



HAL
open science

Modélisation des écoulements turbulents anisothermes en milieu macroporeux par une approche de double filtrage

Marie Drouin

► **To cite this version:**

Marie Drouin. Modélisation des écoulements turbulents anisothermes en milieu macroporeux par une approche de double filtrage. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2010. Français. NNT : 2010INPT0066 . tel-04274718

HAL Id: tel-04274718

<https://theses.hal.science/tel-04274718>

Submitted on 8 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)*
Discipline ou spécialité : *Dynamique des Fluides*

Présentée et soutenue par *Marie Drouin*
Le *08 novembre 2010*

Titre :
Modélisation des écoulements turbulents anisothermes en milieu macroporeux par une approche de double filtrage

JURY

<i>M. Christian MOYNE</i>	<i>LEMTA</i>	<i>Président</i>
<i>M. Olivier SIMONIN</i>	<i>IMFT</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>M. Denis FLICK</i>	<i>AGROPARISTECH</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>M. Pierre SAGAUT</i>	<i>Université Paris 6</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>M. Olivier GRÉGOIRE</i>	<i>STXN</i>	<i>Examineur</i>
<i>Melle. Marion CHANDESRIS</i>	<i>CEA Grenoble</i>	<i>Examineur</i>

École doctorale : *Mécanique, Énergétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)*

Unité de recherche : *Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse*

Laboratoire d'accueil :

Commissariat à l'Énergie Atomique

Direction de l'Énergie Nucléaire

Département de Modélisation des Systèmes et Structures

Service Fluides numériques, Modélisation et Études

Directeur de Thèse : *Olivier SIMONIN*

Encadrant CEA : *Olivier GRÉGOIRE*

*à Barry,
à ma famille,
à mes amis.*

Remerciements

Au cours de ma thèse, j'ai appris énormément de choses, mais j'ai aussi eu la chance de rencontrer une multitude de personnes qui m'ont encadrée, soutenue et aidée pendant ces trois années. Je tiens à les remercier.

Tout d'abord, je voudrais remercier les membres du jury qui ont accepté de participer à la soutenance, et en particulier les rapporteurs qui ont bien voulu relire le manuscrit.

Je souhaite aussi remercier toutes les personnes du CEA grâce à qui cette thèse a pu se dérouler dans d'excellentes conditions. Merci à Juliette Cahen, grâce à qui ce projet a pu commencer. Merci à Éric Royer, chef du LETR à mon arrivée, et Danielle Gallo qui lui a succédé de m'avoir accueillie, ainsi qu'à Daniel Daruge, chef du SFME. Je remercie les membres du SFME qui ont rendu ces trois années très riches, scientifiquement et humainement. Un merci tout particulier à Augustin pour son aide précieuse et ses calembours approximatifs.

Je remercie Olivier Simonin qui a accepté d'assurer la direction scientifique de cette thèse pour la confiance qu'il m'a accordée et la grande liberté qu'il m'a laissée dans la conduite de mes recherches.

Je tiens à remercier très chaleureusement Olivier Grégoire pour sa confiance, son soutien sans faille et son aide précieuse. Je lui suis infiniment reconnaissante pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et le temps qu'il y a consacré malgré un emploi du temps plus que chargé. Il a su me faire profiter de son expérience et de sa grande culture scientifique tout en me laissant une grande liberté. Nos échanges d'idées ont toujours été très productifs et enrichissants. Je le remercie aussi pour sa patience, sa bonne humeur, son dynamisme et sa gentillesse et j'espère que nous aurons de nouveau l'occasion de travailler ensemble.

Je tiens aussi à remercier les autres thésards : Benjamin et Gloria qui m'ont tellement fait rire, Thomas G., Anouar, Floraine, Yohan pour leur bonne humeur, Thomas A. pour ses T-shirts et ses super-pouvoirs informatiques. Enfin, merci à ma famille, surtout à mon père sans qui je ne me serais jamais lancée dans ce « très très grand travail », aux zigotos de l'IAM pour les vacances et tout le reste, à Taz, Hélène et Alice qui ont su me remonter le moral à grand renfort de bons petits plats, à Emma qui est toujours de bon conseil et bien sûr à Alexandre.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I Formalisme et mise en équations	7
1 Homogénéisation spatiale	9
1.1 Synthèse bibliographique	9
1.2 Méthode de prise de moyenne volumique	11
1.3 Étude d'écoulements laminaires en milieux poreux	13
2 Étude d'écoulements turbulents en milieux poreux	19
2.1 Ordre d'application des moyennes	19
2.2 Éléments de modélisation de la turbulence à l'échelle locale	21
2.3 Application combinée de la moyenne statistique et du filtre spatial	31
II Dispersion thermique	35
3 Étude de la dispersion thermique : écoulements laminaires	41
3.1 Établissement d'un modèle général de dispersion thermique pour des écoulements laminaires	41
3.2 Étude de la dispersion pour des écoulements laminaires en canaux	47
4 Étude de la dispersion thermique : écoulements turbulents	57
4.1 Établissement d'un modèle général de dispersion thermique pour des écoulements turbulents	57
4.2 Étude de la dispersion pour des écoulements turbulents en canaux	62
5 Proposition d'un modèle plus générique couvrant les différents régimes d'écoulement	67
5.1 Synthèse de l'analyse phénoménologique	67
5.2 Formulation générale du modèle de dispersion	70
5.3 Méthode de calibrage du modèle	71
5.4 Synthèse du modèle de dispersion	73
6 Exploitation du modèle de dispersion	75
6.1 Propagation d'un saut de température : impact de la dispersion passive	75
6.2 Écoulements stationnaires et flux de chaleur non uniformes	88

III	Échanges thermiques et dispersion	97
7	Modèle algébrique de température de paroi	103
7.1	Détermination des paramètres $\Delta\eta_j^*$ et $\Delta\zeta^*$ du modèle pour des écoulements en canaux	104
7.2	Évaluation du modèle algébrique de température de paroi	109
8	Un modèle macroscopique de température de paroi basé sur une équation de transport	119
8.1	Formulation générale	119
8.2	Détermination des paramètres du modèle	122
8.3	Évaluation du modèle macroscopique de température de paroi à équation de transport	127
8.4	Conclusion	134
IV	Modélisation de la turbulence en milieux poreux	135
9	Modélisation de turbulence en milieux poreux : état de l'art	139
9.1	Modèles RANS spatialement moyennés	139
9.2	Application simultanée des deux moyennes	148
9.3	Modèle basé sur une analyse à deux échelles	154
10	Modélisation de la turbulence en milieu poreux homogène	161
10.1	Analyse à deux échelles	161
10.2	Proposition d'un modèle de turbulence	173
10.3	Application au cas d'un milieu stratifié	178
10.4	Évaluation du modèle de turbulence	209
11	Vers un modèle dynamique de dispersion thermique	219
11.1	Diffusivité turbulente macroscopique	219
11.2	Modèle dynamique de dispersion thermique	220
	Conclusion	225
	Annexes	229
A	Détermination des constantes du modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$	231
A.1	Détermination de C_{ϵ_2}	231
A.2	Détermination de C_{μ}	232
A.3	Détermination de C_{ϵ_1}	232
B	Mise en œuvre numérique	235
B.1	Simulation d'écoulements établis en canaux	235
B.2	Résolution numérique de l'équation de température moyennée en 1D	246

Bibliographie 251

Publications 257

NOMENCLATURE

a	Constante de modélisation	-
b	Constante de modélisation	-
A_f	Interface fluide-solide	-
C_{ε_1}	Constante de modélisation	-
C_{ε_2}	Constante de modélisation	-
$C_{\varepsilon_w,1}$	Constante de modélisation	-
$C_{\varepsilon_w,2}$	Constante de modélisation	-
C_w	Constante de modélisation	-
c_k	Constante de modélisation	-
C_ζ	Constante de modélisation	-
C_η	Constante de modélisation	-
C_μ	Constante de modélisation	-
C_ℓ^P	Constante de modélisation	-
C_ℓ^A	Constante de modélisation	-
C_t^P	Constante de modélisation	-
C_t^A	Constante de modélisation	-
C_p	Capacité calorifique	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
C_P	Constante de modélisation	-
D_h	Diamètre hydraulique	m
\mathcal{D}_i^A	Tenseur de dispersion active	m
\mathcal{D}_{ij}^P	Tenseur de dispersion passive	$m^2 \cdot s^{-1}$
E_c	Nombre d'Eckert ($= u^2/c_p \Delta T_f$)	-
$\langle \bar{E}^m \rangle_f$	Énergie cinétique dispersive (ou énergie de sous-filtre du mouvement moyen)	$m^2 \cdot s^{-2}$
\bar{E}^M	Énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen	$m^2 \cdot s^{-2}$
\bar{E}_p	Dissipation supplémentaire (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds)	$m^2 \cdot s^{-3}$
f_1	Fonction d'amortissement	-
f_2	Fonction d'amortissement	-
f_μ	Fonction d'amortissement	-
f_p	Coefficient de frottement	-
\bar{F}_{ϕ_i}	i-ème composante de la force de traînée	N

g_i	Composante du vecteur gravitationnel	$m \cdot s^{-2}$
h	Coefficient d'échange thermique	$W \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$
\bar{k}	Énergie cinétique turbulente	$m^2 \cdot s^{-2}$
K	Perméabilité du milieu	m^2
l_i	Composante du vecteur décrivant la périodicité du milieu	m
l_m	Libre parcours moyen	m
l_ξ	Échelle de longueur caractéristique des variations microscopiques	m
L_ξ	Échelle de longueur caractéristique des variations macroscopiques	m
L	Échelle de longueur caractéristique de l'écoulement moyen	m
M	Nombre de Mach ($= U/a$)	-
n	Constante de modélisation	-
n_i	Composante de la normale extérieure à la paroi	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
P	Pression statique	Pa
Pe	Nombre de Péclet ($= UD_h/\alpha_f$)	-
Pr	Nombre de Prandtl ($= \nu_f/\alpha_f$)	-
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent ($= \nu_t/\alpha_t$)	-
PSF	Production de sous-filtre	$m^2 \cdot s^{-3}$
q	Rapport d'aspect d'une conduite annulaire	-
Q	Source volumique de chaleur	$m^2 \cdot s^{-3}$
r_0	Échelle de longueur associée au VER	m
r_1	Rayon intérieur d'une conduite annulaire	m
r_2	Rayon extérieur d'une conduite annulaire	m
R	Rayon d'une conduite à section circulaire	m
Re	Nombre de Reynolds ($= UD_h/\nu$)	-
Re_t	Nombre de Reynolds turbulent ($= \bar{k}^2/\nu\bar{\epsilon}$)	-
\bar{R}_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes de Reynolds	$m^2 \cdot s^{-2}$
t	Temps	s
T	Température	K
\mathcal{T}_{ij}^A	Tenseur de tortuosité active	$m^{-1} \cdot s^{-1}$
\mathcal{T}_{ij}^P	Tenseur de tortuosité passive	-
u_f	Vitesse de frottement	$m \cdot s^{-1}$
u_i	Composante du vecteur vitesse	$m \cdot s^{-1}$
u_η	Échelle de vitesse caractéristique des plus petits tourbillons	$m \cdot s^{-1}$
u^+	Vitesse normalisée ($= u/u_f$)	-
U	Échelle caractéristique de la vitesse	$m \cdot s^{-1}$
U_D	Vitesse de Darcy	$m \cdot s^{-1}$
y_w	Distance normale à la paroi	m
y^+	Distance normalisée à la paroi ($y^+ = y_w u_f/\nu$)	-

Lettres grecques

α_f	Diffusivité thermique du fluide ($= \lambda_f / (\rho C_p)$)	$m^2 \cdot s^{-1}$
α_t	Diffusivité thermique turbulente ($= \nu_t / Pr_t$)	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\alpha_{t\phi}$	Diffusivité thermique turbulente macroscopique ($= \langle \alpha_t \rangle_f$)	$m^2 \cdot s^{-1}$
δ_{ij}	Symbole de Kroenecker	-
δ_ω	Fonction de Dirac associée à l'interface fluide-solide	m^{-1}
$\Delta\eta_j$	Coefficient de modélisation de T_w	m
$\Delta\zeta$	Coefficient de modélisation de T_w	$m^2 \cdot s^{-1}$
ΔV	Volume du VER	m^3
ΔV_f	Volume de fluide inclus dans le VER	m^3
ε	Taux de dissipation	$m^2 \cdot s^{-3}$
$\bar{\varepsilon}$	Dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente	$m^2 \cdot s^{-3}$
$\bar{\varepsilon}_p$	Dissipation supplémentaire (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds)	$m^2 \cdot s^{-3}$
$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$	Dissipation de sillage	$m^2 \cdot s^{-3}$
ζ	Fonction de dispersion active	s
η	Échelle de Kolmogorov	m
η_j	Fonction de dispersion passive	m
κ	Constante de Von Kármán ($\kappa = 0.41$)	-
λ_f	Conductivité thermique du fluide	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
μ	Viscosité dynamique du fluide	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
ν_f	Viscosité cinématique du fluide ($= \mu / \rho$)	$m^2 \cdot s^{-1}$
ν_t	Viscosité turbulente	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\nu_{t\phi}$	Viscosité turbulente macroscopique	$m^2 \cdot s^{-1}$
ρ	Masse volumique du fluide	$kg \cdot m^{-3}$
σ_{ij}	Composante du tenseur des contraintes visqueuses	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
σ_ε	Nombre de Schmidt « turbulent » associé à $\bar{\varepsilon}$	-
σ_k	Nombre de Schmidt « turbulent » associé à \bar{k}	-
τ_d	Temps caractéristique de diffusion thermique	s
τ_{w1}	Temps caractéristique associé à la dissipation de sillage	s
τ_{w2}	Temps caractéristique associé à la traînée	s
ϕ	Porosité	-
$\bar{\Phi}$	Flux thermique en paroi	$W \cdot m^{-2}$
χ_f	Fonction caractéristique de la phase fluide	-
ω_i	Composante de la vitesse de l'interface fluide-solide	$m \cdot s^{-1}$

Opérateurs

$\bar{\cdot}$	Moyenne statistique
\cdot'	Fluctuation par rapport à la moyenne statistique
$\partial./\partial n$	Dérivée spatiale dans la direction normale à la paroi
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne spatiale sur un VER
$\langle \cdot \rangle_f$	Moyenne spatiale intrinsèque fluide
$\delta \cdot$	Fluctuation par rapport à la moyenne intrinsèque fluide
\otimes	Produit tensoriel entre deux vecteurs
$:$	Produit contracté entre deux vecteurs
\equiv	Opérateur de double moyenne

Exposants

\cdot^*	Variable adimensionnée
-----------	------------------------

Indices

\cdot_f	Fluide
\cdot_ℓ	Laminaire
\cdot_s	Solide
\cdot_t	Turbulent
\cdot_w	Paroi
\cdot_∞	État d'équilibre

Acronymes

DNS ou SND	<i>Direct Numerical Simulation</i> (Simulation Numérique Directe)
LES	<i>Large Eddy Simulation</i> (Simulation des Grandes Échelles)
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier Stokes</i>
REP	Réacteur à Eau Pressurisée
RJH	Réacteur Jules Horowitz
RNR-G	Réacteur à Neutrons Rapides à caloporteur gaz
VER ou REV	Volume Élémentaire Représentatif

INTRODUCTION

La modélisation des écoulements de fluides traversant des matrices solides complexes intéresse de nombreux domaines : réservoirs pétroliers, microclimats urbains, réfrigération de produits alimentaires... Cela concerne en particulier les écoulements dans les échangeurs thermiques et les cœurs de réacteurs nucléaires. La taille et la complexité de ces systèmes les rendent difficiles à modéliser et à simuler.

Pour illustrer notre propos, considérons le cas d'un cœur de réacteur nucléaire (voir figure 1). Un cœur de réacteur nucléaire se compose de façon schématique d'une succession de trois milieux de natures différentes : un milieu relativement libre (le plénum inférieur) suivi d'un milieu chargé (la zone combustible) puis à nouveau d'un milieu libre (le plénum supérieur). Les simulations fines (RANS ou LES) sont bien adaptées à l'étude des milieux libres. En revanche, la géométrie de la région combustible est très complexe, ce qui rend prohibitif le coût de calculs CFD dans ce domaine. Par exemple, un cœur de réacteur à eau pressurisée (REP) contient environ 150 assemblages, chacun de ces assemblages étant lui-même constitué de 300 crayons combustibles (voir figure 1). Le système peut cependant être décrit avec un niveau de détail moindre suivant une approche homogénéisée de type « milieu poreux ». La région combustible est alors considérée, à l'échelle macroscopique, comme un milieu continu équivalent dont les propriétés dépendent des phénomènes physiques mis en jeu à l'échelle du pore, aussi appelée *échelle microscopique*. Cette description est d'autant plus intéressante que la région combustible est constituée d'un grand nombre d'éléments identiques et constitue donc un milieu poreux périodique. L'enjeu porte alors sur la qualité de la modélisation physique qui permet de restituer, à l'échelle macroscopique, l'impact des détails microscopiques de l'écoulement.

Pour des écoulements dans les cœurs de réacteurs nucléaires, l'objectif est de comprendre et de maîtriser l'échange de chaleur entre le solide et le fluide. L'échelle microscopique est celle d'un sous-canal : écoulement entre quatre crayons (réacteurs à eau pressurisée ou REP, Fig. 1), entre deux plaques planes (réacteurs à neutrons rapides à caloporteur gaz ou RNR-G, Fig. 2) ou dans une conduite annulaire (réacteur Jules Horowitz ou RJH, Fig. 3). À cette échelle, les champs de vitesse et de température ne sont pas homogènes. À l'échelle de l'assemblage ou du cœur, nous nous intéressons plutôt à la répartition du débit et de la température homogénéisés. Or, l'hétérogénéité des profils de vitesse et de température à l'échelle du pore influe sur le transport des grandeurs macroscopiques et ses effets doivent donc être restitués à l'échelle macroscopique. Cela peut se faire en utilisant, par exemple, des coefficients de dispersion, d'échange ou de frottement. Pour renseigner ces différents coefficients, une possibilité est alors d'utiliser les résultats de simulations RANS bas-Reynolds à l'échelle du pore. La figure 4 décrit schématiquement cette démarche.

Différentes méthodes d'homogénéisation spatiale permettent d'aboutir à une modélisation de type « milieu poreux » : les méthodes probabilistes [65, 87], la méthode dite d'« homogénéisation » [7, 66, 89] et la méthode de prise de moyenne [98, 107]. Ces trois approches ont en commun le principe de séparation des échelles (voir figure 5). Cela signifie que l'écoulement est supposé pouvoir être décrit suivant deux échelles spatiales distinctes ℓ et L , qui caractérisent respectivement les phénomènes microscopiques et macroscopiques. Un point de vue différent doit alors être adopté selon l'échelle à laquelle se place l'observateur.

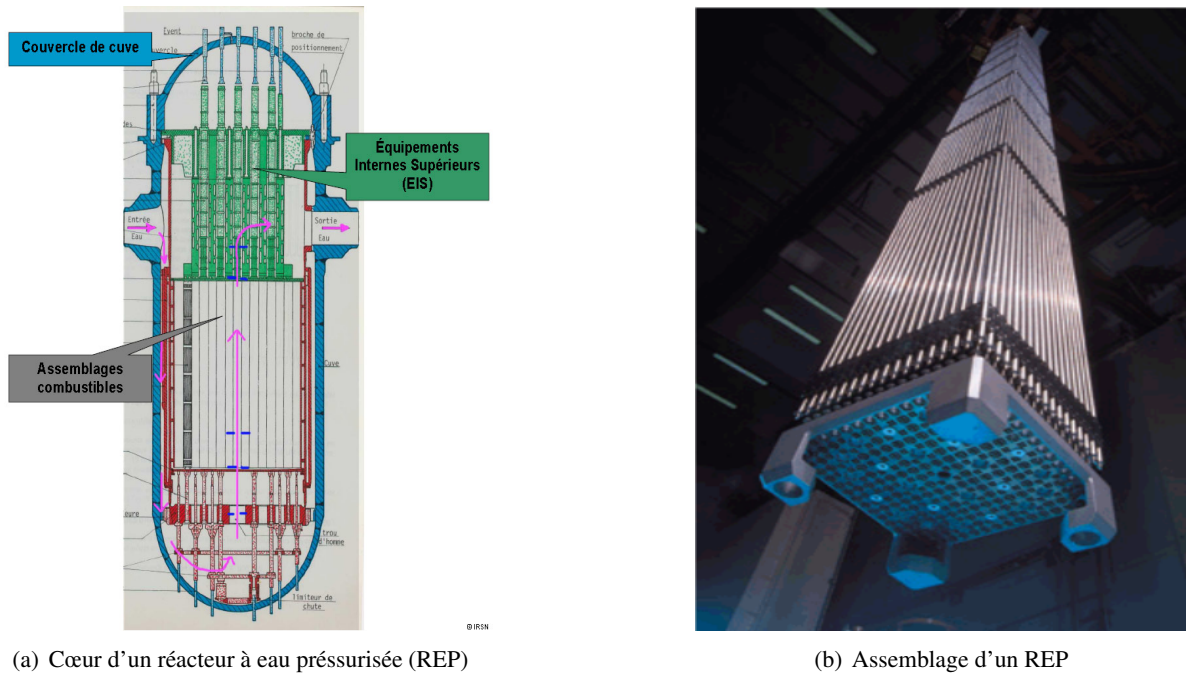


FIG. 1 – Schéma descriptif d'un cœur de réacteur à eau pressurisée.

Depuis les travaux de Darcy [22], les méthodes d'homogénéisation spatiale ont été largement utilisées pour modéliser des écoulements en milieux poreux. Elles ont notamment été appliquées à l'étude de la dispersion de scalaires passifs et de la dispersion thermique pour des écoulements laminaires [3, 14, 15, 91, 96, 98, 107] et turbulents [20, 70, 77, 99]. Les grands systèmes d'échange thermique présentent généralement une direction privilégiée. En effet, l'écoulement est principalement dirigé suivant l'axe des crayons ou parallèlement aux plaques (voir Fig. 1) et les écoulements transversaux sont faibles par rapport à l'écoulement longitudinal. Dans ces conditions, il est possible de décomposer l'écoulement suivant les trois directions de l'espace. La dispersion est alors modélisée, à l'échelle macroscopique, *via* l'introduction d'un tenseur de dispersion. Cependant, la plupart des auteurs se limitent à l'étude d'écoulements à l'équilibre hydraulique uniformément chauffés. Or, il a été montré [77] que l'imposition d'un flux thermique hétérogène en paroi a un effet sur la dispersion. Par ailleurs, la dispersion étant liée aux hétérogénéités locales de vitesse, il est probable que le tenseur de dispersion ne soit pas égal à sa valeur à l'équilibre pour des écoulements en cours d'établissement. L'étude de la dispersion et des échanges thermiques pour des écoulements en déséquilibre hydraulique reste à ce jour un problème ouvert.

Dans ce mémoire, nous proposons une étude des écoulements anisothermes en milieu poreux articulée autour de quatre objectifs :

- à l'aide d'un formalisme adapté à l'étude d'écoulement turbulents suivant l'approche « milieu poreux », proposer une analyse rigoureuse des phénomènes physiques en jeu et déterminer les grandeurs d'intérêt ;
- proposer une modélisation de la dispersion thermique pour des écoulements hydrauliquement établis en présence d'un chauffage hétérogène ;
- proposer un modèle d'échange thermique qui prend en compte les effets de la dispersion ;
- proposer un modèle de turbulence capable de prédire la dynamique d'établissement et amorcer une

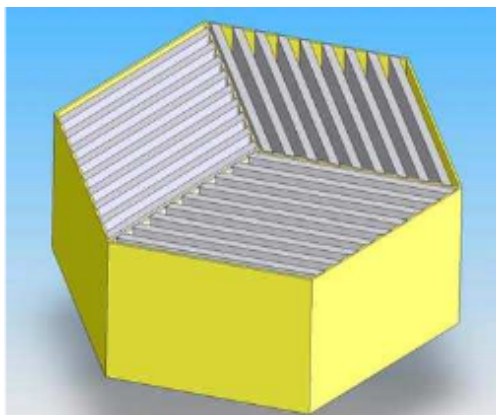


FIG. 2 – Schéma descriptif d'un assemblage du concept avancé de cœur de réacteur à neutrons rapides à caloporteur gaz. Les plaques combustibles sont arrangées selon un motif hexagonal. L'écoulement du caloporteur gaz est canalisé par ces plaques et est ascendant. L'allongement de l'assemblage étant important, seul un tronçon est représenté ici.



FIG. 3 – Assemblage du cœur du réacteur Jules Horowitz. Les plaques combustibles sont cintrées. Elles canalisent l'écoulement en leur sein. Les canaux ainsi formés sont annulaires.

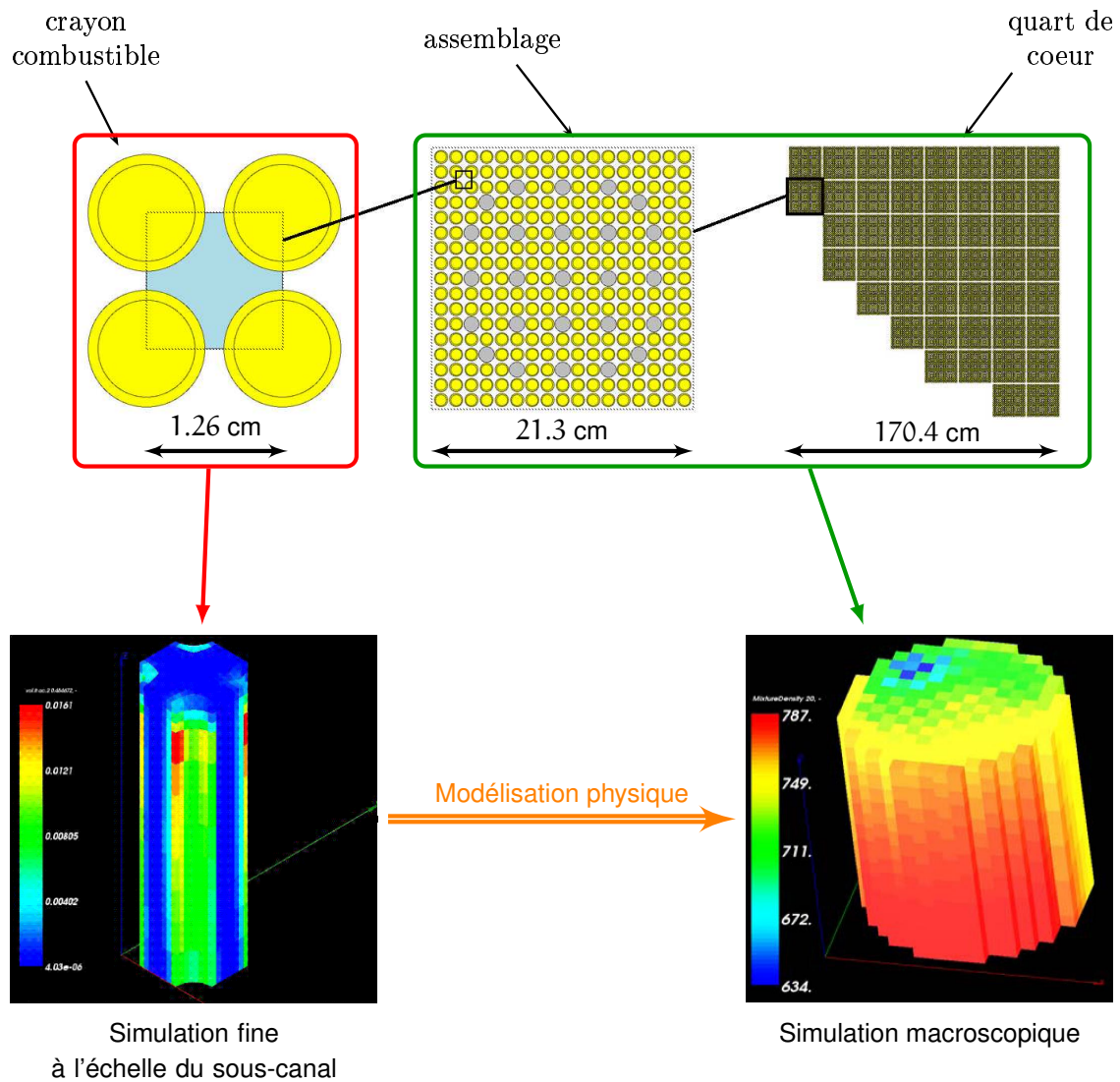


FIG. 4 – Les différentes échelles de représentation d'un cœur de réacteur à eau pressurisée. À l'échelle la plus fine, les profils locaux, *i.e.* dans un sous-canal, de chaque quantité sont déterminés. À l'échelle macroscopique, un assemblage est représenté par une cellule. Un des objectifs poursuivis ici consiste à rendre possible le couplage entre échelle fine et échelle macroscopique.

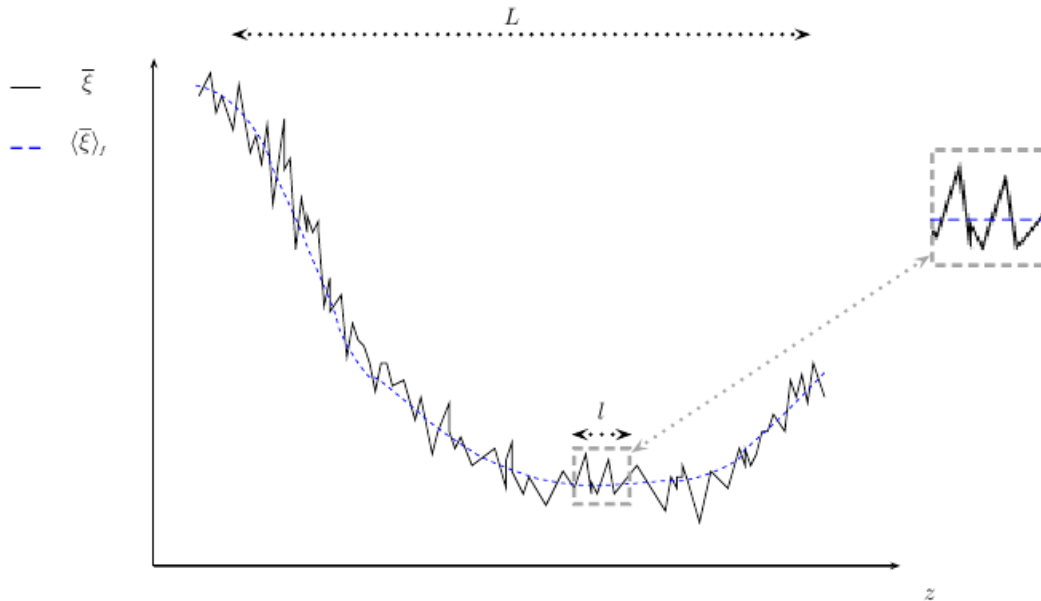


FIG. 5 – Description du principe de séparation des échelles commun à toutes les méthodes d’homogénéisation.

reflexion sur la modélisation de la dispersion thermique à partir des grandeurs hydrauliques macroscopiques.

Le mémoire se divise ainsi en quatre parties correspondant à ces axes de travail.

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à la description du formalisme et à la mise en équations. Dans le **chapitre 1**, nous décrivons les outils mathématiques utiles à l’étude des milieux poreux. Nous insistons particulièrement sur la méthode de prise de moyenne spatiale. Les équations décrivant des écoulements laminaires à l’échelle macroscopique sont ensuite établies et les termes nécessitant une modélisation sont mis en évidence. Dans le **chapitre 2**, nous nous intéressons aux outils permettant d’étudier des écoulements turbulents en milieux poreux. Dans un premier temps, nous exposons les arguments qui nous ont conduit à choisir d’appliquer la moyenne statistique avant le filtre spatial. Nous présentons ensuite les outils utilisés pour traiter la turbulence à l’échelle locale. Après un bref rappel sur les propriétés phénoménologiques de la turbulence, nous passons en revue différentes méthodes de modélisation de la turbulence. Puis nous exposons l’établissement des équations de Navier-Stokes statistiquement moyennées et la dérivation d’un modèle $\bar{k}-\bar{\epsilon}$ adapté au cas des écoulements de paroi. Enfin, nous dérivons les équations macroscopiques permettant de décrire un écoulement turbulent en milieu poreux et mettons en évidence les termes à modéliser.

Les chapitres 3 à 6 sont consacrés à l’étude de la dispersion thermique pour des écoulements hydrauliquement établis. Dans le **chapitre 3**, un modèle de dispersion thermique est proposé pour des écoulements laminaires en canaux. La méthodologie de Whitaker [15, 107] met en évidence les effets des hétérogénéités de flux thermique en paroi sur la dispersion thermique et la nécessité de considérer des contributions supplémentaires. Les concepts de dispersion passive et dispersion active sont explicités. Dans le **chapitre 4**, l’étude est étendue aux écoulements turbulents et un modèle de dispersion couvrant tous les régimes d’écoulement est proposé pour trois géométries simples dans le **chapitre 5**. Dans le **chapitre 6**, le modèle de dispersion thermique est validé pour des configurations simples. Nous étudions par ailleurs l’influence

du nombre de Prandtl sur la dispersion thermique et l'importance relative des différents termes de diffusion et de dispersion.

Les chapitres 7 et 8 sont consacrés à l'étude de l'impact de la dispersion thermique sur les échanges thermiques. Dans le **chapitre 7**, nous appliquons la méthode de Whitaker [107] à la dérivation d'un modèle macroscopique de température de paroi basé sur les travaux présentés dans les chapitres précédents. Nous montrons qu'un modèle algébrique de température de paroi ne permet pas de traiter précisément des cas où le flux thermique en paroi n'est pas uniforme ou les transitoires rapides. Dans le **chapitre 8**, nous proposons donc un modèle à équation de transport basé sur une approche à deux couches capable de rendre compte de ces déséquilibres.

Les chapitres 9 et 10 sont consacrés à l'étude de la turbulence en milieux poreux. Une étude bibliographique sur les modèles de turbulence en milieux poreux est présentée dans le **chapitre 9**. Nous constatons que la plupart des modèles de turbulence macroscopiques [17, 68, 74] sont des modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ qui ne permettent de traiter que des écoulements établis et ne fournissent pas de pistes de modélisation pour la dispersion. Quelques modèles prenant en compte les hétérogénéités locales des profils de vitesse existent et ouvrent la réflexion [78, 100]. Cependant, le modèle de Pinson [78], s'il est performant pour les écoulements présentés, est peu généralisable, tandis que le modèle de Teruel [100, 101] ne permet pas de distinguer les effets liés à la turbulence de ceux liés à la dispersion. Le **chapitre 10** présente une étude détaillée des phénomènes existant au sein d'un écoulement turbulent en milieu poreux basée sur une analyse à deux échelles. Les équations bilans permettant de caractériser la turbulence à l'échelle macroscopique sont dérivées et permettent d'identifier les transferts énergétiques intervenant au sein de l'écoulement. En particulier, cette analyse met en évidence la nécessité d'une modélisation pour l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen, ou énergie dispersive, et les termes de transferts associés : la production de sous-filtre et la dissipation de sillage. Un modèle de turbulence à trois équations (énergie turbulente, énergie dispersive, dissipation de sillage) est ensuite proposé. Les termes inconnus sont modélisés grâce à des fermetures algébriques. Les paramètres nécessaires à la fermeture complète du modèle sont déterminés pour des géométries simples. Le modèle est ensuite validé sur des écoulements hors équilibre dans des empilements de canaux plans ou de tubes circulaires. Dans le **chapitre 11**, nous proposons des pistes de modélisation dynamique de la dispersion thermique à partir des grandeurs fournies par le modèle de turbulence. Nous montrons en particulier que le modèle de dispersion thermique basé notre modèle de turbulence est tout à fait cohérent avec les coefficients de dispersion thermique constants proposés dans la partie II dans le cas d'écoulements hydrauliquement établis.

PREMIÈRE PARTIE

FORMALISME ET MISE EN ÉQUATIONS

HOMOGÉNÉISATION SPATIALE

Un écoulement dans un milieu poreux présente une large gamme d'échelles spatiales. À l'échelle d'un cœur de réacteur nucléaire ou d'un échangeur thermique, les moyens informatiques actuels ne permettent pas d'obtenir une description explicite de toutes ces échelles¹. Cependant, si seul le comportement à grande échelle nous intéresse, une approche homogénéisée peut être envisagée. La structure solide peut ainsi être considérée comme un milieu poreux. L'homogénéisation spatiale permet de réduire la gamme d'échelles présentes explicitement dans la description mathématique des phénomènes, mais fait apparaître des termes inconnus qui représentent les effets des détails microscopiques de l'écoulement à l'échelle macroscopique. Ces termes doivent être modélisés. Dans ce chapitre, nous présentons des outils qui permettent d'étudier un écoulement dans un milieu poreux. Nous nous intéressons plus particulièrement à la [méthode de prise de moyenne spatiale](#).

1.1 Synthèse bibliographique

Dans [22], Henry Darcy s'est intéressé au problème de la filtration de l'eau. Au cours de cette étude, il a réalisé des expériences de filtration d'eau à travers une colonne verticale remplie de sable qui l'ont conduit à proposer une relation empirique liant le débit d'eau s'écoulant au travers du massif aux pertes de charge, *via* l'introduction de la notion de [perméabilité](#) du milieu. Autrement dit, il a introduit l'idée qu'on pouvait obtenir une description macroscopique de l'écoulement en considérant la colonne de sable, non pas comme un empilement de grains, mais comme un milieu homogène doté de propriétés macroscopiques. La loi expérimentale proposée par Darcy exprime généralement par la formule suivante le gradient de pression longitudinal :

$$-\frac{dP}{dx} = \mu \frac{U_D}{K}, \quad (1.1)$$

où U_D est la vitesse moyenne d'écoulement du fluide, μ la viscosité dynamique du fluide et K la perméabilité du milieu.

Cette loi n'est valable que pour des écoulements à très faible nombre de Reynolds, dans des milieux homogènes et isotropes. Des termes supplémentaires ont néanmoins été ajoutés par la suite afin de prendre

¹D'après [16], une simulation par une approche LES de l'ensemble d'un cœur de réacteur à eau pressurisée lors de conditions accidentelles nécessite 4.5×10^9 mailles. Compte tenu des contraintes de pas de temps, Chandesris arrive à la conclusion que, pour ce type de configurations, le temps nécessaire au calcul d'un transitoire de 180 s sur 64 processeurs se compte en siècles !

en compte d'autres phénomènes physiques [72]. Selon la loi de Darcy, la résistance à l'écoulement est modélisée uniquement par des forces visqueuses linéaires en vitesse. C'est une bonne approximation lorsque la vitesse est faible, mais, pour des vitesses plus élevées, l'effet d'inertie est dominant et ne peut plus être négligé. Forchheimer [30] propose alors d'ajouter un terme quadratique en vitesse à l'équation (1.1) :

$$-\frac{dP}{dx} = \mu \frac{U_D}{K} + \frac{c_F \rho}{\sqrt{K}} U_D^2, \quad (1.2)$$

où c_F est un coefficient qui dépend de la géométrie et ρ la masse volumique du fluide.

Dans les cas où la perméabilité du milieu est très forte, Brinkman [13] ajoute un laplacien pour rendre compte, à l'échelle macroscopique, de la contrainte visqueuse locale :

$$-\frac{dP}{dx} = \mu \frac{U_D}{K} - \mu_{\text{eff}} \frac{d^2 U_D}{dy^2}, \quad (1.3)$$

où μ_{eff} , la viscosité effective, est aussi une propriété macroscopique qui dépend de la viscosité du fluide et de la géométrie du milieu poreux.

Pour aboutir à une représentation homogénéisée d'un milieu poreux, différents formalismes peuvent être utilisés. L'objectif de ces méthodes est de dériver une description macroscopique des écoulements à partir des équations microscopiques. Elles se divisent en trois grandes familles.

Les **méthodes probabilistes** sont très utilisées pour l'étude des milieux poreux naturels [65, 87]. Elles reposent sur l'idée que le milieu poreux est très irrégulier et ne peut être connu en détail, et qu'il peut donc être considéré comme aléatoire. Les grandeurs définies à l'échelle du pore sont alors considérées comme des variables aléatoires. Le passage au niveau de description macroscopique du problème s'effectue par le biais d'espérances mathématiques. Cette méthode permet de rendre compte de la loi de Darcy, mais son utilisation est restreinte à des milieux poreux simplifiés [65]. Par ailleurs, elle est peu adaptée à notre problème puisque la géométrie des structures solides est connue de façon déterministe.

La **méthode d'homogénéisation** [7, 66, 89] est la plus rigoureuse sur un plan mathématique. Elle est basée sur l'introduction de deux variables d'espace indépendantes : une variable rapide x^* et une variable lente $\tilde{x}^* = x^*/\epsilon$, ϵ étant supposé très petit. Les variables thermodynamiques sont ensuite décomposées sous la forme d'un développement asymptotique par rapport à la variable ϵ . Puis, les différents ordres de grandeur du paramètre ϵ sont séparés pour obtenir différents problèmes, en général couplés. Cette méthode, bien que très rigoureuse, est difficile d'accès. De plus, elle met l'accent sur la régularité et le caractère bien posé des solutions et s'intéresse peu à l'évaluation des paramètres macroscopiques des modèles.

La **méthode de prise de moyenne** a été introduite par Whitaker [107]. Elle consiste à intégrer les équations microscopiques sur un **volume élémentaire représentatif** (VER) afin de dériver un système d'équations à l'échelle macroscopique. Elle combine l'utilisation d'une fonction caractéristique, qui traduit la distinction entre la phase fluide et la phase solide, et d'un opérateur de moyenne spatiale qui permet l'homogénéisation. Les équations de transport des différentes quantités physiques sont soumises à ce filtre spatial. Ce processus fait apparaître des termes qui rendent compte des effets des phénomènes microscopiques sur l'échelle macroscopique. Des modèles doivent ensuite être proposés pour ces termes afin de fermer le problème. La difficulté principale de cette méthode réside dans cette étape de modélisation. Cette méthode peut sembler moins rigoureuse que la précédente car l'étape de modélisation repose généralement sur des simplifications *a posteriori* basées sur des analyses d'ordres de grandeur. Elle a néanmoins été appliquée avec succès à une large gamme d'écoulements. De plus, elle présente l'avantage d'être assez facile d'accès et de rester proche des phénomènes physiques étudiés. Par ailleurs, elle permet de combiner la modélisation de la turbulence et l'aspect poreux par l'application de filtres successifs [76]. Nous nous appuyons donc par la suite sur cette méthode de changement d'échelle.

1.2 Méthode de prise de moyenne volumique

1.2.1 Définitions

L'opérateur de **moyenne spatiale** que nous utilisons est le suivant :

$$\langle \xi \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{x})} \int_{\Delta V(\mathbf{x})} \xi(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.4)$$

où le volume $\Delta V(\mathbf{x})$ dépend des propriétés du milieu poreux considéré [81, 82]. Pour un milieu spatialement périodique, $\Delta V(\mathbf{x})$ peut être choisi comme le motif élémentaire de la matrice solide. Pour un milieu désordonné, ce volume doit englober un grand nombre de pores, ce qui signifie que sa taille caractéristique doit être grande devant la taille des pores (voir figure 1.1). Si on appelle l_ξ la longueur caractéristique des

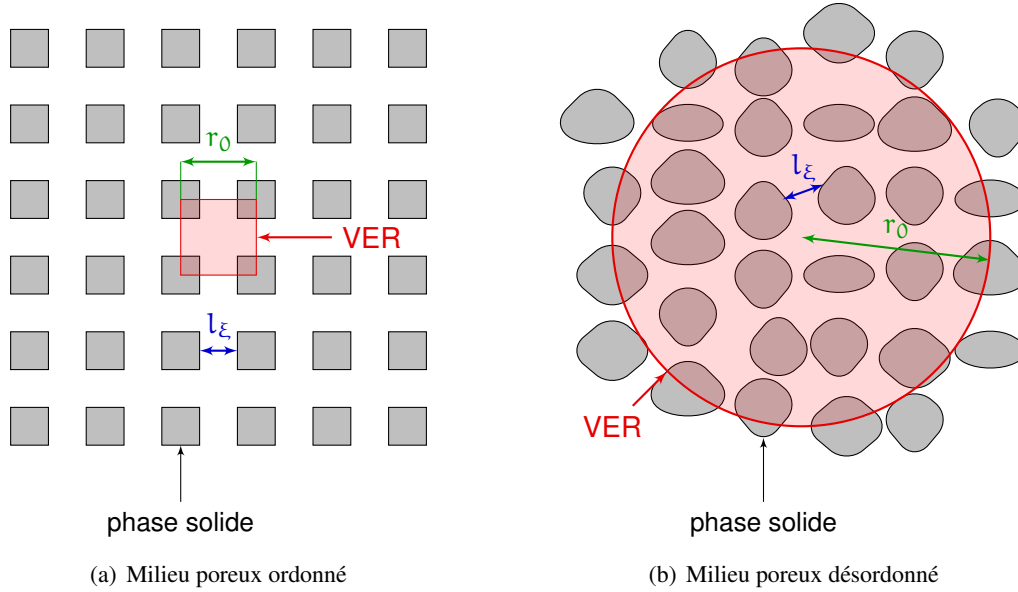


FIG. 1.1 – Volumes élémentaires représentatifs associés à des milieux poreux ordonnés et désordonnés.

grandeurs non filtrées et r_0 la taille du filtre, ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{pour un milieu poreux spatialement périodique : } & r_0 \simeq l_\xi, \\ \text{pour un milieu poreux quelconque : } & r_0 \gg l_\xi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Remarquons que ce filtre spatial ne permet pas de différencier la phase solide de la phase fluide. La **fonction caractéristique de la phase fluide** est définie de la manière suivante :

$$\chi_f(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si on est en présence de la phase fluide au point } \mathbf{x} \text{ et à l'instant } t, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Les dérivées de la fonction caractéristique χ_f satisfont :

$$\frac{\partial \chi_f}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial \chi_f}{\partial x_i} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \chi_f}{\partial x_i} = -n_i \delta_{\omega}, \quad (1.8)$$

où ω désigne la vitesse de déplacement des parois, \mathbf{n} la normale à l'interface orientée du fluide vers le solide et δ_ω la distribution de Dirac associée à l'interface vue de la phase fluide. La **porosité** ϕ du milieu considéré s'obtient en appliquant l'opérateur de moyenne spatiale à la fonction caractéristique de la phase fluide :

$$\phi(\mathbf{x}) = \langle \chi_f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{\Delta V_f(\mathbf{x})}{\Delta V(\mathbf{x})}, \quad (1.9)$$

où ΔV_f est le volume occupé par la phase fluide dans ΔV .

La **moyenne intrinsèque** de la phase fluide est définie par [108] :

$$\langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) = \frac{\langle \xi \chi_f \rangle}{\langle \chi_f \rangle} = \frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \times \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \xi \chi_f dV = \frac{1}{\Delta V_f(\mathbf{x})} \int_{\Delta V_f(\mathbf{x})} \xi dV. \quad (1.10)$$

Toute grandeur physique peut ainsi être décomposée en la somme de sa valeur filtrée et de sa déviation spatiale :

$$\xi = \langle \xi \rangle_f + \delta \xi. \quad (1.11)$$

1.2.2 Propriétés de la moyenne intrinsèque

Linéarité La linéarité de l'opérateur de moyenne intrinsèque découle directement de la linéarité de la sommation continue sur un intervalle borné.

Idempotence Le filtre spatial n'est pas toujours idempotent. Cependant, il peut être considéré comme tel sous certaines conditions [108]. L'opération de double filtrage s'écrit :

$$\phi \langle \langle \xi \rangle_f \rangle_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \langle \xi \rangle_f(\mathbf{r}) \chi_f(\mathbf{r}) dV_r. \quad (1.12)$$

Posons $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Le développement de Taylor de la quantité filtrée $\langle \xi \rangle_f$ autour de \mathbf{x} s'écrit :

$$\langle \xi \rangle_f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \mathbf{y} \cdot \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} : \nabla \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{y}\|^2). \quad (1.13)$$

Les grandeurs définies au point \mathbf{x} sont des constantes par rapport à l'opérateur de filtrage. Si on applique une nouvelle fois l'opérateur de filtrage, on obtient donc :

$$\phi \langle \langle \xi \rangle_f \rangle_f(\mathbf{x}) = \langle \chi_f \rangle \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \underbrace{\langle \mathbf{y} \chi_f \rangle \cdot \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x})}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \chi_f \rangle : \nabla \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x})}_{(2)} + O(\|\mathbf{y}\|^2). \quad (1.14)$$

Soient L_ξ et l_ξ les échelles de longueur associées aux grandeurs filtrées et non filtrées, alors

$$\frac{1}{\xi} \|\nabla \xi\| = O\left(\frac{1}{l_\xi}\right), \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{\langle \xi \rangle_f} \|\nabla \langle \xi \rangle_f\| = O\left(\frac{1}{L_\xi}\right). \quad (1.16)$$

Par définition, \mathbf{y} est borné par la taille du filtre r_0 . Par conséquent :

$$(1) = O\left(\frac{r_0}{L_\xi} \phi\right) \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}),$$

$$(2) = O\left(\frac{r_0^2}{L_\xi^2} \phi\right) \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}).$$

Ainsi, le filtre spatial est approximativement idempotent lorsque les termes (1) et (2) sont négligeables, *i.e.* lorsque [108] :

$$r_0 \ll L_\xi. \quad (1.17)$$

En rapprochant (1.5) de (1.17), on obtient les conditions suivantes sur la taille du filtre :

$$\begin{aligned} \text{Pour un milieu poreux spatialement périodique :} & \quad l_\xi \simeq r_0 \ll L_\xi, \\ \text{Pour un milieu poreux quelconque :} & \quad l_\xi \ll r_0 \ll L_\xi. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le filtre spatial n'est donc idempotent que lorsque l'hypothèse de séparation entre les échelles de variation microscopique et macroscopique est vérifiée. Par la suite, nous supposons pour la dérivation des modèles que cette hypothèse est vérifiée. Nous vérifierons cependant le degré de validité de cette hypothèse selon les exemples traités.

Filtrage et dérivation À cause des contributions de la paroi, la moyenne intrinsèque ne commute pas avec les opérateurs de dérivation. En utilisant les règles de dérivation liées à la fonction caractéristique de la phase fluide (1.7) et (1.8) et la propriété de commutation de la moyenne spatiale avec les opérateurs de dérivation, on peut montrer les règles de permutation avec les opérateurs de dérivation suivantes [41] :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} + \phi \langle \xi n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (1.19)$$

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\rangle_f = \phi \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} + \phi \langle \delta \xi n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (1.20)$$

$$\phi \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) = \phi \frac{\partial \delta \xi}{\partial x_i} - \phi \langle \delta \xi n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (1.21)$$

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \xi \rangle_f}{\partial t} + \phi \langle \xi \omega_i n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (1.22)$$

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_f = \phi \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial t} + \phi \langle \delta \xi \omega_i n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (1.23)$$

$$\phi \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \phi \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} - \phi \langle \delta \xi \omega_i n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (1.24)$$

où ω désigne la vitesse de déplacement des parois, \mathbf{n} la normale à l'interface orientée du fluide vers le solide et δ_ω la distribution de Dirac associée à l'interface vue de la phase fluide.

1.3 Étude d'écoulements laminaires en milieux poreux

1.3.1 Équations de Navier-Stokes

On suppose que l'hypothèse d'incompressibilité est valable. L'écoulement est faiblement anisotherme, et donc peu dilatable. Les propriétés thermodynamiques du fluide sont supposées constantes. L'écoulement étant incompressible, la pression n'a pas de propriété thermodynamique et joue un rôle purement mécanique. Les problèmes dynamique et thermique sont alors découplés. L'équation de transport de l'énergie se réduit à l'équation de transport d'un scalaire passif pour la température T_f .

Équation de continuité

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.25)$$

où \mathbf{u} est la vitesse de l'écoulement.

Équation de quantité de mouvement Pour un fluide incompressible, l'équation de quantité de mouvement se réduit à :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i. \quad (1.26)$$

Équation de la température

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial (T_f u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) + \underbrace{2 \alpha_f \text{Pr}}_{f^T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{Q}{(\rho C_p)_f}, \quad (1.27)$$

où Q représente une source volumique de chaleur qui peut, par exemple, tenir compte du rayonnement. Dans cette dernière équation, si on note λ_f la conductivité thermique, C_p la chaleur spécifique à pression constante et ρ la masse volumique, la **diffusivité thermique** α_f s'écrit :

$$\alpha_f = \frac{\lambda_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (1.28)$$

et le **nombre de Prandtl** est défini comme :

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha_f}. \quad (1.29)$$

Le second terme du membre de droite représente l'échauffement visqueux. Le **nombre d'Eckert** :

$$E_c = \frac{U^2}{C_p \Delta T_f}, \quad (1.30)$$

où U est l'échelle caractéristique de la vitesse et ΔT_f l'écart de température représentatif de l'échauffement du fluide, permet de comparer la dissipation d'énergie cinétique à la variation d'enthalpie. Dans les cas qui nous intéressent², $E_c \ll \text{Re}$ et l'échauffement visqueux peut être négligé dans l'équation (1.27). D'autre part, sur l'interface fluide-solide, la température vérifie :

$$\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i = \Phi, \quad (1.31)$$

où n_i est la normale à la paroi orientée de la phase fluide vers la phase solide.

1.3.2 Application de la moyenne spatiale aux équations de Navier-Stokes

Le milieu poreux considéré est indéformable et immobile, avec adhérence du fluide en paroi^{3,4}. La porosité du milieu et les propriétés du fluides sont supposées constantes. L'écoulement est faiblement chauffé et le température se comporte comme un scalaire passif.

²Pour un écoulement typique d'un cœur de réacteur, les estimations fournissent (en unités S.I.) : $C_p \simeq 4 \times 10^3$, $\Delta T_f \simeq 50$, $U \simeq 5$, $\text{Re} \simeq 10^5$, soit $E_c/\text{Re} \simeq 10^{-9}$.

³Autrement dit, il n'y a pas d'injection en paroi.

⁴Le libre parcours moyen étant faible devant la longueur hydraulique, le nombre de Knudsen est suffisamment faible ($\text{Kn} < 10^{-3}$) pour utiliser une approche de type milieu continu.

Équation de continuité

L'application de la moyenne intrinsèque à l'équation de continuité (1.25) donne :

$$\phi \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f}{\partial x_i} + \underbrace{\phi \langle u_i n_i \delta \omega \rangle_f}_{=0} = 0. \quad (1.32)$$

Cela implique que :

$$\frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi \delta u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.33)$$

Équation de quantité de mouvement

Pour un écoulement incompressible, l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i, \quad (1.34)$$

L'application du filtre spatial à l'équation (1.26) conduit ensuite, étant donné la condition d'adhérence en paroi, à :

$$\phi \frac{\partial \langle u_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle u_i u_j \rangle_f = -\frac{\phi}{\rho} \left\langle \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\rangle_f + \phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f + g_i. \quad (1.35)$$

Avec l'équation (1.20) :

$$\frac{\phi}{\rho} \left\langle \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\phi}{\rho} \langle \delta P n_i \delta \omega \rangle_f, \quad (1.36)$$

et :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \phi \left\langle \nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \nu_f \phi \langle u_i n_j \delta \omega \rangle_f}_{=0}. \quad (1.37)$$

Par ailleurs, le terme $\langle u_i u_j \rangle_f$ se décompose en :

$$\langle u_i u_j \rangle_f = \langle u_i \rangle_f \langle u_j \rangle_f + \langle \delta u_i \delta u_j \rangle_f. \quad (1.38)$$

L'équation bilan moyennée de la quantité de mouvement s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle u_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle u_i \rangle_f \langle u_j \rangle_f = & - \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta u_i \delta u_j \rangle_f + \underbrace{\phi \left\langle \left(-\frac{\delta P}{\rho} \delta_{ij} + \nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta \omega \right\rangle_f}_{-F_{\phi_i}} + g_i. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Le terme $-F_{\phi_i}$ représente la force volumique spécifique exercée par la phase solide sur la phase fluide. Il correspond à la i -ième composante de la force de traînée, pondérée par le volume de filtrage et la masse volumique du fluide, que subissent les inclusions solides. Plus généralement, ce terme représente les pertes de charge de l'écoulement moyen. Le terme

$$-\phi \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta u_i \delta u_j \rangle_f$$

correspond à la dispersion de la quantité de mouvement par les hétérogénéités du profil de vitesse et doit être modélisé.

Équation bilan de la température

Rappelons l'équation bilan de la température :

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (T_f u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) + \frac{Q}{(\rho C_p)_f},$$

et la condition aux limites :

$$\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i = \Phi \quad \text{sur l'interface fluide-solide.}$$

Comme le milieu poreux est immobile ⁵, la moyenne intrinsèque commute avec la dérivée temporelle :

$$\phi \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial t} \right\rangle_f = \phi \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t}. \quad (1.40)$$

En utilisant (1.19), le terme de convection peut aussi s'écrire :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (T_f u_i) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle T_f u_i \rangle_f + \underbrace{\phi \langle T_f u_i n_i \delta \omega \rangle_f}_{=0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle T_f \rangle_f \langle u_i \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f. \quad (1.41)$$

En appliquant la relation (1.19) au terme de diffusion, on obtient :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \left\langle \alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right\rangle_f + \phi \left\langle \alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i \delta \omega \right\rangle_f, \quad (1.42)$$

soit, en tenant compte de la condition aux limites (1.31) :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \left\langle \alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right\rangle_f + \phi \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (1.43)$$

Puis, en utilisant la relation (1.20) :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f + \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (1.44)$$

L'équation bilan de la température moyennée spatialement s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle T_f \rangle_f \langle u_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\phi \langle Q \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f}_{\text{Tortuosité}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f}_{\text{Dispersion thermique}} + \underbrace{\phi \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}}_{\text{Transfert thermique à la paroi}}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

L'opération de filtrage a fait apparaître deux termes inconnus qui nécessitent une modélisation :

⁵Ce ne serait pas le cas si nous nous intéressions à un couplage fluide/structure, dans le cadre d'une analyse vibratoire par exemple.

- le terme de **dispersion thermique**

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f,$$

qui rend compte des effets des hétérogénéités du champ local de vitesse induites par les obstacles solides sur le transport de la température ;

- le terme de **tortuosité**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f,$$

qui traduit un effet de résistance à la diffusion provoquée par la présence de la matrice solide.

Pour le type d'écoulements qui nous intéresse, *i.e.* des écoulements parallèles dans des empilements de canaux, toutes les composantes du tenseur de tortuosité sont nulles (voir [76], p. 29). La modélisation de la tortuosité n'est donc pas traitée ici.

Synthèse : équations macroscopiques décrivant un écoulement laminaire en milieu poreux

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f}{\partial x_i} &= 0, \\ \phi \frac{\partial \langle u_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle u_i \rangle_f \langle u_j \rangle_f &= -\frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta u_i \delta u_j \rangle_f + \phi \left\langle \left(-\frac{\delta P}{\rho} \delta_{ij} + \nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta \omega \right\rangle_f + g_i, \\ \phi \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle T_f \rangle_f \langle u_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\phi \langle Q \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f + \phi \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \end{aligned}$$

où les termes à modéliser sont :

- les termes de dispersion

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta u_i \delta u_j \rangle_f, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f ; \end{aligned}$$

- la tortuosité (qui n'est pas traitée dans ce travail)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f.$$

Un modèle de dispersion thermique pour des écoulements laminaires en canaux est proposé dans le chapitre 4.

ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS EN MILIEUX POREUX

2.1 Ordre d'application des moyennes

Pour étudier des écoulements turbulents dans des milieux poreux, deux opérateurs de moyenne distincts sont généralement utilisés : un opérateur de moyenne statistique qui permet s'affranchir du caractère aléatoire de la turbulence et l'opérateur de moyenne spatiale décrit dans le chapitre précédent. Ces deux filtres sont appliqués l'un après l'autre. Il est alors nécessaire de choisir un ordre d'application (voir fig. 2.1).

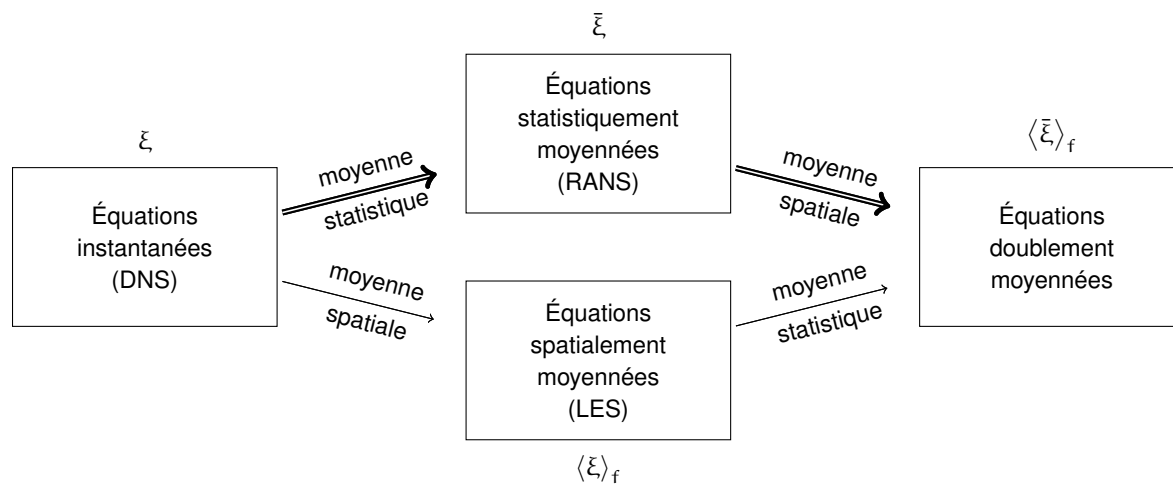


FIG. 2.1 – Représentation schématique de l'ordre d'application des moyennes statistique et spatiale.

Pedras et De Lemos [73] ont prouvé que, d'un point de vue strictement mathématique, l'ordre d'application des moyennes statistique et spatiale ne change pas les équations moyennées obtenues. Cependant, la modélisation macroscopique d'écoulements turbulents dépend de l'ordre d'application des moyennes [71, 103]. Le problème de l'ordre d'application des moyennes réside uniquement dans la modélisation des équations doublement moyennées, cet ordre influant de manière déterminante sur la perception des phénomènes physiques entrant en jeu. La proposition de Teruel et Rizwan-Uddin [100, 101] de définir un opérateur de moyenne global, *i.e.* d'appliquer simultanément les deux filtres, présente l'avantage de bien prendre

en compte toutes les quantités filtrées. Cependant, selon Travkin [103], les fluctuations statistiques et les déviations spatiales ne sont pas de même nature et les considérer comme telles peut mener à de sérieuses erreurs de modélisation. Antohe et Lage [2] et Getachew *et al.* [32] appliquent d'abord le filtre spatial, tandis que Chandesris [17], Masuoka et Takatsu [64], Nakayama et Kuwahara [68], Pedras et de Lemos [74] et Pinson *et al.* [78] choisissent de moyennner spatialement les équations locales statistiquement moyennées. Le fait d'appliquer d'abord un filtre spatial d'une taille supérieure ou égale à la longueur caractéristique des pores, puis la moyenne statistique, implique que seules les échelles supérieures à la taille du filtre, et donc à la taille des pores, peuvent être traitées, et que les petits tourbillons doivent être modélisés. La validité d'une telle méthode est discutable car les structures de taille supérieure à la longueur caractéristique des pores sont très rapidement hachées par la matrice solide [68, 71, 76]. Aussi choisissons nous de suivre Pinson [77] et d'appliquer d'abord la moyenne statistique (Figs. 2.1 et 2.2). D'un point de vue pratique, pour la validation des modèles macroscopiques, il est nécessaire de disposer de résultats de référence. Devant le manque de résultats expérimentaux correspondant aux configurations que nous souhaitons étudier, le seul recours est de procéder à des simulations numériques de ces écoulements. Revenons alors sur les conséquences pratiques de l'ordre d'application des moyennes. Comme le montre la figure 2.1, simuler un écoulement turbulent non moyenné revient à effectuer une Simulation Numérique Directe (DNS). Étant donné les échelles de temps et d'espace des écoulements visés dans cette étude, la Simulation Numérique Directe ne peut pas être utilisée. Il faut donc s'appuyer sur des résultats provenant des équations statistiquement ou spatialement moyennées. Pour simuler des écoulements confinés, la Simulation des Grandes Echelles (LES) reste coûteuse. En revanche, les modèles RANS sont couramment utilisés, le temps de calcul associé reste faible et la précision des résultats obtenus est suffisante pour nous permettre de valider nos modèles macroscopiques. Pour obtenir des évolutions macroscopiques de référence, il est donc pertinent de moyennner spatialement les résultats provenant de simulations RANS (Fig. 2.2).

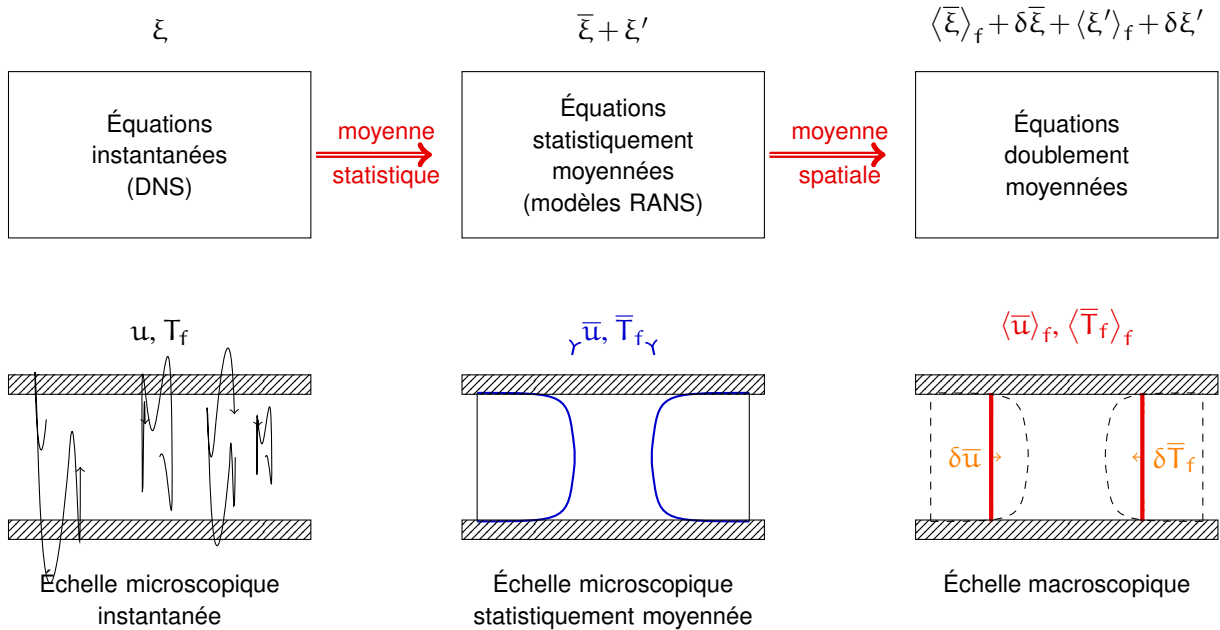


FIG. 2.2 – Description de la procédure de moyenne sélectionnée.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons dans un premier temps des éléments de modélisation locale de la turbulence, puis la dérivation des équations doublement moyennées qui permettent de décrire un écoulement turbulent au sein d'un milieu poreux.

2.2 Éléments de modélisation de la turbulence à l'échelle locale

2.2.1 Description phénoménologique de la turbulence

La turbulence est une propriété de l'écoulement, et non du fluide. C'est un mode d'écoulement d'un fluide visqueux caractérisé par la présence, au sein de l'écoulement, de mouvements d'agitation secondaires. Ces derniers regroupent une infinité de contributions en termes d'échelles temporelles et spatiales. Formellement, on peut considérer qu'en turbulence développée l'agitation turbulente est liée à la présence d'un spectre continu d'échelles tourbillonnaires au sein de l'écoulement.

La turbulence est un mécanisme diffusif-dissipatif qui « régule » l'énergie des états instables. Le transfert d'énergie interne à la turbulence est l'un des mécanismes essentiels de ce régime d'écoulement. La cascade d'énergie entre échelles mise en évidence par Kolmogorov [38, 46] (voir figure 2.3) décrit un transfert progressif d'énergie des gros tourbillons vers les petits.

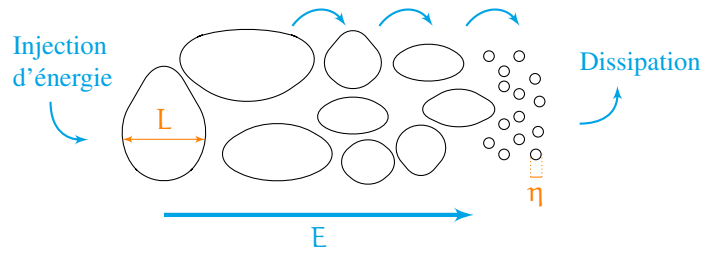


FIG. 2.3 – Illustration schématique du concept de cascade d'énergie de Kolmogorov

Le processus énergétique peut se décomposer en trois phénomènes principaux :

Production : injection d'énergie en provenance du mouvement moyen ;

Redistribution interne à l'agitation turbulente : transfert d'énergie de proche en proche par processus inertielle non linéaire entre structures de taille décroissante dont les échelles spatiales sont proches ;

Dissipation : dissipation en énergie interne au sein des plus petits tourbillons.

D'après la première hypothèse de Kolmogorov [46], la limite d'existence des structures les plus fines correspond à l'équilibre entre forces d'inertie et de viscosité. Des arguments aux dimensions permettent alors de fixer les plus petites échelles de la turbulence à l'échelle du continu. De plus, les échelles de vitesse et de longueur dissipatives ne dépendent pas des conditions particulières de l'écoulement. Elles s'expriment en fonction de la viscosité du fluide ν_f et du taux de dissipation ε , évalué grâce aux données relatives aux tourbillons porteurs d'énergie :

$$\varepsilon = \frac{U^3}{L}. \quad (2.1)$$

Soient η l'échelle caractéristique des structures dissipatives et u_η la vitesse fluctuante caractéristique de ces structures, on a dimensionnellement :

$$\eta = \left(\frac{\nu_f^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} = L \text{Re}_t^{-3/4}, \quad (2.2)$$

$$u_\eta = (\nu_f \varepsilon)^{1/4} = U \text{Re}_t^{-1/4}, \quad (2.3)$$

où U et L désignent les échelles de vitesse et de longueur des tourbillons porteurs d'énergie de l'agitation turbulente, et Re_t le nombre de Reynolds de la turbulence. η et u_η sont les échelles de longueur et de vitesse caractéristiques des plus petits tourbillons. η est appelée **échelle de Kolmogorov**. Si on se place au niveau microscopique, la théorie cinétique des gaz fournit [52] :

$$\nu_f \propto l_m \times a, \quad (2.4)$$

où l_m est le libre parcours moyen et a la vitesse du son dans le fluide. En comparant (2.2) à (2.4), nous obtenons :

$$\frac{l_m}{\eta} = \frac{u_\eta}{a} = \frac{U}{a} \text{Re}_t^{-1/4}. \quad (2.5)$$

Par conséquent, pour des écoulements à faible nombre de Mach, *i.e.* lorsque :

$$M = \frac{U}{a} \ll 1, \quad (2.6)$$

la taille des plus petits tourbillons est grande devant le libre parcours moyen :

$$\eta \gg l_m. \quad (2.7)$$

Ainsi, l'agitation turbulente s'exerce au niveau supra-moléculaire, ce qui justifie une approche de type milieu continu.

Une autre propriété de la turbulence est son caractère aléatoire : différentes réalisations d'une même expérience, dans la limite de ce que peut garantir l'expérimentateur, ne produisent pas les mêmes résultats, sauf à considérer des moyennes.

D'autre part, l'agitation turbulente est tridimensionnelle par nature. Remarquons néanmoins qu'il existe, dans certains cas particuliers (courants océaniques, cyclones, ...), une turbulence dite « bidimensionnelle » dont les mécanismes sont différents de ceux de la turbulence tridimensionnelle [31] qui ne sera pas traitée ici.

Enfin, il existe entre les différentes échelles des interactions non-linéaires dont la dynamique est prise en compte dans les équations de Navier-Stokes. Nous admettons que l'évolution de fluides usuels tels que l'air et l'eau en régime laminaire ou turbulent relève du modèle de Navier-Stokes.

2.2.2 Présentation générale des méthodes d'étude de la turbulence

Nous présentons dans ce paragraphe différentes approches permettant de simuler des écoulements turbulents. Le classement établi ici n'est pas rigide et ces différentes méthodes peuvent être combinées afin de tirer parti des avantages propres à chacune d'elles.

Simulation Numérique Directe (SND ou DNS en anglais)

La DNS exclut toute modélisation supplémentaire par rapport aux équations de Navier-Stokes. Ces dernières sont résolues numériquement sans traitement préalable. Aux erreurs de discrétisation près, les résultats obtenus avec ces méthodes peuvent donc être utilisés comme des résultats de référence et constituent en quelque sorte des « expériences numériques ». Cependant, la mise en œuvre de ces méthodes est soumise à de nombreuses contraintes et reste, pour le moment, restreinte à l'étude d'écoulements turbulents dans des géométries simples, pour des nombres de Reynolds peu élevés. En effet, la DNS est extrêmement coûteuse en termes d'outils de calcul. Le nombre de nœuds \mathcal{N}^3 nécessaire pour la discrétisation est de l'ordre de [18] :

$$\mathcal{N}^3 \sim \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 = Re_t^{9/4}. \quad (2.8)$$

Par exemple, pour un écoulement pleinement turbulent en conduite avec un nombre de Reynolds égal à 5×10^5 , Laufer [53] fournit, sur la base de résultats expérimentaux :

$$L = 0.5 \text{ m} ; \eta = 5 \times 10^{-4} \text{ m}. \quad (2.9)$$

À raison de cinq mailles par taille des plus petits tourbillons, le nombre de nœuds nécessaire à la simulation d'un tel écoulement est estimé à :

$$\mathcal{N}^3 \simeq 1.25 \times 10^{11}. \quad (2.10)$$

À cela, il faut ajouter que, pour obtenir une bonne convergence statistique, il faut un grand nombre de réalisations. Ainsi, en raison du coût de calcul élevé qu'elle représente, la Simulation Numérique Directe reste un outil de recherche et son utilisation à l'échelle industrielle n'est pas envisageable pour l'instant.

Méthodes statistiques en un point (RANS)

Les méthodes RANS¹ reposent sur l'application de la moyenne statistique aux équations de Navier-Stokes. Le passage à la moyenne induit une perte d'information et conduit donc à un système ouvert. Les équations moyennées devront être complétées par des hypothèses de fermeture appropriées. Ces méthodes aboutissent à différents modèles selon la finesse de la description statistique et la complexité de la procédure de fermeture utilisées.

L'application de la moyenne statistique aux équations de Navier-Stokes fait apparaître des moments statistiques qui représentent de nouvelles inconnues. S'il est possible d'établir une équation de transport des moments d'ordre 2, celle-ci fait intervenir des moments d'ordre 3 qui représentent de nouvelles inconnues, etc... Un modèle est dit d'**ordre** n lorsque seuls les moments statistiques d'ordre inférieur ou égal à n sont considérés comme des inconnues principales. Nous nous limitons ici aux modèles du premier ordre. Ils permettent en effet de calculer les champs de vitesse avec précision dans le cadre d'écoulements en canaux tout en restant facile à mettre en œuvre et peu coûteux en termes de temps de calcul. Cela signifie que seules les valeurs moyennes des fonctions de l'écoulement sont considérées comme des inconnues, et que les moments d'ordre supérieur doivent être modélisés.

Dans le cadre des modèles RANS au premier ordre, la procédure de fermeture consiste à relier les moments d'ordre 2 aux inconnues principales, c'est-à-dire aux grandeurs moyennes. Cela peut se faire en réduisant le nombre d'inconnues ou en introduisant des équations supplémentaires. Le nombre d'équations ajoutées au cours de la fermeture du problème détermine la **classe** du modèle.

Par la suite, nous nous focaliserons sur des modèles RANS du premier ordre à une ou deux équations de transport.

Simulation des Grandes Échelles (LES)

La méthode LES² repose sur l'idée que les petites échelles sont « plus aléatoires » que les tourbillons macroscopiques reliés aux termes de production [57, 90]. Une dimension caractéristique l_c de la « maille » de calcul est définie. Les contributions des échelles caractérisées par une longueur supérieure à l_c sont calculées explicitement, tandis que les petites échelles sont modélisées *via* un modèle de sous-maille. Cette approche, à mi-chemin entre la DNS et les méthodes RANS, semble très prometteuse. En effet, elle présente l'avantage de réduire l'empirisme des méthodes RANS, tout en limitant l'exigence en temps de calcul par rapport à la DNS. Néanmoins, le coût de calcul plus élevé que celui des modèles RANS et le traitement délicat des zones de proche paroi limitent encore l'utilisation de la LES à quelques applications industrielles bien choisies.

Méthodes spectrales

Ces méthodes opèrent après transformation des coordonnées de l'espace physique, généralement par transformée de Fourier (voir [31, 58]). Elles constituent un bon outil d'étude des phénomènes liés aux mécanismes de transfert internes de l'agitation turbulente [42], mais ne peuvent être utilisées que pour des écoulements homogènes [45].

¹Reynolds Averaged Navier-Stokes

²Large Eddy Simulation

Méthodes probabilistes

Dans le cadre des méthodes probabilistes, les variables hydrodynamiques sont considérées comme des variables statistiques définies par une fonction de densité de probabilité (f.d.p). Les équations des f.d.p sont déduites des équations instantanées [40]. Le système ainsi obtenu nécessite une fermeture [61]. Ces méthodes sont utilisées pour les écoulements réactifs, et en particulier pour les écoulements avec combustion [25, 79, 80, 94].

2.2.3 Description du modèle hydrodynamique utilisé

Équations de Navier-Stokes

On considère un écoulement incompressible, faiblement anisotherme. Les propriétés thermodynamiques du fluide sont supposées constantes.

Équation de continuité (conservation de la masse)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.11)$$

où \mathbf{u} est la vitesse de l'écoulement.

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} [-P \delta_{ij} + \sigma_{ij}] + g_i, \quad (2.12)$$

où P est la pression statique et σ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses qui s'exprime en fonction de la viscosité dynamique du fluide μ et des gradients de vitesses³ :

$$\sigma_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right]. \quad (2.13)$$

Pour un fluide incompressible, l'équation de quantité de mouvement se réduit à :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i. \quad (2.14)$$

Équation de la température On rappelle l'équation de la température :

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial (T_f u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) + \underbrace{2 \alpha_f \text{Pr}}_{f^T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{Q}{(\rho C_p)_f}, \quad (2.15)$$

où Q représente une source volumique de chaleur qui peut, par exemple, tenir compte du rayonnement, λ_f est la conductivité thermique, C_p la chaleur spécifique à pression constante, ρ la masse volumique et α_f la diffusivité thermique.

³Pour un écoulement incompressible, on a $\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = 0$.

Application de la moyenne statistique aux équations de Navier-Stokes

Afin de s'affranchir du caractère aléatoire de la turbulence et de dégager une organisation dans le mouvement turbulent, il est d'usage d'utiliser un opérateur de moyenne statistique. La **moyenne statistique** est définie par :

$$\bar{\xi} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^p \xi_n(\mathbf{x}, t), \quad (2.16)$$

où ξ_n correspond à la n-ième réalisation de la variable ξ au point \mathbf{x} et au temps t . Par la suite, ξ' désigne l'écart à la moyenne statistique :

$$\xi'(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t) - \bar{\xi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.17)$$

La moyenne statistique vérifie les **axiomes de Reynolds** :

- | | |
|--|--|
| 1. linéarité | $\overline{\lambda \xi + \psi} = \lambda \bar{\xi} + \bar{\psi}$ si λ est une constante ; |
| 2. idempotence | $\overline{\bar{\xi}} = \bar{\xi} \Leftrightarrow \overline{\xi'} = 0$; |
| 3. commutativité avec les opérateurs de dérivation | $\overline{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}, \quad \overline{\frac{\partial \xi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i}$. |

Étant donné que la moyenne statistique commute avec les opérateurs de dérivation, l'application de la moyenne statistique aux équations (2.11) et (2.14) donne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{T}_f) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i T'_f} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\bar{Q}}{(\rho C_p)_f}. \quad (2.20)$$

Le passage à la moyenne fait apparaître des corrélations doubles $\overline{u'_i u'_j}$ et $\overline{u'_i T'_f}$. Le second terme est généralement vu comme un terme de diffusion supplémentaire dû à la turbulence. Les termes $\overline{u'_i u'_j}$ peuvent être interprétés comme des contraintes supplémentaires dues à l'agitation turbulente. Elles sont appelées **contraintes de turbulence** ou **contraintes de Reynolds**. Le tenseur de Reynolds est noté :

$$\bar{R}_{ij} = \overline{u'_i u'_j}. \quad (2.21)$$

Modélisation du terme de diffusion thermique turbulente

Le terme de corrélation double $\overline{u'_i T'_f}$ est généralement modélisé grâce à une hypothèse de fermeture au premier gradient pour le flux turbulent de chaleur :

$$-\overline{u'_i T'_f} = \alpha_t \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i}, \quad (2.22)$$

où α_t est appelée diffusivité thermique turbulente.

Introduction de la viscosité de turbulence

Selon l'hypothèse de Boussinesq [10, 11], les contraintes de Reynolds sont modélisées, par analogie avec la loi de Newton pour les contraintes d'agitation moléculaire, *via* l'introduction de la **viscosité turbulente**⁴ ν_t :

$$-\bar{R}_{ij} + \frac{2}{3}\bar{k}\delta_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right). \quad (2.23)$$

Les viscosités cinématiques moléculaire et turbulente sont de même dimension, soit :

$$[\nu_t] = [L]^2 [T]^{-1}.$$

On peut donc poser :

$$\nu_t \propto \tilde{u} \tilde{l}, \quad (2.24)$$

où les échelles de vitesse \tilde{u} et de longueur \tilde{l} sont caractéristiques de l'agitation turbulente. L'**énergie cinétique du mouvement turbulent** est définie par :

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \bar{R}_{ii} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (2.25)$$

Il est d'usage de considérer que l'échelle des fluctuations de vitesse est donnée par l'énergie cinétique du mouvement turbulent calculée à l'aide d'une équation de transport :

$$\tilde{u} = \sqrt{\bar{k}}. \quad (2.26)$$

La longueur \tilde{l} peut quant à elle être exprimée en fonction de \bar{k} et d'une autre grandeur turbulente.

À ce stade, il reste donc à modéliser ν_t et α_t pour fermer les équations (2.18) à (2.20). Pour cela, de nombreuses propositions existent (voir [18]), la plus communément utilisée étant d'utiliser un modèle $\bar{k}-\bar{\epsilon}$.

Dérivation de l'équation de transport de \bar{k}

En soustrayant l'équation de la vitesse moyenne (2.19) à l'équation de quantité de mouvement (2.14), on obtient l'équation de transport des fluctuations de vitesse :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial 1}{\partial \rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i u'_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i u'_j. \quad (2.27)$$

Par ailleurs, en remarquant que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + \bar{u}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_i \left(\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right)} + \overline{u'_j \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right)}, \quad (2.28)$$

il est possible d'arriver à une équation pour \bar{k} :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{k' u'_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i P'}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) + \frac{P'}{\rho} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu_f \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (2.29)$$

⁴Pour un écoulement incompressible, on a $\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} = 0$.

De plus, l'hypothèse d'incompressibilité implique que :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.30)$$

Donc en introduisant la dissipation visqueuse :

$$\bar{\varepsilon} = \nu_f \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \quad (2.31)$$

l'équation bilan de l'énergie cinétique turbulente s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_I - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right]}_{II} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right)}_{III} - \underbrace{\bar{\varepsilon}}_{IV}, \quad (2.32)$$

où les différents termes correspondent respectivement à :

- I : production par cisaillement ;
- II : diffusion turbulente ;
- III : diffusion par agitation moléculaire ;
- IV : dissipation, toujours positive.

Modélisation du terme de production En utilisant l'hypothèse de Boussinesq (2.23) et l'hypothèse d'incompressibilité, le terme de production dans l'équation (2.32) s'écrit :

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \quad (2.33)$$

Modélisation du terme de diffusion turbulente En raison du caractère « non transportable » de la pression, le terme de corrélation pression-vitesse $\overline{u'_i P'}$ ne peut être assimilé à un flux diffusif [18]. L'inclure dans le terme de diffusion turbulente revient en fait à négliger la contribution liée à la pression. S'il n'existe pas de justification physique à ce regroupement, des résultats de simulations numériques directes dans un canal plan [63] et des résultats expérimentaux [105] montrent toutefois que le terme de transfert par fluctuations de pression est négligeable dans des configurations simples. Le flux de dispersion turbulente, modélisé grâce à une fermeture au premier gradient, s'écrit alors :

$$-\overline{\left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i}, \quad (2.34)$$

où σ_k est le nombre de Schmidt de la turbulence associé à \bar{k} .

Équation de transport modélisée de \bar{k} Finalement, l'équation de transport modélisée de \bar{k} s'écrit, pour des écoulements incompressibles :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right] - \bar{\varepsilon}, \quad (2.35)$$

Équation de transport de $\bar{\varepsilon}$

Pour pouvoir calculer l'échelle de longueur dont il est question dans le paragraphe 2.2.3, il est possible d'utiliser une seconde variable turbulente décrite par une équation de transport supplémentaire. Différentes possibilités existent quant au choix de la deuxième inconnue [55], mais c'est généralement la dissipation visqueuse $\bar{\varepsilon}$ qui remplit ce rôle [23, 37?]. L'échelle de longueur \tilde{l} s'exprime alors comme :

$$\tilde{l} \propto \frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\varepsilon}}, \quad (2.36)$$

et l'expression (2.24) devient :

$$\nu_t = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, \quad (2.37)$$

où C_μ est une constante à déterminer.

Il est possible d'écrire l'équation de transport exacte de $\bar{\varepsilon}$ [105], mais la fermeture de cette équation s'avère fastidieuse. Aussi l'équation de $\bar{\varepsilon}$ est elle en général postulée en supposant qu'elle est régie par les mêmes phénomènes que l'équation de \bar{k} :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{\varepsilon}) = \text{Diffusion turbulente} + \text{Diffusion moléculaire} + \text{Production} - \text{Dissipation}. \quad (2.38)$$

La différence entre les différents modèles de type $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ tient alors à la définition des constantes de temps introduites pour modéliser chacun des termes de l'équation (2.38).

Modélisation des termes de diffusion Comme pour le terme équivalent dans l'équation de \bar{k} (2.35), le schéma adopté pour le terme de diffusion turbulente est de type gradient, ce qui donne :

$$\text{Diffusion turbulente} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right), \quad (2.39)$$

où σ_ε est le nombre de Schmidt de dissipation.

De la même manière, le terme de diffusion moléculaire prend la forme :

$$\text{Diffusion moléculaire} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right). \quad (2.40)$$

Modélisation du terme de production Pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, ce terme s'écrit, par analogie avec le terme de production dans l'équation de \bar{k} :

$$\text{Production} = -C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.41)$$

où C_{ε_1} est une constante de fermeture.

Modélisation du terme de dissipation Suivant le même raisonnement que pour le terme de production, le terme de dissipation est modélisé par :

$$\text{Dissipation} = C_{\varepsilon_2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}, \quad (2.42)$$

où C_{ε_2} est une constante. Finalement, l'équation de transport de $\bar{\varepsilon}$ modélisée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\nu_f + \nu_t) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right] - C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}. \quad (2.43)$$

Les méthodes de détermination des constantes et les valeurs les plus couramment utilisées sont rappelées en annexe A.

Traitement des zones de proche paroi : modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien

Le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ standard repose sur l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds turbulent, ce qui implique une nette séparation entre l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence et l'échelle de Kolmogorov. Or, à proximité d'une paroi, le nombre de Reynolds local faiblit, la viscosité turbulente ne domine plus la viscosité moléculaire et l'hypothèse de séparation d'échelles entre les tourbillons porteurs d'énergie et la dissipation visqueuse n'est plus valable. Une correction doit être apportée au modèle standard afin d'améliorer sa représentativité en zone de proche paroi. Les modèles ainsi modifiés sont appelés **modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds**. La forme générique des équations de fermeture pour cette catégorie de modèles est la suivante :

$$\nu_t = C_{\mu} f_{\mu} \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = -\bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] - \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} = -C_{\varepsilon_1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} + \nu_f \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} - \bar{\varepsilon}_p. \quad (2.46)$$

On note, par rapport au modèle standard, l'introduction des fonctions d'amortissement f_1 , f_2 et f_{μ} , ainsi que la présence de termes supplémentaires de dissipation $\bar{\varepsilon}_p$ et $\bar{\varepsilon}_p$. De nombreuses propositions existent pour l'expression de ces fonctions et les valeurs des constantes (Jones & Launder [43], Launder & Sharma [54], Chien [19],...). On trouvera une revue détaillée de ces modèles dans [18]. Nous nous intéresserons plus particulièrement ici à la formulation de Chien.

Dans ce qui suit, les fonctions d'amortissement sont définies dans le repère local à la paroi. $\partial./\partial n$ désigne la dérivée spatiale dans la direction normale à la paroi et y_w la distance à la paroi. Le nombre de Reynolds turbulent est défini comme :

$$\text{Re}_t = \bar{k}^2 / (\nu_f \bar{\varepsilon}). \quad (2.47)$$

La vitesse de frottement u_f est donnée par :

$$u_f = \sqrt{\nu_f \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}}, \quad (2.48)$$

et la distance normalisée à la paroi par :

$$y^+ = \frac{y_w u_f}{\nu_f}. \quad (2.49)$$

Les fonctions et les coefficients du modèle de Chien [19] s'écrivent alors :

$$f_{\mu} = 1 - \exp(-0.0115y^+), \quad (2.50)$$

$$f_1 = 1, \quad (2.51)$$

$$f_2 = 1 - 0.22 \exp(-\text{Re}_t^2/36), \quad (2.52)$$

$$\bar{\varepsilon}_p = 2\nu_f \left(\frac{\bar{k}}{y_w^2} \right), \quad (2.53)$$

$$\bar{E}_p = 2\nu_f \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{y_w^2} \right) \exp(-y^+/2). \quad (2.54)$$

Pour les différentes constantes, Chien préconise :

$$C_{\mu} = 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.35, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.8, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3, \quad (2.55)$$

ainsi que :

$$\bar{\varepsilon} = 0 \text{ à la paroi.} \quad (2.56)$$

Nous choisissons d'utiliser un code de calcul 1D (voir annexe B.1) pour déterminer les profils établis de vitesse, d'énergie cinétique turbulente et de dissipation à l'établissement dans des géométries simples. Nous souhaitons en particulier pouvoir obtenir ces profils pour des écoulements en canaux plans et dans des tubes à sections circulaires ou annulaires.

2.3 Application combinée de la moyenne statistique et du filtre spatial

Nous allons à présent appliquer successivement les moyennes statistique et spatiale aux équations de Navier-Stokes.

2.3.1 Équation de continuité

Étant donné que la moyenne statistique commute avec les opérateurs de dérivation, l'application la la moyenne statistique à l'équation de continuité instantanée (2.11) donne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.57)$$

Puis l'application du filtre spatial conduit, en tenant compte des règles de permutation avec les opérateurs de dérivation (1.19) à (1.24) et de la condition d'adhérence en paroi, à :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0. \quad (2.58)$$

2.3.2 Équation bilan de quantité de mouvement

L'application de la moyenne statistique à l'équation instantanée de quantité de mouvement (2.14) fournit tout d'abord :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}. \quad (2.59)$$

L'application du filtre spatial conduit ensuite, étant donné la condition d'adhérence en paroi, à :

$$\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f = -\frac{\phi}{\rho} \left\langle \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \right\rangle_f + \phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f + \phi g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f. \quad (2.60)$$

Avec l'équation (1.20) :

$$\frac{\phi}{\rho} \left\langle \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\phi}{\rho} \langle \delta \bar{P} n_i \delta \omega \rangle_f, \quad (2.61)$$

et :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \phi \left\langle \nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \nu_f \phi \langle \bar{u}_i n_j \delta \omega \rangle_f}_{=0}. \quad (2.62)$$

Par ailleurs, le terme $\langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f$ se décompose en :

$$\langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f = \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f. \quad (2.63)$$

L'équation bilan doublement moyennée de la quantité de mouvement s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f = & - \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \phi g_i \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \\ & + \underbrace{\phi \left\langle \left(-\frac{\delta \bar{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta \omega \right\rangle_f}_{-F_{\phi_i}}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Le terme $-F_{\phi_i}$ représente la force volumique spécifique exercée par la phase solide sur la phase fluide. Il correspond à la i -ième composante de la force de traînée, pondérée par le volume de filtrage et la masse volumique du fluide, que subissent les inclusions solides. Plus généralement, ce terme représente les pertes de charge de l'écoulement moyen. Le terme

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f$$

correspond à la dispersion de la quantité de mouvement par les hétérogénéités du profil de vitesse, moyenné statistiquement. Enfin le terme

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f$$

est une inconnue et il devra être modélisé par la suite. C'est l'objet de la partie IV.

2.3.3 Équation bilan de la température

L'application de la moyenne statistique à l'équation instantanée de la température (1.27) donne :

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{T}_f) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\overline{u'_i T'_f}}_{\text{flux turbulent de chaleur}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\bar{Q}}{(\rho C_p)_f}, \quad (2.65)$$

ainsi que la condition aux limites en paroi :

$$\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f}. \quad (2.66)$$

Puis, en appliquant le filtre spatial à l'équation (2.65), nous obtenons l'équation bilan de température doublement moyennée :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{T}_f \rangle_f &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}'_i \bar{T}'_f \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\phi \langle \bar{Q} \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &+ \underbrace{\phi \left\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_\omega \right\rangle_f}_{\text{transfert thermique à la paroi}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta_\omega \rangle_f}_{\text{tortuosité}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f}_{\text{dispersion thermique}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

En utilisant la condition aux limites (2.66), le transfert thermique à la paroi peut aussi s'écrire :

$$\left\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_\omega \right\rangle_f = \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (2.68)$$

Dans l'équation (2.67), le flux turbulent de chaleur, moyenné spatialement, la tortuosité et la dispersion thermique doivent être modélisés.

2.3.4 Synthèse : équations macroscopiques décrivant un écoulement turbulent en milieu poreux

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} &= 0, \\ \phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f &= -\frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \phi g_i \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \\ &\quad + \phi \left\langle \left(-\frac{\delta \bar{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta \omega \right\rangle_f, \\ \phi \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{T}_f \rangle_f &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}'_i \bar{T}'_f \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\phi \langle \bar{Q} \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &\quad + \phi \left\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta \omega \right\rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta \omega \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f, \end{aligned}$$

où les termes à modéliser sont :

- la moyenne spatiale du tenseur de Reynolds :

$$\langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle_f ;$$

- les termes de dispersion (modélisés dans la partie II) :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f ; \end{aligned}$$

- la tortuosité (qui n'est pas traitée dans ce travail)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta \omega \rangle_f ;$$

DEUXIÈME PARTIE

DISPERSION THERMIQUE

INTRODUCTION

L'application d'un filtre spatial à l'équation de transport de la température conduit à l'apparition d'un terme de dispersion thermique qui nécessite une modélisation. Pinson *et al.* [76, 77] ont montré que ce terme est prédominant par rapport à la diffusion moléculaire et à la diffusion turbulente pour la gamme d'écoulements qui nous intéressent. C'est pourquoi nous nous intéressons ici à la modélisation de la dispersion thermique.

La dispersion est un phénomène qui est induit par les hétérogénéités du champ local de vitesse. Plus précisément, à l'échelle locale, le champ de vitesse est perturbé par les obstacles solides. Le transport d'un scalaire passif est alors affecté par ces changements. L'application d'un filtre spatial conduit à la perte d'une partie de ces informations qui sont alors contenues dans le terme de dispersion à modéliser. Notons que, si en tout point de l'espace la déviation de vitesse est nulle, alors le terme de dispersion l'est aussi. De la même façon, la dispersion est induite par les hétérogénéités du champ de scalaire passif. Considérons par exemple le cas d'un écoulement dans un empilement de canaux plans (aussi appelé milieu stratifié, voir fig. II.1).

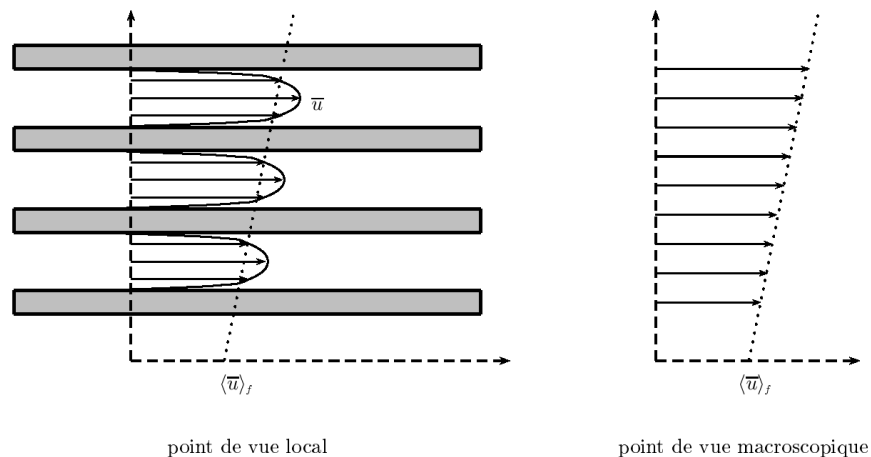


FIG. II.1 – Comparaison entre points de vue local et macroscopique pour le cas de l'écoulement dans un milieu stratifié.

Le terme de convection par la vitesse macroscopique dans l'équation (2.67) est isolé. Il correspond à une convection due à un champ de vitesse plat. Le terme de dispersion prend alors en compte le fait que le scalaire passif est convecté plus rapidement au centre des canaux que près des parois. Taylor [98, 99] fournit une première interprétation simplifiée de la dispersion. Pour cela, il s'intéresse au transport d'un créneau de scalaire passif pour des écoulements laminaires et turbulents dans un tube à section circulaire. La figure II.2

montre que ce créneau va être lissé aux instants suivants car le scalaire est transporté plus rapidement au centre du canal.

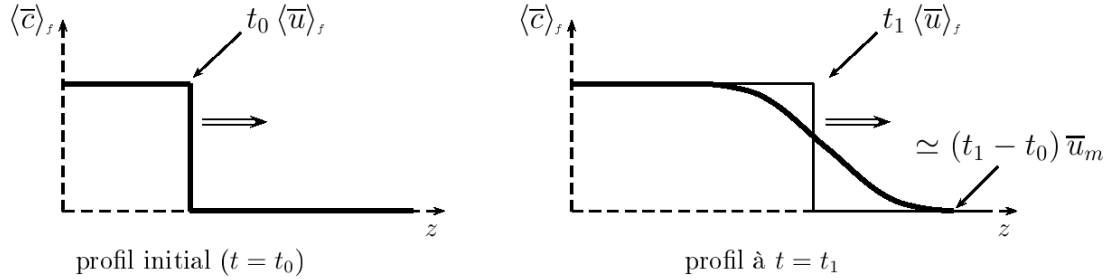
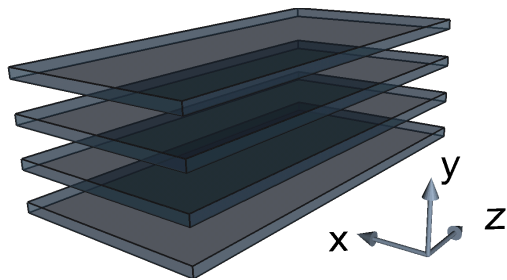


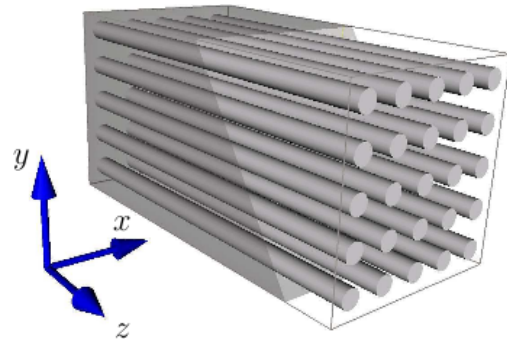
FIG. II.2 – Propagation macroscopique d'un scalaire passif dans un milieu stratifié : mise en évidence de la dispersion de Taylor [98, 99]. La vitesse moyenne à l'intérieur d'un pore est notée $\langle \bar{u}_i \rangle_f$, \bar{u}_m est la vitesse maximale à l'intérieur d'un pore.

Pour caractériser cette dispersion, Taylor [98, 99] a montré que le flux dispersif de scalaire passif pouvait être exprimé en fonction du gradient macroscopique de scalaire passif. Il a pour cela introduit l'expression du profil auto-semblable de vitesse et a procédé à des bilans sur des sections transverses au tube. Aris [3] a ensuite généralisé ce travail pour un tube de section arbitraire en étudiant le mouvement du centre de gravité de la distribution de scalaire passif et de l'évolution des moments statistiques de cette distribution.

Dans le cadre de l'étude des milieux poreux aux régimes classiques (laminaire ou faiblement inertiel), l'hypothèse de fermeture au premier gradient du terme de dispersion introduite par Taylor [98] est généralement retenue [70, 108]. Le terme de dispersion est alors modélisé par un terme de diffusion supplémentaire *via* l'introduction d'un tenseur de dispersion qui dépend de la géométrie du milieu et du régime d'écoulement considéré. La difficulté porte alors sur la détermination de ce tenseur. Pour estimer ces coefficients, une solution pourrait être l'expérimentation. Dans [107], cette possibilité est discutée et rapidement rejetée à cause à la complexité du dispositif expérimental qu'il faudrait mettre en oeuvre. Par ailleurs, si le modèle de Taylor [98, 99] présente l'avantage d'être simple, il manque de généralité car les coefficients introduits dépendent des conditions de flux thermique en paroi [27]. De plus, cette formulation ne permet pas de faire le lien avec la modélisation de l'échange thermique. C'est pourquoi nous préférons suivre Pinson *et al.* [76, 77] et nous appuyer sur la méthode de Whitaker [15, 81, 82, 108]. Selon cette méthode, les termes de dispersion peuvent être modélisés grâce à l'étude de l'équation bilan de la déviation spatiale de la quantité considérée. La dispersion thermique est alors scindée en deux contributions : un terme de dispersion passive lié aux hétérogénéités locales de vitesse, et un terme de dispersion active lié aux variations de flux thermique en paroi. Cette approche permet de dériver un modèle de dispersion thermique indépendant des conditions de flux en paroi. Nous établissons ainsi un modèle de dispersion thermique valable pour une large gamme de nombres de Reynolds et pour trois configurations différentes caractéristiques de nos applications : canaux plans, tubes circulaires et conduites annulaires (voir figure II.3). Par ailleurs, on considère des écoulements incompressibles dans des milieux à porosité constante. La porosité disparaît alors des équations mais on travaille néanmoins selon une approche homogénéisée. La méthode que nous proposons pour l'établissement du modèle de dispersion est applicable à d'autres configurations d'intérêt industriel (écoulements dans des faisceaux de crayons, ...) et permet d'obtenir pour chaque géométrie un modèle de dispersion facilement exploitable.



