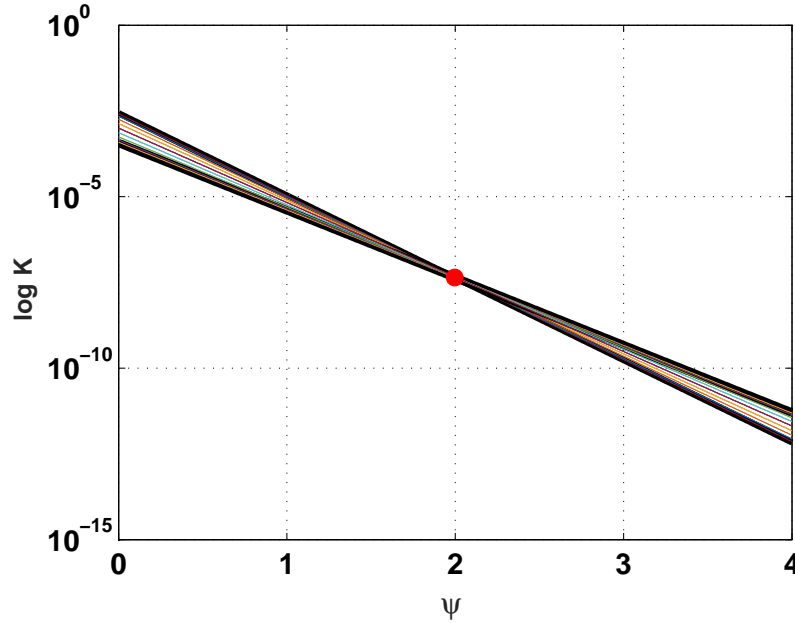
- $\omega[m^{-1}]$  is the wavenumber or spatial frequency, related to wavelength  $\lambda$  by  $\omega = 2\pi/\lambda$ .
- The parameters  $\kappa$ ,  $a$  and  $b$  are the dimensionless amplitudes of  $\ln K_s(z)$ ,  $\ln \alpha(z)$  and  $\ln \beta(z)$ , respectively. They represent the variability and structure of the stratified soil. They are chosen so that the following "small amplitude" condition is satisfied :  $a = b < \kappa < 1$ .
- Finally,  $\varphi_K$ ,  $\varphi_\alpha$  and  $\varphi_\beta$  represent the phases of  $\ln K_s(z)$ ,  $\ln \alpha(z)$  and  $\ln \beta(z)$  respectively. It is easily seen that, when  $\varphi_K = \varphi_\alpha = -\pi/2$ , the soil parameters are equal to their geometric mean value at soil surface  $z = 0$  and that there is a zero phase lag between  $\ln K_s(z)$  and  $\ln \alpha(z)$  at all depths (*see statistical interpretation below*).

#### 3.2 Statistical interpretation

In our deterministic cyclic model of soil stratification, when we take  $\varphi_K = \varphi_\alpha$ , the heterogeneous parameters  $\ln K_s(z)$  and  $\ln \alpha(z)$  are perfectly "in phase". The statistical equivalent of this situation would be that the two parameters are perfectly cross-correlated in space.

More generally, the cross-correlation coefficient  $\rho$  between  $\kappa(z)$  and  $a(z)$  depends on the phase difference  $\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\alpha$  as follows :  $\rho_{\kappa,a} = \cos(\Delta\varphi)$ . In our deterministic case, here, the ensemble averages that define the

cross-correlation coefficient  $\rho$  are calculated in physical space ( $z$ ) rather than over ensemble space (probability space). Nevertheless, the statistical interpretation remains useful.



**FIGURE 4.1:** Family of unsaturated  $\log K(\psi, z)$  curves *vs.* dimensionless suction ( $\alpha_G \psi$ ), for a soil with cyclic stratification. The curves are sampled at different depths within a single wavelength. The suction range is adjusted so as to clearly see the intersection point of the  $K(\psi)$  curves. The parameters used in this plot are the geometric means  $K_G = 10^{-3} \text{ m/s}$  &  $\alpha_G = 5 \text{ m}^{-1}$ ; the relative amplitudes  $\kappa = 1.00$  &  $a = 0.10$ ; and the cross-correlation coefficient  $\rho_{\kappa, a} = +1$ .

Figure 4.1 shows the family of unsaturated log-conductivity curves  $\log K(\psi, z)$  versus dimensionless suction, for the perfectly cross-correlated case  $\rho_{\kappa, a} = +1$ .

It is apparent from this figure that all the curves  $\log K(\psi, z)$  intersect at a given critical suction ( $\psi_{crit} = 2m$ ). Following an approach developed earlier by [5] in a probabilistic framework, we obtain here the critical suction for our case of cyclic stratification (with perfect cross-correlation  $\rho_{\kappa, a} = +1$ ) as follows :

$$\psi_{crit} = \frac{2\kappa}{\alpha_o(e^a - e^{-a})} \quad (4.2)$$

In reality, the intersection point is not exactly sharp, but fuzzy, depending on the degree of variability of  $\alpha$  and on the cross-correlation coefficient  $\rho$ . See [5] for more details on the statistical properties of random families of unsaturated conductivity-suction curves.

## 4 Flux Potential and Reduced Potential

Our solution method is based on a change of variable. The original equation (with  $z$  oriented upward) is the non-linear Darcy-Buckingham (equation expressed in terms of pressure  $h$ ) :

$$q(z) = -K(h,z) \times \left\{ \frac{dh}{dz} + 1 \right\} \quad (4.3)$$

We focus first upon this Darcy equation (also known as the *Darcy-Buckingham* equation). Note however that the complete system of flow equations consists of Darcy's equation together with mass conservation. For steady state flow, mass conservation yields :

$$\text{div}(\vec{q}) = 0$$

and this finally yields  $dq_z/dz = 0$  for mass conservation in the case of 1D steady flow. This implies that the vertical flux  $q_z(z)$  is constant with depth,  $q_z(z) = q_z(0)$ , even though the soil is stratified.

### 4.1 The Kirchhoff transform $\Phi$ : from Pressure $h$ to Flux Potential $\varphi$

In this section, we will develop the infiltration equation that would result in the case of variable  $K_s(z)$  and  $\alpha(z)$  using the Kirchhoff transform approach. If the unsaturated conductivity curve is  $z$ -dependent, the Kirchhoff transform is an integral transform defined in terms of pressure  $h = -\psi$  as follows :

$$\Phi(h, z) = \int_{-\infty}^h K(h', z) \, dh' \quad . \quad (4.4)$$

We continue the presentation of Kirchhoff-transformed equations in terms of pressure head " $h$ " instead of suction " $\psi$ " (merely for convenience). We use the lower case greek letter  $\varphi(z)$  to denote the spatially distributed "Kirchhoff variable" :

$$\varphi(z) = \Phi(h(z), z)$$

Thus, the transform  $\Phi$  maps a pressure profile  $h(z)$  to a "Kirchhoff profile"  $\varphi(z)$ . Conversely, the inverse transform  $\Phi^{-1}$  maps a "Kirchhoff profile"  $\varphi(z)$  to a pressure profile  $h(z)$ . For the exponential conductivity curve with both  $K_S(z)$  and  $\alpha(z)$  variable in space, the corresponding relations are the following :

$$\varphi(z) = \frac{K(h(z), z)}{\alpha(z)} = \frac{K_S(z)}{\alpha(z)} \times \exp\{\alpha(z)h(z)\} \quad (4.5)$$

We introduce this exact transform in the pressure-based, Darcy and Richards flow equations, and we apply the chain rule of derivation as follows :

$$d\varphi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_h dz + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial h} \right|_z dh \quad (4.6)$$

where :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_h = \varphi \left[ (\ln K_s)' - (\ln \alpha)' + (\ln \alpha)' \ln \left( \frac{\alpha \varphi}{K_s} \right) \right] \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial h} \right|_z = \alpha(z) \varphi \quad (4.8)$$

In the 1D case, the mass conservation equation for steady state flow without source terms reduces to  $0 = -dq/dz$ , whence  $q(z) = q_0$  ( the vertical component of water flux density, negative downward 'infiltration' and positive upward 'evaporation'). This way, the infiltration equation in terms of  $\varphi(z)$  is obtained as follows for continuously heterogeneous soil (without approximations) :

$$-\varphi' + \left[ (\ln K_s)' - (\ln \alpha)' - \alpha(z) + (\ln \alpha)' \ln \left( \frac{\alpha \varphi}{K_s} \right) \right] \varphi = q_0 \quad (\forall z) \quad (4.9)$$

Note that this equation is, in the general case, a nonlinear first order Ordinary Differential Equation (ODE) with variable coefficients. The nonlinearity is due to the term  $(\ln \alpha)' \times \ln(\varphi) \times \varphi$  ; as a consequence, this equation is difficult to solve explicitly in the case of variable  $\alpha$ , and particularly so if  $\alpha$  is an oscillatory function of space. We observe that, even if  $K_s$  is variable, it suffices that  $\alpha$  be constant for equation (4.9) to be linear.

We note that, if  $\alpha' \psi \ll |\alpha(z) + (\ln K_s)' - (\ln \alpha)'|$ , the term  $\ln(\varphi)\varphi$  can be neglected, and the linearized equation would be :

$$-\varphi' + [(\ln K_s)' - (\ln \alpha)' - \alpha(z)] \varphi \cong q(z) \quad (4.10)$$

## 4.2 The Reduced potential approach

In this section, we propose an alternative infiltration equation (ODE) based on a reduced flux potential  $\tilde{\varphi}$ , such that the new nonlinear ODE becomes linear in the hydrostatic case ( $q_0 = 0$ ). This is motivated by the fact that the previous equation (4.9) does not simplify to a linear equation in the hydrostatic case (it will be seen later indeed that approximations of equation (4.9) are not robust as  $q_0 \rightarrow 0$ ). We propose the following reduced flux potential  $\tilde{\varphi}$  as the new variable :

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \quad (4.11)$$

where  $\varphi_0(z)$  is the hydrostatic potential  $\varphi(z)$  obtained for hydrostatics conditions  $h(z) = -(z + L)$ . Inserting this in equation (4.5) yields :

$$\varphi_0(z) = \frac{K_s(z)}{\alpha(z)} \times \exp[-\alpha(z)(z + L)] \quad (4.12)$$



Substituting  $\varphi(z) = \tilde{\varphi}(z) \varphi_0(z)$  in the previous equation (4.9) yields finally, the exact non linear ODE in terms of the reduced flux potential as follows :

$$-\tilde{\varphi}' + (\ln\alpha)' \tilde{\varphi} \ln(\tilde{\varphi}) = \frac{q_0}{\varphi_0(z)} \quad (\forall z \in [-L, z]) \quad (4.13)$$

## 5 Analytical Solution For Cyclic Variation

In this section, we specialize the previous analytical solution  $\psi(z)$  for the case such that the fluctuations of  $\ln K_s(z)$  and  $\ln\alpha(z)$  are *in phase* ( $\varphi_K = \varphi_\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ), that is,  $\ln K_s(z)$  and  $\ln\alpha(z)$  are perfectly cross-correlated ( $\rho = 1$ ). In that case, we can express the variable saturated conductivity and the variable  $\alpha$ -parameter as follows :

$$K_S(z) = K_s^o e^{\kappa \sin(\omega z)}; \quad \alpha(z) = \alpha_o e^{a \sin(\omega z)} \quad \text{and} \quad \beta(z) = \beta_o e^{a \sin(\omega z)}$$

The analytical solution is expressed below for two cases,  $\alpha$  constant and  $\alpha$  spatially variable, with  $K_S$  variable in both cases. We will also distinguish two methods for evaluating the analytical (theoretical) pressure and moisture profiles : with numerical integration or with an additional analytical approximation for evaluating the remaining integral involved in the case of variable  $\alpha(z)$  (see the special function  $J(z, z_o)$  defined just below in the next section).

### 5.1 The special case of constant $\alpha$ , with variable $K_s(z)$

#### 5.1.1 Analytical Expressions of Pressures and moisture profiles

Here, we assume for the moment that only  $K_s(z)$  vary over space. If  $\alpha$  is constant in space, the nonlinear term of (4.13) vanishes and the exact ODE becomes in this case :  $\tilde{\varphi}' = -\frac{q_0}{\varphi_0(z)}$ , integrating between  $Z = -L$  (water table) and  $Z = z$ , we obtain the following expression for the reduced potential :

$$\tilde{\varphi}(z) = 1 - q_0 \frac{\alpha_0}{K_s^o} e^{\alpha_0 L} J(z) \quad (4.14)$$

where  $J$  is the special function defined by :

$$J(z) = \int_{-L}^z \exp[\alpha_0 Z - \kappa \sin(\omega Z)] dZ \quad (4.15)$$

We obtain the following expression for the pressure profile in the presence of a finite depth water table located at  $z_o = -L$  (where  $h(z_o) = 0$ ) :

$$h(z) = -(z + L) + \frac{1}{\alpha_0} \ln(\tilde{\varphi}(z)) \quad (4.16)$$

We obtain also the following expression for the water content profile by using the exponential moisture retention curve (Eq.2.10) and assuming here

$\theta_r = 0$  and for example  $\beta_0 = \frac{\alpha_0}{3}$  :

$$\theta(z) = \theta_s \left( e^{-\alpha_0(z+L)} \tilde{\varphi}(z) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.17)$$

Alternatively, the integral  $J$  in equation (4.14) can be evaluated completely analytically by approximate linearisation, provided that the amplitude of  $LnK_s(z)$  fluctuations be small enough (a strict criterion would be  $\kappa \leq 0.3$  or so). The linearization is based on :

$$\exp[-\kappa \sin(\omega Z)] \simeq 1 - \kappa \sin(\omega Z) + O(\kappa^2).$$

Inserting this into (4.14), we obtain the approximate analytical solution of the reduced flux potential as follows :

$$\tilde{\varphi}(z) = 1 - \frac{q_0}{K_s^o} \left[ e^{\alpha_0(z+L)} [1 - \Omega(z)] - [1 - \Omega(-L)] \right] \quad (4.18)$$

where :

$$\Omega(z) = \frac{\kappa \alpha_0^2}{\alpha_0^2 + \omega^2} \left[ \sin(\omega z) - \frac{\omega}{\alpha_0} \cos(\omega z) \right] \quad (4.19)$$

Finally, we obtain the approximate analytical expression for the pressure profile in the presence of a finite depth water table for the special case of constant  $\alpha$  :

$$h(z) = \frac{1}{\alpha_0} Ln \left( \frac{-q_0}{K_s^o} [1 - \Omega(z)] + e^{-\alpha_0(z+L)} \left[ 1 + \frac{q_0}{K_s^o} [1 - \Omega(-L)] \right] \right) \quad (4.20)$$

We note that if  $q_0 = 0$ , the exact hydrostatic result  $\tilde{\varphi}(z) = 1$  is obtained : this corresponds to a hydrostatic pressure profile  $h(z) = -(z + L)$ , as it should.

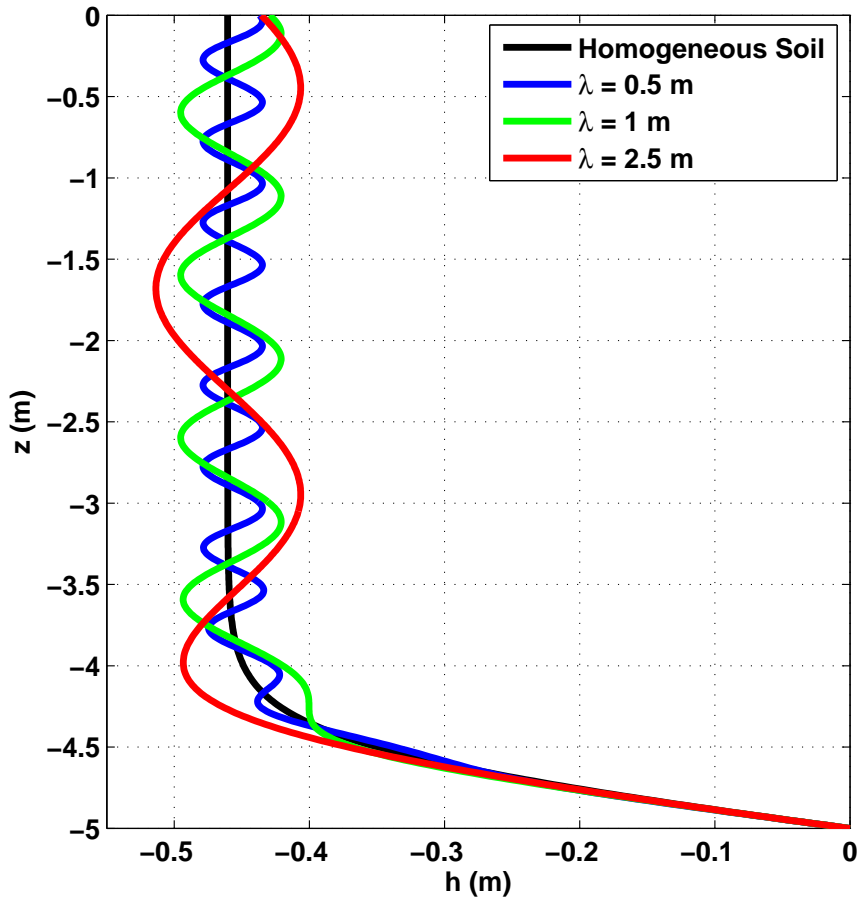
The approximate analytical solution of the water content profile for the special case of constant  $\alpha$  is as follows :

$$\theta(z) = \theta_s \left( \frac{-q_0}{K_s^o} [1 - \Omega(z)] + e^{-\alpha_0(z+L)} \left[ 1 + \frac{q_0}{K_s^o} [1 - \Omega(-L)] \right] \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.21)$$

Pressures profiles and moisture profiles will be analysed and plotted later in section 6.3.

### 5.1.2 Analytical approach for the envelope of vertical fluctuations

For the case of a soil with variable  $K_s(z)$  and constant  $\alpha = \alpha_0$ , Fig.4.2 shows three oscillatory pressure profiles  $h(z)$  for three wavelengths of stratification. The degree of variability of the soil is the same for all 3 wavelengths (amplitude  $\kappa = 0.5$ ). We have observed that the amplitude of pressure fluctuations appears greater with increasing wavelength.



**FIGURE 4.2:** Oscillatory pressure profiles  $h(z)$  for three wavelengths of stratification :  $\lambda = 0.50m$  (blue),  $\lambda = 1.00m$  (light green),  $\lambda = 2.50m$  (red). One additional pressure profile is shown, for the homogeneous soil.  $\kappa = 0.3$ ,  $\alpha^0 = 5m^{-1}$ , and  $q_o = 0.1m/s$ .

Based on the fully analytical solution previously obtained, we study here in more detail the case of deep water table, focusing on the shallow unsaturated region far above the water table ( $\alpha_0 L \ll 1$ ). The pressure profile solution can then be reduced to :

$$h(z) = \frac{1}{\alpha_0} \ln\left(-\frac{q_o}{K_s^o} [1 - \Omega(z)]\right) \quad (4.22)$$

It is easily seen that the fluctuations of  $\exp(\alpha h)$  are bounded by the envelopes  $(+A)$  and  $(-A)$  such that :

$$\frac{1}{\alpha} \ln\left[\frac{-q_o}{K_s^o} (1 - A)\right] \leq h(z) \leq \frac{1}{\alpha} \ln\left[\frac{-q_o}{K_s^o} (1 + A)\right]$$

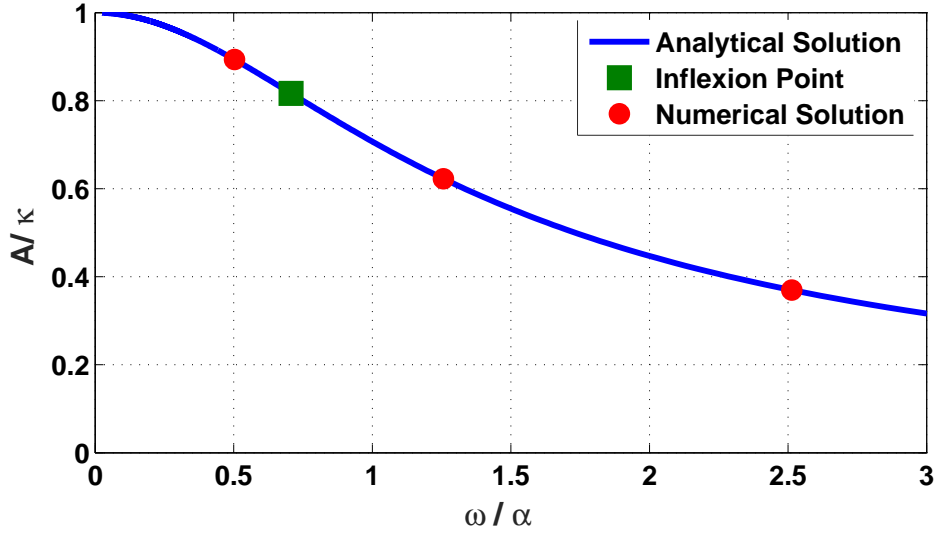
where :

$$A = \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}} \quad (4.23)$$

Analyzing the behavior of  $A$  normalized by the amplitude of  $\ln K_s(z)$  fluctuations ( $\kappa$ ), it can be shown that the sensitivity of the amplitude ( $\frac{A}{\kappa}$ ) with respect to wavelength ( $\lambda$ ) is maximized at the inflexion point characterized by :

$$\lambda = \lambda_{CAP} = \frac{2\sqrt{(2)\pi}}{\alpha} \quad (4.24)$$

as shown in Fig. 4.3. Thus, we have here an explicit expression of  $\lambda_{CAP}$ , the characteristic wavelength of the soil. Its meaning is illustrated in figure 4.3, in terms of the relation between amplitude  $A$  of pressure oscillations *vs.* stratification wavenumber  $\omega$ .



**FIGURE 4.3:** Normalized amplitude  $A$  of the envelope of oscillatory pressure profiles, plotted *vs.* normalized wavenumber  $\omega$  ( $\omega = 2\pi/\lambda$ ). For all wavelengths, the soil parameters are :  $K_s^0 = 1E - 3m/s$ ,  $\alpha^0 = 5m^{-1}$ ,  $\kappa = 0.10$ . The top flux is  $q_0 = 1E - 4m/s$ . The analytical expression (blue thick curve) is compared here with the numerical experiments (red circular symbols). The green square symbol marks the position of the inflexion point analyzed in the text.

## 5.2 Solutions for sinusoidal $\ln K_s(z)$ and $\ln \alpha(z)$

We now turn to the case where both  $K_s(z)$  and  $\alpha(z)$  are spatially variable in an oscillatory function. Specifically, we consider here that, similarly to  $\ln K_s(z)$ , the parameter  $\ln \alpha(z)$  is also a sinusoidal function of  $z$  with the same spatial frequency  $\omega$  and without phase lag (perfect cross-correlation between  $\alpha$  and  $K_s$ ) :  $\alpha(z) = \alpha_0 e^{a \sin(\omega z)}$ .

We also consider the case where the moisture content parameter  $\beta$  is spatially variable as well. For simplicity, we take  $\beta(z)$  to be cyclic and perfectly cross-correlated with the fluctuations of  $\alpha$  :  $\beta(z) = \beta_0 e^{b \sin(\omega z)}$ .

Furthermore, we assume that  $\beta(z)$  is proportional locally to  $\alpha(z)$ , with a constant ratio of  $1/3$  :  $\beta(z) = \alpha(z)/3$ , we suppose that  $b = a$  and  $\beta_0 = \frac{\alpha_0}{3}$ .

### 5.2.1 Linearized solution in term of potential $\varphi$

If the amplitude of  $Ln\alpha(z)$  is small enough ( $a \ll 1$ ), and if the amplitude of  $LnK_s(z)$  is moderate ( $0 < \kappa - a \ll 1$ ), then the solution of equation (4.10) obtained using the method of "integrating factor" is :

$$\varphi(z) = \frac{K_s(z)}{\alpha(z)} e^{\delta(z)} \left[ e^{-[\alpha_0(L+z)+\delta(z)]} - \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 F(z) e^{-\alpha_0 z} \right] \quad (4.25)$$

where :

$$\delta(z) = \frac{\alpha_0 a}{\omega} \cos(\omega z) \quad (4.26)$$

$$F(z) = \int_{-L}^z \exp[\alpha_0 Z - (\frac{\alpha_0 a}{\omega} \cos(\omega Z) - (\kappa - a) \sin(\omega Z))] dZ \quad (4.27)$$

The resulting pressure profile of a finite depth water table located at  $z = -L$  :

$$h(z) = \frac{1}{\alpha(z)} Ln \left( e^{\delta(z)} \left[ e^{-[\alpha_0(L+z)+\delta(z)]} - \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 F(z) e^{-\alpha_0 z} \right] \right) \quad (4.28)$$

We also obtain the expression of the water content profile for the case where both  $K_s(z)$  and  $\alpha(z)$  are variable (under the above-defined simplifying hypotheses for the curve  $\theta(h, z)$ ) :

$$\theta(z) = \theta_s \left( e^{\delta(z)} \left[ e^{-[\alpha_0(L+z)+\delta(z)]} - \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 F(z) e^{-\alpha_0 z} \right] \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.29)$$

The integral  $F$  in equation (4.30) can be determined analytically assuming that the amplitude of  $LnK_s(z)$  and  $Ln\alpha(z)$  fluctuations be small enough ( $[\kappa - a] \ll 1$ ) with short wavelength ( $\frac{\alpha_0 a}{\omega} \ll 1$ ). This yields the approximate expression of the integral  $F$  as follows :

$$F(z) = e^{\alpha_0 z} G(z) - e^{-\alpha_0 L} G(-L) \quad (4.30)$$

where :

$$\begin{aligned} G(z) = & \frac{1}{\alpha_0} - \frac{\kappa \alpha_0}{\alpha_0^2 + \omega^2} \sin(\omega z) + \frac{(\kappa - a)\omega^2 - a\alpha_0^2}{\omega(\alpha_0^2 + \omega^2)} \cos(\omega z) \\ & + \frac{a\alpha_0^2(\kappa - a)}{2\omega[\alpha_0^2 + (2\omega)^2]} \left[ \sin(2\omega z) - \frac{2\omega}{\alpha_0} \cos(2\omega z) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

The approximate analytical solution of the pressure profile is as follows :

$$\begin{aligned} h_{App}(z) = & \\ & \frac{1}{\alpha(z)} Ln \left( e^{\delta(z)} \left[ e^{-\alpha_0(L+z)} \left( e^{-\delta(-L)} + \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 G(-L) \right) - \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 G(z) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

The approximate analytical solution of the water content profile is as follows :

$$\theta_{App}(z) = \theta_s \left( e^{\delta(z)} \left[ e^{-\alpha_0(L+z)} \left( e^{-\delta(-L)} + \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 G(-L) \right) - \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 G(z) \right] \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.33)$$

*Note* : in these expressions, the variability of  $Ln\alpha$  is expressed by the amplitude parameter "a" involved in the term " $\delta(z)$ "; the term " $\delta(z)$ " vanishes entirely if  $a = 0$  ( $\alpha$  constant); the variability of  $LnK_s$  is represented by the amplitude parameter  $\kappa$ .

To validate the above solution, we will use two methods. The first is a comparison with the specialized analytical solution for the case where  $\alpha(z) = \alpha_0$ , and the second is a numerical validation using a finite volume solver of the Richard's equation. This is presented in the next sections, where analytical *vs.* numerical pressure and moisture profiles are displayed and analyzed (we will also study analytically the amplitude of pressure fluctuations *vs.* stratification wavelength).

### 5.2.2 Linearized solution in term of reduced potential $\tilde{\varphi}$

In this case, where the exact ODE governing  $\tilde{\varphi}$  is non-linear with variable coefficient and variable right-hand side. There are several different methods that can be used to implement such a linearization (these methods can sometimes be combined) : (i) perturbation expansion with respect to  $(ln\alpha)'$  or with respect to the amplitude parameter "a" of  $ln\alpha(z)$ ; (ii) multiple scale asymptotic (e.g. for short enough wavelength of soil stratification); and (iii) various heuristic approximations or linearization.

Here we adopt a simple approach for linearizing, approximating and solving the non-linear ODE above : we will replace in the equation (4.13) the term  $(ln\alpha)' \tilde{\varphi} ln(\tilde{\varphi})$  by  $(ln\alpha)' \tilde{\varphi} ln(\tilde{\varphi}_{hom})$ . where  $\tilde{\varphi}_{hom}$  is the reduced flux potential for the homogeneous soil.

$$\tilde{\varphi}_{hom} = 1 + P(z) \quad (4.34)$$

with :

$$P(z) = -\frac{q_0}{K_s^o} [e^{\alpha_0(z+L)} - 1] \quad (4.35)$$

The new form of the ODE can be solved using the method of "integrating factor". Here, the integrating factor is :

$$I(z) = \exp \left[ \int_{-L}^z -a \omega \cos(\omega Z') \ln [1 + P(Z')] dZ' \right] \quad (4.36)$$

The lower boundary condition is provided by the water table at  $z_0 = -L$ , where  $h = 0$  by definition. We obtain the following expression of  $\tilde{\varphi}$  for the case where both  $K_s(z)$  and  $\alpha(z)$  varies :

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1 - q_0 \int_{-L}^z \frac{I(Z)}{\varphi_0(Z)} dZ}{I(z)} \quad (4.37)$$

We notice that the analytical integration of this equation is difficult, therefore, we adopt a approach for approximating, it based on the value of the dimensionless parameter  $P(z)$  compared to 1.

Recall that  $-L \leq z \leq 0$  and that  $q_0$  is negative for downwards infiltration. In that case,  $P(z)$  increases monotonically between 0 and  $P_0 = -\frac{q_0}{K_s^o} [e^{\alpha_0 L} - 1]$ . This dimensionless parameter  $P(z)$  can be interpreted as follows based on the earlier definitions of static potential, homogeneous potential, and reduced potential :

$$P(z) = \frac{\varphi_{hom}(z)}{\varphi_0(z)} - 1 \quad (4.38)$$

This shows that the parameter  $P(z)$  measures, at any given height "z", the relative discrepancy between the homogeneous potential (for a homogeneous soil and the static potential (for a null flux,  $q_0 = 0$ ). We will now propose two different analytical approximations of integral  $I(z)$  :

- $|P(z)| < 1$  : implies that the infiltration flux  $|q_0|$  is sufficiently low with respect to  $K_s^o$  and also the water table depth  $L$  is small with respect to the capillary length parameter ( $\frac{1}{\alpha_0}$ ). Mathematically, the corresponding condition is :  $\alpha_0 L < Ln \left( 1 + \left| \frac{K_s^o}{-q_0} \right| \right)$
- $|P(z)| \gg 1$  : implies that the water table is deep ( $\alpha_0 L \gg 1$ ) and the infiltration flux is sufficiently large ( $\left| \frac{-q_0}{K_s^o} \right| \gg \frac{1}{e^{\alpha_0 L} - 1}$ ). This condition is restricted to a limited region below soil surface ( $e^{\alpha_0(z+L)} \gg 1$ ).

**Shallow water table and small infiltration flux :  $|P(z)| < 1$**

We now use the approximation  $Ln(1 + P(z)) \approx P(z)$  in the integrand of  $I$  (Eq.4.36). This yields our first analytical approximation of  $I_S(z)$  for shallow water table and low flux :

$$I_S(z) = exp \left( a \frac{q_0}{K_s^o} [S(z) - S(-L)] \right) \quad (4.39)$$

with :

$$S(z) = \left( \frac{\alpha_0 \omega}{\alpha_0^2 + \omega^2} \left[ \cos(\omega z) + \frac{\omega}{\alpha_0} \sin(\omega z) \right] e^{\alpha_0(z+L)} \right) - \sin(\omega z) \quad (4.40)$$

We obtain also the following approximate solution for the pressure profile in term of  $\tilde{\varphi}$  for shallow water table and low flux :

$$h(z) = -(z + L) + \frac{1}{\alpha(z)} \text{Ln} \left[ \frac{1}{I_S(z)} - q_0 R_S(z) \exp \left( \alpha_0 L - a \frac{q_0}{K_s^o} S(z) \right) \right] \quad (4.41)$$

with :

$$R_S(z) = \int_{-L}^z \exp \left[ a \frac{q_0}{K_s^o} S_1(Z) + \alpha_0 Z + [a - \kappa + a\alpha_0(Z + L)] \sin(\omega Z) \right] dZ \quad (4.42)$$

**Deep water table and large infiltration flux :**  $|P(z)| \gg 1$

For deep water table, we have  $\alpha_0 L \gg 1$ , so the dimensionless parameter can be written in this form :  $P(z) \approx \frac{-q_0}{K_s^o} \exp[\alpha_0(z + L)]$  We now use the approximation  $\text{Ln}(1 + P(z)) \approx \text{Ln}(\frac{-q_0}{K_s^o} \exp[\alpha_0(z + L)])$  in the integrand of  $I$  (Eq.4.36). This yields our first analytical approximation of  $I_D(z)$  for deep water table and large flux :

$$I_D(z) = \exp(-a[D(z) - D(-L)]) \quad (4.43)$$

with :

$$D(z) = \left( \text{Ln} \left( \frac{-q_0}{K_s^o} \right) + \alpha_0(z + L) \right) \sin(\omega z) + \frac{\alpha_0}{\omega} \cos(\omega z) \quad (4.44)$$

We obtain also the following approximate solution for the pressure profile in term of  $\tilde{\varphi}$  for shallow water table and low flux :

$$h(z) = -(z + L) + \frac{1}{\alpha(z)} \text{Ln} \left[ \frac{1}{I_D(z)} - \frac{q_0}{K_s^o} \alpha_0 R_D(z) e^{(\alpha_0 L + aD(z))} \right] \quad (4.45)$$

with :

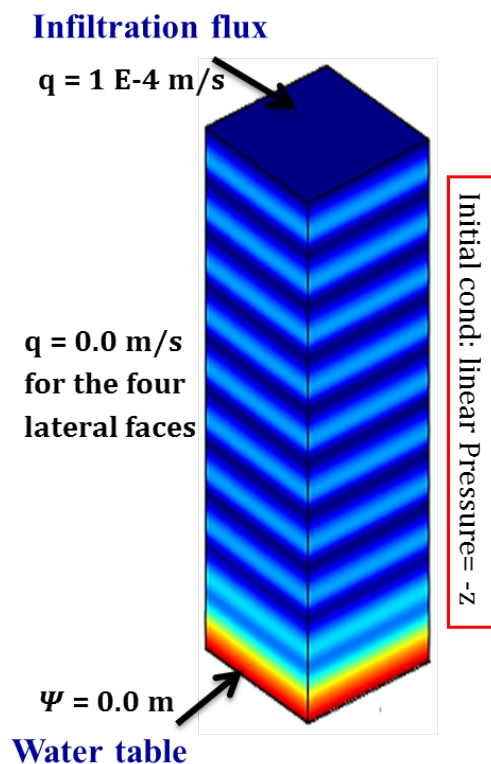
$$R_D(z) = \int_{-L}^z \exp \left[ \alpha_0 Z + \left( (a - \kappa) - a \text{Ln} \left( \frac{-q_0}{K_s^o} \right) \right) \sin(\omega Z) - a \frac{\alpha_0}{\omega} \cos(\omega Z) \right] dZ \quad (4.46)$$



## 6 Simulation results, comparisons, and analyses

### 6.1 Input parameters

In order to validate the analytical solutions, we simulate unsaturated infiltration processes in a vertical column using the BIGFLOW code (Finite Volumes). We start simulations in the transient mode, until the steady state becomes well established (for example, the time to steady state  $\approx 1.0E + 4$  seconds in the case of Fig.4.9).



**FIGURE 4.4:** Representation of a soil column, depicting the initial and boundary conditions used in numerical simulations. Flux was imposed at soil surface (top), and zero suction at the water table (bottom). The colour pattern represents the variation of suction with depth in this periodically stratified soil.

The initial and boundary conditions used for the simulated 1D infiltration problems are as shown in Fig.4.4. The initial condition is a vertically hydrostatic, linear pressure head ( $h = -z$ ). The flux at the upper boundary is constant, and the bottom boundary is held at zero pressure corresponding to saturation (water table).

Table 6.1 gives values and ranges of hydrodynamic parameters of the heterogeneous soil, that we have selected after the literature. In this table,  $\lambda$  and  $\varphi$  represent the wavelength and the phase of cyclic soil stratification. The parameters  $\kappa$  and  $a$  represent the amplitudes of  $\ln K_S(z)$  and  $\ln \alpha(z)$  respectively. The brackets [ ] indicate ranges of parameters.

**Tableau 4.1:** Hydraulic soil properties used in the flow simulations.

Saturated $K$ , saturated $\theta_s$ , residual $\theta_r$				Inverse scale parameters in exponential model		
$K_s$		$\theta_s$	$\theta_r$	$\alpha[m^{-1}]$		$\beta[m^{-1}]$
$K_s^0[m/s]$	1E-3	0.40	0.02	$\alpha_0[m^{-1}]$	5.0	$\beta_0 = \alpha_0/3 = 1.666$
$\kappa$	[0.0 1.0]			$a$	[0.0 0.1]	
$\lambda[m]$	[0.5 2.5]			$\lambda[m]$	[0.5 2.5]	
$\varphi_K$	$-\pi/2$			$\varphi_\alpha$	$-\pi/2$	

## 6.2 Setup of infiltration simulations

In all simulations, suitable numerical parameters were chosen in order to obtain good results with respect to several criteria : global mass balance (net boundary flux versus volumetric mass flux) ; convergence of nonlinear iterative solver (modified "incremental" Picard scheme) ; convergence of matrix system solver (Preconditioned Conjugate Gradients with Diagonal Scaling). A time marching method was used, and the transient infiltration process was monitored till it reached steady state as required. In addition, we have tested that the finite volume solutions are indistinguishable from direct solution of the nonlinear Ordinary Differential Equation (ODE) governing the flux potential  $\varphi$  (Eq.4.9) and the reduced potential  $\tilde{\varphi}$  (Eq.4.13) : this additional approach was implemented using the function "ode23t" of the MATLAB software.

