



HAL
open science

Vecteurs cycliques dans certains espaces de fonctions analytiques

Yabreb Mohamed Egueh

► **To cite this version:**

Yabreb Mohamed Egueh. Vecteurs cycliques dans certains espaces de fonctions analytiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bordeaux, 2023. Français. NNT : 2023BORD0261 . tel-04269761

HAL Id: tel-04269761

<https://theses.hal.science/tel-04269761>

Submitted on 3 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Par **MOHAMED EGUEH Yabreb**

Sous la direction de **Karim Kellay et Mohamed Zarrabi**

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES - ANALYSE

Vecteurs cycliques dans certains espaces de fonctions analytiques

Soutenue le 18 octobre 2023

Membres du jury :

| | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------------|--------------------|
| M. Evgueni Abakoumov | Maître de Conférences | Université de Gustave Eiffel | Examineur |
| M. Catalin Badea | Professeur | Université de Lille | Rapporteur |
| M. Alexandre Borichev | Professeur | Université de Aix Marseille | Examineur |
| M. Emmanuel Fricain | Professeur | Université de Lille | Président |
| M. Karim Kellay | Professeur | Université de Bordeaux | Directeur de thèse |
| M. Stanislas Kupin | Professeur | Université de Bordeaux | Examineur |
| Mme Raissy Jasmin | Professeur | Université de Bordeaux | Examinatrice |
| M. El-Hassan Youssfi | Professeur | Université de Aix Marseille | Rapporteur |
| M. Houssein Ahmed | Professeur | Université de Djibouti | Invité |

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier vivement mes directeur de thèse M. Karim Kellay et M. Mohamed Zarrabi. Je suis aussi reconnaissant pour le temps substantiel qu'ils m'ont donné, leurs qualités humaines et scientifiques qu'ils m'ont apporté lors de l'encadrement de ma thèse. Ils m'ont beaucoup appris et ont toujours répondu présents à mes appels. Je leur dois respect et consideration éternels.

Je tiens également à remercier les Professeurs Catalin Badea et El-Hassan Youssfi d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie très chaleureusement les Professeurs Alexandre Borichev, Emmanuel Fricain, Evgueni Abakoumov, Stanislas Kupin, Houssein Ahmed et la Professeure Raissy Jasmin d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse. Je remercie Alexandre Borichev pour ses précieuses remarques.

Je désire aussi remercier mes collègues doctorants Bilel Bensaid, Lotfi Thabouti, Chadi Saba, Theo Untrau, Hayani Mounir et Khaoua Chahdi ainsi que l'ensemble du personnel de l'Institut Mathématiques de Bordeaux. Ils ont toujours été à mon écoute et ont su m'apporter un soutien sans faille.

Je n'oublierai pas de remercier ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ma thèse, en commençant par Dr Ibrahim Robleh Guedi enseignant chercheur à l'université de Djibouti et sa femme Fozia conseillère du ministre du Budget, de m'avoir aidé à obtenir la bourse.

Je saisis également cette occasion pour adresser mes profonds remerciements à ma mère, mes trois frères, ma soeur et ma tendre épouse Hawa Aden Farah pour leurs conseils et leurs présences au cours de ces quatre années de thèse.

Et enfin, je ne peux finir sans remercier tous mes amis Ali Barkad, Sahal Miganeh, Sahal Saad Ali, Liban Ousleyeh, Bouh Abdi, Yacin Elmi, Abdoulrazack Awaleh, Mohamed Youssouf...

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| | 6 |
| 1 Introduction | 9 |
| 2 Ensemble de Carleson, capacité, mesure de Hausdorff et mesures singulières décomposables | 15 |
| 2.1 Définition d'ensemble de Carleson | 15 |
| 2.1.1 Ensemble de Carleson | 15 |
| 2.1.2 Ensemble parfait symétrique de type Cantor | 19 |
| 2.2 Capacité logarithmique et Mesure de Hausdorff | 20 |
| 2.2.1 Capacité logarithmique | 20 |
| 2.2.2 Mesure de Hausdorff | 21 |
| 2.3 Mesures singulières décomposables | 22 |
| 3 Espaces de Hardy, de Bergman et de Dirichlet | 27 |
| 3.1 Espaces de Hardy | 27 |
| 3.1.1 Théorème de factorisation | 28 |
| 3.1.2 Théorème de Beurling | 31 |
| 3.1.3 Théorème de la couronne | 31 |
| 3.2 Espaces de Bergman et cyclicité des fonctions intérieurs singulières | 32 |
| 3.2.1 Espace de Bergman | 32 |
| 3.2.2 Norme équivalente de \mathcal{A}_α^2 | 33 |
| 3.2.3 Fonction intérieure singulière cyclique dans l'espace de Bergman | 34 |
| 3.3 Espace de Dirichlet | 43 |
| 3.3.1 Normes équivalentes de l'espace de Dirichlet | 43 |
| 3.3.2 Limite radiale et tangentielle | 45 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3.3 | Sous-espaces invariants de \mathcal{D} par le Shift | 45 |
| 3.3.4 | Vecteurs cycliques | 46 |
| 4 | Cyclicité dans les espaces de Besov-Dirichlet | 55 |
| 4.1 | Introduction | 55 |
| 4.2 | Injection impliquant l'espace de Besov-Dirichlet | 57 |
| 4.3 | Propriétés des vecteurs cycliques dans les espaces de Besov-Dirichlet | 65 |
| 4.3.1 | Quelques propriétés élémentaires sur les vecteurs cycliques dans les espaces de Besov-Dirichlet | 65 |
| 4.3.2 | Cyclicité lorsque l'ensemble de zéros est réduit à un point | 69 |
| 4.4 | Théorème de la Couronne de Tolokonnikov | 70 |
| 4.5 | Théorème d'Atzmon | 72 |
| 4.6 | Extension du théorème de Brown-Shields | 75 |
| 4.7 | Raffinement du Théorème 4.6.2 | 79 |
| 5 | Cyclicité des fonctions intérieures singulières dans les espaces de Bergman à poids non radial | 85 |
| 5.1 | Introduction | 85 |
| 5.2 | Minoration de la fonction intérieure singulière | 88 |
| 5.3 | Majoration de la fonction intérieure singulière | 93 |
| 5.3.1 | Mesure singulière purement atomique | 93 |
| 5.3.2 | Mesure portée par un ensemble parfait symétrique de rapport constant | 94 |
| 5.4 | Cyclicité des fonctions intérieures singulières | 99 |
| 5.4.1 | Existence de fonction cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ | 99 |
| 5.4.2 | Remarques | 101 |

Notations

\mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels

\mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs

\mathbb{R} l'ensemble des nombres réels

\mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité ouvert

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe

$\text{Hol}(\mathbb{D})$ L'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D}

$[x]$ la partie entière de x

$\text{dist}(z, E)$ la distance d'un point z à l'ensemble E

$H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy du disque

\mathcal{D} l'espace de Dirichlet classique

\mathcal{A}_α^p l'espace de Bergman à poids radial

\mathcal{D}_α^p l'espace de Besov

$[f]_X$ le plus petit sous-espace invariant engendré par f

$|E|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble E

$P[\mu]$ l'intégrale de Poisson de la mesure μ

$H_h(E)$ la mesure de h -Hausdorff d'un ensemble E

$c(E)$ la capacité logarithmique de l'ensemble E

S l'opérateur de décalage

f^* la limite radiale de la fonction de f sur \mathbb{T}

\mathcal{P} l'ensemble de polynômes.

$A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante positive C indépendante de A et de B telle que $A \leq CB$

$A \asymp B$ signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces de Bergman à poids non radial et dans les espaces de Besov-Dirichlet.

On considère un espace de Banach X de fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert \mathbb{D} . On suppose que X est stable par l'opérateur shift S ,

$$Sf(z) = zf(z), \quad f \in X, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Un sous-espace non trivial fermé $\{0\} \neq Y \subsetneq X$ est dit invariant par S si $SY \subset Y$. On désigne par

$$[f]_X = \overline{\text{Span}^X \{z^n f : n \geq 0\}} = \overline{\{pf : p \text{ polynôme}\}}^X, \quad f \in X.$$

L'ensemble $[f]_X$ est le plus petit sous-espace invariant par S fermé engendré par f . On dit que $f \in X$ est un vecteur cyclique lorsque

$$[f]_X = X,$$

ce qui signifie qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|1 - P_n f\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

Le problème de caractérisation de sous-espaces invariants par le shift et l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces de Banach de fonctions holomorphes sur le disque \mathbb{D} ont commencé par les travaux de Beurling [7, 32]

pour l'espace de Hardy et de Carleson pour l'espace de Dirichlet classique [13, 14].

Plus précisément, lorsque X est l'espace de Hardy H^2 , Beurling a démontré que les sous-espaces fermés invariants non triviaux de H^2 sont de la forme θH^2 où θ est une fonction intérieure. En particulier, les fonctions cycliques dans H^2 sont exactement les fonctions extérieures.

L'espace de Dirichlet classique \mathcal{D} est contenu dans l'espace de Hardy H^2 , c'est l'espace de fonctions holomorphes sur \mathbb{D} vérifiant

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) < \infty$$

où dA est la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité \mathbb{D} . Si f est cyclique dans \mathcal{D} , alors f est cyclique dans H^2 et donc f est une fonction extérieure. Dans l'espace de Dirichlet, il existe des fonctions extérieures qui ne sont pas cycliques dans \mathcal{D} , par exemple les fonctions extérieures dont l'ensemble des zéros sur le cercle unité est de capacité logarithmique non nulle, voir [19, Corollary 9.2.5]. Soit $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, l'ensemble de fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ et $\mathcal{C}^n(\overline{\mathbb{D}})$, $n \geq 1$, l'ensemble de fonctions continues et n -fois dérivables sur $\overline{\mathbb{D}}$. On désigne par $\mathcal{A}(\mathbb{D}) = \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ l'algèbre du disque. Pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ extérieure, on désigne par $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f sur le cercle :

$$\mathcal{Z}(f) = \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\}.$$

Brown et Shields ont remarqué dans [12] que $f \in \mathcal{D}$ est cyclique dans \mathcal{D} si f est extérieure et régulière sur le bord alors la capacité logarithmique de \mathcal{Z} est nulle. Ils ont montré également que si $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{D}})$ est une fonction extérieure et si $\mathcal{Z}(f)$ est réduit à un point du cercle \mathbb{T} alors f est cyclique dans \mathcal{D} . Comme corollaire de ce résultat, ils déduisent que si $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{D}})$ est une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f)$ est dénombrable, alors f est cyclique dans \mathcal{D} . Puisque $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{D}})$, alors $\mathcal{Z}(f)$ est nécessairement un ensemble de Carleson, i.e. $\log \text{dist}(\cdot, \mathcal{Z}(f)) \in L^1(\mathbb{T})$. En 1990 dans [12], ils ont conjecturé qu'une fonction de l'espace de Dirichlet extérieure est cyclique dans \mathcal{D} si l'ensemble de ses zéros est de capacité logarithmique nulle. Notons qu'un ensemble dénombrable est de capacité logarithmique nulle.

Lorsque $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f)$ est dénombrable, Hedenmalm et Shiels [26] ont montré qu'elle est cyclique dans

\mathcal{D} . Notons que dans ce cas, $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble fermé puisque f est continue sur le bord mais $\mathcal{Z}(f)$ n'est pas nécessairement un ensemble de Carleson. Ensuite, Richter et Sundberg [42] ont montré que ce résultat reste vrai pour $f \in \mathcal{D}$ une fonction extérieure et dont l'ensemble des zéros de f

$$\underline{\mathcal{Z}}(f) := \{\zeta \in \mathbb{T} : \liminf_{\zeta \rightarrow z} |f(z)| = 0\}$$

est dénombrable.

Brown et Shields ont montré également dans [12] (voir aussi [2]) que si $f, g \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D}$$

et si g est cyclique dans \mathcal{D} alors f est cyclique dans \mathcal{D} .

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces de Besov-Dirichlet. Pour $p \geq 1$ et $\alpha > -1$, l'espace de Besov-Dirichlet \mathcal{D}_α^p est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} avec la norme suivante :

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p = |f(0)|^p + (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

Notons que si $p = 2$ et $\alpha = 1$, l'espace \mathcal{D}_1^2 est l'espace de Hardy H^2 et si $p = 2$ et $\alpha = 0$, l'espace \mathcal{D}_0^2 est l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D} . Dans les autres cas, nous avons les injections suivantes, voir Corollaire 4.2.4 :

- Si $p < \alpha + 1$, alors l'espace H^p s'injecte continûment dans \mathcal{D}_α^p . Ainsi, toute fonction $f \in H^p$ extérieure est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .
- Si $p > \alpha + 2$, alors l'espace \mathcal{D}_α^p s'injecte continûment dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. Ainsi toute fonction cyclique dans \mathcal{D}_α^p est une fonction extérieure et sans zéro sur le bord.

Donc l'étude des vecteurs cycliques se pose ainsi lorsque $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Kellay, Le Manach et Zarrabi dans [31] ont montré que si $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$ et si $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure telle que l'ensemble de zéros de f est dénombrable alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Ce résultat généralise ainsi celui de Hedenmalm-Shields[26] dans le cas de l'espace de Dirichlet classique. Nous retrouvons ce résultat et nous donnerons également une extension du résultat de Brown-Shields [12] et de Richter-Sundberg [42] :

Théorème 1. Soit $p > 1$ et $\alpha > -1$ tels que $1 + \alpha \leq p \leq \alpha + 2$, il existe $N = N(\alpha, p)$ un entier qui ne dépend que de p et de α telle que si $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap A(\mathbb{D})$ avec

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (1.1)$$

alors

$$[g^N]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}.$$

Nous pouvons ainsi déduire lorsque (1.1) est satisfaite pour $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$, si g est cyclique dans \mathcal{D}_α^p alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Lorsque $\alpha = p - 2$, on peut choisir $N(p - 2, p) = 5$.

La preuve de ce résultat est basée sur le Théorème de la couronne de Tolokonnikov [54] dans l'algèbre $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ où l'entier $N(\alpha, \beta)$ apparaît.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces pondérés du type Bergman. Nous nous intéressons plus précisément à la cyclicité des fonctions intérieures singulières.

Soit Λ une fonction continue positive décroissante sur $(0, 1]$, $\Lambda(t) \rightarrow \infty$ et $\Lambda(t) = o(1/t)$ quand $t \rightarrow 0+$ telle que $t\Lambda(t)$ croissante. Soit E un sous-ensemble fermé du cercle \mathbb{T} et soit $\text{dist}(z, E)$ la distance de z à E . On désigne $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$ l'espace de fonctions holomorphes f sur le disque \mathbb{D} telles que

$$\|f\|_{\Lambda, E}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 e^{-\Lambda(\text{dist}(z, E))} dA(z) < +\infty.$$

Une fonction f dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$ est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$ si l'ensemble des fonctions pf avec p un polynôme est dense dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$. Notons que $H^2 \subset \mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$, les fonctions extérieures sont donc cycliques dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$. Le théorème de Beurling nous dit que les fonctions intérieures singulières ne sont pas cycliques dans H^2 mais dans les espaces du type Bergman, il existe des fonctions intérieures singulières cycliques. Si $E = \mathbb{T}$ et si $\Lambda(t) = \Lambda_\alpha(t) = \alpha \log 1/t$ avec $\alpha \geq 0$ on retrouve l'espace de Bergman à poids classique $\mathcal{A}_\alpha^2 = \mathcal{A}_{\Lambda_\alpha, \mathbb{T}}^2$:

$$\mathcal{A}_\alpha^2 := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) \right\}.$$

Korenblum [35] et indépendamment Roberts [45] ont donné une caractérisation complète des fonctions intérieures singulières cycliques dans \mathcal{A}_α^2 . Ils ont montré que la fonction intérieure singulière S_μ associée à la mesure μ finie positive sur \mathbb{T} et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue

$$S_\mu(z) = \exp \left(\frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right), \quad z \in \mathbb{D}$$

est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 si et seulement si pour tout ensemble de Carleson K , on a $\mu(K) = 0$.

Lorsque $E = \{1\}$, Borichev-El-Fallah-Hanine [11] ont étudié la cyclicité de la fonction intérieure singulière associée à la mesure de Dirac en 1 :

$$I(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

dans $\mathcal{A}_{\Lambda, \{1\}}^2$. Ils ont prouvé que I est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, \{1\}}^2$ si et seulement si

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\Lambda(t)}{t}} dt = \infty.$$

En particulier, lorsque E est un ensemble triadique de Cantor et $\Lambda_\alpha(t) = 1/t \log^\alpha(1/t)$, ils ont montré que I est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda_\alpha, E}^2$ si et seulement si

$$\alpha \leq 2/(2 - (\log 2/\log 3)).$$

Dans ce travail, nous allons étudier la cyclicité de fonctions intérieures singulières autre que I . Soit ν une mesure sur le cercle unité, on désigne par ω_ν le module de continuité de la mesure ν donné par

$$\omega_\nu(t) = \sup_{|J| \leq t} \mu(J)$$

Le sup est porté sur tous les arcs J de \mathbb{T} de longueur $|J| \leq t$. Dans la première section, nous donnons une estimation de la fonction intérieure singulière. Une telle estimation permet de montrer la cyclicité de certaines fonctions intérieures singulières

Théorème 2. *Soient μ une mesure finie positive sur \mathbb{T} singulière par rapport à la mesure de Lebesgue et S_μ la fonction intérieure singulière associée à μ :*

$$S_\mu(z) = \exp \left(\frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors

$$|S_\mu(z)| \geq \exp \left\{ -A \frac{(1 - |z|)\omega_\mu(\text{dist}(z, E))}{\text{dist}(z, E)^2} \right\}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.2)$$

où $A = \pi \coth(\pi^2)$ et E est le support de μ .

Notons que $\text{dist}(z, E) \geq 1 - |z|$. Puisque $t \rightarrow \omega_\mu(t)/t$ est une fonction décroissante, on obtient l'estimation suivante

$$|S_\mu(z)| \geq \exp \left\{ -A \frac{\omega_\mu(1 - |z|)}{1 - |z|} \right\} \quad (1.3)$$

On retrouve ainsi l'estimation obtenue par Shapiro [47] (avec une meilleure constante), et on généralise le résultat de Ransford [40] et Esterle [24].

L'estimation radiale de Shapiro a permis dans les espaces de Bergman classique de montrer la cyclicité d'une fonction intérieure singulière dont la mesure singulière associée ne porte pas de masse sur les ensembles de Carleson.

Soit h la fonction déterminante de Hausdorff, et notons H_h la mesure h -Hausdorff du cercle \mathbb{T} . Comme Corollaire, nous obtenons

Théorème 3. *Soit $h(t) = t\Lambda(t)$ croissante. Si $H_h(E) > 0$, alors il existe une fonction intérieure singulière cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$.*

Notre preuve repose essentiellement sur l'estimation de la fonction intérieure singulière.

Chapitre 2

Ensemble de Carleson, capacité, mesure de Hausdorff et mesures singulières décomposables

Dans ce chapitre, on définit les ensembles de Carleson et on donne certaines propriétés et exemples de tels ensembles. On rappelle ensuite les notions de la capacité et de mesure de Hausdorff d'un ensemble fermé sur le cercle unité. Nous donnons également le Théorème de Hausdorff sur l'existence d'un parfait symétrique de mesure de Hausdorff positive et le Théorème de Forstman qui garantit qu'un tel ensemble porte une mesure positive avec un module de continuité contrôlé. On finit ce chapitre avec la définition d'une mesure singulière décomposable introduite par Roberts [45] et quelques propriétés sur cette mesure.

2.1 Définition d'ensemble de Carleson

2.1.1 Ensemble de Carleson

Les ensembles de Carleson, sont les ensembles de zéros de fonctions analytiques sur le disque unité \mathbb{D} et lisses au bord $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, (voir [50, 10], voir Théorème 2.1.3).

Définition 2.1.1. *Un ensemble fermé E du cercle unité \mathbb{T} est dit un ensemble de Carleson si*

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\text{dist}(e^{it}, E)} dt < +\infty \quad (2.1)$$

où $\text{dist}(\zeta, E)$ est la distance d'un point $\zeta \in \mathbb{T}$ à l'ensemble E .

L'ensemble de zéros d'une fonction analytique sur le disque unité ouvert \mathbb{D} et lipschitzienne sur le cercle $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ est un ensemble de Carleson. En effet, soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{D} et lipschitzienne sur \mathbb{T} d'ordre $\alpha > 0$, alors il existe $C_f > 0$ telle que

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq C_f |\zeta - \zeta'|^\alpha, \quad \zeta, \zeta' \in \mathbb{T}. \quad (2.2)$$

Soit

$$\mathcal{Z}(f) = \{\xi \in \mathbb{T} : f(\xi) = 0\},$$

l'ensemble de zéros de f sur le cercle \mathbb{T} . D'après (2.2) si $\zeta' \in \mathcal{Z}(f)$ alors on a

$$|f(\zeta)| \leq C_f \text{dist}(\zeta, \mathcal{Z}(f))^\alpha, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Par le théorème de Fatou $\log |f| \in L^1(\mathbb{T})$, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}} \log \frac{1}{\text{dist}(\zeta, \mathcal{Z}(f))} |d\zeta| < +\infty, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Par la Définition 2.1.1, tout sous-ensemble fermé d'un ensemble de Carleson est aussi un ensemble de Carleson.

Soit E un ensemble fermé du cercle \mathbb{T} , on note par

$$E_t = \{\zeta \in \mathbb{T} : \text{dist}(\zeta, E) \leq t\}$$

le t -voisinage de E et $|E_t|$ sa longueur normalisée. Nous avons la caractérisation des ensembles de Carleson.

Proposition 2.1.2. *Soit E un ensemble fermé du cercle \mathbb{T} alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) E est un ensemble de Carleson,
- (2) E est de mesure nulle et

$$\sum_{n \geq 0} |I_n| \log 1/|I_n| < \infty, \quad (2.3)$$

où $(I_n)_n$ est la suite des composantes connexes de $\mathbb{T} \setminus E$,

(3)

$$\int_0^1 \frac{|E_t|}{t} dt < \infty,$$

Démonstration. Notons d'abord que si E est de mesure positive, alors $\log \text{dist}(\cdot, E) \notin L^1(\mathbb{T})$. Soit $I_n = ((e^{ib_n}; e^{ia_n}))_n$ avec $0 \leq a_n \leq b_n \leq 2\pi$ la suite des arcs complémentaire de E . On pose

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{(\theta - a_n)(b_n - \theta)}{b_n - a_n} & \text{si } \theta \in (b_n; a_n), \\ 0 & \text{si } e^{i\theta} \in E. \end{cases}$$

Notons que

$$\frac{1}{4\pi} \text{dist}(e^{i\theta}, E) \leq \rho(\theta) \leq \frac{1}{2\pi} \text{dist}(e^{i\theta}, E).$$

Donc la condition de Carleson (2.1) est équivalente à

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\rho(\theta)} d\theta < +\infty.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\rho(\theta)} d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \log \frac{1}{\rho(\theta)} d\theta \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{a_n}^{\frac{b_n+a_n}{2}} \log \frac{1}{\theta - a_n} d\theta + \int_{\frac{b_n+a_n}{2}}^{b_n} \log \frac{1}{b_n - \theta} d\theta \right) \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{|I_n|}{2}} \log \frac{1}{t} dt \\ &\asymp \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| \log \frac{1}{|I_n|} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'équivalence entre (1) et (2). Il reste à montrer maintenant l'équivalence entre (2) et (3). Écrivons tout d'abord

$$\sum_{|I_n| \leq t} |I_n| + t \sum_{|I_n| > t} 1 \leq |E_t| \leq \sum_{|I_n| \leq t} |I_n| + 2t \sum_{|I_n| > t} 1.$$

En intégrant sur $[0; 1]$,

$$\int_0^1 \sum_{|I_n| \leq t} \frac{|I_n|}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{|E_t|}{t} dt \leq \int_0^1 \sum_{|I_n| \leq t} \frac{|I_n|}{t} dt + 2 \int_0^1 t \sum_{|I_n| > t} \frac{1}{t} dt.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{|I_n| \leq t} \frac{|I_n|}{t} dt &= \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{|I_n|}{t} \chi_{[|I_n|; 1]}(t) dt \\
&= \sum_{n \geq 0} |I_n| \int_{|I_n|}^1 \frac{1}{t} dt \\
&= \sum_{n \geq 0} |I_n| \log \frac{1}{|I_n|}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t \sum_{|I_n| > t} \frac{1}{t} dt &= \int_0^1 t \sum_{n \geq 0} \chi_{[0, |I_n|]}(t) \frac{1}{t} dt \\
&= \sum_{n \geq 0} \int_0^{|I_n|} dt \\
&= \sum_{n \geq 0} |I_n| = 2\pi.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| \log \frac{1}{|I_n|} \leq \int_0^1 \frac{|E_t|}{t} dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| \log \frac{e}{|I_n|}.$$

D'où l'équivalence entre (2) et (3). □

L'ensemble triadique de Cantor est un ensemble de Carleson. Certains ensembles fermés et dénombrable ne sont pas un ensemble de Carleson. Prenons par exemple $E = \{e^{i\theta_n}\}_{n \geq 1} \cup \{1\}$ avec $\theta_n \rightarrow 0$ tel que $|\theta_{n+1} - \theta_n| = 1/(n \log^2(n))$ alors par la Proposition 2.1.2, E n'est pas un ensemble de Carleson.