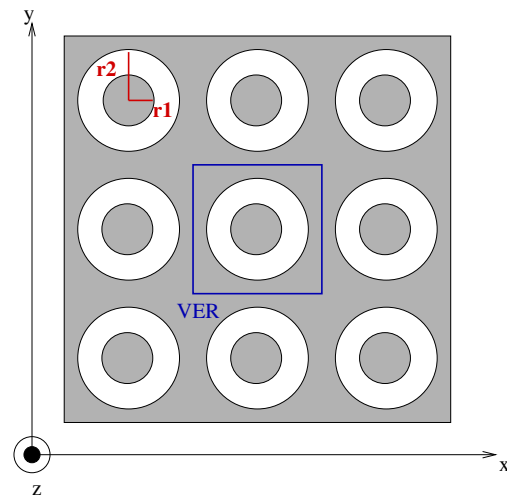
(a) Milieu composé d'un empilement de canaux plans.



(b) Milieu composé d'un empilement de tubes circulaires.



(c) Assemblage du réacteur Jules Horowitz.



(d) Milieu composé de conduites annulaires concentriques.

FIG. II.3 – Description des milieux considérés.

Dans le chapitre 3, un modèle de dispersion thermique adapté au cas des écoulements laminaires en canaux est développé. Le cas des écoulements turbulents en canaux est traité dans le chapitre 4 et un modèle général couvrant tous les régimes d'écoulements est proposé dans le chapitre 5. Le modèle de dispersion est ensuite évalué et les effets de la dispersion sont analysés dans le chapitre 6.

ÉTUDE DE LA DISPERSION THERMIQUE : ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

Dans ce chapitre, la méthode de Whitaker [15, 82, 108] est adaptée au cas d'écoulements laminaires dans des milieux stratifiés composés de canaux plans, de tubes circulaires ou de conduites annulaires [76] (voir fig. II.3). Les propriétés du fluides et la porosité du milieu sont supposées constantes.

3.1 Établissement d'un modèle général de dispersion thermique pour des écoulements laminaires

3.1.1 Étude de l'équation bilan de la déviation de la température

L'équation bilan de la déviation spatiale de température s'obtient en soustrayant l'équation de $\langle T_f \rangle_f$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle T_f \rangle_f \langle u_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\langle Q \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f}_{\text{Tortuosité}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f}_{\text{Dispersion thermique}} + \underbrace{\frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}}_{\text{Transfert thermique à la paroi}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

à celle de T_f :

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (T_f u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) + \frac{Q}{(\rho C_p)_f}.$$

On suppose ici que la source volumique de chaleur Q est nulle, on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \delta T_f}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta T_f \langle u_i \rangle_f)}_{II} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} \right)}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_i \langle T_f \rangle_f)}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f}_V \\ &- \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f}_{VI} - \underbrace{\frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}}_{VII} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_i \delta T_f)}_{VIII}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

La condition aux limites associée à cette équation s'écrit :

$$\alpha_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} n_i = \frac{\Phi}{(\rho C_p)_f} - \alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} n_i. \quad (3.3)$$

Une analyse des ordres de grandeur des différents termes de l'équation (3.2) permet de la simplifier. Par la suite, ℓ et L désignent respectivement les échelles de longueur des variations spatiales des grandeurs physiques non filtrées et filtrées. Les échelles temporelles des variations temporelles macroscopique et microscopique sont notées respectivement τ et τ_δ . Deux hypothèses sont nécessaires si l'on souhaite simplifier l'équation (3.2) [76, 77] :

- H1 : Hypothèse de séparation des échelles spatiales : $\ell \ll L$;
- H2 : Hypothèse de faible instationnarité (séparation des échelles temporelles : $\tau_\delta \ll \tau$).

Notons que la condition d'adhérence en paroi donne :

$$\langle \mathbf{u} \rangle_f \sim \delta \mathbf{u}.$$

Les ordres de grandeur des différents termes composant l'équation (3.2) sont regroupés dans le tableau 3.1.

	Termes de l'équation (3.2)	Ordre de grandeur	Négligé/Conservé
I	$\frac{\partial \delta T_f}{\partial t}$	$\frac{\delta T_f}{\tau}$	négligé
II	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta T_f \langle u_i \rangle_f)$	$\frac{\langle \mathbf{u} \rangle_f \delta T_f}{\ell}$	conservé
III	$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} \right)$	$\alpha_f \frac{\delta T_f}{\ell^2}$	conservé
IV	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_i \langle T_f \rangle_f)$	$\frac{\delta u \langle T_f \rangle_f}{\ell}$	conservé
V	$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f$	$\frac{\langle \delta u \delta T_f \rangle_f}{L}$	négligé
VI	$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta \omega \rangle_f$	$\alpha_f \frac{\delta T_f}{L^2}$	négligé
VII	$\frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}$	$\frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}$	conservé
VIII	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_i \delta T_f)$	$\frac{\delta u \delta T_f}{\ell}$	conservé

TAB. 3.1 – Ordres de grandeur des termes composant l'équation bilan de la déviation de température δT_f .

En appliquant les simplifications décrites dans le tableau 3.1 et l'hypothèse de fluide incompressible, l'équation bilan de δT_f (3.2) devient :

$$u_i \frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} \right) = -\delta u_i \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Problème de fermeture

L'équation bilan de la déviation de température simplifiée (3.4) comporte deux termes sources :

- un terme source proportionnel au gradient macroscopique de température $\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f / \partial x_i$;
- un terme source de chaleur $\langle \Phi \delta \omega \rangle_f$, dû au flux en paroi.

Nous recherchons alors la solution de l'équation (3.4) sous la forme [14] :

$$\delta T_f = \eta_j \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \psi. \quad (3.5)$$

Dans le cas d'un milieu spatialement périodique, la fonction ψ est nulle [15]. La fonction de dispersion η_j est homogène à une longueur et ζ est homogène à un temps. Avec la relation de fermeture (3.5), les dérivées de δT_f s'écrivent :

$$\frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} + \eta_j \frac{\partial^2 \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right). \quad (3.6)$$

Termes de la relation (3.6)	Ordre de grandeur	Négligé/conservé
$\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j}$	$\frac{\langle T_f \rangle_f}{L}$	conservé
$\eta_j \frac{\partial^2 \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i \partial x_j}$	$\frac{\ell \langle T_f \rangle_f}{L^2}$	négligé
$\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}$	$\frac{\zeta \langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{\ell (\rho C_p)_f}$	conservé
$\zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right)$	$\frac{\zeta \langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{L (\rho C_p)_f}$	négligé

TAB. 3.2 – Ordres de grandeur des termes composant l'équation (3.6).

On peut simplifier la relation (3.6) en examinant les ordres de grandeur des différents termes (voir tableau 3.2) :

$$\frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} \simeq \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (3.7)$$

Suivant un raisonnement similaire, il est possible de montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta T_f}{\partial x_i} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (3.8)$$

En réinjectant ces relations dans l'équation bilan de δT_f simplifiée, on obtient :

$$\left[u_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) + \delta u_i \delta_{ij} \right] \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} = \left[-u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) - 1 \right] \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (3.9)$$

et la condition aux limites (3.3) devient :

$$\alpha_f \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} n_i = \left(-\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \frac{\Phi}{(\rho C_p)_f}. \quad (3.10)$$

Cela implique, en supposant que les problèmes de fermeture pour η et ζ sont découplés [77], que :

- dans la phase fluide :

$$u_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) = -\delta u_j, \quad (3.11)$$

$$u_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) = -1, \quad (3.12)$$

- à l'interface fluide-solide :

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (3.13)$$

$$\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} n_i = \frac{\Phi}{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}. \quad (3.14)$$

Par ailleurs la périodicité du milieu s'exprime comme :

$$\eta_j(x_i + p_i) = \eta_j(x_i); \quad \zeta(x_i + p_i) = \zeta(x_i), \quad (3.15)$$

où les p_i sont les composantes du vecteur décrivant la périodicité du milieu.

Enfin, l'idempotence de la moyenne spatiale permet d'écrire une relation additionnelle dans le problème de fermeture :

$$\langle \delta T_f \rangle_f = \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = 0. \quad (3.16)$$

3.1.3 Équation macroscopique modèle pour $\langle T_f \rangle_f$

Nous disposons, à ce stade de l'étude, d'une relation entre la déviation de température, le gradient de température moyennée et le terme source de chaleur. Cette relation s'exprime à l'aide de deux fonctions de dispersion η et ζ pour lesquelles nous avons établi le problème de fermeture (équations (3.11) à (3.14)). En injectant la relation de fermeture (3.5) dans l'équation bilan de température spatialement moyennée (1.45),

on obtient l'équation macroscopique modèle pour la température :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle T_f \rangle_f \langle u_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \delta u_i \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{(a)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \delta u_i \zeta \rangle_f \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right)}_{(b)} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \eta_j n_i \delta \omega \rangle_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j}}_{(c)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \zeta n_i \delta \omega \rangle_f \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}}_{(d)}, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

où :

- (a) est le terme de dispersion passive. Il agit comme une diffusion à l'échelle macroscopique ;
- (b) est le terme de dispersion active. Il correspond à un transport du terme source de chaleur ;
- (c) est le terme de tortuosité passive ;
- (d) est le terme de tortuosité active .

Ces termes s'écrivent plus simplement en définissant :

- le **tenseur de dispersion passive** :

$$\mathcal{D}_{ij}^P = - \langle \delta u_i \eta_j \rangle_f, \quad (3.18)$$

- le **vecteur de dispersion active** :

$$\mathcal{D}_i^A = - \langle \delta u_i \zeta \rangle_f, \quad (3.19)$$

- le **tenseur de tortuosité passive** :

$$\mathcal{T}_{ij}^P = \langle \eta_j n_i \delta \omega \rangle_f, \quad (3.20)$$

- le **vecteur de tortuosité active** :

$$\mathcal{T}_i^A = \langle \zeta n_i \delta \omega \rangle_f. \quad (3.21)$$

Avec ces notations, l'équation macroscopique modèle pour la température du fluide s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle_f \langle T_f \rangle_f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mathcal{D}_{ij}^P + \alpha_f \mathcal{T}_{ij}^P \right) \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mathcal{D}_i^A + \alpha_f \mathcal{T}_i^A \right) \frac{\langle \Phi \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right]. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Afin de mieux comprendre l'influence des données physiques sur le problème de la dispersion et d'obtenir des résultats transposables à d'autres configurations, nous allons le mettre sous forme adimensionnée.

3.1.4 Mise sous forme adimensionnée

Dans ce paragraphe, l'équation macroscopique modèle pour la température (3.22) et le problème de fermeture (3.11) à (3.14) permettant de déterminer les fonctions de dispersion sont mis sous forme adimensionnée. Les milieux poreux considérés étant périodiques, le diamètre hydraulique D_h d'un pore est unique

et constant. Il est choisi comme longueur de référence. La vitesse de référence est la vitesse débitante U . Le temps caractéristique de la diffusion thermique à l'échelle du pore est défini par :

$$\tau_d = \frac{D_h^2}{\alpha_f}.$$

On introduit arbitrairement une température de référence T_f^r . Par la suite, les variables adimensionnées seront désignées par un astérisque $*$. On définit tout d'abord les nombres de Prandtl, Reynolds et Péclet :

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha_f}; \quad \text{Re} = \frac{UD_h}{\nu_f}; \quad \text{Pe} = \text{Re} \times \text{Pr} = \frac{UD_h}{\alpha_f}. \quad (3.23)$$

Puis les variables adimensionnées :

$$t^* = \frac{t}{\tau_d}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{D_h}, \quad u_i^* = \frac{u_i}{U}, \quad \alpha_f^* = \frac{\alpha_f}{\alpha_f} = 1, \quad \Phi^* = \frac{D_h}{\alpha_f(\rho C_p)_f T_f^r} \Phi, \quad (3.24)$$

$$T_f^* = \frac{T_f}{T_f^r}, \quad \eta_j^* = \frac{\eta_j}{D_h}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{\tau_d}, \quad \delta_\omega^* = \delta_\omega D_h, \quad (\rho C_p)_f^* = \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_f} = 1,$$

$$\mathcal{D}_{ij}^{P*} = \frac{\mathcal{D}_{ij}^P}{\alpha_f} = -\text{Pe} \langle \delta u_i^* \eta_j^* \rangle_f, \quad \mathcal{D}_i^{A*} = \frac{\mathcal{D}_i^A}{D_h} = -\text{Pe} \langle \delta u_i^* \zeta^* \rangle_f, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{T}_{ij}^{P*} = \mathcal{T}_{ij}^P = \langle \eta_j^* n_i \delta_\omega^* \rangle_f, \quad \mathcal{T}_i^{A*} = U \mathcal{T}_i^A = \text{Pe} \langle \zeta^* n_i \delta_\omega^* \rangle_f.$$

En utilisant les variables adimensionnées, l'équation (3.22) prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle T_f^* \rangle_f}{\partial t^*} + \text{Pe} \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\langle u_i^* \rangle_f \langle T_f^* \rangle_f) &= \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial \langle T_f^* \rangle_f}{\partial x_i^*} \right) + \langle \Phi^* \delta_\omega^* \rangle_f \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\left[\mathcal{D}_{ij}^{P*} + \mathcal{T}_{ij}^{P*} \right] \frac{\partial \langle T_f^* \rangle_f}{\partial x_i^*} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\left[\mathcal{D}_i^{A*} + \frac{1}{\text{Pe}} \mathcal{T}_i^{A*} \right] \langle \Phi^* \delta_\omega^* \rangle_f \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le problème de fermeture adimensionné pour les fonctions de dispersion η et ζ s'écrit quant à lui :

- dans la phase fluide :

$$\text{Pe} u_i^* \frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} \right) = -\text{Pe} \delta u_j^*, \quad (3.27)$$

$$\text{Pe} u_i^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} \right) = -1, \quad (3.28)$$

- à l'interface fluide-solide :

$$\frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} n_i = \frac{\Phi^*}{\langle \Phi^* \delta_\omega^* \rangle_f}, \quad (3.30)$$

- périodicité du milieu :

$$\eta_j^*(x_i^* + p_i^*) = \eta_j^*(x_i^*) ; \zeta^*(x_i^* + p_i^*) = \zeta^*(x_i^*), \quad (3.31)$$

- idempotence :

$$\langle \delta T_f^* \rangle_f = \langle \eta_j^* \rangle_f \frac{\partial \langle T_f^* \rangle_f}{\partial x_j^*} + \langle \zeta^* \rangle_f \langle \Phi^* \delta_\omega^* \rangle_f = 0. \quad (3.32)$$

3.2 Étude de la dispersion pour des écoulements laminaires en canaux

La connaissance du champ local de vitesse est nécessaire à la résolution du problème de fermeture (3.27) à (3.32). Cependant, ce champ ne peut être déterminé analytiquement que dans des configurations très simples, même en régime laminaire. Par la suite, nous considérons des milieux stratifiés dans lesquels l'écoulement se fait suivant une direction privilégiée.

3.2.1 Écoulement laminaire dans un canal bidimensionnel plan

Le premier cas considéré est celui d'un empilement régulier de canaux plans (Fig 3.1). Ce milieu est spatialement périodique. La porosité est constante. L'écoulement se fait suivant la direction z . Il y a invariance suivant x . L'étude de ce milieu stratifié peut être réduite à celle d'un canal plan (VER). Nous supposons que l'écoulement est établi. Seule la composante suivant z de la vitesse est non nulle. Seules les dérivées suivant y de la vitesse sont non nulles.

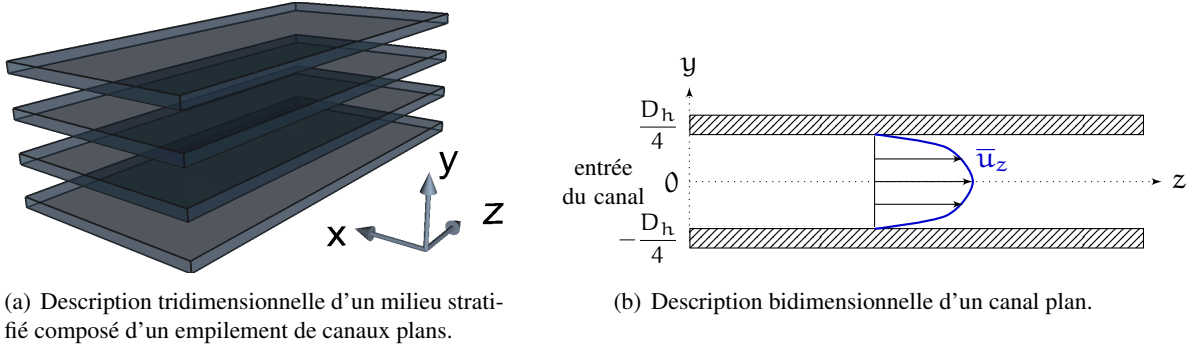


FIG. 3.1 – Description d'un milieu stratifié composé d'un empilement de canaux plans. Le diamètre hydraulique est égal au double de la distance séparant deux plaques.

Dans ce cas, la vitesse adimensionnée s'écrit :

$$u_z^*(y^*) = \frac{3}{2} - 24y^{*2}, \quad (3.33)$$

soit :

$$\delta u_z^*(y^*) = \frac{1}{2} - 24y^{*2}. \quad (3.34)$$

D'autre part,

$$\langle \delta_\omega \rangle_f = \frac{4}{D_h},$$

et donc :

$$\langle \delta_{\omega}^* \rangle_f = 4.$$

Le problème de fermeture pour les fonctions de dispersion se simplifie donc en :

- dans la phase fluide : $y^* \in]-1/4; 1/4[$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \right) = Pe \delta u_z^*, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \right) = 1, \quad (3.36)$$

- à l'interface fluide-solide : $y^* = \pm 1/4$

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} (y^* = \pm 1/4) = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} (y^* = \pm 1/4) = \pm \frac{1}{4}, \quad (3.38)$$

- condition de symétrie au centre du canal :

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} (y^* = 0) = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} (y^* = 0) = 0. \quad (3.40)$$

En résolvant ce système, nous obtenons :

$$\eta_z^*(y^*) = Pe \left(\frac{y^{*2}}{4} - 2y^{*4} \right) + C_{\eta}, \quad (3.41)$$

$$\zeta^*(y^*) = \frac{y^{*2}}{2} + C_{\zeta}. \quad (3.42)$$

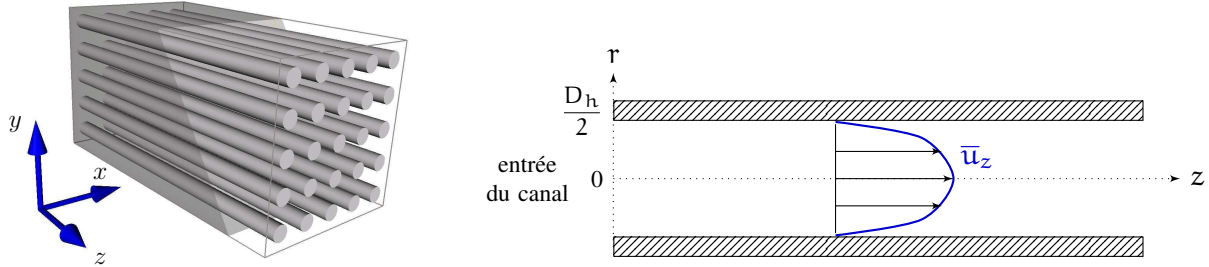
Comme le filtre spatial est idempotent, les valeurs des constantes C_{η} et C_{ζ} n'influent pas dans le calcul de la dispersion. Les tenseurs de dispersion active et passive, réduits à leurs seules composantes axiales, valent :

$$\mathcal{D}_{zz}^P{}^* = -Pe \langle \delta u_z^* \eta_z^* \rangle_f = \frac{Pe^2}{840}, \quad (3.43)$$

$$\mathcal{D}_z^A{}^* = -Pe \langle \delta u_z^* \zeta^* \rangle_f = \frac{Pe}{240}. \quad (3.44)$$

3.2.2 Écoulement laminaire dans un tube à section circulaire

On considère à présent un milieu compact transpercé de tubes à section circulaire parallèles. Ce milieu est spatialement périodique. Le porosité est constante. L'écoulement se fait suivant la direction z . L'étude de ce milieu stratifié peut être réduite à celle d'un tube à section circulaire (VER) décrit sur la figure 3.2.



(a) Description tridimensionnelle d'un milieu stratifié composé de tubes à section circulaire.

(b) Description bidimensionnelle d'un tube à section circulaire.

FIG. 3.2 – Description d'un milieu stratifié composé de tubes à section circulaire. Le diamètre hydraulique est égal au diamètre des tubes.

Nous supposons que l'écoulement est établi. Seule la composante suivant z de la vitesse est non nulle. Seules les dérivées suivant r de la vitesse sont non nulles. Dans ce cas, la vitesse adimensionnée s'écrit :

$$u_z^*(r^*) = 2 - 8r^{*2}, \quad (3.45)$$

soit :

$$\delta u_z^*(r^*) = 1 - 8r^{*2}. \quad (3.46)$$

Par ailleurs, le calcul de la densité de surface adimensionnée donne :

$$\langle \delta_\omega^* \rangle_f = 4.$$

En coordonnées cylindriques, le problème de fermeture s'écrit donc :

- dans le domaine fluide : $r^* \in]0, 1/2[$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \right) = Pe \delta u_z^*, \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \right) = 1; \quad (3.48)$$

- à l'interface fluide-solide : $r^* = 1/2$

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} = \frac{1}{4}; \quad (3.50)$$

- condition de symétrie au centre du canal : $r^* = 0$

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} = 0. \quad (3.52)$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\eta_z^*(r^*) = \text{Pe} \left(\frac{r^{*2}}{4} - \frac{r^{*4}}{2} \right) + C_\eta, \quad (3.53)$$

$$\zeta^*(r^*) = \frac{r^{*2}}{4} + C_\zeta. \quad (3.54)$$

Nous en déduisons les valeurs des coefficients de dispersion :

$$\mathcal{D}_{zz}^{\text{P}*} = -\text{Pe} \langle \delta u_z^* \eta_z^* \rangle_f = \frac{\text{Pe}^2}{192}, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{D}_z^{\text{A}*} = -\text{Pe} \langle \delta u_z^* \zeta^* \rangle_f = \frac{\text{Pe}}{96}. \quad (3.56)$$

Notons que [76] obtient les mêmes résultats.

3.2.3 Écoulement laminaire dans une conduite annulaire

On considère un milieu compact transpercé de conduites annulaires formées de cylindres concentriques (voir Fig 3.3). L'étude de ce milieu périodique peut être restreinte à celle d'une conduite annulaire (VER). Le rayon du cylindre extérieur est noté r_2 , et celui du cylindre intérieur, r_1 . Le diamètre hydraulique est donné par :

$$D_h = 2(r_2 - r_1).$$

L'écoulement se fait suivant la direction z et est supposé établi. Seule la composante suivant z de la vitesse est non nulle. Seules les dérivées suivant r de la vitesse sont non nulles. Dans ce cas, la vitesse adimensionnée s'écrit :

$$u_z^*(r^*) = K \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_2^*} \right)^2 + 2r_m^{*2} \ln \left(\frac{r^*}{r_2^*} \right) \right], \quad (3.57)$$

où :

$$q = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1^*}{r_2^*}, \quad K = \frac{2}{1 + q^2 - 2r_m^{*2}}, \quad r_m^{*2} = \frac{q^2 - 1}{2 \ln q}.$$

On en déduit δu_z^* :

$$\delta u_z^* = K \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_2^*} \right)^2 + 2r_m^{*2} \ln \left(\frac{r^*}{r_2^*} \right) \right] - 1. \quad (3.58)$$

Le calcul de la densité de surface adimensionnée donne quant à lui :

$$\langle \delta_\omega^* \rangle_f = 4.$$

Le problème de fermeture pour les fonctions de dispersion est donc le suivant :

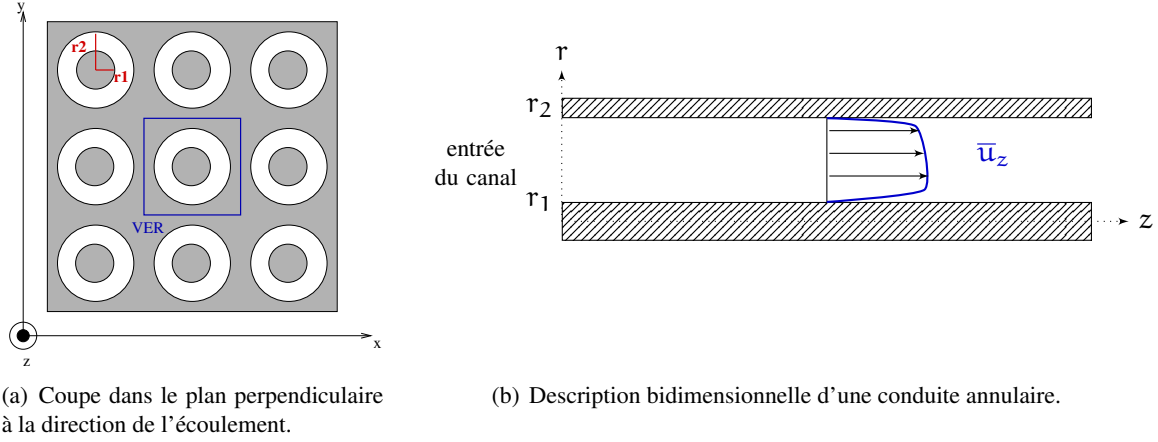


FIG. 3.3 – Description d'un milieu stratifié composé de conduites annulaires.

- dans la phase fluide : $r^* \in]r_1^*, r_2^*[$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \right) = Pe \delta u_z^*, \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \right) = 1; \quad (3.60)$$

- à l'interface fluide-solide : $r^* = r_1^*$

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} = 0, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{4}; \quad (3.62)$$

- à l'interface fluide-solide : $r^* = r_2^*$

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} = 0, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} = \frac{1}{4}. \quad (3.64)$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\eta_z^*(r^*) = Pe \left\{ K \left[\frac{r^{*2}}{2} \left(\frac{1}{2} - r_m^{*2} - r_m^{*2} \ln r_2^* \right) - \frac{r^{*4}}{16r_2^{*2}} + \frac{1}{2} r_m^{*2} r^{*2} \ln r^* + \frac{1}{4} q^2 r_2^{*2} \ln r^* \right] - \frac{r^{*2}}{4} \right\} + C_\eta, \quad (3.65)$$

$$\zeta^*(r^*) = \frac{r^{*2}}{4} - \frac{1}{2} r_1^* r_2^* \ln r^* + C_\zeta. \quad (3.66)$$

Le calcul des coefficients de dispersion étant très fastidieux dans le cas d'une conduite annulaire, nous choisissons de recourir à la simulation numérique pour les déterminer.

3.2.4 Simulation : écoulements laminaires en canaux

Le problème de fermeture est discrétisé et résolu numériquement grâce à un code 1D construit suivant la même méthode que celle décrite dans l'annexe B.1. Seuls les écoulements en canal plan, en tube à section circulaire et en conduite annulaire sont étudiés. Les champs de vitesse nécessaires à la résolution du problème de fermeture sont calculés à l'aide du code présenté dans l'annexe B.1. La résolution numérique du problème de fermeture est validée en comparant les résultats obtenus en écoulements laminaires aux solutions analytiques données dans les paragraphes 3.2.1 à 3.2.3. Dans un premier temps, des simulations en canal plan et en tube à section circulaire permettent, par comparaison aux solutions analytiques, de vérifier que notre code résout correctement le problème de fermeture (3.27 à 3.30) et calcule bien les coefficients de dispersion. Puis, nous étudierons le cas d'une conduite annulaire afin de proposer une expression simple des coefficients de dispersion qu'il est très délicat de calculer analytiquement dans cette configuration. Étant donné que le problème de fermeture ne permet de déterminer les fonctions de dispersion η_z et ζ **qu'à une constante près**, nous choisissons pour le moment de fixer C_η et C_ζ de façon à ce que η_z et ζ valent respectivement 0 et 1 à la paroi.

Canal plan

Le cas considéré ici est celui d'un écoulement laminaire dans un canal plan décrit dans le paragraphe 3.2.1. Les résultats donnés par le code sont en accord avec les solutions analytiques (3.41) et (3.42) (voir Fig. 3.4). De plus, le calcul par le code des coefficients de dispersion pour différents nombres de Reynolds

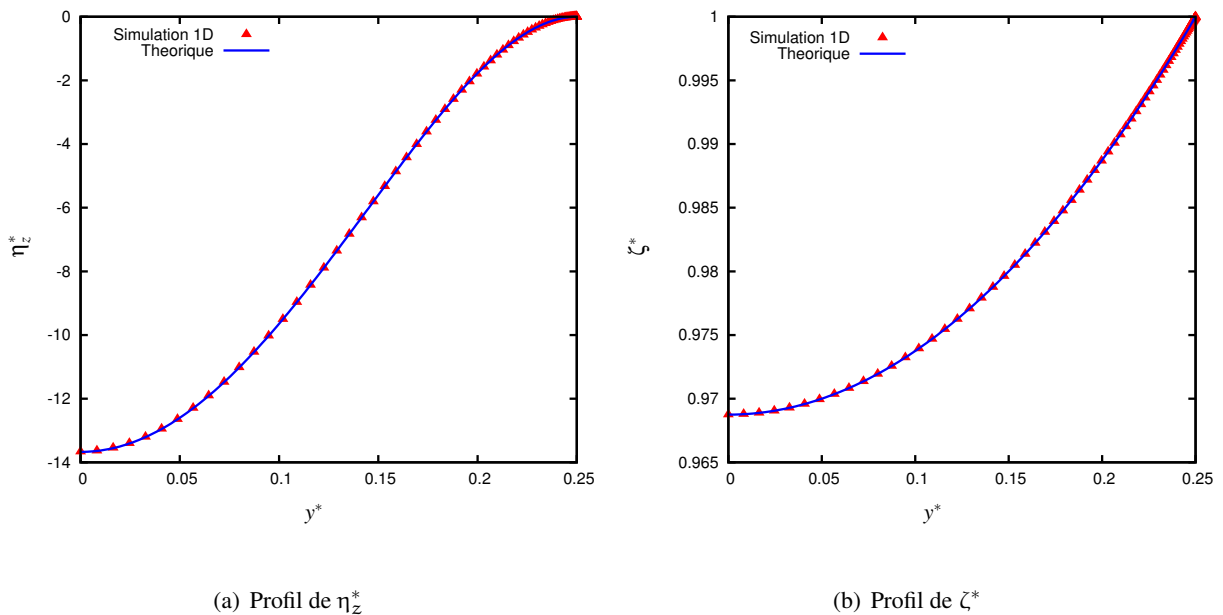


FIG. 3.4 – Écoulement laminaire en canal plan : profils des fonctions de dispersion η_z^* et ζ^* en fonction de $y^* = y/D_h$ pour $Pr = 7$. Comparaisons aux solutions analytiques. Le problème étant symétrique, nous n'avons simulé qu'une demi-section.

donne comme prévu :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \frac{Pe^2}{840}, \quad \mathcal{D}_z^{A*} = \frac{Pe}{240}. \quad (3.67)$$

Tube à section circulaire

Nous simulons ici le cas d'un écoulement laminaire dans un tube à section circulaire présenté dans le paragraphe 3.2.2. La figure 3.5 montre que les résultats du calcul coïncident avec les expressions théoriques

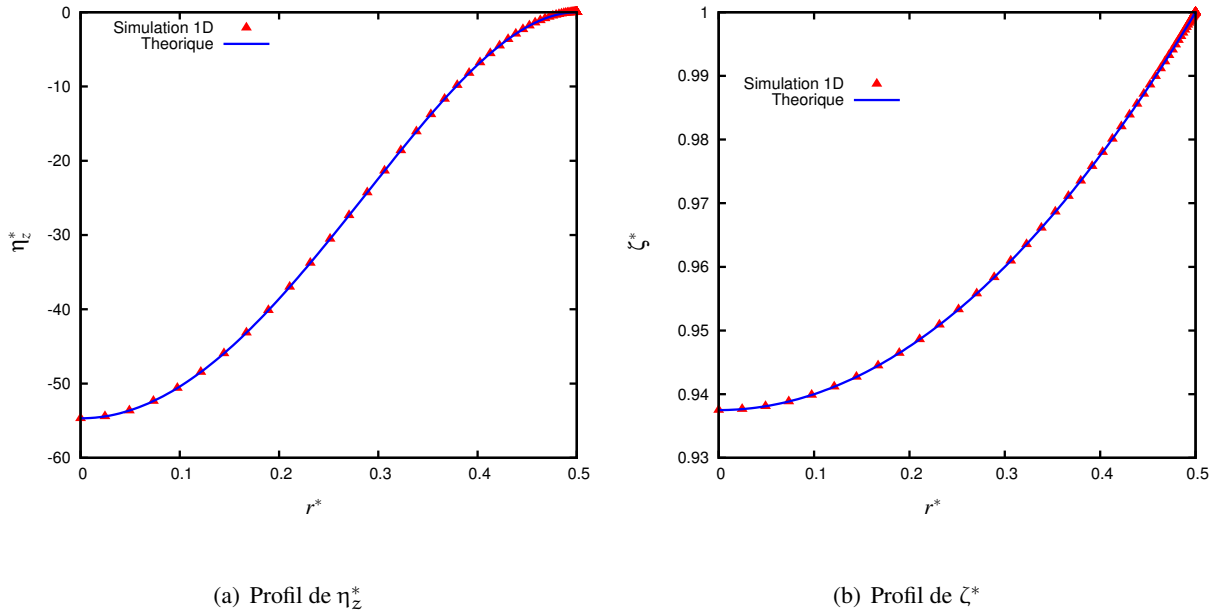


FIG. 3.5 – Écoulement laminaire dans un tube à section circulaire : profils des fonctions de dispersion η_z^* et ζ^* pour $Pr = 7$. Comparaisons aux solutions analytiques. Le problème étant symétrique, nous n'avons simulé qu'une demi-section.

(3.53) et (3.54). Le calcul des coefficients de dispersion est lui aussi correct puisqu'on trouve bien :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \frac{Pe^2}{192}, \quad \mathcal{D}_z^{A*} = \frac{Pe}{96}. \quad (3.68)$$

Conduite annulaire

Le dernier cas simulé est celui d'un écoulement laminaire dans une conduite annulaire (voir paragraphe 3.2.3). Les résultats présentés en Fig. 3.6 correspondent à une conduite caractérisée par un rapport de rayons $q = 0.5$ et concordent avec les solutions analytiques (3.65) et (3.66).

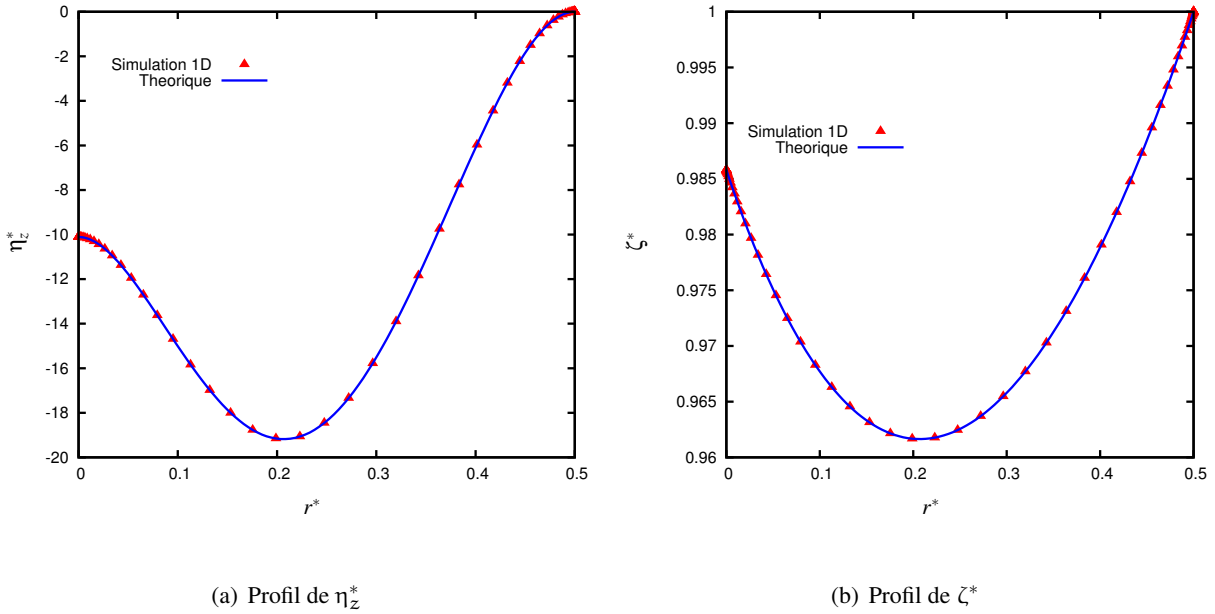


FIG. 3.6 – Écoulement laminaire dans une conduite annulaire : profils des fonctions de dispersion η_z^* et ζ^* pour $Pr = 7$. Comparaison aux solutions analytiques.

Le calcul algébrique des coefficients de dispersion pour un écoulement dans une conduite annulaire étant fastidieux, nous choisissons de chercher une loi approximative pour \mathcal{D}_{zz}^{P*} et \mathcal{D}_z^{A*} en fonction de q à partir des résultats fournis par le code. Les coefficients de dispersion sont calculés pour différents rapports de rayons q compris entre 0 et 1. Puis, par analogie avec les cas du canal plan et du tube à section circulaire, nous cherchons à exprimer \mathcal{D}_{zz}^{P*} et \mathcal{D}_z^{A*} en fonction du nombre de Péclet :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \frac{Pe^2}{C_\ell^P(q)}, \quad (3.69)$$

$$\mathcal{D}_z^{A*} = \frac{Pe}{C_\ell^A(q)}, \quad (3.70)$$

où C_ℓ^P et C_ℓ^A sont des fonctions de q à déterminer. Nous choisissons de les chercher sous la forme :

$$C_\ell^P(q) = a_1 + a_2q + a_3q^2 + a_4 \ln(1+q), \quad (3.71)$$

$$C_\ell^A(q) = b_1 + b_2q + b_3q^2 + b_4 \ln(1+q). \quad (3.72)$$

De plus, nous imposons que la dérivée de ces coefficients par rapport à q soit nulle lorsque $q = 1$ afin de garantir que l'on dégénère régulièrement vers le canal plan. Cela implique que :

$$a_2 = -2a_3 - \frac{a_4}{2}, \quad (3.73)$$

$$b_2 = -2b_3 - \frac{b_4}{2}, \quad (3.74)$$

et donc :

$$C_\ell^P(q) = a_1 + a_3(q^2 - 2q) + a_4 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right], \quad (3.75)$$

$$C_\ell^A(q) = b_1 + b_3(q^2 - 2q) + b_4 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]. \quad (3.76)$$

On introduit de plus dans la base de construction le point $q = 1$, qui doit correspondre aux valeurs trouvées pour le canal plan :

$$C_\ell^P(q = 1) = 840, \quad (3.77)$$

$$C_\ell^A(q = 1) = 240. \quad (3.78)$$

Les constantes a_i et b_i sont ajustées de façon à minimiser l'écart par rapport aux résultats de simulation numérique au sens des moindres carrés. Nous obtenons :

$$C_\ell^P(q) = 255.2 - 341.5(q^2 - 2q) + 1263.8 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right], \quad (3.79)$$

$$C_\ell^A(q) = 107.0 + 33.5(q^2 - 2q) + 862.4 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]. \quad (3.80)$$

La figure 3.7 montre que le modèle concorde avec les résultats de simulation obtenus pour différentes valeurs de q .

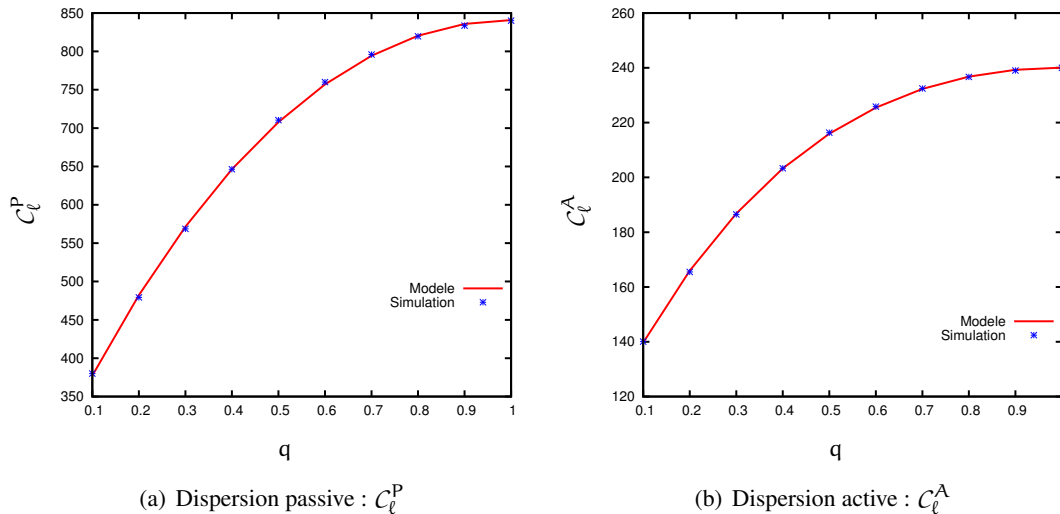


FIG. 3.7 – Écoulement laminaire dans une conduite annulaire : C_ℓ^P et C_ℓ^A en fonction de q . Comparaison du modèle proposé aux résultats de simulation.

Afin de vérifier la validité de cette expression, nous comparons les résultats obtenus par la résolution numérique du problème de fermeture à ceux prévus par le modèle. La figure 3.8 montre que le modèle permet de retrouver les résultats de simulation pour des valeurs de q et Pr quelconques.

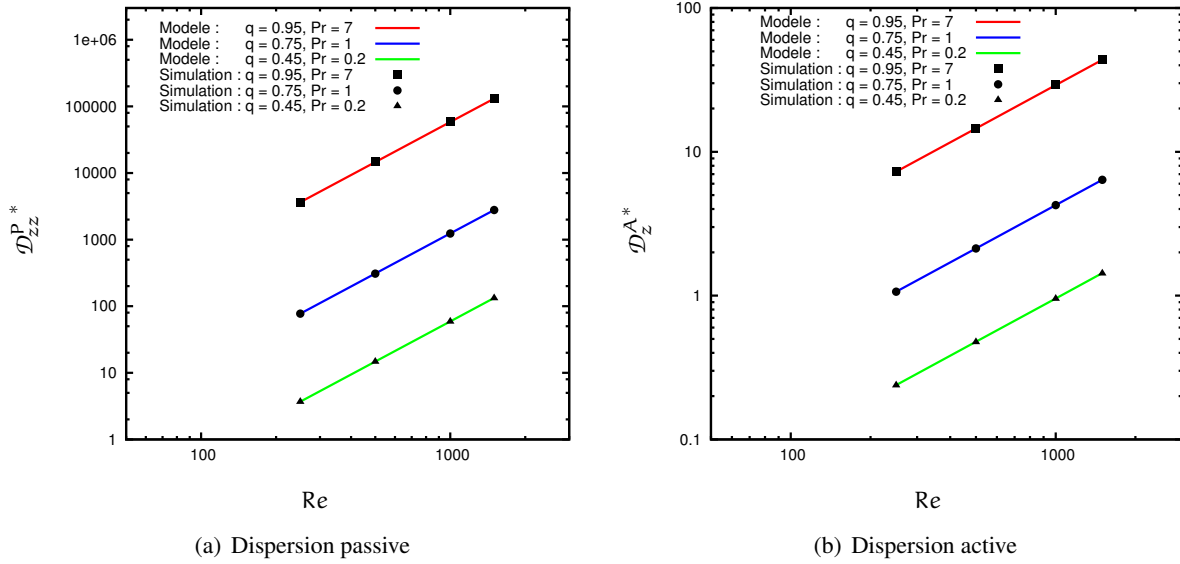


FIG. 3.8 – Écoulement laminaire dans une conduite annulaire : coefficients de dispersion passive et active en fonction du nombre de Reynolds pour différents q et Pr . Comparaison du modèle proposé aux résultats de simulation. Les courbes en traits pleins correspondent aux résultats donnée par le modèle (3.79) et (3.80), tandis que les résultats de simulation sont représentés par des symboles.

Le tableau 3.3 récapitule les expressions proposées pour les coefficients de dispersion dans le cas d'écoulements laminaires en canaux.

	Canal plan	Tube circulaire	Conduite annulaire
$D_{zz}^P^*$	$Pe^2/840$	$Pe^2/192$	$\frac{Pe^2}{255.2 - 341.5(q^2 - 2q) + 1263.8 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]}$
$D_z^A^*$	$Pe/240$	$Pe/96$	$\frac{Pe}{107.0 + 33.5(q^2 - 2q) + 862.4 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]}$

TAB. 3.3 – Récapitulatif des résultats obtenus pour les coefficients de dispersion dans le cas d'écoulements laminaires en canaux.

ÉTUDE DE LA DISPERSION THERMIQUE : ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Dans ce chapitre, la méthode de Whitaker [15, 82, 108] est adaptée au cas d'écoulements turbulents [76]. Contrairement au chapitre précédent, nous travaillons donc avec les équations doublement moyennées (voir paragraphe 2.3). On considère des écoulements turbulents incompressibles dans des milieux à porosité constante. Les propriétés du fluides sont supposées constantes.

4.1 Établissement d'un modèle général de dispersion thermique pour des écoulements turbulents

4.1.1 Étude de l'équation bilan de la déviation de température

Cette équation s'obtient en soustrayant l'équation de $\langle \bar{T}_f \rangle_f$ (2.67) à celle de \bar{T}_f (2.20) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{T}_f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \bar{u}'_i \bar{T}'_f \rangle_f - \bar{u}'_i \bar{T}'_f \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f) + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \bar{u}_i \langle \bar{T}_f \rangle_f) - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta \omega \rangle_f - \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec la condition aux limites sur l'interface fluide-solide :

$$\alpha_f \left(\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right) n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f}. \quad (4.2)$$

Pour simplifier l'équation (4.1), la démarche employée est la même que dans le cas laminaire. Aux hypothèses de séparation des échelles de longueur et de temps, on ajoute une hypothèse de fermeture au premier gradient pour le flux turbulent de chaleur :

$$-\bar{u}'_i \bar{T}'_f = \alpha_t \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i}. \quad (4.3)$$

	Termes de l'équation (4.1)	Ordre de grandeur	Négligé / Conservé
I	$\frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial t}$	$\frac{\delta \bar{T}_f}{\tau}$	Négligé
II	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{T}_f)$	$\frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{T}_f}{\ell}$	Conservé
III	$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right)$	$\alpha_f \frac{\delta \bar{T}_f}{\ell^2}$	Conservé
IV	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f)$	$\frac{\langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f}{L}$	Négligé
V	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u'_i T'_f})$	$\frac{\overline{u'_i T'_f}}{\ell}$	Conservé
VI	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f)$	$\frac{\delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f}{\ell}$	Conservé
VII	$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f$	$\frac{\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f}{L}$	Négligé
VIII	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \bar{u}_i \langle \bar{T}_f \rangle_f)$	$\frac{\delta \bar{u}_i \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\ell}$	Conservé
IX	$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta \omega \rangle_f$	$\alpha_f \frac{\delta \bar{T}_f}{L^2}$	Négligé
X	$\frac{\langle \overline{\Phi \delta \omega} \rangle_f}{(\rho C_p)_f}$	$\frac{\overline{\Phi} \langle \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}$	Conservé

 TAB. 4.1 – Ordres de grandeur des termes composant l'équation bilan de la déviation de température $\delta \bar{T}_f$.

Par analogie avec le nombre de Prandtl moléculaire, le nombre de Prandtl turbulent est défini comme :

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}. \quad (4.4)$$

Étant donné les cas considérés ici, on obtient une précision suffisante sur les profils de température en utilisant une valeur constante [6, 44, 62] : $\text{Pr}_t = 0.9$.

Les ordres de grandeur des différents termes composant l'équation (4.1) sont regroupés dans le tableau 4.1 [76]. Par ailleurs, l'hypothèse de fermeture au premier gradient permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i T'_f} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_t \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_t \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \right) \\
 &= \underbrace{\alpha_t \frac{\partial^2 \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i \partial x_i}}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}}_{(b)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_t \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \right). \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Les termes (a) et (b) dans l'équation (4.5) peuvent être estimés à :

$$(a) = O\left(\alpha_t \frac{\langle \overline{T}_f \rangle_f}{L^2}\right), \tag{4.6}$$

$$(b) = O\left(\alpha_t \frac{\langle \overline{T}_f \rangle_f}{L \ell}\right). \tag{4.7}$$

Par conséquent (a) \ll (b), et le terme de diffusion turbulente peut être approché par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_t \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}. \tag{4.8}$$

Enfin, l'hypothèse d'incompressibilité du fluide permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u}_i \delta \overline{T}_f) = \overline{u}_i \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i}. \tag{4.9}$$

Finalement, l'équation (4.1) se simplifie en :

$$\overline{u}_i \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \right] = \left(\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} - \delta \overline{u}_i \right) \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\langle \overline{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \tag{4.10}$$

Comme dans le cas laminaire, l'équation (4.10) comporte deux termes sources, l'un étant proportionnel au gradient macroscopique de température, et l'autre se rapportant au flux en paroi.

4.1.2 Problème de fermeture

Comme au paragraphe 3.1.2, nous recherchons $\delta \overline{T}_f$ sous la forme [14] :

$$\delta \overline{T}_f = \eta_j \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \overline{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \psi. \tag{4.11}$$

Dans le cas d'un milieu spatialement périodique, la fonction ψ est nulle [15]. La fonction de dispersion η_j est homogène à une longueur et ζ est homogène à un temps. En suivant le même raisonnement qu'au paragraphe 3.1.2, on peut écrire les formes simplifiées des dérivées successives de la déviation de température :

$$\frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \simeq \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \overline{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \right] \simeq \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] \frac{\langle \overline{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \tag{4.13}$$

Par ailleurs, la condition aux limites (4.2) sur l'interface fluide-solide devient :

$$\alpha_f \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} n_i + \alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f}. \quad (4.14)$$

En remplaçant $\delta \bar{T}_f$ par son expression en fonction des fonctions de dispersion dans l'équation (4.10), et en utilisant les relations (4.12) et (4.13), on peut écrire le problème de fermeture :

- dans la phase fluide :

$$\bar{u}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_j} - \delta \bar{u}_j, \quad (4.15)$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] = -1, \quad (4.16)$$

- à l'interface fluide-solide :

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (4.17)$$

$$\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}. \quad (4.18)$$

Par ailleurs, la périodicité du milieu s'exprime comme :

$$\eta_j(x_i + p_i) = \eta_j(x_i); \quad \zeta(x_i + p_i) = \zeta(x_i), \quad (4.19)$$

où les p_i sont les composantes du vecteur décrivant la périodicité du milieu.

Enfin, l'idempotence de la moyenne spatiale permet d'écrire une relation additionnelle dans le problème de fermeture :

$$\langle \delta \bar{T}_f \rangle_f = \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = 0. \quad (4.20)$$

4.1.3 Équation macroscopique modèle pour $\langle \bar{T}_f \rangle_f$

Nous allons maintenant réinjecter la relation de fermeture (4.11) dans l'équation bilan de la température doublement moyennée (2.67) afin d'obtenir une équation macroscopique modèle pour la température. Le flux de chaleur turbulent spatialement moyenné est modélisé *via* l'introduction du [coefficient de diffusivité turbulente macroscopique](#) :

$$-\langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f = \alpha_{t\phi} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (4.21)$$

De plus, pour alléger les notations, nous introduisons :

$$\mathcal{D}_{ij}^P = -\langle \delta \bar{u}_i \eta_j \rangle_f, \quad (4.22)$$

$$\mathcal{D}_i^A = -\langle \delta \bar{u}_i \zeta \rangle_f, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{T}_{ij}^P = \langle \eta_j n_i \delta \omega \rangle_f, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{T}_i^A = \langle \zeta n_i \delta \omega \rangle_f. \quad (4.25)$$

Avec ces notations, l'équation macroscopique modèle pour la température s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{T}_f \rangle_f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_{t\phi}) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\
 &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^P \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{\text{dispersion passive}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_i^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right)}_{\text{dispersion active}} \\
 &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \mathcal{T}_{ij}^P \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{\text{tortuosité passive}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \mathcal{T}_i^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right)}_{\text{tortuosité active}}. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

4.1.4 Mise sous forme adimensionnée

La méthode utilisée est la même que dans le cas laminaire. Les nombres de Prandtl, Reynolds et Péclet sont définis par :

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f}{\alpha_f}; \quad \text{Re} = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f D_h}{\nu_f}; \quad \text{Pe} = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f D_h}{\alpha_f} = \text{Re} \times \text{Pr}. \quad (4.27)$$

Les grandeurs adimensionnées sont obtenues de la même façon que dans le cas laminaire :

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_f^* &= \frac{\bar{T}_f}{\bar{T}_f^r}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_d} = t \frac{\alpha_f}{D_h^2}, \quad \alpha_f^* = \frac{\alpha_f}{\alpha_f} = 1, \quad \alpha_{t\phi}^* = \frac{\alpha_{t\phi}}{\alpha_f}, \\
 \delta_\omega^* &= \delta_\omega D_h, \quad (\rho C_p)_f^* = \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_f} = 1, \quad \bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} \frac{D_h}{\lambda_f \bar{T}_f^r}, \quad \eta_j^* = \frac{\eta_j}{D_h}, \quad \zeta^* = \zeta \frac{\alpha_f}{D_h^2},
 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{ij}^{P*} &= \frac{\mathcal{D}_{ij}^P}{\alpha_f} = -\text{Pe} \langle \delta \bar{u}_i^* \eta_j^* \rangle_f, \quad \mathcal{D}_i^{A*} = \frac{\mathcal{D}_i^A}{D_h} = -\text{Pe} \langle \delta \bar{u}_i^* \zeta^* \rangle_f, \\
 \mathcal{T}_{ij}^{P*} &= \mathcal{T}_{ij}^P = \langle \eta_j^* n_i \delta_\omega^* \rangle_f, \quad \mathcal{T}_i^{A*} = \langle \bar{u} \rangle_f \mathcal{T}_i^A = \text{Pe} \langle \zeta^* n_i \delta_\omega^* \rangle_f.
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'équation macroscopique de la température du fluide s'écrit, en variables adimensionnées :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{T}_f^* \rangle_f}{\partial t^*} + \text{Pe} \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\langle \bar{u}_i^* \rangle_f \langle \bar{T}_f^* \rangle_f) &= \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[(1 + \alpha_{t\phi}^*) \frac{\partial \langle \bar{T}_f^* \rangle_f}{\partial x_i^*} \right] + \langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\mathcal{D}_{ij}^{P*} \frac{\partial \langle \bar{T}_f^* \rangle_f}{\partial x_j^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\mathcal{D}_i^{A*} \langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\mathcal{T}_{ij}^{P*} \frac{\partial \langle \bar{T}_f^* \rangle_f}{\partial x_j^*} \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{1}{\text{Pe}} \mathcal{T}_i^{A*} \langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f \right). \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Le problème de fermeture adimensionné pour les fonctions de dispersion η et ζ s'écrit quant à lui :

- dans la phase fluide :

$$\begin{aligned} Pe \bar{u}_i^* \frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[(1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} \right] &= \left(\frac{\partial \alpha_t^*}{\partial x_j^*} - Pe \delta \bar{u}_j^* \right), \\ Pe \bar{u}_i^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[(1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} \right] &= -1, \end{aligned} \quad (4.31)$$

- sur l'interface fluide-solide :

$$\frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} n_i = \frac{\bar{\Phi}^*}{\langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f}, \quad (4.33)$$

- périodicité :

$$\eta_j^*(x_i^* + p_i^*) = \eta_j^*(x_i^*); \quad \zeta^*(x_i^* + p_i^*) = \zeta^*(x_i^*), \quad (4.34)$$

- relation additionnelle :

$$\langle \eta_j^* \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f^* \rangle_f}{\partial x_j^*} + \langle \zeta^* \rangle_f \langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f = 0. \quad (4.35)$$

4.2 Étude de la dispersion pour des écoulements turbulents en canaux

Dans cette partie, nous cherchons à évaluer la dispersion pour des écoulements turbulents dans un canal plan, dans un tube à section circulaire et dans une conduite annulaire. La connaissance des champs de vitesse et de diffusivité thermique turbulente dans un VER est nécessaire à la résolution du problème de fermeture. Pour les obtenir, nous allons utiliser le code présenté dans le chapitre 2.2 qui résout le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien [19], ainsi que la définition du nombre de Prandtl turbulent. Le problème de fermeture est ensuite résolu numériquement à partir des données fournies par ce code. Connaissant alors les fonctions de dispersion et les profils de vitesse, nous pouvons en déduire les coefficients de dispersion passive et active pour différents nombres de Reynolds et de Prandtl et proposer un modèle.

4.2.1 Écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan

La configuration de l'écoulement est la même que celle présentée en Fig 3.1. Dans un canal plan, le gradient de la température doublement moyennée est non nul seulement dans la direction de l'écoulement. De plus, la déviation de température ne dépend que de la coordonnée transverse y^* . L'équation (4.11) devient donc :

$$\delta \bar{T}_f^* = \eta_z^*(y^*) \frac{\partial \langle \bar{T}_f^* \rangle_f}{\partial z^*} + \zeta^*(y^*) \frac{\bar{\Phi}^*}{\langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f}. \quad (4.36)$$

En considérant que l'échelle de variation du flux en paroi est grande devant la taille du VER, il vient :

$$\langle \bar{\Phi}^* \delta_\omega^* \rangle_f = \bar{\Phi}^* \langle \delta_\omega^* \rangle_f, \quad (4.37)$$

ce qui, étant donné que :

$$\langle \delta_{\omega}^* \rangle_f = 4, \quad (4.38)$$

peut aussi s'écrire :

$$\langle \overline{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f = 4\overline{\Phi}^*. \quad (4.39)$$

Ainsi, le problème de fermeture devient :

- dans la phase fluide : $y^* \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left[(1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \right] = Pe \delta \overline{u_z^*}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left[(1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \right] = 1, \quad (4.41)$$

- sur l'interface fluide-solide :

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \left(y^* = \pm \frac{1}{4} \right) = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \left(y^* = \pm \frac{1}{4} \right) = \pm \frac{1}{4}. \quad (4.43)$$

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^5 , \mathcal{D}_{zz}^{P*} tend vers une expression asymptotique :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = c_p \sqrt{f_p} Pe, \quad (4.44)$$

où $c_p = 0.62$ et où le coefficient de frottement est donné, par exemple, par la corrélation de Mac Adams [67] : $f_p = 0.184 Re^{-0.2}$. En régime turbulent, \mathcal{D}_z^{A*} tend vers une valeur constante égale à 1.63 pour $Re > 10^6$. Les résultats obtenus pour les coefficients de dispersion passive \mathcal{D}_{zz}^{P*} et active \mathcal{D}_z^{A*} en régime turbulent sont présentés sur la Fig. 4.1.

4.2.2 Écoulement turbulent dans un tube à section circulaire

La configuration de l'écoulement est la même que celle présentée en Fig 3.2. Nous appliquons ici la même méthode que précédemment pour le calcul des coefficients de dispersion. Pour $Re > 10^5$, \mathcal{D}_{zz}^{P*} tend asymptotiquement vers :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} \simeq 1.1 \sqrt{f_p} Pe, \quad (4.45)$$

où le coefficient de frottement est donné, par exemple, par la corrélation de Blasius [8] : $f_p = 0.316 Re^{-0.25}$. En ce qui concerne le coefficient de dispersion active, \mathcal{D}_z^{A*} tend vers une valeur constante égale à 2.1 Les résultats numériques obtenus sur les coefficients de dispersion passive et active sont présentés en Fig. 4.2.

4.2.3 Écoulement turbulent dans une conduite annulaire

La configuration de l'écoulement est la même que celle présentée Fig. 3.3. Les résultats obtenus pour les coefficients de dispersion passive et active sont présentés figure 4.3. Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, le coefficient de dispersion passive tend vers :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{zz}^{P*} = C_t^P(q) \sqrt{f_p} Pe, \quad (4.46)$$

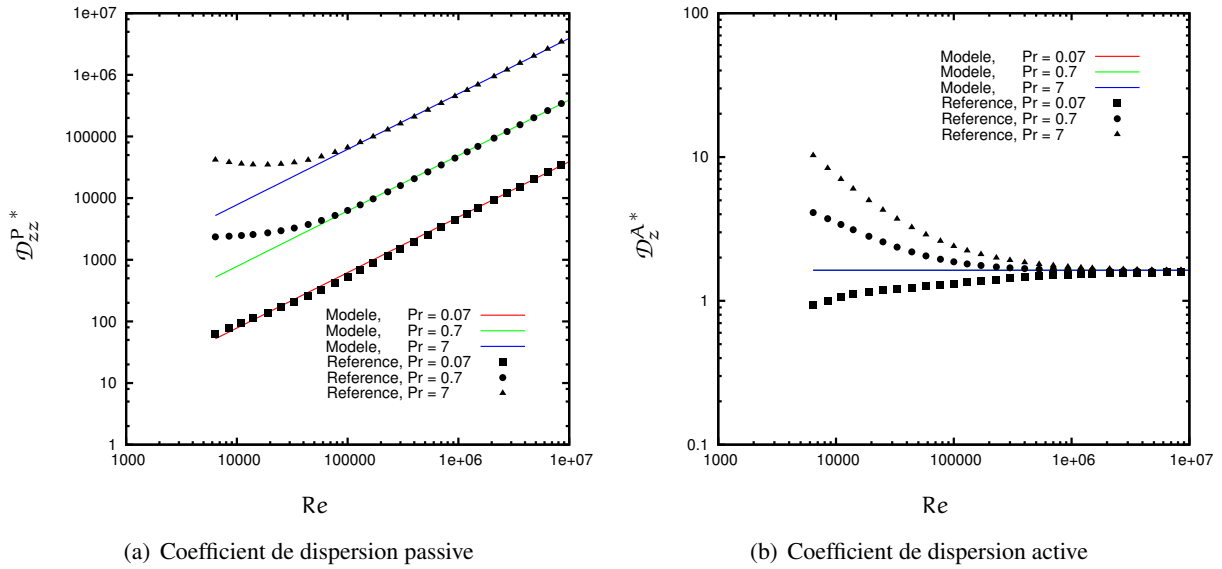


FIG. 4.1 – Écoulement dans un canal plan en régime turbulent : évolution des coefficients de dispersion passive \mathcal{D}_{zz}^{P*} et active \mathcal{D}_z^{A*} en fonction du nombre de Reynolds pour différents Pr. Résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien et $\text{Pr}_t = 0.9$.

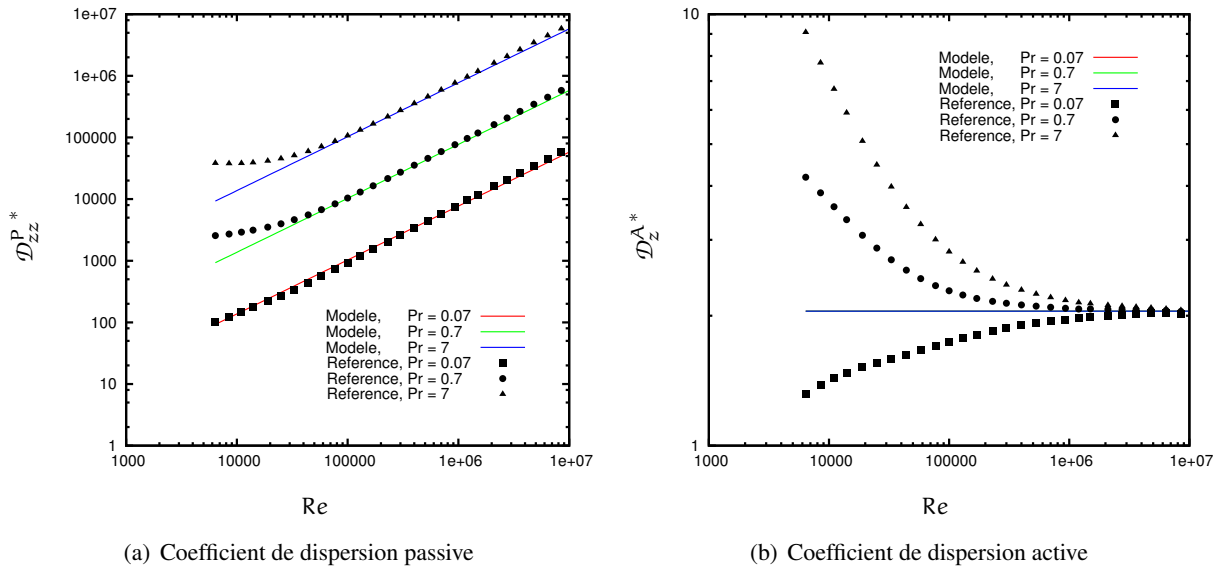


FIG. 4.2 – Écoulement dans un tube circulaire en régime turbulent : évolution des coefficients de dispersion passive \mathcal{D}_{zz}^{P*} et active \mathcal{D}_z^{A*} en fonction du nombre de Reynolds pour différents Pr. Résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien et $\text{Pr}_t = 0.9$.

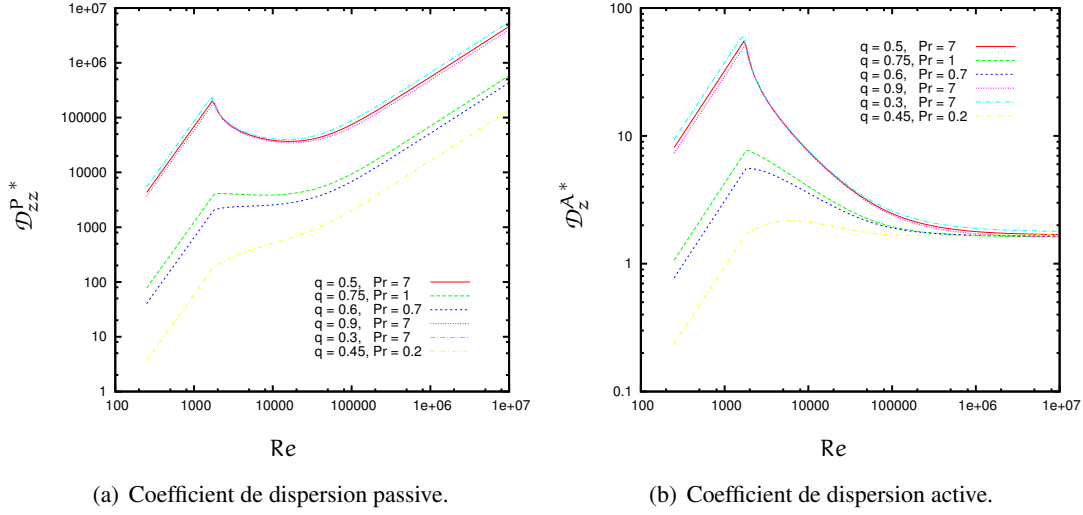


FIG. 4.3 – Écoulement dans une conduite annulaire en régimes laminaire et turbulent : évolution des coefficients de dispersion passive et active en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de Pr et q . Résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien et $Pr_t = 0.9$.

où $C_t^P(q)$ est une constante qui dépend du rapport des rayons q . De la même façon que pour le cas laminaire (voir paragraphe 3.2.4), nous cherchons à approcher $C_t^P(q)$ et nous trouvons :

$$C_t^P(q) = 1.292 - 0.362(q^2 - 2q) - 5.367 \left[\ln(1 + q) - \frac{q}{2} \right]. \quad (4.47)$$

Le coefficient de dispersion active tend vers une constante dépendant de q quand le nombre de Reynolds devient grand :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \mathcal{D}_z^{A*} = C_t^A(q). \quad (4.48)$$

D'après les résultats de simulation, $C_t^A(q)$ peut être approché par :

$$C_t^A(q) = 2.16 - 0.715(q^2 - 2q) - 6.45 \left[\ln(1 + q) - \frac{q}{2} \right]. \quad (4.49)$$

Lorsque q tend vers 1, les expressions (4.47) et (4.49) doivent permettre de retrouver les résultats obtenus en canal plan, soit :

$$\begin{cases} \lim_{q \rightarrow 1} C_t^P(q) = 0.62, \\ \lim_{q \rightarrow 1} C_t^A(q) = 1.63. \end{cases} \quad (4.50)$$

Autrement dit, lorsque q tend vers 1, on retrouve bien les valeurs des coefficients en canal plan. La figure 4.4 permet de comparer les valeurs de $C_t^P(q)$ et $C_t^A(q)$ calculées numériquement à celles données par les lois (4.47) et (4.49).

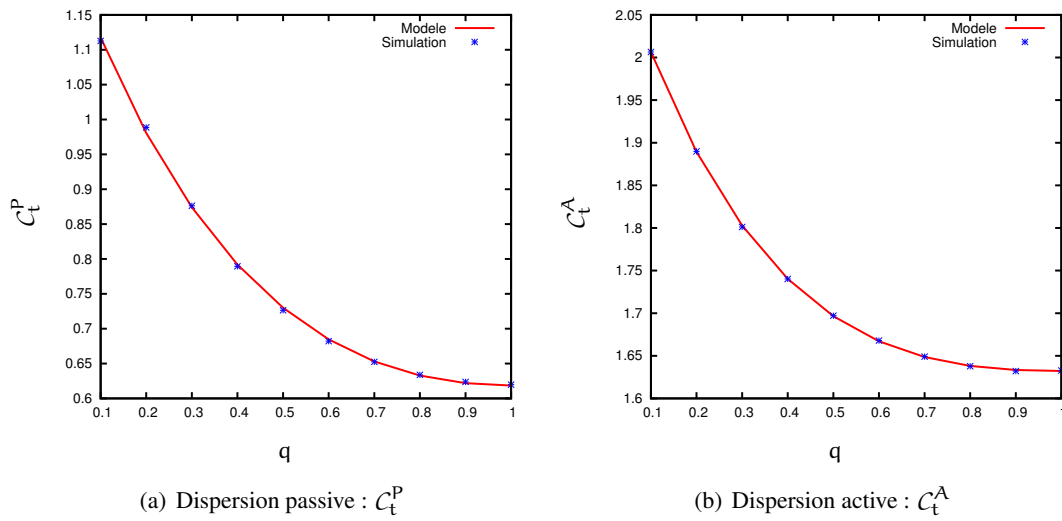


FIG. 4.4 – Écoulement dans une conduite annulaire : $C_t^P(q)$ et $C_t^A(q)$ en fonction de q . Comparaison du modèle proposé aux résultats de simulation.

PROPOSITION D'UN MODÈLE PLUS GÉNÉRIQUE COUVRANT LES DIFFÉRENTS RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

5.1 Synthèse de l'analyse phénoménologique

Salles et al. [91], Amaral Souto & Moyne [96] ou encore Koplik et al. [47] s'appuient sur l'analyse de Pfannkuch [75] pour décrire les propriétés du tenseur de dispersion. En se basant sur des résultats expérimentaux, Pfannkuch distingue différents domaines d'écoulements selon la valeur du nombre de Péclet. Selon cette analyse, le coefficient de dispersion passive adimensionné s'exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} \propto Pe^m, \quad (5.1)$$

où l'exposant m dépend du domaine dans lequel on se trouve. Pour de très petites valeurs du nombre de Péclet, la diffusion moléculaire est le phénomène dominant et le coefficient de dispersion passive peut s'écrire :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} \propto \alpha_f \text{ si } Pe \ll 1. \quad (5.2)$$

Lorsque le nombre de Péclet est grand, plusieurs cas de figure sont possibles. En régime laminaire et pour des nombres de Prandtl proches de l'unité, la diffusion moléculaire et la dispersion interviennent toutes les deux. Dans ce cas, le coefficient de dispersion passive est proportionnel au carré du nombre de Péclet :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} \propto Pe^2. \quad (5.3)$$

Pour des nombres de Reynolds élevés et des nombres de Prandtl proches de l'unité, le phénomène prépondérant est la dispersion par les hétérogénéités de vitesse. Dans ce domaine, l'exposant m vaut 1, soit :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} \propto Pe. \quad (5.4)$$

Les résultats que nous avons obtenus à partir des simulations sont donc proche des observations de Pfannkuch dans la mesure où le coefficient de frottement dépend peu du nombre de Reynolds.

Par une autre méthode que celle de la prise de moyenne spatiale, Taylor [98, 99] a déduit le coefficient de dispersion passive pour des écoulements laminaires et turbulents dans un tube à section circulaire. Pour un écoulement laminaire, il part de l'équation bilan de la concentration d'un scalaire passif. Il fait l'hypothèse que la concentration d'un scalaire passif peut s'exprimer comme la somme d'une fonction dépendant

uniquement le la variable longitudinale z et d'une fonction dépendant seulement de la variable transverse r . Il peut alors calculer le flux de scalaire passif traversant une section qui se déplace à la vitesse moyenne de l'écoulement. Il montre qu'il est proportionnel au gradient longitudinal de la concentration moyenne, soit avec nos notations et en notant c la concentration :

$$\langle \delta u c \rangle_f = \langle \delta u \delta c \rangle_f = \mathcal{D}_{zz}^P \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Il trouve $\mathcal{D}_{zz}^P = DPe/192$, où D est la diffusivité moléculaire. Les résultats que nous avons obtenus sur le coefficient de dispersion passive dans le chapitre 3 pour un écoulement en tube circulaire sont donc identiques à ceux présentés dans [98]. Pour des écoulements turbulents, Taylor [99] suit la même démarche. Ne disposant pas d'un profil analytique de vitesse pour les écoulements turbulents, il utilise le profil suivant :

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}(z)}{u_f} = f(z), \quad (5.6)$$

où $z = 2r/D_h$ et f est déterminée à partir de résultats expérimentaux [35]. Il suppose de plus que la viscosité turbulente s'exprime comme :

$$\nu_t = \frac{zD_h u_f}{2f'(z)}. \quad (5.7)$$

Sous ces hypothèses, il montre que la fermeture au premier gradient est toujours valable en régime turbulent :

$$\langle \delta \bar{u} \bar{c} \rangle_f = \langle \delta \bar{u} \delta \bar{c} \rangle_f = \mathcal{D}_{zz}^P \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial z}, \quad (5.8)$$

et trouve $\mathcal{D}_{zz}^P = D \times 1.78 \sqrt{f_p} Pe$, ce qui est similaire aux résultats obtenus dans le chapitre 4 sur le coefficient de dispersion passive pour des écoulements en tube circulaire¹.

À partir des résultats du chapitre précédent, nous proposons à présent d'établir des modèles couvrant les différents régimes d'écoulement. La figure 5.1 illustre les différents régimes de dispersion considérés. Pour des écoulements laminaires, soit pour $Re < Re_L$, avec $Re_L = 2000$ en canal plan et en conduite annulaire, et $Re_L = 1000$ en tube circulaire, le coefficient de dispersion passive adimensionné est proportionnel au carré du nombre de Péclet et le coefficient de dispersion active est proportionnel à Pe . La zone de transition entre les régimes laminaire et turbulent correspond à $Re_L < Re < Re_T = 6000$ et ne sera pas traitée ici car la validité du modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ de Chien n'est pas assurée dans ce domaine. Pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés, les modèles de coefficients de dispersion trouvée au chapitre 4 s'appliquent. Il reste donc à déterminer un raccord pour des écoulements turbulents à nombre de Reynolds modéré. Les résultats obtenus au chapitre 4 pour la dispersion dans le cas d'écoulements en canaux sont regroupés dans le tableau 5.1. Nous allons à présent utiliser ces expressions pour formuler un modèle de dispersion valable pour tous les regimes d'écoulement.

¹L'écart est dû au fait que Taylor n'utilise pas les mêmes profils locaux de vitesse et de concentration que nous pour calibrer ses coefficients.

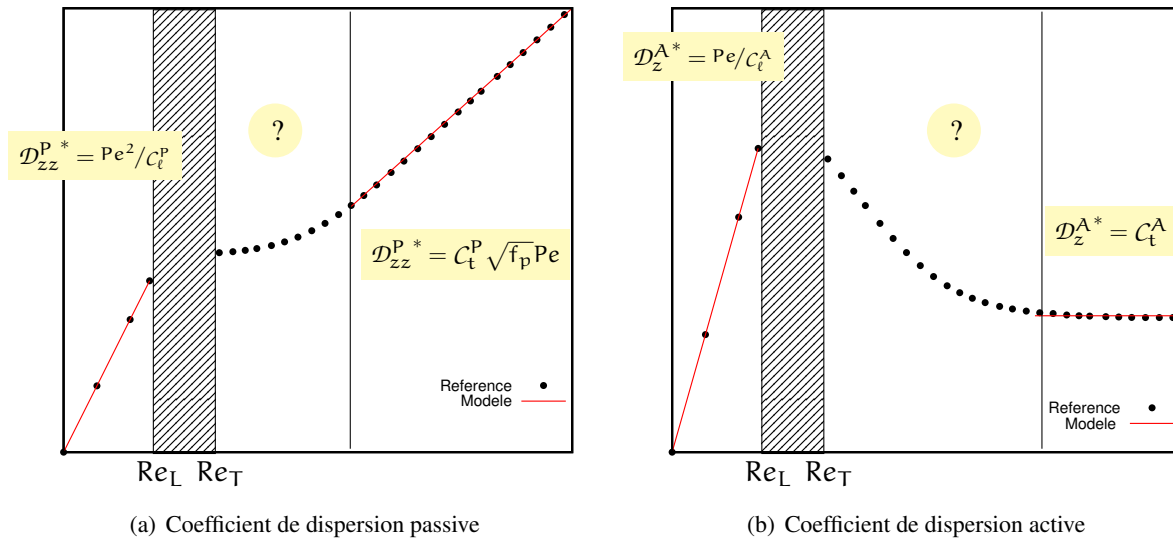


FIG. 5.1 – Illustration des différents régimes de dispersion qui existent pour des écoulements en canaux.

Régime laminaire			
	canal plan	tube	conduite annulaire
\mathcal{D}_{zz}^{P*}	$Pe^2/840$	$Pe^2/192$	$\frac{Pe^2}{255.2 - 341.5(q^2 - 2q) + 1263.8 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]}$
\mathcal{D}_z^{A*}	$Pe/240$	$Pe/96$	$\frac{Pe}{107.0 + 33.5(q^2 - 2q) + 862.4 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]}$
Régime turbulent : limite asymptotique $Re \rightarrow \infty$			
	canal plan	tube	conduite annulaire
\mathcal{D}_{zz}^{P*}	$0.62\sqrt{f_p}Pe$	$1.1\sqrt{f_p}Pe$	$\left(1.292 - 0.362(q^2 - 2q) - 5.367 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right] \right) \sqrt{f_p}Pe$
\mathcal{D}_z^{A*}	1.63	2.1	$2.16 - 0.715(q^2 - 2q) - 6.45 \left[\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right]$

TAB. 5.1 – Récapitulatif des résultats obtenus sur les coefficients de dispersion avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ de Chien.

5.2 Formulation générale du modèle de dispersion

Commençons par le coefficient de dispersion passive. Nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \begin{cases} \frac{Pe^2}{C_t^P} & \text{si } Re < Re_L, \\ f(Pr, Re) & \text{si } Re > Re_T, \end{cases} \quad (5.9)$$

où C_t^P est choisi dans le tableau 5.1 en fonction de l'écoulement considéré, f reste à déterminer, $Re_L = 2000$ en canal plan et en conduite annulaire, $Re_L = 1000$ en tube circulaire et $Re_T = 6000$ pour toutes les géométries. Nous postulons la fonction f sous la forme :

$$f(Re, Pr) = a_1(Pr)X + \frac{a_2(Pr)}{X} + a_3(Pr), \quad (5.10)$$

avec :

$$X = \sqrt{f_p} Pe. \quad (5.11)$$

Pour retrouver les résultats obtenus en régime asymptotique, f doit vérifier :

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} f = C_t^P \sqrt{f_p} Pe, \quad (5.12)$$

où C_t^P est donné dans le tableau 5.1. Cela implique que :

$$a_1 = C_t^P, \quad a_3 = 0, \quad (5.13)$$

et donc que :

$$f(Re, Pr) = C_t^P X + \frac{a_2(Pr)}{X}. \quad (5.14)$$

De la même manière, nous écrivons :

$$\mathcal{D}_z^{A*} = \begin{cases} \frac{Pe}{C_t^A} & \text{si } Re < Re_L, \\ g(Pr, Re) & \text{si } Re > Re_T, \end{cases} \quad (5.15)$$

où C_t^A est choisi dans le tableau 5.1 en fonction de l'écoulement considéré, g est supposée être de la forme :

$$g(Re, Pr) = b_1(Pr)X + \frac{b_2(Pr)}{X} + b_3(Pr). \quad (5.16)$$

Pour retrouver les résultats obtenus en régime asymptotique, g doit vérifier :

$$\lim_{Pe \rightarrow \infty} g = C_t^A, \quad (5.17)$$

où C_t^A est donné dans le tableau 5.1. Cela implique que :

$$b_1 = 0, \quad b_3 = C_t^A, \quad (5.18)$$

et donc que :

$$g(Re, Pr) = \frac{b_2(Pr)}{X} + C_t^A. \quad (5.19)$$

Finalement, le modèle proposé pour les coefficients de dispersion s'écrit, de façon générique :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \begin{cases} \frac{Pe^2}{C_l^P} & \text{si } Re < Re_L, \\ C_t^P \sqrt{f_p} Pe + \frac{a_2(Pr)}{\sqrt{f_p} Pe} & \text{si } Re > Re_T, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\mathcal{D}_z^{A*} = \begin{cases} \frac{Pe}{C_l^A} & \text{si } Re < Re_L, \\ C_t^A + \frac{b_2(Pr)}{\sqrt{f_p} Pe} & \text{si } Re > Re_T, \end{cases} \quad (5.21)$$

où a_2 et b_2 ne dépendent que du nombre de Prandtl.

5.3 Méthode de calibrage du modèle

Pour fermer le modèle, il reste à proposer une expression pour les fonctions du nombre de Prandtl a_2 et b_2 . À Pr fixé, les coefficients de dispersion ne dépendent que du nombre de Reynolds. Il est alors possible de déterminer, pour ce Pr , quelles valeurs de a_2 et b_2 minimisent l'écart entre le modèle (eqs. (5.20) et (5.21)) et les résultats de référence pour l'ensemble des nombres de Reynolds considérés. Puis, à partir de quelques valeurs particulières, nous postulons une expression modèle pour $a_2(Pr)$ et $b_2(Pr)$. Le calibrage du modèle se fait donc en deux temps. Tout d'abord, nous recherchons quelques valeurs particulières des fonctions $a_2(Pr)$ et $b_2(Pr)$. Puis, nous proposons une expression permettant de retrouver ces valeurs particulières et de calculer a_2 et b_2 pour un nombre de Prandtl quelconque. Nous utilisons comme valeurs de référence les résultats de simulation présentés figures sur les 3.4, 3.5, 4.1 et 4.2.

5.3.1 Première étape : détermination des valeurs particulières

Pour un écoulement turbulent ($Re > Re_T = 6000$), nous supposons que les coefficients de dispersion adimensionnés sont de la forme :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = C_t^P X + \frac{a_2(Pr)}{X}, \quad (5.22)$$

$$\mathcal{D}_z^{A*} = C_t^A + \frac{b_2(Pr)}{X}, \quad (5.23)$$

où $X = \sqrt{f_p} Pe$. Cela peut aussi s'écrire :

$$a_2(Pr) = X \left(\mathcal{D}_{zz}^{P*} - C_t^P X \right), \quad (5.24)$$

$$b_2(Pr) = X \left(\mathcal{D}_z^{A*} - C_t^A \right). \quad (5.25)$$

Pour $Pr = 0.07, 0.7$ et 7 , nous disposons des valeurs de \mathcal{D}_{zz}^{P*} et \mathcal{D}_z^{A*} issues de la résolution du problème de fermeture pour de nombreuses valeurs de Re . En réinjectant ces valeurs dans les expressions (5.24) et

(5.25), il est possible de déterminer les valeurs de $\alpha_2(7)$, $\alpha_2(0.7)$, $\alpha_2(0.07)$, $b_2(7)$, $b_2(0.7)$ et $b_2(0.07)$. Concernant les écoulements dans des conduites annulaires, les valeurs particulières de α_2 et b_2 sont peu dépendantes du rapport des rayons intérieur et extérieur q . C'est pourquoi nous choisissons d'utiliser les mêmes fonctions α_2 et b_2 quel que soit q . Les résultats utilisés par la suite pour cette géométrie sont donc une moyenne des résultats obtenus pour $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ et 1 . Les valeurs de α_2 et b_2 pour $Pr = 0.07, 0.7$ et 7 sont données par les tableaux 5.2 et 5.3.

Pr	Canal plan	Tube circulaire	Conduite annulaire
7	3.64×10^8	2.34×10^8	3.98×10^8
0.7	2.06×10^6	1.29×10^6	2.4×10^6
0.07	-770	387	1430

TAB. 5.2 – Valeurs particulières de la fonction α_2 en canal plan, tube circulaire et conduite annulaire pour $Pr = 7, 0.7$ et 0.07 .

Pr	Canal plan	Tube circulaire	Conduite annulaire
7	7.31×10^4	5.67×10^4	7.45×10^4
0.7	2.28×10^3	1.59×10^3	2.5×10^3
0.07	-79	-63.4	-80

TAB. 5.3 – Valeurs particulières de la fonction b_2 en canal plan, tube circulaire et conduite annulaire pour $Pr = 7, 0.7$ et 0.07 .

5.3.2 Proposition d'une expression générale pour les fonctions $\alpha_2(Pr)$ et $b_2(Pr)$

Nous cherchons à présent à exprimer α_2 et b_2 en fonction du nombre de Prandtl. Nous supposons que $\alpha_2(Pr)$ et $b_2(Pr)$ peuvent être approchées par des fonctions de la forme :

$$\alpha_2(Pr) = c_0 + c_1 Pr + c_2 Pr^2, \quad (5.26)$$

$$b_2(Pr) = d_0 + d_1 Pr + d_2 Pr^2, \quad (5.27)$$

où les c_i et d_i sont des constantes. Les c_i et d_i qui permettent d'approcher au mieux les valeurs présentées dans les tableaux 5.2 et 5.3 sont rassemblés dans le tableau 5.4.

	c_0	c_1	c_2	d_0	d_1	d_2
Canal plan	1.53×10^5	-2.74×10^6	7.82×10^6	-2.88×10^2	2.90×10^3	1.08×10^3
Tube circulaire	1.04×10^5	-1.83×10^6	5.04×10^6	-2.03×10^2	1.94×10^3	8.86×10^2
Conduite annulaire	1.53×10^5	-2.76×10^6	8.51×10^6	-3.14×10^2	3.28×10^3	1.06×10^3

TAB. 5.4 – Coefficients du modèle de dispersion (voir eqs. (5.26) et (5.27)).

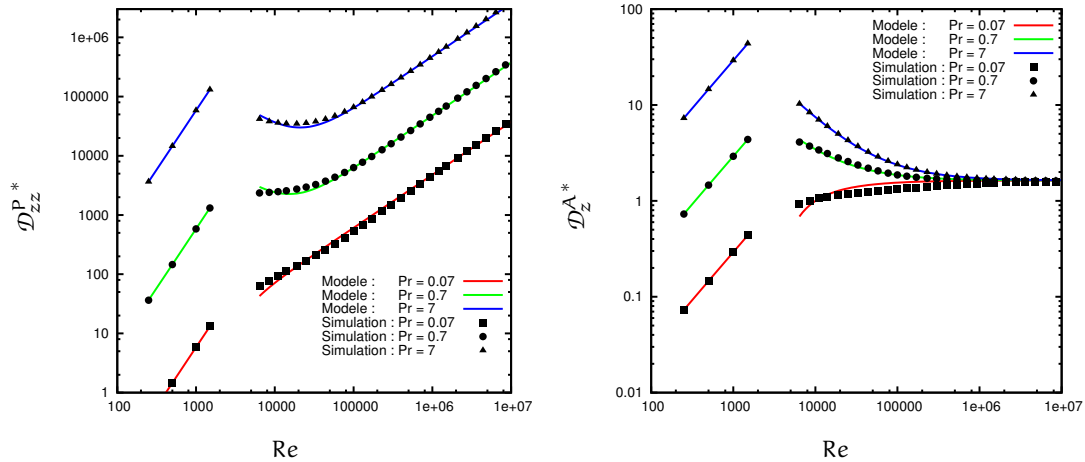
5.4 Synthèse du modèle de dispersion

Finalement, nous proposons le modèle général suivant pour les coefficients de dispersion :

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \begin{cases} \frac{Pe^2}{C_\ell^P} & \text{si } Re < Re_L, \\ C_t^P \sqrt{f_p} Pe + \frac{c_0 + c_1 Pr + c_2 Pr^2}{\sqrt{f_p} Pe} & \text{si } Re > Re_T, \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\mathcal{D}_z^{A*} = \begin{cases} \frac{Pe}{C_\ell^A} & \text{si } Re < Re_L, \\ C_t^A + \frac{d_0 + d_1 Pr + d_2 Pr^2}{\sqrt{f_p} Pe} & \text{si } Re > Re_T, \end{cases} \quad (5.29)$$

où les constantes C_ℓ^P , C_ℓ^A , C_t^P et C_t^A sont regroupées dans le tableau 5.1 et les coefficients c_i et d_i sont donnés dans le tableau 5.4. Les figures 5.2 et 5.3 permettent de comparer le modèle décrit par les expressions (5.28) et (5.29) aux résultats de référence.



(a) Coefficient de dispersion passive.

(b) Coefficient de dispersion active.

FIG. 5.2 – Écoulements en canal plan : coefficients de dispersion passive at active en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl. Comparaison du modèle proposé aux résultats de simulation.

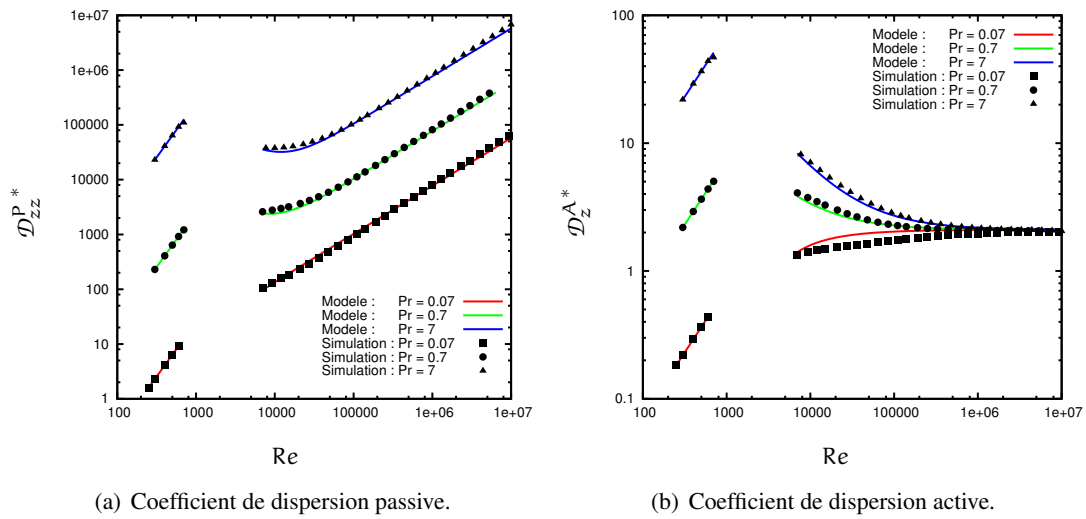


FIG. 5.3 – Écoulements en tube circulaire : coefficients de dispersion passive at active en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl. Comparaison du modèle proposé aux résultats de simulation.

EXPLOITATION DU MODÈLE DE DISPERSION

Afin de vérifier les capacités de prédiction du modèle et d'étudier les effets de la dispersion, les solutions numériques de l'équation (2.67) vont à présent être comparées, dans différentes configurations, aux profils de température moyennée obtenus à partir de simulations fines, ainsi qu'aux profils obtenus grâce à un modèle macroscopique négligeant la dispersion. Nous pourrions ainsi évaluer la capacité de notre modèle à restituer l'information contenue dans le terme de dispersion thermique qui a été perdue lors du processus de filtrage. Les calculs fins pris comme référence dans la suite de ce chapitre ont été réalisés avec le logiciel FLICA-OVAP¹ [48, 49]. La méthode utilisée pour réaliser les simulations macroscopiques est présentée en annexe B.2. Dans un premier temps, l'étude de l'évolution d'un échelon de température au cours du temps illustrera les effets de la dispersion passive. Puis, l'étude d'écoulements stationnaires avec des flux thermiques non uniformes imposés en paroi mettra en évidence l'impact de la dispersion active. Pour chacun des cas décrits ci-dessus, les simulations seront réalisées pour des nombres de Reynolds faibles, intermédiaires et élevés.

6.1 Propagation d'un saut de température : impact de la dispersion passive

6.1.1 Évaluation du modèle

Dans cette section, nous nous intéressons à l'évolution d'un échelon de température au cours du temps. Le fluide s'écoule suivant la direction z dans une conduite d'axe z et de longueur $L = 60 D_h$ dont les parois sont adiabatiques. À l'instant initial, la température dans la conduite est uniformément égale à T_0 . La température en entrée de la conduite est uniforme et vaut $T_e > T_0$. La figure 6.1, obtenue en post-traitant des simulations fines à différents instants, illustre la configuration de l'écoulement. Nous allons étudier l'évolution de l'échelon de température au cours du temps. Étant donné que l'écoulement est adiabatique, le terme de dispersion active est nul. Ce type de cas permet donc de se focaliser sur la dispersion passive. Pour chaque géométrie (canal plan et tube circulaire), trois nombres de Reynolds sont étudiés afin de traiter les trois régimes de dispersion (laminaire, turbulent à Re modéré, turbulent asymptotique). Le nombre de

¹Les calculs de référence sont réalisés sur des maillages fins. Les maillages sont réguliers dans la direction longitudinale et comprennent 300 mailles longitudinales pour les cas stationnaires, 800 pour les cas transitoires afin de limiter la diffusion numérique. Dans la direction transverse, on utilise un raffinement géométrique de façon à avoir de plus petites mailles à proximité de la paroi et on prend suffisamment de mailles pour que la première maille soit située dans la sous-couche visqueuse ($y_0^+ < 5$). Cela correspond, pour les cas présentés ici à 50 à 100 mailles dans la direction transverse avec un facteur de raffinement compris entre 0.9 et 0.95. Finalement, les maillages utilisés sont constitués de 15000 à 80000 mailles.

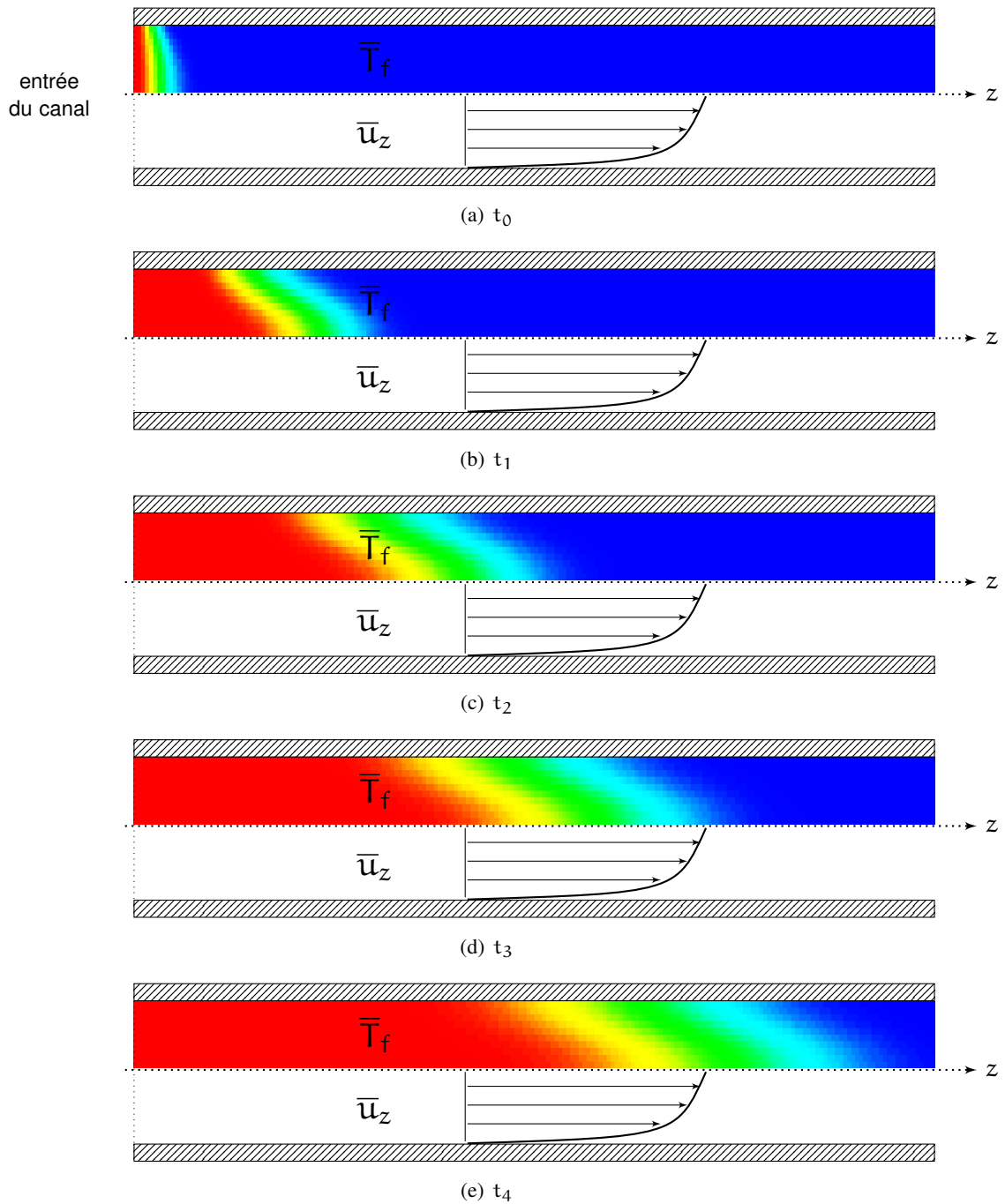


FIG. 6.1 – Configuration des cas-tests de validation du modèle de dispersion : évolution d'un échelon de température.

Prandtl est le même pour tous les cas tests : $Pr = 0.74$. Le tableau 6.1 récapitule les cas-tests qui constituent la base de validation du modèle de dispersion passive.

Géométrie	Re
Canal plan	175
Canal plan	7.6×10^4
Canal plan	1.14×10^6
Tube circulaire	175
Tube circulaire	7.6×10^4
Tube circulaire	1.14×10^6

TAB. 6.1 – Description des écoulements transitoires en canaux pris comme base de validation du modèle de dispersion.

Afin de valider le modèle de dispersion, nous comparons les profils de température moyenne calculés à partir du modèle macroscopique à des résultats de référence fournis par le code hydrodynamique FLICA-OVAP. Les figures 6.2 à 6.7 permettent de comparer les résultats obtenus avec un modèle macroscopique, avec ou sans prise en compte de la dispersion, à des simulations de référence. Elles montrent que notre modèle de dispersion passive permet d'obtenir des résultats très satisfaisants pour les deux géométries considérées. Un modèle macroscopique qui ne prend pas en compte la dispersion sous-estime fortement l'étalement du front de température. En pratique, cela signifie qu'en une abscisse donnée, l'élévation de la température moyenne commence plus tôt que ce que prévoit un modèle macroscopique standard. Notre modèle permet, en ajoutant simplement un coefficient de diffusion macroscopique constant, de déterminer l'étalement du front de température moyenne avec précision.

6.1.2 Complément : analyse phénoménologique

Pour mesurer l'importance relative de la diffusion thermique moléculaire, de la diffusion turbulente et de la dispersion, revenons aux équations. Dans le cas d'un écoulement adiabatique dans un canal, en régime transitoire, l'équation macroscopique de la température s'écrit :

$$\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\underbrace{(\alpha_f + \alpha_{t\phi} + \mathcal{D}_{zz}^p)}_{\text{diffusivité effective } \alpha_e} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right], \quad (6.1)$$

où :

$$\alpha_{t\phi} = \langle \alpha_t \rangle_f = \frac{\langle \nu_t \rangle_f}{Pr_t}. \quad (6.2)$$

En régime laminaire,

$$\alpha_{t\phi} = 0,$$

donc :

$$\alpha_e = \alpha_f \left(1 + \mathcal{D}_{zz}^{p*} \right) = \alpha_f \left(1 + \frac{Pe^2}{C_\ell^p} \right). \quad (6.3)$$

Nous pouvons donc distinguer trois cas de figure :

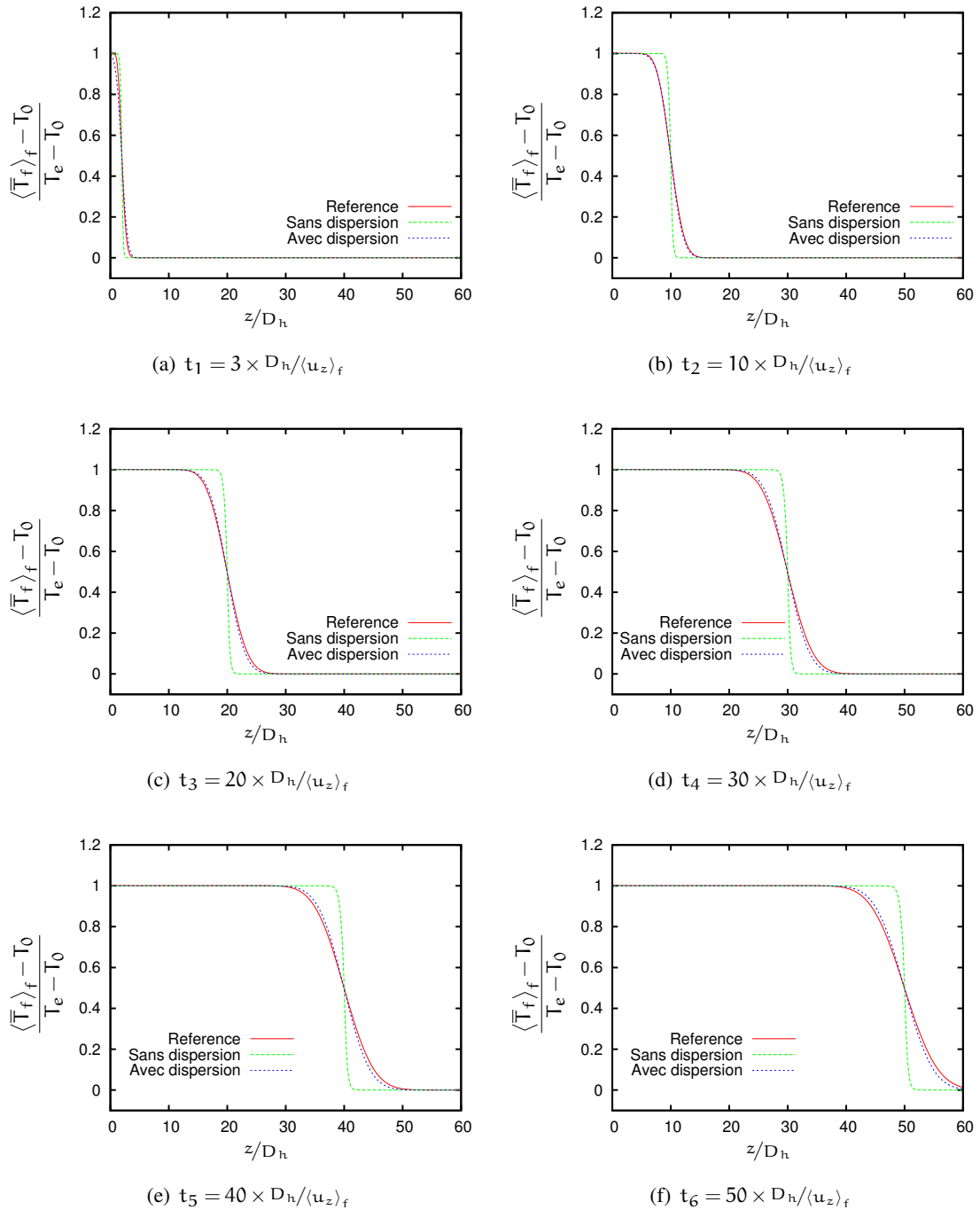


FIG. 6.2 – Évolution d'un échelon de température au cours du temps en **canal plan**, $Re = 175$. Comparaison du modèle macroscopique avec dispersion aux résultats de référence et aux modèles macroscopiques ne prenant pas en compte la dispersion.

