



HAL
open science

Un ticket pour le sparse : de l'estimation des signaux et des paramètres en problèmes inverses bernoulli-gaussiens

Pierre Barbault

► To cite this version:

Pierre Barbault. Un ticket pour le sparse : de l'estimation des signaux et des paramètres en problèmes inverses bernoulli-gaussiens. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPASG049 . tel-04249731

HAL Id: tel-04249731

<https://theses.hal.science/tel-04249731>

Submitted on 19 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un ticket pour le Sparse : De l'estimation des signaux et des paramètres en problèmes inverses Bernoulli-Gaussiens

*A ticket for sparse : Estimation of signals and
parameters in a bernoulli-gaussian inverse problem*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 580, sciences et technologies de l'information et de la
communication (STIC)

Spécialité de doctorat : Sciences du traitement du signal et des images

Graduate School : Informatique et sciences du numérique

Réferent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **Laboratoire des signaux et systèmes**
(Université Paris-Saclay, CNRS, CentraleSupélec), sous la direction de **Matthieu**
KOWALSKI, Maître de Conférences, HDR, Université Paris-Saclay, et le co-encadrement de
Charles SOUSSEN, Professeur, CentraleSupélec, L2S, Université Paris-Saclay

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 19 septembre 2023, par

Pierre BARBAULT

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Philippe CIUCIU

Directeur de Recherche CEA/NeuroSpin, Inria Saclay

Angélique DREMEAU

Maître de Conférences, HDR, Lab-STICC, ENSTA Bretagne

Jean-François GIOVANNELLI

Professeur des Universités, IMS LAB, Université de Bor-

deaux

Sandrine ANTHOINE

Chargée de Recherche CNRS, I2M, Aix Marseille Univer-

sité

Président

Rapporteuse & Examinatrice

Rapporteur & Examineur

Examinatrice

Titre : Un ticket pour le Sparse : De l'estimation des signaux et des paramètres en problèmes inverses Bernoulli-Gaussiens.....

Mots clés : Problèmes-Inverses, Parcimonie, Bernoulli-Gaussien, Espérance-Maximisation

L'imagerie par Magnéto/Électro Encéphalographie (M/EEG) peut servir à reconstruire les foyers d'activité cérébrale en mesurant le champ Électro Magnétique produit par ce dernier. Même si le temps caractéristique des signaux enregistrés est assez faible pour pouvoir envisager un modèle linéaire d'acquisition, le nombre de sources possibles reste très large face au nombre de capteurs. De fait, il s'agit là d'un problème mal posé et de surcroît de grande dimension. Afin de se ramener dans le cadre d'un problème qui admet une solution atteignable, une hypothèse courante, et qui fait sens pour les neurones, est que les sources sont parcimonieuses i.e. que le nombre de valeurs non-nulles est très petit.

On modélise alors le problème d'un point de vue probabiliste en utilisant une distribution *a priori* Bernoulli-gaussienne (BG) pour les sources. Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de résoudre un tel problème, mais la plupart d'entre elles font appel à une connaissance des paramètres de la loi BG. L'objectif de cette thèse est de proposer une approche entièrement non-supervisée qui permet d'estimer les paramètres de la loi BG ainsi que d'estimer les sources. Pour ce faire les algorithmes d'Espérance-Maximisation (EM) sont explorés.

Dans un premier temps, le cas le plus simple est traité : celui du débruitage où l'opérateur linéaire est l'identité. Dans ce cadre trois

algorithmes sont proposés : Une méthode des Moments basée sur la statistique des données, un EM et un algorithme d'estimation jointe des sources et des paramètres. Les résultats montrent que l'EM initialisé par la méthode des Moments est le meilleur candidat pour l'estimation des paramètres.

Dans un second temps, les résultats précédents sont étendus au cas général d'opérateurs linéaires quelconques grâce à l'introduction d'une variable latente. Cette variable, en découplant les sources des observations, permet de dériver des algorithmes dit 'latents' qui alternent entre une étape de descente de gradient et une étape de débruitage qui correspond exactement au problème traité précédemment. Les résultats montrent alors que la stratégie la plus efficace est l'utilisation de l'estimation jointe 'latente' qui initialise l'EM 'latent'.

Enfin, la dernière partie de ces travaux est consacrée à des considérations théoriques concernant les choix d'estimateurs joints ou marginaux du support et/ou des sources dans le cas supervisé. Ces travaux montrent que l'on peut encadrer les fonctions de coûts associées aux problèmes marginaux par celles associées à des problèmes joints grâce à une reparamétrisation du problème. Cela permet alors de proposer une stratégie générale d'estimation basée sur l'initialisation d'algorithmes d'estimation marginale par des algorithmes d'estimation jointe.

Title : A Ticket for Sparse : Estimation of signals and parameters in a Bernoulli-Gaussian Inverse Problem.....

Keywords : Inverse-Problem, Sparsity, Bernoulli-Gaussian, Expectation-Minimization

Abstract : Magneto/Electro Encephalography (M/EEG) imaging can be used to reconstruct focal points of cerebral activity by measuring the Electro Magnetic field produced by it. Even if the characteristic time of the recorded signals is low enough to be able to consider a linear acquisition model, the number of possible sources remains very large compared to the number of sensors. In fact, this is an ill-posed and, moreover, a large-scale problem. In order to reduce it to a 'well-posed' problem, a common assumption, and which makes sense for neurons, is that the sources are sparse i.e. that the number of non-zero values is very small.

We then model the problem from a probabilistic point of view using a Bernoulli-Gaussian (BG) *a priori* for the sources. There are many methods that can solve such a problem, but most of them require knowledge of the parameters of the BG law. The objective of this thesis is to propose a completely unsupervised approach which allows to estimate the parameters of the BG law as well as to estimate the sources if possible. To do this, Expectation-Minimization (EM) algorithms are explored.

First, the simplest case is treated : that of denoising where the linear operator is the identity. In this framework, three algorithms are proposed : A Moments method based on data

statistics, an EM and a joint estimation algorithm for sources and parameters. The results show that the EM initialized by the Method of Moments is the best candidate for parameter estimation.

Secondly, the previous results are extended to the general case of any linear operator thanks to the introduction of a latent variable. This variable, by decoupling the sources from the observations, makes it possible to derive so-called 'latent' algorithms which alternate between a gradient descent step and a denoising step which corresponds exactly to the problem dealt with previously. The results then show that the most effective strategy is the use of the 'latent' joint estimate which initializes the 'latent' EM.

Finally, the last part of this work is devoted to theoretical considerations concerning the choice of joint or marginal estimators in the supervised case. In particular with regard to the sources and their supports. This work shows that it is possible to frame marginal problems by joint problems thanks to a reparameterization of the problem. This then makes it possible to propose a general estimation strategy based on the initialization of marginal estimation algorithms by joint estimation algorithms.

Table des matières

1	Introduction	17
1.1	Contexte	17
1.1.1	L'imagerie cérébrale	17
1.1.2	La M/EEG	17
1.2	Contributions	21
2	Estimation de Signaux Parcimonieux	23
2.1	Les problèmes inverses	23
2.1.1	Formalisme et Linéarité	24
2.1.2	Un problème mal posé	24
2.1.3	Régularisation et A Priori	26
2.1.4	Parcimonie	27
2.2	Algorithmes d'estimation supervisée des sources	30
2.2.1	Approches variationnelles	30
2.2.2	Approches orientées données : Exemple du Plug & Play	34
2.2.3	Approche probabiliste	35
2.3	Estimation des paramètres	37
2.3.1	Méthode des moments	38
2.3.2	Approche par maximum de vraisemblance	38
2.3.3	Approche jointe	40
2.3.4	Approche régularisée	41
2.3.5	Sparse Bayesian Learning	42
2.4	Conclusion	43
3	Estimations des sources dans le cadre BG supervisé	45
3.1	Modèle BG en x	46
3.1.1	Estimateur de Bayes	46
3.1.2	Estimateur du MAP	48
3.2	Le modèle BG comme un produit de variables aléatoires	51
3.2.1	Estimateur de Bayes	52
3.2.2	Estimateur du MAP (Joint)	52
3.3	Modèle du support : Le modèle marginal	54
3.3.1	Estimateur de Bayes	55
3.3.2	Estimateur du MAP (Marginal)	55
3.4	En résumé	56
3.5	Conclusion	58

4	Estimation des paramètres en débruitage	61
4.1	Méthode des Moments	62
4.1.1	Mise en équation du problème	62
4.1.2	Résolution du système	64
4.1.3	Algorithme complet	65
4.2	Estimation Marginale et EMs	66
4.2.1	s en variable cachée	67
4.2.2	x en variable cachée	68
4.2.3	(r, s) en variable cachée	70
4.3	Estimation Jointe des sources et paramètres	73
4.3.1	Un problème d'optimisation sous contraintes	73
4.3.2	Résolution du problème non-contraint	74
4.3.3	Algorithme complet	77
4.4	Étude numérique	77
4.4.1	Influence du nombre de données accessibles	78
4.4.2	Influence de la parcimonie	81
4.4.3	Influence du niveau de bruit	81
4.5	Conclusion	81
5	Extension au cas des problèmes inverses généraux	87
5.1	Introduction d'une variable latente	88
5.1.1	Distribution a posteriori de z	89
5.1.2	Vraisemblance	90
5.2	Estimation jointe de x, ω avec z en variable cachée	90
5.2.1	Etape-E	91
5.2.2	Etape-M	92
5.2.3	Algorithme complet	94
5.3	Estimation jointe de z, ω avec x en variable cachée	96
5.3.1	Etape-E	96
5.3.2	Etape-M	96
5.3.3	Algorithme complet	98
5.4	Expérimentations	98
5.4.1	Estimation du signal	102
5.4.2	Estimation des paramètres	105
5.5	Variantes	109
5.5.1	En choisissant s	109
5.5.2	En choisissant (r, s)	110
5.6	Conclusion	111
6	Impact du choix de modèle/relaxation	113
6.1	Modèle Bernoulli-Gaussien et Maxima A Posteriori	114
6.1.1	Minimiseurs : MAP-Joint vs MAP-Marginal	116
6.2	Relaxation continue	121

6.2.1	MAP-Joint Continu	122
6.2.2	MAP-Marginal Continu	124
6.3	Optimiser le MAP-Marginal	125
6.3.1	Etape-E	126
6.3.2	Etape-M	127
6.3.3	Résumé de l'algorithme	128
6.3.4	Optimisation par relaxation continue	128
6.4	Étude expérimentale des EMs	130
6.5	Conclusion	134
7	Conclusion Générale et Perspectives	135
7.1	Conclusion de la thèse	135
7.2	Perspectives et travaux futures	136

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mes deux encadrants de thèse Matthieu Kowalski et Charles Soussen pour leur précieux conseils et leur soutien dans l'accomplissement de ce travail. Je vous en suis très reconnaissant.

Je tiens aussi à remercier Angélique Drémeau et Jean-François Giovannelli ainsi que Sandrine Anthoine et Philippe Ciuciu d'avoir relu attentivement mon manuscrit et pour votre participation active dans l'évaluation de ma thèse. Vos nombreux retours et la pertinence de vos remarques ont été d'une importance clé dans la finalisation de ses trois années. Je remercie aussi l'ENS Paris Saclay d'avoir financé ces travaux.

Je tiens aussi à remercier les membres du GPI qui m'ont accueilli au sein du laboratoire (malgré les confinements) notamment Stefano, Mickaël, Ralph, Daouda, Nicolas, Marine, Agathe, Dan et Sunrise. Merci pour les rigolades quotidiennes autour du café/thé, tous les bons moments passés de manière général et merci de m'avoir suivi jusqu'au cinéma !

Merci au passage à Kad et O pour l'inspiration du titre de ma thèse.

A tous les ami·e·s de Vendée, de Léonard, de Livet et de l'ENS avec qui je partage de chaleureux souvenirs.

Merci infiniment à ma magnifique brochette de colocataires qui ont eu à me souffrir toutes ces années durant : Alice(s), Chatan, Cheddar, Daphné, Fanfoué, Ferd, Fr6, Marion, Mathilde, Nico, Pepette, RD, Richou, Stophe !

Enfin un immense merci à ma famille, à mon frère et à mes parents pour leur soutien quotidien et leur amour inconditionnel.

Table des figures

1.1	Schéma d'acquisition des signaux M/EEG.	18
1.2	Dipôle formé par un neurone 'pyramidale', ainsi que le courant qui se propage lors de son activation.	19
1.3	géométrie des neurones 'pyramidaux' (modélisés ici par les bâtons) lorsqu'ils arrivent au niveau du cortex.	20
1.4	Positionnement au sein du pipeline de l'ANR.	20
2.1	Problème Direct et Problème Inverse.	24
2.2	La démarche d'inversion.	25
2.3	Opérateurs proximaux correspondant à la régularisation ℓ_0 et ℓ_1 (en prenant $\lambda = 2$).	32
2.4	Étapes de déroulement d'un MCMC.	36
2.5	Mélange de Gaussiennes	40
3.1	Seuil T_s dans le plan (σ_x^2, σ_e^2)	57
3.2	Seuil T_x dans le plan (σ_x^2, σ_e^2)	58
3.3	Seuil T_r dans le plan (σ_x^2, σ_e^2)	59
4.1	iSNR = 10dB, $p = 0.01$. Estimation des paramètres θ	79
4.2	iSNR = 10dB, $p = 0.01$. Estimation des sources \mathbf{x}, \mathbf{s}	80
4.3	iSNR = 10dB, $N = 1000$. Estimation des paramètres θ	82
4.4	iSNR = 10dB, $N = 1000$. Estimation des sources \mathbf{x}, \mathbf{s}	83
4.5	$p = 0.01$ et $N = 1000$. Estimation des paramètres θ	84
4.6	$p = 0.01$ et $N = 1000$. Estimation des sources \mathbf{x}, \mathbf{s}	85
5.1	iSNR = 5dB. Estimation des paramètres ($\text{error}_p, \text{error}_{\sigma_x^2}$ comme défini dans (5.36) et $\text{error}_{\sigma_e^2}$ (5.35))	100
5.2	iSNR = 5dB. SNR de sortie comme défini dans (5.37), Faux Négatif et Faux Positif (5.38)	101
5.3	iSNR = 10dB. Estimation des paramètres ($\text{error}_p, \text{error}_{\sigma_x^2}$ comme défini dans (5.36) et $\text{error}_{\sigma_e^2}$ (5.35))	103
5.4	iSNR = 10dB. SNR de sortie comme défini dans (5.37), Faux Négatif et Faux Positif (5.38)	104
5.5	iSNR = 20dB. Estimation des paramètres ($\text{error}_p, \text{error}_{\sigma_x^2}$ comme défini dans (5.36) et $\text{error}_{\sigma_e^2}$ (5.35))	107
5.6	iSNR = 20dB. SNR de sortie comme défini dans (5.37), Faux Négatif et Faux Positif (5.38)	108
6.1	\tilde{p} en fonction du rapport signal à bruit maximum.	118

6.2	Estimateurs du MAP marginal <i>vs</i> du MAP joint, comparés pour $p = 0.01$ et $\sigma_e^2 = 0.01$. La mesure de SNR des signaux reconstruits \mathbf{x} est donnée pour certains points (de même que le score du meilleur SNR atteint).	131
6.3	Estimateurs du MAP marginal <i>vs</i> du MAP joint, comparés pour $p = 0.05$ et $\sigma_e^2 = 0.01$. La mesure de SNR des signaux reconstruits \mathbf{x} est donnée pour certains points (de même que le score du meilleur SNR atteint).	132
6.4	Estimateurs du MAP marginal <i>vs</i> du MAP joint, comparés pour $p = 0.5$ et $\sigma_e^2 = 0.001$. La mesure de SNR des signaux reconstruits \mathbf{x} est donnée pour certains points (de même que le score du meilleur SNR atteint).	133
7.1	Estimation des colonnes corticales actives pour un potentiel évoqué auditif.	137

Liste des tableaux

3.1	Valeurs du seuil en fonction du choix de modèle.	56
4.1	Mises à jours des estimateurs des paramètres pour les algorithmes EMS avec $A^t = \sum_{n=1}^N \phi_n^t$ et $B^t = \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2$	72

Liste des Algorithmes

1	Algorithme de descente proximale.	31
2	Fast Iterative Soft Thresholding.	31
3	Exemple d'Algorithme de type Matching Pursuit.	33
4	Méthodes Plug & Play.	35
5	Exemple d'Algorithme de type Metropolis-Hastings.	36
6	Classification EM.	40
7	Champagne EM.	42
8	Méthode des Moments pour les signaux BG.	66
9	EMs pour l'estimation des paramètres.	72
10	Estimation jointe des sources et des paramètres.	77
11	EM pour l'estimation Jointe de \mathbf{x} et des paramètres	95
12	Alternate Gradient EM.	98
13	Estimateur MMAP du support \mathbf{s}	128
14	Estimation des \mathbf{s} relâchés.	129

Notations

- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{N} : Ensemble des entiers naturels.
- a : Scalaires.
- \mathbf{y} : Vecteurs.
- \mathbf{H} : Matrices.
- \mathbf{I}_N : Matrice identité de taille $N \times N$.
- $(\cdot)^T$: Transposition.
- $\|\mathbf{x}\|_2$: Norme ℓ_2 .
- $\|\mathbf{x}\|_p$: Norme ℓ_p .

Distributions de probabilités

- δ_d : Distribution de Dirac centrée en d .
- $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$: Loi Normale de moyenne μ et de variance σ .
- $\mathcal{B}(p)$: Loi de Bernoulli de paramètre p .
- $p(a|b)$: Densité conditionnelle de a sachant b .

1 - Introduction

1.1 . Contexte

1.1.1 . L'imagerie cérébrale

Au travers de la collaboration avec l'ANR BMW, les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le contexte de l'imagerie cérébrale. L'imagerie cérébrale ou neuro-imagerie regroupe un ensemble de techniques permettant d'observer du contenu du cerveau jusqu'à l'activité de ce dernier. Là où l'analyse du contenu biologique du cerveau peut être réalisée par biopsie ou chirurgie, le suivi de l'activité de ce dernier nécessite de passer par des méthodes non-invasives. En effet, il paraît nécessaire de maintenir un sujet conscient durant la phase d'observation, mais dans une plus large mesure, la prise de mesure doit minimiser son impact sur le résultat des observations. C'est notamment l'observation de l'activité des colonnes corticales, i.e. des groupes de neurones dans le cortex qui nous intéresse ici. Que ce soit pour le diagnostic de maladies ou pour l'étude du fonctionnement du cerveau sain, l'analyse des foyers d'activité neuronale est une préoccupation fondamentale.

La difficulté principale provient de la double localisation de ces foyers d'activité : on voudrait pouvoir obtenir une résolution spatio-temporelle élevée de l'activité des colonnes corticales. Or la précision des imageurs en terme de résolution est souvent faite au détriment d'une des deux composantes (spatiale ou temporelle). On peut citer par exemple l'IRM(f) dont les acquisitions permettent de cartographier précisément le cerveau tout en perdant l'évolution temporelle de l'activité, ou alors pour observer des phénomènes à temps lents.

1.1.2 . La M/EEG

La Magnéto/Electro-Encéphalographie (M/EEG), est apparue en 1968 dans [Cohen, 1968] (1925 pour la partie champ électrique). Il s'agit d'une méthode permettant de mesurer le champ électromagnétique produit par le cerveau à l'extérieur du crâne en plaçant des capteurs (électrodes + magnétomètres) sur le scalp (surface extérieure de la tête). Les signaux observés sont mesurés dans le temps et définissent en chaque capteur un canal. Dès lors, on peut comprendre l'avantage premier de cette méthode : la fréquence d'échantillonnage sur les capteurs étant celle donnée par le matériel utilisé, elle est donc seulement limitée par le choix de matériel. Cependant, cette précision temporelle élevée se paye par une difficulté d'obtenir une précision spatiale élevée. On suppose alors que les colonnes corticales sont les sources de l'activité électromagnétique mesurée. En effet, ces dernières peuvent se polariser au niveau de leurs extrémités, formant ainsi un champ électrique. De plus, l'activité est transmise le long de ces neurones via une onde de potentiel, formée par un cou-

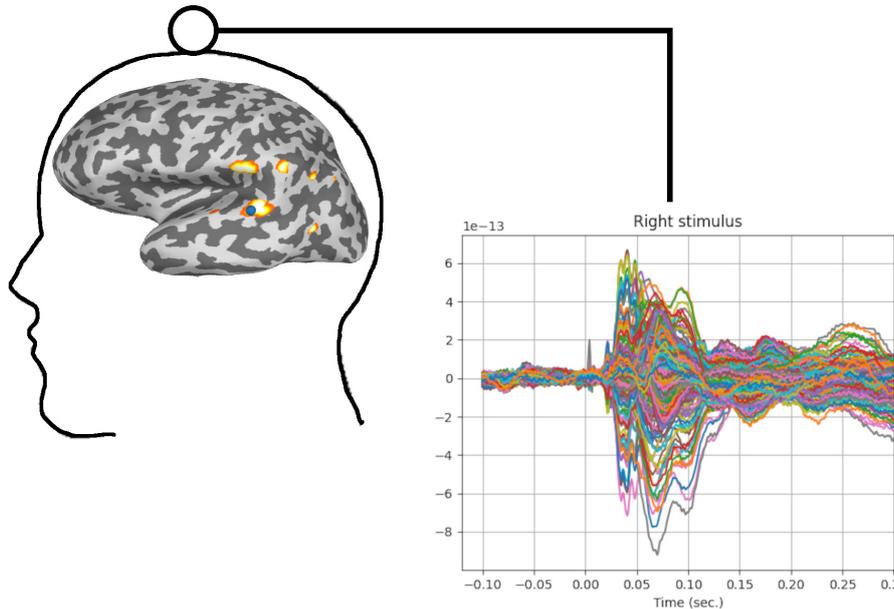


Figure 1.1 – Schéma d'acquisition des signaux M/EEG.

rant ionique à l'interface entre le neurone et le milieu extérieur, provoquant un courant équivalent le long de l'axe du neurone. Ce courant est alors à l'origine d'un champ magnétique.

Cependant, un cerveau humain moyen contient en moyenne un nombre de neurones de l'ordre de la dizaine à la centaine de milliards ($\sim 86 \times 10^9$). Ces derniers possédant à priori une géométrie propre, cela représente un nombre conséquent de variables à déterminer en comparaison avec le nombre de capteurs qui est limité par le matériel (~ 300 à l'heure actuelle). Même si on diminue le nombre de sources en regroupant les neurones en voxels ($\sim 10^5$), on saisit alors toute la sous-détermination du problème et donc sa complexité. C'est pourquoi un certain nombre d'hypothèses sont faites afin de réduire la complexité du problème avec des conséquences plus ou moins importantes sur le résultat des observations.

Hypothèse 1 : La première hypothèse est celle qui consiste à dire que l'ensemble des opérations fonctionnelles (c'est-à-dire celle qui ont un intérêt dans le cadre d'études sur la réponse à un stimuli ou d'actions du sujet) sont réalisées par la partie superficielle du cortex. Dès lors il n'est plus nécessaire de modéliser l'entièreté du cerveau. Cette hypothèse est appuyée par la disposition supposément aléatoire des neurones situés dans des zones plus internes dont les contributions électromagnétiques s'annulent en se sommant. Le problème principal posé par cette hypothèse, c'est qu'elle fait disparaître de-facto les sources profondes potentielles.

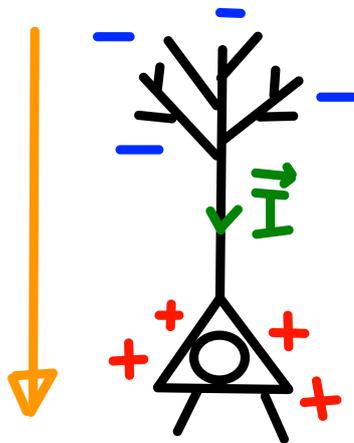


Figure 1.2 – Dipôle formé par un neurone 'pyramidale', ainsi que le courant qui se propage lors de son activation.

Hypothèse 2 : La seconde hypothèse est une considération d'ordre géométrique : Il s'agit de la forme des neurones qui existent à la surface du cortex. Les neurones en surface sont appelés "pyramidaux" car leurs formes arborescentes se projettent de l'intérieur vers la surface du cortex créant cette allure caractéristique. Cela permet donc de proposer l'hypothèse que tout neurone arrive normal à la surface du cortex et donc les dipôles équivalents sont eux aussi orientés perpendiculairement à la surface du cortex. On passe alors de trois composantes par source à une seule. L'inconvénient introduit par cette hypothèse est qu'elle contraint le modèle à suivre la géométrie supposée du cortex.

Hypothèse 3 : Enfin, on suppose que les activités cérébrales ont un temps caractéristique assez faible pour pouvoir considérer qu'à tout instant l'ensemble cortex + capteur est en champs quasi statiques. Cette hypothèse, basée sur l'observation de signaux réels est la plus raisonnable dont nous disposons. Ainsi, le lien entre sources et capteurs se fait au travers des équations de Maxwell en champs statiques ce qui donne la relation linéaire suivante :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{S} \quad (1.1)$$

Où $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{C \times T}$ représente la matrice des mesures, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{V \times T}$ la matrice des sources cérébrales. $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{C \times V}$ est la matrice de "lead-field" et correspond aux résultats des équations de Maxwell. Elle est unique pour chaque sujet car elle dépend de la géométrie de la boîte crânienne, des circonvolutions du cortex et du placement des capteurs. Elle est estimée après avoir cartographié le cortex

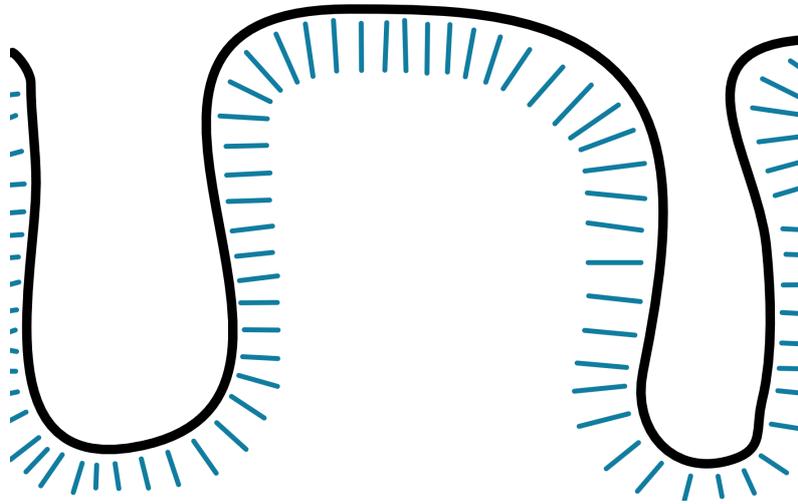


Figure 1.3 – géométrie des neurones 'pyramidaux' (modélisés ici par les bâtons) lorsqu'ils arrivent au niveau du cortex.

par IRM et en utilisant une méthode de résolution par éléments finis ou par la méthode des intégrales de frontière.

Toute la difficulté du problème est donc d'extraire une information de position des sources à partir de mesures non-adaptées à la localisation spatiale.

Positionnement des travaux et cadre général Comme nous venons de le voir, la M/EEG est classiquement modélisée par un système linéaire de grande dimension. Notre contribution au sein de l'ANR et au sens large se porte sur la problématique générale de l'estimation de sources dans le cas de problèmes linéaires en grande dimension. On se concentre sur le cas où tout

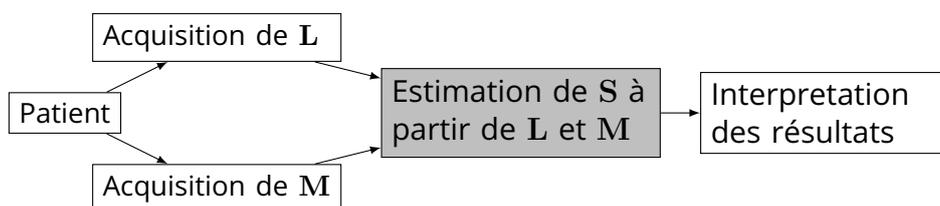


Figure 1.4 – Positionnement au sein du pipeline de l'ANR.

opérateur linéaire réel est connu et où les sources sont supposées être actives en un nombre réduit.

1.2 . Contributions

Les contributions de cette thèse sont les suivantes. Dans un premier temps nous proposons un estimateur, au sens de la méthode des moments, des paramètres d'un signal Bernoulli-Gaussien (BG) affecté d'un bruit blanc gaussien. Ensuite, nous proposons un algorithme d'Espérance Minimisation (EM) toujours pour l'estimation des paramètres d'un signal BG bruité. Enfin, nous proposons une méthode d'estimation jointe du signal BG en même temps que ses paramètres.

Dans un deuxième temps, une des contributions principales, est l'extension des résultats précédents au cas général des signaux BG qui sont affectés d'un opérateur linéaire puis bruité. Cela représente alors deux nouveaux algorithmes d'estimation jointe ou marginale des paramètres. Enfin, la troisième contribution est une mise en perspective des méthodes de l'existant au travers du prisme de l'estimation du support dans le cadre BG. On offre ici des bornes sur les critères à estimer ainsi que des réinterprétations des techniques classiques de résolutions de problèmes inverses.

Publications

- Pierre Barbault, Matthieu Kowalski, and Charles Soussen. Parameter estimation in sparse inverse problems using bernoulli-Gaussian prior. In International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pages 5413–5417. IEEE, 2022.
- Pierre Barbault, Matthieu Kowalski, and Charles Soussen. Estimation des paramètres d'un prior Bernoulli-gaussien en problèmes inverses. In GRETSI, 2022.
- Pierre Barbault, Matthieu Kowalski, and Charles Soussen. Marginal MAP estimation of a Bernoulli-Gaussian signal : continuous relaxation approach. In EUSIPCO 2023.
- Pierre Barbault, Matthieu Kowalski, and Charles Soussen. Estimation du MAP Marginal d'un signal Bernoulli-gaussien : une approche par relaxation continue. In GRETSI, 2023.

Pre-print

- Pierre Barbault, Matthieu Kowalski, and Charles Soussen. "LEMUR : a Latent EM Unsupervised Regression for Sparse Inverse Problems", p.1-11. Soumission prochaine prévue à IEEE Transaction on Signal Processing.

2 - Estimation de Signaux Parcimonieux

Sommaire

2.1	Les problèmes inverses	23
2.1.1	Formalisme et Linéarité	24
2.1.2	Un problème mal posé	24
2.1.3	Régularisation et A Priori	26
2.1.4	Parcimonie	27
2.2	Algorithmes d'estimation supervisée des sources	30
2.2.1	Approches variationnelles	30
2.2.2	Approches orientées données : Exemple du Plug & Play	34
2.2.3	Approche probabiliste	35
2.3	Estimation des paramètres	37
2.3.1	Méthode des moments	38
2.3.2	Approche par maximum de vraisemblance . .	38
2.3.3	Approche jointe	40
2.3.4	Approche régularisée	41
2.3.5	Sparse Bayesian Learning	42
2.4	Conclusion	43

Ce chapitre présente un état de l'art en matière de résolution de problèmes inverses parcimonieux. On commence par introduire la notion de problème inverse linéaire ainsi que le formalisme associé. On introduit aussi les notions de régularisation et de parcimonie. Ensuite on donne un aperçu de la résolution du problème lorsque les paramètres sont connus. Enfin, on se penche sur les méthodes qui permettent l'estimation des paramètres de tels modèles.

2.1 . Les problèmes inverses

La science a, entre autres, pour but de relier les causes de phénomènes observables à leurs conséquences. Parmi ces causes on distinguera deux catégories : les paramètres qui décrivent les propriétés spécifiques d'un système particulier et les sources qui peuvent correspondre à des états mis en entrée du système étudié.

A partir de ces constatations il est possible de proposer deux postures différentes face à un système. La première est ce que nous appellerons la résolution du **Problème Direct** ou posture de **Modélisation**, qui cherche, en utilisant des outils mathématiques, à prédire des observations connaissant les

causes qui leur donneront naissance. La deuxième approche est la résolution du **Problème Inverse** ou posture de **Régression** qui cherche à retrouver les causes à partir des observations. Le problème inverse ne peut se défaire du problème direct car les processus de régression se basent sur l'inversion du modèle mathématique, soit du résultat du problème direct.

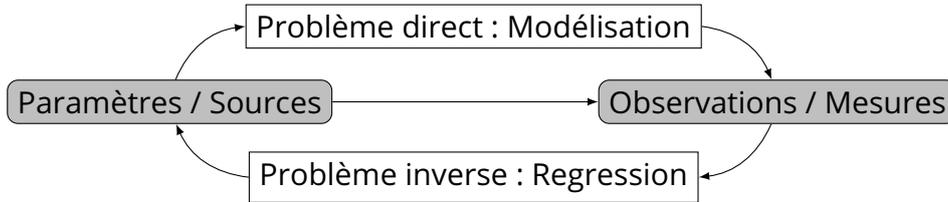


Figure 2.1 – Problème Direct et Problème Inverse.

On retrouve comme exemple de problèmes inverses le cas de l'imagerie médicale ou spatiale qui cherche, à partir de mesures faites par un ou plusieurs appareils, à reconstituer une image de l'intérieur d'un corps [Chaâri et al., 2011] ou de l'Univers [Rodet et al., 2008]. Mais on peut aussi citer notre propre cerveau qui est capable de reconstruire le volume d'objets simplement à partir de notre vision.

Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur la résolution du problème inverse et partirons du principe que la démarche de modélisation du problème direct a déjà été faite en amont.

2.1.1 . Formalisme et Linéarité

Ici, nous allons nous restreindre au cas spécifique des problèmes linéaires, c'est-à-dire les problèmes qui s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2.1)$$

avec le vecteur (ou la matrice) qui contient les observations $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ ($\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{M \times K}$) qui sont causées par des sources $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ($\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times K}$) et obtenues en passant dans un système dont l'effet est modélisé par l'opérateur $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$. On part du principe que, comme les observations sont obtenues via des appareils de mesures imparfaits de même que les modèles utilisés pour décrire les différents phénomènes, il est d'usage de rajouter un vecteur de bruit ou d'erreur noté $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^M$ ($\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{M \times K}$).

2.1.2 . Un problème mal posé

Si l'on fait l'hypothèse que la matrice \mathbf{H} est **inversible**, alors résoudre le problème (2.1) de manière naïve revient à prendre l'inverse de la matrice d'opérateur et de l'appliquer aux observations. On obtient alors le résultat suivant

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{H}^{-1}\mathbf{e} \quad (2.2)$$

Il arrive que même si la matrice est inversible, elle soit mal conditionnée et donc le résidu $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e}$ peut devenir non-négligeable et fausser complètement les résultats. Lorsque $M > N$, alors le problème est **sur-déterminé**. On peut alors utiliser la méthode des moindres carrés ordinaire qui minimise l'erreur d'attache aux donnés :

$$\epsilon(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.3)$$

en utilisant le carré de la norme ℓ_2 qui correspond à la somme des carrés des éléments du vecteur. L'estimateur de \mathbf{x} obtenu en minimisant cette erreur est le suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \epsilon(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.4)$$

Pour trouver la solution de ce problème, il suffit d'annuler la dérivée par rapport à \mathbf{x} , ce qui donne l'équation suivante :

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (2.5)$$

Ici, on a l'assurance que $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ soit carrée. Cependant, comme précédemment, l'application linéaire associée à $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ peut avoir un noyau non restreint à zero et donc la solution du problème n'est pas nécessairement unique. De plus, $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ peut tout aussi bien être mal conditionnée et contribuer à l'accroissement de l'erreur.

Enfin, il nous reste le cas **sous-déterminé** défini par $N > M$. Les problèmes inverses sous-déterminés se caractérisent par un nombre insuffisant de données d'entrée pour déterminer de manière unique les paramètres ou les variables d'intérêt du système étudié. Cela signifie qu'il existe plusieurs solutions possibles qui correspondent aux mêmes données observées. La démarche d'inversion présentée dans les équations précédentes est alors infructueuse. Il faut ajouter de l'information afin de restreindre l'espace des solutions et rendre le problème bien posé au sens de Hadamard [Hadamard, 1902], c'est-à-dire :

- existence de la solution,
- unicité de la solution,
- stabilité de la solution.

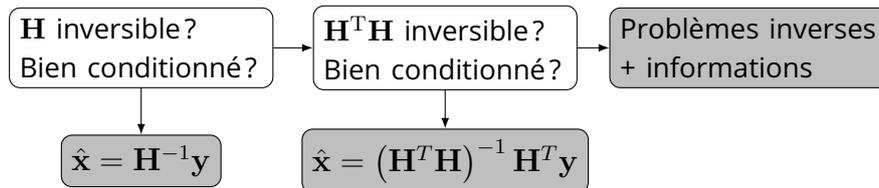


Figure 2.2 - La démarche d'inversion.

2.1.3 . Régularisation et A Priori

Dans la littérature on trouve deux formalismes qui permettent de proposer des solutions aux problèmes mal posés issus d’acquisitions de signaux physiques.

Les approches variationnelles fonctionnent sur le principe de la minimisation de l’erreur d’attache aux données définie précédemment sous une contrainte imposée sur la solution. On s’intéresse ici aux contraintes telles que la solution du problème contraint est équivalente à la solution du problème de minimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (2.6)$$

Où \mathcal{F} est appelé le **critère** associé à notre problème contraint, et qui s’écrit :

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

avec \mathcal{R} la fonction de pénalisation issue de la contrainte. On voit ici apparaître λ que nous appellerons **hyper-paramètre** et qui permet de régler l’influence de la pénalisation. Lorsqu’il est mis à zéro, on a la solution au sens de l’attache aux données (équation (2.4)). Mais si on choisit λ très grand, alors la solution tend vers le minimum de la fonction de pénalisation au détriment de l’attache aux données.

Les approches Bayésiennes désignent les méthodes basées sur la modélisation des signaux étudiés comme des variables aléatoires. On commence par la loi de la variable de bruit \mathbf{e} . Dans l’intégralité de cette thèse, on considérera l’hypothèse suivante : le bruit \mathbf{e} suit une loi gaussienne multivariée de moyenne nulle et de matrice de covariance diagonale (*i.e.* indépendant)

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}) \quad (2.8)$$

Cette hypothèse est entièrement liée à la nature des perturbations et bruits que l’on peut trouver lors de l’acquisition. L’hypothèse du bruit gaussien dans beaucoup de cas permet de ne pas perdre en généralités. Cependant il faut noter qu’il existe des cas où le bruit admet des distributions différentes. On peut ainsi par exemple citer le cas d’acquisitions en optique dont le bruit, issu du comptage des photons, suit une loi de Poisson [Giovannelli and Altmann, 2019].

L’information supplémentaire dans le cadre Bayésien est apportée par la distribution *a priori* des sources. Cette distribution représente l’ensemble des connaissances sur le comportement statistique des sources que l’on peut ajouter en amont du problème. Pour finir, on désignera par θ le vecteur de **paramètres** du modèle qui regroupe l’ensemble des réglages des différentes lois de probabilités.

Dès lors, plusieurs estimateurs des sources existent, tous basés sur la probabilité *a posteriori*. On appelle ***a posteriori*** la probabilité qu'une source ait été à l'origine des observations mesurées. En appliquant la règle de Bayes on peut décomposer la distribution *a posteriori* de la manière suivante

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta)}{p(\mathbf{y}|\theta)} p(\mathbf{x}|\theta) \quad (2.9)$$

avec $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta)$ la ***vraisemblance*** du modèle et $p(\mathbf{x}|\theta)$ l'*a priori* des sources.

Parmi les estimateurs basés sur cette approche probabiliste, on retrouve l'estimateur de la moyenne *a posteriori* :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{E}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta} [\mathbf{x}] \quad (2.10)$$

Ainsi que l'estimateur du Maximum *a posteriori* (MAP)

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta) \quad (2.11)$$

Il est intéressant de noter que le MAP de l'approche bayésienne peut conduire à la même formulation que l'approche variationnelle. En effet, comme on a supposé que le bruit est gaussien, et comme les densités de probabilités sont à valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) p(\mathbf{x}|\theta) &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) - \log p(\mathbf{x}|\theta) \\ &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 - \log p(\mathbf{x}|\theta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

On a donc un lien direct entre la fonction de pénalisation et la distribution *a priori* du signal source. Ce lien permet de traduire des contraintes en distributions et vice-versa.

2.1.4 . Parcimonie

Comme nous l'avons évoqué plus haut, les fonctions de pénalisation ainsi que les distributions *a priori* font appel à des connaissances supplémentaires sur le comportement des signaux. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au cas particulier de sources dites parcimonieuses.

Les signaux **parcimonieux** (**S**parse en Anglais) désignent l'ensemble des signaux dont le vecteur ne contient qu'un nombre faible de valeurs non nulles. On introduit alors la notion de support. On appelle support d'un vecteur l'ensemble des indices des éléments de ce vecteur qui sont non nuls. Un vecteur parcimonieux admet donc un petit support.

Bien qu'en général on s'attend à avoir un support qui représente entre 0 et 10 % de la taille du vecteur de source, la seule contrainte stricte que nous nous imposons et que l'on se fixe est que la taille du support doit être au plus la moitié de la taille du vecteur (< 50 % de la taille du vecteur).

Cette représentation fait sens dans beaucoup de problèmes réels, où l'on sait que de rares phénomènes ponctuels sont à l'origine des observations. C'est notamment l'hypothèse qui est faite ici pour l'activité du cerveau lors d'un enregistrement M/EEG.