On désigne par $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D}) = \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ l'ensemble de fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} de classe \mathcal{C}^∞ sur le cercle unité. Le Théorème suivant est dû à Taylor-Williams [53] :

Théorème 2.1.3 (Taylor-Williams). *Si E est un ensemble de Carleson alors il existe une fonction $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$ telle que E est l'ensemble de zéros de f ainsi que toutes ses dérivées,*

$$f^{(n)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in E, \quad n \geq 0.$$

Ce théorème a été obtenu d'abord par Carleson [13] pour $f \in \mathcal{A}^n(\mathbb{D}) = \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{T})$, pour $n \geq 1$. La fonction construite par Carleson est une fonction extérieure (voir section 3.1.1) donnée par

$$|f(\zeta)| = \text{dist}(\zeta, E)^{n+3} \quad \text{p.p sur } \mathbb{T}.$$

Cette fonction s'annule sur E ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n .

2.1.2 Ensemble parfait symétrique de type Cantor

Nous allons donner des exemples d'ensemble de Carleson du type Cantor. Nous allons décrire brièvement la construction de tels ensembles à partir de trisection du segment $[0, 2\pi]$, voir [30, 14]. La même construction est valable pour un segment quelconque.

Soit $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $0 < \zeta_n < 1/2$, $n \geq 1$. À la première étape, on découpe l'intervalle $[0, 2\pi]$ en trois intervalles respectivement de longueurs égales à $2\pi\zeta_1$, $2\pi(1 - 2\zeta_1)$ et $2\pi\zeta_1$. On enlève l'intervalle ouvert du milieu de longueur $2\pi(1 - 2\zeta_1)$ et on note par E_1 l'union des deux intervalles disjoints obtenus chacun de longueur $2\pi\zeta_1$. L'ensemble E_1 est donc un ensemble fermé de longueur $2 \times 2\pi\zeta_1$. Une telle opération sera dite une dissection de longueur ζ_1 . À la deuxième étape, on applique le même procédé pour chacun des deux intervalles de E_1 . On fait une dissection de longueur ζ_2 pour chaque intervalle de E_1 . On découpe en trois intervalles respectivement de longueurs égales à $2\pi\zeta_1\zeta_2$, $2\pi\zeta_1(1 - 2\zeta_2)$ et $2\pi\zeta_1\zeta_2$ chacun des deux intervalles disjoints de E_1 . On retire les deux intervalles du milieu chacun de longueur $2\pi(1 - 2\zeta_1\zeta_2)$, on obtient ainsi un ensemble E_2 union de quatre intervalles disjoints chacun de longueur $2\pi\zeta_1\zeta_2$ et donc E_2 est de longueur $2^2 \times 2\pi\zeta_1\zeta_2$. À la n -ième étape on répète ce procédé n -fois, on obtient ainsi un ensemble compact E_n de 2^n intervalles fermés disjoints de même longueur $2\pi\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_n$. L'ensemble E

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

est dit ensemble parfait symétrique associé à la suite $(\zeta_n)_{n \geq 1}$. L'ensemble E est de mesure nulle si $|E_n|$, la longueur de E_n tend vers zéro

$$2^n \times 2\pi \prod_{k=0}^n \zeta_k \rightarrow 0.$$

Notons que la longueur des intervalles contigus E est

$$\ell_n := |I_n| = 2\pi \times 2^{n-1} (1 - \zeta_n) \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_k.$$

L'ensemble E construit ci-dessus est un ensemble de Carleson si

$$\sum_{n \geq 0} \ell_n \log \frac{2^n}{\ell_n} < \infty.$$

Si la subdivision est uniforme, c'est-à-dire $\zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_n$, alors on dit que l'ensemble E est un ensemble parfait de rapport constant ζ . En particulier, c'est un ensemble de Carleson. En effet, il suffit de voir que

$$\ell_n = 2\pi(2\zeta)^{n-1} (1 - \zeta).$$

Lorsque $\zeta = 1/3$, l'ensemble E correspond l'ensemble triadique de Cantor et dans ce cas, on a

$$\ell_n = 2\pi \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2.2 Capacité logarithmique et Mesure de Hausdorff

2.2.1 Capacité logarithmique

Soit ν une mesure borélienne positive et finie sur \mathbb{T} alors le potentiel de ν est la fonction $p : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty]$ définie par

$$p(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \log^+ \frac{2}{|\xi - z|} d\nu(z), \quad \xi \in \mathbb{T}$$

où $\log^+(x) := \max\{\log(x), 0\}$.

On définit également l'énergie de ν noté I comme la somme des potentiels :

$$I(\nu) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \log^+ \frac{2}{|\xi - z|} d\nu(\xi) d\nu(z).$$

On peut aussi écrire l'énergie de ν sous cette forme [19] :

$$I(\nu) = \sum_{n \geq 0} \frac{|\hat{\nu}(n)|^2}{1 + n}.$$

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de mesures boréliennes de probabilité sur E un sous-ensemble compact de \mathbb{T} . La capacité logarithmique de E est donnée par [19] :

$$c(E) := 1/\inf\{I(\nu) : \nu \in \mathcal{P}(E)\}.$$

En particulier, $c(E) = 0$ si et seulement s'il n'existe pas de mesure $\nu \in \mathcal{P}(E)$ d'énergie finie $I(\nu) < \infty$. Les ensembles dénombrables ont une capacité logarithmique nulle.

On dit qu'une propriété existe quasi partout lorsque cette propriété existe partout sauf un ensemble de capacité nulle et on écrit "q.p".

Le résultat de Carleson [14] suivant donne une condition sur E_t , le t -voisinage d'un fermé E de \mathbb{T} , qui implique que l'ensemble E soit de capacité logarithmique nulle. Plus précisément :

Théorème 2.2.1. *Si*

$$\int_0^1 \frac{ds}{|E_s|} = \infty,$$

alors $c(E) = 0$.

La condition ci-dessous devient nécessaire lorsque E est un ensemble du type Cantor [14].

Corollaire 2.2.2 (Carleson). *Soit E un ensemble de Cantor associé à la suite $(\zeta_n)_{n \geq 1}$. Alors la capacité logarithmique de E est nulle si et seulement si la série*

$$\sum_{n \geq 0} 2^{-n} \log \frac{1}{\ell_n} = \infty.$$

2.2.2 Mesure de Hausdorff

Soit h une fonction continue, croissante telle que

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{t} = \infty.$$

Une telle fonction est dite fonction déterminante.

On définit la mesure h -Hausdorff d'un sous-ensemble E de \mathbb{T} [30] par

$$H_h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf \sum_{i=0}^{\infty} h(|\Delta_i|) \right]$$

où l'inf est calculé sur tous les recouvrements de E d'arcs $(\Delta_i)_i$ de longueur $|\Delta_i| \leq \delta$. Nous énonçons maintenant deux théorèmes sur la mesure de Hausdorff en relation avec l'ensemble parfait symétrique, voir [30].

Théorème 2.2.3 (Hausdorff). *Soit h la fonction déterminante de Hausdorff strictement concave. Il existe un ensemble parfait symétrique E tel que*

$$0 < H_h(E) < \infty.$$

Lorsque $h(t) = t^\alpha$ avec $0 < \alpha \leq 1$, on notera par $H^\alpha(E)$ la h -mesure de Hausdorff de E de dimension α , voir [30, 31]. Lorsque E est un ensemble parfait symétrique de rapport constant ζ , on a

$$\alpha = \log(2)/\log(1/\zeta).$$

Soit ν une mesure positive et finie. On note ω_ν le module de continuité de ν défini par

$$\omega_\nu(r) = \sup\{\nu(I) : I \text{ un arc de } \mathbb{T} \text{ et } |I| < r\}.$$

Théorème 2.2.4 (Frostman). *Soit E un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} . Si $H_h(E) > 0$, alors il existe une mesure positive ν portée par E telle que*

$$\omega_\nu(t) = O(h(t)).$$

Si $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)/t = \infty$, nous avons $|E| = 0$. Ainsi, la mesure ν est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, voir [30].

Nous terminons cette section par le résultat de Joel Shapiro [48] :

Théorème 2.2.5. *Soit h la fonction déterminante de Hausdorff strictement concave telle que $h(t)/t$ est strictement décroissante. Alors pour tout ensemble E de Carleson, $H_h(E) = 0$ si et seulement si*

$$\int_0^1 \frac{dt}{h(t)} = +\infty.$$

2.3 Mesures singulières décomposables

Pour toute suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers positifs, nous associons

$$D[(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}] = n_1^{-\frac{2\alpha}{3}} + \sum_{i \geq 2} \frac{n_1^{\frac{\alpha}{3}} \times \cdots \times n_{i-1}^{\frac{\alpha}{3}}}{n_i^{\frac{2\alpha}{3}}}$$

où $\alpha > 0$.

Définition 2.3.1. Une mesure positive μ sur \mathbb{T} est dite décomposable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite de mesures positives $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{T} et une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers positifs telles que :

- (1) $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mu_i$
- (2) Il existe $c > 0$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le module de continuité de μ vérifie

$$\omega_\mu \left(\frac{1}{n_i} \right) \leq c \frac{\log(n_i)}{n_i}.$$

- (3) $D[(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}] < \epsilon$.

Dans cette section, nous montrons que si μ n'est pas une mesure singulière décomposable alors μ est portée par un ensemble de Carleson E , ce résultat a été démontré par Roberts (voir [50, 45]). D'abord, nous allons introduire un outil fondamental dû à James Roberts [50].

Définition 2.3.2. Soit μ une mesure positive sur \mathbb{T} et $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_n\}$ une partition de \mathbb{T} formée de n arcs fermés de mêmes longueurs. On dit que

$$\begin{cases} I_i & \text{est léger si } \mu(I_i) \leq \frac{c \log(n)}{2n}, \\ I_i & \text{est lourd si } \mu(I_i) > \frac{c \log(n)}{2n}. \end{cases}$$

pour un certain $c > 0$. La mesure μ_1 définie pour tout borélien E de I_i par

$$\mu_1(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{si } I_i \text{ est léger} \\ \frac{c\mu(E) \log(n)}{2\mu(I_i) n} & \text{si } I_i \text{ est lourd.} \end{cases}$$

est appelée \mathcal{P} -quadrillage de μ .

Remarque 2.3.3. (1) La mesure μ_1 vérifie les propriétés suivantes

(a) $\mu_1 \leq \mu$ et le support de $\mu - \mu_1$ est contenu dans la réunion des arcs lourds.

(b) $\mu_1(I_i) = \frac{c \log(n)}{2n}$ si I_i est lourd.

(c) $\omega_{\mu_1} \left(\frac{1}{n_1} \right) \leq c \frac{\log(n_1)}{n_1}$

(2) On peut supposer que $c = 1$. Il suffit de considérer la mesure μ/c .

Lemme 2.3.4. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers positifs telle que :

(1) n_i divise n_{i+1} .

(2) $2 \log(n_i) \leq \log(n_{i+1}) \leq 4 \log(n_i)$ pour tout i .

(3) $D[(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}] < \epsilon$.

Démonstration. Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ un entier non nul fixé. Prenons $n_2 = 2^{k_1} n_1$ où $k_1 = \max\{s \in \mathbb{N} : \log(2^s n_1) \leq 4 \log(n_1)\}$. Il est clair que n_1 divise n_2 et $\log(n_2) \leq 4 \log(n_1)$. Si $\log(n_2) < 2 \log(n_1)$ alors

$$\log(2^{k_1+1} n_1) = \log(2n_2) \leq 2 \log(n_2) < 4 \log(n_1)$$

ceci contredit la définition de k_1 . On construit ainsi une suite d'entiers positifs $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant (1) et (2). Pour obtenir la dernière assertion, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{i \geq 2} \frac{n_1^{\frac{\alpha}{3}} \times \cdots \times n_{i-1}^{\frac{\alpha}{3}}}{n_i^{\frac{2\alpha}{3}}}$$

converge. Pour cela, on pose

$$a_i = \frac{n_1^{\frac{\alpha}{3}} \times \cdots \times n_{i-1}^{\frac{\alpha}{3}}}{n_i^{\frac{2\alpha}{3}}}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{a_{i+1}}{a_i} &= \frac{n_i^\alpha}{n_{i+1}^{\frac{2\alpha}{3}}} \\ &= \exp \left\{ \alpha \log(n_i) - \frac{2\alpha}{3} \log(n_{i+1}) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{3} \log(n_i) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{3} \log(n_1) \right\} = n_1^{-\frac{\alpha}{3}} < 1 \end{aligned}$$

donc la série ci-dessus converge. Puisque la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante alors $\lim_{i \rightarrow +\infty} \log(n_i) = +\infty$. Donc il existe un entier $i_0 > 0$ tel que

$$n_{i_0}^{-\frac{2\alpha}{3}} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i \geq i_0+1} \frac{n_1^{\frac{\alpha}{3}} \times \cdots \times n_{i-1}^{\frac{\alpha}{3}}}{n_i^{\frac{2\alpha}{3}}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'où la suite $(n_i)_{i \geq i_0}$ vérifie les trois assertions. □

Nous sommes en mesure d'annoncer le Théorème de Roberts [50]

Théorème 2.3.5. *Soit μ une mesure positive sur le cercle \mathbb{T} . On suppose que μ n'est pas décomposable alors il existe un ensemble de Carleson E tel que $\mu(E) > 0$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par le lemme 2.3.4, il existe une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers positifs vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout i , n_i divise n_{i+1}
- (2) Pour tout i , $2 \log(n_i) \leq \log(n_{i+1}) \leq 4 \log(n_i)$
- (3) $D[(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}] < \epsilon$.

On considère $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de partitions du cercle \mathbb{T} où chaque \mathcal{P}_i est formée par n_i arcs fermés de mêmes longueurs et \mathcal{P}_{i+1} raffine \mathcal{P}_i . Soit

$$\begin{aligned} \mu_1 & \text{ la mesure } \mathcal{P}_1 - \text{quadrillage de } \mu \\ \mu_2 & \text{ la mesure } \mathcal{P}_2 - \text{quadrillage de } \mu - \mu_1 \\ & \vdots \\ \mu_{i+1} & \text{ la mesure } \mathcal{P}_{i+1} - \text{quadrillage de } \mu - (\mu_1 + \dots + \mu_i). \end{aligned}$$

On pose $\nu = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mu_i$, il est évident que $\nu \leq \mu$ et d'après l'assertion (3) de la remarque 2.3.3 pour tout i ,

$$\omega_{\mu_i} \left(\frac{1}{n_i} \right) \leq c \frac{\log(n_i)}{n_i}.$$

Puisque μ n'est pas décomposable, nous pouvons supposer que $\mu \neq \nu$. Soit $K := \bigcap_i H_i$ où H_i est la réunion des arcs lourds de \mathcal{P}_i relativement à la mesure $\mu - (\mu_1 + \dots + \mu_i)$. Il est évident que $(H_i)_i$ est une suite décroissante de fermés et que $\text{supp}(\mu - (\mu_1 + \dots + \mu_i)) \subset H_i$ pour tout i , donc K est un

fermé du cercle contenant $\text{supp}(\mu - \nu)$ et $|K| = \lim_{i \rightarrow \infty} |H_i|$. Il s'ensuit d'une part que $\mu \neq \nu$ entraîne $\mu(K) > 0$ et d'autre part, l'inégalité suivante

$$\mu(\mathbb{T}) \geq \mu_i(\mathbb{T}) \geq \mu_i(H_i) = \frac{1}{2}|H_i| \log(n_i)$$

entraîne que $|K| = 0$. Montrons maintenant que K est un ensemble de Carleson. Soit

$$L_i = \bigcup I$$

où I est un arc léger de \mathcal{P}_{i+1} contenu dans H_i . On pose

$$K_0 = \mathbb{T} \setminus \bigcap_i L_i.$$

Il est évident que K_0 est un fermé contenant K et que $K_0 \setminus K$ est l'ensemble des extrémités de deux arcs légers adjacents qui est dénombrable donc $|K_0| = 0$. Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 2} |L_i| \log(n_i) &\leq \sum_{i \geq 2} |H_{i-1}| \log(n_i) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} |H_i| \log(n_{i+1}) \\ &\leq 4 \sum_{i \geq 1} |H_i| \log(n_i) \\ &\leq 8 \sum_{i \geq 1} \mu_i(\mathbb{T}) \\ &\leq 8\mu(\mathbb{T}) < \infty \end{aligned}$$

cela implique que K_0 est un ensemble de Carleson et par conséquent, K l'est aussi (puisque tout sous-ensemble fermé d'un ensemble de Carleson est Carleson).

□

Chapitre 3

Espaces de Hardy, de Bergman et de Dirichlet

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques propriétés connues sur ces espaces classiques de Hardy, de Bergman et de Dirichlet. Nous donnons aussi la minoration de Shapiro de la fonction intérieure singulière en terme du module de continuité de la mesure singulière associée. Ceci dans le but de montrer le théorème de Roberts-Korenblum qui donne une caractérisation complète des fonctions intérieures singulières cycliques dans l'espace de Bergman. On fournit également la preuve du Théorème de Brown-Shields sur le principe de subordination des vecteurs cycliques dans l'espace de Dirichlet.

3.1 Espaces de Hardy

Dans cette partie, nous allons définir les espaces de Hardy et donner certaines propriétés sur ces espaces, (voir [16, 25, 32]).

L'espace de Hardy H^p , $0 < p < \infty$ défini sur le disque unité \mathbb{D} est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} , noté $\text{Hol}(\mathbb{D})$, muni de la norme :

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right).$$

L'espace de Hardy des fonctions holomorphes bornées sur \mathbb{D} , noté H^∞ est muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

On note \mathcal{N} la classe de Nevanlinna [16], il s'agit l'ensemble de fonctions holomorphes sur le disque \mathbb{D} telles que

$$\sup_{0 \leq r \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

où $\log^+(X) := \max\{\log(X), 0\}$. On désigne \mathcal{N}^+ la classe de Smirnov, c'est l'ensemble de fonctions analytiques $f \in \mathcal{N}$ de la classe de Nevanlinna telle que

$$\sup_{r < 1} \int_{\mathbb{T}} \ln^+ |f(rz)| |d\zeta| = \int_{\mathbb{T}} \ln^+ |f^*(\zeta)| |d\zeta|.$$

Notons que pour $0 < s < p < \infty$, on a

$$H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset \mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}.$$

3.1.1 Théorème de factorisation

Lorsque $f \in \mathcal{N}$, par le théorème de Fatou la limite radiale

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$$

existe presque tout sur le cercle unité \mathbb{T} et $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

En fait, toute fonction f de la classe de Nevanlinna \mathcal{N} admet des limites non tangentielles [16] :

$$f^*(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \mathcal{S}_{\zeta, C}}} f(z)$$

pour presque partout $\zeta \in \mathbb{T}$ où $\mathcal{S}_{\zeta, C}$ est l'angle de Stolz ;

$$\mathcal{S}_{\zeta, C} = \{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| \leq C(1 - |z|)\}$$

avec $C > 1$.

Avant d'énoncer le théorème de factorisation pour les fonctions de la classe de Nevanlinna, nous rappellerons les notions suivantes :

— Soit $f \in \mathcal{N}$. On dit que f est une fonction extérieure, s'il existe ϕ une fonction positive sur le cercle \mathbb{T} telle que $\log \phi \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \phi(e^{it}) dt \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons

$$|f^*(e^{it})| = \phi(e^{it}) \quad \text{presque partout sur } \mathbb{T}.$$

Ainsi, la fonction extérieure f est complètement déterminée par son module sur \mathbb{T} .

- Une fonction intérieure $\theta \in H^\infty$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{D} telle que

$$|\theta^*(e^{it})| = 1 \quad \text{presque partout sur } \mathbb{T}.$$

- Le produit de Blaschke B est défini par :

$$B(z) = z^k \prod_{n \geq 1} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, \quad z \in \mathbb{D}$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ vérifiant la condition de Blaschke

$$\sum_{n \geq 0} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

- Et S_ν la fonction intérieure singulière associée à la mesure ν singulière positive et finie sur \mathbb{T} :

$$S_\nu(z) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t) \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons $|B^*(e^{it})| = 1$ et $|S^*(e^{it})| = 1$ presque partout sur \mathbb{T} . Et toute fonction intérieure φ peut s'écrire comme produit d'une fonction intérieure singulière et d'un produit de Blaschke :

$$\theta = B \times S.$$

Une fonction f de la classe de Nevanlinna se factorise de la manière suivante :

$$f = B \times \frac{S_{\nu_1}}{S_{\nu_2}} \times F$$

où B le produit de Blaschke, S_{ν_1}, S_{ν_2} les fonctions intérieures singulières associées respectivement aux mesures singulières positives ν_1 et ν_2 sur \mathbb{T} et F une fonction extérieure.

Concernant la classe de Smirnov, rappelons que $f \in \mathcal{N}^+$ si et seulement si pour $\varphi, \phi \in H^\infty$ telle que ϕ est une fonction extérieure,

$$f = \frac{\varphi}{\phi}.$$

On identifie l'espace de Hardy H^2 au sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ défini par

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \forall n < 0 \right\}$$

avec $\widehat{f}(n)$ le n -ième coefficient de Fourier de f donné par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \bar{\xi}^n |d\xi|.$$

L'espace $H^2(\mathbb{T})$ est muni du produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$:

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \overline{g(\xi)} |d\xi|.$$

De ce fait, on écrit toujours H^2 . Notons que si $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \in H^2$, on a

$$f = B \times S_\nu \times F$$

où B le produit de Blaschke, S_ν la fonction intérieure singulière associée à la mesure ν singulière positive sur \mathbb{T} et F une fonction extérieure. De plus, $|F^*| = |f^*|$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Ainsi,

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n \geq 1} |\widehat{f^*}(n)|^2.$$

Rappelons finalement que H^2 admet un noyau reproduisant

$$k_w(z) = 1/(1 - \bar{w}z), \quad (w, z) \in \mathbb{D}^2.$$

Ainsi,

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} |d\zeta|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Et si on désigne par $dA(z)$ la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbb{D} , nous avons l'identité de Littlewood-Paley

$$\|f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|^2} dA(z). \quad (3.1)$$

3.1.2 Théorème de Beurling

Beurling [7] a donné une caractérisation complète de sous-espace invariant de l'espace de Hardy par le shift, l'opérateur de décalage. Plus précisément, soit $X \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} . On suppose que l'opérateur shift S défini par

$$\begin{aligned} S &: X \rightarrow X \\ f &\mapsto Sf \end{aligned}$$

avec $Sf(z) = zf(z)$, est borné sur X . Pour $f \in X$, on désigne par

$$[f]_X = \overline{\text{Span}\{z^n f, n \in \mathbb{N}\}}^X = \overline{\{pf, p \text{ polynôme}\}}^X,$$

le plus petit sous-espace invariant engendré par f . On dit que $f \in X$ est un vecteur cyclique si $[f]_X = X$. Puisque les polynômes sont denses dans X , il existe une suite de polynôme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|1 - P_n f\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Lorsque $X = H^2$, Beurling a démontré le théorème suivant pour les sous-espaces fermés invariants de l'espace H^2 par le Shift S [7, 16, 39] :

Théorème 3.1.1 (Beurling). *Les sous-espaces fermés invariants non triviaux de H^2 sont de la forme θH^2 où θ est une fonction intérieure.*

En particulier, les fonctions cycliques sont exactement les fonctions extérieures. D'une manière générale, c'est compliqué de décrire les fonctions cycliques pour le shift dans d'autres espaces de Banach de fonctions holomorphes, autres que l'espace de Hardy, par exemple dans l'espace de Dirichlet, il existe des fonctions extérieures qui ne sont pas cycliques alors que dans l'espace de Bergman, il existe des fonctions intérieures qui sont cycliques.