In what follows, the simulated pressure and moisture profiles will be plotted for different cases as a function of elevation ( $z$ ), and they will be compared to the corresponding theoretical analytical results. The profiles will be shown for the case of  $\alpha(z)$  constant ( $\alpha(z) = \alpha_o$ ) and also for the case of the oscillatory  $\alpha(z)$ . It should be noted that the geometric mean parameter  $\alpha_o$  can be interpreted as an inverse capillary length ( $\alpha_o \sim 1/\lambda_{cap}$ ). Thus  $\alpha_o\lambda$  represents the wavelength ratio  $\lambda/\lambda_{cap}$  ; and  $\alpha_o L$  represents the dimensionless depth of the water table  $L/\lambda_{cap}$ . Accordingly, four cases can be distinguished as follows :

- Case 1 : Shallow water table and wavelength  $\approx$  depth :  $\alpha_0\lambda \sim \alpha_0L \leq O(1)$ .
- Case 2 : Shallow water table and short wavelength :  $\alpha_0\lambda \ll \alpha_0L < O(1)$ .
- Case 3 : Deep water table and short wavelength :  $\alpha_0\lambda \ll 1 \ll \alpha_0L$ .
- Case 4 : Deep water table and "large" wavelength (with many wavelengths in the soil profile) :  $1 < \alpha_0\lambda \ll \alpha_0L$ .

In order to highlight the most significant effects of soil stratification on pressure and moisture fluctuations, we consider only the second and fourth cases above.

### 6.3 Analysis of results for shallow (case 2) and deep water table (case 4)

#### 6.3.1 Shallow water table : pressure and moisture profiles

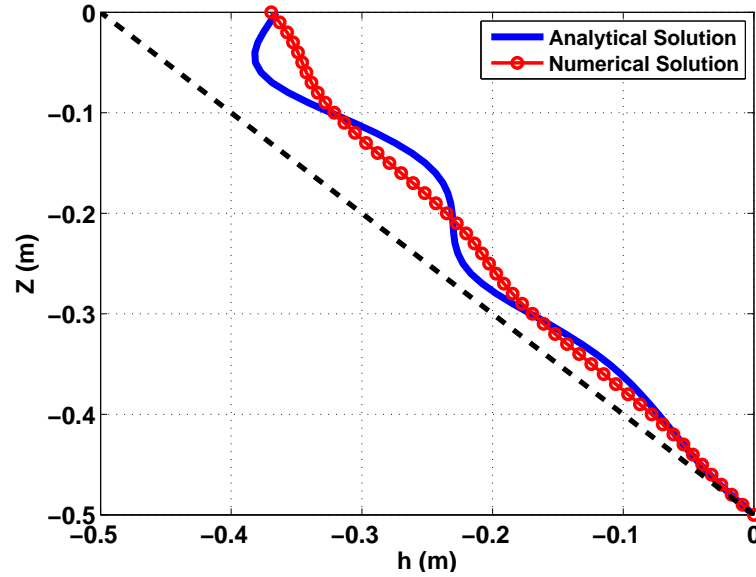
In this subsection, we treat infiltration to a shallow water table (case 2) in the presence of soil stratification.

When both  $\ln K_s(z)$  and  $\ln \alpha(z)$  are variable, the approximation in term of flux potential (Kirchhoff) overestimates the fluctuations of the pressure profile as shown in Fig.4.5(a).

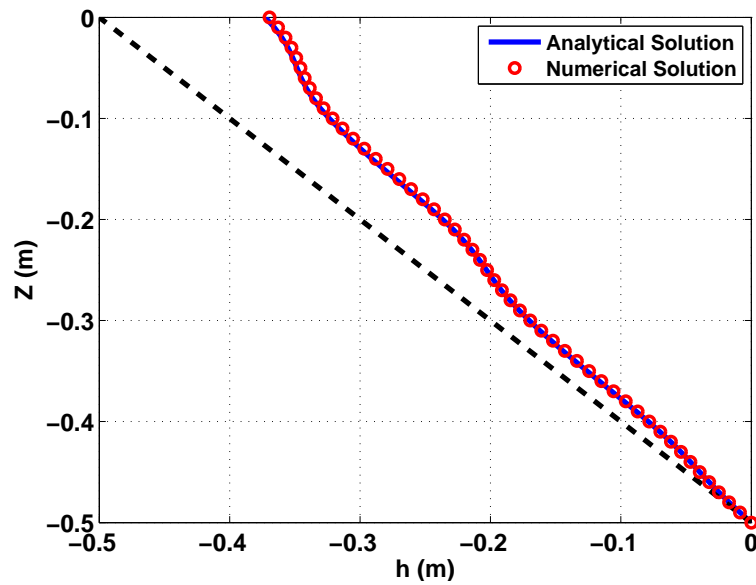
In comparison Fig.4.5(b) shows the solution obtained with the reduced potential approach (for shallow water table and small infiltration flux) : the two pressure profiles are now nearly indistinguishable.

The analytical solutions  $h(z)$  were evaluated using equation 4.28 for Fig.4.5(a) and 4.41 for Fig.4.5(b). Note : in each figure, we have also plotted the hydrostatic profile (dashed curve) for comparison.

Note that the variability of the  $\alpha$  parameter has a much stronger effect than the variability of  $K_S$  (this is because  $\alpha$  is the *slope* of the log-conductivity curve). Indeed, increasing slightly the variability of  $\alpha$ , from  $a = 0.10$  to  $a = 0.15$ , yields the pressure and water content profiles shown in Fig.4.6. It can be seen that the fluctuations of pressure are enhanced compared to the case  $a = 0.10$ . Also, the reduced potential solution (4.41) captures quite well the pressure and water content fluctuations in this case, except far above the water table : this motivates an alternative approximation of the reduce potential approach for deep water table (*see section 6.3.2*).

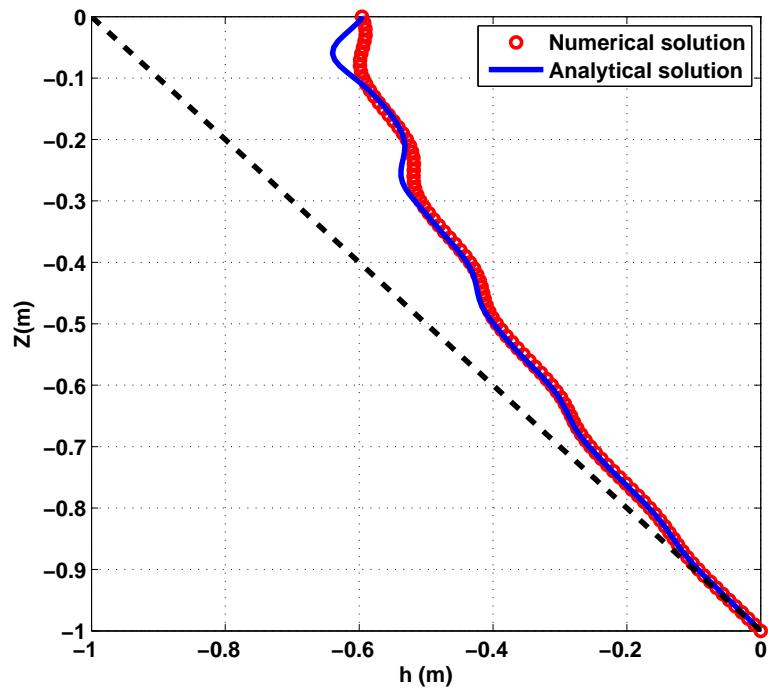


(a)

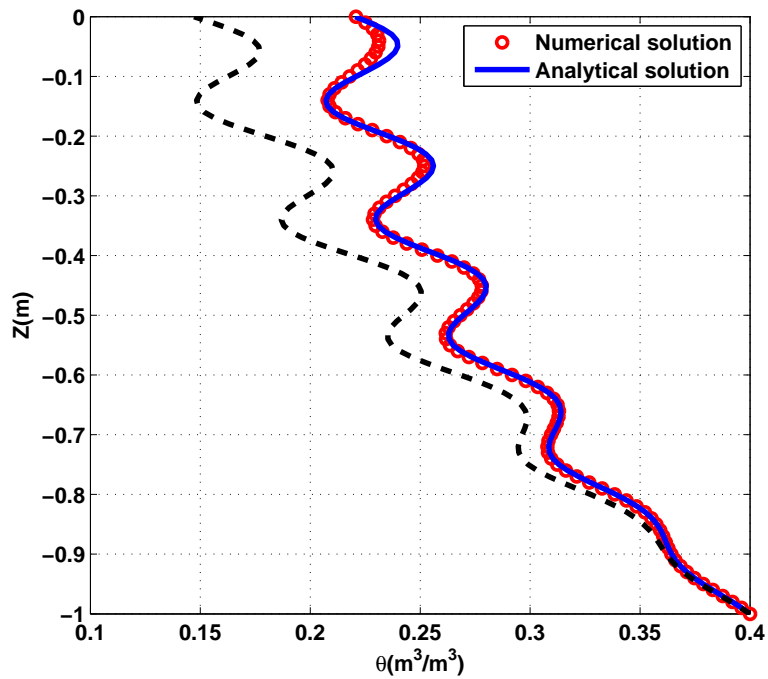


(b)

**FIGURE 4.5:** Shallow water table (variable  $K_S$  and  $\alpha$ ) : comparison of analytical *vs.* numerical pressure profiles  $h(z)$  for relative amplitudes  $\kappa = 1.0$  ( $LnKs(z)$ ) and  $a = 0.10$  ( $Ln\alpha(z)$ ). (a) : the flux potential approach ; (b) : the reduced potential approach. Other parameters :  $\lambda = 0.2 m$  ;  $\alpha_0 = 3 m^{-1}$  ;  $\frac{q}{K_s} = 0.10$  ;  $L = 0.5m$ .



(a)



(b)

**FIGURE 4.6:** Shallow water table (variable  $K_S$  and  $\alpha$ ) : comparison of analytical *vs.* numerical profiles for relative amplitudes  $\kappa = 1.0$  ( $LnK_s(z)$ ) and  $a = 0.15$  ( $Ln\alpha(z)$ ). (a) : pressure profiles  $h(z)$ ; (b) : water content profiles. Other parameters :  $\lambda = 0.2$  m ;  $\alpha_0 = 3$  m<sup>-1</sup> ;  $\frac{q}{K_s} = 0.10$  ;  $L = 1.0$  m.

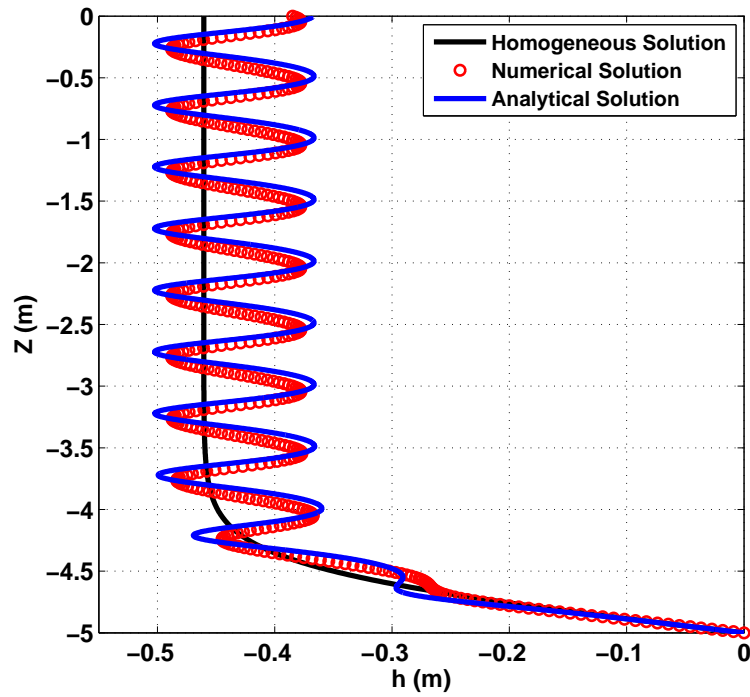
### 6.3.2 Deep water table : pressure and moisture profiles

In this subsection, we treat infiltration to a deep water table (case 4) in the presence of soil stratification.

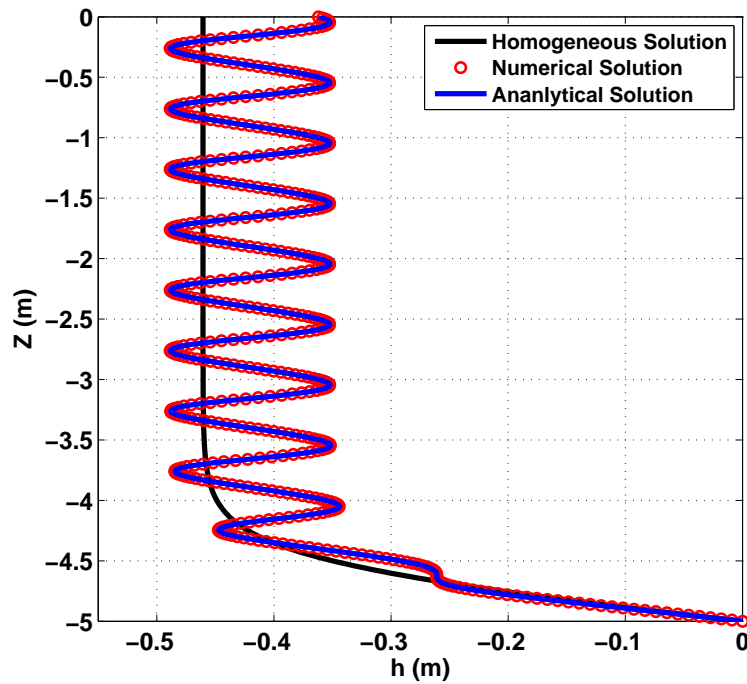
We show first, in Fig.4.7(a), the case where both  $K_s(z)$  and  $\alpha(z)$  are variable, with a short soil wavelength compared to water table depth. The analytical solution  $h(z)$  was obtained in this figure with the flux potential solution given by Eq.4.28. It can be seen that analytical and numerical pressure profiles have a similar pattern of oscillations, but with a somewhat higher amplitude for the analytical solution. This discrepancy of the amplitudes persists if the amplitude parameters ( $\kappa$ ,  $a$ ) are changed, but the discrepancy disappears if  $a = 0$ , that is, if  $\alpha$  is constant and only  $K_s$  varies. This is demonstrated clearly in Fig.4.7(b). The analytical fluctuations of pressure are now indistinguishable from the numerical ones (perfect fit).

To improve on the flux potential solution, of the previous figure (Fig.4.7), we now present an alternative solution for the same case, but this time in terms of the reduced potential solution for deep water table (Eq.4.45). The result is shown in Fig.4.8(a) for pressure profiles, and in Fig.4.8(b) for moisture profiles. The results are encouraging : the pressure and moisture profiles agree quite well with the numerical profiles.

In addition, the transient approach to steady state was simulated numerically for variable  $LnK_s(z)$  and constant  $\alpha$ , and the final steady state was compared to the analytical moisture profile obtained with the exponential model : see Fig. 4.9. The range of water contents in the final steady state (blue curve) is between  $0.15m^3/m^3$  (at soil surface) and  $0.40m^3/m^3$  (saturated water content at the water table). The fit is excellent : the steady profile obtained analytically is represented by the thick blue curve with symbols ; it almost perfectly coincides with the final numerical profile hidden underneath. The range of variability of moisture ( $\Delta\theta$ ) in the oscillatory region far from the water table is  $\Delta\theta = 0.04m^3/m^3$ , which is 10% of the total porosity.

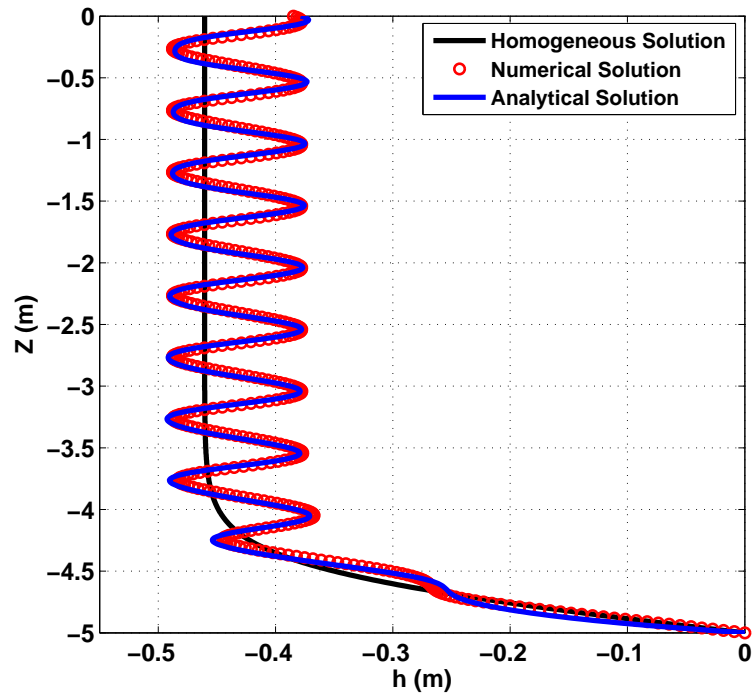


(a)

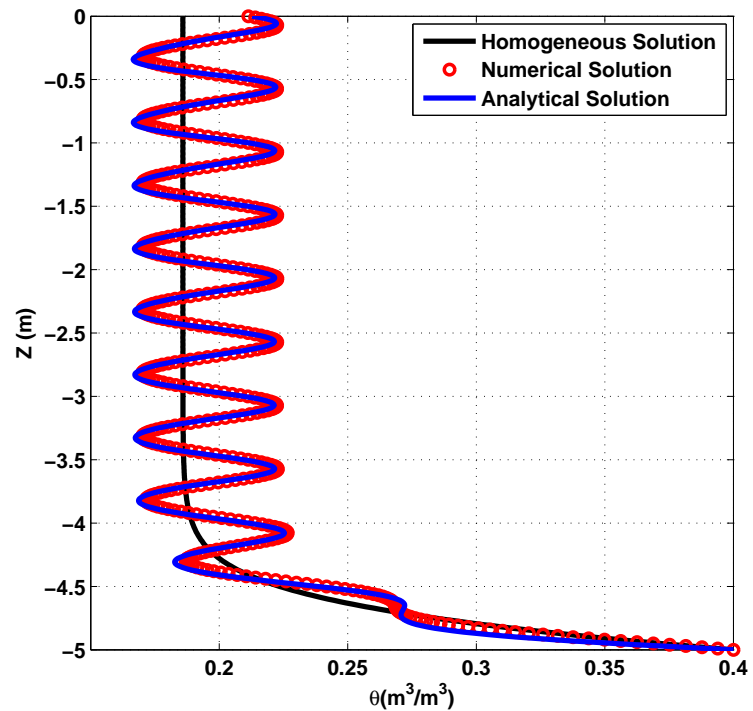


(b)

**FIGURE 4.7:** Deep water table (variable  $K_S$  and  $\alpha$ ): comparison of analytical (flux potential) *vs.* numerical pressure profiles  $h(z)$  for relative amplitudes  $\kappa = 1.0$  ( $LnK_S(z)$ ) and (a) :  $a = 0.1$  ( $Ln\alpha(z)$ ); (b) :  $a = 0.00$  ( $\alpha$  is held constant). Other parameters :  $\lambda = 0.5$  m;  $q = 1E - 4$  m/s;  $\alpha_0 = 5$  m<sup>-1</sup>;  $\frac{q}{K_s} = 0.10$ ;  $L = 5.0$ m.



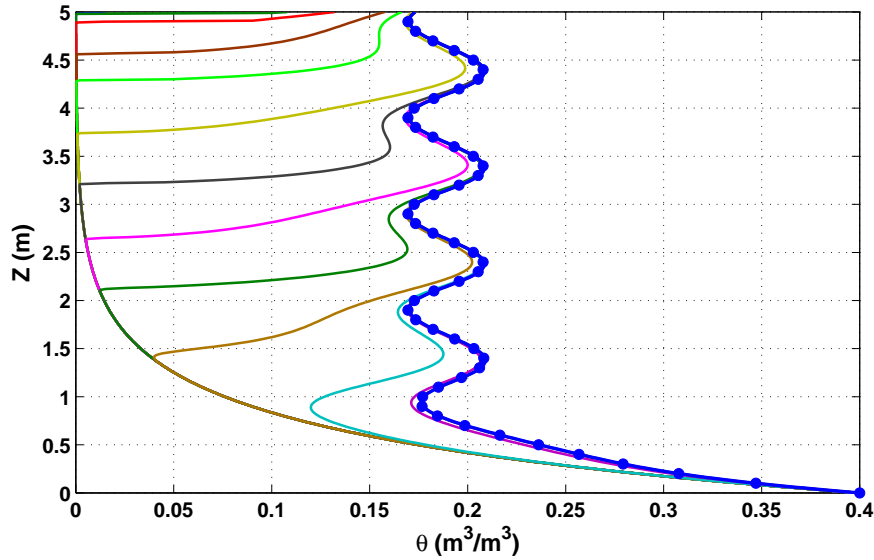
(a)



(b)

**FIGURE 4.8:** Deep water table (variable  $K_S$  and  $\alpha$ ) : comparison of analytical (reduced potential) *vs.* numerical profiles for relative amplitudes  $\kappa = 1.0$  ( $LnKs(z)$ ) and  $a = 0.1$ . (a) : pressure profiles  $h(z)$ ; (b) : water content profiles. Other parameters :  $\lambda = 0.5 m$ ;  $q = 1E - 4 m/s$ ;  $\alpha_0 = 5 m^{-1}$ ;  $\frac{q}{K_s} = 0.10$ ;  $L = 5.0m$ .





**FIGURE 4.9:** Deep water table – transient and steady water content profiles : this figure shows the simulated transient approach to steady state, and compares analytical *vs.* numerical solutions at steady state ( $\theta(z)$ ). Soil variability is relatively mild : the amplitude of  $LnK_s(z)$  is  $\kappa = 0.5$ , and  $\alpha$  is held constant ( $a = 0.0$ ).

## 7 Conclusion and Outlook

Because of the complex interactions between nonlinearity and heterogeneity, it is difficult to obtain explicit solutions for infiltration in stratified soils, yet such solutions are valuable because they are potentially amenable to physically-based analyses (effect of variability, layer thickness, or fluctuation wavelength). In this work, explicit solutions were obtained for infiltration in periodically stratified soils based on flux transform methods (Kirchhoff Flux Potential transform, and Reduced Potential transform). Specifically, we assumed that soil properties are represented by exponentially decreasing conductivity and moisture with pressure ("Exponential" model), with depth-dependent, continuously varying, cyclic parameters.

In this framework, we showed that, with the proposed flux transforms, quasi-analytical solutions can be obtained even in the difficult cases where (i) the conductivity curve varies in space, with both  $K_S(z)$  and  $\alpha(z)$  being variable; and (ii) the pressure and moisture profiles evolve rapidly near the water table (shallow water table). These cases are complex due to the interactions between soil stratification and non linearity of the unsaturated hydraulic, and due to the non stationary moisture pattern induced by the water table.

Over all, the proposed analytical solutions enabled us to capture and analyze the effects of variability ( $\ln K_S(z), \ln \alpha$ ) for soil infiltration profiles ( $h(z), \theta(z)$ ), in terms of mean values and fluctuations, within a reasonable range of soil heterogeneity – with relative amplitudes (or coefficients of variation) of 50% and up to up to 100% for saturated conductivity  $K_S$ , and up to 10%–15% for the log-conductivity slope  $\alpha$  of the exponential model. These results were validated with direct numerical simulations using a finite volume solver of the Richards equation for spatially variable soils (BIGFLOW code), and a nonlinear ODE solver (MATLAB's "ode23t"). The analytical and simulated profiles of pressure & moisture were in good agreement within the range of variability noted above, for shallow or deep water table.

The analytical solutions were used to study, in section 5.1, the behaviour of the amplitude of pressure fluctuations *vs.* stratification wavelength, for the case of deep water table with  $\ln \alpha$  constant and  $\ln K_S(z)$  cyclic. Interestingly, we were able to obtain an explicit expression of  $\lambda_{CAP}$ , the characteristic wavelength of the soil, whose meaning was illustrated in figure 4.3. Briefly, recall that  $\lambda_{CAP}$  was obtained by analyzing the amplitude  $A$  of pressure oscillations *vs.* the wavenumber  $\omega$  of the cyclic soil, based on the envelope of pressure oscillations far above the water table. We found that  $\lambda_{CAP}$  is on the order of  $1/\alpha$  and  $1/\beta$ , two capillary length scales of the porous soil inferred, respectively, from its unsaturated conductivity curve and its moisture retention curve (these two scales are on the same order for most soils, e.g.  $1/\beta \approx 3 \times (1/\alpha)$ ). Thus,  $\lambda_{CAP}$  reflects a capillary length scale of the periodically stratified soil. A point to be noted is that, for the case of infiltration to a shallow water table, the envelope of fluctuations becomes non-stationary with depth over a large part of the soil column (it becomes "non-homogeneous", to use the terminology of random fields).

Therefore, it becomes more difficult in that case to analyze the fluctuations of a *single* vertical profile of oscillatory pressure (*as we have here*). For such cases (shallow water table and other non-homogeneous situations), the analysis of fluctuation envelope with depth would become more tractable if multiple replicates of a random soil column can be considered, or if the full 3D heterogeneity of the soil is represented (to be considered in future).

Finally, one can also consider an extension of the "Exponential" model used for representing the unsaturated moisture and conductivity curves of the stratified unsaturated soil. For this purpose, we have developed a preliminary "matching" procedure between the Exponential model and the Van Genuchten / Mualem model for the case of depth dependent, cyclically varying soil parameters (*see Appendix A in this PhD thesis*).



Simulations  
multidimensionnelles  
d'écoulements en sols  
hétérogènes et aléatoires

## Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	83
2	Récolement du modèle Exponentiel avec le modèle VGM	84
2.1	Formulation de la méthode de récolement Exponentiel/VGM . . . . .	84
2.2	Propriétés hydrodynamiques des deux sols . . . . .	86
2.3	Validation numérique de l'approche du calage VGM/Exponentiel . . . . .	88
3	Simulations des écoulements en sols hétérogènes bicouches : barrière capillaire . . . . .	90
3.1	Concepts et études antérieures . . . . .	90
3.2	Infiltration sous lame d'eau dans un système bicouche . . . . .	92
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	92
3.2.2	Analyses des résultats . . . . .	93
3.3	Injection "pulse" de durée finie dans un système bicouche . . . . .	96
3.3.1	Présentation du problème . . . . .	96
3.3.2	Analyses des résultats . . . . .	97
4	Simulations multidimensionnelles d'écoulements en sols aléatoires . . . . .	101
4.1	revue bibliographique . . . . .	101
4.2	Champs aléatoires et milieux aléatoires . . . . .	102
4.2.1	Champs aléatoires statistiquement homogènes (inconditionnel) . . . . .	102
4.2.2	Génération de milieux poreux aléatoires . . . . .	103
4.3	Infiltration à flux uniforme en $(x, y)$ et constant dans le temps . . . . .	105
4.3.1	Présentation du problème . . . . .	105
4.3.2	Analyse des résultats . . . . .	107
5	Conclusions . . . . .	109

---

## 1 Introduction

Les milieux poreux sont caractérisés par une forte hétérogénéité spatiale (e.g. perméabilité, porosité, ...). Cette hétérogénéité peut conduire à des variations significatives des pressions interstitielles, teneurs en eau, et vitesses du fluide. Elle ne peut pas être mesurée en détail, et donc il faut tenter de la décrire sans en connaître tous les détails mais de la façon la plus représentative possible du milieu naturel.

Le milieu poreux hétérogène peut être représenté par un milieu homogène équivalent de sorte que les comportements globaux des deux milieux soient équivalents à l'échelle macroscopique. Le concept d'homogénéisation consiste à trouver un moyen pour décrire et prédire le comportement global à grande échelle de système hétérogène en termes de propriétés « effectives » fonction de la structure et du degré d'hétérogénéité.

Trois approches sont généralement utilisées pour décrire l'hétérogénéité du milieu :

(i) milieu à double porosité : le milieu consiste conceptuellement en deux "topo"-phases", la première à porosité grossière et vitesses élevées, la seconde à porosité fine et vitesses faibles (exemple : modèles mobile/immobile pour écoulement et transport en sols non-saturés) ;

(ii) milieu stratifié ou multicouche : le milieu est composé des deux ou trois couches dont les propriétés sont différentes (voir chapitre 4 dans le cas d'un sol très finement stratifié cyclique) ;

(iii) milieu aléatoire multidimensionnel, spatialement corrélé, i.e., possédant une certaine structure d'autocorrélation spatiale caractérisée par des longueurs d'auto-corrélation dans chaque direction de l'espace (un multicouche aléatoire peut être considéré comme un milieu aléatoire auto-corrélé car il possède une fonction d'autocorrélation triangulaire dont la portée est l'épaisseur des couches). Ce type de milieu (aléatoire) correspond à l'approche "stochastique" que nous allons utiliser dans une partie de ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous traiterons le problème de l'effet de barrière capillaire à l'interface de deux couches horizontales (ii) en présence d'une nappe plus ou moins profonde. Nous présentons une étude numérique préliminaire d'infiltration (flux uniforme ou sous lame d'eau nulle) et de redistribution dans un milieu aléatoire multidimensionnel (iii). De plus nous présentons, dès le début de ce chapitre, une méthode de récolement entre le modèle Exponentiel non réaliste et le modèle linéaire VGM, qui peut servir comme application pour ces milieux hétérogènes.

## 2 Récolement du modèle Exponentiel avec le modèle VGM

Dans le chapitre 3, nous avons vu que le problème de barrière capillaire a été traité en utilisant le modèle Exponentiel pour la paramétrisation de deux sols (par exemple Ross 1990 [65]). De plus dans la littérature, les modèles d'écoulement non saturé en sols hétérogènes sont souvent traités numériquement ou analytiquement en supposant le modèle Exponentiel (cf. section 3.1). Il en est de même pour le cas du sol hétérogène dont les paramètres sont représentés par le sol aléatoire (approche stochastique de Gelhar 1993 [32]).

Cependant, le modèle VGM est beaucoup plus réaliste pour la représentation des courbes hydrodynamiques  $K(h)$  et  $\theta(h)$  du sol réel. Pour cette raison nous proposons dans cette section une méthode de récolement du modèle Exponentiel avec le modèle VGM, qui devrait permettre de garder la simplicité du modèle Exponentiel tout en représentant de façon plus réaliste la non linéarité hydrodynamique du sol non saturé (homogène ou hétérogène).

### 2.1 Formulation de la méthode de récolement Exponentiel/VGM

Dans cette partie, nous développons une relation théorique entre les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  du modèle exponentiel et les paramètres  $\alpha_{VGM}$  et  $n$  du modèle VGM. De plus nous introduirons un ajustement empirique des paramètres d'entrée d'air  $h_b$  dans le modèle Exponentiel.

Tout d'abord, nous définissons les pentes de log-conductivité (Eq.5.1) et log-teneur en eau (Eq.5.2) comme suit :

$$\alpha(\psi) = -\frac{\partial \ln K^{VGN}}{\partial \psi} \quad (5.1)$$

$$\beta(\psi) = -\frac{\partial \ln \theta^{VGN}}{\partial \psi} \quad (5.2)$$

En introduisant dans l'équation (Eq.5.1) l'expression de la conductivité hydraulique (Eq.2.14) et dans l'équation (Eq.5.2), l'expression de la teneur en eau (Eq.2.9) du modèle VGM, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\alpha(\psi) = \frac{\beta(\psi)}{2} \left( \frac{4}{\alpha_{VGM}\psi[1 + (\alpha_{VGM}\psi)^n]^m - (\alpha_{VGM}\psi)^n} + 1 \right) \quad (5.3)$$

$$\beta(\psi) = \frac{m\alpha_{VGM}(\alpha_{VGM}\psi)^{n-1}}{(1-m)[1 + (\alpha_{VGM}\psi)^n]} \quad (5.4)$$

avec :  $\psi = -h$ , ( $\alpha_{VGN}$  et  $n$ ) sont les paramètres du modèle VGM.

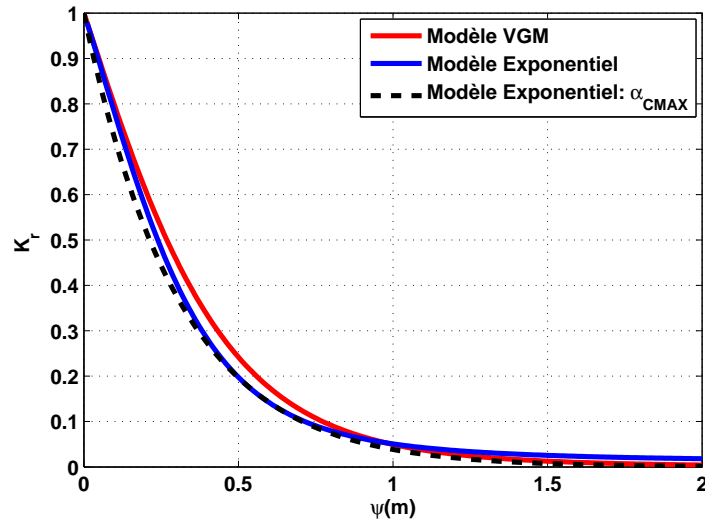
Ces équations donnent pour chaque succion  $\psi$ , les coefficients du modèle Exponentiel qui le rendraient équivalent au modèle de VGM. En général, selon le type de problème (sol homogène, multi-couche, ou même continuum variable), plusieurs façons de linéarisation seront possibles.

Dans ce travail, pour "caler" le modèle Exponentiel sur le modèle VGM, nous allons choisir pour chaque couche, la succion de capacité capillaire maximale  $\psi_{Cmax} = -h_{max}$  (Eq.2.24). Nous obtenons donc les expressions des deux paramètres suivants :

$$\alpha_0 = \frac{\beta_0}{2} \left( \frac{4}{m^{\frac{1}{n}} [1+m]^m - m} + 1 \right) \quad (5.5)$$

$$\beta_0 = \alpha_{VGN} \frac{m^{m+1}}{(1-m)(1+m)} \quad (5.6)$$

La figure 5.1 montre que les 3 courbes représentant les 3 modèles VGM, exponentiel et modèle pseudo-Exponentiel sont très proches, ce qui est rassurant concernant le choix d'un modèle Gardner basé sur  $\alpha_{Cmax}$ .



**FIGURE 5.1:** Conductivité hydraulique relative  $K_r(\psi)$  en fonction de la succion. Comparaison du modèle initial VGM ( $\alpha_{VGM} = 1.15m^{-1}$ ,  $n = 2.03$ ), du modèle Exponentiel de Gardner ( $\alpha_0 = \alpha_{Cmax}$ ) et modèle pseudo-Exponentiel obtenu en insérant  $\alpha(\psi)$  dans le modèle Exponentiel.



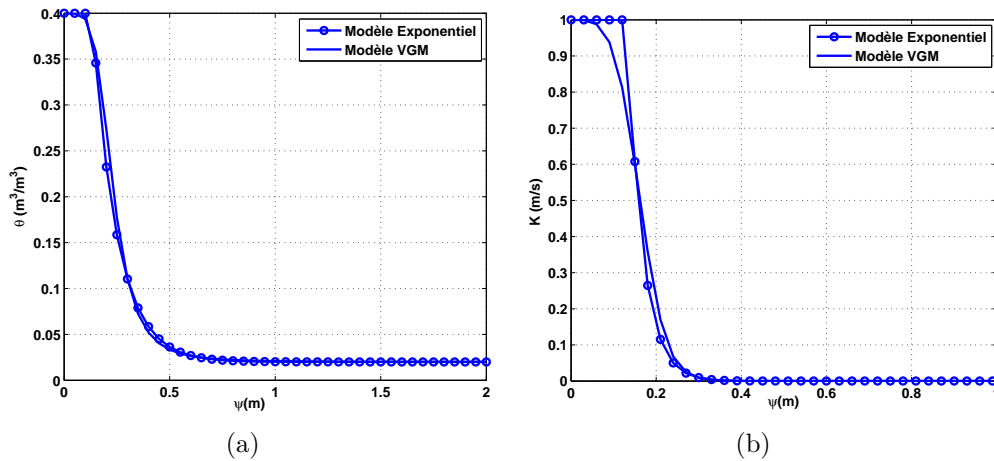
## 2.2 Propriétés hydrodynamiques des deux sols

Pour les deux sols que nous allons utiliser dans ce chapitre, il est nécessaire de déterminer les pressions d'entrée d'air  $h_b$  pour chaque couche. Nous avons procédé comme suit : le paramètre  $h_b$  de chaque couche a été déterminé empiriquement par un critère de meilleur ajustement de profil de pression en régime permanent (deux ou trois essais de simulations).

**Tableau 5.1:** Propriétés hydrodynamiques (Système bicouche).

Paramètres		"Guelph Loam"	"Fine Sand"
$K_s(m/s)$		$3.66E - 6$	$1.50E - 4$
$\theta_s(m^3/m^3)$		0.52	0.40
$\theta_r(m^3/m^3)$		0.218	0.02
modèle VGM	$\alpha_{VGN}(m^{-1})$	1.15	4.61
	$n$	2.03	5.00
$\psi_{C_{max}}(m)$		0.62	0.20
modèle Exponentiel	$\alpha(m^{-1})$	3.25	27.68
	$\beta(m^{-1})$	0.55	8.55
	$h_b(m)$	-0.055	-0.132

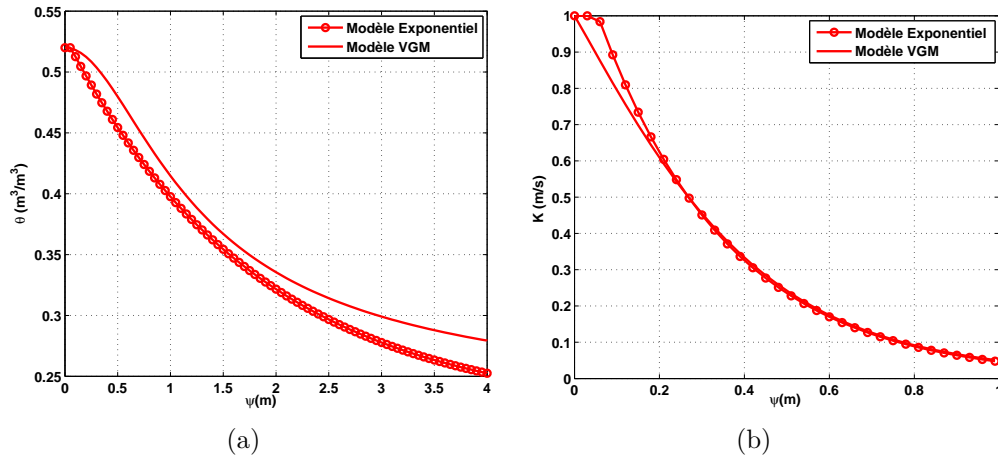
Le tableau 5.1 présente les propriétés hydrodynamiques des deux sols utilisés dans ce travail. Noter que les paramètres du modèle VGM ont été calés par Alastal 2012 [14] à partir d'une expérience de colonne de sable.