Mais on peut aller plus loin en considérant que dans de nombreux cas, si les sources ne sont pas à première vue parcimonieuses, elles admettent une telle représentation dans un espace ou dans un dictionnaire adapté [Mallat, 1999]. On peut citer par exemple la base de Fourier, les bases d'ondelettes (et leurs variantes) ainsi que les représentations temps-fréquences. Il s'agit du problème de compression des données et dont le concept de parcimonie tire son origine. Il suffit alors de reparamétriser le problème comme suit

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{x}_{sparse} + \mathbf{e} = \mathbf{H}_D\mathbf{x}_{sparse} + \mathbf{e} \quad (2.13)$$

avec \mathbf{D} le dictionnaire (ou la base) dans lequel \mathbf{x} admet la représentation parcimonieuse \mathbf{x}_{sparse} et $\mathbf{H}_D = \mathbf{H}\mathbf{D}$. Le formalisme est alors le même que celui introduit, seul change l'opérateur.

Pénalisation Parcimonieuse : A l'aune de la définition de la parcimonie donnée précédemment, il paraît naturel de choisir le nombre de valeurs non nulles d'un vecteur comme fonction de pénalisation. C'est pourquoi depuis le début des années 2000 et [Donoho, 2001], on a vu apparaître la fonction coût ℓ_0 définie comme

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \text{Card}\{n \in \{1, N\} : x_n \neq 0\} \quad (2.14)$$

et qui permet de dériver le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_0} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_0 \quad (2.15)$$

La principale limitation de ce problème d'optimisation provient de l'aspect combinatoire [Natarajan, 1995] introduit par les fonctions de coût ℓ_0 , fonction qui est à valeurs discrètes et donc non différentiable. Historiquement, on a donc vu apparaître d'autres fonctions coût qui possèdent les propriétés de convexité, garantissant que tout minimum local est un minimum global et l'unicité de ce dernier. On peut notamment citer la norme ℓ_1 définie par

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_n |x_n| \quad (2.16)$$

On obtient alors une formulation connue du problème appelée Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO) [Tibshirani, 1996] ou Basis Pursuit Denoising [Chen and Donoho, 1994, Donoho, 2001] et qui s'écrit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_1} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_1 \quad (2.17)$$

De nombreuses alternatives au modèle LASSO sont apparues par la suite comme par exemple : Group LASSO [Yuan and Lin, 2006], Elastic-Net [Zou and Hastie, 2005], Adaptive LASSO [Zou, 2006], Bridge Regression [Fu, 1998], etc... Ces variantes permettent entre autres de mieux structurer les données ou bien de corriger le biais dans l'estimation des amplitudes au prix d'une perte de convexité. Enfin de manière plus générale, il est possible d'étendre les fonctions de pénalisations aux normes ℓ_p définies comme :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{1/p} \quad (2.18)$$

On sait notamment que prendre $p \in]0, 1[$ permet de favoriser la parcimonie de la solution [Frank and Friedman, 1993]. On a présenté le cas $p = 1$. Le cas $p = 2$ est un cas simple de système quadratique qui correspond à la régularisation dite de Tikhonov [Tikhonov et al., 1995] et donne la solution d'énergie minimale, non parcimonieuse en pratique. Lorsque l'on prend $0 < p < 1$, on parle alors de Bridge Régression. Le cas $p > 1$ a été notamment étudié dans [Fu, 1998].

A priori Parcimonieux : Si l'on retourne du côté bayésien du problème, il faut choisir une distribution qui permet de décrire la parcimonie d'un signal. En pratique on favorise des lois dites à "queues lourdes" [Mohammad-Djafari, 2012] car elles produisent une majorité de coefficients proches de zero et quelques valeurs "grandes". Parmi elles on cite notamment les lois de Student.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la distribution **Bernoulli-gaussienne**. Cette distribution est utilisée depuis les années 80 [Kormylo and Mendel, 1982] afin de modéliser une parcimonie stricte. On introduit alors pour la suite une variable liée au support $\mathbf{s} \in \{0; 1\}^N$ dont découle le modèle suivant :

$$s_n \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{alors} \quad p(s_n) = \begin{cases} p & \text{si } s_n = 1 \\ 1 - p & \text{si } s_n = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

la variable p , qui est le seul paramètre de la distribution de Bernoulli, quantifie directement la fraction d'éléments non nuls parmi nos sources. Il est donc raisonnable au vu de nos hypothèses, de poser $p \in]0, 0.5]$.

Ensuite, connaissant notre support, les amplitudes non-nulles sont modélisées par la partie gaussienne du modèle afin de ne pas perdre en généralité. On obtient la probabilité conditionnelle suivante :

$$p(x_n | s_n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma_x^2}\right) & \text{si } s_n = 1 \\ \delta_0(x_n) & \text{si } s_n = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Où δ_0 désigne la distribution de Dirac centrée en 0.

Ce mélange de lois entre dans le cadre plus général des modèles dit Spike & Slab [Mitchell and Beauchamp, 1988] (Pics et Dalles) définis par deux classes.

$$s_n \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{et} \quad x_n | s_n \sim \begin{cases} p_{spike}(x_n) & \text{si } s_n = 0 \\ p_{slab}(x_n) & \text{si } s_n = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Comme pour notre modèle, les distributions les plus utilisées sont les Diracs centrés en une valeur quelconque pour les Spikes, et une loi normale pour les Slabs. L'*a priori* Spike & Slab donne, lorsque l'on regarde le MAP avec une loi de Laplace pour les "Slabs", une régularisation appelée Spike & Slab LASSO (SSL) [Ročková and George, 2018].

2.2 . Algorithmes d'estimation supervisée des sources

Dans cette section, on présente succinctement les méthodes existantes qui permettent de résoudre les problèmes inverses parcimonieux introduits précédemment. On se place ici dans le contexte que l'on appelle **supervisé**, c'est-à-dire que l'ensemble des paramètres et hyper-paramètres du modèle est supposé connu.

Par la suite, comme nous ferons intervenir des algorithmes itératifs, nous utiliserons $t \in \mathbb{N}$ pour indiquer la valeur de toute variable ou tout paramètre à l'itération t de l'algorithme. Sauf mention contraire, $t = 0$ marque l'initialisation.

2.2.1 . Approches variationnelles

Dans un premier temps, nous allons traiter les approches par régularisation introduites dans la sous-section 2.1.3. Pour s'attaquer à l'estimation parcimonieuse, nous avons vu que les fonctions de coût ℓ_0 ou ℓ_1 sont les régularisations privilégiées. Il s'agit là de deux fonctions non différentiables. Ce caractère non différentiable ne permet pas de minimiser le critère \mathcal{F} en annulant le gradient par rapport à \mathbf{x} ou en appliquant des descentes de gradient.

Les approches par descentes proximales ont été proposées au début des années 2000 dans [Daubechies et al., 2004, Figueiredo and Nowak, 2003], pour la régularisation ℓ_1 et plus généralement pour les fonctions convexes et non différentiables dans [Combettes and Wajs, 2005]. On présente ici brièvement leur fonctionnement.

On définit l'opérateur proximal par

$$\text{prox}_{\mathcal{R}}(\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{x}}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 + \mathcal{R}(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

La définition de l'opérateur proximal nous permet d'interpréter ce dernier comme la solution du problème inverse dans lequel \mathbf{H} l'opérateur se réduit

à \mathbf{I} l'identité. On obtient un problème où les sources sont justes dégradées par du bruit. On peut alors montrer qu'un minimum du critère est un point fixe de l'algorithme 1 qui alterne entre une descente de gradient et l'application de l'opérateur proximal.

Algorithme 1 : Algorithme de descente proximale.

Soit \mathcal{R} la régularisation, L la plus grande valeur singulière de \mathbf{H} ;
while *has not converged* **do**
 $\mathbf{u}^t = \mathbf{x}^t + \frac{\mathbf{H}^T}{L}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^t);$
 $\mathbf{x}^{t+1} = \text{prox}_{\mathcal{R}}(\mathbf{u}^t);$
end

Pour la norme ℓ_1 , la régularisation correspondante est $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \lambda\|\mathbf{x}\|_1$. L'opérateur proximal associé est un seuillage dit '**doux**' défini par

$$\mathcal{S}_\lambda(u_n) = \begin{cases} u_n - \text{signe}(u_n) \times \lambda & \text{si } |u_n| > \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$

L'algorithme associé à cette méthode est appelé Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm (ISTA) pour algorithme de seuillage pondéré itératif. On peut aussi mentionner une version accélérée de ce dernier algorithme que l'on appelle Fast ISTA (FISTA) pour ISTA rapide introduit dans les travaux de [Beck and Teboulle, 2009]. La différence vient d'un terme inertiel qui pondère les itérations et permet de le rendre plus rapide en pratique.

Algorithme 2 : Fast Iterative Soft Thresholding.

Soit \mathcal{R} la régularisation et L la plus grande valeur singulière de \mathbf{H} ;
while *has not converged* **do**
 $\mathbf{u}^t = \mathbf{x}^t + \frac{\mathbf{H}^T}{L}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^t);$
 $\mathbf{v}^t = \text{prox}_{\mathcal{R}}(\mathbf{u}^t);$
 $\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{v}^t + \mu^t(\mathbf{v}^t - \mathbf{v}^{t-1});$
end

Le choix de μ^t permet d'obtenir une accélération de l'algorithme. Pour remplacer le choix de μ^t présenté dans FISTA, on peut utiliser $\mu^t = t/(t+4)$ [Chambolle and Dossal, 2015] qui assure la convergence des itérés tout en conservant la même vitesse de convergence que FISTA.

L'utilisation de la norme ℓ_1 comme régularisation conduit à un critère \mathcal{F} convexe, impliquant que tout minimum local est donc global. Cela permet de conclure que la descente proximale ℓ_1 est donc optimale malgré une convergence en un nombre infini d'itérations.

Lorsque l'on passe à la régularisation ℓ_0 , il est possible de trouver l'opérateur proximal associé. La régularisation dans ce cas correspond à $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \lambda \|\mathbf{x}\|_0$. Il s'agit alors aussi d'une opération de seuillage, cette fois dit 'dur', défini par

$$\mathcal{H}_\lambda(u_n) = \begin{cases} u_n & \text{si } |u_n| > \sqrt{2\lambda} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Les algorithmes associés au seuillage 'dur' se retrouvent sous la dénomination de Iterative Hard Thresholding (IHT) pour seuillage dur itératif. Comme le critère \mathcal{F} associé à la fonction de coût ℓ_0 est non-convexe, alors la descente proximale n'est que sous-optimale avec une dépendance forte à son initialisation.

On donne une représentation visuelle des différents opérateurs proximaux dans la figure 2.3. On observe bien sur cette figure que le problème du ℓ_0 est l'instabilité des solutions autour de la valeur du seuil. Problème qui est corrigé avec le ℓ_1 puisque l'on assure la continuité au point de seuillage. En revanche cela s'accompagne d'un biais systématique sur le résultat. Il a été

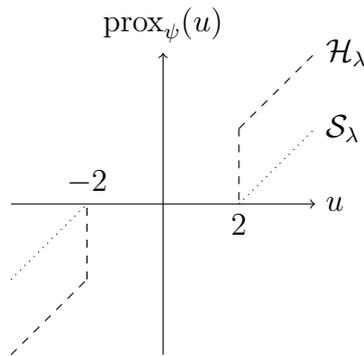


Figure 2.3 - Opérateurs proximaux correspondant à la régularisation ℓ_0 et ℓ_1 (en prenant $\lambda = 2$).

montré [Natarajan, 1995] que ce problème de minimisation ℓ_0 non-convexe se réduit à un problème combinatoire de sélection de variables sur l'espace des supports.

Les méthodes gloutonnes envisagent d'explorer l'espace des solutions de "proches en proches" en cherchant en chaque point quel est le point connexe qui minimise le plus le critère. Si le critère admet une forme telle qu'il est facile de l'évaluer en un point de l'espace des solutions à partir de la valeur connue du critère en un autre point qui ne diffère que d'un élément du vecteur \mathbf{x} . les méthodes gloutonnes se distinguent entre elles par la stratégie adoptée pour explorer l'espace. En effet, comme on assure ici seulement de faire diminuer le critère à chaque itération, alors on sait qu'on aura une convergence en un

temps fini vers un minimum local. Dès lors, le choix du point de départ est central dans la qualité des estimations. On présente ici quelques exemples.

La première version, le Matching Pursuit (MP) [Mallat and Zhang, 1993] et son pendant orthogonal (OMP) [Pati et al., 1993] commence d'un support vide et cherche à ajouter successivement des éléments tant que le critère ℓ_2 de l'équation (2.3) diminue. À l'inverse, il existe des méthodes 'backwards' [Miller, 2002] qui démarrent à partir d'un support plein et qui en retirent des éléments au fur et à mesure. Enfin, des approches consistant à itérativement retirer ou ajouter un élément au support afin de faire baisser le critère associé au MAP sont apparues sous le nom de Single Most Likely Replacement (SMLR) [Champagnat et al., 1996], [Soussen et al., 2011].

Algorithme 3 : Exemple d'Algorithme de type Matching Pursuit.

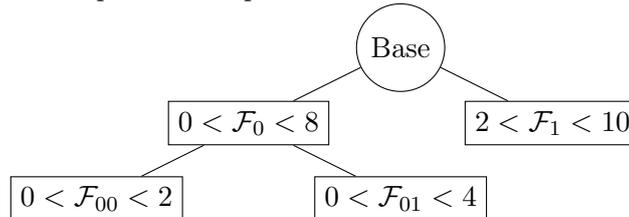
```

 $s^0 = \mathbf{0};$ 
for  $t \in \{0, \dots, N\}$  do
  |  $n = \operatorname{argmax}_i (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^t)^T \mathbf{h}_i$ 
end
 $s_n^{t+1} \leftarrow 1;$ 
Update  $x_n^{t+1}$  par la résolution du problème quadratique ;

```

Résolution exacte : Il est aussi possible d'envisager l'espace des solutions comme un arbre où chacun des nœuds est une sélection de la variable de support. C'est pourquoi de récentes techniques d'exploration optimale d'arbre ont été proposées à ces fins. Parmi elles on citera notamment les approches types Branch & Bound. On note que ces approches sont exactes dans le sens où elles sont garanties de trouver le minimum global.

Le Branch & Bound est une classe de méthode de minimisation efficace d'un arbre de solutions. Le fonctionnement est basé sur l'hypothèse que l'on est capable, à chaque nœud de l'arbre, de calculer une borne inférieure et supérieure du critère. Alors on peut progressivement ajouter des nœuds pour préciser les bornes (étape Branch ou Bouturage) et couper les branches dont la borne inférieure est supérieure à la plus petite borne supérieure (étape de Bound ou Elagage). On donne l'exemple très simple suivant :



De fait, l'arbre entier n'est pas exploré tout en garantissant que la solution exacte du problème soit obtenue à la fin. Il faut cependant être en mesure de pouvoir dériver facilement les bornes de notre critère en pratique.

Le problème principal de ces approches exactes est qu'elles ne sont pas adaptées en pratique aux problèmes de grandes échelles. D'autant plus lorsqu'une borne du critère n'est pas explicite ou difficile à obtenir. Au final on se retrouve avec deux sous catégories de méthodes :

- des méthodes d'optimisation exactes mais coûteuses,
- des méthodes moins coûteuses mais sous-optimales.

2.2.2 . Approches orientées données : Exemple du Plug & Play

Nous venons de présenter des méthodes permettant de trouver le minimum du problème régularisé, faisant implicitement l'hypothèse que nous possédons une fonction de régularisation qui, elle, est explicite. Comme nous l'avons vu précédemment, les descentes proximales consistent à alterner entre une minimisation de l'attache aux données et une étape de "débruitage".

Les méthodes Plug & Play [Venkatakrisnan et al., 2013], [Brifman et al., 2016] proposent alors de substituer dans l'algorithme de descente proximale l'opérateur proximal par n'importe quel estimateur du problème bruité. On voit notamment apparaître avec l'essor de l'Intelligence Artificielle de nombreux algorithmes où l'étape de "débruitage" est apprise par un réseau de neurones [Chen et al., 2021]. Cela permet, entre autres, d'apprendre un modèle de régularisation plus adapté aux problèmes. Le revers de la médaille se situe dans la nécessité d'avoir à disposition un ensemble de données d'entraînement bien annotées et non-biaisées.

Algorithme 4 : Méthodes Plug & Play.

```
while  $a$  do  
   $\mathbf{u}^t = \mathbf{x}^t + \frac{1}{L} \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}^t);$   
   $\mathbf{x}^{t+1} = \text{Debruiteur}(\mathbf{u}^t);$   
end
```

2.2.3 . Approche probabiliste

On va à présent traiter le cas probabiliste où l'on modélise la parcimonie par une distribution *a priori*. Ayant défini la vraisemblance des données ainsi qu'une distribution *a priori* pour les sources, la règle de Bayes nous permet de trouver la distribution de ces dernières. Cette fonction contient toutes les informations nécessaires à la résolution du problème inverse parcimonieux que ce soit par calcul de l'espérance ou du maximum *a posteriori* comme décrit dans la section précédente.

Il a été montré dans [Kormylo and Mendel, 1982] que la distribution *a posteriori* des sources associée à un *a priori* Bernoulli-gaussien est une somme pondérée de gaussiennes sur l'espace des supports, et donc n'admet pas une forme explicite. On retrouve ce genre de comportement avec d'autres *a priori* parcimonieux en général et c'est pourquoi il faut faire appel à des méthodes d'approximation de cette loi ou de son espérance selon le choix de l'estimateur.

Les méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) sont basées sur l'échantillonnage indirect de la loi considérée en utilisant d'autres lois plus simples à échantillonner. L'objectif est de construire une chaîne de Markov, qui est définie comme une suite de variables aléatoires dont la probabilité d'un maillon ne dépend que de la probabilité du précédent (c'est un processus dit 'sans mémoire').

$$p_{\text{Markov}}(\mathbf{x}^{t+1} | \mathbf{y}, \{\mathbf{x}\}_{[0,t]}, \theta) = p_{\text{Markov}}(\mathbf{x}^{t+1} | \mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \theta) \quad (2.25)$$

Les méthodes les plus courantes pour échantillonner une loi sont basées sur un système d'acceptation/rejet [Metropolis et al., 1953, Hastings, 1970]. On tire alors un échantillon selon une loi 'simple', cet échantillon est mis en entrée du modèle, on calcule l'*a posteriori* correspondant et ce résultat conditionne la probabilité de réussite d'un test. Si le test est validé, alors on conserve le point comme représentatif, sinon on duplique le point précédent. On appelle cette classe de MCMC les algorithmes de Metropolis-Hastings, ou algorithmes de Gibbs dans le cas multi-dimensionnel. L'aspect chaîne de Markov revêt une importance dans les stratégies d'explorations de la loi en utilisant un échantillonneur des entrées qui est conditionnel au dernier point accepté. Dans le cas d'un *a priori* parcimonieux, on traite de lois discrètes qui sont compliquées

Algorithme 5 : Exemple d'Algorithme de type Metropolis-Hastings.

```
while nombre de tirage <  $N_{max}$  do  
  Tirage d'un échantillon de source  $\mathbf{x}^{t+1}$  ;  
  Calcul de  $\tau = p(\mathbf{x}^{t+1}|\mathbf{y}, \theta)$  ;  
  Tirage d'une V.A. uniforme  $v$  sur  $[0, 1]$  ;  
  if  $v < \tau$  then  
     $\mathbf{x}^{t+1}$  est accepté ;  
  end  
  else  
     $\mathbf{x}^t$  est dupliqué ;  
  end  
   $t \leftarrow t + 1$  ;  
end
```

à échantillonner on peut cependant utiliser des *a priori* gaussiens généralisés [Chaari et al., 2015, Sommariva and Sorrentino, 2014] pour pallier à cette difficulté.

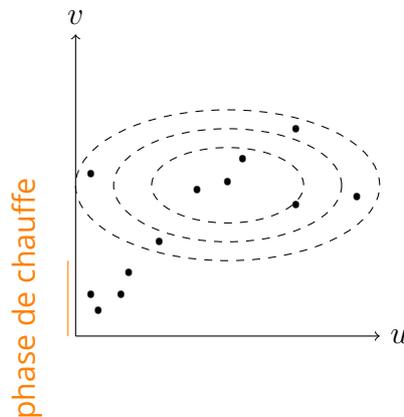


Figure 2.4 – Étapes de déroulement d'un MCMC.

Les MCMC sont des méthodes dites **consistantes**, c'est-à-dire que lorsque le nombre d'échantillons/ d'itérations croît, la distribution des points tend vers la distribution *a posteriori*.

Cependant, l'augmentation du nombre d'échantillons s'accompagne par un coût de calcul en conséquence. D'autant plus que le nombre de valeurs à échantillonner à chaque itération est de la taille de l'espace des sources. Or lorsque celui-ci est grand (comme dans le cas de la M/EEG par exemple 10^4) le temps nécessaire à l'obtention d'une solution est largement impacté. C'est notam-

ment le cœur des avancées récentes en termes d'état de l'art sur les performances des MCMC. On peut notamment citer [Chaari et al., 2016] qui utilise un terme inertiel lié à l'Hamiltonien de la log-vraisemblance afin d'accélérer l'échantillonnage tout comme les algorithmes Metropolis-Adjusted Langevin Algorithm (MALA) [Besag, 1994].

Enfin, les MCMC nécessitent un certain nombre de réglages en amont, comme la durée du 'temps de chauffe' par exemple ou le nombre d'itérations nécessaire avant d'arrêter le programme. Réglages qui ne sont pas triviaux et dont l'impact sur le résultat n'est pas négligeable.

Il existe aussi une version qui consiste à tirer successivement des supports aux hasards et de calculer ensuite le critère afin d'explorer au hasard l'espace.

Les approches bayésiennes variationnelles proposent une méthode qui combine les principes de l'approche bayésienne et de l'approche variationnelle [Dremeau et al., 2012, Dorffer et al., 2021]. Au lieu d'échantillonner directement la distribution a posteriori à l'aide de MCMC, l'approche variationnelle cherche à trouver une distribution approximative qui est proche de la distribution *a posteriori* réelle. L'approximation variationnelle est basée sur des lois faciles à manipuler mathématiquement et dont on va chercher les paramètres qui vont réduire la divergence entre l'approximation et la loi réelle. Une fois que la distribution approximative optimale est obtenue, elle peut être utilisée pour estimer les paramètres.

L'approche bayésienne variationnelle présente plusieurs avantages, tels que la possibilité de traiter des problèmes inverses complexes avec un coût computationnel moindre par rapport aux méthodes de Monte Carlo. Elle permet d'incorporer facilement des connaissances a priori et des contraintes dans le processus de résolution. De plus, l'approximation variationnelle fournit une mesure de l'incertitude associée à ces estimations, permettant ainsi de quantifier l'incertitude dans les résultats.

2.3 . Estimation des paramètres

Comme on a pu le voir, les méthodes présentées précédemment sont toutes basées sur la connaissance supposée d'une forme de paramétrisation du problème. Que ce soit le ou les hyper-paramètres λ de la version régularisée ou les paramètres θ des distributions. Cependant il arrive que ces valeurs soient inconnues ou seulement partiellement connues. Dans ce cas elles doivent être estimées à partir des données observées. On distingue dans cette section les approches **marginales** qui n'estiment que les (hyper-)paramètres à partir des données \mathbf{y} , des approches **jointes** qui estiment les (hyper-)paramètres ainsi que les sources \mathbf{x} à partir des données \mathbf{y} . En estimant les paramètres de façon marginale, on espère que la variance des estimateurs se retrouve diminuée

comme par exemple dans les travaux de Rao [Rao et al., 1992] sur l'estimation des paramètres de modèle qui montrent que la variance des estimateurs joints est plus grande que celle des estimateurs marginaux.

2.3.1 . Méthode des moments

La méthode des moments, par exemple, est basée sur l'approximation des moments théoriques par les moments empiriques. La loi des grands nombres stipule que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n = \mathbb{E}[X] \quad (2.26)$$

Le moment théorique d'ordre α est défini comme tel :

$$\mathbb{E}[|X|^\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} |X|^\alpha p(X) dX \quad (2.27)$$

Le moment empirique d'ordre α quand à lui, est défini comme étant la somme pondérée des réalisations de la variable aléatoire :

$$M^\alpha(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |X_n|^\alpha \quad (2.28)$$

On obtient alors un système d'équations qui dépendent des paramètres de la loi de la variable. Si le système est bien posé, i.e. si le nombre de moments considérés est au moins égal au nombre de paramètres à estimer, alors il est possible de l'inverser afin d'obtenir un estimateur des paramètres. Cette approche repose sur l'accès à un nombre assez grand de mesures afin de pouvoir atteindre une approximation suffisante. De plus, la contrainte d'indépendance est vérifiée par \mathbf{x} et \mathbf{s} , mais elle ne l'est pas nécessairement pour \mathbf{y} . Enfin, dans des cas simples, la méthode des moments propose des estimateurs qui sont biaisés.

2.3.2 . Approche par maximum de vraisemblance

Si les contraintes d'indépendance et/ou d'accès à un nombre suffisant de données ne sont pas satisfaites, alors, toujours dans le cadre probabiliste introduit précédemment, on peut chercher les paramètres les "plus probables" en maximisant la *vraisemblance* des données définie comme :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\theta) \quad (2.29)$$

Dans le cadre parcimonieux, la *vraisemblance* est une somme pondérée de gaussiennes sur l'espace des supports possibles. Il n'est alors pas possible de trouver une solution explicite au maximum de *vraisemblance*. C'est pourquoi on va devoir faire appel à des processus itératifs.

Les approches par Espérance Minimisation (EM) par exemple, fonctionnent sur le principe de l'introduction d'une variable dite cachée dans le sens où elle n'est pas observable directement dans notre problème. Alors, si l'on note \mathbf{h} la variable cachée, il a été montré [Dempster et al., 1977], [Wu, 1983] que prendre

$$Q(\theta|\theta^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{h}|\mathbf{y},\theta^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{h}|\theta))] \quad (2.30)$$

$$\theta^{t+1} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} Q(\theta|\theta^t) \quad (2.31)$$

garantissait la relation suivante

$$p(\mathbf{y}|\theta^{t+1}) \geq p(\mathbf{y}|\theta^t) \quad (2.32)$$

où l'exposant t représente l'itération courante.

De ce fait, il est possible de manière itérative de trouver un paramètre qui maximise localement la *vraisemblance* du modèle. On remarquera que cette classe de méthodes ne converge pas en un nombre fini d'itérations. Il est donc nécessaire de régler une condition arbitraire de convergence du résultat, en plus de l'initialisation qui revêt un caractère tout aussi crucial. La diversité des approches par EM se situe dans l'étendue du choix de la variable cachée puisque cette dernière aura une influence sur les mises-à-jours des paramètres à chaque itération.

Dans le cadre d'*a priori* parcimonieux, modélisés par un mélange de gaussiennes on peut retrouver dans la littérature l'utilisation de la variable de classification comme choix de variable cachée dans [Ročková and George, 2014] par exemple. Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'aspect parcimonieux des distributions des sources rend les calculs complexes à effectuer, notamment en ce qui concerne le calcul de l'espérance [Natarajan, 1995]. Il est possible de remplacer le calcul de l'espérance explicitement par une procédure type MCMC. Mais il est aussi possible de faire appel à une version stochastique de l'espérance comme dans [Champagnat et al., 1996], cela donne l'approche appelée Stochastique EM (SEM).

Une autre variante de l'EM consiste à remplacer l'étape d'espérance par une maximisation de la log-vraisemblance vis-à-vis de la variable cachée. Lorsque la distribution de \mathbf{y} fait appel à un mélange de lois, utiliser la variable de classification comme variable cachée conduit aux méthodes appelées Classification Expectation Maximisation CEM [Celeux and Govaert, 1992].

On a vu que le modèle Bernoulli-gaussien conduit à un mélange de gaussiennes classifiées par le support. Dans le cas le plus simple de dimension 1 on représente les deux classes dans la figure 2.5.

On observe alors que la vraisemblance est tronquée et donc les moments utilisés possèdent un biais explicite en plus des éventuels biais de la formulation de base. Cela a été montré plus en détail dans l'article [Gassiat et al., 1992] où les auteurs donnent les statistiques précises des estimateurs obtenus.

Algorithme 6 : Classification EM.

while *has not converged* **do**Classification des échantillons entre \mathcal{N}_0 et \mathcal{N}_1 via seuillage
par T^t ;Estimation de θ^{t+1} à partir des moments de \mathcal{N}_0 et de \mathcal{N}_1 ;Estimation de T^{t+1} à partir de θ^{t+1} ;**end**

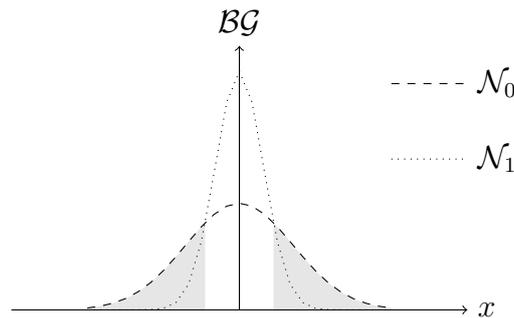


Figure 2.5 – Mélange de Gaussiennes

2.3.3 . Approche jointe

Toujours dans le cadre probabiliste, on procède à présent à une estimation conjointe des sources et des paramètres. Cela revient à chercher $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\theta}$ tels que :

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta} = \underset{\mathbf{x}, \theta}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}, \mathbf{x} | \theta) \quad (2.33)$$

Il est tout à fait possible de reprendre le cadre des MCMCs afin de procéder à un échantillonnage des paramètres du modèle conjointement avec les sources [Boudineau et al., 2016, Bourguignon and Carfantan, 2006]. Afin de pouvoir échantillonner les paramètres dans le cadre du MCMC, il faut alors faire appel à la modélisation dite du **Bayésien Hierarchique** où on ajoute une distribution de probabilités sur les valeurs des paramètres du modèle appelé **Hyper Prior**. On peut alors reprocher à cette méthode le caractère non-supervisé due aux hyper-paramètres de l'**hyper-prior**. Cependant, dans la pratique on prend des distributions de types Gamma et dont le choix des hyper-paramètres n'impacte que très peu les résultats finaux [Calvetti et al., 2020]. Comme pour les MCMC en estimation de sources, les mêmes problèmes de temps de chauffe puis de convergence sont les points principaux qui influent sur la qualité de l'estimation. Tout en gardant à l'esprit qu'avec un nombre infini d'échantillons ces méthodes tendent vers la solution exacte du problème.

2.3.4 . Approche régularisée

Du point de vue minimisation du problème régularisé, comme ici les hyper-paramètres sont des réglages des critères, on va alors chercher les valeurs qui vont minimiser l'erreur faite à l'estimation. Le problème est alors un problème d'**optimisation bi-niveaux** [Bertrand et al., 2020] suivant :

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\lambda)) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{x}}(\lambda) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \lambda) \quad (2.34)$$

avec \mathcal{F} le critère à minimiser pour estimer les sources et ϵ une fonction qui quantifie l'erreur d'estimation. La méthode SURE pour Stein Unbiased Risk Estimator (SURE), proposée en 1981 dans [Stein, 1981] considère que \mathbf{x} est déterministe et que seul le bruit \mathbf{e} est une variable aléatoire. Cette technique permet alors de quantifier l'erreur quadratique moyenne (MSE) d'un estimateur $g(\mathbf{y}; \lambda)$ de \mathbf{x} .

$$\text{SURE} = M\sigma_e^2 + \|g(\mathbf{y})\|_2^2 + 2\sigma_e^2 \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial_m} [g(y_m)]_m \quad (2.35)$$

Or comme mentionné précédemment, les estimateurs que nous avons construits sont dépendants de paramètres et d'hyper-paramètres inconnus. Le modèle SURE ne convient que dans le cas où le paramètre à estimer est la moyenne d'une gaussienne multivariée. Dans le cas présent, les sources évoluent dans un espace de dimension différente par rapport aux observations. C'est pourquoi [Eldar, 2008] a proposé une version généralisée de SURE (GSURE) :

$$\begin{aligned} \text{GSURE} &= c_1 + \|g(\tilde{\mathbf{x}})\|_2^2 - 2\mathbf{x}_{ML}^T g(\tilde{\mathbf{x}}) + 2\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} g(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \text{avec } \mathbf{x}_{ML} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{H}^T}{\sigma_e^2} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si, comme plus haut, la matrice $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ n'est pas de rang plein, alors [Giryès et al., 2011] propose une version projetée de GSURE (PGSURE) sur un espace où le problème admet un noyau restreint à 0 :

$$\begin{aligned} \text{PGSURE} &= c_2 + \|\tilde{\mathbf{H}}g(\tilde{\mathbf{x}})\|_2^2 - 2\mathbf{x}_{ML}^T g(\tilde{\mathbf{x}}) + 2\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{H}}g(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \text{avec } \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^\dagger \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou $(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^\dagger$ correspond à la pseudo-inverse de $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Il est donc possible de chercher à minimiser cette mesure en fonction des hyper-paramètres ou en fonction du choix de l'estimateur, afin d'obtenir le meilleur réglage au sens du MSE.

2.3.5 . Sparse Bayesian Learning

Écartons nous un peu du modèle Bernoulli-Gaussien afin d'aborder d'autres modélisations couramment utilisées dans les problèmes parcimonieux. Nous allons aborder notamment le modèle dit de Sparse Bayesian Learning (SBL) ou Apprentissage Bayésien Parcimonieux en Français [Tipping, 2001].

Cette modélisation est basée sur un système similaire au Bernoulli-gaussien, dans le sens où les sources suivent un *a priori* Gaussien. Cependant, la différence se situe dans le fait que les gaussiennes ne sont plus attribuées selon une loi de Bernoulli. En revanche, on modélise la variance des sources comme étant un paramètre du problème à résoudre. Soit $\gamma \in (\mathbb{R}^+)^N$ le vecteur contenant les variances de chaque source alors le modèle est le suivant :

$$p(\mathbf{x}|\gamma) = |2\pi\Gamma_{SBL}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\Gamma_{SBL}^{-1}\mathbf{x}\right) \quad (2.38)$$

avec

$$\Gamma_{SBL} = \text{Diag}[\gamma] \quad (2.39)$$

où $\text{Diag}[\gamma]$ représente la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf ceux sur la diagonal qui sont donnés par le vecteur γ .

Il est alors possible de chercher à régulariser γ notamment avec des normes ℓ_1 ou ℓ_0 . L'avantage principal de cette approche est que l'on n'a plus l'aspect combinatoire qu'apportent les méthodes parcimonieuses usuelles. Cependant, on augmente de N le nombre de paramètres à estimer ce qui en pratique lors de cas très déséquilibrés ($N > M$) ne permet plus d'avoir un problème bien posé.

Issu de ce formalisme, on peut relever un ensemble de méthodes dont la méthode CHAMPAGNE [Wipf and Rao, 2004, Hashemi et al., 2021]. Le principe repose, comme pour l'EM, sur une maximisation itérative de l'*a posteriori*.

Algorithme 7 : Champagne EM.

```

while  $t < N_{max}$  do
     $u_n^{t+1} = \mathbf{H}_n^T (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \mathbf{H} \Gamma_{SBL}^t \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}_n$ ;
     $\hat{\mathbf{x}}^{t+1} = \Gamma_{SBL}^t \mathbf{H}^T (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \mathbf{H} \Gamma_{SBL}^t \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{y}$ ;
     $\gamma_n^{t+1} = |\hat{x}_n^{t+1}| / \sqrt{u_n^{t+1}}$ ;
     $\Gamma_{SBL}^{t+1} = \text{Diag}[\gamma^{t+1}]$ 
end

```

2.4 . Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que dans le cadre des problèmes inverses linéaires, la seule connaissance de l'opérateur ainsi que les observations ne suffisent pas en pratique pour obtenir une **unique** solution.

C'est pourquoi il faut artificiellement rajouter de l'information. Cette information prend ici la forme de la **parcimonie** i.e. la faible quantité de valeurs non-nulles. On introduit cette information soit en cherchant à minimiser un critère qui la promeut (**régularisation**), soit en cherchant la solution la plus probable *a posteriori* en utilisant un **a priori** parcimonieux.

Ces deux approches dans le cadre parcimonieux ne permettent pas d'obtenir des solutions explicites en pratique. C'est pourquoi on a vu apparaître des méthodes **itératives** qui permettent de s'approcher de la solution. Au sein des méthodes itératives on distinguera celles qui tendent vers les solutions **globales** du problème au prix d'un coût de calcul élevé, et celles qui tendent vers les solutions **locales** mais souvent plus légères en coût.

Malgré ces multiples distinctions parmi les classes d'algorithmes, on retrouve toujours la nécessité de connaître les paramètres du modèle *a priori* ou de la régularisation. Or nous nous plaçons ici dans un cadre où cette connaissance est absente sinon incomplète. Nous avons alors vu les algorithmes qui permettent d'estimer ces paramètres conjointement aux sources ou marginalement à partir des seules observations.

Bien qu'elle soit un sujet d'étude approfondi, l'estimation des paramètres des modèles reste un point crucial des problèmes inverses. Notamment, il manque d'approches entièrement **non-supervisées**, dans le sens où à part le choix du modèle de distributions/régularisation, un utilisateur des méthodes n'a rien d'autres à régler afin d'obtenir une solution convenable. Les méthodes d'échantillonnage type MCMC peuvent être considérées comme non-supervisées mais elles ont du mal à passer à l'échelle en grandes dimensions.

Dans le chapitre suivant nous développerons plus précisément l'estimation des sources dans le cas supervisé. Puis, dans le chapitre 4 nous aborderons l'estimation des paramètres empiriquement dans le cas simple du débruitage. Ensuite, dans le chapitre 5 nous tenterons d'étendre ces résultats au cas du problème inverse général. Enfin, nous nous intéresserons plus particulièrement aux approches d'estimation du support et des signaux associés dans le chapitre 6.

3 - Estimations des sources dans le cadre BG supervisé

Sommaire

3.1	Modèle BG en \mathbf{x}	46
3.1.1	Estimateur de Bayes	46
3.1.2	Estimateur du MAP	48
3.2	Le modèle BG comme un produit de variables aléatoires	51
3.2.1	Estimateur de Bayes	52
3.2.2	Estimateur du MAP (Joint)	52
3.3	Modèle du support : Le modèle marginal . .	54
3.3.1	Estimateur de Bayes	55
3.3.2	Estimateur du MAP (Marginal)	55
3.4	En résumé	56
3.5	Conclusion	58

Nous développons plus précisément l'estimation des sources dans le cadre d'un problème inverse linéaire avec un *a priori* Bernoulli-Gaussien (BG).

Pour cela, on repart du modèle génératif comme introduit dans l'équation (2.1)

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}$$

où \mathbf{e} est un bruit blanc Gaussien de covariance $\sigma_e^2 \mathbf{I}$ et \mathbf{x} suit une loi BG de paramètres p et σ_x^2 comme introduit dans la section 2.1.3.

On suppose dans ce chapitre que l'ensemble des paramètres des différentes lois sont connus et sont rassemblés dans le vecteur $\theta = (p, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$. On s'intéresse dans un premier temps à résoudre le problème pour la formulation du modèle BG telle qu'introduite précédemment. Dans un second temps nous reformulons \mathbf{x} comme un produit de variables aléatoires. Enfin nous abordons le cas de figure où l'on a marginalisé le problème vis-à-vis des supports des sources.

3.1 . Modèle BG en \mathbf{x}

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ un vecteur de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), alors la distribution de x_n est donnée par

$$p(x_n) = \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma_x^2}\right) + (1-p)\delta_0(x) \quad (3.1)$$

avec δ_0 le distribution de Dirac.

3.1.1 . Estimateur de Bayes

Soit $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$ un estimateur de \mathbf{x} , et soit :

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \hat{\mathbf{x}} &\mapsto \epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

une fonction de coût, on définit le **risque bayésien** associé à cette fonction de coût comme l'espérance *a posteriori* de $\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$. On définit alors l'estimateur de Bayes comme celui qui minimise le risque de Bayes :

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x}|\mathbf{y},\theta} [\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})] \quad (3.3)$$

Par exemple pour \mathbf{x} , si l'on s'intéresse au rapport signal sur bruit comme mesure de l'erreur, on peut considérer l'écart quadratique

$$\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 = \sum_{n=1}^N (x_n - \hat{x}_n)^2 \quad (3.4)$$

On observe alors que l'estimateur de Bayes associé à la norme ℓ_2 est l'estimateur de la **moyenne a posteriori** :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_B &= \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x}|\mathbf{y},\theta} [\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2] \\ &= \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} \left(\|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2 - 2\hat{\mathbf{x}}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}|\mathbf{y},\theta} [\mathbf{x}] \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}|\mathbf{y},\theta} [\mathbf{x}] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Soit \mathcal{S} l'ensemble des supports $\mathbf{s} \in \{0;1\}^N$ possibles de \mathbf{x} tels que $s_n = 1$ si et seulement si $x_n \neq 0$ et $s_n = 0$ si et seulement si $x_n = 0$. Soit $\mathbf{S} = \operatorname{Diag}[\mathbf{s}]$, il a été montré dans [Protter et al., 2010] que l'estimateur de la moyenne *a posteriori* s'écrit alors :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}|\mathbf{y},\theta} [\mathbf{x}] = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{s}|\mathbf{y},\theta) \mathbf{S} \left(\frac{\mathbf{I}}{\sigma_x^2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{H}^T}{\sigma_e^2} \right)^{-1} \frac{\mathbf{S}^T \mathbf{H}^T}{\sigma_e^2} \mathbf{y} \quad (3.6)$$

On se retrouve donc avec un estimateur de la moyenne *a posteriori* qui nécessite de calculer un nombre conséquent de termes puisque la cardinalité de \mathcal{S} est 2^N . C'est pourquoi en pratique, on fait appel à des méthodes qui approchent l'espérance *a posteriori*, par échantillonnage notamment [Boudineau et al., 2016, Chaari et al., 2015].