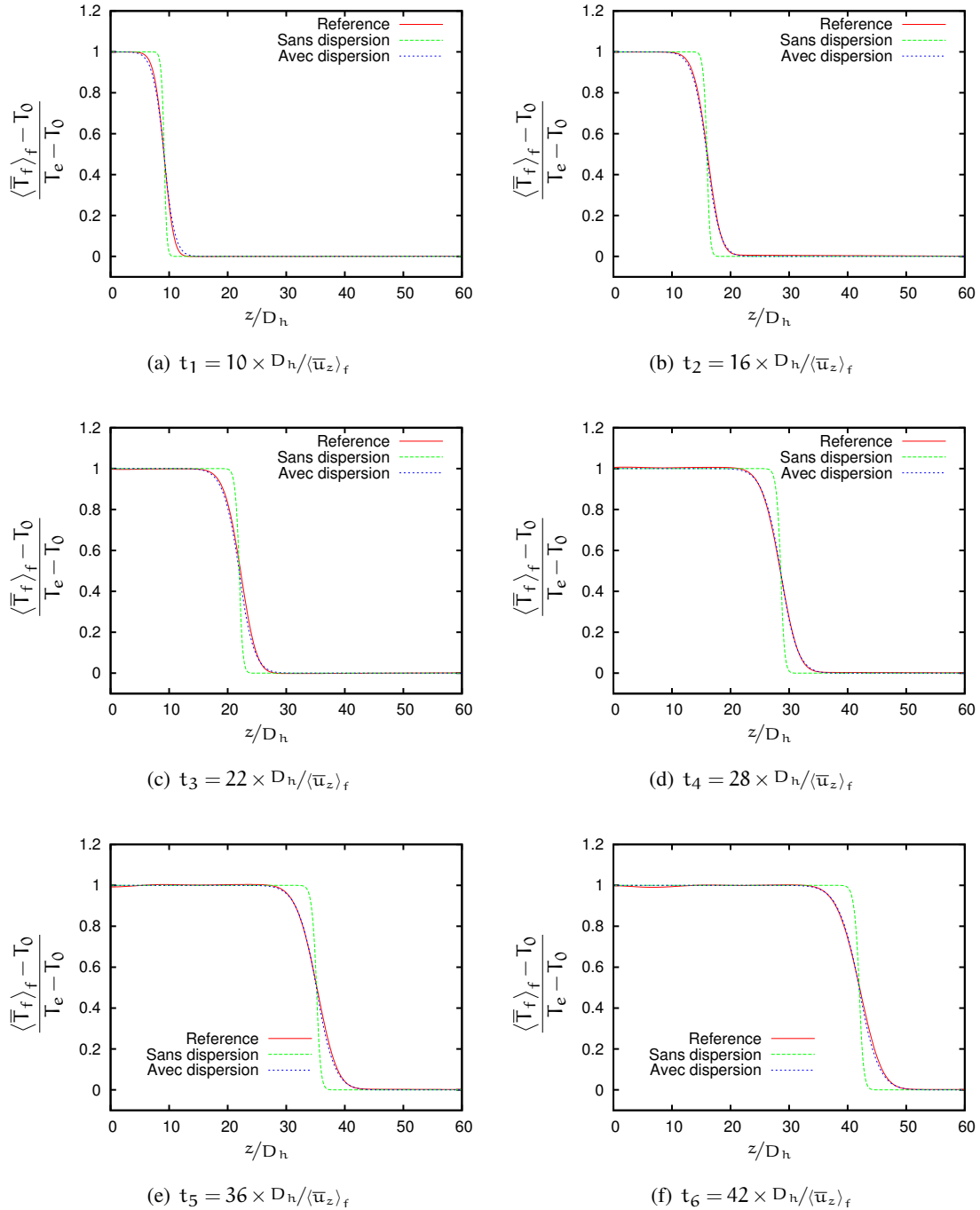


FIG. 6.3 – Évolution d'un échelon de température au cours du temps en **canal plan**, $Re = 76045$. Comparaison du modèle macroscopique avec dispersion aux résultats de référence et aux modèles macroscopiques ne prenant pas en compte la dispersion.

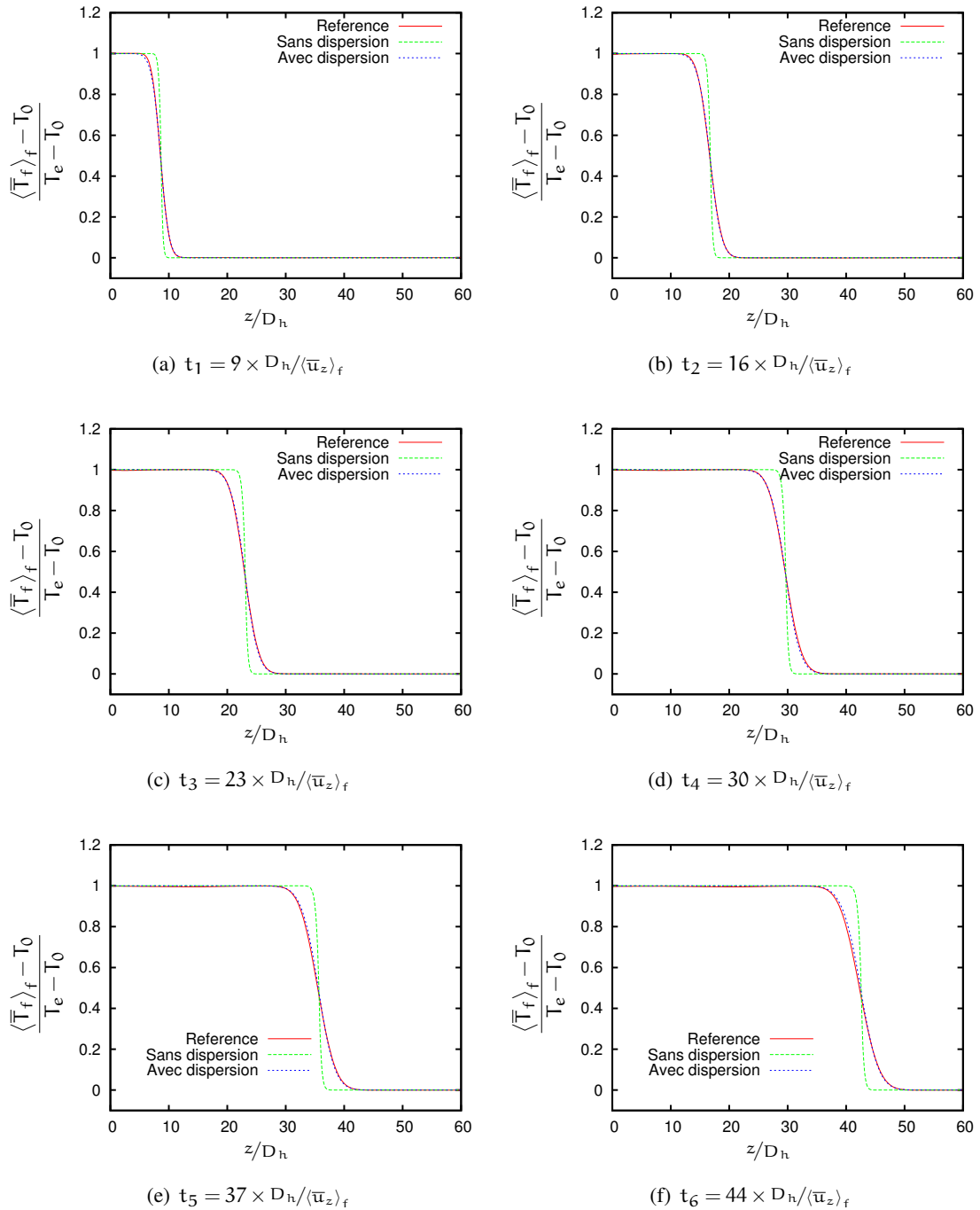


FIG. 6.4 – Évolution d'un échelon de température au cours du temps en **canal plan**, $Re = 1140684$. Comparaison du modèle macroscopique avec dispersion aux résultats de référence et aux modèles macroscopiques ne prenant pas en compte la dispersion.

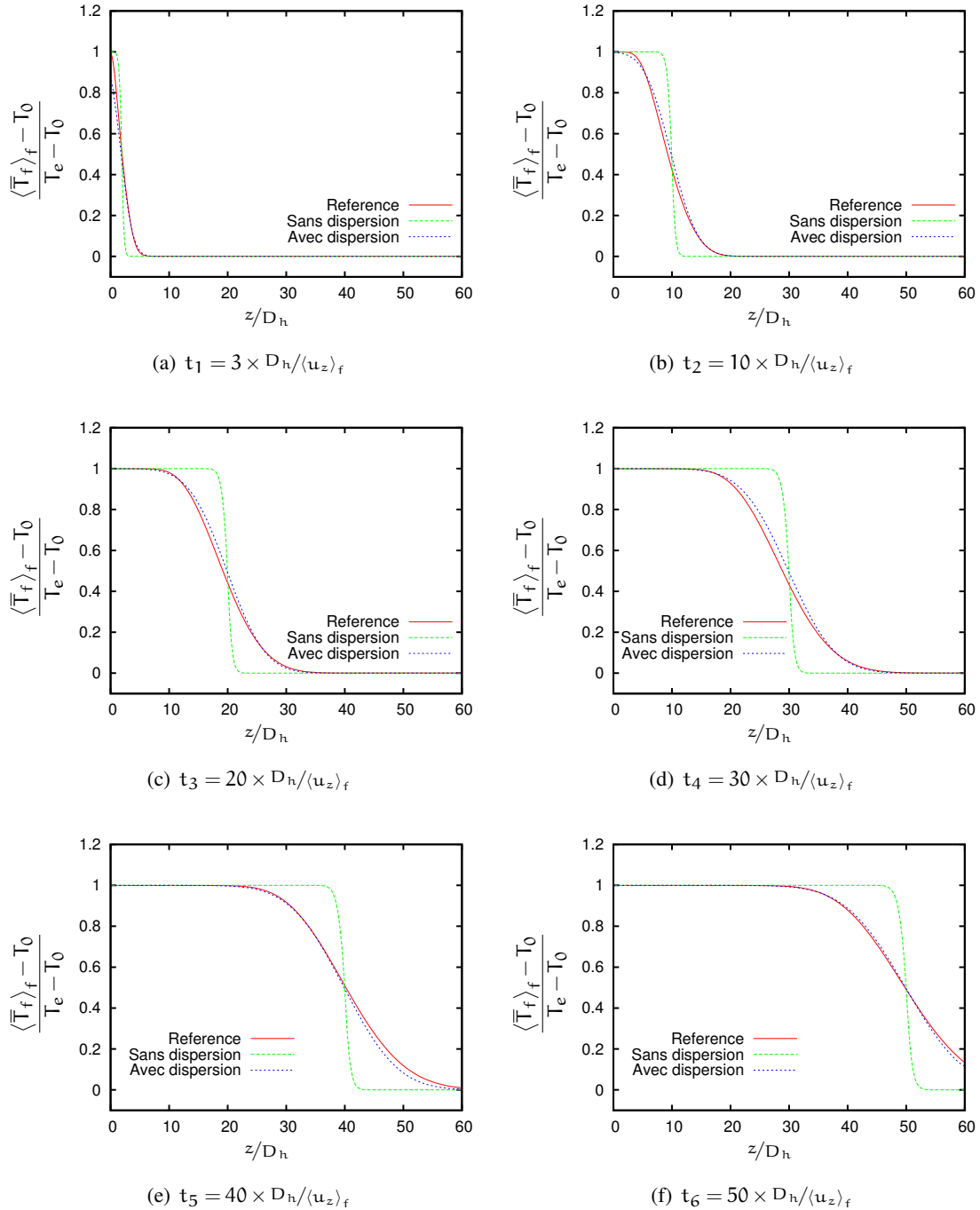


FIG. 6.5 – Évolution d'un échelon de température au cours du temps en **tube circulaire**, $Re = 175$. Comparaison du modèle macroscopique avec dispersion aux résultats de référence et aux modèles macroscopiques ne prenant pas en compte la dispersion.

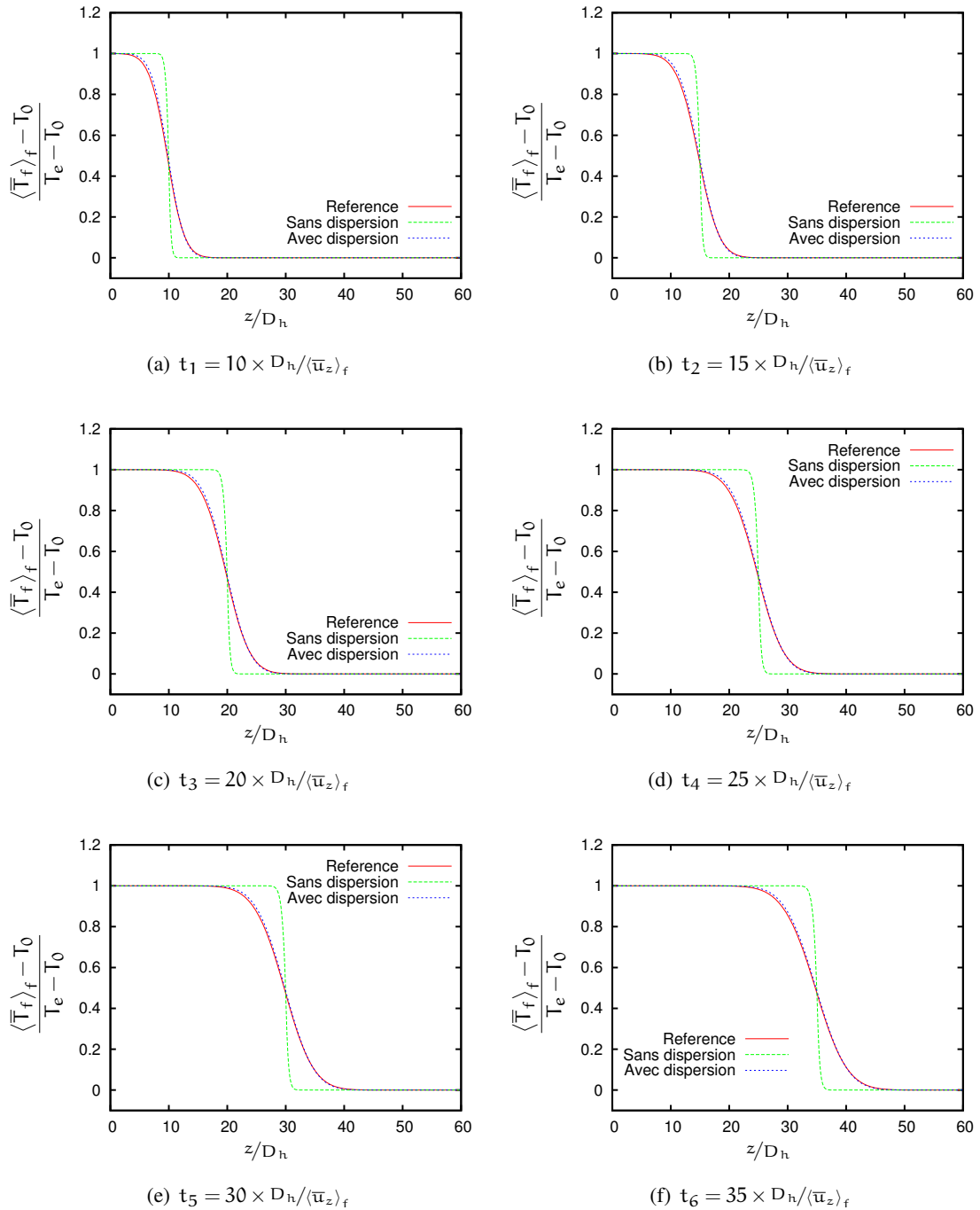


FIG. 6.6 – Évolution d'un échelon de température au cours du temps en **tube circulaire**, $Re = 76045$. Comparaison du modèle macroscopique avec dispersion aux résultats de référence et aux modèles macroscopiques ne prenant pas en compte la dispersion.

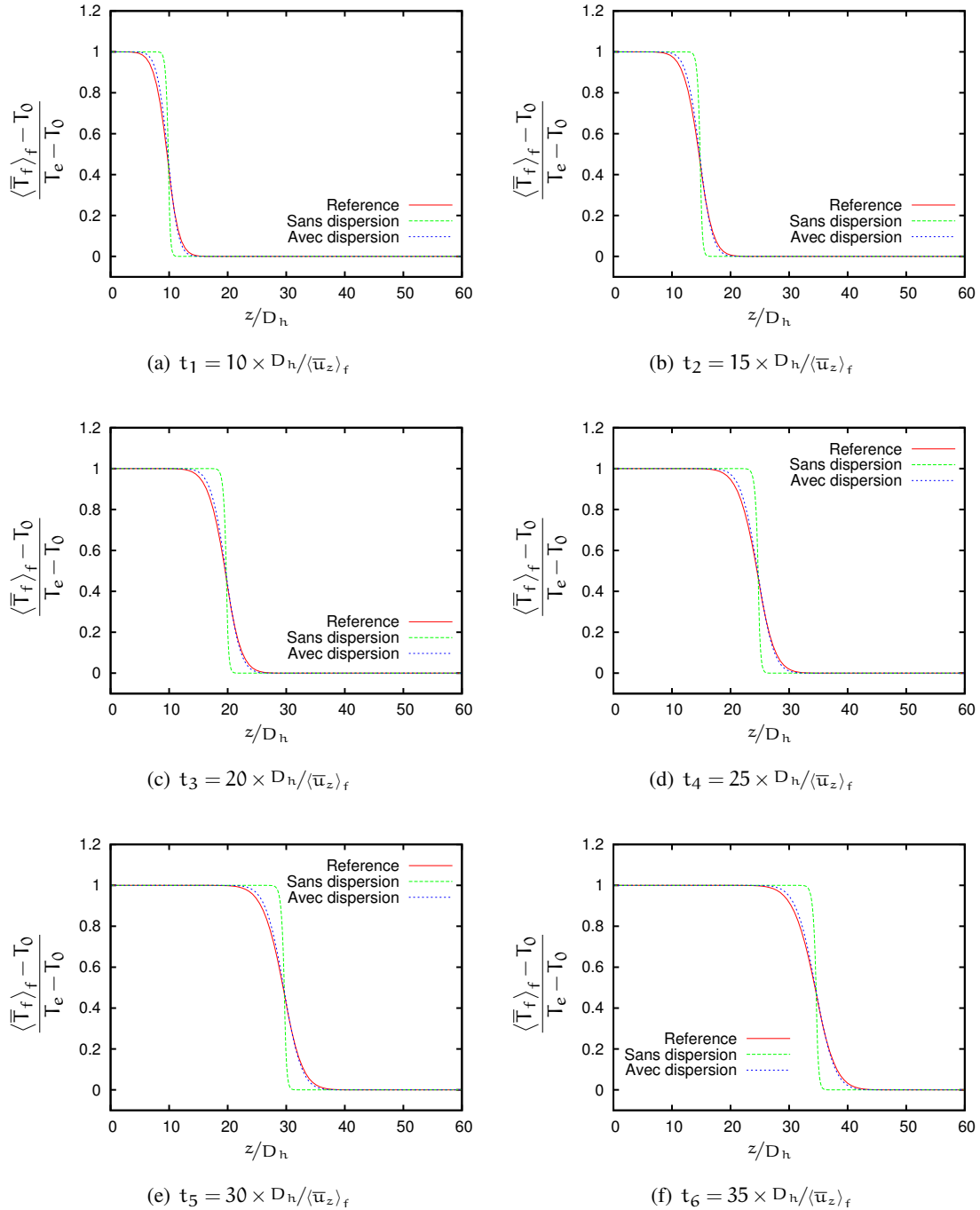


FIG. 6.7 – Évolution d'un échelon de température au cours du temps en **tube circulaire**, $Re = 1140684$. Comparaison du modèle macroscopique avec dispersion aux résultats de référence et aux modèles macroscopiques ne prenant pas en compte la dispersion.

- si $Pe \ll \sqrt{C_t^P}$, alors $\mathcal{D}_{zz}^P \ll \alpha_f$ et la dispersion passive est négligeable devant la diffusion moléculaire ;
- si $Pe \gg \sqrt{C_t^P}$, alors $\mathcal{D}_{zz}^P \gg \alpha_f$ et la diffusion moléculaire est négligeable devant la dispersion passive ;
- sinon, les deux phénomènes sont en concurrence.

En régime turbulent, la diffusivité thermique turbulente est non nulle. On pose :

$$\alpha_{t\phi}^* = \frac{\alpha_{t\phi}}{\alpha_f} = \frac{1}{\alpha_f} \frac{\langle \nu_t \rangle_f}{Pr_t}. \quad (6.4)$$

La viscosité turbulente moyenne peut être approchée par :

$$\begin{aligned} \langle \nu_t \rangle_f &= C'_\nu u_f D_h \\ &= C_\nu \sqrt{f_p} \langle \bar{u}_z \rangle_f D_h. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Le diffusivité thermique turbulente adimensionnée peut donc être approchée par :

$$\alpha_{t\phi}^* = C_\alpha \sqrt{f_p} Pe, \quad (6.6)$$

où C_α est une constante de l'ordre de 10^{-2} [76, 99]. Finalement, pour des nombres de Reynolds plus grands que 10^6 , la diffusivité thermique effective s'écrit, avec (4.44) :

$$\alpha_e = \alpha_f \left[1 + \left(C_\alpha + C_t^P \right) \sqrt{f_p} Pe \right]. \quad (6.7)$$

Pour des écoulements turbulents, $\sqrt{f_p} Pe \gg 1$. La diffusion moléculaire est donc très faible devant la diffusion turbulente et la dispersion passive. Par ailleurs, nous avons vu que C_t^P est de l'ordre de 0.1 à 1. Le phénomène prépondérant est donc la dispersion passive.

En résumé, les estimations *a priori* et les simulations (voir figures 6.2 à 6.7) que nous avons réalisées montrent que, **quel que soit le nombre de Reynolds, c'est la dispersion passive qui a le rôle le plus important dans l'étalement d'un front de température et que notre modèle permet de retrouver avec précision les résultats de référence.**

Nous nous intéressons à présent à l'influence du nombre de Prandtl sur les effets de la dispersion passive. Commençons par étudier ce qui se passe en régime laminaire. Nous avons vu au paragraphe précédent que la diffusivité thermique effective en régime laminaire vaut :

$$\alpha_e = \alpha_f + \mathcal{D}_{zz}^P = \alpha_f \left(1 + \frac{Pe^2}{C_t^P} \right). \quad (6.8)$$

Cela peut s'écrire en fonction du nombre de Prandtl :

$$\alpha_e = \nu_f \left(\frac{1}{Pr} + \frac{Re^2}{C_t^P Pr} \right). \quad (6.9)$$

Deux effets contradictoires apparaissent :

- la diffusion thermique moléculaire diminue lorsque le nombre de Prandtl augmente (à viscosité constante) ;
- la dispersion passive croît avec le nombre de Prandtl.

Nous voulons savoir comment évolue la diffusivité thermique effective quand le nombre de Prandtl varie. On calcule la dérivée de la diffusivité effective par rapport au nombre de Prandtl :

$$\frac{\partial \alpha_e}{\partial \text{Pr}} = \nu_f \left(\frac{\text{Re}^2}{C_l^P} - \frac{1}{\text{Pr}^2} \right). \quad (6.10)$$

Deux domaines se distinguent donc :

- si $\text{Pe}^2 < C_l^P$, la diffusivité thermique effective décroît lorsque Pr croît ;
- sinon cette quantité augmente avec le nombre de Prandtl.

La figure 6.8 illustre l'évolution de la diffusivité effective en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl. On peut y voir que α_e passe par un minimum et que le nombre de Prandtl correspondant dépend du nombre de Reynolds.

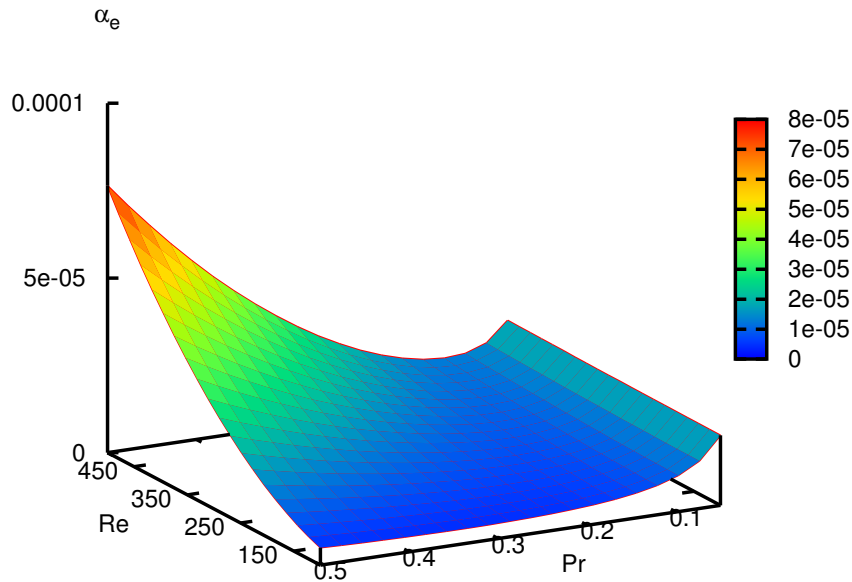


FIG. 6.8 – Évolution de la diffusivité thermique effective en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl pour un écoulement laminaire.

Cela permet d'expliquer des comportements *a priori* surprenants. Considérons par exemple l'évolution d'un échelon de température dans une conduite. Avec un modèle qui ne tient compte que de la diffusion moléculaire et pas de la dispersion, on prédit que le front s'étale d'autant plus que le nombre de Prandtl est faible. Or, les résultats issus de simulations fines contredisent cette analyse. En effet, à partir d'un certain Péclet, c'est la dispersion passive qui domine et elle croît avec le nombre de Prandtl. À titre d'exemple, considérons l'évolution d'un échelon de température dans un canal plan pour un nombre de Reynolds de 175. Pour ce type de géométrie, on rappelle que $C_l^P = 840$. Par conséquent, le changement de signe de la

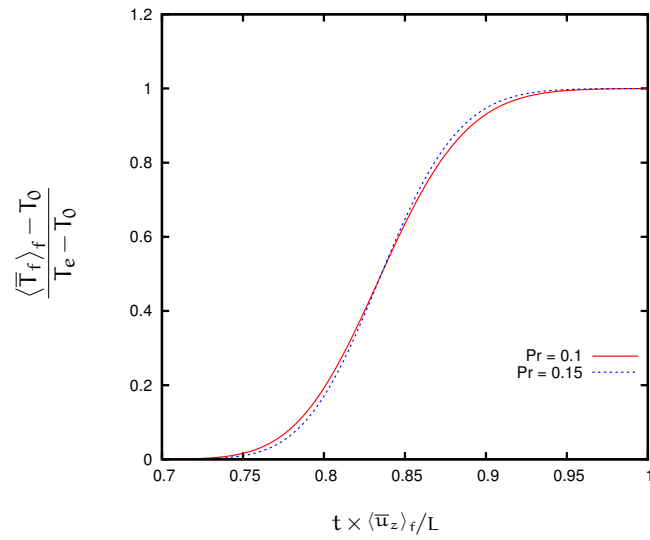
dérivée va se produire à :

$$Pe_c = \sqrt{C_l^P} = 29, \quad (6.11)$$

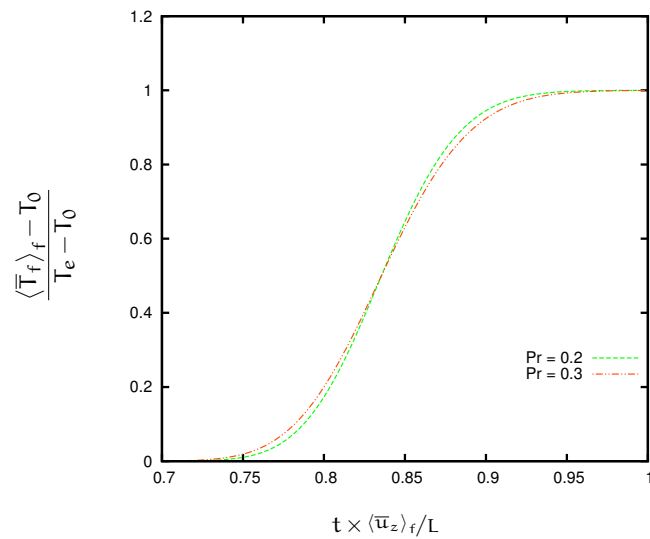
ce qui, en terme de nombre de Prandtl donne :

$$Pr_c = \frac{Pe_c}{Re} = 0.166. \quad (6.12)$$

Des calculs sont effectués pour $Pr = 0.1, 0.15, 0.2, 0.3$ afin de montrer que la diffusivité thermique effective augmente entre $Pr = 0.1$ et $Pr = 0.15$ (fig.6.9.a) et diminue entre $Pr = 0.2$ et $Pr = 0.3$ (fig.6.9.b). Les résultats obtenus sont présentés en figure 6.9.



(a) Pr = 0.1 et Pr = 0.15



(b) Pr = 0.2 et Pr = 0.3

FIG. 6.9 – Évolution d'un échelon de température : évolution au cours du temps de la température moyenne en $z = 50D_h$ pour un écoulement en canal plan. Effets de la dispersion en fonction du nombre de Prandtl en régime laminaire. La diffusivité thermique effective augmente avec Pr entre Pr = 0.1 et Pr = 0.15 et diminue entre Pr = 0.2 et Pr = 0.3

6.2 Écoulements stationnaires et flux de chaleur non uniformes

6.2.1 Évaluation du modèle

Dans cette section, nous considérons des écoulements stationnaires en présence de flux thermiques non-uniformes en paroi. La figure 6.10 décrit la configuration de l'écoulement. Le fluide s'écoule suivant la direction z dans une conduite d'axe z et de longueur $L = 60 D_h$. La température en entrée du canal, *i.e.* en $z = 0$, est uniforme sur la section et vaut T_0 .

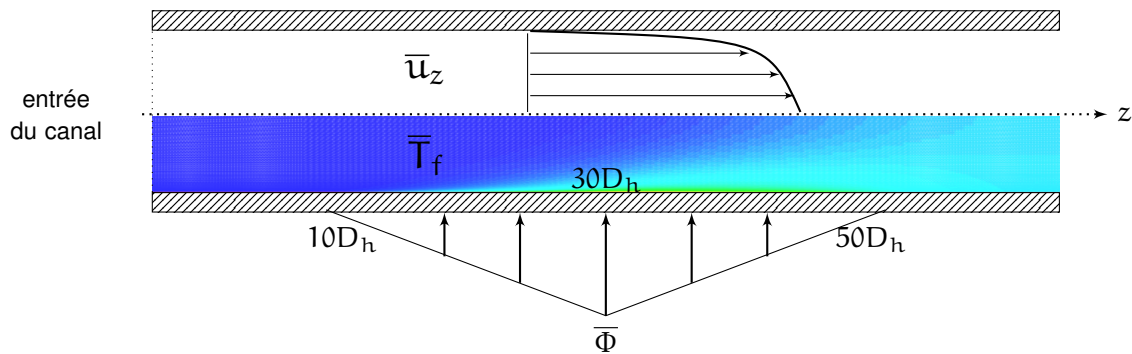
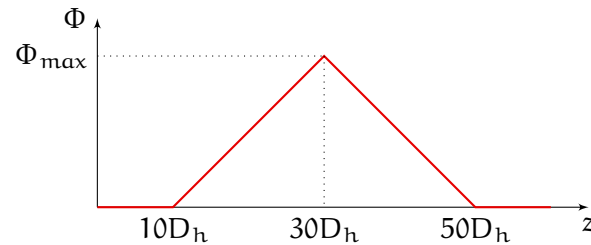


FIG. 6.10 – Configuration des cas-tests de validation du modèle de dispersion pour des écoulements stationnaires en présence de flux thermiques non-uniformes.

Les flux thermiques en paroi ne dépendent que de z , sont affines par morceaux et sont choisis de façon à ce que la variation de masse volumique par dilatabilité reste faible. Ils sont de la forme :



soit :

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 10D_h \text{ ou } z > 50D_h, \\ \Phi_{\max} \frac{z - 10D_h}{20D_h} & \text{si } 10D_h < z < 30D_h, \\ \Phi_{\max} \frac{50D_h - z}{20D_h} & \text{si } 30D_h < z < 50D_h, \end{cases} \quad (6.13)$$

où Φ_{\max} est choisi de façon à ce que l'élévation de température moyenne entre l'entrée et la sortie de la conduite, notée ΔT , soit la même pour tous les cas considérés. Comme précédemment, deux géométries (canal plan et tube circulaire) et les trois régimes d'écoulements (laminaire, turbulent intermédiaire et turbulent

asymptotique) sont étudiés. Les cas-tests utilisés comme base de validation pour les écoulements permanents en présence de flux thermiques hétérogènes sont récapitulés dans le tableau 6.2. Le nombre de Prandtl est pris égal à 0.74.

Géométrie	Re
Canal plan	175
Canal plan	7.6×10^4
Canal plan	1.14×10^6
Tube circulaire	175
Tube circulaire	7.6×10^4
Tube circulaire	1.14×10^6

TAB. 6.2 – Description des écoulements permanents en canaux pris comme base de validation du modèle de dispersion.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 6.11 à 6.12. Ils montrent que le modèle de dispersion que nous proposons permet d'améliorer sensiblement la précision du modèle macroscopique. En effet, lorsque la dispersion est prise en compte pour un nombre de Prandtl égal à 0.74, l'écart moyen par rapport au profil de référence est deux à trois fois plus faible en régime turbulent et dix fois plus faible en régime laminaire. De plus, négliger la dispersion peut conduire à sous-évaluer la température moyennée de plusieurs degrés (fig. 6.11). Le modèle proposé permet de réduire considérablement l'erreur. Par ailleurs, les figures 6.11.a et 6.12.b montrent que les effets dispersifs sont nettement plus importants en tube circulaire qu'en canal plan, comme le laissaient prévoir les valeurs des coefficients de dispersion (voir tableau 5.1).

6.2.2 Complément : analyse phénoménologique

Nous allons à présent comparer les effets de la dispersion passive et ceux de la dispersion active dans le cas d'un écoulement permanent en conduite avec un flux de chaleur hétérogène imposé en paroi. Le terme de dispersion active est défini, pour les écoulements étudiés ici, par :

$$\text{Dispersion active} = \frac{4\mathcal{D}_z^A}{(\rho C_p)_f D_h} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}, \quad (6.14)$$

et le terme de dispersion passive par :

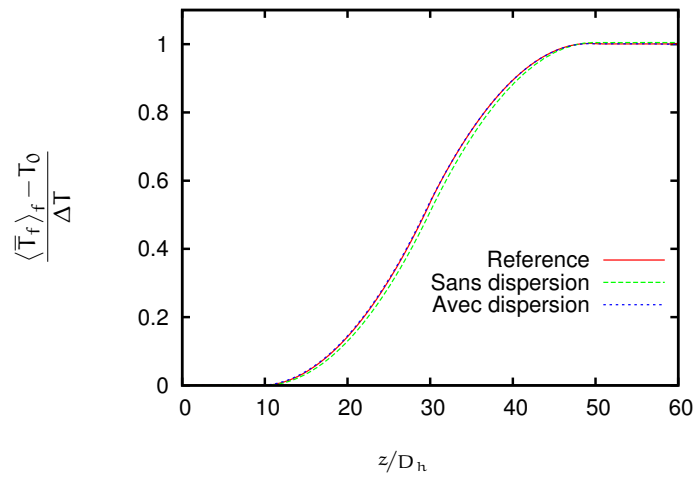
$$\text{Dispersion passive} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{D}_{zz}^P \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right]. \quad (6.15)$$

Le terme de dispersion passive peut être estimé à l'aide d'un bilan enthalpique. Nous obtenons :

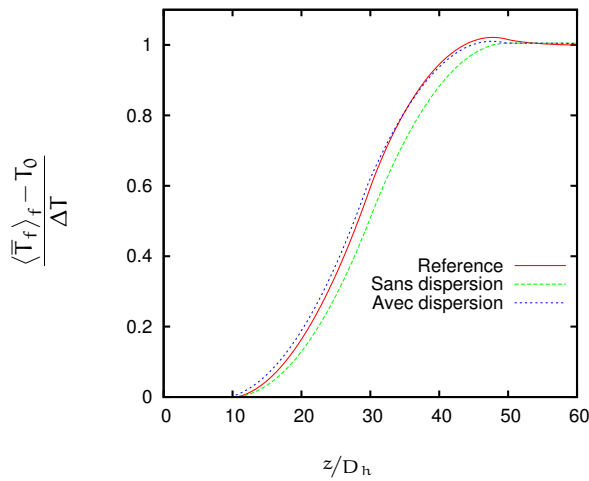
$$\text{Dispersion passive} \sim \mathcal{D}_{zz}^P \times \frac{4}{(\rho C_p)_f U D_h} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}. \quad (6.16)$$

Par conséquent, le rapport de ces deux termes s'écrit :

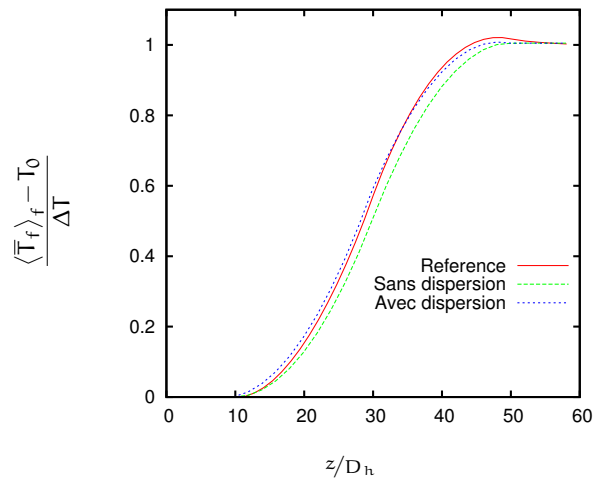
$$\frac{\text{Dispersion passive}}{\text{Dispersion active}} \sim \frac{\mathcal{D}_{zz}^P}{U \mathcal{D}_z^A} \sim \frac{1}{Pe} \times \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\mathcal{D}_z^{A*}}. \quad (6.17)$$



(a) $Re = 175$.



(b) $Re = 76045$.



(c) $Re = 1140684$.

FIG. 6.11 – Tests de validation du modèle de dispersion. Écoulements stationnaires en **canal plan** et en présence de flux thermiques non-uniformes.

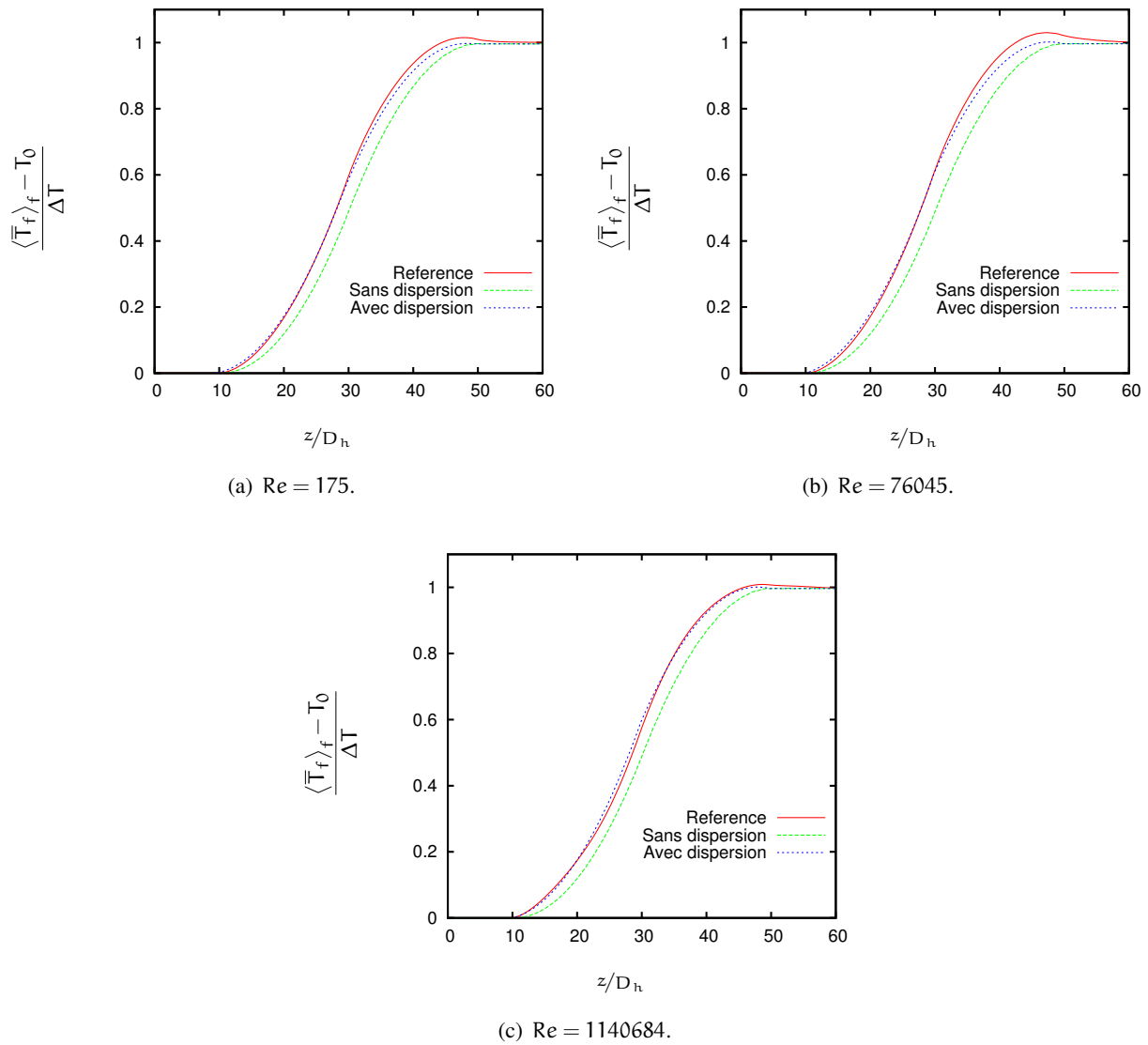


FIG. 6.12 – Tests de validation du modèle de dispersion. Écoulements stationnaires en **tube circulaire** et en présence de flux thermiques non-uniformes.

En utilisant les expressions modèles pour \mathcal{D}_{zz}^{P*} et \mathcal{D}_z^{A*} , cela donne :

$$\frac{\text{Dispersion passive}}{\text{Dispersion active}} \sim \begin{cases} \frac{C_l^A}{C_l^P} & \text{pour } Re < 2 \times 10^3, \\ \frac{C_t^P \sqrt{f_p}}{C_t^A} & \text{pour } Re > 10^6. \end{cases} \quad (6.18)$$

Autrement dit, en régime laminaire, la dispersion active domine la dispersion passive. Le rapport des deux termes ne dépend que de la géométrie et vaut 2/7 en canal plan, et 1/2 en tube circulaire. Pour un écoulement dans une conduite annulaire, ce rapport dépend du paramètre géométrique $q = r_{int}/r_{ext}$ suivant l'expression :

$$\frac{\text{Dispersion passive}}{\text{Dispersion active}} \sim \frac{107.0 + 33.5(q^2 - 2q) + 862.4 \left(\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right)}{255.2 - 341.5(q^2 - 2q) + 1263.8 \left(\ln(1+q) - \frac{q}{2} \right)}. \quad (6.19)$$

Pour des valeurs très élevées du nombre de Reynolds ($Re > 10^6$), le rapport des termes dispersifs décroît en $\sqrt{f_p}$. L'évolution du rapport des termes dispersifs en fonction du nombre de Reynolds pour différentes géométries et différents nombres de Prandtl est présentée en figure 6.13.

Compte tenu des estimations proposées ci-dessus et des résultats de simulation, l'effet de la dispersion passive peut être considérée comme négligeable vis-à-vis de celui de la dispersion active pour des écoulements fortement turbulents stationnaires en canaux en présence de flux thermiques non-uniformes en paroi. En ce qui concerne les écoulements laminaires stationnaires, la dispersion active reste le phénomène dominant lorsque les flux thermiques imposés en paroi ne sont pas uniformes. Dans ce cas, la dispersion passive n'est pas toujours négligeable.

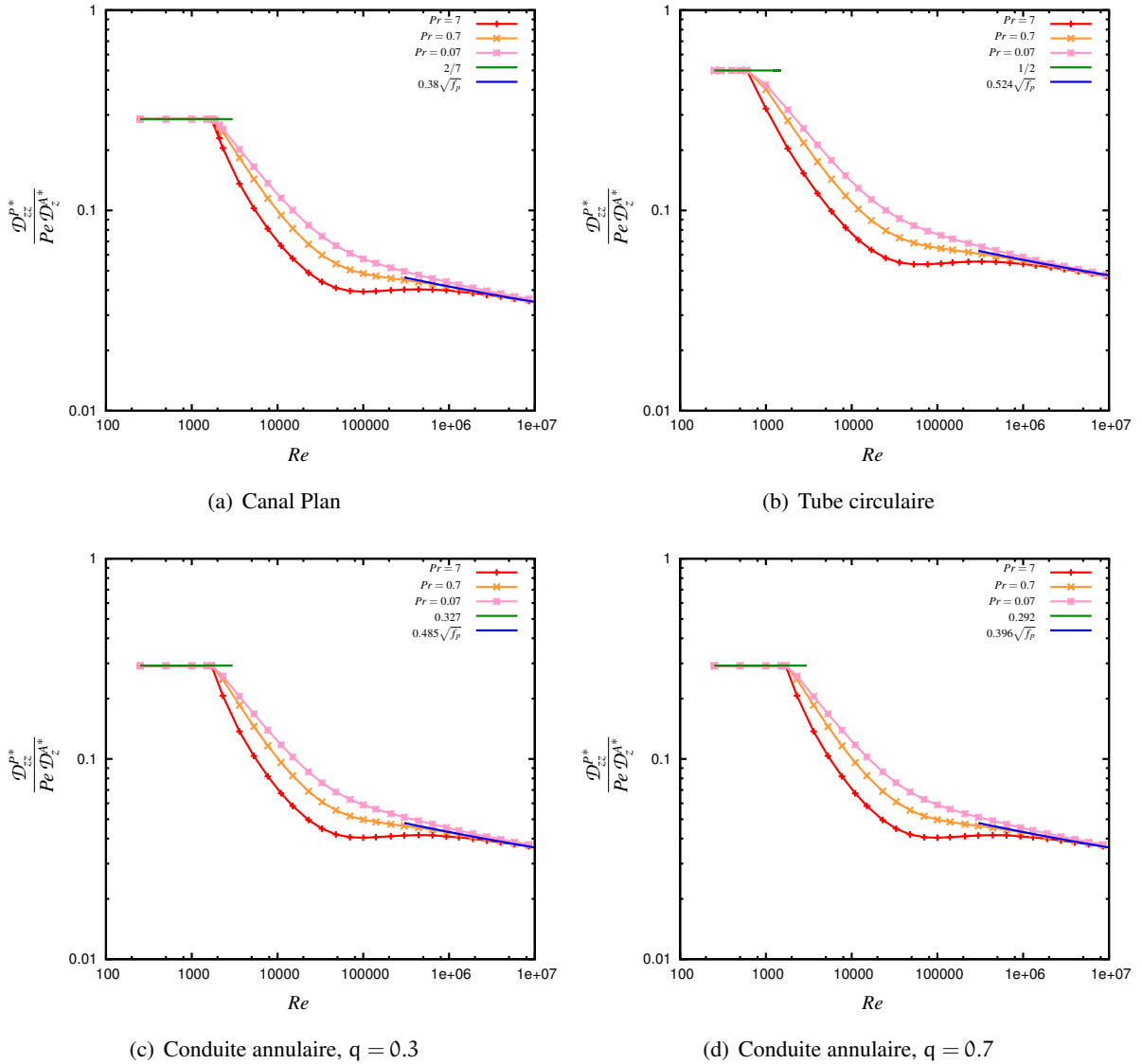


FIG. 6.13 – Évolution du rapport $\mathcal{D}_{zz}^P / (Pe \mathcal{D}_z^A)$ en fonction du nombre de Reynolds pour des écoulements en canal plan, tube circulaire et conduites annulaires. Trois nombres de Prandtl sont étudiés, à savoir : $Pr = 7$, $Pr = 0.7$, et $Pr = 0.07$.

À titre d'exemple, considérons le cas d'un canal plan en régime turbulent intermédiaire. L'écoulement est stationnaire et le flux thermique imposé en paroi est affine par morceaux. Pour illustrer notre propos, nous produisons sur la figure 6.14 la décomposition des différentes contributions pour un écoulement turbulent en canal plan caractérisé par $Pr = 0.74$ et $Re = 76045$. Comme prévu, les effets de la dispersion passive sont faibles devant ceux de la dispersion active.

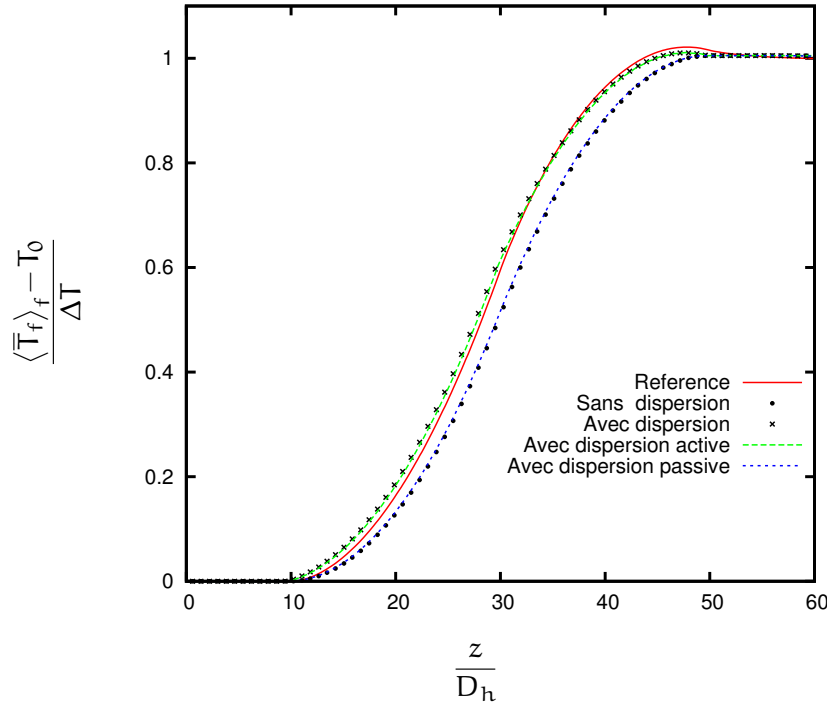


FIG. 6.14 – Profils de température moyennée pour un écoulement en canal plan en présence de flux thermique hétérogène. $Pr = 0.74$ et $Re = 76045$. Effets comparés de la dispersion active et de la dispersion passive.

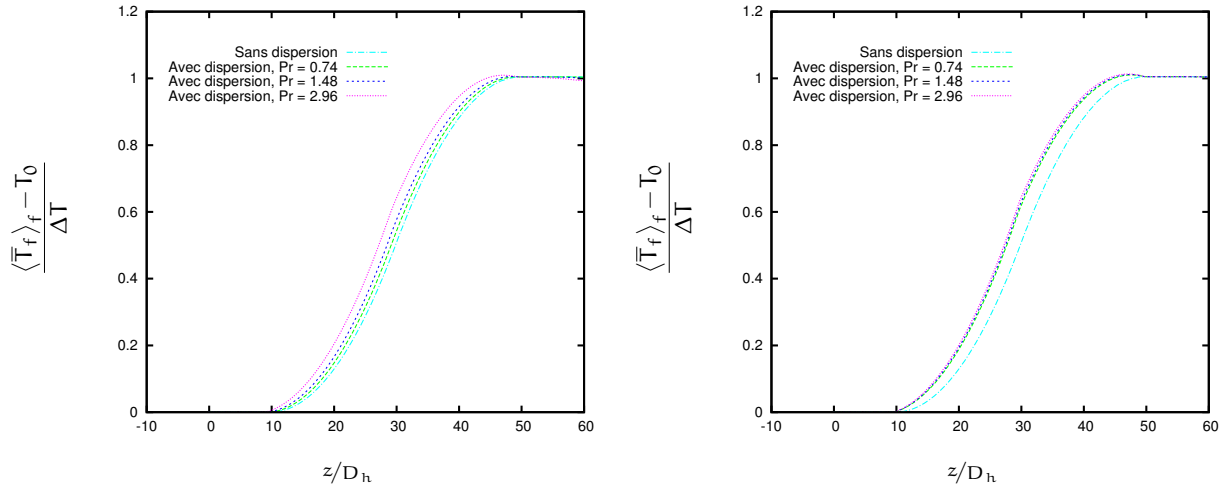
Nous nous intéressons à présent à l'influence du nombre de Prandtl sur la dispersion active. D'après ce qui précède, l'effet de la dispersion passive est négligeable devant celui de la dispersion active pour des écoulements stationnaires en canaux. Les termes de dispersion de l'équation macroscopique de température peuvent donc se réduire à :

$$\text{Dispersion} \simeq \text{Dispersion active} = \frac{4\mathcal{D}_z^A}{(\rho C_p)_f D_h} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}. \quad (6.20)$$

Étant donné les valeurs de \mathcal{D}_z^A , cela implique que :

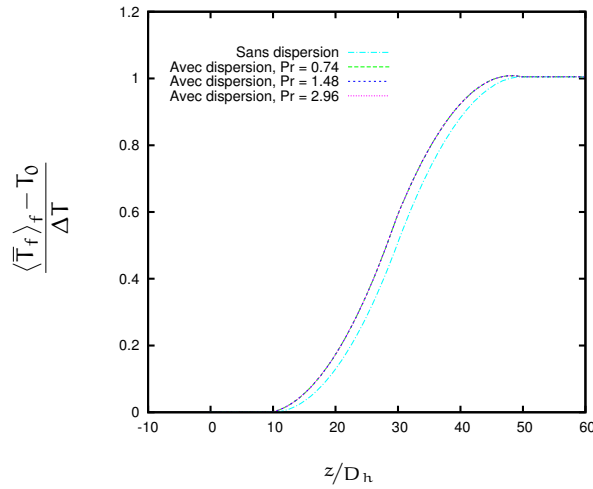
- en régime laminaire, *i.e.* pour $Re < 2 \times 10^3$, la dispersion croît avec le nombre de Prandtl ;
- en régime intermédiaire turbulent, *i.e.* pour $2 \times 10^3 < Re < 10^6$, on observe la même tendance mais moins nettement ;
- en régime asymptotique, *i.e.* pour $Re > 10^6$, la dispersion ne dépend pas du nombre de Prandtl.

Les cas tests présentés figure 6.15 permettent de confirmer cette analyse.



(a) Régime laminaire : $Re = 175$.

(b) Régime intermédiaire : $Re = 76045$.



(c) Régime asymptotique : $Re = 1140684$.

FIG. 6.15 – Profils de température moyennée pour un écoulement en canal plan en présence de flux thermique hétérogène. Effets de la dispersion en fonction du nombre de Prandtl en régimes laminaire, intermédiaire et asymptotique. Le nombre de Prandtl n'a pas d'influence sur la dispersion active aux grands nombres de Reynolds.

TROISIÈME PARTIE

ÉCHANGES THERMIQUES ET DISPERSION

INTRODUCTION

La conception et l'optimisation d'échangeurs thermiques ou de cœurs de réacteurs nucléaires nécessitent une bonne connaissance des écoulements qui les traversent, et en particulier des transferts thermiques qui s'y produisent. La qualité de l'échange thermique est globalement mesurée par le rapport entre le flux thermique et l'écart de température considérés. Dans la plupart des dispositifs visant à transmettre la chaleur, on cherche à maximiser cet échange. C'est une quantité macroscopique qui dépend fortement de la configuration de l'écoulement : la géométrie du milieu, le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) ou la nature du flux thermique (uniforme ou non) sont autant de paramètres qui affectent les transferts thermiques.

De nombreux modèles d'échange thermique existent pour des écoulements stationnaires en canaux en présence de flux uniformes en paroi [24, 59] selon lesquels l'écart entre la température de paroi et la température moyenne est supposé proportionnel au flux thermique en paroi. Dans le suite de notre étude, nous parlerons de ce type de modèles comme de modèles « classiques ». Les modèles classiques donnent de bons résultats lorsque le flux en paroi est uniforme et pour des écoulements permanents et établis. En revanche, ils sont mis en défaut lorsque l'on souhaite simuler des écoulements hors équilibre ou non uniformément chauffés. En effet, ils reposent sur l'hypothèse que l'écoulement considéré est établi. Pour des écoulements présentant de forts gradients de température moyenne ou de flux thermique en paroi, l'hypothèse d'établissement est caduque. Les couches limites et l'écoulement moyen ne réagissent pas simultanément à ces fortes perturbations. Les modèles classiques ne sont pas capables de retranscrire ce décalage. Par exemple, en l'absence de flux thermique en paroi, ils prévoient $T_w = T_{\text{BULK}}$ en tout point et à tout instant. Or un saut de température ne se propage pas aussi vite près des parois qu'au centre du canal où la vitesse d'écoulement est maximale. La figure 6.1 page 76, montre bien qu'à proximité du front de température, $T_w \neq T_{\text{BULK}}$. La présence d'un flux thermique spatialement variable à la paroi modifie aussi le transport de la température, et donc l'échange thermique. Par exemple, considérons une conduite chauffée seulement sur une partie de sa longueur. En aval de la zone de flux thermique imposé, le fluide qui a été chauffé en amont transmet de la chaleur au solide, avec un certain retard. Un modèle classique ne peut prévoir ce phénomène. Ces deux exemples illustrent le fait que les modèles classiques ne permettent pas de rendre compte des effets de la dispersion sur la température de paroi.

Dans la partie précédente, nous avons proposé et testé un modèle macroscopique pour la température moyenne. Ce modèle permet de retranscrire les effets de la dispersion, et donc de prédire avec précision la température moyennée pour des écoulements en canaux en présence de flux de chaleur non uniformes en paroi ou de sauts de température. Pour dériver le modèle de dispersion thermique, nous avons été amenés à résoudre le problème de fermeture à l'échelle du pore, et donc à relier les déviations de température à la température moyenne. Nous allons à présent reprendre cette analyse et l'étendre à la modélisation macroscopique de la température de paroi. Dans un premier temps, nous proposerons un modèle algébrique de température de paroi basé sur la méthode de prise de moyenne. Puis, nous dériverons un modèle à équation de transport qui permet de surmonter les difficultés rencontrées avec le modèle algébrique.

Avant cela, revenons sur les modèles classiques d'échange thermique. Le **coefficient d'échange thermique** h traduit de manière phénoménologique les échanges de chaleur entre le solide et le fluide. Généralement, le flux thermique en paroi Φ est supposé être proportionnel à l'écart entre la température de paroi T_w et une température caractéristique du fluide T_m :

$$\Phi = h(T_w - T_m). \quad (6.21)$$

Il est d'usage de prendre comme température caractéristique du fluide la température de mélange :

$$T_m = T_{\text{BULK}} = \frac{\langle \mathbf{u} T \rangle_f}{\langle \mathbf{u} \rangle_f}. \quad (6.22)$$

Le **nombre de Nusselt** est un nombre sans dimension qui quantifie le rapport entre la quantité de chaleur échangée par convection et celle échangée par conduction. Il s'exprime en fonction du coefficient d'échange thermique h , du diamètre hydraulique D_h et de la conductivité thermique du fluide λ_f :

$$\text{Nu} = \frac{h D_h}{\lambda_f}. \quad (6.23)$$

Pour des écoulements laminaires établis uniformément chauffés en conduite, le nombre de Nusselt est constant et ne dépend que de la géométrie [95]. De nombreuses corrélations permettent d'exprimer le nombre de Nusselt en fonction de la géométrie, des nombres de Reynolds et de Prandtl, et du coefficient de frottement pour des écoulements turbulents, établis uniformément chauffés en conduites. Citons [33, 106]. La plus couramment utilisée est la corrélation de Dittus-Boelter [24] :

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4}. \quad (6.24)$$

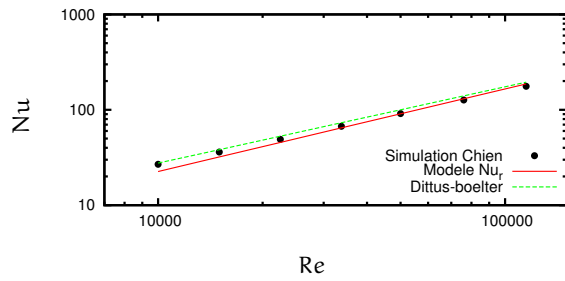
Le coefficient d'échange thermique est intimement lié aux profils de température. Chaque modèle de turbulence bas Reynolds fournira donc un coefficient d'échange légèrement différent. Pour valider nos modèles macroscopiques de température de paroi, nous comparerons leurs prédictions à des résultats issus de simulations fines réalisées avec un modèle de turbulence bas Reynolds de Chien [19]. Il est donc intéressant de savoir quel coefficient d'échange restitue ce modèle afin de s'affranchir du biais qu'il induit sur le nombre de Nusselt associé à un écoulement établi. Pour calculer le nombre de Nusselt associé au modèle de Chien, noté par la suite Nu_r , nous simulons, à l'aide du modèle de Chien, des écoulements turbulents, stationnaires, établis, avec un flux de chaleur uniforme imposé en paroi pour différents nombres de Prandtl et de Reynolds. Les profils de température ainsi obtenus sont ensuite utilisés pour déterminer la valeur du nombre de Nusselt. À partir de ces résultats numériques, nous cherchons à exprimer le nombre de Nusselt associé au modèle de Chien sous la forme :

$$\text{Nu}_r = \alpha \text{Re}^m \text{Pr}^n, \quad (6.25)$$

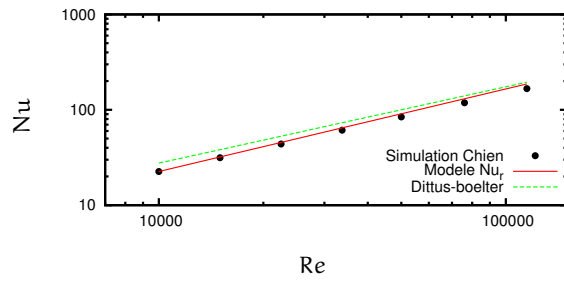
où les paramètres α , m et n sont optimisés pour retrouver au mieux les résultats de simulation. Pour des écoulements en canaux plans et en tube circulaire, nous trouvons :

$$\text{Nu}_r = 0.011 \text{Re}^{0.87} \text{Pr}^{0.5} \quad (6.26)$$

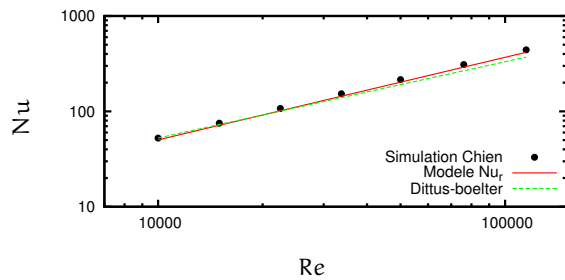
La figure III.1 permet de comparer les résultats du modèle (6.26) aux résultats de simulation, ainsi qu'à la corrélation de Dittus-Boelter.



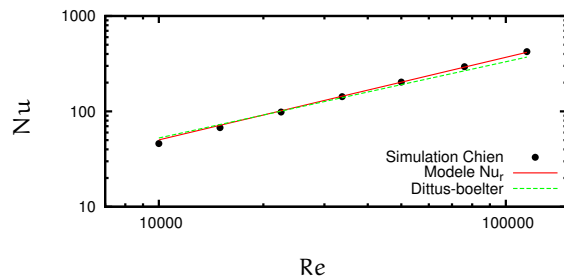
(a) Canal plan $Pr = 0.5$



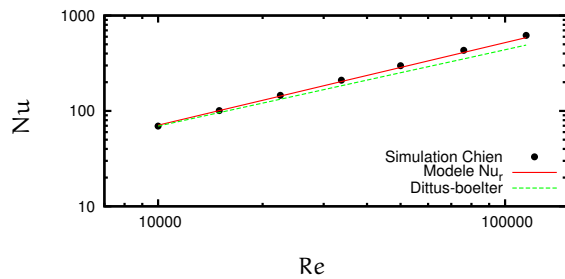
(b) Tube circulaire $Pr = 0.5$



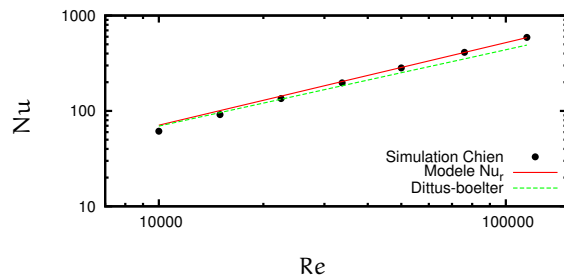
(c) Canal plan $Pr = 2.5$



(d) Tube circulaire $Pr = 2.5$



(e) Canal plan $Pr = 5$



(f) Tube circulaire $Pr = 5$

FIG. III.1 – Écoulements en canaux en régime turbulent : évolution de Nu en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl. Comparaison avec le nombre de Nusselt donné par la corrélation de Dittus-Boelter.

UN MODÈLE ALGÈBRIQUE DE TEMPÉRATURE DE PAROI BASÉ SUR LA MÉTHODE DE WHITAKER

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons utilisé la relation de fermeture suivante :

$$\delta \bar{T}_f = \bar{T}_f - \langle \bar{T}_f \rangle_f = \eta_j \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \psi, \quad (7.1)$$

où la fonction ψ est nulle pour des milieux spatialement périodiques. Cela donne donc :

$$\bar{T}_f = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \eta_j \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (7.2)$$

Ici, seule la température de paroi nous intéresse. En utilisant l'expression (7.2) et les propriétés d'idempotence du filtre spatial, nous arrivons à :

$$T_w = \frac{\langle \bar{T}_f \delta \omega \rangle_f}{\langle \delta \omega \rangle_f} = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \frac{\langle \eta_j \delta \omega \rangle_f}{\langle \delta \omega \rangle_f} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\langle \zeta \delta \omega \rangle_f}{\langle \delta \omega \rangle_f} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (7.3)$$

Pour plus de légèreté, nous notons :

$$\eta_{jw} = \frac{\langle \eta_j \delta \omega \rangle_f}{\langle \delta \omega \rangle_f}, \quad \zeta_w = \frac{\langle \zeta \delta \omega \rangle_f}{\langle \delta \omega \rangle_f}. \quad (7.4)$$

L'expression (7.3) s'écrit alors :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \eta_{jw} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta_w \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (7.5)$$

Il reste à estimer η_{jw} et ζ_w dans les cas qui nous intéressent pour aboutir à un modèle simple de température de paroi. Étant donné la forme du problème de fermeture (4.15) à (4.18), les fonctions η_j et ζ ne peuvent être déterminées qu'à une constante près. Par conséquent, η_{jw} et ζ_w seront toujours calculés à une constante près. Pour remédier à ce problème, il suffit d'utiliser la relation d'idempotence du filtre spatial (4.20) :

$$\langle \delta \bar{T}_f \rangle_f = \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = 0. \quad (7.6)$$

En soustrayant (7.6) à (7.5), nous obtenons la formulation générale suivante pour la température de paroi :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_j \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \Delta\zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (7.7)$$

où $\Delta\eta_j = \eta_{jw} - \langle \eta_j \rangle_f$ et $\Delta\zeta = \zeta_w - \langle \zeta \rangle_f$. On notera, sous forme adimensionnée :

$$\Delta\eta_j^* = \frac{\Delta\eta_j}{D_h}, \quad (7.8)$$

$$\Delta\zeta^* = \frac{\alpha_f \Delta\zeta}{D_h^2}. \quad (7.9)$$

Pour compléter le modèle de température de paroi, il reste donc à déterminer $\Delta\eta_j^*$ et $\Delta\zeta^*$.

7.1 Détermination des paramètres $\Delta\eta_j^*$ et $\Delta\zeta^*$ du modèle pour des écoulements en canaux

Dans le cas d'écoulements parallèles dans des conduites d'axe z , la formulation (7.7) se simplifie en :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta\zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (7.10)$$

7.1.1 Écoulements laminaires

Canal plan

Les fonctions η_z et ζ peuvent, dans le cas d'un écoulement laminaire en canal plan, être déterminées analytiquement (voir chapitre 3) :

$$\eta_z(y^*) = D_h \times \left[Pe \left(\frac{y^{*2}}{4} - 2y^{*4} \right) + C_\eta \right], \quad (7.11)$$

$$\zeta(y^*) = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \times \left[\frac{y^{*2}}{2} + C_\zeta \right], \quad (7.12)$$

où $y^* = y/D_h$ et où C_η et C_ζ sont des constantes. Cela conduit à :

$$\eta_{zw}(y^*) = D_h \times \left(\frac{Pe}{128} + C_\eta \right), \quad (7.13)$$

$$\zeta_w(y^*) = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \times \left(\frac{1}{32} + C_\zeta \right), \quad (7.14)$$

$$\langle \eta_z \rangle_f(y^*) = D_h \times \left(\frac{7Pe}{1920} + C_\eta \right), \quad (7.15)$$

$$\langle \zeta \rangle_f(y^*) = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \times \left(\frac{1}{96} + C_\zeta \right), \quad (7.16)$$

et donc :

$$\Delta\eta_z^* = \frac{Pe}{240}, \quad (7.17)$$

$$\Delta\zeta^* = \frac{1}{48}. \quad (7.18)$$

Tube circulaire

Pour un écoulement laminaire en tube circulaire, les fonctions de dispersion η_z et ζ valent :

$$\eta_z^*(r^*) = Pe \left(\frac{r^{*2}}{4} - \frac{r^{*4}}{2} \right) + C_\eta, \quad (7.19)$$

$$\zeta^*(r^*) = \frac{r^{*2}}{4} + C_\zeta, \quad (7.20)$$

où $r^* = r/D_h$ et où C_η et C_ζ sont des constantes. Par conséquent :

$$\eta_{zw}(y^*) = D_h \times \left(\frac{Pe}{32} + C_\eta \right), \quad (7.21)$$

$$\zeta_w(y^*) = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \times \left(\frac{1}{16} + C_\zeta \right), \quad (7.22)$$

$$\langle \eta_z \rangle_f(y^*) = D_h \times \left(\frac{Pe}{48} + C_\eta \right), \quad (7.23)$$

$$\langle \zeta \rangle_f(y^*) = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \times \left(\frac{1}{32} + C_\zeta \right). \quad (7.24)$$

Finalement :

$$\Delta\eta_z^* = \frac{Pe}{96}, \quad (7.25)$$

$$\Delta\zeta^* = \frac{1}{32}. \quad (7.26)$$

Le tableau 7.1 synthétise les résultats obtenus en régime laminaire.

	Canal plan	Tube circulaire
$\Delta\eta_z^*$	$Pe/240$	$Pe/96$
$\Delta\zeta^*$	$1/48$	$1/32$

TAB. 7.1 – Coefficients $\Delta\eta_z^*$ et $\Delta\zeta^*$ en régime laminaire.

Il est intéressant de noter que la relation de fermeture (7.10) utilisée avec les coefficients présentés dans le tableau 7.1 permet, lorsque le flux est uniforme, de retrouver avec exactitude l'écart de température obtenu

en calculant analytiquement le profil de température. En effet, cela valide la pertinence de l'hypothèse (7.10) et montre que le modèle est en accord avec les modèles d'échange thermique classiques lorsque ceux-ci sont valables, *i.e.* pour des écoulements uniformément chauffés ne présentant pas de variations brusques de température.

7.1.2 Écoulements turbulents

Il n'est pas possible de trouver une expression analytique pour $\Delta\eta_z^*$ et $\Delta\zeta^*$. Cependant nous disposons de profils de référence de η_z et ζ pour une large gamme de nombres de Reynolds et plusieurs nombres de Prandtl : **ce sont les résultats qui nous ont servi à calculer les coefficients de dispersion** (voir chap 4). Ces profils permettent d'obtenir une base de référence à partir de laquelle nous allons construire un modèle pour $\Delta\eta_z^*$ et $\Delta\zeta^*$.

Modèle de $\Delta\eta_z^*$

Empiriquement, nous remarquons que l'égalité suivante est vérifiée pour tous les nombres de Prandtl et de Reynolds étudiés :

$$\Delta\eta_z^* = \mathcal{D}_z^{A*}. \quad (7.27)$$

Ce résultat est intéressant puisque nous disposons déjà d'un modèle pour le coefficient de dispersion active adimensionné (voir paragraphe 5.4 à la page 73). La figure 7.1 permet de confirmer ce résultat. Par la suite, $\Delta\eta_z^*$ sera donc pris égal à \mathcal{D}_z^{A*} , et le même modèle sera utilisé pour décrire ces deux coefficients.

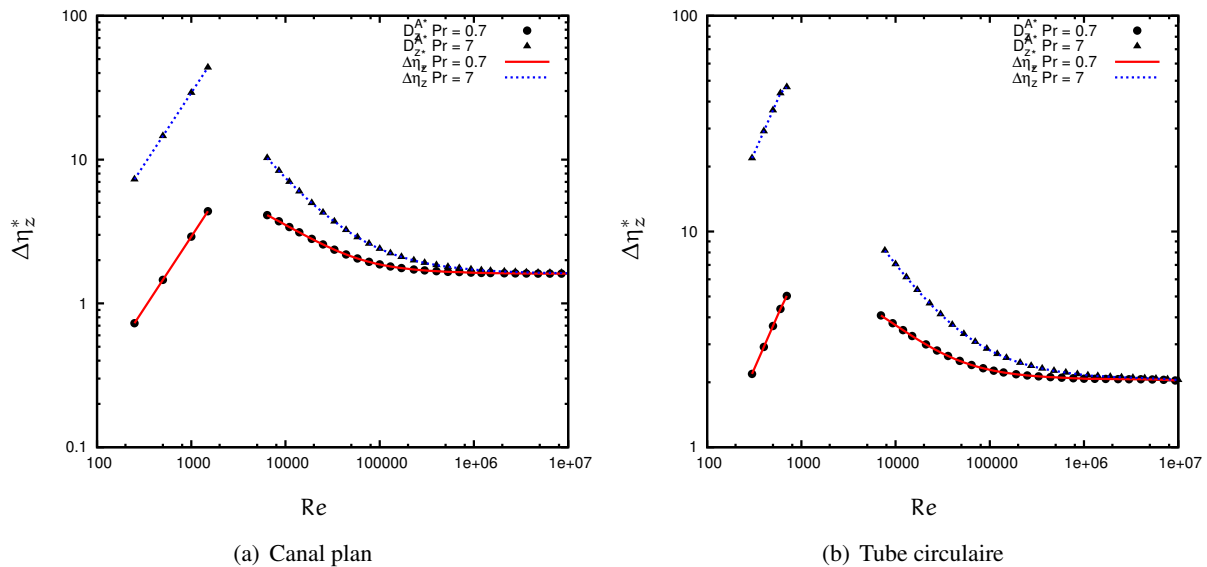


FIG. 7.1 – Écoulements en canaux en régimes laminaire et turbulent : évolution de $\Delta\eta_z^*$ en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl. Comparaison avec le coefficient de dispersion active adimensionné.

Modèle de $\Delta\zeta^*$

Pour modéliser $\Delta\zeta^*$, nous repartons de la relation (7.10) :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta\zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}.$$

Afin d'être cohérents avec les modèles de température de paroi existants, notre modèle doit dégénérer, dans le cas d'un écoulement établi en présence de flux thermique uniforme en paroi, vers :

$$T_w = T_{\text{BULK}} + \frac{\bar{\Phi}}{h_r}, \quad (7.28)$$

où h_r est le coefficient d'échange thermique restitué par notre modèle local de turbulence (ici Chien). Remarquons que cette relation est aussi valable en régime laminaire, avec un h adapté¹. Cela implique que :

$$T_{\text{BULK}} + \frac{\bar{\Phi}}{h_r} = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta\zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (7.29)$$

De plus, si le flux thermique en paroi est uniforme et si l'écoulement est établi :

$$\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} = \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{\langle \bar{u}_z \rangle_f (\rho C_p)_f}. \quad (7.30)$$

Par conséquent :

$$T_{\text{BULK}} + \frac{\bar{\Phi}}{h_r} = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \left(\frac{\Delta\eta_z}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} + \Delta\zeta \right) \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (7.31)$$

D'où une relation entre $\Delta\eta_z$ et $\Delta\zeta$:

$$\frac{\Delta\eta_z}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} + \Delta\zeta = \frac{(\rho C_p)_f}{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f} \times \left(T_{\text{BULK}} - \langle \bar{T}_f \rangle_f + \frac{\bar{\Phi}}{h_r} \right), \quad (7.32)$$

soit, sous forme adimensionnée :

$$\frac{\Delta\eta_z^*}{Pe} + \Delta\zeta^* = \frac{1}{\langle \bar{\Phi}^* \delta \omega^* \rangle_f} \times \left(T_{\text{BULK}}^* - \langle \bar{T}_f \rangle_f^* + \frac{\bar{\Phi}^*}{Nu_r} \right). \quad (7.33)$$

Dans la relation (7.32), on voit apparaître le terme $T_{\text{BULK}} - \langle \bar{T}_f \rangle_f$ qui peut être relié à la dispersion thermique :

$$T_{\text{BULK}} - \langle \bar{T}_f \rangle_f = \langle \bar{u}_z \rangle_f^{-1} (\langle \bar{u}_z \bar{T}_f \rangle_f - \langle \bar{u}_z \rangle_f \langle \bar{T}_f \rangle_f) \quad (7.34)$$

$$= \langle \bar{u}_z \rangle_f^{-1} (\langle \delta \bar{u}_z \delta \bar{T}_f \rangle_f). \quad (7.35)$$

En utilisant le modèle de dispersion thermique proposé dans le chapitre 4, cela donne :

$$T_{\text{BULK}} - \langle \bar{T}_f \rangle_f = -\langle \bar{u}_z \rangle_f^{-1} \mathcal{D}_{zz}^P \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} - \langle \bar{u}_z \rangle_f^{-1} \mathcal{D}_z^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (7.36)$$

¹Nous ne l'avons pas utilisée auparavant puisque nous disposions de solutions analytiques pour les profils de ζ , ce qui rendait inutile cette étape de modélisation supplémentaire.

soit, sous forme adimensionnée :

$$T_{\text{BULK}}^* - \langle \bar{T}_f \rangle_f^* = -\frac{\mathcal{D}_{zz}^{\text{P}*}}{\text{Pe}} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f^*}{\partial z^*} - \frac{\mathcal{D}_z^{\text{A}*}}{\text{Pe}} \langle \bar{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f. \quad (7.37)$$

Par conséquent, en utilisant la relation (7.37) dans (7.33), nous obtenons :

$$\frac{\Delta \eta_z^*}{\text{Pe}} + \Delta \zeta^* = \frac{1}{\langle \bar{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f} \times \left(-\frac{\mathcal{D}_{zz}^{\text{P}*}}{\text{Pe}} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f^*}{\partial z^*} - \frac{\mathcal{D}_z^{\text{A}*}}{\text{Pe}} \langle \bar{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f + \frac{\bar{\Phi}^*}{\text{Nu}_r} \right) \quad (7.38)$$

$$= \frac{1}{\langle \bar{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f} \times \left(-\frac{\mathcal{D}_{zz}^{\text{P}*}}{\text{Pe}} \frac{\langle \bar{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f}{\text{Pe}} - \frac{\mathcal{D}_z^{\text{A}*}}{\text{Pe}} \langle \bar{\Phi}^* \delta_{\omega}^* \rangle_f + \frac{\bar{\Phi}^*}{\text{Nu}_r} \right) \quad (7.39)$$

$$= -\frac{\mathcal{D}_{zz}^{\text{P}*}}{\text{Pe}^2} - \frac{\mathcal{D}_z^{\text{A}*}}{\text{Pe}} + \frac{1}{4\text{Nu}_r}. \quad (7.40)$$

Cela donne finalement :

$$\Delta \zeta^* = \frac{1}{4\text{Nu}_r} - \frac{\mathcal{D}_{zz}^{\text{P}*}}{\text{Pe}^2} - 2 \times \frac{\mathcal{D}_z^{\text{A}*}}{\text{Pe}}. \quad (7.41)$$

La figure 7.2 permet de comparer ce modèle aux résultats de référence. Ce modèle est globalement satisfaisant, bien qu'un peu moins bon pour de petits nombres de Prandtl ($\text{Pr} < 0.1$). Le même problème est observé pour le modèle de Dittus-Boelter.

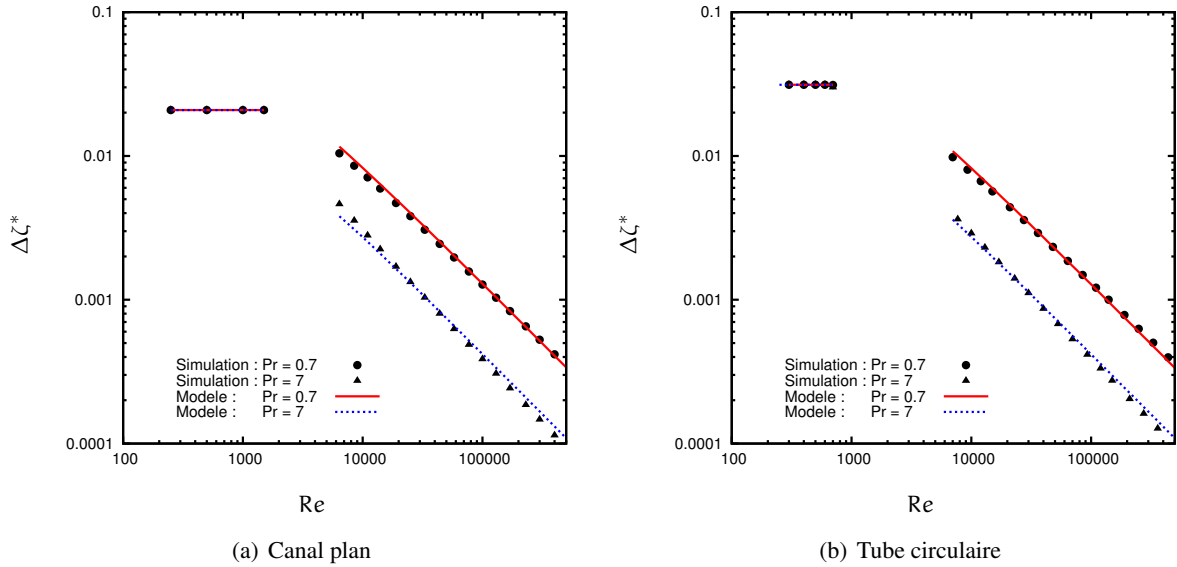


FIG. 7.2 – Écoulements en canaux en régimes laminaire et turbulent : évolution de $\Delta \zeta^*$ en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Prandtl. Comparaison des résultats de simulation avec le modèle proposé.

Le modèle algébrique de température de paroi basé sur l'analyse du problème de dispersion s'écrit finalement :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta\zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (7.42)$$

$$\Delta\eta = \mathcal{D}_z^A, \quad (7.43)$$

$$\Delta\zeta = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \left(\frac{1}{4Nu_r} - \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{Pe^2} - 2 \times \frac{\mathcal{D}_z^{A*}}{Pe} \right). \quad (7.44)$$

7.2 Évaluation du modèle algébrique de température de paroi

7.2.1 Écoulements adiabatiques - Dispersion de Taylor

Dans un premier temps, le modèle de température de paroi est validé pour des écoulements adiabatiques. Pour avoir un écart entre la température de paroi et la température moyennée en l'absence de flux thermique, une possibilité est d'étudier l'évolution d'un échelon de température au cours du temps. Le fluide s'écoule suivant la direction z dans une conduite d'axe z et de longueur $L = 60 D_h$. À l'instant initial, la température dans la conduite est uniformément égale à T_0 . La température en entrée de la conduite est uniforme et vaut $T_e > T_0$. La figure 7.3 décrit la configuration de l'écoulement. Les nombres de Reynolds et de Prandtl considérés sont donnés dans le tableau 7.2.

Nom	Géométrie	Re	Pr
CP ₁	Canal plan	175	1.48
CP ₂	Canal plan	1.5×10^4	0.74
Tu ₁	Tube circulaire	175	1.48
Tu ₂	Tube circulaire	1.5×10^4	0.74

TAB. 7.2 – Cas-tests de validation du modèle de température de paroi : écoulements adiabatiques en régime transitoire.

En l'absence de flux thermique en paroi le modèle de température de paroi défini par (7.10) se réduit à :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z}, \quad (7.45)$$

où $\Delta\eta_z^*$ est donné par (7.11) en régime laminaire et par (7.43) en régime turbulent. Pour un écoulement adiabatique les modèles classiques prédisent :

$$T_w = T_{BULK}. \quad (7.46)$$

Les figures 7.4 à 7.7 permettent de comparer le modèle proposé ici à des résultats de référence issus de calculs CFD, ainsi qu'au modèle classique (7.46). Au début du calcul, le front de température est très raide.

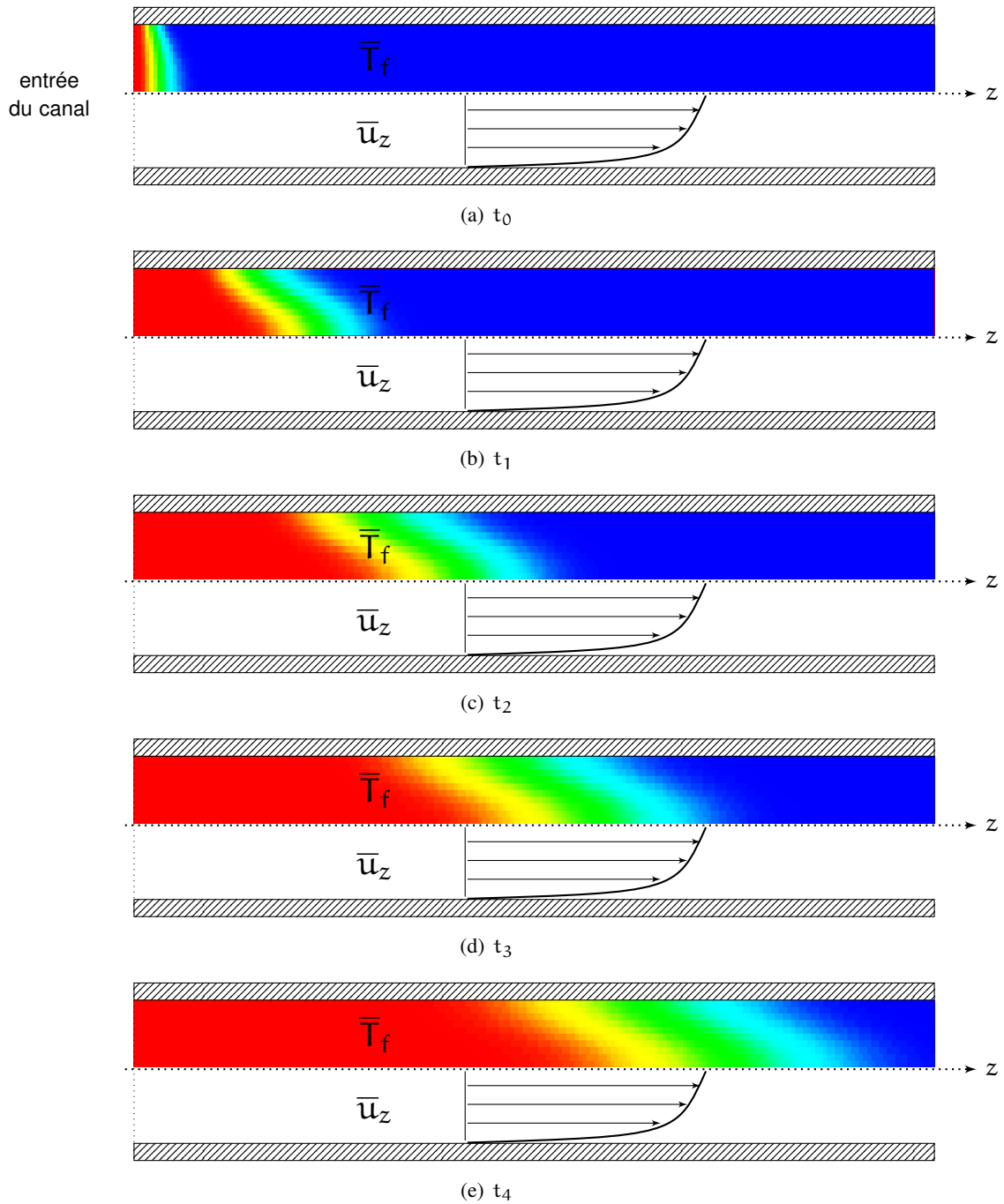


FIG. 7.3 – Configuration des cas-tests de validation du modèle de température de paroi : évolution d'un échelon de température.

L'hypothèse de séparation des échelles spatiales et temporelles n'est donc pas respectée car l'échelle de longueur caractéristique des variations des grandeurs filtrées, ici la température, *n'est pas* grande devant la taille du filtre, ici le diamètre hydraulique. Cela explique donc pourquoi notre modèle peine à restituer la température de paroi dans ce domaine et présente un undershoot. L'écart entre modèle macroscopique et calcul de référence est d'autant plus important que le nombre de Prandtl est élevé. En effet, plus Pr augmente, plus les fronts de température sont raides. En revanche, dès que le saut de température moyenne a été amorti sous l'effet de la diffusion et de la dispersion passive, notre modèle donne de bons résultats. En particulier, il permet de rendre compte avec précision du fait que le front de température se propage plus vite au centre du canal qu'à la paroi.

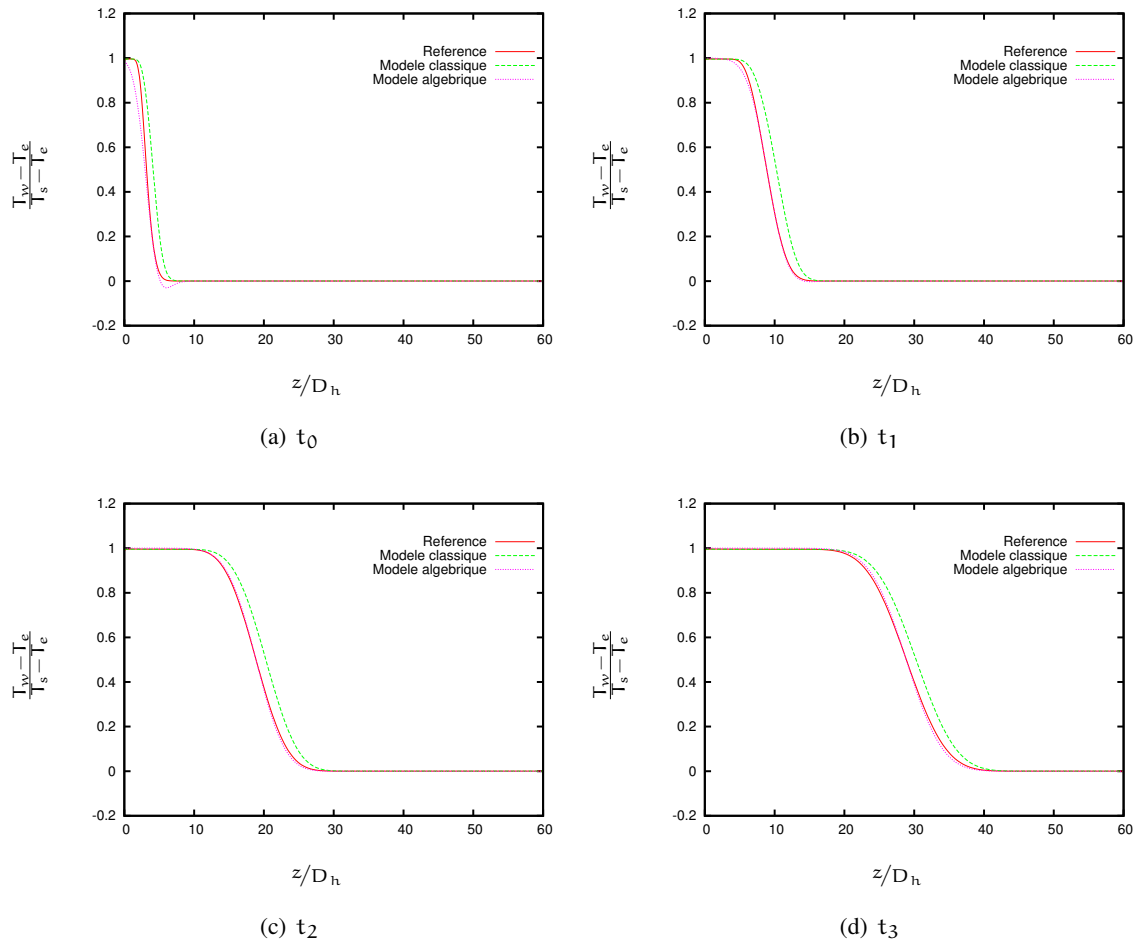


FIG. 7.4 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique laminaire en **canal plan**. Cas CP_1 , $Re = 175$, $Pr = 1.48$. Comparaison du modèle algébrique au modèle classique et aux résultats de référence.

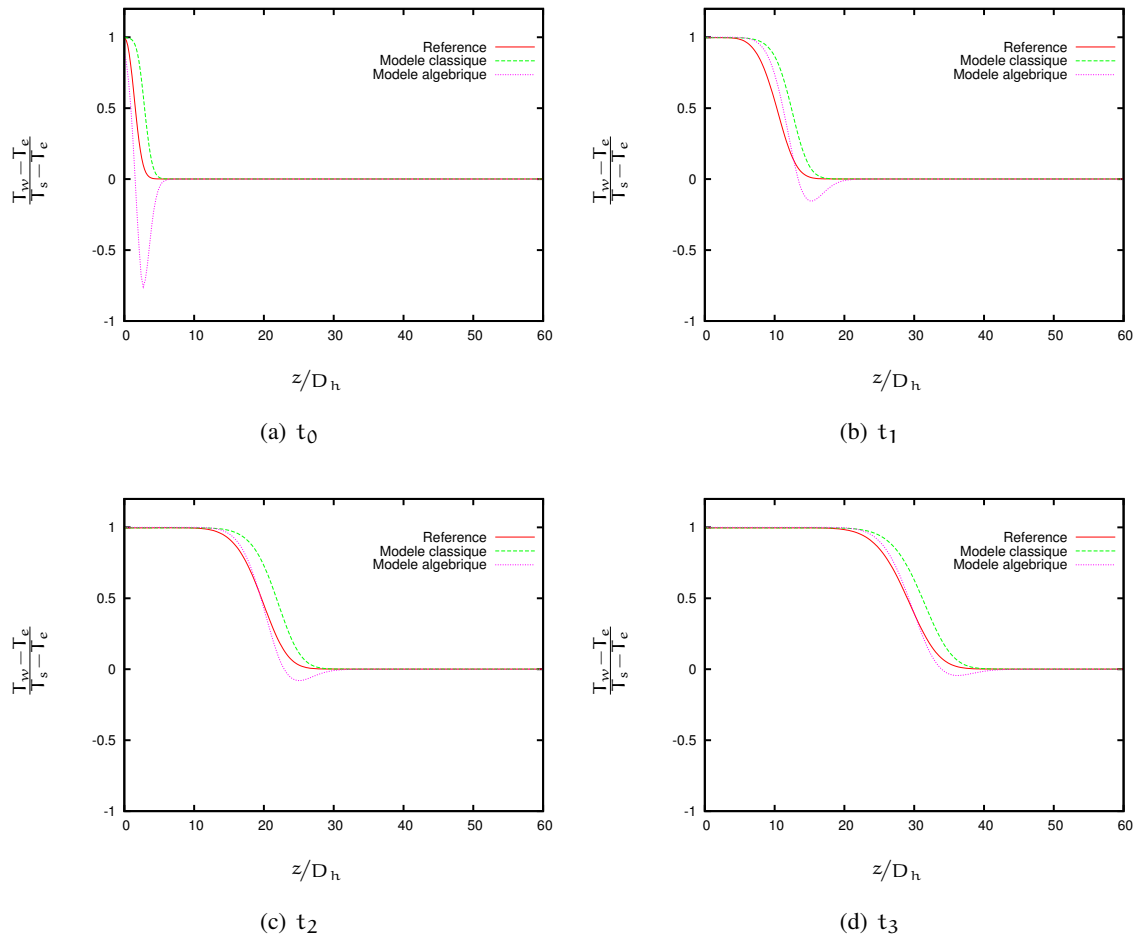


FIG. 7.5 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique turbulent en **canal plan**. Cas CP₂, Re = 15000, Pr = 0.74. Comparaison du modèle algébrique au modèle classique et aux résultats de référence.

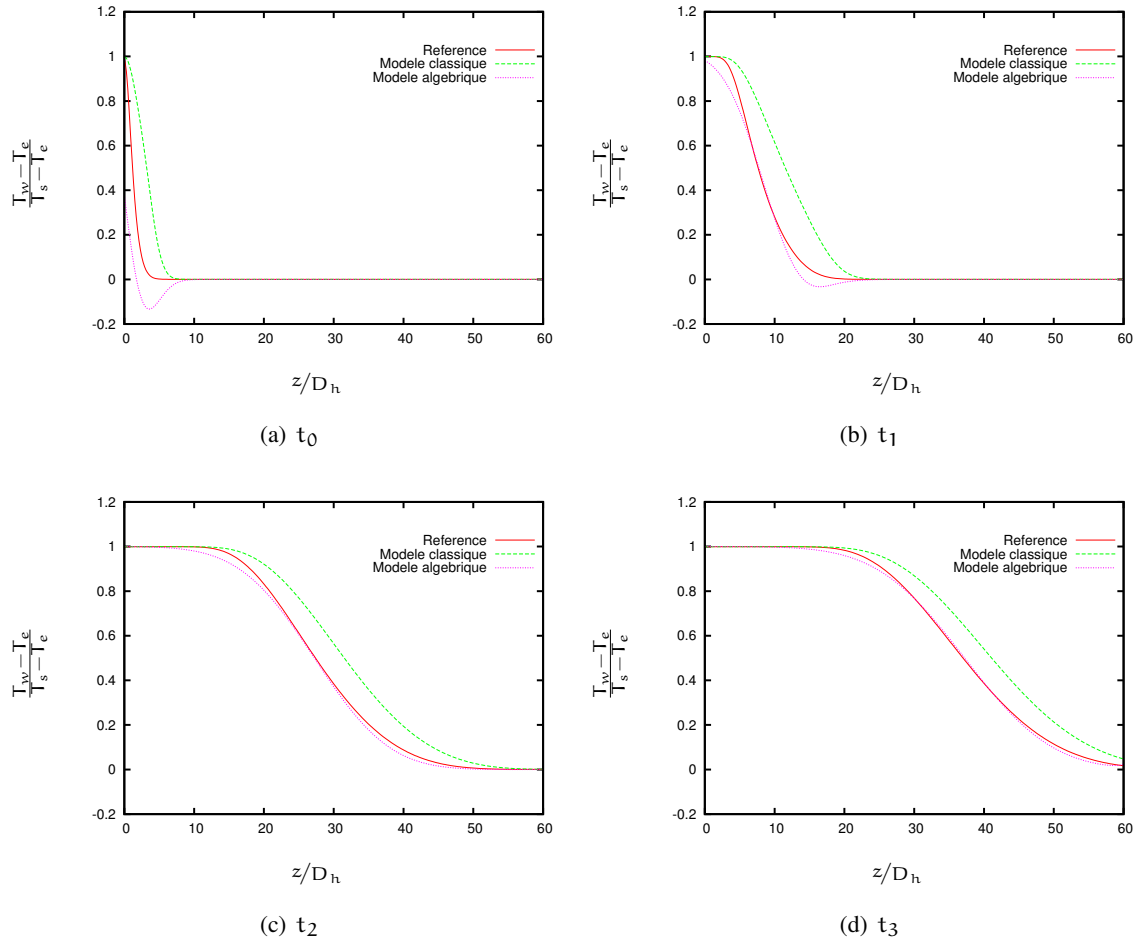


FIG. 7.6 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique laminaire en **tube circulaire**. Cas Tu_1 , $Re = 175$, $Pr = 1.48$. Comparaison du modèle algébrique au modèle classique et aux résultats de référence.

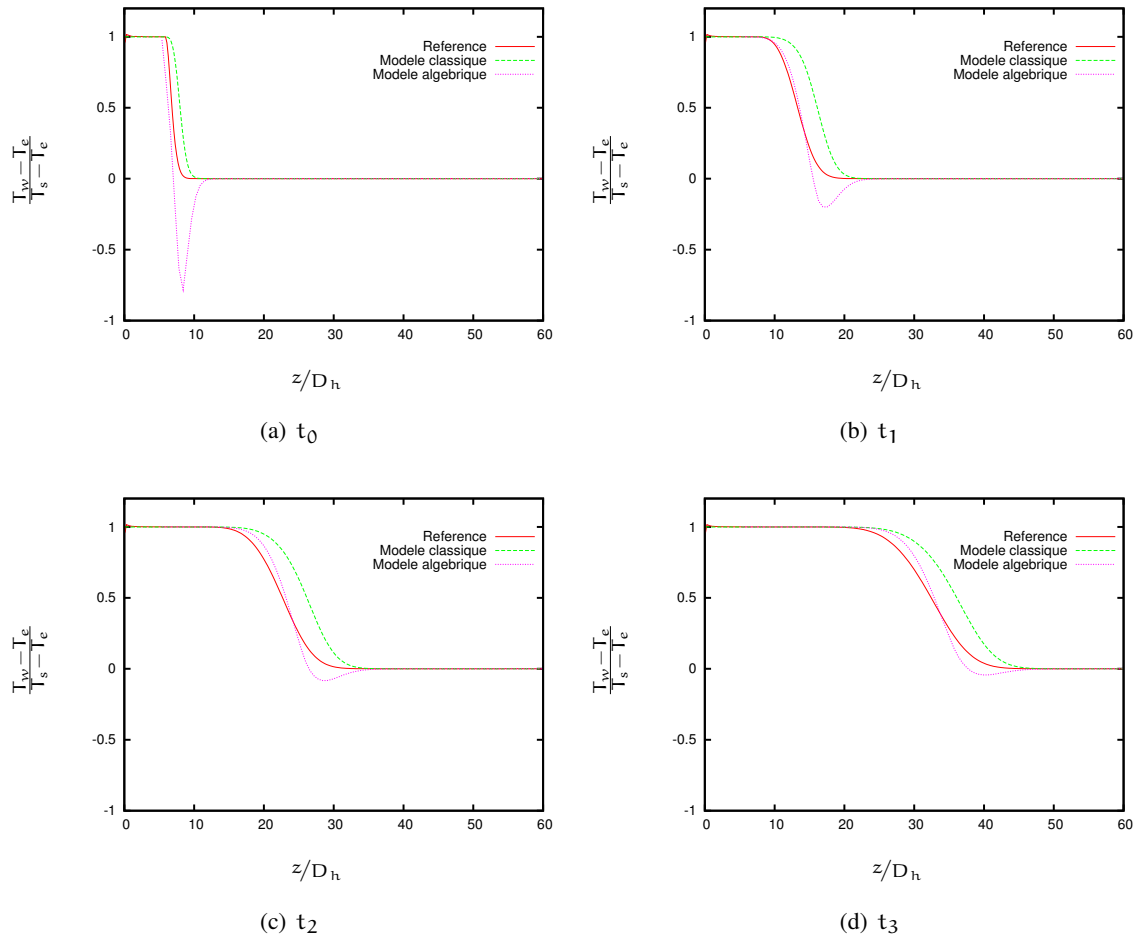


FIG. 7.7 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique turbulent en **tube circulaire**. Cas Tu_2 , $Re = 15000$, $Pr = 0.74$. Comparaison du modèle algébrique au modèle classique et aux résultats de référence.