**FIGURE 5.2:** Comparaison des Courbes de teneur en eau  $\theta(\psi)$  (a) et des Courbes de conductivité hydraulique  $K(\psi)$  (b) du modèle VGM et du modèle Exponentiel calé pour le Fine Sand.

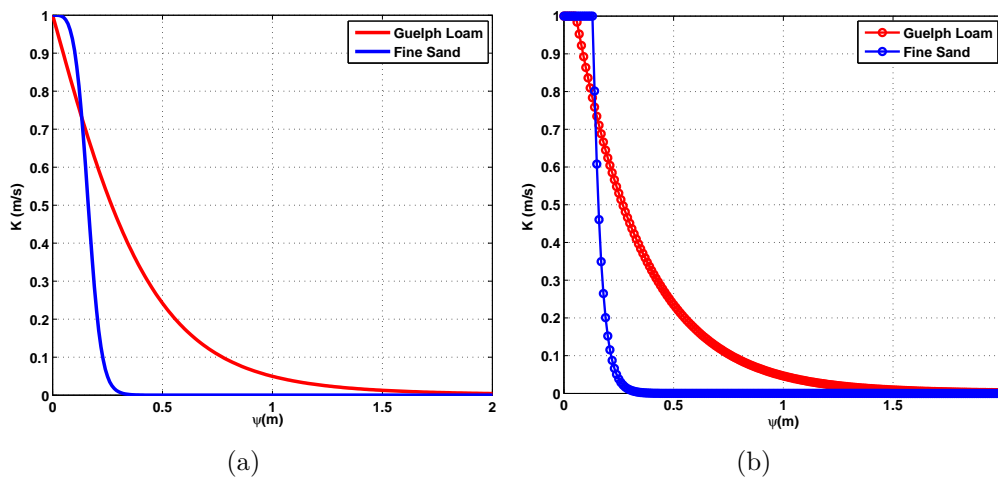
Nous présentons dans les figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5 respectivement les courbes de teneur en eau  $\theta(\psi)$  et de conductivité hydraulique  $K(\psi)$  pour les deux sols Guelph Loam et Fine Sand en utilisant les deux modèles VGM et

Exponentiel. La figure 5.2 compare les courbes  $\theta(\psi)$  et  $K(\psi)$  VGM et Exponentiel pour le Fine Sand, nous constatons un bon ajustement. La figure 5.3 compare les courbes  $\theta(\psi)$  et  $K(\psi)$  VGM et Exponentiel pour le Guelph Loam : l'ajustement est excellent mais un peu moins bon que le Fine Sand.



**FIGURE 5.3:** Comparaison des Courbes de teneur en eau  $\theta(\psi)$  (a) et des Courbes de conductivité hydraulique  $K(\psi)$  (b) du modèle VGM et du modèle Exponentiel calé pour le Guelph Loam.

Par ailleurs, les figures 5.4 et 5.5 comparent également ces courbes en regroupant les deux sols Fine Sand et Guelph Loam sur une même figure : nous constatons que le modèle Exponentiel reproduit bien l'intersection des courbes  $K(\psi)$  des deux sols à une succion critique  $\psi_{critique} = 0.15\text{m}$  (voir plus loin l'effet barrière capillaire) et les courbes  $\theta(\psi)$  ne se coupent pas et ceci est reproduit par le modèle Exponentiel.



**FIGURE 5.4:** Courbes de conductivité hydraulique  $K(\psi)$  des deux sols. (a) : Modèle VGM; (b) : Modèle Exponentiel.

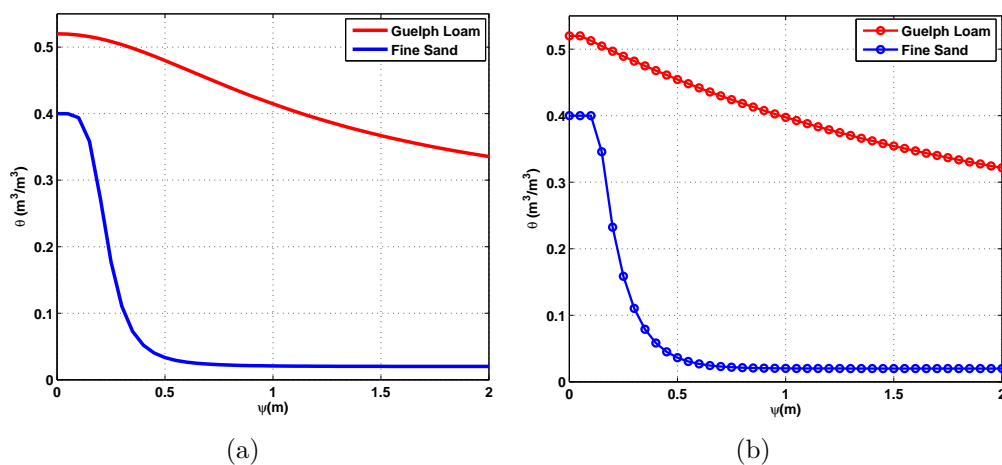


FIGURE 5.5: Courbes de teneur en eau  $\theta(\psi)$  des deux sols. (a) : Modèle VGM; (b) : Modèle Exponentiel.

### 2.3 Validation numérique de l'approche du calage VGM/Exponentiel

A ce stade et dans le but de valider notre nouvelle approche de calage du modèle Exponentiel sur le modèle VGM, une infiltration à flux constant ( $q = 2E - 6 \text{ m/s}$ ) est simulée en régime transitoire à l'aide du code BIGFLOW. Le domaine de calcul est une colonne verticale de hauteur  $E_1 + E_2 = 1\text{m}$ . Ce domaine contient deux couches, la couche supérieure est le sol fin "Guelph Loam" (GL) d'épaisseur  $E_1 = 0.5\text{m}$  et la couche inférieure est le sol grossier "Fine Sand" (FS) d'épaisseur  $E_2 = 0.5\text{m}$ . La grille de calcul comporte  $3 \times 3 \times 101$  nœuds. Les propriétés hydrodynamiques des deux couches ont été présentées dans le tableau 5.1.

Le profil de pression initiale est hydrostatique  $h = -z$ . Nous imposons, comme conditions aux limites, un flux nul sur les frontières latérales et une pression  $h = 0$  (Nappe libre) sur la surface inférieure et un flux égal à  $2E - 6 \text{ m/s}$  sur la surface supérieure.

Les informations extraites des fichiers OUT13 (bilan de masse) montrent que la simulation a bien convergé vers un état stationnaire au bout de 1 jour. Nous nous sommes appuyés sur les profils de pression et de teneur en eau en régime permanent ( $t = 1\text{jour}$ ), pour valider notre nouvelle approche de calage du modèle Exponentiel sur le modèle VGM.

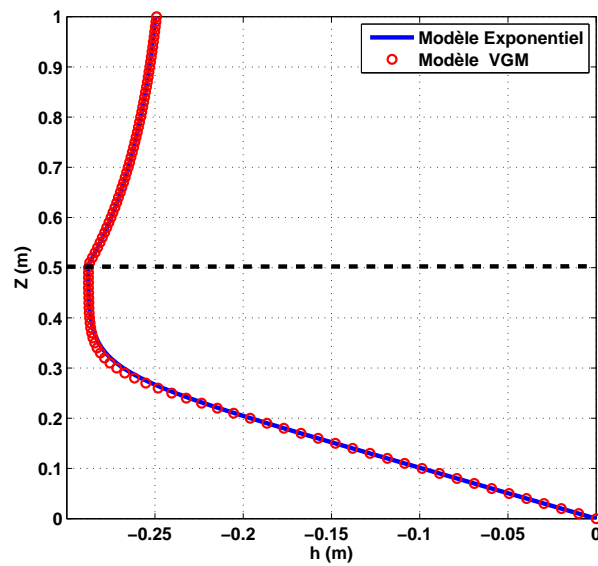


FIGURE 5.6: Résultats de comparaison des modèles Exponentiel et VGM pour une infiltration à flux constant dans un système bicouche en régime permanent ( $t = 1\text{ jour}$ ) : profils de pression  $h(z)$ .

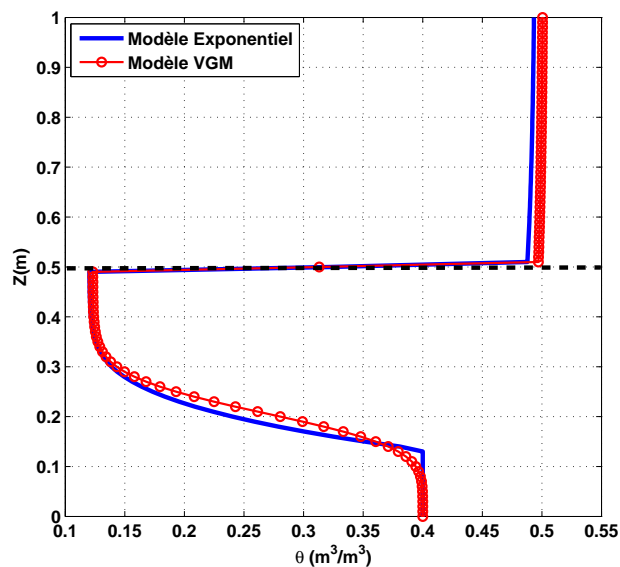


FIGURE 5.7: Résultats de comparaison des modèles Exponentiel et VGM pour une infiltration à flux constant dans un système bicouche en régime permanent ( $t = 1\text{ jour}$ ) : profils de teneur en eau  $\theta(z)$ .

La figure 5.6 montre un parfait accord entre les deux modèles VGM et Exponentiel calé en termes de profil de pression dans le milieu bicouche . La figure 5.7 montre un bon accord entre les deux modèles VGM et Exponentiel (même si les profils de teneur en eau sont moins bien que ceux de pression). Ceci pourrait s'expliquer par le fait que les courbes  $\theta(\psi)$  sont moins concordantes que celles de  $K(\psi)$  qui sont en très bon accord (voir 5.4).

Ces résultats préliminaires, obtenus pour un système bicouche, indiquent que le choix  $\psi_{Cmax}$  pour caler le modèle Exponentiel sur le modèle VGM est bon mais à condition de caler également le paramètre de pression d'air ( $h_b$ ).

### 3 Simulations des écoulements en sols hétérogènes bicouches : barrière capillaire

#### 3.1 Concepts et études antérieures

Une barrière capillaire est une barrière existante entre deux espaces évitant le passage de l'eau par simple capillarité. Elle est formée de deux couches de matériaux poreux juxtaposées, les pores de la couche supérieure étant plus fins que ceux de la couche inférieure.

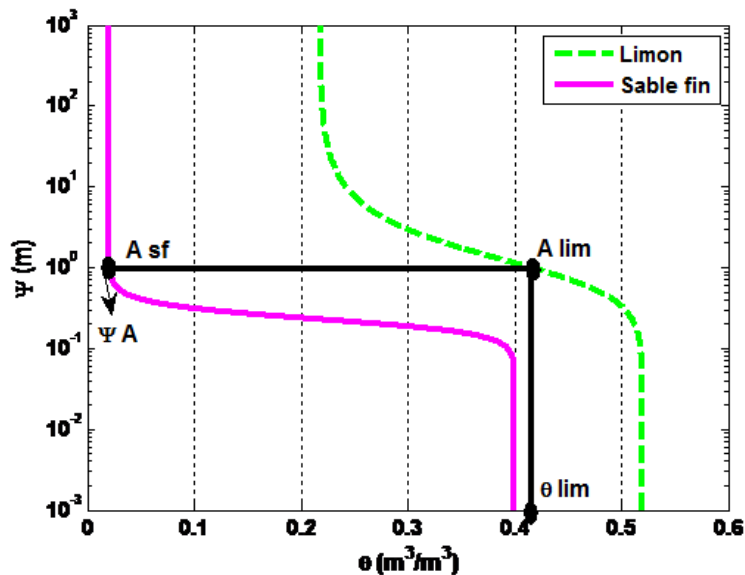


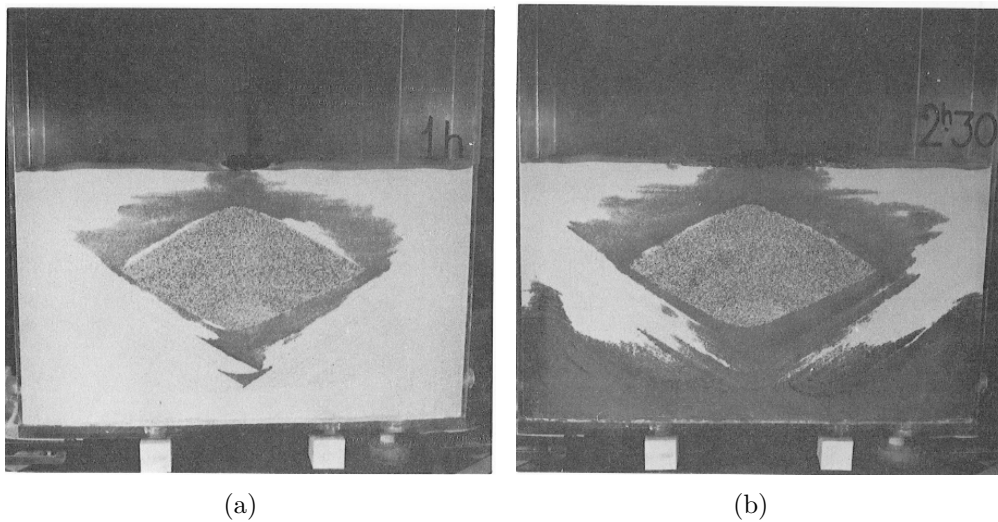
FIGURE 5.8: Courbes caractéristiques des sols ( $\theta, \psi$ ).

Lorsqu'une barrière capillaire est soumise à une infiltration d'eau, la couche supérieure (couche de sol fin) aura tendance à accumuler l'eau, l'empêchant de s'infiltrer dans la couche inférieure (couche de sol grossier), selon la théorie des écoulements d'eau dans les milieux non saturés. Une explication

qualitative est présentée dans la figure 5.8. En effet, l'eau entrera dans le sol grossier quand la pression matricielle à la surface du gravier descendra jusqu'au point  $A_{sf}$  (changement brusque de pente près de la teneur en eau résiduelle). Sur la figure, la pression correspondante est  $\psi_A$ . Puisqu'il y a continuité de la pression de l'eau dans les pores, celle-ci doit être identique des deux côtés de l'interface. Ainsi la pression de l'eau dans les sols fins doit être égale à  $\psi_A$  avant que l'eau entre dans le sol grossier. Le point correspondant pour les sols fins est  $A_{lim}$  et la teneur en eau à saturation est  $\theta_{lim}$  (saturation). Même si  $A_{lim}$  est atteint, l'eau ne peut entrer dans le sol grossier que très lentement car la conductivité hydraulique des graviers est basse, généralement plus basse que dans les matériaux fins.

Dans la littérature, plusieurs recherches sont faites pour étudier les caractéristiques du front d'infiltration de l'eau dans une couche de matériel fin placée sur une couche de matériel grossier.

Dans le cadre des recherches sur l'amélioration des techniques de stockage dans le sol des déchets radioactifs au centre nucléaire de cadarache, Rançon 1972 [64] a réalisé des études expérimentales de l'infiltration dans des milieux poreux de textures différentes (sable de Fontainebleu, sable de Leucate), afin de suivre le mouvement de l'eau au niveau de l'interface séparant les deux structures.



**FIGURE 5.9:** Barrière capillaire : étude expérimentale faite par Rançon 1972 [64] (lentille sèche). (a) :  $t = 1h$ , (b) :  $t = 2h30s$  .

Rançon a essayé plusieurs configurations d'interface qui sont (i) interface horizontale plane, (ii) interface inclinée, (iii) interface à concavité vers le haut et (iv) réalisation d'une structure poreuse sèche (voir la figure 5.9). Les résultats sont des observations qualitatives montrant l'existence des

barrières capillaires et la création de structures sèches lors de l'infiltration dans des milieux non saturés de classe granulométriques différentes. Ces résultats sont confirmés par Miyasaki 1988 [49] qui a aussi réalisé des essais de laboratoires illustrant le concept de la déviation latérale de l'humidité d'une interface inclinée d'une barrière capillaire.

En 1990, Ross [65] a développé des solutions analytiques pour la longueur de diversion et la capacité de diversion d'une barrière capillaire horizontale et inclinée. Les équations sont basées sur de nombreuses hypothèses, comme le fait que l'écoulement est en régime permanent, les limites supérieure (surface) et inférieure (nappe libre) sont suffisamment loin de l'interface fin/grossier. Il a formulé une relation qui prédit l'épaisseur effective de la couche fine.

En 1991, Steenhuis et al. [70] ont proposé des extensions pour la solution de Ross de la longueur de diversion. Ils ont signalé que l'interface entre les couches fines et grossières ne produit pas nécessairement un front d'humectation stable. Ils ont proposé de compléter l'équation de Ross en supposant que la conductivité hydraulique est une fonction de la pression matricielle.

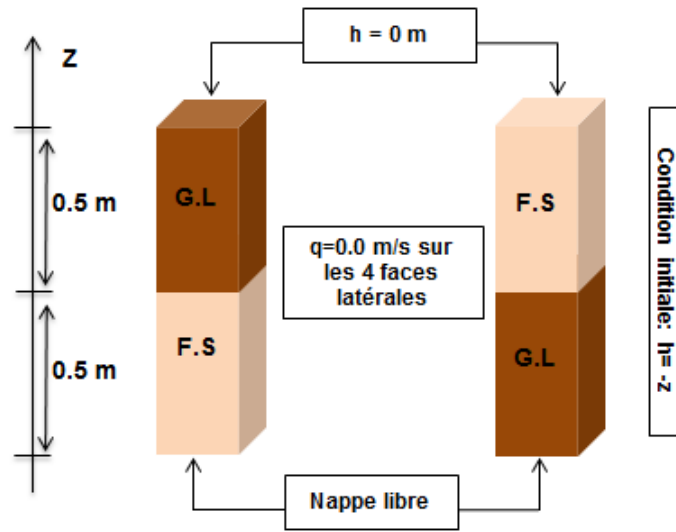
Stormont 1995 [71] a étendu la solution de Ross en introduisant la prise en compte de l'anisotropie de la conductivité hydraulique de la couche de matériaux fins. Il a constaté que l'augmentation de la longueur de diversion en présence de l'anisotropie est approximativement proportionnelle au rapport de conductivités hydrauliques principales dans les couches fines.

D'autres études sont plutôt orientées vers les applications en hydrologie des sols, le but étant alors de mieux comprendre les effets de blocage ou de diversion "capillaire" des écoulements naturels.

## 3.2 Infiltration sous lame d'eau dans un système bicouche

### 3.2.1 Présentation du problème

Dans cette partie, l'infiltration 1D sous lame d'eau est simulée en régime transitoire à l'aide du code volumes finis BIGFLOW. Le domaine de calcul est une colonne verticale contenant deux couches. Les deux configurations du domaine ("G.L./F.S.", "F.S./G.L."), la condition initiale ainsi que les conditions aux limites sont présentés dans la figure 5.10. Le modèle Exponentiel calé (voir section 2) est utilisé pour paramétriser  $K(h)$  et  $\theta(h)$ , les propriétés hydrodynamiques des deux couches sont présentées dans le tableau 5.1.



**FIGURE 5.10:** Conditions initiale et aux limites utilisées dans le test d'infiltration sous lame d'eau pour deux configurations du sol.

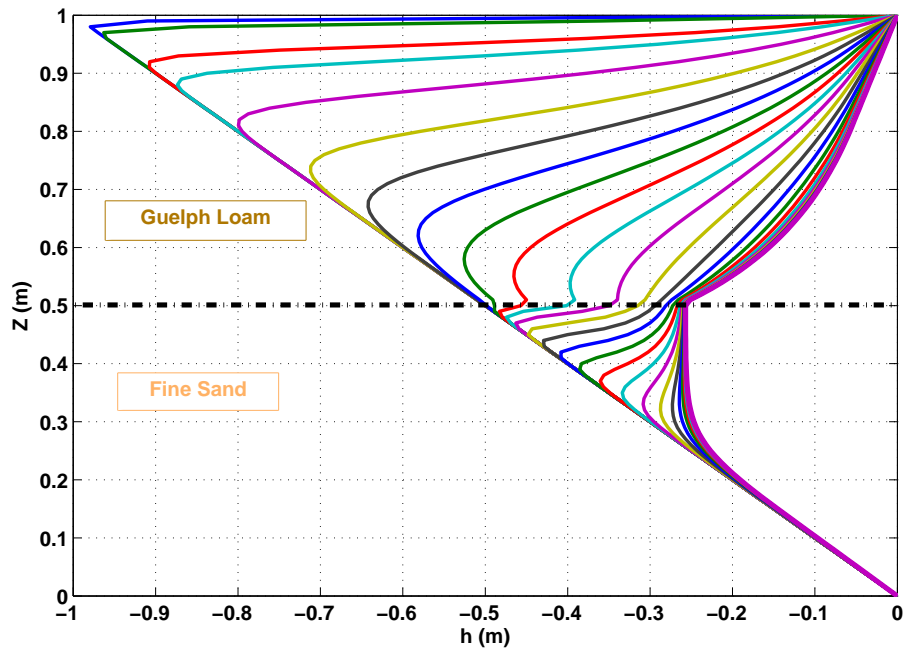
### 3.2.2 Analyses des résultats

Nous avons simulé l'infiltration sous lame d'eau mais sans accumulation d'eau à la surface  $h = 0m$  (condition d'humectation sous lame d'eau nulle). La figure 5.11 présente les profils de pressions en partant d'un état initial hydrostatique entre la nappe et la surface du sol.

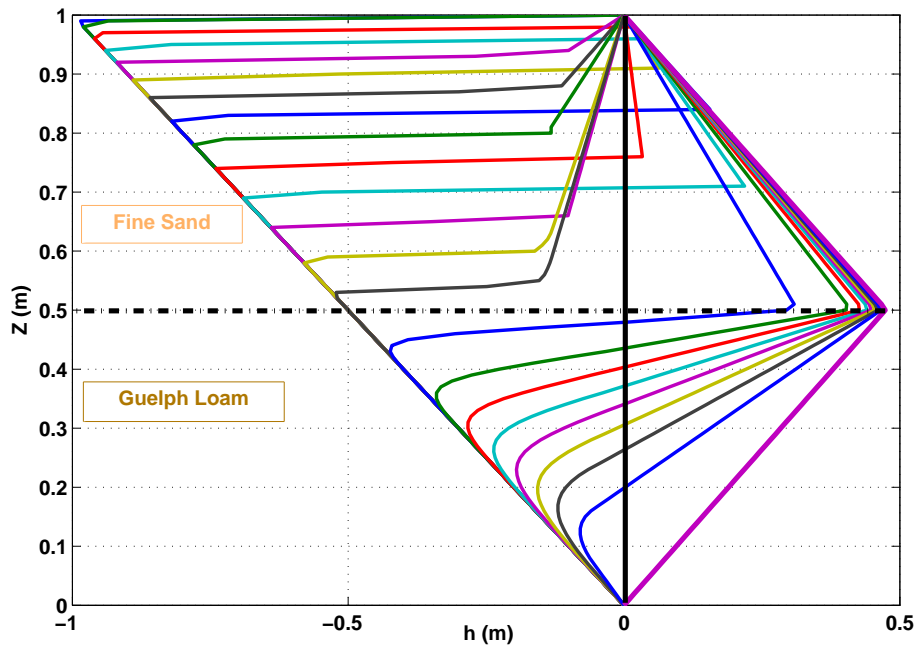
Pour la configuration "G.L./F.S." (voir la figure 5.11(a)), au dessus de l'interface entre les deux couches situé à  $z = 0.5m$ , nous constatons, une accumulation de profils de pression, ce qui est un signe de ralentissement de la vitesse du front descendant d'infiltration. Ceci se confirme par la discontinuité des profils de teneurs en eau à l'interface (cf. figure 5.12(a)). Nous pouvons donc conclure que la couche sableuse (F.L.) a joué un rôle de barrière capillaire pendant une durée réduite (1500s). Nous constatons aussi que, pour  $h = -0.3m$ , la discontinuité de gradient de pression est presque négligeable, ce qui est expliqué par le fait que cette valeur correspond au point d'intersection des deux courbes de conductivité hydraulique relative de deux sols (cf. figure 5.4).

Dans la configuration "F.S./G.L." (voir la figure 5.11(b)), nous constatons que la colonne est devenue complètement saturée au bout d'un temps  $t = 15E3s$  et donc l'interface Limon-sable accélère la transmission du flux imposé (cf. la figure 5.12(b)). Nous remarquons aussi la formation des zones internes de surpression ( $h > 0$ ) dans la couche supérieure "F.S.", avant même que le front ait atteint l'interface (G.L./F.S.).



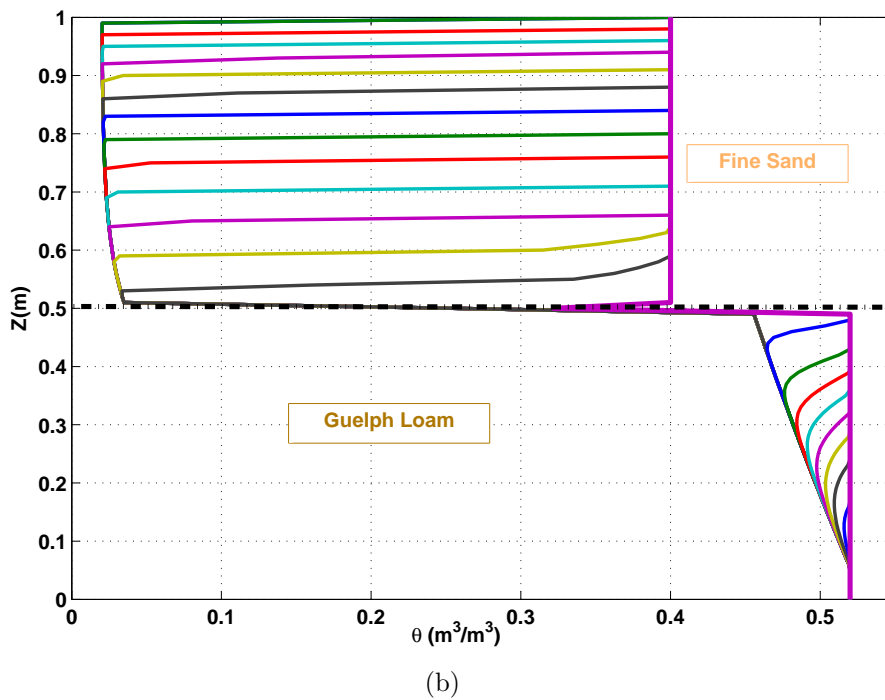
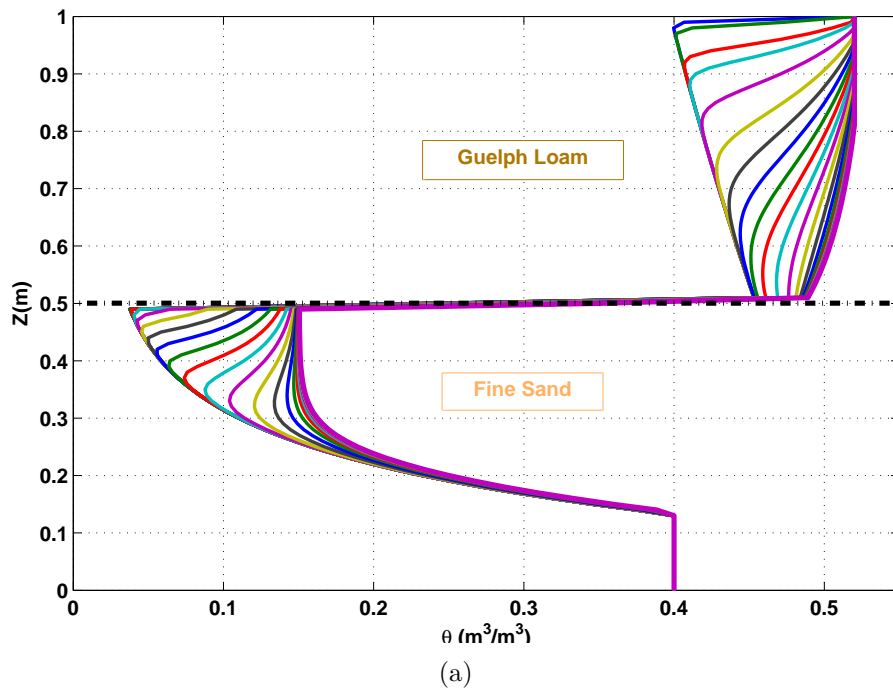


(a)



(b)

**FIGURE 5.11:** Résultats BIGFLOW-MATLAB du phénomène de barrière capillaire (Infiltration sous lame d'eau) : profils de pression  $h(z,t)$ . Il y a 40 profils correspondant aux temps réguliers à part les 4 premiers :  $t_{max} = 18000s$ . (a) : G.L./F.S. ; (b) : F.S./G.L..



**FIGURE 5.12:** Résultats BIGFLOW-MATLAB du phénomène de barrière capillaire (Infiltration sous lame d'eau) : profils de teneur en eau  $\theta(z,t)$ . Il y a 40 profils correspondant aux temps réguliers à part les 4 premiers :  $t_{max} = 18000s$ . (a) : G.L./F.S. ; (b) : F.S./G.L..

### 3.3 Injection "pulse" de durée finie dans un système bicouche

#### 3.3.1 Présentation du problème

Dans cette section, nous voulons étudier l'influence de barrière capillaire lors du drainage dans un système bicouche "Guelph Loam/Fine Sand". Deux phases seront traitées à ce stade, la première est une phase d'infiltration, où la colonne est sous lame d'eau nulle  $h = 0 \text{ m}$  pendant une durée de trois heures, et la deuxième étape est la phase de redistribution qui consiste à imposer un flux nul le reste de la simulation à la surface (en réalité c'est une condition pour assurer la couverture du sol afin d'empêcher l'évaporation et la pénétration des pluies éventuelles).

Vu la complexité du processus d'infiltration puis de redistribution, nous cherchons tout d'abord à comprendre le comportement d'un milieu homogène, et dans ce cas nous choisissons la couche supérieure qui est soumise à une condition d'infiltration dans notre système bicouche "Guelph Loam".

Le domaine de calcul pour les deux simulations, la condition initiale ainsi que les conditions aux limites sont présentés dans la figure 5.13. Les propriétés hydrodynamiques des deux couches (modèle Exponentiel calé) sont les mêmes utilisées dans les précédents tests (voir le tableau 5.1).

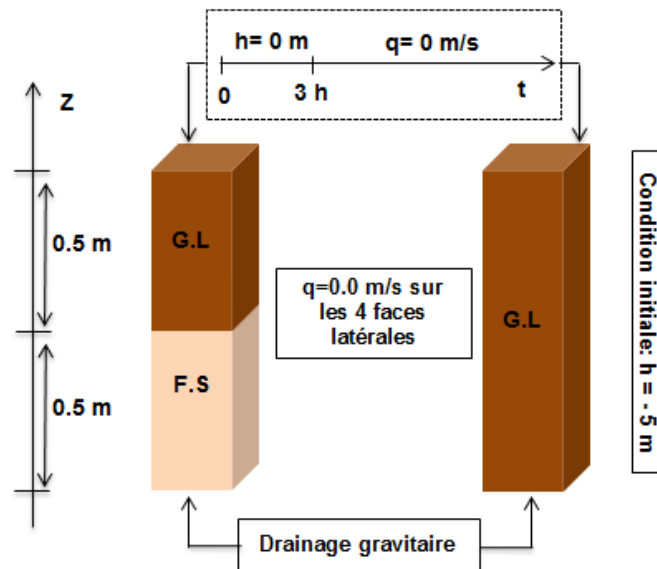
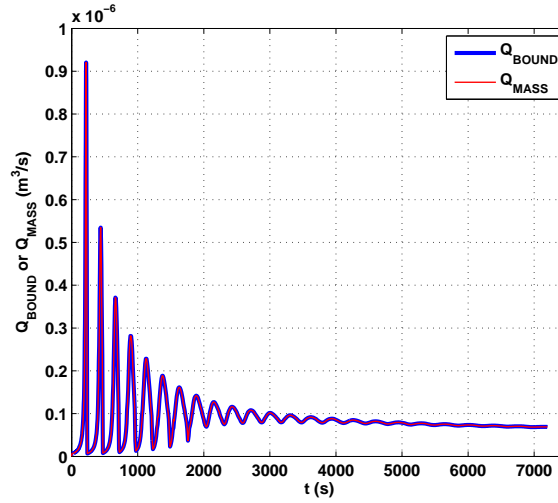
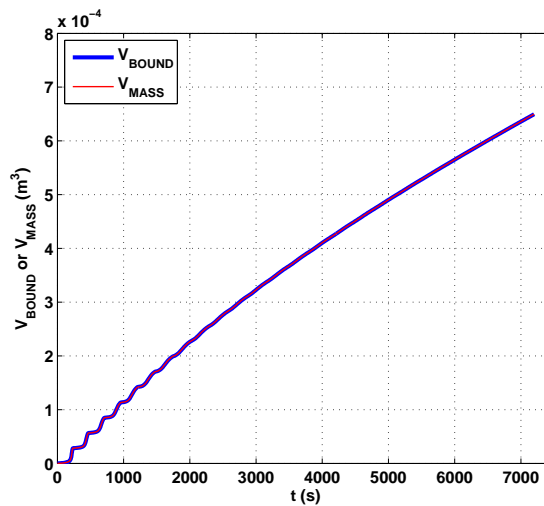


FIGURE 5.13: Conditions initiale et aux limites utilisées dans le test d'infiltration sous lame d'eau puis de redistribution.

3.3.2 Analyses des résultats



(a)



(b)

**FIGURE 5.14:** Résultats BIGFLOW (Injection pulse de duré finie) : (a) Comparaison du flux net  $Q_{bound}(log(t))$  calculé aux frontières avec le flux  $Q_{mass}(log(t))$  calculé par bilan de masse sur une période de 3 h (phase d’infiltration) ; (b) Comparaison du volume net  $V_{bound}(t)$  calculé par les flux aux frontières avec le volume  $V_{mass}(t)$  calculé par bilan de masse.

La superposition des courbes présentées dans la figure 5.14 montre que le bilan de masse est excellent et donc la simulation de la phase d’infiltration (durée de la simulation égale à 3h) a bien convergé.

Nous calculons analytiquement les densités de flux entrants et/ou sortants par les deux frontières inférieure (A3) et supérieure (B3) et les comparer avec les flux numériques obtenus au bout de trois heures (fin de la phase d'infiltration). Dans le tableau 5.2, la densité de flux numérique est obtenue en divisant le débit numérique  $Q$  par l'aire de la face frontière :  $q = \frac{Q}{\Delta x \Delta y}$ . Ainsi, la densité de flux théorique de la frontière A3, correspond à la condition limite gravitaire  $q = K(h_{in})$  (la pression dans le sol grossier est égale à la pression initial à  $t = 3h$ ).

La convergence de la simulation est confirmée par l'égalité de débit numérique et théorique sortant par la frontière inférieure A3. De même, nous constatons que la densité de flux à la frontière B3 est importante par rapport à la conductivité hydraulique à saturation.

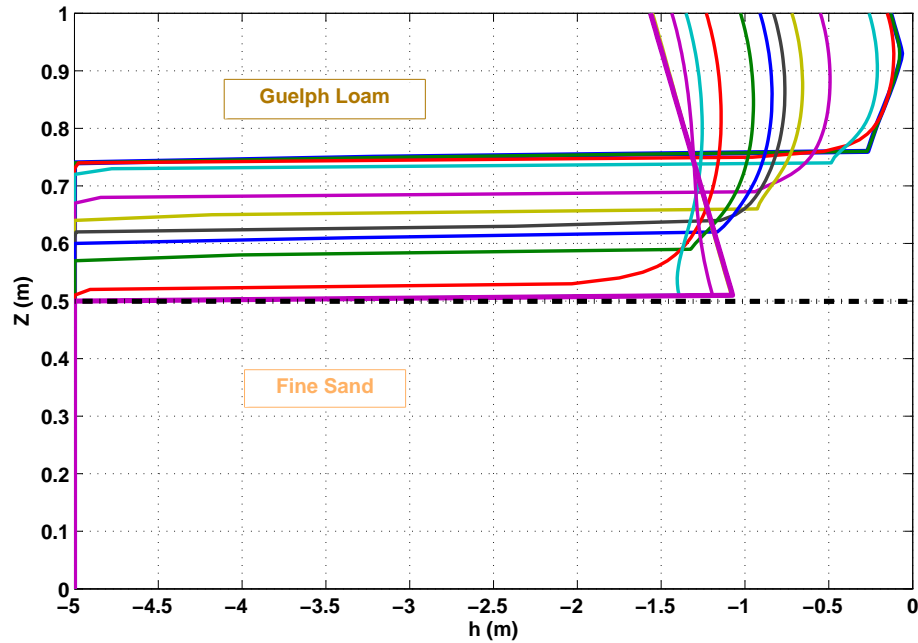
**Tableau 5.2:** Densité de flux, débit sur les frontières du système bicouche.