3.1.3 Théorème de la couronne

Nous terminons enfin cette section par le théorème de la couronne de Carleson [32] sur l'algèbre H^∞ :

Théorème 3.1.2 (Carleson). *Soit $f_1, f_2 \in H^\infty$ telles que*

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} \{|f_1(z)| + |f_2(z)|\} > \delta > 0$$

alors il existe deux fonctions $g_1, g_2 \in H^\infty$ telles que

$$\begin{cases} f_1(z)g_1(z) + f_2(z)g_2(z) = 1, & z \in \mathbb{D} \\ \|g_i\|_\infty \leq \delta^{-A}, & i \in \{1, 2\} \end{cases} \quad (3.2)$$

pour une certaine constante $A > 2$.

3.2 Espaces de Bergman et cyclicité des fonctions intérieures singulières

3.2.1 Espace de Bergman

Soit $\alpha > -1$ et soit

$$dA_\alpha(z) = (1 + \alpha)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z), \quad z \in \mathbb{D}$$

où $dA(z)$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité \mathbb{D} . Soit $p \geq 1$, l'espace de Bergman \mathcal{A}_α^p est l'espace de fonctions holomorphes sur le disque \mathbb{D} telles que

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty.$$

Nous avons [27, Proposition 1.11]

$$f \in \mathcal{A}_\alpha^p \iff (1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha). \quad (3.3)$$

En particulier lorsque $n = 1$, la fonction f est dans l'espace de Besov-Dirichlet $\mathcal{D}_{p+\alpha}^p$. Pour $p \geq 1$ et $\alpha > -1$, l'espace de Besov \mathcal{D}_α^p est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} telles que :

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p dA_\alpha(z).$$

La cyclicité dans l'espace de Besov-Dirichlet sera l'objet du chapitre (3). Dans cette section, nous allons nous intéresser à la cyclicité dans \mathcal{A}_α^2 , et plus particulièrement celle des fonctions intérieures singulières.

3.2.2 Norme équivalente de \mathcal{A}_α^2

Nous allons donner une autre expression de la norme en terme des coefficients de Taylor lorsque $p = 2$. Pour cela, nous avons besoin le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit $\alpha > -1$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha r^n dr \asymp \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-r)^\alpha r^n dr &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-r)^{1-(1-\alpha)} r^n dr + \int_0^{1-\frac{1}{n}} (1-r)^\alpha r^n dr \\ &\leq n^{1-\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{n}} (1-r) r^n dr + n^{-\alpha} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dr \\ &\leq n^{1-\alpha} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + n^{-1-\alpha} \\ &\lesssim \frac{1}{n^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-r)^\alpha r^n dr &\geq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-r)^\alpha r^n dr \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (1-r)^\alpha dr \\ &\gtrsim \frac{1}{n^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

□

En utilisant ce Lemme 3.2.1, on obtient une autre expression équivalente de la norme de l'espace \mathcal{A}_α^2 :

Proposition 3.2.2. *Soit $\alpha > -1$. L'espace de Bergman \mathcal{A}_α^2 est l'ensemble de fonction $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ telles que*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{(1+n)^{\alpha+1}} < \infty. \quad (3.4)$$

Démonstration. L'égalité de Parseval et le Lemme 3.2.1 nous donnent

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 &= (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= (1 + \alpha) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{in\theta} \right|^2 (1 - r^2)^\alpha \frac{r d\theta dr}{\pi} \\
&= 2(1 + \alpha) \int_0^1 \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} (1 - r^2)^\alpha r dr \\
&\asymp \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{(1 + n)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

□

Pour d'autres propriétés de l'espace de Bergman, voir [50, 45, 35].

3.2.3 Fonction intérieure singulière cyclique dans l'espace de Bergman

Cette partie est consacrée à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces de Bergman \mathcal{A}_α^2 . Il est clair que l'ensemble des multiplicateurs \mathcal{A}_α^2 est H^∞ , pour tout $g \in H^\infty$ et $f \in \mathcal{A}_\alpha^2$ on a

$$\|fg\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq \|g\|_\infty \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}.$$

Rappelons aussi que

$$[f]_{\mathcal{A}_\alpha^2} = \overline{\text{Span}\{z^n f, n \in \mathbb{N}\}}^{\mathcal{A}_\alpha^2} = \overline{\{pf, p \text{ polynôme}\}}^{\mathcal{A}_\alpha^2}$$

est le plus petit sous-espace E invariant fermé engendré par f et vérifiant $S(E) \subset E$. La fonction $f \in \mathcal{A}_\alpha^2$ est dite un vecteur cyclique dans \mathcal{A}_α^2 si

$$[f]_{\mathcal{A}_\alpha^2} = \mathcal{A}_\alpha^2.$$

Puisque les polynômes appartiennent à \mathcal{A}_α^2 , si $f \in \mathcal{A}_\alpha^2$ alors il existe une suite de polynôme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|1 - P_n f\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

Notons que l'espace de Hardy $H^2 \subset \mathcal{A}_\alpha^2$, donc les fonctions extérieures sont cycliques dans \mathcal{A}_α^2 . Il existe également des fonctions intérieures cycliques dans

\mathcal{A}_α^2 , voir [50, 45, 35]. Nous allons donner dans cette partie la caractérisation complète des fonctions intérieures singulières qui sont cycliques dans l'espace de Bergman \mathcal{A}_α^2 . Cette caractérisation porte sur la mesure singulière associée. Nous avons besoin les résultats suivants.

Lemme 3.2.3. *Soit $\alpha > -1$. Si $f \in H^\infty$ et $f^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha^2$, alors f est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 .*

Démonstration. Puisque les polynômes sont denses dans \mathcal{A}_α^2 , il existe une suite de polynôme $(P_n)_n$ et $f^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha^2$ telles que

$$\|P_n - f^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 \rightarrow 0.$$

On a ainsi

$$\|P_n f - 1\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 \leq \|f\|_\infty \|P_n - f^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 \rightarrow 0.$$

□

Lemme 3.2.4. *Soit θ une fonction intérieure. Si θ_0 divise θ , alors $[\theta]_{\mathcal{A}_\alpha^2} \subset [\theta_0]_{\mathcal{A}_\alpha^2}$.*

Démonstration. Si θ_0 divise θ , on a $\theta = \theta_0 \theta_1$ avec θ_1 une fonction intérieure. Soit P_n la somme partielle de la série de Taylor de θ_1 alors $P_n \rightarrow \theta_1$ dans \mathcal{A}_α^2 . On a ainsi

$$\|P_n \theta_0 - \theta\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 = \|P_n \theta_0 - \theta_0 \theta_1\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 \leq \|\theta_0\|_\infty \|P_n - \theta_1\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 \rightarrow 0.$$

□

Remarque 3.2.5. *Soit S_ν une fonction intérieure singulière. Il est clair que $[S_{2\nu}]_{\mathcal{A}_\alpha^2} \subset [S_\nu]_{\mathcal{A}_\alpha^2}$. D'autre part si S_ν est cyclique alors $S_{2\nu}$ est aussi cyclique. En effet, s'il existe P_n un polynôme tel que $\|1 - P_n S_\nu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \rightarrow 0$ alors $\|S_\nu - P_n S_{2\nu}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq \|S_\nu\|_\infty \|1 - P_n S_\nu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \rightarrow 0$.*

Nous allons tout d'abord démontrer l'estimation de Shapiro de la fonction intérieure singulière [47, 50] :

Théorème 3.2.6. *Soit ν une mesure singulière positive et soit ω_ν son module de continuité. Alors pour $\frac{1}{4} \leq r < 1$ et $|z| = r$, on a*

$$|S_\nu(z)| \geq \exp \left\{ \frac{-9\omega_\nu(1-r)}{1-r} \right\}.$$

En particulier, si $\omega_\nu(t) = O(t \log 1/t)(t \rightarrow 0)$, alors

$$|S_\nu(z)| \geq (1 - |z|)^{-9C}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (3.5)$$

où C est une constante positive.

Démonstration. On fixe $\frac{1}{4} \leq r < 1$ et on choisit un entier n positif tel que $(n+1)^{-1} \leq 1-r \leq n^{-1}$. Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit l'arc fermé I_k de \mathbb{T} par

$$I_k = \left\{ t \in [\theta - \pi, \theta + \pi[: \frac{2\pi k}{n+1} \leq t - \theta < \frac{2\pi(k+1)}{n+1} \right\}.$$

donc la longueur normalisée de I_k est $|I_k| = (n+1)^{-1}$. On a,

$$P[\nu](re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) d\nu(t)$$

où

$$P_r(t - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2}.$$

Pour $r \geq \frac{1}{2}$ et $t \in I_k$,

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2 &= (1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{t - \theta}{2}\right) \\ &\geq (1 - r)^2 + 4r \frac{1}{\pi^2} (\theta - t)^2 \\ &\geq (1 - r)^2 + 8 \left(\frac{k}{n+1}\right)^2. \end{aligned}$$

Puisque $(n+1)^{-1} \leq 1-r \leq n^{-1}$, on a pour tout $t \in I_k$

$$\begin{aligned} P_r(t - \theta) &\leq \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 8\left(\frac{k}{n+1}\right)^2} \\ &\leq \frac{2}{(1 - r)\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)}. \end{aligned}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
P[\nu](re^{i\theta}) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_k} P_r(t - \theta) d\nu(t) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\nu(I_k)}{(1-r)(1 + \frac{k^2}{4})} \\
&\leq \frac{2\omega_\nu(1-r)}{1-r} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{4}}.
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{4}} \leq 1 + \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} dx = 1 + \pi < 4, 5.$$

Donc

$$P[\nu](re^{i\theta}) \leq \frac{9\omega_\nu(1-r)}{1-r}.$$

et

$$\begin{aligned}
|S_\nu(z)| &= \left| \exp \left(\frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t) \right) \right| \\
&= \exp \left(-P[\nu](re^{i\theta}) \right) \\
&\geq \exp \left\{ -9 \frac{\omega_\nu(1-r)}{1-r} \right\}.
\end{aligned}$$

Puisque $\omega_\nu(t) \leq Ct \log 1/t$, on a

$$|S_\nu(z)| \geq (1-r)^{-9C}.$$

□

Grâce à l'estimation de Shapiro [50], nous donnons deux preuves pour le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.7. *Si $\omega_\nu(t) = O(t \log 1/t)$ alors S_ν est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 .*

La première preuve découle le Lemme 3.2.3.

Démonstration. Puisque $\omega_\nu(t) = O(t \log 1/t)$, d'après le Théorème 3.2.6 il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|S_\nu(z)| \geq (1-r)^{-9C}.$$

Soit $a > 0$ telle que $\alpha - 18aC > -1$. Grâce à l'inégalité (3.5), on a

$$\begin{aligned} \|S_{a\nu}^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 &= (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |S_{a\nu}^{-1}(z)|^2 (1 - r^2)^\alpha dA(z) \\ &\leq (1 + \alpha) \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{\alpha - 18aC} \frac{r dr d\theta}{\pi} < \infty. \end{aligned}$$

Donc $S_{a\nu}^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha^2$ et par le Lemme 3.2.3, $S_{a\nu}$ est cyclique. La Remarque 3.2.5 nous permet de conclure que S_ν est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 . \square

La deuxième preuve du corollaire 3.2.7 repose essentiellement sur le Théorème de la couronne de Carleson 3.1.2.

Démonstration. On pose

$$C = \frac{\alpha}{27A} \quad \text{et} \quad N = \max(2, 4^{1/9C})$$

où A est la constante du Théorème de la couronne de Carleson.

Si $|z| \leq 1 - n^{-1}$, le Théorème 3.2.6 nous donne

$$|S_\nu(z)| \geq n^{-9C}$$

et si $1 - \frac{1}{n} \leq |z| < 1$, on a pour tout $n \geq N$

$$|z^n| \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq n^{-9C}.$$

Par conséquent,

$$|S_\nu(z)| + |z^n| \geq n^{-9C}.$$

On applique le Théorème de la couronne avec $f_1 = S_\nu$ et $f_2 = z^n$, il existe donc $g_1, g_2 \in H^\infty$ telles que

$$\begin{cases} g_1(z)S_\nu(z) + g_2(z)z^n = 1, & z \in \mathbb{D} \\ \|g_i\|_\infty \leq n^{9AC}, & i \in \{1; 2\}. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \|1 - g_1 S_\nu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} &= \|g_2 z^n\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \\ &\leq \|g_2\|_\infty \|z^n\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \\ &\leq n^{-\alpha} n^{9AC} \\ &\leq n^{-2\alpha/3} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

\square

Remarque 3.2.8. Dans [48], J. Shapiro a montré que tout ensemble de Carleson est de h -mesure de Hausdorff nulle si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{dt}{h(t)} = +\infty.$$

Dans notre cas, $h(t) = t \log 1/t$. Pour tout ensemble de Carleson E , on a

$$H_h(E) = 0.$$

Et par le Théorème de Frostman 2.2.4, E ne peut porter de mesure dont le module de continuité

$$\omega_\nu(t) = O(t \log 1/t).$$

Nous avons le résultat suivant sur la continuité de la distance.

Proposition 3.2.9. On considère μ_n une suite croissante de mesures singulières positives qui converge vers μ alors pour tout $f \in \mathcal{A}_\alpha^2$,

$$\text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_{\mu_n}]_{\mathcal{A}_\alpha^2}) \rightarrow \text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2})$$

Démonstration. Puisque $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu$, d'après le Lemme 3.2.4 on a les inclusions suivantes

$$[S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2} \subset \dots \subset [S_{\mu_2}]_{\mathcal{A}_\alpha^2} \subset [S_{\mu_1}]_{\mathcal{A}_\alpha^2}$$

donc la suite $\text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_{\mu_n}]_{\mathcal{A}_\alpha^2})$ est une suite croissante et bornée par $\text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2})$. On choisit une suite de polynômes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|f - p_n S_{\mu_n}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} - \text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_{\mu_n}]_{\mathcal{A}_\alpha^2}) \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|f - p_n S_\mu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} &= \|f - f S_{\mu - \mu_n} + f S_{\mu - \mu_n} - p_n S_\mu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \\ &\leq \|f(1 - S_{\mu - \mu_n})\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} + \|S_{\mu - \mu_n}\|_\infty \|f - p_n S_{\mu_n}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, $\|f(1 - S_{\mu - \mu_n})\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \rightarrow 0$, on a donc finalement

$$\text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_{\mu_n}]_{\mathcal{A}_\alpha^2}) \rightarrow \text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(f, [S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2}).$$

□

Soit $\alpha > -1$, notons que chaque fonction $g \in \mathcal{C}^{(m)}$, avec $2m - \alpha + 1 > 1$ génère une fonctionnelle continue sur \mathcal{A}_α^2 . En effet, si $g \in \mathcal{C}^{(m)}(\mathbb{T})$ avec $2m - \alpha + 1 > 1$, on a

$$|\widehat{g}(n)| = o((1 + |n|)^{-m})(n \rightarrow +\infty).$$

Soit la fonctionnelle λ_g définie sur \mathcal{A}_α^2 par

$$\lambda_g(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{\widehat{g}(n)}, \quad f = \sum_n a_n z^n \in \mathcal{A}_\alpha^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\lambda_g(f)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(1+n)^{\frac{\alpha+1}{2}}} (1+n)^{\frac{\alpha+1}{2}} \overline{\widehat{g}(n)} \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(1+n)^{\alpha+1}} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{\alpha+1} |\widehat{g}(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1+n)^{2m-\alpha-1}} \\ &\leq c(\alpha, m) \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}. \end{aligned}$$

Korenblum [35] et indépendamment Roberts [45] ont donné une caractérisation complète des fonctions intérieures singulières cycliques dans \mathcal{A}_α^2 .

Théorème 3.2.10 (Roberts-Korenblum). *S_μ est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 si et seulement si pour tout ensemble de Carleson K , on a $\mu(K) = 0$.*

Démonstration. " \implies " On suppose que K est un ensemble de Carleson et que μ est une mesure singulière positive sur \mathbb{T} avec $\mu(K) > 0$. On écrit $\mu = \nu + \sigma$ où ν est une mesure singulière positive portée par K et σ une mesure singulière positive sur \mathbb{T} . Alors $S_\mu = S_\nu S_\sigma$. Par le lemme 3.2.4, $[S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2} \subset [S_\nu]_{\mathcal{A}_\alpha^2}$. Donc on peut supposer que le support de μ est portée par K .

Nous allons montrer qu'il existe une fonctionnelle linéaire continue non triviale λ_g comme ci-dessus qui s'annule sur $[S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2}$ c'est-à-dire $([S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2})^\perp \neq \emptyset$.

Par le Théorème de Taylor-William 2.1.3, il existe une fonction extérieure $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ non identiquement nulle sur K telle que pour tout $n \leq 2m$

$$\phi^{(n)}(e^{it}) = o(\text{dist}(e^{it}; K)^{2m-n}).$$

On définit

$$g(e^{it}) = \begin{cases} \overline{e^{it}\phi(e^{it})}S_\mu(e^{it}) & \text{si } e^{it} \in \mathbb{T} \setminus K, \\ 0 & \text{si } e^{it} \in K. \end{cases}$$

La formule de Leibniz montre que g est m fois différentiable sur \mathbb{T} et donc définit une fonctionnelle linéaire bornée λ_g dans \mathcal{A}_α^2 . Pour $f \in H^\infty$, on peut écrire :

$$\lambda_g(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt.$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_g(z^n S_\mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} S_\mu(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} S_\mu(e^{it})e^{it}\phi(e^{it})\overline{S_\mu(e^{it})}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\phi(e^{it})dt \\ &= \widehat{\phi}(-(n+1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda_g \equiv 0$ sur $[S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2}$. Montrons maintenant que λ_g n'est pas trivial. Supposons le contraire. Soit

$$h(\zeta) = \phi(\zeta)\overline{S_\mu(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Notons que $h \in L^\infty(\mathbb{T})$ et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 = \lambda_g(z^n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int}\overline{g(e^{it})}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\phi(e^{it})\overline{S_\mu(e^{it})}dt \\ &= \widehat{h}(-n-1). \end{aligned}$$

Donc $h \in L^\infty(\mathbb{T})$ avec les coefficients de Fourier $\widehat{h}(-n+1) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors $h \in H^\infty$ et $\phi = S_\mu h$ presque partout sur \mathbb{T} . Donc $\phi = S_\mu h$ sur \mathbb{D} . Mais cela contredit le fait que ϕ est une fonction extérieure. Ainsi λ_g n'est pas trivial et S_μ n'est pas cyclique dans \mathcal{A}_α^2 .

” \Leftarrow ” Soit K un ensemble de Carleson et soit μ une mesure singulière positive sur \mathbb{T} telle que $\mu(K) = 0$. Alors par la proposition 2.3.5, μ est décomposable

(1) Soit

$$\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i.$$

Alors

$$S_\mu = S_{\mu_1 + \dots + \mu_k}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|1 - gS_\mu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq D[(n_i)_i] := n_1^{-\frac{2\alpha}{3}} + \sum_{i \geq 2} \frac{n_1^{\frac{\alpha}{3}} \times \dots \times n_{i-1}^{\frac{\alpha}{3}}}{n_i^{\frac{2\alpha}{3}}}$$

Pour $k = 1$, le théorème de la couronne de Carleson 3.1.2 nous donne

$$\|1 - g_1 S_{\mu_1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq n^{-2\alpha/3}.$$

Supposons que la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 1$ alors il existe une fonction $g \in H^\infty$ telle que

$$\|1 - gS_{\mu_2 + \dots + \mu_{k+1}}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq D[(n_2, \dots, n_{k+1})].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|1 - g_1 g S_\mu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} &= \|1 - gS_{\mu_1 + \dots + \mu_{k+1}} - g_1 S_{\mu_1} + g_1 S_{\mu_1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \\ &= \|(g_1 S_{\mu_1})(1 - gS_{\mu_1 + \dots + \mu_{k+1}}) + (1 - g_1 S_{\mu_1})\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \\ &\leq \|g_1 S_{\mu_1}\|_\infty \|1 - gS_{\mu_1 + \dots + \mu_{k+1}}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} + \|1 - g_1 S_{\mu_1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \\ &\leq n^{\alpha/3} D[(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})] + n^{-2\alpha/3} \\ &= D[(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})]. \end{aligned}$$

(2) Soit

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i.$$

On pose $\nu_k = \sum_{i=0}^k \mu_i$. Donc ν_k converge vers μ . Grâce à 3.2.9, on a

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(1, [S_\mu]_{\mathcal{A}_\alpha^2}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathcal{A}_\alpha^2}(1, [S_{\nu_k}]_{\mathcal{A}_\alpha^2}) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} D[(n_1, n_2, \dots, n_k)] \\ &= D[(n_1, n_2, \dots)]. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.3.4, cela implique que

$$\|1 - gS_\mu\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq D[(n_i)_i] \rightarrow 0$$

pour tout $n_i \geq N$. Ce qui termine la preuve. \square

3.3 Espace de Dirichlet

3.3.1 Normes équivalentes de l'espace de Dirichlet

Pour $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, on définit l'intégrale de Dirichlet [19] de f par :

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z)$$

On appelle espace de Dirichlet classique [19], l'espace de fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert vérifiant

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}(f) < \infty.$$

Proposition 3.3.1. *Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ alors*

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2.$$

Démonstration. Par la formule de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \left| \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \right|^2 dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \geq 1} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right|^2 r d\theta dr \\ &= \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2. \end{aligned}$$

\square

Pour tout $f \in \mathcal{D}$, on voit facilement que

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 \asymp \|f'\|_{\mathcal{A}_0^2}^2 + |f(0)|^2. \quad (3.6)$$

Il existe une formule pour $\mathcal{D}(f)$ exprimée uniquement en fonction de la limite radiale f^* . Le théorème est dû à Douglas [18] :

Théorème 3.3.2 (Formule de Douglas). *Soit $f \in H^2$ alors*

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{|f^*(\xi) - f^*(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^2} |d\xi||d\eta|$$

Pour faire la démonstration de ce théorème, nous avons besoin le lemme suivant sur les fonctions de l'espace $L^2(\mathbb{T})$. Pour $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\widehat{\varphi}(n)$ le n -ième coefficient de Fourier de φ .

Lemme 3.3.3. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ alors*

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^2} |d\xi||d\eta| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |\widehat{\varphi}(n)|^2.$$

Démonstration. En posant $\lambda = e^{i(s+t)}$ et $\zeta = e^{it}$, on obtient

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^2} d\xi d\eta = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi(e^{i(s+t)}) - \varphi(e^{it})|^2}{|e^{is} - 1|^2} dt ds.$$

La formule de Parseval appliquée à la fonction $\zeta \rightarrow \varphi(e^{is}\zeta) - \varphi(\zeta)$ nous donne

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i(s+t)}) - \varphi(e^{it})|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2 |e^{ins} - 1|^2.$$

Et pour tout $n \neq 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|e^{ins} - 1|^2}{|e^{is} - 1|^2} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + e^{is} + \dots + e^{i(n-1)s}|^2 ds = |n|.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi(e^{i(s+t)}) - \varphi(e^{it})|^2}{|e^{is} - 1|^2} dt ds = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |\widehat{\varphi}(n)|^2.$$

□

Démonstration. On applique le Lemme 3.3.3 avec $\varphi = f^*$. Notons que si $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \in H^2$, alors $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{|f^*(\xi) - f^*(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^2} |d\xi||d\eta| \\ &= \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2. \end{aligned}$$

□

3.3.2 Limite radiale et tangentielle

Puisque $\mathcal{D} \subset H^2$, toute fonction $f \in \mathcal{D}$ admet une limite radiale presque partout sur \mathbb{T} . Nous avons un résultat plus précis de Beurling [19] sur les limites radiales des fonctions de l'espace de Dirichlet :

Théorème 3.3.4. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors la limite radiale*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$$

existe quasi partout sur $\mathbb{T} \setminus E$ avec $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble de capacité logarithmique nulle.