7.2.2 Écoulements stationnaires et flux de chaleur non uniformes

Dans cette section, nous considérons des écoulements stationnaires en présence de flux thermiques non-uniformes en paroi. La figure 7.8 décrit la configuration de l'écoulement. Le fluide s'écoule suivant la direction z dans une conduite d'axe z et de longueur $L = 60 D_h$. La température en entrée du canal, *i.e.* en $z = 0$, est uniforme sur la section et vaut T_0 .

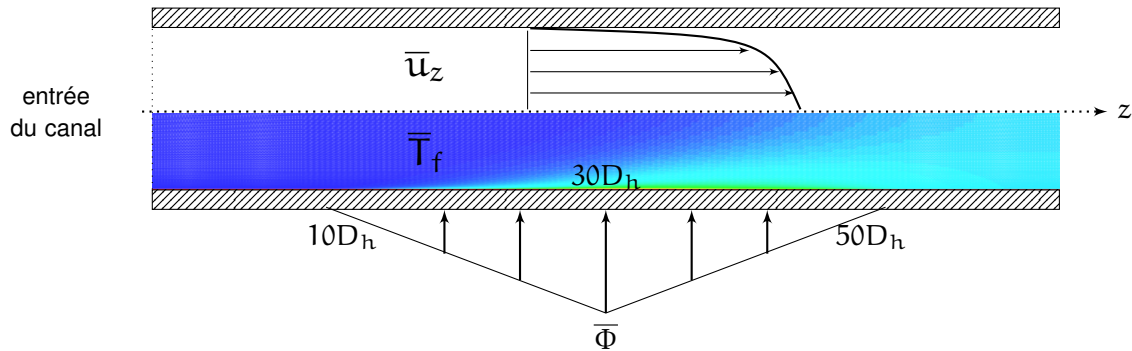


FIG. 7.8 – Configuration des cas-tests de validation du modèle de température de paroi pour des écoulements stationnaires en présence de flux thermiques non-uniformes.

Les flux thermiques en paroi ne dépendent que de z , sont affines par morceaux et sont choisis de façon à ce que la variation de masse volumique par dilatabilité reste faible. Ils sont de la forme :

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 10D_h \text{ ou } z > 50D_h, \\ \Phi_{\max} \frac{z - 10D_h}{20D_h} & \text{si } 10D_h < z < 30D_h, \\ \Phi_{\max} \frac{50D_h - z}{20D_h} & \text{si } 30D_h < z < 50D_h, \end{cases} \quad (7.47)$$

où Φ_{\max} est choisi de façon à obtenir un écart de température entre l'entrée et la sortie du canal donné, ici $T_s - T_e = 5$ pour les cas laminaires et $T_s - T_e = 10$ pour les cas turbulents. Les cas-tests utilisés comme base de validation pour les écoulements permanents en présence de flux thermiques hétérogènes sont récapitulés dans le tableau 6.2.

Nom	Géométrie	Re	Pr
CP ₃	Canal plan	175	1.48
CP ₄	Canal plan	1.5 × 10 ⁴	0.74
Tu ₃	Tube circulaire	175	1.48
Tu ₄	Tube circulaire	1.5 × 10 ⁴	0.74

TAB. 7.3 – Cas-tests de validation du modèle de température de paroi : écoulements stationnaires, flux de chaleur non-uniformes en paroi.

La figure 7.9 montre que les résultats donnés par notre modèle est sensiblement meilleur que celui à flux uniforme. Cependant, il ne permet pas de restituer complètement l'intégralité de l'effet de décalage du profil de T_w vers l'aval.

7.2.3 Analyse des résultats

Les différents tests effectués montrent que le modèle algébrique donne une représentation de l'évolution de la température de paroi bien meilleure que celle fournis par les modèles d'échange thermique classiques pour des écoulements en présence de flux thermiques non-uniformes ou lorsque les gradients de température sont raides. Néanmoins, le modèle algébrique n'est pas capable de reproduire l'intégralité de l'« effet retard » observé en présence de flux thermiques non-uniformes et **les résultats se dégradent fortement dans les zones où l'hypothèse de séparation des échelles macroscopique et de sous-filtre n'est pas respectée.**

Une possibilité pour relâcher la contrainte de séparation des échelles est d'introduire dans le modèle des « limiteurs » qui prendront le relai lorsque cette hypothèse n'est plus valable. La longueur caractéristique du filtre spatial est le diamètre hydraulique D_h . La longueur caractéristique des variations de température moyennée, notée L , est donnée par :

$$\frac{1}{\Delta \bar{T}_f} \|\nabla \langle \bar{T}_f \rangle_f\| = \frac{1}{L}, \quad (7.48)$$

où $\Delta \bar{T}_f$ est une grandeur représentative des variations de température. Avec ces notations, l'hypothèse de séparation des échelles s'écrit :

$$\frac{D_h}{L} \ll 1. \quad (7.49)$$

Par conséquent, en utilisant (7.48), l'hypothèse (7.49) s'exprime en fonction des grandeurs moyennes comme :

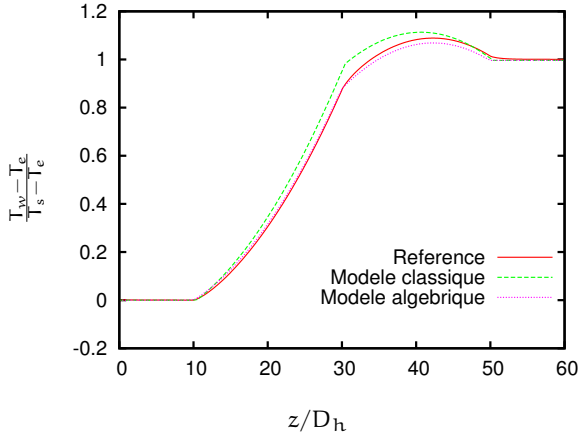
$$\frac{D_h}{\Delta \bar{T}_f} \|\nabla \langle \bar{T}_f \rangle_f\| \ll 1. \quad (7.50)$$

On peut alors introduire un paramètre β tel que :

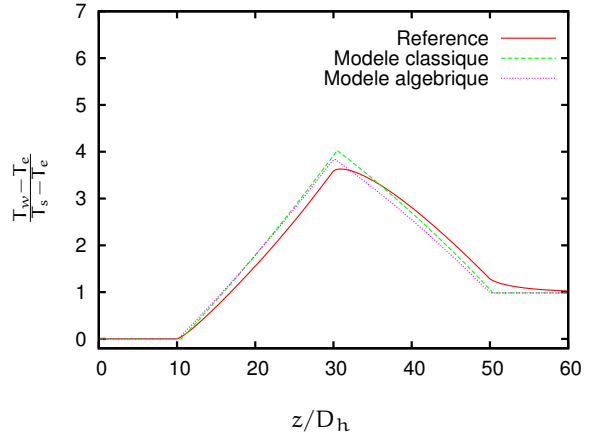
$$\frac{D_h}{\Delta \bar{T}_f} \|\nabla \langle \bar{T}_f \rangle_f\| < \beta \ll 1. \quad (7.51)$$

Pour des écoulements parallèles en canaux, la relation (7.51) se simplifie en :

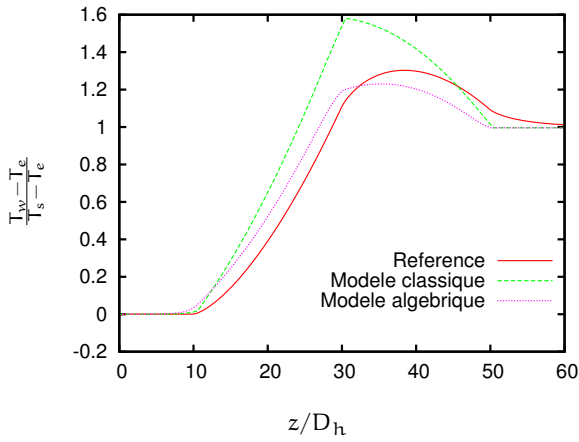
$$\frac{D_h}{\Delta \bar{T}_f} \left| \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right| < \beta \ll 1. \quad (7.52)$$



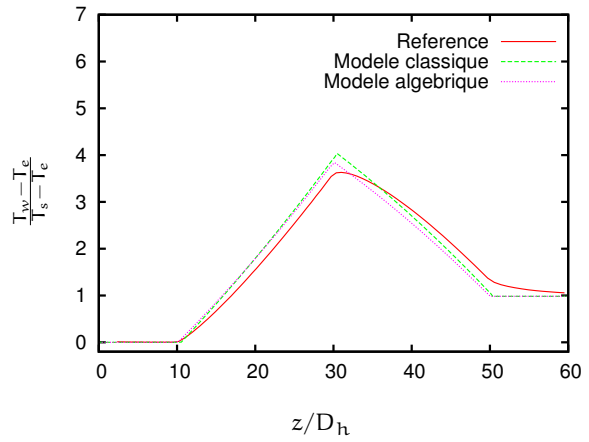
(a) CP₃ : canal plan, Re = 175, Pr = 1.48.



(b) CP₄ : canal plan, Re = 15000, Pr = 0.74.



(c) Tu₃ : tube circulaire, Re = 175, Pr = 1.48.



(d) Tu₄ : tube circulaire, Re = 15000, Pr = 0.74.

FIG. 7.9 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement en canal plan en présence de flux thermique hétérogène. Comparaison du modèle algébrique au modèle classique et aux résultats de référence.

Ainsi, le modèle de température de paroi (7.10) ne convient que dans les zones où le gradient de température moyennée vérifie la condition :

$$\left| \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right| < \beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h}, \text{ avec } \beta < 1. \quad (7.53)$$

Nous proposons donc de remplacer la relation (7.10) par :

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta \eta_z \mathcal{G}_{\nabla T} + \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (7.54)$$

où $\mathcal{G}_{\nabla T}$ vérifie :

$$\mathcal{G}_{\nabla T} = \begin{cases} \beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h} & \text{si } \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \geq \beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h}, \\ \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} & \text{si } \left| \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right| < \beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h}, \\ -\beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h} & \text{si } \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \leq -\beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h}. \end{cases} \quad (7.55)$$

L'expression suivante satisfait cette condition :

$$\mathcal{G}_{\nabla T} = \text{sgn} \left(\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right) \times \min \left(\left| \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right|, \beta \frac{\Delta \bar{T}_f}{D_h} \right). \quad (7.56)$$

Il reste alors à fixer β de façon à éviter que le modèle ne se dégrade lorsque le gradient de température devient trop fort, sans pour autant affecter les résultats dans le domaine de validité de l'hypothèse de séparation des échelles. Cependant, même avec des limiteurs de pente, le modèle algébrique de température de paroi n'est pas capable de capturer $T_w \neq \langle \bar{T}_f \rangle_f$ en aval de la zone de chauffe. Pour cela, il faut introduire des échelles de variation supplémentaires. En effet, la température de paroi est principalement contrôlée par les conditions aux limites et réagit immédiatement aux variations du flux thermique en paroi. Par conséquent, les échelles de temps et de longueur associées à la température moyennée peuvent être très différentes de celles associées à la température de paroi lorsque les gradients de température moyenne ou de flux thermique sont importants. Nous choisissons donc de complexifier le modèle algébrique en introduisant une équation de transport macroscopique pour évaluer la température de paroi.

UN MODÈLE MACROSCOPIQUE DE TEMPÉRATURE DE PAROI BASÉ SUR UNE ÉQUATION DE TRANSPORT

8.1 Formulation générale

La démarche suivie dans ce paragraphe consiste à dériver une équation de transport pour $\Delta T = T_w - \langle \bar{T}_f \rangle_f$ en se basant sur un modèle à deux couches et donc à deux températures. Considérons un écoulement parallèle dans une conduite de section constante (voir Fig. 8.1). On distingue deux couches : une couche de proche paroi, de volume Ω_2 , et une couche centrale de volume Ω_1 . À une couche i , on associe une température T_i et une vitesse u_i . Ces quantités sont représentatives, au sens moyen, de la couche d'écoulement considérée. On suppose que le flux de chaleur est constant sur une section.

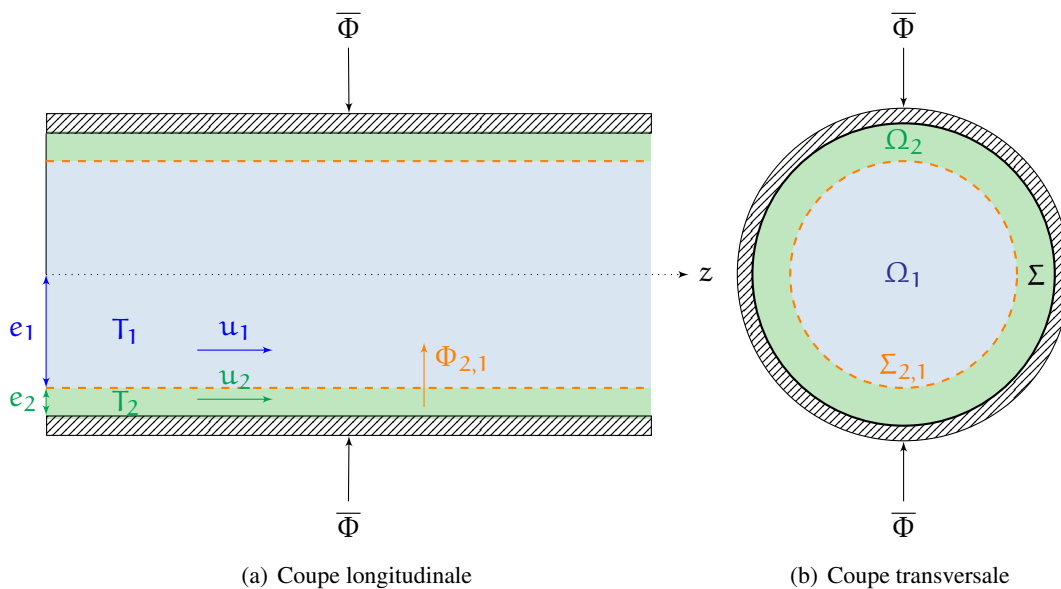


FIG. 8.1 – Description schématique du modèle bi-couche : cas d'un écoulement dans un tube circulaire.

Les équations de transport de T_1 et T_2 sont déterminées en faisant un bilan d'énergie dans chaque zone :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\Sigma_{2,1} \Phi_{2,1}}{\Omega_1 (\rho C_p)_f}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{\Sigma \bar{\Phi}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} - \frac{\Sigma_{2,1} \Phi_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f}, \quad (8.2)$$

avec :

- pour un écoulement en canal plan :

$$\frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_1} = \frac{1}{e_1}, \quad \frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_2} = \frac{1}{e_2}, \quad \frac{\Sigma}{\Omega_2} = \frac{1}{e_2}, \quad (8.3)$$

- pour un écoulement en tube circulaire :

$$\frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_1} = \frac{1}{e_1}, \quad \frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_2} = \frac{2e_1}{R^2 - e_1^2}, \quad \frac{\Sigma}{\Omega_2} = \frac{2R}{R^2 - e_1^2}, \quad (8.4)$$

où R désigne le rayon du tube.

L'équation suivante peut alors être écrite pour $T_2 - T_1$:

$$\frac{\partial T_2 - T_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial T_2 - T_1}{\partial z} = (u_1 - u_2) \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\Sigma \bar{\Phi}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} - \frac{\Sigma_{2,1} \Phi_{2,1}}{(\rho C_p)_f} \times \frac{\Omega}{\Omega_1 \Omega_2}. \quad (8.5)$$

D'autre part, les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2, \quad (8.6)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f = \frac{u_1 \Omega_1 + u_2 \Omega_2}{\Omega}, \quad (8.7)$$

$$\langle \bar{T}_f \rangle_f = \frac{T_1 \Omega_1 + T_2 \Omega_2}{\Omega}. \quad (8.8)$$

Nous posons par ailleurs :

$$\Phi_{2,1} = h_{2,1} (T_2 - T_1), \quad (8.9)$$

où $h_{2,1}$ est un coefficient d'échange entre couches de l'écoulement. Nous disposons d'une équation de transport sur $T_2 - T_1$ et cherchons à en déduire une équation de transport pour :

$$\Delta T' = T_2 - \langle \bar{T}_f \rangle_f. \quad (8.10)$$

L'expression (8.8) permet d'écrire une relation liant $T_2 - T_1$ à $\Delta T'$:

$$T_2 - T_1 = \frac{\Omega}{\Omega_1} \Delta T', \quad (8.11)$$

ainsi que :

$$T_1 = \langle \bar{T}_f \rangle_f - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \Delta T'. \quad (8.12)$$

En utilisant les relations (8.5) à (8.9) et (8.11), nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial \Delta T'}{\partial t} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial \Delta T'}{\partial z} &= \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Sigma \bar{\Phi}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \\ &\quad - \frac{\Sigma_{2,1} h_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \times \Delta T', \end{aligned} \quad (8.13)$$

Il est possible d'exprimer $\Delta T'$ en fonction de ΔT :

$$\Delta T' = \Delta T - (T_w - T_2). \quad (8.14)$$

Puis, avec (8.13), l'équation de ΔT s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} &= \frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial (T_w - T_2)}{\partial t} \\ &+ \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial (T_w - T_2)}{\partial z} \\ &+ \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Omega \langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \\ &- \frac{\Sigma_{2,1} h_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \times \Delta T - \frac{\Sigma_{2,1} h_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \times (T_w - T_2). \end{aligned} \quad (8.15)$$

On suppose que le profil de température à proximité de la paroi s'établit très rapidement par rapport au reste du canal. Autrement dit, à l'échelle de ΔT , la quantité $(T_w - T_2)$ est supposée constante, ce qui permet d'éliminer les termes de transport correspondant dans l'équation (8.15). De plus, nous postulons une relation d'échange thermique classique en proche paroi :

$$T_w - T_2 = \frac{\bar{\Phi}}{h_w}, \quad (8.16)$$

où h_w est un coefficient d'échange thermique constant. L'équation (8.15) se simplifie alors en :

$$\begin{aligned} \Delta T = & - \frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \left[\frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right] \\ & + \frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} - \frac{1}{h_w} \right] \bar{\Phi}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Le modèle algébrique présenté dans le paragraphe précédent s'écrit :

$$\Delta T = T_w - \langle \bar{T}_f \rangle_f = \Delta \eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = \Delta \eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta \zeta \frac{\Sigma \bar{\Phi}}{\Omega (\rho C_p)_f}. \quad (8.18)$$

Pour des écoulements ne présentant pas de forts gradients de température ou de flux thermique, l'hypothèse de séparation des échelles est valide et le modèle algébrique peut être utilisé. De plus, les termes de transport dans l'équation (8.17) peuvent être négligés. Dans ce cas, les deux modèles doivent être cohérents, soit :

$$\frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} = \Delta \eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \quad (8.19)$$

$$\left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} - \frac{1}{h_w} \right] \bar{\Phi} = \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = \Delta \zeta \frac{\Sigma \bar{\Phi}}{\Omega (\rho C_p)_f}. \quad (8.20)$$

Par identification, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \times \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \times (u_1 - u_2) = \Delta \eta_z, \quad (8.21)$$

$$\left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} - \frac{1}{h_w} \right] = \Delta \zeta \frac{\Sigma}{\Omega (\rho C_p)_f} = \Delta \zeta \frac{\langle \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (8.22)$$

Pour estimer les coefficients associés aux termes de transport dans l'équation (8.17), les relations (8.21) et (8.22) sont utilisées et donnent :

$$\frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \times \frac{\Omega_1}{\Omega} = \left(\frac{\Omega}{\Omega_1} \right) \frac{\Delta \eta_z}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2}, \quad (8.23)$$

$$\frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \times \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{u_2 \Omega_1 + u_1 \Omega_2}{\Omega_1} = \left(\frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} \right) \Delta \eta_z. \quad (8.24)$$

L'équation (8.17) est alors réécrite :

$$\Delta \eta_z \left[\frac{1}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \left(\frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} \right) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right] = \Delta \eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} - \Delta T. \quad (8.25)$$

Il reste à évaluer Ω_2 (ou e_2), et u_2 pour que le modèle soit complet.

8.2 Détermination des paramètres du modèle

L'épaisseur de la zone de proche paroi peut être vue comme une longueur caractéristique associée à l'échange thermique. Nous posons l'hypothèse suivante :

$$e_2 \propto \frac{D_h}{Nu_r}. \quad (8.26)$$

Écoulements laminaires

En reprenant l'hypothèse (8.26), l'épaisseur de la zone de proche paroi s'écrit :

$$e_2 = \beta \frac{D_h}{Nu_r}. \quad (8.27)$$

Pour des écoulements laminaires établis en canaux, les profils de vitesse peuvent être déterminés analytiquement et nous pouvons en déduire :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} = \begin{cases} \frac{X}{1/4 - X} + \frac{6X - 8X^2}{1 - 6X + 8X^2} & \text{en canal plan,} \\ \frac{2X(1 - X)}{(1/2 - X)^2} & \text{en tube circulaire,} \end{cases} \quad (8.28)$$

où

$$X = \frac{e_2}{D_h} = \frac{\beta}{Nu_r}. \quad (8.29)$$

Une optimisation numérique du paramètre β fournit $\beta = 1/2$, soit :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} = \begin{cases} 1.1 & \text{en canal plan} \\ 1.6 & \text{en tube circulaire,} \end{cases} \quad (8.30)$$

Écoulements turbulents

Pour des écoulements établis en régime turbulent, le nombre de Nusselt peut être estimé par :

$$Nu = A Re^m Pr^n, \quad (8.31)$$

et le coefficient de frottement par :

$$f_p = a Re^{-b}. \quad (8.32)$$

On introduit l'unité de paroi $y^* = \nu_f / u_f$ et on note $e_2^+ = e_2 / y^*$. Les expressions (8.31) et (8.32) sont réinjectées dans (8.26) pour donner :

$$e_2^+ = \frac{u_\tau}{\nu_f} \times \frac{D_h}{A Re^m Pr^n} \quad (8.33)$$

$$= \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f \sqrt{f_p} D_h}{\nu_f \sqrt{8} A Re^m Pr^n} \quad (8.34)$$

$$e_2^+ = \frac{\sqrt{a}}{A \sqrt{8}} \frac{Re^{1-b/2-m}}{Pr^n}. \quad (8.35)$$

Pour des écoulements en canaux, $1 - b/2 - m \simeq 0$, et on peut écrire :

$$e_2^+ = \frac{C_\beta}{Pr^n}, \quad (8.36)$$

où $C_\beta \in [15; 18]$ et $n \in [1/3; 1/2]$.

Pour des écoulements turbulents parallèles en canaux, le profil de vitesse est linéaire dans la sous-couche visqueuse et logarithmique pour $y^+ > 30$. Nous utilisons le profil simplifié suivant :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \leq y_t^+, \\ \frac{1}{\kappa} \ln [1 + \kappa(y^+ - y_t^+)] + y_t^+ & \text{si } y^+ > y_t^+, \end{cases} \quad (8.37)$$

où $\kappa = 0.41$ et $y_t^+ = 5$. La vitesse moyenne dans la couche de proche paroi u_2 est alors donnée par :

$$u_2 = \frac{u_\tau}{e_2} \int_0^{e_2} u^+(y^+) dy^+. \quad (8.38)$$

Avec (8.37), cela conduit à

$$\frac{u_2}{u_\tau} = \frac{y_t^{+2}}{2e_2^+} + \mathcal{F}, \quad (8.39)$$

avec

$$\mathcal{F} = \begin{cases} 0 & \text{si } e_2^+ \leq y_t^+, \\ \frac{1}{e_2^+} \left[\left(\frac{1}{\kappa} + e_2^+ - y_t^+ \right) \ln(1 + \kappa(e_2^+ - y_t^+)) + (y_t^+ - 1)(e_2^+ - y_t^+) \right] & \text{si } e_2^+ > y_t^+, \end{cases} \quad (8.40)$$

Pour de tels écoulements, les hypothèses suivantes sont valables :

$$e_2 \ll D_h; \quad \Omega_2 \ll \Omega; \quad u_2 \ll \langle \bar{u}_z \rangle_f. \quad (8.41)$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{\mathbb{U}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \simeq \frac{\Omega_2}{\Omega} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f}, \quad (8.42)$$

où Ω_2 et u_2 sont calculés en utilisant les relations (8.36) et (8.39). Le paramètre C_β est ensuite optimisé pour que les évolutions du modèle soient au plus proche des évolutions de référence. Pour cela, nous nous appuyons sur les cas tests de référence présentés dans le tableau 8.1.

Nom	Géométrie	Re	Pr
CP_OPT ₁	Canal plan	10 ⁴	0.5
CP_OPT ₂	Canal plan	10 ⁴	2.5
CP_OPT ₃	Canal plan	10 ⁴	5
CP_OPT ₄	Canal plan	2 × 10 ⁴	0.5
CP_OPT ₅	Canal plan	2 × 10 ⁴	2.5
CP_OPT ₆	Canal plan	2 × 10 ⁴	5
Tu_OPT ₁	Tube circulaire	10 ⁴	0.5
Tu_OPT ₂	Tube circulaire	10 ⁴	2.5
Tu_OPT ₃	Tube circulaire	10 ⁴	5
Tu_OPT ₄	Tube circulaire	2 × 10 ⁴	0.5
Tu_OPT ₅	Tube circulaire	2 × 10 ⁴	2.5
Tu_OPT ₆	Tube circulaire	2 × 10 ⁴	5

TAB. 8.1 – Cas-tests utilisés pour optimiser le modèle de température de paroi : écoulements stationnaires, flux de chaleur non-uniformes en paroi.

Un critère doit être introduit afin d'évaluer l'écart entre l'évolution de référence et l'évolution modèle. Nous choisissons de minimiser une fonction d'erreur intégrée spatialement et moyennée sur l'ensemble des cas considérés :

$$\mathbb{E}(\beta) = \frac{1}{N_{SIM}} \sum_{i=1}^{N_{SIM}} \int_{\mathcal{D}} \left| \frac{T_w(z)}{T_w^{ref}(z)} - 1 \right| dz, \quad (8.43)$$

où \mathcal{D} est le domaine de calcul et N_{SIM} le nombre de cas-tests considérés. Pour trois nombres de Prandtl différents, une optimisation est menée autour pour estimer e_2^+ . Les valeurs ainsi obtenues sont ensuite utilisées pour fixer C_β . Les cas tests CP_OPT₁ à Tu_OPT₆ présentés dans le tableau 8.1 sont utilisés comme

base d'optimisation. La fonction d'erreur donnée par (8.43) est alors calculée, à nombre de Prandtl donné, pour plusieurs nombres de Reynolds. Les fonctions $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 0.5)$, $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 2.5)$ et $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 5)$, sont minimisées pour calculer différentes valeurs de $e_{2, \text{opt}}^+(\text{Pr})$. La figure 8.2 permet de visualiser l'évolution de $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 0.5)$, $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 2.5)$ et $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 5)$ en fonction de e_2^+ . Le tableau 8.2 présente les valeurs de

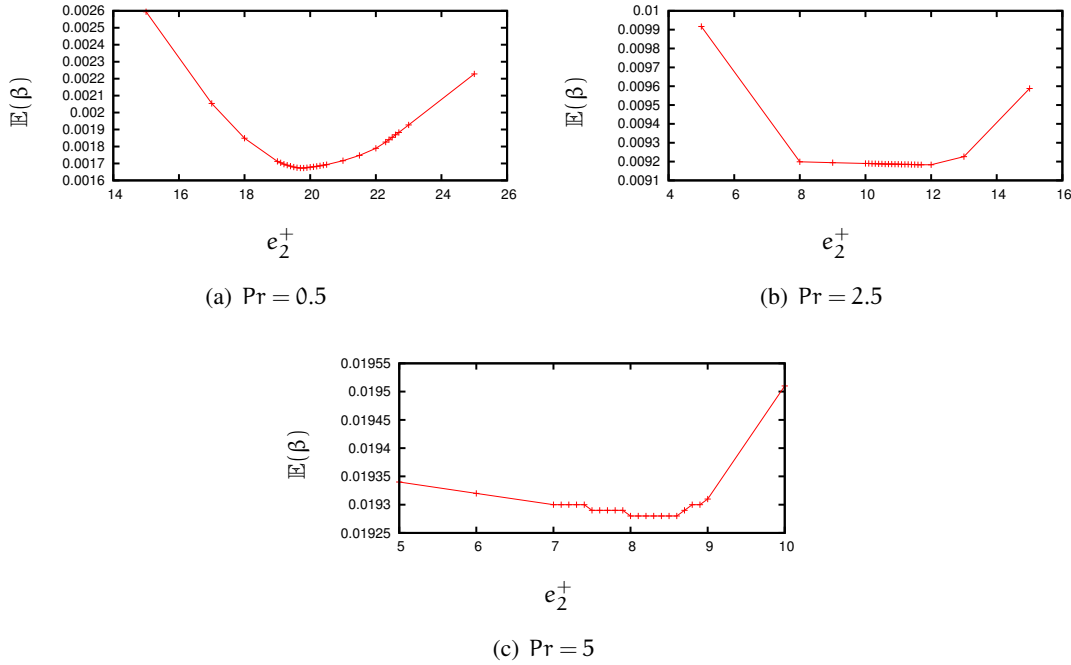


FIG. 8.2 – Écoulements turbulents établis en canal plan : étude des fonctions d'erreur multi-cas $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 0.5)$, $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 2.5)$ et $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 5)$ en fonction de e_2^+ .

β_{opt} associées aux fonctions d'erreur $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 0.5)$, $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 2.5)$ et $\mathbb{E}(e_2^+, \text{Pr} = 5)$ en fonction de e_2^+ .

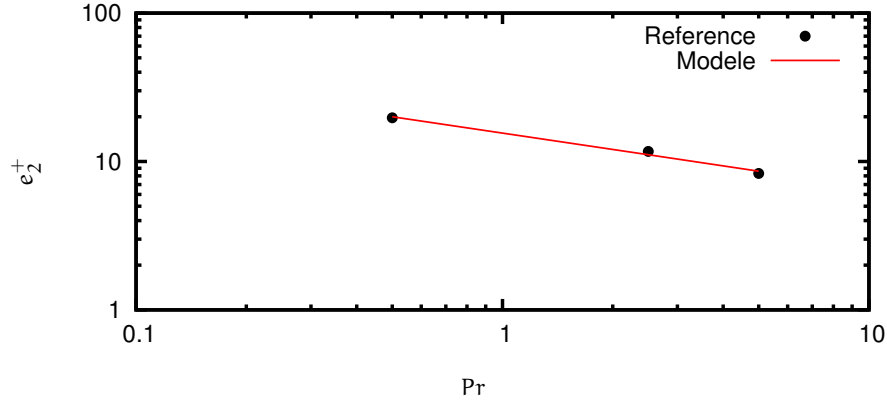
Pr	0.5	2.5	5
$e_{2, \text{opt}}^+$	19.7	11.7	8.3

TAB. 8.2 – Valeurs du coefficient e_2^+ permettant de minimiser l'erreur sur la température de paroi en fonction du nombre de Prandtl.

En utilisant les résultats du tableau 8.2, le coefficient C_β est fixé à 15.5. La figure 8.3 permet de comparer l'expression :

$$e_2^+ = \frac{15.5}{\text{Pr}^{1/3}} \quad (8.44)$$

aux résultats du tableau 8.2.


 FIG. 8.3 – Comparaison du modèle de e_2^+ (8.44) aux résultats de simulation.

Finalement, le modèle de température de paroi s'écrit :

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \mathbb{U} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = (\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + (\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2) \frac{\Delta \zeta}{\Delta \eta_z} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} - \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2}{\Delta \eta_z} \Delta T, \quad (8.45)$$

$$\mathbb{U} = (\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} \right), \quad (8.46)$$

où l'épaisseur de la couche de proche paroi est donnée par :

$$e_2 = \begin{cases} \frac{D_h}{2N\mu} & \text{en régime laminaire,} \\ \frac{y_t^* C_\beta}{Pr^{1/3}} & \text{en régime turbulent,} \end{cases} \quad (8.47)$$

ce qui conduit aux valeurs de Ω_2/Ω et $u_2/\langle \bar{u}_z \rangle_f$ données dans le tableau 8.3.

	Ω_2/Ω	u_2 : écoulements laminaires	u_2 : écoulements turbulents
canal plan	$4 \frac{e_2}{D_h}$	$2 \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{e_2}{D_h} (3 - 4 \frac{e_2}{D_h})$	$u_\tau \left(\frac{y_t^{+2}}{2e_2^+} + \mathcal{F} \right)$
tube circulaire	$4 \frac{e_2}{D_h} (1 - \frac{e_2}{D_h})$	$4 \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{e_2}{D_h} (1 - \frac{e_2}{D_h})$	$u_\tau \left(\frac{y_t^{+2}}{2e_2^+} + \mathcal{F} \right)$

TAB. 8.3 – Valeurs des coefficients Ω_2/Ω et u_2 pour des écoulements laminaires et turbulents en canaux. \mathcal{F} est donnée par la relation (8.40).

8.3 Évaluation du modèle macroscopique de température de paroi à équation de transport

Les cas tests présentés dans le paragraphe 7.2.1 sont à présent repris pour évaluer les performances du modèle de température de paroi à équation de transport.

8.3.1 Écoulements adiabatiques

Les cas présentés dans ce paragraphe sont ceux décrits dans les tableaux 7.2 et 7.3. Les figures 8.4 à 8.8 permettent de comparer le modèle final avec le modèle algébrique, le modèle classique et les résultats de référence. Selon les modèles d'échange thermique classiques, il n'y a pas de retard entre les évolutions de températures moyenne et de paroi. Par conséquent, le front de température est vu trop tôt à la paroi. En revanche, les deux modèles développés dans ce chapitre prennent en compte les flux dispersifs. Le front de température progresse plus lentement à proximité de la paroi. Ces cas tests montrent clairement que les modèles présentés ici capturent très correctement les effets de dispersion passive. Cependant, à proximité de l'entrée du canal, un undershoot apparaît avec le modèle algébrique. Dans cette zone, les variations de température sont très brusques, autrement dit, les échelles de longueur et de temps caractéristiques des variations de température moyenne sont du même ordre de grandeur que le filtre spatial et le temps d'advection : l'hypothèse de séparation des échelles n'est donc pas strictement respectée. C'est pourquoi le modèle algébrique surestime les effets de la dispersion sur la température de paroi et induit un undershoot. L'utilisation du modèle à équation de transport permet de surmonter cette difficulté et de capturer avec précision l'évolution de la température de paroi. Loin en aval de l'entrée, les deux modèles donnent de très bons résultats.

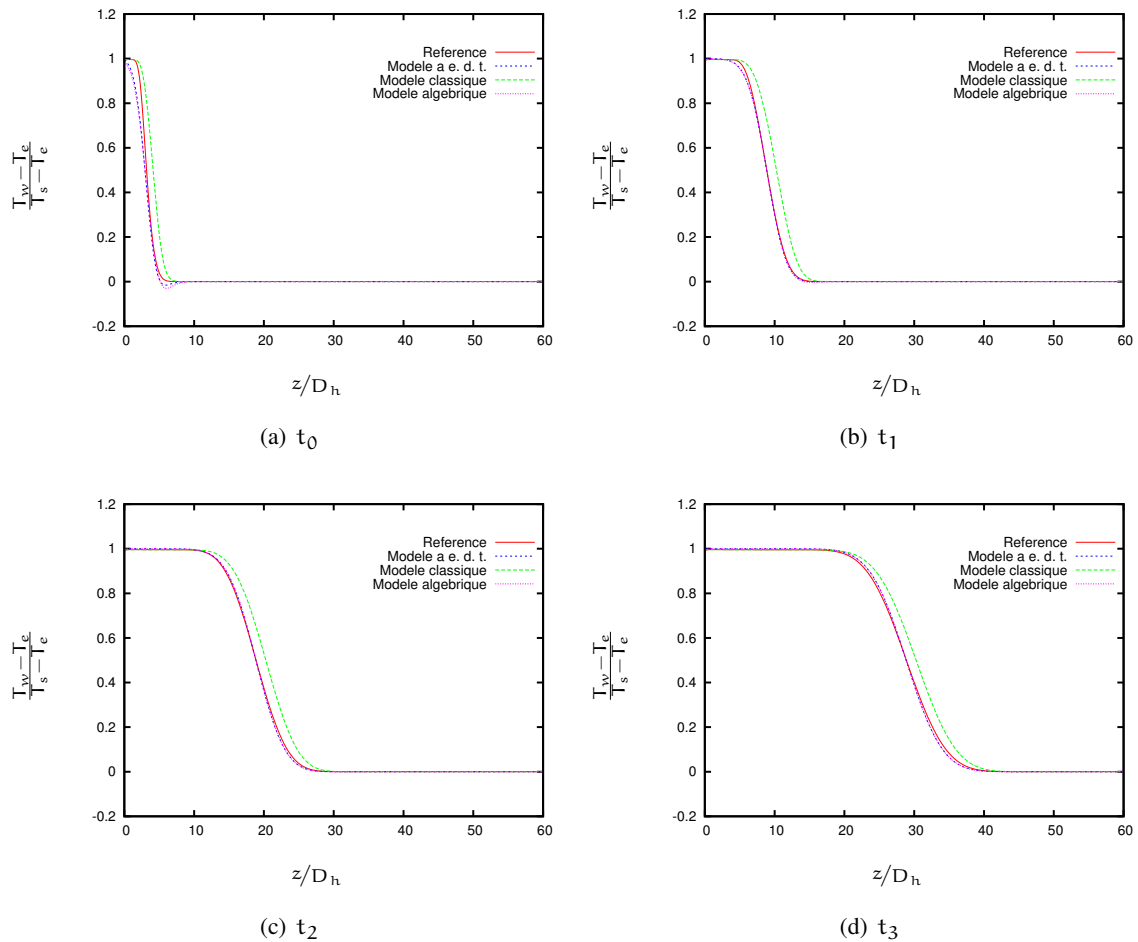


FIG. 8.4 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique laminaire en **canal plan**. Cas CP₁, Re = 175, Pr = 1.48. Comparaison du modèle à équation de transport au modèle algébrique, au modèle classique et aux résultats de référence.

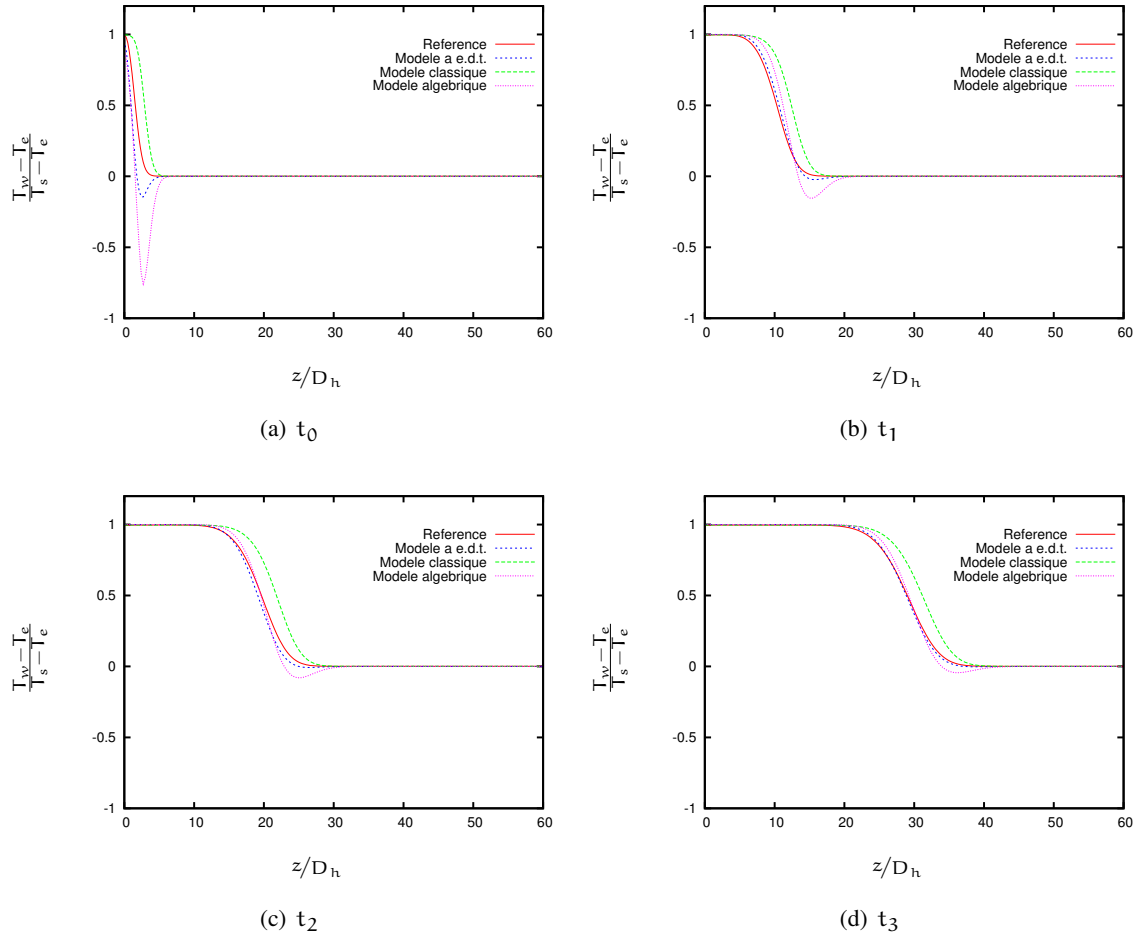


FIG. 8.5 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique turbulent en **canal plan**. Cas CP₂, Re = 15000, Pr = 0.74. Comparaison du modèle à équation de transport au modèle algébrique, au modèle classique et aux résultats de référence.

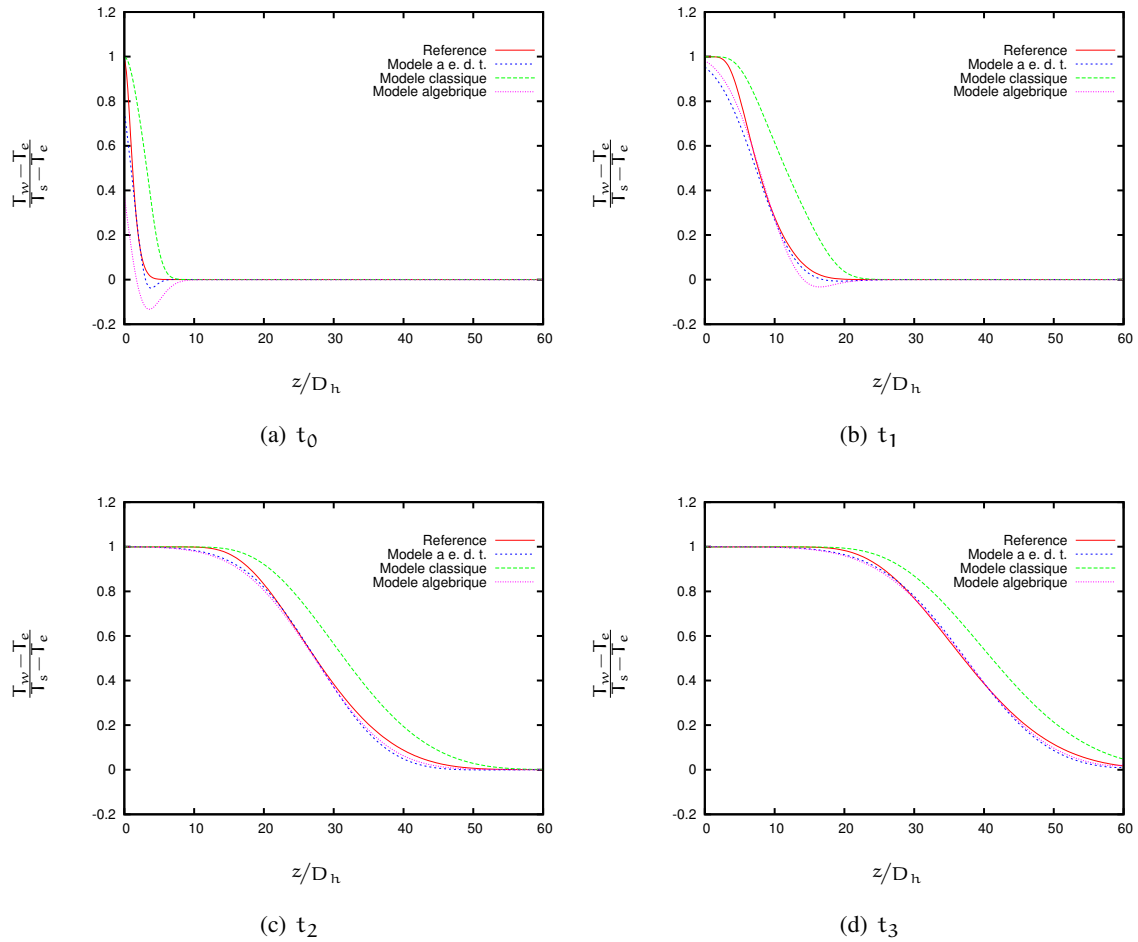


FIG. 8.6 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique laminaire en **tube circulaire**. Cas Tu_1 , $Re = 175$, $Pr = 1.48$. Comparaison du modèle à équation de transport au modèle algébrique, au modèle classique et aux résultats de référence.

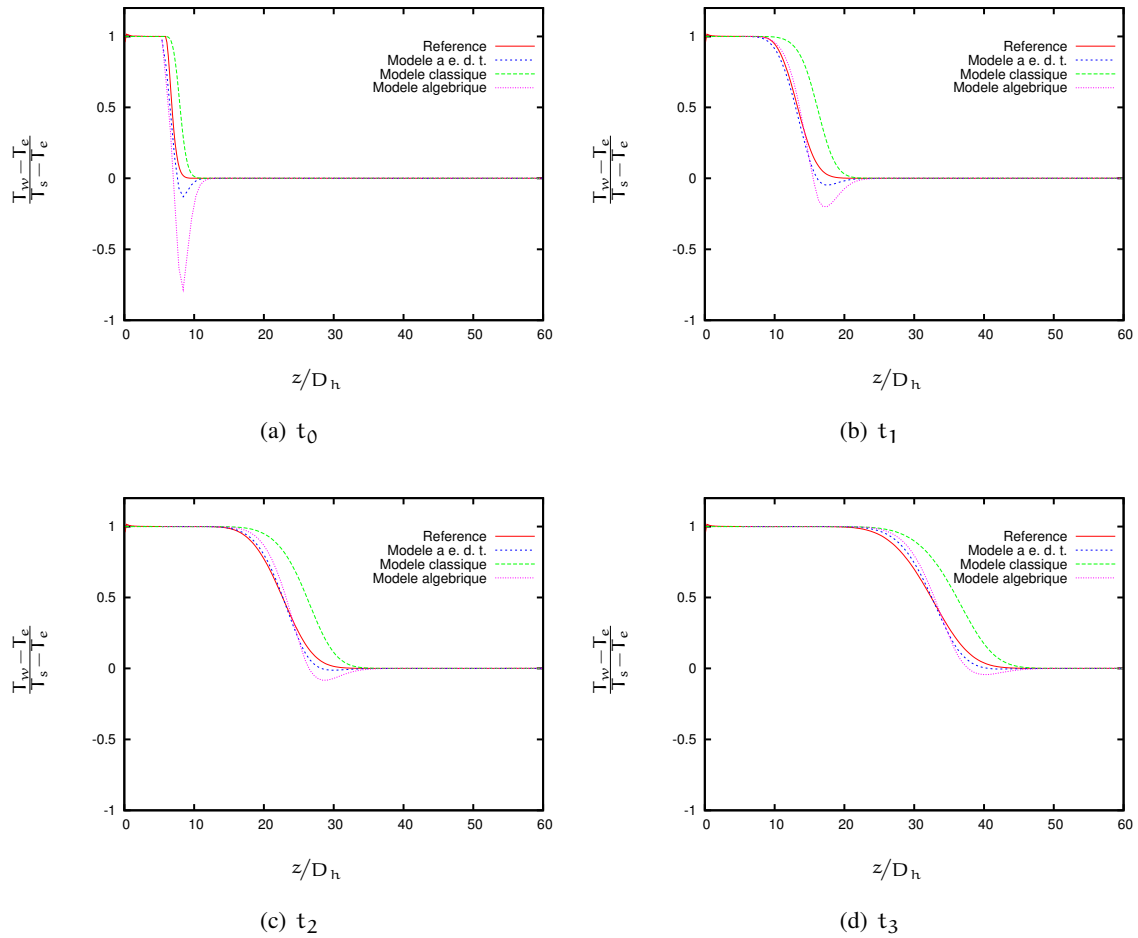


FIG. 8.7 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement adiabatique turbulent en **tube circulaire**. Cas Tu_2 , $Re = 15000$, $Pr = 0.74$. Comparaison du modèle à équation de transport au modèle algébrique, au modèle classique et aux résultats de référence.

8.3.2 Écoulements stationnaires et flux thermique non uniforme

La figure 8.8 permet de comparer les résultats des modèles classique, algébrique et à équation de transport aux résultats de référence dans le cas d'un écoulement stationnaire non uniformément chauffé. Le modèle à équation de transport donne de très bons résultats en régime laminaire et turbulent. Puisque le modèle à équation de transport prend en compte l'advection de ΔT , il est capable de prédire le chauffage qui apparaît en aval de la zone de flux imposé. Ainsi, si on s'intéresse à des écoulements présentant un chauffage très localisé, le modèle à équation de transport permet de prédire la température de paroi de façon précise. D'un point de vue pratique, cela peut permettre, lors de la conception d'équipements expérimentaux par exemple, de déterminer l'emplacement optimal des thermocouples pour un coût très inférieur à celui d'une simulation fine sur tout le domaine.

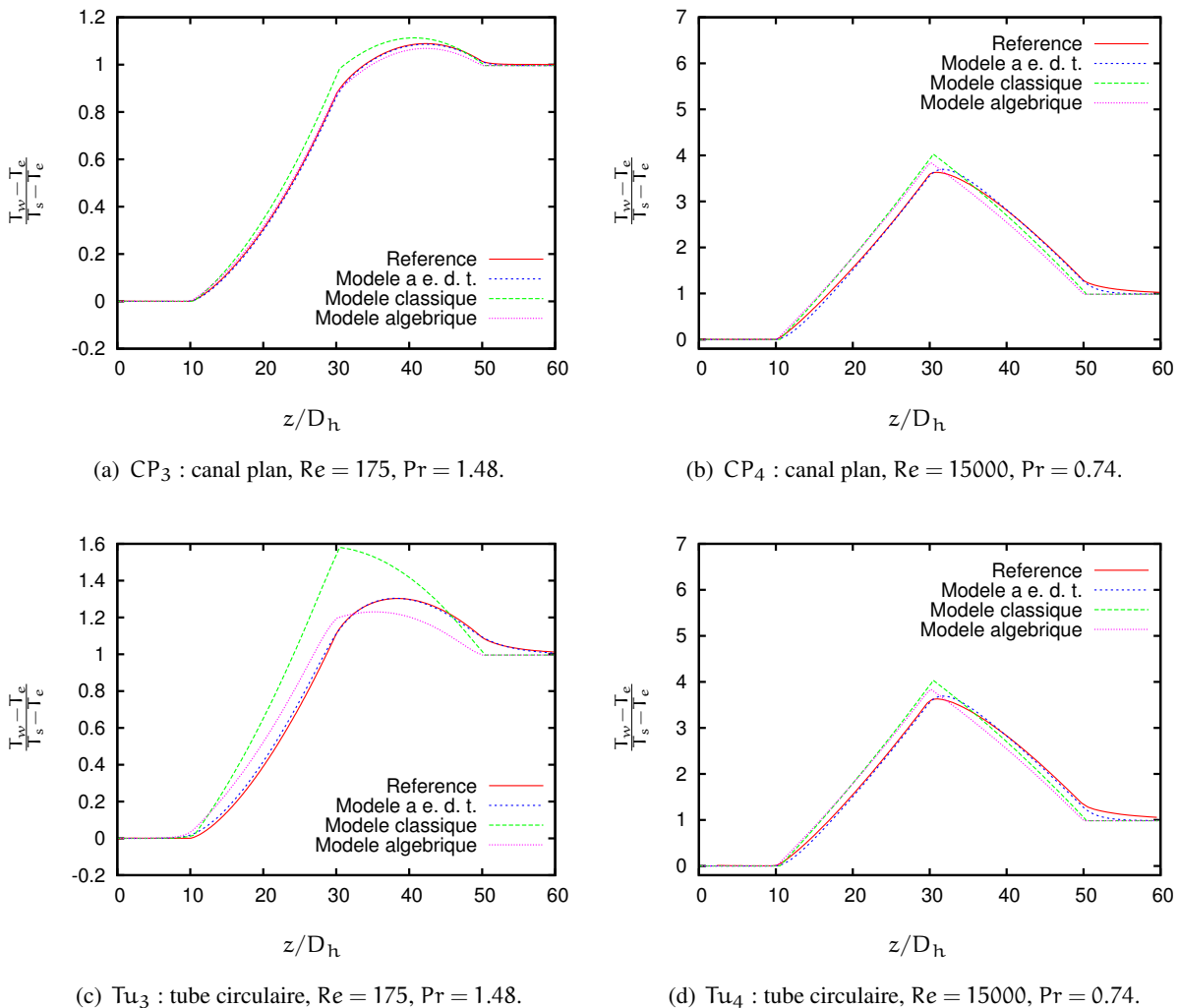


FIG. 8.8 – Profils de température de paroi adimensionnée pour un écoulement en canal plan et en tube circulaire en présence de flux thermique hétérogène. Comparaison du modèle à équation de transport au modèle algébrique, au modèle classique et aux résultats de référence.

Nous nous intéressons à présent au nombre de Nusselt pour les écoulements stationnaires avec chauffage hétérogène. Les profils de nombre de Nusselt obtenus avec les différents modèles pour les écoulements stationnaires sont présentés en figure 8.9. Une nette amélioration est observée entre le modèle algébrique et le modèle à équation de transport. Au début de la zone de chauffe, le modèle à équation de transport surestime le nombre de Nusselt. Cependant, puisque le flux imposé est très faible dans cette zone, les conséquences restent très limitées. Dans le cadre de l'étude des cœurs de réacteurs nucléaires, la dégradation du coefficient d'échange en aval du pic de flux, appelée facteur de flux non uniforme, constitue une pénalité pour l'évaluation du flux thermique critique. Le modèle à équation de transport permet de capturer ce phénomène avec précision, que l'écoulement soit laminaire ou turbulent.

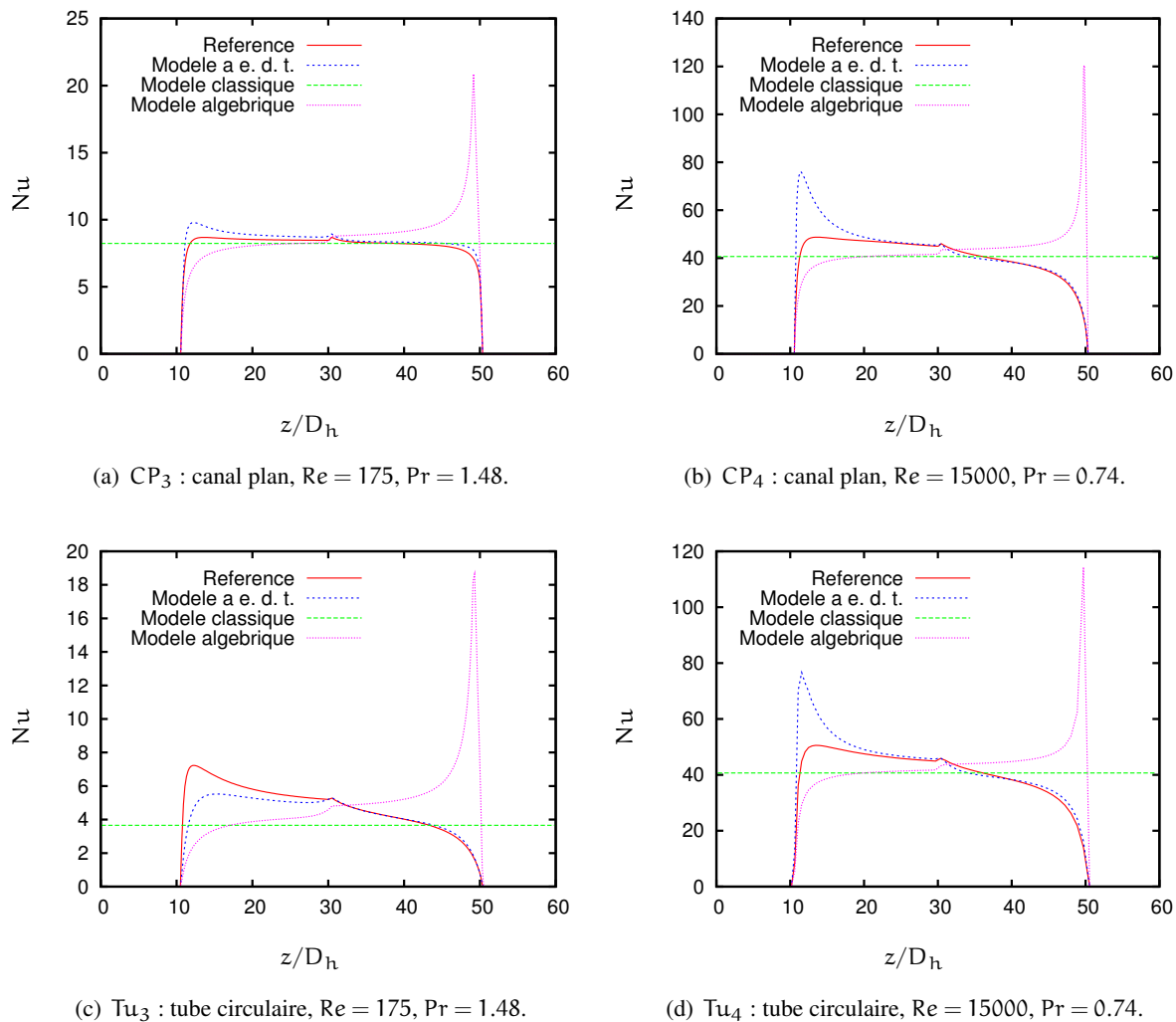


FIG. 8.9 – Nombre de Nusselt pour des écoulements en canal plan et en tube circulaire en présence de flux thermique hétérogène. Comparaison du modèle à équation de transport au modèle algébrique, au modèle classique et aux résultats de référence.

8.4 Conclusion

Nous avons étendu l'analyse du problème de dispersion à la modélisation des échanges thermiques pour des écoulements laminaires et turbulents en canaux. Pour ce faire, nous avons utilisé le problème de fermeture pour déterminer la température de paroi. Cependant, puisque les gradients de température à la paroi sont raides (en particulier pour les écoulements turbulents) et principalement contrôlés par les conditions aux limites, cette méthode s'est avérée insuffisante pour prédire précisément les profils de température de paroi lorsque les gradients de température moyenne ou de flux de chaleur sont importants. Cela est dû au fait que l'hypothèse de séparation des échelles n'est alors plus respectée.

Afin d'étendre le domaine de validité de notre modèle, nous avons dérivé une équation de transport pour l'écart entre la température de paroi et la température moyenne. Nous avons donc développé un modèle à deux couches qui a permis de séparer les échelles de temps et de longueur associées à la zone centrale et à la zone de paroi. Le modèle à équation de transport ainsi obtenu a ensuite été fermé en considérant qu'il devait dégénérer vers le modèle algébrique pour des écoulements faiblement instationnaires ou hétérogènes.

Les deux modèles (algébrique et à une équation) ont ensuite été testés numériquement et comparés à des résultats de référence issus de simulations fines. Le modèle à équation de transport permet une très nette amélioration de la prédiction de l'échange thermique. L'effet retard entre T_w et $\langle \bar{T}_f \rangle_f$ est bien restitué. Par exemple, il peut prédire le chauffage des parois par l'écoulement moyen en aval d'une zone de chauffe et l'impact sur le coefficient d'échange thermique des variations de flux de chaleur en paroi.

QUATRIÈME PARTIE

MODÉLISATION DE LA TURBULENCE EN MILIEUX POREUX

INTRODUCTION

Dans un milieu libre, la turbulence développée se caractérise par la présence d'un spectre continu d'échelles tourbillonnaires au sein de l'écoulement. Selon la seconde hypothèse de Kolmogorov [46], les structures turbulentes cèdent de proche en proche de l'énergie aux structures plus petites : c'est la cascade d'énergie de Kolmogorov. Au bout de cette cascade, au sein des plus petits tourbillons, les forces d'inertie et de viscosité sont en équilibre et l'énergie est dissipée sous forme de chaleur (première hypothèse de Kolmogorov). En résumé, le processus énergétique se décompose donc en trois phénomènes principaux :

- injection d'énergie en provenance du mouvement moyen ;
- redistribution interne à l'agitation turbulente ;
- dissipation en énergie interne .

Une représentation schématique de cette analyse est présentée sur la figure IV.1. Elle servira par la suite d'élément de comparaison avec le comportement supposé de la turbulence dans les milieux poreux.

En ce qui concerne les milieux poreux, des études expérimentales dans des canopées [83, 93] ont montré l'existence d'un transfert inter-échelles : les « grosses » structures fournissent de l'énergie aux « petites » structures. Cette analyse suppose de définir formellement une coupure d'échelle qui permet de différencier les « grosses » structures des « petites » dans l'espace spectral. L'échelle caractéristique de longueur associée à cette coupure, par la suite notée ℓ_c , est du même ordre de grandeur que la taille caractéristique d'un VER [85]. Tout d'abord, pour un milieu peu chargé en phase solide, les grosses structures sont amorties par la présence de la matrice solide. Cette destruction progressive des gros tourbillons fournit aux petites échelles un certain apport d'énergie. Pour un écoulement entrant dans un milieu très chargé en phase solide, les structures de taille caractéristique supérieure à la taille des pores sont rapidement hachées par la matrice solide [68] et transmettent leurs énergie aux petites structures. Le transfert inter-échelle est alors le mécanisme dominant. Puis, une fois les grosses structures fractionnées, ce phénomène devient négligeable. Les structures de taille inférieure à ℓ_c sont alimentées par la production de sous-filtre [85]. Raupach [85] et Finnigan [28] ont interprété ce transfert comme étant dû au travail de la contribution de pression de la force de traînée (aussi appelé traînée de forme) dans l'écoulement moyen. Raupach [85] a alors précisé que le travail de la contribution visqueuse intervenait dans le mécanisme de destruction de la turbulence pour produire de la chaleur. La figure IV.1 représente schématiquement cette analyse.

Comme à l'échelle locale, différentes stratégies sont envisageables pour décrire la turbulence à l'échelle macroscopique. Elles sont présentées dans le chapitre 9. Parmi ces différentes méthodes, l'analyse à deux échelles [76] nous semble la plus adaptée à l'étude des transferts énergétiques existant au sein d'un écoulement turbulent en milieu poreux. Elle permet en outre d'identifier les énergies permettant de caractériser un écoulement hors équilibre. C'est pourquoi, dans le chapitre 10, nous nous basons sur les résultats de cette analyse pour dériver un modèle de turbulence macroscopique adapté à l'étude des écoulements hors équilibre. Enfin, le chapitre 11 propose des pistes de modélisation dynamique de la dispersion thermique à partir du modèle de turbulence.

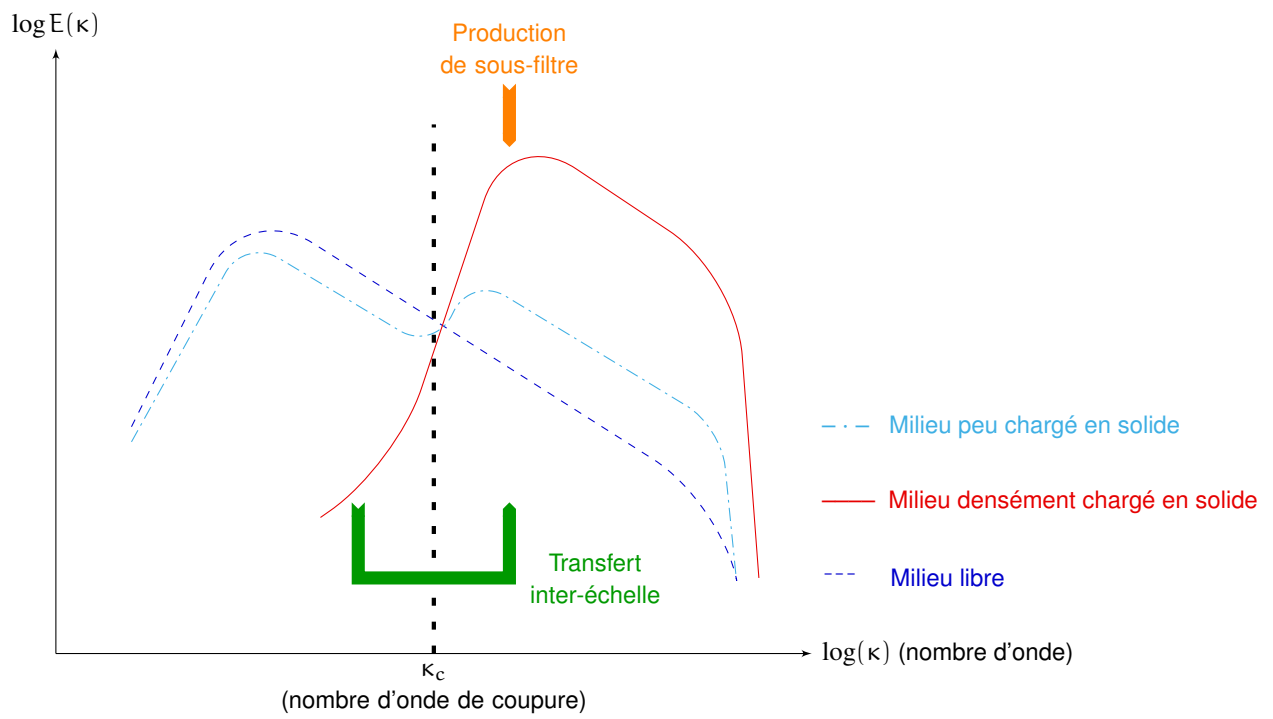


FIG. IV.1 – Représentation spectrale schématique de la turbulence en milieux libre et poreux.

MODÉLISATION DE TURBULENCE EN MILIEUX POREUX : ÉTAT DE L'ART

Dans ce chapitre, nous proposons de cerner les difficultés inhérentes à la modélisation de la turbulence en milieu poreux en étudiant différents modèles de la littérature. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux modèles de Teruel [101], de Nakayama et Kuwahara [68], de Pedras et De Lemos [74], de Chandesris [17], de Flick *et al.* [29] et de Pinson [78]. Ces différents modèles peuvent être classés en trois catégories :

- les modèles basés sur la moyenne spatiale des modèles RANS locaux [17, 29, 68, 74] ;
- les modèles basés sur l'application simultanée de la moyenne statistique et du filtre spatial [100, 101] ;
- les modèles basés sur une analyse à deux échelles [76, 78].

Notons que les domaines d'application pour lesquels ces modèles ont été dérivés sont différents. Certains s'intéressent à des écoulements transverses dans des faisceaux de crayons [68, 74, 101] tandis que d'autres considèrent des écoulements parallèles dans des faisceaux de crayons [17] ou dans des canaux plans ou circulaires [78]. Flick *et al.* [29] s'intéressent à des écoulements dans des empilements de sphères.

Avant de les présenter, il est important de fixer les critères d'évaluation de ces modèles. Quelques notations doivent tout d'abord être introduites. Dans ce chapitre, il sera fait mention de l'état **asymptotique** ou **d'équilibre**. Cette appellation renvoie en réalité à deux objets qu'il est important de bien distinguer : l'état asymptotique **de référence** d'une part, et l'état asymptotique **atteint par le modèle** d'autre part. L'état asymptotique de référence peut se déduire de simulations fines ou de mesures expérimentales moyennées. Dans la suite de ce travail, les quantités correspondant à l'état asymptotique de référence seront repérées par \cdot_∞ . Les grandeurs correspondant à l'état asymptotique atteint par le modèle macroscopique seront quant à elles notées \cdot_\triangleright . La contrainte la plus importante en ce qui concerne la modélisation de la turbulence en milieu poreux est que l'état asymptotique atteint par le modèle macroscopique doit coïncider avec l'état d'équilibre de référence (voir figure 9.1). Nous montrerons par la suite que le modèle de Pedras et de Lemos [74] ne satisfait pas cette exigence. Une fois la condition de concordance des états asymptotiques remplie, on cherchera à reproduire le comportement dynamique des grandeurs étudiées.

9.1 Modèles RANS spatialement moyennés

Les modèles de type RANS spatialement moyennés sont sans aucun doute les plus répandus [17, 29, 68, 69, 74]. La méthode consiste à appliquer un filtre spatial aux modèles RANS standard. En s'inspirant de la modélisation de la turbulence à l'échelle locale, ils reposent sur une fermeture analogue à l'hypothèse

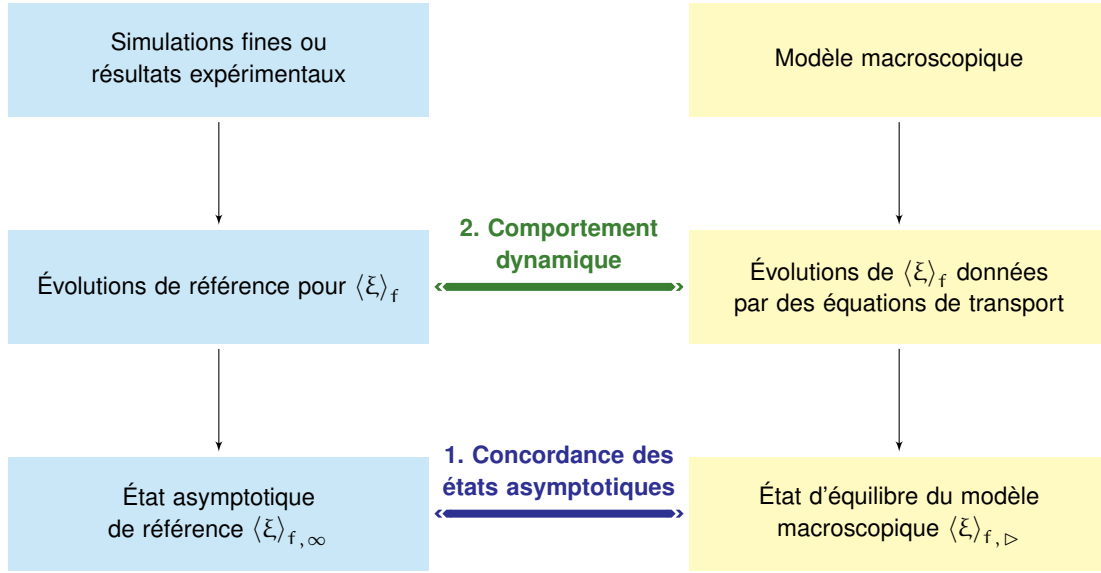


FIG. 9.1 – Problématique de la modélisation de la turbulence en milieu poreux : la contrainte de concordance entre l'état asymptotique de référence et l'état d'équilibre du modèle macroscopique est primordiale. Une fois qu'elle est satisfaite, on peut s'intéresser au comportement dynamique.

de Boussinesq [10] pour modéliser le tenseur de Reynolds spatialement moyenné¹. Pour un écoulement incompressible dans un milieu à porosité constante, le terme $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$ est ainsi modélisé par :

$$-\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f = \nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij}. \quad (9.1)$$

Parallèlement, le coefficient de viscosité turbulente macroscopique est défini, par analogie avec les modèles locaux, comme :

$$\nu_{t\phi} = C'_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}. \quad (9.2)$$

L'étude porte alors sur la modélisation de l'équation de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et l'écriture d'une équation de transport pour $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$.

9.1.1 Modélisation de l'équation de $\langle \bar{k} \rangle_f$

L'application de la moyenne spatiale à l'équation de l'énergie cinétique de turbulence (2.32) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right)}_I - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f}_{II} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f}_{III} - \underbrace{\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f}_{V} - \underbrace{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}_{VI} \end{aligned} \quad (9.3)$$

¹Nous précisons que Flick *et al.* [29] n'émettent aucune proposition pour ce terme

cinq termes doivent être modélisés :

- le terme de diffusion turbulente (II) ;
- le terme de dispersion (III) ;
- le terme de production par cisaillement macroscopique (IV) ;
- le terme de production de sous-filtre (V) ;
- le terme de dissipation visqueuse homogénéisée (VI).

La production de sous-filtre est notée :

$$\text{PSF} = - \left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \quad (9.4)$$

Diffusion turbulente

Les auteurs font unanimement appel à une fermeture au premier gradient pour modéliser ce terme suivant l'expression :

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \overline{\left(\frac{p'}{\rho} + k' \right) u'_i} \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right), \quad (9.5)$$

où :

$$\nu_{t\phi} = C'_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\epsilon} \rangle_f}, \quad (9.6)$$

la valeur préconisée pour C'_μ étant 0.09. Notons que la viscosité turbulente macroscopique $\nu_{t\phi}$ n'est, *a priori*, pas égale à la moyenne spatiale de la viscosité turbulente locale :

$$\nu_{t\phi} \neq \langle \nu_t \rangle_f. \quad (9.7)$$

Ce coefficient est défini simplement par analogie avec les modèles locaux.

Dispersion

Le terme de dispersion

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f \quad (9.8)$$

n'est pas pris en compte dans les modèles de Flick *et al.* [29] et de Chandesris [17].

Pedras et De Lemos [74] modélisent la dispersion conjointement avec la production de sous-filtre. Ce n'est guère satisfaisant puisque production et dissipation sont de nature différente et ne peuvent par conséquent pas être réunies dans un seul terme modèle.

Nakayama et Kuwahara [68] proposent de modéliser le terme de dispersion par analogie avec la dispersion thermique. En introduisant un nombre de Lewis, ils utilisent les résultats obtenus dans [51] pour décrire la dispersion de l'énergie cinétique de turbulence. Cela revient à ne tenir compte que de la dispersion passive et à négliger la dispersion active. C'est aussi l'approche suivie par Pinson [78]. Nous choisissons nous aussi de reprendre la méthode de Nakayama et Kuwahara [68]. Il montre par ailleurs que les termes de dispersion peuvent être négligés pour des écoulements parallèles en canaux en l'absence de singularités. En réalité, \bar{k} est aussi soumise au mécanisme de dispersion active qui est induit par les termes sources présents dans l'équation de $\delta \bar{k}$: un terme de production par cisaillement et un terme de dissipation visqueuse. Ces termes sont très difficiles à traiter car ils dépendent grandement de l'écoulement considéré. Il est de plus difficile d'évaluer l'importance de ces termes dans le cas général.

Production par cisaillement macroscopique

Nous avons vu que les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ se caractérisent par un modèle de contraintes turbulentes moyennées de la forme :

$$-\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f = \nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij}. \quad (9.9)$$

Cela donne donc :

$$PM = -\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} = \left[\nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij} \right] \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (9.10)$$

9.1.2 Modélisation de $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$

Dans les modèles présentés, deux stratégies sont adoptées pour décrire la dissipation visqueuse moyennée spatialement. D'une part, Flick *et al.* [29] choisissent de décrire $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ à partir de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et de la vitesse débitante :

$$\langle \bar{\epsilon} \rangle_{f, \text{Flick}} = c_4 \langle \bar{k} \rangle_f \| \langle \mathbf{u} \rangle_f \|, \quad (9.11)$$

où c_4 est une constante de modélisation. Dans les autres modèles proposés, les auteurs, pour plus de généralité, postulent une équation de transport pour la dissipation visqueuse moyennée en la déduisant de l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ suivant la même méthode que pour les modèles $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ locaux. La modélisation de l'équation de $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ est détaillée dans le paragraphe suivant. L'idée est de considérer que l'équation de la dissipation visqueuse homogénéisée est régie par les mêmes phénomènes que celle de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et d'ajouter des temps caractéristiques et des constantes de modélisation liés à chaque phénomène. L'équation postulée de $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ s'écrit de façon générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\partial x_i} = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^\epsilon \frac{\partial \langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\partial x_i} \right) \\ & + C_{\epsilon_1} \frac{PM}{\tau_t} + C_{\epsilon_s} \frac{PSF}{\tau_s} - C_{\epsilon_2} \frac{\langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\tau_t}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

La différence entre les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ présentés ici tient au modèle de production de sous-filtre utilisé et à la définition des temps caractéristiques dans l'équation de $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$. Les modèles décrits dans [17, 68, 74, 78] vont à présent être détaillés. Une synthèse des modèles de production de sous-filtre et des temps caractéristiques associés à ce modèles est présentée dans le tableau 9.1.

Geometrie	P_{SF}	τ_d	τ_p
Nakayama et Kuwahara (1999)	<p>écoulement transverse dans un faisceau de crayons à section carrée</p> $39\phi^2(1-\phi)^{5/2} \frac{(\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f)^{3/2}}{d}$ <p>où d est la longueur des côtés des crayons</p>	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}$	$\frac{d}{\phi^{1/2}(1-\phi)^{3/2}(\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f)^{1/2}}$
Pedras et de Lemos (2001)	<p>écoulement transverse dans un faisceau de crayons à section circulaire</p> $0.28\phi \frac{\langle \bar{k} \rangle_f \ \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f\ }{\sqrt{K}}$ <p>où K est la perméabilité</p>	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}$	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}$
Chandesris (2006)	<p>écoulements parallèles en canaux</p> $\frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3}{2D_h} f_w \left(1 - y_{lim}^+ \sqrt{\frac{f_w}{8}} \right)$ <p>où D_h est le diamètre hydraulique, f_w le coefficient de frottement, $y_{lim}^+ = 8$ en canal plan et $y_{lim}^+ = 7$ en tube circulaire</p>	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}$	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}} = c_p \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^2 Re^{1/6}}{P_{SF}}$ <p>où $c_p = 0.0306$ en canal plan et $c_p = 0.0367$ en tube circulaire</p>
Nakayama et Kuwahara (2008)	<p>écoulements parallèles en canaux</p> $\frac{f_w}{2D_h} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f)^{3/2}$	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}$	$\frac{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}} = \frac{D_h}{4\sqrt{0.3} \langle \bar{u} \rangle_f}$ <p>où D_h est le diamètre hydraulique</p>

TAB. 9.1 – Synthèse des termes sources utilisés dans les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$. Les états asymptotiques, i.e. les valeurs associées aux écoulements établis, sont notés ∞ .

9.1.3 Modèle de Flick *et al.*

Pour la production de sous-filtre, Flick *et al.* [29] suggèrent l'expression modèle :

$$P_{SF,Flick} = \frac{c_k \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3}{\sqrt{K}}, \quad (9.13)$$

où c_k est une constante (sans dimension) de modélisation et K (m^2) est la perméabilité du milieu considéré. Flick *et al.* [29] supposent donc que pour une géométrie donnée (K et ϕ fixées) et un débit donné ($\|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|$ fixée), la production de sous-filtre est constante. La racine carrée de la perméabilité est alors utilisée comme une échelle de longueur caractérisant le milieu poreux. Ils se servent ensuite de mesures expérimentales pour déterminer les constantes c_k et c_d . L'une des propriétés de l'expression 9.13 est qu'elle est indépendante de la turbulence. Elle ne s'annule donc pas lorsque l'écoulement tend vers un régime laminaire, ce qui constitue un point perfectible. Néanmoins, la simplicité de mise en œuvre de ce modèle en fait un bon outil d'évaluation pour les échanges thermiques.

9.1.4 Modèle de Nakayama et Kuwahara

Modélisation de la production de sous-filtre

Nakayama et Kuwahara [68, 69] supposent que, pour une géométrie et un débit donné, le terme de production dans l'équation de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est constant. Ils supposent par ailleurs que la loi de Darcy-Forchheimer est valable et obtiennent :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} = \phi \left(\frac{\nu_f}{K} \langle \bar{u}_i \rangle_f + \phi b \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \right), \quad (9.14)$$

où ϕ , K et b sont respectivement la porosité, la perméabilité et la constante de Forchheimer associées au milieu considéré. En réinjectant la relation (9.14) dans l'équation de quantité de mouvement doublement moyennée (2.64), ils écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f = & \phi \left(\frac{\nu_f}{K} \langle \bar{u}_i \rangle_f + \phi b \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_t \phi \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f - \bar{F}_{\phi_i}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

ce qui, à l'équilibre, se simplifie en :

$$\bar{F}_{\phi_i} = \phi \left(\frac{\nu_f}{K} \langle \bar{u}_i \rangle_f + \phi b \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \right). \quad (9.16)$$

Ils font ensuite l'hypothèse que $\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i} = \text{PSF}$ et proposent :

$$\text{PSF} = \phi \left(\frac{\nu_f}{K} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f + \phi b (\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f)^{3/2} \right) \simeq \phi^2 b (\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f)^{3/2}. \quad (9.17)$$

Ils fournissent par ailleurs les valeurs de K et b pour différentes géométries. Pour un écoulement transverse dans un faisceau de crayons à section carrée :

$$K = \frac{\phi^3}{150(1-\phi)^2 d}, \quad (9.18)$$

$$b = \frac{1.75(1-\phi)}{\phi^3 d}, \quad (9.19)$$

où ϕ désigne la porosité du milieu et d la longueur des côtés des crayons. Pour des écoulements longitudinaux en canaux :

$$K = \frac{\phi}{32} D_h^2 \quad (9.20)$$

$$b = \frac{f_p}{2D_h\phi^2}, \quad (9.21)$$

où D_h désigne le diamètre hydraulique des pores et f_p le coefficient de frottement.

Modélisation de la dissipation visqueuse

Dans l'équation postulée de la dissipation visqueuse doublement moyennée, la constante C_{ε_s} et les temps caractéristiques τ_s et τ_t restent à déterminer. Nakayama et Kuwahara proposent [68] :

$$C_{\varepsilon_s} = C_{\varepsilon_2}, \quad (9.22)$$

$$\tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (9.23)$$

$$\tau_s = \frac{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}}, \quad (9.24)$$

où $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}$ sont les valeurs à l'équilibre de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation visqueuse doublement moyennées.

Pour un écoulement transverse dans un faisceau de crayons à section carrée, ils fournissent [68] :

$$\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} = 0.673 \langle \bar{u} \rangle_f^2, \quad \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \frac{1.75(1-\phi)}{\phi} \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3}{d}. \quad (9.25)$$

Pour des écoulements parallèles en canaux ils donnent [69] :

$$\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} = \frac{1}{\sqrt{c_D}} u_f^2 = \frac{1}{\sqrt{c_D}} \langle \bar{u} \rangle_f^2 \frac{f_p}{8}, \quad \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3 f_p}{2D_h}, \quad (9.26)$$

où $c_D = 0.09$.

Potentialités et limites du modèle de Nakayama et Kuwahara

Le modèle de Nakayama et Kuwahara présente l'avantage d'être facile d'utilisation et relativement simple. De plus, il y a automatiquement concordance entre l'état asymptotique atteint par le modèle macroscopique et l'état asymptotique de référence. En effet, l'état asymptotique atteint par le modèle macroscopique, noté \triangleright est :

$$PSF_{\triangleright} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\triangleright}, \quad (9.27)$$

$$\frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} PSF_{\triangleright} = \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\triangleright}}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\triangleright}} \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\triangleright}, \quad (9.28)$$

soit :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\Delta} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}, \quad (9.29)$$

$$\langle \bar{k} \rangle_{f,\Delta} = \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}. \quad (9.30)$$

Sur le plan théorique, ce modèle pose néanmoins plusieurs questions. Tout d'abord, la production de sous-filtre ne dépend pas de la turbulence et ne s'annule donc pas en régime laminaire. De plus, les auteurs supposent que $\text{PSF} = \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}^\infty$. En regardant les équations (10.43) et (10.44), on remarque que cela revient d'une part à négliger la dissipation de sillage et d'autre part à supposer implicitement l'équilibre inconditionnel de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Cela rend difficile l'extension du modèle au cas d'écoulements laminares, d'écoulement en sortie de milieux poreux ou encore d'écoulements présentant des déséquilibres importants des profils de vitesse. Enfin, le fait de supposer que la production de sous-filtre est constante conduit, si la production macroscopique par cisaillement est nulle, à des évolutions monotones des grandeurs turbulentes. Nous verrons dans le chapitre 10 que cela ne permet pas de retrouver la dynamique complexe des évolutions de l'énergie cinétique de turbulence.

9.1.5 Modèle de Chandesris

Modélisation de la production de sous-filtre

Chandesris [17] propose une amélioration du modèle de Nakayama et Kuwahara [68] et l'applique aux cas d'écoulements parallèles en canaux. Pour des écoulements turbulents, établis et parallèles en canaux, Chandesris [17] obtient, en moyennant le bilan d'énergie cinétique du mouvement moyen sur un VER :

$$\text{PSF}_{\text{Ch}} = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3}{2Dh} f_p - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3}{2Dh} f_p \left(1 - y_{\text{lim}}^+ \sqrt{\frac{f_p}{8}} \right), \quad (9.31)$$

avec $y_{\text{lim}}^+ = 8$ pour un canal plan, et $y_{\text{lim}}^+ = 7$ pour un tube circulaire.

Modélisation de la dissipation visqueuse

Pour fermer l'équation de la dissipation visqueuse moyennée, Chandesris propose [17] :

$$C_{\varepsilon_s} = C_{\varepsilon_2}, \quad (9.32)$$

$$\tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (9.33)$$

$$\tau_s = \frac{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}}{\text{PSF}_{\text{Ch}}}, \quad (9.34)$$

où $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}$ sont les valeurs à l'équilibre de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation visqueuse doublement moyennées. Pour des écoulements parallèles en canaux, Chandesris donne [17], en se basant sur des résultats de simulations locales moyennés :

$$\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} = c_p \text{Re}^{-1/6} \langle \bar{u} \rangle_f^2 \frac{f_p}{8}, \quad (9.35)$$

où $c_p = 0.0306$ pour un canal plan et $c_p = 0.0367$ pour un tube circulaire.

Potentialités et limites du modèle de Chandesris

La concordance avec les états asymptotiques est assurée et ce modèle est aisément manipulable. Cependant, comme pour le modèle de Nakayama et Kuwahara [68], le fait de supposer que la production de sous-filtre est constante ne permet pas de reproduire correctement la dynamique de l'écoulement et rend difficile l'extension du modèle au cas d'écoulements laminaires, d'écoulement en sortie de milieux poreux ou encore d'écoulements présentant des déséquilibres importants des profils de vitesse. Toutefois, la sortie de milieux poreux a été abordée dans [16], sans aboutir à un modèle générique.

9.1.6 Modèle de Pedras et de Lemos

Modélisation de la production de sous-filtre

Le modèle de PSF de Pedras et De Lemos [74] prend en compte l'énergie cinétique turbulente spatialement moyennée :

$$\text{PSF}_{\text{PDL}} = c_k \phi \frac{\langle \bar{k} \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|}{\sqrt{K}}, \quad (9.36)$$

où c_k est une constante et où K désigne la perméabilité du milieu considéré. Pour un écoulement transverse dans un faisceau de crayons circulaires disposés en quinconce, ils obtiennent, en moyennant des calculs fins, $c_k = 0.28$.

Modélisation de la dissipation visqueuse

Comme les auteurs cités dans les paragraphes précédents, Pedras et de Lemos prennent $C_{\varepsilon_s} = C_{\varepsilon_2}$. Ils considèrent par ailleurs que tous les temps caractéristiques doivent être égaux :

$$\tau_s = \tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}. \quad (9.37)$$

Potentialités et limites du modèle de Pedras et de Lemos

Le modèle de production de sous-filtre de Pedras et de Lemos présente l'avantage de s'annuler lorsque l'écoulement est laminaire. Notons toutefois qu'ils ne justifient pas leur choix de prendre c_k constante pour des écoulements hors équilibre.

Leur modèle d'équation pour la dissipation visqueuse homogénéisée est très discutable. En effet, pour le modèle de Pedras et De Lemos [74], l'état d'équilibre est décrit par :

$$\text{PSF}_{\triangleright} = c_k \phi \frac{\langle \bar{k} \rangle_{f,\triangleright} \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|}{\sqrt{K}} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\triangleright}, \quad (9.38)$$

$$\text{PSF}_{\triangleright} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\triangleright}. \quad (9.39)$$

La deuxième relation étant redondante avec la première, elle est inexploitable. Le système est sous contraint et il n'y a pas unicité des états d'équilibre. Il est impossible de déterminer $\langle \bar{k} \rangle_{f,\triangleright}$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\triangleright}$. La valeur des grandeurs à l'équilibre dépend donc d'un paramètre extérieur et le modèle macroscopique peut atteindre une état d'équilibre différent de l'état asymptotique de référence. Cela disqualifie automatiquement le choix (9.37).

9.1.7 Conclusion sur les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$

L'avantage des modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est qu'il se basent sur la moyenne d'équations locales très bien connues. Ils peuvent donc bénéficier des nombreux travaux portant sur les modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ locaux, moyennant une adaptation au cas des écoulements en milieux poreux. Cependant, le processus de double moyenne fait apparaître des termes traduisant les effets dispersifs de la matrice solide à l'échelle macroscopique. Ces termes doivent être modélisés. Or les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ ne peuvent les prendre en compte. Cela exige en effet de repartir de l'équation bilan de quantité de mouvement doublement moyennée et de définir des énergies macroscopiques qui permettent de les modéliser.

9.2 Application simultanée des deux moyennes

C'est la voie suivie dans [100, 101]. Ces auteurs s'appuient sur le constat que les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ ne permettent pas de modéliser les termes dispersifs dans l'équation de quantité de mouvement doublement moyennée. Ils cherchent donc à dériver un modèle qui tient compte de l'énergie dispersive identifiée par Raupach et Shaw [84]. Leur idée est alors d'introduire un opérateur de moyenne global, *i.e.* d'appliquer simultanément les moyennes statistique et spatiale.

9.2.1 Introduction d'un opérateur de double moyenne

Afin de traiter simultanément l'ensemble de l'énergie filtrée lors du processus de double moyenne, un **opérateur de double moyenne**, noté $\bar{\bar{\cdot}}$, est introduit. Il est défini par :

$$\bar{\bar{\xi}} = \langle \bar{\xi} \rangle_f. \quad (9.40)$$

Toute quantité ξ peut alors être décomposée en une somme de sa double moyenne et d'une fluctuation, notée ξ'' :

$$\xi = \bar{\bar{\xi}} + \xi''. \quad (9.41)$$

En utilisant les propriétés des moyennes statistique et spatiale, ξ'' se décompose de la façon suivante :

$$\xi'' = \xi - \bar{\bar{\xi}} = \delta \bar{\xi} + \langle \xi' \rangle_f + \delta \xi'. \quad (9.42)$$

9.2.2 Propriétés de l'opérateur de double moyenne

Linéarité

La linéarité de l'opérateur de double moyenne découle de celle des moyennes statistique et spatiale.

Idempotence

Étant donné que la moyenne statistique est idempotente, et que le filtre spatial peut être considéré comme tel lorsque l'hypothèse de séparation des échelles est respectée (voir 1.2.2, p. 12), l'opérateur de double moyenne est lui aussi idempotent sous cette hypothèse.

Commutation avec les opérateurs de dérivation

En utilisant les règles de permutation du filtre spatial avec les opérateurs de dérivation (voir 1.2.2, p. 13) et le fait que la moyenne statistique commute avec les opérateurs de dérivation, on peut établir les règles suivantes :

$$\phi \frac{\overline{\partial \xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi \overline{\xi}}{\partial x_i} + \phi \langle \overline{\xi} \mathbf{n}_i \delta \omega \rangle_f, \quad (9.43)$$

$$\phi \frac{\overline{\partial \xi}}{\partial x_i} = \phi \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial x_i} + \phi \langle \delta \overline{\xi} \mathbf{n}_i \delta \omega \rangle_f, \quad (9.44)$$

$$\phi \frac{\overline{\partial \xi}}{\partial t} = \frac{\partial \phi \overline{\xi}}{\partial t} + \phi \langle \overline{\xi} \omega_i \mathbf{n}_i \delta \omega \rangle_f, \quad (9.45)$$

$$\phi \frac{\overline{\partial \xi}}{\partial t} = \phi \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial t} + \phi \langle \delta \overline{\xi} \omega_i \mathbf{n}_i \delta \omega \rangle_f, \quad (9.46)$$

$$(9.47)$$

où ω désigne la vitesse de déplacement des parois, \mathbf{n} la normale à l'interface orientée du fluide vers le solide et $\delta \omega$ la distribution de Dirac associée à l'interface vue de la phase fluide.

9.2.3 Équations macroscopiques

Équation de continuité doublement moyennée

Nous avons montré dans le paragraphe 2.1 (p. 19) que l'équation de continuité doublement moyennée s'écrivait :

$$\frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0. \quad (9.48)$$

Avec les notations (9.40) et (9.41), cela donne :

$$\frac{\partial \overline{\overline{u}_i}}{\partial x_i} = 0. \quad (9.49)$$

Équation de quantité de mouvement doublement moyennée

En appliquant l'opérateur de double moyenne à l'équation instantanée de quantité de mouvement (2.14), Teruel [100] obtient :

$$\frac{\partial \overline{\overline{u}_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\overline{u}_i} \overline{\overline{u}_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\overline{P}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \overline{\overline{u}_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\overline{u_i'' u_j''}} - \overline{\overline{F_{\phi_i}}}. \quad (9.50)$$

L'application de la double moyenne fait apparaître le terme supplémentaire :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\overline{u_i'' u_j''}}, \quad (9.51)$$

qui doit être modélisé. Les corrélations doubles $\overline{\overline{u_i'' u_j''}}$ peuvent être interprétées comme des contraintes supplémentaires liées à l'agitation turbulente et à la présence de la matrice solide. En effet, avec nos notations, on peut écrire :

$$\overline{\overline{u_i u_j}} = \overline{\overline{u}_i} \overline{\overline{u}_j} + \langle \delta \overline{\overline{u}_i} \delta \overline{\overline{u}_j} \rangle_f + \langle \overline{\overline{u_i' u_j'}} \rangle_f, \quad (9.52)$$

soit :

$$\overline{u_i'' u_j''} = \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f + \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle_f, \quad (9.53)$$

Elles contiennent donc *toute* l'information perdue au cours du processus de double moyenne.

9.2.4 Définition d'une énergie cinétique macroscopique de turbulence \mathcal{K}

La présence du terme supplémentaire (9.51) dans l'équation doublement moyennée de quantité de mouvement suggère de définir une **énergie cinétique macroscopique de turbulence** par analogie avec les modèles locaux :

$$\overline{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}. \quad (9.54)$$

Cette quantité représente *l'ensemble* de l'énergie filtrée au cours du processus de double moyenne. En effet, $\overline{\mathcal{K}}$ tient compte à la fois de l'énergie liée au mouvement turbulent et des effets dispersifs liés à la présence de la matrice solide.

9.2.5 Équation de l'énergie cinétique macroscopique de turbulence

En soustrayant l'équation de quantité de mouvement doublement moyennée (9.50) à l'équation instantanée correspondante (2.14), nous obtenons l'équation de u_i'' :

$$\frac{\partial u_i''}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i'' u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p''}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i u_j'') + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'' u_j''} + \bar{F}_{\phi_i}. \quad (9.55)$$

Puis, en multipliant (9.55) par u_i'' et en appliquant l'opérateur de double moyenne, nous arrivons à l'équation de $\overline{\mathcal{K}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mathcal{K}} \bar{u}_i \right) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p'' u_i''} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\mathcal{K}'' u_i''} - \nu_f \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \bar{u}_i \bar{F}_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

À partir de l'équation de $\overline{\mathcal{K}}$, il est naturel de définir le **taux de dissipation macroscopique** comme :

$$\overline{\mathcal{E}} = \nu_f \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}. \quad (9.57)$$

9.2.6 Analyse des transferts

En étudiant l'équation de $\overline{\mathcal{K}}$ (9.56), on distingue :

- un terme de diffusion moléculaire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial x_i} \right);$$

- un terme de diffusion supplémentaire :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left(\frac{p''}{\rho} + \mathcal{K}'' \right) u_i''};$$

- un terme de production par cisaillement macroscopique :

$$-\overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j};$$

- un terme de dissipation :

$$\overline{\mathcal{E}} = \nu_f \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}};$$

- le travail de la force de traînée dans l'écoulement moyen :

$$\bar{u}_i \bar{F}_{\phi_i}.$$

Autrement dit, l'énergie cinétique macroscopique turbulente est alimentée par le mouvement moyen *via* un terme de production par cisaillement et le travail de la force de traînée. L'énergie qui lui est ainsi transmise est dissipée sous forme de chaleur.

9.2.7 Modélisation de l'équation de $\overline{\mathcal{K}}$

Reprenons l'équation (9.56) :

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mathcal{K}} \bar{u}_i \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial x_i} \right)}_{\text{I}} - \underbrace{\overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{II}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p''}{\rho} + \mathcal{K}'' \right) u_i''}_{\text{III}} - \underbrace{\overline{\mathcal{E}}}_{\text{IV}} + \underbrace{\bar{u}_i \bar{F}_{\phi_i}}_{\text{V}}. \quad (9.58)$$

Les différents termes de l'équation (9.58) correspondent respectivement à :

- I : diffusion moléculaire ;
- II : production ;
- III : diffusion turbulente macroscopique ;
- IV : dissipation macroscopique ;
- V : travail de la force de traînée.

Modélisation du terme de production

Par analogie avec la modélisation de la turbulence à l'échelle locale, le terme de production est modélisé par :

$$-\overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \nu_{MT} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (9.59)$$

où ν_{MT} est la **viscosité macroscopique turbulente** définie comme :

$$\nu_{MT} = C_{\mu}^{MT} \frac{\overline{\mathcal{K}}^2}{\overline{\mathcal{E}}}. \quad (9.60)$$

Modélisation du terme de diffusion turbulente

On procède de nouveau par analogie avec les modèles de turbulence à l'échelle locale. Le flux de diffusion turbulente est modélisé par une fermeture au premier gradient :

$$-\overline{\left(\frac{P''}{\rho} + \mathcal{K}''\right) u_i''} = \frac{\nu_{MT}}{\sigma_{\mathcal{K}}} \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial x_i}, \quad (9.61)$$

où $\sigma_{\mathcal{K}}$ est le nombre de Schmidt associé à $\overline{\mathcal{K}}$.

Équation modélisée de $\overline{\mathcal{K}}$

Finalement, l'équation modélisée de $\overline{\mathcal{K}}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mathcal{K}} \overline{u_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{MT}}{\sigma_{\mathcal{K}}} \right) \frac{\partial \overline{\mathcal{K}}}{\partial x_i} \right] + \nu_{MT} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{\mathcal{E}} + \overline{u_i} \overline{F}_{\phi_i}. \quad (9.62)$$

9.2.8 Équation du taux de dissipation macroscopique

L'équation de $\overline{\mathcal{E}}$ est, de la même manière que pour les modèles locaux, postulée en supposant qu'elle est régie par les mêmes phénomènes que celle de $\overline{\mathcal{K}}$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mathcal{E}} \overline{u_i} \right) = & \text{Diffusion moléculaire} + \text{Diffusion turbulente macroscopique} \\ & + \text{Production} - \text{Dissipation} + \text{Traînée}. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Termes de diffusion moléculaire et turbulente macroscopique

Comme pour le terme correspondant dans l'équation de $\overline{\mathcal{K}}$, un schéma de type premier gradient est choisi pour modéliser le terme de diffusion turbulente. Les termes diffusifs dans l'équation de $\overline{\mathcal{E}}$ prennent donc la forme :

$$\text{Diffusion} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{MT}}{\sigma_{\mathcal{E}}} \right) \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}}{\partial x_i} \right], \quad (9.64)$$

où $\sigma_{\mathcal{E}}$ est le nombre de Schmidt associé à $\overline{\mathcal{E}}$.

Terme de production

Pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, le terme de production dans l'équation de $\overline{\mathcal{E}}$ s'écrit :

$$\text{Production} = -C_{\mathcal{E}}^p \times \frac{1}{\tau_p} \times \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}, \quad (9.65)$$

où $C_{\mathcal{E}}^p$ est une constante et τ_p un temps caractéristique associé à la production. En utilisant la relation (9.59), ce terme peut aussi s'écrire :

$$\text{Production} = C_{\mathcal{E}}^p \times \frac{1}{\tau_p} \times \nu_{MT} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}. \quad (9.66)$$

Terme de dissipation

Suivant le même raisonnement que pour le terme de production, le terme de dissipation est modélisé par :

$$\text{Dissipation} = C_{\mathcal{E}}^d \times \frac{1}{\tau_d} \times \overline{\mathcal{E}}, \quad (9.67)$$

où $C_{\mathcal{E}}^d$ est une constante et τ_d un temps caractéristique associé à la dissipation.

Travail de la force de traînée

Enfin, de la même façon, le travail de la force de traînée dans l'équation de $\overline{\mathcal{E}}$ est modélisé par :

$$\text{Traînée} = C_{\mathcal{E}}^t \times \frac{1}{\tau_t} \times \overline{u}_i \overline{F}_{\phi_i}, \quad (9.68)$$

où $C_{\mathcal{E}}^t$ est une constante et τ_t un temps caractéristique associé au travail de la force de traînée.

Équation modélisée de $\overline{\mathcal{E}}$

Finalement, l'équation de $\overline{\mathcal{E}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mathcal{E}} \overline{u}_i \right) = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{MT}}{\sigma_{\mathcal{E}}} \right) \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}}{\partial x_i} \right] + C_{\mathcal{E}}^p \times \frac{1}{\tau_p} \times \nu_{MT} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \\ & - C_{\mathcal{E}}^d \times \frac{1}{\tau_d} \times \overline{\mathcal{E}} + C_{\mathcal{E}}^t \times \frac{1}{\tau_t} \times \overline{u}_i \overline{F}_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

9.2.9 Fermeture du modèle

Pour compléter le modèle, il reste à déterminer les constantes C_{μ}^{MT} , $C_{\mathcal{E}}^d$ et $C_{\mathcal{E}}^t$, ainsi que les temps caractéristiques τ_d et τ_t . En se basant sur les résultats à l'échelle locale et les travaux présentés dans [17, 68, 74, 78, 100, 101], Teruel *et al.* choisissent :

$$C_{\mu}^{MT} = C_{\mu} = 0.09. \quad (9.70)$$

La constante et le temps caractéristique associés à la diffusion sont donnés par :

$$C_{\mathcal{E}}^d = C_{\varepsilon_2} = 1.92; \quad \tau_d = \frac{\overline{\mathcal{K}}}{\overline{\mathcal{E}}}. \quad (9.71)$$

Il est d'usage de prendre $C_{\mathcal{E}}^t = C_{\varepsilon_2}$ [17, 68, 74, 78, 100]. Le choix le plus simple est de considérer, de la même manière que dans [17, 68, 100, 101], que τ_t est constant. Pour satisfaire la condition de concordance avec l'état asymptotique de référence, il est alors défini selon :

$$\tau_t = \frac{\overline{\mathcal{K}}_{\infty}}{\overline{\mathcal{E}}_{\infty}}. \quad (9.72)$$

Pour des écoulements transverses dans des faisceaux de crayons à section carrée disposés en quinconce, Teruel donne [101] :

$$\overline{\overline{\mathcal{K}}}_\infty = \left[\frac{120}{c_D} \frac{(\sqrt{1-\phi} + \phi - 1)}{\phi^4} \left(\frac{\sqrt{1-\phi}}{Re} + \frac{1}{60} \right) \right]^{2/3} U_D^2, \quad (9.73)$$

$$\overline{\overline{\mathcal{E}}}_\infty = \frac{120\sqrt{1-\phi}}{\phi^4} \left(\frac{\sqrt{1-\phi}}{Re} + \frac{1}{60} \right) \frac{U_D^3}{H}, \quad (9.74)$$

où ϕ désigne la porosité, U_D la vitesse de Darcy et H la distance séparant deux crayons.