Frontière	$K_s$ [m/s]	$K(h_{in})$ [m/s]	Densité de flux théorique $q$ [m/s]	Débit numérique $Q$ [m <sup>3</sup> /s]	Densité de flux numérique $q$ [m/s]
A3	$1.50E - 4$	$4.53E - 63$	$4.53E - 63$	$4.53E - 65$	$4.53E - 63$
B3	$3.66E - 6$	$3.83E - 13$	–	$6.88E - 8$	$6.88E - 6$

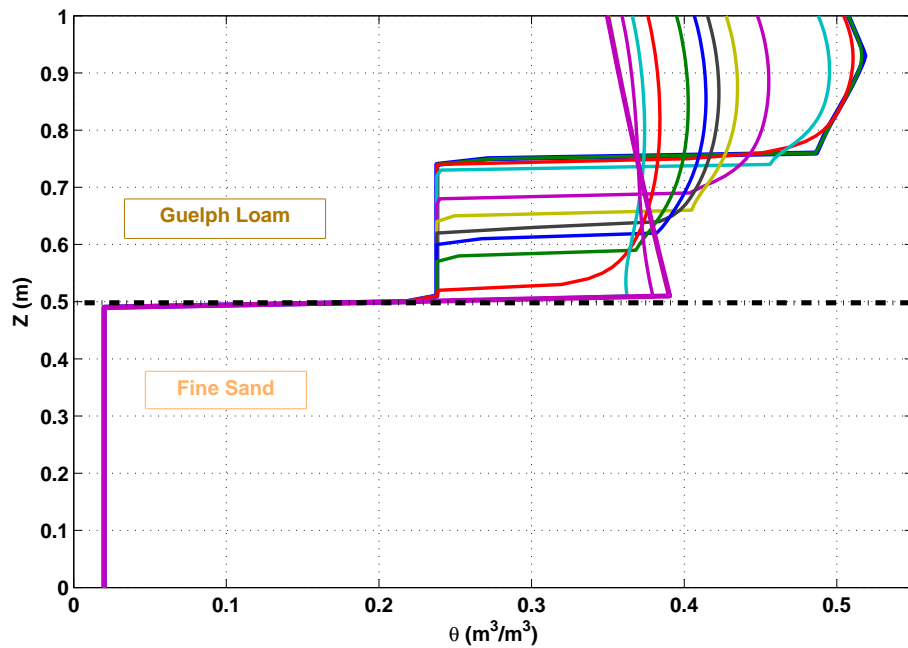
La figure 5.14(a) montre aussi la présence des oscillations qui s'atténuent au cours du temps. D'une manière générale, l'origine de ces oscillations pourrait être expliquée par un problème mathématique, purement numérique, ou bien physique. Cependant, dans notre cas, le problème numérique est éliminé car nous avons déjà vérifié la convergence de la simulation. Il serait intéressant de revenir à cette étude ultérieurement afin d'essayer de mieux comprendre les causes de ces oscillations enregistrées.

Pour les deux simulations, nous avons injecté 64.9 mm d'eau (voir la figure 5.14(b)) au bout de trois heures. Nous étudions, à ce stade, la phase de drainage en analysant les profils de pression et de teneur en eau dans les deux cas (système bicouche et limon homogène). Les deux expérimentations numériques sont faites pour une même durée (50 jours) avec les mêmes conditions aux limites.

Lors de drainage, la figure 5.16(a) montre que la couche supérieur ("Guelph Loam") a tendance à accumuler l'eau et empêche sa pénétration dans la couche inférieure ("Fine Sand") ce qui est confirmé par la figure 5.15(b). En comparant ces résultats avec les profils de pression (cf. la figure 5.16(a)) et de teneur en eau (cf. la figure 5.16(b)) du sol homogène, nous constatons que le sol grossier a joué le rôle de barrière capillaire pendant le drainage.

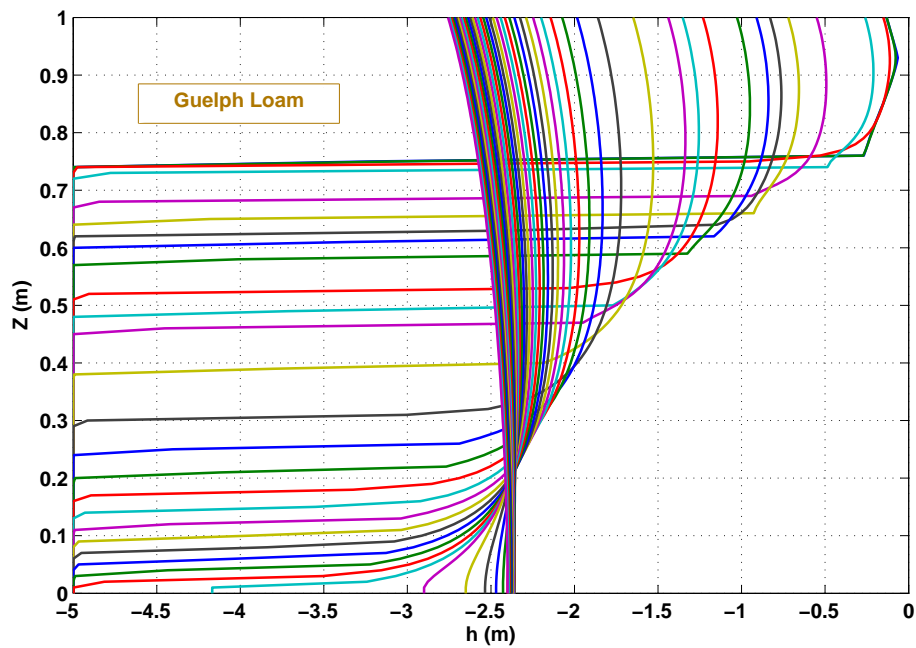


(a)

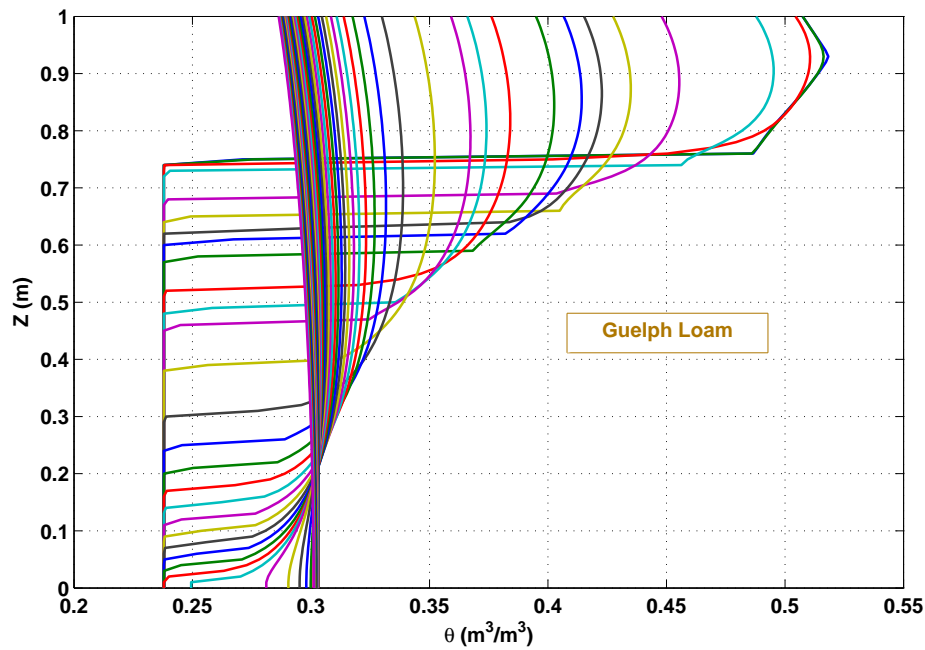


(b)

**FIGURE 5.15:** Résultats BIGFLOW-MATLAB : Injection "pulse" à durée finie ( $h = 0\text{m} \forall t < 3600\text{s}$  puis  $q = 0\text{m/s} \forall t > 3600\text{s}$ ) dans un système bicouche Guelph Loam sur Fine Sand, (a) : profils de succion  $h(z,t)$ ; (b) : profils de teneur en eau  $\theta(z,t)$ . Il y a 47 profils correspondant aux temps :  $T_1 = 10\text{ s}$ ,  $T_2 = 100\text{ s}$ , ...,  $T_{47} = T_{\text{max}} = 50\text{ jours}$ . (a) : GL/FS; (b) : FS/GL.



(a)



(b)

**FIGURE 5.16:** Résultats BIGFLOW-MATLAB : Injection "pulse" à durée finie ( $h = 0\text{m} \forall t < 3600\text{s}$  puis  $q = 0\text{m/s} \forall t > 3600\text{s}$ ) dans le Guelph Loam, (a) : profils de succion  $h(z,t)$ ; (b) : profils de teneur en eau  $\theta(z,t)$ . Il y a 47 profils correspondant aux temps :  $T_1 = 10\text{ s}$ ,  $T_2 = 100\text{ s}$ , ...,  $T_{47} = T_{\text{max}} = 50\text{ jours}$ . (a) : GL/FS; (b) : FS/GL.

## 4 Simulations multidimensionnelles d'écoulements en sols aléatoires

### 4.1 revue bibliographique

Les milieux poreux naturels sont caractérisés généralement par une variabilité spatiale de leurs propriétés hydrodynamiques et principalement celle de la conductivité hydraulique [28]. Plusieurs études qui ont traité les effets des propriétés variables d'écoulement non saturé sont présentées dans la littérature.

Anderson et Shapiro 1983 [15] ont étudié l'écoulement  $1D$  permanent non-saturé en utilisant les simulations de Monte-Carlo (générer des champs aléatoires de conductivités corrélées dans l'espace) et le comparer avec la méthode de perturbation (Résolution d'équation différentielle stochastique, dont la conductivité est une fonction aléatoire de l'espace) pour obtenir la moyenne et variance des teneurs en eau.

Yeh et al. 1985 ([83], [84], [85]) ont analysé la théorie stochastique pour l'écoulement permanent dans un sol hétérogène avec l'infiltration verticale pour le cas où  $\ln Ks$  et  $\alpha$  (paramètre du modèle exponentiel de conductivité de Gardner) sont représentées sous forme de champs aléatoires spatiaux statistiquement homogènes. Ils ont élaboré, en utilisant une représentation spectrale de l'équation d'écoulement perturbé, des solutions analytiques de la conductivité hydraulique effective, du flux et du gradient de pression. Les résultats analytiques comparés à ceux expérimentaux ont montré que la variabilité de la pression capillaire et de la teneur en eau ainsi que du rapport d'anisotropie (horizontal/vertical) et de la conductivité effective augmentent avec la moyenne de pression capillaire.

Broadbridge 1987 [21] a utilisé l'approche Darcy/Buckingham pour modéliser l'écoulement non saturé dans des milieux poreux présentant une variabilité spatiale continue. Il a présenté de nouvelles équations d'écoulement hétérogènes non saturé à partir de celles d'un écoulement homogène possédant des groupes de symétrie spatiale de Lie/Backlund.

Dans le but de résoudre les problèmes liés aux informations limitées à l'échelle locale de la variabilité du sol, Mantoglou et Gelhar 1989 [48] ont développé une approche stochastique pour la modélisation d'écoulement insaturé transitoire dans un sol présentant une variabilité spatiale importante. Ils ont supposé que les propriétés locales du sol sont des réalisations de champs  $3D$  aléatoires stationnaires. L'application de cette approche a montré que la variabilité spatiale des propriétés hydrauliques du sol engendre, à grande échelle, des effets significatifs tels que l'hystérésis et



l'anisotropie de paramètres effectifs. Polman et al. 1991 [62] ont réalisé des expérimentations numériques 3D en utilisant le modèle d'écoulement tridimensionnel de Ababou 1988 [1] dans le but de tester la théorie stochastique de Montaglou et Gelhar 1987.

L'étude faite par Ababou 1991 [4] sur le site de stockage de déchet hautement radioactif ('Yucca', Nevada, USA) et portant sur la modélisation de transport de radionucléides dans la zone non saturée. Cette étude a mis en évidence l'importance de considérer les effets d'hétérogénéités naturelles dans cette modélisation. Vu la géologie complexe du sol comportant des fissures et des fractures présentant une extension latérale importante, le recours à des modèles stochastiques basés sur les probabilités géométriques et les fonctions aléatoires (modèles parcimonieux) est nécessaire afin de mieux modéliser le transport de ses éléments radioactifs à travers ses chemins préférentiels (fissures et fractures).

Russo et al. 1997 [66] ont étudié la variabilité spatiale de la conductivité hydraulique à saturation et le paramètre  $\alpha$  du modèle Gardner 1958 [31]. Ils ont constaté que les paramètres du site telles que  $Ln(K_s)$  et  $Ln\alpha$  sont normalement distribués et les échelles de corrélation estimées de  $Ln(\alpha)$  dans des directions verticales et horizontales sont environ trois fois plus petites que les échelles de corrélation respectives de  $Ln(K_s)$ . La corrélation entre les deux paramètres a été jugée trop faible pour une corrélation transversale inférieure à 0,3. Des résultats similaires avec de faible corrélation transversale ont été rapportées depuis le site de tranchée « Las Cruces ».

Veena 2005 [77] s'est aussi intéressé à la modélisation stochastique à grande échelle spatiale et temporelle. Elle a utilisée une modélisation stochastique afin d'obtenir les propriétés effectives du sol. Elle a utilisé la méthode des bandes tournantes pour générer des champs aléatoires des paramètres hydrodynamiques.

## 4.2 Champs aléatoires et milieux aléatoires

### 4.2.1 Champs aléatoires statistiquement homogènes (inconditionnel)

Un champ aléatoire est une fonction de l'espace  $F(x)$  telle que  $F(x_0)$  est une variable aléatoire pour une position fixée  $x_0$ . Plus généralement, un champ aléatoire  $F(x_0)$  peut être caractérisé, dans un espace de probabilité, par les moments d'un point (moyenne  $E$ , variance  $Var$  et écart-type  $\sigma$ ) et les moments de deux points (covariance  $Cov$  et fonction d'autocorrélation  $R$ ) (voir Annexe B). Un champ aléatoire est statistiquement homogène (stationnaire), si ses moments sont invariants par translation et donc caractérisé par :

- Moyenne constante :  $E[F(\vec{x})] = m_F$
- Variance constante :  $Var[F(\vec{x})] = \sigma_F^2$
- Covariance qui dépend que du vecteur de séparation  $\vec{\xi} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  :  $Cov(F(\vec{x}_1), F(\vec{x}_2)) = C(\vec{\xi})$  avec  $C(\vec{\xi})$  est une fonction de covariance.

#### 4.2.2 Génération de milieux poreux aléatoires

Parmi les méthodes les plus utilisées, dans la littérature, pour générer un champ aléatoire statistiquement homogène est la méthode des bandes tournantes "Turning Bands Method" (cf. Matheron 1973 [47]).

Cette méthode consiste à générer des champs aléatoires inconditionnels, 2D ou 3D à partir d'un grand nombre de simulations 1D, appelées "bandes". Toute simulation de covariance isotrope dans  $\mathfrak{R}^2$  ou  $\mathfrak{R}^3$  est ramenée à une simulation de champs aléatoires indépendants définis dans  $\mathfrak{R}^1$ . Cette méthode est appliquée aussi pour de champs aléatoires anisotropes avec des fonctions de covariance ellipsoïdales.

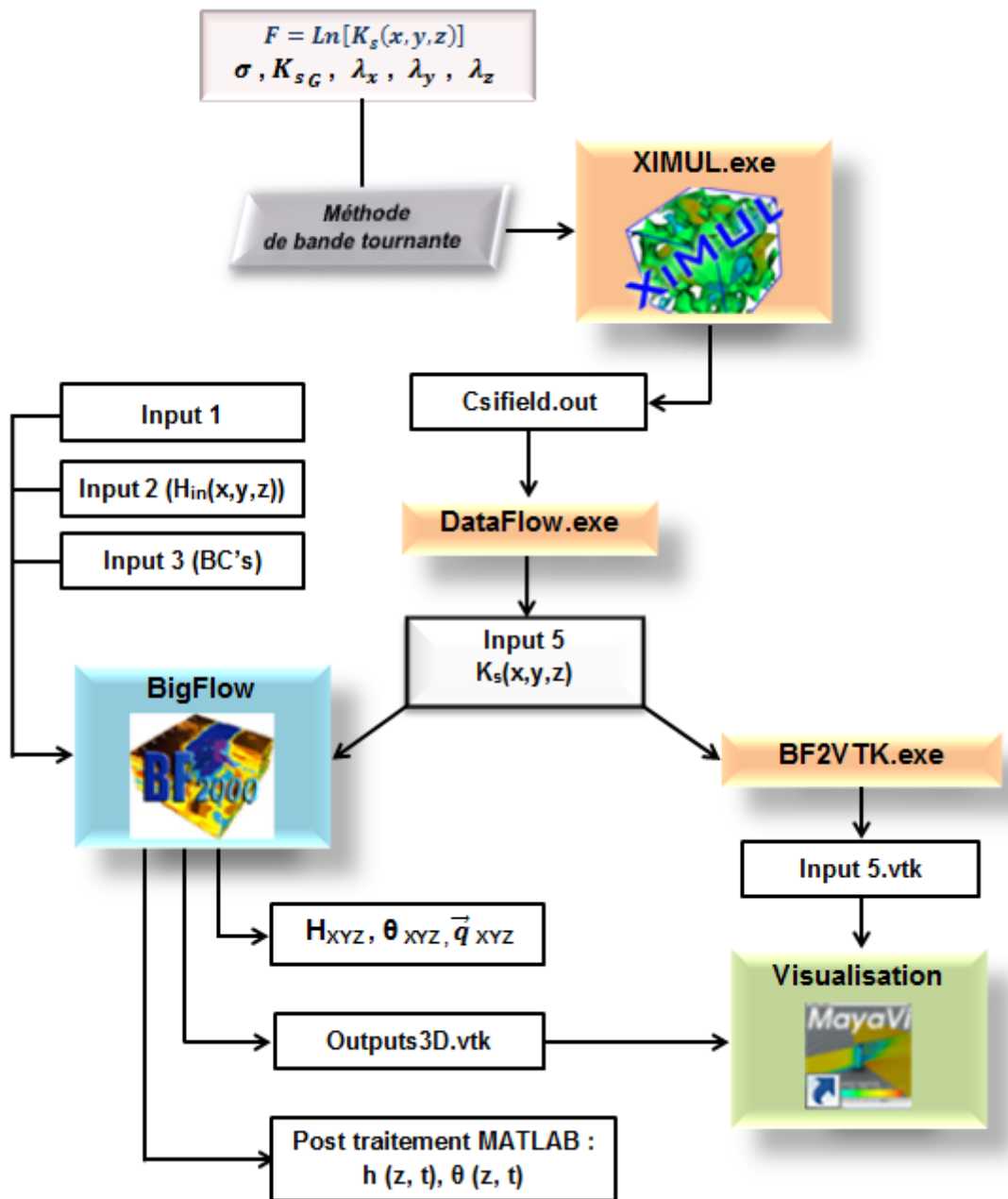
En 1989, Tompson et al. [74] ont mis en œuvre et analysé en détail la méthode des bandes tournantes pour le cas 3D. Cette méthode a été reprise dans le code *XIMUL 1,2,3D* (Ababou et al.1989 [8]) afin de générer des champs spatiaux dans les cas suivants :

- Génération d'un champ  $F(\vec{x})$  inconditionnel (homogène).
- Génération d'un champ  $F(\vec{x})$  conditionnel obtenu par conditionnement Bayésien (tenir compte de données ponctuelles).
- Génération de répliques multiples du champ inconditionnel ou conditionnel (simulations de Monte Carlo).

La figure 5.17 illustre les étapes que nous allons suivre, dans le présent travail, afin de modéliser l'écoulement 2D/3D en sols aléatoires. En effet, nous allons générer un champ aléatoire Gaussien stationnaire inconditionnel de conductivité hydraulique saturé  $F(\vec{x}) = LnK_s(x,y,z)$  en utilisant le code *XIMUL 1,2,3D* par la méthode des bandes tournantes.

Nous caractérisons ce champs par sa moyenne de géométrie  $K_{sG}$ . Nous allons supposer que le champ  $F(\vec{x})$  est caractérisé par une fonction d'auto-covariance  $C_{FF}(\vec{s})$  de type anisotrope ellipsoïdale. Nous choisirons l'un des trois types suivants (avec une préférence pour la covariance de forme gaussienne).

- Autocovariance de forme exponentielle :
- Autocovariance de forme gaussienne.
- Autocovariance gaussienne à trou(hole-gauss).

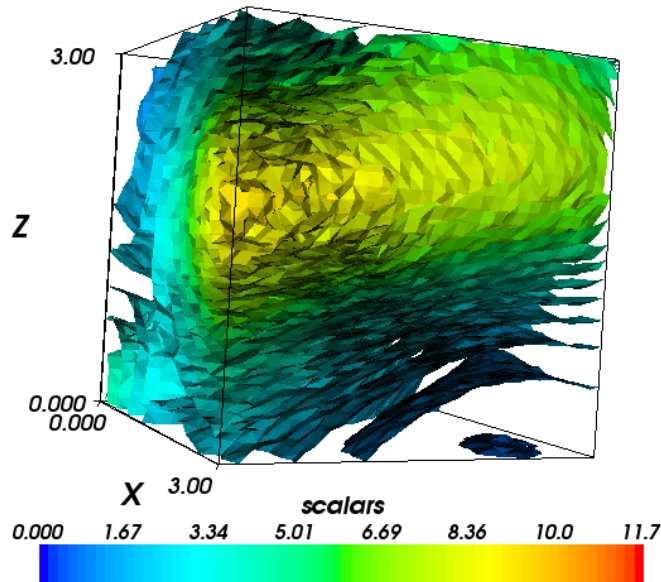


**FIGURE 5.17:** Organigramme des outils numériques et fichiers entrées/sorties utilisés pour la modélisation 3D d'écoulements en sols aléatoires : Exemple de la génération de  $K_s(x,y,z)$ .

### 4.3 Infiltration à flux uniforme en $(x, y)$ et constant dans le temps

#### 4.3.1 Présentation du problème

Nous simulons avec BIGFLOW 3D, en régime transitoire, l'infiltration en sol hétérogène en présence d'une nappe. Nous considérons que seule la conductivité hydraulique à saturation est aléatoire, Un champ aléatoire tri-dimensionnel, spatialement corrélé, de log-conductivité à saturation ( $\ln K_s(x, y, z)$ ) est généré à l'aide code *XIMUL 1,2,3D* (voir la figure 5.19). Le domaine de calcul est un cube de coté 3 m, la grille de calcul comporte  $31 \times 31 \times 31$  nœuds ( $\Delta x_i = 0.1 \text{ m}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ).



**FIGURE 5.18:** Réplique d'un milieu aléatoire gaussien structuré sur un petit domaine (cube de côté 3.0 m) ayant une structure d'auto-corrélation isotrope à décroissance exponentielle : 20 Iso surfaces de  $K_s(x, y, z)$ . Les paramètres utilisés sont :  $\sigma = 1.0$ ,  $K_{sG} = 1.0$ ,  $\lambda_{i=1,2,3} = 1.5, 1.5, 1.5$ .

Initialement, le milieu poreux est totalement sec selon un profil de pression hydrostatique  $h = -z$ . Concernant les conditions aux limites, nous supposons que le flux est nul sur les surfaces latérales, et une pression nulle sur la surface inférieure du domaine (Nappe libre). Tandis que pour la condition limite sur la surface supérieure est imposée selon le cas à traité (un flux uniforme en  $(x, y)$  constant ou non ; une source ponctuelle).

Nous présentons, dans le tableau 5.3, les propriétés hydrodynamiques du milieu ainsi les paramètres utilisés pour générer le champ aléatoire.

**Tableau 5.3:** Propriétés hydrodynamiques (Injection à flux en sol aléatoire).

Paramètres		Valeur
Champ $LnK_s(x,y,z)$	$K_{sG} (m/j)$	1.0
	$\sigma$	1.0
	$\lambda_{i=1,2,3}$	1.5, 1.5, 1.5
$\theta_s (m^3/m^3)$		0.4
Modèle Exponentiel	$\alpha (m^{-1})$	4.60
	$\beta (m^{-1})$	1.50

Dans le but de comprendre le phénomène, nous donnons, dans le tableau 5.4, une liste de valeurs numériques de certaines propriétés hydrauliques correspondant à l'état initial à la surface du sol.

**Tableau 5.4:** Propriétés hydrauliques initiales à la surface du sol.

Paramètre	$h_{in}^{surf}$	$\theta_{in}^{surf}$	$K_{in}^{surf}$	$q/K_{in}^{surf}$	$S_e$
Valeur	$-3 m$	$4.4E - 3$	$1E - 6$	$1E5$	$1.1E - 3$

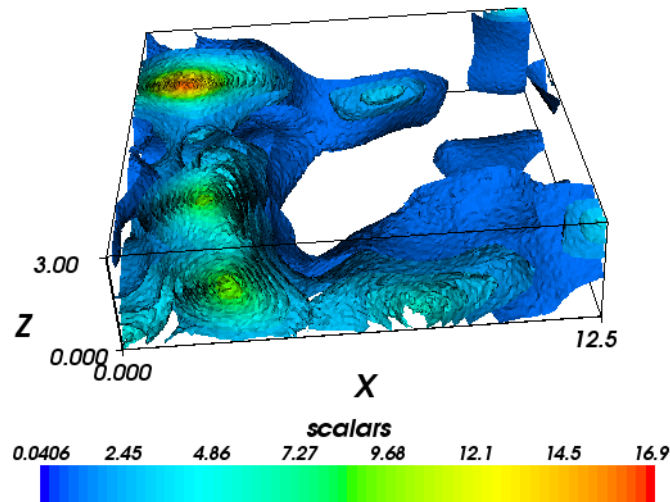
Au cours de poste traitement de cette simulation, nous avons remarqué que les profils  $\bar{h}(z)$  et  $\bar{\theta}(z)$  sont fluctuants et donc nous nous sommes rendus compte que dans chaque tranche horizontale le nombre d'échantillons est insuffisant ( $\frac{L_x}{\lambda_x} \times \frac{L_y}{\lambda_y} = 4$  échantillons indépendants). Nous décidons donc de refaire des simulations avec le même champs de  $K_s$  mais régénéré sur un domaine plus grand en  $(X,Y)$ .

Nous définissons les paramètres  $\frac{\Delta x_i}{\lambda_i}$  et  $\frac{L_i}{\lambda_i}$   $\{i = 1, 2, 3\}$ , respectivement, comme étant la résolution statistique du modèle numérique et le nombre effectif  $N_i^{eff}$  d'échantillons dans le domaine par direction.

Notons que pour toutes les nouvelles simulations, la résolution statistique du modèle numérique est inchangée ( $\frac{\Delta x_i}{\lambda_i} = 0.06$ ) mais nous avons augmenté le nombre effectif  $N_i^{eff}$  d'échantillons (voir le tableau 5.5).

**Tableau 5.5:** Nombre effectif d'échantillons pour chaque simulation.

Simulation $n^o$	1	2	3	4	
Maillage	31x31x31	76x76x31	101x101x31	126x126x31	
Dimension	3x3x3	7.5x7.5x3	10x10x3	12.5x12.5x3	
$N_i^{eff}$	$i = 1$	2	5	7	8.3
	$i = 2$	2	5	7	8.3
	$i = 2$	2	2	2	2
Volumique	8	50	98	137.7	



**FIGURE 5.19:** Réplique d'un milieu aléatoire gaussien structuré sur un grand domaine ( $126 \times 126 \times 31$ ) ayant une structure d'auto-corrélation isotrope à décroissance exponentielle : 20 Iso surfaces de  $K_s(x,y,z)$ . Les paramètres utilisés sont :  $\sigma = 1.0$ ,  $K_{sG} = 1.0$ ,  $\lambda_{i=1,2,3} = 1.5, 1.5, 1.5$ .

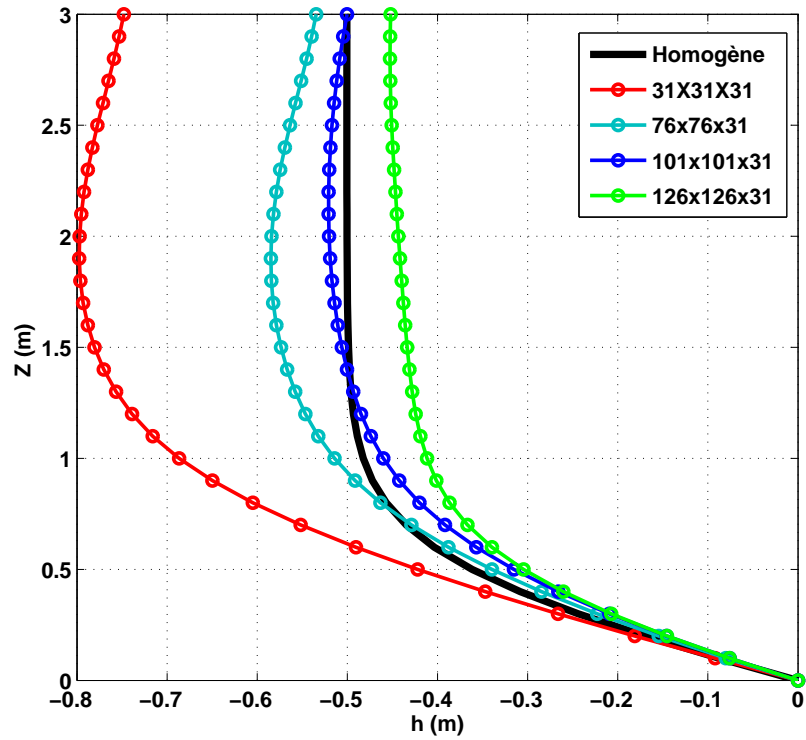
#### 4.3.2 Analyse des résultats

Nous avons simulé l'infiltration avec un flux uniforme dans le sol aléatoire en régime transitoire jusqu'à atteindre un régime permanent. Les informations extraites des fichiers OUT13 (bilan de masse) montrent que la simulation a bien convergé (voir annexe).

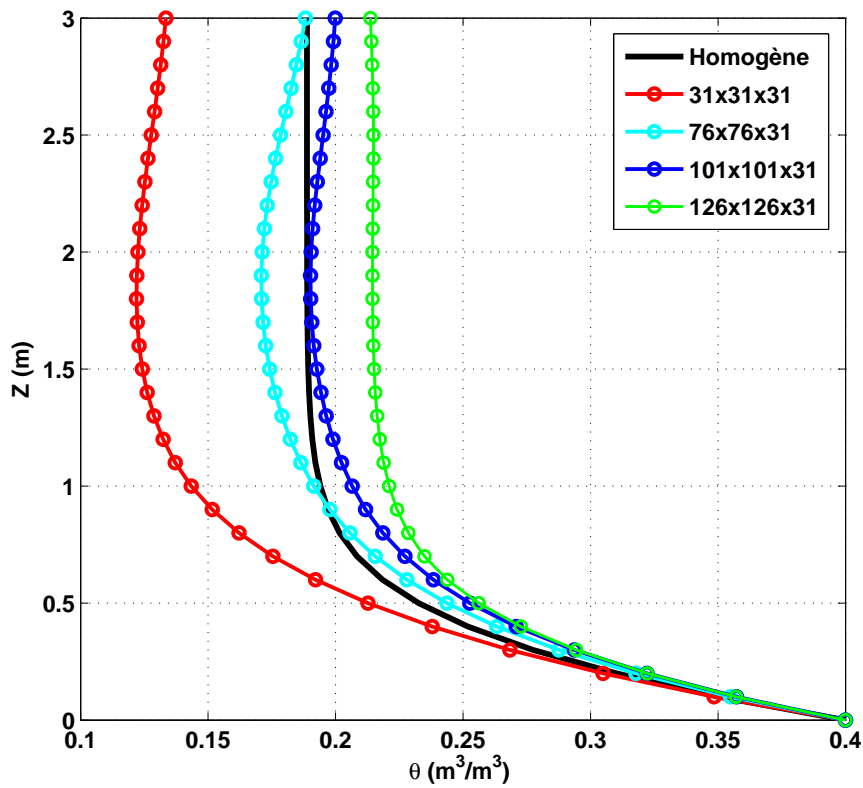
Dans cette étape, en profitant de l'homogénéité statistique des variables du problème stochastique dans certaines directions de l'espace, nous allons calculer les moyennes de pression et de teneur en eau dans chaque tranche horizontale ( $X, Y$ ) afin de comparer les profils  $\bar{h}(z)$  et  $\bar{\theta}(z)$  avec les profils  $h(z)$  et  $\theta(z)$  du sol homogène.

Les figures 5.20(a) et 5.20(b) présentent respectivement les profils des moyennes de pressions  $\bar{h}(z)$  et de teneurs eau  $\bar{\theta}(z)$ . Nous constatons ici que les profils sont non-monotones lorsqu'ils sont calculés sur des petites grilles, alors qu'ils deviennent monotones quand la taille de la grille augmente ( $126 \times 126 \times 31$ ).

En conclusion, nous retiendrons la grille la plus grande pour la suite de l'analyse, en supposant que cette grille ( $126 \times 126 \times 31$ ) contient un nombre effectif suffisant d'échantillons de pression et de teneur en eau. Noter que le profil le plus représentatif ne coïncide pas avec le profil de moyenne naïve correspondant à un sol homogène. Des études sont en cours pour confirmer la convergence (domaines plus grand).



(a)



(b)

FIGURE 5.20: Infiltration à flux uniforme en  $(x, y)$  dans un sol aléatoire : (a) profils moyens de pression  $\bar{h}(z)$ ; (b) profils moyens de teneur en eau  $\bar{\theta}(z)$ .

## 5 Conclusions

Nous avons développé une relation théorique entre les paramètres du modèle Exponentiel et les paramètres du modèle VGM. Cette nouvelle approche est validée numériquement et a été utilisée dans l'analyse numérique des effets possibles de barrière capillaire lors de l'infiltration dans un système bicouche.

Pour se faire, nous avons testé plusieurs types d'injection (flux constant, condition d'humectation sous lame d'eau nulle), en présence d'une nappe plus ou moins profonde et pour deux configurations ("G.L./F.S." et "F.S./G.L."). Ces expérimentations numériques transitoires sont menées en utilisant indirectement un modèle réaliste pour la représentation des courbes hydrodynamique du sol, grâce à la méthode de récolement développée dans ce chapitre. Les résultats obtenus confirment que lorsqu'une barrière capillaire est soumise à une infiltration, la couche supérieure (sol fin) aura tendance à accumuler l'eau et donc ralentit la vitesse du front descendant d'infiltration dans la couche inférieure (sol grossier).

Ce chapitre contient en partie une étude préliminaire des phénomènes multidimensionnels d'infiltration pour un sol aléatoire, nous avons testé également la méthode de prise des moyennes des champs de pression et de teneur en eau et nous avons montré que le profil vertical moyen (pression et teneur en eau) ne coïncide pas avec le profil vertical obtenu pour le sol homogène moyen de référence. Ce résultat confirme que le problème de montée d'échelle est loin d'être trivial en écoulement non saturé (à cause des interactions entre hétérogénéité et non-linéarité de la conductivité). De même, nous avons obtenu un premier résultat empirique concernant la taille minimum nécessaire du domaine de calcul 3D permettant d'obtenir des profils verticaux moyens représentatifs de l'infiltration dans une réplique unique du sol aléatoire.

En particulier, ce travail d'analyse de Simulations multidimensionnelles d'écoulements en sols hétérogènes et aléatoires peut être développé dans les directions suivante :

- Analyse des migrations et dispersion de panaches d'humectation ("pulse") et de fronts d'infiltration par la méthode des moments.
- Les couches envisagées par l'analyse de la barrière capillaire dans ce chapitre sont des couches parfaites; d'où l'idée d'une perturbation aléatoire 3D.





Oscillatory flows in partially  
unsaturated soils : 1D  
numerical experiments and  
analyses

6

## Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	114
2	The multi-front model . . . . .	116
2.1	General presentation of the Multi-Front model . .	116
2.2	Multi-Front model parameters . . . . .	118
2.3	Applying Darcy's law and mass conservation . .	119
3	Performance of the Multi-Front model . . . . .	120
3.1	Input parameters . . . . .	120
3.2	Bottom flux evolution $q_0(t)$ . . . . .	121
3.3	Total Head Profiles $H(z,t)$ . . . . .	122
4	Unsaturated flow dynamics through zero-flux planes .	123
4.1	Definition and theoretical relations for zero flux plane $Z_0(t)$ . . . . .	123
4.2	Results on zero flux plane dynamics ( $Z_0(t)$ ) . . .	124
5	Conclusions . . . . .	125

---

---

Ce chapitre de thèse est basé sur un article en préparation en vue d'une soumission pour publication dans une revue scientifique internationale à comité de revue. Le contenu de ce chapitre de thèse reste non publié au moment où ces lignes sont écrites.

Nous étudions, dans ce chapitre, le cas des écoulements non-saturés (et partiellement saturés) en régime transitoire fortement oscillatoire, dans une colonne de sable fin homogène, sous l'effet de fluctuations temporelles périodiques du niveau de la surface libre d'une nappe de plage. Nous avons imposé comme condition limite inférieure une pression oscillatoire répondant à un forçage tidal. Nous nous sommes penchés ici notamment sur la validation numérique fine de la méthode multi-front (développé initialement dans la thèse IMFT de Alastal 2012 [14]). Nous avons pu démontrer l'efficacité numérique de cette méthode pour la simulation de la dynamique oscillatoire des flux et des profils de pression  $h(z,t)$  dans la colonne. Le nombre de fronts requis dans la méthode multi-front est bien inférieur au nombre de nœuds nécessaires dans un modèle à grille fixe de type volumes finis. La phénoménologie capillaire/gravitaire des écoulements oscillatoires dans la colonne est étudiée grâce à une analyse des profils de charge hydraulique totale  $H(z,t) = h(z,t) + z$ , et à un suivi de la dynamique de la position des plans de flux nul  $Z_o(t)$ , aboutissant à une étude des graphes et des bifurcations de  $Z_o(t)$ .