Cas H diagonal : On peut trouver un estimateur explicite au sens de l'estimateur de Bayes dans le cas où la matrice \mathbf{H} est diagonale. En effet, sous cette condition le problème n'est plus 'mêlé' et on peut donc séparer par composantes.

Proposition 1. Soit \mathbf{x} une variable aléatoire suivant une loi Bernoulli-Gaussienne, et soit

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (3.7)$$

avec $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ et \mathbf{D} une matrice diagonale dont le n -ième terme de la diagonale est d_n . Alors l'estimateur de la moyenne *a posteriori* de \mathbf{x} est donné par :

$$(\hat{x}_n)_B = \phi_n(\theta) \frac{d_n \sigma_x^2}{d_n^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} y_n \quad (3.8)$$

avec $\phi_n(\theta) = \mathbb{P}(x_n \neq 0 | y_n, \theta)$.

Démonstration. On repart de l'estimateur de la moyenne *a posteriori* donné dans l'équation (3.6) :

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(\mathbf{s} | \mathbf{y}, \theta) \mathbf{S} \left(\frac{\mathbf{I}}{\sigma_x^2} + \frac{\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{D}^T}{\sigma_e^2} \right)^{-1} \frac{\mathbf{S}^T \mathbf{D}^T}{\sigma_e^2} \mathbf{y}$$

Comme \mathbf{D} est diagonale alors il est possible de considérer chaque composante indépendamment :

$$(\hat{x}_n)_B = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(\mathbf{s} | \mathbf{y}, \theta) s_n \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{s_n d_n^2}{\sigma_e^2} \right)^{-1} \frac{s_n d_n}{\sigma_e^2} y_n$$

En développant la somme on obtient finalement

$$(\hat{x}_n)_B = \sum_{s_n \in \{0,1\}} \mathbb{P}(s_n | \mathbf{y}, \theta) s_n \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{s_n d_n^2}{\sigma_e^2} \right)^{-1} \frac{s_n d_n}{\sigma_e^2} y_n$$

Développer le terme de pondération devant y_n permet de compléter la preuve. \square

3.1.2 . Estimateur du MAP

Une alternative à l'estimateur de Bayes dans un cadre probabiliste est l'estimateur du maximum *a posteriori*.

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} (-\log (p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta))) \quad (3.9)$$

On va donner ici une des contributions mineures de cette thèse, il s'agit d'une démonstration du critère du MAP dans le cas BG tel que présenté dans l'introduction. A notre connaissance il n'en existait pas avant.

Proposition 2. *L'estimateur du MAP de \mathbf{x} est donné par le problème d'optimisation suivant. Soit \mathbf{x} qui suit le modèle BG (3.1) et \mathbf{y} donné par $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}$. Alors l'estimateur du MAP de \mathbf{x} est donné par le problème d'optimisation suivant :*

$$\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \lambda \|\mathbf{x}\|_0 + C(\sigma_e^2, p) \quad (3.10)$$

avec

$$\lambda(\sigma_x^2, p) = \log \left(\sqrt{2\pi\sigma_x^2} \frac{1-p}{p} \right)$$

et

$$C(\sigma_e^2, p) = N \log \left(\frac{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}}{1-p} \right)$$

Démonstration. On réintroduit la variable $s_n \sim \mathcal{B}(p)$ telle que $s_n = 1$ ssi $x_n \neq 0$, on a alors $p(x_n \neq 0 | s_n = 1) = 1$ et $p(x_n = 0 | s_n = 0) = 1$. C'est pourquoi, trouver l'estimateur du MAP de \mathbf{x} est équivalent à chercher

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} -\log p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y}, \theta) .$$

On peut alors écrire, avec $\mathcal{S} = \{n, s_n = 1\}$

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{s}, \theta) = \prod_{n \in \mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma_x^2}} .$$

dont le logarithme peut s'exprimer de la manière suivante

$$\log p(\mathbf{x} | \mathbf{s}, \theta) = - \sum_{n \in \mathcal{S}} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_x^2} - \frac{x_n^2}{2\sigma_x^2} \right) .$$

or comme l'ensemble \mathcal{S} contient les indices des éléments non nuls de \mathbf{s} , alors la somme peut être étendue pour tout n de la manière suivante

$$\log p(\mathbf{x} | \mathbf{s}, \theta) = \sum_n^N s_n \left(-\log \sqrt{2\pi\sigma_x^2} - \frac{x_n^2}{2\sigma_x^2} \right) .$$

De plus, avec

$$p(\mathbf{s}|\theta) = \prod_n p^{s_n} (1-p)^{1-s_n}$$

on a

$$\begin{aligned} -\log p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \theta) &= -\log p(\mathbf{x}|\mathbf{s}, \theta) - \log p(\mathbf{s}, \theta) \\ &= \sum_n \left(s_n \frac{x_n^2}{2\sigma_x^2} - s_n \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\right) - \log p^{s_n} (1-p)^{1-s_n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{s_n x_n^2}{2\sigma_x^2} - N \log(1-p) + \log\left(\sqrt{2\pi\sigma_x^2} \frac{1-p}{p}\right) \sum_n s_n \end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour tout n on a $s_n x_n = x_n$ en plus de $\sum_n s_n = \|\mathbf{x}\|_0$ on peut écrire

$$-\log p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \theta) = \frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \log\left(\sqrt{2\pi\sigma_x^2} \frac{1-p}{p}\right) \|\mathbf{x}\|_0 - N \log(1-p)$$

qui ne dépend plus de \mathbf{s} . En utilisant la règle de Bayes et le résultat suivant

$$-\log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{M}{2} \log(2\pi\sigma_e^2).$$

on déduit l'expression du maximum *a posteriori* en \mathbf{x} :

$$\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) - \log p(\mathbf{x}, \mathbf{s}|\theta)$$

.

□

De même que pour l'approche régularisée par une fonction de coût ℓ_0 comme présentée dans la section précédente, il n'est pas possible de trouver une solution explicite à notre problème. Cependant on peut avoir recours aux approches de type descentes proximales pour obtenir une solution sous-optimale acceptable (voir section 2.2.1).

Proposition 3. Soit la fonction

$$\mathcal{R}_{BG}(\mathbf{x}) = \sigma_e^2 \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \sigma_e^2 \lambda(p, \sigma_x^2) \|\mathbf{x}\|_0$$

avec $\lambda(p, \sigma_x^2) = \log \sqrt{2\pi\sigma_x^2} \frac{1-p}{p}$. Alors l'opérateur proximal correspondant est

$$\operatorname{prox}_{\mathcal{R}_{BG}}(\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2}{2} + \mathcal{R}_{BG}(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

et vaut

$$\forall n \quad \hat{x}_n = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} u_n & \text{si } |u_n|^2 > T_x(\theta) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

avec

$$T_x(\theta) = (\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \left(\log(2\pi\sigma_x^2) + 2 \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \right) \quad (3.13)$$

Démonstration. En partant de l'équation (3.11), dans le cas $x_n \neq 0$ le minimum est donné par :

$$\operatorname{argmin}_{x_n} \frac{(u_n - x_n)^2}{2} + \sigma_e^2 \frac{x_n^2}{2\sigma_x^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} u_n$$

On injecte cette solution dans la fonction à minimiser pour obtenir :

$$\frac{1}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)} \|\mathbf{u}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_0$$

Il ne reste plus qu'à comparer au cas $x_n = 0$

$$\begin{aligned} \frac{u_n^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)} + \lambda &< \frac{u_n^2}{2\sigma_e^2} \\ u_n^2 &> (\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} 2\lambda \end{aligned}$$

On obtient donc un seuillage sur u_n . □

3.2 . Le modèle BG comme un produit de variables aléatoires

Dans la section 2.1.3 du chapitre précédent, nous avons vu qu'il existe un modèle de signaux parcimonieux appelé le Spike & Slab. Ce modèle considère une variable de classe qui est tirée selon une loi de Bernoulli puis tire la valeur de \mathbf{x} selon une distribution propre à chaque classe.

Ici nous ne disposons que deux classes qui désignent si l'on se trouve sur le support de \mathbf{x} ou non. On appelle $\mathbf{s} \in \{0; 1\}^N$ cette variable indicatrice, on introduit alors la matrice diagonale $\mathbf{S} = \text{Diag}[\mathbf{s}]$ et le vecteur d'amplitudes \mathbf{r} , indépendant de \mathbf{s} , tel que

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{r} \quad (3.14)$$

c'est-à-dire pour tout n

$$\bar{x}_n = r_n s_n \quad (3.15)$$

avec

$$s_n \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{et} \quad r_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2) \quad (3.16)$$

Proposition 4. Soient $s \sim \mathcal{B}(p)$ et $r \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ deux variables aléatoires. Alors la variable aléatoire $\bar{x} = rs$ suit une loi Bernoulli-Gaussienne de paramètres (p, σ_x^2) comme défini dans l'équation (3.1).

Démonstration. Soit f une fonction bornée sur \mathbb{R} . Si x suit une loi BG, alors selon l'équation (3.1) :

$$\mathbb{E}[f(x)] = p \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx + (1-p)f(0) \quad (3.17)$$

Dans le cas du produit, on a

$$\mathbb{E}[f(\bar{x})] = \sum_{s=0}^1 p(s|\theta) \int \frac{f(rs)}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_x^2}\right) dr \quad (3.18)$$

$$= p \int \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_x^2}\right) dr + (1-p)f(0) \quad (3.19)$$

Ce qui est équivalent à l'espérance obtenue dans l'équation (3.17). On a donc équivalence en loi des deux modèles. \square

Il est important de noter que l'on a ici :

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{S}\mathbf{r}) \neq p(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = p(\mathbf{r})p(\mathbf{s}) \quad (3.20)$$

Cette décomposition permet notamment d'avoir une variable aléatoire liée aux amplitudes du signal qui est Gaussienne sur tout l'espace contrairement à \mathbf{x} . On remarque que contraindre $r_n = 0$ si $s_n = 0$ comme parfois trouvé dans la littérature, revient à reprendre le modèle de la section précédente.

3.2.1 . Estimateur de Bayes

De même que pour la section précédente, on peut chercher l'estimateur de Bayes associé à l'erreur

$$\epsilon(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad (3.21)$$

Proposition 5. *Soit le modèle proposé dans l'équation (3.15), alors on montre que l'estimateur de Bayes associé à ce modèle est équivalent à celui associé au modèle présenté dans l'équation (3.1).*

Démonstration. Il suffit de reprendre la proposition 4 et de prendre $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. □

Il est alors possible de montrer que l'on obtient la même formulation que dans le cas du modèle classique BG. On hérite donc des mêmes problèmes liés à l'absence de solutions explicites.

3.2.2 . Estimateur du MAP (Joint)

L'indépendance introduite dans le modèle du produit, aboutit à l'expression du maximum *a posteriori* en \mathbf{r} et \mathbf{s} comme une estimation **jointe** du support \mathbf{s} et des amplitudes \mathbf{r} .

Proposition 6. *Soient $\mathbf{s} \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbf{r} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$. Soit $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{r} + \mathbf{e}$ avec $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I})$. Alors l'estimateur du maximum a posteriori de \mathbf{s}, \mathbf{r} est*

$$\hat{\mathbf{r}}_{MAP}, \hat{\mathbf{s}}_{MAP} = \underset{\mathbf{r}, \mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{y}, \theta) \quad (3.22)$$

avec

$$-\log p(\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{y}, \theta) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{r}\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{\|\mathbf{r}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \log \left(\frac{1-p}{p} \right) \|\mathbf{s}\|_0 \quad (3.23)$$

Démonstration. Par la règle de Bayes,

$$-\log p(\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{y}, \theta) = -\log p(\mathbf{y} | \mathbf{r}, \mathbf{s}, \theta) + \log p(\mathbf{y} | \theta) - \log p(\mathbf{r} | \theta) - \log p(\mathbf{s} | \theta)$$

avec, par définition,

$$-\log p(\mathbf{r} | \theta) = \frac{\|\mathbf{r}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma_x^2$$

et

$$-\log p(\mathbf{s} | \theta) = -\|\mathbf{s}\|_0 \log p - (N - \|\mathbf{s}\|_0) \log(1-p)$$

Retirer les termes qui ne dépendent pas de \mathbf{r} ou \mathbf{s} permet de compléter la preuve. □

Tout comme précédemment, il n'existe pas de solutions explicites au problème sans hypothèses supplémentaires sur \mathbf{H} et nous devons avoir recours à des méthodes adaptées (présentées dans la section précédente).

Proposition 7. Soit l'opérateur proximal associé au modèle du produit, défini par

$$\text{prox}_{PROD}(\mathbf{u}) = \underset{r,s}{\text{argmin}} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{r}\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{\|\mathbf{r}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \|\mathbf{s}\|_0 \quad (3.24)$$

alors sa formulation explicite est, pour tout n

$$(\hat{r}_n, \hat{s}_n) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} u_n, 1\right) & \text{si } |u_n|^2 > T_r(\theta) \\ (0, 0) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.25)$$

avec

$$T_r(\theta) = (\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} 2 \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \quad (3.26)$$

Démonstration. La minimisation en \mathbf{r} est simple car la fonction est quadratique

$$\hat{\mathbf{r}} = \sigma_x^2 (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{u}$$

Il ne reste plus que la minimisation en \mathbf{s} :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \underset{\mathbf{s}}{\text{argmin}} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{r}}\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{\|\hat{\mathbf{r}}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \|\mathbf{s}\|_0 \\ &= \underset{\mathbf{s}}{\text{argmin}} \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{2\sigma_e^2} - \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{S}\hat{\mathbf{r}}}{2\sigma_e^2} - \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{u}}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^2 \sigma_x^2} \hat{\mathbf{r}}^T (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^T \mathbf{S}) \hat{\mathbf{r}} + \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \|\mathbf{s}\|_0 \\ &= \underset{\mathbf{s}}{\text{argmin}} \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{2\sigma_e^2} - \frac{\sigma_x^2}{2\sigma_e^2} \mathbf{u}^T \mathbf{S} (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{u} + \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \|\mathbf{s}\|_0 \\ &= \underset{\mathbf{s}}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{u} + \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \|\mathbf{s}\|_0 \end{aligned}$$

On a alors pour tout n , $\hat{s}_n = 1$ lorsque

$$\begin{aligned} \frac{u_n^2}{2(\sigma_e^2 + \sigma_x^2)} + \log\left(\frac{1-p}{p}\right) &< \frac{u_n^2}{2\sigma_e^2} \\ u_n^2 &> 2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \end{aligned}$$

□

On a donc un seuillage sur u_n .

3.3 . Modèle du support : Le modèle marginal

Depuis le début de ce chapitre nous nous sommes concentrés sur l'estimation de \mathbf{x} et notamment de son amplitude via la minimisation de la fonction de coût ℓ_2 . Cependant, dans le cadre d'un problème parcimonieux, il est légitime de s'intéresser seulement à la qualité de l'estimation du support plutôt que des amplitudes de \mathbf{x} . La connaissance du support revêt une double importance car, à support \mathbf{s} connu, la dimension du problème est réduite [Protter et al., 2010] :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{e}$$

ou \mathbf{H}_s est la sous-matrice constituée des colonnes de \mathbf{H} qui correspondent au support et $\mathbf{x}_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2 \mathbf{I})$ est le vecteur de sources réduit aux amplitudes non nulles. Toutes les distributions sont alors des gaussiennes, de fait l'estimateur de la moyenne *a posteriori* est équivalent au maximum *a posteriori* et revient à résoudre le problème quadratique suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \underset{\mathbf{x}_s}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}_s \mathbf{x}_s\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{\|\mathbf{x}_s\|_2^2}{2\sigma_x^2} = \sigma_x^2 (\sigma_x^2 \mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s + \sigma_e^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_s^T \mathbf{y} \quad (3.27)$$

D'autant que si la parcimonie est assez forte, alors la matrice $\sigma_x^2 \mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s + \sigma_e^2 \mathbf{I}$ est bien conditionnée de manière générale.

C'est donc pour ces raisons que nous proposons dans cette section de marginaliser le problème par rapport à la variable de support précédemment introduite. Ainsi on ne traitera plus la loi *a posteriori* de \mathbf{x} ou de \mathbf{r}, \mathbf{s} mais on considèrera la loi marginale *a posteriori* de \mathbf{s} :

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) = \int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{r}, \mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) d\mathbf{r} \quad (3.28)$$

Proposition 8. *Soit s la variable binaire associée au modèle BG. Alors la loi a posteriori marginale de \mathbf{s} est :*

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) = |2\pi\Gamma_y|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \Gamma_y^{-1} \mathbf{y}\right) p(\mathbf{s}|\theta) \quad (3.29)$$

avec $|2\pi\Gamma_y|$ le déterminant de la matrice $2\pi\Gamma_y$ qui s'exprime de la manière suivante :

$$\Gamma_y = \sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{H}^T \quad (3.30)$$

Démonstration. On marginalise après application de la règle de Bayes :

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) = \frac{p(\mathbf{s}|\theta)}{p(\mathbf{y}|\theta)} \int p(\mathbf{y}|\mathbf{r}, \mathbf{s}, \theta) p(\mathbf{r}|\theta) d\mathbf{r}$$

Or comme \mathbf{r} et $\mathbf{y}|\mathbf{r}, \mathbf{s}$ suivent des lois gaussiennes, nous savons par les propriétés de produit de ces dernières que le résultat sera une variable aléatoire gaussienne.

On trouve alors une moyenne nulle et une matrice de covariance Γ_y comme explicité dans [Robert, 2005]. \square

3.3.1 . Estimateur de Bayes

On rappelle ici l'expression de l'estimateur de Bayes :

$$\hat{\mathbf{s}}_B = \underset{\hat{\mathbf{s}}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{s}|\mathbf{y},\theta} [\epsilon(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}})] \quad (3.31)$$

où ϵ est une fonction de coût donnée.

Comme on ne travaille ici qu'avec le support, et qu'il s'agit d'une variable binaire, on va alors privilégier l'erreur 'canonique' 0 – 1 à la norme ℓ_2 . On définit l'erreur 0 – 1 comme

$$\epsilon(s, \hat{s}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = \hat{s} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Or il a été montré dans [Robert, 2005] que l'estimateur de Bayes associé à l'erreur 0–1 pour les variables discrètes est alors équivalent au MAP Marginal.

3.3.2 . Estimateur du MAP (Marginal)

Pour ce qui est de l'estimateur au sens du MAP marginal de \mathbf{s} , on repart de la définition du MAP comme maximisation de la probabilité *a posteriori*. Pour \mathbf{s} , cela se traduit par

$$\hat{\mathbf{s}}_{MAP} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} (-\log p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta)) \quad (3.33)$$

avec, en prenant l'opposé du logarithme de l'équation (3.29) :

$$-\log p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) = \frac{1}{2} \log |\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{H}^T| + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{y} - \log(p(\mathbf{s}|\theta)) \quad (3.34)$$

Ici nous nous retrouvons dans un cas particulier où il n'y a plus une expression du critère sous une forme adaptée aux descentes proximales. On peut en revanche donner une forme explicite de la solution en débruitage.

Proposition 9. *Soit l'estimateur du MAP marginal qui correspond à l'équation (3.34).*

Dans le cas où $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, alors l'estimateur a posteriori de \mathbf{s} est donné par

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} -\log p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) \quad (3.35)$$

et vaut

$$\forall n \quad \hat{s}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } y_n^2 > T_s(\theta) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.36)$$

avec

$$T_s(\theta) = (\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \left(\log\left(\frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2}\right) + 2 \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \right) \quad (3.37)$$

Démonstration. On repart de la loi *a posteriori* de \mathbf{s} donnée dans l'équation (3.29). On y injecte $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ce qui donne une matrice de covariance diagonale, donc un problème de minimisation séparable. On a alors $\hat{s}_n = 1$ si

$$-\frac{y_n^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)} - \frac{1}{2} \log(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) + \log(p) > -\frac{y_n^2}{2\sigma_e^2} - \frac{1}{2} \log(\sigma_e^2) + \log(1-p)$$

$$y_n^2 > (\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \left(\log \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2} \right) + 2 \log \left(\frac{1-p}{p} \right) \right)$$

□

En débruitage, lorsque le support est connu/estimé, la loi de \mathbf{x} sachant \mathbf{s} est une simple gaussienne dont le mode est donné par

$$\forall n \quad \hat{x}_n(s_n) = \frac{s_n \sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} y_n \quad (3.38)$$

On a donc aussi un estimateur de \mathbf{x} au sens du MAP Marginal. Il est similaire à celui trouvé pour l'estimation via les modèles précédents donnés dans les équations (3.1) et (3.15), seule la valeur du seuil a changé.

3.4 . En résumé

Ces résultats vont nous permettre, dans un premier temps, de comparer la pertinence de ces différents seuils. Cela nous permet notamment d'établir un premier lien de correspondance entre l'hyper-paramètre λ des approches par régularisation et les paramètres de notre modèle Bernoulli-Gaussien. En effet, comme il a été présenté en section 2.2.1, l'opérateur proximal associé aux problèmes régularisés donnent en majorité des seuillages qui dépendent des hyper-paramètres. Or nous donnons ici une interprétation de ces seuils en termes des paramètres de la loi Bernoulli-Gaussienne. Il est donc possible de considérer qu'il y a équivalence entre ces deux approches.

Modèle	Seuil
\mathbf{s}	$(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \left(\log(\sigma_e^2) - \log(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) + 2 \log \left(\frac{1-p}{p} \right) \right)$
\mathbf{x}	$(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \left(\log(2\pi\sigma_x^2) + 2 \log \left(\frac{1-p}{p} \right) \right)$
(\mathbf{r}, \mathbf{s})	$(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} 2 \log \left(\frac{1-p}{p} \right)$

Table 3.1 – Valeurs du seuil en fonction du choix de modèle.

On représente dans les figures 3.1, 3.2 et 3.3 les ensembles de paramètres qui conduisent à la même valeur de seuil. Pour cela nous choisissons de fixer

T et p , alors σ_e^2 en fonction de σ_x^2 est facile à calculer. On représente ensuite ces courbes dans le plan (σ_x^2, σ_e^2) pour $T \in [0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5]$.

Dans un premier temps, comparer les figures 3.1, 3.2 et 3.3 pour un point (donc un jeu de paramètres du modèle) donné permet de voir que le seuil T_s est systématiquement le plus élevé et donc le plus discriminant. On s'attend alors à ce que la solution obtenue soit la plus parcimonieuse.

On remarque dans la figure 3.1 que T_s est relativement peu sensible au rapport $\log \sigma_e^2 / \log \sigma_x^2$. Une interprétation possible pourrait provenir du critère minimisé qui se concentre sur l'estimation du support et ne dépend donc peu du rapport signal sur bruit. On voit dans la figure 3.2 que pour un σ_e^2 donné, il existe plusieurs σ_x^2 qui fournissent le même seuil T_x , ce qui n'est pas le cas pour les autres. On peut voir aussi l'apparition d'une troisième valeur pour des σ_x^2 très petits. On en déduit ici que ce seuil est très sensible à la valeur du bruit. Enfin, on observe dans la figure 3.3 que le seuil T_r semble être aussi sensible vis à vis de la sélection de σ_e^2 , où l'on observe une sorte de 'saturation' lorsque σ_e^2 grandit. Cela veut donc dire qu'il existe une limite de bruit telle que le seuil ne dépend plus que de p et σ_x^2 .

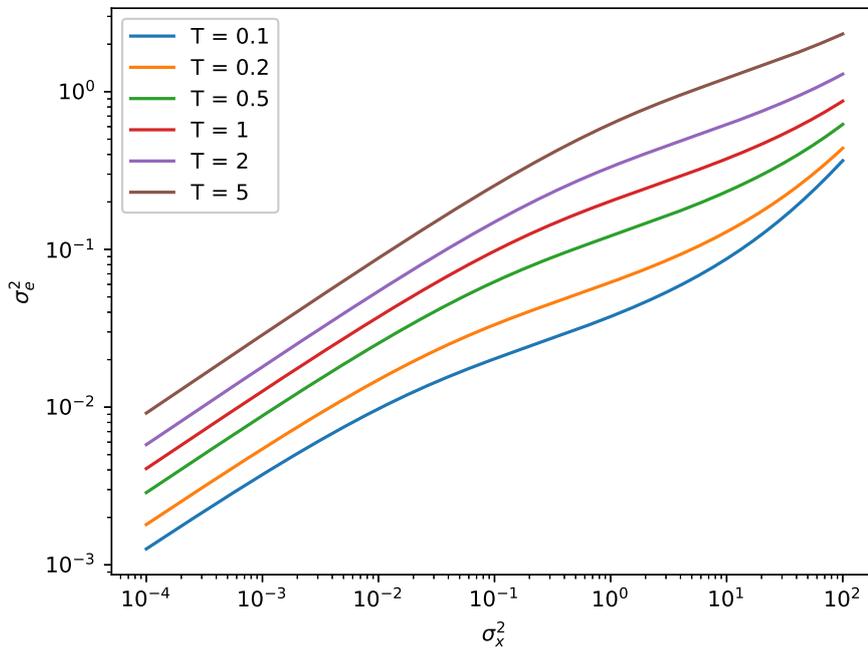


Figure 3.1 – Seuil T_s dans le plan (σ_x^2, σ_e^2) .

3.5 . Conclusion

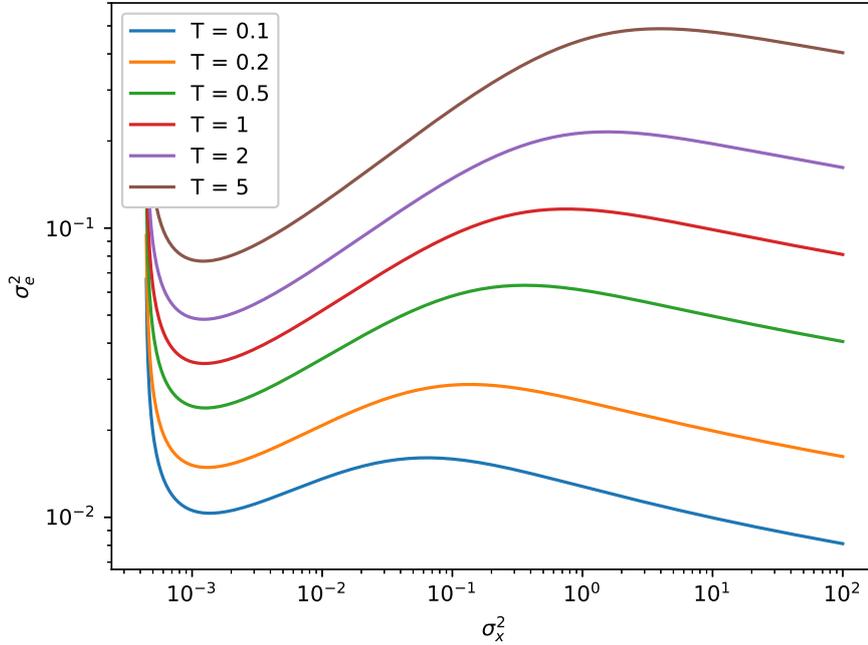


Figure 3.2 – Seuil T_x dans le plan (σ_x^2, σ_e^2) .

Dans ce chapitre nous avons vu qu’il nous est possible de réécrire le Bernoulli-Gaussien non plus comme un modèle conditionnel mais comme un produit de variables aléatoires. Il s’agit du produit terme à terme entre le vecteur de support \mathbf{s} et un vecteur d’amplitudes appelé \mathbf{r} . On a aussi vu que l’on peut aborder le problème en marginalisant par rapport au support.

Cette réécriture du modèle nous permet de dériver les estimateurs au sens de Bayes et du maximum *a posteriori*. Dans la plupart des cas il n’existe alors pas d’estimateurs explicites et il faut donc utiliser des outils sous-optimaux d’estimation. Par exemple, l’estimateur du MAP peut être obtenu par descente proximale et dont les opérateurs sont des seuillages dont les valeurs sont données dans le tableau 3.1.

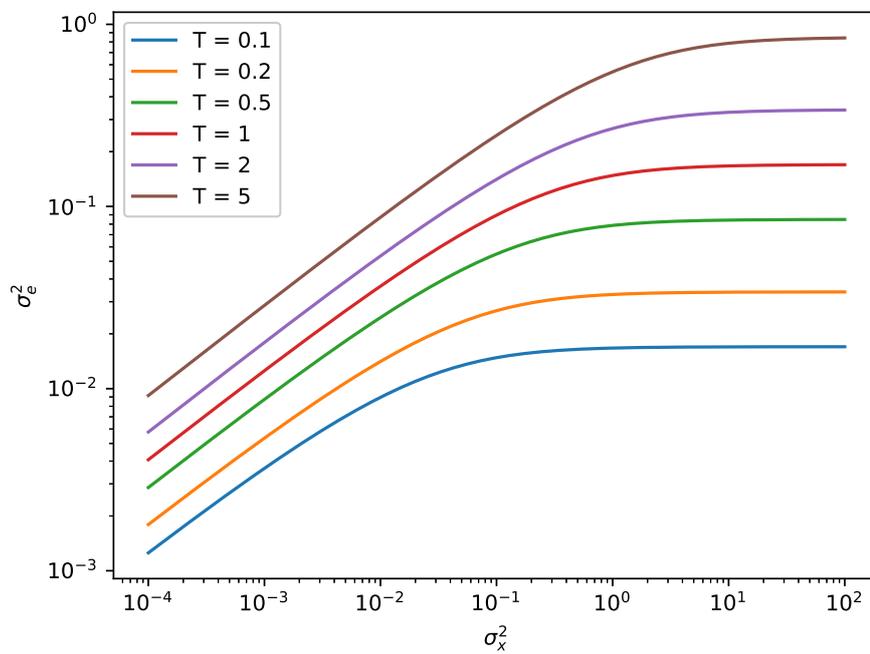


Figure 3.3 - Seuil T_r dans le plan (σ_x^2, σ_e^2) .

4 - Estimation des paramètres en débruitage

Sommaire

4.1	Méthode des Moments	62
4.1.1	Mise en équation du problème	62
4.1.2	Résolution du système	64
4.1.3	Algorithme complet	65
4.2	Estimation Marginale et EMs	66
4.2.1	\mathbf{s} en variable cachée	67
4.2.2	\mathbf{x} en variable cachée	68
4.2.3	(\mathbf{r}, \mathbf{s}) en variable cachée	70
4.3	Estimation Jointe des sources et paramètres	73
4.3.1	Un problème d'optimisation sous contraintes	73
4.3.2	Résolution du problème non-contraint	74
4.3.3	Algorithme complet	77
4.4	Étude numérique	77
4.4.1	Influence du nombre de données accessibles	78
4.4.2	Influence de la parcimonie	81
4.4.3	Influence du niveau de bruit	81
4.5	Conclusion	81

Dans le chapitre précédent, nous avons fait l'hypothèse selon laquelle les paramètres du modèle sont connus. Nous voulons maintenant traiter le cas où cette hypothèse n'est plus vérifiée. Nous explorons dans ce chapitre les deux possibilités qui s'offrent alors à nous : estimer les paramètres conjointement avec les sources ou les estimer seuls.

Plus spécifiquement, nous allons nous restreindre dans ce chapitre au cas où l'opérateur \mathbf{H} est l'identité \mathbf{I} . Le cas général sera traité dans le chapitre suivant. Le modèle de génération des observations est alors le suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (4.1)$$

On nommera ce cas particulier "**débruitage**" car les observations \mathbf{y} sont constituées seulement des sources plus un bruit additif.

L'avantage premier apporté par ce cas est que l'on a maintenant indépendance entre les éléments des vecteurs aléatoires :

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n|x_n, \theta) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta) = \prod_{n=1}^N p(x_n|y_n, \theta) \quad (4.2)$$

Le deuxième point apporté par le débruitage est la simplicité de la *vraisemblance* de \mathbf{y} . Soit $x_n \sim \mathcal{BG}(p, \sigma_x^2)$ une variable aléatoire BG et soit $e_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$. Le cas $x_n = 0$ arrive avec une probabilité $1 - p$, et conduit à $y_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$. L'autre possibilité, $x_n \neq 0$, apparaît avec une probabilité p et conduit à $y_n = x_n + e_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2 + \sigma_e^2)$ car x_n et e_n sont deux variables aléatoires gaussiennes. Alors, on montre que la vraisemblance de y_n est un mélange de deux gaussiennes centrées, tirées selon une loi de Bernoulli :

$$p(\mathbf{y}|\theta) = \prod_{n=1}^N p(y_n|\theta) \quad (4.3)$$

avec

$$p(y_n|\theta) = \frac{p}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}} \exp\left(-\frac{y_n^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}\right) + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp\left(-\frac{y_n^2}{2\sigma_e^2}\right) \quad (4.4)$$

La première section traitera de l'estimation des paramètres par une méthode basée sur les moments empiriques. Dans la deuxième section, nous développerons des algorithmes d'Expectation-Minimization (EM) capables d'estimer les paramètres du modèle dans un schéma de maximisation de la vraisemblance des données. Ensuite, en troisième section, nous présentons aussi une méthode basée sur l'estimation jointe des sources et des paramètres où l'on montre que cela conduit à un problème d'optimisation sous contrainte. Enfin des résultats expérimentaux sont présentés en section quatre, permettant de mettre en lumière le comportement des algorithmes proposés.

Les algorithmes obtenus pour les trois classes de méthodes constituent les premières contributions de cette thèse, mais aussi les bases fondatrices sur lesquelles nous appuierons le chapitre suivant traitant du cas général.

4.1 . Méthode des Moments

L'indépendance introduite par le cadre du débruitage permet de considérer les éléments de \mathbf{y} comme N réalisations d'une même variable aléatoire. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à une approche statistique d'estimation telle la méthode des moments.

On rappelle ici brièvement le principe de la méthode des moments (présentée dans le Chapitre 2, dans l'équation (2.28)). Elle est basée sur la résolution d'un système d'équations dans lequel on suppose l'égalité entre moments empiriques et moments théoriques de nos échantillons, ce qui revient à résoudre :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n^k = \mathbb{E}[y^k] \quad (4.5)$$

4.1.1 . Mise en équation du problème

Nous allons maintenant donner l'expression des moments d'intérêts afin de dégager le système à résoudre pour obtenir l'estimateur au sens des moments.

Proposition 10. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi de mélange de deux gaussiennes à moyennes nulles et de variance σ_1^2 (respectivement σ_2^2) et pondérée par p (respectivement $1 - p$) avec $0 < p < 1$.

$$Y \sim p\mathcal{N}(0, \sigma_1^2) + (1 - p)\mathcal{N}(0, \sigma_2^2) \quad (4.6)$$

Alors les moments théoriques d'ordres $2k$ et $2k + 1$ sont donnés par

$$\forall k \in \mathbb{N} \begin{cases} \mathbb{E}[Y^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} (p(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)^k + (1 - p)(\sigma_e^2)^k) \\ \mathbb{E}[Y^{2k+1}] = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Démonstration. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ une variable aléatoire. Partons du résultat suivant

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} \\ \mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0 \end{cases}$$

donné dans [Papoulis and Unnikrishna Pillai, 2002].

On a alors $\forall l \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[Y^l] = \int_{\mathbb{R}} Y^l p(Y) dY = p \int_{\mathbb{R}} Y^l \frac{\exp(-\frac{Y^2}{2\sigma_1^2})}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} dY + (1 - p) \int_{\mathbb{R}} Y^l \frac{\exp(-\frac{Y^2}{2\sigma_2^2})}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} dY$$

On dérive alors la formule complète des moments théoriques de Y . \square

Comme nous disposons de trois paramètres à estimer, $\theta = (p, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$, alors il nous faut considérer les trois premiers moments non nuls de la loi afin de disposer d'un problème suffisamment bien posé. On observe dans l'équation (4.7) que les trois premiers moments théoriques non nuls sont les moments d'ordres 2, 4 et 6, alors on exprime le problème par le système d'équations suivant

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n^2 = p(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) + (1 - p)(\sigma_e^2) \quad (4.8a)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n^4 = 3(p(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)^2 + (1 - p)(\sigma_e^2)^2) \quad (4.8b)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n^6 = 15(p(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)^3 + (1 - p)(\sigma_e^2)^3) \quad (4.8c)$$

Dans la suite, par souci de concision, on désignera :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n^k = M_k \quad (4.9)$$

4.1.2 . Résolution du système

Après avoir obtenu le système précédent, nous allons à présent procéder à sa résolution.

Théorème 11. Soit $\mathbf{x} \sim \mathcal{BG}(p, \sigma_x^2)$ et $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ deux vecteurs aléatoires et soit $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$. Alors l'estimateur des paramètres par la méthode des moments est :

$$p = \frac{M_2 - \sigma_e^2}{\sigma_x^2} \quad (4.10a)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\frac{1}{3}M_4 - (\sigma_e^2)^2}{M_2 - \sigma_e^2} - 2\sigma_e^2 \quad (4.10b)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\frac{M_6}{5} - M_2M_4 + \sqrt{\left(\frac{M_6}{5} - M_2M_4\right)^2 + 4(3M_4 - M_2^2)\left(\frac{M_4}{3} - \frac{M_2M_6}{5}\right)}}{2(3M_4 - M_2^2)} \quad (4.10c)$$

sous les conditions :

$$M_4 \geq 3M_2^2 \quad (4.11a)$$

$$M_6 \geq \frac{5}{3} \frac{M_4^2}{M_2} \quad (4.11b)$$

De plus, comme ces estimateurs sont des fonctions continues par rapport aux moments, alors on peut dire que cet estimateur est consistant.

Démonstration. L'équation (4.8a) nous donne

$$p = \frac{M_2 - \sigma_e^2}{\sigma_x^2}$$

avec $0 \leq M_2 - \sigma_e^2 \leq \sigma_x^2$ afin que p reste dans l'intervalle $[0, 1]$. On injecte alors cette solution dans l'équation (4.8b) afin d'obtenir

$$M_4 = 3(M_2 - \sigma_e^2)(\sigma_x^2 + 2\sigma_e^2) + 3(\sigma_e^2)^2$$

Si $\sigma_e^2 \neq M_2$, alors on obtient le résultat suivant

$$\sigma_x^2 = \frac{\frac{1}{3}M_4 - (\sigma_e^2)^2}{M_2 - \sigma_e^2} - 2\sigma_e^2$$

Or, comme on a vu que $M_2 - \sigma_e^2 \leq \sigma_x^2$ et si l'on se reporte à l'estimateur de σ_x^2 , on obtient

$$\frac{\frac{1}{3}M_4 - (\sigma_e^2)^2}{M_2 - \sigma_e^2} - 2\sigma_e^2 \geq M_2 - \sigma_e^2$$

Ce qui implique que les conditions d'existence sont à présent

$$\begin{cases} M_4 \geq 3M_2^2 \\ \sigma_e^2 \leq M_2 \end{cases}$$

Enfin, en injectant les deux estimateurs de p et σ_x^2 précédents dans l'équation (4.8c) et en développant les calculs, on obtient le polynôme suivant :

$$(\sigma_e^2)^2 (3M_2^2 - M_4) + \sigma_e^2 \left(\frac{M_6}{5} - M_2M_4 \right) + \frac{M_4^2}{3} - \frac{M_2M_6}{5} = 0$$

Vis-à-vis de nos conditions, il faut vérifier qu'il existe au moins une racine dans $[0, M_2]$. Pour cela on voit que prendre $\sigma_e^2 = M_2$ donne

$$M_2^2 (3M_2^2 - M_4) + M_2 \left(\frac{M_6}{5} - M_2M_4 \right) + \frac{M_4^2}{3} - \frac{M_2M_6}{5} = (3M_2^2 - M_4)^2$$

qui est toujours positif. Or comme le coefficient dominant du polynôme $3M_2^2 - M_4$ est négatif (selon l'autre condition) alors il n'y a qu'une racine inférieure à M_2 . De même, prendre $\sigma_e^2 = 0$ donne $\frac{M_4^2}{3} - \frac{M_2M_6}{5}$. Donc pour avoir une racine viable, il faut que :

$$M_6 \geq \frac{5}{3} \frac{M_4^2}{M_2} \quad \text{en plus de} \quad M_4 \geq 3M_2^2$$

La dernière estimation est alors :

$$\sigma_e^2 = \frac{\frac{M_6}{5} - M_2M_4 + \sqrt{\left(\frac{M_6}{5} - M_2M_4\right)^2 + 4(3M_4 - M_2^2) \left(\frac{M_4^2}{3} - \frac{M_2M_6}{5}\right)}}{2(3M_4 - M_2^2)}$$

□

4.1.3 . Algorithme complet

Dans la pratique, nous avons observé l'occurrence de réalisations de \mathbf{y} qui ne vérifient pas les conditions données dans les équations (4.11a) et (4.11b). On est en droit de se demander que faire dans le cas où ces deux conditions nécessaires à l'obtention d'une solution viable ne sont pas respectées ?

Pour répondre à cette question, nous proposons de retirer progressivement des éléments de \mathbf{y} jusqu'à ce que les conditions soient vérifiées. Pour choisir quel élément retirer, on calcule pour chaque y_n les valeurs suivantes pour l'ensemble \mathbf{y} privé de y_n :

$$\min\{0, M_4 - 3M_2^2\} + \min\{0, M_6 - \frac{5M_4^2}{3M_2}\} \quad (4.12)$$

On considère alors que le y_n qui minimise cette quantité est le 'fauteur de trouble' et est l'élément que nous devons retirer. On répète ce processus jusqu'à ce que les conditions soient vérifiées ou que \mathbf{y} ne contienne plus que trois valeurs. On a donc une procédure complète d'estimation des paramètres par la méthode des moments dont l'algorithme est résumé dans l'algorithme 8.

Algorithme 8 : Méthode des Moments pour les signaux BG.