9.2.10 Potentialités et limites du modèle de Teruel

Moyennant un travail plus approfondi sur la modélisation des temps caractéristiques, le modèle de Teruel est capable de donner de bons résultats sur $\overline{\overline{\mathcal{K}}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{E}}}$. Néanmoins, l'analyse globale ne permet pas de distinguer les effets liés à la turbulence de ceux propres à l'approche milieu poreux. Or, selon [103], supposer que ces deux contributions sont de même nature peut mener à des erreurs de modélisation. L'analyse à deux échelles développée par Pinson [76, 78] permet d'éviter cet écueil. C'est l'approche que nous privilégierons dans la suite de ce travail.

9.3 Modèle basé sur une analyse à deux échelles

Nous présentons ici l'analyse et le modèle de Pinson [76, 78].

9.3.1 Analyse à deux échelles de Pinson

En se basant sur les propriétés d'idempotence du filtre spatial dans les cas où l'hypothèse de séparation des échelles est respectée, Pinson [78] introduit la décomposition suivante :

$$\langle \overline{k} \rangle_f = \langle \overline{k}^M \rangle_f + \langle \overline{k}^m \rangle_f, \quad (9.75)$$

où $\langle \overline{k}^M \rangle_f$ et $\langle \overline{k}^m \rangle_f$ désignent les énergies cinétiques turbulentes macroscopique et de sous-filtre définies par :

$$\langle \overline{k}^M \rangle_f = \frac{\overline{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_i \rangle_f}}{2}, \quad (9.76)$$

$$\langle \overline{k}^m \rangle_f = \frac{\overline{\delta u'_i \delta u'_i}}{2}. \quad (9.77)$$

Il définit aussi un terme inter-échelles :

$$\overline{k}^c = \frac{\overline{\delta u'_i \langle u'_i \rangle_f}}{2}. \quad (9.78)$$

Ce terme n'est pas une énergie car sa positivité n'est pas assurée. De la même manière, il définit les tenseurs de Reynolds macroscopique \overline{R}_{ij}^M , de sous-filtre \overline{R}_{ij}^m et inter-échelles² \overline{R}_{ij}^c par :

$$\overline{R}_{ij}^M = \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f}, \quad (9.79)$$

²Ce tenseur n'est pas symétrique.

$$\bar{R}_{ij}^m = \overline{\delta u_i' \delta u_j'}, \quad (9.80)$$

$$\bar{R}_{ij}^c = \delta u_i' \langle u_j' \rangle_f. \quad (9.81)$$

Enfin, il introduit les énergies cinétiques macroscopique et de sous-filtre du mouvement moyen :

$$\langle \bar{E}^M \rangle_f = \frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f}{2}, \quad (9.82)$$

$$\langle \bar{E}^m \rangle_f = \frac{\delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i}{2}. \quad (9.83)$$

Il dérive les équations bilans des différentes énergies et en déduit une analyse des transferts énergétiques au sein de l'écoulement (voir figure 9.2). Il établit que l'énergie cinétique turbulente macroscopique est alimentée par $\langle \bar{E}^M \rangle_f$ via un terme de production par cisaillement macroscopique et par $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ via un terme correspondant à une partie de la production de sous-filtre totale. Il retrouve aussi le transfert spectral classique dû à la cascade d'énergie entre $\langle \bar{k}^M \rangle_f$ et $\langle \bar{k}^m \rangle_f$ [88]. Le travail de \bar{F}'_{ϕ_i} dans l'écoulement fluctuant moyen est identifié comme un terme de transfert spectral supplémentaire entre les deux énergies cinétiques turbulentes. Ce terme est spécifique aux écoulements en milieux poreux. Par ailleurs, il montre que $\langle \bar{k}^m \rangle_f$ est elle aussi alimentée par un terme de production par cisaillement macroscopique et par un terme de production de sous-filtre. Enfin, le travail de la force de traînée dans l'écoulement moyen est un transfert entre les énergies cinétiques du mouvement moyen macroscopique et de sous-filtre.

Il fait ensuite l'hypothèse que les mouvements turbulents macroscopique et de sous-filtre sont peu corrélés. Le tenseur de Reynolds inter-échelles et \bar{k}^c peuvent alors être négligés [92]. Cela revient à supposer que $\langle \bar{k}^M \rangle_f$ est seulement alimentée par un terme de production par cisaillement macroscopique. Concernant les transferts entre $\langle \bar{E}^M \rangle_f$ et $\langle \bar{k}^m \rangle_f$, Pinson [78] distingue deux cas. Pour un milieu peu chargé en solide, la production par cisaillement macroscopique crée de la turbulence macroscopique. L'énergie est ensuite transférée aux échelles plus petites puis dissipée sous forme de chaleur. Une partie des grands tourbillons est hachée par la matrice solide et alimente la turbulence de sous-filtre via le travail de la traînée spécifique dans l'écoulement fluctuant macroscopique. Pour des milieux densément chargés en solide, l'énergie de l'écoulement macroscopique moyen est rapidement transmise à l'écoulement microscopique par le travail de la force de traînée dans l'écoulement macroscopique moyen. La turbulence est alors réduite aux petites échelles et est alimentée par la production de sous-filtre.

9.3.2 Rôle de la production de sous-filtre

Pour modéliser le terme de production de sous-filtre, Pinson [78] considère un écoulement à l'équilibre sans cisaillement macroscopique. L'équation bilan de l'énergie cinétique du mouvement moyen peut alors être schématisée par la figure 9.3. L'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen transmet à $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ un certain montant d'énergie sous la forme du travail de la force de traînée. Puis $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ ne retransmet pas intégralement cette énergie au mouvement turbulent. Une partie est directement dissipée en chaleur. Le reste, qui constitue la production de sous-filtre, alimente ensuite l'énergie cinétique turbulente de sous-filtre.

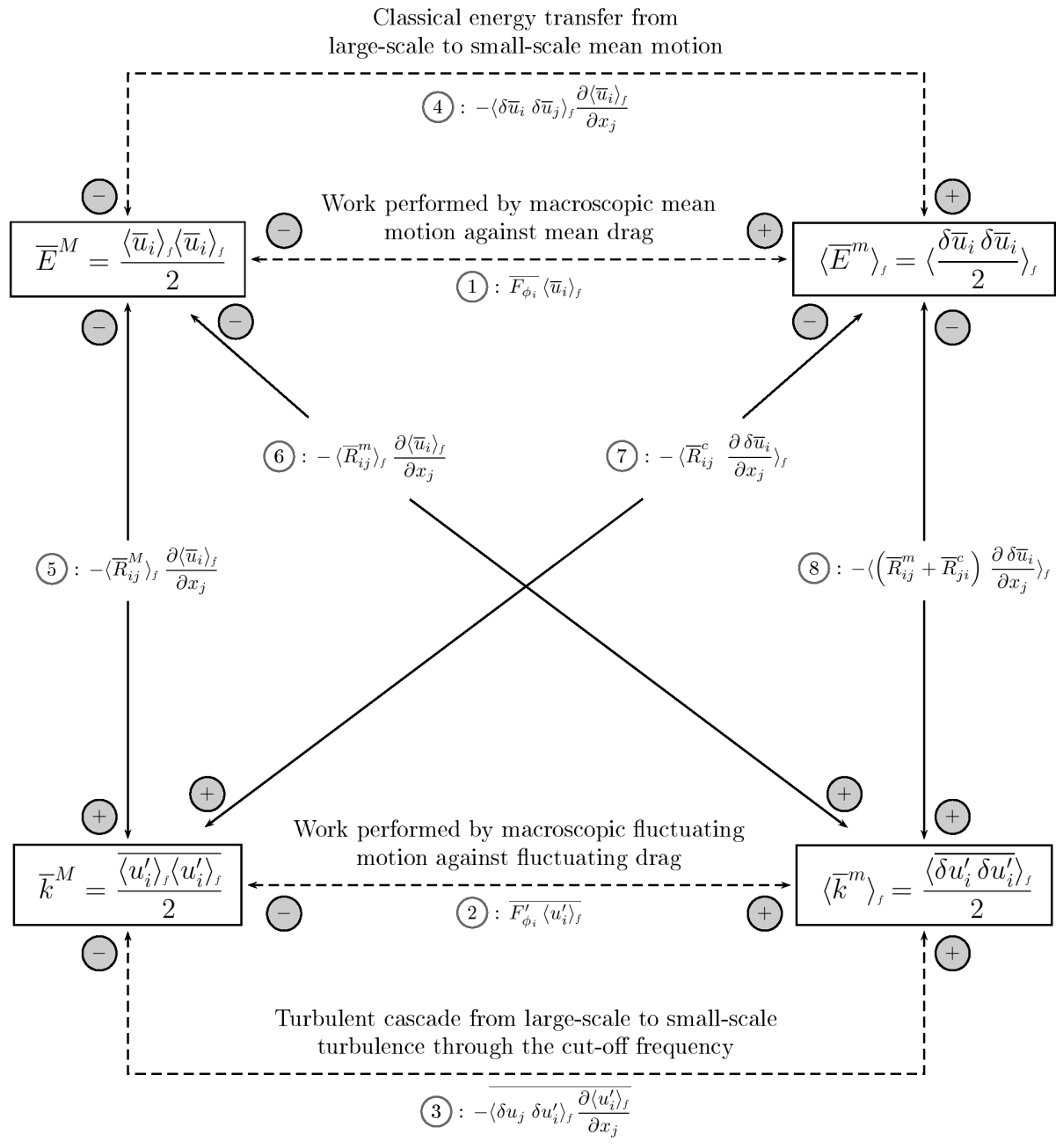


FIG. 9.2 – Analyse détaillée des transferts entre les mouvements moyen et turbulent et des transferts inter-échelle au sein des mouvements moyen et turbulent [78].

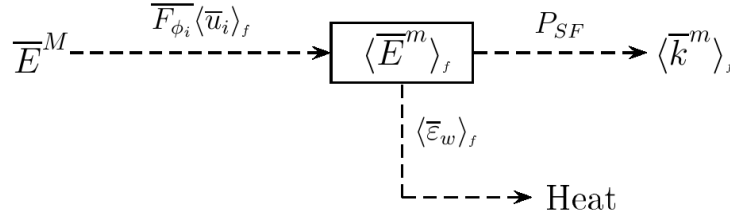


FIG. 9.3 – Bilan schématique de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen pour un écoulement macroscopiquement homogène [78].

Le terme de dissipation en chaleur est lié à la viscosité du fluide et aux gradients des déviations de vitesse. Ces gradients sont en grande partie créés par la présence des parois solides. Ils sont concentrés dans les couches limites ou les sillages attachés à la structure solide. Pour cette raison, ce terme puits est appelé dissipation (visqueuse) de sillage et noté :

$$\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f = \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \quad (9.84)$$

Pinson [78], en s'appuyant sur l'équilibre de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ décrit sur la figure 9.3, écrit alors la production de sous-filtre sous la forme :

$$P_{SF} = \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i} - \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f. \quad (9.85)$$

Cette expression n'est pas à proprement parler une modélisation de la production de sous-filtre car la dissipation de sillage et la force de traînée (*via* le coefficient de frottement) sont aussi des inconnues du problème. Cette expression est utile dans le sens où elle donne un signification à cette production et la relie à une quantité qui est connue pour l'état d'équilibre, à savoir la force de traînée. La modélisation de la production de sous-filtre passe alors par la modélisation du coefficient de frottement et de la dissipation de sillage.

9.3.3 Modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f$

Pinson [76] utilise ensuite les résultats de l'analyse à deux échelles pour proposer un modèle de turbulence pour les écoulements en canaux en l'absence de gradient de vitesse macroscopique. Sous l'hypothèse que les termes diffusifs et dispersifs sont négligeables dans les équations de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$, ces dernières peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = P_{SF} - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f, \quad (9.86)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\epsilon} \rangle_f}{\partial z} = \frac{C_{\epsilon_t}}{\tau_t} P_{SF} - \frac{C_{\epsilon_s}}{\tau_s} \langle \bar{\epsilon} \rangle_f. \quad (9.87)$$

Il postule de plus une équation de transport pour la dissipation de sillage en supposant qu'elle est régie par les mêmes phénomènes que l'énergie de sous-filtre du mouvement moyen :

$$\frac{\partial \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f}{\partial z} = \frac{C_w}{\tau_p} \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z} - \frac{C_w}{\tau_w} \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f, \quad (9.88)$$

où C_w est une constante et τ_p et τ_w des temps caractéristiques à déterminer. Pinson [78] propose de plus un modèle de coefficient de frottement pour des écoulements hors équilibre. En utilisant le profil de vitesse de Reichardt [86], il montre que pour un écoulement à l'équilibre, la relation suivante est valable :

$$f_{p\infty} \propto \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}^{2/3}. \quad (9.89)$$

Puis, en considérant que cette relation peut être étendue à un écoulement hors équilibre et que le coefficient de frottement est lié au gradients de vitesse à la paroi et devrait donc dépendre de la dissipation totale, il propose :

$$\frac{f_p}{f_{p\infty}} \propto \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty} + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}} \right)^{2/3}. \quad (9.90)$$

Afin de retrouver les résultats issus de simulations fines de référence, il ajoute la correction suivante :

$$f_p = f_{p\infty} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} + \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right). \quad (9.91)$$

Les différents paramètres du modèles sont ensuite optimisés grâce à une série de calculs de référence pour des écoulements en canaux plans et tubes circulaires. Pour ces configurations, Pinson [76] propose le modèle suivant :

$$\frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = \text{PSF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (9.92)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = \frac{C_{\varepsilon t}}{\tau_t} \text{PSF} - \frac{C_{\varepsilon s}}{\tau_s} \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (9.93)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} = \frac{C_w}{\tau_p} \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z} - \frac{C_w}{\tau_w} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, \quad (9.94)$$

avec :

$$\text{PSF} = \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z} - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, \quad (9.95)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z} = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 f_p}{2D_h}, \quad (9.96)$$

$$C_{\varepsilon t} = C_{\varepsilon s} = C_{\varepsilon 2}, \quad (9.97)$$

$$\tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} \sqrt{\frac{f_{p\infty}}{f_p}}, \quad (9.98)$$

$$\tau_s = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (9.99)$$

$$\tau_p = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f} \frac{f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / 2D_h}{\sqrt{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}}, \quad (9.100)$$

$$\tau_w = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}, \quad (9.101)$$

$$f_p = f_{p\infty} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} + \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right). \quad (9.102)$$

Il fournit par ailleurs les valeurs des paramètres β et C_w pour des écoulement parallèles en canaux :

- pour un canal plan : $\beta = 0.6$, $C_w = 2.4$,
- pour un tube à section circulaire : $\beta = 0.5$, $C_w = 1.8$.

9.3.4 Potentialités et limites du modèle de Pinson

Le modèle de Pinson est construit à partir d'une analyse poussée des phénomènes physiques propres aux écoulements turbulents en milieux poreux. Il est de plus apte à restituer des comportements dynamiques plus complexes que les modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ présentés précédemment. C'est pourquoi nous choisissons de nous inspirer des travaux de Pinson pour construire un modèle de turbulence en milieu poreux. Cependant, le modèle de Pinson n'inclut pas de modélisation dynamique de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. **Or nous pensons que c'est cette énergie qui permet de traduire à l'échelle macroscopique l'établissement des profils de vitesse locaux et qu'il est donc très important d'étudier son comportement dynamique.** De plus, une meilleure connaissance de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ doit aussi permettre de faire le lien entre la modélisation macroscopique de la turbulence et celle de la dispersion thermique (voir chapitre 11). Nous chercherons donc par la suite, tout en conservant la précision et la rigueur de l'analyse de Pinson, à proposer un modèle plus simple et plus aisément généralisable.

MODÉLISATION DE LA TURBULENCE EN MILIEU POREUX HOMOGENE

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre est de proposer un modèle de turbulence en milieu poreux applicable à une gamme d'écoulements la plus large possible, et pouvant être étendu pour modéliser, par exemple, un écoulement en sortie de cœur de réacteur ou une singularité due à la présence d'une grille de mélange.

10.1 Analyse à deux échelles

L'analyse de Teruel [100] permet de déterminer que le mouvement microscopique est alimenté par le mouvement macroscopique. Celle de Pinson [78] fournit une représentation très détaillée des transferts énergétiques. Nous reprenons ici la méthode de Pinson, à la différence près que nous ne faisons pas la distinction entre turbulence macroscopique et turbulence de sous-filtre afin de simplifier l'analyse. Autrement dit, nous traitons conjointement les contributions macroscopiques $\langle \bar{k}^M \rangle_f$ et de sous-filtre $\langle \bar{k}^m \rangle_f$ identifiées par Pinson [78] en les regroupant dans un seul terme $\langle \bar{k} \rangle_f$. Notons que nous considérons ici des milieux à porosité constante, ce qui permet de faire disparaître la porosité des équations. Nous travaillons néanmoins toujours selon une approche de type « milieux poreux ». En utilisant les propriétés d'idempotence du filtre spatial, on peut écrire :

$$\langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f = \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f + \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f. \quad (10.1)$$

Cette décomposition suggère de définir différentes énergies cinétiques du système¹ :

- l'énergie cinétique turbulente moyennée :

$$\langle \bar{k} \rangle_f = \frac{1}{2} \langle \overline{u'_i u'_i} \rangle_f; \quad (10.2)$$

- l'énergie cinétique dispersive :

$$\bar{E}^m = \frac{1}{2} \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i; \quad (10.3)$$

- l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen :

$$\bar{E}^M = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f. \quad (10.4)$$

¹Notons que $\bar{\mathcal{K}} = \langle \bar{k} \rangle_f + \langle \bar{E}^m \rangle_f$

10.1.1 Équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$

L'équation microscopique de \bar{k} pour un écoulement incompressible s'écrit (voir p. 28) :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{k}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu_f \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (10.5)$$

Le filtre spatial est ensuite appliqué à l'équation (10.5) :

- dérivée temporelle :

$$\left\langle \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} \right\rangle_f = \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t}; \quad (10.6)$$

- terme de convection :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{k}) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \bar{k} \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{k} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f; \quad (10.7)$$

- terme de diffusion turbulente :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f + \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i n_i \delta_\omega \right\rangle_f, \quad (10.8)$$

soit, avec la condition d'adhérence en paroi :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f; \quad (10.9)$$

- terme de diffusion moléculaire :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right\rangle_f + \underbrace{\left\langle \nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} n_i \delta_\omega \right\rangle_f}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \nu_f \bar{k} n_i \delta_\omega \rangle_f}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right); \end{aligned} \quad (10.10)$$

- terme de production :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\overline{u'_i u'_j} \partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f &= \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f + \left\langle \delta \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f \\ &= \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \left\langle \delta \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\ &= \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \left\langle \delta R_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f; \end{aligned} \quad (10.11)$$

- terme de dissipation visqueuse :

$$\left\langle \nu_f \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle_f = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \quad (10.12)$$

L'équation de $\langle \bar{k} \rangle_f$ s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f}_I - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f}_{II} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right)}_{III} \\ & - \underbrace{\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f}_{V} - \underbrace{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}_{VI}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

où les différents termes correspondent respectivement à :

- I : dispersion ;
- II : diffusion turbulente ;
- III : diffusion moléculaire ;
- IV : production macroscopique ;
- V : production de sous-filtre ;
- VI : dissipation visqueuse homogénéisée.

10.1.2 Équation bilan de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$

L'équation bilan de $\delta \bar{u}_i$ est obtenue en soustrayant l'équation de $\langle \bar{u}_i \rangle_f$ (2.64) à celle de \bar{u}_i (2.14) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \bar{u}_i \bar{u}_j) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{\partial \delta \bar{R}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f + \bar{F}_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Afin d'écrire l'équation bilan de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$, la relation (10.14) est multipliée par $\delta \bar{u}_i$ et filtrée spatialement :

$$\begin{aligned} \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial t} \right\rangle_f + \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{u}_j) \right\rangle_f + \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \bar{u}_i \bar{u}_j) \right\rangle_f = \\ - \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \bar{P}}{\partial x_i} \right\rangle_f + \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f \\ - \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{R}_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle_f + \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \right\rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \bar{F}_{\phi_i} \rangle_f. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Les différents termes sont ensuite écrits de façon à faire apparaître $\langle \bar{E}^m \rangle_f$:

- le terme de dérivée temporelle peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial t} \right\rangle_f &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i) \right\rangle_f \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i \rangle_f \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t}; \end{aligned} \quad (10.16)$$

- le second terme du membre de gauche peut aussi s'écrire, en utilisant la condition d'adhérence en paroi et l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{u}_j) \right\rangle_f = \langle \delta \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}; \quad (10.17)$$

- le terme convectif de l'équation de $\delta \bar{u}_i$ multiplié par $\delta \bar{u}_i$ et filtré spatialement se scinde en un terme de dispersion et un terme de convection :

$$\begin{aligned} \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \bar{u}_i \bar{u}_j) \right\rangle_f &= \left\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right\rangle_f + \left\langle \bar{u}_j \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\ &= \left\langle \bar{u}_j \frac{\partial \bar{E}^m}{\partial x_j} \right\rangle_f. \end{aligned} \quad (10.18)$$

En utilisant l'hypothèse d'écoulement incompressible et la condition d'adhérence en paroi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{u}_j \frac{\partial \bar{E}^m}{\partial x_j} \right\rangle_f &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{E}^m \bar{u}_j) \right\rangle_f \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \bar{E}^m \bar{u}_j \right\rangle_f \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \bar{E}^m \right\rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_j \right\rangle_f, \end{aligned} \quad (10.19)$$

ce qui donne :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \bar{u}_i \bar{u}_j) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \bar{E}^m \right\rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_j \right\rangle_f ; \quad (10.20)$$

- le terme de couplage avec la pression est développé pour faire apparaître la contribution due à la paroi :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \bar{P}}{\partial x_i} \right\rangle_f = \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \bar{P} \delta \bar{u}_i) \right\rangle_f - \left\langle \delta \bar{P} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f. \quad (10.21)$$

Le second terme du membre de droite s'annule sous l'hypothèse d'incompressibilité. Puis, en utilisant les règles de dérivation liées à l'opérateur de moyenne spatiale :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \bar{P}}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \right\rangle_f + \frac{1}{\rho} \left\langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i n_i \delta \omega \right\rangle_f. \quad (10.22)$$

La condition d'adhérence à la paroi donne de plus :

$$\frac{1}{\rho} \left\langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i n_i \delta \omega \right\rangle_f = \frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f}{\rho} \left\langle \delta \bar{P} n_i \delta \omega \right\rangle_f. \quad (10.23)$$

Finalement :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \bar{P}}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \right\rangle_f + \frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f}{\rho} \left\langle \delta \bar{P} n_i \delta \omega \right\rangle_f. \quad (10.24)$$

- le couplage avec les contraintes visqueuses est traité de manière analogue :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f - \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \nu_f \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f + \left\langle \nu_f \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f \\
 &\quad - \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \nu_f \frac{1}{2} \frac{\partial \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f + \langle \bar{u}_i \rangle_f \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f \\
 &\quad - \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \nu_f \frac{1}{2} \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i n_j \delta \omega \right\rangle_f \\
 &\quad + \langle \bar{u}_i \rangle_f \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f - \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_f \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle n_j \delta \omega \rangle_f \\
 &\quad + \langle \bar{u}_i \rangle_f \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f - \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \tag{10.25}
 \end{aligned}$$

Or, pour un milieu à porosité constante, $\langle n_j \delta \omega \rangle_f = 0$. Le terme de diffusion moléculaire s'écrit donc finalement :

$$\begin{aligned}
 \left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\
 &\quad + \langle \bar{u}_i \rangle_f \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta \omega \right\rangle_f - \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f; \tag{10.26}
 \end{aligned}$$

- le troisième terme du membre de droite dans l'équation (10.15) est écrit de façon à faire apparaître la production de sous-filtre et la puissance par le mouvement microscopique des contraintes turbulentes :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta R_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta R_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f + \left\langle \delta R_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f; \tag{10.27}$$

- les deux derniers termes du membre de droite sont nuls par idempotence du filtre spatial :

$$\left\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \right\rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \bar{F}_{\phi_i} \rangle_f = 0. \tag{10.28}$$

L'équation bilan de l'énergie cinétique dispersive prend finalement la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{E}^m \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_i} \right)}_{II} - \underbrace{\left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f}_{III} \\
 & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f}_{IV} + \underbrace{\left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f}_V + \underbrace{\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}}_{VI} \\
 & - \underbrace{\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{VII} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f}_{VIII}, \tag{10.29}
 \end{aligned}$$

où :

- I : couplage avec la pression ;
- II : diffusion ;
- III : dissipation de sillage ;
- IV : puissance par le mouvement microscopique des contraintes turbulentes ;
- V : opposé de la production de sous-filtre ;
- VI : travail de la force de traînée ;
- VII : transfert d'énergie entre l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen et $\langle \bar{E}^m \rangle_f$;
- VIII : dispersion.

Le terme III, noté $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ par la suite, est lié aux gradients des déviations de vitesse. Or ces gradients sont en grande partie créés par la présence des parois solides et c'est dans les couches limites ou les sillages attachés à la structure solide qu'ils sont les plus importants. C'est pourquoi ce terme est appelé **dissipation (visqueuse) de sillage** [76].

10.1.3 Énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen

L'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen est définie comme :

$$\bar{E}^M = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f. \tag{10.30}$$

L'équation de \bar{E}^M s'obtient en multipliant l'équation macroscopique de quantité de mouvement (2.64) par $\langle \bar{u}_i \rangle_f$:

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f = & - \frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) - \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \\
 & - \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f - \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}. \tag{10.31}
 \end{aligned}$$

Chacun des termes de la relation (10.31) est ensuite traité séparément.

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} = \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial t}; \quad (10.32)$$

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f = \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \bar{u}_j \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (10.33)$$

Cela donne, avec l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{E}^M \langle \bar{u}_j \rangle_f \right). \quad (10.34)$$

Toujours avec l'hypothèse d'incompressibilité, le terme de couplage avec la pression s'écrit :

$$\frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \bar{P} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \right). \quad (10.35)$$

Le terme de diffusion se décompose en :

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) - \nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial x_j} \right) - \nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Le terme de couplage avec les contraintes turbulentes est écrit de façon à faire apparaître la puissance des contraintes turbulentes et un terme de production de turbulence par cisaillement macroscopique :

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \right) - \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (10.37)$$

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \right) - \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (10.38)$$

De plus, en notant \bar{E} l'énergie cinétique totale du mouvement moyen :

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i, \quad (10.39)$$

on arrive à :

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f = \langle \delta \bar{E} \delta \bar{u}_i \rangle_f - \langle \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f, \quad (10.40)$$

ce qui conduit à :

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \delta \bar{E} \delta \bar{u}_i \rangle_f - \langle \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f \right) - \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (10.41)$$

Finalement, l'équation bilan de \bar{E}^M s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{E}^M \langle \bar{u}_i \rangle_f \right) = & \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \bar{P} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f \right)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial x_i} \right)}_{II} - \underbrace{\nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{III} \\
 & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \right)}_{IV} + \underbrace{\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \delta \bar{E} \delta \bar{u}_i \rangle_f - \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f \right)}_{VI} \\
 & + \underbrace{\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{VII} - \underbrace{\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}}_{VIII}, \tag{10.42}
 \end{aligned}$$

où :

- I : couplage avec la pression ;
- II : diffusion ;
- III : dissipation visqueuse dans l'écoulement macroscopique moyen ;
- IV : puissance par le mouvement macroscopique des contraintes turbulentes ;
- V : production de turbulence par cisaillement macroscopique ;
- VI : terme lié à la dispersion ;
- VII : transfert d'énergie entre \bar{E}^M et $\langle \bar{E}^m \rangle_f$;
- VIII : travail de la force de traînée.

10.1.4 Étude des transferts

L'analyse transferts d'énergie au sein d'un écoulement turbulent en milieu poreux s'appuie sur l'étude comparée des équations bilans des différentes énergies cinétiques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f \\ & - \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \end{aligned} \quad (10.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{E}^m \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f + \left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f \\ & - \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}, \end{aligned} \quad (10.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{E}^M \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \bar{P} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \delta \bar{E} \delta \bar{u}_i \rangle_f - \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f) + \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \\ & + \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Certains termes se retrouvent dans plusieurs équations bilans. L'étude de ces différents termes permet d'appréhender les transferts d'énergie qui ont lieu au sein de l'écoulement.

Terme de production par cisaillement macroscopique

Le terme de production par cisaillement macroscopique :

$$PM = - \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \quad (10.46)$$

est présent dans les équations de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et \bar{E}^M . C'est *via* ce transfert que l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen alimente la turbulence.

Terme de production de sous-filtre

L'énergie cinétique dispersive alimente la turbulence *via* le terme de production de sous-filtre :

$$PSF = - \left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \quad (10.47)$$

Terme de transfert d'énergie entre \bar{E}^M et $\langle \bar{E}^m \rangle_f$

Le terme

$$-\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \quad (10.48)$$

représente le transfert d'énergie classique entre les mouvements moyens macroscopique et de sous-filtre.

Travail de la force de traînée

La présence de la matrice solide provoque l'apparition d'un terme de transfert supplémentaire entre les mouvements moyens macroscopique et de sous-filtre. Il est lié au travail de la force de traînée dans l'écoulement moyen [28, 85] :

$$\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}. \quad (10.49)$$

Termes de dissipation

Le terme

$$\nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \quad (10.50)$$

dans l'équation de \bar{E}^M est une dissipation visqueuse dans l'écoulement macroscopique moyen. Ce terme, ainsi que le terme $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ dans l'équation de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ traduisent le fait que toute l'énergie du mouvement macroscopique n'est pas retransmise au mouvement microscopique, et que toute l'énergie du mouvement moyen n'est pas retransmise au mouvement turbulent mais est directement dissipée en chaleur.

Récapitulatif des transferts

L'énergie macroscopique du mouvement moyen alimente d'une part l'énergie cinétique dispersive *via* la force de traînée et d'autre part la turbulence *via* la production macroscopique par cisaillement. L'énergie cinétique dispersive alimente la turbulence *via* la production de sous-filtre, ce qui traduit le fait que, pour un écoulement turbulent à l'équilibre dans un milieu poreux, les quantités turbulentes spatialement moyennées sont non nulles. L'énergie de la turbulence est ensuite transférée de proche en proche aux structures les plus petites et finalement dissipée en chaleur. Par ailleurs, toute l'énergie provenant du mouvement macroscopique moyen n'est pas retransmise au mouvement turbulent : une partie est directement dissipée en chaleur. La figure 10.1 résume cette analyse.

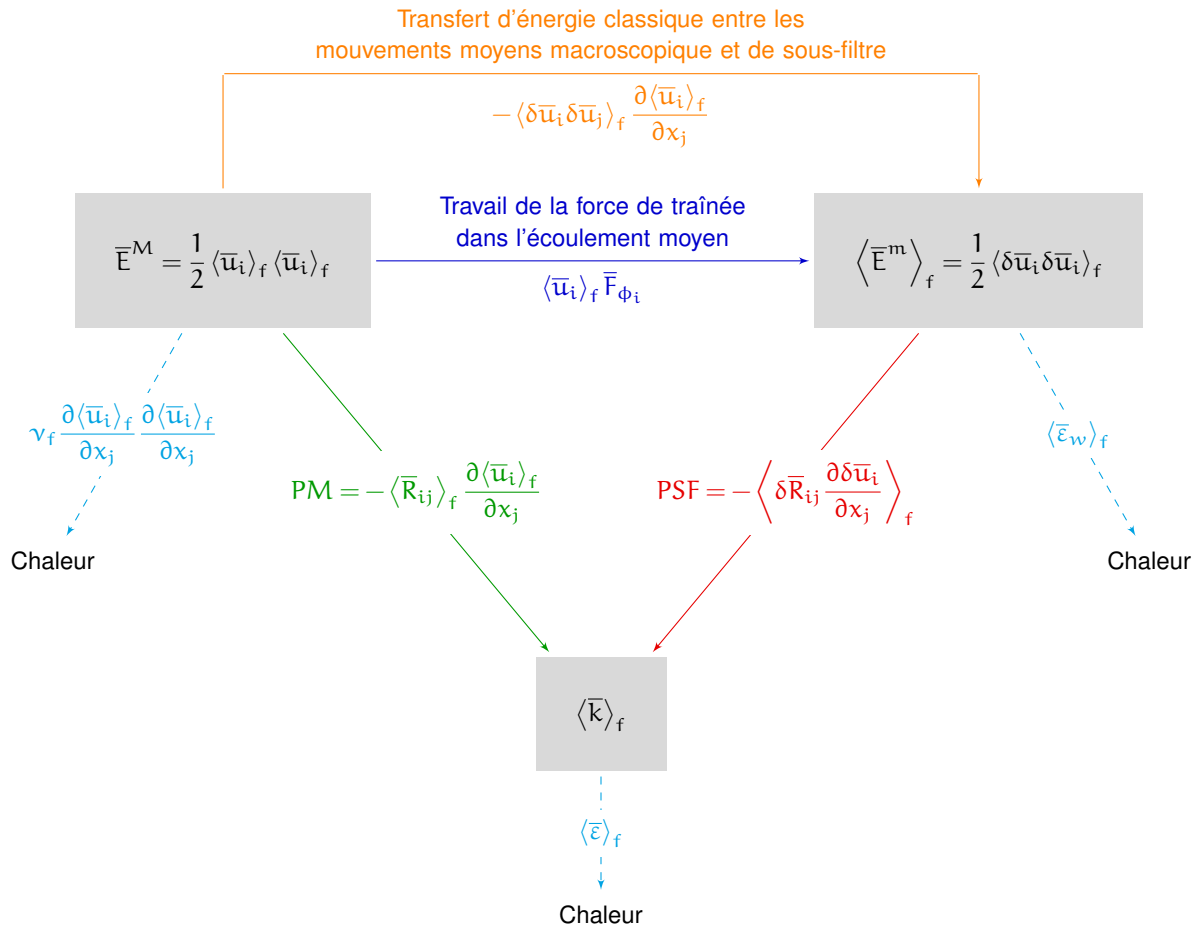


FIG. 10.1 – Description schématique des transferts énergétiques au sein d'un écoulement turbulent en milieu poreux.

10.2 Proposition d'un modèle de turbulence

On rappelle les équations macroscopiques des énergies cinétiques de turbulence (10.13) et de sous-filtre du mouvement moyen (10.29) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u_i' \right\rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f \\ &\quad - \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \left\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \end{aligned} \quad (10.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{E}^m \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f - \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \\ &\quad - \text{PSF} - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (10.52)$$

10.2.1 Modélisation de la production par cisaillement macroscopique

Le terme $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$ est généralement modélisé grâce à une fermeture au premier gradient [68, 74, 78]. Les auteurs s'inspirent de la modélisation de la turbulence à l'échelle locale et proposent, pour un écoulement incompressible dans un milieu à porosité constante :

$$-\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f = \nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij}. \quad (10.53)$$

Le **coefficient de diffusion turbulente macroscopique** est lui aussi défini par analogie avec les modèles locaux :

$$\nu_{t\phi} = C'_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (10.54)$$

où C'_μ est une constante. Il est d'usage de prendre $C'_\mu = 0.09$.

10.2.2 Modélisation de la diffusion turbulente

Pour modéliser le terme de diffusion turbulente, les auteurs [17, 28, 68, 74, 78] font unanimement appel à une fermeture au premier gradient :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u_i' \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right). \quad (10.55)$$

10.2.3 Modélisation de la dispersion

Le terme de dispersion dans l'équation de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est modélisé en supposant que la dispersion active est négligeable, c'est-à-dire en ne tenant compte que de la dispersion passive :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_j} \right). \quad (10.56)$$

En réalité, \bar{k} est aussi soumis au mécanisme de dispersion active (voir p. 141), mais ce dernier ne sera pas pris en compte dans le suite de cette étude.

Les termes de couplage avec la pression, de dispersion et de puissance par le mouvement microscopique des contraintes turbulentes dans l'équation (10.29) sont regroupés en un seul terme assimilé à un terme de dispersion et modélisé par une fermeture au premier gradient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{E}^m} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_j} \right). \quad (10.57)$$

Cela revient à négliger la contribution de la pression comme il est d'usage de le faire à l'échelle locale et la dispersion active.

10.2.4 Modélisation du coefficient de frottement

Le coefficient de frottement est lié aux gradients de vitesse en paroi. Cela suggère que la dissipation de sillage est un bon indicateur de l'évolution du coefficient de frottement. Par un argument aux dimensions, la dissipation de sillage peut être estimée par :

$$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f \sim \frac{u_f^3}{\ell}, \quad (10.58)$$

où u_f est la vitesse de frottement et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement. Pour un milieu spatialement périodique, ℓ est égale au diamètre hydraulique des pores, noté D_h . En utilisant la relation (10.58), le modèle suivant est proposé pour le coefficient de frottement :

$$\frac{f_p}{f_{p\infty}} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}} \right)^{2/3}, \quad (10.59)$$

où $f_{p\infty}$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}$ sont des valeurs représentatives du coefficient de frottement et de la dissipation de sillage pour l'écoulement considéré.

10.2.5 Modélisation de la dissipation visqueuse et de la production de sous-filtre

Étant donné que la production de sous-filtre représente un transfert d'énergie entre l'énergie dispersive et l'énergie de turbulence, elle n'existe que lorsque ces deux énergies sont non nulles. Plus formellement, la production de sous-filtre dépend du tenseur des contraintes turbulentes \bar{R}_{ij} , lié à \bar{k} , et des déviations spatiales de vitesse, liées à \bar{E}^m . Nous supposons donc que la PSF peut être exprimée en fonction de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ et, afin d'assurer qu'elle sera nulle pour des écoulements laminaires, nous proposons un modèle de la forme :

$$\frac{\text{PSF}}{\text{PSF}_\infty} = \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^a \left(\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} \right)^b, \quad (10.60)$$

où a et b sont des paramètres à déterminer, et où PSF_∞ , $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$ et $\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}$ sont des valeurs représentatives de la production de sous-filtre, de l'énergie cinétique de turbulence et de l'énergie dispersive pour l'écoulement considéré. La dissipation visqueuse représente quant à elle la partie de l'énergie de turbulence

qui est dissipée en chaleur. Par analogie avec les modèles $\bar{k}-\ell$ locaux, nous supposons qu'elle est pilotée par $\langle \bar{k} \rangle_f$. Nous choisissons donc :

$$\frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}} = \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^n, \quad (10.61)$$

où n est un paramètre à déterminer.

10.2.6 Modélisation de la dissipation de sillage

Une première possibilité de modélisation pour la dissipation de sillage est de procéder par analogie avec les modèles $\bar{k}-\ell$ locaux. L'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ est alors supposée jouer le même rôle que \bar{k} , tandis que la dissipation visqueuse est mise en parallèle avec la dissipation de sillage. Cette dernière est alors exprimée en fonction de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ comme :

$$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f = \frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f^{3/2}}{\ell}, \quad (10.62)$$

où ℓ est une échelle de longueur à déterminer. Des tests *a priori* sont effectués pour valider cette proposition. La figure 10.2 montre que, pour des écoulements en canaux plans, la relation (10.62) ne fournira pas une représentation correcte de la dissipation de sillage puisque les variations de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ se font dans le sens opposé à celles de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Nous choisissons donc, comme le suggère Pinson [76], un modèle à équation de transport pour $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Dériver l'équation analytique de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ est délicat, c'est pourquoi nous choisissons de travailler directement avec une équation de transport modélisée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f = & \text{Diffusion}(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f) + \text{Dispersion}(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f) + \\ & \text{Source}(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f) - \text{Puits}(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f). \end{aligned} \quad (10.63)$$

La construction d'une équation modèle nécessite d'identifier un terme source et un terme puits. Par analogie avec les modèles $\bar{k}-\bar{\varepsilon}$ locaux, le terme puits joue le rôle de dissipation dans l'équation de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Il est pris proportionnel à cette dernière et se schématise par :

$$\text{Puits}(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f) = \frac{C_{\varepsilon_w,2}}{\tau_{w2}} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f. \quad (10.64)$$

Par ailleurs, nous avons vu que la dissipation de sillage est due à la présence des parois, autrement dit à la traînée des structures solides. Le terme source dans l'équation de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ est alors relié au travail de la force de traînée :

$$\text{Source}(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f) = \frac{C_{\varepsilon_w,1}}{\tau_{w1}} \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}. \quad (10.65)$$

Nous proposons donc l'équation modèle suivante pour $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_{\bar{\varepsilon}_w}} \right) \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{\varepsilon}_w} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{C_{\varepsilon_w,2}}{\tau_{w2}} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \frac{C_{\varepsilon_w,1}}{\tau_{w1}} \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}, \end{aligned} \quad (10.66)$$

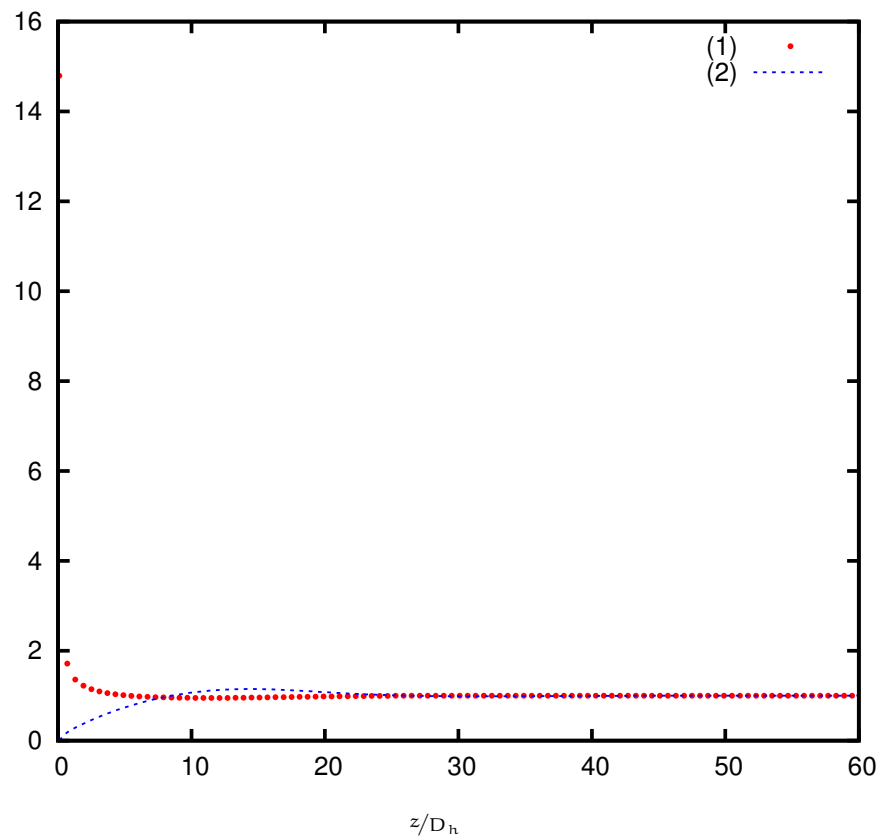


FIG. 10.2 – Évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ (1) et de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ (2) adimensionnées pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan. Les variations étant de sens opposé, la fermeture algébrique (10.62) ne convient pas.

où $\mathcal{D}_{ij}^{\bar{\varepsilon}_w}$ est un coefficient de dispersion associé à $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$, τ_{w_1} et τ_{w_2} sont les temps caractéristiques associés à la dissipation de sillage et au travail de la force de traînée, et où $C_{\varepsilon_{w,1}}$ et $C_{\varepsilon_{w,2}}$ sont des constantes. Nous supposons que la dispersion est négligeable devant les termes sources. Il reste à présent à déterminer les paramètres τ_{w_i} et $C_{\varepsilon_{w,i}}$.

Choix des temps caractéristiques

Le choix des temps caractéristiques τ_{w_2} et τ_{w_3} s'inspire des modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ locaux. Pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, ils sont définis comme :

$$\tau_{w_1} = \tau_{w_2} = \frac{\langle \bar{\varepsilon}^m \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}. \quad (10.67)$$

Ce choix préserve l'unicité des états asymptotiques. Par ailleurs, l'équation (10.66) prise à l'équilibre fournit alors :

$$C_{\varepsilon_{w,2}} = C_{\varepsilon_{w,1}} \times \frac{\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}^\infty}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}}. \quad (10.68)$$

10.3 Application au cas d'un milieu stratifié

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur l'établissement d'un écoulement turbulent dans un milieu stratifié composé d'un empilement de canaux plans (voir figure 10.3) ou de tubes circulaires (voir figure 10.4). Les gradients de vitesse spatialement moyennés sont nuls. L'étude du milieu poreux peut alors être réduite à celle d'un motif élémentaire.

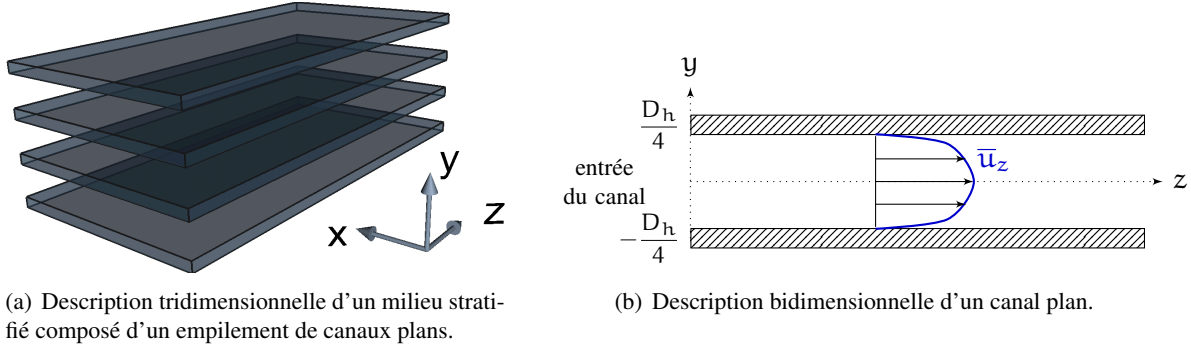


FIG. 10.3 – Description d'un milieu stratifié composé d'un empilement de canaux plans. Le diamètre hydraulique est égal au double de la distance séparant deux plaques.

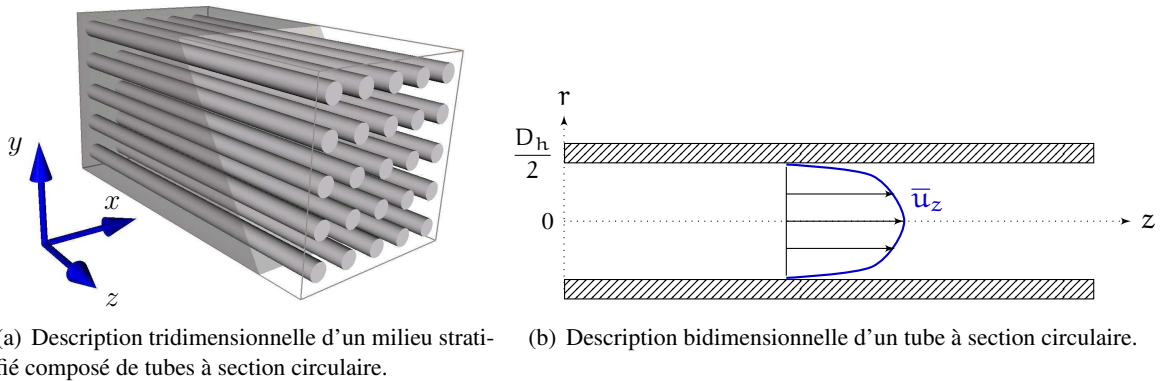


FIG. 10.4 – Description d'un milieu stratifié composé de tubes à section circulaire. Le diamètre hydraulique est égal au diamètre des tubes.

Les équations de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\epsilon}^m \rangle_f$ se simplifient dans ce cas en :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{k} \rangle_f + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{k} \rangle_f = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{k}} \right) \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} \right] + \text{PSF} - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f, \quad (10.69)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\epsilon}^m \rangle_f + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{\epsilon}^m \rangle_f = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{\epsilon}^m} \right) \frac{\partial \langle \bar{\epsilon}^m \rangle_f}{\partial z} \right] - \text{PSF} - \langle \bar{\epsilon}_{wv} \rangle_f + \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}, \quad (10.70)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_{\bar{\varepsilon}_w}} + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{\varepsilon}_w} \right) \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} \right] - \frac{C_{\varepsilon_w,2}}{\tau_{w2}} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \frac{C_{\varepsilon_w,1}}{\tau_{w1}} \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}, \quad (10.71)$$

$$\nu_{t\phi} = C'_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (10.72)$$

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^n, \quad (10.73)$$

$$\tau_{w1} = \tau_{w2} = \frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}. \quad (10.74)$$

Il reste alors à déterminer :

- les états asymptotiques qui dépendent du milieu considéré et pour lesquels nous proposons des corrélations ;
- les constantes phénoménologiques α , b , n et $C_{\varepsilon_w,1}$ pour lesquelles une stratégie de calibrage est établie.

Les modèles que nous avons choisis respectent automatiquement la contrainte de concordance des états asymptotiques (voir figure 9.1). Le calibrage des paramètres restant à déterminer a maintenant pour objectif d'assurer un bon comportement dynamique. Dans la suite de ce chapitre, le modèle de turbulence proposé sera optimisé sur huit cas-tests de référence résumés dans le tableau 10.1. Les valeurs de référence sont issues de simulations CFD locales moyennées. Le modèle local utilisé pour réaliser ces calculs est le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien [19]. Ces calculs correspondent à des écoulements turbulents incompressibles en canal plan et en tube circulaire pour différents Reynolds. Les autres grandeurs qui varient d'un cas à l'autre sont l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence en entrée du canal $L_0 = \langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2} / \langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f$ et la valeur de l'énergie cinétique turbulente spatialement moyennée en entrée, rapportée à la valeur à l'équilibre $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$.

Nom	Re	L_0/D_h	$\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$
CP_SIM_REF_1	1×10^5	1/10	3
CP_SIM_REF_2	1×10^5	1/25	3
CP_SIM_REF_3	1×10^5	1/10	1/2
CP_SIM_REF_4	5×10^4	1/10	3
TUBE_SIM_REF_1	1×10^5	1/10	3
TUBE_SIM_REF_2	1×10^5	1/25	3
TUBE_SIM_REF_3	1×10^5	1/10	1/2
TUBE_SIM_REF_4	5×10^4	1/10	3

TAB. 10.1 – Description des écoulements en canaux pris comme base d'optimisation du modèle de turbulence.

10.3.1 Modélisation des états asymptotiques

Pour un écoulement dans un milieu poreux, les grandeurs turbulentes spatialement moyennées ne sont pas nulles à l'équilibre. Dans un premier temps, pour pouvoir fermer le modèle, il est utile de déterminer, pour la géométrie considérée, les valeurs asymptotiques ou d'équilibre. Ces valeurs seront ensuite utilisées comme échelles caractéristiques (notées \cdot_∞) dans le modèle de turbulence. Pour un écoulement turbulent établi, un modèle peut être proposé en se basant sur des résultats numériques. Les résultats choisis comme référence sont issus de simulations 1D dans une section du canal, en régime établi. Le modèle local utilisé pour faire ces calculs est le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ de Chien [19].

Modélisation de $\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty}$

La dissipation de sillage est définie par :

$$\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f = \left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \quad (10.75)$$

Pour un écoulement laminaire en canal plan ou en tube circulaire, les profils de vitesse analytiques donnent :

$$\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty} = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty}. \quad (10.76)$$

La dissipation de sillage est liée aux gradients de déviation de vitesse qui sont concentrés à proximité des parois. Cela suggère que la dissipation de sillage est liée à la vitesse de frottement. Pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, elle est écrite comme :

$$\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty} \propto \frac{u_f^3}{D_h}, \quad (10.77)$$

ou encore :

$$\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty} = C_w(\text{Re}) \times \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} \times f_{p\infty}^{3/2}. \quad (10.78)$$

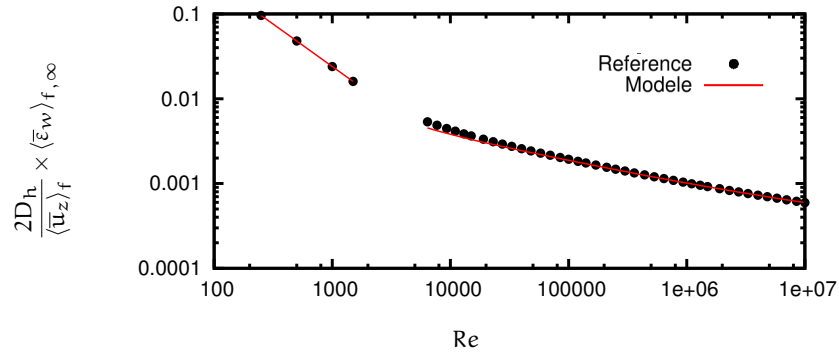
D'après [76], $C_w(\text{Re})$ peut être considérée comme constante pour des écoulements turbulents en canaux plans ou en tubes circulaires. Les résultats numériques donnent alors :

$$C_w(\text{Re}) = 3. \quad (10.79)$$

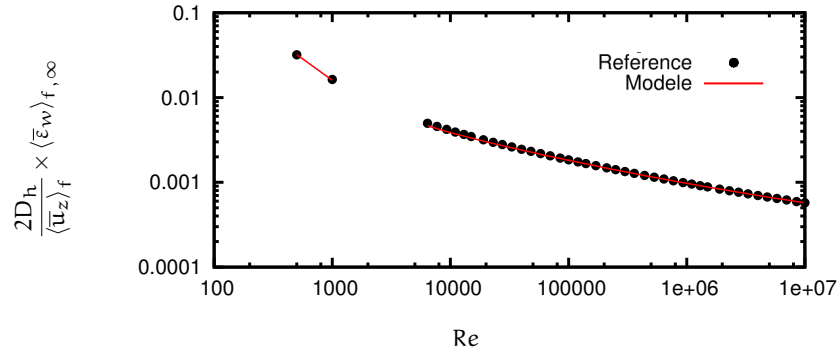
Un résultat similaire peut être obtenu en utilisant la loi de référence de Reichardt (B.28). Finalement, le modèle proposé pour la valeur asymptotique de la dissipation de sillage en canaux plans et tubes circulaires est le suivant :

$$\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty} = \begin{cases} \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} \times f_{p\infty} & \text{si } \text{Re} < 2000, \\ C_w \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} \times f_{p\infty}^{3/2}, C_w = 3 & \text{si } \text{Re} > 6000. \end{cases} \quad (10.80)$$

Notons que ce modèle couvre les régimes laminaire et turbulent. En revanche, la validité du modèle de turbulence bas Reynolds de Chien [19] n'étant pas assurée dans la zone $2000 < \text{Re} < 6000$, nous ne traitons pas ce domaine. La figure 10.5 permet de vérifier la concordance entre le modèle (10.80) et les résultats de référence.



(a) Canal plan



(b) Tube

FIG. 10.5 – Évolution de la dissipation de sillage à l'équilibre $\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f, \infty}$ en fonction du nombre de Reynolds pour des écoulements turbulents en canal plan et en tube circulaire. Comparaison du modèle (10.80) aux résultats de référence obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ de Chien [19].

Modélisation de $\bar{F}_{\phi_z}^\infty$

La force de traînée est définie par :

$$\bar{F}_{\phi_i} \equiv \left\langle \left(-\frac{\delta \bar{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta \omega \right\rangle_f, \quad (10.81)$$

ce qui se simplifie, pour un écoulement parallèle en canal, en :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\phi_z} &= \left\langle \nu_f \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} n_y \delta \omega \right\rangle_f \\ &= \left\langle u_f^2 \delta \omega \right\rangle_f \\ &= \frac{4}{D_h} \times \langle \bar{u}_z \rangle_f^2 \times \frac{f_p}{8}, \end{aligned} \quad (10.82)$$

soit encore :

$$\bar{F}_{\phi_z} = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{2D_h} f_p. \quad (10.83)$$

Pour un écoulement à l'équilibre, cela donne donc :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}^\infty = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty}. \quad (10.84)$$

Tous les paramètres de (10.84) sont connus. Le coefficient de frottement provient de corrélations de la littérature [95] (Blasius, Mc Adams, ...). Ce modèle fonctionne quel que soit le régime d'écoulement.

Modélisation de PSF_∞

En régime laminaire, la production de sous-filtre est nulle. En régime turbulent, la PSF à l'équilibre peut être évaluée en étudiant l'équation de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. L'état d'équilibre de l'équation de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ fournit :

$$PSF_\infty = \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}^\infty - \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty}. \quad (10.85)$$

C'est cette équation que Pinson [78] avait utilisée pour modéliser la production de sous-filtre. En utilisant le modèle de dissipation de sillage (10.80) et la relation (10.84), la production de sous-filtre à l'équilibre s'écrit donc, en régime turbulent :

$$PSF_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } Re < 2000, \\ \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty} (1 - C_w f_{p\infty}^{1/2}) & \text{si } Re > 6000, \end{cases} \quad (10.86)$$

où C_w est donné par (10.79). La figure 10.6 permet de vérifier la concordance entre le modèle (10.86) et les résultats de référence.

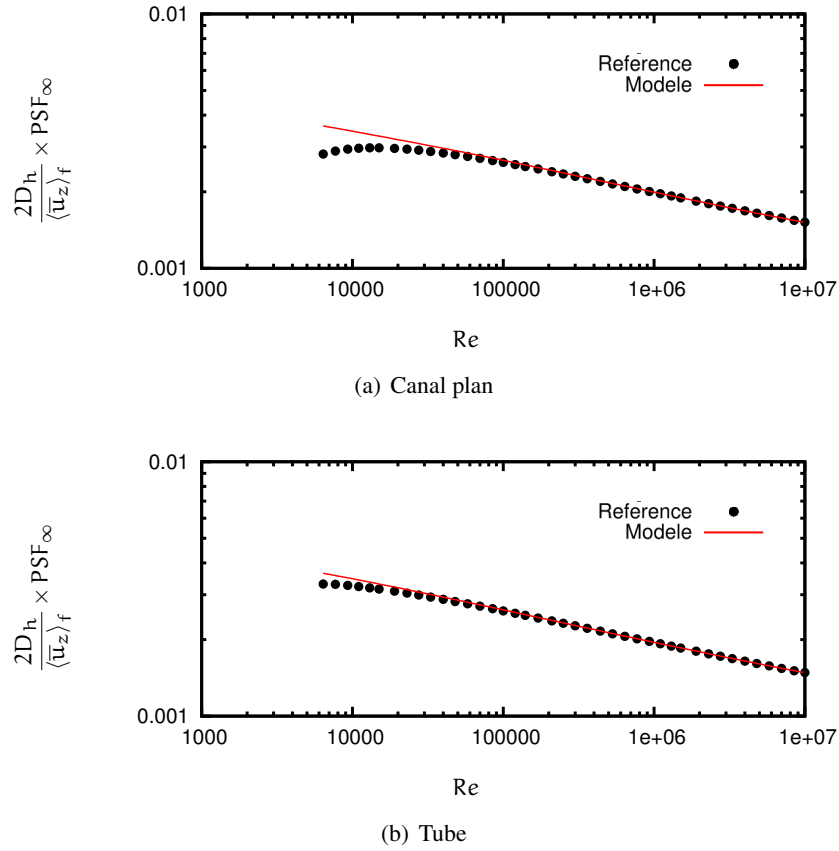


FIG. 10.6 – Évolution de la production de sous-filtre à l'équilibre PSF_∞ en fonction du nombre de Reynolds pour des écoulements turbulents en canal plan et en tube circulaire. Comparaison du modèle (10.86) aux résultats de référence obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ de Chien [19].

Modélisation de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}$

La dissipation visqueuse moyennée est nulle en régime laminaire. En régime turbulent, l'équation de $\langle \bar{k} \rangle_f$ à l'équilibre fournit :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \text{PSF}_\infty. \quad (10.87)$$

Avec la relation (10.86), cela donne :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{Re} < 2000, \\ \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty} \left(1 - C_w f_{p\infty}^{1/2}\right) & \text{si } \text{Re} > 6000, \end{cases} \quad (10.88)$$

La figure 10.7 permet de comparer les résultats du modèle (10.88) aux résultats de référence.

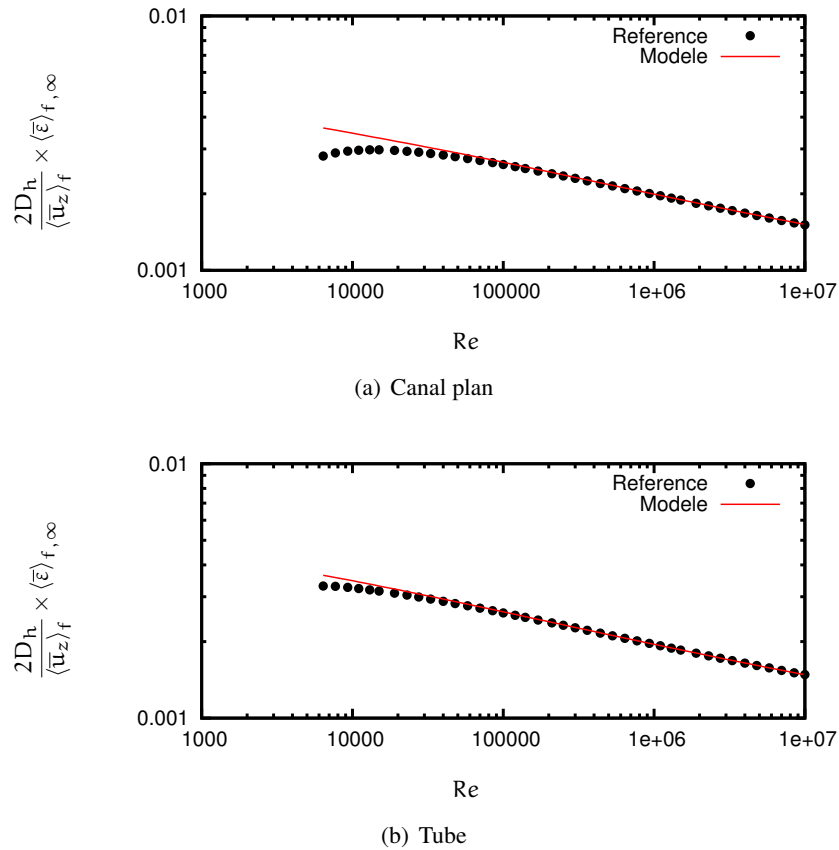


FIG. 10.7 – Évolution de la dissipation visqueuse moyennée à l'équilibre $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}$ en fonction du nombre de Reynolds pour des écoulements turbulents en canal plan et en tube circulaire. Comparaison du modèle (10.88) aux résultats de référence obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ de Chien [19].

Modélisation de $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$

Considérons un écoulement pleinement turbulent dans un canal plan, soit $Re > 6000$. Au centre du canal, l'énergie cinétique de la turbulence peut être approchée par u_f^2 [18]. Pour modéliser $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$, on peut ainsi proposer :

$$\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} = c_k u_f^2. \quad (10.89)$$

À partir des simulations de référence, nous déterminons que $c_k = 1.82$ pour un écoulement en canal plan et $c_k = 2.32$ pour un écoulement en tube circulaire. La figure 10.8 permet de comparer les résultats du modèle (10.89) aux résultats de référence.

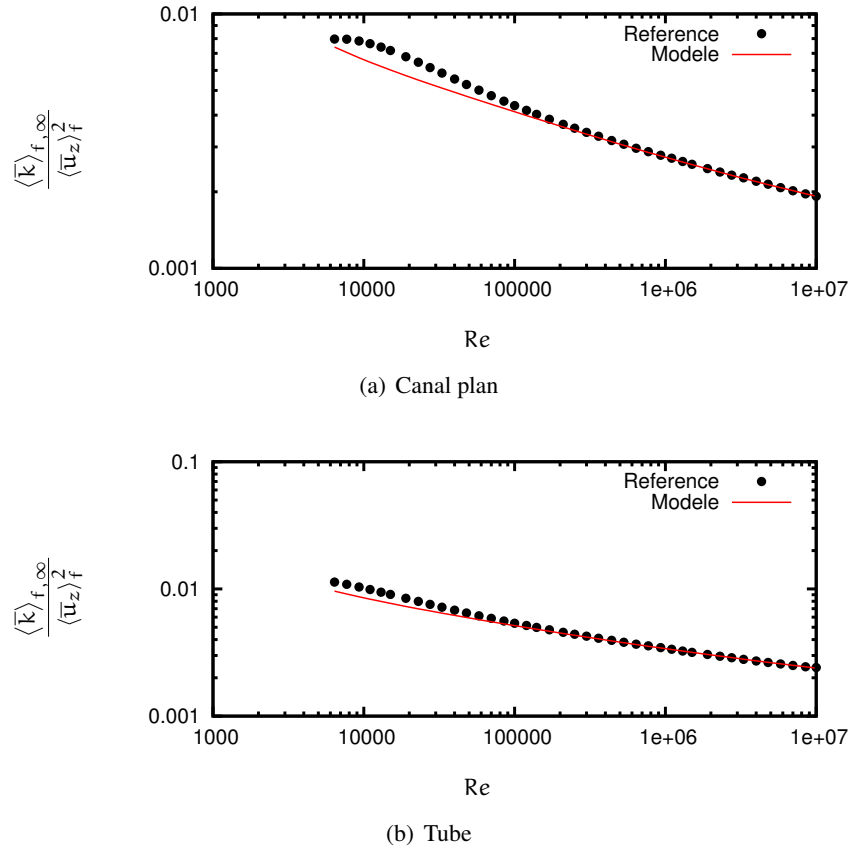


FIG. 10.8 – Évolution de l'énergie cinétique de la turbulence moyennée à l'équilibre $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$ en fonction du nombre de Reynolds pour des écoulements turbulents en canal plan et en tube circulaire. Comparaison du modèle (10.89) aux résultats de référence obtenus avec le modèle $\bar{k}-\bar{\varepsilon}$ de Chien [19].

Modélisation de $\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}$

En faisant l'hypothèse que les non-linéarités ont peu d'effet pour des écoulements quasi-parallèles tels que des écoulements en canaux, $\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}$ peut être modélisée par analogie avec la dispersion thermique :

$$\langle \delta \bar{u}_z \delta \bar{u}_z \rangle_f \rightsquigarrow \langle \delta \bar{u}_z \bar{T}_f \rangle_f. \quad (10.90)$$

Le terme source dans l'équation doublement moyennée de température (2.67), à la page 33 est ainsi supposé comparable au le terme de traînée dans l'équation de quantité de mouvement (2.64), à la page 32 :

$$-\bar{F}_{\phi_z} \rightsquigarrow \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (10.91)$$

On a vu au chapitre 4 que la dispersion thermique est modélisée de façon satisfaisante par :

$$-\langle \delta \bar{u}_z \bar{T}_f \rangle_f = \mathcal{D}_{zz}^p \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \mathcal{D}_z^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (10.92)$$

Par analogie, nous proposons donc :

$$-\langle \delta \bar{u}_z \delta \bar{u}_z \rangle_f = \mathcal{D}_{zz}^P \frac{\partial \langle \delta \bar{u}_z \rangle_f}{\partial z} - \mathcal{D}_z^A \bar{F}_{\phi_z}, \quad (10.93)$$

où les coefficients de dispersion \mathcal{D}_{zz}^P et \mathcal{D}_z^A sont donnés par les relations (5.28) et (5.29), à la page 73 prises pour un nombre de Prandtl égal à 1. Pour des écoulements incompressibles en canaux, les gradients macroscopiques de vitesse sont nuls et la relation (10.93) se simplifie en :

$$\langle \delta \bar{u}_z \delta \bar{u}_z \rangle_f = \mathcal{D}_z^A \bar{F}_{\phi_z} = \mathcal{D}_z^A \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{2D_h} f_p = 4\mathcal{D}_z^{A*} u_f^2, \quad (10.94)$$

ce qui conduit au modèle suivant pour $\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}$:

$$\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} = 2\mathcal{D}_z^{A*} u_f^2. \quad (10.95)$$

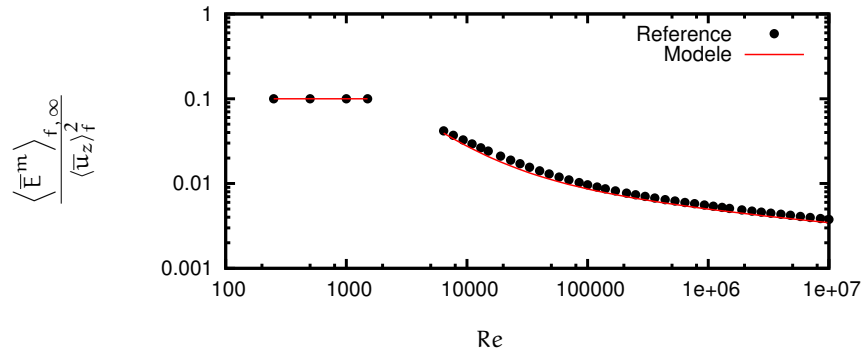
Nous vérifions que le modèle (10.95) correspond exactement aux résultats analytiques en régime laminaire. Les profils de vitesse analytiques (3.33) donnent :

$$\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} = \begin{cases} \frac{\langle u_z \rangle_f^2}{10} & \text{en canal plan,} \\ \frac{\langle u_z \rangle_f^2}{6} & \text{en tube circulaire.} \end{cases} \quad (10.96)$$

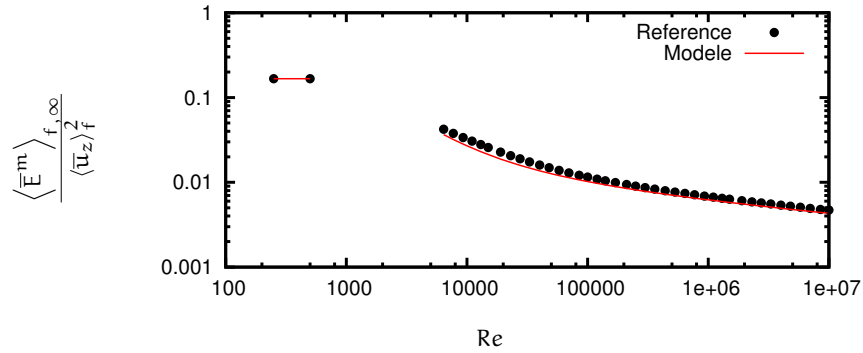
Le modèle (10.95) fournit quant à lui :

$$\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} = \begin{cases} 2 \times \frac{\text{Re}}{240} \times \langle u_z \rangle_f^2 \times \frac{96}{8\text{Re}} = \frac{\langle u_z \rangle_f^2}{10}, & \text{en canal plan,} \\ 2 \times \frac{\text{Re}}{96} \times \langle u_z \rangle_f^2 \times \frac{64}{8\text{Re}} = \frac{\langle u_z \rangle_f^2}{6}, & \text{en tube circulaire.} \end{cases} \quad (10.97)$$

Pour l'ensemble des régimes d'écoulement, la figure 10.9 permet de comparer les résultats du modèle (10.95) aux résultats de référence.



(a) Canal plan



(b) Tube

FIG. 10.9 – Évolution de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen à l'équilibre $\langle \bar{E}^m \rangle_{f, \infty}$ en fonction du nombre de Reynolds pour des écoulements turbulents en canal plan et en tube circulaire. Comparaison du modèle (10.95) aux résultats de référence obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ de Chien [19].

10.3.2 Stratégie de calibrage des paramètres phénoménologiques

Pour fermer complètement le modèle, il reste à fixer les paramètres α , b , n et $C_{\varepsilon_{w,1}}$ introduits pour modéliser la production de sous-filtre et la dissipation visqueuse. Pour ce faire, nous allons, à partir d'une base de résultats de référence, chercher les valeurs de α , b , n et $C_{\varepsilon_{w,1}}$ qui permettent de retrouver au mieux les comportements dynamiques observés sur les calculs de référence.

Mise sous forme adimensionnée

Dans un premier temps, nous mettons le système sous forme adimensionnée pour pouvoir comparer des configurations différentes. Pour des écoulements parallèles en canaux, les valeurs de référence des différentes grandeurs sont données par les états asymptotiques décrits dans le paragraphe précédent. Les grandeurs adimensionnées suivantes sont alors définies :

$$\mathbb{K} = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f, \infty}}, \quad (10.98)$$

$$\mathbb{E} = \frac{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_f}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}}, \quad (10.99)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\langle \bar{\mathcal{E}} \rangle_f}{\langle \bar{\mathcal{E}} \rangle_{f,\infty}}, \quad (10.100)$$

$$\mathcal{E}_w = \frac{\langle \bar{\mathcal{E}}_w \rangle_f}{\langle \bar{\mathcal{E}}_w \rangle_{f,\infty}}. \quad (10.101)$$

Avec ces notations, les équations (10.69) et (10.70) s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{k}} \right) \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial z} \right] + \frac{\langle \bar{\mathcal{E}} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \mathbb{K}^a \mathbb{E}^b - \frac{\langle \bar{\mathcal{E}} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \mathcal{E}, \quad (10.102)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{\mathbb{E}}^m} \right) \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial z} \right] - \frac{\langle \bar{\mathcal{E}} \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \mathbb{K}^a \mathbb{E}^b - \frac{\langle \bar{\mathcal{E}}_w \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} \mathcal{E}_w + \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 f_{p\infty}}{2D_h \langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} \times \frac{f_p}{f_{p\infty}} \quad (10.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_w}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \mathcal{E}_w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{\mathcal{E}}_w} \right) \frac{\partial \mathcal{E}_w}{\partial z} \right] - C_{\varepsilon_w,2} \frac{\langle \bar{\mathcal{E}}_w \rangle_{f,\infty}^2}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} \frac{\mathcal{E}_w^2}{\mathbb{E}} \\ &+ C_{\varepsilon_w,1} \frac{\langle \bar{\mathcal{E}}_w \rangle_{f,\infty}}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 f_{p\infty}}{2D_h \langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} \times \frac{\mathcal{E}_w}{\mathbb{E}} \frac{f_p}{f_{p\infty}} \end{aligned} \quad (10.104)$$

Détermination des coefficients a , b et n de la dissipation visqueuse et de la production de sous-filtre

Avec les notations adimensionnées, les relations (10.60) et (10.61) sont adaptées au cas d'écoulements en canaux :

$$\frac{\text{PSF}}{\text{PSF}_\infty} = \mathbb{K}^a \mathbb{E}^b, \quad (10.105)$$

$$\mathcal{E} = \mathbb{K}^n. \quad (10.106)$$

Il reste à fixer les paramètres a , b et n . Pour évaluer ces paramètres, nous allons chercher à approcher le système d'équations par un oscillateur harmonique. Dans ce contexte, il est nécessaire de procéder à quelques simplifications. Nous faisons les hypothèses suivantes :

H1 La diffusion et la dispersion sont négligeables.

H2 Loin des singularités, la dissipation de sillage et la force de traînée peuvent être considérées comme constantes dans l'équation de \mathbb{E} .

Les bilans de \mathbb{K} et \mathbb{E} présentés sur les figures 10.10 à 10.13 montrent que l'hypothèse H1 est justifiée.

Les figures 10.14 et 10.15, qui présentent les profils de la production de sous-filtre, de la dissipation de sillage et du travail de la force de traînée pour un écoulement turbulent établi en canal plan, montrent que les longueurs d'établissement associées à $\langle \bar{\mathcal{E}}_w \rangle_f$ et $\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}$ sont inférieures à $5D_h$ et donc faibles devant celle de PSF qui est de l'ordre de $25D_h$. L'hypothèse H2 est donc valide.

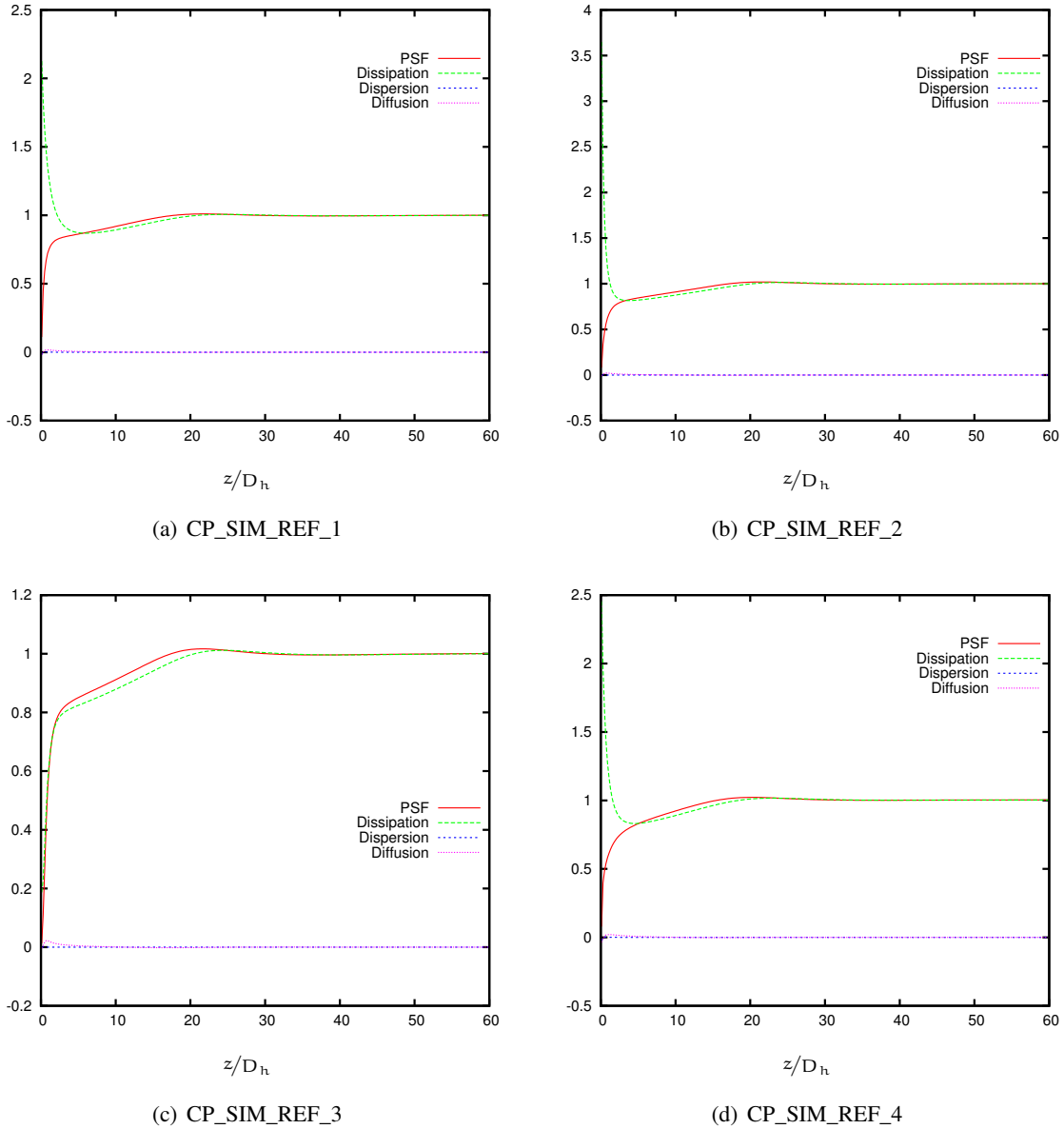


FIG. 10.10 – Bilan de l'énergie cinétique de turbulence adimensionnée \mathbb{K} pour un écoulement turbulent établi en canal plan. Les différents termes de l'équation (10.102) sont adimensionnés par $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} / \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

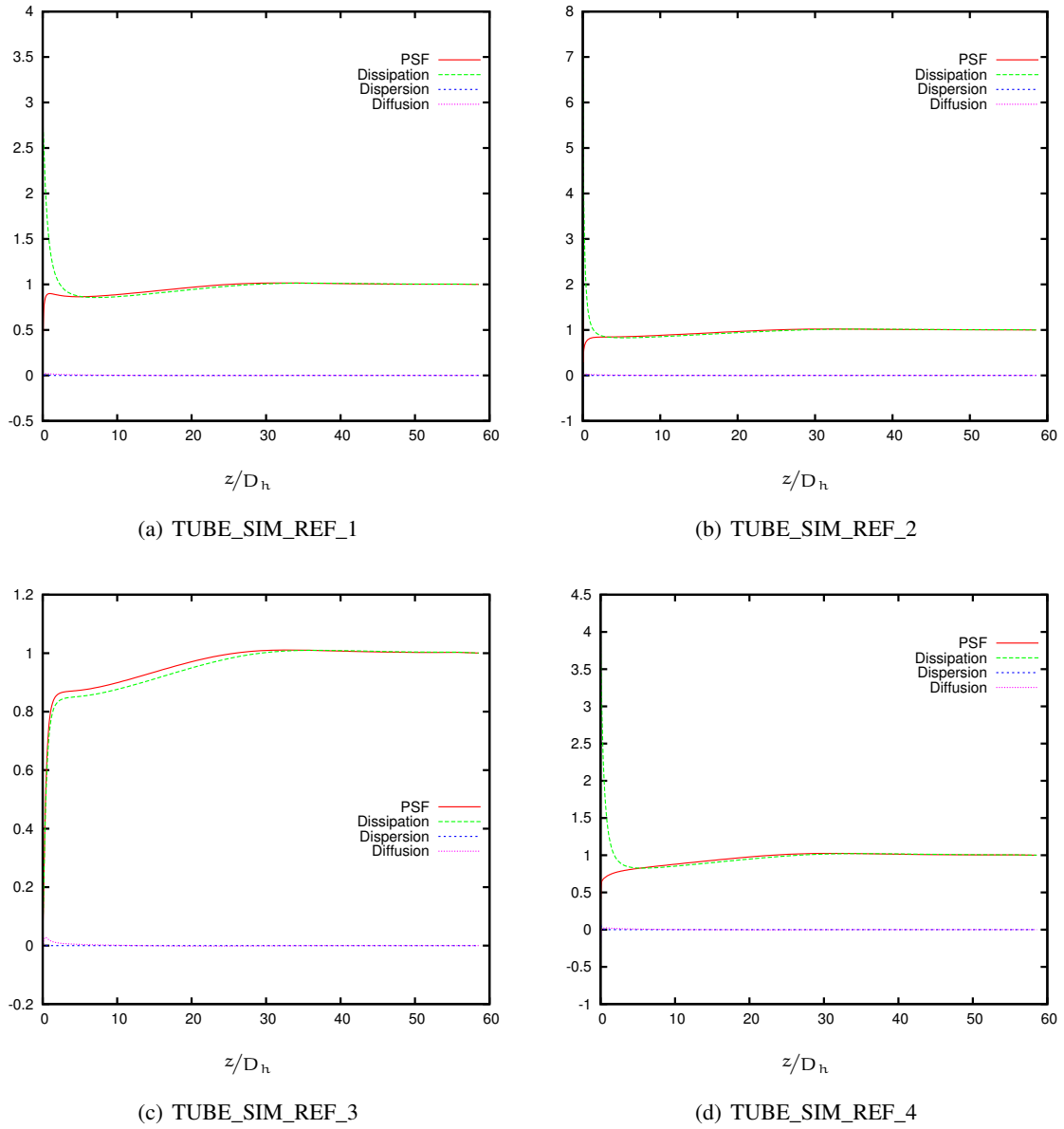


FIG. 10.11 – Bilan de l'énergie cinétique de turbulence adimensionnée \mathbb{K} pour un écoulement turbulent établi en tube circulaire. Les différents termes de l'équation (10.102) sont adimensionnés par $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f, \infty} / \langle \bar{k} \rangle_{f, \infty}$. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

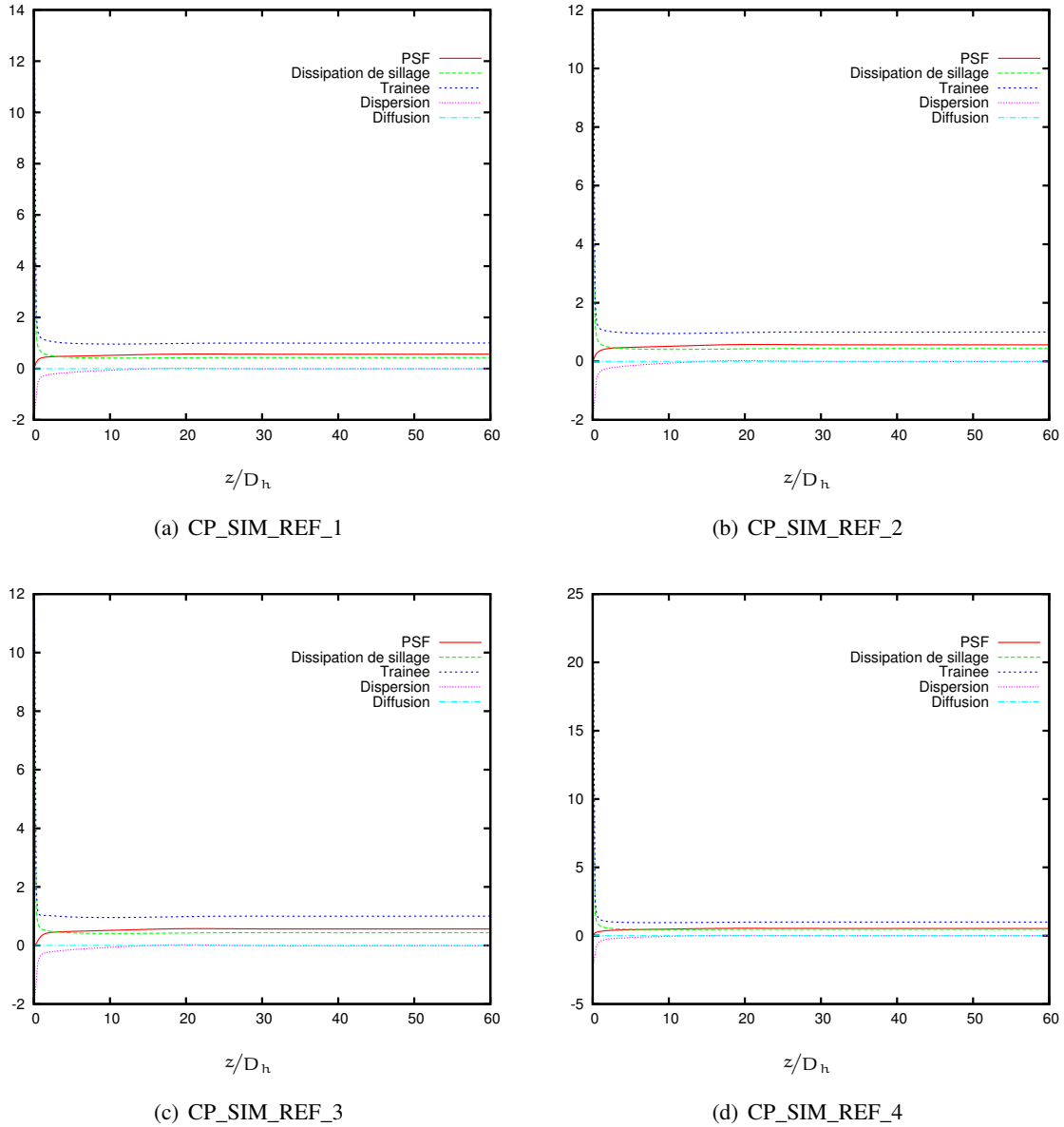


FIG. 10.12 – Bilan de l'énergie cinétique dispersive adimensionnée \mathbb{E} pour un écoulement turbulent établi en canal plan. Les différents termes de l'équation (10.103) sont adimensionnés par $\bar{F}_{\phi z \infty} / \langle \bar{E}^m \rangle_{f, \infty}$. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

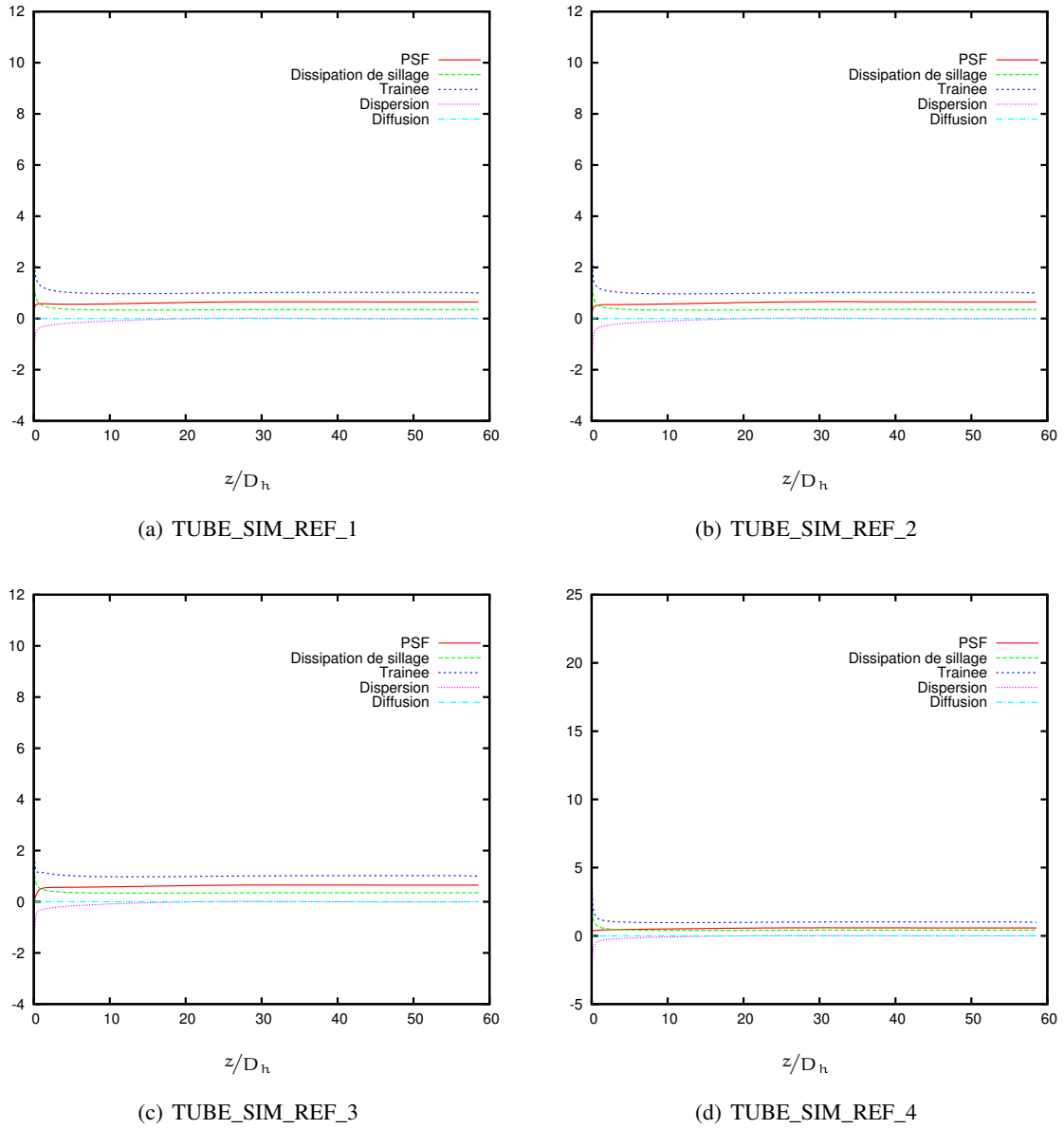


FIG. 10.13 – Bilan de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen adimensionnée \mathbb{E} pour un écoulement turbulent établi en tube circulaire. Les différents termes de l'équation (10.103) sont adimensionnés par $\bar{F}_{\phi z \infty} / \langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f, \infty}$. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

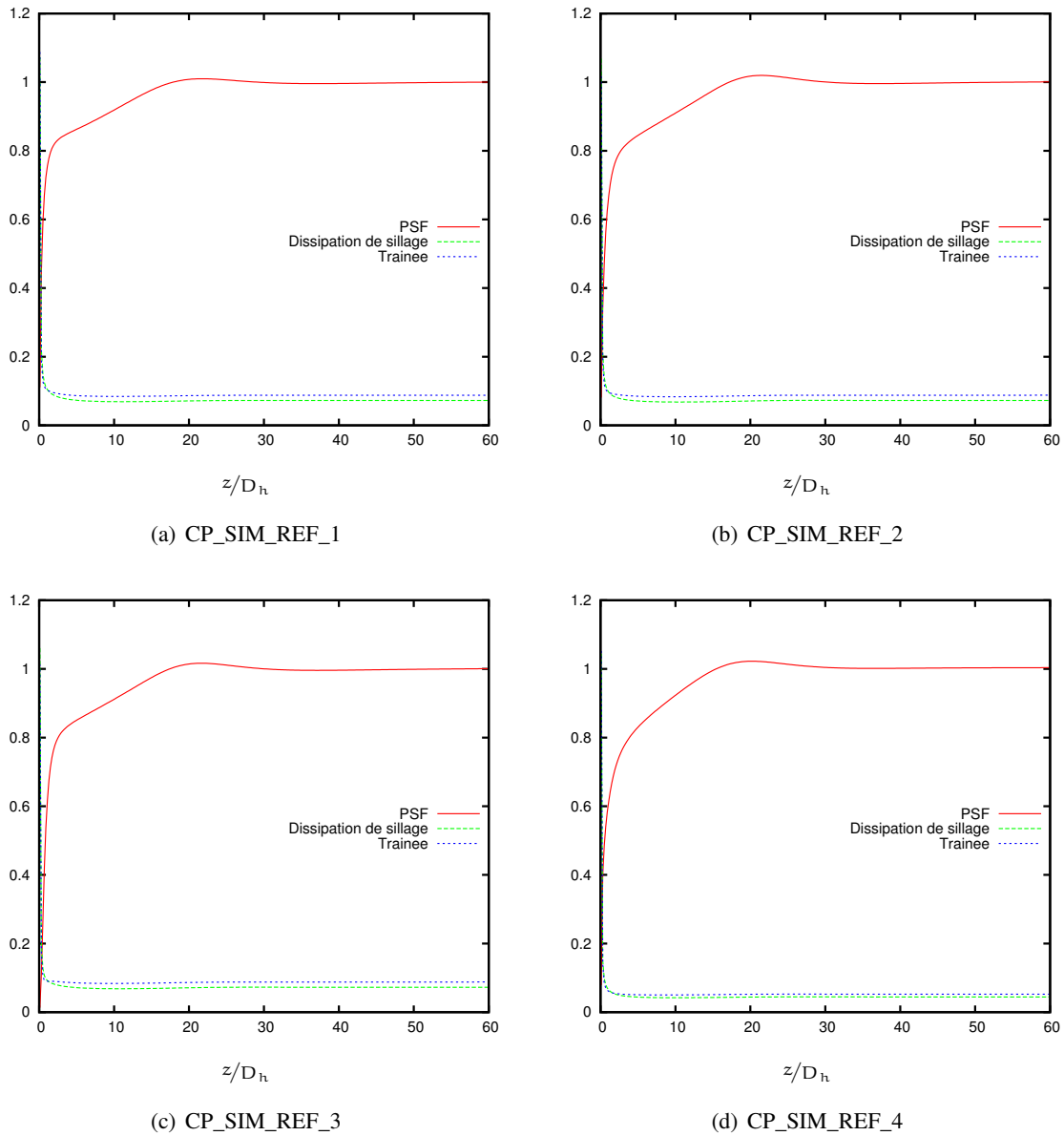


FIG. 10.14 – Évolution de la production de sous-filtre, de la dissipation de sillage et du travail de la force de traînée pour un écoulement turbulent établi en canal plan. Chaque grandeur est adimensionnée par la différence entre sa valeur en entrée et sa valeur à l'équilibre. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

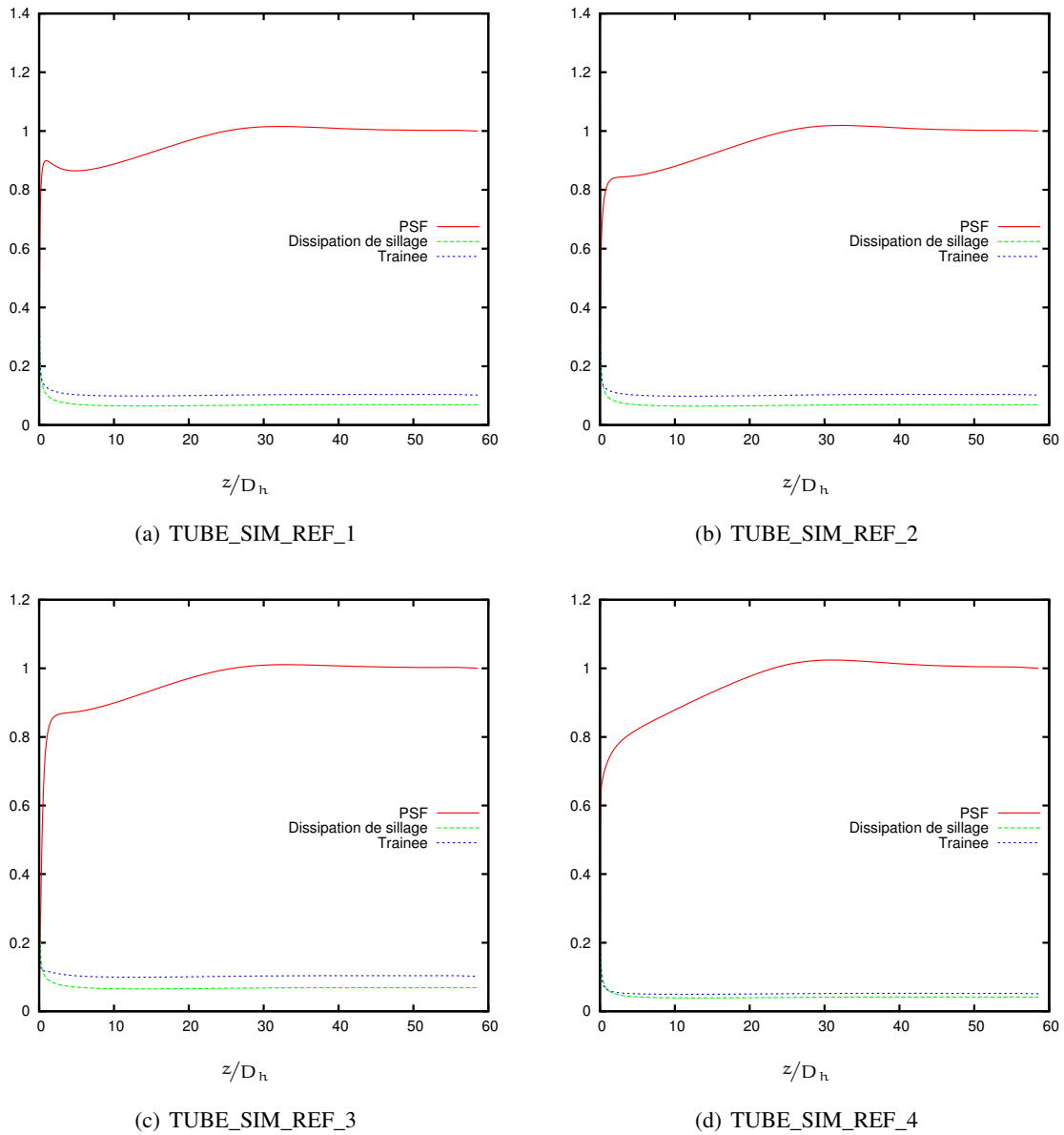


FIG. 10.15 – Évolution de la production de sous-filtre, de la dissipation de sillage et du travail de la force de traînée pour un écoulement turbulent établi en tube circulaire. Chaque grandeur est adimensionnée par la différence entre sa valeur en entrée et sa valeur à l'équilibre. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

Nous effectuons de plus le changement de variable suivant : $t = x/\langle \bar{u}_z \rangle_f$. Le système précédent s'écrit alors de façon simplifiée :

$$\frac{d\mathbb{K}}{dt} = \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \left(\mathbb{K}^a \mathbb{E}^b - \mathbb{K}^n \right), \quad (10.107)$$

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \text{PSF}_\infty \left(1 - \mathbb{K}^a \mathbb{E}^b \right). \quad (10.108)$$

Pour caractériser le comportement dynamique des énergies de sous-filtre du mouvement moyen et de la turbulence, notre étude portera, dans la suite de ce paragraphe, sur la version linéarisée du système (10.107-10.108). On pose :

$$\mathbb{K} = k_0 + k_1; \quad \mathbb{E} = E_0 + E_1. \quad (10.109)$$

De manière générale, on fait une hypothèse de petites perturbations et l'approximation suivante est utilisée :

$$g^q = (g_0 + g_1)^q \sim g_0^q + qg_0^{q-1}g_1. \quad (10.110)$$

Cela conduit à :

$$\frac{dk_1}{dt} = \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \left(k_0^a E_0^b + b k_0^a E_0^{b-1} E_1 + a k_0^{a-1} E_0^b k_1 + a b k_0^{a-1} E_0^{b-1} k_1 E_1 - k_0^n - n k_0^{n-1} k_1 \right), \quad (10.111)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \text{PSF}_\infty \left(1 - k_0^a E_0^b - b k_0^a E_0^{b-1} E_1 - a k_0^{a-1} E_0^b k_1 - a b k_0^{a-1} E_0^{b-1} k_1 E_1 \right). \quad (10.112)$$

À l'ordre 0, cela donne :

$$k_0^a E_0^b = k_0^n = 1. \quad (10.113)$$

Et donc :

$$\boxed{k_0 = 1; \quad E_0 = 1.} \quad (10.114)$$

À l'ordre 1, on obtient le système suivant :

$$\frac{dk_1}{dt} = \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} [(a-n)k_1 + bE_1], \quad (10.115)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = - \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} (ak_1 + bE_1). \quad (10.116)$$

En posant :

$$Y = \begin{pmatrix} k_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \quad (10.117)$$

cela s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{dY}{dt} = MY = \begin{pmatrix} \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} (a-n) & \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} b \\ - \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} a & - \frac{\text{PSF}_\infty}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} b \end{pmatrix} Y. \quad (10.118)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice M est :

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^2 + \text{PSF}_\infty \left(\frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} - \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right) \lambda + \frac{\text{PSF}_\infty^2}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} bn. \quad (10.119)$$

Les résultats de référence, issus de simulations fines moyennées, montrent que les solutions recherchées doivent présenter des oscillations amorties (voir figures 10.16 et 10.17). En effet, on observe, pour $z < 30D_h$, une dynamique d'oscillation qui résulte de la compétition entre les différents termes sources dans les équations (10.107) et (10.108). Puis, toutes les quantités finissent par atteindre leur état d'équilibre et les oscillations disparaissent. Les solutions oscillantes amorties correspondent à des valeurs propres complexes [60].