## 1 Introduction

In beach hydrodynamics, oscillations of groundwater flow and water table elevation influence the sediment transport and morphology of the swash zone (Baird et al. 1996 [16], Jeng et al. 2005[36]). The oscillatory flow regime can also control nutrient cycling and contaminant movement near the water table (Chen et al. 2011[24], Hinz 1998[35]). These oscillations also affect the stability of structures founded on soils and sands (Nielsen 1990[54]). The porous media involved in these oscillatory phenomena may have various grain size distributions. In many cases, due to fine grained textures, capillary effects intervene significantly on the unsaturated wetting and drainage phenomena above the oscillating water table. This type of problem can be modeled using the Richards Partial Differential Equation (PDE) model, extended to include both saturated and unsaturated regions, and taking into account oscillatory or time variable boundary conditions.

On the other hand, several simplified models have been developed to predict water table fluctuations in response to periodic forcing (Nielsen 1990[54], Baird et al. 1998 [17], Kang et al. 1996[37], Raubenheimer et al. 1999[63], Song et al. 2007[69], Teo et al. 2003[72], Xia et al. 2010[81], and Kacimov et al. 2010 [38]). Most of the proposed models are based on the 2D Dupuit-Boussinesq equation for planar groundwater flow (Dupuit 1863 [27], Boussinesq 1904 [20]), which is derived from Darcy's law and mass conservation assuming (i) vertically hydrostatic pressure (horizontal flow), and (ii) instantaneous wetting/drainage of the moving water table (i.e., the unsaturated zone is assumed totally dry at all times). Such vertically integrated models can predict space-time propagation of water table fluctuations horizontally ( $Z_s(x,y,t)$ ), but they are limited to "long wave" planar flow within the saturated region, and they do not directly account for unsaturated flow and capillary effects (except for some extensions reviewed further below).

It should be noted however that Kacimov et al. 2010 [38] develops a comparative analysis of the linearized Dupuit-Boussinesq model for water table level  $H(x,t)$  (with tidal forcing from the left), with a potential flow solution, where the potential  $\Phi$  is defined as  $\Phi = -K_S H$ . Their time variable solution  $\Phi(x,z,t)$  extends previous quasi-analytical "Linear Potential Theory" solutions by Meyer 1955 [51] and Polubarinova 1994 [61]. The potential  $\Phi(x,z,t)$  is given by special functions. It takes into account (i) vertical as well as horizontal flow in  $(x,z,t)$ ; and (ii) water table oscillations due to forcing by vertically hydrostatic, harmonically oscillating pressure, along the vertical seashore boundary. The solution of Kacimov et al. 2010 [38] recognizes the importance of vertical velocities in tidally excited unconfined aquifers. On the other hand, their solution ignores the unsaturated zone and capillary fringe. However, this zone must be very active due to

vertical water movements in and out of the unsaturated zone.

Indeed, laboratory and field studies indicate that capillarity has an effect on water table dynamics over a wide range of frequencies, including tidal frequencies [55]. As the water table fluctuates, the pressure distribution above the water table will change, and thus an apparent local water exchange across the water table occurs [44]. Thus, [56], proposed a correction of the Dupuit-Boussinesq planar flow model to take into account capillary effects above the water table. [18] used the technique of [56], and showed that the influence of the capillary fringe increases with oscillation frequency. Similarly, [44], developed a modified kinematic boundary condition for the water table, which takes capillary effects into account. Also, [36] introduced a capillary correction in the Dupuit-Boussinesq model.

To sum up, in most of the previously cited works, the Dupuit-Boussinesq model of horizontal flow was extended to include a capillary fringe. These extensions were based in some way on applying the Green-Ampt "GA" vertical "piston flow" approximation [33] above the moving water table. Such piston flow approximation assumes that the equivalent capillary fringe is completely saturated, and that the sharp interface between capillary fringe and the dry medium above is characterized by a fixed "wetting front suction" denoted  $\psi_F$  (e.g., [56]). On the other hand, in all these works, the soil or aquifer was implicitly assumed homogeneous. [39] extends the GA model to treat analytically infiltration / evaporation phenomena in a heterogeneous soil with depth-dependent saturated conductivity  $K_s(z)$  and front suction  $\Psi_F(z)$ .

In this work, we will consider a broad extension of the GA piston flow model for vertical oscillatory flows, with several important innovations : (1) the time-varying boundary condition considered in this work is an oscillatory tidal pressure; (2) the tidal pressure condition is imposed at the bottom boundary (not at the top), so that the forcing in our tidal problem is alternately co- and contra-gravitational; and (3) several fronts are introduced instead of just one single front. The "fronts" are here referred to iso-values of pressure or suction; this is different from other solutions of Richards equation based on self-similar or traveling wavefronts which have been proposed in the literature (e.g., [23]).

Along these lines, we present and test in this chapter an efficient "Multi-Front model" (MF) based on the classical "GA" model of one-dimensional (1D) vertical flow, with oscillatory pressure forcing imposed below, taking into account both saturated and unsaturated flow dynamics in the porous domain. This MF model is described in [14], where detailed tests were developed to compare the MF method to classical numerical solutions in space and time (evolution of moisture profiles and water table levels), as a

function of the number of fronts (1, 2, and 20 fronts). The objective of the present paper is (i) to discuss the performance of this model for the Guelph Loam in terms of total head profiles and bottom flux for large amplitude of entry pressure; and (ii) to analyze the unsaturated flow dynamics, by investigating in particular the temporal behavior of the zero flux plane position ( $Z_0(t)$ ).

In the discussion of performance, the Multi-Front flow solutions are compared to a refined solution of the Richards PDE (Partial Differential Equation) using the implicit finite volume code BIGFLOW, in terms of bottom flux evolution and total head profiles. Furthermore, the Multi-Front model is also used to compute and analyze the zero-flux plane positions ( $Z_0(t)$ ). The present numerical and analytical work was motivated by a tide machine experiment developed previously at the Institute of Fluid Mechanics of Toulouse, the results of which were partially described experimentally in an article on model coupling by [11].

## 2 The multi-front model

### 2.1 General presentation of the Multi-Front model

In this chapter, we consider a partially saturated 1D porous column under "dynamic" conditions (vertical oscillatory flow). The dynamic effect is simulated by an oscillatory "entry pressure head" or "driving head" imposed at the bottom face of the column. It can be expressed as :

$$h(z = 0, t) = h_0(t) = \bar{h}_o + A_0 \sin(\omega_0 t) \quad (6.1)$$

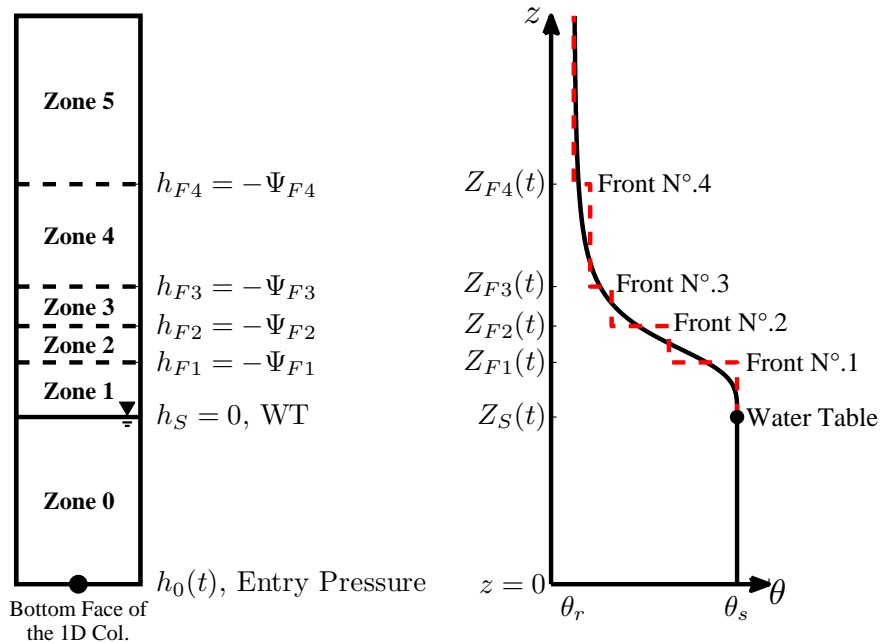
where :  $\bar{h}_o$  is the positive time-averaged entry pressure head, chosen to coincide with the initial hydrostatic level in the column ;  $A_0$  is the amplitude of the entry pressure ;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  is the angular frequency, and  $T$  is the period of the imposed entry pressure.

The Multi-Front model is a generalization of the inverse Green-Ampt model with 1D oscillatory flow in partially saturated/unsaturated porous media, taking into account unsaturated capillary effects on the oscillation process. The unsaturated profiles,  $(\theta(h), K(h))$ , are approximated by  $N$  fronts as shown for example in Fig.6.1 ( $N = 4$ ). With this parametrization of the Multi-Front model, we expect that the accuracy of the results will be improved as the transition zone is divided (approximated) by a larger number of "fronts" over the height of the column. As a consequence, the profiles  $K(z)$  and  $\theta(z)$  will also be more refined.

The multi-front approximation divides the column into  $N + 2$  regions :

- **Zone 0** : this is the totally saturated zone extending from the bottom of the column ( $z = 0$ ) to the moving water table ( $z = Z_s(t)$ ); parameters :  $K_0 = K_s$ ,  $\theta_0 = \theta_s$
- **Zones 1 to N** : these zones are comprised between the moving water table ( $z = Z_s(t)$ ) and the last ( $N^{th}$ ) moving front ( $z = Z_{F_N}(t)$ ). They are the N transition zones from the totally saturated zone to the totally dry one. The parameters of each zone (number  $j$ ) are  $K_j \leq K_s$  and  $\theta_j \leq \theta_s$ .
- **Zones N+1** : this is the totally dry region ; it is a semi-infinite dry zone above the  $N^{th}$  moving front ( $z = Z_{F_N}(t)$ ); the flux in this zone is null, and the parameters are :  $K_{N+1} = 0$ ,  $\theta_{N+1} = \theta_r$ .

where :  $K_s$  is the saturated hydraulic conductivity,  $\theta_r$  is the residual water content and  $\theta_s$  is the saturated water content.

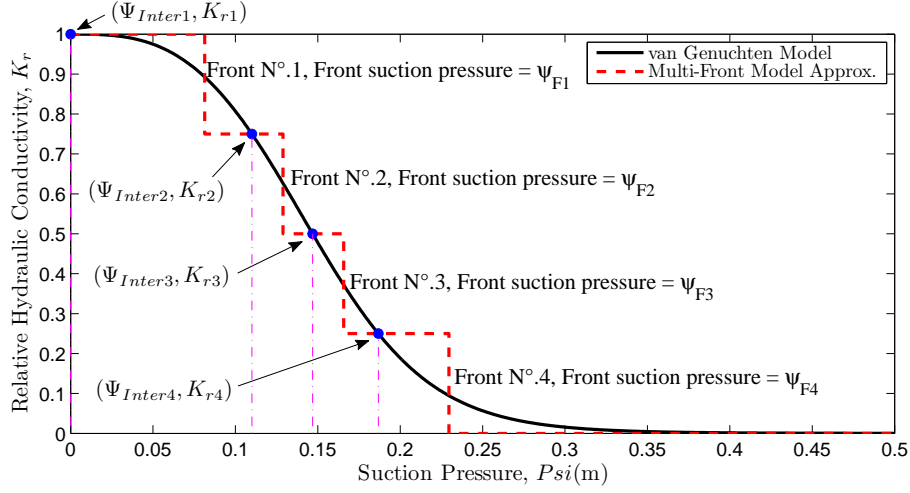


**FIGURE 6.1:** Schematic diagram of the Multi-Front model approximation with four fronts . On the left : 1D porous column shows the water table ( $Z_s(t)$ ) and the four successive fronts at elevations  $Z_{F1}(t)$ ,  $Z_{F2}(t)$ ,  $Z_{F3}(t)$  and  $Z_{F4}(t)$  where the suction heads are  $0, \psi_{F1}$ ,  $\psi_{F2}$ ,  $\psi_{F3}$  and  $\psi_{F4}$  respectively. On the right : the instantaneous water content profile (solid line) with multi-front model approximation (dashed line) [14].



## 2.2 Multi-Front model parameters

The performance of the proposed models depends largely on the suitable estimation of the model parameters. These parameters are the constant suction head ( $\psi_F$ ) at each front, the hydraulic conductivity ( $K$ ) and the water content ( $\theta$ ) between the successive fronts.



**FIGURE 6.2:** Relative hydraulic conductivity curve with the multi-front model approximation. [14] .

For fronts, the estimation of the model parameters can be summarized as follows (see Fig. 6.2) :

- First, we choose  $K_1, K_2, \dots, K_N$  values with constant step  $\Delta K$ . This is equivalent to discretized the relative hydraulic conductivity curve  $K_R(\psi)$  by  $N$  intermediate suction values denoted  $\psi_{INTER(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) with  $\psi_{INTER(1)} = 0$
- Calculate the relative hydraulic conductivities  $K_r$  at the intermediate suctions  $[K_{R(1)} = K_R(\psi_{INTER(1)}), \dots, K_{R(N)} = K_R(\psi_{INTER(N)})]$ .
- Calculate the suction head at each front  $[\psi_{F_1}, \dots, \psi_{F_N}]$  by keeping the area under the  $K_R(\psi)$  curve equals the area under the model approximation. This step is repeated between each successive intermediate suction values. Thus, to obtain the suction front  $\psi_{F_i}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ), we have :

$$\psi_{F(i)} = \psi_{INTER(i)} + \frac{[(\psi_{INTER(i+1)} - \psi_{INTER(i)})K_{R(i+1)}]}{K_{R(i)} - K_{R(i+1)}} \int_{\psi_{INTER(i)}}^{\psi_{INTER(i+1)}} K_R(\psi) d\psi \quad (6.2)$$

- Calculate the suction  $\psi_{F_N}$  for the last front :

$$\psi_{F(N)} = \psi_{INTER(N)} + \frac{\int_{\psi_{INTER(N)}}^{\infty} K_R(\psi) d\psi}{K_{R(N)}} \quad (6.3)$$

Note that the value of the hydraulic conductivity and the water content are :

- $K_s$  and  $\theta_s$  between the water table [ $z = Z_s(t)$ ] and the first front [ $z = Z_{F(1)}(t)$ ]
- $K(\psi_{INTER(i)})$  and  $\theta(\psi_{INTER(i)})$  between front number ( $i$ ) and front number ( $i - 1$ ) with ( $i = 2, 3, \dots, N$ ).

### 2.3 Applying Darcy's law and mass conservation

In this part, we develop the governing equations under these assumptions, using mass conservation principles and Darcy's flux-gradient law. Recall that axis "z" is oriented upwards, and that  $g = -1$ , in our present application with tidal forcing at bottom.

- **Zone 0** : the flux  $q_0(t)$  in the saturated zone is constant in space, and is given by :

$$q_0(t) = K_s \left( \frac{h_0(t)}{Z_s(t)} + g \right) \quad (6.4)$$

- **Zones 1** : the flux  $q_1(t)$  in the quasi-saturated transition zone is also constant in space, and is given by :

$$q_1(t) = K_s \left( \frac{\psi_F(t)}{Z_F(t) - Z_s(t)} + g \right) \quad (6.5)$$

where  $\psi_F = -h_F$  is the constant suction head at the sharp wetting front.

- **Remaining zone** ( $2 \leq i \leq N$ ) : the flux is given by :

$$q_i(t) = K_s \left( \frac{\psi_{F_i}(t) - \psi_{F_{i-1}}(t)}{Z_{F_i}(t) - Z_{F_{i-1}}(t)} + g \right) \quad (6.6)$$

- **Top zone** : there is no flux in this zone ( $q_{N+1}(t) = 0$ )

The mass conservation equation traversing the moving water table ( $z = Z_s(t)$ ) is as follows :

$$q_0(t) - q_1(t) = (\theta_s - \theta_1) \frac{dZ_s}{dt} \quad (6.7)$$

The mass conservation equation traversing the  $i$ -moving front ( $1 \leq i \leq N - 1$ ) is as follows :

$$q_i(t) - q_{i+1}(t) = (\theta_i - \theta_{i+1}) \frac{dZ_{F_i}}{dt} \quad (6.8)$$

The mass conservation equation traversing the last ( $N^{th}$ ) moving front is as follows :

$$q_N(t) - q_{N+1}(t) = (\theta_N - \theta_r) \frac{dZ_{FN}}{dt} \quad (6.9)$$

The system constituted by equations 6.7, 6.8, and 6.9, together with the Multi-Front parameters defined in the last section, is solved using the non-linear ODE solver "ode23t" of Matlab (ODE : Ordinary Differential Equation).

### 3 Performance of the Multi-Front model

In this section, we analyze the performance of the Multi-Front model in terms of the temporal evolutions of two variables : the bottom flux  $q_0(t)$  and the total head profiles  $H(z,t)$ . The variables computed with the "semi-analytical" Multi-Front model were plotted and compared to the corresponding results from the fixed grid Finite Volume code BIGFLOW described earlier (See. chapter 3).

#### 3.1 Input parameters

We have simulated a tidal effect in a vertical column using the BIGFLOW code. The unsaturated hydrodynamic properties of the soils are described by the model VGM (See. Equations 2.9 and 2.14). In this study we choose the Guelph Loam to evaluate the performance of the Multi-Fronts model, the soil hydrodynamic parameters are summarized in Table 6.1.

**Tableau 6.1:** Soil hydraulic properties used in the flow simulations.

Parameters	$K_s$ ( $m/s$ )	$\theta_s$ ( $m^3/m^3$ )	$\theta_r$ ( $m^3/m^3$ )	$\alpha$ ( $m^{-1}$ )	$n$
Guelph Loam	$3.66E - 6$	0.52	0.218	1.15	2.03

It should be noted that the Multi-Front solutions are computed in a semi-infinite vertical domain, whereas the finite volume solution requires a finite column length with either dry suction or zero flux condition at the top.

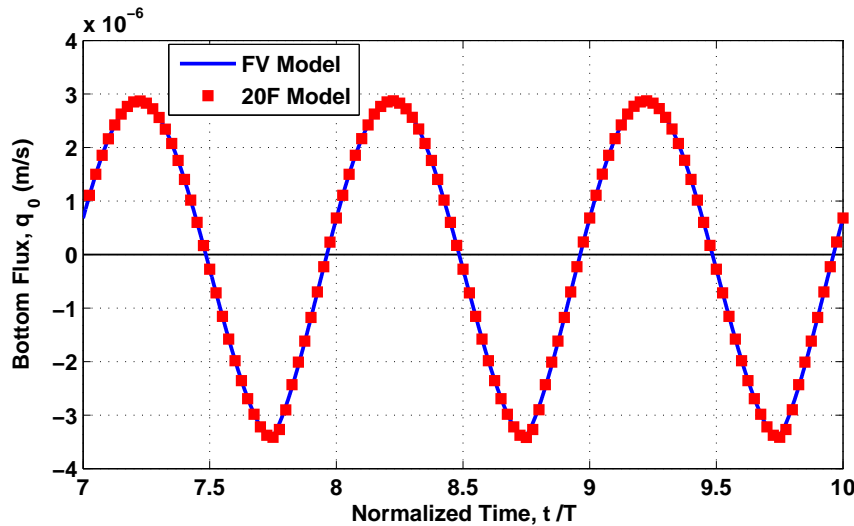
Here the chosen boundary condition was zero flux at the top of the column (preliminary tests were performed with the Richards/Bigflow solver to ensure that the results were not sensitive to column height, i.e., that the numerical column was long enough to emulate the case of a semi-finite column).

The bottom boundary was held at an oscillatory "entry pressure head" of the form is :  $h(t) = \bar{h}_0 - z) + A_0 \sin(\omega_0 t)$  with the following parameters :

$\bar{h}_0 = 0.5m$ ,  $A_0 = 0.5m$ , a period  $T$  of a 10 min (600 sec). The initial condition is a vertically hydrostatic, linear pressure head ( $h = \bar{h}_0 - z$ ).

### 3.2 Bottom flux evolution $q_0(t)$

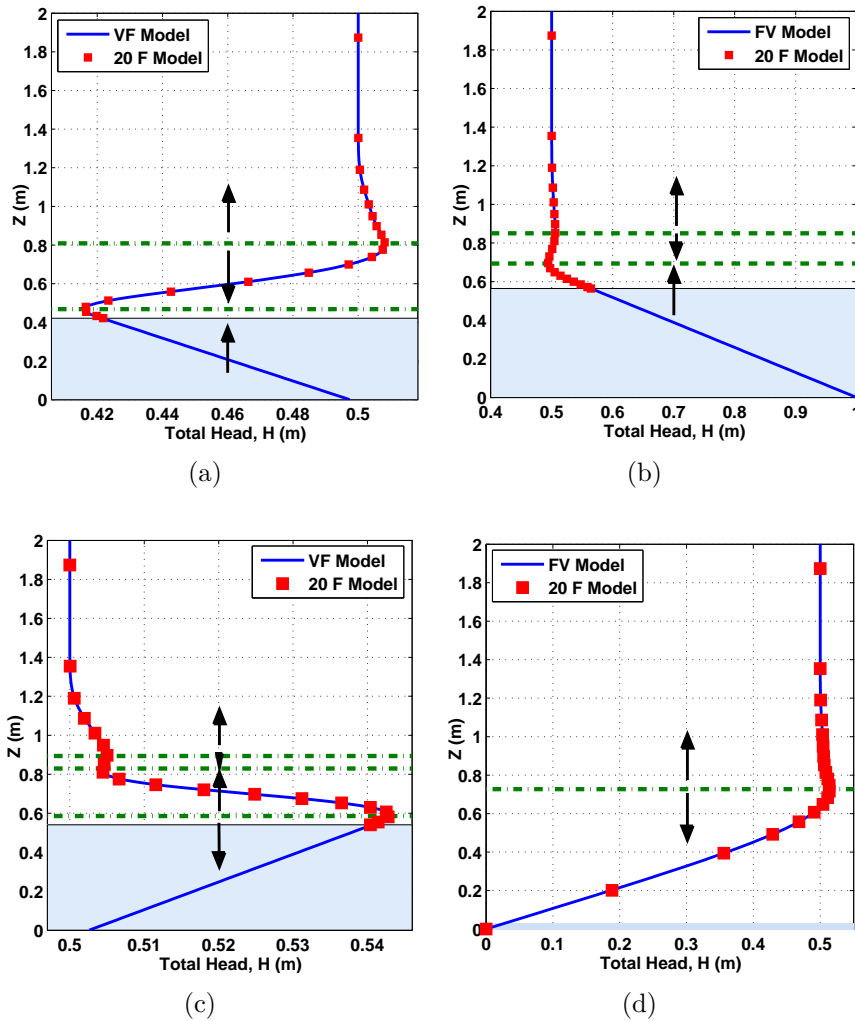
The bottom flux corresponds to the flux in or out of the bottom boundary, where the oscillatory pressure  $h_0(t)$  is imposed. Fig.6.3 shows the temporal evolution of the bottom fluxes as obtained from the Multi-Front and Finite Volume models. We note that the fit between the numerical and Multi-Front solutions is excellent with  $N = 20$  fronts for the Guelph Loam soil. The solution for  $N = 4$  fronts (*not shown here*) was less satisfactory for the same soil, but we have also obtained solutions for coarser soils, with satisfactory results for only 4 fronts. It is interesting to note that the bottom flux  $q_0(t)$  follows a non-harmonic evolution, with sharper minima and smoother maxima compared to the sinusoidal pressure imposed at bottom (this is due to the nonlinearity of unsaturated flow).



**FIGURE 6.3:** Tidal oscillations in the Guelph Loam : Multi-Front model *vs.* Richards. Evolution of the bottom flux . Solid line : quasi-exact output signals obtained from a refined numerical solution of Richards equation (200nodes); symbols : semi-analytical solution of Multi-Front model ( $N = 20$  fronts were used). The parameters of the entry bottom pressure are  $A_o = 0.5m$ ,  $\bar{h}_o = 0.5m$  and  $T = 600s$ .

### 3.3 Total Head Profiles $H(z,t)$

Fig.6.4 shows total head profiles  $H(z,t)$  at specific quarter period times ( $nT/4$ ), covering a full period  $T$ . Total head  $H$  is defined as pressure head plus elevation :  $H(z,t) = h(z,t) + z$ .



**FIGURE 6.4:** Tidal oscillations in the Guelph Loam : Multi-Front model *vs.* Richards.Total Head profiles  $H(z)$  at 4 different times separated by a quarter period ( $\frac{T}{4}$ ). Bold line : numerical solution (200 nodes); symbols : semi-analytical solution of Multi-Front model (20 fronts). Black arrows show the direction of flow in each zone; Horizontal dashed lines represent the planes of zero flux; the blue box represents the water table. The parameters of the entry bottom pressure are  $A_o = 0.5m$ ,  $\bar{h}_o = 0.5m$  and  $T = 600s$ .

The figure compares the Finite Volume profiles with the Multi-Front profiles for  $N = 20$  fronts : the agreement is excellent. The total head profiles indicate the complex behavior of the flow.

The dashed lines represent the positions where  $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ , which correspond to zero flux planes (see Fig.6.5). The arrows indicate the direction of flow in each zone.

Looking in particular at the head profile at time  $t = T$  (Fig.6.4(a)), it is observed that (from bottom to top) :  $\frac{\partial H}{\partial z} < 0$  in Zone 1 ( $0.00m < z < 0.45m$ ),  $\frac{\partial H}{\partial z} > 0$  in Zone 2 ( $0.45m < z < 0.80m$ ), and  $\frac{\partial H}{\partial z} < 0$  in Zone 3 ( $0.80m < z < 2.00m$ ). This implies, by Darcy's law, that the flow is ascending in Zone 1, descending in Zone 2, and ascending again in Zone 3. Note that, in Zone 1, the water table level is going down even though the water flux is going up.

## 4 Unsaturated flow dynamics through zero-flux planes

### 4.1 Definition and theoretical relations for zero flux plane

#### $Z_0(t)$

The generalized form of the Darcy-Buckingham equation for unsaturated porous medium can be expressed as follows :

$$q = -K(\theta(h)) \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) = -K(\theta(h)) \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma \right) \quad (6.10)$$

where :  $q$  is the specific discharge ( $m/s$ );  $H$  is the total hydraulic head ( $m$ );  $h$  is the pressure head ( $m$ ) and  $\gamma$  is the normalized gravitational vector;  $\gamma = \frac{-gz}{\|g\|}$ , it is dimensionless and equal to 1 if  $z \uparrow$ . The zero flux plane position,  $Z_0(t)$ , is defined as follows :

$$z = Z_0(t) \text{ such that } q(Z_0(t),t) = 0 \quad (6.11)$$

The moving plane of zero flux is described by zero iso-values of  $q(z,t)$ . Writing the total differential of  $q(z,t)$  where  $z = Z_0(t)$ , we obtain the following equation :

$$\frac{dZ_0}{dt} = - \frac{\left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)}{\left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)} \quad (6.12)$$

Equation.6.13 is purely kinematic describing, in differential form, the evolution of zero flux plane. Considering the mass conservation in unsaturated media ( $\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial z}$ ), we obtain the theoretical equation of the evolution of zero flux plane for any 1D transient problem involving unsaturated or partially unsaturated flow :

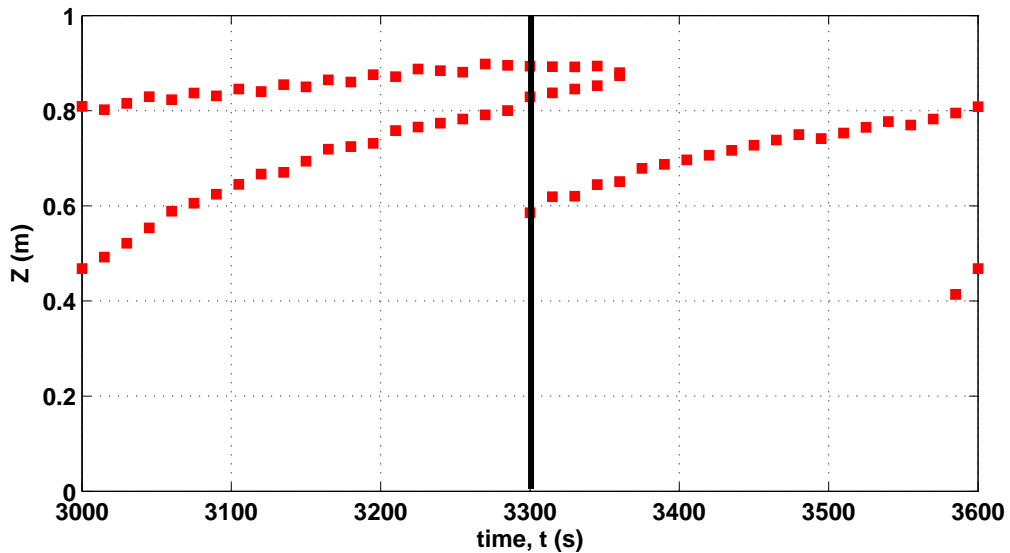
$$\frac{dZ_0}{dt} = - \frac{\left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)}{\left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)} \quad (6.13)$$

This theoretical relation indicates, in particular, the following constraints on the behavior of the zero flux plane.

## 4.2 Results on zero flux plane dynamics ( $Z_0(t)$ )

Fig.6.5 shows the evolution of the position of the zero flux plane ( $Z_0(t)$ ) for  $T = 600s$ . It was obtained from the Multi-Front model with  $N = 300$  fronts, based on the definition given in Equation.6.11. Note that we used here 300 fronts instead of 20 fronts. This higher number of fronts is required in order to properly resolve the total head gradients ( $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ ) to obtain the position ( $Z_0(t)$ ).

It can be seen that the zero flux plane dynamics exhibit complex behavior. The graph of ( $Z_0(t)$ ) has several bifurcations and is multi-valued (for example there are three zero-flux planes at time  $t = 3300s$ ). Thus, the number of zero-flux planes, and the number of ascending or descending flux regions, evolves in time during oscillations. These results confirm the previously plotted total head profiles  $H(z,t)$  shown in Fig.6.4.



**FIGURE 6.5:** Tidal oscillations in the Guelph Loam : position of zero flux planes obtained using the Multi-Front model with  $M=300$  fronts. The parameters of the entry bottom pressure are  $A_o = 0.5m$ ,  $\bar{h}_o = 0.5m$  and  $T = 600s$ .

---

## 5 Conclusions

In summary, a multi-front model which generalizes the Green-Ampt piston flow approach was developed and tested for vertical oscillatory flows. The set-up is a partially saturated vertical column, including a saturated zone with a water table at bottom, tidally forced via a sinusoidal pressure signal imposed at the bottom of the column.

A full agreement was achieved in terms of bottom flux and head profiles between the Multi-Front model and the solution obtained with a Finite Volume solver based on the Richards unsaturated flow PDE. The Multi-Front model is easier to solve than the Richards equation. It requires only a classical nonlinear ODE solver, such as the function "ode23t" available in Matlab (ODE : Ordinary Differential Equation system). Overall, our investigations indicate that the excellent performance of the Multi-Front model can be achieved regardless of the type of saturated/unsaturated hydraulic characteristics of the porous media. For this reason the Multi-Front model could be used as a substitute for the numerical solution of the Richards equation in the case of 1D flow simulations subjected to highly dynamic boundary conditions.

Physically, analyses show that the oscillatory flow, forced by a sinusoidal bottom pressure  $h_0(t)$ , behaves non-harmonically in space and time, as indicated from the bottom flux  $q_0(t)$ , the total head profiles  $H(z,t)$ , and the zero-flux plane positions  $Z_0(t)$ . In particular, the zero flux plane dynamics exhibit complex behavior, with bifurcations to multi-valued curves ( $Z_0(t)$ ), implying that the number of zero-flux planes and the number of ascending/descending flux regions, evolve in time during oscillations.

Finally, other extensions to be considered for future work for the Multi-Front or multi front approach may involve transient problems with non periodic forcing (time signals, wave spectra), and also, multidimensional geometries, including : soil surface slopes, bedrock slopes, slanted river banks, and internal heterogeneities (stratified soils, composite dykes, beach drainage systems, etc).





Désaturation au voisinage  
d'une cavité souterraine :  
(Méthode numérique  
d'immersion)

7

## Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	129
2	Transmission d'une condition limite de succion . . . . .	130
	2.1 Formulation du problème . . . . .	130
	2.2 Difficultés et remèdes . . . . .	132
	2.3 Résultats et discussion . . . . .	133
3	Application dessèchement tunnel roche argileuse . . . . .	134
	3.1 Expérimentations numériques . . . . .	134
	3.1.1 Géométrie du domaine de calcul . . . . .	134
	3.1.2 Propriétés des deux milieux . . . . .	136
	3.1.3 Condition initiale . . . . .	137
	3.1.4 Conditions aux limites . . . . .	137
	3.2 Résultats des simulations . . . . .	139
	3.2.1 Bilan de masse . . . . .	139
	3.2.2 Flux sortant par la face B3 . . . . .	141
	3.2.3 Champs de pression . . . . .	142
4	Essai complémentaire de dessèchement en galerie cy- lindrique, sous succion $\psi = 9721 \text{ m}$ . . . . .	145
	4.1 Présentation du test complémentaire . . . . .	145
	4.2 Résultats et analyse . . . . .	146
	4.2.1 Flux à travers la frontière B3 . . . . .	146
	4.2.2 Profils verticaux de pression . . . . .	146
5	Conclusions . . . . .	148

---

## 1 Introduction

L'excavation souterraine au sein d'un milieu argileux peut engendrer des modifications du champ de contraintes et des pressions interstitielles. Les perturbations engendrées par l'excavation peuvent avoir un impact sur les caractéristiques de la roche jusqu'à faire apparaître une zone endommagée ("EDZ" Excavation Damaged Zone) qui est susceptible de dégrader les propriétés hydrodynamiques de la roche. De même, la ventilation de la zone excavée engendre des sollicitations hydriques qui aident à faire évoluer l'extension et l'intensité de zones perturbées en fonction du temps et qui fait apparaître des fissurations (fissures/fractures) qui pourraient constituer des drains concourant à la migration des fluides (selon qu'elles soient plus ou moins sèches).

Nous présentons dans ce chapitre, une étude numérique des effets de désaturation d'un massif argileux ("argilite" de référence) autour d'une galerie cylindrique excavée à l'intérieur du domaine de calcul. Cette étude porte alors sur une méthode d'immersion c'est-à-dire l'implémentation de la méthode d'internalisation de la cavité cylindrique qui est parfaitement excavée. Pour ce faire, nous utilisons donc un modèle de désaturation simplifié basé sur les équations de Richards présentées dans le premier chapitre (voir section 5.3). Nous introduisons dans ce modèle une "argilite" aux propriétés homogènes sans y représenter explicitement les fissures/fractures et nous supposons que la galerie est vide et internalisée grâce au concept de milieux macroporeux (voir le chapitre 2).

Pour résoudre numériquement ce problème, certaines questions doivent être résolues, en particulier, l'effet du choix des propriétés fictives du domaine excavé (voir section 3.1.2), et l'effet du schéma de pondération des conductivités non saturées  $K(h, x)$  du problème discret au voisinage des parois (conductivités de parois "inter-faciales" ou "mid-nodales"). Nous utilisons dans cette étude, un schéma de pondération arithmétique des conductivités en proche paroi. Ce choix est pris après avoir fait plusieurs tests numériques en utilisant différents schémas de pondération (Voir Annexe B).

De plus, une autre particularité de notre problème est que nous voulons simuler le dessèchement par une condition de succion que nous souhaitons imposer à la paroi (ce qui revient à supposer une humidité relative de l'air de la galerie et à utiliser la loi de Kelvin). L'essentiel pour cette étude est d'assurer la bonne transmission de cette condition depuis les faces dites d'entrée/sortie vers la paroi cylindrique de la galerie. Pour arriver à ce résultat, nous avons procédé à un certain nombre de réglages et de tests de validation que nous détaillons dans cette thèse, et qui portent plus généralement sur la méthode d'immersion 3D pour divers types de

problèmes d'écoulements hydrogéologiques parfois dans d'autres contextes comme l'évaporation naturelle alimentée par une nappe et le pompage localisé dans un aquifère en régime transitoire (voir chapitre 3). De même, Un autre test sera présenté dans ce chapitre (section 2), désaturation d'une colonne 1D hétérogène (micro/macro) et donc assurer la transmission d'une condition au limite de succion en présence de plusieurs discontinuités (spatiale, temporelle ...). La suite du chapitre présente les résultats de modélisation permettant de quantifier l'avancée du front de dessèchement et du phénomène de décompression de l'eau de la zone saturée. Deux cas sont traités : avec ou sans une couche annulaire interne d'argile endommagée représentant de façon simplifiée la zone endommagée ("EDZ").

## 2 Transmission d'une condition limite de succion

Dans cette partie, nous allons étudier le phénomène de transmission d'une condition limite dans un macroporeux monté sur un milieu microporeux. c'est-à-dire étudier l'évolution de la pression dans un domaine en extrayant de l'eau (succion imposée en haut du domaine simulé). En fait, nous allons suivre le comportement des deux milieux en présence de deux discontinuités l'une en termes de propriétés hydrodynamiques et l'autre expliquée par la grande différence entre la valeur de condition initiale et les valeurs de conditions aux limites imposées.

### 2.1 Formulation du problème

Nous considérons une colonne 1D hétérogène contenant deux milieux l'un macroporeux et l'autre microporeux correspond à une couche argileuse (voir la figure.7.1).

Le domaine de calcul est une section verticale de taille  $L_j = (1\ m, 2\ m, 20\ m)$  avec une taille de maille dans les directions  $OX_1$ ,  $OX_2$  et  $OX_3$  égale à  $(0.5\ m, 1\ m, 0.1\ m)$ . La longueur de microporeux est égale à  $4.6\ m$ , la gravité est nulle et le domaine est initialement saturé en appliquant une pression  $h = 200\ m$  comme condition initiale. Nous supposons que toutes les faces sont imperméables ( $q = 0\ m/s$ ) sauf en haut nous imposons une succion  $\psi = 300\ m$ .