$J_0 \triangleq \{1, \dots, N\};$
 $k = 0;$
while (4.11a) et (4.11b) pas vérifiées **do**
 $i = \operatorname{argmin} (4.12);$
 $J_{k+1} \triangleq J_k \setminus i;$
 $k = k + 1;$
end
 $M_2 = \sum_{n \in J_k} y_n^2;$
 $M_4 = \sum_{n \in J_k} y_n^4;$
 $M_6 = \sum_{n \in J_k} y_n^6;$
Estimation de σ_e^2 selon (4.10c);
Estimation de σ_x^2 selon (4.10b);
Estimation de p selon (4.10a);

4.2 . Estimation Marginale et EMs

Poursuivons l'estimation seule (ou marginale) des paramètres. Dans un contexte probabiliste, cela revient à maximiser la *vraisemblance* des données, soit

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(\mathbf{y}|\theta) \quad (4.13)$$

On a vu en début de chapitre (équation (4.4)) que $y_n|\theta$ suit un mélange, et donc une somme, de distributions gaussiennes. La vraisemblance globale peut donc s'écrire comme une somme sur l'espace de tous les supports possibles. Dès lors, résoudre explicitement l'équation (4.13) est un problème sans solution explicite en pratique. Il est donc nécessaire de passer par des méthodes sous optimales afin d'obtenir une solution en pratique. C'est ce qui motive notre choix d'utiliser le cadre théorique des méthodes d'**Espérance-Minimisation** (EM) afin de dériver des estimateurs.

On rappelle ici brièvement le principe des EMs. Soit \mathbf{h} une variable aléatoire quelconque mais non-observable directement dans notre modèle, les algorithmes EMs proposent alors la procédure suivante

$$Q_{\mathbf{h}}(\theta|\theta^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{h}|\mathbf{y},\theta^t} [-\log p(\mathbf{y}, \mathbf{h}|\theta)] \quad (4.14a)$$

$$\theta^{t+1} = \operatorname{argmin}_{\theta} Q_{\mathbf{h}}(\theta|\theta^t) \quad (4.14b)$$

qui garantissent

$$p(\mathbf{y}|\theta^{t+1}) \geq p(\mathbf{y}|\theta^t) \quad (4.15)$$

En ce qui concerne le choix des variables cachées, nous proposons de reprendre les trois modèles Bernoulli-Gaussiens introduits et étudiés dans le chapitre précédent. On a donc en choix de variables cachées :

- \mathbf{s} le support,
- \mathbf{x} les sources,
- (\mathbf{r}, \mathbf{s}) le couple amplitudes/support.

Les variables cachées que nous proposons ici sont des vecteurs dont les termes sont, comme on est en débruitage, décorrélés entre eux. On peut alors écrire la fonction $Q_{\mathbf{h}}$ de l'étape d'espérance comme une somme :

$$Q_{\mathbf{h}}(\theta|\theta^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{h}|\mathbf{y},\theta^t} [-\log p(\mathbf{y}, \mathbf{h}|\theta)] = \sum_{n=1}^N q_n^{\mathbf{h}}(\theta|\theta^t) \quad (4.16)$$

avec $q_n^{\mathbf{h}}(\theta|\theta^t) = \mathbb{E}_{h_n|y_n,\theta^t} [-\log p(y_n, h_n|\theta)]$

Ce qui permet de traiter l'espérance globale comme la somme d'espérances de signaux à une seule dimension.

4.2.1 . \mathbf{s} en variable cachée

Le choix du support comme variable cachée est très populaire dans le domaine des EM car il fait écho à la classification dans le cas de mélanges de distributions. Il s'agit du cas d'école d'utilisation de l'EM [Bilmes et al., 1998]. En effet, on peut voir le cas du débruitage comme un mélange de deux distributions : une gaussienne dans le cas où il n'y a que du bruit, et dans le cas où il y a du signal et du bruit alors on a une somme de deux variables aléatoires gaussiennes donc aussi une variable aléatoire gaussienne.

Proposition 12. *Soient x une variable aléatoire suivant un modèle Bernoulli-Gaussien et $y|x \sim \mathcal{N}(x, \sigma_e^2)$. Soit s la variable de support de x telle que $s = 1$ si $x \neq 0$ et $s = 0$ sinon. Alors la probabilité a posteriori de $s = 1$ est*

$$p(s = 1|y, \theta) = \frac{\frac{p}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}} \exp(-\frac{y^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)})}{\frac{p}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}} \exp(-\frac{y^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}) + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_e^2})} \quad (4.17)$$

Par souci de concision, on posera $\phi_n(\theta) = p(s_n = 1|y_n, \theta)$ afin de désigner la probabilité a posteriori du support dans le cas de signaux BG non mélangés.

Démonstration. On part de la définition du modèle Bernoulli-Gaussien :

$$p(y, s|\theta) = p(s) \int_{\mathbb{R}} p(y, x|s, \theta) dx = \begin{cases} \frac{p}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}} \exp(-\frac{y^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}) & \text{si } s = 1 \\ \frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_e^2}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour finir, on applique alors la règle de Bayes :

$$p(s = 1|y, \theta) = \frac{p(y, s = 1|\theta)}{p(y, s = 1|\theta) + p(y, s = 0|\theta)}$$

□

Étape d'espérance : Pour calculer l'espérance, on repart de $q_n^s(\theta|\theta^t)$ tel que défini dans l'équation (4.16). Comme il s'agit de l'espérance d'une variable binaire, on exprime q_n^s comme la somme des log-vraisemblances pondérées par les probabilités *a posteriori*.

$$\begin{aligned} q_n^s(\theta|\theta^t) &= \mathbb{E}_{s_n|y_n,\theta^t} [-\log p(y_n, s_n|\theta)] \\ &= -p(s_n = 1|y_n, \theta^t) \log p(y_n, s_n = 1|\theta) - p(s_n = 0|y_n, \theta^t) \log p(y_n, s_n = 0|\theta) \\ &= -\phi_n^t \log p(y_n, s_n = 1|\theta) - (1 - \phi_n^t) \log p(y_n, s_n = 0|\theta) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ce qui donne, lorsque l'on somme sur tous les n , l'étape E finale :

$$Q_s(\theta|\theta^t) = -\log(p) \sum_{n=1}^N \phi_n^t - \log(1-p) \left(N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t \right) \quad (4.19)$$

$$+ \frac{1}{2} \log(\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \sum_{n=1}^N \phi_n^t + \frac{1}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)} \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 \quad (4.20)$$

$$+ \frac{1}{2} \log(\sigma_e^2) \left(N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t \right) + \frac{1}{2\sigma_e^2} \left(\|\mathbf{y}\|_2^2 - \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 \right) \quad (4.21)$$

Étape de minimisation On trouve alors les paramètres qui minimisent cette espérance en annulant les dérivées par rapport à ces mêmes paramètres. On obtient les résultats suivants :

$$p^{t+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t}{N} \quad (4.22a)$$

$$(\sigma_x^2)^{t+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2}{\sum_{n=1}^N \phi_n^t} - \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2 - \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2}{N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t} \quad (4.22b)$$

$$(\sigma_e^2)^{t+1} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2 - \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2}{N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t} \quad (4.22c)$$

4.2.2 . \mathbf{x} en variable cachée

Là où le choix de \mathbf{s} en variable cachée est assez classique dans les EMs lorsque le modèle implique des problèmes de classification, le choix de \mathbf{x} en variable cachée est, à notre connaissance, nouveau et donc une des contributions de cette thèse. On va notamment, dans le chapitre suivant, étendre ce résultat au problème d'estimation dans le cas général.

Proposition 13. Soient $x \sim \mathcal{BG}(p, \sigma_x^2)$, $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ et $y = x + e$. Alors la loi *a posteriori* de x est

$$p(x|y, \theta) = \frac{\phi}{\sqrt{2\pi\alpha\sigma_e^2}} \exp\left(-\frac{(x - \alpha y)^2}{2\alpha\sigma_e^2}\right) + (1 - \phi)\delta_0(x) \quad (4.23)$$

avec

$$\alpha = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} \quad (4.24)$$

Démonstration. On va réintroduire la variable de support :

$$\begin{aligned} p(x|y, \theta) &= p(x, s = 1|y, \theta) + p(x, s = 0|y, \theta) \\ &= p(x|y, s = 1, \theta)\phi + p(x|y, s = 0, \theta)(1 - \phi) \end{aligned}$$

avec ϕ la probabilité *a posteriori* de s sachant y . Selon la règle de Bayes, on a

$$\begin{aligned} p(x|y, s = 1, \theta) &= \frac{p(y|x, s = 1, \theta)}{p(y|s = 1, \theta)} p(x|s = 1, \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2 \sigma_x^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(y-x)^2}{\sigma_e^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\sigma_e^2}} \exp \left(-\frac{(x - \alpha y)^2}{2\alpha\sigma_e^2} \right) \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2}$. Résultat obtenu en utilisant le fait que toutes les distributions sont des gaussiennes dont les moyennes et covariances sont connues. \square

Etape d'espérance Grâce aux propriétés de la distribution de Dirac, l'espérance s'écrit alors :

$$\begin{aligned} q_n^x(\theta|\theta^t) &= \mathbb{E}_{x_n|y_n, \theta^t} [-\log p(y_n, x_n|\theta)] \\ &= \phi_n^t \mathbb{E}_{x_n|y_n, s_n=1, \theta^t} [-\log p(y_n, x_n|\theta)] - (1 - \phi_n^t) \log p(y_n, x_n = 0|\theta) \end{aligned} \quad (4.25)$$

En se basant sur la démonstration de la proposition 2 du chapitre précédent, on développe alors l'espérance de la log-vraisemblance de la manière suivante :

$$\mathbb{E}_{x_n|y_n, s_n=1, \theta^t} [-\log p(x_n|\theta)] = -\log(p) + \frac{1}{2} \log(\sigma_x^2) + \frac{1}{2\sigma_x^2} \mathbb{E}_{x_n|y_n, s_n=1, \theta^t} [x_n^2] \quad (4.26)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'étape E finale comme :

$$\begin{aligned}
Q_{\mathbf{x}}(\theta|\theta^t) &= \sum_{n=1}^N q_n^x(\theta|\theta^t) \\
&= \sum_{n=1}^N \phi_n^t \mathbb{E}_{x_n|y_n, s_n=1, \theta^t} [-\log p(y_n, x_n|\theta)] \\
&\quad - \sum_{n=1}^N (1 - \phi_n^t) \log p(y_n, x_n = 0|\theta) \\
&= \sum_{n=1}^N \phi_n^t \mathbb{E}_{x_n|y_n, s_n=1, \theta^t} [-\log p(y_n, x_n|\theta)] \\
&\quad + \sum_{n=1}^N (1 - \phi_n^t) \left(\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_e^2) + \frac{y_n^2}{2\sigma_e^2} - \log(1-p) \right)
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.26), on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
Q_{\mathbf{x}}(\theta|\theta^t) &= -\log p \sum_{n=1}^N \phi_n^t - \log(1-p) \left(N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t \right) \\
&+ \frac{N}{2} \log \sigma_e^2 + \frac{1}{2\sigma_e^2} \left((\sigma_e^2)^t \alpha^t \sum_{n=1}^N \phi_n^t + (1 - \alpha^t)^2 \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma_e^2} \left(\|\mathbf{y}\|_2^2 - \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} \log \sigma_x^2 \sum_{n=1}^N \phi_n^t + \frac{1}{2\sigma_x^2} \left((\sigma_e^2)^t \alpha^t \sum_{n=1}^N \phi_n^t + (\alpha^t)^2 \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Étape de minimisation De même que pour \mathbf{s} , on obtient les paramètres qui minimisent cette espérance en cherchant à annuler le gradient. Cela donne les mises à jours suivantes :

$$p^{t+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t}{N} \tag{4.28a}$$

$$(\sigma_x^2)^{t+1} = (\alpha^t)^2 \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2}{\sum_{n=1}^N \phi_n^t} + \alpha^t (\sigma_e^2)^t \tag{4.28b}$$

$$(\sigma_e^2)^{t+1} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{N} + (\sigma_e^2)^t \alpha^t \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t}{N} - \alpha^t (2 - \alpha^t) \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2}{N} \tag{4.28c}$$

4.2.3 . (r, s) en variable cachée

Pour la dernière version de l'EM, nous allons nous intéresser au couple (\mathbf{r}, \mathbf{s}) associé au modèle du produit pour les distributions Bernoulli-Gaussiennes. De

même que pour \mathbf{x} , cet estimateur est nouveau (à notre connaissance). L'avantage de ce choix, est que les deux variables sont entièrement décorréélées. En effet, le choix du couple (\mathbf{x}, \mathbf{s}) par exemple ne donnerait pas de nouveaux résultats car il existe une forte corrélation entre les deux variables. La distribution *a posteriori* est donc la suivante :

$$p(r_n, s_n | y_n, \theta) = p(r_n | y_n, s_n, \theta) p(s_n | y_n, \theta) \quad (4.29)$$

Etape d'espérance

$$\begin{aligned} q_n^r(\theta | \theta^t) = & \phi_n^t \mathbb{E}_{r_n | y_n, s_n = 1, \theta^t} [-\log p(y_n, r_n, s_n = 1 | \theta)] \\ & + (1 - \phi_n^t) \mathbb{E}_{r_n | y_n, s_n = 0, \theta^t} [-\log p(y_n, r_n, s_n = 0 | \theta)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Or, par définition de r_n , on sait que $p(r_n | y_n, s_n = 0, \theta) = p(r_n | \theta)$ et que $p(r_n | y_n, s_n = 1, \theta)$ est équivalent à $p(x_n | y_n, s_n = 1, \theta)$ calculé précédemment et qui est une distribution gaussienne de moyenne $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} y_n$ et de variance $\frac{\sigma_x^2 \sigma_e^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2}$. On peut alors calculer l'espérance complète

$$\begin{aligned} q_n^r(\theta | \theta^t) = & \frac{1}{2} \log \sigma_e^2 + \frac{1}{2} \log \sigma_x^2 \\ & + \phi_n^t \left(\frac{(1 - \alpha^t)^2 y_n^2 + \alpha^t (\sigma_e^2)^t}{2\sigma_e^2} + \frac{(\alpha^t)^2 y_n^2 + \alpha^t (\sigma_e^2)^t}{2\sigma_x^2} - \log(p) \right) \\ & + (1 - \phi_n^t) \left(\frac{y_n^2}{2\sigma_e^2} + \frac{(\sigma_x^2)^t}{2\sigma_x^2} - \log(1 - p) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

A la fin on a donc l'étape E suivante

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{r}}(\theta | \theta^t) = & -\log p \sum_{n=1}^N \phi_n^t - \log(1 - p) \left(N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t \right) + \frac{N}{2} \log \sigma_x^2 + \frac{N}{2} \log \sigma_e^2 \\ & + \frac{1}{2\sigma_x^2} \left((\alpha^t)^2 \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 + \alpha^t (\sigma_e^2)^t \sum_{n=1}^N \phi_n^t + (N - \sum_{n=1}^N \phi_n^t) (\sigma_x^2)^t \right) \\ & + \frac{1}{2\sigma_e^2} \left((1 - \alpha^t)^2 \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 + \alpha^t (\sigma_e^2)^t \sum_{n=1}^N \phi_n^t + \|\mathbf{y}\|_2^2 - \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Étape de minimisation Dériver par rapport aux paramètres et chercher les racines donnent les estimateurs suivants :

$$p^{t+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \phi_n^t}{N} \quad (4.33a)$$

$$(\sigma_x^2)^{t+1} = (\sigma_x^2)^t + \frac{1}{N} \left((\alpha^t)^2 \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 + (\alpha^t (\sigma_e^2)^t - (\sigma_x^2)^t) \sum_{n=1}^N \phi_n^t \right) \quad (4.33b)$$

$$(\sigma_e^2)^{t+1} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{N} + \frac{1}{N} \left(-\alpha^t (2 - \alpha^t) \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2 + \alpha^t (\sigma_e^2)^t \sum_{n=1}^N \phi_n^t \right) \quad (4.33c)$$

En résumé :

On résume les mises à jours des paramètres dans le tableau 4.1.

V.C.	p^{t+1}	$(\sigma_x^2)^{t+1}$	$(\sigma_e^2)^{t+1}$
s	$\frac{A^t}{N}$	$\frac{B^t}{A^t} - \frac{1}{N-A^t} (\ \mathbf{y}\ _2^2 - B^t)$	$\frac{1}{N-A^t} (\ \mathbf{y}\ _2^2 - B^t)$
x	$\frac{A^t}{N}$	$(\alpha^t)^2 \frac{B^t}{A^t} + \alpha^t (\sigma_e^2)^t$	$\frac{\ \mathbf{y}\ _2^2}{N} + \frac{\alpha^t}{N} ((\alpha^t - 2)B^t + (\sigma_e^2)^t A^t)$
(r, s)	$\frac{A^t}{N}$	$(\sigma_x^2)^t (1 - \frac{A^t}{N}) + \frac{\alpha^t}{N} (\alpha^t B^t + (\sigma_e^2)^t A^t)$	$\frac{\ \mathbf{y}\ _2^2}{N} + \frac{\alpha^t}{N} ((\alpha^t - 2)B^t + (\sigma_e^2)^t A^t)$

Table 4.1 – Mises à jours des estimateurs des paramètres pour les algorithmes EMs avec $A^t = \sum_{n=1}^N \phi_n^t$ et $B^t = \sum_{n=1}^N \phi_n^t y_n^2$.

On remarque alors que chacun de ces algorithmes ne requiert de calculer seulement deux quantités d'intérêts par itération : $\sum \phi_n^t$ et $\sum \phi_n^t y_n^2$. L'algorithme général est résumé dans l'Algorithme 9. Par rapport à l'influence du choix de la variable cachée, on peut voir que cela n'a aucun impact sur la mise à jour de p . De même, on note aussi que choisir **x** ou **(r, s)** conduit à la même mise à jour de σ_e^2 .

Algorithme 9 : EMs pour l'estimation des paramètres.

Result : $\sigma_e^2, \sigma_x^2, p$

Input : \mathbf{y}, θ^0

$t = 1;$

while *has not converged* **do**

 Calcul de ϕ_n^t ;

 Calcul $\sum \phi_n^t$ et $\sum \phi_n^t y_n^2$;

 Estimation de θ^t selon le tableau 4.1;

$t = t + 1;$

end

4.3 . Estimation Jointe des sources et paramètres

Nous avons donc présenté dans les sections précédentes deux méthodes dans lesquelles les paramètres sont estimés marginalement. On espère ainsi pouvoir utiliser ces valeurs afin de régler des méthodes supervisées d'estimation des sources selon les techniques abordées dans les chapitres précédents.

Une autre approche du problème consiste à estimer conjointement les paramètres et les sources. C'est l'approche que nous traitons dans cette section et qui nous permet de clore ce chapitre sur l'estimation des paramètres en débruitage. Les variables de sources que nous considérons sont les mêmes que pour la section précédente.

On reste dans le cadre probabiliste, où l'estimateur que nous choisissons est celui du maximum de vraisemblance caractérisé pour chaque choix de variable à estimer par

$$\hat{\mathbf{s}}, \hat{\theta} = \underset{\mathbf{s}, \theta}{\operatorname{argmin}} - \log p(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\theta) \quad (4.34a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\theta} = \underset{\mathbf{x}, \theta}{\operatorname{argmin}} - \log p(\mathbf{y}, \mathbf{x}|\theta) \quad (4.34b)$$

$$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\theta} = \underset{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \theta}{\operatorname{argmin}} - \log p(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \mathbf{s}|\theta) \quad (4.34c)$$

4.3.1 . Un problème d'optimisation sous contraintes

Si l'on cherche à résoudre les équations précédentes, on peut décomposer le problème sous forme d'un problème d'optimisation bi-niveaux. Par exemple pour \mathbf{s} :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} [-\log p(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{s}}(\theta)|\theta)] \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathbf{s}}(\theta) = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} - \log p(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\theta) \quad (4.36)$$

Les solutions de la deuxième équation sont connues car il s'agit de l'estimateur du MAP associé aux différentes variables de sources dans le cas supervisé. Ces résultats peuvent être trouvés dans le chapitre précédent. On remarque qu'il s'agit systématiquement d'un seuillage pondéré de \mathbf{y} avec les valeurs de seuil qui dépendent du choix de la variable. On peut retrouver les différentes valeurs résumées dans le tableau 3.1. Ces seuils sont des fonctions des paramètres. C'est pourquoi on doit résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant inspiré des travaux de [Gassiat et al., 1992] :

Soit T un seuil arbitraire, et soient $\hat{\mathbf{s}}_T$, $\hat{\mathbf{x}}_T$ et $\hat{\mathbf{r}}_T$ les estimateurs des sources au sens du maximum *a posteriori* associés au seuillage T . Alors on cherche T tel que

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} - \log p(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{s}}_T|\theta) \quad \text{sous la contrainte} \quad T_s(\hat{\theta}) = T \quad (4.37)$$

Dans le papier de [Gassiat et al., 1992], les auteurs considèrent que le nombre d'échantillons tend vers l'infini, et donc cherchent à résoudre le problème sur un espace continu.

Cependant, on peut remarquer que dans le cas où le nombre d'échantillons est fini, il existe un nombre fini de seuillages possibles. C'est pourquoi on va chercher à résoudre l'équation (4.37) pour chaque seuillage possible puis il suffit de conserver ceux qui satisfont la condition. On donne dans la suite de cette section les estimateurs de θ pour chaque choix de variables considéré.

4.3.2 . Résolution du problème non-contraint

Dans cette partie, on va chercher les paramètres θ qui minimisent la vraisemblance des sources et des données. On suppose ici que les sources sont connues grâce aux opérations de seuillage données dans le chapitre précédent.

Pour la variable \mathbf{s} . Soient $\mathbf{x} \sim \mathcal{BG}(p, \sigma_x^2)$, $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ et $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$. Soit \mathbf{s} le support de \mathbf{x} , alors la neg-log-vraisemblance de \mathbf{y} et $\hat{\mathbf{s}}$ est définie par

$$\mathcal{J}^s = -\log p(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{s}}|\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{y_n^2}{\hat{s}_n \sigma_x^2 + \sigma_e^2} + \log(\hat{s}_n \sigma_x^2 + \sigma_e^2) - \log p(\hat{\mathbf{s}}|\theta) \quad (4.38)$$

avec $\hat{\mathbf{s}}$ donné pour un seuil arbitraire T par :

$$\hat{s}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } y_n^2 > T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.39)$$

Résultat que l'on injecte alors dans \mathcal{J}^s afin d'obtenir une fonction qui ne dépend plus que de θ et T :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^s(\mathbf{y}, T, \theta) &= \frac{S^+}{2(\sigma_e^2 + \sigma_x^2)} + \frac{K}{2} \log(\sigma_e^2 + \sigma_x^2) \\ &+ \frac{S^-}{2\sigma_e^2} + \frac{N-K}{2} \log(\sigma_e^2) + \frac{1}{2} \log(2\pi) \\ &- K \log(p) - (N-K) \log(1-p) \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec

$$K = \text{Card}[y_n^2 > T] \quad , \quad S^+ = \sum_{n=1}^N y_n^2 > T \quad \text{et} \quad S^- = \sum_{n=1}^N y_n^2 \leq T \quad (4.41)$$

On cherche à présent les paramètres $\theta = (p, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$ qui minimisent cette fonction.

Proposition 14. Soit \mathcal{J}^s donné dans l'équation (4.40), alors

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmin}} \mathcal{J}^s(\mathbf{y}, T, \theta)$$

est donné par

$$\hat{p} = \frac{K}{N} \quad (4.42a)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{S^+}{K} - \hat{\sigma}_e^2 \quad (4.42b)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{S^-}{N - K} \quad (4.42c)$$

Démonstration. Il suffit de dériver l'équation (4.40) par rapport aux paramètres et de trouver ses racines. \square

Pour la variable \mathbf{x} . Soient $\mathbf{x} \sim \mathcal{BG}(p, \sigma_x^2)$, $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ et $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$. Alors la neg-log-vraisemblance de \mathbf{y} et $\hat{\mathbf{x}}$ est définie par

$$\mathcal{J}^x = -\log p(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}|\theta) = \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{N}{2} \log \sigma_e^2 - \log p(\hat{\mathbf{x}}|\theta) \quad (4.43)$$

avec $\hat{\mathbf{x}}$ donné pour un seuil arbitraire T par :

$$\hat{x}_n = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} y_n & \text{si } y_n^2 > T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.44)$$

Résultat que l'on injecte alors dans \mathcal{J}^x afin d'obtenir une fonction qui ne dépend plus que de θ et T :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^x(\mathbf{y}, T, \theta) = & \frac{S^+}{2(\sigma_e^2 + \sigma_x^2)} + \frac{K}{2} \log(2\pi\sigma_x^2) + \frac{S^-}{2\sigma_e^2} + \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_e^2) \\ & - K \log(p) - (N - K) \log(1 - p) \end{aligned} \quad (4.45)$$

avec

$$K = \text{Card}[y_n^2 > T] \quad , \quad S^+ = \sum_{n=1}^N y_n^2 > T \quad \text{et} \quad S^- = \sum_{n=1}^N y_n^2 \leq T \quad (4.46)$$

On cherche à présent les paramètres $\theta = (p, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$ qui minimisent cette fonction.

Proposition 15. Soit \mathcal{J}^x donné dans l'équation (4.45), alors

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmin}} \mathcal{J}^x(\mathbf{y}, T, \theta)$$

est donné par

$$\hat{p} = \frac{K}{N} \quad (4.47a)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{S^+}{K(1 + \lambda)^2} \quad (4.47b)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \lambda \hat{\sigma}_x^2 \quad (4.47c)$$

avec λ la plus petite racine positive de :

$$\lambda^2 \left(1 + \frac{S^+}{S^-}\right) + \lambda \left(2 - \frac{N S^+}{K S^-}\right) + 1 = 0$$

Démonstration. On utilise directement les résultats issus de l'article [Gassiat et al., 1992] qui donnent cette solution en identifiant les termes. \square

Pour les variables (\mathbf{r}, \mathbf{s}) . Soient $\mathbf{s} \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathbf{r} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2 \mathbf{I})$, $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ et $\mathbf{y} = \mathbf{r}\mathbf{s} + \mathbf{e}$. Alors la neg-log-vraisemblance de $\mathbf{y}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}$ est définie par

$$\mathcal{J}^r = -\log p(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}|\theta) = \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{r}}\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{N}{2} \log \sigma_e^2 + \frac{\|\hat{\mathbf{r}}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \frac{N}{2\sigma_x^2} \log \sigma_x^2 - \log p(\hat{\mathbf{s}}|\theta) \quad (4.48)$$

avec $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}}$ donnés pour seuil arbitraire T par :

$$\hat{r}_n, \hat{s}_n = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_e^2} y_n, 1 & \text{si } y_n^2 > T \\ 0, 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.49)$$

Résultat que l'on injecte alors dans \mathcal{J}^r afin d'obtenir une fonction qui ne dépend plus que de θ et T :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^r(\mathbf{y}, T, \theta) = & \frac{S^+}{2(\sigma_e^2 + \sigma_x^2)} + \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_e^2) + \frac{S^-}{2\sigma_e^2} + \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_x^2) \\ & - K \log(p) - (N - K) \log(1 - p) \end{aligned} \quad (4.50)$$

avec

$$K = \text{Card}[y_n^2 > T] \quad , \quad S^+ = \sum_{n=1}^N y_n^2 > T \quad \text{et} \quad S^- = \sum_{n=1}^N y_n^2 \leq T \quad (4.51)$$

On cherche à présent les paramètres $\theta = (p, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$ qui minimisent cette fonction.

Proposition 16. Soit \mathcal{J}^r donné dans l'équation (4.50), alors

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmin}} \mathcal{J}^r(\mathbf{y}, T, \theta)$$

est donné par

$$\hat{p} = \frac{K}{N} \quad (4.52a)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{S^+}{K(1 + \lambda)^2} \quad (4.52b)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \lambda \hat{\sigma}_x^2 \quad (4.52c)$$

avec λ la plus petite racine positive de :

$$\lambda^2 \left(1 + \frac{S^+}{S^-} \right) + \lambda \left(2 - \frac{S^+}{S^-} \right) + 1 = 0$$

Démonstration. On observe que \mathcal{J}^r est quasiment la même fonction que \mathcal{J}^x . Seul le K devant $\log(2\pi\sigma_x^2)$ se mute en N . \square

4.3.3 . Algorithme complet

On a donc en théorie pour chaque seuillage, une estimation de θ . Or on a vu que le problème était contraint par un encadrement de la valeur du seuil estimé. On distingue alors trois cas de figures qui peuvent se présenter : un seul seuillage vérifie les conditions (auquel cas il s'agit de notre solution), plusieurs seuillages vérifient la condition et enfin aucun seuillage ne vérifie la condition. S'il existe plusieurs seuillage tels que

$$y_K^2 < T(\hat{\theta}_k) < y_{K+1}^2$$

alors il suffit de conserver celui dont la valeur de \mathcal{J} est la plus faible. Dans le cas contraire où il n'y aurait aucune valeur satisfaisant la condition, cela voudrait dire que la solution se situe sur les "bords" du problème, on choisit alors la solution dont le seuil est le plus proche de satisfaire la condition. La méthode est résumée dans l'Algorithme 10.

Algorithme 10 : Estimation jointe des sources et des paramètres.

Result : $\sigma_e^2, \sigma_x^2, p$

Input : \mathbf{y}

$J_{min} = \infty;$

for all $k \in [0, N]$ **do**

$T_k = y_k^2;$

 Calcul de S_k^+, S_k^-, K selon (4.41);

 Calcul de $\hat{p}_k, \hat{\sigma}_{x_k}^2, \hat{\sigma}_{e_k}^2$ selon (4.47);

 Calcul de $\mathcal{J}_k(\mathbf{y}, T_k, \hat{\theta}_k)$ selon (4.45);

end

if $\exists k | y_k^2 < T(\theta_k) < y_{k+1}^2$ **then**

$\hat{k} = \operatorname{argmin}_k Q_k$ sous la contrainte $y_k^2 < T(\theta_k) < y_{k+1}^2;$

else

$\hat{k} = \operatorname{argmin}$ distance entre $T(\theta_k)$ et $[y_k^2, y_{k+1}^2];$

end

$\hat{\theta} = (\hat{p}_{\hat{k}}, \hat{\sigma}_{x_{\hat{k}}}^2, \hat{\sigma}_{e_{\hat{k}}}^2);$

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\hat{k}};$

4.4 . Étude numérique

Dans cette section nous proposons une étude empirique afin de dégager les propriétés statistiques des algorithmes présentés plus haut. Pour cela on génère des signaux synthétiques suivant un modèle Bernoulli-Gaussien en tirant un support \mathbf{s} de taille N selon une loi de Bernoulli de variable p . On génère ensuite

les amplitudes non nulles de \mathbf{x} en les tirant au hasard selon une loi normale de moyenne nulle et de variance fixée à $\sigma_x^2 = 1$. La variance du bruit est alors choisie en fonction du rapport signal à bruit que l'on désire pour \mathbf{y} . Les algorithmes EM sont initialisés par la méthode des moments.

On va ici étudier l'influence de plusieurs de ces paramètres sur la qualité de l'estimation. Comme on a centré cette étude sur l'estimation des paramètres, on quantifiera la qualité de l'estimation par l'erreur absolue :

$$|p - \hat{p}| \quad |\sigma_x^2 - \hat{\sigma}_x^2| \quad |\sigma_e^2 - \hat{\sigma}_e^2| \quad (4.53)$$

À cela on peut rajouter le fait que, par définition de l'EM, on calcule à chaque itération la probabilité *a posteriori* de la variable cachée. Il est alors possible d'en dériver l'estimateur de Bayes. On a vu dans le chapitre précédent, à la section 3.2.1, que cet estimateur appliqué à l'erreur quadratique moyenne donne l'espérance *a posteriori* de \mathbf{x} :

$$(\hat{x}_n)_B = \mathbb{E}_{x_n|\theta^t} [x_n] = \phi_n^t \frac{(\sigma_x^2)^t}{(\sigma_x^2)^t + (\sigma_e^2)^t} y_n \quad (4.54)$$

avec

$$\phi_n^t = \frac{\frac{p}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}} \exp -\frac{y_n^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}}{\frac{p}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}} \exp -\frac{y_n^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)} + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp -\frac{y_n^2}{2\sigma_e^2}}$$

Et l'estimateur de Bayes associé à l'erreur 0 – 1 de \mathbf{s} donne l'estimateur du maximum *a posteriori* :

$$(\hat{s}_n)_B = 1 \quad \text{si} \quad \phi_n^t > 0.5 \quad (4.55)$$

On quantifiera alors l'estimation des signaux sources au travers du rapport signal sur bruit (SNR) défini par :

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} \quad (4.56)$$

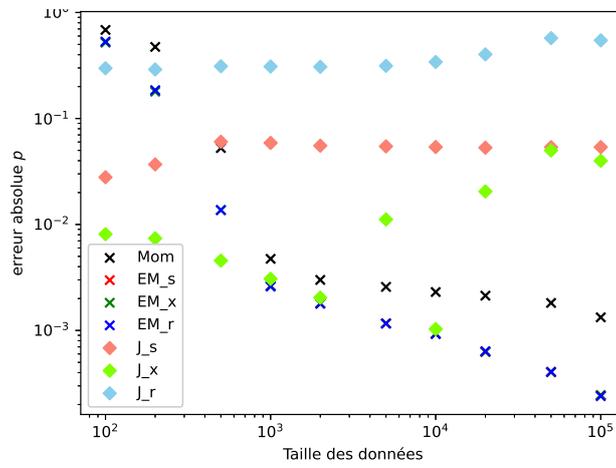
ainsi que le nombre de Faux Positifs (FP) et Faux Négatifs (FN). Toutes les métriques sont moyennées sur 100 réalisations pour chaque point.

Les méthodes que nous comparons (et leurs désignations) sont donc :

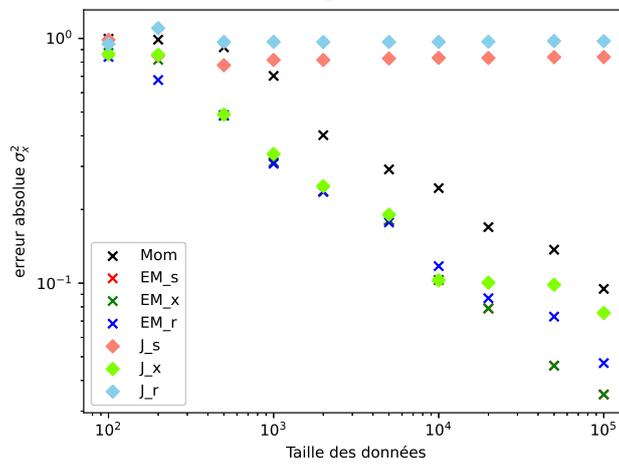
- La méthode des Moments (Mom),
- Les algorithmes EM (EM + variable cachée),
- Les algorithmes d'estimations jointes (J + variable estimée)

4.4.1 . Influence du nombre de données accessibles

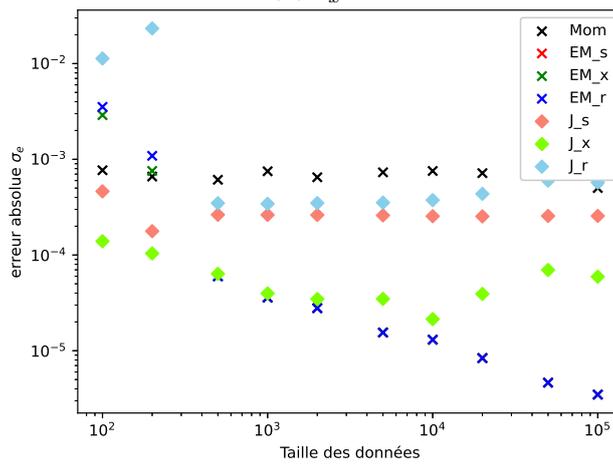
On fait ici varier N la taille des vecteurs d'observation. Les tests sont conduits en choisissant différentes tailles de vecteurs N allant de 10^2 à 10^6 . Les paramètres d'entrées sont $p = 0.01$, $\sigma_x^2 = 1$ et $\sigma_e^2 = 0.001$ afin d'obtenir un iSNR d'entrée de $10dB$. Les résultats sont visibles dans les figures 4.1a à 4.2c.



(a) p

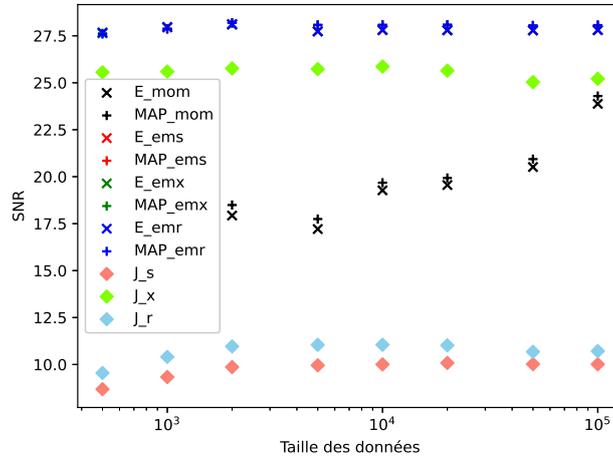


(b) σ_x^2

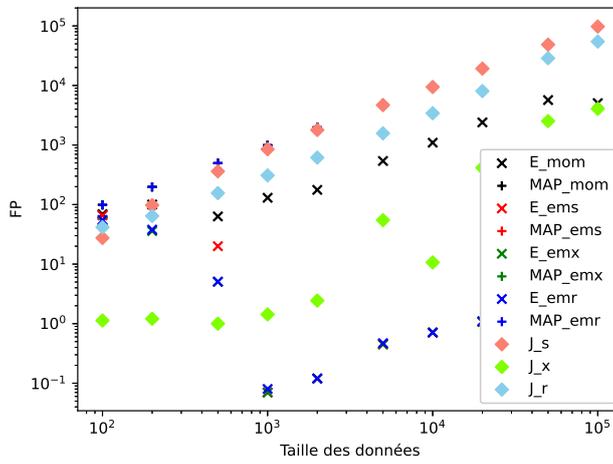


(c) σ_e^2

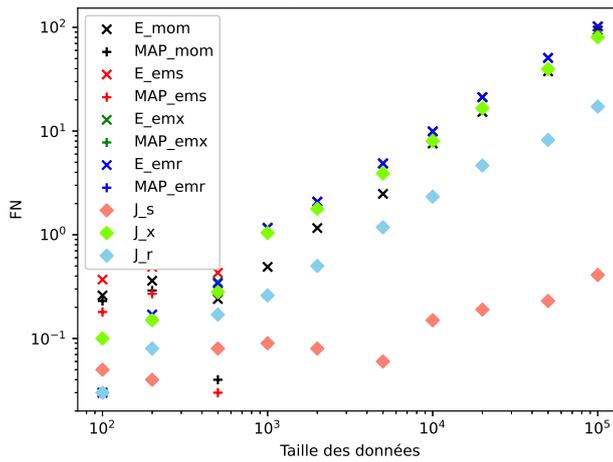
Figure 4.1 – iSNR = 10dB, $p = 0.01$. Estimation des paramètres θ .



(a) *SNR*



(b) *FP*



(c) *FN*

Figure 4.2 – $iSNR = 10dB$, $p = 0.01$. Estimation des sources x , s .

4.4.2 . Influence de la parcimonie

On fait ici varier la variable de Bernoulli p de manière quasi logarithmique dans l'intervalle $[0.001, 0.5]$. La taille des vecteurs est fixée à $N = 1000$ et σ_e^2 est choisie tel que le SNR d'entrée vaille 10dB. Les résultats sont visibles dans les figures 4.3a à 4.4c.

4.4.3 . Influence du niveau de bruit

On fait ici varier σ_e^2 afin que le SNR d'entrée soit compris entre $0dB$ et $25dB$. On fixe $p = 0.01$ et $N = 1000$. Les résultats sont visibles dans les figures 4.5a à 4.6c.

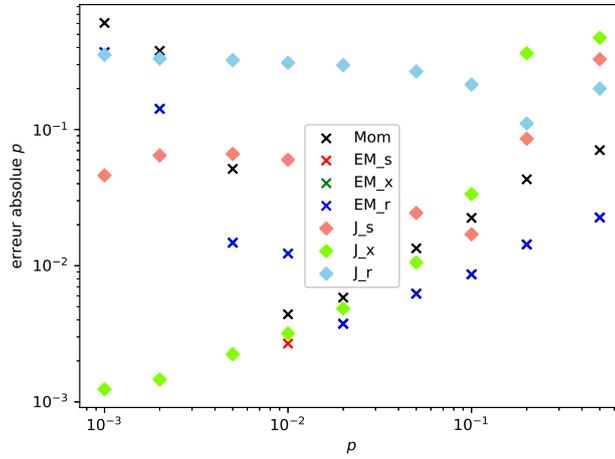
Remarques : En terme d'estimation des sources on observe dans les figures 4.2a, 4.4a et 4.6a que l'estimation des amplitudes est dominée par le MAP paramétré par la sortie de l'algorithme EM avec (\mathbf{r}, \mathbf{s}) en variables cachées. Cependant, si l'on se réfère au nombre de fausses décisions quantifiées par FN et FP donnés dans les figures 4.2c, 4.4c et 4.6c (4.2b, 4.4b et 4.6b resp.), alors le nombre d'erreurs est minoré en majorité par les approches d'estimation jointe.

Du côté de l'estimation des paramètres, on observe dans les figures 4.1a à 4.1c, 4.3a à 4.3c et 4.5a à 4.5c que les estimateurs joints sont ceux qui produisent le plus d'erreurs moyennes. Ce résultat est attendu car il a été montré dans [Gassiat et al., 1992] que l'estimation jointe des paramètres et des sources (dans le cas où la variable conjointe est \mathbf{x}) est biaisée lorsque le nombre d'échantillons tend vers l'infini. On s'attend à pouvoir étendre ce résultat aux autres choix de variables. Les approches EMs, quand à elles semblent fournir des résultats bien moins biaisés et plus stables que les approches jointes vis-à-vis du nombre de données accessibles. En revanche cette stabilité ne tient qu'à l'utilisation de la méthode des moments en initialiseur alors que les méthodes jointes ne nécessitent pas d'initialisation.