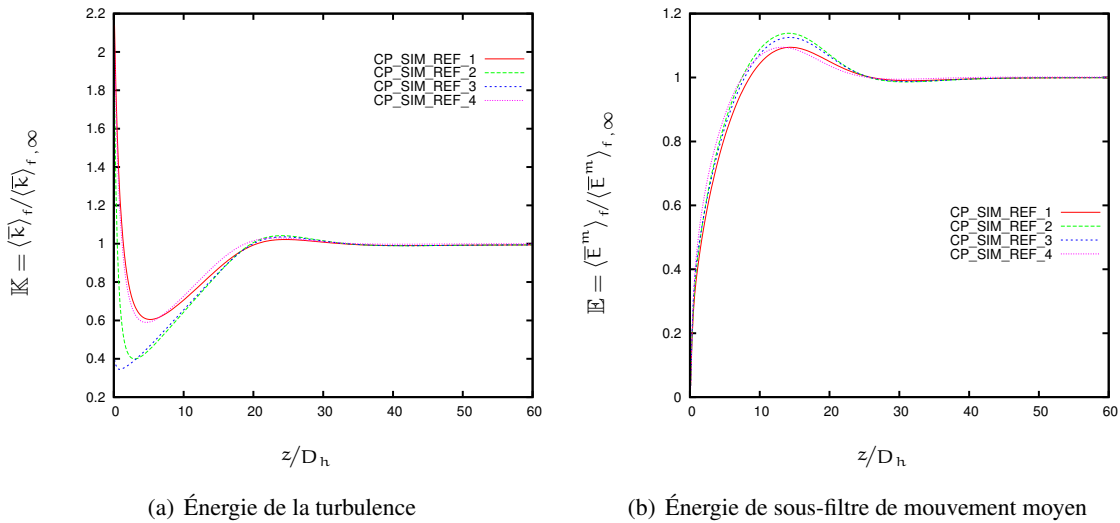


FIG. 10.16 – Évolution de \mathbb{K} et \mathbb{E} pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

Cela implique que le déterminant de $\chi_M(\lambda)$ doit être négatif, soit :

$$\left(\frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} - \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^2 \leq \frac{4bn}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}}. \quad (10.120)$$

Dans ce cas, les valeurs propres de M s'écrivent :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\tau} + i\omega, \quad (10.121)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau} - i\omega, \quad (10.122)$$

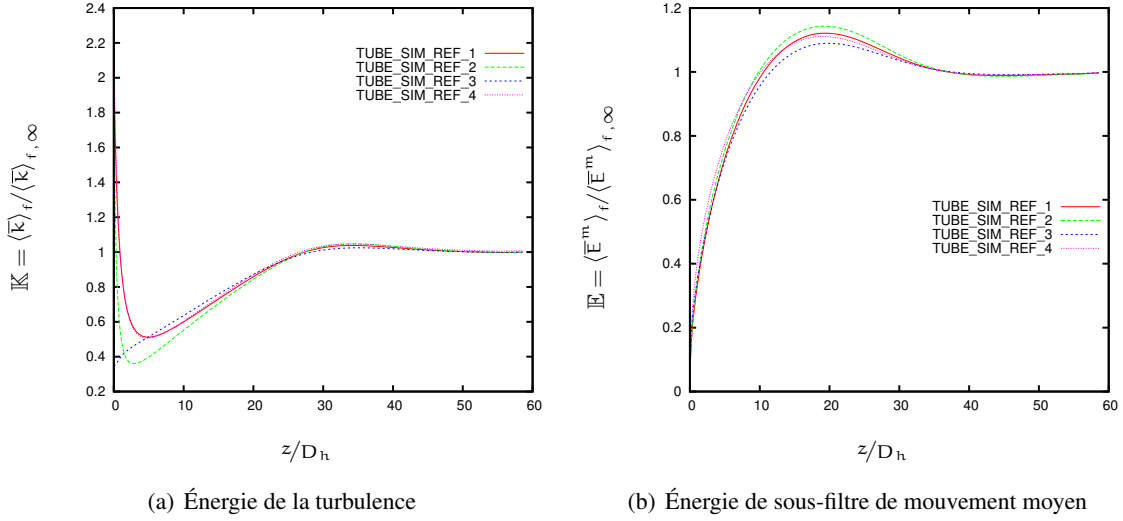


FIG. 10.17 – Évolution de \mathbb{K} et \mathbb{E} pour un écoulement turbulent dans un tube circulaire. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

où τ est le temps d'amortissement et ω la pulsation propre du système :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\text{PSF}_\infty}{2} \left(\frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} - \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right) \quad (10.123)$$

$$\omega = \frac{\text{PSF}_\infty}{2} \sqrt{\frac{4bn}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} - \left(\frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} - \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^2}. \quad (10.124)$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda_{1,2}$ sont :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}}{2a} \left(\frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} + \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} + i \frac{2\omega}{\text{PSF}_\infty} \right) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10.125)$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}}{2a} \left(\frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} + \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} - i \frac{2\omega}{\text{PSF}_\infty} \right) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10.126)$$

Les solutions du système s'écrivent alors :

$$Y_S(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_2. \quad (10.127)$$

Seule la partie réelle nous intéresse. Après calcul, les solutions pour \mathbb{K} et \mathbb{E} sont :

$$\mathbb{K}(t) = 1 - \frac{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}}{\alpha} e^{-t/\tau} \mathcal{A} \left[\left(\frac{b}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} + \frac{\alpha - n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right) \cos \omega t - \frac{2\omega}{\text{PSF}_\infty} \sin \omega t \right], \quad (10.128)$$

$$\mathbb{E}(t) = 1 + \mathcal{A} e^{-t/\tau} \cos \omega t, \quad (10.129)$$

où \mathcal{A} est une constante fixée par les conditions initiales :

$$\mathcal{A} = \frac{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_f(t=0)}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} - 1. \quad (10.130)$$

Ce sont maintenant les calculs de référence qui vont nous permettre de déterminer α , b et n . Tout d'abord, on observe (voir Fig. 10.16) que les oscillations disparaissent après environ une période. Cela suggère que $\omega \sim 1/\tau$. Puis, en utilisant les relations (10.123) et (10.124), une relation entre b , n et ω peut être établie :

$$bn = 2 \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty} \frac{\omega^2}{\text{PSF}_\infty^2}. \quad (10.131)$$

D'autre part, les calculs de référence indiquent que $d\mathbb{E}/dt$ s'annule pour $t \simeq 14D_h/(\bar{u}_z)_f$ en canal plan et pour $t \simeq 19D_h/(\bar{u}_z)_f$ (voir Fig. 10.18).

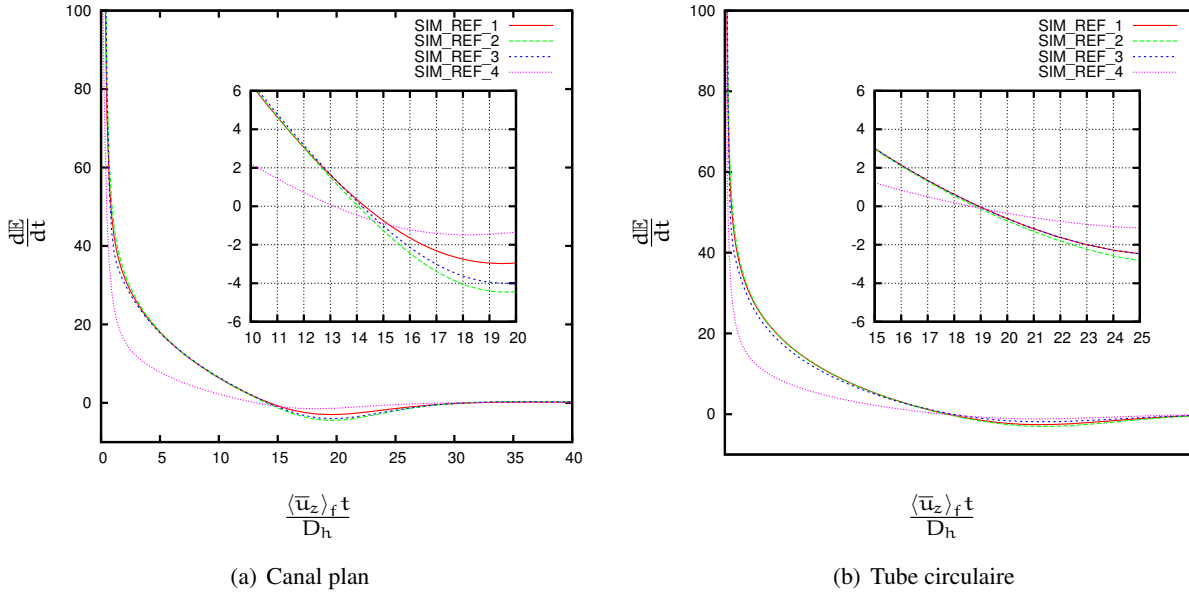


FIG. 10.18 – Dérivée de l'énergie de sous-filtre du mouvement moyen adimensionnée, résultats de référence. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

Avec (10.129), il est aussi possible d'écrire :

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = e^{-t/\tau} \omega (\cos \omega t + \sin \omega t), \quad (10.132)$$

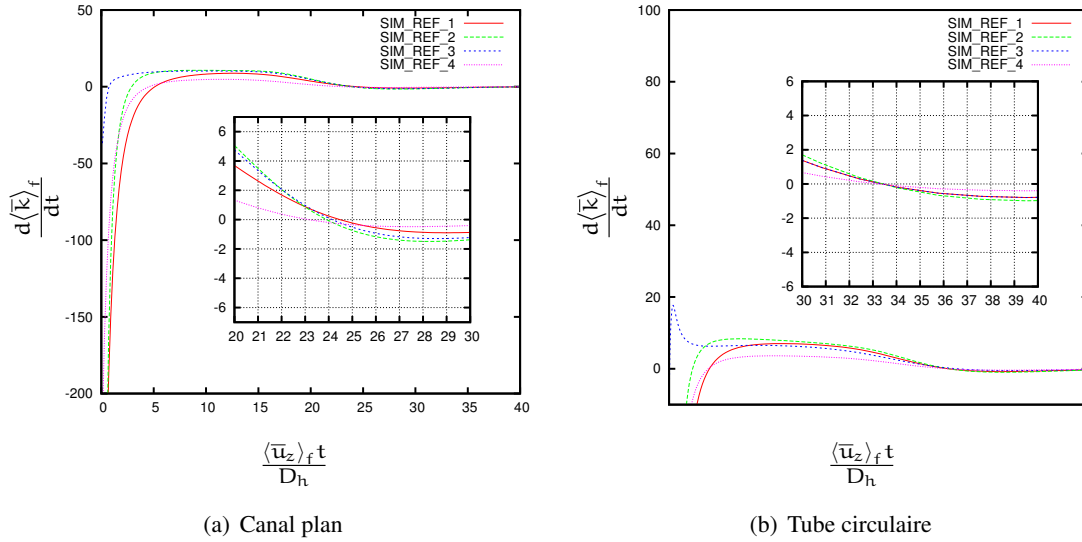


FIG. 10.19 – Dérivée de l'énergie de turbulence moyennée, résultats de référence. Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

ce qui implique que :

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \omega t = \frac{3\pi}{4} [\pi]. \quad (10.133)$$

Par conséquent :

$$\omega = \frac{3\pi}{56} \times \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{D_h}, \text{ en canal plan,} \quad (10.134)$$

$$\omega = \frac{3\pi}{76} \times \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{D_h}, \text{ en tube circulaire.} \quad (10.135)$$

De la même manière, d'après les résultats de référence, la dérivée de \mathbb{K} s'annule en $t \simeq 24D_h / \langle \bar{u}_z \rangle_f$ en canal plan et en $t \simeq 34D_h / \langle \bar{u}_z \rangle_f$ (voir Fig.10.19), ce qui correspond à :

$$\omega t = \theta = \frac{9\pi}{7}, \text{ en canal plan,} \quad (10.136)$$

$$\omega t = \theta = \frac{51\pi}{38}, \text{ en tube circulaire.} \quad (10.137)$$

D'après (10.128), cela implique que la relation suivante doit donc être vérifiée :

$$\left(\frac{b}{\langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty}} + \frac{a-n}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right) (\cos \theta + \sin \theta) = \frac{2\omega}{\text{PSF}_\infty} (\sin \theta - \cos \theta). \quad (10.138)$$

En résumé, nous avons deux relations liant les coefficients a , b et n :

$$bn = 2\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \langle \bar{\mathbb{E}}^m \rangle_{f,\infty} \frac{\omega^2}{\text{PSF}_\infty^2}, \quad (10.139)$$

$$\alpha = n + \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \left[\frac{2\omega}{\text{PSF}_\infty} \left(\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) - \frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} \right]. \quad (10.140)$$

Étant donné que la production de sous filtre représente un transfert d'énergie entre le mouvement moyen de sous-filtre et la turbulence, nous ajoutons la contrainte $\alpha = b$. Avec les relations (10.139) et (10.140), cela donne :

$$n^2 + \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \left[\frac{2\omega}{\text{PSF}_\infty} \left(\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) - \frac{b}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} \right] n - 2 \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} \frac{\omega^2}{\text{PSF}_\infty^2} = 0, \quad (10.141)$$

ce qui permet d'estimer le paramètre n pour différents nombres de Reynolds, puis la valeur de α et b correspondante. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 10.2.

Géométrie	Re	n	$\alpha = b$
Canal plan	2.5×10^4	0.39	0.31
Canal plan	5×10^4	0.35	0.26
Canal plan	1×10^5	0.31	0.23
Canal plan	2.5×10^5	0.29	0.21
Canal plan	5×10^5	0.27	0.19
Tube circulaire	2.5×10^4	0.31	0.28
Tube circulaire	5×10^4	0.28	0.24
Tube circulaire	1×10^5	0.25	0.22
Tube circulaire	2.5×10^5	0.24	0.20
Tube circulaire	5×10^5	0.23	0.19

TAB. 10.2 – Valeurs estimées des paramètres α , b et n des modèles de production de sous-filtre et de dissipation visqueuse pour différents nombres de Reynolds.

Nous choisissons, en nous basant sur cette estimation, les valeurs suivantes pour les paramètres des modèles de production de sous-filtre et de dissipation visqueuse :

$$n = 1/3; \quad \alpha = b = 1/4. \quad (10.142)$$

Les modèles de production de sous-filtre et de dissipation visqueuse s'écrivent alors :

$$\text{PSF} = \text{PSF}_\infty \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^{1/4} \left(\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} \right)^{1/4}, \quad (10.143)$$

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^{1/3}. \quad (10.144)$$

Afin de vérifier la pertinence des relations (10.143) et (10.144), des tests *a priori* sont réalisés. Les résultats de ces tests sont présentés sur les figures 10.20 à 10.23. Ils montrent que les modèles (10.143) et (10.144) sont tout à fait cohérents avec les résultats de référence dans le cadre de tests *a priori*.

Paramètre $C_{\varepsilon_w,1}$

L'équation de la dissipation de sillage (10.66) a été résolue *a priori*, i.e. séparément des autres équations du système et en utilisant les évolutions de référence pour $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ et f_p , pour des valeurs de $C_{\varepsilon_w,1}$ comprises entre 0.1 et 10. Nous avons ensuite comparé les résultats ainsi obtenus avec les évolutions de référence pour les cas présentés dans le tableau 10.1. Cela nous a mené à choisir la valeur $C_{\varepsilon_w,1} = 1$ car elle permet de retrouver les évolutions de référence à partir du modèle macroscopique.

10.3.3 Modélisation de la dispersion

Nakayama et Kuwahara suggèrent de faire une analogie entre la dispersion thermique et la dispersion d'énergie cinétique turbulente [68]. Leur proposition est ici reprise et étendue à l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen :

$$\mathcal{D}_{zz}^{\bar{k}} = \mathcal{D}_{zz}^{\bar{E}^m} = \nu_f \times \mathcal{D}_{zz}^{P*} (\text{Pr} = 1), \quad (10.145)$$

où \mathcal{D}_{zz}^{P*} est le coefficient de dispersion thermique passive dont il est question dans la partie II.

10.3.4 Coefficient de frottement

Dans le cas d'écoulements parallèles dans des milieux stratifiés, l'expression (10.59) s'écrit :

$$\frac{f_p}{f_{p\infty}} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}} \right)^{2/3}. \quad (10.146)$$

Les figures 10.24 et 10.25 montrent que, selon les tests *a priori*, la proposition (10.146) est tout à fait adaptée au type d'écoulements considéré ici.

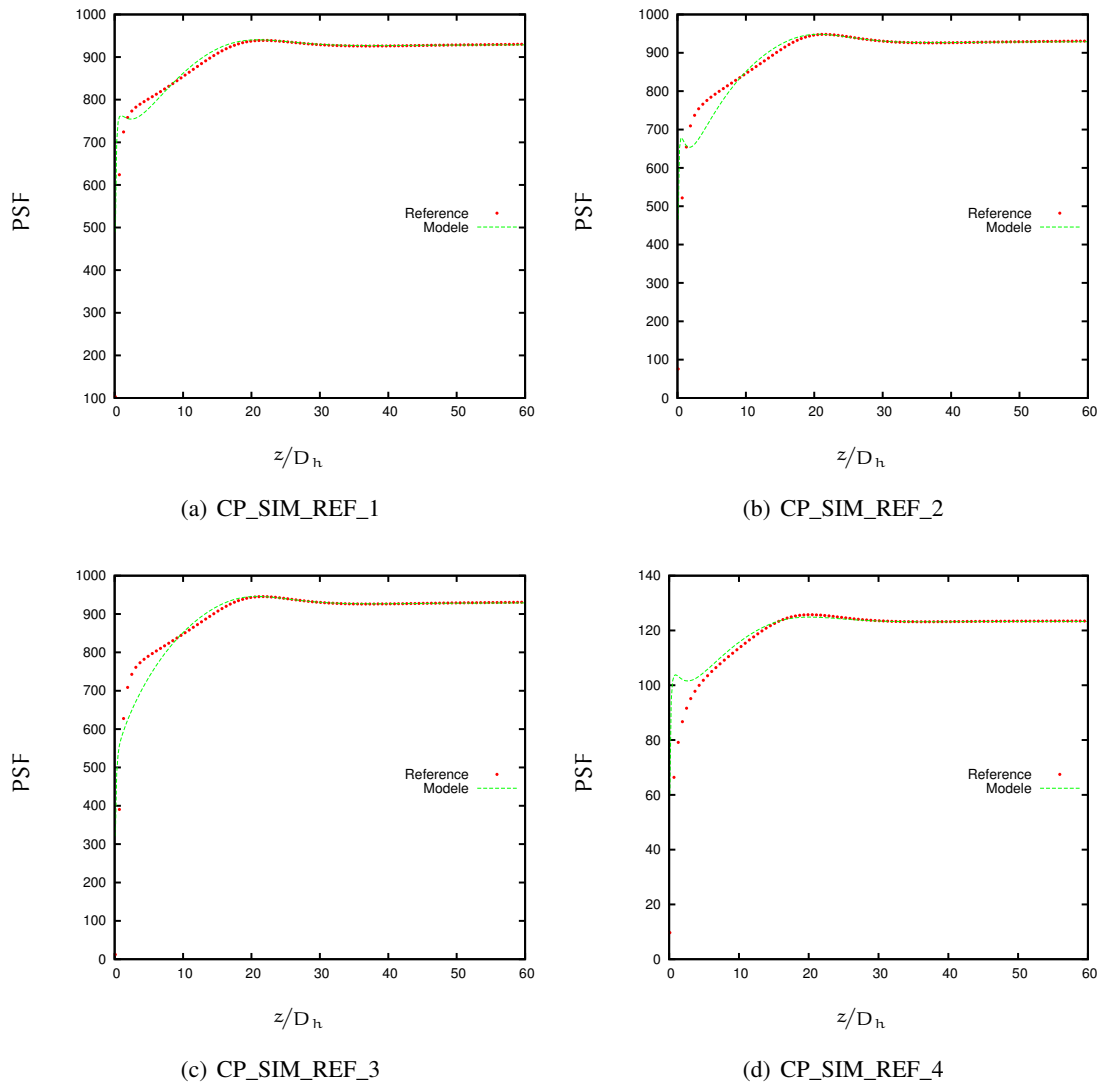


FIG. 10.20 – Évolution de PSF pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : tests *a priori* du modèle (10.143). Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

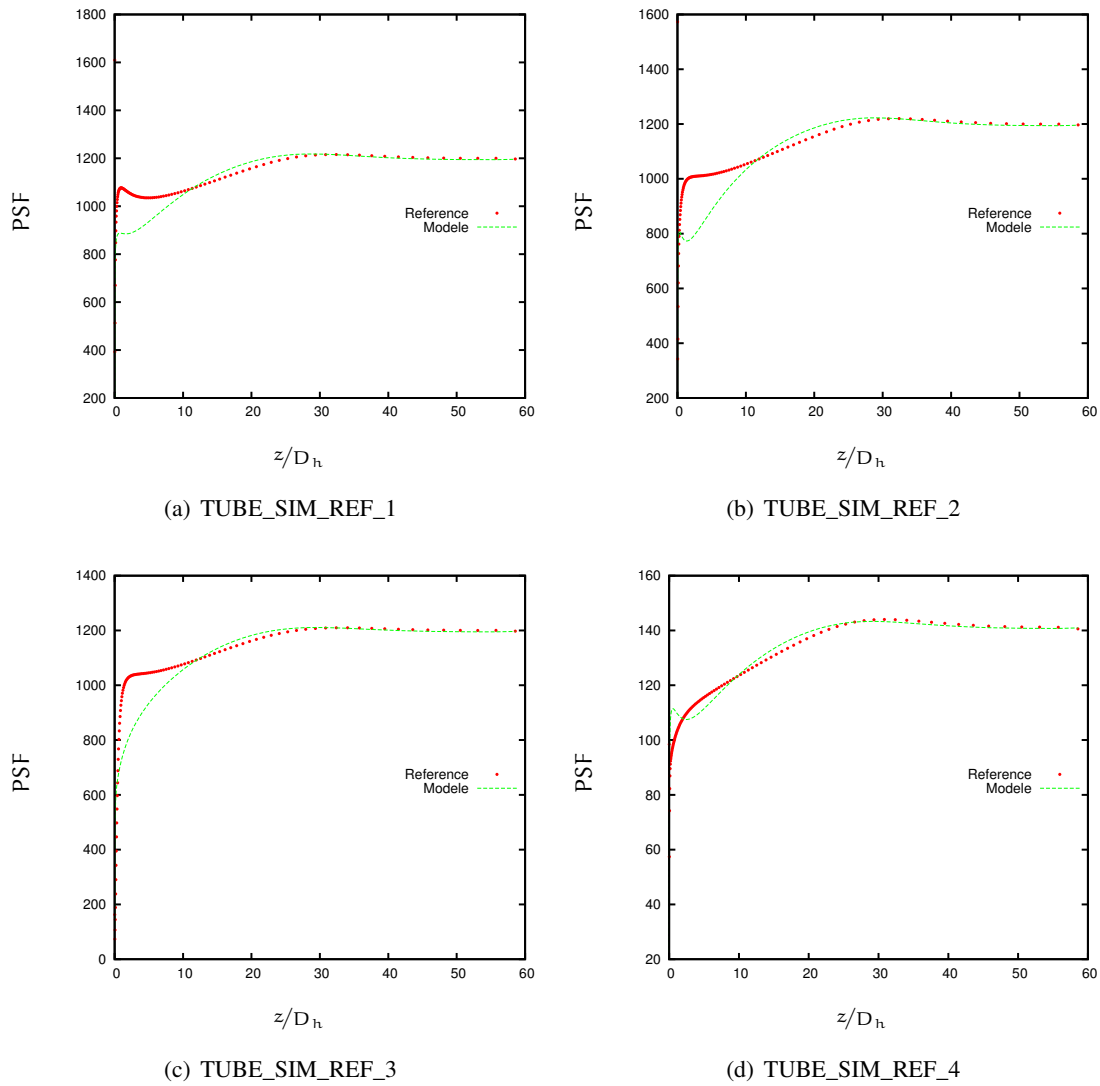


FIG. 10.21 – Évolution de PSF pour un écoulement turbulent dans un tube circulaire : tests *a priori* du modèle (10.143). Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

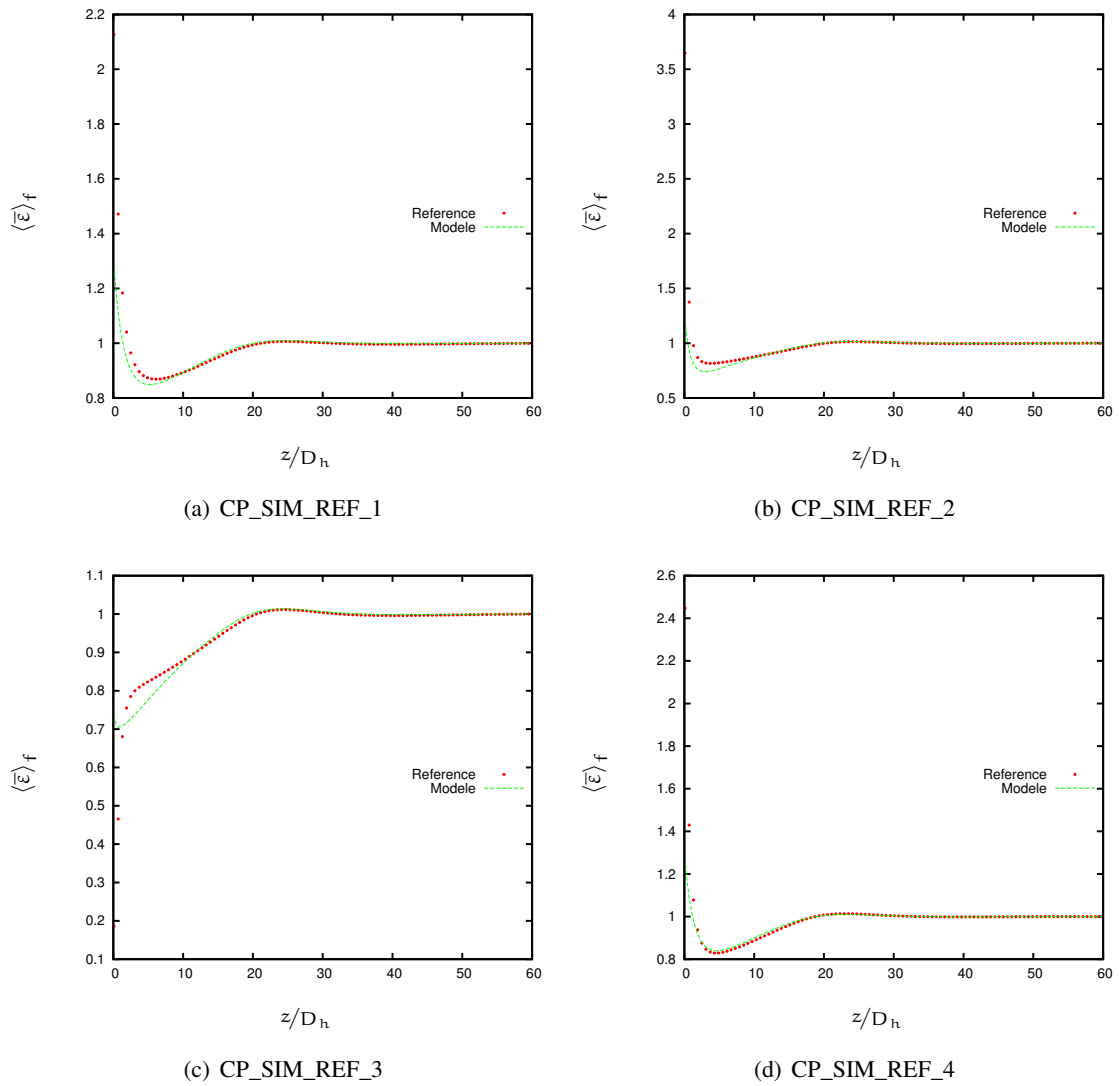


FIG. 10.22 – Évolution de $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : tests *a priori* du modèle (10.144). Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

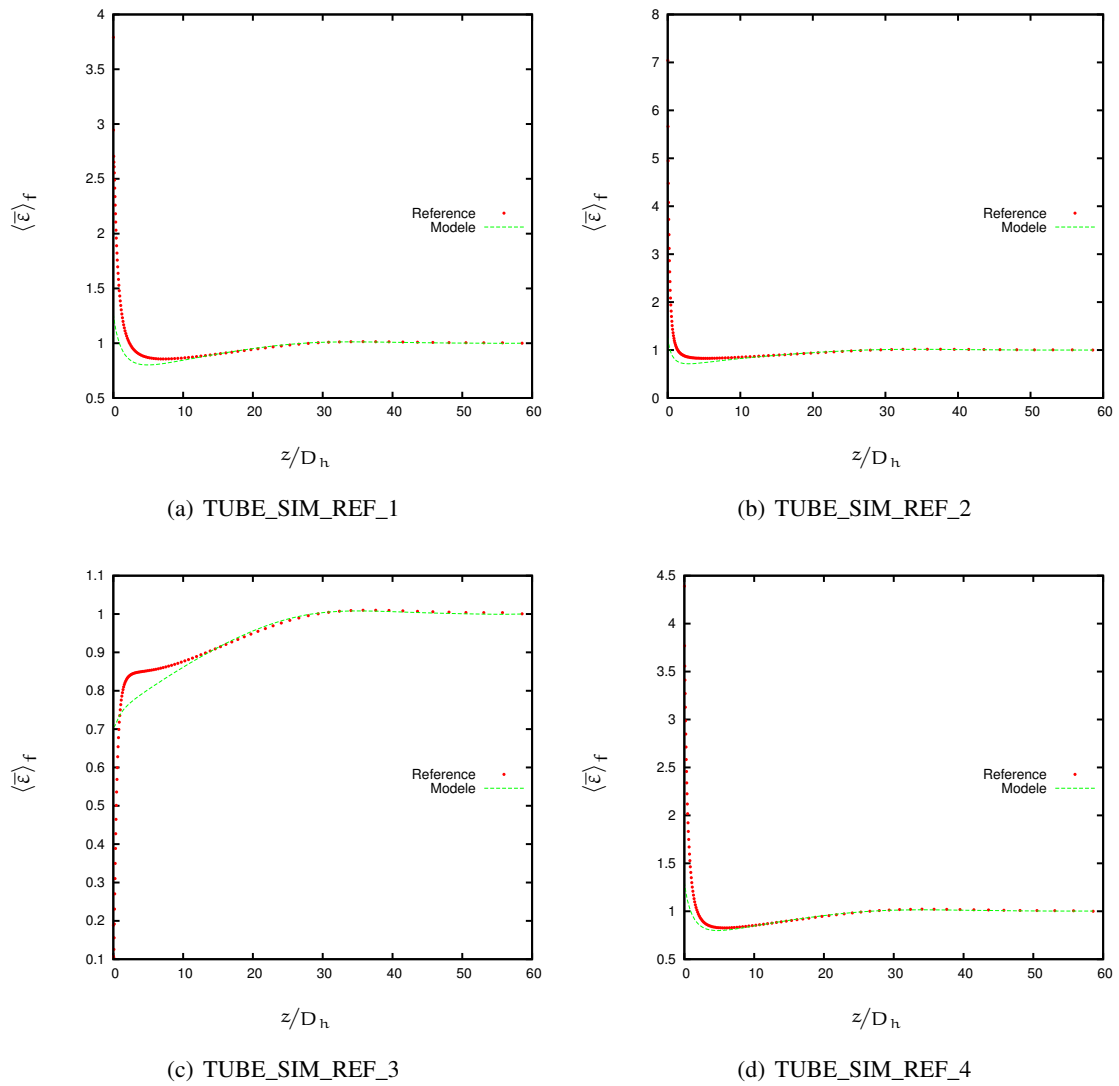
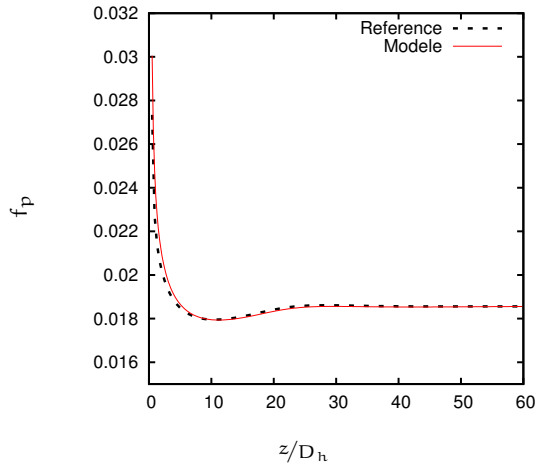
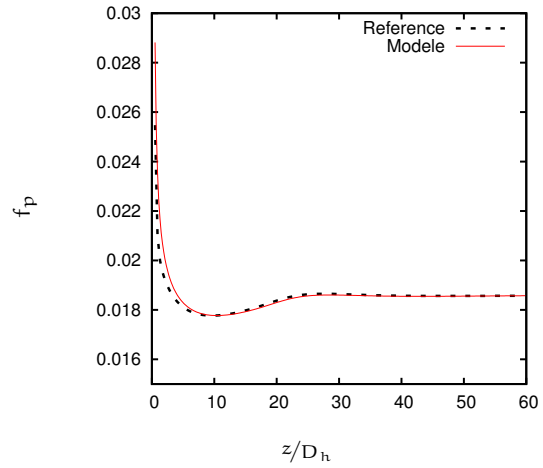


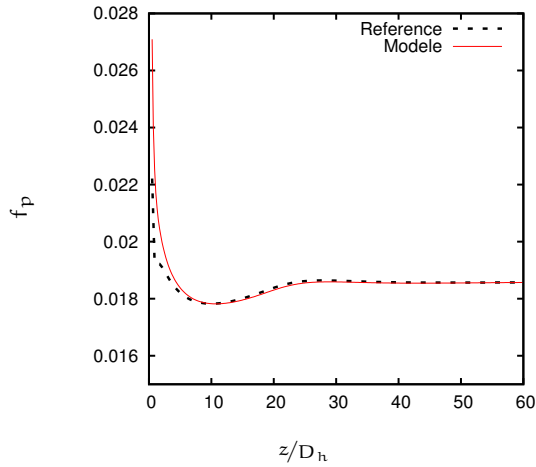
FIG. 10.23 – Évolution de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ pour un écoulement turbulent dans un tube circulaire : tests *a priori* du modèle (10.144). Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.



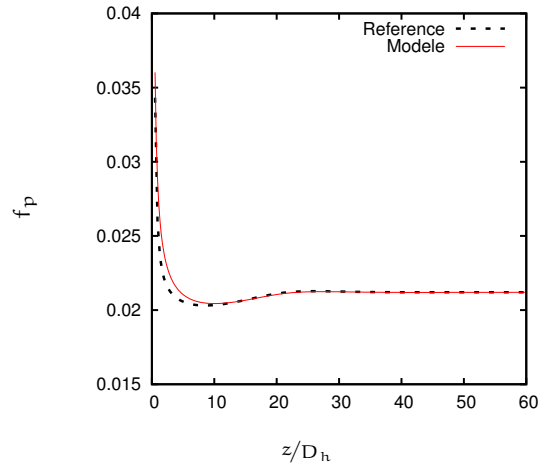
(a) CP_SIM_REF_1



(b) CP_SIM_REF_2



(c) CP_SIM_REF_3



(d) CP_SIM_REF_4

FIG. 10.24 – Évolution du coefficient de frottement pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : tests *a priori* du modèle (10.146). Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

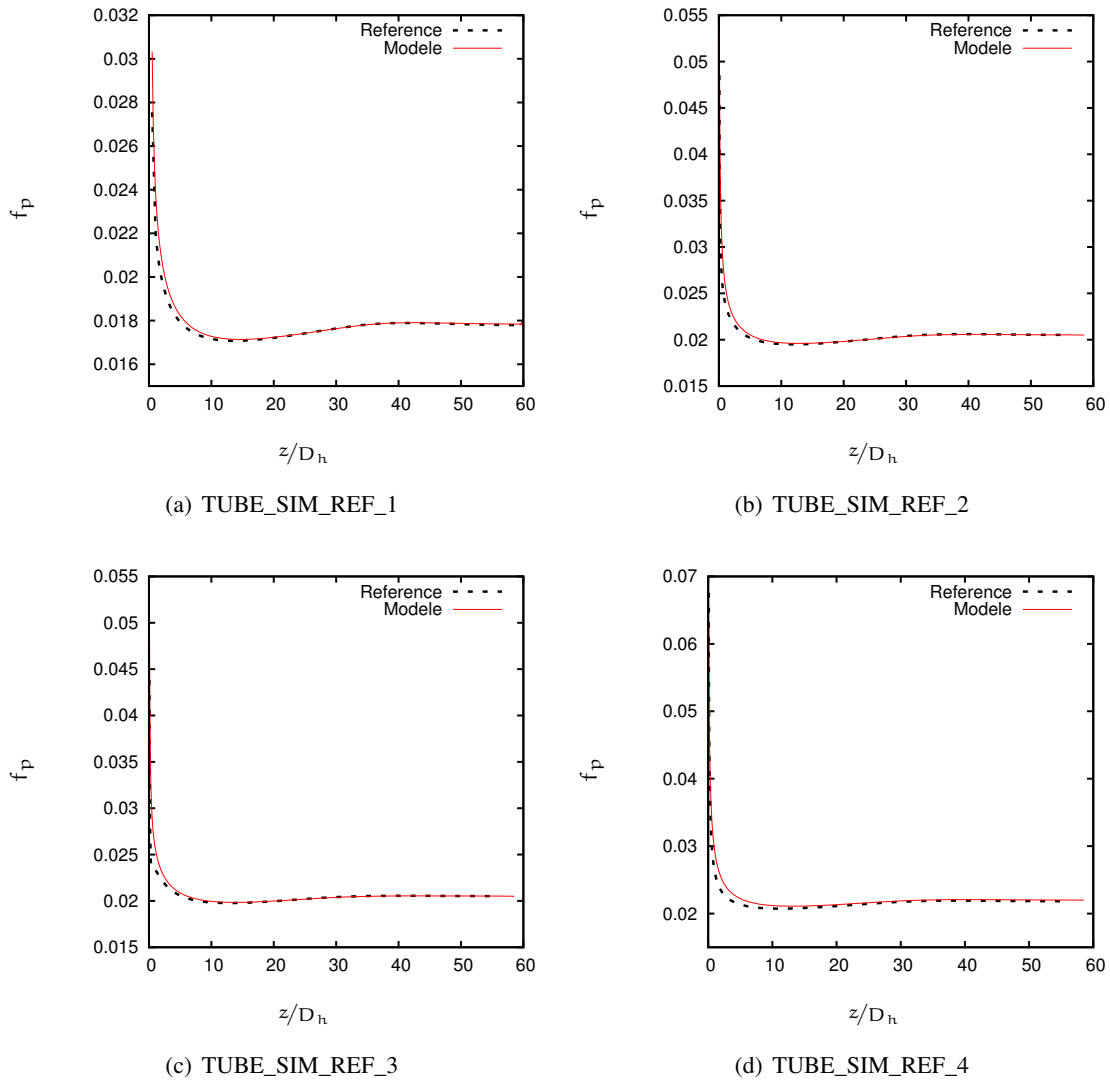


FIG. 10.25 – Évolution du coefficient de frottement pour un écoulement turbulent dans un tube circulaire : tests *a priori* du modèle (10.146). Les différents cas présentés sont décrits dans le tableau 10.1.

10.3.5 Synthèse

Notre modèle de turbulence, pour des écoulements turbulents en milieux stratifiés, s'écrit finalement, pour $Re > 6000$:

$$\frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} + \mathcal{D}_{zz}^P \right) \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} \right] + \text{PSF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (10.147)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu_f + \mathcal{D}_{zz}^P \right) \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial z} \right] - \text{PSF} - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}, \quad (10.148)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon_w,1} \times \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}^\infty}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f^2}{\langle \bar{E}^m \rangle_f} \\ + C_{\varepsilon_w,1} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_f} \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}, \end{aligned} \quad (10.149)$$

où :

$$\begin{aligned} f_p &= f_{p\infty} \times \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}} \right)^{2/3}, & \text{PSF} &= \text{PSF}_\infty \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^{1/4} \left(\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}} \right)^{1/4}, \\ \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f &= \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}} \right)^{1/3}, & \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z} &= \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{2D_h} f_p, \\ \nu_{t\phi} &= C'_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad \mathcal{D}_{zz}^{P*} = \nu_f \left(C_t^P \sqrt{f_p} Re + \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{f_p} Re} \right), & \mathcal{D}_z^{A*} &= C_t^A + \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{f_p} Re}, \\ \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} &= c_k u_f^2, & \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty} &= C_w \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} \times f_{p\infty}^{3/2}, \\ \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} &= 2\mathcal{D}_z^{A*} u_f^2, & \text{PSF}_\infty &= \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty} \left(1 - C_w f_{p\infty}^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Dans le cas d'un canal plan, les différentes constantes valent :

$$C'_\mu = 0.09; C_t^P = 0.62; \mathcal{H} = 5.23 \times 10^6; C_w = 3; c_k = 1.82; C_t^A = 1.63; \mathcal{B} = 3692; C_{\varepsilon_w,1} = 1. \quad (10.150)$$

Pour un écoulement en tube circulaire :

$$C'_\mu = 0.09; C_t^P = 1.1; \mathcal{H} = 3.3 \times 10^6; C_w = 3; c_k = 2.32; C_t^A = 2.1; \mathcal{B} = 2623; C_{\varepsilon_w,1} = 1. \quad (10.151)$$

La valeur du paramètre \mathcal{H} est fournie par le modèle de coefficient de dispersion passive (voir paragraphe 5.4, à la page 73) pris en $Pr = 1$.

10.4 Évaluation du modèle de turbulence

Le modèle va à présent être validé sur des écoulements turbulents stationnaires dans des milieux stratifiés composés de canaux plans ou de tubes circulaires (voir figures 10.3 et 10.4, page 178). Dans la suite de ce chapitre, le modèle de turbulence proposé est testé sur les configurations d'écoulements résumées dans le tableau 10.3. Ces cas test sont distincts de la base de calibrage du modèle. Les valeurs de référence sont issues de simulations CFD locales moyennées. Le modèle local utilisé pour réaliser ces calculs est le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien [19]. Ces calculs correspondent à des écoulements turbulents incompressibles pour différents Reynolds. La valeur de l'énergie cinétique turbulente spatialement moyennée en entrée rapportée à la valeur à l'équilibre $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$ varie selon les cas.

Nom	Re	$\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$
CP_SIM_TEST_1	7.6×10^4	4
CP_SIM_TEST_2	3.8×10^4	2
CP_SIM_TEST_3	7.6×10^4	0.7
CP_SIM_TEST_4	1×10^5	3
TUBE_SIM_TEST_1	7.6×10^4	4
TUBE_SIM_TEST_2	3.8×10^4	2
TUBE_SIM_TEST_3	7.6×10^4	0.7
TUBE_SIM_TEST_4	1×10^5	3

TAB. 10.3 – Description des écoulements en canaux pris comme base de validation du modèle de turbulence.

Les résultats du modèle sont comparés aux évolutions de référence, ainsi qu'à trois autres modèles de la littérature : le modèle de Chandesris [17], le modèle de Nakayama et Kuwahara [69] et le modèle de Teruel [100]. Pour ce faire, nous produisons les évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, $\langle \bar{E}^m \rangle_f$, $\bar{\mathcal{K}} = \langle \bar{k} \rangle_f + \langle \bar{E}^m \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ et $\bar{\bar{E}} = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Les résultats obtenus en canal plan sont présentés sur les figures 10.26 à 10.29. Les résultats obtenus en tube circulaire sont présentés sur les figures 10.30 à 10.33. Les tests numériques montrent que le modèle de turbulence présenté ici permet de retrouver la dynamique d'établissement de l'écoulement. En effet, les profils obtenus avec le modèle macroscopique sont proches des profils de référence. D'autre part, l'amélioration par rapport aux autres modèles de la littérature est significative. Comme nous l'attendions, les modèles de Chandesris [17] et de Nakayama et Kuwahara [68] ne peuvent pas reproduire les oscillations dues à la compétition entre la production de sous-filtre et la dissipation visqueuse en ce qui concerne l'énergie cinétique de turbulence, ou entre la traînée, la dissipation de sillage et la production de sous-filtre pour $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Le modèle de Teruel [100] donne quant à lui d'assez bons résultats sur la dissipation totale de sous-filtre, soit $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. En revanche, le modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ donne de bien meilleurs résultats sur l'énergie cinétique totale de sous filtre, soit $\langle \bar{k} \rangle_f + \langle \bar{E}^m \rangle_f$.

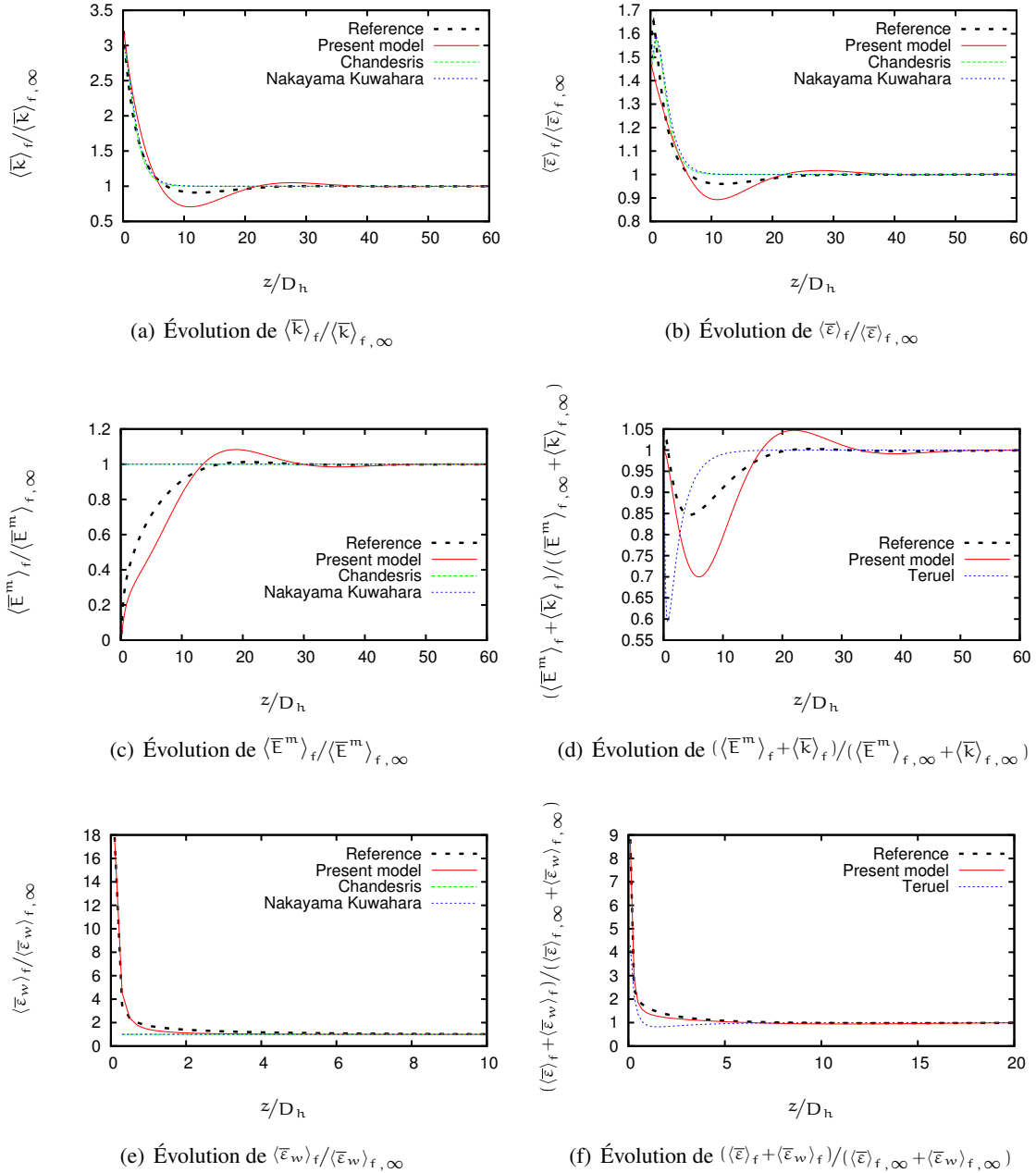


FIG. 10.26 – Établissement d'un écoulement turbulent en **canal plan** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test CP_SIM_TEST_1 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

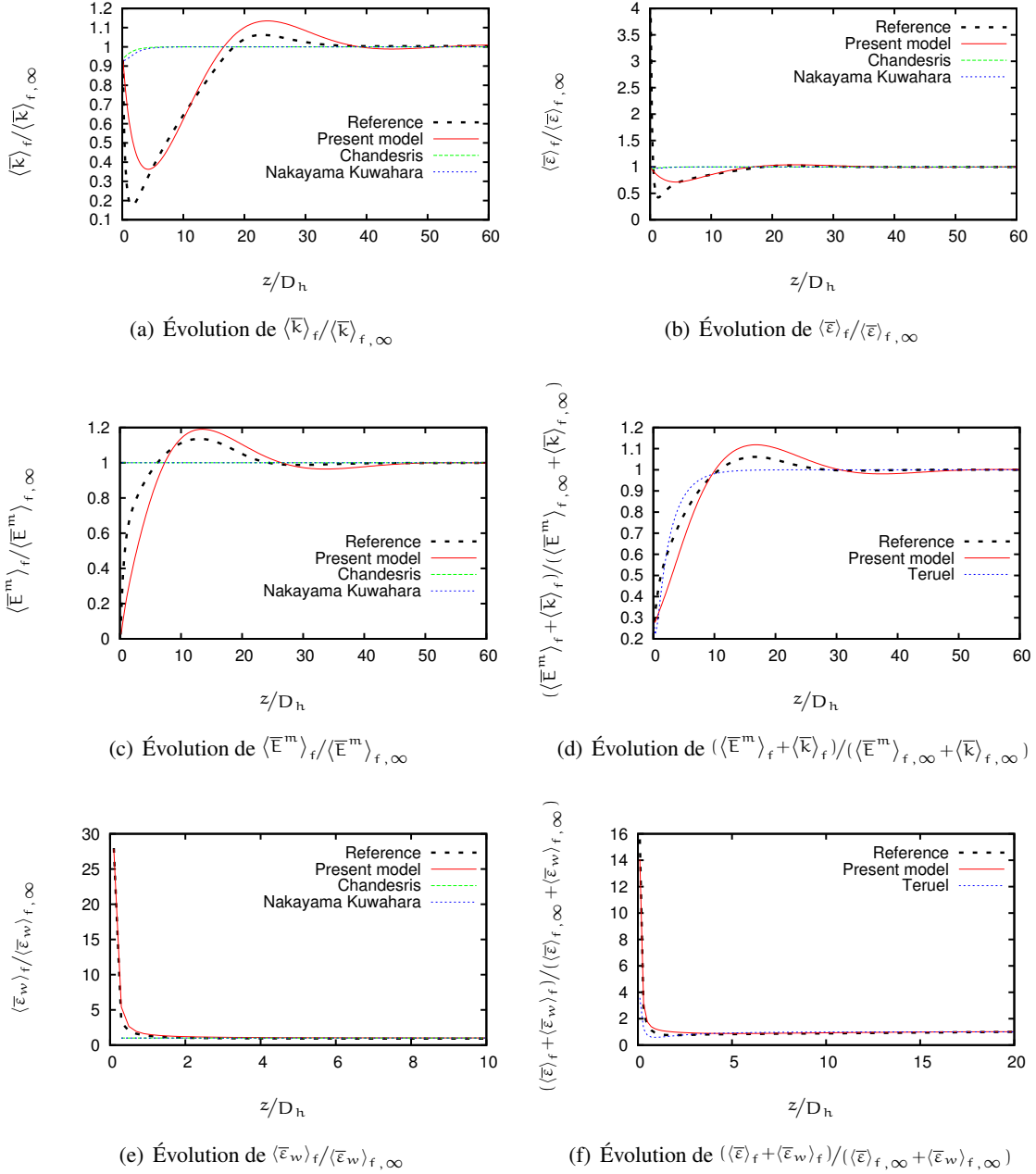


FIG. 10.27 – Établissement d'un écoulement turbulent en **canal plan** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test CP_SIM_TEST_2 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

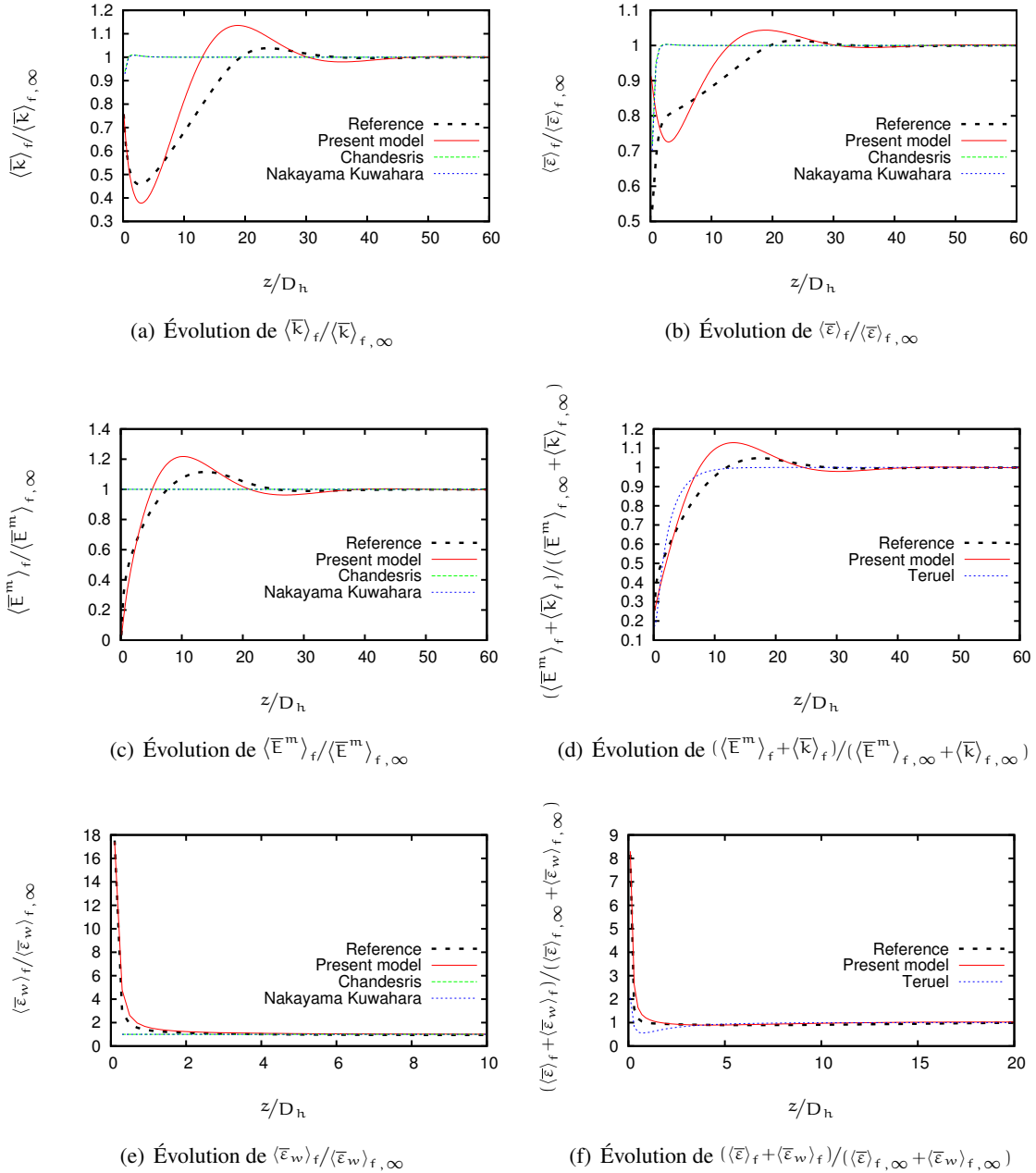


FIG. 10.28 – Établissement d'un écoulement turbulent en **canal plan** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test CP_SIM_TEST_3 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

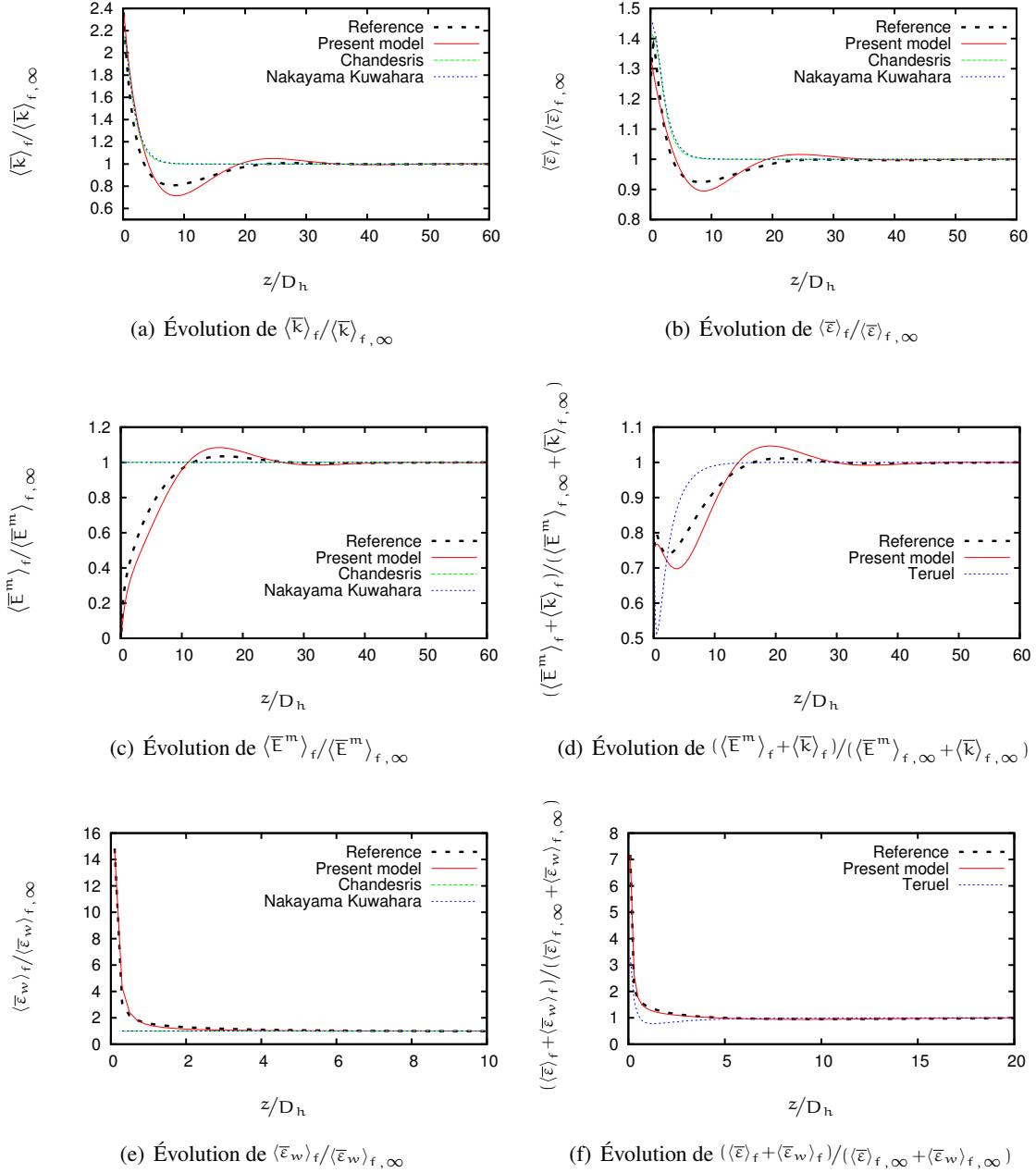


FIG. 10.29 – Établissement d'un écoulement turbulent en **canal plan** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test CP_SIM_TEST_4 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

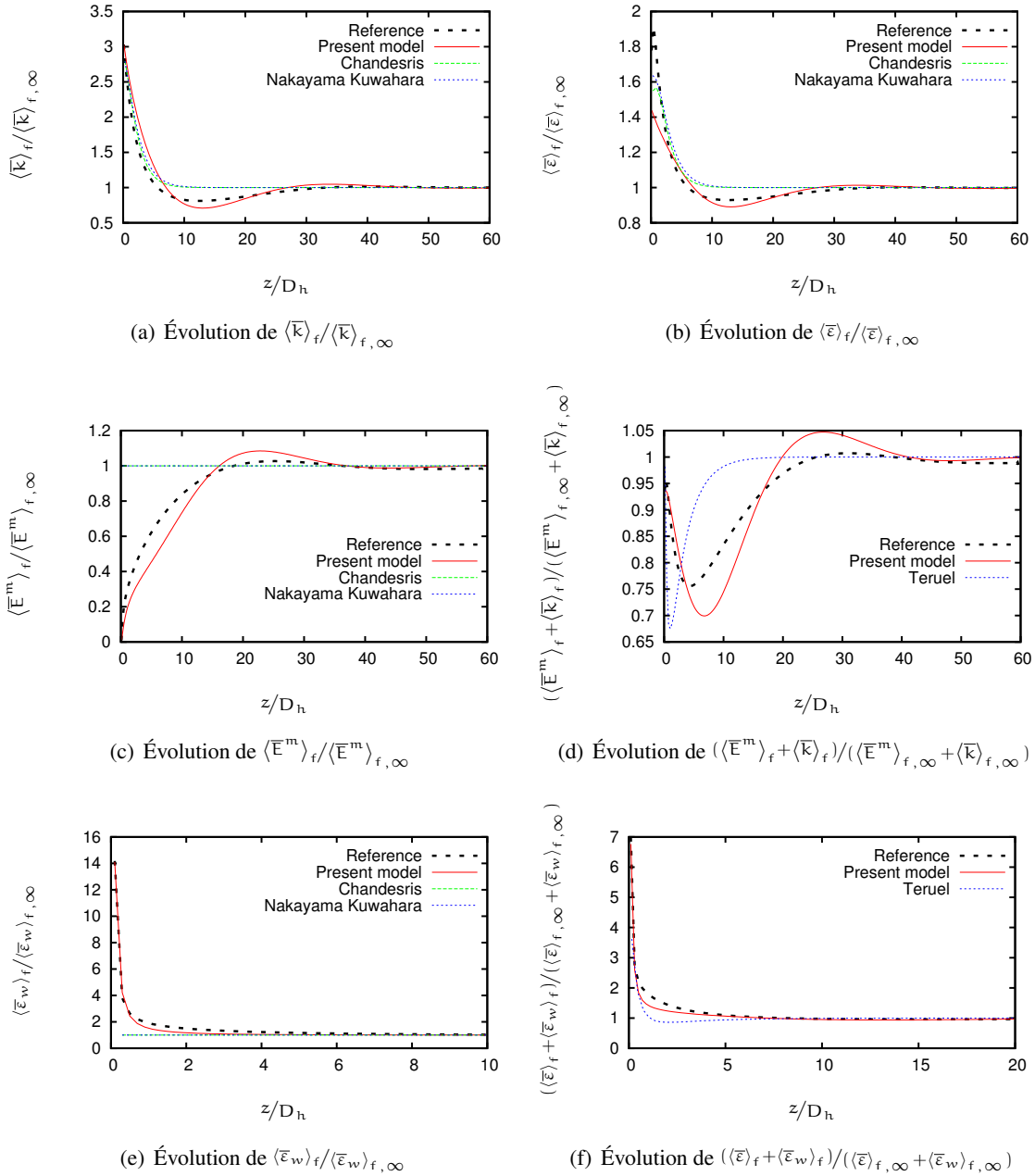


FIG. 10.30 – Établissement d'un écoulement turbulent en **tube circulaire** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test TUBE_SIM_TEST_1 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

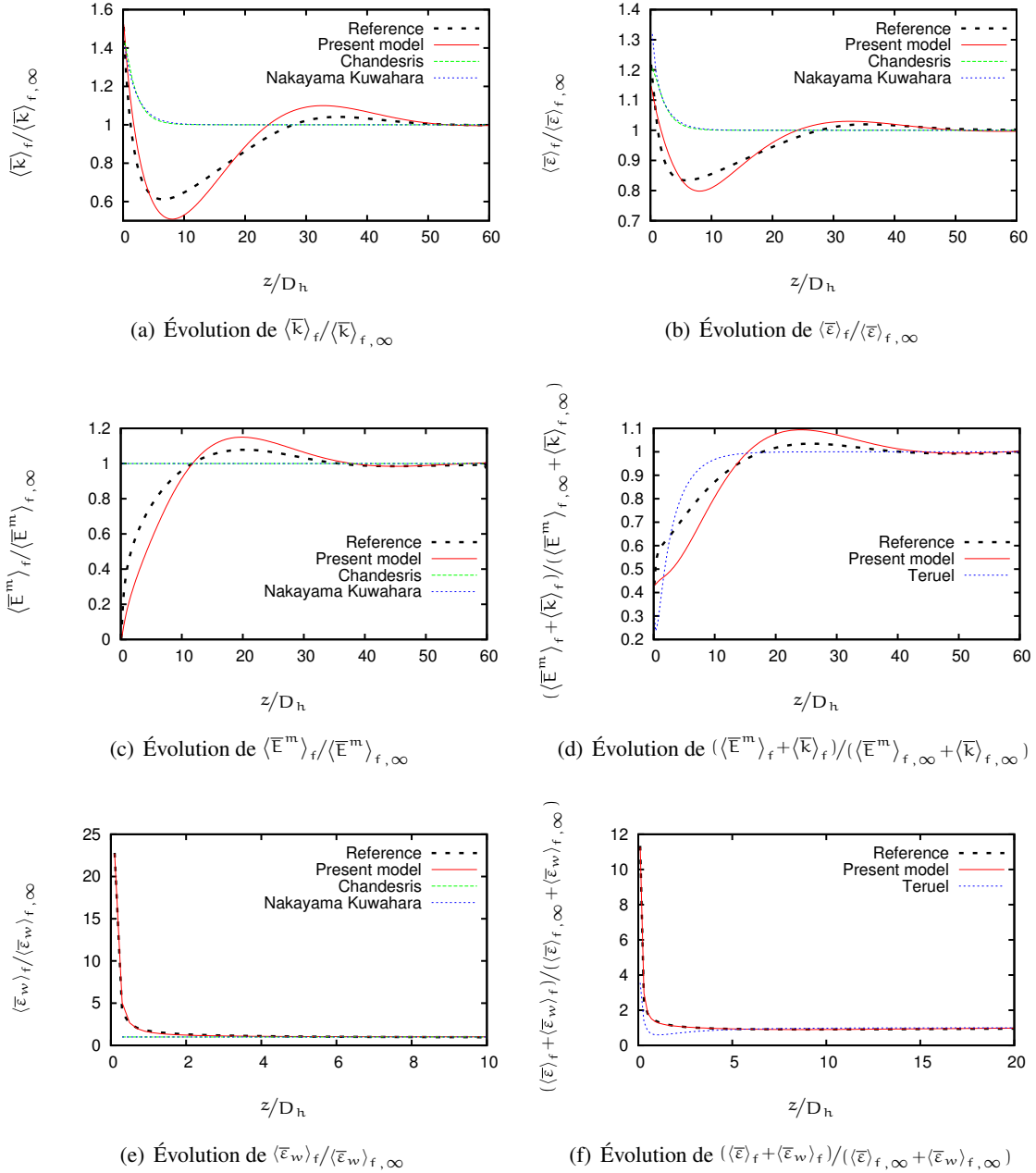


FIG. 10.31 – Établissement d'un écoulement turbulent en **tube circulaire** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test TUBE_SIM_TEST_2 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

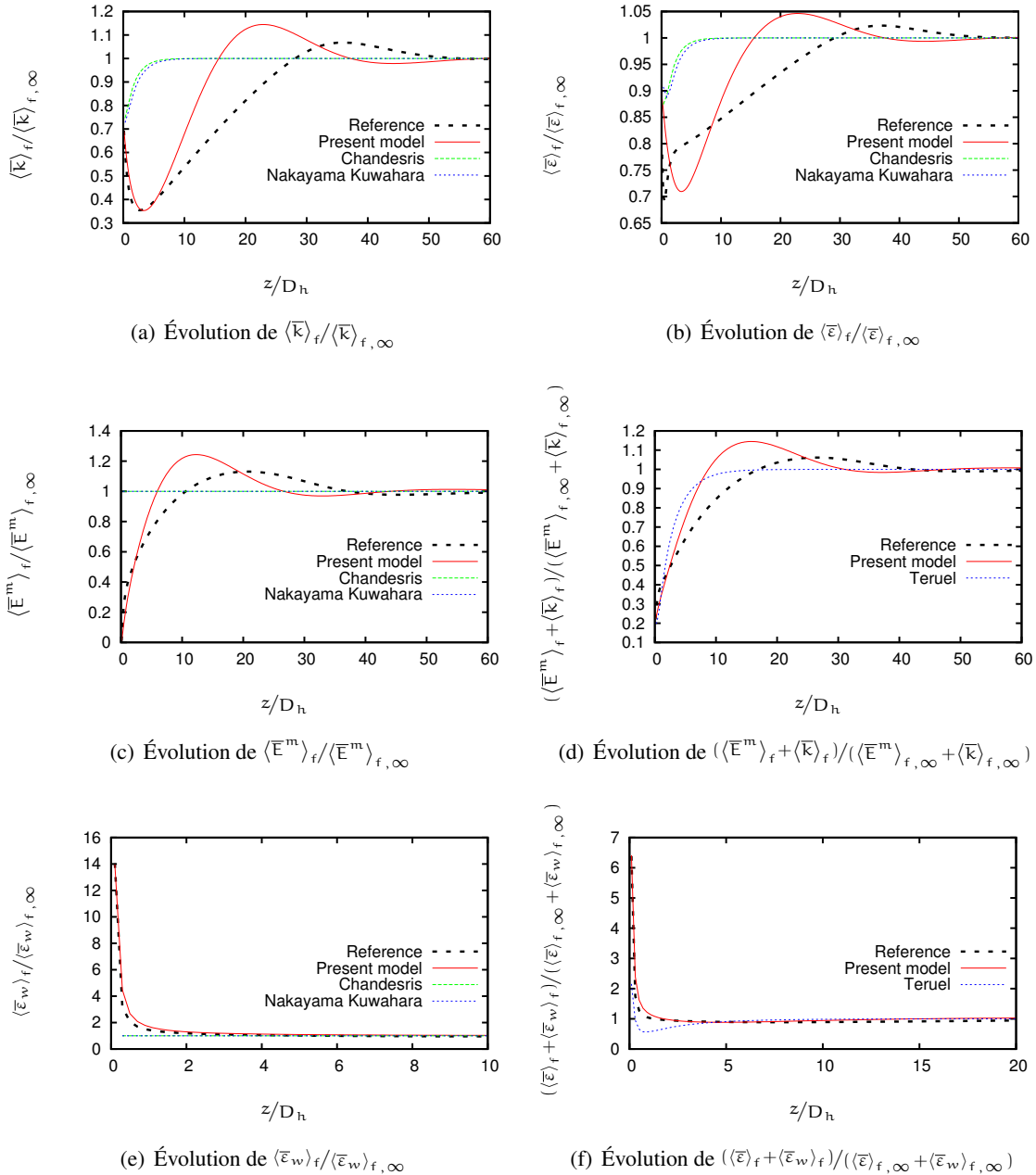


FIG. 10.32 – Établissement d'un écoulement turbulent en **tube circulaire** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test TUBE_SIM_TEST_3 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

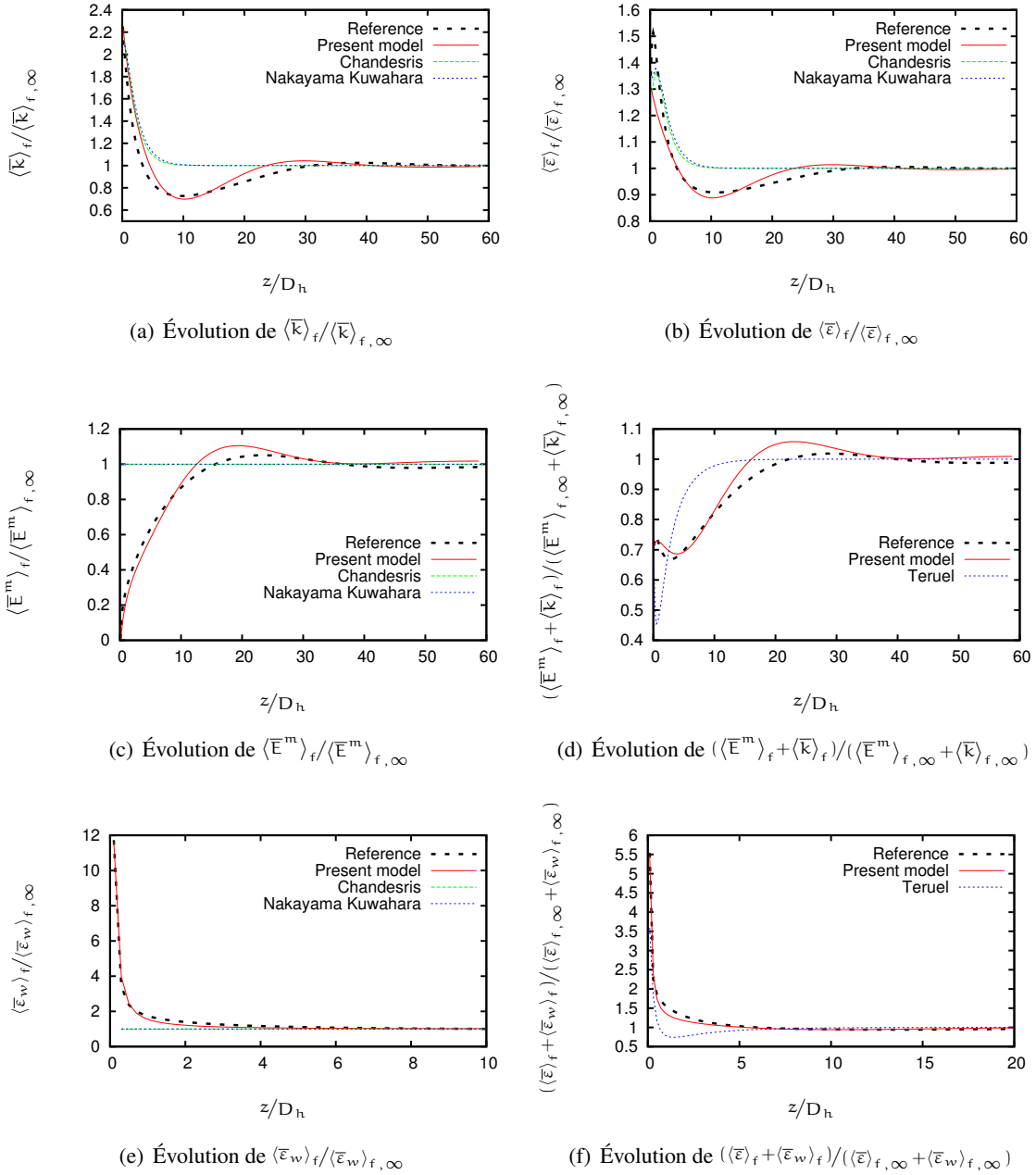


FIG. 10.33 – Établissement d'un écoulement turbulent en **tube circulaire** : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Comparaison entre les résultats du modèle et les évolutions de référence pour le cas test TUBE_SIM_TEST_4 décrit dans le tableau 10.3. Comparaison avec les modèles de Chandesris [17], Nakayama et Kuwahara [69] et Teruel [100]

VERS UN MODÈLE DYNAMIQUE DE DISPERSION THERMIQUE

Dans la partie II, un modèle de dispersion thermique pour des écoulements à l'équilibre hydraulique a été établi. Dans la partie III, un modèle permettant de restituer l'établissement d'un écoulement turbulent a été établi. Pour pouvoir simuler correctement un écoulement qui est à la fois hors équilibre hydraulique et chauffé, il apparaît naturel de chercher à coupler ces deux modélisations. La plupart des auteurs [17, 68, 74] se concentrent sur la modélisation du coefficient de diffusivité turbulente macroscopique. Or nous avons montré dans la partie II que, du point de vue de la thermique et pour la gamme de nombres de Prandtl et de Reynolds qui nous intéresse, c'est la dispersion qui prédomine très largement. C'est pourquoi nous proposons ici des pistes de modélisation dynamique de la dispersion sur le modèle de ce qui est généralement fait pour la diffusion thermique.

11.1 Diffusivité turbulente macroscopique

Certains auteurs [2, 32] proposent de dériver un équation de transport pour les contraintes de Reynolds macroscopiques. Cependant, cette approche est complexe et de nombreux auteurs privilégient une modélisation fondée sur une hypothèse de Boussinesq adaptée au cas des milieux poreux [17, 68, 74, 78]. Ainsi, par analogie avec les modèles locaux, $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$ est modélisé *via* l'introduction d'un coefficient de viscosité turbulente macroscopique :

$$-\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f = \nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij}. \quad (11.1)$$

La viscosité turbulente est définie par :

$$\nu_{t\phi} = C'_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (11.2)$$

où $C'_\mu = 0.09$.

La diffusivité thermique turbulente est modélisée par une fermeture au premier gradient [68, 77] :

$$-\langle \bar{u}_i \bar{T}'_f \rangle_f = \alpha_{t\phi} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}, \quad (11.3)$$

où $\alpha_{t\phi}$ est la diffusivité thermique turbulente macroscopique. Elle est définie comme une fonction de la viscosité turbulente macroscopique et du nombre de Prandtl turbulent :

$$\alpha_{t\phi} = \frac{\nu_{t\phi}}{\text{Pr}_t}. \quad (11.4)$$

11.2 Modèle dynamique de dispersion thermique

Nous nous intéressons à présent à la modélisation de la dispersion thermique. Pour cela, nous commençons par modéliser le terme dispersif dans l'équation de quantité de mouvement doublement moyennée (2.64). Nous avons vu que l'énergie cinétique associée à la dispersion est l'énergie de sous-filtre du mouvement moyen $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Par analogie avec ce qui est généralement fait pour les contraintes de Reynolds, nous proposons d'utiliser une fermeture de type Brinkman [13] :

$$-\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f = \nu_{d\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{E}^m \rangle_f \delta_{ij}, \quad (11.5)$$

où le coefficient $\nu_{d\phi}$ est défini comme :

$$\nu_{d\phi} = C_\mu'' \frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f^2}{\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f}. \quad (11.6)$$

Pour des écoulements où la dispersion thermique peut être approchée grâce à une fermeture au premier gradient, *i.e.* lorsque les flux thermiques en paroi sont homogènes, il est possible d'écrire :

$$-\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f = \mathcal{D}_{ij}^p \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}, \quad (11.7)$$

où \mathcal{D}_{ij}^p est le tenseur de dispersion passive introduit dans la partie I. Il est alors possible de faire le lien entre le tenseur de dispersion passive \mathcal{D}_{ij}^p et le coefficient $\nu_{d\phi}$:

$$\text{trace}(\mathcal{D}_{ij}^p) = \frac{\nu_{d\phi}}{\text{Pr}_d} = \frac{C_\mu''}{\text{Pr}_d} \frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f^2}{\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f}. \quad (11.8)$$

Il reste à présent à déterminer C_μ''/Pr_d pour obtenir un modèle de dispersion thermique dynamique, *i.e.* qui permet de modéliser précisément des écoulements hors équilibre hydraulique. Nous cherchons de plus à valider la cohérence de la proposition (11.6) avec le modèle de dispersion proposé dans les chapitres 3 et 4 dans le cas d'écoulements hydrauliquement établis. Pour cela, considérons des écoulements hydrauliquement établis en canaux. Pour de tels écoulements, seule la contribution \mathcal{D}_{zz}^p subsiste et les valeurs de $\langle \bar{E}^m \rangle_f = \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}$, $\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f = \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty}$ et \mathcal{D}_{zz}^p sont connues et nous pouvons estimer C_μ''/Pr_d .

Écoulements laminaires Pour des écoulements laminaires en canal plan ou en tube circulaire, l'énergie dispersive et la dissipation de sillage à l'équilibre sont modélisées par (voir chapitre 9) :

$$\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} = 2\mathcal{D}_z^{A*} u_f^2 = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{c_1}, \quad (11.9)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty} = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_p = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_h} \times \frac{c_2}{Re}, \quad (11.10)$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= 10 \text{ et } c_2 = 48 \text{ en canal plan,} \\ c_1 &= 6 \text{ et } c_2 = 32 \text{ en tube circulaire.} \end{aligned}$$

En utilisant la relation (11.6), la viscosité de dispersion s'écrit donc :

$$\nu_{d\phi} = \nu_f \frac{C''}{c_3} Re^2, \quad (11.11)$$

où

$$\begin{aligned} c_3 &= c_1^2 c_2 = 4800 \text{ en canal plan,} \\ c_3 &= c_1^2 c_2 = 1152 \text{ en tube circulaire.} \end{aligned}$$

En réinjectant cette expression dans la relation (11.8), nous obtenons :

$$\mathcal{D}_{zz}^P = \frac{1}{Pr_d} \times \nu_f \frac{C''}{c_3} Re^2. \quad (11.12)$$

Par ailleurs, le coefficient \mathcal{D}_{zz}^P a été déterminé pour des écoulements laminaires établis en canal plan et en tube circulaire dans le chapitre 3 :

$$\mathcal{D}_{zz}^P = \alpha_f \frac{Pe^2}{C_\ell^P}, \quad (11.13)$$

où

$$\begin{aligned} C_\ell^P &= 840 \text{ en canal plan,} \\ C_\ell^P &= 192 \text{ en tube circulaire.} \end{aligned}$$

En comparant les expressions (11.12) et (11.13), on peut écrire :

$$\frac{C''}{Pr_d} = \frac{c_3}{C_\ell^P} Pr, \quad (11.14)$$

soit

$$\frac{C''}{Pr_d} = \begin{cases} 5.7 Pr & \text{en canal plan,} \\ 6 Pr & \text{en tube circulaire.} \end{cases} \quad (11.15)$$

Écoulements turbulents en canal plan Pour des écoulements laminaires en canal plan ou en tube circulaire, l'énergie dispersive et la dissipation de sillage à l'équilibre sont modélisées par (voir chapitre 10) :

$$\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} = \mathcal{D}_z^{A*} \langle \bar{u}_z \rangle_f^2 \frac{f_{p\infty}}{4}, \quad (11.16)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty} = 1.5 \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_h} f_{p\infty}^{3/2}. \quad (11.17)$$

Le coefficient $\nu_{d\phi}$ peut alors s'écrire :

$$\nu_{d\phi} = \nu_f C_\mu'' \frac{(\mathcal{D}_z^{A*})^2}{24} \sqrt{f_p} \text{Re}. \quad (11.18)$$

Pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés ($\text{Re} > 10^5$), le coefficient de dispersion active adimensionné \mathcal{D}_z^{A*} est constant. Il vaut 1.63 en canal plan et 2.1 en tube circulaire (voir chapitre 4). L'expression (11.18) s'écrit alors :

$$\nu_{d\phi} = C_\mu'' c_4 \nu_f \sqrt{f_{p\infty}} \text{Re}, \quad (11.19)$$

avec $c_4 = 0.11$ en canal plan et $c_4 = 0.18$ en tube circulaire. L'expression (11.8) conduit donc à :

$$\mathcal{D}_{zz}^P = \frac{C_\mu''}{\text{Pr}_d} c_4 \nu_f \sqrt{f_{p\infty}} \text{Re}. \quad (11.20)$$

Le coefficient de dispersion thermique passive s'écrit quant à lui :

$$\mathcal{D}_{zz}^P = \alpha_f C_t^P \sqrt{f_{p\infty}} \text{Pe}, \quad (11.21)$$

où $C_t^P = 0.62$ en canal plan et $C_t^P = 1.1$ en tube circulaire. En comparant les relations (11.20) et (11.21), on obtient :

$$\frac{C_\mu''}{\text{Pr}_d} = \frac{C_t^P}{c_4}. \quad (11.22)$$

Autrement dit :

$$\frac{C_\mu''}{\text{Pr}_d} = \begin{cases} 5.6 & \text{en canal plan,} \\ 6 & \text{en tube circulaire.} \end{cases} \quad (11.23)$$

La proposition (11.6) permet donc de retrouver les résultats obtenus pour des écoulements hydrauliquement établis.

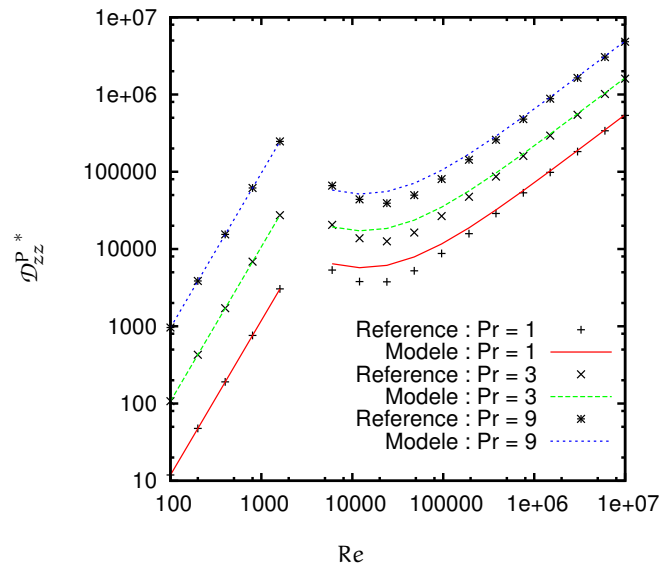
Finalement, nous proposons le modèles de dispersion thermique suivant :

$$\mathcal{D}_{zz}^P = \frac{C_\mu''}{\text{Pr}_d} \frac{\langle \bar{\epsilon}^m \rangle_{f,\infty}^2}{\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f,\infty}}, \quad (11.24)$$

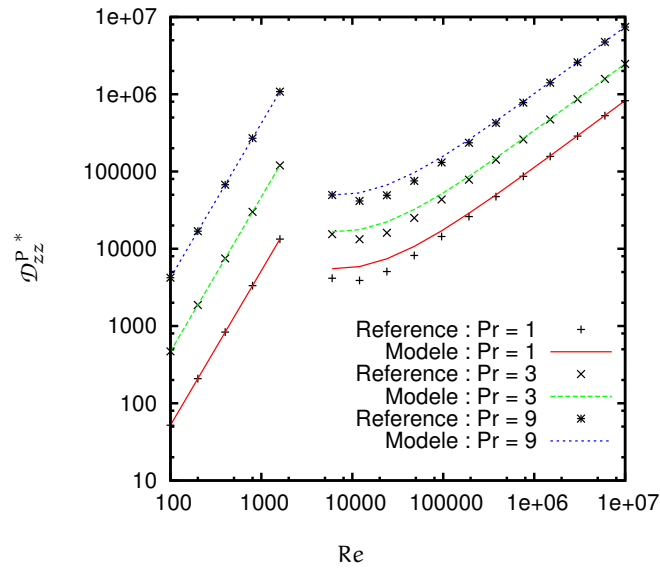
avec

$$\frac{C_\mu''}{\text{Pr}_d} = \begin{cases} 5.85 \text{ Pr} & \text{en régime laminaire,} \\ 5.85 & \text{en régime turbulent.} \end{cases} \quad (11.25)$$

Les résultats obtenus avec le modèle (11.8) sont comparés aux résultats issus de la résolution du problème de fermeture pour des écoulements établis sur la figure 11.1. L'accord est excellent aux états asymptotiques. La proposition (11.6) semble donc une voie de modélisation prometteuse. Le travail présenté dans ce chapitre n'est qu'une première étape mais il justifie de pousser plus avant l'étude du modèle dynamique de dispersion (11.6), notamment en l'appliquant à des écoulements hors équilibre.



(a) Canal plan



(b) Tube circulaire

FIG. 11.1 – Comparaison du modèle de dispersion thermique de référence construit à partir des solutions du problème de fermeture aux résultats du modèle dynamique pour des écoulements établis en canaux.

CONCLUSION

La complexité de la structure d'un cœur de réacteur nucléaire ou d'un échangeur de chaleur est trop importante pour pouvoir simuler finement l'ensemble du système. Néanmoins, la connaissance fine de l'écoulement dans la région combustible n'est pas nécessaire : une description macroscopique suffit pour mener les études de conception ou de sûreté. Partant de ce constat, nous proposons un modèle macroscopique en considérant que la structure solide constitue un milieu poreux. L'écoulement étant généralement turbulent dans ce type d'installations de grandes dimensions, deux moyennes ont été utilisées : une moyenne statistique qui permet de s'affranchir du caractère aléatoire de la turbulence, puis une moyenne spatiale qui permet d'obtenir une représentation homogénéisée du milieu. L'application de ces deux filtres aux équations de Navier-Stokes fait apparaître des termes de corrélation qui traduisent les effets des phénomènes microscopiques à l'échelle macroscopique : le terme de corrélation des fluctuations statistiques est associé à la diffusion turbulente, le terme de corrélation des fluctuations spatiales est, quant à lui, lié à la dispersion. Enfin, un troisième terme représente les effets de tortuosité du milieu poreux. Afin de reconstituer l'information perdue lors du processus de double moyenne, ces termes doivent être modélisés.

Nous nous sommes concentrés sur la dispersion thermique. En effet, les écoulements dans les grands systèmes d'échange thermique sont généralement quasi-parallèles et la tortuosité ne joue donc pas un rôle prédominant. Un modèle de dispersion thermique couvrant tous les régimes d'écoulement a été établi pour des écoulements hydrauliquement établis en canaux. En généralisant la méthode de Whitaker [14, 107] au cas des écoulements turbulents, les deux contributions mises en évidence par Pinson [76] ont été étudiées : la dispersion passive liée à l'hétérogénéité des profils de vitesse et la contribution active qui tient compte de l'hétérogénéité des flux thermiques en paroi. Les problèmes de fermeture ont été résolus dans des Volumes Élémentaires Représentatifs et les coefficients de dispersion ont été exprimés en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl pour des écoulements en canaux plans, tubes circulaires et conduites annulaires. L'étude d'écoulements laminaires et turbulents en canaux nous a ensuite permis de valider le modèle de dispersion thermique proposé et d'évaluer l'importance des différents termes. Ainsi, en simulant l'étalement d'un front de température au cours du temps, les effets de dispersion passive sont correctement restitués par notre modèle. Ces résultats ont confirmé que, dans la direction longitudinale, la dispersion prédomine très largement sur la diffusion turbulente. L'étude d'écoulements soumis à un chauffage fortement hétérogène a par ailleurs permis de montrer que la dispersion passive seule ne permet pas de prévoir avec précision les effets des hétérogénéités de flux thermiques en paroi : l'introduction du terme de dispersion active est nécessaire. Le modèle prenant en compte les deux contributions, comparé à des simulations fines, fournit de très bons résultats.

Dans la suite de l'étude, une extension du formalisme « milieux poreux » à la modélisation de la température de paroi et de l'échange thermique a été proposée. Dans un premier temps, cette méthode a abouti à un modèle algébrique de température de paroi. Ce dernier permet de saisir certains phénomènes mais les hypothèses de validité qui lui sont associées sont contraignantes : elles ne sont pas vérifiées lorsque les gra-

dients de température moyenne ou les variations en temps sont raides ou encore si le flux thermique imposé en paroi est très hétérogène. Nous avons donc choisi de dériver un modèle macroscopique de température de paroi à une équation de transport. Ce dernier donne de très bons résultats pour des écoulements en canaux et permet d'étendre considérablement le domaine de validité du modèle algébrique. D'un point de vue pratique, ce modèle peut, par exemple, être utilisé lors de la conception d'équipements expérimentaux pour déterminer l'emplacement adéquat des thermocouples avec une précision équivalente à celle d'une simulation fine pour un coût de calcul beaucoup plus faible.

Dans la troisième partie de l'étude, nous nous sommes intéressés à des écoulements adiabatiques en déséquilibre hydraulique. Une analyse physique détaillée a permis de mettre en évidence les grandeurs d'intérêt et les différents types de transferts énergétiques ayant lieu au sein d'un écoulement turbulent en milieu poreux. L'importance de l'énergie de sous-filtre du mouvement moyen, également appelée énergie dispersive, a notamment été mise en évidence. C'est cette énergie qui traduit, à l'échelle macroscopique, l'hétérogénéité locale des profils de vitesse. Elle est constante pour des écoulements établis, mais c'est elle qui permet de caractériser le niveau d'établissement de l'écoulement. Nous avons donc choisi de baser notre modèle de turbulence en milieu poreux sur l'énergie de turbulence moyennée $\langle \bar{k} \rangle_f$ et sur l'énergie dispersive $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Choisir ces quantités comme variables du modèle conduit à mettre l'accent sur la production de sous-filtre, qui détruit l'énergie dispersive pour alimenter la turbulence, ainsi que sur la dissipation visqueuse associée à $\langle \bar{k} \rangle_f$ et sur la dissipation de sillage associée à $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Une étude bibliographique nous a permis de formaliser les contraintes mathématiques liées à la modélisation macroscopique de la turbulence. En particulier, à l'équilibre, les grandeurs turbulentes sont non nulles et tout modèle doit pouvoir atteindre cet état. Nous avons aussi noté que la plupart des auteurs proposent des modèles $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$. Seuls Pinson [78] et Teruel [100] s'intéressent aux grandeurs dispersives : l'un inclue la modélisation de la dissipation de sillage et l'autre propose de modéliser conjointement les énergies turbulente et dispersive. Nous avons ensuite développé un modèle de turbulence macroscopique à trois équations de transport $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f - \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f$. Des modèles algébriques ont été proposés pour la production de sous-filtre, la dissipation visqueuse et le coefficient de frottement. De plus, les grandeurs à l'équilibre ont été exprimées en fonction de la vitesse moyenne, du diamètre hydraulique et du coefficient de frottement à l'équilibre pour des écoulements en canaux plans et en tube circulaire. Ainsi, nous disposons d'un modèle de turbulence complet pour ces deux géométries. Les capacités de prédiction du modèle ont été testées pour divers écoulements turbulents pour les deux géométries considérées. Il est capable de restituer de façon très satisfaisante l'établissement d'un écoulement entrant dans un canal.

Enfin, nous avons proposé des pistes de modélisation de la dispersion thermique pour des écoulements non établis *via* l'introduction d'une diffusivité thermique dispersive calculée à partir de l'énergie dispersive et de la dissipation de sillage. Ce modèle est cohérent avec les corrélations établies dans la deuxième partie du mémoire lorsque l'écoulement est à l'équilibre hydraulique.

Ce travail a permis de mettre en lumière l'importance de la dispersion thermique et de l'énergie dispersive pour des écoulements turbulents traversant une structure solide. Des modèles ont été proposés pour chacun de ces phénomènes et des pistes vers un modèle couplant la turbulence et la dispersion thermique ont été proposées. Différentes perspectives peuvent être envisagées pour l'amélioration de ces modèles :

- Extension à d'autres géométries. Dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés sur des écoulements parallèles dans des milieux dont les pores ne communiquent pas entre eux. L'étude d'écoulements longitudinaux (voir fig. .1) et transverses dans des faisceaux de crayons reste à étudier.
- Couplage entre les modèles de turbulence et de dispersion. Nous avons proposé des pistes de modélisation couplée de la dispersion thermique et de la turbulence. Ce point reste à approfondir et constitue

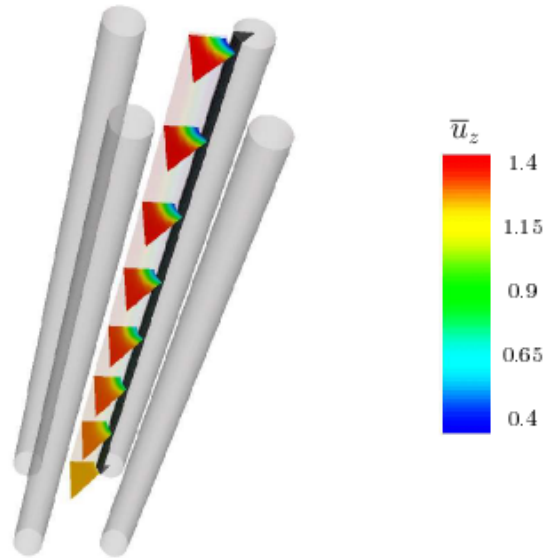


FIG. .1 – Établissement d'un écoulement longitudinal dans un faisceau de crayons.

un axe de travail très intéressant pour une généralisation des modèles de dispersion thermique. En particulier, le lien entre $\langle \bar{E}_{ij}^m \rangle_f$ et le tenseur de dispersion dans un milieu désordonné pourrait être étudié plus en détails.

- Étude d'écoulements présentant un cisaillement macroscopique. Nous avons supposé que les gradients de vitesse macroscopique étaient nuls. Il serait intéressant d'étudier, par exemple, le cas d'un écoulement présentant un cisaillement macroscopique constant (fig. .2). Ce type de cas permettrait d'étudier la modélisation du tenseur de Reynolds macroscopique et de vérifier la pertinence du modèle de turbulence. En ajoutant un spot de chaleur à la paroi, cela permettrait aussi d'évaluer le comportement du modèle de dispersion thermique.
- Étude de singularités. Dans un cœur de réacteur nucléaire, la présence de grilles de mélange (voir fig. .3) doit pouvoir être prise en compte sous la forme de singularités. Un terme de perte de charge singulière peut être ajouté au coefficient de frottement mais la prise en compte des phénomènes de production localisés reste à étudier.
- Écoulements en sortie de milieu poreux. À la sortie d'un milieu poreux, la turbulence est alimentée par la production de sous-filtre, qui représente la destruction progressive des sillages [16]. Or nous avons montré que cette dernière est liée à l'énergie dispersive. L'étude de l'évolution de l'énergie dispersive peut donc permettre de mieux comprendre les mécanismes qui ont lieu dans la zone de transition et donc d'améliorer la modélisation des écoulements à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux.

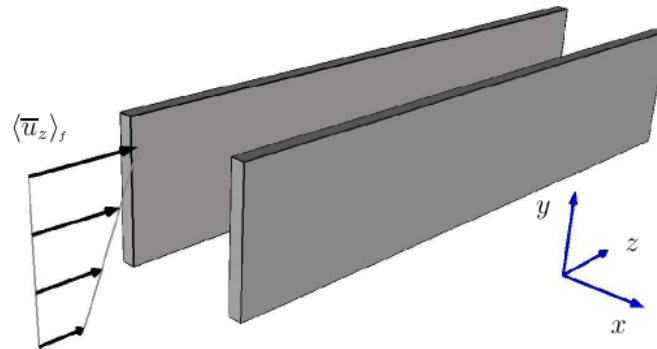


FIG. .2 – Établissement d'un écoulement longitudinal dans un canal présentant un cisaillement macroscopique constant.

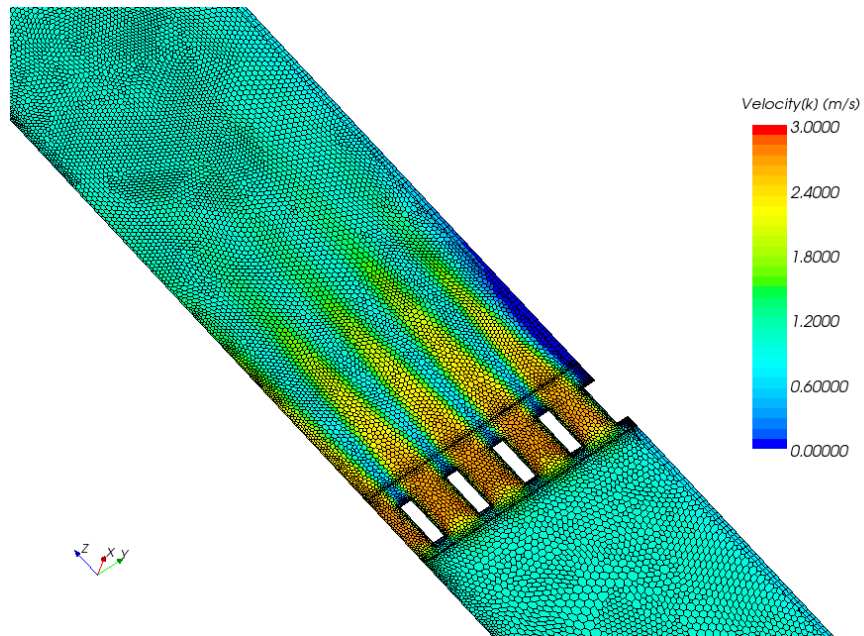


FIG. .3 – Écoulement traversant une grille de mélange : champ de vitesse local. Résultats obtenus avec le code Star-CCM+ et transmis gracieusement pas Areva TA.

ANNEXES

DÉTERMINATION DES CONSTANTES DU MODÈLE $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$

A.1 Détermination de C_{ε_2}

Dans le cas d'un écoulement stationnaire caractérisé par une vitesse uniforme en moyenne \bar{u}_z , suffisamment loin en aval d'une grille, le terme de production est nul et la diffusion est négligeable. Les équations de transport de \bar{k} et $\bar{\varepsilon}$ se simplifient alors en :

$$\begin{cases} \bar{u}_z \frac{\partial \bar{k}}{\partial z} = -\bar{\varepsilon}, \\ \bar{u}_z \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial z} = -C_{\varepsilon_2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

En notant les conditions aux limites :

$$\bar{k}(z_0) = \bar{k}_0; \quad \bar{\varepsilon}(z_0) = \bar{\varepsilon}_0, \quad (\text{A.2})$$

la solution du système (A.1) est :

$$\bar{k}(z) = \bar{k}_0 \left[1 + (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{(z - z_0)}{\bar{u}_z} \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{k}_0} \right]^{\frac{1}{1 - C_{\varepsilon_2}}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\varepsilon}(z) = \bar{\varepsilon}_0 \left[1 + (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{(z - z_0)}{\bar{u}_z} \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{k}_0} \right]^{\frac{C_{\varepsilon_2}}{1 - C_{\varepsilon_2}}}. \quad (\text{A.4})$$

Par ailleurs, les travaux expérimentaux fournissent pour l'évolution de \bar{k} une loi de la forme :

$$\bar{k}(z) \sim (z - z_0)^{-n}, \quad (\text{A.5})$$

avec n valant 1 selon Batchelor [5], 1.25 selon Comte-Bellot *et al.* [21]. En comparant les équations (A.3) et (A.5), on obtient :

$$C_{\varepsilon_2} = 1 + \frac{1}{n}. \quad (\text{A.6})$$

Par conséquent, la valeur de C_{ε_2} est comprise dans l'intervalle [1.8; 2.]. En pratique, la valeur standard recommandée pour C_{ε_2} est égale à 1.92 [43].