Nous avons aussi le résultat de Nagel-Shapiro-Rudin [37] sur la limite tangentielle d'une fonction de l'espace de Dirichlet. Ce résultat montre que le domaine de point de contact sur le bord d'une fonction de l'espace de Dirichlet est beaucoup plus tangent que celui des fonctions de l'espace de Hardy. Plus précisément :

Théorème 3.3.5. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors*

$$f^*(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega_{\zeta, C}}} f(z)$$

pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$ où

$$\Omega_{\zeta, C} = \left\{ z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| \leq C \left(\log \frac{1}{1 - |z|} \right)^{-1} \right\}$$

avec $C > 1$.

3.3.3 Sous-espaces invariants de \mathcal{D} par le Shift

Soit $[f]_{\mathcal{D}}$ le plus petit sous-espace invariant engendré par $f \in \mathcal{D}$. Richter a donné l'analogie du théorème de Beurling 3.1.1 pour l'espace de Dirichlet harmonique [19]. Avant de l'énoncer, nous aurons besoin de quelques notions. Soit μ une mesure borélienne positive sur le cercle \mathbb{T} et soit P_{μ} le noyau de Poisson associé à μ

$$P_{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\xi|^2} d\mu(\xi).$$

On pose

$$\mathcal{D}_\mu(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 P_\mu(z) dA(z).$$

L'espace de Dirichlet harmonique [19] est donné par

$$\mathcal{D}_\mu = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{\mathcal{D}_\mu}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}_\mu(f) < \infty \right\}.$$

On peut démontrer comme la formule de Douglas que si $f \in \mathcal{D}_\mu$ alors

$$\mathcal{D}_\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{|f^*(\xi) - f^*(\eta)|}{|\xi - \eta|^2} |d\eta| d\mu(\xi).$$

Si $d\mu(\xi) = dm(\xi) = |d\xi|/2\pi$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle, alors \mathcal{D}_μ est l'espace de Dirichlet classique.

Le produit scalaire associé est décrit comme suit

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_\mu} = \langle f, g \rangle_{H^2} + \int_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{g'(z)} P_\mu(z) dA(z).$$

On dit que ϕ est une fonction extrémale de \mathcal{D}_μ si

$$\|\phi\|_{\mathcal{D}_\mu} = 1 \quad \text{et} \quad \langle \phi, z^n \phi \rangle_{\mathcal{D}_\mu} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Nous avons le théorème de Richter-Sundberg [42] qui donne une caractérisation complète de sous-espace invariant de l'espace de Dirichlet harmonique par le shift. Ce théorème est l'analogue du théorème de Beurling dans le cas de l'espace de Hardy, où les fonctions extrémales sont les fonctions intérieures. Il est difficile de décrire les fonctions extrémales de l'espace de Dirichlet harmonique. Le Théorème ci-dessous a été obtenu par Richter dans le cas de l'espace de Dirichlet classique. Plus précisément,

Théorème 3.3.6. *Les sous-espaces fermés invariants non triviaux par le shift sont de la forme $\phi \mathcal{D}_{\mu_\phi}$ où ϕ une fonction extrémale de \mathcal{D}_μ et $d\mu_\phi(\xi) = |\phi(\xi)|^2 dm(\xi)$.*

3.3.4 Vecteurs cycliques

Rappelons que $[f]_{\mathcal{D}}$ désigne le plus petit sous-espace invariant engendré par $f \in \mathcal{D}$. On dit que $f \in \mathcal{D}$ est un vecteur cyclique dans \mathcal{D} si $[f]_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.

Puisque $\mathcal{D} \subset H^2$, si f est cyclique dans \mathcal{D} alors f est cyclique dans H^2 et donc f est une fonction extérieure. Mais il existe des fonctions extérieures qui ne sont pas cycliques dans \mathcal{D} , ce sont les fonctions extérieures dont l'ensemble des zéros sur le cercle a une capacité logarithmique strictement positive [19]. Soit $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ l'ensemble de fonctions continues sur le disque unité fermé et $\mathcal{A}(\mathbb{D}) = \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ l'algèbre du disque. Pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ extérieure, on désigne par $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f sur le cercle,

$$\mathcal{Z}(f) = \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\}.$$

Lorsque la capacité logarithmique d'un ensemble E fermé du cercle est nulle, il existe une fonction $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que f s'annule sur E et f cyclique dans \mathcal{D} , voir [19]. Soit $\mathcal{C}^n(\overline{\mathbb{D}})$, $n \geq 1$, l'ensemble de fonctions continues et n -fois dérivables sur le disque unité fermé. Brown et Shields [12] ont montré que si $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{D}})$ est une fonction extérieure et si $\mathcal{Z}(f)$ est réduit à un point, alors f est cyclique dans \mathcal{D} . Lorsque $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f)$ est dénombrable, Hedenmalm et Shields [26] ont montré qu'elle est cyclique dans \mathcal{D} . La conjecture de Brown-Shields [12] énonce que $f \in \mathcal{D}$ est cyclique dans \mathcal{D} si et seulement si f est extérieure et la capacité logarithmique de l'ensemble de zéros de f sur le cercle unité est nulle. Dans [12], Brown et Shields ont montré également si $f, g \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ vérifient $|g(z)| \leq |f(z)|$ sur le disque unité ouvert alors f est cyclique dans \mathcal{D} si g est cyclique dans \mathcal{D} . Pour démontrer cela, on désigne $M(\mathcal{D})$ le multiplicateur de \mathcal{D} défini par

$$M(\mathcal{D}) = \left\{ \varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \varphi f \in \mathcal{D}, \forall f \in \mathcal{D} \right\}.$$

Commençons par un lemme sur $\varphi \in M(\mathcal{D})$.

Lemme 3.3.7. *Soit $\varphi \in M(\mathcal{D})$. Alors l'opérateur de multiplication*

$$\begin{array}{ccc} M_\varphi & : & \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ & & f \mapsto \varphi f \end{array}$$

est bornée sur \mathcal{D} et

$$|\varphi(z)| \leq \|M_\varphi\| \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

En particulier, φ est bornée.

Démonstration. La bornitude de l'opérateur de multiplication découle du théorème de graphe fermé. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on note λ_z la fonction d'évaluation au point z . Alors

$$f(z) = \langle f, \lambda_z \rangle, \quad f \in \mathcal{D}, z \in \mathbb{D}.$$

Pour $f \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(z)f(z)| &= |\langle M_\varphi f, \lambda_z \rangle| \\ &\leq \|M_\varphi\| \|f\|_{\mathcal{D}} \|\lambda_z\|. \end{aligned}$$

Ainsi, $|\varphi(z)| \leq \|M_\varphi\|$.

□

Remarque 3.3.8. (1) Pour tout $f \in \mathcal{D}$, $M(\mathcal{D})f \subset [f]_{\mathcal{D}}$.
(2) $\mathcal{D} \cap H^\infty$ est une algèbre de Banach.

Avant de fournir la preuve du résultat de Brown-Shields, quelques lemmes sont nécessaires.

Lemme 3.3.9. Soit $t \in]0; 1[$. Alors pour tout $r \in [0; 1[$,

$$\int_t^1 \frac{1}{1-rt} \log \frac{1-rt}{1-r} dr \leq \log(2).$$

Démonstration. Soit $t \in]0; 1[$. Alors pour tout $r \in [0; 1[$,

$$\frac{1}{1-t^2} \leq \frac{1}{1-rt} \leq \frac{1}{1-t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_t^1 \frac{1}{1-rt} \log \frac{1-rt}{1-r} dr &\leq \frac{1}{1-t} \int_t^1 \log \frac{1-t^2}{1-r} dr \\ &= \frac{1}{1-t} \left[-(1-r) \log \frac{1-t^2}{1-r} + 1 \right]_t^1 \\ &= \log(1+t) \leq \log(2). \end{aligned}$$

□

Et dans [12], nous avons

Lemme 3.3.10. Soit $f, g \in \mathcal{D}$. Soit $t \in [0, 1[$, on note $\Delta := \mathbb{D} \setminus t\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : t < |z| < 1\}$ et on pose $g_t(z) = g(tz)$. Alors

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{\Delta} |f(z) - f_t(z)|^2 |g'_t(z)|^2 dA(z) = 0. \quad (3.7)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, 1[$ et $z \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(z) - f_t(z)|^2 &= |f(z) - f(tz)|^2 \\ &= \left| \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n) z^n - \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n) t^n z^n \right|^2 \\ &= \left| \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n) (n+1)^{1/2} (n+1)^{-1/2} (1-t^n) z^n \right|^2 \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \sum_{n \geq 1} \frac{(1-t^n)^2 |z|^{2n}}{n+1} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \sum_{n \geq 1} \frac{(1-t^n) |z|^n}{n} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2 (\log(1-|z|) - \log(1-t|z|)). \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1[$, on a $g'_t(z) = t g'(tz)$ et $|g'_t(z)| \leq |g'(tz)|$. On pose

$$a(r) = \int_0^{2\pi} |g'(r e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Si $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, grâce à l'égalité de Parseval, on a

$$a(r) = 2\pi \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 n^2 r^{2(n-1)}$$

donc $a(r)$ une fonction croissante sur $[0, 1[$ et on a

$$\frac{1}{2}(1-r)a(r) = a(r) \int_r^1 s ds \leq \int_r^1 a(s) s ds \quad (3.8)$$

$$= \int_r^1 \int_0^{2\pi} |g'(s e^{i\theta})|^2 s d\theta ds \quad (3.9)$$

$$\leq \pi \|g'\|_{\mathcal{A}_0^2}^2. \quad (3.10)$$

D'après (3.8) et (3.3.9), pour t fixé on a

$$\begin{aligned}
& \int_t^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f_t(re^{i\theta})|^2 |g'_t(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\
& \leq \int_t^1 \int_0^{2\pi} \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \log \frac{1-tr}{1-r} |g'_t(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \\
& \leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \int_t^1 a(tr) \log \frac{1-tr}{1-r} dr \\
& \leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \int_t^1 (1-tr)a(tr) \frac{1}{1-tr} \log \frac{1-tr}{1-r} dr \\
& \leq 2\pi \log 2 \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \|g'\|_{\mathcal{A}_0^2}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\Delta} |f(re^{i\theta}) - f_t(re^{i\theta})|^2 |g'_t(re^{i\theta})|^2 dA(z) \leq 2 \log 2 \|f\|_{\mathcal{D}}^2 \|g'\|_{\mathcal{A}_0^2}^2. \quad (3.11)$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit un polynôme p tel que $\|f-p\|_{\mathcal{D}} < \epsilon$ et on pose $h = f-p$ et $h_t = f_t - p_t$ alors

$$\int_t^1 \int_0^{2\pi} |f(z) - f_t(z)|^2 |g'_t(z)|^2 dz dt \leq A + B$$

où

$$A = \int_{\Delta} |p(z) - p_t(z)|^2 |g'_t(z)|^2 dA(z) \quad \text{et} \quad B = \int_{\Delta} |h(z) - h_t(z)|^2 |g'_t(z)|^2 dA(z).$$

On utilise l'inégalité (3.11) pour A et B . Donc,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 1} \int_t^1 \int_0^{2\pi} |f(z) - f_t(z)|^2 |g'_t(z)|^2 dz dt \leq 5\epsilon^2 \log 2 \|g'\|_{\mathcal{A}_0^2}^2$$

□

Maintenant, nous présentons le résultat de Brown-Shields pour l'espace de Dirichlet classique [12] :

Théorème 3.3.11. [Brown-Shields] Soit $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D} \cap H^\infty$ telles que

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D} \quad (3.12)$$

alors $[g^2]_{\mathcal{D}} \subset [f]_{\mathcal{D}}$. En particulier, si g^2 est cyclique dans \mathcal{D} alors f est cyclique dans \mathcal{D} .

Démonstration. Posons $g_t(z) = g(tz)$ et $f_t(z) = f(tz)$, $t < 1$. Donc g_t^2/f_t est analytique sur le disque unité ouvert et c'est un multiplicateur de \mathcal{D} . On utilise encore la remarque 3.3.8, on a $(g_t^2/f_t)f \in [f]_{\mathcal{D}}$. Cela revient donc de montrer que les fonctions $(g_t^2/f_t)f$ convergent en norme vers g^2 quand $t \rightarrow 1$. Puisque $(g_t^2/f_t)f - g^2$ s'annule à l'origine c'est-à-dire $g_t(0) = g(0)$ et $f_t(0) = f(0)$ alors on peut utiliser la norme (3.6) pour finir la preuve. Il est évident que g_t^2 converge en norme vers g^2 alors on remplace g par g_t et on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ \left(\frac{f}{f_t} - 1 \right) g_t^2 \right\} &= \left(\frac{f - f_t}{f_t} \right)' g_t^2 + 2 \frac{f - f_t}{f_t} g_t (g_t)' \\ &:= \phi_1 + \phi_2. \end{aligned}$$

D'abord, $|\phi_2(z)| \leq 2|(f - f_t)(z)| |(g_t(z))'|$, donc par le lemme 3.3.10, $\|\phi_2\|_{\mathcal{A}_0^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Ensuite, on a

$$\phi_1 = f_t \frac{(f - f_t)'}{f_t^2} g_t^2 - (f_t)' \frac{(f - f_t)}{f_t^2} g_t^2 = \phi_3 + \phi_4.$$

Puisque $|\phi_4(z)| \leq |(f - f_t)(z)| |(f_t(z))'|$, par le lemme 3.3.10, $\|\phi_4\|_{\mathcal{A}_0^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Et $|\phi_3(z)| \leq |(f - f_t(z))'| |g_t(z)|$ alors

$$\|\phi_3\|_{\mathcal{A}_0^2} \leq \|(f - f_t)'\|_{\mathcal{A}_0^2} \|g_t\|_{\infty}.$$

Finalement, $\|\phi_3\|_{\mathcal{A}_0^2} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Ainsi, $g^2 \in [f]_{\mathcal{D}}$. □

Ce théorème a été généralisé par Richert et Sundberg pour les espaces de Dirichlet harmonique \mathcal{D}_{μ} , voir [42]. Nous allons maintenant nous intéresser les conséquences de ce théorème (voir [12]).

Proposition 3.3.12. *Soit $f \in \mathcal{D}$ et $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$. Alors ϕf est cyclique dans \mathcal{D} si et seulement si ϕ et f sont cycliques dans \mathcal{D} .*

Démonstration. On suppose que ϕf est cyclique dans \mathcal{D} alors il existe une suite de polynômes P_n tels que $P_n \phi f \rightarrow 1$. D'après la Remarque 3.3.8, $P_n \phi f \in [f]_{\mathcal{D}}$ cela implique que $1 \in [f]_{\mathcal{D}}$ et donc f est cyclique dans \mathcal{D} . Soit Q_n la somme partielle de la série de Taylor de f , $Q_n \rightarrow f$ dans \mathcal{D} alors $Q_n \phi \rightarrow \phi f$ c'est-à-dire $[\phi f]_{\mathcal{D}} \subset [\phi]_{\mathcal{D}}$ d'où la cyclicité de ϕ .

Supposons maintenant que f et ϕ sont cycliques dans \mathcal{D} alors il existe une suite de polynômes P_n tels que $P_n f \rightarrow 1$ alors $P_n \phi f \rightarrow \phi$ et donc $\phi \in [\phi f]_{\mathcal{D}}$. Puisque ϕ est cyclique dans \mathcal{D} , ϕf est cyclique dans \mathcal{D} . \square

Corollaire 3.3.13. *Soit $f \in \mathcal{D}$ et $g \in M(\mathcal{D})$. Si $|g(z)| \leq |f(z)|$ et si g est cyclique dans \mathcal{D} alors f est cyclique dans \mathcal{D} .*

Démonstration. Par la Proposition 3.3.12, g^2 est cyclique dans \mathcal{D} et par le Lemme 3.3.7, $g \in H^\infty$. Avec le théorème 3.3.11, on en déduit que f est cyclique dans \mathcal{D} . \square

Si on choisit g constante dans le Corollaire 3.3.13, nous obtenons

Corollaire 3.3.14. *Si $f \in \mathcal{D}$ et s'il existe une constante positive C telle que $|f(z)| > C$ sur \mathbb{D} . Alors f est cyclique dans \mathcal{D} .*

Pour tout $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{D}$ et $g = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \in \mathcal{A}_0^2$, la dualité est donnée par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 0} a_n \bar{b}_n. \quad (3.13)$$

Notons que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \bar{b}_n \right| = \left| \sum_{n \geq 0} a_n \sqrt{n+1} \frac{\bar{b}_n}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \|f\|_{\mathcal{D}} \|g\|_{\mathcal{A}_0^2}.$$

Il est facile de voir que

$$\sum_{n \geq 0} a_n \bar{b}_n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \overline{g(re^{-it})} dt.$$

Corollaire 3.3.15. *Soit P un polynôme tel que $P(z) \neq 0$ sur le disque unité ouvert \mathbb{D} , alors P est cyclique dans \mathcal{D} .*

Démonstration. On écrit $P(z) = c \prod_{i=1}^n (z - a_i)$, où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Il suffit de montrer que $[z - a]_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Soit $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \in \mathcal{A}_0^2$ telle que $g \perp z - a$, on a

$$\langle z^n(z - a), g \rangle = 0$$

pour tout $n \geq 0$. On obtient alors $\overline{b_{n+1}} - a\overline{b_n} = 0$, ainsi

$$\overline{b_n} = a^n \overline{b_0}, \quad n \geq 0$$

et,

$$\|g\|_{\mathcal{A}_0^2}^2 = \sum \frac{|b_n|^2}{n+1} = |b_0|^2 \sum_{n \geq 0} \frac{|a|^{2n}}{n+1}.$$

Puisque $|a| \geq 1$, cette quantité $|b_0|^2 \sum_{n \geq 0} \frac{|a|^{2n}}{n+1}$ est finie si et seulement si $b_0 = 0$. Donc $g = 0$ et $[z - a]_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$. Finalement, on utilise la Proposition [3.3.12](#) pour conclure.

□

Chapitre 4

Cyclicité dans les espaces de Besov-Dirichlet

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces de Besov-Dirichlet. Pour $p \geq 1$ et $\alpha > -1$, l'espace de Besov noté \mathcal{D}_α^p est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} telles que

$$\mathcal{D}_{\alpha,p}(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty,$$

où

$$dA_\alpha(z) = (1 + \alpha)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$$

et $dA(z)$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque. On munit l'espace Besov de la norme suivante

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p = |f(0)|^p + \mathcal{D}_{\alpha,p}(f).$$

L'espace de Besov \mathcal{D}_α^p est l'ensemble des fonctions holomorphes f sur \mathbb{D} dont la dérivée f' est une fonction de l'espace de Bergman $\mathcal{A}_\alpha^p = L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) \cap \text{Hol}(\mathbb{D})$.

Notons que si $p = 2$ et $\alpha = 1$, l'espace \mathcal{D}_1^2 est l'espace de Hardy H^2 et si $p = 2$ et $\alpha = 0$, l'espace \mathcal{D}_0^2 est l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D} .

Rappelons également que S désigne l'opérateur shift défini par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad f \in \mathcal{D}_\alpha^p, \quad z \in \mathbb{D}.$$

L'opérateur S est borné sur \mathcal{D}_α^p . Soit $[f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ le plus petit sous-espace invariant engendré par f , autrement dit le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{z^n f, n \in \mathbb{N}\}$. On rappelle que $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$ est un vecteur cyclique dans \mathcal{D}_α^p si

$$[f]_{\mathcal{D}_\alpha^p} = \mathcal{D}_\alpha^p.$$

Dans les espaces de Hardy H^p , $1 \leq p \leq \infty$, une fonction $f \in H^p$ est cyclique dans H^p si et seulement si f est une fonction extérieure de H^p [?, 4.8.4]. Dans l'espace de Besov-Dirichlet, la caractérisation des fonctions extérieures cycliques dans \mathcal{D}_α^p dépend des valeurs de p et de α et plus précisément se ramène au cas $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. En effet, d'après le Corollaire 4.2.4 :

- Si $p < \alpha + 1$ alors H^p s'injecte continûment dans $\mathcal{D}_\alpha^p = \mathcal{A}_{\alpha-p}^p$ et donc toute fonction extérieure est cyclique dans l'espace de Bergman $\mathcal{A}_{\alpha-p}^p$.
- Si $p > \alpha + 2$, $\mathcal{D}_\alpha^p \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Donc les seules fonctions extérieures cycliques dans \mathcal{D}_α^p sont les fonctions inversibles qui ne s'annulent pas sur le cercle.

Dans [31], il a été montré que si $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$ et si $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure telle que l'ensemble de zéros de f est dénombrable alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Le cas de l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D}_0^2 a été démontré par Hedenmalm-Shields.

Brown et Shields [12], ensuite Aleman [2], ont montré également que si $f, g \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D}$$

et si g est cyclique dans \mathcal{D} alors f est cyclique dans \mathcal{D} .

Ce théorème a été généralisé par Richter-Sundberg [42] dans le cas de l'espace de Dirichlet harmonique.

Nous montrons que ce résultat reste valable pour les espaces \mathcal{D}_α^p .

Théorème 4.1.1. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$, il existe $N = N(\alpha, p)$ qui ne dépend que α et p telle que si $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ avec*

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.1)$$

alors $[g^N]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$.

La preuve de 4.1.1 est basée sur le théorème de la couronne de Tolokonnikov [54]. La constante N dans 4.1.1 est liée à celle du théorème de la couronne. Lorsque $\alpha = p - 2$, on a $N(p - 2, p) = 5$. Comme corollaire, nous obtenons le même résultat que celui de Brown-Shields pour $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Nous obtenons également le résultat de [31] concernant la cyclicité d'une fonction extérieure de $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ dont l'ensemble des zéros est réduit à un point, voir théorème 4.6.1.