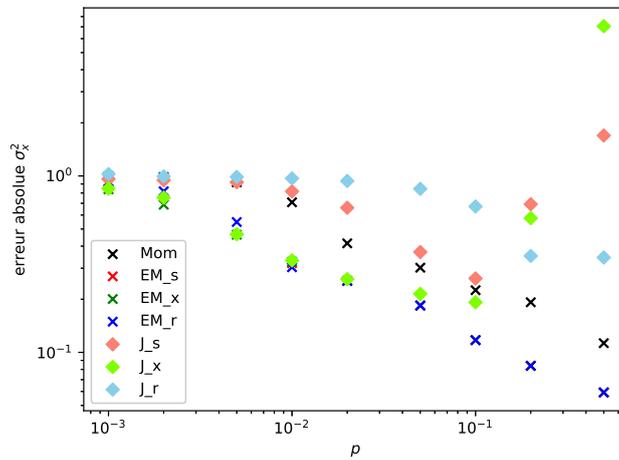
4.5 . Conclusion

Ce chapitre présente trois algorithmes de familles différentes dont le but est d'estimer les paramètres du modèle BG dans le cadre du débruitage. Le premier algorithme est basé sur la méthode des moments et est donc entièrement non-supervisé. Cette méthode ne fonctionne que sous certaines conditions qui sont développées plus haut ainsi que la procédure à adopter lorsque l'ensemble des valeurs ne satisfait pas la condition.

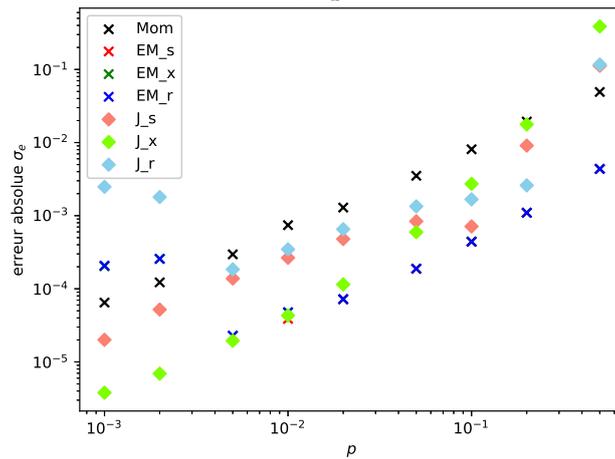
La seconde catégorie d'algorithmes proposés correspond aux méthodes EMs. Ces algorithmes diffèrent entre eux par le choix des variables cachées. Cependant, les approches par EM sont partiellement non-supervisées car elles nécessitent une initialisation. La dernière approche présentée est basée sur



(a) p

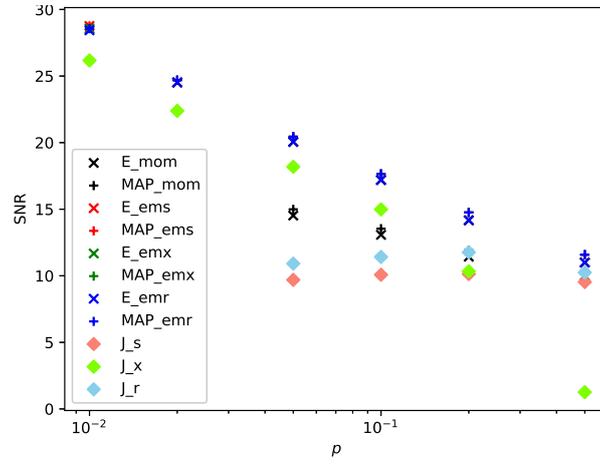


(b) σ_x^2

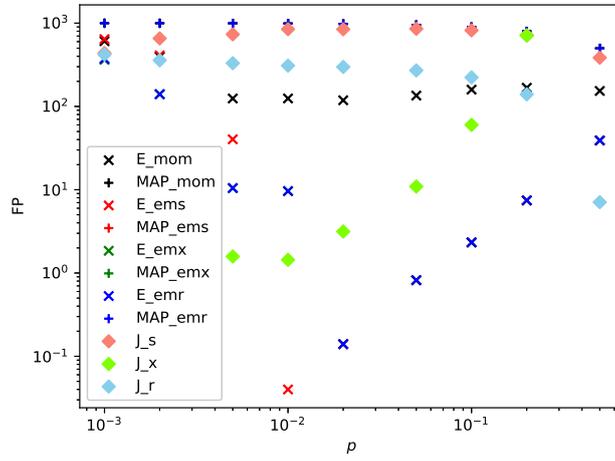


(c) σ_e^2

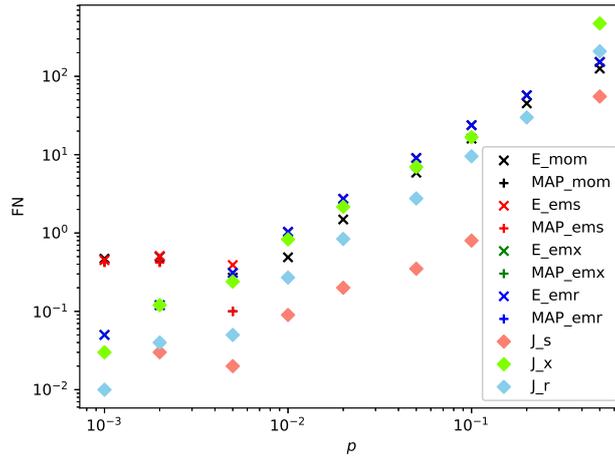
Figure 4.3 - iSNR = 10dB, $N = 1000$. Estimation des paramètres θ .



(a) *SNR*

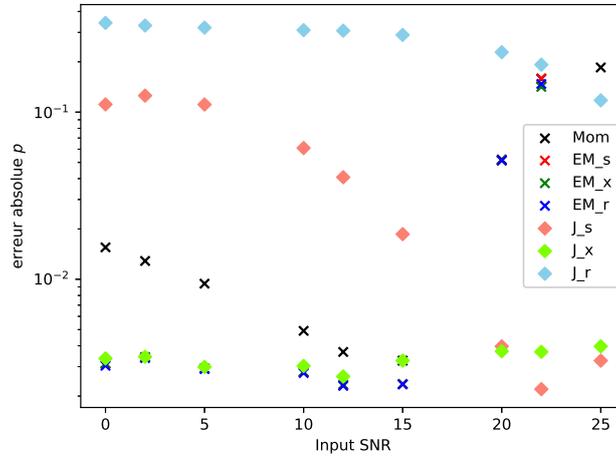


(b) *FP*

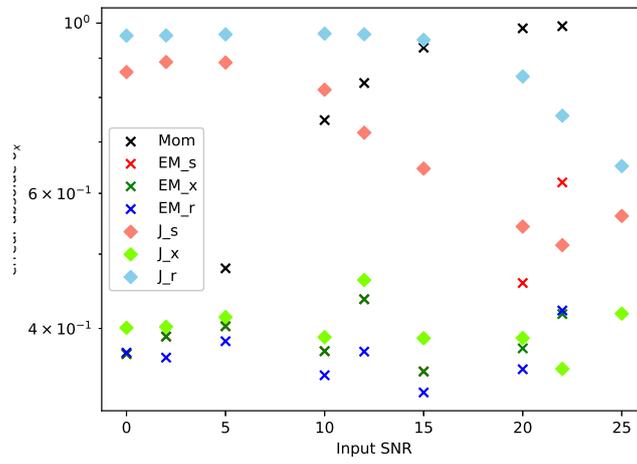


(c) *FN*

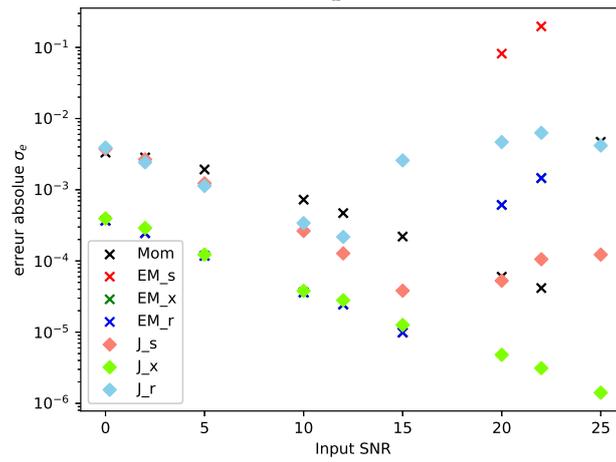
Figure 4.4 – $iSNR = 10dB$, $N = 1000$. Estimation des sources x, s .



(a) p

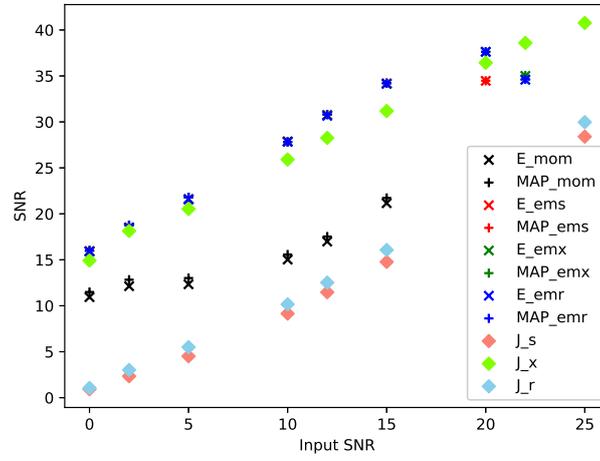


(b) σ_x^2

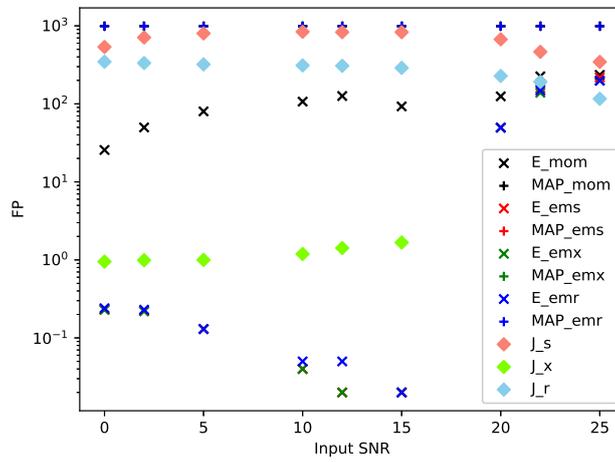


(c) σ_e^2

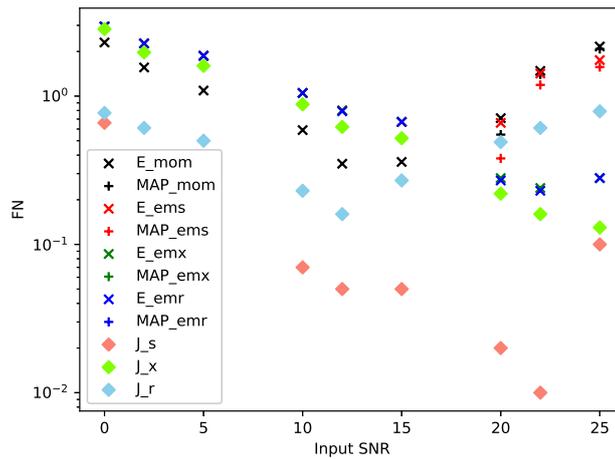
Figure 4.5 - $p = 0.01$ et $N = 1000$. Estimation des paramètres θ .



(a) SNR



(b) FP



(c) FN

Figure 4.6 - $p = 0.01$ et $N = 1000$. Estimation des sources x, s .

l'estimation jointe des sources et des paramètres via la maximisation de la vraisemblance des données et des sources.

Nous avons proposé une étude empirique des propriétés des méthodes présentées. Dans un premier temps il s'agit de vérifier la validité de l'estimation des paramètres de même que la stabilité des estimateurs. Ces derniers fournissent des résultats très bons en débruitage. On voit alors que la combinaison Moment + EM est tout à fait viable pour l'estimation des seuils. Plus particulièrement, on remarque que prendre \mathbf{x} que ce soit dans l'estimation jointe, ou comme variable cachée, donne le meilleur compromis en terme de performances. C'est d'ailleurs ce qui nous a motivé par la suite à se concentrer sur l'utilisation de cette variable dans l'extension du cadre des EMs aux problèmes inverses généraux.

5 - Extension au cas des problèmes inverses généraux

Sommaire

5.1 Introduction d'une variable latente	88
5.1.1 Distribution a posteriori de \mathbf{z}	89
5.1.2 Vraisemblance	90
5.2 Estimation jointe de \mathbf{x}, ω avec \mathbf{z} en variable cachée	90
5.2.1 Etape-E	91
5.2.2 Etape-M	92
5.2.3 Algorithme complet	94
5.3 Estimation jointe de \mathbf{z}, ω avec \mathbf{x} en variable cachée	96
5.3.1 Etape-E	96
5.3.2 Etape-M	96
5.3.3 Algorithme complet	98
5.4 Expérimentations	98
5.4.1 Estimation du signal	102
5.4.2 Estimation des paramètres	105
5.5 Variantes	109
5.5.1 En choisissant \mathbf{s}	109
5.5.2 En choisissant (\mathbf{r}, \mathbf{s})	110
5.6 Conclusion	111

Dans le chapitre précédent, nous avons développé des méthodes pour l'estimation des paramètres du modèle Bernoulli-Gaussien dans le cas d'un problème défini comme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$$

Dans ce chapitre, on souhaite étendre ces résultats au cas général que nous avons présenté dans l'introduction de cette thèse. Ce cas fait intervenir l'opérateur $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ qui affecte le signal source :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} \tag{5.1}$$

Le caractère "mêlé" des signaux après l'application de l'opérateur \mathbf{H} ne permet plus l'indépendance des éléments de \mathbf{y} . Dès lors, résoudre de manière explicite le maximum de vraisemblance ou bien l'EM classique revient à un problème NP-combinatoire. Cela provient principalement du calcul des lois a

posteriori, par exemple on trouve dans [Protter et al., 2010] que la loi de $\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta$ est une somme sur l'espace de tous les supports possibles \mathcal{S} :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \theta) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{s}|\mathbf{y}, \theta) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{s}, \theta)$$

où Protter et al. nous montrent que, quand bien même $\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{s}, \theta$ suit une distribution gaussienne, l'*a posteriori* reste une somme de 2^N termes, que l'on peut difficilement évaluer en pratique.

Dans la première section, nous commencerons donc par introduire une variable latente afin de découpler le problème. Nous y développerons les différentes distributions sous-jacentes. Par la suite, la section 2 présentera un algorithme EM utilisant la variable latente en variable cachée. En section 3, nous suivrons la même démarche mais en choisissant d'estimer conjointement les paramètres et la variable latente. Enfin nous présenterons les résultats des simulations numériques portant sur ces méthodes en section 4.

Ces méthodes constituent une des deux contributions principales de cette thèse et ont fait l'objet d'un article de conférence [Barbault et al., 2022] ainsi qu'une soumission à un journal.

5.1 . Introduction d'une variable latente

Dans le but de retrouver un cadre type débruitage, nous nous sommes inspirés de l'article de [Figueiredo and Nowak, 2003] dans lequel est introduite une variable latente \mathbf{z} . On définit cette variable latente $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ telle que, soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ une variable aléatoire qui suit une loi Bernoulli-gaussienne, alors

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad \text{devient} \quad \begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{b} \\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.2)$$

L'intérêt d'une telle variable latente, est qu'elle permet un découplage entre la partie 'inversion de matrice' et la partie débruitage du signal. On suppose ici que les bruits \mathbf{b} et \mathbf{n} sont Gaussiens de moyennes nulles. Cela implique que si Γ_b et respectivement Γ_n sont leurs matrices de covariance, alors comme $\sigma_e^2 = \mathbf{H}\mathbf{n} + \mathbf{b}$ on a :

$$\sigma_e^2 \mathbf{I} = \Gamma_b + \mathbf{H}\Gamma_n \mathbf{H}^T \quad (5.3)$$

Ici et dans la suite, nous supposons que \mathbf{n} est blanc gaussien de variance $\sigma_n^2 \mathbf{I}$, d'où on déduit la matrice de covariance du bruit \mathbf{b} :

$$\Gamma_b = \sigma_e^2 \mathbf{I} - \sigma_n^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^T \quad (5.4)$$

On peut donc paramétriser le problème par $\omega = (p, \sigma_x^2, \sigma_n^2, \sigma_e^2)$.

Proposition 17. Soit la décomposition d'un problème linéaire donné dans le système (5.2) avec $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$, $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ et $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_b)$. Alors, \mathbf{b} est non dégénéré si et seulement si, on a la relation suivante entre σ_e^2 et σ_n^2 :

$$\sigma_e^2 \geq \sigma_n^2 \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\| \quad (5.5)$$

où ici $\|\mathbf{H}\|$ désigne la norme d'opérateur de \mathbf{H} .

Démonstration. On part de l'expression de la covariance de \mathbf{b} donné dans l'équation (5.4). Comme \mathbf{b} doit admettre une distribution non-dégénérée, alors Γ_b doit être définie semi-positive. On en déduit alors que $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \Gamma_b \mathbf{u} &\geq 0 \\ \sigma_e^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 - \sigma_n^2 \mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u} &\geq 0 \\ \sigma_e^2 &\geq \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2^2} \sigma_n^2 \end{aligned}$$

Par définition, $\max_{\mathbf{u}} \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2^2} = \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|$. □

Maintenant que l'on a défini le cadre d'existence des paramètres du problème, on va pouvoir l'utiliser dans notre algorithme EM. Cette variable est alors susceptible de briguer deux places possibles : variable cachée ou variable à estimer. On développe dans les sections suivantes les différentes procédures. Auparavant, dans les sous-sections qui suivent, nous allons donner les propriétés de \mathbf{z} en terme de distributions qui vont nous servir.

5.1.1 . Distribution a posteriori de \mathbf{z}

On va, dans cette partie, développer la distribution *a posteriori* de \mathbf{z} sachant \mathbf{y} et les sources \mathbf{x} . Obtenir la loi *a posteriori* de \mathbf{z} sachant seulement \mathbf{y} se déduit au besoin en prenant l'espérance de la loi précédente par rapport à la distribution *a priori* de la source.

L'introduction de \mathbf{z} permet les propriétés suivantes :

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \mathbf{x}, \omega) = p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \omega) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \omega) = p(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \omega) \quad (5.6)$$

L'autre propriété qui va nous intéresser est la suivante. Par définition, la loi *a priori* de $\mathbf{z}|\mathbf{x}$ est gaussienne multivariée, de même que la loi de $\mathbf{y}|\mathbf{z}$. On suppose donc que la distribution *a posteriori* de $\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}$ est aussi une gaussienne multivariée. En utilisant les propriétés de cette dernière, on obtient

$$\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}), \Gamma_z) \quad (5.7)$$

avec

$$\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (5.8a)$$

$$\Gamma_z = \sigma_n^2 \left(\mathbf{I} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right) \quad (5.8b)$$

Résultat que l'on obtient en appliquant la règle de Bayes :

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \mathbf{x})}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})} p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$$

qui est donc proportionnelle à l'exponentielle suivante

$$\exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z})^T \Gamma_b^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z}) - \frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_n^2} + \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_e^2} \right)$$

Réarranger les termes permet de compléter ce résultat.

On constate alors que le mode de la gaussienne est donné par la descente de gradient en \mathbf{x} qui minimise l'attache aux données défini comme $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2$ avec un pas de $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} < \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|^{-1}$ comme vu dans la section 2.2.1 du chapitre 2.

5.1.2 . Vraisemblance

Comme on a décorrélé \mathbf{y} des sources grâce à l'introduction de \mathbf{z} , on va étudier la nouvelle vraisemblance des données qui est généralisable peu importe le choix des variables de source à estimer :

$$\mathbf{y}|\mathbf{z}, \omega \sim \mathcal{N}(\mathbf{z}, \Gamma_b = \sigma_e^2 \mathbf{I} - \sigma_n^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^T) \quad (5.9)$$

Dans les chapitres précédents, que ce soit pour le maximum de vraisemblance ou les algorithmes EMs, nous avons largement fait appel au concept de log-vraisemblance. On donne alors l'anti-log-vraisemblance de $\mathbf{y}|\mathbf{z}$ dans notre nouveau formalisme :

$$\begin{aligned} -\log p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \omega) &= \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z})^T \Gamma_b^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z}) + \frac{1}{2} \log |\Gamma_b| + \frac{M}{2} \log 2\pi \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace}[\Gamma_b^{-1} \mathbf{V}] + \frac{1}{2} \log |\Gamma_b| + \frac{M}{2} \log 2\pi \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec \mathbf{V} la variance empirique des données :

$$\mathbf{V} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z})^T \quad (5.11)$$

5.2 . Estimation jointe de \mathbf{x}, ω avec \mathbf{z} en variable cachée

Maintenant que nous avons introduit \mathbf{z} et les résultats associés à cette variable latente, nous pouvons l'utiliser dans nos approches EM afin d'estimer les paramètres. Naturellement on peut concevoir \mathbf{z} comme nouvelle variable cachée, comme on peut le retrouver dans les travaux antérieurs de Figueiredo [Figueiredo and Nowak, 2003] sur la minimisation ℓ_1 . Ces mêmes travaux ne proposaient cependant pas d'estimer l'hyper-paramètre λ associé à leur formulation du problème (voir section 2.2.1 du chapitre 2).

Cependant si l'on essaye d'écrire la distribution *a posteriori* de \mathbf{z} , on retombe sur le problème combinatoire suivant :

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \theta) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}, \theta) p(\mathbf{s}|\theta)$$

ou \mathcal{S} désigne l'ensemble des supports possibles et est donc de taille 2^N .

C'est pourquoi en pratique on s'intéresse au problème d'estimation jointe des paramètres et des sources. Par exemple pour \mathbf{x} on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\omega} = \underset{\mathbf{x}, \omega}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \omega) \quad (5.12)$$

On applique alors les étapes classiques de l'algorithme EM :

- Etape-E : $Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{x}^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}|\omega))]$
- Etape-M : $\mathbf{x}^{t+1}, \omega^{t+1} = \underset{\mathbf{x}, \omega}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{x}^t, \omega^t)$

Dans cette section nous développerons d'abord l'étape E puis l'étape M dans le cas de l'estimation jointe de \mathbf{x} et ω . Puis nous donnerons en fin de section les variantes de la méthode pour l'estimation jointe de (\mathbf{s}, ω) et $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)$.

5.2.1 . Etape-E

Dans cette section, on va développer la forme explicite de l'étape d'espérance en calculant :

$$Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{x}^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}|\omega))] \quad (5.13)$$

La distribution *a posteriori* de $\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega$ a déjà été donnée en première section de ce chapitre dans l'équation (5.7).

Proposition 18. Soit $Q_{\mathbf{x}}$ défini dans l'équation (5.13), alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{x}^t, \omega^t) = & \mathcal{V}(\sigma_n^2, \sigma_e^2|\mathbf{x}^t, \omega^t) + \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) + \frac{\|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{x}\|_2^2 + \operatorname{Trace}[\Gamma_z]}{2\sigma_n^2} \\ & + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_x^2} + \frac{1}{2} \left(\log(2\pi\sigma_x^2) + 2 \log \frac{1-p}{p} \right) \|\mathbf{x}\|_0 - N \log(1-p) \end{aligned} \quad (5.14)$$

avec $\hat{\mathbf{z}}$ et Γ_z donnés dans les équations (5.8). Et

$$\mathcal{V}(\sigma_n^2, \sigma_e^2|\mathbf{x}^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \sigma_e^2, \sigma_n^2))] \quad (5.15)$$

Démonstration. La propriété (5.6) nous permet de décomposer $Q_{\mathbf{x}}$ de la manière suivante :

$$Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega|\mathbf{x}^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \sigma_e^2, \sigma_n^2))] + \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}, \mathbf{x}|p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))]$$

De plus, l'indépendance des composantes de \mathbf{z} et des sources permet de développer le terme de droite en une somme sur les éléments de \mathbf{z} :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}, \mathbf{x}|p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))] = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(z_n, x_n|p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))]$$

Comme, par définition, $z_n|x_n, \omega$ suit une loi normale, alors on décompose de la manière suivante :

$$-\log(p(z_n, x_n|p, \sigma_x^2, \sigma_n^2)) = \frac{(z_n - x_n)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) - \log(p(x_n|p, \sigma_x^2))$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(z_n, x_n|p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))] &= \frac{1}{2\sigma_n^2} \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [(z_n - x_n)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) - \log(p(x_n|p, \sigma_x^2)) \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la loi de $\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}$ qui est donnée dans l'équation (5.7), ainsi que la log-prior de \mathbf{x} qui est donnée dans la proposition 2 du Chapitre 3. \square

5.2.2 . Etape-M

Poursuivant la procédure, on va à présent chercher à minimiser la fonction $Q_{\mathbf{x}}$ par rapport aux différents paramètres du problème :

$$\mathbf{x}^{t+1}, \omega^{t+1} = \underset{\mathbf{x}, \omega}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega | \mathbf{x}^t, \omega^t) \quad (5.16)$$

Minimisation en \mathbf{x} :

Proposition 19. Soit la fonction $Q_{\mathbf{x}}$ donnée dans l'équation (5.14). Alors on définit l'estimateur de x_n à l'itération $t + 1$ par

$$x_n^{t+1} = \underset{x_n}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega | \mathbf{x}^t, \omega^t) \quad (5.17)$$

et qui vaut

$$x_n^{t+1} = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_n^2} z_n & \text{si } (z_n^t)^2 > T_x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.18)$$

avec

$$T_x = (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \left(\log 2\pi\sigma_x^2 + 2 \log \frac{1-p}{p} \right) \quad (5.19)$$

Démonstration. Il suffit de dériver $Q_{\mathbf{x}}$ par rapport à \mathbf{x} . \square

Minimisation en ω :

Proposition 20. Soit l'estimateur de ω à l'itération $t + 1$ défini par

$$\omega^{t+1} = \underset{\omega}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{t+1}, \omega | \mathbf{x}^t, \omega^t)$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \omega^{t+1} = \underset{\omega}{\operatorname{argmin}} \quad & \mathcal{V}(\sigma_n^2, \sigma_e^2 | \mathbf{x}^t, \omega^t) + \frac{N}{2} \log \sigma_n^2 + \frac{S^-}{2\sigma_n^2} + \frac{S^+}{2(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)} \\ & + \frac{K}{2} \left(\log(2\pi\sigma_x^2) + 2 \log \frac{1-p}{p} \right) - N \log(1-p) \end{aligned} \quad (5.20)$$

avec

$$S^+ = \sum_{n=1}^N z_n^2 > T \quad , \quad S^- = \|\hat{\mathbf{z}}^t\|_2^2 - S^+ + \operatorname{Trace}[\Gamma_z^t] \quad \text{et} \quad K = \operatorname{Card}\{z_n^2 > T\}_{n \in \{0, N\}} \quad (5.21)$$

et sous la contrainte $T_x(\omega^{t+1}) = T$.

Démonstration. Soit un seuil arbitraire T dans la définition de x_n^{t+1} issue de l'équation (5.18). On injecte alors l'estimation de \mathbf{x} dans l'expression de $Q_{\mathbf{x}}$. \square

Dans un premier temps, on observe que la fonction à minimiser est très similaire à la log-vraisemblance de l'estimation jointe en débruitage abordée dans la section 4.3 du Chapitre 4 que l'on redonne ici :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x = \frac{M}{2} \log \sigma_e^2 + \frac{\sum y_n^2 < T}{2\sigma_n^2} + \frac{\sum y_n^2 > T}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2)} \\ + \frac{K}{2} \left(\log(2\pi\sigma_x^2) + 2 \log \frac{1-p}{p} \right) - N \log(1-p) \end{aligned}$$

Dans un second temps, on observe que la minimisation par rapport à σ_e^2 ne fait intervenir que \mathcal{V} . De par la contrainte qui impose à \mathbf{b} d'être non dégénéré, on sait que l'espace de recherche de σ_e^2 est restreint à $[\|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\| \sigma_n^2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} (\sigma_e^2)^{t+1} &= \underset{\sigma_e^2}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{z} | \mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y} | \mathbf{z}, \sigma_e^2, \sigma_n^2))] \\ &= \underset{\sigma_e^2}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{z} | \mathbf{y}, \mathbf{x}^t, \omega^t} [\operatorname{Trace}[\Gamma_b^{-1} \mathbf{V}]] + \log |\Gamma_b| \\ &= \underset{\sigma_e^2}{\operatorname{argmin}} \operatorname{Trace}[\Gamma_b^{-1} \tilde{\mathbf{V}}^t] + \log |\Gamma_b| \end{aligned} \quad (5.22)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{V}}^t = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z}^t) (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{z}^t)^T + \mathbf{H}\Gamma_z^t \mathbf{H}^T \quad (5.23)$$

Il n'existe malheureusement aucune forme explicite de cet estimateur dans la plupart des cas. C'est pourquoi nous avons fait le choix de procéder à une minimisation alternée entre σ_e^2 d'un côté et $(p, \sigma_x^2, \sigma_n^2)$ de l'autre.

Comme nous n'avons pas de forme explicite de $(\sigma_e^2)^{t+1}$, on choisit de prendre la valeur la plus petite possible afin d'avoir le pas de gradient (cf. section 2.2.1) le plus grand, sous contrainte d'avoir $\sigma_e^2 \geq \sigma_n^2 \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|$ ce qui donne :

$$(\sigma_e^2)^{t+1} = (\sigma_n^2)^{t+1} \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\| \quad (5.24)$$

Il ne reste plus alors qu'à chercher :

$$\begin{aligned} p^{t+1}, (\sigma_x^2)^{t+1}, (\sigma_n^2)^{t+1} = \operatorname{argmin}_{p, \sigma_x^2, \sigma_n^2} & \frac{M}{2} \log \sigma_n^2 + \frac{S^-}{2\sigma_n^2} + \frac{S^+}{2(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)} \\ & + \frac{K}{2} \left(\log(2\pi\sigma_x^2) + 2 \log \frac{1-p}{p} \right) - N \log(1-p) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Tirant parti des similarités entre cette fonction et celle que l'on a utilisée pour le maximum de vraisemblance joint du Chapitre 3 on va en déduire les estimateurs voulus.

5.2.3 . Algorithme complet

On obtient finalement un algorithme EM complet pour l'estimation jointe des paramètres du modèle latent ainsi qu'une (ou plusieurs) variables de sources. On donne dans l'algorithme 11 la version pour \mathbf{x} en variable de source mais nous avons aussi dérivé des versions alternatives pour d'autre choix de variables. Il suffit alors d'adapter les étapes en utilisant les résultats précédemment vus. On donne ces variations dans la section 5.5.

Validation par passage à l'identité A présent testons notre condition de "retour au cas simple", posons $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Alors l'étape de mise à jour de \mathbf{z} donne

$$\mathbf{z}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \frac{(\sigma_n^2)^t}{(\sigma_e^2)^t} \mathbf{I}_N (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^t) = \mathbf{y}$$

et celle de Γ_z :

$$\Gamma_z^t = (\sigma_n^2)^t \left(1 - \frac{(\sigma_n^2)^t}{(\sigma_e^2)^t} \right) \mathbf{I}_N = \mathbf{0}_N$$

On calcule alors les nouvelles constantes du problème non-contraint :

$$\begin{aligned} S^+ &= \sum_{n=1}^N (z_n^t)^2 > T \Leftrightarrow \sum_{n=1}^N y_n^2 > T \\ S^- &= \|\hat{\mathbf{z}}^t\|_2^2 - S^+ + \operatorname{Trace}[\Gamma_z^t] \Leftrightarrow \sum_{n=1}^N y_n^2 \leq T \end{aligned}$$

On ré-obtient bien l'algorithme d'estimateur du maximum de vraisemblance joint en débruitage tel que défini dans la section 4.3 du chapitre 4.

Algorithme 11 : EM pour l'estimation Jointe de \mathbf{x} et des paramètres

Result : $\sigma_e^2, \sigma_x^2, p$

Input : \mathbf{y}

while *N'a pas convergé* **do**

 Calcul de $\hat{\mathbf{z}}^t$ et Γ_z^t selon le choix de la variable;

for all $k \in [0, N]$ **do**

$T_k = y_k^2$;

 Calcul de S_k^+, S_k^-, K selon (5.21);

 Calcul de $\hat{p}_k, \hat{\sigma}_{x_k}^2, \hat{\sigma}_{e_k}^2$ selon la proposition 15;

 Calcul de $Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, T_k, \hat{\theta}_k)$ selon (5.14);

end

if $\exists k | y_k^2 < T(\theta_k) < y_{k+1}^2$ **then**

$\hat{k} = \operatorname{argmin}_k \{Q_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, T_k, \hat{\theta}_k)\}$ s.c. $y_k^2 < T(\theta_k) < y_{k+1}^2$;

else

$\hat{k} = \operatorname{argmin}$ distance entre $T(\theta_k)$ et $[y_k^2, y_{k+1}^2]$;

end

$\hat{\theta} = (\hat{p}_{\hat{k}}, \hat{\sigma}_{x_{\hat{k}}}^2, \hat{\sigma}_{e_{\hat{k}}}^2)$;

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\hat{k}}$;

$t = t + 1$

end

5.3 . Estimation jointe de \mathbf{z}, ω avec \mathbf{x} en variable cachée

Dans la section précédente, nous avons considéré le problème d'estimation jointe des sources et des paramètres dans le but de parvenir à dériver un algorithme le plus explicite possible. En revanche, on est en droit de se demander si le modèle joint de la distribution *a posteriori* n'est pas plus simple que le problème du maximum de vraisemblance. C'est pourquoi, pour tenter de "relâcher" la contrainte d'estimation jointe, nous proposons un algorithme dans lequel les variables à estimer sont (\mathbf{z}, ω) , on aura donc naturellement les variables de source en variables cachées. L'algorithme EM associé (dans le cas où l'on cherche \mathbf{x}) est alors le suivant :

- Etape-E : $Q_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \omega | \mathbf{z}^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} | \omega))]$
- Etape-M : $\mathbf{z}^{t+1}, \omega^{t+1} = \underset{\mathbf{z}, \omega}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \omega | \mathbf{z}^t, \omega^t)$

5.3.1 . Etape-E

Dans cette partie on va s'intéresser à la fonction

$$Q_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \omega | \mathbf{z}^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \theta^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} | \omega))] \quad (5.26)$$

De par l'introduction de la variable latente \mathbf{z} , cette espérance peut se diviser en une somme de deux fonctions :

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \omega | \mathbf{z}^t, \omega^t) &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y} | \mathbf{z}, \omega))] + \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}, \mathbf{x} | \omega))] \\ &= -\log(p(\mathbf{y} | \mathbf{z}, \sigma_n^2, \sigma_e^2)) + \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}, \mathbf{x} | p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))] \end{aligned} \quad (5.27)$$

La première fonction est la vraisemblance abordée dans la première section de ce chapitre dans l'équation (5.10). La deuxième correspond exactement à l'étape E dans le cas d'un EM appliqué au débruitage du signal \mathbf{z} comme explicité dans le chapitre précédent.

On va donc pouvoir tirer profit de cette similarité afin de dériver facilement les mises à jours des estimations.

5.3.2 . Etape-M

Dans cette partie nous nous intéresserons aux paramètres qui minimisent la fonction $Q_{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{z}^{t+1}, \omega^{t+1} = \underset{\mathbf{z}, \omega}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \omega | \mathbf{z}^t, \omega^t) \quad (5.28)$$

Minimisation par rapport à \mathbf{z}

Proposition 21. Soit l'espérance $Q_{\mathbf{z}}$ donnée dans l'équation (??). On définit alors l'estimation de \mathbf{z} à l'itération $t + 1$ comme :

$$\mathbf{z}^{t+1} = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} Q_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \omega | \mathbf{z}^t, \omega^t) \quad (5.29)$$

et vaut

$$\mathbf{z}^{t+1} = \hat{\mathbf{x}}^t + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^t) \quad (5.30)$$

avec $\hat{\mathbf{x}}^t = \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \omega^t} [\mathbf{x}]$.

Démonstration. On repart de la définition de $Q_{\mathbf{z}}$ donnée dans l'étape-E :

$$\underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} | \omega))] = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}, |\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega))]$$

Or nous avons vu dans la première section de ce chapitre que $\mathbf{z}, |\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega$ suit une distribution Gaussienne de moyenne $\hat{\mathbf{z}}$ et de matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{z}}$. D'où

$$-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} | \omega)) = \frac{1}{2} (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}))^T \Gamma_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x})) + \frac{1}{2} \log |2\pi \Gamma_{\mathbf{z}}|$$

Or comme $\Gamma_{\mathbf{z}}$ ne dépend pas de \mathbf{x} , on a alors :

$$\underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} | \omega))] = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{z} - \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \omega^t} [\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x})])^T \Gamma_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{z} - \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \omega^t} [\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x})])$$

Le résultat final est obtenu en cherchant les racines du gradient par rapport à \mathbf{z}

$$\underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \theta^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x} | \theta))] = \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{z}^t, \theta^t} [\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x})]$$

□

L'estimateur de \mathbf{z} à chaque itération est donc une descente de gradient classique en \mathbf{x} , dont le point courant est donné par l'estimateur de l'espérance *a posteriori* de \mathbf{x} considérée.

Minimisation par rapport aux paramètres : On repart de la décomposition de l'équation (5.27). Maintenant que nous disposons du maximum en \mathbf{z} , nous pouvons écrire :

$$\omega^{t+1} = -\log(p(\mathbf{y} | \mathbf{z}^{t+1}, \sigma_n^2, \sigma_e^2)) + \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}^{t+1}, \mathbf{x} | p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))] \quad (5.31)$$

Tout comme dans la section précédente, nous allons prendre $(\sigma_e^2)^{t+1} = (\sigma_n^2)^{t+1}$. Il ne reste plus qu'à trouver les autres paramètres :

$$p^{t+1}, (\sigma_x^2)^{t+1}, (\sigma_n^2)^{t+1} = \underset{p, \sigma_x^2, \sigma_n^2}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{z}^t, \omega^t} [-\log(p(\mathbf{z}^{t+1}, \mathbf{x} | p, \sigma_x^2, \sigma_n^2))] \quad (5.32)$$

On constate alors qu'il s'agit de la formulation exacte d'une mise à jour d'un EM pour le débruitage de \mathbf{z}^{t+1} comme présenté dans la section 4.2 du chapitre précédent.

5.3.3 . Algorithme complet

On applique alors une démarche de minimisation alternée entre \mathbf{z} et ω . A la fin on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme 12 : Alternate Gradient EM.

```

while N'a pas convergé do
  Mise-à-jour de  $\mathbf{z}^{t+1}$  en suivant (5.8);
   $(p^{t+1}, (\sigma_x^2)^{t+1}, (\sigma_n^2)^{t+1}) = \text{EM en débruitage sur } \mathbf{z}^{t+1}$ ;
   $(\sigma_e^2)^{t+1} = (\sigma_n^2)^{t+1}$ ;
   $t = t + 1$ ;
end

```

On peut aborder cet algorithme d'un point de vue Plug & Play en observant qu'on a l'étape de gradient suivie du "débruiteur" associé à l'algorithme EM.

Dès lors, il est tout à fait possible d'envisager d'autres variations en ajoutant des étapes de CEM ou de la méthode des moments.

Empiriquement, nous avons observé que le meilleur régime de fonctionnement est obtenu en n'ajoutant aucune étape supplémentaire.

Passage à l'identité : Si l'on prend $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, alors l'étape de mise à jour de \mathbf{z} donne

$$\mathbf{z}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \frac{(\sigma_n^2)^t}{(\sigma_e^2)^t} \mathbf{I}_N (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^t) = \mathbf{y}$$

on a donc pour tout t : $\mathbf{z}^t = \mathbf{y}$. Pour l'étape d'estimation des paramètres, on se retrouve alors avec :

$$(p^{t+1}, (\sigma_x^2)^{t+1}, (\sigma_n^2)^{t+1}) = \text{EM en débruitage sur } \mathbf{y}$$

On obtient donc bien l'algorithme EM en débruitage tel que présenté dans le chapitre précédent (section 4.2).

5.4 . Expérimentations

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques issus des méthodes introduites pour l'estimation des paramètres ainsi que la reconstruction d'un signal Bernoulli-Gaussien (BG) en problème inverse. Pour ce faire, nous avons généré des signaux BG synthétiques \mathbf{x} suivant le modèle (3.1) pour plusieurs niveaux de parcimonie en jouant sur la variable $p \in [0.01, 0.05, 0.1]$. La variance des coefficients non-nuls est fixée à $\sigma_x^2 = 1$. On génère alors les observations \mathbf{y} en suivant le modèle direct (2.1) en utilisant différentes matrices \mathbf{H} . En plus du débruitage, où $\mathbf{H} = \mathbf{I}_M$ avec $M = 900$, on génère des matrices aléatoires gaussiennes de taille 300×900 pour lesquelles les colonnes sont obtenues

de manière aléatoire avec une matrice de covariance \mathbf{C} telle que

$$C_{i,j} = w^{|i-j|} \quad (5.33)$$

avec w un facteur qui sert à régler le degré de corrélation. Alors, pour chaque \mathbf{y} , on génère un vecteur de bruit blanc gaussien avec une variance choisie telle que

$$\sigma_e^2 = \|\mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 \times 10^{-\text{iSNR}/10} \quad (5.34)$$

où iSNR correspond au rapport signal à bruit d'entrée pris parmi $\{5, 10, 20\}$ dB.