A.2 Détermination de C_μ

Pour une couche limite plane sans gradient de pression en régime permanent, le terme de production dans l'équation (2.32) s'écrit :

$$\text{Production} = -\overline{u'_z u'_y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y}, \quad (\text{A.7})$$

où u'_y et u'_z désignent respectivement les vitesses normale et tangentielle dans le repère lié à la paroi. En négligeant le gradient de \bar{u}_y dans l'équation (2.23), on obtient :

$$\text{Production} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right)^2 = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right)^2. \quad (\text{A.8})$$

Par ailleurs, les résultats de simulations numériques directes obtenus par Spalart [97] montrent que les mécanismes de production et de dissipation s'équilibrent dans la région logarithmique de la couche limite. Cela implique que :

$$\bar{\varepsilon} = -\overline{u'_z u'_y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right)^2, \quad (\text{A.9})$$

et donc que :

$$C_\mu = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}^2} \times \frac{1}{\left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right)^2} = \left(\frac{\overline{u'_y u'_z}}{\bar{k}} \right)^2. \quad (\text{A.10})$$

Sur la base de données expérimentales, Bradshaw *et al.* [12] ont montré que :

$$\frac{\overline{u'_y u'_z}}{\bar{k}} \simeq 0.3, \quad (\text{A.11})$$

d'où la valeur approchée de C_μ :

$$C_\mu \simeq 0.09. \quad (\text{A.12})$$

A.3 Détermination de C_{ε_1}

Dans une couche limite établie sur plaque plane sans gradient de pression, l'équation de la vitesse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu_f + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right] = 0, \quad (\text{A.13})$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} (\nu_f + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} &= \text{constante} \\ &= \left[(\nu_f + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right] \Big|_{\text{paroi}} \\ &= \nu_f \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \Big|_{\text{paroi}} \\ &= u_\tau^2. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La vitesse u_f est appelée **vitesse de frottement**. Dans la zone logarithmique de la couche limite, la viscosité turbulente est très supérieure à la viscosité moléculaire. Par conséquent, d'après les relations (2.23) et (A.14) :

$$-\overline{u'_y u'_z} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial y} = u_f^2 \quad (\text{A.15})$$

De plus, dans la zone logarithmique, la production par cisaillement et la dissipation s'équilibrent, donc :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= -\overline{u'_y u'_z} \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial y} \\ &= u_f^2 \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial y} \\ &= C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \overline{u}_z}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Finalement, cela donne :

$$\bar{k} = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}}. \quad (\text{A.17})$$

Puis, avec l'expression de la vitesse dans la zone logarithmique :

$$\overline{u}_z = u_f \left(\frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \beta \right), \quad (\text{A.18})$$

où $\kappa = 0.41$ est la constante de Von Kármán et $y^+ = y u_f / \nu_f$, l'expression de $\bar{\varepsilon}$ s'écrit :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u_f^3}{\kappa y}. \quad (\text{A.19})$$

L'équation de transport de $\bar{\varepsilon}$ (2.43) appliquée à la zone logarithmique d'une couche limite se simplifie en :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) = 0. \quad (\text{A.20})$$

En reportant les égalités (A.17) à (A.19) dans l'équation (A.20), on trouve :

$$C_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}, \quad (\text{A.21})$$

la valeur généralement admise pour σ_ε étant 1.3. On touche ici les limites de la faible universalité des modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ puisque l'optimisation sur la base d'un écoulement cisailé libre aurait conduit à $\sigma_\varepsilon = 1.47$.

MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE

Lors de ce travail, trois types de codes ont été utilisés pour dériver et valider les modèles proposés :

- [code multi-D :] FLICA-OVAP [48] est un logiciel de simulation en thermohydraulique développé au Laboratoire d'Études Thermohydrauliques des Réacteurs du CEA Saclay. Après avoir implémenté dans ce code le modèle de turbulence bas Reynolds de Chien [26], nous l'avons utilisé pour obtenir des solutions de référence pour les différents cas-tests traités dans ce mémoire ;
- [code 1D transverse :] afin de calculer les profils établis des différentes grandeurs nécessaires à la fermeture des modèles, nous avons développé un code 1D qui permet de calculer les profils établis de vitesse, d'énergie cinétique turbulente, de dissipation visqueuse et de température ;
- [codes 1D macroscopiques :] afin de pouvoir valider les modèles, nous avons aussi développé deux codes de calcul 1D. L'un résout l'équation de la température moyennée et celle de la température de paroi, l'autre résout les équations du modèle de turbulence macroscopique. Ce code est utilisé pour simuler des écoulements laminaire et turbulents, transitoires ou stationnaires selon une approche homogénéisée.

La figure .1 illustre cette démarche. Dans ce chapitre, nous détaillons les méthodes numériques utilisées pour les codes 1D transverse et macroscopique. Les équations dont la méthode de résolution numérique n'apparaît pas ici sont résolues selon des méthodes identiques à celles détaillées dans les deux paragraphes suivants.

B.1 Simulation d'écoulements établis en canaux

B.1.1 Méthode numérique

Nous choisissons d'utiliser un code de calcul 1D pour déterminer les profils établis de vitesse, d'énergie cinétique turbulente et de dissipation à l'établissement dans des géométries simples. Nous souhaitons en particulier pouvoir obtenir ces profils pour des écoulements en canaux plans et dans des tubes à sections circulaires ou annulaires. Dans ces configurations, l'écoulement se fait suivant une unique direction z et les profils à l'établissement peuvent être décrits suivant un axe normal à z noté y dans le cas du canal plan et r pour les tubes à section circulaire ou annulaire. L'algorithme de calcul utilisé dans le code 1D est résumé Fig. .2 Par souci de concision, la méthode employée n'est détaillée ici que dans le cas du canal plan.

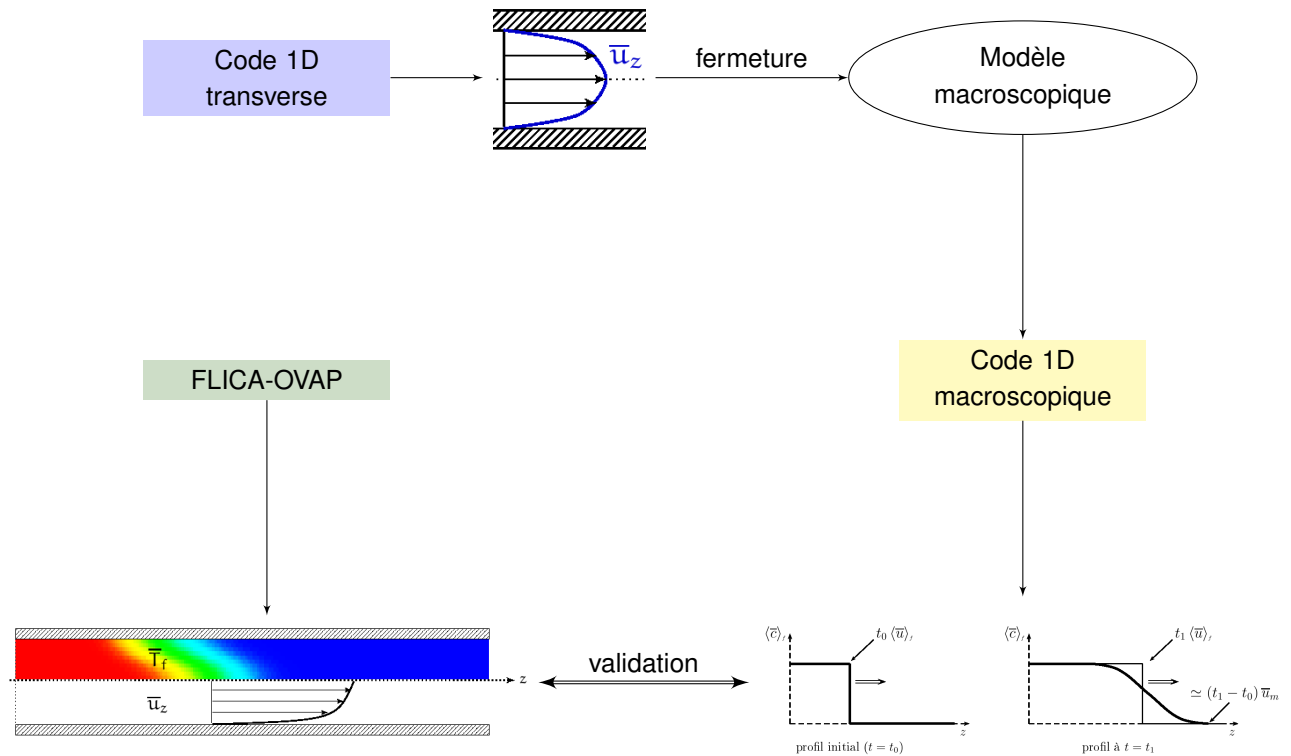


FIG. .1 – Différents codes de calcul utilisés : représentation schématique de la démarche. Le code 1D transverse est utilisé pour déterminer les profils établis nécessaires à la fermeture du modèle. Le modèle macroscopique est ensuite implémenté dans un code 1D. Les résultats obtenus sont comparés à des résultats moyennés de simulation fines réalisées avec FLICA-OVAP.

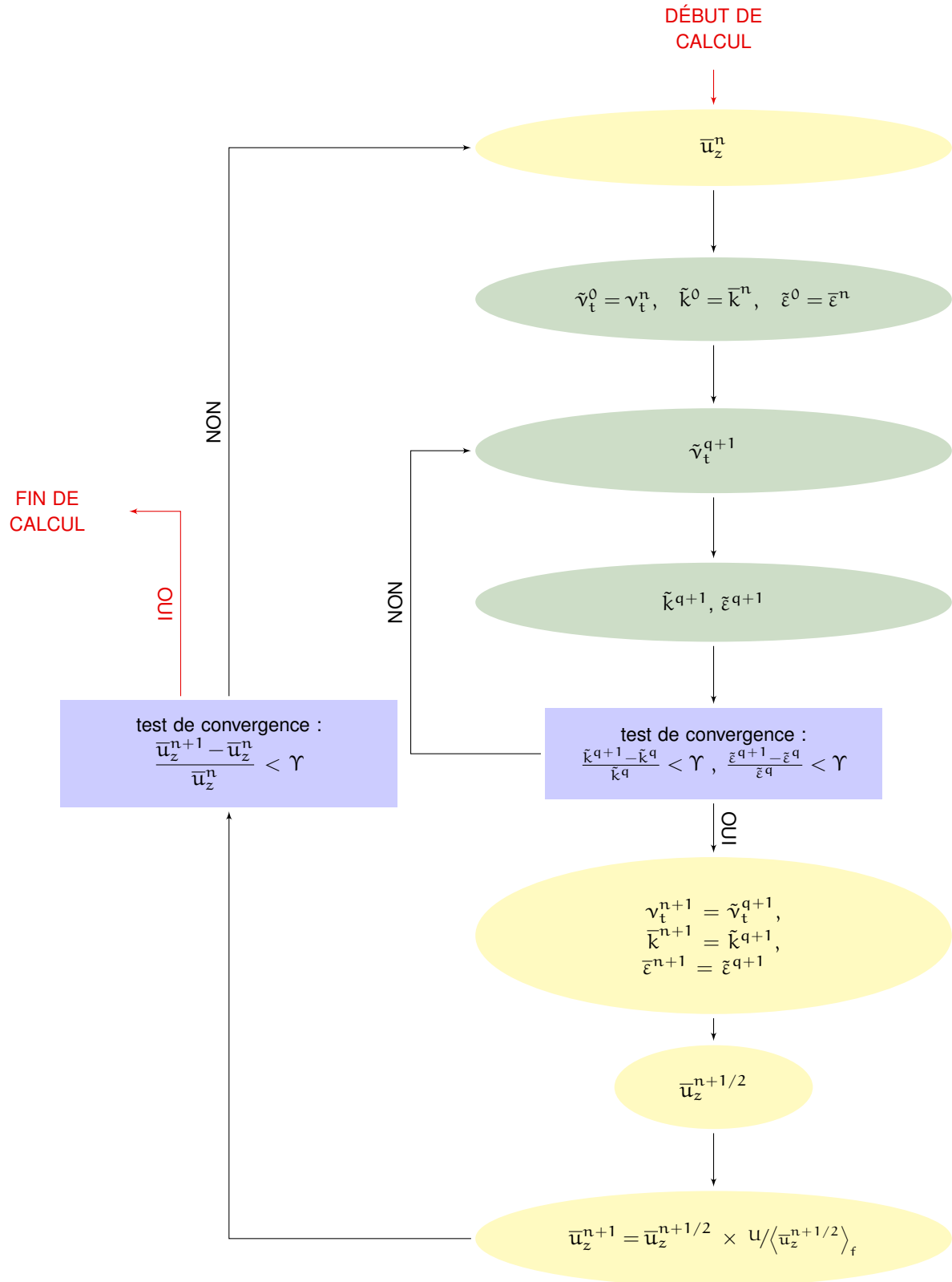


FIG. .2 – Algorithme de calcul du code 1D de résolution du modèle local de turbulence.

Pour un écoulement établi en canal plan les équations (2.19), (2.45) et (2.46) se simplifient en :

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu_f + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}, \quad (\text{B.1})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right] + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p, \quad (\text{B.2})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] + C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} - \bar{\varepsilon}_p. \quad (\text{B.3})$$

Les vecteurs des variables hydrodynamiques et turbulentes sont notés :

$$\mathbf{U} = (\bar{u}_z), \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \bar{k} \\ \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

les vecteurs des flux diffusifs :

$$\mathbb{F}_U = \left((\nu_f + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right), \quad \mathbb{F}_W = \begin{pmatrix} \left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \\ \left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

et les termes sources :

$$\mathbb{S} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right), \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \\ C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_p \\ C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} + \bar{\varepsilon}_p \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Avec ces notations, les équations (B.1) à (B.3) peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbb{F}_U + \mathbb{S} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbb{F}_W + \mathbb{P} - \mathbb{E} = 0. \quad (\text{B.8})$$

La résolution numérique se fait en cherchant la solution du système :

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbb{F}_U + \mathbb{S} = \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbb{F}_W + \mathbb{P} - \mathbb{E} = \frac{d\mathbf{W}}{dt}, \quad (\text{B.10})$$

qui vérifie :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \longrightarrow 0, \quad \frac{d\mathbf{W}}{dt} \longrightarrow 0. \quad (\text{B.11})$$

Remarque : Dans les équations (B.9) à (B.11), la variable t représente un temps d'avancement numérique qui ne correspond pas au temps physique. Le maillage utilisé pour la discrétisation spatiale est représenté figure .3. En pratique, il n'est pas nécessairement régulier¹, mais nous le représentons ainsi par souci de clarté.

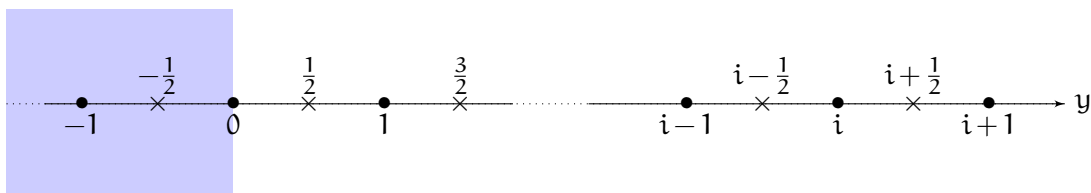


FIG. .3 – Maillage utilisé pour la résolution 1D. Les grandeurs thermohydrauliques sont calculées aux noeuds repérés par •, et les grandeurs turbulentes sont calculées au centre des mailles repérés par ×.

Les grandeurs thermohydrauliques sont calculées sur le maillage principal repéré par le symbole •, qui comprend un noeud coïncidant avec l'interface fluide-solide. Les grandeurs turbulentes sont calculées sur un maillage décalé repéré par le symbole ×. Les indices i correspondent à la discrétisation spatiale, tandis que les exposants n servent à décrire la discrétisation temporelle. Le pas de temps séparant deux instants n et $n + 1$ est noté Δt . La discrétisation par la méthode des volumes finis de l'équation (B.9) donne :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{\mathbb{F}u_{i+1/2}^{n+1} - \mathbb{F}u_{i-1/2}^{n+1}}{y_{i+1/2} - y_{i-1/2}} + \mathbb{S}_i^n, \quad (\text{B.12})$$

avec :

$$\mathbb{F}u_{i+1/2}^{n+1} = \left(\nu_f + \nu_{t_{i+1/2}}^{n+1} \right) \frac{\bar{u}_{z_{i+1}}^{n+1} - \bar{u}_{z_i}^{n+1}}{y_{i+1} - y_i}, \quad (\text{B.13})$$

et, d'après [36] :

$$\mathbb{S}_i^n = \frac{f_p^n \langle \bar{u}_z^n \rangle_f^2}{2D_h}. \quad (\text{B.14})$$

où f_p^n est le coefficient de frottement calculé à partir de la vitesse de frottement obtenue avec le profil de vitesse à l'instant n :

$$u_f^n = \sqrt{\nu_f \frac{\partial \bar{u}_z^n}{\partial n}}, \quad (\text{B.15})$$

$$f_p^n = 8 \times \left(\frac{u_f^n}{\langle \bar{u}_z^n \rangle_f} \right)^2. \quad (\text{B.16})$$

La viscosité turbulente est calculée dans une boucle interne au calcul de la vitesse. Le vecteur des variables turbulentes intermédiaires est défini comme :

$$\widetilde{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

¹On utilise plutôt des maillages géométriques ou gaussiens.

Il vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbb{F}_{\widetilde{\mathbf{W}}} + \mathbb{P}(\widetilde{\mathbf{W}}) - \mathbb{E}(\widetilde{\mathbf{W}}) = \frac{d\widetilde{\mathbf{W}}}{dt}. \quad (\text{B.18})$$

Au début de la boucle secondaire, les variables turbulentes intermédiaires sont initialisées de la façon suivante :

$$\widetilde{\mathbf{W}}^0 = \begin{pmatrix} \bar{k}^n \\ \bar{\varepsilon}^n \end{pmatrix}; \quad \tilde{\nu}_t^0 = \nu_t^n. \quad (\text{B.19})$$

La discrétisation par la méthode des volumes finis avec implicitation de la partie dissipative des termes sources de l'équation (B.18) donne :

$$\frac{\widetilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}^{q+1} - \widetilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}^q}{\Delta t} = \frac{\mathbb{F}_{\widetilde{\mathbf{W}}_{i+1}}^{q+1} - \mathbb{F}_{\widetilde{\mathbf{W}}_i}^{q+1}}{\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i} + \mathbb{P}\left(\widetilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}^q\right) - \mathbb{E}\left(\widetilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}^{q+1}\right), \quad (\text{B.20})$$

avec :

$$\mathbb{F}_{\widetilde{\mathbf{W}}_i}^{q+1} = \begin{bmatrix} \left(\nu_f + \frac{\tilde{\nu}_{t_i}^{q+1}}{\sigma_k} \right) \frac{\tilde{k}_{i+1/2}^{q+1} - \tilde{k}_{i-1/2}^{q+1}}{\mathbf{y}_{i+1/2} - \mathbf{y}_{i-1/2}} \\ \left(\nu_f + \frac{\tilde{\nu}_{t_i}^{q+1}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\tilde{\varepsilon}_{i+1/2}^{q+1} - \tilde{\varepsilon}_{i-1/2}^{q+1}}{\mathbf{y}_{i+1/2} - \mathbf{y}_{i-1/2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Dans l'équation (B.21), la viscosité turbulente est donnée par :

$$\tilde{\nu}_{t_{i+1/2}}^{q+1} = C_\mu f_{\mu_{i+1/2}}^q \frac{\left(\tilde{k}_{i+1/2}^q\right)^2}{\tilde{\varepsilon}_{i+1/2}^q}, \quad (\text{B.22})$$

et sa valeur sur le maillage principal est calculée à l'aide de la moyenne harmonique pour assurer la continuité du flux :

$$\frac{1}{\tilde{\nu}_{e_i}^q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{\nu}_{e_{i+1/2}}^q} + \frac{1}{\tilde{\nu}_{e_{i-1/2}}^q} \right), \quad (\text{B.23})$$

où $\nu_e = \nu_t + \nu_f$. Les résultats du calcul secondaire convergé sont ensuite utilisés pour calculer $\bar{u}_z^{n+1/2}$. Enfin, étant donné que nous utilisons une expression approchée pour le terme source de l'équation de quantité de mouvement (B.12), nous choisissons de renormaliser le débit à chaque pas de temps :

$$\bar{u}_z^{n+1} = \frac{U}{\left\langle \bar{u}_z^{n+1/2} \right\rangle_f} \bar{u}_z^{n+1/2}, \quad (\text{B.24})$$

où U est la vitesse de consigne.

B.1.2 Validation du code de calcul 1D

Les écoulements présentés dans ce paragraphe sont incompressibles. Les propriétés des fluides considérés sont supposées constantes.

Canal plan

Le cas considéré est celui d'un écoulement établi entre deux plaques planes (voir Fig. .4). L'écoulement se fait suivant la direction z . Il y a invariance suivant x . La direction transverse est notée y . Seule la composante suivant z de la vitesse est non nulle. Seules les dérivées suivant y de la vitesse sont non nulles. y_w désigne la distance à la paroi inférieure, soit :

$$y_w = y + \frac{D_h}{4}.$$

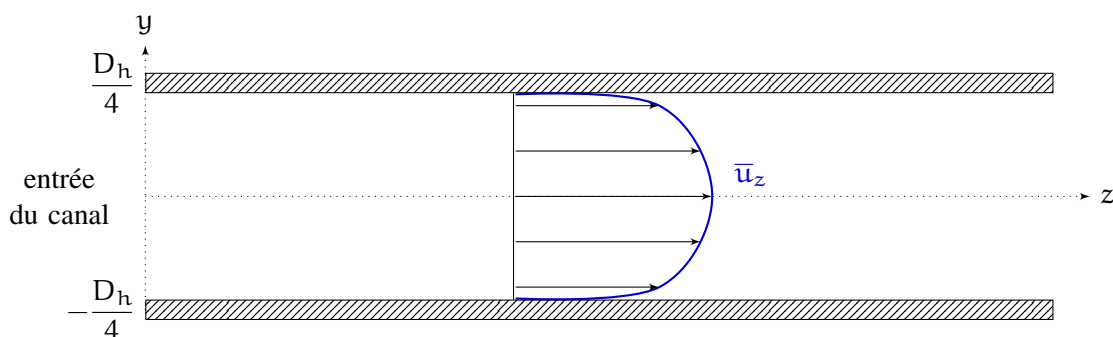


FIG. .4 – Description bidimensionnelle d'un canal plan. Le diamètre hydraulique est égal au double de la distance séparant les plaques.

Le nombre de Reynolds est défini par :

$$Re = \frac{U D_h}{\nu_f}, \quad (\text{B.25})$$

où U est la vitesse débitante, et D_h le diamètre hydraulique.

Pour $Re = 10^2$, l'écoulement est laminaire et il est facile de trouver une solution analytique pour la vitesse :

$$u_z^*(y^*) = \frac{3}{2} - 24y^{*2}, \quad (\text{B.26})$$

où :

$$u_z^* = \frac{u_z}{U}; \quad y^* = \frac{y}{D_h}. \quad (\text{B.27})$$

La figure .5 permet de comparer le profil de vitesse obtenu avec le code 1D à la solution analytique (B.26). Les deux courbes coïncident, le code est donc validé dans le cas laminaire et nous pouvons passer à l'étude d'écoulements turbulents en canal plan. Pour le cas d'un écoulement turbulent, les profils de vitesse obtenus avec le code sont confrontés à la loi de référence de Reichardt [1, 56, 86] :

$$u^+ = \frac{u}{u_f} = \left\{ \frac{1}{0.41} \ln(1 + 0.41 y^+) + 7.8 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right] \right\}, \quad (\text{B.28})$$

où y^+ désigne la distance de Buleev à la paroi adimensionnée [9] :

$$y^+ = \frac{u_f}{\nu_f} \left[\frac{2y_w}{D_h} \left(\frac{D_h}{2} - y_w \right) \right]. \quad (\text{B.29})$$

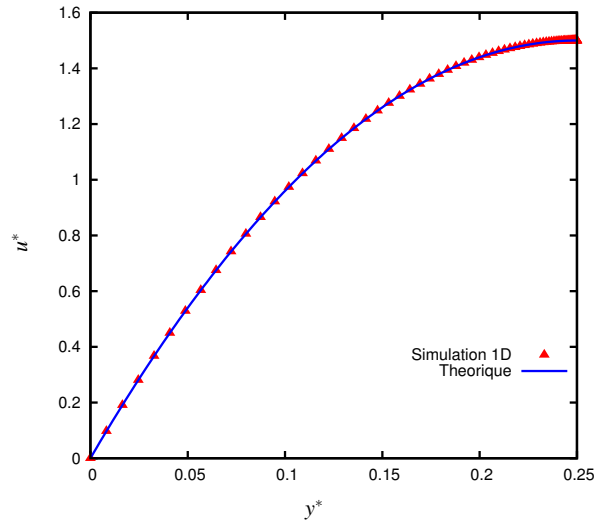
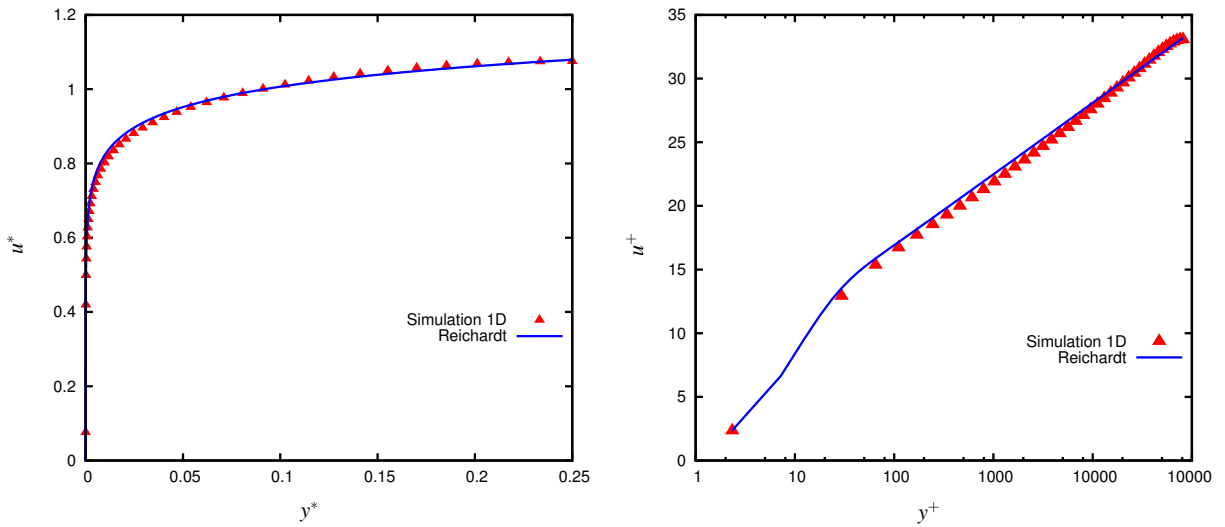


FIG. .5 – Résultats obtenus avec le code 1D dans le cas d'un écoulement laminaire en canal plan. Comparaison avec la solution analytique.



(a) Comparaison sur la largeur du canal

(b) Zoom sur la couche limite.

FIG. .6 – Profils de vitesse obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien dans le cas d'un écoulement turbulent en canal plan pour $Re = 10^7$. Comparaison à la loi de Reichardt.

Les résultats du calcul sont comparés à la loi de Reichardt sur la figure .6. Les profils de vitesse calculés avec le code sont proches de la loi attendue. Ils pourront être utilisés ensuite pour étudier la dispersion.

Tube circulaire

Le cas considéré est celui d'un écoulement établi dans un tube à section circulaire de rayon R (voir Fig .7). Le diamètre hydraulique vaut alors $D_h = 2R$.

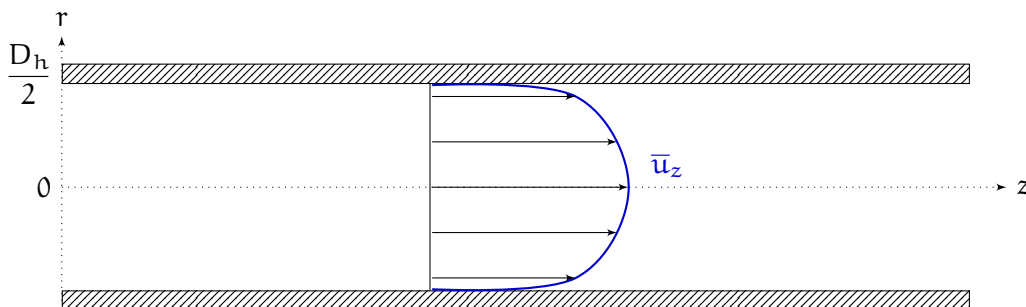


FIG. .7 – Description bidimensionnelle d'un tube à section circulaire. Le diamètre hydraulique est égal au diamètre du tube.

Pour $Re = 10^2$, l'écoulement est laminaire et il est facile de trouver une solution analytique pour la vitesse adimensionnée :

$$u_z^*(r^*) = 2 - 8r^{*2}, \quad (\text{B.30})$$

où :

$$r^* = \frac{r}{D_h}. \quad (\text{B.31})$$

La figure .8 permet de comparer le profil de vitesse obtenu avec le code 1D à la solution analytique (B.30). La solution obtenue avec le code est en accord avec la solution analytique. Les résultats obtenus pour la vitesse en régime turbulent, pour $Re = 10^7$, sont comparés à la loi de Reichardt (voir Fig. .9). Ils sont satisfaisants.

Conduite annulaire

On considère le cas d'un écoulement établi dans une conduite annulaire (voir Fig. .10). Le rayon intérieur est noté r_1 , et le rayon extérieur r_2 . Un des paramètres géométriques permettant de caractériser une conduite annulaire est le rapport des rayons intérieur et extérieur :

$$q = \frac{r_1}{r_2}. \quad (\text{B.32})$$

Le diamètre hydraulique est défini par :

$$D_h = 2(r_2 - r_1). \quad (\text{B.33})$$

La vitesse adimensionnée s'écrit, en régime laminaire :

$$u_z^*(r^*) = K \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_2^*} \right)^2 + 2r_m^{*2} \ln \left(\frac{r^*}{r_2^*} \right) \right], \quad (\text{B.34})$$

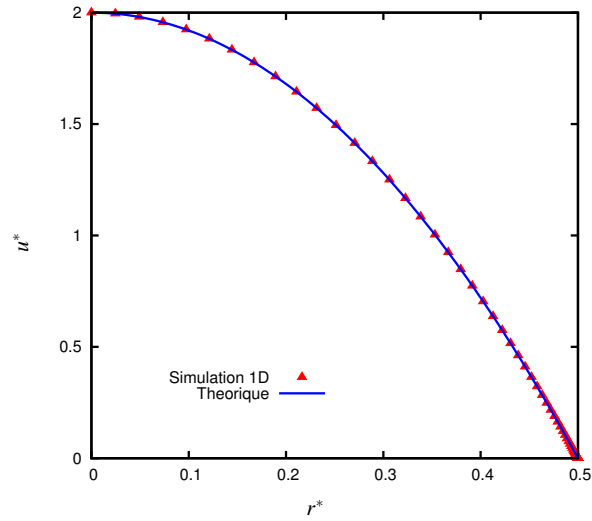
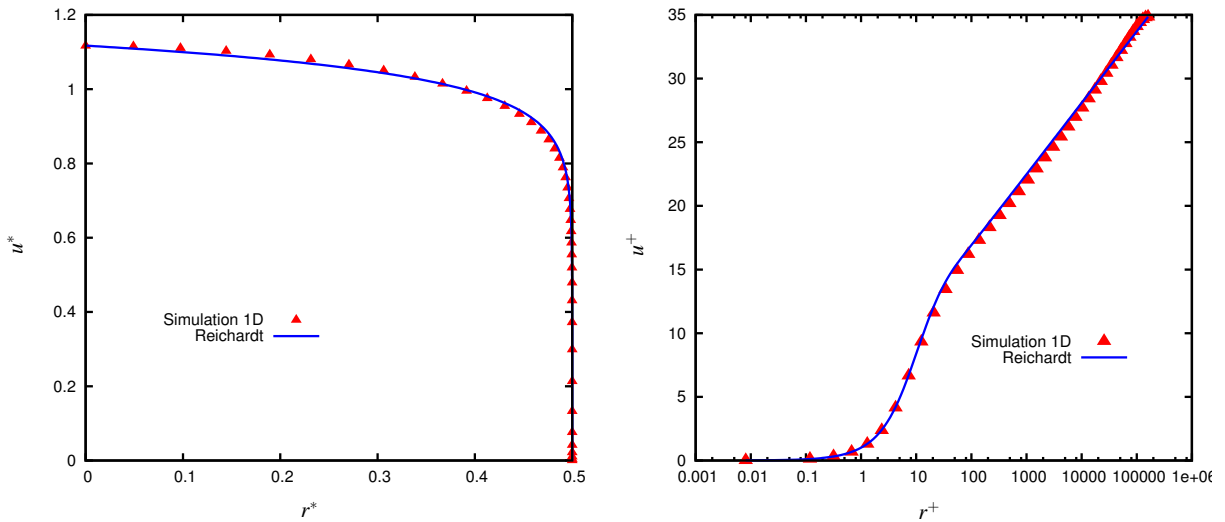


FIG. .8 – Résultats obtenus avec le code 1D dans le cas d'un écoulement laminaire dans un tube à section circulaire. Comparaison avec la solution analytique.



(a) Comparaison sur la largeur du tube

(b) Zoom sur la couche limite.

FIG. .9 – Profils de vitesse obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien dans le cas d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire pour $Re = 10^7$. Comparaison à la loi de Reichardt.

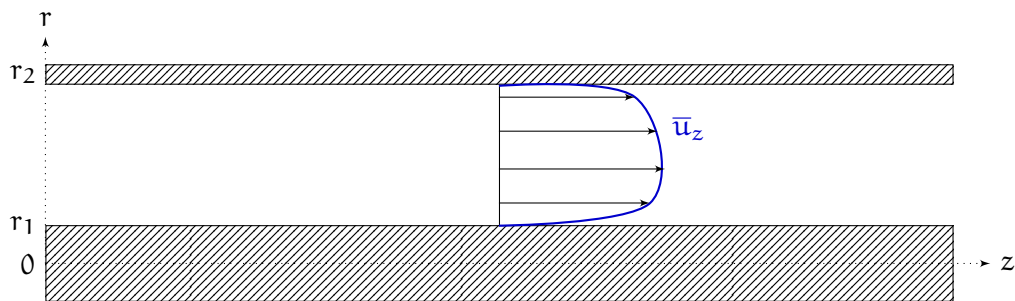


FIG. .10 – Description bidimensionnelle d'une conduite annulaire. Le diamètre hydraulique est égal au double de la distance séparant les deux cylindres.

où :

$$K = \frac{2}{1 + q^2 - 2r_m^{*2}}, \quad r_m^{*2} = \frac{q^2 - 1}{2 \ln q}, \quad r^* = \frac{r}{D_h}.$$

Le profil de vitesse obtenu pour $q = 0.5$ et $Re = 10^2$ est présenté Fig. .11. On retrouve bien la solution analytique.

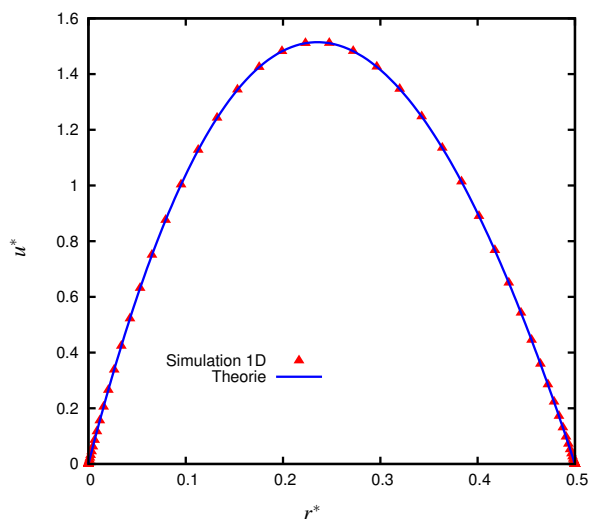


FIG. .11 – Résultats obtenus avec le code 1D dans le cas d'un écoulement laminaire dans une conduite annulaire caractérisée par un rapport de rayons de 0.5. Comparaison avec la solution analytique.

En régime turbulent, le profil de vitesse est comparé à la loi donnée par Bailey [4] :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{z\max} - \bar{u}_z}{u_f} &= -2.5 \ln \left[1 - \frac{r^2 - r_m^2}{r_2^2 - r_m^2} \frac{r_2}{r} \right] & \text{pour } r_m \leq r \leq r_2, \\ \frac{\bar{u}_{z\max} - \bar{u}_z}{u_f} &= -2.5 \ln \left[1 - \frac{r_m^2 - r^2}{r_m^2 - r_1^2} \frac{r_1}{r} \right] & \text{pour } r_1 \leq r \leq r_m, \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

où :

$$r_m = r_m^* \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right), \quad r_m^* = q^{0.343} (1 + q^{0.657} - q). \quad (\text{B.36})$$

Les résultats obtenus avec notre code pour $q = 0.9$ et $q = 0.5$ avec $Re = 10^7$ sont comparés à la loi de Bailey. Les figures B.1.2 et B.1.2 montrent que ces résultats sont satisfaisants.

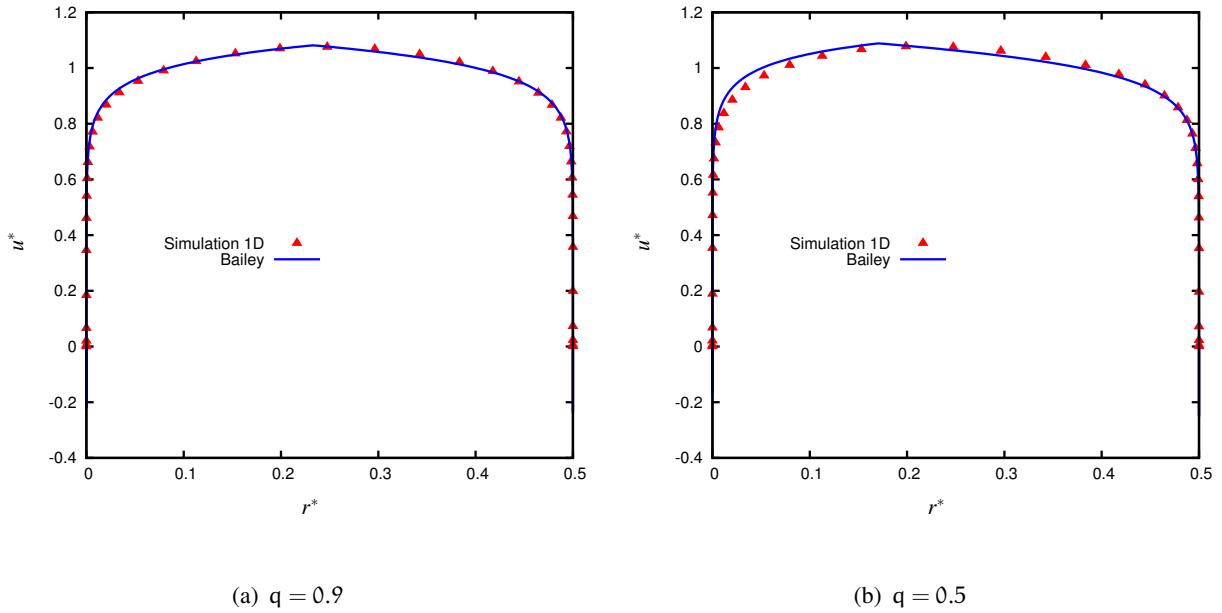


FIG. .12 – Résultats obtenus avec le code 1D dans le cas d'un écoulement turbulent ($Re = 10^7$) dans une conduite annulaire. Comparaison avec la loi de Bailey.

B.2 Résolution numérique de l'équation de température moyennée en 1D

B.2.1 Méthode des volumes finis 1D

Nous cherchons à résoudre numériquement l'équation de température moyennée (4.26) dans un cadre monodimensionnel. Cette équation comporte :

- des termes d'advection :

$$\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z}; \quad (\text{B.37})$$

- des termes de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\alpha_f + \alpha_{t\phi} + \mathcal{D}_{zz}^p \right) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right); \quad (\text{B.38})$$

- un terme source de chaleur dû au flux en paroi :

$$\frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}; \quad (\text{B.39})$$

- un terme de dispersion active :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right). \quad (\text{B.40})$$

Nous allons maintenant présenter la méthode numérique utilisée pour résoudre cette l'équation de température moyennée.

En notant $\langle \bar{T}_f \rangle_f = T$ pour alléger les notations, l'équation (4.26) s'écrit de manière synthétique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(T)}{\partial z} = \mathbf{D}(T) + \mathbf{S}(T), \quad (\text{B.41})$$

où $\mathbf{D}(T)$ désigne les termes de diffusion (B.38), et où le terme $\mathbf{S}(T)$ regroupe le terme source de chaleur (B.39) et le terme de dispersion active (B.40). L'intégration de cette équation est réalisée grâce à une méthode de type volumes finis. Le domaine est discrétisé en espace (voir figure .13) et en temps :

$$\begin{cases} \Delta z_i = z_{i+1/2} - z_{i-1/2}, & i \in \mathbb{Z}, \\ \Delta t = t_{n+1} - t_n, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

L'approximation de T dans la maille i à l'instant t_n est notée T_i^n et est définie comme :

$$T_i^n = \frac{1}{\Delta z_i} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} T(z, t_n) dz. \quad (\text{B.43})$$

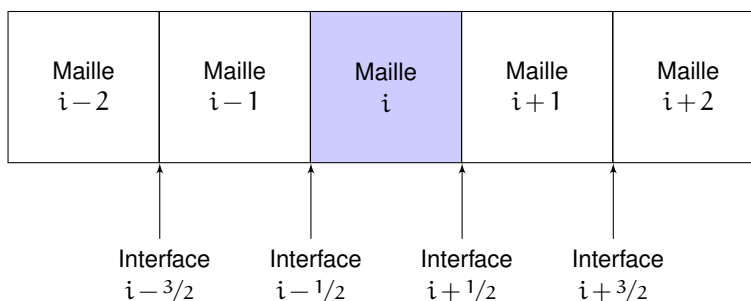


FIG. .13 – Discrétisation spatiale.

La dérivée en temps de la température peut être approchée par une méthode d'Euler explicite :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z_i, t_n) \simeq \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}. \quad (\text{B.44})$$

En introduisant un flux numérique \mathbb{F} , le terme convectif peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(T)}{\partial z}(z_i, t_n) \simeq \frac{1}{\Delta z_i} \left[\mathbb{F}_{i+1/2}^n - \mathbb{F}_{i-1/2}^n \right]. \quad (\text{B.45})$$

Afin de s'affranchir d'une condition de stabilité qui est en général très restrictive sur le pas de temps, nous optons pour un traitement implicite des termes de diffusion. L'équation discrétisée de la température est finalement de la forme :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta z_i} \left[\mathbb{F}_{i+1/2}^n - \mathbb{F}_{i-1/2}^n \right] = \mathbf{D}(T^{n+1}) + \mathbf{S}_i^n, \quad (\text{B.46})$$

où \mathbf{S}_i^n désigne la valeur approchée dans la maille i à l'instant t_n des termes sources. Cela peut aussi s'écrire :

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[\mathbb{F}_{i+1/2}^n - \mathbb{F}_{i-1/2}^n \right] + \Delta t (\mathbf{D}(T) + \mathbf{S}_i^n), \quad (\text{B.47})$$

Nous allons maintenant détailler successivement le traitement numérique des différents termes présents dans l'équation (B.47).

B.2.2 Advection

La méthode des volumes finis repose sur la détermination de flux numériques appropriés. Nous choisissons ici d'utiliser un schéma du second ordre en espace de type MUSCL [34, 39, 102, 104] : le schéma de Kurganov et Tadmor [50]. On rappelle que le flux numérique est défini par :

$$\mathbb{F}_{i+1/2}^n = \mathbf{F}(T(z_{i+1/2}, t_n)). \quad (\text{B.48})$$

Utiliser un schéma du second ordre en espace revient à considérer, lors du calcul du flux numérique, que la solution approchée est affine dans chaque maille (voir figure .14). Cela conduit à définir les états $T_{i+1/2}^L$ et $T_{i-1/2}^R$:

$$\begin{cases} T_{i+1/2}^L = T_i + \frac{1}{2}\psi \left(\frac{T_i - T_{i-1}}{T_{i+1} - T_i} \right) (T_{i+1} - T_i), \\ T_{i-1/2}^R = T_i - \frac{1}{2}\psi \left(\frac{T_i - T_{i-1}}{T_{i+1} - T_i} \right) (T_{i+1} - T_i), \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

où ψ est un limiteur de pente qui permet de garder l'aspect TVD du schéma numérique et évite l'apparition d'oscillations. Le limiteur utilisé ici est de type minmod :

$$\psi \left(\frac{x}{y} \right) \times y = \text{minmod}(x, y) = \text{sgn}(x) \max\{0, \min[|x|, y \text{sgn}(x)]\}. \quad (\text{B.50})$$

Le flux numérique $\mathbb{F}_{i\pm 1/2}$ est alors construit à partir des états $T_{i\pm 1/2}^L$ et $T_{i\pm 1/2}^R$ comme :

$$\mathbb{F}_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(T_{i\pm 1/2}^R) + \mathbf{F}(T_{i\pm 1/2}^L) \right] - \alpha_{i\pm 1/2} \left[T_{i\pm 1/2}^R - T_{i\pm 1/2}^L \right], \quad (\text{B.51})$$

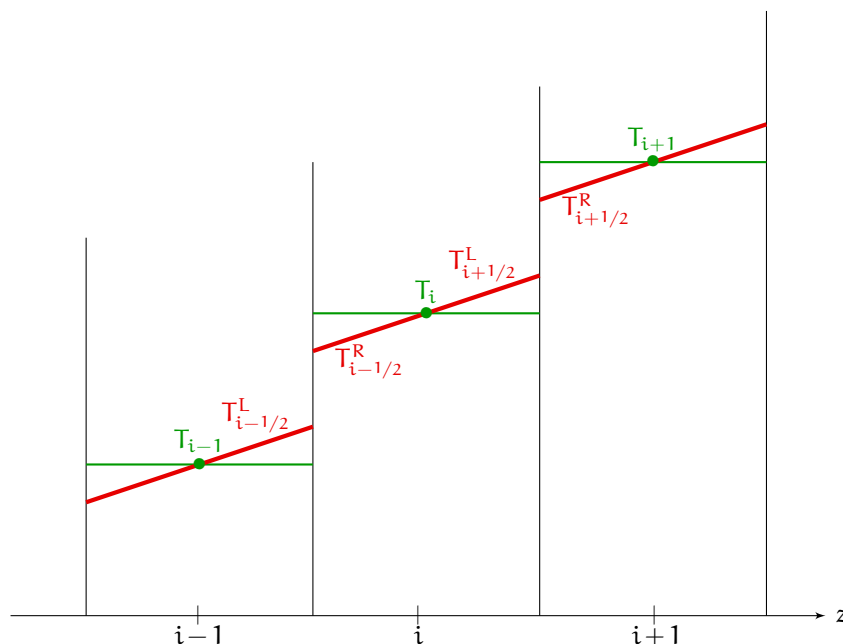


FIG. .14 – Schéma MUSCL du second ordre : représentation affine par morceaux de la solution.

où la vitesse de propagation locale $\alpha_{i\pm 1/2}$ est donnée par :

$$\alpha_{i\pm 1/2} = \max \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{F}(T_i)}{\partial T} \right), \rho \left(\frac{\partial \mathbf{F}(T_{i\pm 1})}{\partial T} \right) \right], \quad (\text{B.52})$$

ρ désignant le rayon spectral de la matrice jacobienne de \mathbf{F} . Dans les cas que nous considérons ici, $\mathbf{F}(T)$ est donnée par :

$$\mathbf{F}(T) = \langle \bar{u}_z \rangle_f T, \quad (\text{B.53})$$

avec $\langle \bar{u}_z \rangle_f$ constante pour des écoulements incompressibles. Dans ce cas :

$$\alpha_{i\pm 1/2} = \frac{\partial \mathbf{F}(T_i)}{\partial T} = \langle \bar{u}_z \rangle_f. \quad (\text{B.54})$$

Le flux numérique se simplifie en :

$$\mathbb{F}_{i\pm 1/2} = \langle \bar{u}_z \rangle_f T_{i\pm 1/2}^L. \quad (\text{B.55})$$

L'équation discrétisée de la température devient donc :

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[T_{i+1/2}^L - T_{i-1/2}^L \right] + \Delta t (\mathbf{D}(T) + \mathbf{S}_i^n), \quad (\text{B.56})$$

avec :

$$\begin{cases} T_{i+1/2}^L = T_i + \frac{1}{2} \min_{\text{mod}} (T_i - T_{i-1}, T_{i+1} - T_i), \\ T_{i-1/2}^L = T_{i-1} + \frac{1}{2} \min_{\text{mod}} (T_{i-1} - T_{i-2}, T_i - T_{i-1}). \end{cases} \quad (\text{B.57})$$

Pour nos simulations, sauf indication contraire, le nombre de Courant est pris égal à 0.5, soit :

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{\min(\Delta z_i)}{\langle \bar{u}_z \rangle_f}. \quad (\text{B.58})$$

B.2.3 Traitement des termes de diffusion

Le terme de diffusion est traité de manière implicite. Autrement dit, nous prenons :

$$\mathbf{D}(T) = \mathbb{D}T^{n+1}, \quad (\text{B.59})$$

où \mathbb{D} est une matrice tridiagonale telle que :

$$(\mathbb{D}T^{n+1})_i = \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left(\alpha_f + \alpha_{t\phi} + \mathcal{D}_{zz}^p \right) \left[\frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{z_{i+1} - z_i} - \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{z_i - z_{i-1}} \right]. \quad (\text{B.60})$$

L'équation (B.56) peut se réécrire :

$$(\mathbb{I} - \Delta t \mathbb{D}) T_i^{n+1} = T_i^n - \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\Delta t}{\Delta z_i} \left[T_{i+1/2}^L - T_{i-1/2}^L \right] + \Delta t \mathbf{S}_i^n. \quad (\text{B.61})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABALAKIN, I. et KOOBUS, B. (2000). The behaviour of two near-wall models for $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ prediction of stall. Rapport technique 4075, INRIA.
- [2] ANTOHE, B. V. et LAGE, J. L. (1997). A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40:3013–3024.
- [3] ARIS, R. (1955). On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. *In Proc. Roy. Soc. Lond. A*, volume 235, pages 67–77.
- [4] BAILEY, R. V. (1950). Heat transfer to liquid metals in concentric annuli. Rapport technique ORNL521, Oak Ridge Natl. Lab. Tech. Div. Eng. Res. Sec.
- [5] BATCHELOR, G. K. (1953). *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] BENARAF, Y. (2005). *Application du couplage RANS/LES aux écoulements à haut nombre de Reynolds de l'industrie nucléaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [7] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L. et PAPANICOLAOU, G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland Pub. Co.
- [8] BLASIUS, H. (1913). Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. *Forsch. Arb. Ing.-Wes*, 131.
- [9] BOURGEOIS, P. (1998). *Contribution à la qualification physique des outils de calcul des écoulements dans les cœurs de réacteurs*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [10] BOUSSINESQ, J. (1877). Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoire des savants étrangers. Ac. Sc. Paris*.
- [11] BOUSSINESQ, J. (1897). *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans des lits rectilignes à grande section*, volume I-II. Gauthier-Villars, Paris.
- [12] BRADSHAW, P., FERRISS, D. H. et ATWELL, N. P. (1967). Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *J. Fluid Mech.*, 28(3):593–616.
- [13] BRINKMAN, H. C. (1947). A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Scientific Research*, A1:27–34.
- [14] CARBONELL, R. G. et WHITAKER, S. (1983). Dispersion in pulsed system, part 2 : theoretical developments for passive dispersion in porous media. *Chem. Eng. Sci.*, 38(11):1795–1802.
- [15] CARBONELL, R. G. et WHITAKER, S. (1984). Heat and mass transfer in porous media. *In* BEAR, J. et CORAPCIU, M. Y., éditeurs : *Fundamentals of transport phenomena in porous media*. M. Nijhoff Publishers.
- [16] CHANDESRI, M. (2006). *Modélisation des écoulements dans les milieux poreux et à l'interface avec un milieu libre*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

Bibliographie

- [17] CHANDESRI, M., SERRE, G. et SAGAUT, P. (2006). A macroscopic model for flows in porous media suited for channel, pipe and rod bundle flows. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 49:2739–2750.
- [18] CHASSAING, P. (2000). *Turbulence en mécanique des fluides : analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. CEPADUES EDITIONS.
- [19] CHIEN, K. Y. (1982). Predictions of channel and boundary layer flows with a low reynolds number turbulence model. *AIAA J.*, 20(1):33–38.
- [20] CLAYTON, C. G., WEBB, J. W. et WHITTAKER, J. B. (1963). The dispersion of gas during turbulent flow in a pipe. *Brit. J. Appl. Phys.*, 14:790–794.
- [21] COMTE-BELLOT, G. et CORRSIN, S. (1966). The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.*, 25(4):657–682.
- [22] DARCY, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
- [23] DAVIDOV, B. I. (1961). On the statistical dynamics of an incompressible fluid. *Doklady AN. SSSR*, 136:47.
- [24] DITTUS, F. W. et BOELTER, L. M. K. (1930). Heat transfer in automobile radiators of the tabular type. *University of California Publications in Engineering*, 2:443–461.
- [25] DOPAZO, C. et E.O'BRIEN, E. (1976). Statistical treatment of non-isothermal chemical reactions in turbulence. *Comb. Sci. & Techn.*, 13:99.
- [26] DROUIN, M. (2007). Implémentation et validation de modèles de turbulence dans le code hydrodynamique FLICA-OVAP. Rapport technique SFME/LETR/RT/07-040/A, CEA.
- [27] DROUIN, M., GRÉGOIRE, O., SIMONIN, O. et CHANOINE, A. (2010). Macroscopic modeling of thermal dispersion for turbulent flows in channels. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 53:2206–2217.
- [28] FINNIGAN, J. J. (2000). Turbulence in plant canopy. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32:519–571.
- [29] FLICK, D., LESLOUS, A. et ALVAREZ, G. (2003). Modélisation semi-empirique des écoulements et des transferts dans un milieu poreux en régime turbulent. *Int. J. of Refrigeration*, 26:349–359.
- [30] FORCHHEIMER, P. (1901). Wasserbewegung durch Boden. *Z. Ver. Deutsch. Ing.*, (45):1782.
- [31] FRISCH, U. (1995). *The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- [32] GETACHEW, D., MINKOWYCZ, W. J. et LAGE, J. L. (2000). A modified form of the $k - \epsilon$ model for turbulent flows of an incompressible fluid in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43:2909–2915.
- [33] GNIELINSKI, V. (1976). New equations for forced convection heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow. *Int. Chem. Eng.*, 16:358–368.
- [34] GODLEWSKI, E. et RAVIART, P.-A. (1996). *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation law*, volume 118. Springer.
- [35] GOLDSTEIN, S. (1938). *Modern developments in fluid mechanics*. Clarendon Press, Oxford.
- [36] GRÉGOIRE, O. (2003). Remarques sur la turbulence permettant de retrouver quantitativement ou qualitativement un certain nombre de résultats expérimentaux : le point de vue en 2003. Rapport technique SFME/LETR/RT/03-013/A, CEA.
- [37] HARLOW, F. H. et NAKAYAMA, P. I. (1967). Turbulence transport equations. *Phys. of Fluids*, 10(11):2323.

- [38] HINZE, J. (1959). *Turbulence : an introduction to its mechanism and theory*. McGraw-Hill, New-York.
- [39] HIRSCH, C. (1988). *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume I : Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, New York.
- [40] HOPF, E. (1952). Statistical hydrodynamics and functional calculus. *J. Rat. Mech. Anal.*, 1(1):87–123.
- [41] HOWES, F. A. et WHITAKER, S. (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science*, 40(10):1387–1392.
- [42] JEANDEL, D., BRISON, J. F. et MATHIEU, J. (1978). Modeling methods in physical and spectral space. *Phys. Fluids*, 21(2):169–182.
- [43] JONES, W. P. et LAUNDER, B. E. (1972). The prediction of a laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15(2):301–314.
- [44] KAWAMURA, H., OHSAKA, K., ABE, H. et YAMAMOTO, K. (1998). DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 19:482–491.
- [45] KLINE, S. J. (1989). Zonal modeling. Rapport technique 89-0225, AFOSR.
- [46] KOLMOGOROV, A. N. (1941). The local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:301–305.
- [47] KOPLIK, J., REDNER, S. et WILKINSON, D. (1988). Transport and dispersion in random networks with percolation disorder. *Phys. Review A*, 37(7):2619–2636.
- [48] KUMBARO, A. (2001). Physical and numerical modelling of two-phase flow in OVAP code. Rapport technique DMT/SYSCO/DIR/PU/00/13/A, CEA.
- [49] KUMBARO, A., MAMAN, N. et SEIGNOLE, V. (2000). Conception détaillée du module diphasique OVAP. Rapport technique DMT/SYSCO/LGLS/RT/00-16 A, CEA.
- [50] KURGANOV, A. et TADMOR, E. (2000). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. *J. Com. Phys.*, 160:214–282.
- [51] KUWAHARA, F., NAKAYAMA, A. et KOYAMA, H. (1996). A numerical study of thermal dispersion in porous media. *J. Heat Transfer*, 118:756–761.
- [52] L. LANDAU, E. L. (1971). *Mécanique des fluides*. Mir, Moscou.
- [53] LAUFER, J. (1953). The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Rapport technique 2954, N.A.C.A.
- [54] LAUNDER, B. E. et SARMA, B. I. (1974). Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disk. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1(2):131–138.
- [55] LAUNDER, B. E. et SPALDING, D. B. (1972). *Lectures on mathematical models of turbulence*. Academic Press, London.
- [56] LAURENCE, D. et BOYER, V. (2002). A shape function approach for high- and low-reynolds near-wall turbulence model. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 40:241–251.
- [57] LESIEUR, M. (2005). *Large-eddy simulation of turbulence*. Cambridge University Press.
- [58] LESIEUR, M. (2008). *Turbulence in fluids*. Springer, 4th édition.
- [59] LOTT, M. (1984). *Éléments de thermique des réacteurs nucléaires, 1ère partie*. Génie atomique. INSTN.

Bibliographie

- [60] LUMBROSO, H. (1976). *Problèmes résolus de mécanique du point et des systèmes de points*. Dunod, Paris.
- [61] LUNDGREN, T. S. (1967). Disitribution functions in the statistical theory of turbulence. *Phys. of Fluids*, 10(5):969–976.
- [62] LYONS, S., HANRATTY, T. et MC LAUGHLIN, J. (1991). DNS of passive heat transfer in a turbulent flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34(4/5):1149–1161.
- [63] MANSOUR, N. N., KLIM, J. et MOIN, P. (1988). Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194:15–44.
- [64] MASUOKA, T. et TAKATSU, Y. (1996). Turbulence model for flow through porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39:2803–2809.
- [65] MATHERON, G. (1967). *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson.
- [66] MAURI, R. (1991). Dispersion, convection and reaction in porous media. *Phys. Fluids A-Fluid*, 5(3):743–756.
- [67] MCADAMS, W. H. (1954). *Heat Transmission*. McGraw-Hill, 3rd édition.
- [68] NAKAYAMA, A. et KUWAHARA, F. (1999). A macroscale turbulence models for flows in a porous medium. *J.Fluids Engineering*, 121:427–433.
- [69] NAKAYAMA, A. et KUWAHARA, F. (2008). A general macroscopic turbulence model for flows in packed beds, channels, pipes and rod bundles. *J.Fluids Engineering*, 130.
- [70] NAKAYAMA, A., KUWAHARA, F. et KODAMA, Y. (2006). An equation for thermal dispersion flux transport and its mathematical modelling for heat and fluid flow in a porous medium. *J.Fluid Mech.*, 563:81–96.
- [71] NIELD, D. A. (2001). Alternative models of turbulence in a porous medium and related matters. *J. Fluids Engineering*, 123:928–931.
- [72] NIELD, D. A. et BEJAN, A. (1999). *Convection in Porous Media*. Springer, New York, 2nd édition.
- [73] PEDRAS, M. H. J. et DE LEMOS, M. J. S. (2000). On the definition of turbulent kinetic energy for flow in porous media. *Int. C. Heat and Mass Transfer*, 27:211–220.
- [74] PEDRAS, M. H. J. et DE LEMOS, M. J. S. (2001). Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 44:1081–1093.
- [75] PFANNKUCH, H. O. (1963). Contribution à l'étude des déplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux. *Rev. Inst. Français Pétrole*, XVIII:215.
- [76] PINSON, F. (2006). *Modélisation à l'échelle macroscopique d'un écoulement turbulent en milieu poreux*. Thèse de doctorat, INPT.
- [77] PINSON, F., GRÉGOIRE, O., QUINTARD, M., PRAT, M. et SIMONIN, O. (2007). Modeling of turbulent heat transfer and thermal dispersion for flows in flat plate heat exchangers. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 50:1500–1515.
- [78] PINSON, F., GRÉGOIRE, O. et SIMONIN, O. (2006). $k - \epsilon$ Macro-scale modeling of turbulence based on a two scale analysis in porous media. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 27:955–966.
- [79] POINSOT, T. et VEYNANTE, D., éditeurs (2001). *Theoretical and numerical combustion*. RT Edwards.
- [80] POPE, S. B. (1981). Transport equations for the joint probability density function of velocity and salar in turbulent flow. *Phys. of Fluids*, 4:588–595.

- [81] QUINTARD, M. et WHITAKER, S. (1994a). Transport in ordered and disordered porous media I : the cellular average and the use of weighting functions. *Transport Porous Med*, 14:163–177.
- [82] QUINTARD, M. et WHITAKER, S. (1994b). Transport in ordered and disordered porous media II : generalized volume averaging. *Transport Porous Med*, 14:179–206.
- [83] RAUPACH, M. R., COPPIN, P. A. et LEGG, B. J. (1986). Experiments on scalar dispersion within a model plant canopy, part 1 : the turbulence structure. *Boundary-Layer Meteorology*, 35:21–52.
- [84] RAUPACH, M. R. et SHAW, R. (1982). Averaging procedures for flow within vegetation canopies. *Boundary-Layer Meteorology*, 22:79–90.
- [85] RAUPACH, M. R. et THOM, A. S. (1981). Turbulence in and above plant canopies. *Boundary-Layer Meteorology*, 13:97–129.
- [86] REICHARDT, H. (1951). Vollständige darstellung der turbulenten geschwindigkeitsverteilung in glatten leitungen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 31:208–219.
- [87] RENARD, P. et de MARSILY, G. (1997). Calculating equivalent permeability : a review. *Advances in Water Resources*, 20:253–278.
- [88] REYNOLDS, W. C., LANGER, C. A. et KASSINOS, S. C. (2002). Structure and scales in turbulence modeling. *Phys. Fluids*, 14(7):2485–2492.
- [89] RUBINSTEIN, J. et MAURI, R. (1986). Dispersion and convection in porous media. *SIAM J. Applied Math.*, 6(46): 1018–1022.
- [90] SAGAUT, P., éditeur (1998). *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluides incompressibles*. Springer.
- [91] SALLES, J., THOVERT, J.-F., DELANNAY, R., PREVORS, L., AURIAULT, J.-L. et ADLER, P. M. (1993). Taylor dispersion in porous media. Determination of the dispersion tensor. *Phys. Fluids*, 5(10):2348–2376.
- [92] SCHIESTEL, R. (1987). Multiple-time-scale modeling of turbulent flows in one-point closure. *Phys. Fluids A-Fluid*, 30(3):722–731.
- [93] SEGNER, I., MULHEARN, P. J., BRADLEY, E. F. et FINNIGAN, J. J. (1976). Turbulent flow in a model plant canopy. *Boundary-Layer Meteorology*, 10:423–453.
- [94] SIMONIN, O. (1996). Combustion and turbulence in two-phases flows. *In lecture series 1996-02, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics*.
- [95] S.KAKAÇ, SHAH, R. K. et AUNG, W., éditeurs (1987). *Handbook of single-phase convective heat transfer*. John Wiley and Sons.
- [96] SOUTO, H. P. A. et MOYNE, C. (1997). Dispersion in two-dimensionnal periodic porous media. Part II. Dispersion tensor. *Phys. Fluids*, 9(8):2253–2263.
- [97] SPALART, P. R. (1988). Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$. *J. Fluid Mech.*, 187:61–98.
- [98] TAYLOR, G. (1953). Dispersion of solute matter in solvent flowing slowly through a tube. *In Proc. Roy. Soc. Lond. A*, volume 219, pages 183–203.
- [99] TAYLOR, G. (1954). Dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. *In Proc. Roy. Soc. Lond. A*, volume 223, pages 446–468.

Bibliographie

- [100] TERUEL, F. E. et RIZWAN-UDDIN (2009a). A new turbulence model for porous media flows. Part I : Constitutive equations and model closure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52:4264–4272.
- [101] TERUEL, F. E. et RIZWAN-UDDIN (2009b). A new turbulence model for porous media flows. Part II : Analysis and validation using microscopic simulations. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52:5193–5203.
- [102] TORO, E. F. (2008). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd édition. A practical introduction.
- [103] TRAVKIN, V. S. (2001). Discussion : alternative models of turbulence in a porous medium and related matters. *J. Fluid Engineering-T ASME*, 123:931–934.
- [104] van LEER, B. (1979). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. *J. Com. Phys.*, 32:101–136.
- [105] VANDROMME, D. (1993). Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers. *In lecture series 1993-02, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics*.
- [106] von KÁRMÁN, T. (1939). The analogy between fluid friction and heat transfer. *Trans. ASME*, 61:705–710.
- [107] WHITAKER, S. (1967). Diffusion and dispersion in porous media. *AIChE*, 3(13):420–427.
- [108] WHITAKER, S. (1999). *Theory and applications of transport in porous media : the method of volume averaging*. Kluwer Academic Publishers.

PUBLICATIONS

LISTE DES PUBLICATIONS

(1) *Macroscopic modeling of thermal dispersion for turbulent flows in channels*

M. DROUIN, O. GRÉGOIRE, O. SIMONIN, A. CHANOINE.

Publié dans *International Journal of Heat and Mass Transfer*.

vol. 53, pages 2206-2217 (2010).

(2) *A macroscopic turbulence model based on a two-scale analysis for incompressible flows in porous media*

M. DROUIN, O. GRÉGOIRE, O. SIMONIN.

Publié dans les actes du congrès *Third International Conference on Porous Media and its applications in science, engineering and industry, Montecatini, Italy*.

AIP Conference Proceedings, pages 76-81 (2010).

(3) *Connecting dispersion models and wall temperature prediction for laminar and turbulent flows in channels*

M. DROUIN, O. GRÉGOIRE, O. SIMONIN.

Soumis à *International Journal of Heat and Mass Transfer*.



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Heat and Mass Transfer

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijhmt

Macroscopic modeling of thermal dispersion for turbulent flows in channels

M. Drouin^{a,*}, O. Grégoire^a, O. Simonin^b, A. Chanoine^a^a CEA Saclay, DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR, 91191 Gif-sur-Yvette, France^b IMFT, UMR CNRS/INP/UPS, Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 18 June 2009

Received in revised form 23 October 2009

Accepted 12 November 2009

Available online 22 January 2010

Keywords:

Porous media

Turbulence

Thermal dispersion

Heat exchangers

Double averaging

ABSTRACT

In this paper, laminar and turbulent flows in channels are considered. The primary interest for industrial purpose is a macroscale description of mean flow quantities derived from the microscopic details of the flow in each subchannel. A double averaging procedure [16,17] has been used to derive balance equations for mean flow variables within laminar and turbulent regimes. This up-scaling procedure results in additional contributions, amongst which dispersion predominates. Thermal dispersion might be seen as the sum of a first contribution, hereafter denoted “passive”, due to velocity heterogeneities, and a second one, called “active”, due to wall heat transfer. The aim of the present work is to propose practical models for thermal dispersion that account for laminar and turbulent regimes. Embedded in CFD code, they are validated against RANS simulations. Our results illustrate the importance of thermal dispersion for heated flows in the presence of nonuniform wall heat flux or temperature jumps.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

This work deals with the modeling of flows in large scale heating devices such as heat exchangers and nuclear reactor cores. In the core of a nuclear reactor, the energy released by the nuclear fission process generates heat, that is transferred to a coolant flowing through fuel assemblies. The geometry of fuel assemblies depends on the type of reactor. For example, in Jules Horowitz (see Fig. 2, Grégoire et al. [8]) and BR2 nuclear reactor cores, fuel is made of concentric circular plates so that coolant channels are concentric annular channels. Other cores are made of flat fuel plates (mainly material testing cores) or fuel rod bundles (pressurized water reactors, CANDU, ...). Given the geometrical complexity of such systems, it is not possible to calculate the details of velocity and temperature profiles in each subchannel. However, the primary interest for industrial purpose is not the details of the flow, but rather the description on a large scale of mean flow quantities and heat transfer properties. Such a macroscopic description may be obtained by applying up-scaling methods [22]. Thus a reactor core can be described in an homogenized way by means of a spatial filter. The averaging procedure leads to modified equations for mean flow variables, with additional contributions that account for small scale phenomena. Actually, such heating devices might be seen as spatially periodic and anisotropic porous media, with the additional difficulty that flows may achieve every regime, from laminar to highly turbulent, within the pores.

Following Carbonell and Whitaker [4], we use the method of volume averaging to derive macroscopic equations. Macroscopic temperature equation involves dispersion terms that need to be modeled. In order to determine those quantities, a closure problem may be derived in a representative elementary volume (REV). Dispersion for turbulent channel flows has first been analysed by Taylor [20]. Recently, Pinson et al. [17] have shown that dispersion fluxes may achieve a very significant level with respect to other fluxes (convection and diffusion, even turbulent). Nakayama et al. [15] modeled dispersion by introducing an effective thermal dispersivity. Their paper mainly details an elegant way to derive a model for the dispersion heat flux. They consider balance equation for dispersion heat flux (velocity and temperature deviation together) and propose a closure directly for this contribution. Doing so, they avoid to have to model temperature deviation. On the contrary, our paper is embedded in an overall study that aims to finally analyse and model dispersion interactions with heat exchange. In this framework, the achievement of a precise modeling for temperature deviation is crucial. Furthermore, unlike Nakayama et al. [15], we want to derive a model whose constants do not depend upon heat flux conditions. If one looks at temperature deviation equation, it is clear that mean temperature gradient and wall heat flux are distinct contributions. We then extend our analysis and propose a model for dispersion in various channel geometries that involves passive and active contributions. The averaging procedure is described in Section 2. Section 3 is devoted to the derivation of the mean fluid temperature equation and the closure problem. A dispersion model is proposed in Section 4 and validated against fine scale simulations in Section 5.

* Corresponding author. Tel.: +33 169082621; fax: +33 169088568.
E-mail address: marie.drouin@cea.fr (M. Drouin).

Nomenclature			
A_f	interface between solid and fluid phases (m ²)	ΔV	representative elementary volume (REV) (m ³)
\mathcal{D}^A	thermal active dispersion vector (m)	ΔV_f	fluid volume included in the REV (m ³)
\mathcal{D}^P	thermal passive dispersion tensor (m ² s ⁻¹)	ζ	active dispersion function (s)
D_h	hydraulic diameter of the pores (m)	η_j	passive dispersion function (m)
f_p	friction coefficient	ν_f	kinematic viscosity of the fluid (m ² s ⁻¹)
n_i	<i>i</i> th component of the interface normal vector, pointing towards the solid phase	ν_t	turbulent kinematic viscosity (m ² s ⁻¹)
Pe	Péclet number (UD_h/α_f)	ρ	density of the fluid (kg m ⁻³)
Pr	Prandtl number (ν_f/α_f)	Φ	wall heat flux
Pr_t	turbulent Prandtl number (ν_t/α_t)	Other symbols	
Re	Reynolds number (UD_h/ν_f)	$\bar{\cdot}$	statistical average
T_f	fluid temperature	\cdot'	fluctuation from the statistical average
u_f	friction velocity (m s ⁻¹)	$\langle \cdot \rangle$	volume average
Greek symbols		$\langle \cdot \rangle_f$	fluid volume average
α_f	thermal diffusivity of the fluid (m ² s ⁻¹)	$\delta \cdot$	deviation from the fluid volume average
α_t	turbulent thermal diffusivity (m ² s ⁻¹)	\cdot^*	dimensionless quantity
$\alpha_{t\phi}$	macroscopic turbulent thermal diffusivity (m ² s ⁻¹)	\cdot_f	fluid
δ_{ω}	Dirac delta function associated to the walls (m ⁻¹)	\cdot_w	wall

2. Averages

Since flows that are considered can be turbulent, a statistical average operator, denoted “ $\bar{\cdot}$ ”, is used to handle the pseudo-aleatory character of turbulence. Since our aim is to develop a spatially homogenized modeling of these flows, we also need to apply a spatial filter. The spatial average operator used to derive a macro-scale model is denoted “ $\langle \cdot \rangle$ ”. For each average, any quantity ζ may be split into mean and fluctuating components as

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' = \langle \zeta \rangle_f + \delta \zeta, \quad (1)$$

and one can write

$$\zeta = \langle \bar{\zeta} \rangle_f + \langle \zeta' \rangle_f + \delta \bar{\zeta} + \delta \zeta'. \quad (2)$$

Pedras and De Lemos [16] proved that, in a strict mathematical point of view, the order of application of statistical and spatial averages is immaterial in regard to the mean flow quantities equations. Nevertheless, the procedure based on the statistical averaging of the spatially averaged equations will require small eddies to be modeled, as in Large Eddy Simulation. Therefore, applying spatial filtering with a characteristic length scale larger than a pore before statistical average would only allow the treatment of large-scale turbulence. This is questionable since the eddies larger than the scale of the porous structure are not likely to survive long enough to be detected [14]. Under these circumstances, following Pinson et al. [17], we choose to apply first the statistical average (Fig. 1). Thus Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) models can be used to calculate temperature and velocity profiles within subchannels, and volume average may be used subsequently. The properties of both statistical and spatial average operators are recalled in Appendix A.

3. Formulation of the mean temperature equation

In this study, incompressible and undilatable, single phase flows in saturated, rigid porous media are considered. Fluid properties (density, viscosity, heat capacity) and the porosity of the medium are assumed constant. A velocity no-slip condition at the wall is imposed:

$$u_i n_i|_w = 0. \quad (3)$$

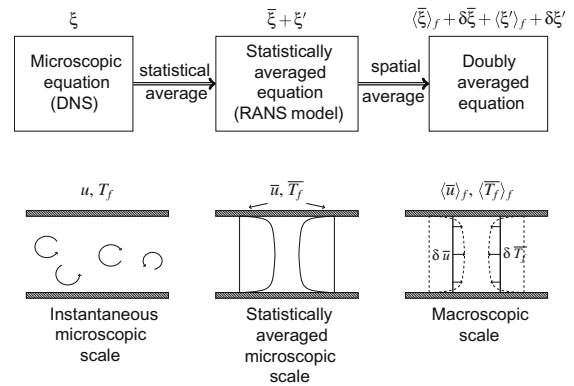


Fig. 1. Description of the averaging procedure in the single channel case.

Finally, we shall assume that thermal interactions with solids reduce to an external forcing for the fluid temperature.

3.1. Averaged continuity equation

The instantaneous microscopic mass conservation equation is given by

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4)$$

The no-slip boundary condition at walls and the properties of the spatial average operator allow us to write the doubly averaged mass conservation equation

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

3.2. Averaged fluid temperature equation

For constant fluid properties, the instantaneous microscopic temperature balance equation reads

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial (T_f u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

and the corresponding boundary condition on the wall \mathcal{A}_f is

$$\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f} \quad \text{on } \mathcal{A}_f. \quad (7)$$

The use of the statistical average leads to the following equations:

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{T}_f) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\langle u_i' \bar{T}_f \rangle_f}_{\text{turbulent heat flux}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

$$\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f} \quad \text{on } \mathcal{A}_f. \quad (9)$$

In Eq. (8), the turbulent heat flux is usually modeled with a first gradient approximation

$$u_i' \bar{T}_f = -\alpha_t \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i}, \quad (10)$$

where α_t is the turbulent thermal diffusivity. By analogy with the molecular Prandtl number, the turbulent Prandtl number is introduced: $Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}$. For flows in channels, $Pr_t = 0.9$ is accurate enough [13,10,1]. Applying volume average to (8), we obtain the doubly averaged equation for the fluid temperature:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \bar{T}_f \rangle_f = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\langle u_i' \bar{T}_f \rangle_f}_{\text{macroscopic}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) \\ & \underbrace{\text{turbulent}} \\ & \underbrace{\text{heat flux}} \\ & + \underbrace{\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_\omega \rangle_f}_{\text{wall heat}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta_\omega \rangle_f}_{\text{tortuosity}} \\ & \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f}_{\text{thermal}} \\ & \underbrace{\text{dispersion}} \end{aligned} \quad (11)$$

The macroscopic turbulent heat flux can be modeled by means of a macroscopic turbulent thermal diffusivity $\alpha_{t\phi}$ [14,16]:

$$\langle u_i' \bar{T}_f \rangle_f = -\alpha_{t\phi} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} = -\frac{\nu_{t\phi}}{Pr_t} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (12)$$

Macroscopic turbulent viscosity models for flows in pipes are detailed in Grégoire [7]. Thanks to Eq. (9), wall heat exchange reads

$$\left\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_\omega \right\rangle_f = \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (13)$$

Tortuosity and dispersion terms are typical of the porous medium approach. Dispersion is induced by a coupling between velocity and temperature heterogeneities. Tortuosity results from the perturbation of diffusive fluxes in fluid due to the interactions with solids. Let us notice that turbulent diffusivity does not induce tortuosity since it vanishes at walls. Those terms need to be modeled.

3.3. Temperature deviation equation

Tortuosity and dispersion terms in the doubly averaged temperature Eq. (11) involve the temperature deviation $\delta \bar{T}_f$. Following Carbonell and Whitaker [4], we derive the governing equation for the temperature deviation in order to obtain a physical closure for this problem. We subtract the macroscopic temperature Eq.

(11) from the statistically averaged temperature Eq. (8) to get the temperature deviation equation and the boundary condition:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \delta \bar{T}_f) = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle u_i' \bar{T}_f \rangle_f - u_i' \bar{T}_f \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \langle \bar{T}_f \rangle_f \rangle_f \end{aligned} \quad (14)$$

$$\alpha_f \left(\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right) n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f} \quad \text{on } \mathcal{A}_f. \quad (15)$$

We now aim to simplify Eq. (14). Two major assumptions will contribute to the dispersion model design.

H1: Separation of microscopic and macroscopic scales. Let us consider a quantity ξ . We define a microscopic length scale ℓ and a macroscopic length scale L

$$\frac{1}{\xi} \|\nabla \xi\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell}\right), \quad \frac{1}{\langle \xi \rangle_f} \|\nabla \langle \xi \rangle_f\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right). \quad (16)$$

The assumption of scale separation reads $L \gg \ell$, and implies that

$$\left\| \frac{\partial \delta \xi}{\partial x_i} \right\| \gg \left\| \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} \right\|. \quad (17)$$

H2: Weak unsteadiness of the temperature deviation

$$\left| \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial t} \right| \ll \left| \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right|. \quad (18)$$

Since for the flows considered in this paper, unsteadiness is induced by variations of boundary conditions (mainly inlet conditions), this hypothesis is analogous to the separation between advection and boundary conditions variation times scales. In other words, this assumption applies for non-pulsating heated flows in channels. Let us notice that it is only used in order to simplify temperature deviation equation. It does not imply that averaged temperature shall be considered stationary.

Both assumptions (H1) and (H2) have been used to estimate the order of magnitude of each contribution in Eq. (14) [17]. This, thanks to Eqs. (5), (10) and (12), leads to the simplified equation for temperature deviation

$$\bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right] = \left(\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} - \delta \bar{u}_i \right) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (19)$$

3.4. Closure problem

Unlike [15], we choose to model separately gradient and heat flux contributions. This choice is mainly motivated by the structure of source terms in the temperature deviation Eq. (19). Furthermore, it is assessed by analytical developments and *a priori* tests that, within both laminar and turbulent regimes, this closure accurately reproduce temperature profiles within channels. The following closure relationship is assumed

$$\delta \bar{T}_f = \eta_j \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_\omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \psi. \quad (20)$$

Carbonell and Whitaker [4] proved that ψ is zero for a spatially periodic porous medium. The dispersion functions η_j (homogeneous to a length) and ζ (homogeneous to a time) are local

quantities. Using again assumptions (H1) and (H2), we further simplify the successive derivatives of the temperature deviation and obtain

$$\frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \simeq \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \delta \bar{T}_f}{\partial x_i} \right] &\simeq \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \end{aligned} \quad (22)$$

Substituting closure relationship (20) in the boundary condition (15) leads to

$$\alpha_f \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} n_i + \alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f}. \quad (23)$$

We assume that the two closure problems for η and ζ are not coupled [17] and derive the following closure problem

Inside the REV : $\bar{u}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} - \delta \bar{u}_i, \quad (24)$

$$\bar{u}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] = -1, \quad (25)$$

on \mathcal{A}_f : $\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (26)$

$$\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}. \quad (27)$$

where p_i characterizes the periodicity of the porous medium in the i th direction. An additional relationship can be deduced from the idempotence of the averaging operator:

$$\langle \delta \bar{T}_f \rangle_f = \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = 0. \quad (28)$$

The quantity η_j is governed by velocity spatial heterogeneities, while ζ is related to the wall heat flux.

3.5. Macroscopic model for the temperature

At this stage, we have established a relationship between the temperature deviation $\delta \bar{T}_f$, the macroscopic temperature gradient $\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f / \partial x_i$ and the wall heat flux $\bar{\Phi}$ by defining dispersion functions η_j and ζ . We now reinject closure relationship (20) in the macroscopic temperature Eq. (11) to obtain a modeled equation for the doubly averaged temperature

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_{t\phi}) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^p \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_i^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \mathcal{D}_{ij}^p \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \mathcal{D}_i^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

Where the dispersion coefficients are defined as followed

$$\mathcal{D}_{ij}^p = -\langle \delta \bar{u}_i \eta_j \rangle_f, \quad \mathcal{D}_i^A = -\langle \delta \bar{u}_i \zeta \rangle_f, \quad (30)$$

and the tortuosity coefficients are given by

$$\mathcal{T}_{ij}^p = \langle \eta_j n_i \delta \omega \rangle_f, \quad \mathcal{T}_i^A = \langle \zeta n_i \delta \omega \rangle_f. \quad (31)$$

The passive dispersion term in the macroscopic temperature equation thus appears to contribute as an additional macroscopic diffusion term due to velocity spatial heterogeneities. Active dispersion is a transport term of the mean thermal source term, corresponding to an up-scaled representation of the wall heat transfer. For parallel flows in channels, tortuosity is zero [17]. Indeed, in this case, only the derivatives along the axis of the pipe of the mean quantities and the transverse component of the interface normal vector are non-zero.

4. Dispersion modeling for channel flows

In this section, we want to evaluate the dispersion coefficients \mathcal{D}_{ij}^p and \mathcal{D}_i^A for both laminar and turbulent flows in porous media composed of plane channels (Fig. 2), circular or concentric annular pipes. To this aim, the closure problem (Eqs. (24)–(27)) is solved in those REV. Solving this system requires the knowledge of velocity and turbulent thermal diffusivity profiles. For laminar flows in some simple geometries, velocity profiles and dispersion functions can be calculated analytically [17]. For more complex geometries or turbulent flows, the Navier-Stokes equations and the closure problem are numerically solved. Those local results are then spatially averaged to get the dispersion coefficients.

4.1. Closure problem for channel flows

Since we consider parallel flows in ducts, the closure problem and the macroscopic temperature equation can be further simplified. In this case, only the component along the axis of the pipe, hereafter denoted z , of the velocity and the derivatives along the transverse coordinate, denoted r , are non-zero. For such geometries, the tortuosity contributions are zero and only \mathcal{D}_{zz}^p and \mathcal{D}_z^A are needed, which means that only η_z and ζ are taken into account in the closure problem (Eqs. (24)–(27)). The macroscopic temperature Eq. (29) then reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(\alpha_f + \alpha_{t\phi}) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right] + \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_{zz}^p \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

The formulation of the simplified closure problem depends on the geometry. It reads

Inside the REV : $\frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k (\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_z}{\partial r} \right] = \delta \bar{u}_z, \quad (33)$

$$\frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k (\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right] = 1, \quad (34)$$

on \mathcal{A}_f : $\frac{\partial \eta_z}{\partial r} = 0, \quad (35)$

$$\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{\bar{\Phi}}{\langle \bar{\Phi} \delta \omega \rangle_f}, \quad (36)$$

where $k=0$ in plane channels and $k=1$ in circular or annular pipes.

4.2. Dispersion model

We now present the results obtained for the dispersion coefficients. Simulations have been carried out for a large range of Reynolds numbers and several Prandtl numbers. Velocity profiles are

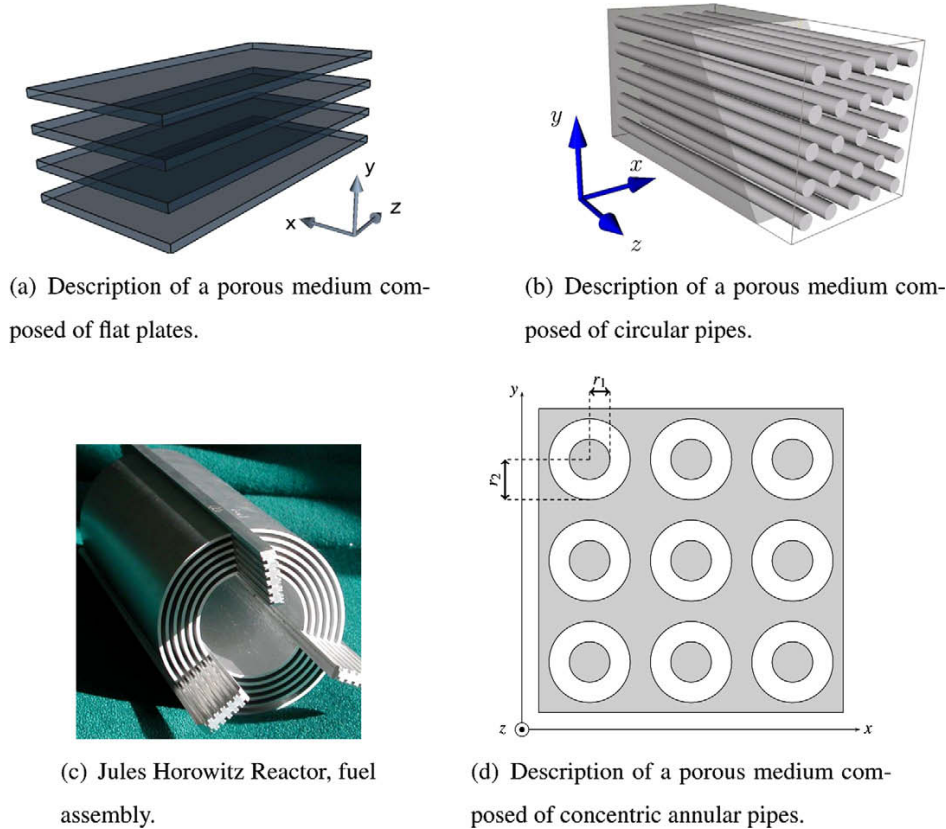


Fig. 2. Description of the porous media treated in this paper.

analytically calculated when possible, *i.e.* for laminar regime, or result from RANS calculations for turbulent regime. To perform the latter RANS simulations, we have implemented the low-Reynolds number $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ Chien model [5] (Appendix B) in a CFD code. Since we consider parallel flows, velocity and thermal diffusivity profiles are calculated in 1D. The closure problem is discretized and numerically solved in the section of the unit cell. Let us introduce the notations

$$\mathcal{D}_{zz}^P = \alpha_f \mathcal{D}_{zz}^{P*} = -\langle \delta \bar{u}_z \eta_z \rangle_f, \quad \mathcal{D}_z^A = D_h \mathcal{D}_z^{A*} = -\langle \delta \bar{u}_z \zeta \rangle_f. \quad (37)$$

Once velocity and dispersion functions are determined, dispersion coefficients \mathcal{D}_{zz}^P and \mathcal{D}_z^A are calculated thanks to Eq. (37). With in laminar regime, our numerical results match analytical results as well as results from [15,17]:

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = Pe^2 / \mathcal{C}_t^P \quad \text{for } Re < Re_L, \quad (38)$$

$$\mathcal{D}_z^{A*} = Pe / \mathcal{C}_t^A \quad \text{for } Re < Re_L, \quad (39)$$

where \mathcal{C}_t^P and \mathcal{C}_t^A are constant and only depend on the geometry (see Table 1). The friction coefficient in laminar regime is $f_p = \frac{a_L}{Re}$ [3]. For very high Reynolds numbers, we find the same results as Pinson et al. [17]:

$$\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \mathcal{C}_t^P \sqrt{f_p} Pe \quad \text{for } Re > 10^5, \quad (40)$$

$$\mathcal{D}_z^{A*} = \mathcal{C}_t^A \quad \text{for } Re > 10^6, \quad (41)$$

where \mathcal{C}_t^P and \mathcal{C}_t^A are constant and only depend on the geometry and the friction coefficient in turbulent regime is $f_p = a_t Re^{-b_t}$ [3]. The

Table 1
Results for thermal dispersion coefficients: parallel flows in pipes (see Eqs. (38)–(41)).

Laminar regime		
	Planne channel	Circular pipe
\mathcal{C}_t^P	840	192
\mathcal{C}_t^A	240	96
Concentric annular pipe		
\mathcal{C}_t^P	255.2 - 341.5(q ² - 2q) + 1263.8[ln(1 + q) - q/2]	
\mathcal{C}_t^A	107.0 + 33.5(q ² - 2q) + 862.4[ln(1 + q) - q/2]	
Asymptotic turbulent regime: Re → ∞		
	Planne channel	Circular pipe
\mathcal{C}_t^P	0.62	1.1
\mathcal{C}_t^A	1.63	2.1
Concentric annular pipe		
\mathcal{C}_t^P	1.292 - 0.362(q ² - 2q) - 5.367[ln(1 + q) - q/2]	
\mathcal{C}_t^A	2.16 - 0.715(q ² - 2q) - 6.45[ln(1 + q) - q/2]	

values of \mathcal{C}_t^P , \mathcal{C}_t^A , \mathcal{C}_t^P and \mathcal{C}_t^A for each geometry are summarized in Table 1. In the case of a concentric annular pipe, the model constants are expressed as functions of a geometrical parameter q , which is the ratio between the inner radius r_1 and the outer radius r_2 of the pipe: $q = \frac{r_1}{r_2}$.

For adiabatic flows through circular pipes, one can notice that our passive dispersion model is consistent with the results presented by Taylor [20] and Nakayama et al. [15]. Indeed they also write $\mathcal{D}_{zz}^{P*} = \mathcal{C}_t^P \sqrt{f_p} Pe$, with $\mathcal{C}_t^P = 1.78$ in [20], $\mathcal{C}_t^P = 2.475$ in [15]

while we give $\mathcal{C}_t^p = 1.1$. Taylor’s model is based upon mixing length modeling at the pore size and Nakayama’s calculation is using a given velocity profile corresponding to the logarithmic region of an equilibrium turbulent boundary layer. So we expect that the lower value for \mathcal{C}_t^p we derived specifically from the Chien’s model predictions in circular pipe is more accurate.

We now propose a more general model for dispersion coefficients that accounts for all turbulent Reynolds number effects. Since there are great uncertainties in transitional regime, we shall not take into account, for the dispersion model calibration, the results obtained for $Re < 6000$. The following general formulations are proposed for the dispersion coefficients:

$$\mathcal{D}_{zz}^{p*} = \mathcal{C}_t^p X + \frac{a_2(Pr)}{X}, \tag{42}$$

$$\mathcal{D}_z^A = \mathcal{C}_t^A + \frac{b_2(Pr)}{X}. \tag{43}$$

where $X = \sqrt{f_p} Pe$. Functions a_2 and b_2 in plane channel may be approximated by:

$$a_2(Pr) = f_0 + f_1 Pr + f_2 Pr^2, \tag{44}$$

$$b_2(Pr) = g_0 + g_1 Pr + g_2 Pr^2, \tag{45}$$

where the coefficients f_i and g_i depend on the geometry and are given in Table 2.

Finally, our dispersion model reads:

$$\mathcal{D}_{zz}^{p*} = \begin{cases} \frac{Pe^2}{\mathcal{C}_t^p} & \text{if } Re < Re_L, \\ \mathcal{C}_t^p \sqrt{f_p} Pe + \frac{a_2(Pr)}{\sqrt{f_p} Pe} & \text{if } Re > Re_T, \end{cases} \tag{46}$$

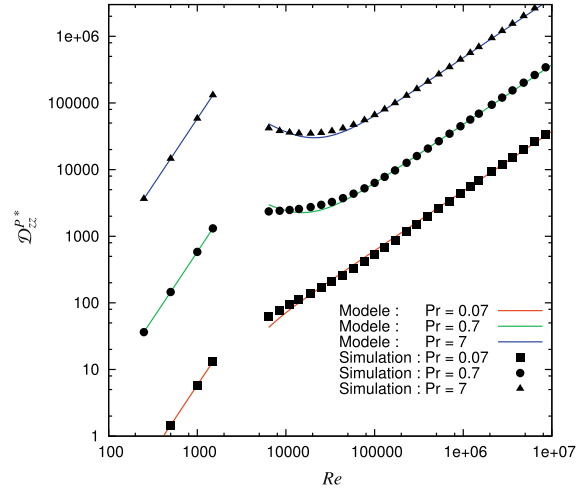
$$\mathcal{D}_z^A = \begin{cases} \frac{Pe}{\mathcal{C}_t^A} & \text{if } Re < Re_L, \\ \mathcal{C}_t^A + \frac{b_2(Pr)}{\sqrt{f_p} Pe} & \text{if } Re > Re_T, \end{cases} \tag{47}$$

where a_2 and b_2 are given by (44), (45), and $Re_L = 2000$ for plane channels and 1000 for circular pipes and $Re_T = 6000$ for all geometries. The comparison between our model and reference results is shown in Fig. 3.

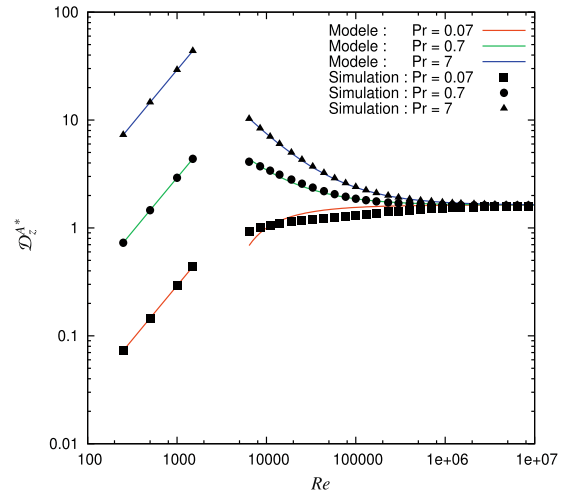
Let us notice that considering separate contributions for passive and active dispersion allows us to use the same set of phenomenological constants whether flow is adiabatic or heated (constant and variable heat fluxes). This is an important feature of the present model.

5. Results and discussion

In order to validate our dispersion model and study dispersion effects, numerical solutions of the macroscopic temperature Eq. (29) are compared with numerical reference results and classical macroscale model, i.e. models that do not take dispersion into account. Reference RANS simulations are carried out with the FLICA-OVAP code [11,12,6]. Those results are then spatially averaged to give doubly averaged temperature profiles. We first consider the spreading of a temperature jump in a channel with



(a) Dimensionless passive dispersion coefficient



(b) Dimensionless active dispersion coefficient

Fig. 3. Dependency on the Reynolds number of the dimensionless dispersion coefficients for several Prandtl numbers. Case of a plane channel. The flow is laminar for $Re < 2000$ and turbulent for $Re > 6000$.

no heat flux imposed at walls. Since there is no wall heat flux, there is no active dispersion. This allows us to validate our passive dispersion model and study the effect of passive dispersion. After that we will study the impact of wall heat flux heterogeneities for steady flows. Only plane channel results are presented here but the same validation procedure have been successfully applied to circular and annular pipes.

Table 2
Coefficients of the dispersion model for flows in pipes (see Eqs. (44) and (45)).

	f_0	f_1	f_2	g_0	g_1	g_2
Plane channel	1.53×10^5	-2.74×10^6	7.82×10^6	-2.88×10^2	2.90×10^3	1.08×10^3
Circular pipe	1.04×10^5	-1.83×10^6	5.04×10^6	-2.03×10^2	1.94×10^3	8.86×10^2
Annular pipe	1.53×10^5	-2.76×10^6	8.51×10^6	-3.14×10^2	3.28×10^3	1.06×10^3

5.1. Spreading of a temperature jump

5.1.1. Validation of the passive dispersion model

In this section, we study the evolution of a temperature jump with respect to the time (Fig. 4). The fluid flows at constant mass flow rate along the axis of the pipe, denoted z . The pipe is $L = 60D_h$ long. Initially, the fluid temperature is uniform over the pipe: $T(z, t = 0) = T_0$. The fluid temperature at the inlet, i.e. in $z = 0$, is uniform over the section. At $t = t_0$, we increase the inlet temperature so that $T(z = 0, t \geq t_0) = T_e > T_0$. Since adiabatic conditions are imposed at walls, there is no active dispersion. Lets us notice that, near the channel inlet, assumption (H1) is not valid. Our model can still be used because the temperature jump spreads rapidly, which means that assumption (H1) is true everywhere, except in a small zone nearby the channel inlet. Figs. 5–7 present the comparison between bulk temperature, spatially averaged temperature calculated with the macroscale model described in Section 4 and spatial average of fine scale reference simulations for $Pr = 0.74$ and $Re = 175$, 7.6×10^4 and 1.14×10^6 . Most industrial thermal hydraulic codes used for nuclear purpose [2,8] do not account for dispersion. This might lead to strongly underestimate the spreading of temperature jumps. For the cases here considered, the mean temperature increases earlier and decreases later than what classical models predict. Agreement between fine scale simulations and our improved macroscale model is excellent.

5.1.2. Comparison between dispersion and diffusion

For adiabatic flows in channels, the macroscopic temperature equation reads

$$\frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\underbrace{(\alpha_f + \alpha_{t\phi} + \mathcal{D}_{zz}^p)}_{\alpha_e} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right]. \quad (48)$$

Lets us first consider laminar regime. Macroscopic turbulent thermal diffusivity is then zero, and one can write

$$\alpha_e = \alpha_f \left(1 + \mathcal{D}_{zz}^{p*} \right) = \alpha_f \left(1 + \frac{Pe^2}{\mathcal{C}_t^p} \right). \quad (49)$$

Consequently

- If $Pe \ll \sqrt{\mathcal{C}_t^p}$, then $\mathcal{D}_{zz}^p \ll \alpha_f$ and molecular diffusion rules over passive dispersion;
- If $Pe \gg \sqrt{\mathcal{C}_t^p}$, then $\mathcal{D}_{zz}^p \gg \alpha_f$ and passive dispersion rules over molecular diffusion.

From these we see that passive dispersion rapidly predominates over molecular diffusion for increasing Péclet numbers.

Now within turbulent regime, Pinson et al. [17] propose

$$\alpha_{t\phi} = \alpha_f \mathcal{C}_x \sqrt{f_p} Pe, \quad (50)$$

with $\mathcal{C}_x \sim 10^{-2}$. Using (40) for high Reynolds numbers, effective thermal diffusivity may be written

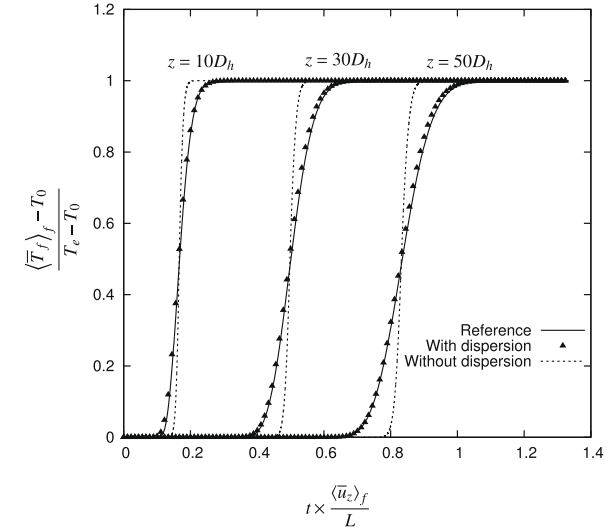


Fig. 5. Evolution of a temperature jump: simulation results for laminar flow in plane channel, $Pr = 0.74, Re = 175$. Comparison between spatially averaged reference RANS results (—), classical (---) and improved (\blacktriangle) macroscale models.

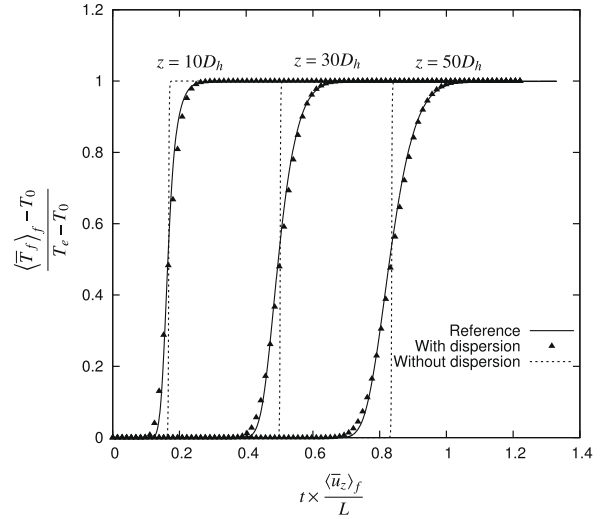


Fig. 6. Evolution of a temperature jump: simulation results for intermediate turbulent flow in plane channel, case $Pr = 0.74, Re = 76045$. Comparison between spatially averaged reference RANS results (—), classical (---) and improved (\blacktriangle) macroscale models.

$$\alpha_e = \alpha_f \left[1 + (\mathcal{C}_x + \mathcal{C}_t^p) \sqrt{f_p} Pe \right] \quad (51)$$

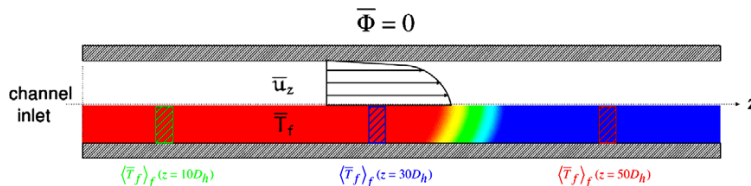


Fig. 4. Description of the dispersion model test-case: evolution of a temperature jump along the time.

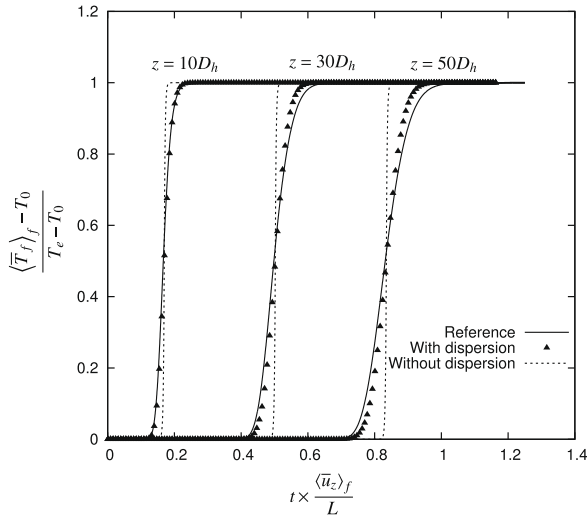


Fig. 7. Evolution of a temperature jump: simulation results for asymptotic turbulent flow in plane channel, $Pr = 0.74, Re = 1140684$. Comparison between spatially averaged reference RANS results (—), classical (---) and improved (\blacktriangle) macroscale models.

Moreover, for turbulent flows, $\sqrt{f_p}Pe \gg 1$, which means that molecular diffusion is negligible with respect to turbulent thermal diffusivity and passive dispersion. In addition, we have seen in Section 4 that $0.1 \leq \mathcal{C}_t^p \leq 1$. Hence $\mathcal{C}_t^p \gg \mathcal{C}_x$ and passive dispersion strongly predominates over turbulent thermal diffusivity.

Finally, for the range of Péclet numbers here considered, passive dispersion always predominates over diffusion. Thus, neglecting dispersion would lead to strongly underestimate the spreading of temperature jumps.