4.2 Injection impliquant l'espace de Besov-Dirichlet

Dans cette partie, nous étudions les différentes inclusions entre les espaces des fonctions analytiques dans le disque, en particulier l'espace de Hardy, l'espace de Bergman, l'algèbre du disque et l'espace \mathcal{D}_α^p pour obtenir de premières conditions sur la cyclicité dans les espaces de Besov-Dirichlet, voir [57]. Rappelons que $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$ si et seulement si $f' \in \mathcal{A}_\alpha^p$ où

$$\mathcal{A}_\alpha^p := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty \right\}.$$

Notons que pour tout $g \in \mathcal{A}_\alpha^p$, [27]

$$g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1 - z\bar{w})^{\alpha+2}} dA_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.2)$$

Par conséquent, toute fonction $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$ s'écrit

$$f(z) = f(0) + \int_{\mathbb{D}} \frac{f'(w)}{\bar{w}(1 - z\bar{w})^{\alpha+1}} dA_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.3)$$

voir [58]. Grâce à (4.2), nous avons le lemme suivant

Lemme 4.2.1. *Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$, alors*

$$|f'(z)| \lesssim \frac{\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}}{(1 - |z|^2)^{\alpha+2}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Notons d'abord que dA_α est une mesure normalisée et $x \rightarrow x^p$ est une fonction convexe pour $p \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$. En utilisant (4.2) et

l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned}
|f'(z)|^p &\leq \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|}{|1 - z\bar{w}|^{\alpha+2}} dA_{\alpha}(w) \right)^p \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|^p}{|1 - z\bar{w}|^{p(\alpha+2)}} dA_{\alpha}(w) \\
&\leq \frac{1}{(1 - |z|)^{p(\alpha+2)}} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p dA_{\alpha}(w) \\
&\leq \frac{1}{(1 - |z|)^{p(\alpha+2)}} \|f'\|_{\mathcal{D}_{\alpha}^p}^p.
\end{aligned}$$

□

Nous avons besoin le lemme suivant, voir [27]

Lemme 4.2.2. *Pour $-1 < \beta < +\infty$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{D}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{\beta}}{|1 - \bar{w}z|^{2+\beta+\sigma}} dA(w) \sim \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma < 0, \\ \log \frac{1}{1 - |z|^2} & \text{si } \sigma = 0, \\ \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\sigma}} & \text{si } \sigma > 0. \end{cases}$$

Proposition 4.2.3. *Soit $p \geq 1$ et $\alpha > -1$.*

- (1) *Si $p < \alpha + 1$, alors $H^p \subset \mathcal{D}_{\alpha}^p = \mathcal{A}_{\alpha-p}^p$.*
- (2) *Si $p > \alpha + 1$, alors $\mathcal{D}_{\alpha}^p \subset H^p$.*
- (3) *$\mathcal{D}_0^1(\mathbb{D}) \subset H^1$ et $\mathcal{D}_1^2 = H^2$.*
- (4) *Si $1 \leq p \leq 2$ et $p = \alpha + 1$, alors $\mathcal{D}_{\alpha}^p \subset H^p$.*
- (5) *Si $p > \alpha + 2$, alors $\mathcal{D}_{\alpha}^p \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$.*

Nous avons alors le corollaire suivant

Corollaire 4.2.4. *Soit $p \geq 1$ et $\alpha > -1$.*

- (1) *Si $1 \leq p \leq \alpha + 1$ alors toute fonction $f \in \mathcal{D}_{\alpha}^p$ extérieure est cyclique dans \mathcal{D}_{α}^p .*
- (2) *Si $1 + \alpha \leq p \leq 2 + \alpha$ alors toute fonction cyclique dans \mathcal{D}_{α}^p est une fonction extérieure*
- (3) *Si $p > \alpha + 2$ alors toute fonction cyclique dans \mathcal{D}_{α}^p est une fonction qui ne s'annule pas sur le disque unité fermé.*

Démonstration. Nous donnons ici la preuve de la Proposition 4.2.3.

(1) Supposons que $p < \alpha + 1$. Soit $f \in H^p$. Par la formule de Cauchy, on a

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\rho\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad |z| < \rho < 1.$$

On pose, $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, $r < \rho < 1$, on a alors

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{(\rho e^{i\theta} - re^{it})^2} \rho e^{i\theta} d\theta.$$

Notons que l'égalité de Parseval nous donne pour $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\rho e^{i\theta} - re^{it}|^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - \frac{r}{\rho} e^{i(t-\theta)}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \geq 0} (r/\rho)^n e^{in(t-\theta)} \right|^2 d\theta \\ &= \frac{\rho^2}{\rho^2 - r^2} \end{aligned}$$

Si on remplace $d\theta$ par dt , on obtient le même résultat. Ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} - re^{it}|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} - re^{it}|^2} dt = 1.$$

Si on pose

$$\mu(\theta, t) := \frac{1}{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} - re^{it}|^2}, \quad (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

les mesures $\mu(\theta, t)d\theta$ et $\mu(\theta, t)dt$ sont des mesures de probabilité sur \mathbb{T} . L'in-

égalité de Jensen nous donne alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{(\rho e^{i\theta} - re^{it})^2} \rho e^{i\theta} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - r^2} d\theta \right|^p dt \\
&\leq \frac{1}{(\rho^2 - r^2)^p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| \mu(\theta, t) d\theta \right)^p dt \\
&\leq \frac{1}{(\rho^2 - r^2)^p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p \mu(\theta, t) d\theta \right) dt \\
&= \frac{1}{(\rho^2 - r^2)^p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p \left(\int_0^{2\pi} \mu(\theta, t) dt \right) d\theta \\
&= \frac{1}{(\rho^2 - r^2)^p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $\rho \rightarrow 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{(1-r^2)^p} \|f\|_{H^p}^p.$$

Puisque $p < \alpha + 1$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta (1 - r^2)^\alpha \frac{r dr}{\pi} \\
&\leq 2 \|f\|_{H^p}^p \int_0^1 \frac{(1 - r^2)^\alpha}{(1 - r^2)^p} r dr \\
&= \frac{1}{\alpha + 1 - p} \|f\|_{H^p}^p.
\end{aligned}$$

(2) Soit $r < 1$. Montrons d'abord qu'il existe une constante $C = C(p, \alpha, r)$ qui dépend de p , α et r telle que pour tout $z \in r\overline{\mathbb{D}}$

$$|f'(z)|^p \leq C \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p, \quad z \in r\overline{\mathbb{D}}. \quad (4.4)$$

Soit $\rho = (1 - r)/2$, la fonction $|f'(z)|^p$ est sous-harmonique, donc

$$|f'(z)|^p \leq \frac{1}{\rho^2} \int_{D(z, \rho)} |f'(w)|^p dA(w)$$

Puisque $z \in r\overline{\mathbb{D}}$, pour $w \in D(z, \rho)$, on a

$$|w| < |z| + \rho = |z| + \frac{1 - r}{2} \leq |z| + \frac{1 - |z|}{2} = \frac{1 + |z|}{2},$$

et donc

$$1 - |w| > \frac{1 - |z|}{2} = \rho.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |f'(z)|^p &\leq \frac{1}{\rho^2} \int_{D(z,\rho)} |f'(w)|^p \frac{(1 - |w|^2)^\alpha}{(1 - |w|^2)^\alpha} dA(w) \\ &\leq \frac{1}{\rho^{2+\alpha}} \int_{D(z,\rho)} |f'(w)|^p (1 - |w|^2)^\alpha dA(w) \\ &\leq \frac{1}{(1 + \alpha)\rho^{2+\alpha}} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p dA_\alpha(w) \\ &\leq \frac{2^{2+\alpha}}{(1 + \alpha)(1 - r)^{2+\alpha}} \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \end{aligned}$$

Et donc (4.4) est démontré.

Soit maintenant $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$ et $r \in [1/2, 1[$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a

$$f(re^{i\theta}) = \int_0^r f'(se^{i\theta})e^{i\theta} ds + f(0).$$

On applique maintenant (4.4) pour $0 < s < 1/2$ on a

$$|f'(se^{i\theta})|^p \leq C \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &\leq \int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})| ds + \int_0^{1/2} |f'(se^{i\theta})| ds + |f(0)| \\ &\leq \int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})| ds + \left(\frac{C}{2} + 1\right) \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}. \end{aligned}$$

Soit $1/p + 1/q = 1$, on a $\alpha q/p = \alpha/(p - 1) < 1$ et donc

$$\int_0^1 (1 - s^2)^{-\alpha q/p} ds < \infty.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta &\lesssim \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})| \frac{(1-s^2)^{\alpha/p}}{(1-s^2)^{\alpha/p}} ds \right)^p d\theta + \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \\
&\lesssim \left(\int_0^{2\pi} \int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})|^p (1-s^2)^\alpha ds d\theta \right) \times \left(\int_{1/2}^r (1-s^2)^{-\alpha q/p} ds \right)^{p/q} \\
&\quad + \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \\
&\lesssim \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 |f'(se^{i\theta})|^p (1-s^2)^\alpha 2s ds d\theta + \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{H^p} \lesssim \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}$$

(3) Nous allons montrer que

$$\|f - f(0)\|_{H^1} \leq \|f\|_{\mathcal{D}_0^1}.$$

Rappelons que si F est sous-harmonique sur \mathbb{D} et $0 \leq r_1 < r_2$, alors

$$\int_0^{2\pi} F(r_1 e^{i\theta}) d\theta \leq \int_0^{2\pi} F(r_2 e^{i\theta}) d\theta.$$

Soit $f \in H^1$, la limite radiale $f^*(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta)$ existe presque partout sur \mathbb{T} . Nous avons

$$|f^*(e^{i\theta}) - f(0)| = \left| \int_0^1 \frac{\partial f(r^2 e^{i\theta})}{\partial r} dr \right| \leq 2 \int_0^1 |f'(r^2 e^{i\theta})| r dr$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|f - f(0)\|_{H^1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(0)| d\theta \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(r^2 e^{i\theta})| d\theta r dr \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})| d\theta r dr
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{H^1} \leq \|f\|_{\mathcal{D}_0^1}.$$

Montrons maintenant que $\mathcal{D}_1^2 = H^2$. Ceci découle immédiatement de l'égalité de Littlewood-Paley (4.7.1). Nous donnons ici la preuve. Soit $f \in \mathcal{D}_1^2$ alors on écrit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, l'égalité de Parseval nous donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \geq 1} n a_n r^{n-1} e^{(n-1)it} \right|^2 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} n^2 |a_n|^2 r^{2n-1} (1 - r^2) dr = 2 \sum_{n \geq 1} n^2 |a_n|^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \asymp \sum_{n \geq 1} |a_n|^2. \end{aligned}$$

(4) On suppose que $1 \leq p \leq 2$. Puisque $\mathcal{D}_0^1(\mathbb{D}) \subset H^1$ et $\mathcal{D}_1^2 = H^2$, on obtient par interpolation que $\mathcal{D}_{p-1}^p(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans l'espace de Hardy H^p .

(5) Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$. Puisque $\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} \frac{dA_\alpha(w)}{|w|} < \infty$ et comme $p > \alpha + 2$,

$$\sigma := q(\alpha + 1) - \alpha - 2 = p(\alpha + 1)/(p - 1) - \alpha - 2 = -p + \alpha + 2 < 0$$

et donc d'après le Lemme 4.2.2

$$\mathcal{I} := \int_{\mathbb{D}} \frac{dA_\alpha(w)}{|1 - z\bar{w}|^{q(\alpha+1)}} \lesssim 1.$$

uniformément en z . D'après (4.3) et l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p - 1)$,

on obtient

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq |f(0)| + \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|}{|\bar{w}(1-z\bar{w})^{\alpha+1}|} dA_{\alpha}(w) \\
&\leq |f(0)| + \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|}{|w|} dA_{\alpha}(w) \right)^{1/p} \times \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|dA_{\alpha}(w)|}{|w(1-z\bar{w})^{q(\alpha+1)}|} \right)^{1/q} \\
&\leq |f(0)| + \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|^p}{|w|} dA_{\alpha}(w) \right)^{1/p} \times \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{dA_{\alpha}(w)}{|w(1-z\bar{w})^{q(\alpha+1)}|_{\mathcal{I}}} \right)^{1/q} \\
&\leq |f(0)| + \left(\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} + \int_{\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D}} \frac{|f'(w)|^p}{|w|} dA_{\alpha}(w) \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} + \int_{\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D}} \frac{dA_{\alpha}(w)}{|w||1-z\bar{w}|^{q(\alpha+1)}|_{\mathcal{I}}} \right)^{1/q} \\
&\lesssim |f(0)| + \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^p dA_{\alpha}(w) \right)^{1/p} \times \underbrace{\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{dA_{\alpha}(w)}{|1-z\bar{w}|^{q(\alpha+1)}} \right)^{1/q}}_{\mathcal{I}} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathcal{D}_{\alpha}^p}^p.
\end{aligned}$$

Donc $f \in H^{\infty}$. Puisque \mathcal{D}_{α}^p est séparable ; les polynômes sont denses et donc $\mathcal{D}_{\alpha}^p \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$.

Donc si f est cyclique dans \mathcal{D}_{α}^p , alors $[f]_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$ l'idéal engendré par f dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est égal à $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ c'est-à-dire que f est cyclique dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ et donc inversible dans $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. D'où f ne s'annule pas sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

□

Remarque 4.2.5. *Beurling et Rudin [29] ont donné une caractérisation complète des idéaux de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. Il serait intéressant d'étudier ceux de l'algèbre \mathcal{D}_{α}^p lorsque $p > \alpha + 2$.*

4.3 Propriétés des vecteurs cycliques dans les espaces de Besov-Dirichlet

4.3.1 Quelques propriétés élémentaires sur les vecteurs cycliques dans les espaces de Besov-Dirichlet

Soit $M(\mathcal{D}_\alpha^p)$ le multiplicateur de \mathcal{D}_α^p défini par

$$M(\mathcal{D}_\alpha^p) = \left\{ \varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \varphi f \in \mathcal{D}_\alpha^p, \forall f \in \mathcal{D}_\alpha^p \right\}$$

Commençons par quelques observations simples sur les multiplicateurs de \mathcal{D}_α^p .

Lemme 4.3.1. *Soit $\varphi \in M(\mathcal{D}_\alpha^p)$. Alors l'opérateur de multiplication*

$$\begin{aligned} M_\varphi &: \mathcal{D}_\alpha^p \rightarrow \mathcal{D}_\alpha^p \\ f &\mapsto \varphi f \end{aligned}$$

est borné sur \mathcal{D}_α^p et

$$|\varphi(z)| \leq \|M_\varphi\| \quad z \in \mathbb{D}.$$

En particulier, $\varphi \in H^\infty$.

Démonstration. La bornitude de l'opérateur de multiplication découle du théorème de graphe fermé. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on note λ_z l'évaluation au point z ,

$$f(z) = \langle f, \lambda_z \rangle \quad f \in \mathcal{D}_\alpha^p \quad z \in \mathbb{D}.$$

Notons que

$$\|\lambda_z\| = \sup_{f \in \mathcal{D}_\alpha^p \setminus \{0\}} \frac{|f(z)|}{\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}} > 0,$$

puisque il n'existe pas de $z_0 \in \mathbb{D}$ telle que $f(z_0) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$. Pour $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \setminus \{0\}$ et $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(z)f(z)| &= |\langle M_\varphi f, \lambda_z \rangle| \\ &\leq \|M_\varphi\| \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p} \|\lambda_z\|. \end{aligned}$$

Par passage au sup sur les f , on obtient

$$|\varphi(z)| \|\lambda_z\| = |\varphi(z)| \sup_{f \in \mathcal{D}_\alpha^p \setminus \{0\}} \frac{|f(z)|}{\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}} \leq \|M_\varphi\| \|\lambda_z\|.$$

Ainsi, $|\varphi(z)| \leq \|M_\varphi\|$ sur \mathbb{D} . □

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.3.2. *Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$. Alors $M(\mathcal{D}_\alpha^p)f \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$.*

Démonstration. Si $\psi \in H^\infty$ alors d'après la formule de Cauchy, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$|\psi'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi^*(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \|\psi\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} = \frac{\|\psi\|_\infty}{1 - |z|}. \quad (4.5)$$

D'après (3.3),

$$f \in \mathcal{A}_{\alpha-p}^p \iff f \in \mathcal{D}_\alpha^p.$$

On pose

$$\mathcal{D}_{\alpha,p}(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p dA_\alpha(z).$$

Soit maintenant $\varphi \in M(\mathcal{D}_\alpha^p)$ et soit φ_n , la somme partielle de la série de Taylor de φ . Clairement $\varphi_n f \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$. Puisque $\varphi_n \rightarrow \varphi$ et d'après (4.5),

$$|(\varphi_n - \varphi)'| \leq \frac{\|\varphi_n - \varphi\|_\infty}{1 - |z|}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha,p}(\varphi_n f - \varphi f) &= \int_{\mathbb{D}} |(\varphi_n(z)f(z) - \varphi(z)f(z))'|^p dA_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |\varphi_n'(z)f(z) - \varphi'(z)f(z) + \varphi_n(z)f'(z) - \varphi(z)f'(z)|^p dA_\alpha(z) \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{D}} \left(|f(z)(\varphi_n'(z) - \varphi'(z))|^p + |f'(z)(\varphi_n(z) - \varphi(z))|^p \right) dA_\alpha(z) \\ &\leq 2^{p-1} \|\varphi_n - \varphi\|_\infty^p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_{\alpha-p}(z) + 2^{p-1} \|(\varphi_n - \varphi)\|_\infty^p \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \\ &\lesssim \|\varphi_n - \varphi\|_\infty^p \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \end{aligned}$$

D'ou $\varphi f \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ □

Proposition 4.3.3. *Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p$ et $\phi \in M(\mathcal{D}_\alpha^p)$. Alors ϕf est cyclique \mathcal{D}_α^p si et seulement si ϕ et f sont cycliques \mathcal{D}_α^p .*

Démonstration. On suppose que ϕf est cyclique alors il existe une suite de polynômes P_n tels que $P_n \phi f \rightarrow 1$. Par la proposition 4.3.2, $P_n \phi f \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ cela signifie que $1 \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ et donc f est cyclique \mathcal{D}_α^p . Soit Q_n la somme partielle de la série de Taylor de f alors $Q_n \rightarrow f$ dans \mathcal{D}_α^p et $Q_n \phi \rightarrow \phi f$ c'est-à-dire $[\phi f]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [\phi]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ donc ϕ est cyclique \mathcal{D}_α^p .

Supposons maintenant que f et ϕ sont cycliques \mathcal{D}_α^p , il existe donc une suite de polynômes P_n tels que $P_n f \rightarrow 1$ alors $P_n \phi f \rightarrow \phi$ et donc $\phi \in [\phi f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$. Puisque ϕ est cyclique \mathcal{D}_α^p alors ϕf l'est aussi. \square

Nous avons aussi une proposition lorsque $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$.

Proposition 4.3.4. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Soient $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Si fg est cyclique dans \mathcal{D}_α^p alors f et g sont cycliques dans \mathcal{D}_α^p .*

Démonstration. Nous montrerons simplement que g est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Le même raisonnement permettra de démontrer que f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Soit P_n la somme partielle de la série de Taylor de f alors P_n converge vers f dans \mathcal{D}_α^p . Soit S_n la somme de Cesàro de P_n ,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_k, \quad n \geq 1.$$

Nous avons S_n converge vers P_n et donc S_n converge vers f dans \mathcal{D}_α^p . D'après le théorème de Fejér, S_n converge uniformément vers $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, $\|S_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. On a

$$\begin{aligned} \|(S_n g - fg)' \|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p &\leq \|(S_n - f)g'\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p + \|(S_n - f)'g\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p \\ &\leq \|(S_n - f)\|_\infty \|g'\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p + \|(S_n - f)'\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p \|g\|_\infty \\ &= \|(S_n - f)\|_\infty \|g'\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p + \|S_n - f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|S_n g - fg\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p = |(S_n f - fg)(0)|^p + \|(S_n g - fg)'\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p \rightarrow 0.$$

Par conséquent, $fg \in [g]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ c'est-à-dire g est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . \square

Remarque 4.3.5. *Nous avons les conséquences suivantes :*

- (1) *Notons que $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach (voir Proposition 4.4.1) muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}^p = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}^p + \|f'\|_{\mathcal{A}_\alpha^p}^p.$$

- (2) Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Si f^2 est cyclique dans \mathcal{D}_α^p alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .
- (3) Réciproquement, si $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et si f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p , alors f^2 est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .
En effet, puisque f est cyclique, il existe p_n une suite de polynômes telle que $\|1 - p_n f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \rightarrow 0$. Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} \|f - p_n f^2\|_{\mathcal{D}_\alpha^p}^p &\leq \|f - p_n f^2\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}^p \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}^p \|1 - p_n f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}^p. \end{aligned}$$

- (4) Si $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(z)| > C$ sur \mathbb{D} alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Puisque $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach donc l'inversibilité entraîne la cyclicité.

Lemme 4.3.6. Soit $\alpha > -1$. Si $p > \alpha + 1$ alors l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathcal{D}_\alpha^p \times \mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q$, $q = \frac{p}{p-1}$, par

$$\langle f, g \rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{S^*g(z)}dA(z), \quad (f, g) \in \mathcal{D}_\alpha^p \times \mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q$$

où S^* est l'adjoint de l'opérateur Shift S

$$S^*f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

est une application linéaire à gauche, anti-linéaire à droite. De plus, on a

$$|\langle f, g \rangle| \lesssim \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p} \|g\|_{\mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q}.$$

Ce lemme nous permet de définir un crochet de dualité entre \mathcal{D}_α^p et $\mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q$ (voir [31]). On désigne $(\mathcal{D}_\alpha^p)'$ le dual de \mathcal{D}_α^p . On a

Proposition 4.3.7. Si $p > \alpha + 1$ alors $(\mathcal{D}_\alpha^p)'$ est isomorphe à $\mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Proposition 4.3.8. Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit P un polynôme tel que $P(z) \neq 0$ sur le disque unité ouvert \mathbb{D} , alors P est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .

Démonstration. On écrit $P(z) = c(z - a_1) \cdots (z - a_n)$, où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et $c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$. Il suffit de montrer que $[z - a]_{\mathcal{D}_\alpha^p} = \mathcal{D}_\alpha^p$ pour tout

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. On peut supposer que $|a| = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle z^n(z - a), \varphi \rangle = 0.$$

Si $\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ alors on obtient

$$\overline{a_{n+1}} = \langle z^{n+1}, \varphi \rangle = \langle az^n, \varphi \rangle = a \overline{a_n}.$$

Alors $\overline{a_n} = a^n \overline{a_0}$. Ainsi,

$$\varphi(z) = a_0 \sum_{n \geq 0} (az)^n = \frac{a_0}{1 - az}.$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{A}_{-\alpha q/p}^q$ alors

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{a_0}{|1 - az|^q} (1 - |z|^2)^{-\alpha q/p} dA(z) < \infty$$

et puisque $-\alpha q/p > -1$ alors $q + \alpha q/p < 2$ [27, théorème 1.7]. Nous sommes en contradiction avec $p \leq \alpha + 2$. Donc $\varphi = 0$ et $[z - a]_{\mathcal{D}_\alpha^p} = \mathcal{D}_\alpha^p$. Pour conclure, on utilise la proposition 4.3.3. \square

4.3.2 Cyclicité lorsque l'ensemble de zéros est réduit à un point

Pour motiver notre travail et la technique que nous allons utiliser, nous rappelons ici le résultat de Kellay, Le Manach et Zarrabi sur la cyclicité d'une fonction extérieure de Besov continue sur le bord et dont l'ensemble de zéros est réduit à un point. La preuve est basée sur le principe de dualité, on ramène ainsi le problème des vecteurs cycliques f en un problème d'unicité de certaines fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(f)$, où $\mathcal{Z}(f)$ est l'ensemble de zéros de f sur le cercle unité. Plus précisément, soit \mathcal{B}_α^p l'espace de Bergman de fonctions holomorphes φ sur $\mathbb{D}_e := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ telles que

$$\varphi(\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{D}_e} |\varphi(z)|^p (|z|^2 - 1)^\alpha dA(z) < \infty.$$

On désigne par \mathcal{N}^+ la classe de Smirnov. Soit E un ensemble fermé de \mathbb{T} de mesure de Lebesgue nulle et soit $\mathcal{H}_E(\mathcal{N}^+, \mathcal{B}_\alpha^p)$ l'ensemble de fonctions analytiques φ sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E$ telles que

$$\varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathcal{N}^+ \quad \text{et} \quad \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathcal{B}_\alpha^p$$

K. Kellay, F. Lemanach et M. Zarrabi ont montré le résultat suivant :

Théorème 4.3.9. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Alors*

$$\mathcal{H}_{\{1\}}(\mathcal{N}^+, \mathcal{B}_\alpha^p) = \{0\}.$$

Soit $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble de zéros de f :

$$\mathcal{Z}(f) = \{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) = 0\}.$$

Par dualité, ils obtiennent le résultat suivant lorsque $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et $\mathcal{Z}(f) = \{1\}$.

Corollaire 4.3.10. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f) = \{1\}$ alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .*

Dans le cas où $p = 2$ et $\alpha = 0$, ce résultat a été démontré par Hedenmalm-Shields [19]. Le passage à un ensemble de zéros dénombrable résulte de [19, Proposition 2], voir aussi [12]. Nous allons donner une nouvelle preuve de ce corollaire 4.3.10 qui est valable aussi pour $p \geq 1 + \alpha$ et $p \leq \alpha + 2$.