Les propriétés saturées et non saturées des deux milieux sont présentées dans le tableau 7.3 (en utilisant le modèle VGM) :

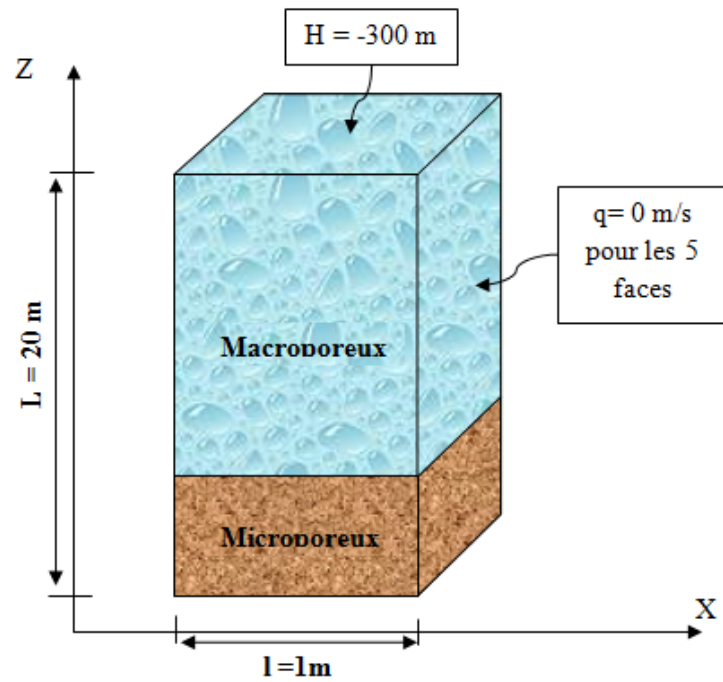


FIGURE 7.1: Représentation schématique d'une colonne 1D hétérogène : Transmission d'une condition de suction .

Tableau 7.1: Propriétés des deux milieux (micro-macro) .

	$K_s$ (m/s)	$\theta_s$ ( $m^3/m^3$ )	$\theta_d$ ( $m^3/m^3$ )	Modèle VGM	
				$n$	$\alpha(m^{-1})$
Macroporeux	$1E - 7$	1	0.05	10	3
Microporeux	$1E - 13$	0.15	0.05	0.01	1.5

## 2.2 Difficultés et remèdes

Plusieurs simulations ont été faites pour résoudre le problème de transmission avec la géométrie susmentionnée mais nous avons rencontré plusieurs problèmes numériques (problème de convergence). Au départ, nous avons pensé à modifier les propriétés hydrodynamiques des deux milieux macro et micro poreux vu l'énorme contraste observé. Nous avons, alors, changé les perméabilités des deux milieux en considérant les mêmes valeurs que celles utilisées dans les tests de validation (voir Section 4). Ainsi, le contraste de perméabilité est passé de l'ordre de  $10^6$  à  $10^1$ , mais le problème de divergence persiste toujours. D'autres simulations ont été faites avec d'autres milieux poreux mais toujours sans résultats exploitables.

Cependant nous avons pensé à modifier les données temporelles en faisant tourner le modèle avec des pas de temps constants et très petits (de l'ordre de  $10^{-6}s$ ). Avec ce changement, la solution n'a pas divergé mais cette option est très couteuse en termes de temps de calcul surtout dans le cas de dessèchement du tunnel et qui nécessite un temps de calcul de l'ordre des siècles et donc un très grand pas de temps. Nous décidons alors d'imposer une condition aux limites  $h_{imposée}$  qui dépend du temps pour pouvoir éliminer la discontinuité entre la condition initiale  $h_{in}$  et la condition limite  $h_0 = -\psi_0$ . Cette nouvelle condition permet une passation graduelle et non brusque de la succion imposée aux parois extérieures. Nous choisissons pour ce faire la fonction Rampe (Courbe en S) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$h_{imposée} = (h_{in} - h_0) \left[ 1 + \frac{(a-1)t^a}{a\tau^a} \right]^{\frac{a}{1-a}} - h_0 \quad (7.1)$$

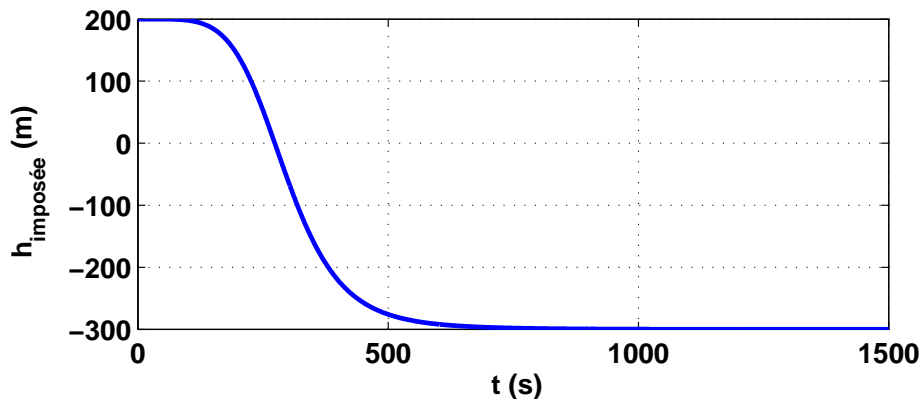
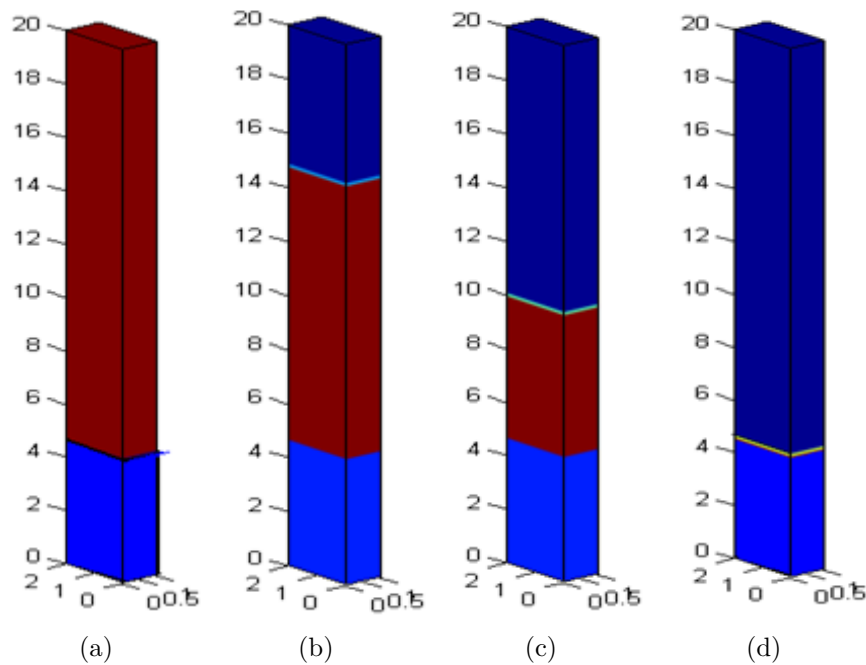


FIGURE 7.2: La courbe en S utilisée dans les simulations avec  $a = 5$  et  $\tau = 300s$ .

La figure 7.2 montre que la valeur de la pression imposée passe de  $200m$  à  $-300m$  au bout de 1000 secondes. Ce passage est instantané en le comparant au temps final de calcul (100 siècles).

### 2.3 Résultats et discussion

D'après l'échelle de la teneur en eau ci-dessus, nous déduisons que la condition limite de dessèchement  $\psi = 300m$  imposée au toit de la colonne, se transmet progressivement à travers le milieu macroporeux vers l'interface micro/macro (voir la teneur en eau  $\theta = 0.01 m^3/m^3$  correspondant à la succion  $\psi = 300m$ ).



**FIGURE 7.3:** Variation des teneurs en eau en fonction du temps. (a) :  $T = 0s$ , (b) :  $T = 5000s$ , (c) :  $T = 12000s$ , (d) :  $T = 36000s$ . ( Rouge :  $\theta = 1 m^3/m^3$ , bleu foncé :  $\theta = 0.01 m^3/m^3$ , bleu clair :  $\theta = 0.15 m^3/m^3$ ).

Nous constatons aussi qu'au bout d'un temps  $t = 10 h$  tout le macroporeux est désaturé. Cette constatation est confirmée par la figure 7.4 qui présente, sous forme de profils de succion, toutes les phases du processus, y compris la phase finale de désaturation du microporeux. Nous pouvons distinguer trois phases, la première est la phase de la transmission, la deuxième phase est de décompression ( $0 < h < h_{in}$ ) et la troisième phase est de dessèchement ( $h < 0$ ). Nous pouvons donc conclure qu'en remplaçant la valeur discrète d'une condition du succion par une fonction rampe dépendante du temps, la transmission est bien assurée.



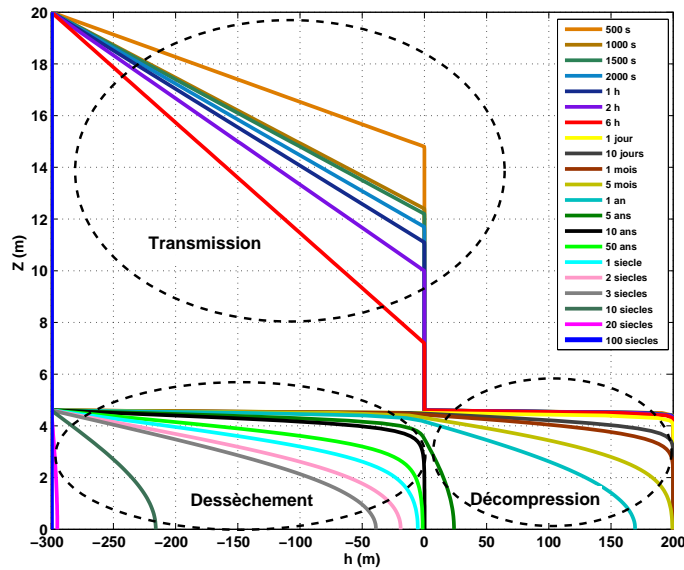


FIGURE 7.4: Résultat BIGFLOW-MATLAB : Profils de pression  $h(z,t)$  .

### 3 Application dessèchement tunnel roche argileuse

Nous présentons maintenant les résultats des simulations de dessèchement obtenus dans le cas d'une galerie de section circulaire, en exploitant les conclusions des tests précédents, notamment : l'application d'une condition de succion progressive de type "RAMPE", et le choix d'un mode de pondération arithmétique des conductivités interfaciales (voir annexe C) pour une bonne transmission de la condition limite de succion à travers l'objet macroporeux (galerie "tunnel"). Nous présentons en détail deux tests, tous les deux en galerie cylindrique, mais différents par la structure de la roche argileuse :

- Test A : la roche argileuse est homogène intacte
- Test B : la roche est composée de 2 couches annulaires concentriques autour de la galerie (endommagée à l'intérieur "EDZ", intacte à l'extérieur).

#### 3.1 Expérimentations numériques

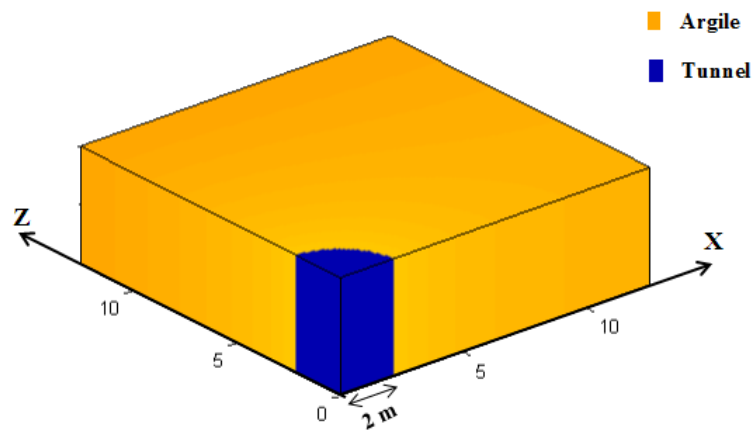
##### 3.1.1 Géométrie du domaine de calcul

Le domaine de calcul est un parallélépipède rectangle, dont la frontière numérique est constituée de 6 faces rectangulaires. Ce domaine est constitué d'une couche argileuse (homogène ou avec "EDZ") entourant un "tunnel" cylindrique de section circulaire. Le choix de la configuration du problème de dessèchement 3D est basé sur des données définies dans le cadre d'un ancien projet<sup>1</sup> "ANDRA/IMFT". Nous présentons brièvement

une description des plans de symétrie décrits :

- La distance horizontale inter-galeries est  $25\text{ m}$  dans la direction horizontale transverse à la galerie. La galerie est donc un élément d'un réseau périodique de galeries :  $\rightarrow$  deux plans de symétrie verticaux situés à  $12.5\text{ m}$  de part et d'autre de l'axe de la galerie horizontale.
- Le fait d'imposer une condition de suction sur les faces d'entrée et de sortie de la galerie, d'une façon symétrique :  $\rightarrow$  un plan de symétrie qui coupe verticalement l'axe du tunnel (plan de symétrie vertical transverse).
- les écoulements gravitaires restent négligeables par rapport aux autres phénomènes :  $\rightarrow$  Le plan horizontal central est un plan de symétrie.

En tenant compte de ces plans de symétrie, il suffit de considérer seulement un quart du tunnel dans les calculs numériques. Figure 7.5 résume schématiquement la configuration du problème de dessèchement 3D. Dans les deux cas étudiés plus bas, les dimensions du domaine sont présentées dans Tableau 7.2.



**FIGURE 7.5:** Représentation schématique d'un tunnel entouré par une couche argileuse.

1. Projet "ANDRA/IMFT" (Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs / Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) d'homogénéisation hydraulique, mécanique et hydromécanique couplée, pour une roche argileuse fracturée constituant l'EDZ annulaire autour d'une galerie, appliquée au stockage géologique de déchets radioactifs. Des résultats ont été obtenus sur l'homogénéisation hydraulique 3D d'une roche poreuse fracturée (Ababou et al. 2011[?])

Tableau 7.2: Domaine de géométrie (Dessèchement d'une couche argileuse).

Domaine de géométrie	Tableau complémentaire : définition des zones (1) et (2) de la face inférieure A2 et B2																									
	argile intacte	argile avec "EDZ"																								
<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>i</math></th> <th><math>LXi</math></th> <th><math>NXi</math></th> <th><math>DXi</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>12.5</td> <td>51</td> <td>0.25</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>12.5</td> <td>51</td> <td>0.25</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>3</td> <td>51</td> <td>0.25</td> </tr> </tbody> </table>	$i$	$LXi$	$NXi$	$DXi$	1	12.5	51	0.25	2	12.5	51	0.25	3	3	51	0.25	<table border="1"> <tbody> <tr> <td><math>Tunnel</math></td> <td><math>1 \leq i1 \leq 9</math> <math>1 \leq i2 \leq 9</math> <math>1 \leq i3 \leq 3</math></td> </tr> <tr> <td><math>Argile</math></td> <td><math>domaine \setminus tunnel</math></td> </tr> </tbody> </table>	$Tunnel$	$1 \leq i1 \leq 9$ $1 \leq i2 \leq 9$ $1 \leq i3 \leq 3$	$Argile$	$domaine \setminus tunnel$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td><math>Tunnel</math></td> <td><math>1 \leq i1 \leq 9</math> <math>1 \leq i2 \leq 9</math> <math>1 \leq i3 \leq 3</math></td> </tr> <tr> <td><math>Argile</math></td> <td><math>domaine \setminus tunnel</math></td> </tr> </tbody> </table>	$Tunnel$	$1 \leq i1 \leq 9$ $1 \leq i2 \leq 9$ $1 \leq i3 \leq 3$	$Argile$	$domaine \setminus tunnel$
$i$	$LXi$	$NXi$	$DXi$																							
1	12.5	51	0.25																							
2	12.5	51	0.25																							
3	3	51	0.25																							
$Tunnel$	$1 \leq i1 \leq 9$ $1 \leq i2 \leq 9$ $1 \leq i3 \leq 3$																									
$Argile$	$domaine \setminus tunnel$																									
$Tunnel$	$1 \leq i1 \leq 9$ $1 \leq i2 \leq 9$ $1 \leq i3 \leq 3$																									
$Argile$	$domaine \setminus tunnel$																									

### 3.1.2 Propriétés des deux milieux

Le choix des propriétés de l'argile est porté sur un modèle homogène isotrope de référence que nous appelons « Argilite "ANDRA" modifiée », c'est une modification du modèle opérationnel "ANDRA" pour l'argilite du Callovo-oxfordien (voir thèse de Boulin 2008 [19]).

La zone endommagée "EDZ" possède des propriétés différentes par rapport au massif sain initial. Nous choisissons une « EDZ » annulaire d'un mètre d'épaisseur, et de conductivité hydraulique saturée 100 fois plus grande que celle de l'argile intacte. Les propriétés capillaires de cette EDZ n'ont été modifiées qu'à la marge, en jouant sur une augmentation d'un facteur 10 de l'échelle de longueur capillaire  $\lambda = 1/\alpha$  (par contre l'exposant « n » reste inchangé).

Concernant les propriétés du milieu macroporeux fictif constituant la galerie cylindrique "vide", nous avons faits des choix en se basant sur les critères suivantes :

- La porosité du milieu macroporeux est égale à 100%.
- La conductivité hydraulique à saturation est très grande par rapport à celle de l'argilite ( $K_{s_{macro}} \gg K_{s_{argile}} > K_{s_{EDZ}}$ ).
- La courbe de conductivité hydraulique du macroporeux (cf. chapitre 2) est anisotrope, elle est égale à la conductivité hydraulique à sa-

turation  $K_s$  dans la direction de l'axe de la galerie pour assurer la transmission de la succion.

Tableau 7.3 résume les paramètres hydrodynamiques du milieu macroporeux fictif (TUNNEL) en comparaison avec ceux des deux milieux poreux (ARGILE et "EDZ").

**Tableau 7.3:** Propriétés hydrodynamiques (Dessèchement d'une couche argileuse).

	$K_s$ ( $m/s$ )	$\theta_s$ ( $m^3/m^3$ )	$\theta_d$ ( $m^3/m^3$ )	Modèle VGM	
				$\alpha$	$n$
Tunnel	$1E - 7$	1	0.05	10	3
Argilite	$1E - 13$	0.15	0.05	0.01	1.5
EDZ	$1E - 11$	0.15	0.05	0.1	1.5

### 3.1.3 Condition initiale

La pression interstitielle imposée initialement au centre de la galerie à la position  $(0, 0, 0)$  est égale à  $525m$ , ce qui correspond à la charge hydrostatique au niveau des galeries expérimentales du laboratoire souterrain de Bure<sup>1</sup>. Dans cette étude, nous avons négligé la gravité et donc la condition initiale en tout point du domaine de calcul est une pression constante  $h(x, y, z, 0) = 525m$ . Cette condition est appliquée aussi au tunnel et par conséquent les quelques premiers pas de temps de la simulation sont d'abord consacrés à le vider rapidement de son eau.

### 3.1.4 Conditions aux limites

#### Mécanisme de l'aération dans la galerie :

Dans le but de modéliser ce problème, nous devons choisir une pression interstitielle du milieu poreux, permettant de tenir compte explicitement de l'état de l'air plus au moins humide dans la galerie. Cet état de l'air peut être donc présenté à l'aide de la loi de Kelvin par une succion  $\psi$  liée à l'humidité relative de l'air  $H_R$ . Pour appliquer la loi de kelvin, nous devons supposer qu'il règne un équilibre thermodynamique entre la vapeur d'eau contenue dans l'air et l'eau liquide interstitielle et que les phases gazeuses se comportent comme des gaz parfaits (air sec et vapeur d'eau).

1. Le laboratoire souterrain situé à Bure (Meuse/Haute-Marne) est un outil de recherche de l'ANDRA, il est situé à 490 mètres de profondeur au cœur de la roche argileuse (argilite du Callovo-Oxfordien) qui est très stable depuis sa formation (il y a environ 150 millions d'années)

- La loi des gaz parfaits :

$$PV = \frac{m}{M}RT \longrightarrow P = \rho \frac{RT}{M} \quad (7.2)$$

avec  $V$  : Volume occupé par le gaz (en mètre cube),  $R$  : Constante universelle des gaz parfaits ( $R = 8.3143 \text{ Joules}/(\text{Mole.Kelvin})$ ),  $m$  : masse de gaz (Kg),  $M$  = Masse molaire du gaz (en Kg/Mole) et  $T$  : Température (en Kelvin).

- L'humidité relative de l'air HR :

$$H_R = \frac{P_V}{P_{Vsat}} \quad (7.3)$$

avec  $P_V$  : Pression de vapeur de l'air et  $P_{Vsat}$  : Pression de vapeur saturante de l'air. On a toujours  $P_{Vsat} \geq P_V \longrightarrow H_R \leq 1$ .

- La succion  $\psi[m]$  de l'eau liquide interstitielle (pores) est définie par :

$$\psi = -h = \frac{P_a - P_e}{\rho_e g} \quad (7.4)$$

avec  $P_a$  : Pression de l'air,  $P_e$  : Pression de l'eau,  $\rho_e = m/V$  : densité volumique de masse et  $g$  : gravité. La quantité  $(-\rho_e g \psi)$  doit en fait s'interpréter thermodynamiquement comme un potentiel d'énergie libre de Gibbs de l'eau interstitielle par mètre cube ( $\text{Joules}/\text{m}^3$ ). En milieu insaturé, cette énergie est négative, car l'eau est liée aux solides du milieu poreux : il faut donc dépenser une énergie mécanique ou théorique pour l'en libérer. (R.Ababou.2007)

En introduisant la notion de « succion caractéristique de Kelvin ( $\psi_{Kelvin}$ ) », et en se basant sur la loi de Kelvin la succion peut être écrite sous la forme suivante :

$$\psi = \psi_{Kelvin} \text{Ln}(H_R) \quad \text{avec} \quad \psi_{Kelvin} = \frac{RT}{gM_V} \quad (7.5)$$

En particulier, à  $T = 25C$ , nous obtenons donc  $\psi = 300m$  pour 97.88% d'humidité relative de l'air. Le tableau.7.4 présente les différentes conditions aux limites utilisées dans ces études.

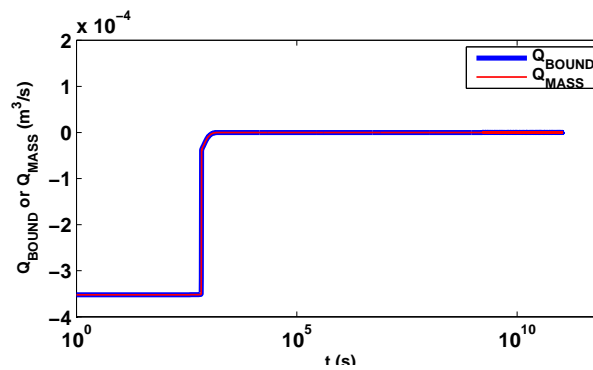
Tableau 7.4: Conditions aux limites .

	Faces « 1 » $\perp X1$	Faces « 2 » $\perp X2$	Faces « 3 » $\perp X3$
Faces « A » ( $X_j = 0$ )	Flux $\perp$ nul : $q1 = 0$ (plan de symétrie)	Flux $\perp$ nul : $q2 = 0$ (plan de symétrie)	Flux $\perp$ nul : $q3 = 0$ (plan de symétrie)
Faces « B » ( $X_j = L_j$ )	Flux $\perp$ nul : $q1 = 0$ (plan de symétrie)	$h = 525m$ (pression)	Zone(1) : $\psi = 300m$ Succion $\psi_{TUNNEL}$ Zone(2) : $q2 = 0m/s$ Condition s neutre

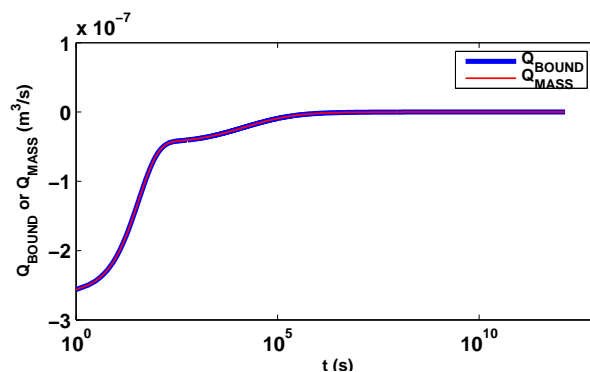
## 3.2 Résultats des simulations

Les simulations sont faites en deux étapes (temps court/temps longs), la première permet d'obtenir un état de pression tel que  $h = -\psi = -300m$  à la paroi et que le champ de pression dans l'argile soit compatible avec l'équation du Richards et les conditions aux limites<sup>2</sup> et pour laquelle nous avons pris un pas du temps  $\Delta t = 0.01s = cst$  pendant une demi-journée jusqu'à arriver à l'état désiré. La deuxième étape est en réalité la vraie simulation du problème physique partant d'une paroi à succion fixée  $\psi = 300m$  et un pas du temps variable. Les simulations sont suffisamment longues pour pouvoir analyser le comportement du dessèchement aux temps longs, et tester l'approche d'un régime permanent.

### 3.2.1 Bilan de masse



(a)



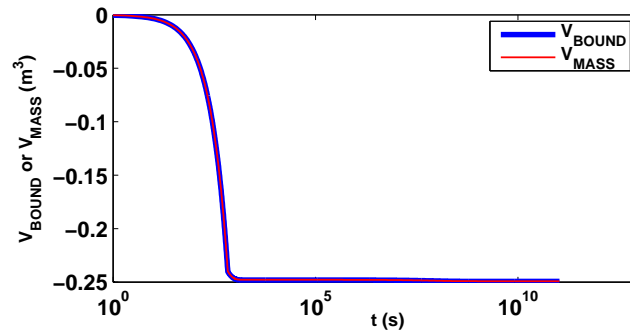
(b)

**FIGURE 7.6:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à une succion  $\psi = 300 m$  :  $Q_{mass}$  vs.  $Q_{bound}$ . (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ").

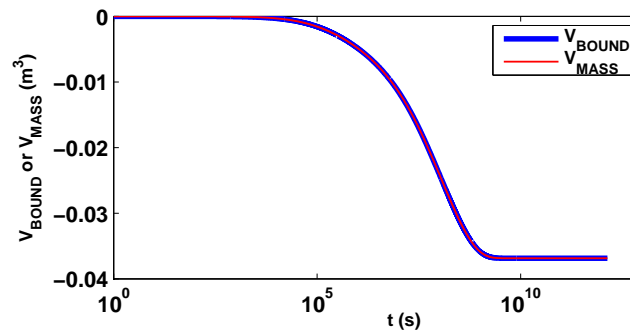
2. NB : Nous pouvons dire que cette étape est pratiquement une étape d'interpolation spatiale entre Parois du tunnel (à succion imposée) et Frontières extérieures (par exemple la face supérieure à pression positive).

Les figures suivantes montrent qu'il n'y a pas de problème de bilan de masse (ni de divergence) dans les simulations que ce soit pour le test A (argilite intacte) ou le test B (argilite + "EDZ"), et ceci grâce à l'utilisation de la mise en succion progressive de la face d'entrée du tunnel par une "rampe" temporelle (avec  $\tau = 1000s$  et  $a = 5$ ) et la bonne transmission de la succion vers la paroi du tunnel (pondération arithmétique des conductivités interfaciales).

La bonne convergence est confirmée par le fait que la courbe du flux net  $Q_{bound}$  calculé aux frontières et la courbe du flux  $Q_{mass}$  calculé par bilan de masse sont confondues (cf. Figure.7.6) ainsi que la superposition de deux courbes du volume net  $V_{bound}$  calculé par les flux aux frontières et le volume  $V_{mass}$  calculé par bilan de masse (cf. Figure.7.7).



(a)



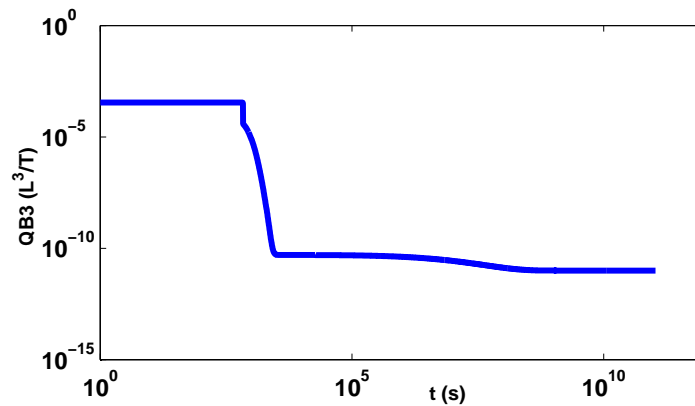
(b)

**FIGURE 7.7:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion  $\psi = 300 m$  :  $V_{mass}$  vs.  $V_{bound}$ . (a) Test A : Argilite intacte ; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ").

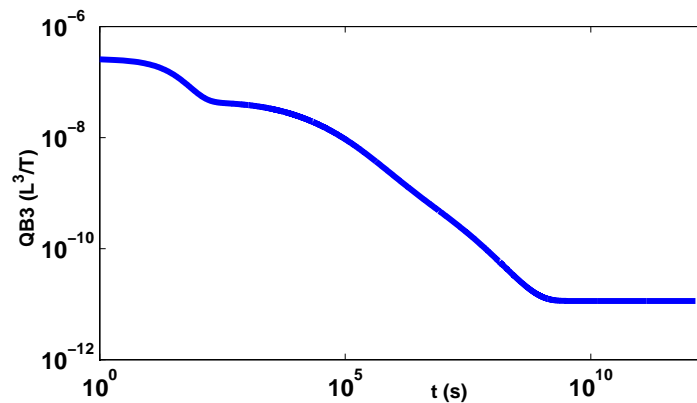
## 3.2.2 Flux sortant par la face B3

Notons d'abord que la face  $B3$  est la frontière du domaine de calcul sur laquelle nous avons imposé une succion ( $\psi = 300m$ ). Plus précisément, nous avons imposé une succion  $\psi$  à tous les nœuds frontières de la face  $B3$  appartenant au tunnel, et un flux nul sur tous les autres nœuds argile de cette même face  $B3$ .

D'après les figures 7.8(a) et 7.8(b), nous constatons que nous avons largement atteint un régime asymptotique d'écoulement permanent pour un temps  $T > 10E10 s = 10 \text{ siècles}$  pour le test  $A$  et un temps  $T > 10E10 s = 10 \text{ siècles}$  pour le test  $B$ .



(a)



(b)

**FIGURE 7.8:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à une succion  $\psi = 300 m$  : Variation du flux sorti de la frontière B3 en fonction du temps dans une échelle logarithmique. (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ").



Nous pouvons déduire le débit spécifique par mètre de tunnel, noté  $q_{Tunnel}[m^2/s]$  ou  $[m^3/s/m\grave{e}tre\ de\ tunnel]$  (Eq.7.6). Si nous dénotons  $L_{Tunnel}$  la longueur du tunnel dans la simulation, le débit spécifique du tunnel est donnée par :

$$q_{Tunnel} = \frac{Q_{Tunnel}}{L_{Tunnel}} \quad (7.6)$$

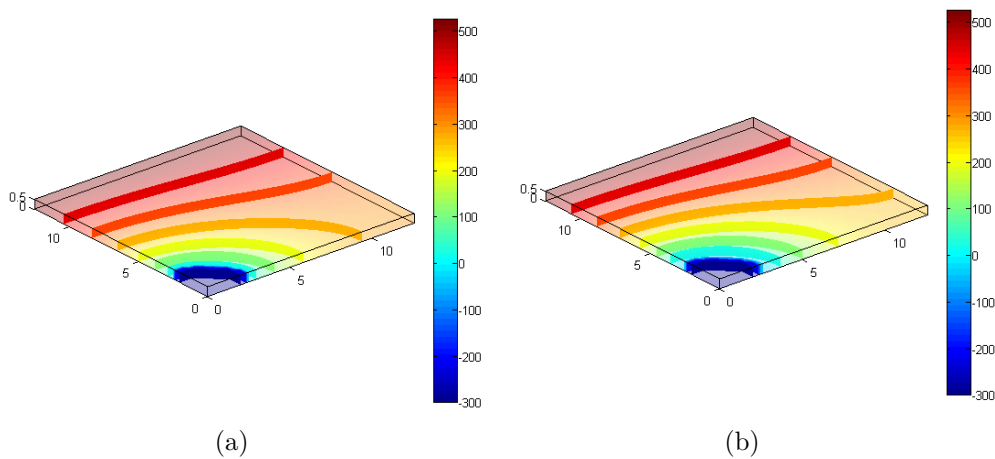
Le tunnel est une tranche mince qui comporte 3 nœuds mais seulement une maille interne bordée par deux demi-maillages externes que nous ne comptons pas dans les calculs de bilan de masse ( $L_{Tunnel} = \Delta y = 0.25m$ ).

**Tableau 7.5:** Débit numérique / Débit spécifique .

Tests	$Q_{Tunnel}[m^3/s]$	$q_{Tunnel}[m^2/an]$
A : (argile intact)	$1.0E - 11$	$1.2E - 3$
B : (argile+"EDZ")	$2.8E - 11$	$3.6E - 3$

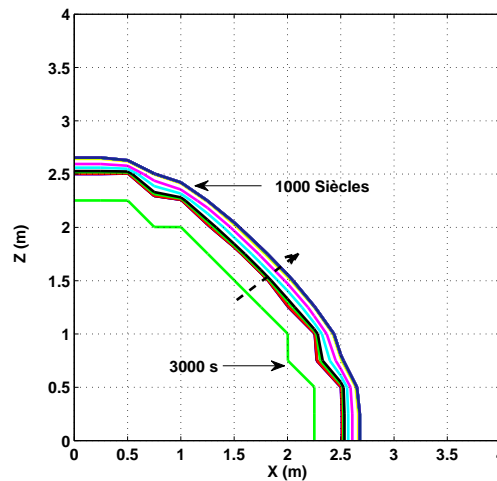
### 3.2.3 Champs de pression

La visualisation des iso-surfaces de pression dans la figure 7.9, permet de remarquer la présence de deux zones, l'une est la zone désaturée ( $-300m < h < 0m$ ) et l'autre est la zone décomprimée ( $0m < h \ll +525m$ ).

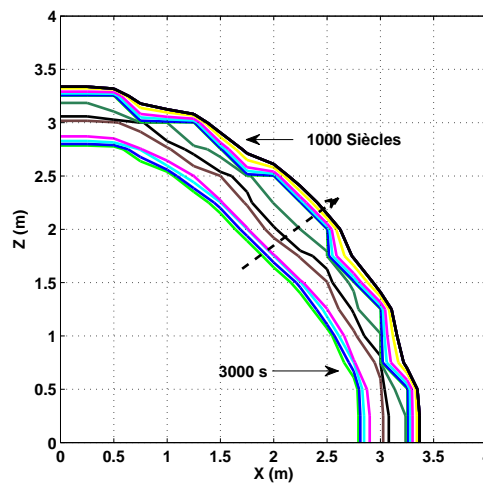


**FIGURE 7.9:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion  $\psi = 300\ m$  : Iso surfaces de pression ( $h$ ) :  $h = -300, -217.5, -135, -52.5, +30, +112.5, +195, +277.5, +360, +442.5$  et  $+525m$ . (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ").

Pour quantifier l'évolution de la pression, nous traçons à l'aide d'un programme *MATLAB*, les iso-surfaces des pressions : iso-surface  $h = 0 \text{ m}$  (voir la figure 7.10) pour déterminer l'extension de la zone désaturée  $e_{DESAT}$ , et l'iso-surface  $h = +50 \text{ m}$  (voir la figure 7.11) pour déterminer l'extension de la zone décompressée  $e_{DECOMP}$  (voir le tableau 7.6).



(a)

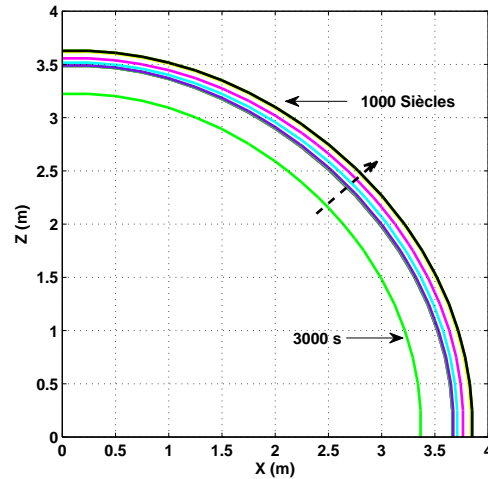


(b)

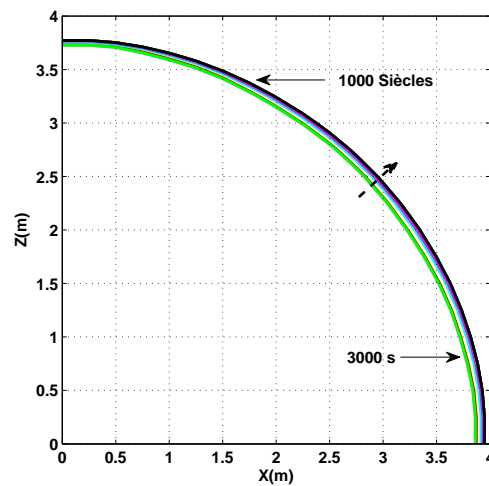
**FIGURE 7.10:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion  $\psi = 300 \text{ m}$  : Iso surfaces de pression  $h = 0 \text{ m}$  (Zoom). (a) Test A : Argilite intacte ; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ").

Nous remarquons que ces zones désaturée et décompressée ne sont pas à symétrie cylindrique. C'était prévisible, à cause de la condition limite de pression statique  $h = 525 \text{ m}$  imposée sur la face supérieure  $B2$  ( la face  $N2 \perp X2$ , située en  $z = Lz = 12.5 \text{ m}$ ); les autres faces sont imperméables vu les symétries du problème.

Dans l'argile intacte par exemple, les tests avec  $\psi = 300 \text{ m}$  (condition limite) et  $h = 525 \text{ m}$  (condition initiale) indiquent que le dessèchement s'étend sur une distance de  $0.75 \text{ m}$  (trois mailles). De plus, nous avons aussi vérifié que la distance de dessèchement est à peine plus grande si nous supposons une condition initiale  $h = +200 \text{ m}$  au lieu de  $+525 \text{ m}$ . Nous pouvons conclure que le dessèchement local n'est pas très sensible à la charge imposée sur la frontière supérieure.



(a)



(b)

**FIGURE 7.11:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion  $\psi = 300 \text{ m}$  : Iso surfaces de pression  $h = 50 \text{ m}$  (Zoom). (a) Test A : Argilite intacte ; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") .