On s'intéresse à l'estimation à la fois des paramètres et des sources. On note $\hat{p}, \hat{\sigma}_e^2, \hat{\sigma}_x^2$ les paramètres estimés, la métrique utilisée pour mesurer la qualité de l'estimation est l'erreur absolue pour $p \in [0.01, 0.05, 0.1]$ et $\sigma_x^2 = 1$:

$$\text{error}_p = |p - \hat{p}| \quad \text{error}_{\sigma_x^2} = |\sigma_x^2 - \hat{\sigma}_x^2|. \quad (5.35)$$

La valeur de σ_e^2 étant choisie pour obtenir le SNR voulu, elle est donc dépendante \mathbf{H} et p , nous regarderons donc plutôt l'erreur absolue relative :

$$\text{error}_{\sigma_e^2} = \frac{|\sigma_e^2 - \hat{\sigma}_e^2|}{\sigma_e^2}. \quad (5.36)$$

Les résultats sont moyennés sur 100 réalisations de \mathbf{x} pour chaque configuration $(\mathbf{H}, p, \text{iSNR})$.

En ce qui concerne la qualité d'estimation des sources, on note \hat{x} une estimation de \mathbf{x} , on utilise le rapport signal à bruit de sortie (oSNR) :

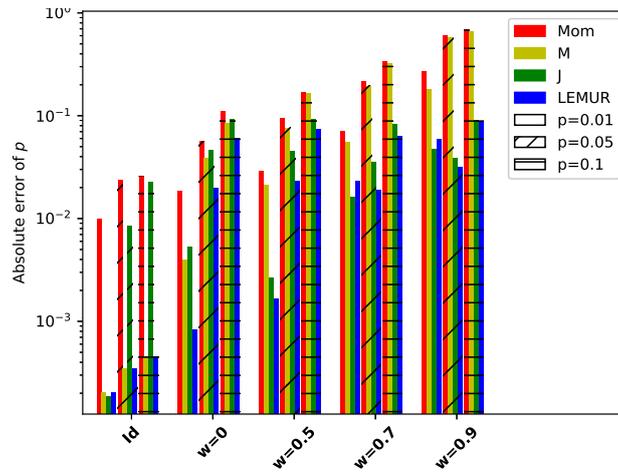
$$\text{oSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} \right) \quad (5.37)$$

On représente aussi le nombre de Faux Positifs (FP) et de Faux Négatifs (FN) lors de l'estimation du support, c'est-à-dire

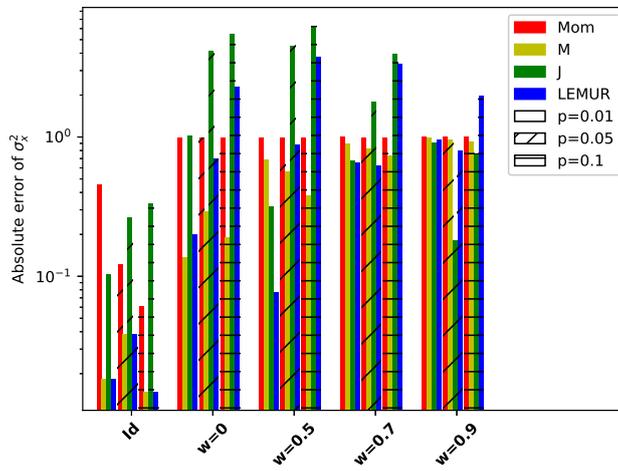
$$\text{Fp} = \text{Card}\{\hat{x}_n \neq 0 | x_n = 0\} \quad \text{Fn} = \text{Card}\{\hat{x}_n = 0 | x_n \neq 0\} \quad (5.38)$$

Les algorithmes sont tous initialisés par la méthode des moments donnée dans l'algorithme 8 pour $\mathbf{H}^T \mathbf{y}$ en entrée. L'initialisation de l'estimée des sources est le vecteur nul. La sortie de l'algorithme 12 étant une estimation au sens de la moyenne *a posteriori*, le signal estimé n'est pas parcimonieux. C'est pourquoi, nous avons choisi de conserver les seuls éléments de \mathbf{x} qui vérifient $p(x_n \neq 0 | z_n)$ (donnés dans l'équation (4.17) avec $y_n = z_n$).

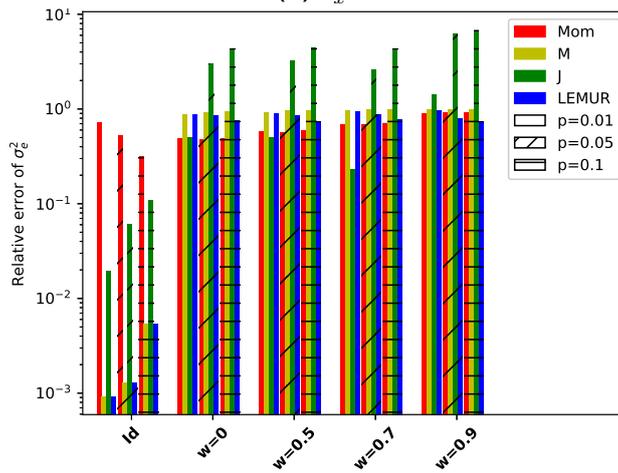
Par souci de concision, les algorithmes sont désignés de la manière suivante dans les figures. L'EM Joint 11 sera repéré par 'J', et l'algorithme 12 où \mathbf{x} est marginalisé, sera repéré par 'M'. Dans un but de comparaison avec des méthodes entièrement supervisées de structures équivalentes (gradient puis débruitage) nous représentons aussi les résultats en appliquant un algorithme de



(a) p

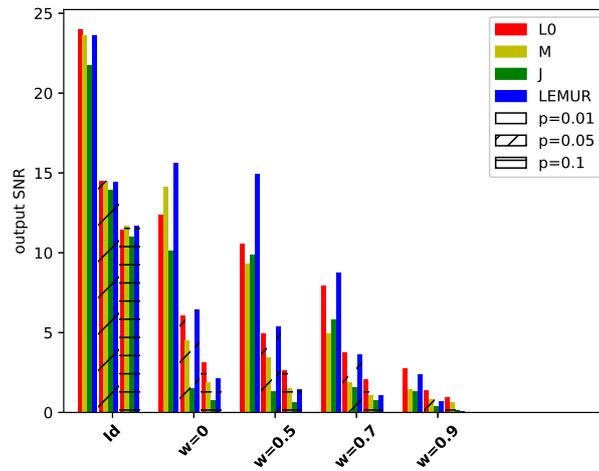


(b) σ_x^2

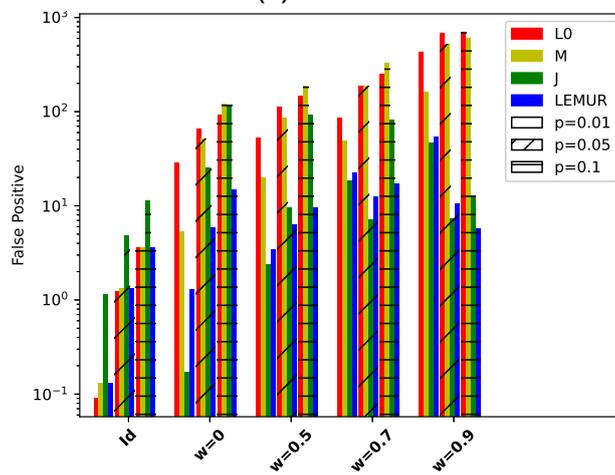


(c) σ_e^2

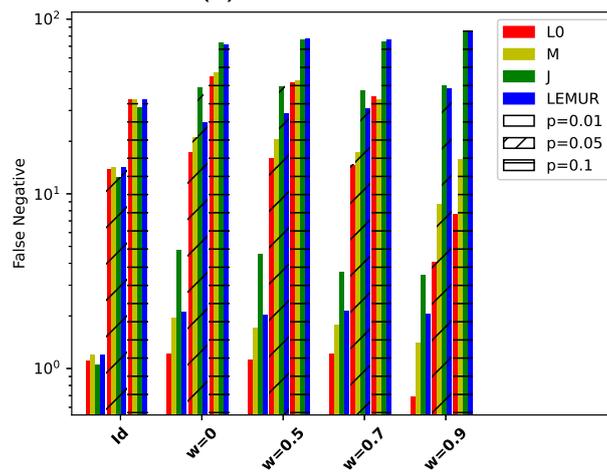
Figure 5.1 – iSNR = 5dB. Estimation des paramètres ($error_p$, $error_{\sigma_x^2}$ comme défini dans (5.36) et $error_{\sigma_e^2}$ (5.35))



(a) oSNR



(b) False Positive



(c) False Negative

Figure 5.2 - $iSNR = 5dB$. SNR de sortie comme défini dans (5.37), Faux Négatif et Faux Positif (5.38)

seuillage dur itératif (IHT) sera repéré par 'L0'. Cette méthode sera testée pour une grille d'hyper-paramètres avec redémarrage à chaud, on ne conservera que les résultats qui donnent le meilleur SNR de sortie comme parfois trouvé dans la littérature. Il a été montré [Goussard et al., 1990] que l'EM Joint ('J') est asymptotiquement biaisé mais semble offrir une estimation stable en pratique, c'est-à-dire qu'il n'est que peu sensible à l'initialisation. La méthode Marginale ('M'), en revanche, est non biaisée au point optimal mais est très sensible à l'initialisation. On propose alors une stratégie complète **Latent EM Unsupervised Regression (LEMUR)**, où l'algorithme 12 est initialisé par l'algorithme 11.

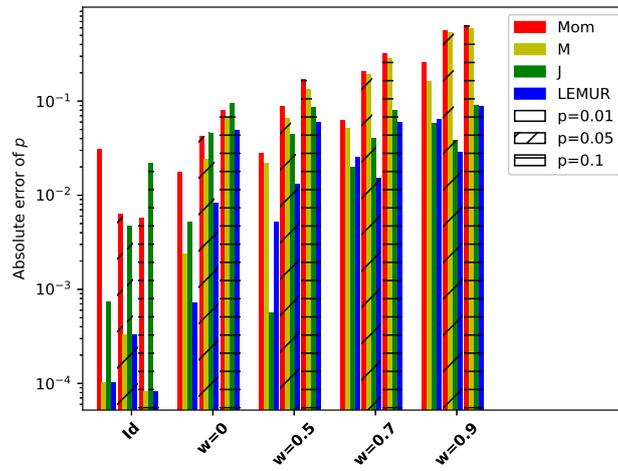
Dans les figures 5.1, 5.3 et 5.5, on montre pour chaque iSNR ($iSNR = 5, 10, 20$ dB respectivement) les performances des algorithmes en termes d'estimation des paramètres (haut : erreur absolue en p , erreur absolue en σ_x^2 et erreur relative en σ_e^2) ainsi que la qualité de reconstruction du signal (bas : Faux Négatifs, Faux Positifs, oSNR). Chaque figure représente les performances pour trois valeurs de p et plusieurs matrices \mathbf{H} (la matrice identité et les matrices aléatoires pour différents w mentionnés dans l'équation (5.33)).

5.4.1 . Estimation du signal

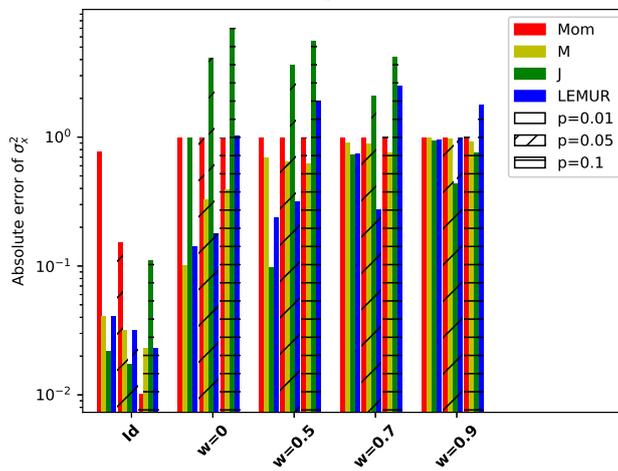
L'estimation des sources est réalisée ici conjointement avec l'estimation des paramètres pour les algorithmes EM avec \mathbf{z} en variable caché et donc LEMUR aussi, ou de manière indirecte dans le cas de l'EM avec \mathbf{x} .

Dans un premier temps, si l'on s'intéresse à la qualité d'estimation des amplitudes, quantifiée par le SNR de sortie, on regardera les figures 5.2a, 5.4a et 5.6a, qui correspondent à des iSNR de $5dB$, $10dB$ et $20dB$ respectivement. Les barres toutes à gauche représentent le cas du débruitage dans lequel on voit clairement qu'IHT domine systématiquement les autres méthodes. Cela s'explique facilement par le fait qu'en débruitage, cet algorithme revient à sélectionner le seuil qui donne le meilleur SNR. En revanche, il est intéressant de noter que les EM proposés ainsi que LEMUR, atteignent quasiment cette valeur. Or comme ces algorithmes sont aussi des algorithmes de recherche de seuil non-supervisés en débruitage, alors on peut les considérer comme quasi-optimaux. Lorsque l'on s'écarte du problème de débruitage, le dictionnaire \mathbf{H} devient corrélé, on voit que le SNR est dominé par LEMUR alors que la performance des deux autres EM chutes rapidement. Une explication possible à ce phénomène est l'apparition dans la partie EM avec \mathbf{x} en variable cachée d'une étape d'estimation de \mathbf{x} par l'espérance *a posteriori*, cet estimateur correspond à celui de Bayes qui minimise la norme quadratique i.e. maximise le SNR. Cette intuition peut être confirmée par la plus lente décroissance en SNR des résultats de l'EM avec \mathbf{x} en variable cachée. Enfin, on voit qu'à forte corrélation, les performances d'IHT sont les meilleures. Il s'agit là de la robustesse des méthodes supervisées dans le cas de problèmes difficiles à résoudre.

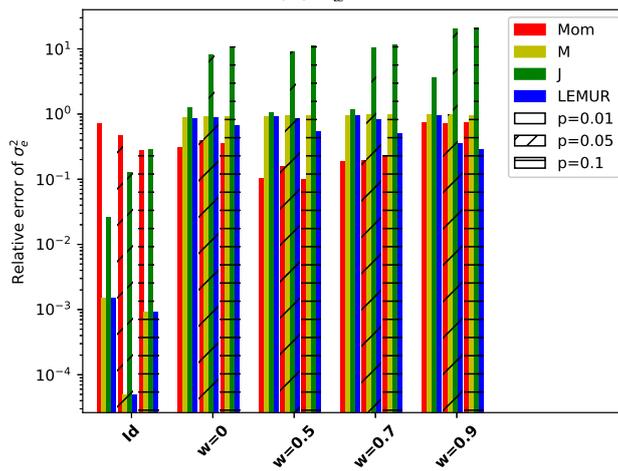
L'estimation du support est évaluée en terme de nombres de Faux Négatifs (FN) et Faux Positifs (FP). Les FN et FP moyens sont donnés pour différents



(a) p

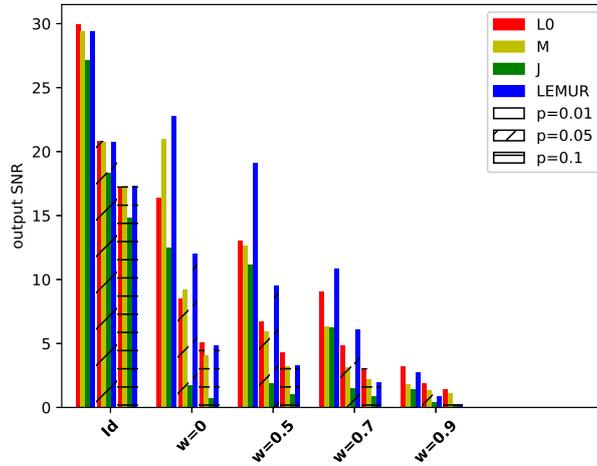


(b) σ_x^2

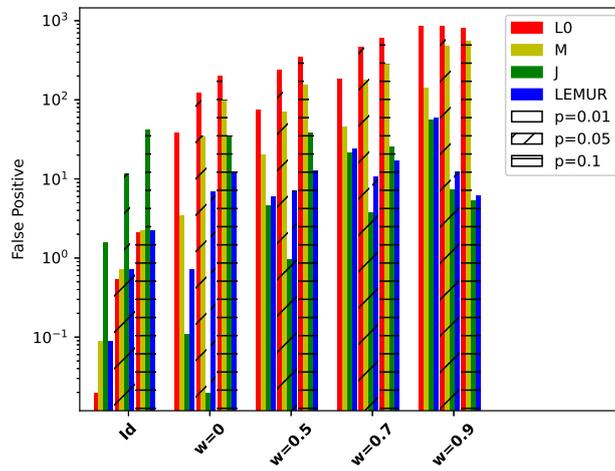


(c) σ_e^2

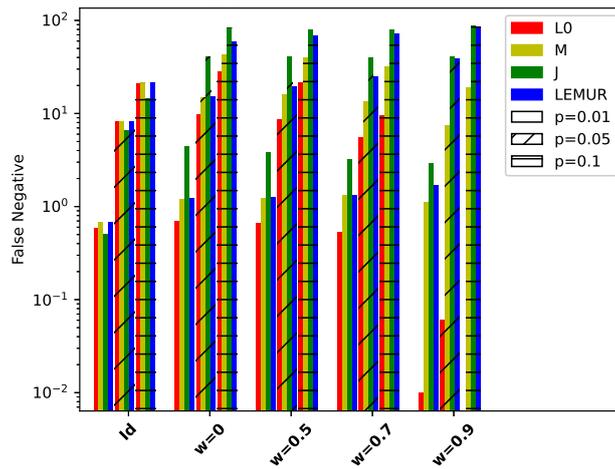
Figure 5.3 – iSNR = 10dB. Estimation des paramètres ($error_p$, $error_{\sigma_x^2}$ comme défini dans (5.36) et $error_{\sigma_e^2}$ (5.35))



(a) oSNR



(b) False Positive



(c) False Negative

Figure 5.4 – $iSNR = 10dB$. SNR de sortie comme défini dans (5.37), Faux Négatif et Faux Positif (5.38)

iSNR, ils peuvent être trouvés dans les figures 5.2c, 5.4c et 5.6c ainsi que les figures 5.2b, 5.4b et 5.6b. En débruitage, le nombre de faux positifs et de faux négatifs sont identiques pour LEMUR et l'EM avec \mathbf{x} en variable cachée. L'algorithme de seuillage itératif supervisé obtient aussi des résultats quasi similaires. En revanche, la méthode EM avec \mathbf{z} en variable cachée propose systématiquement plus de faux positifs et moins de faux négatifs. Il est possible d'interpréter ce résultat comme une conséquence directe de l'estimation jointe qui a lieu au sein de cette méthode. En effet, ici on vient minimiser un critère qui prend en compte la parcimonie des sources, là où l'EM avec \mathbf{x} en variable cachée prend comme estimation de \mathbf{x} l'espérance *a posteriori*. Il en découle que les méthodes jointes sont alors plus discriminantes en matière de support et encouragent alors la parcimonie. Pour les dictionnaires corrélés, le nombre de faux positifs introduits par l'IHT et l'EM avec \mathbf{x} variable cachée explose. Cela provient sûrement de la tendance de ses méthodes à vouloir être optimales au sens du SNR au détriment de la sélection de variables de support. En revanche, l'EM joint (\mathbf{z} en variable cachée) reste relativement stable avec l'évolution de l'opérateur de par son attachement à la parcimonie. Ce qui est intéressant aussi, c'est de noter que ce comportement se reflète directement sur LEMUR. On voit donc que lorsque le second EM (avec \mathbf{x} en variable cachée) prend les rênes, il ne dévie que très peu de l'estimation des sources proposée par son prédécesseur (avec \mathbf{z} en variable cachée).

On en déduit donc que l'algorithme de seuillage itératif ainsi que l'EM avec \mathbf{x} en variable cachée sont des méthodes qui favorisent l'estimation du SNR et donc des différences d'amplitudes. Ces résultats sont obtenus la plupart du temps au détriment de l'estimation du support. On remarquera aussi que l'algorithme LEMUR possède une plage de corrélation des opérateurs dans laquelle les résultats en termes de SNR et de faux positifs sont les meilleurs, en faisant un très bon candidat à l'estimation non-supervisée des signaux parcimonieux.

5.4.2 . Estimation des paramètres

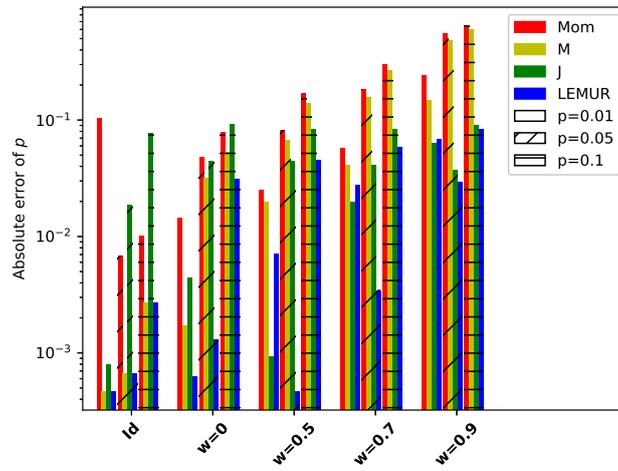
L'estimation de la variable de Bernoulli p , qui représente la probabilité des valeurs non nulles du signal, est directement liée à la parcimonie du signal source. On affiche l'erreur absolue sur cette variable dans les figures 5.1a, 5.3a et 5.5a pour différents niveaux de bruit en entrée : 5dB, 10dB, and 20dB, respectivement. On observe alors qu'en débruitage, la méthode des moments est celle qui donne le plus d'erreurs. Elle est ensuite rejointe par l'EM avec \mathbf{x} en variable cachée. C'est une conséquence du phénomène de més'estimation de \mathbf{x} explicité dans la sous-section précédente sur l'estimation du signal. En effet, comme le signal estimé est moins parcimonieux, alors l'estimation associée de la variable p est pénalisée. En revanche, les méthodes d'estimations dites "jointes" promeuvent la parcimonie et donc estiment mieux cette variable.

Lorsque l'on s'intéresse à l'estimation de la variance (σ_x^2) associée aux valeurs non nulles du signal, on se retrouve à estimer la variable pour laquelle on

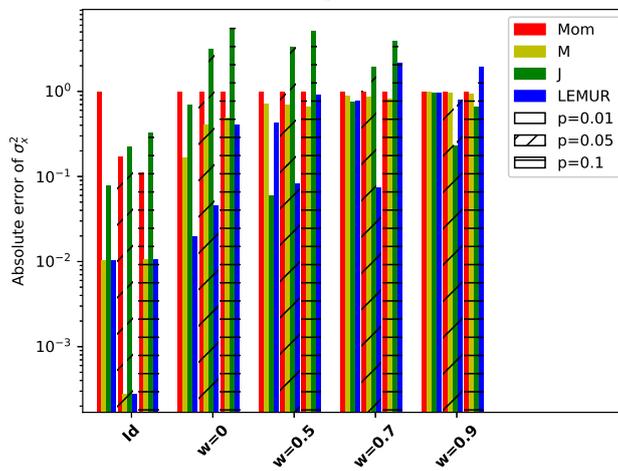
dispose du moins d'information. Les résultats d'estimation de σ_x^2 sont présentés pour chaque iSNR dans les figures 5.1b, 5.3b et 5.5b, respectivement. L'estimation de cette variable étant directement liée aux amplitudes, son comportement suit celui du SNR de sortie. On voit alors que les méthodes qui fournissent le moins d'erreur sont les EM avec \mathbf{z} en variable cachée et LEMUR dans le cas de signaux très parcimonieux. Cependant, on observe une convergence de l'erreur à ~ 1 lorsque la corrélation augmente. Nous n'avons pas d'explications pour ce comportement.

L'estimation de la variance du bruit (σ_e^2) est tout aussi importante dans la reconstruction de signaux parcimonieux. Les figures 5.1c, 5.3c et 5.5c montrent l'erreur d'estimation de σ_e^2 . Les résultats montrent que, à part pour le cas du débruitage, la méthode des moments donne la meilleure estimation de σ_e^2 . Cela peut être expliqué par les propriétés statistiques de cette dernière. De plus, LEMUR a de meilleures performances dans certains cas que les deux EM qu'ils soient Joint ou Marginal. Il est intéressant de noter que la qualité d'estimation de σ_e^2 est stable vis-à-vis de l'opérateur \mathbf{H} et du choix de p . Comme attendu, les estimées de p et σ_x^2 sont bien plus sensibles à ces variations : plus w est grand, plus le problème est compliqué.

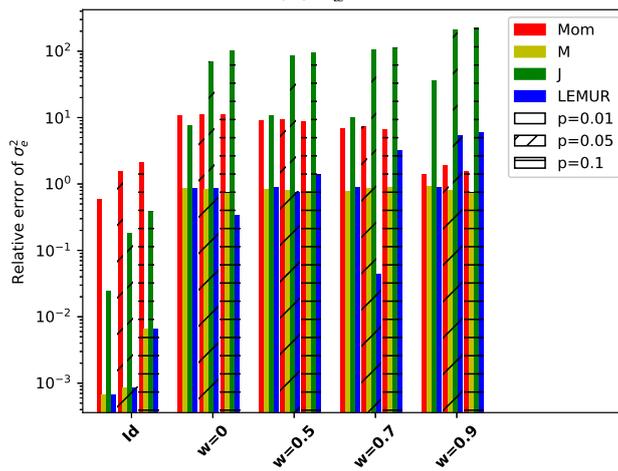
On voit donc que LEMUR, dans l'optique d'estimer les paramètres du modèle, récupère les avantages de l'estimation jointe et de l'estimation marginale afin de proposer, dans le cas de signaux très parcimonieux de bonnes valeurs.



(a) p

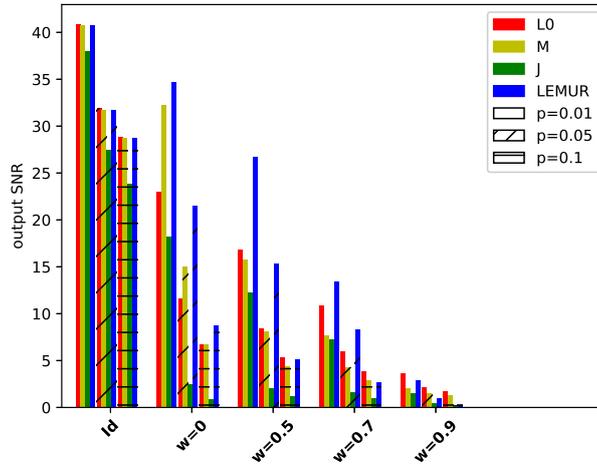


(b) σ_x^2

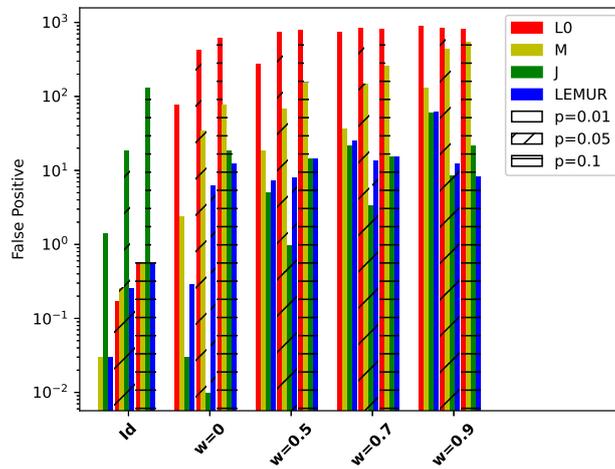


(c) σ_e^2

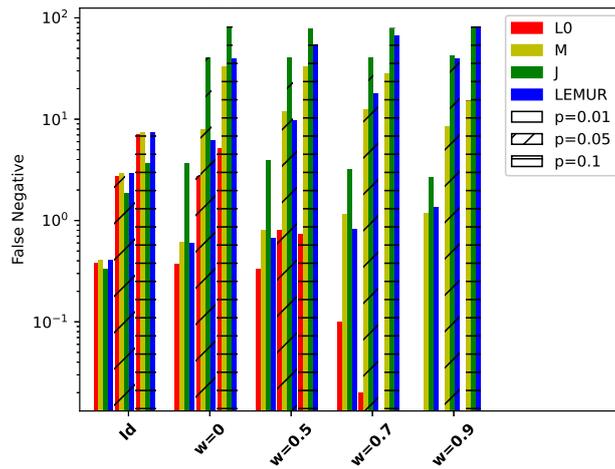
Figure 5.5 – iSNR = 20dB. Estimation des paramètres ($error_p$, $error_{\sigma_x^2}$ comme défini dans (5.36) et $error_{\sigma_e^2}$ (5.35))



(a) oSNR



(b) False Positive



(c) False Negative

Figure 5.6 – $iSNR = 20dB$. SNR de sortie comme défini dans (5.37), Faux Négatif et Faux Positif (5.38)

5.5 . Variantes

Durant cette thèse, nous avons aussi dérivé les méthodes pour d'autres choix de variable de sources. Les autres choix possibles sont ceux listés dans les chapitres précédents, soit \mathbf{s} et \mathbf{r}, \mathbf{s} . On donne dans cette section les résultats et variations associés. Pour ce qui concerne l'algorithme EM associé au choix de \mathbf{z} comme variable à estimer, les seuls changements notables sont sur l'évaluation de \mathbf{z}^{t+1} . En effet, suivre le même raisonnement que \mathbf{x} donne systématiquement une étape d'EM en débruitage appliqué à la variable \mathbf{z}^{t+1} . Il suffit donc, pour obtenir les mises à jours des paramètres spécifiques, de se reporter au chapitre précédent.

5.5.1 . En choisissant \mathbf{s}

En choisissant \mathbf{s} en variable de source, on obtient l'*a posteriori* de \mathbf{z} suivant :

$$\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}, \omega \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{s}), \Gamma_z(\mathbf{s})) \quad (5.39)$$

avec

$$\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{s}) = (\sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}) \mathbf{H}^T \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{y} \quad (5.40a)$$

$$\Gamma_z(\mathbf{s}) = (\sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}) - (\sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}) \mathbf{H}^T \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{H} (\sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}) \quad (5.40b)$$

et

$$\Gamma_y(\mathbf{s}) = \sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{H}^T \quad (5.41)$$

On constate que le calcul du mode et de la covariance fait intervenir une inversion de matrices. Cela est dommageable dans des espaces de grandes dimensions d'un point de vue coût de calcul. De plus, éviter les inversions nous permettra aussi de gagner en stabilité numérique lors de la mise en pratique des méthodes.

Etape-E :

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \omega | \mathbf{s}^t, \omega^t) = & \mathcal{V}(\sigma_n^2, \sigma_e^2 | \mathbf{s}^t, \omega^t) + \sum_{n=1}^N \frac{\hat{z}_n^t + [\Gamma_z^t]_{n,n}}{2(\sigma_n^2 + s_n \sigma_x^2)} + \frac{1}{2} \log(\sigma_n^2 + s_n \sigma_x^2) \\ & - \|\mathbf{s}\|_0 \log(p) - (N - \|\mathbf{s}\|_0) \log(1 - p) \end{aligned} \quad (5.42)$$

avec $\hat{\mathbf{z}}$ et Γ_z donné dans les équations (5.40).

Etape-M : L'estimation de \mathbf{s} à l'itération $t + 1$ donne l'opération suivante :

$$s_n^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\hat{z}_n^t)^2 + [\Gamma_z^t]_{n,n} > T_s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.43)$$

avec

$$T_s(\omega) = (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \left(\log \frac{\sigma_n^2 + \sigma_x^2}{\sigma_n^2} + 2 \log \frac{1-p}{p} \right) \quad (5.44)$$

Tout comme pour \mathbf{x} , on retrouve le même problème d'optimisation sous contrainte dont les solutions sont données dans le Chapitre 3 à l'équation (4.42) mais avec

$$S^+ = \sum \hat{z}_n^2 + [\Gamma_z]_{n,n} > T \quad , \quad S^- = \sum \hat{z}_n^2 + [\Gamma_z]_{n,n} < T \quad (5.45)$$

et $K = \text{Card}\{\hat{z}_n^2 + [\Gamma_z]_{n,n} > T\}$.

Mise à jour de \mathbf{z} : On obtient la mise jour suivante de \mathbf{z} :

$$\mathbf{z}^{t+1} = \Delta \mathbf{H}^T (\Gamma_b + \mathbf{H} \Delta \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{y} \quad (5.46)$$

avec Δ une matrice diagonale dont les termes sont donnés par :

$$[\Delta]_{n,n} = \sigma_n^2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{(1 - \phi^t(z_n^t)) \sigma_x^2 + \sigma_n^2} \quad (5.47)$$

5.5.2 . En choisissant (\mathbf{r}, \mathbf{s})

En choisissant (\mathbf{r}, \mathbf{s}) en variable de source, on obtient l'*a posteriori* de \mathbf{z} suivant :

$$\mathbf{z} | \mathbf{y}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}), \Gamma_z(\mathbf{r}, \mathbf{s})) \quad (5.48)$$

avec

$$\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{S} \mathbf{r} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{r}) \quad (5.49a)$$

$$\Gamma_z(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sigma_n^2 \left(\mathbf{I} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right) \quad (5.49b)$$

Ce que l'on remarque, c'est que la moyenne *a posteriori* de \mathbf{z} , comme pour \mathbf{x} , correspond aussi à une étape de descente de gradient vis à vis de \mathbf{x} . Seulement ici, la connaissance de \mathbf{s} permet de restreindre le gradient au support.

Etape-E :

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega | \mathbf{r}^t, \mathbf{s}^t, \omega^t) = & \mathcal{V}(\sigma_n^2, \sigma_e^2 | \mathbf{r}^t, \mathbf{s}^t, \omega^t) + \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) + \frac{\|\hat{\mathbf{z}}^t - \mathbf{S} \mathbf{r}\|_2^2 + \text{Trace}[\Gamma_z^t]}{2\sigma_n^2} \\ & + \frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_x^2) + \frac{\|\mathbf{r}\|_2^2}{2\sigma_x^2} - \|\mathbf{s}\|_0 \log(p) - (N - \|\mathbf{s}\|_0) \log(1-p) \end{aligned} \quad (5.50)$$

avec $\hat{\mathbf{z}}$ et Γ_z donné dans les équations (5.49).

Etape-M : L'estimation de \mathbf{r}, \mathbf{s} à l'itération $t+1$ donne l'opération suivante :

$$(s_n^{t+1}, r_n^{t+1}) = \begin{cases} \left(1, \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2} \hat{z}_n^t\right) & \text{si } (\hat{z}_n^t)^2 > T_r \\ (0, 0) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.51)$$

avec

$$T_r(\omega) = (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \log \frac{1-p}{p} \quad (5.52)$$

Tout comme pour \mathbf{x} et \mathbf{s} , on retrouve le même problème d'optimisation sous contrainte dont les solutions sont données dans le Chapitre 3 à l'équation (4.52) mais avec

$$S^+ = \sum y_n^2 > T \quad , \quad S^- = \sum \hat{z}_n^2 < T + \text{Trace}[\Gamma_z] \quad (5.53)$$

et $K = \text{Card}[\hat{z}_n^2 > T]$.

Mise à jour de \mathbf{z} : On trouve le même résultat que pour \mathbf{x} .

$$\mathbf{z}^{t+1} = \hat{\mathbf{x}}^t + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^t) \quad (5.54)$$

avec $\hat{\mathbf{x}}^t = \mathbb{E}_{\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{z}^t, \theta^t} [\mathbf{S}\mathbf{r}]$

$$\underset{\mathbf{z}}{\text{argmin}} \mathbb{E}_{\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{z}^t, \theta^t} [-\log(p(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \mathbf{s} | \theta))] = \mathbb{E}_{\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{z}^t, \theta^t} [\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{r}, \mathbf{s})] \quad (5.55)$$

5.6 . Conclusion

Pour conclure ce chapitre, nous avons vu que l'EM 'classique' ne s'étendait pas en pratique aux problèmes inverses. C'est pourquoi, en suivant de précédents travaux, on introduit un état latent \mathbf{z} qui permet de découpler les observations des sources. Cette nouvelle variable ne permet pas l'estimation du maximum de vraisemblance des paramètres, en revanche nous avons montré qu'elle permet de dériver des méthodes d'estimations jointes. L'EM obtenu, que ce soit pour estimer les sources \mathbf{x} ou la variable latente \mathbf{z} conjointement aux paramètres, donne des algorithmes itératifs explicites avec un coût de calcul réduit.

Les résultats obtenus permettent de montrer que la fusion des deux algorithmes proposés donne une méthode d'estimation des sources entièrement non-supervisée qui donne des résultats pouvant rivaliser avec les méthodes supervisées. De plus, nous avons aussi dérivé les expressions explicites dans le cas de différents modèles du Bernoulli-Gaussien associés à l'estimation de différentes variables de source.

6 - Impact du choix de modèle/relaxation

Sommaire

6.1	Modèle Bernoulli-Gaussien et Maxima A Posteriori	114
6.1.1	Minimiseurs : MAP-Joint vs MAP-Marginal	116
6.2	Relaxation continue	121
6.2.1	MAP-Joint Continu	122
6.2.2	MAP-Marginal Continu	124
6.3	Optimiser le MAP-Marginal	125
6.3.1	Etape-E	126
6.3.2	Etape-M	127
6.3.3	Résumé de l’algorithme	128
6.3.4	Optimisation par relaxation continue	128
6.4	Étude expérimentale des EMs	130
6.5	Conclusion	134

Dans ce chapitre nous présentons la dernière contribution de cette thèse, il s’agit d’une étude un peu plus théorique des approches d’estimation des sources dans un cadre supervisé. Cette étude a donné lieu en partie à une publication pour ce qui est de la partie Algorithme EM proposé, et nous projetons de publier les autres résultats dans un futur article.

Dans la Section 6.1, nous étudierons les estimateurs du MAP-Joint ainsi que du MAP-Marginal pour le support d’un modèle Bernoulli-Gaussien (BG). Les résultats principaux sont donnés dans le théorème 22 et le théorème 25, qui montrent qu’optimiser le critère du MAP-Joint avec un choix approprié d’hyper-paramètres permet de concentrer la recherche des optima du critère du MAP-Marginal. Comme le modèle BG conduit systématiquement à un problème d’optimisation combinatoire, nous étudions alors des familles d’*a priori* continus pour le support \mathbf{s} dans la Section 6.2. En utilisant un choix approprié d’*a priori*, le MAP-Joint correspond au problème d’optimisation classique des normes $\ell_2 + \ell_p$ (cf. équation 2.18 du chapitre 2). Plus spécifiquement, on montre que l’*a priori* de Laplace n’est pas la seule interprétation du LASSO : Ce Chapitre propose un *a priori* alternatif à \mathbf{x} , qui conduit à un problème d’optimisation similaire. Enfin, l’approche par MAP-Marginal donne un éclairage nouveau sur les méthodes de Sparse Bayesian Learning [Wipf and Rao, 2004]. A la fin, les procédures CHAMPAGNE [Owen et al., 2008] utilisées pour le SBL montrent qu’elles sont équivalentes à une procédure ℓ_1 repondérée avec un *a priori* approprié sur \mathbf{s} .

6.1 . Modèle Bernoulli-Gaussien et Maxima A Posteriori

Dans ce chapitre nous allons utiliser le modèle du produit pour le Bernoulli-Gaussien tel que vu dans la section 3.2 du Chapitre 3. On rappelle ici brièvement son expression. Soit $\mathbf{s} \in \{0; 1\}^N$ le support de \mathbf{x} , *i.e.*, $s_n = 1$ si $x_n \neq 0$ et $s_n = 0$ sinon. De plus, soit $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ tel que $x_n = s_n r_n$. Lorsque $s_n = 1$, r_n modélisera les amplitudes de x_n . Le modèle probabiliste des signaux sources s'écrit

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = \text{Diag}[\mathbf{s}] \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (6.1)$$

où les s_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$ (avec $p(s_n = 1) = p$), et les r_n sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une distribution gaussienne centrée :

$$\forall n, \quad s_n \sim \mathcal{B}(p) \text{ et } r_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2) . \quad (6.2)$$

On souligne ici que r_n et s_n sont indépendants. Pour promouvoir la parcimonie, le paramètre p de la loi de Bernoulli est supposé satisfaire la condition : $0 < p \leq 1/2$.

Dans cette section, nous nous concentrerons sur l'estimation du support \mathbf{s} . Comme nous avons pu le voir dans le Chapitre 3, deux estimateurs MAP [Champagnat et al., 1996] peuvent être définis en maximisant l'*a posteriori* joint $\log p(\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{y})$ en \mathbf{s} et en \mathbf{r} , et l'*a posteriori* marginal $\log p(\mathbf{s} | \mathbf{y})$ selon le support \mathbf{s} seulement. Ce dernier correspond à l'estimateur de Bayes au sens de l'erreur 0 – 1 du support estimé.

On suppose aussi que les mesures \mathbf{y} auxquels nous avons accès sont obtenues selon le modèle suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{r} + \mathbf{e} \quad (6.3)$$

avec $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ est un bruit additif gaussien et $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ est un opérateur quelconque réel.

MAP-Joint Maximiser la distribution jointe *a posteriori* $\log p(\mathbf{r}, \mathbf{s} | \mathbf{y})$ est strictement équivalent à minimiser

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \lambda) \triangleq \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{r}\|_2^2 + \frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{r}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}\|_0 \quad (6.4)$$

ou $\|\cdot\|_0$ correspond à la fonction coût ℓ_0 ou nombre d'éléments non nuls, avec (voir [Soussen et al., 2011] et dans la section Chapitre 3)

$$\lambda(p) = \log \left(\frac{1-p}{p} \right) . \quad (6.5)$$

Dans la suite du Chapitre, nous considérerons λ comme étant un hyper-paramètre positif du modèle.