4.4 Théorème de la Couronne de Tolokonnikov

Les espaces \mathcal{D}_α^p ne sont pas tous une algèbre de Banach, le cas $\mathcal{D}_0^2 = \mathcal{D}$ en est un exemple. Tolokonnikov s'est intéressé au théorème de la couronne [54] dans les sous-algèbres de H^∞ plus précisément l'algèbre des fonctions bornées qui appartiennent aux espaces de type Besov noté $\mathcal{D}_s^{p,q}$ [54]. Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ et $n = [s] + 1$, on pose $f_r(z) = f(rz)$ et

$$\mathcal{D}_{p,q,s}(f) := \int_0^1 \left\| f_r^{(n)}(1-r)^{n-s} \right\|_{L^p(\mathbb{T})}^q \frac{dr}{1-r}.$$

Nous pouvons écrire également $\mathcal{D}_{p,q,s}$ sous cette forme,

$$\mathcal{D}_{p,q,s}(f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_r^{(n)}(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{q/p} (1-r)^{(n-s)q-1} dr$$

et si $p = q$,

$$\mathcal{D}_{p,p,s}(f) = \frac{1}{2((n-s)p-1)} \int_{\mathbb{D}} |f^{(n)}(z)|^p dA_{(n-s)p-1}(z).$$

L' espace de Besov $\mathcal{D}_s^{p,q}$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert \mathbb{D} muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{D}_s^{p,q}}^q = |f(0)|^q + \mathcal{D}_{p,q,s}(f).$$

Nous avons les inclusions suivantes :

- (1) Si $q_1 \geq q$ alors $\mathcal{D}_s^{p,q} \subset \mathcal{D}_s^{p,q_1}$.
- (2) Si $s - s_1 \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$ alors $\mathcal{D}_s^{p,q} \subset \mathcal{D}_{s_1}^{p_1,q}$.

Proposition 4.4.1. *Si $p = q \geq 1 + \alpha$, $n = 1$ et $s = 1 - \frac{1+\alpha}{p}$ alors $\mathcal{D}_s^{p,p} = \mathcal{D}_\alpha^p$ et la classe $\mathcal{D}_s^{p,p} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach munie de la norme suivante*

$$\|f\|_{\mathcal{D}_s^{p,p} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} + \mathcal{D}_{p,p,s}^{1/p}(f)$$

où

$$\mathcal{D}_{p,p,s}(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p(1-s)-1} dA(z).$$

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{D}_s^{p,p} \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$. D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{p,p,s}(fg) &= \int_{\mathbb{D}} |f'(z)g(z) + f(z)g'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p(1-s)-1} dA(z) \\ &\leq \mathcal{D}_{p,p,s}(f) \|g\|_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} + \mathcal{D}_{p,p,s}(g) \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}. \end{aligned}$$

□

Lorsque $p > \alpha + 2$, $\mathcal{D}_\alpha^p \subset \mathcal{A}(\mathbb{D})$, et $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Dans notre cas, on supposera $p \leq \alpha + 2$ pour appliquer le théorème de la couronne pour les algèbres $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$.

Théorème 4.4.2. *Soit $1 < p \leq \alpha + 2$, Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que pour tout $z \in \mathbb{D}$,*

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| > \delta > 0$$

alors il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{cases} f_1(z)h_1(z) + f_2(z)h_2(z) = 1, \\ \|h_1\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta^{-\mathbf{A}} \quad \text{et} \quad \|h_2\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta^{-\mathbf{A}} \end{cases}$$

pour une certaine constante $\mathbf{A} \geq 4$ qui ne dépend que de p et de α .

Remarque 4.4.3. Lorsque $p = 2$ et $\alpha = 0$, $\mathcal{D}_0^2 = H^2$ et on retrouve donc le théorème classique de la couronne de Carleson 3.1.2. Dans ce cas, la constante $\mathbf{A} > 2$ au lieu de $\mathbf{A} \geq 4$. Lorsque $\alpha = p - 2$, Tolokonnikov [54] a montré que $\mathbf{A} = 4$. Nicolau dans [38] a montré le Théorème de la couronne mais sans donner la version quantitative. Nous ne savons pas si la constante \mathbf{A} de l'identité de Bézout de Tolokonnikov est optimale.

4.5 Théorème d'Atzmon

Soit T un opérateur borné sur un espace de Banach X , on notera par $\sigma(T)$ le spectre de T . Il est important de se rappeler le théorème d'Atzmon [3] du type taubérien.

Théorème 4.5.1 (Atzmon). *Soit T un opérateur borné inversible sur un espace de Banach tel que $\sigma(T) = \{1\}$. S'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\begin{cases} \|T^n\| = O(n^k)(n \rightarrow +\infty), \\ \log \|T^{-n}\| = o(\sqrt{n})(n \rightarrow +\infty), \end{cases}$$

alors $(T - I)^k = 0$.

Le résultat est une conséquence du théorème bien connu de Bernstein du type Phramèn-Lindelöf, à savoir qu'une fonction entière du type minimal n'est pas bornée sur la droite réelle à moins qu'elle ne soit une constante. Puisque T est inversible, le spectre de T est contenu dans le cercle unité. Sous les mêmes hypothèses, Le Théorème reste valable si on remplace $\sigma(T) = \{1\}$ par le spectre de T réduit à un point du cercle unité $\sigma(T) = \{\lambda\}$, et dans ce cas on aurait $(T - \lambda I)^k = 0$. Notons aussi que Zarrabi [55, 56] a montré si T est une contraction inversible sur un espace de Banach à spectre dénombrable et si $\log \|T^{-n}\| = o(\sqrt{n})(n \rightarrow +\infty)$, alors T est une isométrie.

Nous avons la version résolvente du théorème ci-dessus.

Corollaire 4.5.2. *Soit T un opérateur borné inversible sur un espace de Banach X dont le spectre est réduit à un point, $\sigma(T) = \{1\}$. S'il existe $k \geq 0$*

et $c > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists c_\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \|(T - zI)^{-1}\| \leq \frac{c}{(1 - |z|)^k} & |z| < 1, \\ \|(T - zI)^{-1}\| \leq c_\varepsilon \exp \frac{\varepsilon}{|z| - 1} & |z| > 1, \end{cases}$$

alors $(T - I)^k = 0$.

Démonstration. Soit $x \in X$ et $\ell \in X^*$. Puisque le spectre est réduit à 1, la fonction

$$\psi(z) = \langle (T - zI)^{-1}x, \ell \rangle, \quad z \notin \sigma(T)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a

$$\psi(z) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \langle T^{-n-1}x, \ell \rangle z^n, & |z| < 1, \\ - \sum_{n \geq 0} \langle T^{n-1}x, \ell \rangle z^{-n}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Soit

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |\psi(z)|.$$

Les inégalités de Cauchy et le Lemme 4.5.3 ci-dessous, nous donnent que pour tout $n \geq 1$

$$\langle T^n x, \ell \rangle \leq \inf_{r < 1} r^{-n} M(r) \leq c \inf_{r < 1} \frac{r^{-n}}{(1 - r)^k} = O(n^k)(n \rightarrow +\infty)$$

et

$$\langle T^{-n} x, \ell \rangle \leq \inf_{r < 1} r^{-n} M(r) \leq c_\varepsilon \inf_{r < 1} r^{-n} \exp \frac{\varepsilon}{1 - r} = O(e^{3\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n}})(n \rightarrow +\infty).$$

Les inégalités ci-dessus sont satisfaites pour tout $x \in X$ et $\ell \in X^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$. Donc nous avons

$$\|T^n\| = O(n^k)(n \rightarrow +\infty) \quad \text{et} \quad \log \|T^{-n}\| = o(\sqrt{n})(n \rightarrow +\infty)$$

et par le Théorème 4.5 nous obtenons notre résultat. \square

Lemme 4.5.3. Soit $k \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$(1) \inf_{0 < r < 1} \frac{r^{-n}}{(1-r)^k} \sim n^k \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

$$(2) \inf_{0 < r < 1} r^{-n} \exp \frac{\varepsilon}{1-r} \sim \exp \left(3\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n} \right)$$

Démonstration. 1. Pour $0 < r < 1$, on pose

$$f(r) = \frac{r^{-n}}{(1-r)^k}.$$

On a

$$f'(r) = \left(-nr^{-1} + \frac{k}{1-r} \right) f(r)$$

Donc $f'(r) = 0$ lorsque $r = 1 - \frac{k}{k+n}$, le minimum est atteint en ce point et

$$\inf_{0 < r < 1} \frac{r^{-n}}{(1-r)^k} = f\left(1 - \frac{k}{k+n}\right) = n^k \left(1 - \frac{k}{k+n}\right)^{-n} \sim e^{-1} n^k, \quad n \rightarrow +\infty.$$

2. Soit

$$g(r) = r^{-n} \exp \frac{\varepsilon}{1-r}, \quad 0 < r < 1.$$

On a

$$g'(r) = \left(-nr^{-1} + \frac{\varepsilon}{(1-r)^2} \right) g(r).$$

$g'(r) = 0$ lorsque $\frac{n}{\varepsilon} = \frac{r}{(1-r)^2}$. On pose $r = \rho^2$, on obtient $g'(r) = 0$ lorsque

$$\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}} = \frac{\rho}{1-\rho^2}.$$

Donc

$$\rho = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{n} + 4} \right) \sim 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Le minimum est atteint en $\rho^2 \sim 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$ quand $n \rightarrow +\infty$ et

$$g(\rho^2) = \rho^{-2n} \exp \frac{\varepsilon}{1-\rho^2} \sim \left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}\right)^{-2n} \exp \varepsilon \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \exp \left(2n \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} \right) \exp \sqrt{\varepsilon n}$$

Donc

$$g(\rho^2) \sim \exp(3\sqrt{\varepsilon n}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

□

4.6 Extension du théorème de Brown-Shields pour les espaces de Besov

Dans cette section, nous démontrons le théorème de Hedenmalm-Shields pour les espaces de Besov \mathcal{D}_α^p à l'aide du théorème de la couronne de Tolokonnikov [54] et ensuite, nous allons donner l'extension du théorème de Brown-Shields.

K. Kellay, F. Lemanach et M. Zarrabi [31] ont montré le résultat ci-dessous. Nous proposons ici une nouvelle preuve.

Théorème 4.6.1. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$. Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ une fonction extérieure telle que $\mathcal{Z}(f) = \{1\}$ alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose

$$\delta_\lambda := \inf_{z \in \mathbb{D}} |\lambda - z| + |f(z)|$$

Puisque f est une fonction extérieure

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|) \log 1/|f(z)| = 0.$$

Voir [49]. Donc tout $\varepsilon > 0$, $\exists c_\varepsilon > 0$

$$|f(z)| \geq c_\varepsilon \exp \frac{-\varepsilon}{1 - |z|}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.6)$$

Supposons que $|\lambda| \neq 1$. Nous allons distinguer deux cas :

- Si $|z - \lambda| \geq |1 - |\lambda||/2$, alors $\delta_\lambda \geq |1 - |\lambda||/2$.
- Si $|z - \lambda| \leq |1 - |\lambda||/2$, alors

$$|1 - |\lambda||/2 \geq |z - \lambda| \geq |(1 - |\lambda|) - (1 - |z|)| \geq |1 - |\lambda|| - |1 - |z||.$$

On a $1 - |z| \geq |1 - |\lambda||/2$ et grâce à (4.6), on obtient

$$|f(z)| \geq c_\varepsilon \exp \frac{-\varepsilon}{1 - |\lambda|}.$$

Donc

$$\delta_\lambda \geq c_\varepsilon \exp \frac{-\varepsilon}{|1 - |\lambda||}.$$

Ainsi, d'après le Théorème de la couronne 4.4.2, il existe $g, h \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que

$$\begin{cases} (\lambda - z)g + fh = 1 \\ \|g\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta_\lambda^{-A} \text{ et } \|h\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta_\lambda^{-A} \end{cases}$$

pour une certaine constante $A \geq 4$.

Considérons maintenant l'idéal engendré par f et la surjection canonique $\pi : \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})/[f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}$, on a

$$\pi(\lambda - z)\pi(g) = \pi(1).$$

Ainsi, $\lambda\pi(1) - \pi(z)$ est inversible dans $\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})/[f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}$ d'inverse $\pi(g)$ et de spectre $\{1\}$

$$(\lambda\pi(1) - \pi(z))^{-1} = \pi(g).$$

Nous allons estimer maintenant la norme de la résolvante $\|(\lambda\pi(1) - \pi(z))^{-1}\|$.

Pour $|\lambda| < 1$,

$$\begin{aligned} \|(\lambda\pi(1) - \pi(z))^{-1}\| &= \|\pi(g)\| \\ &\leq \|g\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \\ &\leq \delta_\lambda^{-A} \\ &\leq c_\varepsilon \exp \frac{\varepsilon}{1 - |\lambda|}. \end{aligned}$$

Pour $|\lambda| > 1$,

$$\begin{aligned} \|(\lambda\pi(1) - \pi(z))^{-1}\| &\leq \|(\lambda - z)^{-1}\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \\ &= \frac{1}{|\lambda| - 1} + \frac{1}{|\lambda|} + \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{dA_\alpha(z)}{|\lambda - z|^{2p}} dA_\alpha(z) \right)^{1/p} \\ &= \frac{2}{|\lambda| - 1} + \frac{1}{(|\lambda| - 1)^p} \int_{\mathbb{D}} dA_\alpha(z) \\ &= \frac{2}{|\lambda| - 1} + \frac{1}{(|\lambda| - 1)^p}. \end{aligned}$$

Donc d'après le Corollaire 4.5.2, nous avons $(\pi(1) - \pi(\alpha))^{[p]+1} = 0$, c'est-à-dire que $(1 - z)^{[p]+1} \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}$. Or $(\lambda - z)^{n+1}$ est cyclique dans \mathcal{D}_α^p donc f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . \square

Nous passons à présent au résultat principal. Il s'agit l'extension du théorème de Brown-Shields :

Théorème 4.6.2. *Soit $p > 1$ tel que $\alpha + 1 \leq p \leq \alpha + 2$ et soit $N = [\mathbf{A}] + 1$. Soient $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que*

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.7)$$

alors $[g^N]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$ pour un certain $N \geq 1$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} \left\{ |1 - \lambda g(z)| + |f(z)| \right\} = \delta_\lambda.$$

Nous distinguons deux cas lorsque $\lambda \neq 0$:

- Si $|g(z)| \leq \frac{1}{2|\lambda|}$ alors $|1 - \lambda g(z)| \geq 1 - |\lambda||g(z)| \geq \frac{1}{2}$.
- Si $|g(z)| \geq \frac{1}{2|\lambda|}$. Grâce à (4.7),

$$\frac{1}{2|\lambda|} \leq |f(z)|$$

Ainsi,

$$\delta_\lambda \geq \frac{1}{2|\lambda|}.$$

Puisque $1 - \lambda g(z) \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$, le théorème de la couronne 4.4.2 nous donne l'existence deux fonctions $F_\lambda \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et $G_\lambda \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que

$$\begin{cases} (1 - \lambda g)G_\lambda + fF_\lambda = 1, \\ \|F_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta_\lambda^{-\mathbf{A}} \quad \text{et} \quad \|G_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta_\lambda^{-\mathbf{A}} \end{cases}$$

pour une certaine constante $A > 4$.

Comme précédemment dans le théorème 4.6.1, on considère l'idéal engendré par f et la surjection canonique

$$\pi : \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) \rightarrow (\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}$$

alors on a

$$(\pi(1 - \lambda g))^{-1} = \pi(G_\lambda)$$

et

$$\begin{aligned} \|(\pi(1 - \lambda g))^{-1}\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}} &= \|\pi(G_\lambda)\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}} \\ &\leq \|G_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \\ &\leq \frac{1}{\delta_\lambda^{\mathbf{A}}} \\ &\leq 2^{\mathbf{A}} |\lambda|^{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Par le théorème de Liouville, $\pi(1 - \lambda g)^{-1}$ est un polynôme en λ de degré au plus $[\mathbf{A}]$. Donc pour $|\lambda g| < 1$, on a

$$\pi(1 - \lambda g)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \pi^n(g)$$

Par identification, $\pi^{[\mathbf{A}]+1}(g) = 0$ et donc $g^{[\mathbf{A}]+1} \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}$. Donc si $N = [\mathbf{A}] + 1$ alors $[g^N]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$. □

Nous déduisons le corollaire suivant sur la cyclicité dans \mathcal{D}_α^p .

Corollaire 4.6.3. *Soit $p > 1$ tel que $1 + \alpha \leq p \leq \alpha + 2$. Soient $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que*

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D}$$

alors si g est cyclique dans \mathcal{D}_α^p alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .

Démonstration. Si $g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est cyclique dans \mathcal{D}_α^p , alors g^N est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . Grâce à 4.6.2, nous avons $g^N \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$. Donc f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p . □

4.7 Raffinement du Théorème 4.6.2

Rappelons le principe de Phragmén-Lindelöf, le principe du maximum pour les fonctions holomorphes dans un secteur [41]. Soit \mathcal{S} un secteur du plan complexe \mathbb{C} d'angle $\beta - \alpha > 0$

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha < \arg(\lambda) < \beta\}.$$

Lemme 4.7.1. *Soit $f \in \text{Hol}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{S}})$. On suppose qu'il existe $c > 0$ telle que*

$$\begin{cases} |f(\lambda)| \leq e^{c|\lambda|^\rho} & \text{si } \lambda \in \mathcal{S} \\ |f(\lambda)| \leq 1 & \text{si } \lambda \in \partial\mathcal{S}. \end{cases}$$

Si $\rho < \frac{\pi}{\beta - \alpha}$, alors

$$|f(\lambda)| \leq 1, \quad \lambda \in \mathcal{S}.$$

Nous avons également le résultat suivant :

Théorème 4.7.2. *Soient $f, g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$. On suppose $\text{Re}(g) \geq 0$ et qu'il existe $\gamma > 1$ telle que*

$$|g(z)| \leq \left(\log \frac{\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}}{|f(z)|} \right)^{-\gamma}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (4.8)$$

alors $[g]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$.

On supposera que $\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} = 1$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} \left\{ |1 - \lambda g(z)| + |f(z)| \right\} = \delta_\lambda.$$

Nous distinguons deux cas lorsque $\lambda \neq 0$:

— Si $|g(z)| \leq \frac{1}{2|\lambda|}$ alors $|1 - \lambda g(z)| \geq 1 - |\lambda||g(z)| \geq \frac{1}{2}$.

— Si $|g(z)| \geq \frac{1}{2|\lambda|}$, puisque

$$|g(z)| \leq \left(\log \frac{1}{|f(z)|} \right)^{-\gamma},$$

on a

$$|f(z)| \geq e^{-(2|\lambda|)^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

On obtient ainsi

$$\delta_\lambda \geq e^{-(2|\lambda|)^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Puisque $1 - \lambda g(z) \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$, le théorème de la couronne 4.4.2 nous dit qu'il existe deux fonctions $F_\lambda \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et $G_\lambda \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telles que

$$\begin{cases} (1 - \lambda g)G_\lambda + fF_\lambda = 1, \\ \|F_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta^{-\mathbf{A}} \quad \text{and} \quad \|G_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \leq \delta^{-\mathbf{A}} \end{cases}$$

pour une certaine constante $\mathbf{A} \geq 4$.

Soit la projection canonique

$$\pi : \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) \rightarrow (\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}.$$

Alors on a

$$\pi(1 - \lambda g)^{-1} = \pi(G_\lambda)$$

et

$$\begin{aligned} \|\pi(1 - \lambda g)^{-1}\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}} &= \|\pi(G_\lambda)\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}} \\ &\leq \|G_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})} \\ &\leq \frac{1}{\delta_\lambda^{\mathbf{A}}} \\ &\leq e^{\mathbf{A}(2|\lambda|)^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Soit $l \in (\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})})^*$ qu'on supposera de norme 1 et soit φ l'application définie par

$$\varphi(\lambda) = \langle (\pi(1 - \lambda g))^{-1}; l \rangle.$$

Il est évident que l'application φ est holomorphe sur \mathbb{C} . De plus,

$$\begin{aligned}
 |\varphi(\lambda)| &= |\langle (\pi(1 - \lambda g))^{-1}; l \rangle| \\
 &\leq \|(\pi(1 - \lambda g))^{-1}\|_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D}) / [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}} \\
 &\leq e^{c|\lambda|^{\frac{1}{\gamma}}}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $c = 2^{\frac{1}{\gamma}} \mathbf{A}$. Puisque $\gamma > 1$, il existe θ_γ telle que $\frac{\pi}{2}(2-\gamma) < \theta_\gamma < \frac{\pi}{2}\gamma$. On supposera que $\theta_\gamma < \pi$. Considérons maintenant le secteur $\mathcal{S}_{\theta_\gamma}$ du plan complexe :

$$\mathcal{S}_{\theta_\gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta_\gamma\}.$$

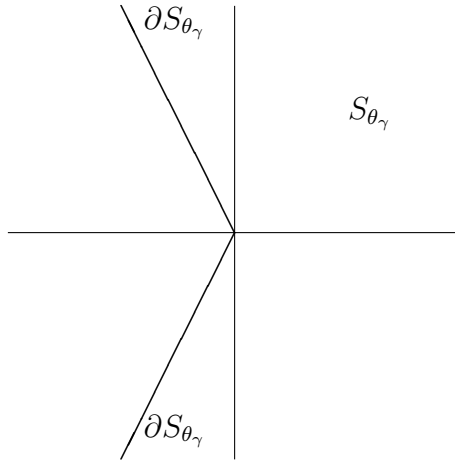


FIGURE 4.1 – le secteur $\mathcal{S}_{\theta_\gamma}$

Soit $\lambda \in \partial \mathcal{S}_{\theta_\gamma}$, puisque $\pi/2 < \theta_\gamma < \pi$, la partie réelle de λ est négative

alors, $\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda} - g(z)) \leq 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
|1 - \lambda g(z)| &= |\lambda| \left| \frac{1}{\lambda} - g(z) \right| \\
&\geq |\lambda| \sqrt{\operatorname{Re}^2(\frac{1}{\lambda} - g(z))} \\
&\geq |\lambda| |\operatorname{Re}(\frac{1}{\lambda} - g(z))| \\
&\geq |\lambda| \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{|\lambda|^2} \\
&= \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{|\lambda|}.
\end{aligned}$$

De plus, $\lambda \in \partial \mathcal{S}_{\theta_\gamma}$ alors on a

$$\operatorname{Re}(\lambda) = |\lambda| \cos \theta_\gamma.$$

En posant $C_\gamma = |\cos \theta_\gamma|^{-1} \neq 0$, on obtient alors

$$\frac{1}{|1 - \lambda g(z)|} \leq \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Re}(\lambda)|} = C_\gamma.$$

Donc φ est une fonction holomorphe dans le secteur $\mathcal{S}_{\theta_\gamma}$, continue sur $\overline{\mathcal{S}_{\theta_\gamma}}$ telle que

$$\begin{cases} |\varphi(\lambda)| \leq e^{c|\lambda|^{\frac{1}{\gamma}}} & \text{sur } \lambda \in \mathcal{S}_{\theta_\gamma} \\ |\varphi(\lambda)| \leq C_\gamma & \text{sur } \lambda \in \partial \mathcal{S}_{\theta_\gamma}. \end{cases}$$

Le secteur $\mathcal{S}_{\theta_\gamma}$ est d'angle $2\theta_\gamma$ et $\frac{1}{\gamma} < \frac{\pi}{2\theta_\gamma}$, puisque $\theta_\gamma < \frac{\pi}{2}\gamma$. Donc par le principe de Phragmén-Lindelöf 4.7.1, on a

$$|\varphi(\lambda)| \leq C_\gamma, \quad \lambda \in \mathcal{S}_{\theta_\gamma}.$$

La fonction φ est entière et vérifie l'inégalité (4.9) sur \mathbb{C} . De nouveau, nous appliquons le principe de Phragmén-Lindelöf au secteur

$$\mathcal{S} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}_{\theta_\gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta_\gamma < \arg(\lambda) < 2\pi - \theta_\gamma\}.$$

Le secteur est d'angle $2\pi - 2\theta_\gamma$ et nous avons

$$\begin{cases} |\varphi(\lambda)| \leq e^{c|\lambda|^{\frac{1}{\gamma}}} & \text{sur } \lambda \in \mathcal{S} \\ |\varphi(\lambda)| \leq C_\gamma & \text{sur } \lambda \in \partial\mathcal{S} \end{cases}$$

et puisque $\theta_\gamma > \frac{\pi}{2}(2 - \gamma)$, on a bien $\frac{1}{\gamma} < \frac{\pi}{2\pi - 2\theta_\gamma}$ et

$$|\varphi(\lambda)| \leq C_\gamma \quad \lambda \in \mathcal{S}.$$

Donc φ est holomorphe et bornée sur \mathbb{C} , d'après le théorème de Liouville, φ est constante et donc

$$\varphi(\lambda) = \varphi(0) = \langle \pi^{-1}(1); l \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ainsi $\pi^{-1}(1 - \lambda g) = \pi^{-1}(1) = \pi(1)$. Pour $|\lambda g| < 1$, on a

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi^{-1}(1 - \lambda g) \\ &= \sum_{n \geq 0} \lambda^n \pi^n(g) \\ &= \pi(1) + \lambda \pi(g) + \lambda^2 \pi^2(g) + \dots \end{aligned}$$

Par identification, $\pi(g) = 0$ donc $g \in [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})}$ et donc $[g]_{\mathcal{D}_\alpha^p} \subset [f]_{\mathcal{D}_\alpha^p}$. \square

Nous avons ainsi le corollaire suivant.