Tableau 7.6: Extension zone désaturée/décomprimée .

Tests	$e_{DESAT}$	$e_{DECOMP}$
A : (argile intact)	2.75 m	3.75 m
B : (argile+"EDZ")	3.40 m	3.95 m

Les résultats montrent que nous obtenons une désaturation assez significative de l'argile dans le cas d'une argilite homogène (intacte), comme dans le cas de la roche argileuse endommagée (« EDZ » annulaire), mais à des extensions différents.

## 4 Essai complémentaire de dessèchement en galerie cylindrique, sous succion $\psi = 9721 \text{ m}$

### 4.1 Présentation du test complémentaire

D'après les tests précédemment présentés, nous avons constaté que l'extension du dessèchement est modérée (le choix de la succion imposée est relativement modérée). Cependant, suite à une revue interne et afin de mieux reproduire les conditions réelles attendues dans un stockage in situ, nous avons décidé de procéder à un test supplémentaire en galerie cylindrique, avec une autre succion d'environ 9721 m correspondant à une humidité relative de l'air d'environ 50% à température  $T = 25C$ .

Le présent essai de dessèchement d'une galerie cylindrique, sous succion  $\psi = 9721 \text{ m}$ , se réalise dans des conditions géométriques et hydrodynamiques identiques à celle du test A. La galerie cylindrique est "internalisée" dans le domaine de calcul en tant que milieu macroporeux.

Nous rappelons que le domaine de calcul est constitué d'un massif argileux isotrope et homogène (argilite "intacte") entourant un quart de "tunnel" cylindrique de section circulaire. Les propriétés hydrodynamiques (argile + tunnel macroporeux) ont été présentées dans le Tableau 7.3. La géométrie, le maillage, et les conditions limites ont été données dans les sections précédentes (3.1.1 et 3.1.4). Les étapes temporelles de ce test sont les suivantes :

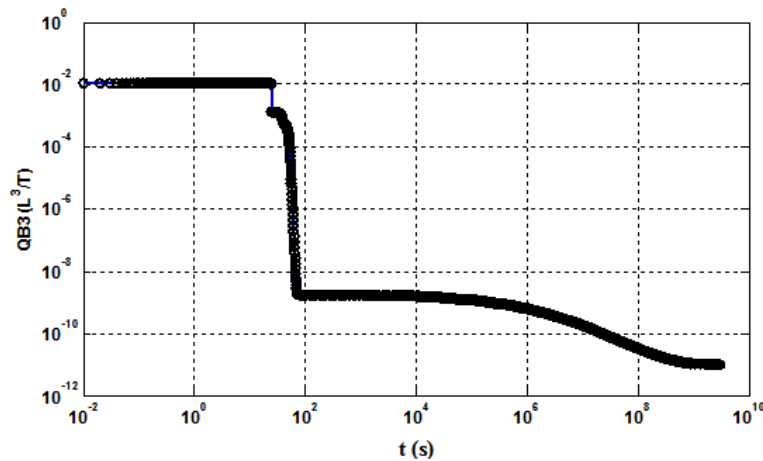
- Etape 1 virtuelle ( $t = 0 \rightarrow t \approx 0.5j$  environ) avec  $\Delta t = 0.01s$ , pour vidanger numériquement la galerie (initialement pleine d'eau) et pour transmettre la succion  $\psi = 9721m$  sur la paroi cylindrique de la galerie internalisée.
- Etape 2 :  $t \approx 0.5j$  environ  $\rightarrow t \sim 100ans \sim 1E9s$  (ou plus), avec  $\Delta t$  variable de  $\Delta t = 0.01s$  à  $\Delta t = 1j$  au maximum. Cette étape correspond à la simulation du dessèchement proprement dit.

## 4.2 Résultats et analyse

### 4.2.1 Flux à travers la frontière B3

La figure 7.12 montre l'évolution du débit sortant (dû au dessèchement) obtenu sur frontière B3 qui est la frontière verticale transverse au tunnel où la succion  $\psi = 9721 \text{ m}$  est imposée sur les nœuds appartenant à la section circulaire du tunnel internalisé. Le régime d'écoulement quasi-permanent est atteint à partir d'un temps  $t \geq 1E9s \simeq 100ans$ .

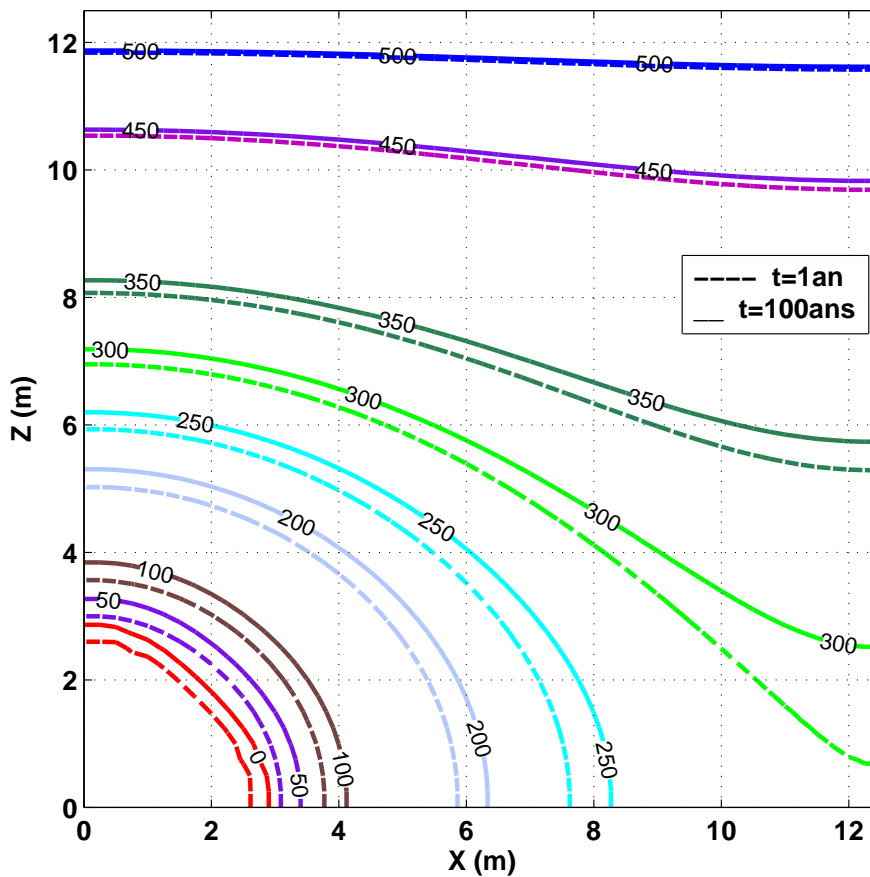
Le débit numérique de sortie d'eau en régime permanent vaut  $1E - 11m^3/s$  et donc le débit spécifique par mètre de tunnel (Eq.7.6), est égal à  $q_{Tunnel}(t_\infty) = 1.2E - 3m^2/an$ . Ainsi, nous pouvons conclure que l'augmentation de la succion imposée à la frontière B3 n'a pas d'influence sur le débit d'évacuation d'eau qui reste inchangé pour les 2 cas ( $q_{Tunnel_{\psi=300m}}(t_\infty) = 1.2E - 3m^2/an$ ).



**FIGURE 7.12:** Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une argilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel ( $\psi = 9721 \text{ m}$ ) : Variation du flux sorti de la frontière B3 en fonction du temps dans une échelle logarithmique.

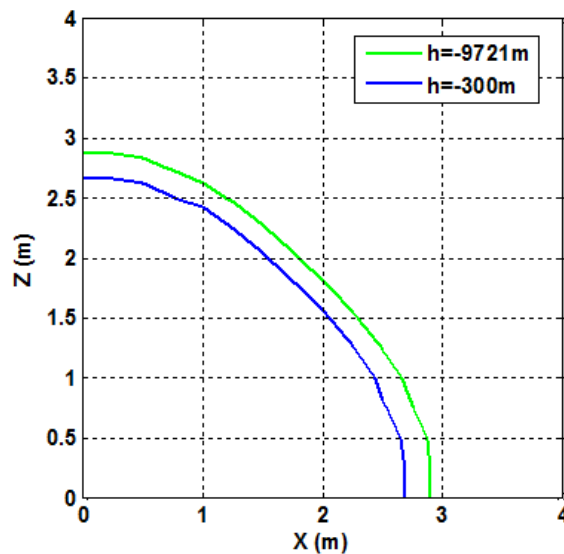
### 4.2.2 Profils verticaux de pression

La figure 7.13 montre la distribution spatiale et temporelle des pressions  $h(x,z,t)$  en section transverse au tunnel pour deux différents temps (un an et un siècle). L'évolution des isovaleurs au cours du temps est relativement minimale. Rappelons que le tunnel est un tronçon de cylindre circulaire de rayon  $R = 2m$ , le front de désaturation, représenté par la courbe de couleur rouge (l'iso-valeur  $h = 0$ ), se trouve à une distance de  $0.95m$  de la paroi du tunnel ( $e_{DESAT} = 2.95m$ ).



**FIGURE 7.13:** Résultat de simulation BIGFLOW3D du dessèchement d'une argilite par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion  $\psi = 9721 \text{ m}$  : Évolution du champ de pression  $h(x,z)$  représenté par iso-valeurs, en section transverse au tunnel, au temps  $t = 1 \text{ an}$  (ligne discontinue) et  $t = 100 \text{ ans}$  (ligne continue).

Il serait intéressant de connaître l'influence de la succion imposée à la paroi sur le comportement du front de désaturation. En effet, la figure 7.14 illustre la répartition spatiale de l'isosurface  $h = 0m$  pour les deux valeurs du succion ( $\psi = 300m$  et  $\psi = 9721m$ ). En augmentant la succion, la zone désaturée est plus étendue. Cependant, nous devons reconnaître que la maille est assez grossière ici ( $\Delta Z = 0.25m$ ). En fin de compte, une simulation à maille plus fine est quand même indiquée pour obtenir encore plus de précision sur le résultat  $e_{DESAT}$ .



**FIGURE 7.14:** Résultat de simulation BIGFLOW3D du dessèchement d'une argilite par l'aération d'un quart du tunnel : comparaison d'Isosurface de pression  $h = 0 m$  à  $t = 100 ans$  pour différentes succions imposées  $\psi = 9721 m$  et  $\psi = 300 m$ .

## 5 Conclusions

Le travail présenté, dans ce chapitre, vise à étudier l'un des aspects de sûreté du stockage souterrain de déchets, à savoir l'intégrité de la roche autour des galeries souterraines, et notamment ici, le dessèchement de la roche argileuse autour de la galerie, dessèchement causé par l'aération. Notre travail consiste à modéliser, à l'aide du code numérique BIGFLOW, le phénomène de désaturation de l'argilite dans des échelles de temps très grandes (jusqu'à des millions de siècles) et ceci dans le but de prévoir le comportement de l'argilite et en déduire sa réponse face à cette aération.

La particularité du domaine étudié (galerie et roche argileuse) réside dans le fait qu'il représente une grande variabilité spatiale : dans la roche endommagée (EDZ) le milieu est anisotrope et hétérogène ; mais

même sans en tenir compte, l'internalisation ou "immersion" de la galerie dans la simulation des écoulements nous conduit à un système composite micro/macroporeux. Ce système est par nature lui-même hétérogène et anisotrope. Ce contraste se manifeste surtout dans l'énorme différence entre les conductivités hydrauliques saturées ( $K_s$ ). Ainsi, pour tenir compte de cette variabilité spatiale dans les calculs numériques, nous avons procédé à quelques modifications dans le code source de BIGFLOW. Durant les simulations numériques, avec la méthode d'immersion de la galerie dans un domaine fictif, pour résoudre des problèmes numériques la transmission de la condition au limite de succion, nous avons eu recours à une condition limite progressive de type "rampe", qui dépend du temps et qui assure la transmission.

Les simulations ont été faites pour différentes géométries, et pour deux types de roches autour de la galerie : l'une est supposée homogène ou "intacte", et l'autre présente une zone endommagée annulaire (Excavation Damaged Zone) représentée ici comme une zone continue annulaire en proche paroi, plus grossière que la roche intacte. Les résultats ont révélé que dans les deux cas, nous obtenons des zones d'argilites désaturées, mais avec des extensions différentes. En fait, la zone de désaturation s'étend plus loin de la paroi en présence d'une couche annulaire de roche endommagée, par rapport au cas d'une roche complètement homogène.

Ce travail a permis de mettre en évidence toute la difficulté qui accompagne l'étude numérique des milieux composites micro/macroporeux, présentant une anisotropie et de forts contrastes des propriétés hydrodynamiques. Il présente aussi de très nombreuses perspectives dont nous pouvons citer l'étude expérimentale du phénomène de dessèchement de l'argilite à l'échelle du laboratoire souterrain, afin de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux. D'autres applications de ce travail à des problèmes similaires sont envisageables, en excavations minières, géotechnique, et stockage souterrain de déchets toxiques.





# Conclusions et perspectives



Nous présentons ci-dessous une synthèse des résultats chapitre par chapitre, ainsi qu'une présentation des liens et des complémentarités entre les différentes parties de ce travail, puis au final, une analyse des perspectives.

Nous avons commencé cette étude (chapitre 2), par une discussion critique de deux modèles, les plus utilisés dans la littérature, pour la représentation des propriétés hydrodynamiques du sol non-saturé ( $\theta(h)$ , et  $K(h)$ ) : modèle Exponentiel et modèle de Van-Genuchten/Mualem (VGM). De même, nous avons défini et amélioré deux notions originales qui généralisent la loi de Darcy (courbe de conductivité  $K(h)$ ) et la courbe de rétention d'eau  $\theta(h)$ , en introduisant (i) un comportement macroporeux dynamique (perte de charge quadratique en vitesse); (ii) un comportement macroporeux cinétique (courbe  $\theta(h)$  raide), et enfin, (iii) un comportement de conduction hydraulique anisotrope non-linéaire  $K_{ii}(h)$ . Tous ces concepts ont permis l'application d'une méthode d'immersion pour l'inclusion de cavités ou de milieux macroporeux (voir chapitre 3 et chapitre 7).

Nous avons présenté, par la suite (chapitre 3), une description du code Volumes Finis BIGFLOW 3D utilisé pour la simulation des écoulements en milieux poreux variablement saturés (non saturé ou partialement saturé). Nous avons validé le code en étudiant l'infiltration 1D en présence d'une interface (barrière capillaire et problème de la rizière) où nous avons comparé les résultats numériques avec des solutions analytiques développées par Ross 1990 (barrière capillaire) ou par nous-même (rizière). Nous avons de plus démontré que le modèle généralisé introduit dans le code BIGFLOW peut modéliser des apports ou des extractions naturelles (infiltration ou évaporation) ou artificielles (pompage en injection ou extraction), y compris en présence de cavités ou de macroporeux (méthode d'immersion).

Dans le chapitre 4, nous avons étudié analytiquement l'infiltration verticale, en régime permanent, dans un sol non-saturé continument stratifié de façon cyclique, sous flux fixé et en présence d'une nappe libre située à une profondeur finie  $L$ . Des solutions analytiques exactes et approchées sont développées en utilisant deux transformations de variables (transformation de Khirchhoff, nouvelle transformation aboutissant à un potentiel réduit). Ces solutions sont présentées, tracées, et validées par des simulations numériques directes à l'aide d'un code Volumes Finis (BIGFLOW 3D), et un solveur ODE non linéaire ("ode23t" de MATLAB). Les résultats sont encourageants pour une variabilité modérée de l'ordre de 100% de coefficient de variation pour  $K_S$ , et jusqu'à 15% pour  $\alpha$ . De plus, dans le cas où seule la conductivité hydraulique à saturation  $K_S$  est variable, nous avons identifié une longueur capillaire caractéristique en analysant l'effet de la longueur d'onde sur l'amplitude des fluctuations de pression pour une nappe profonde.

Ensuite, nous avons développé, dans le chapitre 5, une relation théorique entre les paramètres du modèle Exponentiel et les paramètres du modèle VGM. De même, nous avons testé plusieurs types d'injection dans un système bicouche (fin/grossier), en présence d'une nappe plus ou moins profonde. Les résultats obtenus confirment que lorsqu'une barrière capillaire est soumise à une infiltration, la couche fine aura tendance à accumuler l'eau et ralentit donc la vitesse du front descendant d'infiltration dans la couche grossière. Ce chapitre contient également une étude préliminaire des phénomènes d'infiltration 3D pour un sol aléatoire (réplique unique). Nous avons testé également une méthode de prise des moyennes des champs de pression et de teneur en eau sous conditions d'apport uniforme. Les premiers résultats indiquent que les profils verticaux moyens calculés pour un milieu aléatoire, ne coïncident pas avec les profils verticaux obtenus pour le sol homogène moyen de référence.

Nous avons étudié, dans le chapitre 6, le cas des écoulements variablement saturés en régime transitoire fortement oscillatoire, dans une colonne de sable fin homogène, sous l'effet de fluctuations temporelles périodiques du niveau de la surface libre d'une nappe de plage. Une pression oscillatoire répondant à un forçage tidal est imposée comme condition limite inférieure. Nous avons pu démontrer l'efficacité numérique d'une méthode Multi-Front pour la simulation de la dynamique oscillatoire des flux et des profils de pression dans la colonne. Le nombre de fronts requis dans cette méthode est bien inférieur au nombre de nœuds nécessaires dans un modèle à grille fixe de type volumes finis. La phénoménologie capillaire/gravitaire des écoulements oscillatoires dans la colonne est étudiée grâce à une analyse des profils de charge hydraulique totale, et à un suivi de la dynamique de la position des plans de flux nul, aboutissant à une étude des graphes et des bifurcations de ces plans.

Nous avons développé, dans le chapitre 7, une étude numérique de désaturation de la roche argileuse autour d'une galerie profonde (excavation cylindrique). Celle-ci a été incluse comme objet macroporeux dans le domaine de calcul du code Volumes Finis BigFlow 3D (Richards généralisée, cf. chapitre 2). Cette technique, appelée méthode d'immersion, nécessite d'assurer la transmission de la condition limite de la succion depuis l'entrée de la galerie ventilée jusqu'aux parois, et de choisir de façon appropriée le mode de pondération des conductivités hydrauliques mid-nodales (pondération arithmétique pour ce problème de dessèchement). Nous avons modélisé le dessèchement de l'argilite sous succion imposée égale à 300m (humidité relative de l'air 97.88%) pour deux configurations : la première en utilisant une couche argileuse homogène (intacte) et la deuxième avec une couche argileuse contenant une zone endommagée ("Excavation Damaged Zone"). Les résultats obtenus (pour une échelle de temps de l'ordre de cent siècles) montrent l'apparition d'une zone annulaire désaturée de l'argilite, ayant

une extension plus grande pour le cas de la roche endommagée (140 cm ) par rapport de la roche intacte (75cm). L'influence de la succion a été aussi étudiée en reproduisant pour une succion de paroi beaucoup plus élevée. Ceci nous a permis de conclure que l'extension de la zone de désaturation n'est que faiblement influencée par une augmentation de la succion imposée.

Nous proposons à ce stade une interprétation des liens et des complémentarités entre les différents chapitres de ce manuscrit, tant sur le plan méthodologique que phénoménologique :

- Liens. Les différents chapitres de cette thèse ont porté sur une analyse d'écoulement variablement saturé dans un milieu hétérogène ou perturbé par des fluctuations temporelles, en se basant sur un modèle équationnel (loi de Darcy et équation de Richard). L'hétérogénéité est décrite différemment tout au long ce travail : bicouche horizontale, stratification continue cyclique, roche excavée, et sols aléatoires 3D. Dans la plupart des cas, nous combinons analyses théoriques (développement des solutions analytiques ou semi analytiques) et numériques (solution Volumes Finis de l'équation de Richards pour les milieux souterrains hétérogènes).
- Complémentarités. La nature des écoulements analysés diffère d'un chapitre à un autre. On étudie d'une part des écoulements qui peuvent être strictement non-saturés ou bien partiellement saturés. De plus, les écoulements sont modélisés analytiquement en régime permanent dans le chapitre 4 (sol hétérogène), mais aussi en régime transitoire et oscillatoire dans le chapitre 6 (sol homogène).

En ce qui concerne les perspectives, plusieurs axes peuvent être proposés afin de poursuivre ce travail :

- Améliorer et tester la méthode de récolement présentée dans le chapitre 5, en utilisant une méthode automatique d'optimisation du paramètre  $h_b$ , par exemple une fonction d'optimisation "LSQNLIN" de la Toolbox de MATLAB avec le critère  $\epsilon = \|(h_{VGM}(z) - h(z, h_b))\|$  ou bien  $\epsilon = \|(\theta_{VGM}(z) - \theta(z, h_b))\|$ . Ceci pourra se faire de manière automatique.
- Etudier l'évolution spatio-temporelle de l'infiltration multidimensionnelle dans un sol pouvant comporter des couches ou strates subhorizontales, et/ou des structures verticales (fissures, macropores), et ceci pour différents types de cycles ou de pulses temporelles pluie/évaporation, ou encore, inondation/drainage.

- 
- Etendre l'approche stochastique multidimensionnelle, approche que nous avons testée dans le Chapitre 5 pour quelques cas d'infiltration transitoire sous flux ou lame d'eau fixée. Le sol hétérogène sera décrit par la même approche stochastique déjà employée, basée sur la notion de champs aléatoires, en introduisant cette fois-ci la notion d'anisotropie statistique qui permettra d'introduire, dans le cadre de l'approche stochastique, la structure souvent stratifiée des sols sédimentaires (couches imparfaites).
  - Introduire plusieurs hypothèses permettant d'analyser plus systématiquement certains scénarios pertinents en hydrologie des sols, notamment sous l'effet de cycles ou pulses d'irrigation : inondation/drainage distribué uniformément sur la surface (irrigation gravitaire) ; flux fixé uniforme (aspersion) ; et enfin, débit fixé ou densité linéique de flux fixée pour la micro-irrigation (goutteurs point source ou lignes de goutteurs line source).
  - Dans ce cadre, nous envisageons des expérimentations numériques permettant de caractériser les bulbes d'humectation 3D en micro-irrigation en tenant compte de la structure du sol (stratifiée, bicouche, multicouche, fentes de retrait ou chemins préférentiels dus aux racines) mais aussi aux incertitudes sur la structure du sol due aux hétérogénéités.
  - Enfin, à partir de nos travaux sur la caractérisation des écoulements non saturés, nous pourrions passer de l'hydrodynamique vers les phénomènes de transport advectif-diffusif par des méthodes mathématiques et numériques développées d'une part au LMHE de l'ENIT à Tunis (code GEODENS) et d'autre part au laboratoire IMFT à Toulouse (code lagrangien LPT3D et nouvelles méthodes de suivi de particules en cours de développement).









# Références

- [1] Ababou R. (1988). Three-dimensional flow in random porous media, Ph.D. thesis, Mass. Inst. of Technology., Cambridge, Mass.
- [2] Ababou R., L.W. Gelhar, D. Mc Laughlin (1988). Three Dimensional Flow in Random Porous Media. *MIT Technical report No.318, Ralph Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, Cambridge, Massachusetts 02139, USA, 833 pp.
- [3] Ababou R. (1990). Numerical Analysis of Unsaturated Flow Equations. In : *Comput. Methods in Water Resour., Part A : Comput. Methods in Subsurface Hydrology*, G. Gambolati et al. eds., Comput. Mecha. Publi. & Springer Verlag, New York, pp. 151-160.
- [4] Ababou R. (1991.a). *Approaches to Large Scale Unsaturated Flow in Heterogeneous, Stratified, and Fractured Geologic Media. Report NUREG/CR 5743, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Government Printing Office, Washington D.C.*, pp. 150.
- [5] Ababou R. (1991.b). Stochastic Analysis of Flow and Transport. *Chapter 6 in : Report on Research Activities for Calendar Year 1990, NUREG/CR 5817 & CN-WRA 90-01A, W. C. Patrick ed.*, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington D.C.
- [6] Ababou R., B. Sagar, G. Wittmeyer (1992). Testing Procedures for Spatially Distributed Flow Models. *Advances in Water Resources*, Vol.15, pp. 181-198.
- [7] Ababou R., A. C. Bagtzoglou (1993). BIGFLOW : A Numerical Code for Simulating Flow in Variably Saturated, Heterogeneous Geologic Media (Theory and User's Manual, Version 1.1). *Report NUREG/CR-6028. U.S. Nuclear Regulatory Commission, Government Printing Office, Washington D.C.*, USA, pp. 139.
- [8] Ababou R., A.C. Bagtzoglou, E.F. Wood. (1994) On the Condition Number of Covariance Matrices Arising in Kriging, Estimation & Simulation of Random Fields. *Math.Geol.*26(1), pp. 99-133.
- [9] Ababou R. (2008). Quantitative Stochastic Hydrogeology : the Heterogeneous Environment. *Chap 8, in : Part III of "Overexploitation & Contamination of Shared Groundwater Resources : Management, (Bio)Technological, & Political Approaches to Avoid Conflicts."* NATO-ASI : Advanced Studies Institute Series, C.J.G. Darnault (ed.), Springer Science & Business Media BV, pp. 119-182.
- [10] Ababou R., I. Cañamón Valera, A. Poutrel(2011). Macro-permeability distribution and anisotropy in a 3D fissured and fractured clay rock : "Excavation damaged zone around a cylindrical drift in callovo-Oxfordian argillite (Bure). *Journal of physics and chemistry of the earth.* ISSN 1474-7065.

- 
- [11] Ababou R., K. Alastal, D. Astruc, A. Al-Bitar, M. Marcoux, Y. Wang (2015). Model Coupling for Environmental Flows, with Applications in Hydrology and Coastal Hydrodynamics. *La Houille Blanche / The International Water Journal*. 2, DOI 10.1051/lhb/20150014, pp. 9-26.
- [12] Ababou, R., G. Trégarot(2002). Coupled modeling of partially saturated flows : macro-porous media, interfaces, and variability. *Computational methods in Water Resources, Proc. CMWR*, 23-28 June 2002, Delft, Netherlands, pp. 8.
- [13] Abidin, A.E. and Kaluarachchi, J.J. (1997). Stochastic analysis of three-phase flow in heterogeneous porous media : 1. Spectral/perturbation approach. *Water Resources Research* 33 : doi : 10.1029/97WR00041. issn : 0043-1397.
- [14] Alastal, K. (2012). Ecoulements oscillatoires et effets capillaires en milieux poreux partiellement saturés et non saturés : applications en hydrodynamique côtière. (Oscillatory flows and capillary effects in partially saturated and unsaturated porous media : applications to beach hydrodynamics.). *Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Toulouse (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse)*. Toulouse, France, 16 Mai 2012, pp. 226.
- [15] Anderson, J., A.M.Shapiro (1983). Stochastic analysis of one dimensional steady state unsaturated flow : A comparison of Monte Carlo and perturbation methods. *Water Resour. Res.*, 19(1) : pp. 121-133.
- [16] Baird A.-J., D.-P. Horn(1996). Monitoring and Modelling Groundwater Behaviour in Sandy Beaches. *Journal of Coastal Research*. 12, pp. 630-40.
- [17] Baird A.-J., T. Mason, D.-P. Horn (1998). Validation of a Boussinesq model of beach ground water behaviour. *Marine Geology*. 148, pp. 55-69.
- [18] Barry D.-A., S.-J. Barry, J.-Y. Parlange (1996). Capillarity correction to periodic solution of the shallow flow approximation.in : CB Pattiaratchi, (Ed.). *Mixing Processes in Estuaries and Coastal Seas Coastal and Estuarine Studies*. American Geophysical Union, Washington, DC1996. pp. 496-510.
- [19] Boulin P.(2008). Expérimentation et Modélisation du Transfert d'hydrogène à travers des argiles de centre de stockage de déchets radioactifs. *Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Grenoble*. Grenoble, France, 2 Octobre 2008, pp. 316.
- [20] Boussinesq J.(1904). Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. CR Académie des Sciences, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. 11, 1904, pp.363-94.
- [21] Broadbridge P.(1987) : "Integrable Flow Equations that Incorporate Spatial Heterogeneity", *Transport in Porous Media* 2, pp.129-144.
- [22] Buckingham E. (1907) Studies on the Movement of Soil Moisture. *Bulletin No. 8, Washington, DC, US*, Department of Agriculture, Bureau of Soils.
- [23] Caputo J.-G. et Y.Stepanyants(2008). Front solutions of Richards equation, *Transport in porous media*, 74, pp. 1-20.
- [24] Chen H., G. Pinder(2011). Investigation of Groundwater Contaminant Discharge into Tidally influenced Surface-water Bodies : Theoretical Analysis. *Transport in Porous Media* 89, pp.289-306.
- [25] Chen L, MH Young (2006). Green-Ampt infiltration model for sloping surfaces. *Water Resour. Res.*, 42, W07420.
- [26] Childs E.C., N. Collis-George (1950) The Permeability of Porous Materials. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A : Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 201, pp. 392-405.
- [27] Dupuit J. (1863). Etudes Théoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Découverts et à Travers les Terrains Perméables. *2nd ed. Dunod*, Paris.

- 
- [28] Dagan, G., E. Bresler (1983). Unsaturated flow in spatially variable fields, derivation of models of infiltration and redistribution. *Water Resour. Res.*, 19(2) : 413-420.
- [29] Fredlund D. G., A. Xing (1994) : Equations for the soil-water characteristic curve. *Can. Geotech. J.*, 31, pp. 521-532.
- [30] Freeze R.A., J.A. Cherry (1979). Groundwater, Prentice Hall Inc., *Englewood Cliffs, NJ*, pp.604.
- [31] Gardner W. R.(1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Science*; vol 85, pp.228-232.
- [32] Gelhar L. W. (1993). Stochastic Subsurface Hydrology. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ*.
- [33] Green W.H., G.A. Ampt (1911). Studies on soil physics, 1 : The flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.*, 4, pp. 1-24.
- [34] Darcy H.P.G. (1856) Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Exposition et Application des Principes à Suivre et des Formules à Employer dans les Questions de Distribution d'Eau. *Victor Dalmont Ed., Paris, France*.
- [35] Hinz C.(1998). Analysis of unsaturated/saturated water flow near a fluctuating water table. *Journal of Contaminant Hydrology*. 33, pp. 59-80.
- [36] Jeng D.-S., H.-T. Teo, D.-A. Barry, L. Li (2005). Two-Dimensional Approximation for Tidal Dynamics in Coastal Aquifers : Capillarity Correction. *Journal of Engineering Mechanics*. 131, pp.534-41.
- [37] Kang H.-Y., P. Nielsen(1996). Water Table Dynamics in Coastal Areas. *Proceedings of 25th Conference on Coastal Engineering*, Orlando, Florida, 1996.
- [38] Kacimov A., O. Abdalla (2010). Water table response to a tidal agitation in a coastal aquifer : the Meyer-Polubarinova-Kochina theory revisited. *Journal of Hydrology*, 392, pp. 96-104
- [39] Kacimov, A., S. Al-Ismaily, A. Al-Maktoumi (2010). Green-Ampt One-Dimensional Infiltration from a Ponded Surface into a Heterogeneous Soil. *J. Irrig. Drain Eng.*, 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000121, pp. 68-72.
- [40] Khaleel R., T.-C.J. Yeh, Z. Lu (2002). Upscaled Flow and Transport properties for Heterogeneous Unsaturated Media. *Water Resour. Res.*, 38(5).
- [41] Khire V., H. Benson, P. Bosscher (1999) : Field data from a capillary barrier and model predictions with INSAT-H. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 125(6), ISSN 1090-0241/99/0006-0518-0527
- [42] Knupp P.M., J.L. Lage (1995) Generalization of the Forchheimer-Extended Darcy Flow Model to the Tensor Permeability Case via a Variational Principle. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 299, pp. 97-104.
- [43] Larabi A.(1994) Numerical Modelling of Groundwater Flow Systems by Hexahedral Finite Elements. *Thesis of Vrije Universiteit Brussel (VUB), Hydrologie (27)*, pp.269.
- [44] Li L., D.-A. Barry, J.-Y. Parlange, C.-B. Pattiaratchi (1997). Beach water table fluctuations due to wave run-up : Capillarity effects. *Water Resour Res.* 33, pp. 935-45.
- [45] Lu, Z., D. Zhang, (2004). Analytical solutions to steady state unsaturated flow in layered, randomly heterogeneous soils via Kirchhoff transformation, *Advances in Water Resources*, 27, pp. 775-784.
- [46] Lu, Z., D. Zhang, and B. A. Robinson (2007). Explicit analytical solutions for one-dimensional steady state flow in layered, heterogeneous unsaturated soils under random boundary conditions. *Water Resour. Res.*, 43, W09413.

- 
- [47] Matheron G.(1973). The intrinsic random functions and their application. *Advances in applied Probability*, 5, pp. 439-468.
- [48] Mantoglou, A., L.W. Gelhar (1989). Three-dimensionaal unsaturated flow in heterogeneous systems and implications on groundwater contamination : A stochastic approach. *Transport in porous media*, 4, pp. 529-548.
- [49] Miyazaki T.(1988) Water flow in unsaturated soil in layered slopes. *J. Hydrol.*, 102, pp. 201-214.
- [50] McKee C.R.,A.C. Bumb (1984) : The importance of unsaturated flow parameters in designing a monitoring system for hazardous wastes and environmental emergencies. *Proceedings : Hazardous Materials Control Research Institute National Conference*, Houston, Texas, pp.50-58.
- [51] Meyer, R. (1955–1956). Quelques résultats théoriques récents concernant les écoulements des nappes d'eau souterraines. *La Houille Blanche*, N1, 86–108, N5, 744–758 ; pp.23–35
- [52] Mualem Y. (1976) A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.*, 12, pp. 513-22.
- [53] Musy A., M. Soutter (1991) Physique du Sol. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Collection Gérer l'Environnement*, pp. 335.
- [54] Nielsen P.(1990) Tidal dynamics of the water table in beaches. *Water Resour. Res.*, 26, pp. 2127-34.
- [55] Nielsen P., P. Perrochet (2000)]. Water table dynamics under capillary fringes : experiments and modelling. *Advances in Water Resources*, 23, pp. 503-15.
- [56] Parlange J.-Y., W. Brutsaert (1987). A capillarity correction for free surface flow of groundwater. *Water Resour. Res.*, 23, pp. 805-8.
- [57] Philip J.R. (1957) : The theory of infiltration : 1. The Infiltration equation and its solution. *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 83, pp. 435-448.
- [58] Philip J.R. (1969) : The theory of infiltration. *Advances in Hydrosiences*, Vol. 5, pp. 215-296.
- [59] Philip JR. (1972) : Steady infiltration from buried, surface, and perched point and line sources in heterogeneous soils : I. Analysis. *Soil Science Society American Proc.*, vol.36, pp. 268-273.
- [60] Philip J.R. and R.I. Forrester (1975) : Steady infiltration from buried, surface, and perched point and line sources in heterogeneous soils : II. Flow details and discussion. *Soil Science Society American Proc.*, vol.39 pp. 408.
- [61] Polubarinova-Kochina, P.-Ya., N.-N.Kochina (1994). Hydromechanics of Groundwater and Problems of Irrigation. *Moscow, Fizmatlit*.
- [62] Polmann D.J., D. McLaughlin, L.W. Gelhar, R. Ababou (1991) : Stochastic Modeling of Large Scale Flow in Heterogeneous Unsaturated Soils. *Water Resources Research*, 27(7), pp. 1447-1458.
- [63] Raubenheimer B., R.-T. Guza, S. Elgar (1999). Tidal water table fluctuations in a sandy ocean beach. *Water Resour. Res.*, 35, pp. 2313-20.
- [64] Rançon D. (1972). Structures sèches et barrières capillaires en milieux poreux : Application au stockage dans le sol. *Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache, Rapport CEA-R-4310*.
- [65] Ross B. (1990). The Diversion Capacity of Capillary Barriers. *Water Resour. Res.*, Vol. 26, No. 10, pp. 2625-2629.
- [66] Russo, D., I. Russo, A.(1997) Lauffer On the spatial variability of parameters of the unsaturated hydraulic conductivity. *Water Resour. Res.*, 33(5) : pp. 947-956.

- 
- [67] Selker J. S., J. Duan, J.-Y. Parlange (1999) : Green and Ampt infiltration into soils of variable pore size with depth. *Water Resour. Res.*, 35, pp. 1685-1688.
- [68] Sbai M.A.(1999) Modeling Three Dimensional Groundwater Flow and Transport by Hexahedral Finite Elements. *Thesis of Vrije Universiteit Brussel (VUB)*, Faculty of Applied Sciences, Laboratory of Hydrology, pp.211.
- [69] Song Z., L. Li, J. Kong, H. Zhang (2007). A new analytical solution of tidal water table fluctuations in a coastal unconfined aquifer. *Journal of Hydrology*. 340,pp. 256-60.
- [70] Steenhuis T.S., J.-Y. Parlange, K.-J.S. Kung (1991). Comment on “the diversion capacity of capillary barriers” by Benjamin Ross. *Water Resour. Res.*, 27 :8, pp. 2155-2156.
- [71] J.C. Stormont (1995) The effect of constant anisotropy on capillary barrier performance. *Water Resour. Res.*, 31 :3, pp. 783-785.
- [72] Teo H.-T., D.-S. Jeng, B.-R. Seymour, D.-A. Barry, L. Li (2003). A new analytical solution for water table fluctuations in coastal aquifers with sloping beaches. *Advances in Water Resources*. 26, 2003, pp. 1239-47.
- [73] Tregarot, G.(2000). Modélisation couplée des écoulements à saturation variable avec hétérogénéités, forçages et interfaces hydrologiques. *PhD Thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT)*.
- [74] Tompson AFB, R. Ababou, L.W. Gelhar (1989). Implementation of the Three-Dimensional Turning Bands Random Field Generator. *Water Resour. Res.*, 25(10), pp. 2227-2243.
- [75] Ünlü K., D.R. Nielsen, J.W. Biggar (1990). Stochastic analysis of unsaturated flow : One-dimensional Monte Carlo simulations and comparisons with spectral perturbation analysis and field observations. *Water Resour. Res.*, 26(9), pp. 2207–2218
- [76] Van Genuchten M.-T.(1980). A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 44, pp. 892-8
- [77] S. SORAGANVI V. (2005). Numerical and stochastic modelling of the flow and transport in the vadose zone. *PhD Thesis, Indian Institute of Science Bangalore, 560 012, India*
- [78] Wösten J.H.M., Finke P.A., Jansen M.J.W.(1995). Comparison of Class and Continuous Pedotransfer Functions to Generate Soil Hydraulic Characteristics. *Geoderma*, 66, pp. 227-237.
- [79] Warrick A. W. (1975). Analytical solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input. *Soil Sci.*, 120, No.2, pp. 79-84.
- [80] Warrick A. W. (2005) : Effective unsaturated hydraulic conductivity for one-dimensional structured heterogeneity. *Water Resour. Res.*, 41, W09406, doi : 10.1029/2005WR003988.
- [81] Xia Y.-Q., H.-L. Li, MC Boufadel2010 (2010). A new perturbation solution of groundwater table fluctuations in tidal beaches. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*. 22, pp. 55-60.
- [82] Yeh, T.-C.J. (1989). One-dimensional steady state infiltration in heterogeneous soils, *Water Resour. Res.*, 25(10), pp. 2149-2158
- [83] Yeh T.-C.J., L.W. Gelhar, A.L. Gutjahr (1985a). Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils 1. Statistically isotropic media. *Water Resour. Res.*, 21(4), pp. 447-456.
- [84] Yeh, T.-C.J., L.W. Gelhar, A.L. Gutjahr (1985b). Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils 2. Statistically anisotropic media with variable  $\alpha$ . *Water Resour. Res.*, 21(4), pp. 457-464.