On peut constater dans l'équation (6.4) que la dépendance de \mathcal{J} en \mathbf{r} est quadratique. On en déduit que l'estimateur du MAP $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{s}})$ doit satisfaire la condition suivante :

$$\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{s}}) = \sigma_x^2 \left(\sigma_e^2 I + \sigma_x^2 \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{S}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} , \quad (6.6)$$

obtenue en annulant le gradient de \mathcal{J} selon \mathbf{r} pour \mathbf{s} fixé. En conséquence de quoi, $\hat{r}_n(\hat{\mathbf{s}}) = 0$ dès que $\hat{s}_n = 0$.

Comme montré dans [Soussen et al., 2011], minimiser l'équation (6.4) de manière jointe en $(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \in \{0, 1\}^N \times \mathbb{R}^N$ est équivalent à la minimisation en \mathbf{x} de :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda(p) \|\mathbf{x}\|_0 \right\} . \quad (6.7)$$

Une autre formulation peut être obtenue en injectant l'équation (6.6) dans l'équation (6.4). L'estimateur du MAP-Joint de \mathbf{s} minimise alors le critère suivant :

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda) \triangleq \mathcal{J}(\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}), \mathbf{s}; \lambda) , \quad (6.8)$$

que nous appellerons le critère du MAP-Joint et qui s'écrit [Goussard et al., 1990] :

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{y} + \lambda \|\mathbf{s}\|_0 , \quad (6.9)$$

avec

$$\Gamma_y(\mathbf{s}) = \sigma_e^2 \mathbf{I}_M + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{S}^T \mathbf{H}^T . \quad (6.10)$$

On peut alors ré-écrire l'équation (6.6) en fonction de Γ_y :

$$\mathbf{x}(\mathbf{s}) = \sigma_x^2 \mathbf{S} \mathbf{H}^T \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{y} \quad (6.11)$$

La minimisation globale de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda)$ est coûteuse en terme de calculs, car le problème est d'ordre combinatoire.

MAP-Marginal L'estimation au sens du MAP Marginal repose sur la maximisation de $p(\mathbf{s}|\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{s}, \mathbf{r}|\mathbf{y}) d\mathbf{r}$ après marginalisation de la variable \mathbf{r} . Selon [Champagnat et al., 1996], le MAP-Marginal peut être obtenu en minimisant

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{y} + \frac{1}{2} \log |\Gamma_y(\mathbf{s})| + \lambda \|\mathbf{s}\|_0 . \quad (6.12)$$

En s'appuyant sur l'équation (6.9), on trouve :

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda) = \mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda) + \frac{1}{2} \log |\Gamma_y(\mathbf{s})| . \quad (6.13)$$

Alors que les approches gloutonnes peuvent être utilisées pour trouver des minima locaux comme dans [Champagnat et al., 1996], nous proposons ici un algorithme EM qui permet d'optimiser le MAP-Marginal dans la partie (6.3). Dans la partie qui suit, en revanche, nous allons étudier la relation entre le MAP-Marginal et le MAP-Joint.

6.1.1 . Minimiseurs : MAP-Joint vs MAP-Marginal

Dans le cas de matrices \mathbf{H} orthogonales, il est possible de montrer (voir la proposition 1 du Chapitre 3) que les estimateurs du MAP admettent une forme explicite faisant intervenir un seuillage. Les supports estimés \mathbf{s} via la minimisation de \mathcal{J} ou \mathcal{M} diffèrent alors seulement par la valeur du seuil. Valeurs que l'on peut retrouver dans le tableau 3.1 du Chapitre 3. De plus, toujours dans le cas orthogonal, une analyse comparative théorique et expérimentale a été conduite dans [Turek et al., 2011] sur l'estimateur de la moyenne *a posteriori* de \mathbf{x} et de ses estimateurs de "MAP-Marginal" $\mathbf{x} = \mathbf{S}^M \mathbf{r}(\mathbf{s}^M)$, où \mathbf{s}^M est obtenu en minimisant l'équation (6.12) (ce qui correspond à une étape de seuillage dur).

Pour des matrices arbitraires (non-orthogonales), ces seuils apparaissent naturellement dans la borne ci-dessous.

Théorème 22. Soient $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda)$ et $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$ les critères respectifs du MAP-Joint et du MAP-Marginal donnés dans l'équation (6.4) et (6.12) respectivement. Soit $L = \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|$ la plus grande valeur propre de $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$, alors pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda) - \frac{M}{2} \log(\sigma_e^2) \leq \mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda) \leq \mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa(\lambda)) + \frac{M}{2} \log(\sigma_e^2)$$

avec $\kappa(\lambda) = \lambda + \log\left(\sqrt{\frac{L\sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}}\right)$.

De plus, lorsque les valeurs propres non nulles de $\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^T$ sont toutes égales, alors

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda) = \mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa_s(\lambda)) + \frac{M}{2} \log(\sigma_e^2)$$

avec $\kappa_s(\lambda) = \lambda + \log\left(\sqrt{\frac{\|\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^T\| \sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}}\right)$.

Démonstration. On a

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda) = \mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda) + \frac{1}{2} \log |\Gamma_y(\mathbf{s})| .$$

Pour la borne inférieure, l'inégalité de Minkowsky pour les déterminants implique :

$$|\sigma_e^2 \mathbf{I}_M| \leq |\sigma_e^2 \mathbf{I}_M| + |\sigma_x^2 \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^T| \leq |\Gamma_y(\mathbf{s})|$$

Alors

$$M \log(\sigma_e^2) \leq \log |\Gamma_y(\mathbf{s})|.$$

Pour la borne supérieure, soit $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ la matrice diagonale avec les valeurs propres de $\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^T$ (rangées en ordre décroissant) telles que $\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^T = \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^T$. De plus, on définit la matrice diagonale $\mathbf{\Xi} = \text{Diag}(\xi_1, \dots, \xi_M)$ telle que $\xi_k = L$ si $z_k \neq 0$ et $\xi_k = 0$ si $z_k = 0$. Selon les propriétés de sous-multiplication des normes matricielles, on a $\|\mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^T\| \leq \|\mathbf{H}\|^2 \|\mathbf{S}\|^2 \leq L$.

Par définition, les matrices $\Gamma_y(\mathbf{s})$, $\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{\Xi}$, $(\sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{\Xi}) - \Gamma_y(\mathbf{s})$ sont toutes définies semi-positives. Alors

$$|\Gamma_y(\mathbf{s})| \leq |\sigma_e^2 \mathbf{I}_M + \sigma_x^2 \mathbf{\Xi}|.$$

A présent, remarquons qu'il y a $\|\mathbf{s}\|_0$ valeurs non nulles z_k (sous la condition que les colonnes de \mathbf{H} correspondant à $s_n = 1$ sont linéairement indépendantes), on a alors

$$\log |\Gamma_y(\mathbf{s})| \leq \log(\sigma_e^2 + L\sigma_x^2) \|\mathbf{s}\|_0 + (M - \|\mathbf{s}\|_0) \log(\sigma_e^2) \quad (6.14)$$

$$= \log\left(\frac{\sigma_e^2 + L\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) \|\mathbf{s}\|_0 + M \log(\sigma_e^2). \quad (6.15)$$

d'où l'on tire la borne supérieure.

Lorsque $\mathbf{Z} = L_s \mathbf{I}_{\|\mathbf{s}\|_0}$ (avec $L_s = \|\mathbf{HSS}^T \mathbf{H}^T\|$), on a directement l'égalité dans (6.14). \square

Dans la suite, les notations $\kappa(\lambda)$ et $\kappa_s(\lambda)$ (pour un \mathbf{s} fixé) feront références à la définition donnée dans le théorème 22. Comme la définition de λ donnée dans l'équation (6.5) fait intervenir la variable p , on peut envisager d'interpréter le nouvel hyper-paramètre κ comme un $\tilde{\lambda}$ associé à un \tilde{p} i.e.

$$\kappa = \lambda(p) + \log\left(\sqrt{\frac{L\sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}}\right) = \lambda(\tilde{p}) \quad (6.16)$$

On trouve alors :

$$\tilde{p} = \frac{p\sqrt{\sigma_e^2}}{(1-p)\sqrt{L\sigma_x^2 + \sigma_e^2} + p\sqrt{\sigma_e^2}} \quad (6.17)$$

Comme la matrice $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ est positive semi-définie, alors on peut dire que $L > 0$. Cela nous permet de dériver que :

$$\tilde{p} < p \quad (6.18)$$

En faisant apparaître le rapport signal à bruit maximum $SNR_{max} = \frac{pL\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$, on obtient l'expression suivante

$$\tilde{p}(p, SNR_{max}) = \frac{p}{(1-p)\sqrt{\frac{SNR_{max}}{p} + 1} + p} \quad (6.19)$$

On en conclut donc, en utilisant le résultat présenté dans le théorème 22 que le critère du MAP-Marginal pour des paramètres donnés $(p, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$ est encadré par deux critères du MAP-Joint : un avec les mêmes paramètres et un avec des paramètres 'plus parcimonieux' $(\tilde{p}, \sigma_x^2, \sigma_e^2)$.

Partant du théorème 22, il est possible de trouver une borne supérieure à $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$ en minimisant $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa(\lambda))$. On remarque que dans le cas spécifique où

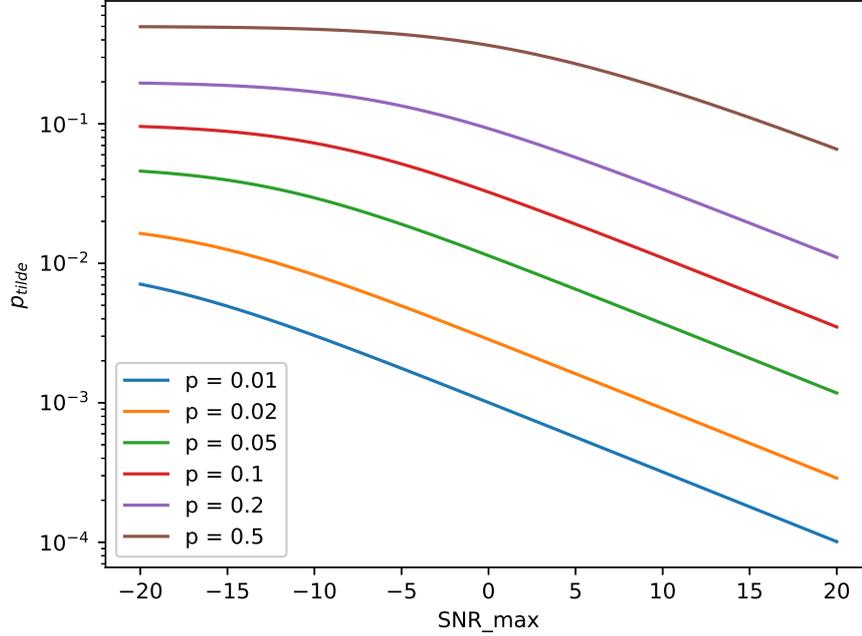


Figure 6.1 – \tilde{p} en fonction du rapport signal à bruit maximum.

$M \geq N$ (i.e., dans le cas surdéterminé) tel que $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{L}\mathbf{I}$, un minimum global \mathbf{s}^J de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa(\lambda))$ est aussi un minimum global de $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$ grâce au théorème d'entrelacement de Cauchy.

On prolonge cette partie, en proposant une étude sur la relation entre les minima globaux de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa(\lambda))$ et les minima de $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$. Soit (\mathbf{s}^J) (resp. \mathbf{s}^M) un minimum global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa(\lambda))$ (resp. $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$). En utilisant une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{H}\mathbf{S}^J$ (avec $\mathbf{S}^J \triangleq \text{Diag}[\mathbf{s}^J]$), on dérive la condition nécessaire que doit satisfaire \mathbf{s}^J (resp. \mathbf{s}^M).

Proposition 23 (Condition nécessaire du MAP-Joint). *Soit \mathbf{s}^* un minimum global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda)$. Soient z_k^* les valeurs singulières de $\mathbf{H}\mathbf{S}^*$ classées en ordre décroissant, telles que $\mathbf{H}\mathbf{S}^* = \mathbf{U} \text{Diag } z_k^* \mathbf{V}^T$ avec les matrices unitaires \mathbf{U} et \mathbf{V} , et soit $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^T \mathbf{y}$. Alors \mathbf{s}^* est un minimum global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa)$ si et seulement si pour tout $k = 1, \dots, \|\mathbf{s}^*\|_0$ on a*

$$\lambda < |\tilde{y}_k|^2 \frac{1}{2\sigma_e^2} \left(\frac{(z_k^* \sigma_x)^2}{(z_k^* \sigma_x)^2 + \sigma_e^2} \right).$$

Démonstration. Soit \mathbf{s}^* un minimiseur global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda)$, et soit $\mathbf{r}^* = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}^*)$ le vecteur associé tel que $(\mathbf{s}^*, \mathbf{r}^*)$ est un minimiseur global de $\mathcal{J}(\mathbf{r}; \mathbf{s}; \lambda)$. On définit $\mathbf{x}^* = \mathbf{s}^* \mathbf{r}^*$. Soit $\mathbf{H}_{\mathbf{s}^*} = \mathbf{H}\mathbf{S}^* = \mathbf{U}\mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T$ avec les matrices unitaires

$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et une matrice diagonale $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{M \times N}$. On a

$$\mathbf{r}^* = \sigma_x^2 (\sigma_x^2 \mathbf{H}_{\mathbf{s}^*}^T \mathbf{H}_{\mathbf{s}^*} + \sigma_e^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{s}^*}^T \mathbf{y} \quad (6.20)$$

$$= \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T + \sigma_e^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \quad (6.21)$$

$$= \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T + \sigma_e^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \tilde{\mathbf{y}} \quad (6.22)$$

avec $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^T \mathbf{y}$. Alors,

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}^*; \lambda) = \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{s}^* \mathbf{r}^*\|^2 + \frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{r}^*\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}^*\|_0 \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{U} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T + \sigma_e^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \tilde{\mathbf{y}} \right\|_2^2 \quad (6.24)$$

$$+ \frac{1}{2\sigma_x^2} \left\| \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T + \sigma_e^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \tilde{\mathbf{y}} \right\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}^*\|_0 \quad (6.25)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\| \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T + \sigma_e^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \tilde{\mathbf{y}} \right\|_2^2 \quad (6.26)$$

$$+ \frac{1}{2\sigma_x^2} \left\| \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^T + \sigma_e^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{*T} \tilde{\mathbf{y}} \right\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{s}^*\|_0 \quad (6.27)$$

$$= \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}\|_0} \left\{ \frac{1}{2\sigma_e^2} \left(1 - \sigma_x^2 \left(\sigma_x^2 z_k^{*2} + \sigma_e^2 \right)^{-1} (z_k^*)^2 \right)^2 (\tilde{y}_k)^2 + \frac{z_k^{*2} \sigma_x^2}{2} \left(z_k^{*2} \sigma_x^2 + \sigma_e^2 \right)^{-2} (\tilde{y}_k)^2 + \lambda s_k^* \right\} \quad (6.28)$$

$$= \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}\|_0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{(z_k^{*2} \sigma_x^2 + \sigma_e^2)^2} |\tilde{y}_k|^2 + \frac{1}{2} \frac{z_k^{*2} \sigma_x^2}{(z_k^{*2} \sigma_x^2 + \sigma_e^2)^2} |\tilde{y}_k|^2 + \lambda s_k^* \right\} \quad (6.29)$$

$$= \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}\|_0} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_k^{*2} \sigma_x^2 + \sigma_e^2} \right) |\tilde{y}_k|^2 + \lambda s_k^* \right\} \quad (6.30)$$

Par contraposée, on a que $(\mathbf{r}^*, \mathbf{s}^*)$ est un minimiseur global si et seulement si $(z_k^*)^2 > 0$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} \right) |\tilde{y}_k|^2 + \lambda < \frac{1}{2\sigma_e^2} |\tilde{y}_k|^2 \quad (6.31)$$

d'où

$$2\sigma_e^2 \lambda < |\tilde{y}_k|^2 \frac{(z_k^*)^2 \sigma_x^2}{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} \quad (6.32)$$

□

Proposition 24 (Condition nécessaire du MAP-Marginal). *Soit \mathbf{s}^* un minimum global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda)$. Soient z_k^* les valeurs singulières de $\mathbf{H} \mathbf{S}^*$ classées en ordre décroissant, telles que $\mathbf{H} \mathbf{S}^* = \mathbf{U} \text{Diag } z_k^* \mathbf{V}^T$ avec les matrices unitaires \mathbf{U} et \mathbf{V} , et*

soit $\tilde{y} = \mathbf{U}^T \mathbf{y}$. Alors \mathbf{s}^* est un minimum global de $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$ si et seulement si pour tout $k = 1, \dots, \|\mathbf{s}^*\|_0$ on a

$$\lambda + \log \left(\sqrt{\frac{(z_k^* \sigma_x)^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} \right) < |\tilde{y}_k|^2 \frac{1}{2\sigma_e^2} \left(\frac{(z_k^* \sigma_x)^2}{(z_k^* \sigma_x)^2 + \sigma_e^2} \right)$$

Démonstration. Soit (\mathbf{s}^*) un minimiseur global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \lambda)$. Soit $\mathbf{H}_{\mathbf{s}^*} = \mathbf{H}\mathbf{s}^* = \mathbf{U}\mathbf{Z}^*\mathbf{V}^T$. On a

$$\begin{aligned} \Gamma_y(\mathbf{s}^*) &= \sigma_e^2 \mathbf{I}_M + \sigma_x^2 \mathbf{H}\mathbf{s}^* \mathbf{s}^{*T} \mathbf{H}^T \\ &= \sigma_e^2 \mathbf{I}_M + \sigma_x^2 \mathbf{U}\mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^{*T} \mathbf{U}^T \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} |\Gamma_y(\mathbf{s}^*)| &= \prod_{k=1}^{\|\mathbf{s}^*\|_0} ((z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2) \prod_{k=\|\mathbf{s}^*\|_0+1}^M \sigma_e^2 \\ &= (\sigma_e^2)^{M-\|\mathbf{s}^*\|_0} \prod_{k=1}^{\|\mathbf{s}^*\|_0} ((z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2) \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\log |\Gamma_y(\mathbf{s}^*)| = (M - \|\mathbf{s}^*\|_0) \log(\sigma_e^2) + \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}^*\|_0} \log((z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2).$$

Selon l'équation (6.13), on a :

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}^*; \lambda) = \mathcal{J}(\mathbf{s}^*; \lambda) + \frac{1}{2} \log |\Gamma_y(\mathbf{s}^*)|$$

alors (voir preuve de la proposition 23)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{s}^*; \lambda) &= \mathcal{J}(\mathbf{s}^*; \lambda) + (M - \|\mathbf{s}^*\|_0) \log(\sigma_e^2) + \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}^*\|_0} \log \left(\sqrt{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}^*\|_0} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} \right) |\tilde{y}_k|^2 + \lambda s_k^* \right\} + \sum_{k=1}^{\|\mathbf{s}^*\|_0} \log \left(\sqrt{\frac{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} \right) + \frac{M}{2} \log(\sigma_e^2). \end{aligned}$$

Par contraposée, on a que (\mathbf{s}^*) est un minimiseur global si et seulement si pour tout $(z_k^*)^2 > 0$,

$$\lambda + \log \left(\sqrt{\frac{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} \right) \leq \frac{1}{2\sigma_e^2} \frac{(z_k^*)^2 \sigma_x^2}{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} |\tilde{y}_k|^2.$$

□

Les supports \mathbf{s} satisfaisant au moins une des conditions précédentes sont appelés *supports joints robustes* et *supports marginaux robustes*, respectivement. Une conséquence directe de ces définitions est que le support joint robuste est un support marginal robuste pour tout hyper-paramètre bien choisi.

Théorème 25. *Soit \mathbf{s}^* un support joint robuste pour $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa(\lambda))$. Alors, \mathbf{s}^* est un support marginal robuste pour $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$*

Démonstration. En utilisant la proposition 24 avec $\kappa = \lambda + \log \left(\sqrt{\frac{L\sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} \right)$ on a

$$\lambda + \log \left(\sqrt{\frac{L\sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} \right) = \kappa < \frac{1}{2\sigma_e^2} \frac{z_k^2 \sigma_x^2}{z_k^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} |\tilde{y}_k|^2$$

Qui implique que

$$\lambda + \log \left(\sqrt{\frac{(z_k^*)^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2}{\sigma_e^2}} \right) < \frac{1}{2\sigma_e^2} \frac{z_k^2 \sigma_x^2}{z_k^2 \sigma_x^2 + \sigma_e^2} |\tilde{y}_k|^2$$

d'où la conclusion. □

On peut au moins conclure que si \mathbf{s}^J est un minimum global de $\mathcal{J}(\mathbf{s}; \kappa_{\mathbf{s}^J}(\lambda))$ tel que toutes les valeurs propres non-nulles de $\mathbf{H}\mathbf{S}^J\mathbf{S}^{J^T}\mathbf{H}^T$ sont égales, alors \mathbf{s}^J est un support robuste de $\mathcal{M}(\mathbf{s}; \lambda)$.

6.2 . Relaxation continue

Si l'on repart du modèle Bernoulli-Gaussien comme un produit de variables aléatoires ($x_n = s_n r_n$), on peut considérer un modèle continu pour \mathbf{s} . On va choisir la famille de distributions *a priori* suivante, paramétrisée par $\rho \geq 0$:

$$p(\mathbf{s}) = C(\rho) \exp \left(-\rho \sum_{n=1}^N s_n^\alpha \right) \mathbb{1}_{\mathcal{B}}(\mathbf{s}) \quad (6.33)$$

dans lequel $\mathcal{B} = [0, a]^N$, $a > 0$, ou $\mathcal{B} = [0, +\infty[^N$, $\alpha > 0$ et $C(\rho)$ est une constante de normalisation afin de garantir la masse unitaire. Lorsque $\mathcal{B} = [0, +\infty[^N$, on pose $a = +\infty$. Tout comme dans la Section 6.1, \mathbf{r} est un vecteur aléatoire Gaussien indépendant de \mathbf{s} , avec $\mathbf{r} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2 I_N)$.

On peut d'ores et déjà dire que certains cas particuliers seront porteurs d'intérêt. Parmi eux on peut citer le cas où $\alpha = 1$ et $\mathcal{B} = [0, 1]^N$ qui permet de retrouver la distribution appelée Bernoulli continue étudiée dans le papier de [Loaiza-Ganem and Cunningham, 2019], alors que si $\mathcal{B} = [0, +\infty[^N$ on a simplement une distribution exponentielle. De même, si $\alpha = 2$ et $\mathcal{B} = [0, +\infty[^N$ on retrouve la distribution demi-Gaussienne ou une version tronquée de cette dernière dès que $a < +\infty$.

6.2.1 . MAP-Joint Continu

De la même manière que dans la Section 6.1, l'estimateur du MAP-Joint peut être exprimé comme un problème de minimisation jointe

$$\min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \mathcal{B}} \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho) , \quad (6.34)$$

avec

$$\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho) \triangleq \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{S}\mathbf{r}\|_2^2 + \frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{r}\|_2^2 + \rho \|\mathbf{s}\|_\alpha^\alpha . \quad (6.35)$$

On remarque que si $\mathbf{s} \in \{0, 1\}^N$ est pris binaire, $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho) = \mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho)$ avec la fonction \mathcal{J} définie dans l'équation (6.4). De plus, lorsque $a \geq 1$, on voit vite que $\{0, 1\}^N \subset \mathcal{B}$ et donc que :

$$\min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \mathcal{B}} \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho) \leq \min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \{0, 1\}^N} \mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho) . \quad (6.36)$$

Cette borne inférieure a déjà été utilisée pour $\alpha = 2$ et $a = 1$ dans l'approche "perspective relaxation" du MAP-Joint associé au modèle BG [Pilanci et al., 2015].

Le théorème suivant nous dit que la minimisation jointe de (\mathbf{r}, \mathbf{s}) est équivalente à minimiser une fonction appropriée de $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$, avec $\mathbf{S} = \text{Diag } \mathbf{s}$.

Théorème 26. Soit $\alpha > 0$. Définissons

$$\tilde{\mathcal{J}}_\alpha(\mathbf{x}; \rho) \triangleq \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \phi_{\alpha, a}(x_n; \sigma_x^2; \rho)$$

avec

$$\phi_{\alpha, a}(x; \sigma_x^2; \rho) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha \rho \sigma_x^2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} (\alpha + 2) \rho |x|^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}} & \text{if } |x| \leq a \sqrt{\alpha \rho \sigma_x^2}, \\ \frac{1}{\sigma_x^2} x^2 + 2\rho & \text{if } |x| > a \sqrt{\alpha \rho \sigma_x^2}. \end{cases}$$

Alors

$$\min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \mathcal{B}} \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \rho) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \tilde{\mathcal{J}}_\alpha(\mathbf{x}; \rho).$$

Précisément, si $(\mathbf{r}^*, \mathbf{s}^*)$ est un minimum global de \mathcal{J}_α , alors $\mathbf{x}^* = \mathbf{S}^* \mathbf{r}^*$ est un minimum global de $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$. A l'inverse, soit \mathbf{x}^* un minimum global de $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$. Définissons pour tout k ,

$$s_k^* = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha \rho \sigma_x^2} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} |x_k^*|^{\frac{2}{\alpha+2}} & \text{if } |x_k^*| \leq a \sqrt{\alpha \rho \sigma_x^2}, \\ a & \text{if } |x_k^*| > a \sqrt{\alpha \rho \sigma_x^2}, \end{cases}$$

et $r_k^* = \frac{x_k^*}{s_k^*}$ si $s_k^* \neq 0$, 0 sinon. Alors, $(\mathbf{s}^*, \mathbf{r}^*)$ est un minimum global de \mathcal{J}_α .

Ce théorème explique que la minimisation jointe de $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \rho)$ peut être remplacée par la minimisation de $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha(\mathbf{x}, \rho)$. Ensuite, il est possible de retrouver les minima (\mathbf{s}, \mathbf{r}) de \mathcal{J}_α à partir des minima \mathbf{x} de $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$. Pour aller plus loin, on note que $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha$ est convexe dès que $\alpha \geq 2$.

Comme mentionné en début de section, certains cas particuliers nous intéressent car ils sont liés à des distributions *a priori* connues. Par exemple lorsque $\alpha = 2$, *i.e.*, pour une loi demi-Gaussienne de \mathbf{s} . En choisissant $\mathcal{B} = [0, 1]^N$, on obtient

$$\tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{x}; \rho) = \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + 2\rho \text{Rhub} \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2\rho\sigma_x^2}} \right), \quad (6.37)$$

avec Rhub la fonction de Huber inversée [Pilanci et al., 2015] définie pour chaque élément comme :

$$\text{Rhub}(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } |x| \leq 1, \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{if } |x| \geq 1. \end{cases}$$

On peut étendre le résultat, pour $\mathcal{B} = [0, +\infty[^N$, ce qui donne

$$\tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{x}; \rho) = \frac{1}{2\sigma_e^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma_x^2}} \|\mathbf{x}\|_1. \quad (6.38)$$

Ce qui fait apparaître la formulation classique du LASSO, qui est ici interprétable comme un modèle de Spike & Slab "continu" avec un *a priori* demi-gaussien sur \mathbf{s} . Dans les travaux de [Jiang and Nadarajah, 2019] on peut trouver la fonction caractéristique d'un tel produit d'une variable gaussienne et d'une autre variable indépendante suivant une distribution quelconque. Dans le contexte que nous venons de présenter, la fonction caractéristique de $x_n = s_n r_n$ est :

$$\mathbb{E}[e^{itx_n}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_x^2}{2\rho} t^2}}, \quad (6.39)$$

ce qui ne correspond (à notre connaissance) malheureusement à aucune distribution connue. Plus spécifiquement, \mathbf{x} ne suit pas ici une distribution de Laplace (on peut notamment voir que la fonction caractéristique est $L^2(\mathbb{R})$ mais pas $L^1(\mathbb{R})$).

Toujours en s'appuyant sur [Jiang and Nadarajah, 2019], si l'on choisit une distribution de Rayleigh avec un paramètre d'échelle $\frac{1}{\epsilon} > 0$ comme distribution *a priori* de s_n , noté

$$p(s_n) = 2\epsilon^2 s_n e^{-\epsilon^2 s_n^2}, \quad s_n \geq 0, \quad (6.40)$$

alors $x_n = s_n r_n$ suivra une distribution de Laplace avec un paramètre d'échelle $\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2\epsilon^2}}$. Tandis que les priors demi-gaussien et Rayleigh de \mathbf{s} conduisent tous deux au LASSO, il est intéressant de noter que la distribution de Rayleigh a

un mode en $\epsilon > 0$, alors que la distribution demi-Gaussienne a un mode en 0. De plus, avec l'*a priori* demi-Gaussien de \mathbf{s} , il est possible de retrouver (\mathbf{s}, \mathbf{r}) à partir de \mathbf{x} avec la formule donné dans le théorème 26, ce qui n'est pas le cas avec un *a priori* de Rayleigh sur \mathbf{s} .

6.2.2 . MAP-Marginal Continu

L'estimateur du MAP-Marginal associé au modèle du Spike & Slab continu avec un *a priori* comme celui de l'équation (6.33) s'écrit

$$\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \Gamma_y(\mathbf{s})^{-1} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \log |\Gamma_y(\mathbf{s})| + \rho \|\mathbf{s}\|_\alpha^\alpha. \quad (6.41)$$

Une fois encore, dès que $a \geq 1$, le critère du MAP-Marginal donné dans l'équation (6.12) peut être borné inférieurement par :

$$\min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \mathcal{B}} \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) \leq \min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \{0,1\}^N} \mathcal{M}(\mathbf{s}; \rho). \quad (6.42)$$

avec $\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) = \mathcal{M}(\mathbf{s}; \rho)$ pour tout $\mathbf{s} \in \{0,1\}^N$. De la même manière que pour le modèle BG, voir équation (6.13), on a

$$\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) = \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) + \frac{1}{2} \log |\Gamma_y(\mathbf{s})| \quad (6.43)$$

ou $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) = \mathcal{J}_\alpha(\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}); \mathbf{s}; \rho)$ avec $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s})$ défini dans l'équation (6.6). Les bornes dur théorème 22 sont alors modifiées, les bornes supérieures y étant moins informatives.

Théorème 27. Soient $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{s}; \rho)$ et $\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; \rho)$ les critères continus du MAP-Joint et du MAP-Marginal, respectivement. Supposons que pour tout n , $s_n \leq a$ avec $a > 0$, et soit $L = \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|$ la plus grande valeur propre de $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Alors,

$$\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) - \frac{M}{2} \log(\sigma_e^2) \leq \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) \leq \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{s}; \rho) + \frac{M}{2} \log(\sigma_e^2 + a^2 L \sigma_x^2).$$

L'approche du MAP-Marginal est au coeur du Sparse Bayesian Learning (SBL) [Wipf and Rao, 2004]. Ci-après, nous montrons que l'équation (6.41) est directement relié au SBL. Considerant le modèle génératif *a priori* pour le signal \mathbf{x} : en conditionnant \mathbf{s} , on a $\mathbf{x}|\mathbf{s} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_x^2 \mathbf{S}^T \mathbf{S})$. Alors, en notant $v = \mathbf{s}^2 \sigma_x^2$, on retrouve l'*a priori* de \mathbf{x} utilisé dans le SBL. On rappelle que le SBL a pour objectif de maximiser la vraisemblance de Type-II :

$$\begin{aligned} v^{II} &= \underset{v}{\operatorname{argmax}} p(v|\mathbf{y}) = \underset{v}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|v)p(v) \\ &= \underset{v}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \mathbf{y}^t v_{\mathbf{y}}(v)^{-1} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \log |v_{\mathbf{y}}| + R(v) \end{aligned} \quad (6.44)$$

avec $v_{\mathbf{y}}(v) = \sigma_e^2 \mathbf{I} + \mathbf{H} \operatorname{Diag} v \mathbf{H}^T$, $R(v) = -\log p(v)$. Pour une variance fixée σ_x^2 , on voit facilement comment l'estimateur du MAP-Marginal de \mathbf{s} avec le

modèle du Spike & Slab continu de l'équation (6.33) correspond à l'estimateur du maximum de la vraisemblance de Type-II avec l'*a priori* v tel que

$$R(v) = -\log(p(v)) = 2\frac{\rho}{\sqrt{\sigma_x^2}}\|\sqrt{v}\|_\alpha^\alpha + \text{Constant}. \quad (6.45)$$

Dans beaucoup de cas pratiques, le SBL est appliqué sans choisir un *a priori* sur v et cela revient à minimiser

$$\mathcal{SBL}(v) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^t v_{\mathbf{y}}(v)^{-1}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\log |v_{\mathbf{y}}(v)|. \quad (6.46)$$

On observe alors qu'en choisissant $\rho = 0$ dans l'équation (6.33), le critère du MAP-Marginal \mathcal{M}_α est borné inférieurement par le critère du SBL pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \min_{v \in \mathbb{R}_+^N} \mathcal{SBL}(v) &= \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^N} \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; 0) \leq \\ \min_{v \in [0, \sigma_x^2]^N} \mathcal{SBL}(v) &= \min_{\mathbf{s} \in [0, 1]^N} \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{s}; 0) \leq \min_{\mathbf{s} \in \{0, 1\}^N} \mathcal{M}(\mathbf{s}; 0) \end{aligned} \quad (6.47)$$

car le terme $\rho\|\mathbf{s}\|_\alpha^\alpha$ disparaît de l'équation (6.41). Enfin, [Wipf and Rao, 2004] ont montrés que le SBL conduit à des estimations parcimonieuses : c'est à dire que, même sans *a priori* sur \mathbf{s} , il est possible d'obtenir une estimation parcimonieuse du support \mathbf{s} en utilisant l'approche du MAP-Marginal pour $\rho = 0$.

6.3 . Optimiser le MAP-Marginal

Dans cette partie, nous allons proposer des algorithmes EM qui permettent d'estimer le MAP-Marginal. On commence par dérouler les calculs dans le cas discret. Puis, dans la dernière partie, on donne les résultats dans le cas relâché.

L'estimateur du MMAP est basé sur la maximisation de $p(\mathbf{s}|\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{s}, \mathbf{r}|\mathbf{y})d\mathbf{r}$ sur $\{0, 1\}^N$. Comme défini dans l'équation (6.12), il conduit à minimiser

$$-\log p(\mathbf{s}|\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^t \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s})\mathbf{y} + \frac{1}{2}\log |\Gamma_y(\mathbf{s})| + \lambda\|\mathbf{s}\|_0. \quad (6.48)$$

qui s'avère être un problème NP-difficile. On propose une résolution sous-optimale basée sur un algorithme EM. En suivant l'approche des travaux de [Figueiredo and Nowak, 2003] la procédure introduite dans le Chapitre 5, le modèle d'observation est décomposé en deux modèles liés à l'opérateur direct et au bruitage additif :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{z} + \mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = \mathbf{S}\mathbf{r} + \mathbf{b}. \quad (6.49)$$

On impose les distributions

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_e) \quad \text{et} \quad \mathbf{b} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2 \mathbf{I}) \quad (6.50)$$

définissant des vecteurs indépendants, gaussiens, tels que

$$\Gamma_e + \sigma_b^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \sigma_b^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{\|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|}. \quad (6.51)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme spectrale d'une matrice. Cette décomposition permet de dériver l'algorithme *Iterative Shrinkage/Thresholding* pour les problèmes de Lasso [Tibshirani, 1996]/Basis Pursuit Denoising [Chen et al., 2001]. Elle est aussi utilisée dans [Kowalski and Rodet, 2011, Barbault et al., 2022] afin d'estimer les paramètres (ρ, σ_x^2) d'un modèle Bernoulli-Gaussien.

Pour maximiser $p(\mathbf{s}|\mathbf{y})$, considérons \mathbf{z} comme variable cachée admissible. L'algorithme EM s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{t+1} &= \underset{\mathbf{s} \in \{0,1\}^N}{\operatorname{argmin}} Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}^t) \\ Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}^t) &= \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}^t} [-\log p(\mathbf{z}, \mathbf{s}|\mathbf{y})] . \end{aligned} \quad (6.52)$$

L'étape E et l'étape M sont développées dans la suite.

6.3.1 . Etape-E

Dans un but de concision, la notation suivante sera adoptée :

$$f(\mathbf{s}) + \kappa \stackrel{\kappa}{=} f(\mathbf{s})$$

pour faire référence à toute égalité à une constante κ près (qui ne dépend pas de \mathbf{s}). Par la linéarité de l'espérance et le fait que $p(\mathbf{s}|\mathbf{z}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{s}|\mathbf{z})$, on a

$$Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}^t) \stackrel{\kappa}{=} \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}^t} [-\log p(\mathbf{s}|\mathbf{z})] \quad (6.53)$$

où $\kappa = \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}^t} [-\log p(\mathbf{z}|\mathbf{y})]$. La règle de Bayes mène à :

$$Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}^t) \stackrel{\kappa}{=} \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}^t} [-\log p(\mathbf{z}|\mathbf{s})] + \lambda \|\mathbf{s}\|_0 \quad (6.54)$$

avec λ défini en (6.5), avec maintenant $\kappa = \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s}^t} \log p(\mathbf{z}) - \log p(\mathbf{z}|\mathbf{y})$. En utilisant les équations (6.49) à (6.51), on a directement

$$\mathbf{z}|\mathbf{s} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Gamma_z(\mathbf{s})) \quad \text{avec} \quad \Gamma_z(\mathbf{s}) = \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^T \mathbf{S}. \quad (6.55)$$

La règle de Bayes donne la loi *a posteriori* de \mathbf{z}

$$\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{s} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{z}}, \Sigma) \quad (6.56)$$

dont les paramètres sont

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} &= \Gamma_z(\mathbf{s}) \mathbf{H}^T \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{y} \\ \Sigma &= \Gamma_z(\mathbf{s}) - \Gamma_z(\mathbf{s}) \mathbf{H}^T \Gamma_y^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{H} \Gamma_z(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (6.57)$$

C'est pourquoi l'espérance s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y},\mathbf{s}^t} [-\log p(\mathbf{z}|\mathbf{s})] &\stackrel{\kappa}{=} \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\mathbf{z}|\mathbf{y},\mathbf{s}^t} [\mathbf{z}^T \Gamma_z^{-1}(\mathbf{s}) \mathbf{z}] + \frac{1}{2} \log |\Gamma_z(\mathbf{s})| \\ &\stackrel{\kappa}{=} \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{z}}^t)^T \Gamma_z^{-1}(\mathbf{s}) (\hat{\mathbf{z}}^t) + \frac{1}{2} \text{Trace}[\Gamma_z^{-1}(\mathbf{s}) \Sigma^t] + \frac{1}{2} \log |\Gamma_z(\mathbf{s})|.\end{aligned}$$

Enfin, l'étape-E s'écrit comme la somme séparable

$$Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}^t) \stackrel{\kappa}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N Q_n(s[n]) \quad (6.58)$$

avec

$$Q_n(s[n]) = \frac{(\hat{z}^t[n])^2 + \Sigma^t[n, n]}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s[n]^2} + \log(\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s[n]^2) + 2\rho s[n]$$

Ainsi, la minimisation de Q se réduit à N problèmes de minimisation 1D, *i.e.*, la minimisation des critères Q_n .

6.3.2 . Etape-M

Introduisons la notation $\gamma_n^t = (\hat{z}^t[n])^2 + \Sigma^t[n, n]$. La minimisation de Q_n s'écrit :

$$s^{t+1}[n] = \underset{s \in \{0,1\}}{\text{argmin}} \frac{\gamma_n^t}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s^2} + \log(\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s^2) + 2\rho s \quad (6.59)$$

Après calculs, la solution est $s^{t+1}[n] = 1$ si et seulement si

$$\gamma_n^t \geq \sigma_n^2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{\sigma_x^2} \left(\log \left(\frac{\sigma_n^2 + \sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) + 2\rho \right). \quad (6.60)$$

Cette opération n'est pas sans rappeler la formule de seuillage dans le cadre du problème de débruitage en MAP-Marginal (avec γ_n^t en lieu et place de $z[n]$ ci-dessous).

Proposition 28. *Soit $\mathbf{z} = \mathbf{S}\mathbf{r} + \mathbf{b}$, avec les lois a priori définies plus haut pour (\mathbf{s}, \mathbf{r}) . L'estimateur du MMAP de $\mathbf{s}|\mathbf{z}$ est donné explicitement, pour tout n , par*

$$s[n] = 1 \quad \text{ssi} \quad P(s[n] = 1|z[n]) \geq P(s[n] = 0|z[n])$$

$$\text{c.à.d. ssi} \quad z[n]^2 \geq 2\sigma_n^2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{\sigma_x^2} \left(\rho + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_n^2 + \sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) \right).$$

Résultat que l'on retrouve dans [Protter et al., 2010, Kowalski and Rodet, 2011, Barbault et al., 2022].

Démonstration. Il suffit de se référer à la section 3.3 du Chapitre 3. \square

6.3.3 . Résumé de l'algorithme

La méthode complète est résumé dans l'algorithme 13. Lorsque $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, \mathbf{e} peut être mis à $\mathbf{0}$ dans l'équation (6.49), et donc $\sigma_b^2 = \sigma_0^2$. Dans ce cas, les matrices de covariance Γ_z et Γ_y sont égales, et l'algorithme se réduit au cas de l'estimateur du MMAP en débruitage (avec $\mathbf{z} = \mathbf{y}$ dans la proposition 28). Dans la section suivante, une relaxation continue du problème MMAP est proposée, où les variables binaires $s[n]$ sont remplacées par des variables dans $[0, 1]$. L'idée est d'obtenir une solution « à chaud » qui permettra de mieux initialiser 13.