Corollaire 4.7.3. *Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et soit $g \in \mathcal{D}_\alpha^p \cap \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que $\operatorname{Re}(g) \geq 0$. On suppose qu'il existe $\gamma > 1$ telle que*

$$|g(z)| \leq \left(\log \frac{1}{|f(z)|} \right)^{-\gamma}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.10)$$

Si g est cyclique dans \mathcal{D}_α^p alors f est cyclique dans \mathcal{D}_α^p .

Chapitre 5

Cyclicité des fonctions intérieures singulières dans les espaces de Bergman à poids non radial

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces des fonctions holomorphes sur le disque \mathbb{D} pondérées par un poids non radial. Nous nous intéressons plus précisément à la cyclicité des fonctions intérieures singulières dans les espaces du type Bergman à poids non radial.

Soit Λ une fonction continue positive décroissante sur $(0, 1]$, $\Lambda(t) \rightarrow \infty$ et $\Lambda(t) = o(1/t)$ quand $t \rightarrow 0+$ telle que $t \rightarrow t\Lambda(t)$ croissante. Soit E un sous-ensemble fermé du cercle \mathbb{T} et soit $\text{dist}(z, E)$ la distance de z à E . On désigne $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$ l'espace de fonctions holomorphes f sur le disque \mathbb{D} telles que

$$\|f\|_{\Lambda, E}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 e^{-2\Lambda(\text{dist}(z, E))} dA(z) < +\infty,$$

où dA est la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque.

Puisque Λ est positive, les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$.

Si $E = \mathbb{T}$, on a $\text{dist}(z, E) = 1 - |z|$ et $\Lambda(\text{dist}(z, E)) = \Lambda(1 - r)$ donc le poids devient radial et si de plus, $\Lambda(t) = \frac{\alpha}{2} \log 1/t$ avec $\alpha \geq 0$, on

retrouve l'espace de Bergman à poids classique \mathcal{A}_α^2 que nous avons étudié précédemment dans le chapitre 2. Puisque $\Lambda(t) \geq 0$, alors $\mathcal{A}_0^2 \subset \mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ et ce pour n'importe quel sous-ensemble E de \mathbb{T} .

Une fonction f dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ si l'ensemble des fonctions pf avec p un polynôme est dense dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$.

Puisque $H^2 \subset \mathcal{A}_0^2 \subset \mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$, les fonctions extérieures sont donc cycliques dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$. Le théorème de Beurling nous dit que les fonctions intérieures singulières ne sont pas cycliques dans H^2 mais dans les espaces de Bergman classique, il existe des fonctions intérieures singulières cycliques. Rappelons que la fonction intérieure singulière S_ν associée à la mesure ν finie positive sur \mathbb{T} et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par

$$S_\nu(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (5.1)$$

Par exemple, si $E = \mathbb{T}$ et $\Lambda(t) = \alpha \log 1/t$, $\alpha \geq 0$, $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2 = \mathcal{A}_\alpha^2$ l'espace de Bergman à poids classique. Dans ce cas, Shapiro [50, 47] ensuite Korenblum [35] et indépendamment Robert [45] ont donné une caractérisation complète des fonctions intérieures singulières cycliques dans \mathcal{A}_α^2 . Ils ont montré que la fonction intérieure singulière S_ν associée à la mesure singulière ν est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 si et seulement si pour tout ensemble de Carleson K , on a $\nu(K) = 0$, voir Théorème 3.2.10. Soit E un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} , puisque $\mathcal{A}_0^2 \subset \mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$, si $\nu(K) = 0$ pour tout ensemble de Carleson K , alors la fonction intérieure singulière S_ν associée à la mesure ν est cyclique.

Lorsque $E = \{1\}$, Borichev-El-Fallah-Hanine [11] ont étudié la cyclicité de la fonction intérieure singulière associée à δ_1 , la mesure de Dirac en 0

$$S_{\delta_0}(z) = I(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

dans $\mathcal{A}_{\Lambda,\{1\}}^2$. Ils ont prouvé que I est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,\{1\}}^2$ si et seulement si

$$\int_0 \sqrt{\frac{\Lambda(t)}{t}} dt = \infty.$$

Lorsque E est un ensemble triadique de Cantor et $\Lambda_\alpha(t) = 1/t \log^\alpha(1/t)$, ils ont montré que I est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda_\alpha,E}^2$ si et seulement si

$$\alpha \leq 2/(2 - (\log 2/\log 3)).$$

Dans ce travail, nous allons étudier la cyclicité de fonctions intérieures singulières autres que la fonction I . Notre étude est basée sur l'estimation de la fonction intérieure singulière. Soit E un sous-ensemble fermé du cercle unité \mathbb{T} et soit ν une mesure finie positive sur \mathbb{T} singulière par rapport à la mesure de Lebesgue de support E . Soit S_ν la fonction intérieure singulière associée à ν donnée par (5.1). On désigne ω_ν le module de continuité de la mesure ν défini par :

$$\omega_\nu(r) = \sup_{|J|<r} \nu(J)$$

où J est un arc du cercle unité \mathbb{T} .

Shapiro, Théorème 3.2.6, a donné une estimation de la fonction intérieure singulière associée à la mesure ν

$$S_\nu(z) \geq \exp\left(c \frac{\omega_\nu(1-|z|)}{1-|z|}\right) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ensuite, Esterle [24] et Ransford [40] ont donné des raffinements du type radial de cette estimation en termes du module de z . Nous donnons ici une estimation de même type en fonction de la distance par rapport au support de la mesure ν .

Théorème 5.1.1. *Soit ν une mesure finie positive sur \mathbb{T} singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit S_ν la fonction intérieure singulière associée à ν :*

$$S_\nu(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors

$$|S_\nu(z)| \geq \exp\left\{-A \frac{(1-|z|^2)\omega_\nu(\text{dist}(z, E))}{\text{dist}(z, E)^2}\right\} \quad (5.2)$$

où $A = \pi \coth(\pi^2)$ et E est le support de ν .

Nous montrons que l'estimation du théorème 5.1.1 est optimale, voir Théorème 5.3.4, dans le sens suivant lorsque $E = E_\zeta$ est un ensemble parfait symétrique de rapport constant ζ et si on considère la L -mesure de E_ζ , alors la fonction intérieure singulière associée à la L -mesure vérifie

$$\log |S_L(z)| \asymp \frac{1-|z|^2}{\text{dist}(z, E)^{2-\alpha}}, \quad z \in \Omega$$

pour un certain domaine Ω associé à E et $\alpha = \log 2 / \log(1/\zeta)$ la dimension de Hausdorff de E . Nous donnons aussi des estimations précises de la fonction intérieure singulière lorsque la mesure est discrète.

Soit h une fonction déterminante de Hausdorff, et notons H_h la mesure h -Hausdorff du cercle \mathbb{T} . Il résulte du théorème de Hausdorff [30, Chap. 2, Théorème 6] qu'il existe un sous-ensemble fermé symétrique parfait E du cercle \mathbb{T} tel que $H_h(E) > 0$. Et puisque $H_h(E) > 0$, d'après le théorème de Frostman [30], il existe une mesure ν positive finie sur E telle que $\nu(E) > 0$ et son module de continuité $\omega_\nu(t) \leq h(t)$. Si on pose $h(t) = t\Lambda(t)$, on peut inverser S_ν dans l'espace $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$, i.e. $1/S_{\alpha\nu} \in \mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ pour un certain $\alpha > 0$. Ceci nous permet de montrer l'existence d'une fonction intérieure singulière cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ dont le support est de h -mesure de Hausdorff strictement positive. Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant

Théorème 5.1.2. *Soit $h(t) = t\Lambda(t)$, on suppose que h est croissante. Si $H_h(E) > 0$, alors il existe une fonction intérieure singulière cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$.*

Notre preuve repose essentiellement sur l'estimation de la fonction intérieure singulière.

5.2 Minoration de la fonction intérieure singulière

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la minoration de la fonction intérieure singulière en terme du module de continuité de la mesure associée et de la distance par rapport au support de la mesure.

Ransford [40] a donné récemment le théorème suivant sur la fonction intérieure singulière S_ν :

Théorème 5.2.1 (Ransford). *Soit $w : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$ une fonction continue décroissante telle que*

$$\sup_{0 < r \leq 1} w(r) < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} w(r) = 0$$

alors il existe une fonction intérieure singulière S_ν non constante telle

$$\min_{|z| \leq r} |S_\nu(z)| \geq w(1 - r), \quad 0 < r \leq 1. \quad (5.3)$$

Dans cette section, nous montrons en premier lieu le résultat suivant pour la fonction intérieure singulière. Ainsi, nous aurons une amélioration du résultat de Ransford.

Théorème 5.2.2. *Soit ν une mesure finie positive sur \mathbb{T} singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit S_ν la fonction intérieure singulière associée à ν , alors*

$$|S_\nu(re^{i\theta})| \geq \exp \left\{ -A \frac{(1 - |z|^2)\omega_\nu(\text{dist}(z, \text{supp } \nu))}{\text{dist}(z, \text{supp } \nu)^2} \right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

où $A = \pi \coth(\pi^2)$.

Démonstration. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$|S_\nu(re^{i\theta})| = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\nu(t) \right\}$$

où $P_r(\theta - t)$ est le noyau de Poisson défini par

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}.$$

Soit E est le support de la mesure ν . Soit $z_0 = e^{i\theta_0} \in E$ tel que $|z - z_0| = \text{dist}(z, E)$. Si $e^{it} \in E$ alors on a

$$|z - e^{it}| \geq \frac{1}{2}|z - e^{it}| + \frac{1}{2}|z - z_0| \geq \frac{1}{2}|z_0 - e^{it}|.$$

Ainsi pour tout $e^{it} \in E$,

$$\begin{aligned} |z - e^{it}|^2 &\geq \left(\frac{1}{2}|z - e^{it}| + \frac{1}{2}|z - z_0| \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(|z - e^{it}|^2 + 2|z - e^{it}||z - z_0| + |z - z_0|^2) \\ &\geq \frac{1}{4}(|z - e^{it}|^2 + |z - z_0|^2 + |z - z_0|^2) \\ &\geq \frac{1}{8}|z_0 - e^{it}|^2 + \frac{1}{2}\text{dist}(z, E)^2. \end{aligned}$$

Si $t \in [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$,

$$|z_0 - e^{it}| \geq \frac{2}{\pi}|\theta_0 - t|$$

On obtient :

$$P_r(\theta - t) \leq \frac{2\pi^2(1 - |z|^2)}{|\theta_0 - t|^2 + \pi^2 \text{dist}(z, E)^2}$$

et donc

$$\log |S_\nu(z)| \geq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\pi^2(1 - |z|^2)}{|\theta_0 - t|^2 + \pi^2 \text{dist}(z, E)^2} d\nu(t).$$

Soit $p = \lceil \frac{\pi}{\text{dist}(z, E)} \rceil$. Pour tout $k \in \{-p-1, \dots, p\}$, on définit l'arc fermé I_k de \mathbb{T} par

$$I_k = \left\{ t \in [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[: k \text{dist}(z, E) \leq t - \theta_0 \leq (k+1)\text{dist}(z, E) \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \log |S_\nu(z)| &\geq -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-p-1}^p \frac{2\pi^2(1 - |z|^2)}{(k+1)^2 \text{dist}(z, E)^2 + \pi^2 \text{dist}(z, E)^2} \int_{I_k} d\nu(t) \\ &\geq -\sum_{k=-p-1}^p \frac{\pi(1 - |z|^2)}{(k+1)^2 \text{dist}(z, E)^2 + \pi^2 d(z, E)^2} \nu(I_k) \\ &\geq -\frac{\pi(1 - |z|^2)}{\text{dist}(z, E)^2} \omega_\nu(\text{dist}(z, E)) \sum_{k=-p-1}^p \frac{1}{(k+1)^2 + \pi^2}. \end{aligned}$$

Par le théorème des résidus, on a

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi z)$$

et puisque $-i \cotan(iz) = \coth(z)$, on obtient

$$\sum_{k=-p-1}^p \frac{1}{(k+1)^2 + \pi^2} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 + \pi^2} = \frac{\cosh(\pi^2)}{\sinh(\pi^2)}.$$

D'où,

$$|S_\nu(z)| \geq \exp \left\{ -\pi \coth(\pi^2) \frac{(1 - |z|^2)}{\text{dist}(z, E)^2} \omega_\nu(\text{dist}(z, E)) \right\}.$$

□

Remarque 5.2.3. *On retrouve le résultat connu que la limite inf de la fonction intérieure singulière est nulle lorsqu'on s'approche du spectre et la limite à l'extérieure du support lorsqu'on s'approche du cercle est 1, voir [36]. Nous donnons ici les détails qui découlent de notre estimation.*

(1) *Si $\xi \in E$, alors $\text{dist}(z, E) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \xi$. Puisque $\text{dist}(z, E) \geq 1 - |z|$ alors*

$$\begin{aligned} \liminf_{z \rightarrow \xi} |S_\nu(z)| &\geq \lim_{|z-\xi| \rightarrow 0} \exp \left\{ - \frac{A(1 - |z|^2)}{\text{dist}(z, \xi)^2} \omega_\nu(\text{dist}(z, \xi)) \right\} \\ &\geq \lim_{|z-\xi| \rightarrow 0} \exp \left\{ - \frac{2A}{\text{dist}(z, \xi)} \omega_\nu(\text{dist}(z, \xi)) \right\}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_\nu(t)/t = +\infty$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \liminf_{z \rightarrow \xi} |S_\nu(z)| &= \lim_{|z-\xi| \rightarrow 0} \exp \left\{ - \frac{A(1 - |z|^2)}{\text{dist}(z, \xi)^2} \omega_\nu(\text{dist}(z, \xi)) \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) *Si $\xi \in \mathbb{T} \setminus E$ alors $\text{dist}(z, E) \neq 0$. On pose $C = \omega_\nu(\text{dist}(z, \xi))/\text{dist}(z, \xi)^2$ et donc*

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \xi} |S_\nu(z)| &= \lim_{|z-\xi| \rightarrow 0} \exp \left\{ - \frac{A(1 - |z|^2)}{\text{dist}(z, \xi)^2} \omega_\nu(\text{dist}(z, \xi)) \right\} \\ &= \lim_{|z-\xi| \rightarrow 0} \exp \left\{ - AC(1 - |z|) \right\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nous arrivons donc au corollaire suivant,

Corollaire 5.2.4. *Soit $\omega : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$ telle que $\sup_{0 \leq r < 1} \omega(r) < 1$ et $\lim_{r \rightarrow 0} \omega(r) = 0$. Alors il existe une fonction intérieure singulière sur \mathbb{D} telle que*

$$|S_\nu(z)| \geq \omega(\text{dist}(z, E))^{\frac{1-|z|}{\text{dist}(z, E)}} \geq \omega(\text{dist}(z, E)), \quad z \in \mathbb{D},$$

où E est le support de la mesure de ν .

Démonstration. Pour la régularisation de ω , on utilise la même méthode que celle d'Esterle et Ransford. On définit deux fonctions $g, h :]0, 1] \rightarrow]0, \infty[$ par

$$g(t) = \frac{1}{2A} \log \frac{1}{\omega(t)} \quad \text{et} \quad h(t) = \min \left\{ \sqrt{t}, \inf_{s \in [t, 1]} sg(s) \right\}.$$

La fonction $g(t)$ est décroissante et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \infty$. Par définition, h est une fonction croissante sur $]0, 1]$ et nous avons aussi $h(t) \leq tg(t)$. Pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} h(t)/t &= \min \left\{ \sqrt{t}, \inf_{s \in [t, 1]} sg(s) \right\} / t \\ &= \min \left\{ \sqrt{t}/t, \inf_{s \in [t, 1]} sg(s)/t \right\} \\ &= \min \left\{ \sqrt{t}/t, \inf_{s \in [t, \sqrt{t}]} sg(s)/t, \inf_{s \in [\sqrt{t}, 1]} sg(s)/t \right\} \\ &\geq \min \left\{ 1/\sqrt{t}, g(\sqrt{t}), g(1)/\sqrt{t} \right\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t)/t = +\infty.$$

Donc h une fonction croissante, positive telle que $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$. Soit alors H_h , une h -mesure de Hausdorff sur le cercle \mathbb{T} . Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)/t = +\infty$, d'après le théorème de Hausdorff 2.2.3, il existe un sous-ensemble fermé E de \mathbb{T} tel que $0 < H_h(E) < +\infty$ et donc E a une mesure de Lebesgue nulle [30]. Soit $H_h(E) > 0$, le théorème de Frostman 2.2.4 nous donne l'existence d'une mesure ν positive finie sur E telle que $\nu(E) > 0$ et $\omega_\nu(t) \leq h(t)$. Puisque E est de mesure de Lebesgue nulle, la mesure ν est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit maintenant la fonction intérieure singulière associée à la mesure ν par :

$$S_\nu(z) = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{T}} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\nu(t) \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Par le théorème 5.2.2, on a

$$\begin{aligned} |S_\nu(z)|^{\frac{\text{dist}(z, E)}{1-|z|}} &\geq \exp \left\{ - 2A \frac{\omega_\nu(\text{dist}(z, E))}{\text{dist}(z, E)} \right\} \\ &\geq \exp \left\{ - \log \frac{1}{\omega(\text{dist}(z, E))} \right\} \\ &\geq \omega(\text{dist}(z, E)). \end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.5. (1) Si $\zeta \in E$,

$$\liminf_{z \rightarrow \zeta} |S_\nu(z)| = \liminf_{z \rightarrow \zeta} \omega(\text{dist}(z, E))^{\frac{1-|z|}{\text{dist}(z, E)}} = 0.$$

(2) Si $\zeta \in \mathbb{T} \setminus E$,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} |S_\nu(z)| = \lim_{z \rightarrow \zeta} \omega(|z|)^{\frac{1-|z|}{\text{dist}(z, E)}} = 1.$$

(3) Puisque $d(z, E) \geq 1 - r$ et

$$|S_\nu(z)| \geq \omega(\text{dist}(z, E)) \geq \omega(1 - r).$$

Nous obtenons ainsi le résultat de Ransford.

5.3 Majoration de la fonction intérieure singulière

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'estimation inverse de la fonction intérieure singulière en terme du module de continuité de la mesure associée et de la distance par rapport au support de la mesure.

5.3.1 Mesure singulière purement atomique

L'estimation de la fonction intérieure singulière associée à la mesure de Dirac en 0 vérifie

$$|S_{\delta_0}(z)| = |I(z)| = \left| e^{\frac{z+1}{z-1}} \right| = e^{-\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nous allons nous intéresser au cas particulier où la mesure est purement atomique : soit $(\lambda_k) \in \ell^1$ et soit

$$\mu = \sum_{k \geq 0} \lambda_k \delta_{e^{i\theta_k}}. \quad (5.4)$$

On suppose que $\theta_k = \theta(k)$ et $\lambda_k = \lambda(k)$ où θ et λ sont deux fonctions définies sur $[0, +\infty)$ continues et strictement décroissantes et la fonction λ/θ^2 est décroissante. Nous avons le résultat suivant

Proposition 5.3.1. Soit μ la mesure définie par (5.4). Alors pour $0 < r < 1$, on a

$$\log \frac{1}{|S_\mu(r)|} \asymp (1-r) \int_0^{\theta^{-1}(1-r)} \frac{\lambda(x)}{\theta^2(x)} dx + \frac{1}{1-r} \int_{\theta^{-1}(1-r)} \lambda(x) dx. \quad (5.5)$$

Démonstration. Nous avons

$$P_\mu(r) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k \frac{1-r^2}{|r - e^{i\theta_k}|^2}, \quad r < 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{|S_\mu(r)|} &= \sum_k \lambda_k \frac{1-r^2}{|r - e^{i\theta_k}|^2} \\ &\asymp \sum_{\theta_k \geq 1-r} \lambda_k \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + \theta_k^2} + \sum_{\theta_k \leq 1-r} \lambda_k \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + \theta_k^2} \\ &\asymp + \sum_{k \leq \theta^{-1}(1-r)} (1-r^2) \frac{\lambda_k}{\theta_k^2} + \sum_{k \geq \theta^{-1}(1-r)} \frac{\lambda_k}{1-r} \\ &\asymp (1-r) \int_0^{\theta^{-1}(1-r)} \frac{\lambda(x)}{\theta^2(x)} dx + \frac{1}{1-r} \int_{\theta^{-1}(1-r)} \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.3.2. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit

$$\mu_{\alpha,\beta} = \sum_{k \geq 0} 2^{-\alpha k} (1+k)^\beta \delta_{e^{i2^{-k}}}.$$

Alors

$$\log \frac{1}{|S_{\mu_{\alpha,\beta}}(r)|} \asymp \frac{\left(\log \frac{e}{1-r}\right)^\beta}{(1-r)^{1-\alpha}}, \quad r < 1.$$

Démonstration. Nous avons $\theta(x) = e^{-x \log 2}$ et $\lambda(x) = (1+x)^\beta e^{-\alpha x \log 2}$. Il suffit d'appliquer la Proposition 5.3.1. □

5.3.2 Mesure portée par un ensemble parfait symétrique de rapport constant

Nous nous intéressons au cas où le support de la mesure serait un ensemble du type Cantor et plus particulièrement, lorsque la mesure est la

L -mesure, et ce, lorsqu'elle est portée par un ensemble parfait symétrique de rapport constant.