- 
- [85] Yeh, T.-C.J., L.W. Gelhar, A.L. Gutjahr (1985c). Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils 2. Observations and applications, *Water Resou. Res.*, 21(4), pp. 465-471.
- [86] Zammit C. (1999). Analyse et Evaluation des Paramètres des Caractéristiques Hydrodynamiques des Sols. Prediction par un Modèle Analytique à Base Physique à partir de Données Texturales. *Thèse de Docteur de l'Université Joseph Fourier -Grenoble 1*, pp. 200.
- [87] Zhang D. (2002). Stochastic Methods for Flow in Porous Media : Coping with Uncertainty. *Academic Press, San Diego, California*, pp.368.

# Table des figures

2.1	Type de structure du sol. (a) : Granuleuse et grumeleuse, (b) : Anguleuse, (c) : En colonne, (d) : Type de structure du sol . . . . .	13
2.2	Courbe de rétention . . . . .	13
2.3	Modèle d'un milieu macroporeux par Larabi 1994 [43] . . . . .	21
2.4	Modèle d'un milieu macroporeux par Sbai 1999 [68] . . . . .	21
2.5	Modèle d'un milieu macroporeux 2016 . . . . .	22
3.1	Molécule Volumes Finis du code BIGFLOW 3D . . . . .	31
3.2	Schéma des entrées/sorties du code BIGFLOW . . . . .	34
3.3	Représentation schématique de la colonne . . . . .	36
3.4	Résultats BIGFLOW du phénomène de la barrière capillaire « colonne 1D : interface horizontal limon-sable à $z = 2.5m$ » : (a) Comparaison du flux net $Q_{bound}(log(t))$ calculé aux frontières avec le flux $Q_{mass}(log(t))$ calculé par bilan de masse sur une période de deux semaines ; (b) Comparaison du volume net $V_{bound}(t)$ calculé par les flux aux frontières avec le volume $V_{mass}(t)$ calculé par bilan de masse . . . . .	37
3.5	Résultats de comparaison Volumes Finis (BIGFLOW) & Analytiques (MATLAB) du phénomène de barrière capillaire (colonne 1D : limon sur sable avec interface à $Z = 2.5m$ ) : Profil de succion . . . . .	38
3.6	Représentation schématique du problème de la rizière bicouche	39
3.7	Profil de pression BIGFLOW-MATLAB pour le probleme de la rizière bicouche (sol fin sur sol grossier avec interface à $z = -0.2m$ ) pour une nappe peu profonde. La ligne horizontal (tirets) représente l'interface, la ligne noire représente la séparation entre zone saturée ( $h > 0$ ) et zone non saturée ( $h < 0$ ) . . . . .	41



3.8	Profil de pression BIGFLOW-MATLAB pour le problème de la rizière bicouche (sol fin sur sol grossier) pour une nappe profonde $P1 + P2 = 1.0 m$ . . . . .	42
3.9	Représentation schématique d'une nappe comprise entre deux rivières et soumise à un flux d'évaporation réparti uniformément sur la surface du sol . . . . .	44
3.10	Représentation de la surface libre de la nappe ( $h = 0m$ ) à $T = 18journs$ : solution analytique ( <i>courbe bleu</i> ), solution numérique ( $n = 8$ ) ( <i>courbe rouge</i> ) . . . . .	46
3.11	Représentation schématique d'une nappe comprise entre deux rivières et soumise à un pompage ponctuel. . . . .	47
3.12	Variation du flux à travers les frontières en fonction du temps	49
3.13	Représentation de la surface libre de la nappe ( $h = 0m$ ) à $T = 15journs$ : solution analytique ( <i>courbe bleu</i> ), solution numérique ( <i>courbe rouge</i> ) . . . . .	50
4.1	Family of unsaturated $\log K(\psi, z)$ curves <i>vs.</i> dimensionless suction ( $\alpha_G \psi$ ), for a soil with cyclic stratification. The curves are sampled at different depths within a single wavelength. The suction range is adjusted so as to clearly see the intersection point of the $K(\psi)$ curves. The parameters used in this plot are the geometric means $K_G = 10^{-3} m/s$ & $\alpha_G = 5 m^{-1}$ ; the relative amplitudes $\kappa = 1.00$ & $a = 0.10$ ; and the cross-correlation coefficient $\rho_{\kappa, a} = +1$ . . . . .	59
4.2	Oscillatory pressure profiles $h(z)$ for three wavelengths of stratification : $\lambda = 0.50m$ (blue), $\lambda = 1.00m$ (light green), $\lambda = 2.50m$ (red). One additional pressure profile is shown, for the homogeneous soil. $\kappa = 0.3$ , $\alpha^0 = 5m^{-1}$ , and $q_o = 0.1m/s$ . . . . .	64
4.3	Normalized amplitude $A$ of the envelope of oscillatory pressure profiles, plotted <i>vs.</i> normalized wavenumber $\omega$ ( $\omega = 2\pi/\lambda$ ). For all wavelengths, the soil parameters are : $K_S^0 = 1E - 3m/s$ , $\alpha^0 = 5m^{-1}$ , $\kappa = 0.10$ . The top flux is $q_0 = 1E - 4m/s$ . The analytical expression (blue thick curve) is compared here with the numerical experiments (red circular symbols). The green square symbol marks the position of the inflexion point analyzed in the text . . . . .	65
4.4	Representation of a soil column, depicting the initial and boundary conditions used in numerical simulations. Flux was imposed at soil surface (top), and zero suction at the water table (bottom). The colour pattern represents the variation of suction with depth in this periodically stratified soil . . .	70
4.5	Shallow water table (variable $K_S$ and $\alpha$ ) : comparison of analytical <i>vs.</i> numerical pressure profiles $h(z)$ for relative amplitudes $\kappa = 1.0$ ( $\ln K_S(z)$ ) and $a = 0.10$ ( $\ln \alpha(z)$ ). (a) : the flux potential approach; (b) : the reduced potential approach. Other parameters : $\lambda = 0.2 m$ ; $\alpha_0 = 3 m^{-1}$ ; $\frac{q}{K_s} = 0.10$ ; $L = 0.5m$ . . . . .	73

---

4.6	Shallow water table (variable $K_S$ and $\alpha$ ) : comparison of analytical <i>vs.</i> numerical profiles for relative amplitudes $\kappa = 1.0$ ( $LnK_s(z)$ ) and $a = 0.15$ ( $Ln\alpha(z)$ ). (a) : pressure profiles $h(z)$ ; (b) : water content profiles. Other parameters : $\lambda = 0.2 m$ ; $\alpha_0 = 3 m^{-1}$ ; $\frac{q}{K_s} = 0.10$ ; $L = 1.0m$ . . . . .	74
4.7	Deep water table (variable $K_S$ and $\alpha$ ) : comparison of analytical (flux potential) <i>vs.</i> numerical pressure profiles $h(z)$ for relative amplitudes $\kappa = 1.0$ ( $LnK_s(z)$ ) and (a) : $a = 0.1$ ( $Ln\alpha(z)$ ); (b) : $a = 0.00$ ( $\alpha$ is held constant). Other parameters : $\lambda = 0.5 m$ ; $q = 1E - 4 m/s$ ; $\alpha_0 = 5 m^{-1}$ ; $\frac{q}{K_s} = 0.10$ ; $L = 5.0m$ . . . . .	76
4.8	Deep water table (variable $K_S$ and $\alpha$ ) : comparison of analytical (reduced potential) <i>vs.</i> numerical profiles for relative amplitudes $\kappa = 1.0$ ( $LnK_s(z)$ ) and $a = 0.1$ . (a) : pressure profiles $h(z)$ ; (b) : water content profiles. Other parameters : $\lambda = 0.5 m$ ; $q = 1E - 4 m/s$ ; $\alpha_0 = 5 m^{-1}$ ; $\frac{q}{K_s} = 0.10$ ; $L = 5.0m$ . . . . .	77
4.9	Deep water table – transient and steady water content profiles : this figure shows the simulated transient approach to steady state, and compares analytical <i>vs.</i> numerical solutions at steady state ( $\theta(z)$ ). Soil variability is relatively mild : the amplitude of $LnK_s(z)$ is $\kappa = 0.5$ , and $\alpha$ is held constant ( $a = 0.0$ ) . . . . .	78
5.1	Conductivité hydraulique relative $K_r(\psi)$ en fonction de la succion. Comparaison du modèle initial VGM ( $\alpha_{VGM} = 1.15m^{-1}$ , $n = 2.03$ ), du modèle Exponentiel de Gardner ( $\alpha_0 = \alpha_{Cmax}$ ) et modèle pseudo-Exponentiel obtenu en insérant $\alpha(\psi)$ dans le modèle Exponentiel . . . . .	85
5.2	Comparaison des Courbes de teneur en eau $\theta(\psi)$ (a) et des Courbes de conductivité hydraulique $K(\psi)$ (b) du modèle VGM et du modèle Exponentiel calé pour le Fine Sand . . . . .	86
5.3	Comparaison des Courbes de teneur en eau $\theta(\psi)$ (a) et des Courbes de conductivité hydraulique $K(\psi)$ (b) du modèle VGM et du modèle Exponentiel calé pour le Guelph Loam . . . . .	87
5.4	Courbes de conductivité hydraulique $K(\psi)$ des deux sols. (a) : Modèle VGM; (b) : Modèle Exponentiel . . . . .	87
5.5	Courbes de teneur en eau $\theta(\psi)$ des deux sols. (a) : Modèle VGM; (b) : Modèle Exponentiel . . . . .	88
5.6	Résultats de comparaison des modèles Exponentiel et VGM pour une infiltration à flux constant dans un système bicouche en régime permanent ( $t = 1jour$ ) : profils de pression $h(z)$ . . . . .	89

5.7	Résultats de comparaison des modèles Exponentiel et VGM pour une infiltration à flux constant dans un système bicouche en régime permanent ( $t = 1\text{jour}$ ) : profils de teneur en eau $\theta(z)$ . . . . .	89
5.8	Courbes caractéristiques des sols ( $\theta, \psi$ ) . . . . .	90
5.9	Barrière capillaire : étude expérimentale faite par Rançon 1972 [64] (lentille sèche). (a) : $t = 1h$ , (b) : $t = 2h30s$ . . . . .	91
5.10	Conditions initiale et aux limites utilisées dans le test d'infiltration sous lame d'eau pour deux configurations du sol . . . . .	93
5.11	Résultats BIGFLOW-MATLAB du phénomène de barrière capillaire (Infiltration sous lame d'eau) : profils de pression $h(z, t)$ . Il y a 40 profils correspondant aux temps réguliers à part les 4 premiers : $t_{max} = 18000s$ . (a) : G.L./F.S.; (b) : F.S./G.L. . . . .	94
5.12	Résultats BIGFLOW-MATLAB du phénomène de barrière capillaire (Infiltration sous lame d'eau) : profils de teneur en eau $\theta(z, t)$ . Il y a 40 profils correspondant aux temps réguliers à part les 4 premiers : $t_{max} = 18000s$ . (a) : G.L./F.S.; (b) : F.S./G.L. . . . .	95
5.13	Conditions initiale et aux limites utilisées dans le test d'infiltration sous lame d'eau puis de redistribution . . . . .	96
5.14	Résultats BIGFLOW (Injection pulse de durée finie) : (a) Comparaison du flux net $Q_{bound}(\log(t))$ calculé aux frontières avec le flux $Q_{mass}(\log(t))$ calculé par bilan de masse sur une période de 3 h (phase d'infiltration); (b) Comparaison du volume net $V_{bound}(t)$ calculé par les flux aux frontières avec le volume $V_{mass}(t)$ calculé par bilan de masse . . . . .	97
5.15	Résultats BIGFLOW-MATLAB : Injection "pulse" à durée finie ( $h = 0m \forall t < 3600s$ puis $q = 0m/s \forall t > 3600s$ ) dans un système bicouche Guelph Loam sur Fine Sand, (a) : profils de succion $h(z, t)$ ; (b) : profils de teneur en eau $\theta(z, t)$ . Il y a 47 profils correspondant aux temps : T1 = 10 s, T2 = 100 s, ..., T47 = Tmax = 50 jours. (a) : GL/FS; (b) : FS/GL . . . . .	99
5.16	Résultats BIGFLOW-MATLAB : Injection "pulse" à durée finie ( $h = 0m \forall t < 3600s$ puis $q = 0m/s \forall t > 3600s$ ) dans le Guelph Loam, (a) : profils de succion $h(z, t)$ ; (b) : profils de teneur en eau $\theta(z, t)$ . Il y a 47 profils correspondant aux temps : T1 = 10 s, T2 = 100 s, ..., T47 = Tmax = 50 jours. (a) : GL/FS; (b) : FS/GL . . . . .	100
5.17	Organigramme des outils numériques et fichiers entrées/sorties utilisés pour la modélisation 3D d'écoulements en sols aléatoires : Exemple de la génération de $K_s(x, y, z)$ . . . . .	104

---

5.18	Réplique d'un milieu aléatoire gaussien structuré sur un petit domaine (cube de côté 3.0 m) ayant une structure d'auto-corrélation isotrope à décroissance exponentielle : 20 Iso surfaces de $K_s(x, y, z)$ . Les paramètres utilisés sont : $\sigma = 1.0$ , $K_{sG} = 1.0$ , $\lambda_{i=1,2,3} = 1.5, 1.5, 1.5$ . . . . .	105
5.19	Réplique d'un milieu aléatoire gaussien structuré sur un grand domaine (126x126x31) ayant une structure d'auto-corrélation isotrope à décroissance exponentielle : 20 Iso surfaces de $K_s(x, y, z)$ . Les paramètres utilisés sont : $\sigma = 1.0$ , $K_{sG} = 1.0$ , $\lambda_{i=1,2,3} = 1.5, 1.5, 1.5$ . . . . .	107
5.20	Infiltration à flux uniforme en $(x, y)$ dans un sol aléatoire : (a) profils moyens de pression $\bar{h}(z)$ ; (b) profils moyens de teneur en eau $\bar{\theta}(z)$ . . . . .	108
6.1	Schematic diagram of the Multi-Front model approximation with four fronts . On the left : 1D porous column shows the water table ( $Z_s(t)$ ) and the four successive fronts at elevations $Z_{F1}(t), Z_{F2}(t), Z_{F3}(t)$ and $Z_{F4}(t)$ where the suction heads are $0, \psi_{F1}, \psi_{F2}, \psi_{F3}$ and $\psi_{F4}$ respectively. On the right : the instantaneous water content profile (solid line) with multi-front model approximation (dashed line) [14] . . . . .	117
6.2	Relative hydraulic conductivity curve with the multi-front model approximation. [14] . . . . .	118
6.3	Tidal oscillations in the Guelph Loam : Multi-Front model <i>vs.</i> Richards. Evolution of the bottom flux . Solid line : quasi-exact output signals obtained from a refined numerical solution of Richards equation (200nodes); symbols : semi-analytical solution of Multi-Front model ( $N = 20$ fronts were used). The parameters of the entry bottom pressure are $A_o = 0.5m$ , $\bar{h}_o = 0.5m$ and $T = 600s$ . . . . .	121
6.4	Tidal oscillations in the Guelph Loam : Multi-Front model <i>vs.</i> Richards. Total Head profiles $H(z)$ at 4 different times separated by a quarter period ( $\frac{T}{4}$ ). Bold line : numerical solution (200 nodes); symbols : semi-analytical solution of Multi-Front model (20 fronts). Black arrows show the direction of flow in each zone; Horizontal dashed lines represent the planes of zero flux; the blue box represents the water table. The parameters of the entry bottom pressure are $A_o = 0.5m$ , $\bar{h}_o = 0.5m$ and $T = 600s$ . . . . .	122
6.5	Tidal oscillations in the Guelph Loam : position of zero flux planes obtained using the Multi-Front model with $M=300$ fronts. The parameters of the entry bottom pressure are $A_o = 0.5m$ , $\bar{h}_o = 0.5m$ and $T = 600s$ . . . . .	124

7.1	Représentation schématique d'une colonne 1D hétérogène : Transmission d'une condition de succion . . . . .	131
7.2	La courbe en $S$ utilisée dans les simulations avec $a = 5$ et $\tau = 300s$ . . . . .	132
7.3	Variation des teneurs en eau en fonction du temps. (a) : $T = 0s$ , (b) : $T = 5000s$ , (c) : $T = 12000s$ , (d) : $T = 36000s$ . ( Rouge : $\theta = 1 m^3/m^3$ , bleu foncé : $\theta = 0.01 m^3/m^3$ , bleu clair : $\theta = 0.15 m^3/m^3$ ) . . . . .	133
7.4	Résultat BIGFLOW-MATLAB : Profils de pression $h(z, t)$ .	134
7.5	Représentation schématique d'un tunnel entouré par une couche argileuse . . . . .	135
7.6	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à une succion $\psi = 300 m$ : $Q_{mass}$ vs. $Q_{bound}$ . (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") . .	139
7.7	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion $\psi = 300 m$ : $V_{mass}$ vs. $V_{bound}$ . (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") .	140
7.8	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à une succion $\psi = 300 m$ : Variation du flux sorti de la frontière B3 en fonction du temps dans une échelle logarithmique. (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") . . . . .	141
7.9	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion $\psi = 300 m$ : Iso surfaces de pression (h) : $h = -300, -217.5,$ $-135, -52.5, +30, +112.5, +195, +277.5, +360, +442.5$ et $+525m$ . (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") . . . . .	142
7.10	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion $\psi = 300 m$ : Iso surfaces de pression $h = 0 m$ (Zoom). (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") . . . . .	143
7.11	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion $\psi = 300 m$ : Iso surfaces de pression $h = 50 m$ (Zoom). (a) Test A : Argilite intacte; (b) Test B : Argilite hétérogène (présence "EDZ") . . . . .	144
7.12	Résultats BIGFLOW du problème de dessèchement d'une ar- gilite intacte par l'aération d'un quart du tunnel ( $\psi = 9721 m$ ) : Variation du flux sorti de la frontière B3 en fonction du temps dans une échelle logarithmique . . . . .	146

---

7.13	Résultat de simulation BIGFLOW3D du dessèchement d'une argilite par l'aération d'un quart du tunnel soumis à succion $\psi = 9721 \text{ m}$ : Évolution du champ de pression $h(x, z)$ représenté par iso-valeurs, en section transverse au tunnel, au temps $t = 1 \text{ an}$ (ligne discontinue) et $t = 100 \text{ ans}$ (ligne continue) . . . . .	147
7.14	Résultat de simulation BIGFLOW3D du dessèchement d'une argilite par l'aération d'un quart du tunnel : comparaison d'Isosurface de pression $h = 0 \text{ m}$ à $t = 100 \text{ ans}$ pour différentes succions imposées $\psi = 9721 \text{ m}$ et $\psi = 300 \text{ m}$ . . . . .	148
A.1	Profil de pression capillaire normalisée en fonction de la profondeur adimensionnelle et du taux d'infiltration : La courbe verte : cas où $\frac{q}{K_s} = -1$ , la courbe rouge : cas où le flux est nul $\frac{q}{K_s} = 0$ , La courbe rose : cas où $\frac{q}{K_s} = 0.58$ , les courbes bleues : cas d'infiltration, les courbes marron : cas d'évaporation, . . .	179
A.2	Comparaison solution exacte <i>vs.</i> solution approximée. (a) : $\alpha(z)$ ; (b) : $\beta(z)$ . Les amplitudes des paramètres du modèle de VGM sont : $\epsilon_A = \frac{1}{3}$ et $\epsilon_N = \frac{1}{10}$ . . . . .	182



# Liste des tableaux

2.1	Critères de classification du sol . . . . .	12
2.2	Modèle de saturation effective (Van-Genuchten / Exponentiel)	15
2.3	Modèles fonctionnels de conductivité relatives $K_r(S_e)$ . . . . .	16
2.4	Modèles de conductivité relatives $K_r(h)$ . . . . .	16
2.5	Modèles de capacité capillaire en fonction de $h$ . . . . .	17
2.6	Modèles de capacité capillaire en fonction de $S_e$ . . . . .	18
2.7	Modèles de diffusivité hydraulique en fonction de $S$ . . . . .	19
3.1	Variable et paramètres de l'équation d'écoulement générique de BIGFLOW, option 3D . . . . .	33
3.2	Propriétés hydrodynamiques (problème de la barrière capil- laire) . . . . .	37
3.3	Propriétés hydrodynamiques (problème de la rizière) . . . . .	40
3.4	Conditions aux limites (Évaporation naturelle d'une nappe)	44
3.5	Valeur des débits spécifiques . . . . .	45
3.6	Conditions aux limites (Pompage localisé dans un aquifère) .	48
4.1	Hydraulic soil properties used in the flow simulations . . . . .	71
5.1	Propriétés hydrodynamiques (Système bicouche) . . . . .	86
5.2	Densité de flux, débit sur les frontières du système bicouche	98
5.3	Propriétés hydrodynamiques (Injection à flux en sol aléatoire)	106
5.4	Propriétés hydrauliques initiales à la surface du sol . . . . .	106
5.5	Nombre effectif d'échantillons pour chaque simulation . . . . .	106
6.1	Soil hydraulic properties used in the flow simulations . . . . .	120
7.1	Propriétés des deux milieux (micro-macro) . . . . .	131
7.2	Domaine de géométrie (Dessèchement d'une couche argileuse)	136
7.3	Propriétés hydrodynamiques (Dessèchement d'une couche ar- gileuse) . . . . .	137
7.4	Conditions aux limites . . . . .	138



---

7.5	Débit numérique / Débit spécifique . . . . .	142
7.6	Extension zone désaturée/décomprimée . . . . .	145
B.1	Lois de probabilités pour une variable aléatoire continue . .	185

# Annexes





# 1 Infiltration verticale en régime permanent dans un sol homogène

## 1.1 Description du problème

Nous considérons un système constitué d'une colonne poreuse de profondeur  $L$  contenant une nappe à surface libre située à  $z = -L$  et nous imposons un flux  $q$  de telle sorte  $q/K_s = 0.1$

Nous allons calculer la pression  $h$  et la teneur en eau  $\theta$  en fonction de la profondeur  $Z$  et du taux d'infiltration  $I$  et nous allons calculer analytiquement la limite de submersion (ou déformation d'une lame d'eau) à la surface du sol. Les solutions analytiques présentées sont obtenues à partir des hypothèses suivantes :

- Ecoulement vertical 1D.
- Le régime est permanent et donc le taux d'infiltration  $I$  est constant au cours du temps.
- On suppose qu'il n'y a pas de formation de zones saturées en charge (sous pression positive) : les conditions sont telles que l'on obtient un régime d'écoulement strictement non saturé en régime permanent, i.e.,  $h(z) < 0$  partout (avec  $h = 0$  possible en des points isolés intérieurs ou frontières, par exemple au niveau de la nappe  $z = L$ ). Cette hypothèse simplifie le calcul de solutions analytiques à l'aide du modèle exponentiel décrit plus bas.
- Modèle exponentiel pour les courbes  $K(h)$  et  $\theta(h)$  en régime insaturé ( $h < 0$ )
- Il existe une nappe à une profondeur  $L$  fixée (qu'on pourra faire tendre vers l'infini); le niveau de la nappe n'est pas contrôlé par l'infiltration/évaporation. La surface libre reste à profondeur constante (cote  $z = -L$ ) au cours du temps.
- On néglige les effets de déformations du milieu poreux (matrice poreuse et eau supposées incompressibles; pas de rétroactions teneur en eau/déformation; etc.).

## 1.2 Écriture des solutions analytiques

A ce stade, nous considérons que les propriétés hydrodynamiques sont présentées en utilisant le modèle Exponentiel. la solution de l'équation de Richards en négligeant les sources et en utilisant la transformé de Kirchoff est de la forme suivante :

$$h(z) = \frac{1}{\alpha_0} \text{Ln} \left( \frac{-q}{K_s} + \left[ \frac{q}{K_s} + 1 \right] e^{\alpha_0(z+l)} \right) \quad (\text{A.1})$$

avec :

$K_s$  conductivité hydraulique à saturation;  $\alpha_0$  : paramètre du modèle

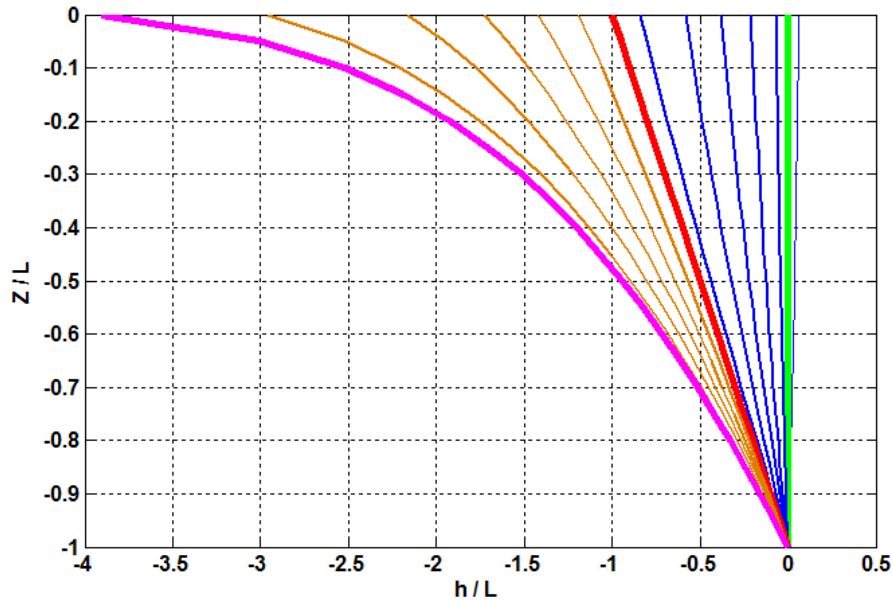
Exponentiel et  $q$  : flux d'infiltration.

L'expression de la teneur en eau est :

$$\theta(z) = \theta_s \left[ \frac{1}{\alpha_0} \operatorname{Ln} \left( \frac{-q}{K_s} + \left[ \frac{q}{K_s} + 1 \right] e^{\alpha_0(z+l)} \right) \right]^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} \quad (\text{A.2})$$

### 1.3 Valeurs critiques de $q_s/K_s$

Le flux d'infiltration critique est celui au-delà duquel le profil de pression analytique devient constant et égale à zéro (le milieu devient saturé). Le flux d'évaporation critique qui ne peut pas être dépassé, est celui au-delà duquel le profil de pression analytique voit apparaître une valeur infinie de la succion.



**FIGURE A.1:** Profil de pression capillaire normalisée en fonction de la profondeur adimensionnelle et du taux d'infiltration : La courbe verte : cas où  $\frac{q}{K_s} = -1$ , la courbe rouge : cas où le flux est nul  $\frac{q}{K_s} = 0$ , La courbe rose : cas où  $\frac{q}{K_s} = 0.58$ , les courbes bleues : cas d'infiltration, les courbes marron : cas d'évaporation, .

## 2 Récolement du modèle Exponentiel/VGM pour un sol stratifié

### 2.1 Expressions exactes

Dans le cas d'un sol cycliquement stratifié (voir chapitre 4), nous supposons que les paramètres du modèle VGM ( $\alpha_{VGM}, n$ ) varient cycliquement avec l'élévation, et plus précisément, leurs logarithmes varient sinusoidalement avec l'élévation :

$$\alpha_{VGM}(z) = \alpha_{VGM}^o \times \exp[\epsilon_A \sin(\omega z)] \quad (\text{A.3})$$

$$n(z) = n^o \times \exp[\epsilon_N \sin(\omega z)] \quad (\text{A.4})$$

avec :  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$  et la fréquence spatiale ;  $\lambda$  est la longueur d'onde ;  $\epsilon_A$  et  $\epsilon_N$  sont respectivement les pente de  $\text{Ln}(\alpha_{VGM}(z))$  et  $\text{Ln}(n(z))$ .

Nous développons, dans cette annexe, une méthode de récolement entre le modèle réel VGM et le modèle non réaliste Exponentiel pour ce type du sol. Nous définissons les pentes de log-conductivité (Eq.A.5) et log-teneur en eau (Eq.A.6) comme suit :

$$\alpha(\psi, z) = -\frac{\partial \text{Ln}K(\psi, z)^{VGN}}{\partial \psi} \quad (\text{A.5})$$

$$\beta(\psi, z) = -\frac{\partial \text{Ln}\theta(\psi, z)^{VGN}}{\partial \psi} \quad (\text{A.6})$$

Nous obtenons les expressions suivantes des paramètres du modèle Exponentiel :

$$\beta(\psi, z) = \frac{n(z) - 1}{\psi [1 + (a(z)\psi)^{-n(z)}]} \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha(\psi, z) = \frac{\beta(\psi, z)}{2} \times \left( \frac{4}{\alpha_{VGM}(z)\psi [1 + (\alpha_{VGM}(z)\psi)^{n(z)}]^{m(z)} - (\alpha_{VGM}(z)\psi)^{n(z)}} + 1 \right) \quad (\text{A.8})$$

avec :  $\psi = -h$  et  $m(z) = 1 - 1n(z)$

Ces équations donnent pour chaque succion  $\psi$ , les coefficients du modèle Exponentiel qui le rendraient équivalent au modèle de VGM. Pour ce type du sol, la linéarisation se fait par la succion moyenne  $\bar{\psi}$  loin au dessus de la nappe, par exemple dans le cas d'une nappe profonde :

$$\bar{\psi} \simeq \frac{1}{\alpha_{VGM}^o} \ln\left(\frac{|q_0|}{K_s^G}\right) \quad (\text{A.9})$$

avec :  $K_s^G$  est la conductivité hydraulique à saturation moyenne.

## 2.2 Expressions approchées

En supposant que les pente de  $Ln(\alpha_{VGM}(z))$  et  $Ln(n(z))$  sont très petites ( $\epsilon_A \ll 1$ ;  $\epsilon_N \ll 1$ ), les expressions approximées des paramètres du modèle VGM deviennent :

$$\alpha_{VGM}(z) = \alpha_{VGM}^o [1 + \epsilon_A \sin(\omega z)] \quad (A.10)$$

$$n(z) = n^o \times [1 + \epsilon_N \sin(\omega z)] \quad (A.11)$$

L'expression approximée du paramètre  $\beta$  du modèle Exponentiel est sous cette forme :

$$\beta(\psi, z) = \frac{n^o - 1}{\psi \cdot [1 + (A\psi)^{-n^o}]} \times [1 + \Lambda(\psi) \cdot \epsilon_A \sin(\omega z) + \Phi(\psi) \cdot \epsilon_N \sin(\omega z)] \quad (A.12)$$

avec :

$$\Lambda(\psi) = \frac{n^o}{[1 + (A\psi)^{-n^o}]} Ln(a^o \psi) + \frac{n^o}{n^o - 1} \quad (A.13)$$

$$\Phi(\psi) = \frac{n^o}{[1 + (a^o \psi)^{n^o}]} \quad (A.14)$$

L'expression approximée du paramètre  $\alpha$  du modèle Exponentiel est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(\psi, z) &= \beta(\psi, z) \times \left[ \frac{4 + \Omega(\psi)}{2\Omega(\psi)} \right] \\ &\times \left[ 1 + \frac{4\Pi(\psi)}{4 + \Omega(\psi)} \epsilon_A \sin(\omega z) + \frac{4\Gamma(\psi)}{4 + \Omega(\psi)} \epsilon_N \sin(\omega z) \right] \end{aligned} \quad (A.15)$$

avec :

$$\Omega(\psi) = (a^o \psi)^{n^o} \left[ \left( 1 + (a^o \psi)^{-n^o} \right)^{m^o} - 1 \right] \quad (A.16)$$

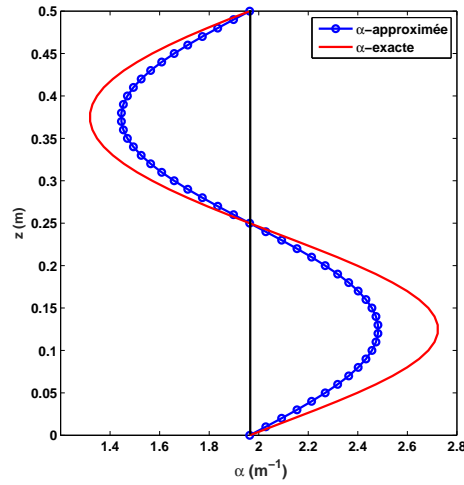
$$\Pi(\psi) = n^o - \frac{(n^o - 1)}{(1 + (a^o \psi)^{-n^o})^{\frac{1}{n^o}} \Omega(\psi)} \quad (A.17)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi) &= [n^o - \Pi(\psi)] \\ &\times \left[ \frac{\left( 1 + (a^o \psi)^{n^o} \right) Ln \left( 1 + (a^o \psi)^{-n^o} \right) - n^o (n^o - 1) Ln(a^o \psi)}{n^o (n^o - 1)} + \frac{n^o Ln(a^o \psi)}{n^o - \Pi(\psi)} \right] \end{aligned} \quad (A.18)$$

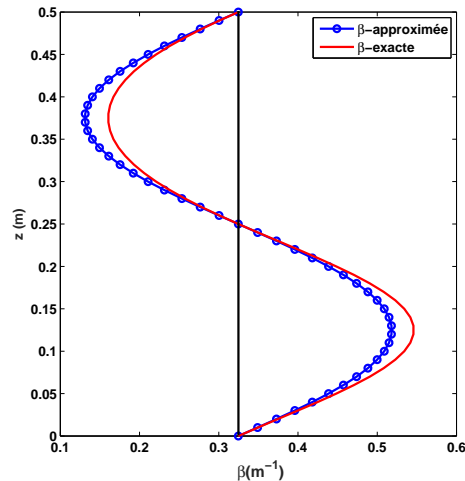


La figure A.2 présente respectivement les profils  $\alpha(\psi_0, z)$  et  $\beta(\psi_0, z)$  pour une succion moyenne fixe (ou succion de référence  $\psi_0$ ). Nous comparons également, dans les mêmes figures, les expressions approximées et les expressions exactes.

Une étude plus détaillée montre que, pour des valeurs  $\epsilon_A < 0.35$  et  $\epsilon_N < 0.05$ , l'erreur relative de  $\alpha(z)$  et  $\beta(z)$  sont limités à moins de 15% et 8% respectivement. Ainsi, l'approximation d'ordre 1 est relativement robuste par rapport à la variabilité des paramètres.



(a)



(b)

**FIGURE A.2:** Comparaison solution exacte *vs.* solution approximée. (a) :  $\alpha(z)$ ; (b) :  $\beta(z)$ . Les amplitudes des paramètres du modèle de VGM sont :  $\epsilon_A = \frac{1}{3}$  et  $\epsilon_N = \frac{1}{10}$ .

**B**

## 1 Probabilités et variable aléatoires

En théorie des probabilités, une variable aléatoire  $X$  est une application définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire est continue, si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné. Généralement, toutes les variables qui résultent d'une mesure.

### *Espérance*

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace de probabilité  $(\Omega, P)$ , L'espérance  $E(X)$  de  $X$  est la valeur moyenne des valeurs prises par  $X$ , pondérées par leur probabilité de réalisation. l'espérance d'une variable aléatoire est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (\text{B.1})$$

### *Variance, écart-type et covariance*

Nous pouvons caractériser les variables aléatoires  $X_i$  par la dispersion des valeurs qu'elles prennent autour de leur valeur moyenne (étudier les variations d'une variable par rapport à elle-même). Une façon de mesurer cette dispersion est de déterminer la valeur moyenne de carré de la distance entre  $X_i$  et  $E(X_i)$  que nous appelons la variance. La covariance va permettre d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leur moyenne respective.

- Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace de probabilité  $(\Omega, P)$ . La variance  $Var(X)$  est :

$$Var(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) \quad (\text{B.2})$$

- L'écart-type  $\sigma(X)$  est :

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad (\text{B.3})$$

- La covariance de deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  ayant chacune une variance, notée  $Cov(X, Y)$ , est :

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (\text{B.4})$$

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites non corrélées : leur corrélation est également nulle.

### *Coefficient de corrélation*

Le coefficient de corrélation, entre deux ou plusieurs variables aléatoires, permet de donner une mesure synthétique de l'intensité de la relation qui peut exister entre ces variables. Il est défini comme suit :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{B.5})$$

Si X et Y sont indépendantes, le coefficient de corrélation est nul.

### *Lois de probabilités pour une variable aléatoire continue*

En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. Le tableau B.1 quelques lois les plus utilisées dans la littérature.

**Tableau B.1:** Lois de probabilités pour une variable aléatoire continue.

Loi	Notation	Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$U([a, b])$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\xi(\lambda), \lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale (Gaussienne)	$N(m, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$m$	$\sigma^2$