Algorithme 13 : Estimateur MMAP du support \mathbf{s} .

Entrées : $t = 0, \mathbf{s}^{(t)} \in [0, 1]^N, \rho > 0;$
Sortie : $\mathbf{s} \in \{0, 1\}^N;$
while not converged do
 $\mathbf{S}^{(t)} = \text{Diag}(\mathbf{s});$
 $\Gamma_z^{(t)} = \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^{(t)} \mathbf{S}^{(t)T};$
 $\Gamma_y^{(t)} = \sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S}^{(t)} \mathbf{S}^{(t)T} \mathbf{H}^T;$
 $\Sigma^{(t)} = \Gamma_z^{(t)} - \Gamma_z^{(t)} \mathbf{H}^T \Gamma_y^{(t)-1} \mathbf{H} \Gamma_z^{(t)};$
 $\hat{\mathbf{z}}^{(t)} = \Gamma_z^{(t)} \mathbf{H}^T \Gamma_y^{(t)-1} \mathbf{y};$
 for $n = 1, \dots, N$ **do**
 $\gamma_n^{(t)} = \hat{z}^t[n]^2 + \Sigma^t[n, n];$
 if $\gamma_n^{(t)} \geq 2\sigma_b^2 \frac{\sigma_b^2 + \sigma_x^2}{\sigma_x^2} \left(\rho + \log \sqrt{1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2}} \right)$ **then**
 $s^{(t+1)}[n] = 1;$
 else
 $s^{(t+1)}[n] = 0;$
 end
 end
 $t = t + 1$
end

6.3.4 . Optimisation par relaxation continue

On relâche le problème d'optimisation binaire (6.52) en un problème d'optimisation continue. Le domaine de définition $\{0, 1\}^N$ de la fonction coût est remplacé par $[0, 1]^N$. Comme la fonction coût $Q(\mathbf{s}, \mathbf{s}^t)$ est la somme découplée (6.58), l'étape M reste un problème 1D semblable à (6.59).

On remarque que pour $s[n] \in \{0, 1\}$, alors $s[n]^2 = s[n]$. Ainsi, minimiser Q_n sur $\{0, 1\}$ revient à minimiser :

$$\frac{\gamma_n^{(t)}}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s[n]^2} + \log(\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s[n]^2) + 2\rho s[n]^2.$$

Algorithme 14 : Estimation des s relâchés.

Entrées : $t = 0, \mathbf{s}^{(t)} \in [0, 1]^N$;

Sortie : $\mathbf{s} \in [0, 1]^N$;

while not converged do

$\mathbf{S}^{(t)} = \text{Diag}(\mathbf{s})$;

$\Gamma_z^{(t)} = \sigma_n^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{S}^{(t)} \mathbf{S}^{(t)T}$;

$\Gamma_y^{(t)} = \sigma_e^2 \mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H} \mathbf{S}^{(t)} \mathbf{S}^{(t)T} \mathbf{H}^T$;

$\Sigma^{(t)} = \Gamma_z^{(t)} - \Gamma_z^{(t)} \mathbf{H}^T \Gamma_y^{(t)-1} \mathbf{H} \Gamma_z^{(t)}$;

$\hat{\mathbf{z}}^{(t)} = \Gamma_z^{(t)} \mathbf{H}^T \Gamma_y^{(t)-1} \mathbf{y}$;

for $n = 1, \dots, N$ **do**

$\gamma_n^{(t)} = \hat{z}^t[n]^2 + \Sigma^t[n, n]$;

$u[n] = \frac{1}{4\rho} \left(\sqrt{1 + 8\rho \frac{\gamma_n^t}{\sigma_x^2}} - 1 \right) - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2}$;

$s[n] = \max\{\min\{\sqrt{u[n]}, 1\}, 0\}$;

end

$t = t + 1$;

end

Considérons la relaxation continue de $s[n]$ sur $[0, 1]$:

$$s_n^{t+1} = \underset{s \in [0,1]}{\operatorname{argmin}} \frac{\gamma_n^t}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s^2} + \log(\sigma_n^2 + \sigma_x^2 s^2) + 2\rho s^2. \quad (6.61)$$

Il s'agit d'un problème 1D avec des contraintes de borne. Le minimiseur non contraint peut être obtenu en cherchant les racines de la dérivée première par rapport à $u = s^2$, qui s'écrit

$$\frac{-\sigma_x^2 \gamma_n^t}{(\sigma_n^2 + \sigma_x^2 u^2)^2} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2 + \sigma_x^2 u} + 2\rho = 0. \quad (6.62)$$

Lorsque $\rho > 0$, il existe une seule racine positive :

$$u[n] = \frac{1}{4\rho} \left(\sqrt{1 + 8\rho \frac{\gamma_n^t}{\sigma_x^2}} - 1 \right) - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2}. \quad (6.63)$$

Une étude minutieuse de la fonction coût dans (6.61) (considérée comme une fonction de $u = s^2$) révèle que la dérivée seconde est positive pour le point $u[n]$. En prenant en compte que $s \in [0, 1]$, la solution devient :

$$s^{t+1}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } u[n] \leq 0, \\ 1 & \text{si } u[n] \geq 1, \\ \sqrt{u[n]} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.64)$$

L'algorithme obtenu 14 est proche de l'EM Sparse Bayesian Learning (SBL) de [Wipf and Rao, 2004], exception faite de l'estimation de \mathbf{s} . Comme $\mathbf{x}|\mathbf{s} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_x^2 \mathbf{S})$, lorsque \mathbf{s} est continu, on retrouve la loi *a priori* utilisée dans SBL. La relaxation proposée peut être vue comme une approche SBL où les variances sont bornées par $[0, \sigma_x^2]^N$. Enfin, quand $\rho = 0$, on a $p = \frac{1}{2}$ dans le modèle BG. Les mises à jour (6.61) de $s[n]$ sont données par

$$s[n]^2 = \min \left\{ 1, \left(\frac{\gamma_n^t - \sigma_n^2}{\sigma_x^2} \right)^+ \right\} \quad (6.65)$$

qui conduit exactement à l'EM SBL [Wipf and Rao, 2004] si $\sigma_x^2 = 1$ et $\sigma_n^2 = 0$.

Concrètement, 14 est lancé pour différentes valeurs de l'hyperparamètre ρ . Les résultats sont utilisés comme initialisation à chaud de l'EM binaire pour le MMAP (13) avec les vraies valeurs des paramètres du modèle. Cette initialisation permet d'éviter que 13 converge trop rapidement vers un mauvais minimum local.

6.4 . Étude expérimentale des EMs

Le signal Bernoulli-Gaussien (\mathbf{s} , \mathbf{r}) est simulé avec les paramètres $p = 0.05$ et $\sigma_x^2 = 1$, et le bruit blanc gaussien est de variance $\sigma_e^2 = 0.01$ (ce qui correspond à un SNR d'entrée théorique d'environ 7 dB). L'opérateur \mathbf{H} utilisé est une sous-matrice issue de l'opérateur direct (*leadfield*) en magnéto-encéphalographie (M/EEG), de taille 272×600 . Cette matrice contient des colonnes hautement corrélées. Elle est représentative de la difficulté des problèmes inverses en M/EEG. L'estimation de \mathbf{s} au sens du MMAP est comparée aux estimations correspondantes $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ telles que dans (6.11), ainsi qu'au classique MAP Joint de \mathbf{s} et \mathbf{x} obtenu en minimisant (6.4). Pour ces méthodes, on utilise un algorithme de descente proximale similaire à l'algorithme d'Iterative Hard Thresholding (IHT) [Blumensath and Davies, 2009] avec redémarrage à chaud. Les comparaisons sont faites selon les métriques suivantes : le taux de Faux Positifs (erreur de Type-I), le taux de Faux Négatifs (erreur de Type-II), le SNR des $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ estimé selon (6.11) et calculé en prenant $SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} \right)$.

Les erreurs de Type-I et de Type-II sont représentées en fonction de la taille du support prédit \mathbf{s} en figures 6.2, 6.3 et 6.4. On observe que la solution du MMAP est de meilleure qualité que celle du JMAP, que ce soit en terme d'erreur de type-I ou II et de SNR (surtout, pour les métriques Type-II et RSB). De plus, l'algorithme se comporte bien pour des opérateurs \mathbf{H} très corrélés. D'autres expérimentations (non montrées ici) montrent que pour des matrices \mathbf{H} gaussiennes, modérément corrélées, les estimateurs du JMAP et du MMAP donnent des résultats similaires. La version Marginale reste plus gourmande en temps de calcul à cause de la présence de l'inverse de la matrice Σ^T dans les algorithmes 13 et 14.

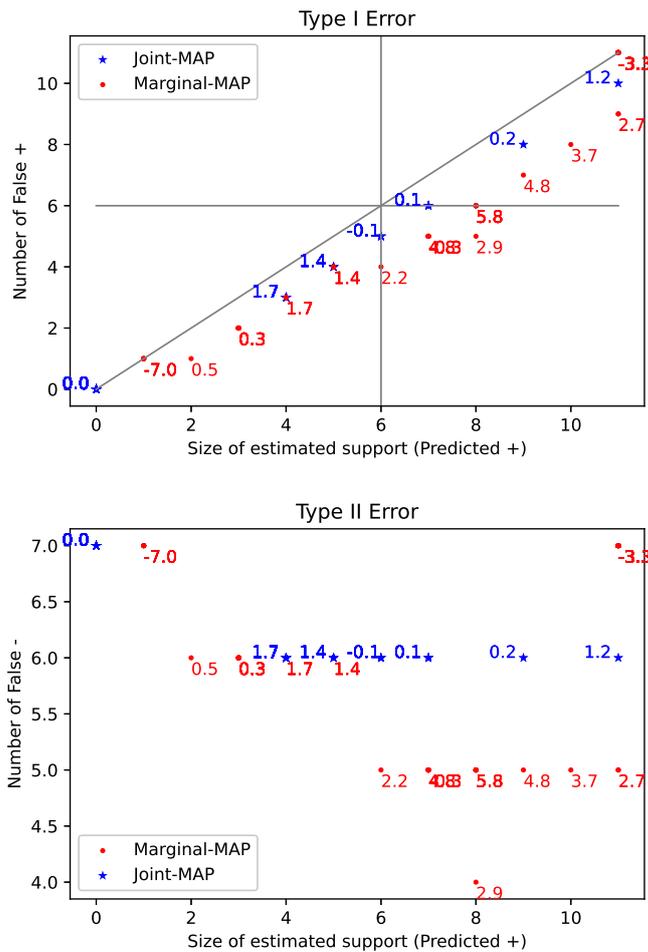


Figure 6.2 – Estimateurs du MAP marginal vs du MAP joint, comparés pour $p = 0.01$ et $\sigma_e^2 = 0.01$. La mesure de SNR des signaux reconstruits x est donnée pour certains points (de même que le score du meilleur SNR atteint).

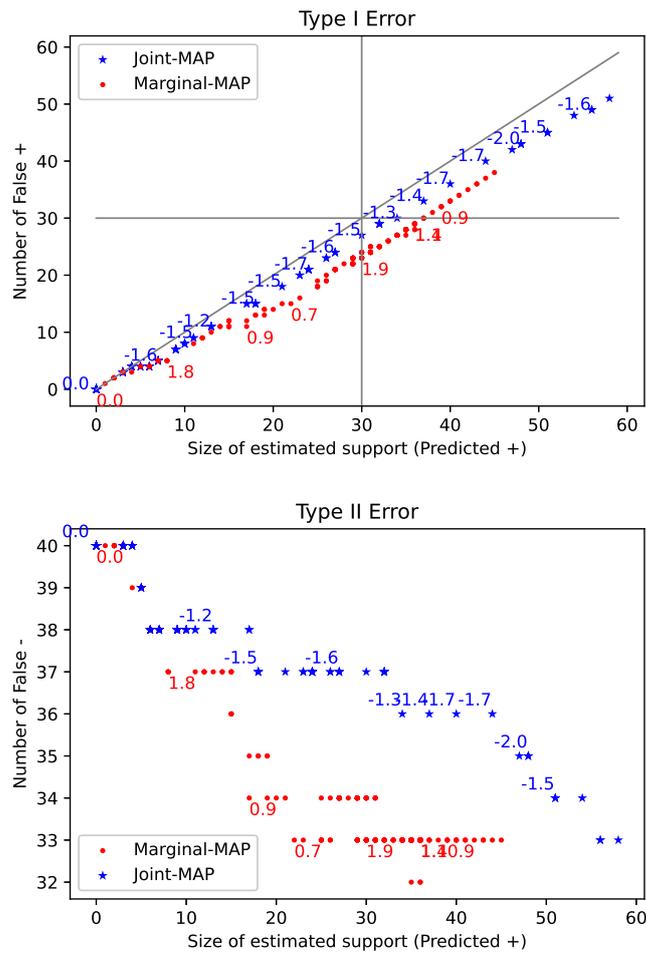


Figure 6.3 – Estimateurs du MAP marginal vs du MAP joint, comparés pour $p = 0.05$ et $\sigma_e^2 = 0.01$. La mesure de SNR des signaux reconstruits x est donnée pour certains points (de même que le score du meilleur SNR atteint).

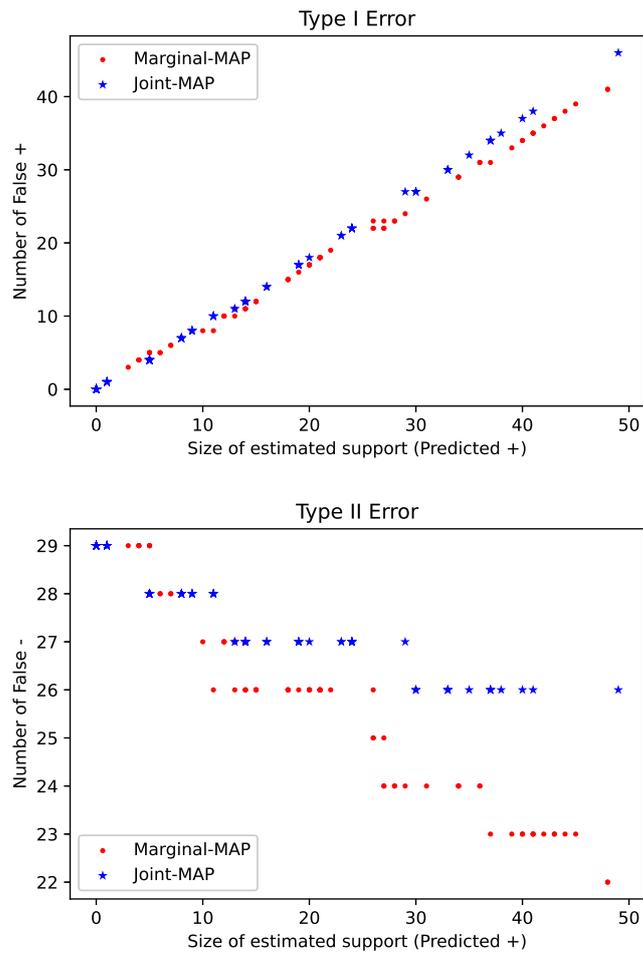


Figure 6.4 – Estimateurs du MAP marginal vs du MAP joint, comparés pour $p = 0.5$ et $\sigma_e^2 = 0.001$. La mesure de SNR des signaux reconstruits \mathbf{x} est donnée pour certains points (de même que le score du meilleur SNR atteint).

Discussion Ce chapitre propose une approche par MMAP pour sélectionner le meilleur support possible, car il s’agit de l’estimateur bayésien pour l’erreur 0–1. Ce problème de sélection de support peut être vu comme un problème de sélection de variables très étudié en statistique [O’Hara and Sillanpää, 2009], aussi connu comme *best subset selection problem* [Hastie et al., 2020]. En classification, ce problème est en général étudié dans un contexte de « prédiction » de la classe de nouvelles données ; ainsi, l’estimation de \mathbf{x} est primordiale. Dans [Hastie et al., 2020], une comparaison exhaustive est faite entre le Lasso et les solutions optimales ℓ_0 en utilisant un solveur MILP venant de [Bourguignon et al., 2015]. Dans ce contexte, les résultats des approches ℓ_0 et Lasso sont similaires. Cependant, la matrice utilisée dans ces simulations n’est pas aussi mal posée que l’opérateur de M/EEG. Notre étude permet d’entamer une réflexion sur les relations existantes entre les minimiseurs du MAP Joint et du MMAP. Nos futurs travaux s’attaqueront à l’impact de la relaxation continue. De plus, une comparaison en profondeur de ces méthodes avec les approches MCMC appliquées aux *a priori BG* [Ge et al., 2011] et les EMVS proposés par [Ročková and George, 2014] (basés sur des mélanges de gaussiennes, et donc s’approchant de \mathbf{z} dans (6.49)). Du point de vue pratique, la méthode sera particularisée au cas de la structure spatio-temporelle des signaux issus de M/EEG [Lim et al., 2017].

6.5 . Conclusion

Nous avons proposé un cadre complet su Spike & Slab qui repose sur un modèle probabiliste pour le support et les amplitudes du signal parcimonieux, dans lequel l’estimation du support est effectuée en optimisant un critère MAP conjoint ou marginal. Alors que le modèle Bernoulli-Gaussien conduit à des problèmes d’optimisation insolubles, nous avons d’abord exploré une procédure itérative sous-optimale basée sur l’algorithme EM. Nous avons en outre introduit une approche de relaxation continue dans laquelle le processus binaire modélisant le support est remplacé par un modèle paramétrique continu. Ce dernier montre que les relaxations couramment utilisées ont des conséquences non triviales sur la distribution a posteriori de la solution. Bien que ce chapitre ne remette pas en question l’efficacité du LASSO ou du CHAMPAGNE, nous montrons qu’ils sont fortement liés. Nous avons ensuite donné des résultats empiriques pour chaque optimiseur de modèle dans des configurations de problèmes inverses classiques, en espérant que cela aidera les praticiens à choisir la bonne relaxation/critère lors de l’optimisation de problèmes parcimonieux. Enfin, l’approche MAP-Marginal apparaît très robuste au choix de l’hyper-paramètre, alors que l’estimation MAP-Joint peut être une bonne alternative si cet hyper-paramètre peut être bien estimé. De plus, nous avons également proposé deux procédures EM pour l’optimisation du critère MMAP.

7 - Conclusion Générale et Perspectives

7.1 . Conclusion de la thèse

Nous avons vu dans la première section de cette thèse qu'il est possible d'utiliser le cadre des algorithmes d'Espérance Minimisation (EM) afin d'estimer les paramètres d'un système où l'on mesure des sources parcimonieuses affectées d'un seul bruit additif blanc gaussien. L'algorithme EM qui, lorsqu'il est initialisé par une méthode des Moments, permet d'offrir une première estimation relativement correcte des paramètres. La connaissance de ces paramètres nous permet alors d'estimer les sources dans un cadre supervisé. De même, on peut envisager de procéder à l'estimation conjointe des sources et des paramètres. Cela conduit alors à un problème d'optimisation sous contrainte dont les solutions sont biaisées.

Dans la deuxième partie de ces travaux, nous avons présenté comment il était possible, à partir de l'introduction d'une variable latente, d'étendre les résultats précédents au cadre général du problème inverse linéaire parcimonieux. On a alors vu que l'utilisation des méthodes jointes comme l'initialisation des méthodes marginales dans un algorithme appelé **LEMUR** donnent les meilleurs résultats en pratique. On observe surtout que les résultats obtenus se comparent en terme de performance avec les approches entièrement supervisées, quand bien même celle proposée ne l'est pas.

Dans la dernière partie, nous avons vu comment l'estimation marginale des supports peut être encadrée par des problèmes d'estimation jointe des supports et des sources pour des valeurs différentes des paramètres. Cet encadrement nous permet de planifier des stratégies d'optimisation tirant avantage de la convexité des approches jointes et de la précision des approches marginales. On donne aussi des interprétations nouvelles de résultats existant dans la perspective de l'estimation de signaux Bernoulli-Gaussiens.

7.2 . Perspectives et travaux futures

Étude des variantes :

Dans un premier temps, la poursuite de ces travaux passe par une étude approfondie des résultats statistiques des variantes proposées dans le Chapitre 5. Au vu des résultats obtenus dans le Chapitre 6, on s'attend à ce que l'estimation en utilisant \mathbf{s} ou (\mathbf{r}, \mathbf{s}) comme variables de sources va conduire à des résultats moins bons. De même nous espérons utiliser des méthodes d'échantillonnage type MCMC afin de situer les points de convergence des méthodes proposées par rapport aux différents extrema du critère que l'on cherche à estimer.

On s'attend alors à avoir des estimations des paramètres moins bonnes en utilisant la variable de support \mathbf{s} comme le modèle est plus contraignant. Cependant, on espère que l'estimation du support soit de meilleure qualité car, dans le cas asymptotique de l'identité $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, on sait que le meilleur estimateur du support (au sens du MAP) sera pour ce choix de variable. Pour ce qui est de l'utilisation de (\mathbf{r}, \mathbf{s}) comme variables de source, on s'attend à des résultats similaires à ceux présentés dans le chapitre 5 en terme d'estimation des paramètres. On pense cependant que la qualité d'estimation des supports sera moins bonne car le seuillage issu de ce choix de variable est très permissif (i.e. il s'agit du seuil le plus faible).

Si l'on aborde la question du critère, on sait que les EMs que nous présentons vont minimiser :

$$-\log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta) \quad \text{ou} \quad -\log p(\mathbf{y}|\mathbf{z}, \theta) \quad (7.1)$$

il serait alors intéressant de comparer ce critère à celui de départ

$$-\log p(\mathbf{y}|\theta) \quad (7.2)$$

l'objectif serait alors de fournir un cadre théorique pour la validité des solutions. On veut, par exemple, montrer qu'un point fixe de LEMUR, est un minimum de $-\log p(\mathbf{y}|\theta)$.

Application à la M/EEG :

Le deuxième axe de poursuite de ses travaux est l'adaptation des méthodes présentées pour une utilisation pratique en M/EEG. Cela nécessite notamment de considérer la structure particulière des données. On peut en effet traiter la dimension temporelle comme un ensemble de mesures indépendantes et appliquer les méthodes à chaque instant, mais il est aussi possible de traiter la parcimonie de chaque source sur une fenêtre de temps. On peut aussi prendre en compte la structure temporelle des activations en considérant un dictionnaire d'ondelettes sur la sphère ou sur graphe. Nous envisageons aussi de traiter

l'information en incluant un *a priori* qui utiliserait des **atlas** c'est à dire des cartographies déjà existantes des surfaces fonctionnelles du cortex. Cela permettrait notamment de faire diminuer la dimension du problème et de gagner ainsi en précision.

Des résultats préliminaires avec les algorithmes EM introduits dans cette thèse, présentés en figure 7.1, montrent des résultats cohérents d'un point de vue neuroscientifique. En effet, les mesures correspondent à un relevé suite à un stimulus auditifs au niveau de l'oreille gauche. Les résultats ont été obtenus en considérant chaque source potentielle comme étant "active" ou "inactive" durant toute l'expérience, i.e. l'algorithme EM travaille sur la norme quadratique temporelle en chaque point.

On observe alors que les sources estimées sont localisées dans une zone qui est cohérente avec celle associée à l'audition. Ce qui nous permet de conforter la vraisemblance des résultats. De plus, phénomène que l'on ne voit pas sur l'image, on trouve des sources symétriquement dans la partie droite du cortex. Cela correspond à un effet "echo" dans l'activité corticale mis en présence d'excitation auditive. On observe aussi que les sources estimées forment deux "U" symétriques au niveau du cortex. Cela s'explique par la présence de sources profondes qui ne sont pas prises en comptes ici et dont seul la résultante sur le cortex est estimée. Tout ces points nous semblent encourageant pour la localisation des colonnes corticales de manière parcimonieuse.

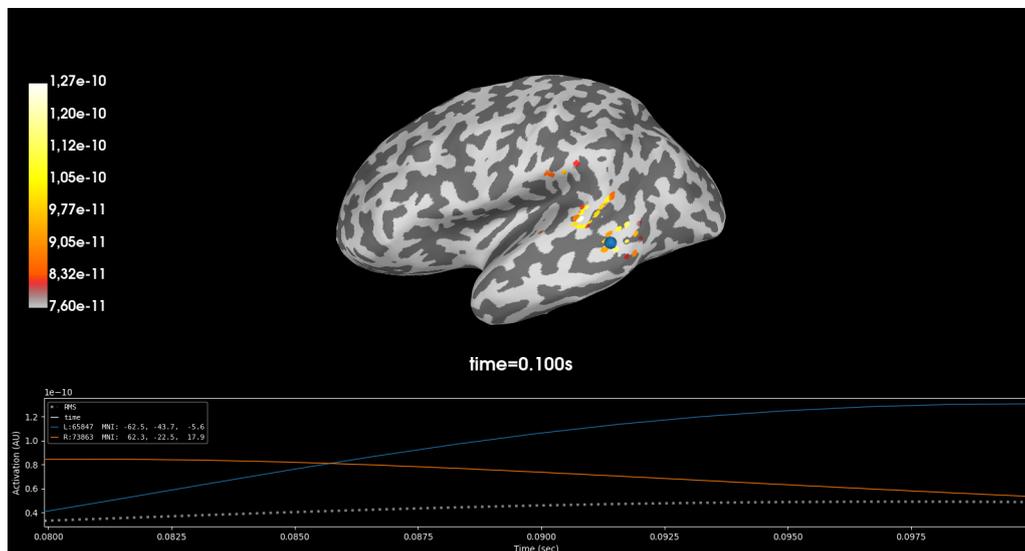


Figure 7.1 – Estimation des colonnes corticales actives pour un potentiel évoqué auditif.

Enfin nous espérons inclure la méthode proposée dans un benchmark de méthodes utilisées en M/EEG afin de pouvoir se confronter, en situation, avec les méthodes existantes. La difficulté ici est de choisir un système d'évaluation

adapté car, en l'absence de "vérité terrain", il est difficile d'évaluer précisément la qualité de localisation de sources cérébrales. Il existe des exemples d'utilisation de sondes (appelées SEEG) qui permettent d'apporter des informations complémentaires à la M/EEG et peuvent ainsi servir de moyen de confirmer ou d'infirmer les résultats. Cependant les relevés de SEEG sont invasifs et donc disponibles en quantités limitées. Tout ceci, nécessite aussi d'accélérer la partie algorithmique afin de rendre la méthode capable de traiter en un temps raisonnable les données pour une utilisation clinique.

Quantification d'incertitude :

Par définition de l'algorithme EM, on est amené à calculer à chaque itération la distribution *a posteriori* de la variable cachée :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \theta) \quad \text{ou} \quad p(\mathbf{z}|\mathbf{y}, \mathbf{x}, \theta) \quad (7.3)$$

Nous pensons que l'ensemble de ces quantités obtenues à chaque itération peut servir à approcher la distribution *a posteriori* des sources :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad (7.4)$$

Ce faisant, nous pourrions obtenir une évaluation de l'incertitude des résultats. On sait par exemple que la distribution de la variable $\mathbf{z}|\mathbf{y}$ est un mélange de 2^N gaussiennes, elle semble cependant plus simple à échantillonner que $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ car celle-ci fait appel à de la parcimonie. Dès lors, on espère être capable au moins de borner l'*a posteriori* des sources comme

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{y})p(\mathbf{z}|\mathbf{y})d\mathbf{z} \quad (7.5)$$

En ce qui concerne l'incertitude sur le support, on imagine se baser sur l'EM développé dans le Chapitre 6 qui travaille en condition supervisée dans un premier temps. On peut alors imaginer les itérations de l'EM comme des échantillons puis tenter d'approximer l'*a posteriori* par des Processus Gaussiens comme dans les méthodes d'approximations variationnelles par exemple.

Bibliographie

- [Barbault et al., 2022] Barbault, P., Kowalski, M., and Soussen, C. (2022). Parameter estimation in sparse inverse problems using Bernoulli-Gaussian prior. In *ICASSP*, pages 5413–5417.
- [Beck and Teboulle, 2009] Beck, A. and Teboulle, M. (2009). A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM journal on imaging sciences*, 2(1) :183–202.
- [Bertrand et al., 2020] Bertrand, Q., Klopfenstein, Q., Blondel, M., Vaiter, S., Gramfort, A., and Salmon, J. (2020). Implicit differentiation of lasso-type models for hyperparameter optimization. In *International Conference on Machine Learning*, pages 810–821. PMLR.
- [Besag, 1994] Besag, J. (1994). Comments on “representations of knowledge in complex systems” by U. Grenander and MI Miller. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 56(591-592) :4.
- [Bilmes et al., 1998] Bilmes, J. A. et al. (1998). A gentle tutorial of the EM algorithm and its application to parameter estimation for Gaussian mixture and hidden Markov models. *International computer science institute*, 4(510) :126.
- [Blumensath and Davies, 2009] Blumensath, T. and Davies, M. E. (2009). Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 27(3) :265–274.
- [Boudineau et al., 2016] Boudineau, M., Carfantan, H., Bourguignon, S., and Bazot, M. (2016). Sampling schemes and parameter estimation for non-linear Bernoulli-Gaussian sparse models. In *2016 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, pages 1–5. IEEE.
- [Bourguignon and Carfantan, 2006] Bourguignon, S. and Carfantan, H. (2006). Spectral analysis of irregularly sampled data using a Bernoulli-Gaussian model with free frequencies. In *2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*, volume 3, pages III–III. IEEE.
- [Bourguignon et al., 2015] Bourguignon, S., Ninin, J., Carfantan, H., and Mongeau, M. (2015). Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming : Formulations and computational performance. *IEEE Trans. Signal Process.*, 64(6) :1405–1419.
- [Brifman et al., 2016] Brifman, A., Romano, Y., and Elad, M. (2016). Turning a denoiser into a super-resolver using plug and play priors. In *2016 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 1404–1408. IEEE.

- [Calvetti et al., 2020] Calvetti, D., Pragliola, M., Somersalo, E., and Strang, A. (2020). Sparse reconstructions from few noisy data : analysis of hierarchical Bayesian models with generalized gamma hyperpriors. *Inverse Problems*, 36(2) :025010.
- [Celeux and Govaert, 1992] Celeux, G. and Govaert, G. (1992). A classification EM algorithm for clustering and two stochastic versions. *Computational statistics & Data analysis*, 14(3) :315–332.
- [Chaâri et al., 2011] Chaâri, L., Pesquet, J.-C., Benazza-Benyahia, A., and Ciuciu, P. (2011). A wavelet-based regularized reconstruction algorithm for SENSE parallel MRI with applications to neuroimaging. *Medical image analysis*, 15(2) :185–201.
- [Chaari et al., 2015] Chaari, L., Toumeret, J.-Y., and Chaux, C. (2015). Sparse signal recovery using a Bernoulli generalized Gaussian prior. In *2015 23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1711–1715. IEEE.
- [Chaari et al., 2016] Chaari, L., Tourneret, J.-Y., Chaux, C., and Batatia, H. (2016). A Hamiltonian Monte Carlo method for non-smooth energy sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(21) :5585–5594.
- [Chambolle and Dossal, 2015] Chambolle, A. and Dossal, C. H. (2015). On the convergence of the iterates of " FISTA ". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 166(3) :25.
- [Champagnat et al., 1996] Champagnat, F., Goussard, Y., and Idier, J. (1996). Unsupervised deconvolution of sparse spike trains using stochastic approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(12) :2988–2998.
- [Chen and Donoho, 1994] Chen, S. and Donoho, D. (1994). Basis pursuit. In *Proceedings of 1994 28th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, volume 1, pages 41–44. IEEE.
- [Chen et al., 2001] Chen, S. S., Donoho, D. L., and Saunders, M. A. (2001). Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM review*, 43(1) :129–159.
- [Chen et al., 2021] Chen, W., Wipf, D., and Rodrigues, M. (2021). Deep learning for linear inverse problems using the plug-and-play priors framework. In *ICASSP 2021-2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 8098–8102. IEEE.
- [Cohen, 1968] Cohen, D. (1968). Magnetoencephalography : evidence of magnetic fields produced by alpha-rhythm currents. *Science*, 161(3843) :784–786.
- [Combettes and Wajs, 2005] Combettes, P. L. and Wajs, V. R. (2005). Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale modeling & simulation*, 4(4) :1168–1200.

- [Daubechies et al., 2004] Daubechies, I., Defrise, M., and De Mol, C. (2004). An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 57(11) :1413–1457.
- [Dempster et al., 1977] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the royal statistical society : series B (methodological)*, 39(1) :1–22.
- [Donoho, 2001] Donoho, D. L. (2001). Sparse components of images and optimal atomic decompositions. *Constructive Approximation*, 17 :353–382.
- [Dorffer et al., 2021] Dorffer, C., Paviet-Salomon, T., Le Chenadec, G., and Drémeau, A. (2021). Modal estimation in underwater acoustics by data-driven structured sparse decompositions. In *2021 29th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 286–290. IEEE.
- [Dreameau et al., 2012] Dreameau, A., Herzet, C., and Daudet, L. (2012). Boltzmann machine and mean-field approximation for structured sparse decompositions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(7) :3425–3438.
- [Eldar, 2008] Eldar, Y. C. (2008). Generalized sure for exponential families : Applications to regularization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(2) :471–481.
- [Figueiredo and Nowak, 2003] Figueiredo, M. A. and Nowak, R. D. (2003). An EM algorithm for wavelet-based image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8) :906–916.
- [Frank and Friedman, 1993] Frank, L. E. and Friedman, J. H. (1993). A statistical view of some chemometrics regression tools. *Technometrics*, 35(2) :109–135.
- [Fu, 1998] Fu, W. J. (1998). Penalized regressions : the bridge versus the lasso. *Journal of computational and graphical statistics*, 7(3) :397–416.
- [Gassiat et al., 1992] Gassiat, E., Monfront, F., and Goussard, Y. (1992). On simultaneous signal estimation and parameter identification using a generalized likelihood approach. *IEEE transactions on information theory*, 38(1) :157–162.
- [Ge et al., 2011] Ge, D., Idier, J., and Le Carpentier, E. (2011). Enhanced sampling schemes for mcmc based blind Bernoulli-Gaussian deconvolution. *Signal Processing*, 91(4) :759–772.
- [Giovannelli and Altmann, 2019] Giovannelli, J.-F. and Altmann, Y. (2019). Segmentation bayésienne d’images constantes par morceaux cas de distorsion non-linéaire, données manquantes et bruit de poisson. In *XXVIIème Colloque francophone de traitement du signal et des images (GRETSI 2019)*.

- [Giryès et al., 2011] Giryès, R., Elad, M., and Eldar, Y. (2011). The projected GSURE for automatic parameter tuning in iterative shrinkage methods. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 30(3) :407–422.
- [Goussard et al., 1990] Goussard, Y., Demoment, G., and Idier, J. (1990). A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains. In *Proc. IEEE ICASSP*, pages 1547–1550.
- [Hadamard, 1902] Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton university bulletin*, pages 49–52.
- [Hashemi et al., 2021] Hashemi, A., Cai, C., Kutyniok, G., Müller, K.-R., Nagarajan, S. S., and Haufe, S. (2021). Unification of sparse Bayesian learning algorithms for electromagnetic brain imaging with the majorization minimization framework. *NeuroImage*, 239 :118309.
- [Hastie et al., 2020] Hastie, T., Tibshirani, R., and Tibshirani, R. (2020). Best subset, forward stepwise or lasso ? analysis and recommendations based on extensive comparisons. *Statistical Science*, 35(4) :579–592.
- [Hastings, 1970] Hastings, W. K. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications.
- [Jiang and Nadarajah, 2019] Jiang, X. and Nadarajah, S. (2019). On characteristic functions of products of two random variables. *Wireless Personal Communications*, 108(2) :1157–1177.
- [Kormylo and Mendel, 1982] Kormylo, J. J. and Mendel, J. M. (1982). Maximum-likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28 :482–488.
- [Kowalski and Rodet, 2011] Kowalski, M. and Rodet, T. (2011). An unsupervised algorithm for hybrid/morphological signal decomposition. In *ICASSP*, pages 4112–4115.
- [Lim et al., 2017] Lim, M., Ales, J. M., Cottureau, B. R., Hastie, T., and Norcia, A. M. (2017). Sparse EEG/MEG source estimation via a group lasso. *PLoS ONE*, 12(6) :e0176835.
- [Loaiza-Ganem and Cunningham, 2019] Loaiza-Ganem, G. and Cunningham, J. P. (2019). The continuous Bernoulli : fixing a pervasive error in variational autoencoders. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 32.
- [Mallat, 1999] Mallat, S. (1999). A wavelet tour of signal processing.
- [Mallat and Zhang, 1993] Mallat, S. G. and Zhang, Z. (1993). Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(12) :3397–3415.
- [Metropolis et al., 1953] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6) :1087–1092.

- [Miller, 2002] Miller, A. (2002). *Subset selection in regression*. CRC Press.
- [Mitchell and Beauchamp, 1988] Mitchell, T. J. and Beauchamp, J. J. (1988). Bayesian variable selection in linear regression. *Journal of the american statistical association*, 83(404) :1023–1032.
- [Mohammad-Djafari, 2012] Mohammad-Djafari, A. (2012). Bayesian approach with prior models which enforce sparsity in signal and image processing. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2012(1) :1–19.
- [Natarajan, 1995] Natarajan, B. K. (1995). Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM journal on computing*, 24(2) :227–234.
- [Owen et al., 2008] Owen, J., Attias, H., Sekihara, K., Nagarajan, S., and Wipf, D. (2008). Estimating the location and orientation of complex, correlated neural activity using MEG. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 21.
- [O’Hara and Sillanpää, 2009] O’Hara, R. B. and Sillanpää, M. J. (2009). A review of Bayesian variable selection methods : What, how and which. *Bayesian Analysis*, 4(1) :85–118.
- [Papoulis and Unnikrishna Pillai, 2002] Papoulis, A. and Unnikrishna Pillai, S. (2002). *Probability, random variables and stochastic processes*.
- [Pati et al., 1993] Pati, Y. C., Rezaifar, R., and Krishnaprasad, P. S. (1993). Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Proceedings of 27th Asilomar conference on signals, systems and computers*, pages 40–44. IEEE.
- [Pilanci et al., 2015] Pilanci, M., Wainwright, M. J., and El Ghaoui, L. (2015). Sparse learning via boolean relaxations. *Mathematical Programming*, 151(1) :63–87.
- [Protter et al., 2010] Protter, M., Yavneh, I., and Elad, M. (2010). Closed-form MMSE estimation for signal denoising under sparse representation modeling over a unitary dictionary. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(7) :3471–3484.
- [Rao et al., 1992] Rao, C. R. et al. (1992). Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Breakthroughs in statistics*, pages 235–247.
- [Robert, 2005] Robert, C. (2005). *Le choix bayésien : Principes et pratique*. Springer Science & Business Media.
- [Ročková and George, 2014] Ročková, V. and George, E. I. (2014). EMVS : The EM approach to bayesian variable selection. *Journal of the American Statistical Association*, 109(506) :828–846.
- [Ročková and George, 2018] Ročková, V. and George, E. I. (2018). The spike-and-slab lasso. *Journal of the American Statistical Association*, 113(521) :431–444.

- [Rodet et al., 2008] Rodet, T., Orioux, F., Giovannelli, J.-F., and Abergel, A. (2008). Data inversion for over-resolved spectral imaging in astronomy. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2(5) :802–811.
- [Sommariva and Sorrentino, 2014] Sommariva, S. and Sorrentino, A. (2014). Sequential Monte Carlo samplers for semi-linear inverse problems and application to magnetoencephalography. *Inverse Problems*, 30(11) :114020.
- [Soussen et al., 2011] Soussen, C., Idier, J., Brie, D., and Duan, J. (2011). From Bernoulli–Gaussian deconvolution to sparse signal restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(10) :4572–4584.
- [Stein, 1981] Stein, C. M. (1981). Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *The Annals of Statistics*, 9(6) :1135 – 1151.
- [Tibshirani, 1996] Tibshirani, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 58(1) :267–288.
- [Tikhonov et al., 1995] Tikhonov, A. N., Goncharsky, A., Stepanov, V. V., and Yagola, A. G. (1995). *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, volume 328. Springer Science & Business Media.
- [Tipping, 2001] Tipping, M. E. (2001). Sparse bayesian learning and the relevance vector machine. *Journal of machine learning research*, 1(Jun) :211–244.
- [Turek et al., 2011] Turek, J. S., Yavneh, I., and Elad, M. (2011). On MMSE and MAP denoising under sparse representation modeling over a unitary dictionary. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(8) :3526–3535.
- [Venkatakrishnan et al., 2013] Venkatakrishnan, S. V., Bouman, C. A., and Wohlberg, B. (2013). Plug-and-play priors for model based reconstruction. In *2013 IEEE global conference on signal and information processing*, pages 945–948. IEEE.
- [Wipf and Rao, 2004] Wipf, D. P. and Rao, B. D. (2004). Sparse Bayesian learning for basis selection. *IEEE Transactions on Signal processing*, 52(8) :2153–2164.
- [Wu, 1983] Wu, C. F. J. (1983). On the Convergence Properties of the EM Algorithm. *The Annals of Statistics*, 11(1) :95 – 103.
- [Yuan and Lin, 2006] Yuan, M. and Lin, Y. (2006). Model selection and estimation in regression with grouped variables. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 68(1) :49–67.
- [Zou, 2006] Zou, H. (2006). The adaptive lasso and its oracle properties. *Journal of the American statistical association*, 101(476) :1418–1429.
- [Zou and Hastie, 2005] Zou, H. and Hastie, T. (2005). Regularization and variable selection via the elastic net. *Journal of the royal statistical society : series B (statistical methodology)*, 67(2) :301–320.