On rappelle brièvement la construction d'un parfait symétrique de rapport constant $\zeta \in]0; \frac{1}{2}[$ et la fonction de Lebesgue associée à de tels ensembles. À la première étape, on enlève un intervalle ouvert du milieu du segment $[0; 2\pi]$ de longueur $2\pi(1 - 2\zeta)$. Ensuite, on enlève deux intervalles ouverts des milieux des deux intervalles fermés restants de la première étape de longueur chacun $2\pi(1 - 2\zeta^2)$. À la n -ième étape, on obtient un ensemble E_n union de 2^n intervalles fermés chacun de longueur $2\pi\zeta^n$,

$$E_n = \bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} I_{n,k}.$$

Les 2^n origines des intervalles constituant du E_n sont de la forme, voir [30]

$$2\pi(1 - \zeta) (\epsilon_1 + \epsilon_2\zeta + \dots + \epsilon_k\zeta^{k-1})$$

où $\epsilon_j \in \{0; 1\}$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

L'ensemble parfait symétrique de rapport constant ζ est

$$E_\zeta = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = \left\{ 2\pi \sum_{n \geq 1} \epsilon_n (1 - \zeta) \zeta^{n-1}; \quad \epsilon_j \in \{0; 1\} \right\}.$$

On associe à E_ζ la fonction de Lebesgue définie de la manière suivante : Soit L_n une fonction de $[0; 2\pi]$ dans \mathbb{R} , continue sur $[0; 2\pi]$ avec $L_n(0) = 0$ et $L_n(2\pi) = 1$, linéaire et croissante de $1/2^n$ sur chacun 2^n intervalle $(I_{n,k})_{1 \leq k \leq 2^n}$ de E_n , i.e., si on écrit $I_{n,k} = [\alpha, \beta]$, on a $L_n(\beta) - L_n(\alpha) = 1/2^n$. La fonction L_n est constante sur chaque intervalle $[a_{n,i,j}; b_{n,i,j}]$ contigu à E_n et donc vérifie

$$L_n(b_{n,i,j}) - L_n(a_{n,i,j}) \leq 1/2^n.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) = L(x)$$

une fonction continue, constante sur chaque intervalle contigu à E_ζ , croissante de $1/2^n$ sur chacun 2^n intervalle $I_{n,k}$ de E_n avec $L(0) = 0$ et $L(2\pi) = 1$. On appelle la L -mesure d'un intervalle $[a; b]$, l'unique mesure sur $[0; 2\pi]$ telle que

$$\int_a^b dL = L(b) - L(a).$$

Puisque L est continue et constante sur le complémentaire de E_ζ , dL est concentré sur E_ζ . Si $[a; b] \subset [0; 2\pi]$ avec $b - a \leq 2\pi\zeta^n$ alors $L(b) - L(a) \leq \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \leq n$ et donc

$$\int_a^b dL = L(b) - L(a) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Nous avons donc

Lemme 5.3.3. *Soit ω_L le module de continuité de la L -mesure associée à E_ζ alors*

$$\omega_L(t) \asymp t^\alpha$$

avec $\alpha = \log(2)/\log(1/\zeta)$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Soit n tel que

$$2\pi \frac{\zeta^n}{2} \leq \epsilon \leq 2\pi\zeta^n.$$

Si I est un intervalle de longueur ϵ alors I rencontre E_n au plus à deux intervalles. Donc

$$\begin{aligned} \omega_L(\epsilon) &= \sup_{|I| \leq \epsilon} \left\{ \int_I dL \right\} \\ &= 2 \sup_{\substack{b, a \in [0; 2\pi] \\ b - a < 2\pi\zeta^n}} \left\{ L(b) - L(a) \right\} \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

D'autre part, il existe un intervalle J de longueur ϵ qui contient un intervalle de $I_{n+1, \ell}$ de E_{n+1} donc

$$\omega_L(\epsilon) \geq \int_J dL \geq \int_{I_{n+1, \ell}} dL \geq \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (5.6)$$

Ainsi,

$$\omega_L(\epsilon) \asymp \frac{1}{2^n}.$$

Notons que

$$\frac{1}{2^n} = e^{n \frac{\log(2)\log(\zeta)}{\log(1/\zeta)}} = e^{\alpha \log(\zeta^n)} = \zeta^{n\alpha} \asymp \epsilon^\alpha.$$

D'où

$$\omega_L(\epsilon) \asymp \epsilon^\alpha.$$

□

Soit I un arc du cercle \mathbb{T} de longueur $|I|$ et soit $S(I)$ la fenêtre de Carleson définie par

$$S(I) = \{z = re^{it} \in \mathbb{D} : e^{it} \in I \text{ et } 0 < 1 - r < |I|\}.$$

On pose

$$S_{1/2}(I) = \{z \in S(I) \in \mathbb{D} : |I|/2 < 1 - |z| < |I|\}$$

et

$$\Omega := \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} \{z = re^{i\theta} \in S_{1/2}(I_{n,k}) : I_{n+1,\ell} \subset [\theta, \theta + d(z, I_n)]\}.$$

Notons que $I_{n+1,\ell} \subset I_{n,k}$ et les $I_{n,k}$ sont les intervalles de E_n .

Le théorème suivant montre que l'estimation est optimale dans certaines régions.

Théorème 5.3.4. *Soient E_ζ un parfait symétrique de rapport constant ζ et ω_L le module de continuité de la L -mesure associée à E_ζ . Alors*

$$\log |S_L(z)| \asymp -\frac{1 - |z|^2}{\text{dist}(z, E_\zeta)^{2-\alpha}}, \quad z \in \Omega,$$

où $\alpha = \log 2 / \log(1/\zeta)$.

Démonstration. D'après le théorème 5.2.2, on a

$$|S_L(z)| \geq \exp \left\{ -A \frac{(1 - |z|)\omega_L(\text{dist}(z, E_\zeta))}{\text{dist}(z, E_\zeta)^2} \right\}, \quad z \in \mathbb{D}$$

et d'après le lemme 5.3.3, $\omega_L(t) \asymp t^\alpha$. Donc il existe une constante $c > 0$

$$\begin{aligned} |S_L(z)| &\geq \exp \left\{ -c \frac{(1 - |z|)\text{dist}(z, E_\zeta)^\alpha}{\text{dist}(z, E_\zeta)^2} \right\} \\ &\geq \exp \left\{ -c \frac{(1 - |z|)}{\text{dist}(z, E_\zeta)^{2-\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\log |S_L(z)| \gtrsim -\frac{1 - |z|^2}{\text{dist}(z, E_\zeta)^{2-\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Montrons maintenant l'estimation inverse. Soit $z = re^{i\theta} \in \Omega$, donc il existe $n \geq 0$, $k \leq 2^n$ et ℓ tels que $I_{n+1,\ell} \subset I_{n,k}$. $e^{i\theta}$ appartient à un intervalle $I_{n,k}$ de E_n et $I_{n+1,\ell} \subset [\theta, \theta + \text{dist}(z, I_n)]$. Notons également que $\text{dist}(z, I_n)$ et $\text{dist}(z, E_\zeta)$ sont comparables.

On a

$$|S_\nu(re^{i\theta})| = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dL(t) \right\}$$

où $P_r(\theta - t)$ est le noyau de Poisson défini par

$$P_r(t - \theta) := \frac{1 - r^2}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2}.$$

Pour $1 > r \geq \frac{1}{2}$ et $t \in [\theta, \theta + \text{dist}(z, E_\zeta)]$,

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2 &= (1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{t - \theta}{2}\right) \\ &\leq (1 - r)^2 + (\theta - t)^2 \\ &\leq 2 \text{dist}^2(z, E_\zeta). \end{aligned}$$

Comme dans (5.6), nous avons

$$\int_\theta^{\theta + d(z, E_\zeta)} dL \geq \int_{I_{n+1,\ell}} dL \geq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Puisque $z \in \Omega$, $z/|z| \in I_{n,k}$, $\text{dist}(z, E_\zeta)$ est comparable avec $|I_{n,k}| = 2\pi\zeta^n$. Soit $\alpha = \log 2 / \log(1/\zeta)$. alors $2^{-n} = \zeta^{\alpha n} \asymp \text{dist}(z, E_\zeta)^\alpha$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} P[L](re^{i\theta}) &\geq \int_\theta^{\theta + d(z, E_\zeta)} \frac{1 - r}{2 \text{dist}^2(z, E_\zeta)} dL(t) \\ &\geq C \frac{(1 - r)}{\text{dist}^2(z, E_\zeta)} \int_{I_{n+1,\ell}} dL \\ &\geq \frac{C}{2} \frac{1 - r}{\text{dist}^{2-\alpha}(z, E_\zeta)} \end{aligned}$$

Donc

$$\log |S_L(z)| \lesssim -\frac{1 - |z|^2}{\text{dist}(z, E_\zeta)^{2-\alpha}}, \quad z \in \Omega.$$

□

5.4 Cyclicité des fonctions intérieures singulières

5.4.1 Existence de fonction cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$

Avant de présenter le résultat principal de cette section, quelques lemmes élémentaires sont nécessaires.

Lemme 5.4.1. *Les polynômes sont denses dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$.*

Démonstration. Notons par $f_r(z) = f(rz)$ avec $\frac{1}{2} < r < 1$. On a $\text{dist}(z, E) \leq \text{dist}(rz, E)$ alors

$$\|f_r\|_{\Lambda,E}^2 \leq \int_{\mathbb{D}} |f(rz)|^2 e^{-2\Lambda(\text{dist}(rz,E))} dA(z) = \frac{\|f\|_{\Lambda,E}^2}{r} \leq 2\|f\|_{\Lambda,E}^2.$$

Ainsi f_r est uniformément bornée, et donc f_r converge faiblement vers une fonction g . Puisque f_r converge ponctuellement vers f alors f_r converge vers f dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$. Si P_n est la somme partielle de f_r alors P_n converge vers f et donc les polynômes sont denses dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$. □

Lemme 5.4.2. *Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $1/f \in \mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$ alors f est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$.*

Démonstration. Puisque les polynômes sont denses dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$, si nous choisissons une suite de polynôme p_n qui converge de f^{-1} , alors

$$\|pf - 1\|_{\Lambda,E}^2 \leq \|f\|_\infty \|p_n - f^{-1}\|_{\Lambda,E}^2 \rightarrow 0.$$

□

Lemme 5.4.3. *On suppose que θ est une fonction intérieure. Si θ_0 divise θ alors $[\theta]_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2} \subset [\theta_0]_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2}$.*

Démonstration. Si θ_0 divise θ , alors $\theta = \theta_0\theta_1$ avec θ_1 une fonction intérieure. Soit P_n la somme partielle de la série de Taylor de θ_1 alors $P_n \rightarrow \theta_1$ dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$. On a

$$\|P_n\theta_0 - \theta\|_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2}^2 = \|P_n\theta_0 - \theta_0\theta_1\|_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2}^2 \leq \|\theta_0\|_\infty \|P_n - \theta_1\|_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2}^2 \rightarrow 0.$$

□

Dans cette section, nous démontrerons le résultat ci-dessous. Il s'agit notre résultat principal :

Théorème 5.4.4. *Soit $h(t) = t\Lambda(t)$ croissante. Si $H_h(E) > 0$, alors il existe une fonction intérieure singulière cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$.*

Notre preuve repose essentiellement sur l'estimation de la fonction intérieure singulière 5.2.2.

Démonstration. Soit $h(t) = t\Lambda(t)$ une fonction déterminante de Hausdorff. donc h est une fonction croissante, positive telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} h(t)/t = +\infty$$

alors on peut définir la h -mesure de Hausdorff sur le cercle \mathbb{T} . Soit H_h , la h -mesure de Hausdorff sur le cercle \mathbb{T} . Par le théorème de Hausdorff 2.2.3, il existe un sous-ensemble fermé E de \mathbb{T} tel que $0 < H_h(E) < +\infty$. Il résulte du théorème de Frostman [30, Chap. 2, Théorème 3] qu'il existe une mesure positive ν portée par E tel que $\omega_\nu(t) \leq h(t)$. Alors

$$\omega_\nu(t) \leq h(t) = t\Lambda(t).$$

Soit S_ν la fonction intérieure singulière associée à la mesure ν . Puisque $\text{dist}(z, E) \geq 1 - |z|$ et d'après le théorème 5.2.2, on a

$$\begin{aligned} |S_\nu(re^{i\theta})| &\geq \exp \left\{ -A \frac{(1 - |z|)\Lambda(\text{dist}(z, E))}{\text{dist}(z, E)} \right\} \\ &\geq \exp \left\{ -A\Lambda(\text{dist}(z, E)) \right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{|S_\nu(z)|} \leq e^{A\Lambda(\text{dist}(z,E))}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $A\alpha - 1 \leq 0$. On a

$$\begin{aligned} \|S_{\alpha\nu}^{-1}\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}^2 &= \int_{\mathbb{D}} |S_{\alpha\nu}^{-1}(z)|^2 e^{-2\Lambda(\text{dist}(z,E))} dA(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} e^{2(A\alpha-1)\Lambda(\text{dist}(z,E))} dA(z) < \infty. \end{aligned}$$

Donc $S_{\alpha\nu}^{-1} \in \mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$. Puisque S_ν divise $S_{\alpha\nu} = S_\nu^\alpha$, par le lemme 5.4.3 on a

$$[S_{\alpha\nu}]_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2} \subset [S_\nu]_{\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2}.$$

Ainsi, d'après le Lemme 5.4.2 S_ν est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda,E}^2$. □

5.4.2 Remarques

Le Théorème de Roberts-Korenblum [35, 45], nous permet d'avoir le résultat suivant

Proposition 5.4.5. *Soit E est un ensemble fermé de \mathbb{T} , et $\Lambda(t) = \alpha 2 \log(1/t)$ avec $\alpha > 0$. Alors S_ν est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$ si et seulement si $\nu(F) = 0$ pour tout ensemble F Carleson.*

Démonstration. Notons d'abord que

$$(1 - |z|)^\alpha \leq \text{dist}(z, E)^\alpha \leq 1$$

donc

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^2} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_0^2}. \quad (5.7)$$

Soit ν une mesure finie positive sur \mathbb{T} singulière par rapport à la mesure de Lebesgue et S_ν la fonction intérieure singulière associée à ν . Si $\nu(F) = 0$ pour tout ensemble F Carleson alors d'après le théorème 3.2.10, S_ν est cyclique dans \mathcal{A}^2 c'est-à-dire il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|1 - P_n S_\nu\|_{\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2} \leq \|1 - P_n S_\nu\|_{\mathcal{A}^2} \rightarrow 0$$

donc S_ν est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$.

Réciproquement si S_ν est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$ alors S_ν est cyclique dans \mathcal{A}_α^2 . Et d'après le théorème 3.2.10, $\nu(F) = 0$ pour tout ensemble F Carleson. \square

Remarque 5.4.6. *Lorsque $H_h(E)$ est positive, notre résultat 5.4.4 donne une autre fonction cyclique dont le support n'est pas un ensemble de Carleson. En effet, d'après le Théorème de Shapiro*

$$\int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt = \infty$$

si et seulement si $H_h(F) = 0$ pour tout ensemble F Carleson.

Lorsque E est un ensemble de Carleson, nous ne pouvons pas appliquer notre résultat avec $\Lambda(t) = \alpha 2 \log(1/t)$.

Plus généralement, un ensemble $F \subset E$ est dit Λ -Carleson si

$$\int_{\mathbb{T}} \Lambda(\text{dist}(z, F)) |d\zeta| < +\infty.$$

Dans [6], il a été montré que si E est un ensemble Λ -Carleson alors $H_h(E) = 0$ si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{t\Lambda'(t)}{h(t)} dt = -\infty.$$

Le théorème 3.2.10 a été généralisé pour les espaces $\mathcal{A}_{\Lambda, \mathbb{T}}^2$ lorsque

$$\log 1/t \lesssim \Lambda(t) \lesssim 1/t^\kappa,$$

pour un certain $\kappa < 1/2$. Dans [10], Bourhim, El Fallah, et Kellay ont montré que si $\nu(F) = 0$ pour tout ensemble F Λ -Carleson alors S_ν est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, \mathbb{T}}^2$.

Puisque $\text{dist}(z, E) \geq 1 - r = \text{dist}(z, \mathbb{T})$, alors

$$e^{-\Lambda(\text{dist}(z, E))} \geq e^{-\Lambda(\text{dist}(z, \mathbb{T}))}.$$

Donc

$$\|f\|_{\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2} \geq \|f\|_{\mathcal{A}_{\Lambda, \mathbb{T}}^2}.$$

et donc $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2 \subset \mathcal{A}_{\Lambda, \mathbb{T}}^2$. Nous avons alors le corollaire suivant

Corollaire 5.4.7. *Si $\nu(F) = 0$ pour tout ensemble F Λ -Carleson, alors S_ν est cyclique dans $\mathcal{A}_{\Lambda, E}^2$.*

Bibliographie

- [1] A. Aleman. The multiplication operator on Hilbert spaces of analytic functions. Habilitation, Allemagne.
- [2] A. Aleman. Hilbert spaces of analytic functions between the Hardy and the Dirichlet space. *Proc. Amer. Math. Soc.* 115 (1992), no. 1, 97-104.
- [3] A. Atzmon. Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces. *Acta Math.* 144 (1980), no. 1-2, 27-63.
- [4] H. Bahajji–El Idrissi ; H. El Azhar. Analytic Besov spaces, approximation, and closed ideals. *Canad. Math. Bull.* 66 (2023), no. 1, 259–268
- [5] H. Bahajji-El Idrissi ; O. El–Fallah. Approximation in spaces of analytic functions. *Studia Math.* 255 (2020), no. 2, 209–217.
- [6] R. Berman, L. Brown, and W. Cohn. Moduli of continuity and generalized BCH sets, *Rocky Mountain J. Math.* 17 (1987), 315-338.
- [7] A. Beurling. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Math.* 81 (1948), 239-255.
- [8] B. Bøe. A norm on the holomorphic Besov space. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131(2003), 235—241.
- [9] A. Bourhim ; O. El-Fallah ; K. Kellay. Boundary behaviour of functions of Nevanlinna class. *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004), no. 2, 347-395.
- [10] A. Bourhim ; O. El-Fallah ; K. Kellay. Comportement radial des fonctions de la classe de Nevanlinna. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333 (2001), no. 6, 529-532.
- [11] A. Borichev ; O. El-Fallah ; A. Hanine. Cyclicity in weighted Bergman type spaces. *J. Math. Pures Appl.* (9) 102 (2014), no. 6, 1041-1061.
- [12] L. Brown, A. Shields. Cyclic vectors in the Dirichlet space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 285 (1984) 269-304.

- [13] L. Carleson. Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, *Acta Math.* 87 (1952), 325-345
- [14] L. Carleson. Selected Problems on Exceptional sets, Van Nostrand Math. Stud., vol. 13, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
- [15] L. Carleson. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math. (2)* 76 (1962), 547-559.
- [16] P. Duren. Theory of H^p spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London 1970
- [17] K. Dyakonov. Besov spaces and outer functions. *Michigan Math. J.* 45 (1998), no. 1, 143-157.
- [18] J. Douglas. Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33(1), 263-321
- [19] O. El-Fallah ; K. Kellay ; J. Mashregghi ; T. Ransford. A primer on the Dirichlet space. Cambridge Tracts in Mathematics, 203. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [20] O. El-Fallah ; K. Kellay ; T. Ransford. Cantor sets and cyclicity in weighted Dirichlet spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 372 (2010), no. 2, 565—573.
- [21] O. El-Fallah ; K. Kellay ; T. Ransford. On the Brown-Shields conjecture for cyclicity in the Dirichlet space. *Adv. Math.* 222 (2009), no. 6, 2196-2214.
- [22] O. El-Fallah ; K. Kellay ; T. Ransford. Invariant subspaces of the Dirichlet space. Hilbert spaces of analytic functions, 133-141, CRM Proc. Lecture Notes, 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [23] O. El-Fallah ; K. Kellay ; K. Seip. Cyclicity of singular inner functions from the corona theorem. *J. Inst. Math. Jussieu* 11 (2012), no. 4, 815-824.
- [24] J. Esterle. Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymmetric weighted shifts. *J. Funct. Anal.* 144 (1997), no. 1, 64-104.
- [25] J. Garnett. Bounded analytic functions. Pure and Applied Mathematics, 96. Academic Press, Inc., New York-London, 1981
- [26] H. Hedenmalm ; A. Shields. Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions. *Michigan Math. J.* 37 (1990), no. 1, 91-104.
- [27] H. Hedenmalm ; B. Korenblum ; K. Zhu. Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000.

- [28] F. Holland ; J. Twomey. Integral means of functions with positive real part. *Canadian J. Math.* 32 (1980), no. 4, 1008-1020.
- [29] K. M. Hoffman. *Banach spaces of analytic functions*, reprint of the 1962 original, Dover, New York, 1988
- [30] J. P. Kahane ; R. Salem. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann, Paris 1963
- [31] K. Kellay ; F. Le Manach ; M. Zarrabi. Cyclicity in Dirichlet type spaces. *Complex analysis and spectral theory*, 181-193, *Contemp. Math.*, 743, Centre Rech. Math. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2020.
- [32] P. Koosis. *Introduction to H^p spaces*. Second edition. With two appendices by V. P. Havin. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 115. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [33] B. Korenblum. A Beurling-type theorem. *Acta Math.* 138 (1976), no. 3-4, 265-293.
- [34] B. Korenblum. An extension of the Nevanlinna theory. *Acta Math.* 135 (1975), no. 3-4, 187-219.
- [35] B. Korenblum. Cyclic elements in some spaces of analytic functions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 5 (1981), no. 3, 317-318.
- [36] J. Mashreghi, *Derivatives of inner Functions*, Springer, New York NY, 2013.
- [37] A. Nagel ; W. Rudin ; J. Shapiro. Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces. *Ann. of Math. (2)* 116 (1982), no. 2, 331-360.
- [38] A. Nicolau. The corona property for bounded analytic functions in some Besov spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 110 (1990), no. 1, 135-140.
- [39] N. Nikolski. *Operators, functions, and systems : an easy reading*. Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz. *Mathematical Surveys and Monographs*, 92. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002
- [40] T. Ransford. On the decay of singular inner functions. *Canad. Math. Bull.* 64 (2021), no. 4, 902-905.
- [41] T. Ransford. *Potential theory in the complex plane*. London Mathematical Society Student Texts, 28. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [42] S. Richter ; C. Sundberg. Invariant subspaces of the Dirichlet shift and pseudocontinuations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 341 (1994), no. 2, 863-879.
- [43] S. Richter ; C. Sundberg. Multipliers and invariant subspaces in the Dirichlet space. *J. Operator Theory* 28 (1992), no. 1, 167-186
- [44] S. Richter ; C. Sundberg. A formula for the local Dirichlet integral. *Michigan Math. J.* 38 (1991), no. 3, 355-379.
- [45] J. Roberts. Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p , $0 < p < 1$. *Illinois J. Math.* 29 (1985), no. 1, 25-38.
- [46] R. Salem ; A. Zygmund. Capacity of sets and Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 59 (1946), 23-41.
- [47] H. Shapiro. Weakly invertible elements in certain function spaces, and generators in ℓ_1 . *Michigan Math. J.* 11 (1964), 161-165.
- [48] J. Shapiro. Hausdorff measure and Carleson thin sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* 79 (1980), no. 1, 67-71.
- [49] J. Shapiro. ; A. Shields. Unusual topological properties of the Nevanlinna class. *Amer. J. Math.* 97 (1975), no. 4, 915-936
- [50] A. Shields. Cyclic vectors in some spaces of analytic functions. *Spectral Theory Symposium. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* 74 (1974), 293-296.
- [51] A. Shields. Weighted shift operators and analytic function theory. *Topics in operator theory*, pp. 49–128. *Math. Surveys*, No. 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.
- [52] D. Stegenga. Multipliers of the Dirichlet space. *Illinois J. Math.* 24 (1980), no. 1, 113-139.
- [53] B. A. Taylor ; D. L . Williams. Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. *Canadian J. Math.* 22 (1970), 1266–1283.
- [54] V. A. Tolokonnikov. The corona theorem in algebras of bounded analytic functions. *Amer. Math. Soc. Trans* 149 (1991) 61-93.
- [55] M. Zarrabi. Spectral synthesis and applications to C_0 -groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 60 (1996), no. 1, 128-142.
- [56] M. Zarrabi. Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité. *Bull. Soc. Math. France* 118 (1990), no. 2, 241-249.
- [57] Z. Wu. Carleson measures and multipliers for Dirichlet spaces. *J. Funct. Anal.* 169 (1999), no. 1, 148-163.

- [58] K. Zhu. Operator theory in function spaces. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [59] A. Zygmund. Trigonometric series. Vol. I, II. Third edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Résumé : Nous nous intéressons à l'étude des vecteurs cycliques dans les espaces de Bergman à poids non-radial et dans les espaces de Besov-Dirichlet. Nous montrons qu'une fonction intérieure singulière est cyclique dans les espaces de Bergman à poids non-radial lorsque le support de la mesure est un ensemble de type Cantor, la preuve est basée sur l'estimation de la fonction intérieure singulière. Nous montrons également qu'une fonction extérieure de l'espace de Besov-Dirichlet, continue sur le bord et dont l'ensemble des zéros est dénombrable est cyclique dans l'espace de Besov-Dirichlet, le théorème de la couronne permet de démontrer ce résultat.

Mots-clés : Cyclicité, espace de Bergman, espace de Besov-Dirichlet, fonction intérieure singulière, Théorème de la couronne

Abstract : We are interested in the study of cyclic vectors in non-radially weighted Bergman spaces and in the Besov-Dirichlet spaces. We show that an inner singular function is cyclic in non-radially weighted Bergman spaces when the support of the measure is a Cantor set, the proof is based on the estimation of the inner singular function. We also show that an outer function of the Besov-Dirichlet space, continuous on the boundary and whose set of zéros is countable is cyclic in the Besov-Dirichlet space, the corona theorem makes it possible to demonstrate this results.

Keywords : Cyclicity, Bergman space, Besov-Dirichlet space, singular inner function, Corona Theorem