5.1.3. Influence of the Prandtl number

First of all, we focus on laminar regime, we have seen in Section 5.1.2 that α_e in Eq. (48) can be written

$$\alpha_e = \alpha_f \left(1 + \mathcal{D}_{zz}^p \right) = \alpha_f \left(1 + \frac{Pe^2}{\mathcal{C}_t^p} \right) = v_f \left(\frac{1}{Pr} + \frac{Re^2}{\mathcal{C}_t^p Pr} \right). \quad (52)$$

One can then write

$$\frac{\partial \alpha_e}{\partial Pr} = \frac{v_f}{Pr^2} \left(\frac{Pe^2}{\mathcal{C}_t^p} - 1 \right). \quad (53)$$

Two different behaviours may be observed, depending on the value of the Prandtl number:

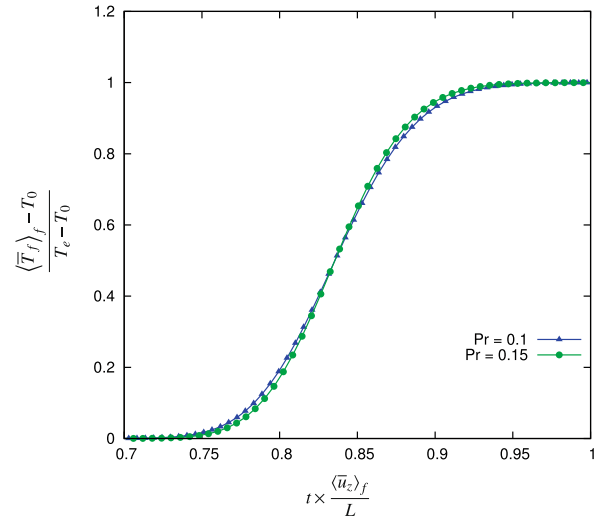
- If $Pe^2 > \mathcal{C}_t^p$, effective thermal diffusivity increases with Pr ;
- Else this quantity decreases for increasing Prandtl numbers.

Let us illustrate this observation thanks to an example. For a steady flow in a plane channel with $Re = 175$, Eq. (53) cancels for

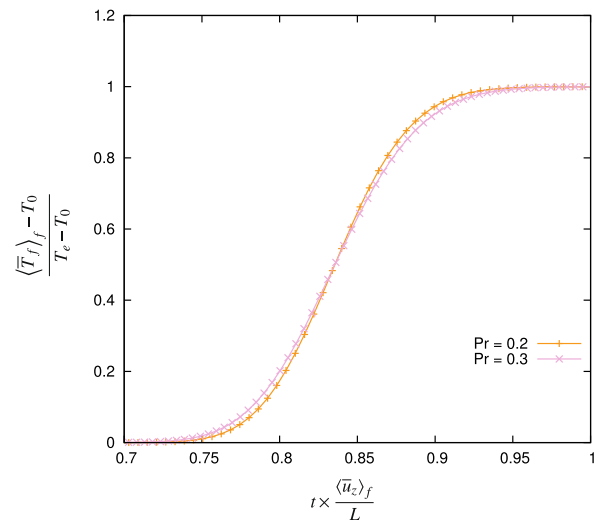
$$Pe = \sqrt{\mathcal{C}_t^p} \iff Pr = 0.166. \quad (54)$$

Mean temperature profiles are calculated for $Pr = 0.1; 0.15; 0.2; 0.3$. Fig. 8 shows that effective thermal diffusivity increases between $Pr = 0.1$ and $Pr = 0.15$, and decreases between $Pr = 0.2$ and $Pr = 0.3$. This result confirm our analysis.

For very high Reynolds numbers, we have, with Eq. (40),



(a) $Pr = 0.1$ and $Pr = 0.15$



(b) $Pr = 0.2$ and $Pr = 0.3$

Fig. 8. Influence of the Prandtl number on the spreading of temperature jump: focus on the temporal evolution of the mean temperature calculated at $z = 50D_h$ for a laminar flow in plane channel.

$$\alpha_e = \alpha_f \left[1 + (\mathcal{C}_x + \mathcal{C}_t^p) \sqrt{f_p} Pe \right] = v_f \left[\frac{1}{Pr} + (\mathcal{C}_x + \mathcal{C}_t^p) \sqrt{f_p} Re \right] \quad (55)$$

and

$$\frac{\partial \alpha_e}{\partial Pr} = -\frac{v_f}{Pr^2}. \quad (56)$$

Consequently, effective thermal diffusivity decreases for increasing Prandtl numbers.

5.2. Impact of wall heat flux nonuniformity

5.2.1. Validation of the active dispersion model

Let us now study the case of a steady flow in a pipe with piecewise linear heat flux imposed at the wall (Fig. 9). The fluid flows along the axis of the pipe, denoted z . The pipe is $L = 60D_h$ long.

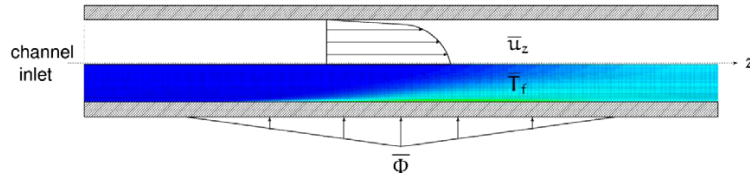


Fig. 9. Description of the dispersion model test-case: steady flow in the presence of wall heat flux heterogeneities. Wall heat flux is given by Eq. (57).

The fluid temperature in $z=0$ is uniform over the section : $T(z=0) = T_0$. The wall heat flux is given by (see also Fig. 9)

$$\bar{\Phi} = \begin{cases} 0 & \text{if } z < 10D_h \text{ or } z > 50D_h, \\ \Phi_{max} \frac{z-10D_h}{20D_h} & \text{if } 10D_h < z < 30D_h, \\ \Phi_{max} \frac{50D_h-z}{20D_h} & \text{if } 30D_h < z < 50D_h, \end{cases} \quad (57)$$

For each geometry, three Reynolds numbers are studied, in order to validate our dispersion model in the three regimes: laminar, intermediate and asymptotic. Simulation results in plane channel and discrepancy curves for $Pr = 0.74$ and $Re = 175, 7.6 \times 10^4$ and 1.14×10^6 are shown in Figs. 10–12. One can notice that account-

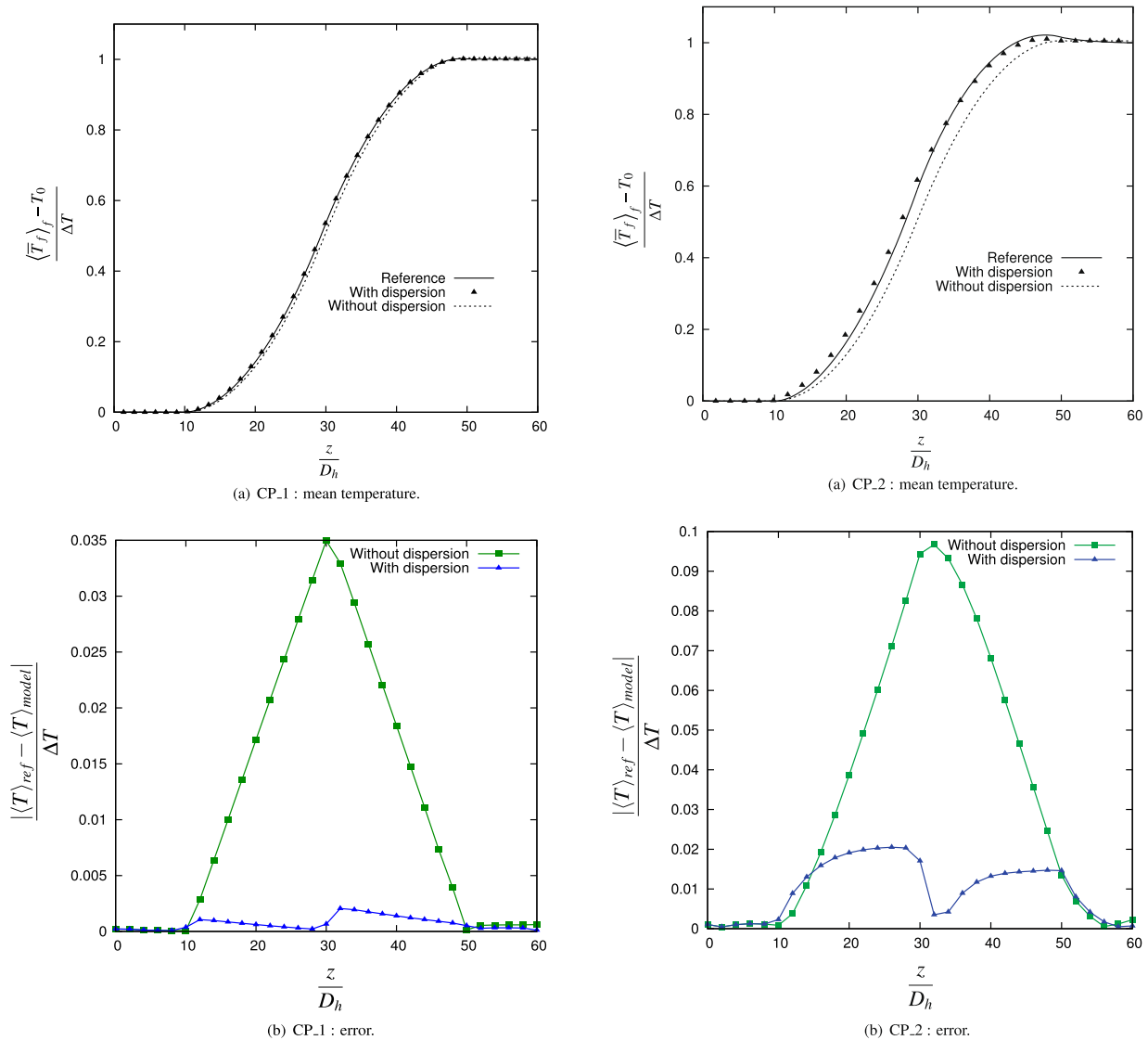


Fig. 10. Simulation results: laminar steady flow in plane channel in the presence of wall heat flux heterogeneities, $Pr = 0.74, Re = 175$. Comparison between spatially averaged reference RANS results (-), classical (---) and improved (▲) macroscale models. ΔT is defined by: $\Delta T = \langle T \rangle_f(z = z_{outlet}) - \langle T \rangle_f(z = z_{inlet})$.

Fig. 11. Simulation results: intermediate turbulent steady flow in plane channel in the presence of wall heat flux heterogeneities, $Pr = 0.74, Re = 76045$. Comparison between spatially averaged reference RANS results (-), classical (---) and improved (▲) macroscale models. ΔT is defined by: $\Delta T = \langle T \rangle_f(z = z_{outlet}) - \langle T \rangle_f(z = z_{inlet})$.

ing for dispersion strongly improves macroscale simulation results. Indeed, discrepancies between reference results and macroscale models are 5–10 times smaller when dispersion is taken into account.

5.2.2. Comparison between active and passive dispersion

We now want evaluate the relative importance of active dispersion and passive dispersion in the case of a steady flow with non-uniform wall heat flux and without temperature jumps. We recall that, in a channel flow, the active dispersion term is

$$\text{Active dispersion} = \frac{4\varphi_z^A}{(\rho C_p)_f D_h} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}, \quad (58)$$

and the passive dispersion term may be approximated by

$$\begin{aligned} \text{Passive dispersion} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi_{zz}^P \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \right] \\ &\sim \varphi_{zz}^P \times \frac{4}{(\rho C_p)_f U D_h} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (59)$$

This, using Eqs. (38)–(41), leads to

$$\frac{\text{Passive dispersion}}{\text{Active dispersion}} \sim \begin{cases} \frac{\varphi_z^A}{\varphi_z^P} & \text{if } Re < 2 \times 10^3, \\ \frac{\varphi_z^P \sqrt{f_p}}{\varphi_z^A} & \text{if } Re > 10^6. \end{cases} \quad (60)$$

In other words, within laminar regimes, the ratio between active and passive dispersion is constant and only depends on the geometry. Its value is $\frac{2}{7}$ in plane channels and $\frac{1}{2}$ in circular pipes. For turbulent steady flows, this ratio is small, and active dispersion strongly predominates over passive dispersion. Results obtained in plane channel for $Re = 76045$ and $Pr = 0.74$ (Fig. 13) illustrate our estimations.

6. Nonuniform wall heat flux and temperature burst

In order to evaluate simultaneously passive and active dispersion effects, we have simulated the evolution of a temperature burst in a plane channel with nonuniform wall heat flux. The following parameters are chosen $Re = 2 \times 10^4$, $Pr = 0.2$, $L = 1.43$ m, $D_h = 10$ mm, $(\rho C_p)_f = 1000 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$, $\langle \bar{u} \rangle_f = 52 \text{ m s}^{-1}$.

The following wall heat flux is imposed

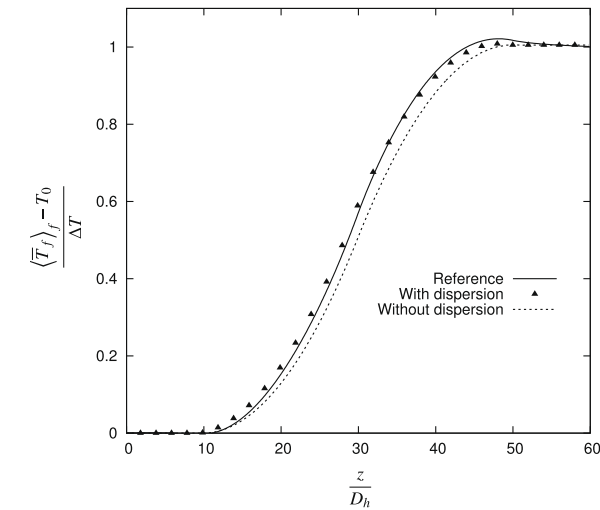
$$\bar{\Phi} = \Phi_{max} \left[\cos \left(\pi \frac{z}{L} - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad \Phi_{max} = 1820 \text{ W m}^{-2}. \quad (61)$$

Initially, the mean temperature is supposed to be given by steady solutions of classical and improved macroscale models, respectively denoted $T_\infty^{classical}$ and $T_\infty^{improved}$. At time $t = t_0$, we impose the following mean temperature profile:

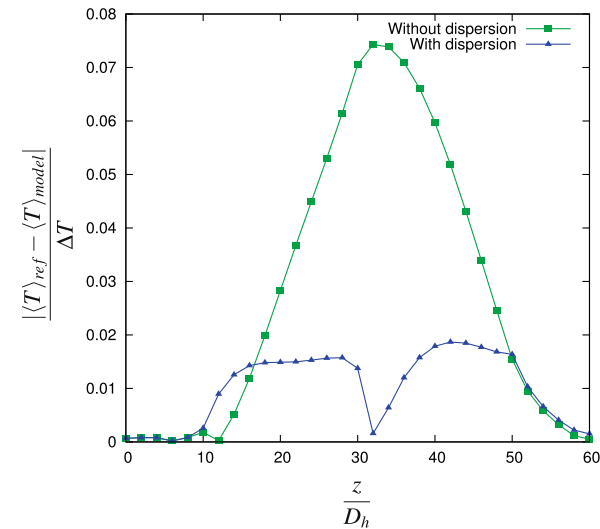
$$\begin{aligned} T^w(t = t_0, z) &= T_\infty^w(z) + \Delta T(z), \quad \text{with } w \\ &= \text{classical or improved}, \end{aligned} \quad (62)$$

where:

$$\Delta T(z) = \begin{cases} \theta & \text{if } z_1^1 < z < z_2^2, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (63)$$



(a) CP_3 : mean temperature.



(b) CP_3 : error.

Fig. 12. Simulation results: asymptotic turbulent steady flow in plane channel in the presence of wall heat flux heterogeneities, $Pr = 0.74$, $Re = 1140684$. Comparison between spatially averaged reference RANS results (—), classical (---) and improved (▲) macroscale models. ΔT is defined by: $\Delta T = \langle \bar{T} \rangle_f(z = z_{outlet}) - \langle \bar{T} \rangle_f(z = z_{inlet})$.

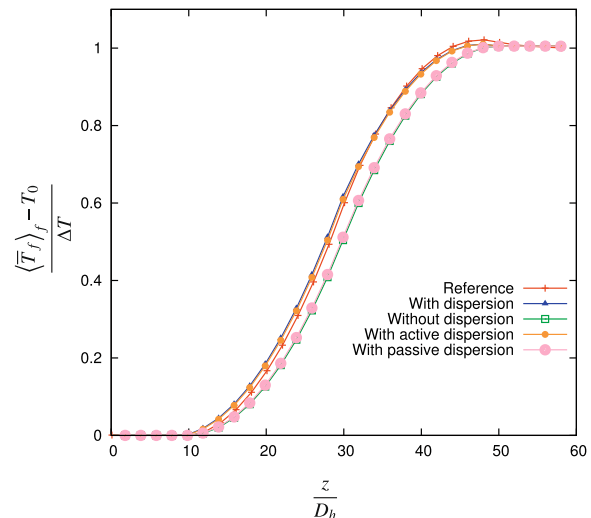


Fig. 13. Turbulent steady flow in plane channel in the presence of wall heat flux heterogeneities: comparison between active and passive dispersion.

and:

$$\theta = 10^\circ\text{C}, \quad z_i^1 = D_h, \quad z_i^2 = 11D_h. \quad (64)$$

Results given by classical and improved macroscale models are compared in Fig. 14. The temperature burst collapses because of passive dispersion while active dispersion perturbrates the steady solution on the problem. Passive dispersion predominates until the temperature jump vanishes and a steady regime is achieved. We then find similar results as in Section 5.2.

7. Conclusion

In this paper, a macroscopic model for laminar and turbulent flows in heat exchangers has been proposed. Use have been made of a statistical average and a spatial filter to derive the governing equation of the mean flow temperature. The double averaging procedure put forward dispersion terms. Up-scaling effects split into two contributions: a first one due to the velocity spatial heterogeneities, called passive dispersion, and a second one related to the wall heat flux, called active dispersion. A closure problem has been

derived by representing the temperature spatial deviation as a function of the macroscopic temperature gradient and the averaged wall heat flux. A practical and accurate model has been proposed for dispersion in pipes: dispersion coefficients have been expressed as functions of the Péclet number and the friction coefficient and the same constants apply whether flow is adiabatic, or with constant or variable heat fluxes. Results given by a macroscale model with those dispersion terms have been compared with numerical reference results and classical macroscale model. Noticeably improved results have been obtained for steady and transient flows in plane channel, circular and concentric annular pipes. Simulations highlighted the importance of dispersion effects for heated flows in pipes in the presence of wall heat flux heterogeneities or temperature jumps.

Appendix A. Properties of averaging operators

A.1. Statistical average

We first introduce the statistical decomposition commonly used in turbulence modeling. Any physical quantity ξ can be written as the sum of its statistical average and a fluctuation:

$$\xi = \bar{\xi} + \xi'. \quad (65)$$

The statistical average is linear, idempotent and commutes with the differential operators.

A.2. Spatial average

Following Taylor [20] and Whitaker [21], we use the method of volume averaging. This up-scaling process is linked to the definition of a spatial average operator and a fluid characteristic function. In this study, use have been made of a volume averaging operator corresponding to a spatial integration over a REV [16] ΔV . For any quantity ξ , we have

$$\langle \xi \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{x})} \int_{V(\mathbf{x})} \xi(\mathbf{x}, t) dV, \quad (66)$$

where $\Delta V(\mathbf{x})$, the volume of the REV, depends on the properties of the porous medium. For a spatially periodic porous medium, $\Delta V(\mathbf{x})$ represents a unit cell of the solid matrix [18,19]. If variations length scales of the macroscopic quantities are large with respect to the filter size, then spatial average can be assumed idempotent [4,19].

The fluid characteristic function χ_f is equal to one in the fluid phase and zero elsewhere. Any physical quantity ξ can be written

$$\xi = \langle \xi \rangle_f + \delta \xi. \quad (67)$$

This operator is clearly linear, due to its integral formulation. The spatial average does not commute with the space-time differential operators. Howes and Whitaker [9] showed the following derivation rules:

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} + \phi \langle \xi n_i \delta_\omega \rangle_f = \phi \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} + \phi \langle \delta \xi n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (68)$$

$$\phi \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) = \phi \frac{\partial \delta \xi}{\partial x_i} - \phi \langle \delta \xi n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (69)$$

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \xi \rangle_f}{\partial t} + \phi \langle \xi \omega_i n_i \delta_\omega \rangle_f = \phi \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial t} + \phi \langle \delta \xi \omega_i n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (70)$$

$$\phi \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \phi \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} - \phi \langle \delta \xi \omega_i n_i \delta_\omega \rangle_f, \quad (71)$$

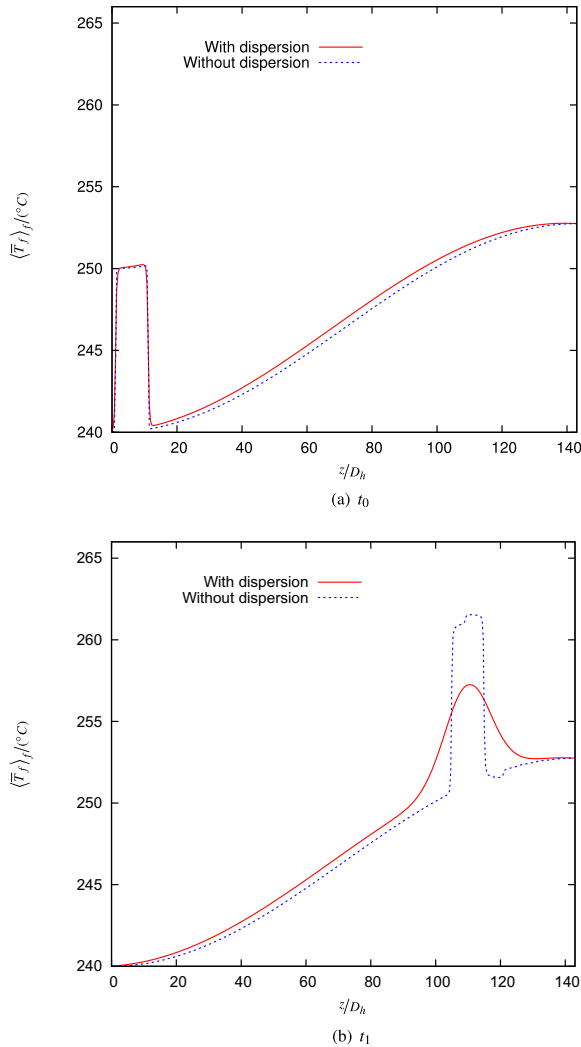


Fig. 14. Evolution of a temperature burst in a plane channel with nonuniform wall heat flux. Temperature burst is imposed at the inlet at $t = t_0$. It is then advected through the channel.

where ω is the fluid-solid interface velocity, \mathbf{n} the interface normal vector pointing towards the solid phase and δ_ω the Dirac delta function associated to the interface.

Appendix B. \bar{k} – $\bar{\varepsilon}$ Chien model

A general form for low Reynolds number \bar{k} – $\bar{\varepsilon}$ models is

$$v_t = C_\mu f_\mu \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = -\bar{u}_i' \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu_f + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] - \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} = -C_{\varepsilon_1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \bar{u}_i' \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu_f \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} - \bar{E}_p. \quad (74)$$

where f_1, f_2 et f_μ are dumping functions, and $\bar{\varepsilon}_p$ et \bar{E}_p additional dissipation terms. Chien [5] gives for the functions and coefficients of the model

$$\begin{aligned} f_\mu &= 1 - \exp(-0.0115y^+), \quad f_1 = 1 \quad f_2 = 1 - 0.22 \exp(-Re_t^2/36), \\ \bar{\varepsilon}_p &= 2\nu_f \left(\frac{\bar{k}}{y_w^2} \right), \quad \bar{E}_p = 2\nu_f \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{y_w^2} \right) \exp(-y^+/2), \quad \bar{\varepsilon} = 0 \text{ on the wall,} \\ C_\mu &= 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.35, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.8, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \end{aligned} \quad (75)$$

References

- [1] Y. Benarafa, Application du couplage RANS/LES aux écoulements à haut nombre de Reynolds de l'industrie nucléaire, PhD Thesis, Université Paris VI, Paris, France, 2005.
- [2] D. Bestion, The physical closure laws in the CATHARE code, Nucl. Eng. Design 124 (3) (1990) 229–245.
- [3] I.E. Idel'cik, Memento des pertes de charge, Eyrolles (1969).
- [4] R.G. Carbonell, S. Whitaker, Dispersion in pulsed systems – II: theoretical developments for passive dispersion in porous media, Chem. Eng. Sci. 38 (11) (1983) 1795–1802.
- [5] K.Y. Chien, Prediction of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds number turbulence model, AIAA J. 20 (1) (1982) 33–38.
- [6] M. Drouin, Implémentation et validation de modèles de turbulence dans le code hydrodynamique FLICA-OVAP, Technical Report, SFME/LETR/07-040/A, CEA, 2007.
- [7] O. Grégoire, Remarques sur la turbulence permettant de retrouver quantitativement ou qualitativement un certain nombre de résultats expérimentaux : le point de vue en 2003, Technical Report, SFME/LETR/RT/03-013/A, CEA, 2003.
- [8] O. Grégoire, E. Royer, J.-P. Magnaud, L. Roux and X. Masson, HORUS3D/TH: thermal hydraulic modelling of the Jules Horowitz Reactor core with FLICA4, in: Proceedings of the Seventh ICAPP Conference (Nice), 2007.
- [9] F.A. Howes, S. Whitaker, The spatial averaging theorem revisited, Chem. Eng. Sci. 40 (8) (1985) 1387–1392.
- [10] H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe, K. Yamamoto, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid, Int. J. Heat Fluid Flow 19 (1998) 482–491.
- [11] A. Kumbaro, V. Seignole, Two-phase flow computing with the OVAP code, in: Proceedings of Workshop Trend in Numerical and Physical Modeling for Multiphase Flows (Cargese), 2001.
- [12] A. Kumbaro, I. Toumi, V. Seignole, Numerical modeling of two-phase flows using advanced two fluid systems, in: Proceedings of ICONE 10 (Arlington, Virginia, USA), 2002.
- [13] S. Lyons, T. Hanratty, J. Mc Laughlin, DNS of passive heat transfer in a turbulent flow, Int. J. Heat Mass Transfer 34 (4/5) (1991) 1149–1161.
- [14] A. Nakayama, F. Kuwahara, A macroscale turbulence model for flows in a porous medium, J. Fluids Eng. 121 (1999) 427–433.
- [15] A. Nakayama, F. Kuwahara, Y. Kodama, An equation for thermal dispersion flux transport and its mathematical modelling for heat and fluid flow in a porous medium, J. Fluid Mech. 563 (2006) 81–96.
- [16] M.H.J. Pedras, M.J.S. De Lemos, Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media, Int. J. Heat Mass Transfer 44 (2001) 1081–1093.
- [17] F. Pinson, O. Grégoire, M. Quintard, M. Prat, O. Simonin, Modeling of turbulent heat transfer and thermal dispersion for flows in flat plate heat exchangers, Int. J. Heat Mass Transfer 50 (2007) 1500–1515.
- [18] M. Quintard, S. Whitaker, Transport in ordered and disordered porous media I: the cellular average and the use of weighting functions, Transport Porous Med 14 (1994) 163–177.
- [19] M. Quintard, S. Whitaker, Transport in ordered and disordered porous media II: generalized volume averaging, Transport Porous Med 14 (1994) 179–206.
- [20] G. Taylor, Dispersion of solute matter in solvent flowing slowly through a tube, Proc. Roy. Soc. Lond. A 219 (1953) 183–203.
- [21] S. Whitaker, Diffusion and dispersion in porous media, AIChE 13 (3) (1967) 420–427.
- [22] S. Whitaker, Theory and Applications of Transport in Porous Media: the Method of Volume Averaging, Kluwer Academic Publishers, 1999.

A macroscopic turbulence model based on a two-scale analysis for incompressible flows in porous media

M. Drouin*, O. Grégoire[†] and O. Simonin**

*CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

[†]STXN, 25 rue Leblanc, 75015 Paris, France

**IMFT, Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Abstract. In this paper, turbulent flows in media laden with solid structures are considered. A complete set of macroscopic transport equations is derived by spatially averaging the Reynolds averaged governing equations. A two-scale analysis highlights energy transfers between macroscopic and sub-filter mean kinetic energies and turbulent kinetic energy. Additional terms representing solids / fluid interactions and turbulent contributions are modeled. Closure expressions are determined using physical considerations and spatial averaging of microscopic computations. Results of the present model are successfully compared to volume-averaged reference results coming from fine scale computations. Furthermore, this model is able to provide accurate boundary conditions for clear flow turbulent simulations.

Keywords: Turbulence, porous media

PACS: 47.56.+r, 47.27.-i

INTRODUCTION

The macroscopic modeling of turbulent flows passing through porous media concerns many practical applications such as nuclear reactors, chemical reactors or canopy flows. The primary interest for industrial purposes is not the microscopic details of the flow, but rather the description on a large scale of mean flow quantities and the ability to provide accurate boundary conditions for clear flows upstream and downstream the porous media. The objective of this work is to derive an extended and more practical version of the macroscopic turbulence model proposed by Pinson *et al.* [10]. To this aim, we apply two average operators to the Navier-Stokes equations to derive macroscopic balance equations. In a strict mathematical point of view, the order of application of statistical and spatial averages is immaterial in regard to the mean flow quantities equations [8]. Nevertheless, the procedure based on the statistical averaging of the spatially averaged equations will require small eddies to be modeled. Therefore, applying spatial filtering with a characteristic length scale larger than a pore before statistical average would only allow the treatment of large-scale turbulence. This is questionable since the eddies larger than the scale of the porous structure are not likely to survive long enough to be detected [7]. Following [1, 7, 8, 11], we choose to apply first the statistical average in order to get a structured picture of the turbulent flow and to benefit from the large amount of knowledge available for Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) turbulence modeling. RANS equations are then integrated over a representative elementary vol-

ume ΔV , which is assumed to be well adapted to the geometrical characteristics of the media under study [12]. The spatial average is then defined by

$$\langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta V_f(\mathbf{x})} \int_{\Delta V_f(\mathbf{x})} \xi dV, \quad (1)$$

where ΔV_f is the volume of fluid embedded within ΔV . It can be assumed idempotent if variation length scales of the macroscopic quantities are large with respect to the filter size [12]. For each average, any quantity ξ may be split into mean and fluctuating components as $\xi = \bar{\xi} + \xi' = \langle \xi \rangle_f + \delta \xi$, and one can write $\xi = \langle \bar{\xi} \rangle_f + \langle \xi' \rangle_f + \delta \bar{\xi} + \delta \xi'$.

A complete set of spatially averaged equations is first derived. Then, a two-scale analysis allows us to identify different types of kinetic energy transfer between scales and additional source terms in the macroscopic kinetic energy balance equations. Transfers between large scale and sub-filter scale are highlighted and two distinct transfer modes are identified: the classical turbulent cascade transfer, also existing in clear turbulence, and the supplementary transfer induced by the coupling between the drag of the solid structures and the mean macroscopic flow [5]. This description also leads us to define the sub-filter production, which represents energy transfer between the mean part and the turbulent part of the flow [10], and the wake dissipation due to the presence of the solid matrix. A macroscopic model based on three balance equations for the turbulent kinetic energy, the mean sub-filter kinetic energy and the wake dissipation is then proposed. Finally, results of the model are successfully compared to volume-averaged reference results.

NOMENCLATURE

D_h	hydraulic diameter of the pores (m)
f_p	friction coefficient
Re	Reynolds number (UD_h/ν_f)
ν_f	kinematic viscosity of the fluid ($m^2 \cdot s^{-1}$)
ρ	density of the fluid ($kg \cdot m^{-3}$)
$\bar{\cdot}$	statistical average
\cdot'	fluctuation from the statistical average
$\langle \cdot \rangle_f$	fluid volume average
$\delta \cdot$	deviation from the fluid volume average

GOVERNING EQUATIONS

In this study, incompressible, adiabatic, single phase flows in saturated, rigid porous media are considered. Fluid properties (density, viscosity) and the porosity of the medium are assumed constant. The Reynolds-averaged set of governing equations, namely the continuity equation, the Navier-Stokes equation and the turbulent kinetic energy equation, are then given by

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{k}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u_i' - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu_f \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}. \quad (4)$$

MACROSCOPIC CONTINUITY AND MOMENTUM EQUATIONS

A velocity no-slip condition at the wall is imposed. The properties of the spatial average operator allow us to write the doubly averaged mass conservation

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

and macroscopic momentum equations

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle_f}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_j}$$

$$+ \underbrace{\left\langle \left(-\frac{\delta \bar{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta \omega \right\rangle_f}_{-\bar{F}_{\phi_i}}. \quad (6)$$

In eq. (6) \bar{F}_{ϕ} is the drag force applied by the fluid flow on the solid inclusions, $-\partial \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f / \partial x_j$ represents dispersion effects and $-\partial \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle_f / \partial x_j$ has to be modeled.

MACROSCOPIC KINETIC ENERGIES BALANCE EQUATIONS

Based on the formal commutativity of both average operators, one can write :

$$\langle \overline{u_i u_j} \rangle_f = \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f + \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle_f. \quad (7)$$

Three different kinetic energies are then built, depending on the scale under interest. Averaged turbulence kinetic energy is defined by $\langle \bar{k} \rangle_f = \langle \overline{u_i' u_i'} \rangle_f$. Two kinetic energies are defined using the mean velocities, say the macroscale and sub-filter mean kinetic energies $\bar{E}^M = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f$ and $\langle \bar{E}^m \rangle_f = \frac{1}{2} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i \rangle_f$. Balance equations for those three energies are derived [10]

$$\begin{aligned} \frac{D \langle \bar{k} \rangle_f}{Dt} = & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f}_I - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u_i' \right\rangle_f}_{II} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right)}_{III} - \underbrace{\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{IV} \\ & - \underbrace{\langle \delta \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j}}_V - \underbrace{\langle \bar{\epsilon} \rangle_f}_{VI}, \end{aligned} \quad (8)$$

where

- I : dispersion;
- II : turbulent diffusion;
- III : molecular diffusion;
- IV : macroscale shear production: PM ;
- V : sub-filter production: PSF ;
- VI : averaged viscous dissipation.

$$\begin{aligned} \frac{D \langle \bar{E}^m \rangle_f}{Dt} = & - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_i} \right)}_{II} \\ & - \underbrace{\left\langle \nu_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f}_{IV} + \underbrace{\langle \delta \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j}}_V \\ & + \underbrace{\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i}}_{VI} - \underbrace{\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{VII} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f}_{VIII}, \end{aligned} \quad (9)$$

where

- I* : pressure-velocity correlation;
- II* : diffusion;
- III* : wake dissipation: $\langle \bar{E}_w \rangle_f$;
- IV* : turbulent diffusion;
- V* : opposite of sub-filter production $-PSF$;
- VI* : drag ;
- VII* : transfer from macroscale mean motion;
- VIII* : dispersion.

$$\begin{aligned}
\frac{D\bar{E}^M}{Dt} = & \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \bar{P} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_f \frac{\partial \bar{E}^M}{\partial x_i} \right)}_{II} \\
& \underbrace{-v_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{III} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f}_{IV} \\
& + \underbrace{\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f}_{VI} \\
& + \underbrace{\langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{VII} - \underbrace{\langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F} \phi_i}_{VIII}, \quad (10)
\end{aligned}$$

where

- I* : pressure-velocity correlation;
- II* : diffusion;
- III* : macroscale dissipation;
- IV* : turbulent diffusion;
- V* : opposite of macroscale shear production: $-PM$;
- VI* : dispersion;
- VII* : transfer to sub-filter mean motion;
- VIII* : drag.

Energy transfers between scales are summarized in Fig. 1. Subfilter mean kinetic energy $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ is mainly fed by the macroscale mean kinetic \bar{E}^M energy through the drag force applied by the fluid flow on the solid inclusions. At subfilter scale, energy is mainly transferred from $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ to $\langle \bar{k} \rangle_f$ through the so called subfilter production. Turbulent energy is finally dissipated into heat. Moreover, a part of the energy transferred between scales is directly dissipated into heat by way of wake and macroscale dissipations.

DERIVATION OF THE TURBULENCE MODEL

Macroscopic shear production

Macroscopic Reynolds tensor $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$ is usually modeled by [7, 8, 10]:

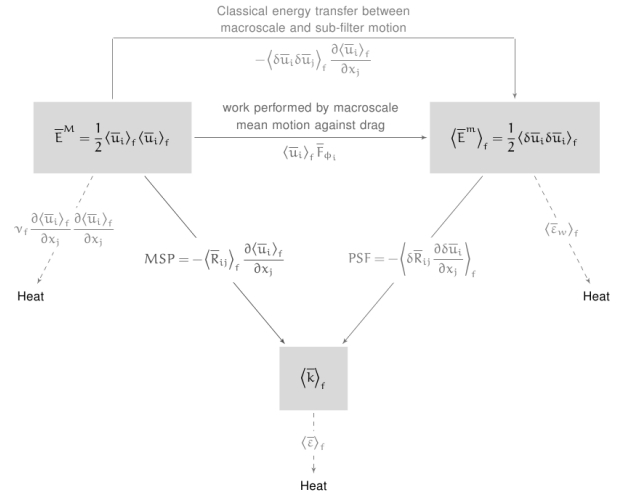


FIGURE 1. Description of energy transfer for flows in porous media.

$$-\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f = v_t \phi \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \bar{k} \rangle_f \delta_{ij}, \quad (11)$$

where the macroscopic turbulent diffusion coefficient is given by $v_t \phi = C_\mu \langle \bar{k} \rangle_f^2 / \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$, $C_\mu = 0.09$. This hypothesis is questionable [9]. Let us notice that this term vanishes in the cases studied below.

Diffusion and dispersion

Following [1, 5, 7, 8, 10] turbulent diffusion in eq. (8) is modeled by

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t \phi}{\sigma_k} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right). \quad (12)$$

Dispersion is modeled by a gradient approximation

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_j} \right). \quad (13)$$

One can find in [3] general expressions for $\mathcal{D}_{ij}^{\bar{k}}$.

Pressure-velocity correlation, dispersion and turbulent diffusion are modeled collectively as

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f = \\
\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t \phi}{\sigma_E} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{E}^m} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_j} \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

Macroscopic turbulent viscosity is defined by $v_t \phi = C_\mu \langle \bar{k} \rangle_f^2 / \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$, $C_\mu = 0.09$ and $\sigma_k = 1$.

Friction factor

Since wake dissipation is tightly linked to velocity gradient, which is concentrated at walls, it is clearly related to friction. Based on a dimensionnal argument, we assume $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f \propto u_f^3/D_h \propto \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 f_p^3 / D_h$. We thus propose

$$\frac{f_p}{f_p^*} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f^*} \right)^{2/3}, \quad (15)$$

where f_p^* and $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f^*$ are representative values of the friction factor and wake dissipation for the flow under consideration. For instance, for flows in channels, representative values correspond to fully developed flow limit.

Dissipation rate and sub-filter production

Sub-filter production PSF and viscous dissipation $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ are modeled by

$$\frac{PSF}{PSF^*} = \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_f^*} \right)^a \left(\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_f^*} \right)^b. \quad (16)$$

$$\frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f^*} = \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_f^*} \right)^n, \quad (17)$$

where a , b and n are constants and PSF^* , $\langle \bar{k} \rangle_f^*$, $\langle \bar{E}^m \rangle_f^*$ and $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f^*$ are representative values of turbulent kinetic energy, subfilter mean kinetic energy and dissipation for the flow under consideration.

Wake dissipation

Wake dissipation is induced by the velocity deviation gradients. It is related the presence of walls. One can then presume that evolution of wake dissipation results from a competition between production due to the friction with the wall (represented by the drag) and dissipation by viscous effects. The following transport equation is then postulated for $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$

$$\begin{aligned} \frac{D\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(v_f + \frac{v_t \phi}{\sigma_{\varepsilon_w}} \right) \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial x_i} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\varepsilon_w} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ &- \frac{C_{\varepsilon_w,2}}{\tau_{w1}} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \frac{C_{\varepsilon_w,1}}{\tau_{w2}} \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F} \phi_z, \end{aligned} \quad (18)$$

where τ_{w1} et τ_{w2} are characteristic time scales and $C_{\varepsilon_w,1}$ et $C_{\varepsilon_w,2}$ are constants. By analogy with local $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ models, we choose $\tau_{w1} = \tau_{w2} = \langle \bar{E}^m \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$.

APPLICATION TO STRATIFIED POROUS MEDIA

In this section, we propose a turbulence model for flows in stratified porous media (Fig. 2). The turbulent flow is statistically steady and oriented in the z direction. Reynolds number is given by $Re = \langle \bar{u}_z \rangle_f D_h / \nu_f$. In such media, $\langle \bar{u}_z \rangle_f$ is the bulk flow velocity. No eddies larger than the pore size can thus exist. There is no macroscopic velocity gradient and the macroscopic shear production vanishes. In such configurations, medium study can be reduced to a unit cell study.

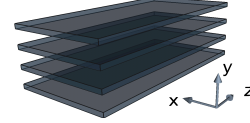


FIGURE 2. Example of stratified porous medium: description of a porous medium composed of flat plates.

In the configuration under study, equations (8), (9) and (18) can be simplified :

$$\begin{aligned} \frac{D\langle \bar{k} \rangle_f}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(v_f + \frac{v_t \phi}{\sigma_k} + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{k}} \right) \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} \right] \\ &+ PSF^* \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_f^*} \right)^a \left(\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_f^*} \right)^b - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f^* \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_f^*} \right)^n, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\langle \bar{E}^m \rangle_f}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(v_f + \frac{v_t \phi}{\sigma_E} + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{E}^m} \right) \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial z} \right] + \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F} \phi_z \\ &- PSF^* \left(\frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_f^*} \right)^a \left(\frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f}{\langle \bar{E}^m \rangle_f^*} \right)^b - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(v_f + \frac{v_t \phi}{\sigma_{\varepsilon_w}} + \mathcal{D}_{zz}^{\bar{\varepsilon}_w} \right) \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} \right] \\ &- \frac{C_{\varepsilon_w,2}}{\tau_{w1}} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \frac{C_{\varepsilon_w,1}}{\tau_{w2}} \langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F} \phi_z. \end{aligned} \quad (21)$$

Asymptotic states

Far downstream, profiles reach non-evolving levels and shapes. This asymptotic state corresponds to the fully developed flow limit and is denoted “ ∞ ”. It depends on the Reynolds number of the flow. Correlations based on averaged fine-scale simulations are proposed for turbulent asymptotic states in stratified media. The friction factor asymptotic value $f_{p\infty}$ may be given by the correlations available in the literature [6]. We propose the following correlations:

Model constants

$$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty} = C_w \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} \times f_{p\infty}^{3/2}, \quad (22)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}^\infty = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty}, \quad (23)$$

$$PSF_\infty = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty} = \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_h} f_{p\infty} \left(1 - C_w f_{p\infty}^{1/2}\right), \quad (24)$$

$$\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} = c_k \times \langle \bar{u}_z \rangle_f^2 f_{p\infty} / 8, \quad (25)$$

For quasi-parallel flows, $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ has the structure of a dispersion contribution. Hence for channel flows we propose

$$\langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty} = 2 \mathcal{D}_z^{A*} \times \langle \bar{u}_z \rangle_f^2 f_{p\infty} / 8. \quad (26)$$

For plane channel flows, we find $C_w = 3$, $c_k = 1.82$. A detailed description of \mathcal{D}_z^{A*} may be found in [3]. Expressions (22) to (26) are compared with reference results on Fig. 3. Reference results are spatially averaged fine scale simulations.

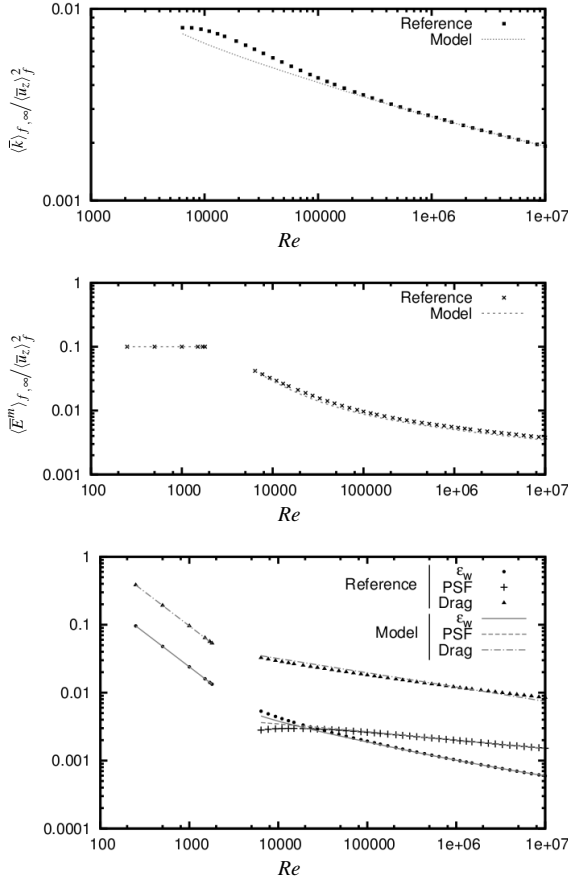


FIGURE 3. Asymptotic states: evaluation of expressions (22) to (26) for flows in plane channels. The source terms $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}$, PSF_∞ and $\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}^\infty$ are adimensionned by $\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / 2D_h$.

For flows in stratified porous media, the present model should be consistent with asymptotic states. Characteristic scales are then given by $f_p^* = f_{p\infty}$, $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f^* = \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}$, $PSF^* = PSF_\infty$, $\langle \bar{k} \rangle_f^* = \langle \bar{k} \rangle_{f,\infty}$, $\langle \bar{E}^m \rangle_f^* = \langle \bar{E}^m \rangle_{f,\infty}$ and $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f^* = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\infty}$. Moreover, in order to recover reference asymptotic states, we impose :

$$C_{\varepsilon_w,2} = C_{\varepsilon_w,1} \times \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}^\infty}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_{f,\infty}}. \quad (27)$$

For such flows, only $\mathcal{D}_{zz}^{\bar{k}}$, $\mathcal{D}_z^{\bar{E}^m}$ and $\mathcal{D}_{zz}^{\bar{\varepsilon}_w}$ are needed. Following [7], dispersion coefficients are modeled by means of thermal dispersion coefficient \mathcal{D}_{zz}^P presented in [3] and Lewis numbers

$$\mathcal{D}_{zz}^{\bar{k}} = \mathcal{D}_z^{\bar{E}^m} = \mathcal{D}_{zz}^{\bar{\varepsilon}_w} = \nu_f \mathcal{D}_{zz}^{P*} (Pr = 1). \quad (28)$$

It has been shown in [3] that dispersion strongly predominates over turbulent diffusion. Hence turbulent diffusion is neglected in eqs. (20) and (21).

Optimal values of the model constants a , b , n and $C_{\varepsilon_w,1}$ have been determined for turbulent flows in channels. Formally, the $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{E}^m \rangle_f$ system can be approached by a damped oscillator. A frequential analysis of the reference oscillations leads to $a = b = 1/4$, $n = 1/3$. A numerical optimization procedure has been run to determine an optimal value for $C_{\varepsilon_w,1}$. Eq. (18) is solved for $C_{\varepsilon_w,1} \in [0.1, 10]$ and the results are compared with reference results. The spatially integrated error is calculated for several test cases. The average integrated error is minimal for $C_{\varepsilon_w,1} \in [4, 5.5]$. We choose $C_{\varepsilon_w,1} = 5$.

RESULTS AND DISCUSSION

In order to assess the present macroscopic model, steady unidirectional turbulent flows entering into porous medium composed of plane channels shall be investigated from both microscopic and macroscopic points of view. From the microscopic point of view, fine-scale simulations are carried out with FLICA-OVAP CFD code [4] using the low-Reynolds $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ Chien model [2]. At the inlet, velocity, TKE and viscous dissipation profiles are flat. By applying spatial average to fine-scale simulation results, we get reference evolutions for macroscale quantities. Spatially averaged quantities at the inlet provide channel inlet boundary conditions hereafter denoted “·₀”. Between inlet and asymptotic state, large scale oscillations of spatially averaged physical quantities are observed [11]. From the macroscopic point of view, equations (19), (20) and (18) are solved with the closure relationships (15), (16) and (17). The macroscopic

turbulence model has been implemented in a 1D unsteady code. Numerical scheme based upon MUSCL formulation is used. Asymptotic states are given by eqs. (22) and (26). Results of our present model are compared with spatially averaged fine-scale simulations on Figs. 4 to 5. This test case is characterized by $Re = 1. \times 10^5$; $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k} \rangle_{f, \infty} = 3$; $L_0 = \langle \bar{k} \rangle_f^{3/2} / \langle \bar{\epsilon} \rangle_f = D_h / 10$.

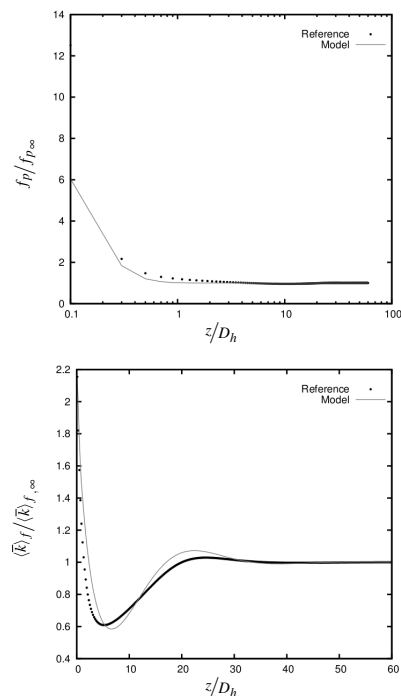


FIGURE 4. Macroscopic turbulence model results for turbulent flow in stratified porous media composed of flat plates. Comparison with reference results. Evolution of $f_p / f_{p, \infty}$ and $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k} \rangle_{f, \infty}$.

CONCLUSION

A macroscopic turbulence model has been proposed for flows in porous media. A two-scale analysis highlighted energy transfers between the mean motion and turbulence embedded in a porous medium. Averaged energies equations have been derived and closure relationships have been determined. The model has been tested for unidirectional turbulent flows in stratified porous media. Reference results are accurately recovered, as well as asymptotic values. Further investigations are needed to find out the applicability of the present model to more general cases (laminar flows, other geometries, mixing grid, exit flows from porous media).

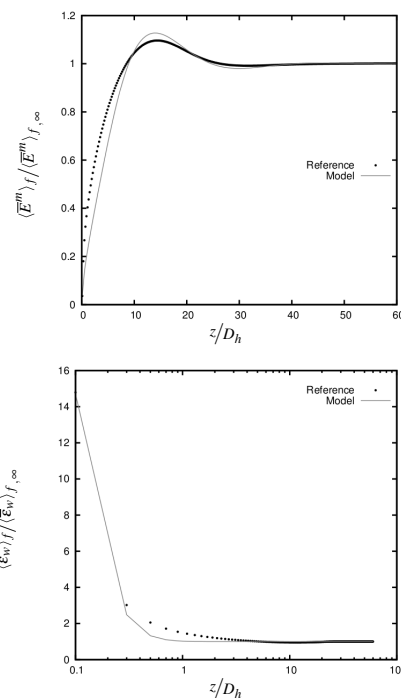


FIGURE 5. Macroscopic turbulence model results for turbulent flow in stratified porous media composed of flat plates. Comparison with reference results. Evolution of $\langle \bar{\epsilon}^m \rangle_f / \langle \bar{\epsilon}^m \rangle_{f, \infty}$ and $\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f / \langle \bar{\epsilon}_w \rangle_{f, \infty}$.

ACKNOWLEDGEMENT

Thanks to A. Chanoine for his help and constructive suggestions.

REFERENCES

1. Chandesris M. *et al.*, *IJHMT*, 49 (2006).
2. Chien K. Y., *AIAA J.*, 20(1) (1982).
3. Drouin M. *et al.*, *IJHMT*, 53 (2010).
4. Fillion P. *et al.*, *NURETH-13* (2009).
5. Finnigan J. J., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 (2000).
6. Kakaç S. *et al.*, *Handbook of single-phase convective heat transfer*, John Wiley and Sons (1987).
7. Nakayama A. and Kuwahara F., *J. Fluids Engineering*, 121 (1999).
8. Pedras M.H.J. and De Lemos M.J.S., *IJHMT*, 44 (2001).
9. Pinson F., Ph. D. Thesis, INP Toulouse, (2006).
10. Pinson F. *et al.*, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, 27 (2006).
11. Pinson F. *et al.*, *C. R. Mécanique*, 335 (2007).
12. Quintard M. and Whitaker S., *Transport Porous Med.*, 14 (1994).
13. Whitaker S., *AIChE*, 3(13) (1967).

Connecting dispersion models and wall temperature prediction for laminar and turbulent flows in channels

M. Drouin^a, O. Grégoire^{a,b}, O. Simonin^c

^aCEA Saclay, DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR, 91191 Gif-sur-Yvette, France

^bSTXN, 25 rue Leblanc, 75015 Paris, France

^cIMFT, UMR CNRS/INP/UPS, Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Abstract

1 In a former paper, Drouin *et al.* [6] proposed a model for dispersion phenomena in heated channels that works
2 for both laminar and turbulent regimes. This model, derived according to the double averaging procedure, leads
3 to satisfactory predictions of mean temperature. In order to derive dispersion coefficients, we had to solve the so
4 called “closure problem”. This gives us access to the temperature deviation at sub filter scale. We now propose to
5 capitalize on this useful information in order to connect dispersion modelling to wall temperature prediction. The
6 straightforward use of the closure problem solution to derive wall temperature allows us to derive first an algebraic
7 wall temperature model. However, since temperature in wall vicinity is mostly controlled by boundary conditions,
8 it might evolve according to different time and length scales than averaged temperature. Hence, this results in
9 poor prediction of wall temperature when flow conditions encounter fast transients and stiff heat flux gradients. To
10 overcome this limitation we also derive a transport equation for temperature deviation ($T_w - \langle \bar{T}_f \rangle_f$). Both models
11 are then compared with fine scale simulations used as reference results. Wall temperature predictions are found to
12 be in good agreement.

Key words: Heat transfer, Taylor Dispersion, Double averaging, Turbulence

Nomenclature

A_f	interface between solid and fluid phases (m^2)
\mathcal{D}^A	thermal active dispersion vector (m)
\mathcal{D}^P	thermal passive dispersion tensor ($m^2 \cdot s^{-1}$)
C_p	Specific heat capacity ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
D_h	hydraulic diameter of the pores (m)
$e_{1,2}$	thickness of the central and near-wall layers
f_w	friction coefficient
n_i	i th component of the interface normal vector, pointing towards the solid phase
Pe	Péclet number ($UD_h/\alpha_f = Re Pr$)
Pr	Prandtl number (ν_f/α_f)
Pr_t	turbulent Prandtl number (ν_t/α_t)
Re	Reynolds number (UD_h/ν_f)
R	radius of the pipe
REV	Representative Elementary Volume
Ω	volume of a REV
Ω_1	volume of the central region of the REV
Ω_2	volume of the near-wall region of the REV
T_f	fluid temperature
u_τ	friction velocity ($m \cdot s^{-1}$)

*Corresponding author. Tel: +33164502743; fax: +33164501307

Email address: olivier.gregoire@cea.fr (O. Grégoire)

Greek symbols

α_f	thermal diffusivity of the fluid ($m^2 \cdot s^{-1}$)
α_t	turbulent thermal diffusivity ($m^2 \cdot s^{-1}$)
$\alpha_{t\phi}$	macroscopic turbulent thermal diffusivity ($m^2 \cdot s^{-1}$)
δ_w	Dirac delta function associated to the walls (m^{-1})
ΔT	wall to mean temperature gap (K)
ΔV	representative elementary volume (REV) (m^3)
ΔV_f	fluid volume included in the REV (m^3)
ζ	active dispersion function (s)
η_j	passive dispersion function (m)
ν_f	kinematic viscosity of the fluid ($m^2 \cdot s^{-1}$)
ν_t	turbulent kinematic viscosity ($m^2 \cdot s^{-1}$)
ρ	density of the fluid ($kg \cdot m^{-3}$)
ϕ	porosity
Φ	wall heat flux
Σ	solid surface
$\Sigma_{2,1}$	surface delimiting inner and outer region

Other symbols

$\bar{\cdot}$	statistical average
\cdot'	fluctuation from the statistical average
$\langle \rangle$	volume average
$\langle \rangle_f$	fluid volume average
$\delta \cdot$	deviation from the fluid volume average
\cdot^*	dimensionless quantity
\cdot_f	fluid
\cdot_w	wall
\cdot_t	turbulent

1. Introduction

Design, optimization and safety analysis of large heating devices such as heat exchangers or nuclear reactor cores are major concerns for many engineers. Those studies rely heavily upon flows and heat exchanges modeling. Considering the geometrical complexity and the size of such systems, it is not possible, to calculate the details of velocity and temperature profiles in each sub-channel. However, the primary interest for industrial purpose is not the details of the flow, but rather the description on a large scale of mean flow quantities and heat transfer properties. Such a macroscopic description may be obtained by applying up-scaling methods [8, 19, 20]. Doing so, a nuclear reactor core, for instance, can be described in an homogenized way (porous approach) by means of a spatial filter. This averaging procedure leads to modified equations for mean flow variables, with additional contributions that account for small scale phenomena, mainly boundary layers interactions with solids. Actually, such heating devices might be seen as spatially periodic and anisotropic porous media, with the additional difficulty that flows may achieve every regime, from laminar to highly turbulent, within the pores.

In a former article [6], a complete macroscopic mean temperature model for flows in stratified porous media has been presented. Correlations for scalar and temperature dispersion modeling in rectangular, circular and annular pipes have been established and assessed thanks to comparisons with fine scale simulation results. Now, we focus on wall temperature modeling, or, in other words, on heat exchange modeling. The most classical heat exchange coefficient doesn't account for transients flows or non uniform heat fluxes. On the contrary, they are based upon the assumption that flows are fully established. It is well known, for instance, that heat exchange in pipes inlet region are poorly predicted and *ad hoc* modifications of models are generally used [9]. During a fast transient or when heat fluxes encounter large gradients, flows cannot be considered established anymore. Boundary layers and bulk flow don't react simultaneously to those strong perturbations and are, in a sense, out

of phase. Since dispersion modeling relies on the analysis of spatial deviations of flow quantities (the so-called “closure problem”) [2], it appears to be a natural way to account for those unbalances.

In this work, we propose to connect dispersion modeling to heat transfer and averaged wall temperature modeling for forced convection flows in pipes. In section 2, the averaging procedure and the derivation and closure of the macroscopic mean temperature equation are described. Classical heat transfer models are recalled in section 4 and a new algebraic wall temperature model accounting for dispersion is derived in section 5. To overcome limitations of this algebraic model, a one-equation wall temperature model is established in section 6. Finally, we present in section 7 comparisons between classical heat transfer model, algebraic and one-equation models. Fine scale simulation results are then used as reference results to assess modeling improvements.

2. Macroscopic temperature equation

2.1. Averages

Since flows that are considered can be turbulent, a statistical average operator, denoted “ $\bar{\cdot}$ ”, is used to handle the random character of turbulence. Our aim is to develop a spatially homogenized modeling of these flows and we also need to apply a spatial filter. The spatial average operator used to derive a macroscale model is denoted “ $\langle \cdot \rangle_f$ ”. For each average, any quantity ξ may be split into mean and fluctuating components as

$$\xi = \bar{\xi} + \xi' = \langle \xi \rangle_f + \delta \xi, \quad (1)$$

and one can write

$$\bar{\xi} = \langle \bar{\xi} \rangle_f + \langle \xi' \rangle_f + \delta \bar{\xi} + \delta \xi'. \quad (2)$$

Statistical and spatial average properties are summarized in Drouin *et al.* [6]. Pedras and De Lemos [13] proved that, in a strict mathematical point of view, the order of application of statistical and spatial averages is immaterial in regard to the mean flow quantities equations. Nevertheless, the procedure based on the statistical averaging of the spatially averaged equations will require small eddies to be modeled, as in Large Eddy Simulation. Therefore, applying spatial filtering with a characteristic length scale larger than a pore before statistical average would only allow the treatment of large-scale turbulence. This is questionable since the eddies larger than the scale of the porous structure are not likely to survive long enough to be detected [12]. Under these circumstances, following Pinson *et al.* [14], we choose to apply first the statistical average (Fig. 1). Thus Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) models can be used to calculate temperature and velocity profiles within subchannels, and volume average may be used subsequently.

In this study, incompressible and undilatable, single phase flows in saturated, rigid porous media are considered. Fluid properties (density, viscosity, heat capacity) and the porosity of the medium are assumed constant. Finally, we shall assume that thermal interactions with solids reduce to an external forcing for the fluid temperature.

2.2. Averaged continuity equation

The instantaneous microscopic mass conservation equation is given by

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

The no-slip boundary condition at walls and the properties of the spatial average operator allow us to write the doubly averaged mass conservation equation

$$\phi \left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0. \quad (4)$$

If the porosity ϕ of the media considered in this paper is constant, eq. (4) reads

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

2.3. Averaged fluid temperature equation

For constant fluid properties, the instantaneous microscopic temperature balance equation reads

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial(T_f u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

and the corresponding boundary condition on the wall \mathcal{A}_f is

$$\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i = \frac{\Phi}{(\rho C_p)_f} \quad \text{on } \mathcal{A}_f. \quad (7)$$

The use of the statistical average leads to the following equation:

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{T}_f) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\overline{u'_i T'_f}}_{\text{turbulent heat flux}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

$$\alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{(\rho C_p)_f} \quad \text{on } \mathcal{A}_f. \quad (9)$$

In eq. (8), turbulent heat flux is usually modeled with a first gradient approximation

$$\overline{u'_i T'_f} = -\alpha_t \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i}, \quad (10)$$

where α_t is the turbulent thermal diffusivity. By analogy with the molecular Prandtl number, the turbulent Prandtl number is introduced: $Pr_t = \nu_t / \alpha_t$. For flows in channels, $Pr_t = 0.9$ is assumed to be accurate enough [11, 10, 1]. Applying volume average to (8), doubly averaged equation for the fluid temperature is obtained:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{T}_f \rangle_f \right) &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\phi \langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f}_{\text{macroscopic turbulent heat flux}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\phi \left\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_w \right\rangle_f}_{\text{wall heat transfer}} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta \bar{T}_f n_i \delta_w \rangle_f}_{\text{tortuosity}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{T}_f \rangle_f}_{\text{thermal dispersion}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Macroscopic turbulent heat flux can be modeled by means of a macroscopic turbulent thermal diffusivity $\alpha_{t\phi}$ [12, 13]:

$$\langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f = -\alpha_{t\phi} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} = -\frac{\nu_{t\phi}}{Pr_t} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (12)$$

Macroscopic turbulent viscosity models for flows in pipes are detailed in Grégoire [7]. Thanks to equation (9), wall heat exchange reads

$$\left\langle \alpha_f \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_w \right\rangle_f = \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (13)$$

Tortuosity and dispersion terms are typical of the porous medium approach. Dispersion is induced by a coupling between velocity and temperature heterogeneities. Tortuosity results from the perturbation of diffusive fluxes in fluid due to the interactions with solids. Let us notice that turbulent diffusivity does not induce tortuosity since it

vanishes at walls. If the porosity is constant, Drouin *et al.* [6] model the macroscopic mean temperature equation as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\alpha_f + \alpha_\phi) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \right] + \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f} + \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^p \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_i^A \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

where \mathcal{D}_{ij}^p and \mathcal{D}_i^A are dispersion tensors. Those coefficients are functions of the geometry, the Reynolds number and the Prandtl number.

2.4. Wall temperature: classical models

In forced convection, the most common way of modeling heat transfer at a macroscopic scale is to assume that the difference between the wall and bulk temperatures is proportional to the wall heat flux:

$$\Phi = h(T_w - T_{BULK}), \quad (15)$$

where

$$T_{BULK} = \frac{\langle u T \rangle_f}{\langle u \rangle_f} = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \frac{\langle \delta u \delta T \rangle_f}{\langle u \rangle_f}, \quad (16)$$

and

$$h = \frac{Nu D_h}{(\rho C_p)_f \alpha_f}. \quad (17)$$

The Nusselt number Nu quantifies the ratio between conductive and convective heat transfer. For flows in ducts, one generally uses correlations relating Nusselt number to Reynolds and Prandtl numbers. Among all correlations (see [9] for a review of available correlations), Colburn [4] or Dittus-Boelter [5] are the most used. They read

$$Nu = \max(Nu^L, Nu^T), \quad (18)$$

where Nu^L is a constant that depends on the geometry and

$$Nu^T = A Re^m Pr^n. \quad (19)$$

Classical models give satisfactory results for steady established flows with uniform wall heat flux and are very easy to use. On the other hand, they are not able to accurately predict heat transfer for fast transients or when the wall heat flux is highly non-uniform.

3. Algebraic model based on a porous media approach

In order to derive their macroscopic mean temperature model, Drouin *et al.* [6] used the Carbonell and Whitaker [2] closure relationship:

$$\delta \bar{T}_f = \bar{T}_f - \langle \bar{T}_f \rangle_f = \eta_j \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (20)$$

The functions η_j and ζ are solutions of the following closure problem (see [6])

$$\text{Inside the REV: } \bar{u}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_j} - \delta \bar{u}_i, \quad (21)$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] = -1, \quad (22)$$

$$\text{at walls: } \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (23)$$

$$\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} n_i = \frac{\bar{\Phi}}{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}. \quad (24)$$

Using the same approach, we now focus on near wall temperature modelling. Using equation (20) one can write

$$T_w = \frac{\langle \bar{T}_f \delta_w \rangle_f}{\langle \delta_w \rangle_f} = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \eta_{j_w} \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta_w \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (25)$$

where

$$\eta_{j_w} = \frac{\langle \eta_j \delta_w \rangle_f}{\langle \delta_w \rangle_f}, \quad \zeta_w = \frac{\langle \zeta \delta_w \rangle_f}{\langle \delta_w \rangle_f}. \quad (26)$$

To close the wall temperature modeling, η_{j_w} et ζ_w are needed. Given the form of the closure problem, η_{j_w} et ζ_w are only known up to a constant (see [6]). This difficulty can be avoided using the idempotence property of the spatial filter [15, 16] in eq. (20):

$$\langle \delta \bar{T}_f \rangle_f = \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f} = 0. \quad (27)$$

A general formulation for the wall temperature is then obtained by subtracting eq. (27) to eq. (25)

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta \eta_j \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (28)$$

where $\Delta \eta_j = \eta_{j_w} - \langle \eta_j \rangle_f$ and $\Delta \zeta = \zeta_w - \langle \zeta \rangle_f$.

3.1. Determination of the model parameters for parallel flows in channels

For parallel flows in channels, eq. (28) simplifies to

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta \eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f}. \quad (29)$$

3.1.1. Laminar flows

For laminar flows in plane channels or circular pipes, the closure problem (eqs. (21) to (24)) can be analytically solved. The values found for $\Delta \eta_z$ and $\Delta \zeta$ are summarized in table 1.

	Plane channel	Circular pipe
$\Delta \eta_z / D_h$	$Pe/240$	$Pe/96$
$\alpha_f / D_h^2 \Delta \zeta$	$1/48$	$1/32$

Table 1: Values of the model coefficients $\Delta \eta_z$ and $\Delta \zeta$ for laminar flows in ducts.

Note that the closure relationship (29) used with the coefficients given in table 1 is strictly consistent with the analytical solution of eq. (6) for established laminar flows with constant wall heat flux.

3.1.2. Turbulent flows

For turbulent flows, analytical expressions cannot be found for $\Delta \eta_z$ and $\Delta \zeta$ and they have to be modeled. To this aim, simulations were carried out for a large range of Reynolds numbers and several Prandtl numbers. Velocity profiles result from RANS calculations for turbulent regime. To perform the latter RANS simulations, the low-Reynolds number $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ Chien model [3] is used. Since we consider parallel flows, velocity and thermal diffusivity profiles are calculated in 1D. The closure problem (eqs. (21) to (24)) is discretized and numerically solved in the section of the unit cell.

The model coefficient $\Delta \eta_z$ is found to be equal to the active dispersion coefficient introduced in [6]. The model given by Drouin *et al.* [6] for \mathcal{D}_z^A is thus used here to model $\Delta \eta_z$:

$$\Delta \eta_z^* \equiv \frac{\Delta \eta_z}{D_h} = C_t^A + \frac{a_0 + a_1 Pr + a_2 Pr^2}{6 \sqrt{f_w} Pe}. \quad (30)$$

The constants C_f^A , a_0 , a_1 and a_2 are recalled in table 2.

	C_f^A	a_0	a_1	a_2
Plane channel	1.63	-288	2900	1080
Circular pipe	2.1	-203	1940	886

Table 2: Values of the constants in eq. (30), from Drouin *et al.* [6].

Comparison between results obtained with equation (30) and reference numerical results is shown on figure 2.

The model coefficient $\Delta\zeta$ is modeled considering that eq. (29) must be consistent with classical models for established flows with uniform wall heat flux. In this restricted framework, we have

$$T_w = T_{BULK} + \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \times \frac{D_h^2}{4\alpha_f Nu}, \quad (31)$$

and for such flows, mean temperature equation simplifies to

$$\frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial z} = \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{\langle \overline{u_z} \rangle_f (\rho C_p)_f}. \quad (32)$$

Combining (29), (31) and (32)

$$T_{BULK} + \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \times \frac{D_h^2}{4\alpha_f Nu} = \langle \overline{T_f} \rangle_f + \left(\frac{\Delta\eta_z}{\langle \overline{u_z} \rangle_f} + \Delta\zeta \right) \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (33)$$

and consequently

$$\frac{\Delta\eta_z}{\langle \overline{u_z} \rangle_f} + \Delta\zeta = \frac{(\rho C_p)_f}{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f} \times \left(T_{BULK} - \langle \overline{T_f} \rangle_f + \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{(\rho C_p)_f} \times \frac{D_h^2}{4\alpha_f Nu} \right), \quad (34)$$

Using the thermal dispersion model of Drouin *et al.* [6], equation (16) gives

$$T_{BULK} - \langle \overline{T_f} \rangle_f = -\langle \overline{u_z} \rangle_f^{-1} \mathcal{D}_{zz}^P \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial z} - \langle \overline{u_z} \rangle_f^{-1} \mathcal{D}_z^A \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (35)$$

Equation (35) is then injected in eq. (34) and the following relationship can be written

$$\Delta\zeta^* = \frac{\Delta\zeta \alpha_f}{D_h^2} = \frac{1}{4Nu} - \frac{\mathcal{D}_{zz}^P}{\alpha_f Pe^2} - 2 \times \frac{\mathcal{D}_z^A}{D_h Pe}. \quad (36)$$

A detailed description of the dispersion coefficients may be found in [6]. Results obtained with eq. (36) are compared with reference results on figure 3.

The following algebraic model is finally proposed for T_w :

$$T_w = \langle \overline{T_f} \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial z} + \Delta\zeta \frac{\langle \overline{\Phi\delta_w} \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (37)$$

$$\Delta\eta_z = \mathcal{D}_z^A, \quad (38)$$

$$\Delta\zeta = \frac{D_h^2}{\alpha_f} \left(\frac{1}{4Nu} - \frac{\mathcal{D}_{zz}^P}{\alpha_f Pe^2} - 2 \times \frac{\mathcal{D}_z^A}{D_h Pe} \right). \quad (39)$$

4. Extension for highly unbalanced or fast transients flows: wall to mean gap temperature transport equation model

When mean temperature gradients are very sharp or in the presence of highly heterogeneous wall heat fluxes, algebraic model is less valid and accurate. Under those conditions, the separation of scales hypothesis is not verified. Furthermore, wall temperature is mainly controlled by boundary conditions and immediately reacts to variations of the heat flux. Consequently, time and length scales involved in mean temperature and wall temperature might be very different if large temperature variation or stiff heat flux gradients are met. For such flows, a more complex model is needed.

4.1. General formulation

To overcome the limitations of the algebraic model, a transport equation is derived for $\Delta T = T_w - \langle \bar{T}_f \rangle_f$ using a two-layers model. Let us consider a parallel flow in a duct of constant section (see Fig. 4). Two distinct regions are defined: a near wall region, denoted Ω_2 and a central region Ω_1 . Σ is the frontier of the elementary volume Ω and $\Sigma_{2,1}$ is the frontier between Ω_1 and Ω_2 . In each region i , a temperature T_i and a velocity u_i represent the mean flow variables. The wall heat flux is assumed constant over a section and we can write

$$\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f = \frac{\Sigma \bar{\Phi}}{\Omega}. \quad (40)$$

Transport equations for T_1 and T_2 are established using energy balance in each region

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\Sigma_{2,1} \Phi_{2,1}}{\Omega_1 (\rho C_p)_f}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{\Omega \langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} - \frac{\Sigma_{2,1} \Phi_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f}, \quad (42)$$

with:

- for plane channel flows

$$\frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_1} = \frac{1}{e_1}, \quad \frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_2} = \frac{1}{e_2}, \quad \frac{\Sigma}{\Omega_2} = \frac{1}{e_2}. \quad (43)$$

- for flows in circular pipes

$$\frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_1} = \frac{1}{e_1}, \quad \frac{\Sigma_{2,1}}{\Omega_2} = \frac{2e_1}{R^2 - e_1^2}, \quad \frac{\Sigma}{\Omega_2} = \frac{2R}{R^2 - e_1^2}, \quad (44)$$

where R is the radius of the tube.

An equation can thus be written for $T_2 - T_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2 - T_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial T_2 - T_1}{\partial z} &= (u_1 - u_2) \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\Omega \langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \\ &\quad - \frac{\Sigma_{2,1} \Phi_{2,1}}{(\rho C_p)_f} \times \frac{\Omega}{\Omega_1 \Omega_2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Moreover, the following relationships must be verified

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2, \quad (46)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f = \frac{u_1 \Omega_1 + u_2 \Omega_2}{\Omega}, \quad (47)$$

$$\langle \bar{T}_f \rangle_f = \frac{T_1 \Omega_1 + T_2 \Omega_2}{\Omega}. \quad (48)$$

An intern heat transfer coefficient $h_{2,1}$ is introduced

$$\Phi_{2,1} = h_{2,1} (T_2 - T_1). \quad (49)$$

Let us defined

$$\Delta T' = T_2 - \langle \bar{T}_f \rangle_f. \quad (50)$$

Equation (48) leads to

$$T_2 - T_1 = \frac{\Omega}{\Omega_1} \Delta T', \quad (51)$$

and to

$$T_1 = \langle \bar{T}_f \rangle_f - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \Delta T'. \quad (52)$$

Using eqs. (45) to (49) and (51) one can write

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial \Delta T'}{\partial t} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial \Delta T'}{\partial z} = \\ \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Omega \langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \\ - \frac{\Sigma_{2,1} h_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \times \Delta T', \end{aligned} \quad (53)$$

$\Delta T'$ can be written as a function of ΔT :

$$\Delta T' = \Delta T - (T_w - T_2). \quad (54)$$

Then, with eq. (53), transport equation for ΔT reads

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = \frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial (T_w - T_2)}{\partial t} \\ + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial (T_w - T_2)}{\partial z} \\ + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Omega \langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \\ - \frac{\Sigma_{2,1} h_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \times \Delta T - \frac{\Sigma_{2,1} h_{2,1}}{\Omega_2 (\rho C_p)_f} \times (T_w - T_2). \end{aligned} \quad (55)$$

We assume that T_w and T_2 evolve simultaneously. In other word, the time necessary to achieve a T_2 temperature in equilibrium with wall boundary condition is much smaller than that necessary to achieve equilibrium between inner and outer region of the flow. Under this assumption, $(T_w - T_2)$ can be assumed constant in eq. (55) and classical heat transfer models apply between T_w and T_2

$$T_w - T_2 = \frac{\bar{\Phi}}{h_w}, \quad (56)$$

wher h_w is a constant heat transfer coefficient. Equation (55) then reads

$$\begin{aligned} \Delta T = - \frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \left[\frac{\Omega_1}{\Omega} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1} \right) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right] \\ + \frac{\Omega_2 (\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 (u_1 - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} \\ + \left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{2,1} h_{2,1}} - \frac{1}{h_w} \right] \frac{\Omega \langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{\Sigma}. \end{aligned} \quad (57)$$

For flows with smooth mean temperature gradient and uniform wall heat fluxes, the separation of scales assumption is valid. Algebraic model (37) can thus be used:

$$\Delta T = \Delta \eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \Delta \zeta \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f}, \quad (58)$$

and the transport terms in eq. (57) can be neglected. Moreover, eq. (57) should be consistent with algebraic model (58). By identification, comparison between eqs. (57) and (58) leads to

$$\Delta\eta_z = \frac{\Omega_2(\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1}h_{2,1}} \times \left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2 \times (u_1 - u_2), \quad (59)$$

$$\Delta\zeta = \frac{\Omega(\rho C_p)_f}{\Sigma} \left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2 \frac{\Sigma}{\Sigma_{2,1}h_{2,1}} - \frac{1}{h_w} \right]. \quad (60)$$

Coefficients of the first and second terms of the right hand side of eq. (57) still need to be determined. Using eqs. (59) and (60), they can be written as

$$\frac{\Omega_2(\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1}h_{2,1}} \frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{\Delta\eta_z}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2}, \quad (61)$$

$$\frac{\Omega_2(\rho C_p)_f}{\Sigma_{2,1}h_{2,1}} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega_2 u_1 + \Omega_1 u_2}{\Omega_1}\right) = \Delta\eta_z \left(\frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} \right). \quad (62)$$

Using eqs. (59) to (62), equation (57) finally reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \mathbb{U} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} &= (\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2) \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \\ & \langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2 \frac{\Delta\zeta}{\Delta\eta_z} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f} - \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2}{\Delta\eta_z} \Delta T, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\mathbb{U} = (\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} \right), \quad (64)$$

where Ω_2 and u_2 have to be evaluated.

4.2. Determination of the model parameters

The thickness of the near-wall layer can be seen as a characteristic length associated with heat exchange. We propose

$$e_2 \propto \frac{D_h}{Nu}. \quad (65)$$

4.2.1. Laminar flows

The thickness of the near-wall layer reads

$$e_2 = \beta \frac{D_h}{Nu}. \quad (66)$$

For laminar flows in ducts, velocity profiles can be determined analytically and one can write

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_2}{\Omega} &= 4X; \quad \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} = 2X(3 - 4X) && \text{in plane channels} \\ \frac{\Omega_2}{\Omega} &= \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} = 4X(1 - X) && \text{in circular pipes,} \end{aligned} \quad (67)$$

where

$$X = \frac{e_2}{D_h} = \frac{\beta}{Nu}. \quad (68)$$

Numerical optimization for β gives $\beta = 1/2$.

4.2.2. Turbulent flows

For established turbulent flows in pipes, Nusselt number can be approached by a classical model

$$Nu = ARe^m Pr^n, \quad (69)$$

and the friction factor reads

$$f_w = aRe^{-b}. \quad (70)$$

A near wall unit $u^* = \nu_f/u_\tau$ is introduced. Characteristic length scale e_2 is defined by

$$e_2^+ = \frac{e_2}{y^*}. \quad (71)$$

Expressions (69) and (70) are injected in (65) to obtained

$$e_2^+ = \frac{u_\tau}{\nu_f} \times \frac{D_h}{ARe^m Pr^n} \quad (72)$$

$$= \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f \sqrt{f_w} D_h}{\nu_f \sqrt{8} ARe^m Pr^n} \quad (73)$$

$$e_2^+ = \frac{\sqrt{a}}{A \sqrt{8}} \frac{Re^{1-b/2-m}}{Pr^n}. \quad (74)$$

For flows in ducts, $1 - b/2 - m \simeq 0$, and one can write

$$e_2^+ = \frac{C_\beta}{Pr^n}, \quad (75)$$

where $C_\beta \in [15; 18]$ and $n \in [1/3; 1/2]$.

For parallel turbulent flows, velocity profile is linear in the viscous sublayer and logarithmic for $y^+ > 30$. We use the following simplified profile

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \begin{cases} y^+ & \text{if } y^+ \leq y_i^+, \\ \frac{1}{\kappa} \ln[1 + \kappa(y^+ - y_i^+)] + y_i^+ & \text{if } y^+ > y_i^+, \end{cases} \quad (76)$$

where $\kappa = 0.41$ and $y_i^+ = 5$. The averaged velocity in the near-wall layer u_2 is then given by:

$$u_2 = \frac{u_\tau}{e_2} \int_0^{e_2} u^+(y^+) dy^+. \quad (77)$$

With (76), this leads to

$$\frac{u_2}{u_\tau} = \frac{y_i^{+2}}{2e_2^+} + \mathcal{F}, \quad (78)$$

with

$$\mathcal{F} = \begin{cases} 0 & \text{if } e_2^+ \leq y_i^+, \\ \frac{1}{e_2^+} \left[\left(\frac{1}{\kappa} + e_2^+ - y_i^+ \right) \ln(1 + \kappa(e_2^+ - y_i^+)) + (y_i^+ - 1)(e_2^+ - y_i^+) \right] & \text{if } e_2^+ > y_i^+, \end{cases} \quad (79)$$

For such flows, the following assumptions are valid

$$e_2 \ll D_h ; \Omega_2 \ll \Omega ; u_2 \ll \langle \bar{u}_z \rangle_f. \quad (80)$$

Consequently, one can write

$$\frac{\mathbf{U}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \simeq \frac{\Omega_2}{\Omega} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f}, \quad (81)$$

where Ω_2 and u_2 are calculated using eqs. (75) and (78). Numerical optimization leads to $C_\beta = 15.5$, $n = 1/3$.

Finally the wall to mean gap temperature model reads

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \mathbb{U} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = \langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2 \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z} + \langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2 \frac{\Delta \zeta}{\Delta \eta_z} \frac{\langle \bar{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho C_p)_f} - \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2}{\Delta \eta_z} \Delta T, \quad (82)$$

$$\mathbb{U} = \langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2 \left(\frac{\Omega_2}{\Omega - \Omega_2} + \frac{u_2}{\langle \bar{u}_z \rangle_f - u_2} \right), \quad (83)$$

where the thickness of the near-wall layer is

$$e_2 = \begin{cases} \frac{D_h}{2} & \text{for laminar flows,} \\ \frac{2Nu}{y_w^* C_\beta} & \text{for turbulent flows,} \\ \frac{Pr^{1/3}}{Pr^{1/3}} & \end{cases} \quad (84)$$

which lead to the values of Ω_2/Ω and $u_2/\langle \bar{u}_z \rangle_f$ summarized in table 3.

	Ω_2/Ω	u_2 : laminar flows	u_2 : turbulent flows
plane channel	$4 \frac{e_2}{D_h}$	$2 \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{e_2}{D_h} (3 - 4 \frac{e_2}{D_h})$	$u_\tau \left(\frac{y_i^{+2}}{2e_2^+} + \mathcal{F} \right)$
circular pipe	$4 \frac{e_2}{D_h} (1 - \frac{e_2}{D_h})$	$4 \langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{e_2}{D_h} (1 - \frac{e_2}{D_h})$	$u_\tau \left(\frac{y_i^{+2}}{2e_2^+} + \mathcal{F} \right)$

Table 3: Values of the model coefficients Ω_2/Ω and u_2 for laminar and turbulent flows in ducts. \mathcal{F} is given by eq. (79).

5. Results and discussion

In order to illustrate the macroscale temperature models presented in this paper, solutions of eqs. (37) and (63) are compared with reference results coming from fine-scale simulations and results of a classical model that recovers the heat transfer coefficient of the low-Reynolds $k-\bar{\epsilon}$ model of Chien [3] for uniformly heated, established flows. Two types of cases are considered: the spreading of temperature jump that allows to study the effects of the mean temperature gradient on wall temperature, and non-uniformly heated steady flows in which the effects of wall heat fluxes can be observed.

5.1. Adiabatic flows - Taylor dispersion

We analyze the spreading of a temperature jump induced by Taylor dispersion in an adiabatic channel. This case is analogous to the case presented by Taylor [17, 18] except that we focus on the wall temperature. The fluid flows are at constant mass flow rate along the axis of the pipe, denoted z . The pipe is $L = 60D_h$ long. Initially, the fluid temperature is uniform over the pipe $T(z, t = 0) = T_s$. The fluid temperature at the inlet, *i.e.* at $z = 0$, is uniform across the section. At $t = t_0$, we increase the inlet temperature, so that $T(z = 0, t > t_0) = T_e > T_s$. A description of the flows is shown on figure 5. Reynolds and Prandtl numbers hereafter considered are given in table 4. This type of flows is representative of fast transient configurations with stiff mean temperature gradients.

	Re	Pr
CP_1	175	1.48
CP_2	1.5×10^4	0.74
Tu_1	175	1.48
Tu_2	1.5×10^4	0.74

Table 4: Validation test-cases: adiabatic flows.

For adiabatic flows, algebraic model (29) simplifies

$$T_w = \langle \bar{T}_f \rangle_f + \Delta\eta_z \frac{\partial \langle \bar{T}_f \rangle_f}{\partial z}, \quad (85)$$

where $\Delta\eta_z$ is given in table 1 for laminar flows and by eq. (38) for turbulent flows. Classical models predict

$$T_w = T_{BULK} = \frac{\langle \bar{u}_z \bar{T}_f \rangle_f}{\langle \bar{u}_z \rangle_f}. \quad (86)$$

Figures 6 and 7 present a comparison between classical (eqs. (15),(16),(33)), algebraic (eqs. (37) to (39)) and one-equation models (eqs. (82) to (84), table 3) and reference results. For classical heat exchange models, there is no time lag between bulk and wall temperature evolutions. Consequently, the thermal front is seen too soon at walls. On the contrary, both models proposed in this paper take into account dispersive flux. The thermal front progresses more slowly in wall regions. This test case clearly shows that dispersive models are very efficient for passive dispersion modeling. However, nearby the inlet, one can notice an undershoot for the algebraic wall temperature model. Since in this region, variation length and time scales are of the same order of magnitude than homogenization filter and the advection time scale, the so-called separation of scales assumption does strictly not apply. Consequently, the algebraic model overestimates the effects of dispersive flux on wall temperature and induces a wall temperature undershoot. On the contrary, one equation model is able to capture fast transients since time variations are solved. Using this model allows us to predict the proper wall temperature time evolution and to reduce drastically the undershoot. The slight remaining undershoot may be completely suppressed by taking diffusive fluxes into account in eqs. (41) and (42). Far downstream, typically for $z/D_h > 20$, separation of scales applies and both algebraic and one equation models predict the proper evolution for wall temperature.

5.2. Non-uniform wall heat flux

In this section, we study the case of a steady flow with piecewise linear wall heat flux in a channel (see figure 8). The fluid flows along the axis of the pipe, denoted z . The pipe is $L = 60D_h$ long. The fluid temperature at $z = 0$ is uniform over the section $T(z = 0, t) = T_0$. We impose a hat type thermal flux profile given by

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 10D_h \text{ ou } z > 50D_h, \\ \Phi_{max} \frac{z - 10D_h}{20D_h} & \text{si } 10D_h < z < 30D_h, \\ \Phi_{max} \frac{50D_h - z}{20D_h} & \text{si } 30D_h < z < 50D_h. \end{cases} \quad (87)$$

Thermal flux in various test cases is calibrated to induce the same temperature increase whatever the mass flux. This configuration highlights non uniform flux effects. The cases studied below are summarized in table 5.

	Re	Pr
CP_3	175	2.96
CP_4	1.5×10^4	0.74
Tu_3	175	1.48
Tu_4	1.5×10^4	0.74

Table 5: Validation test-cases: steady flows with non-uniform wall heat flux.

A comparison between results obtained with classical, algebraic and one-equation models and reference results is shown on figure 9. The present algebraic model gives better results than the classical heat transfer coefficient models. Nevertheless, agreement between algebraic model and reference is not very good. On the other hand, agreement between one-equation model and reference result is excellent for both laminar and turbulent regimes. Since one equation model accounts for the advection of ΔT , it is able to predict the heating of walls by the fluid downstream the imposed thermal heat flux region. This results in an important feature of our model. If one considers a very heterogeneous heating, say a ponctual heating device, our model shall be able to predict not only the average temperature, but also wall temperature downstream. Hence, it could be used, for instance, to define the proper thermocouple locations for experimental devices design without performing expensive fine scale simulations.

6. Conclusion

In this paper, we have attempted to connect dispersion modeling and heat transfer prediction for both laminar and turbulent regimes in stratified porous media. To this aim, we have extended the closure problem, exposed in Drouin *et al.* [6], to wall temperature prediction. However, since temperature gradients at walls are stiff (especially within turbulent regime) and mainly controlled by boundary conditions, it appeared that the transposition of our previous approach was not sufficient to accurately predict wall temperature profiles during fast transients and for huge heat flux gradients. Our diagnostic is that separation of scales assumption poorly applies on wall temperature under those flow conditions.

In order to increase the application domain of our model, we avoid this limitation by deriving a transport equation for wall temperature. We introduce a two layer approximation that allows us to distinguish bulk and boundary layer length and time scales. This transport equation is easily closed using the previous algebraic model as the limit of the transport equation for smooth flows (slow transients and regular gradients flow conditions). In a sense, the algebraic model might be seen as a step towards the transport equation model for wall temperature.

Implemented in a hydro code, both models (algebraic and transport equation) have been successfully compared with fine scale CFD simulations. Improvement in wall temperature prediction is striking for the transport equation model. The delay between wall and bulk flow conditions is well recovered. For instance, downstream (in the adiabatic region of the flow) a very stiff heat flux gradient, we show that it is possible to predict the heating of walls by boundary layers. Models derived in this paper might be used for design purposes of heat exchangers with accuracy similar to CFD calculations and for a much lower computational cost.

References

- [1] Y. Benarafa, Application du couplage RANS/LES aux écoulements à haut nombre de Reynolds de l'industrie nucléaire, *PhD thesis, Université Paris VI, Paris, France, 2005.*
- [2] R.G. Carbonell and S. Whitaker, Dispersion in pulsed systems - II: Theoretical developments for passive dispersion in porous media, *Chemical Engineering Science* 38 (11) (1983) 1795-1802.
- [3] K.Y. Chien, Prediction of channel and boundary layer flows with a low-Reynolds number turbulence model, *AIAA J.* 20(1) (1982) 33-38.
- [4] A.P. Colburn, A method of correlating forced convection heat transfer data and a comparison with fluid friction, *Trans. AIChE* 19 (1933) 174-210.
- [5] F. W. Dittus and L. M. K. Boelter, Heat transfer in automobile radiators of the tabular type, *University of California Publications in Engineering* 2 (1930) 443-461.
- [6] M. Drouin, O. Grégoire, O. Simonin and A. Chanoine, "Macroscopic modeling of thermal dispersion for turbulent flows in channels", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53, 2206-2217 (2010).
- [7] O. Grégoire, Remarques sur la turbulence permettant de retrouver quantitativement ou qualitativement un certain nombre de résultats expérimentaux: le point de vue en 2003, *Technical Report, SFME/LETR/RT/03-013/A, CEA, 2003*
- [8] O. Grégoire, Établissement formel d'un modèle diphasique macroscopique à 6 équations, lien avec le modèle macroscopique à 4 équations, *Technical Report, CEA-R-6185, CEA, 2008*
- [9] S.Kakac, R. K. Shah and W. Aung Handbook of single-phase convective heat transfer, *John Wiley and Sons, (1987)*
- [10] H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe and K. Yamamoto, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 19 (1998) 482-491.
- [11] S. Lyons, T. Hanratty and J. Mc Laughlin, DNS of passive heat transfer in a turbulent flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34(4/5) (1991) 1149-1161.
- [12] A. Nakayama and F. Kuwahara, A macroscale turbulence model for flows in a porous medium, *J. Fluids Engineering* 121 (1999) 427-433.
- [13] M.H.J. Pedras and M.J.S. De Lemos, Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44 (2001) 1081-1093.
- [14] F. Pinson, O. Grégoire, M. Quintard, M. Prat and O. Simonin, Modeling of turbulent heat transfer and thermal dispersion for flows in flat plate heat exchangers, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 1500-1515.
- [15] M. Quintard and S. Whitaker, Transport in ordered and disordered porous media I: the cellular average and the use of weighting functions, *Transport Porous Med* 14 (1994) 163-177.
- [16] M. Quintard and S. Whitaker, Transport in ordered and disordered porous media II: generalized volume averaging, *Transport Porous Med* 14 (1994) 179-206.
- [17] G. Taylor, Dispersion of solute matter in solvent flowing slowly through a tube, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 219 (1953) 183-203.
- [18] G. Taylor, The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 223 (1954) 446-468.
- [19] S. Whitaker, Diffusion and dispersion in porous media, *AIChE* 13(3) (1967) 420-427.
- [20] S. Whitaker, Theory and applications of transport in porous media: the method of volume averaging, *Kluwer Academic Publishers, 1999.*

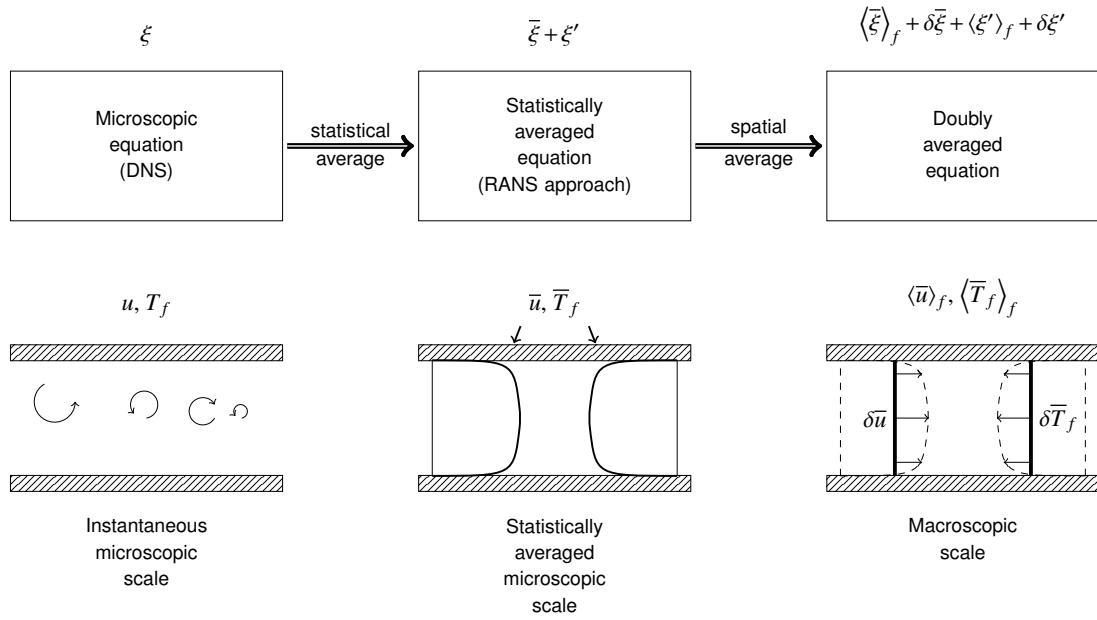


Figure 1: Description of the averaging procedure in the single channel case.

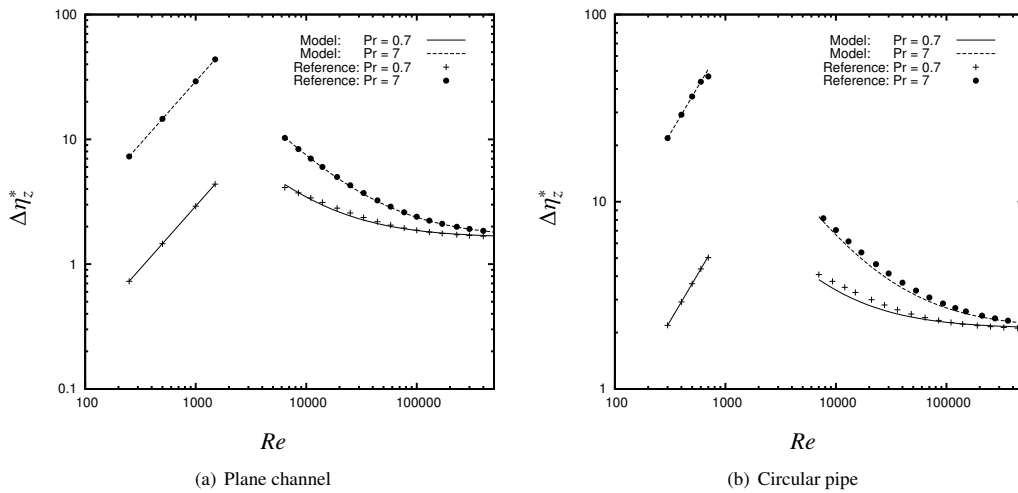


Figure 2: Parallel flows in ducts: evolution of $\Delta\eta_z^*$ as a function of the Reynolds number for several Prandtl numbers. Comparison with numerical reference results.

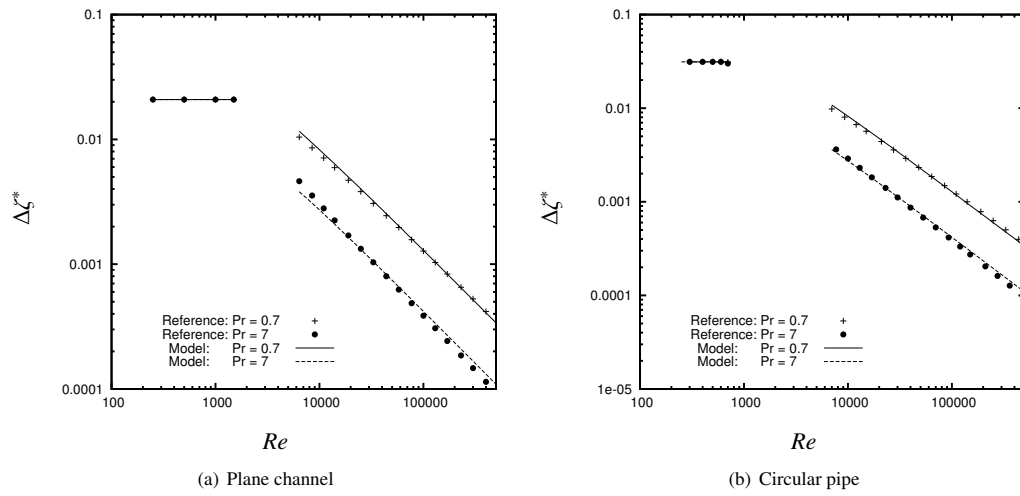


Figure 3: Parallel flows in ducts: evolution of $\Delta\zeta^*$ as a function of the Reynolds number for several Prandtl numbers. Comparison with numerical reference results.

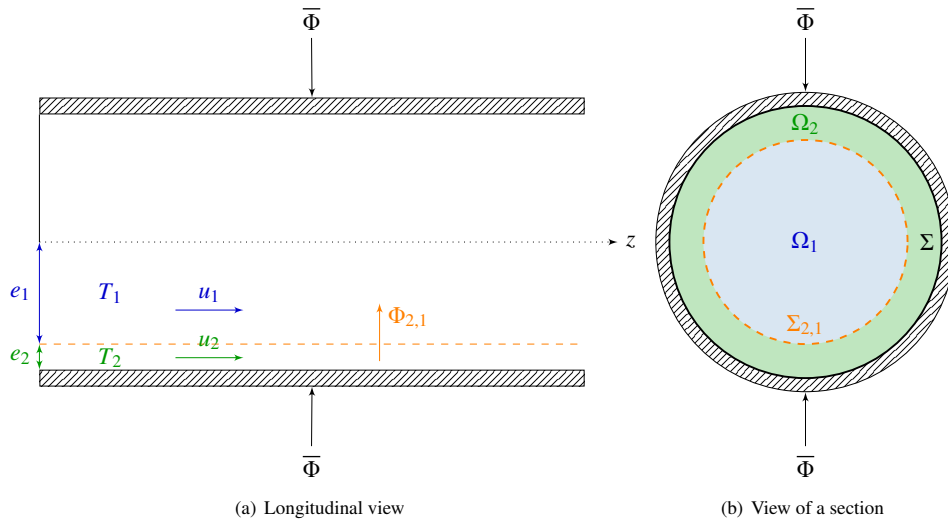


Figure 4: Schematic description of the two-layers decomposition: case of a circular pipe. Solid surface is denoted Σ while the surface delimiting both regions is denoted $\Sigma_{2,1}$.

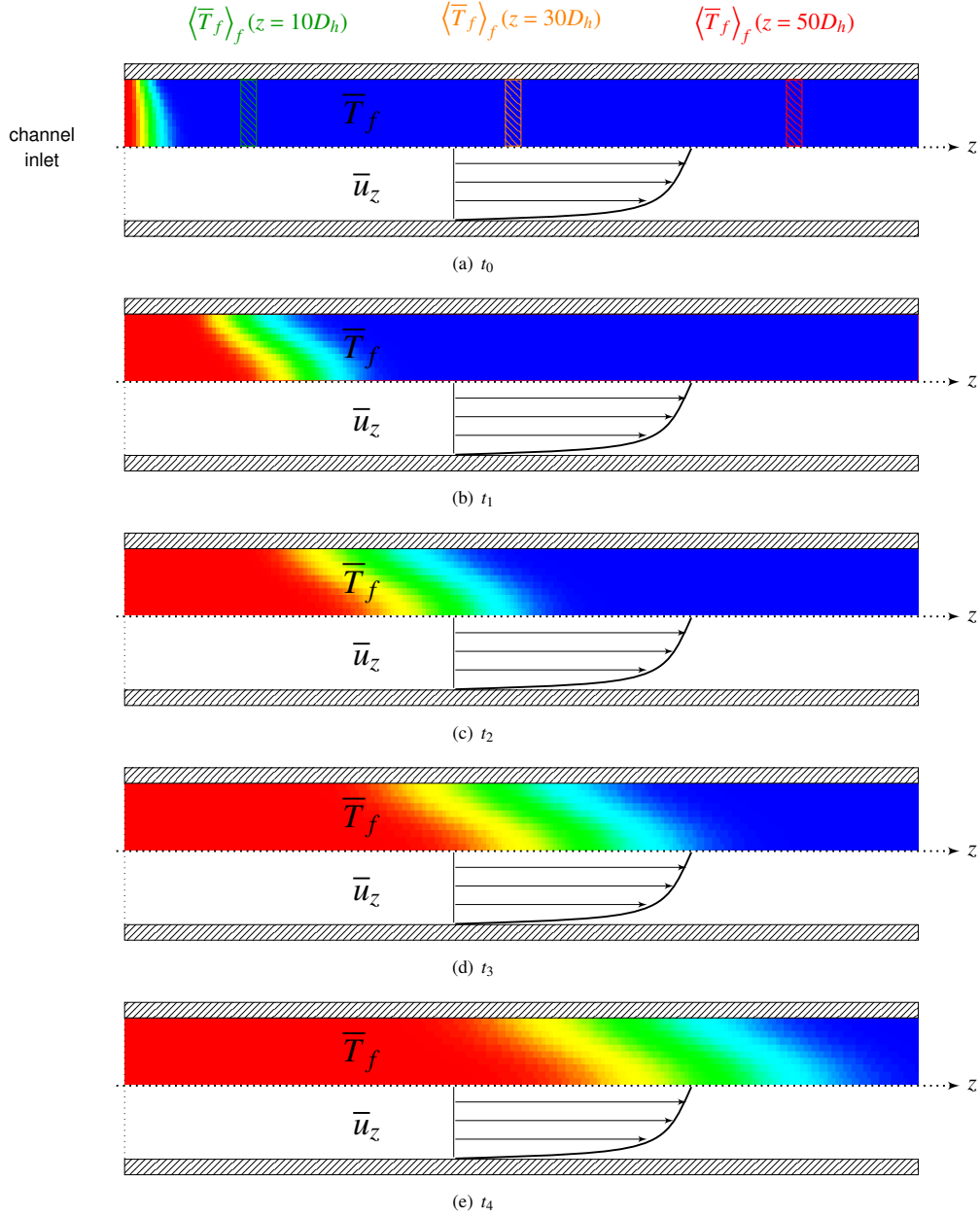


Figure 5: Adiabatic test case: spreading of a temperature jump along the time under the effect of Taylor dispersion.

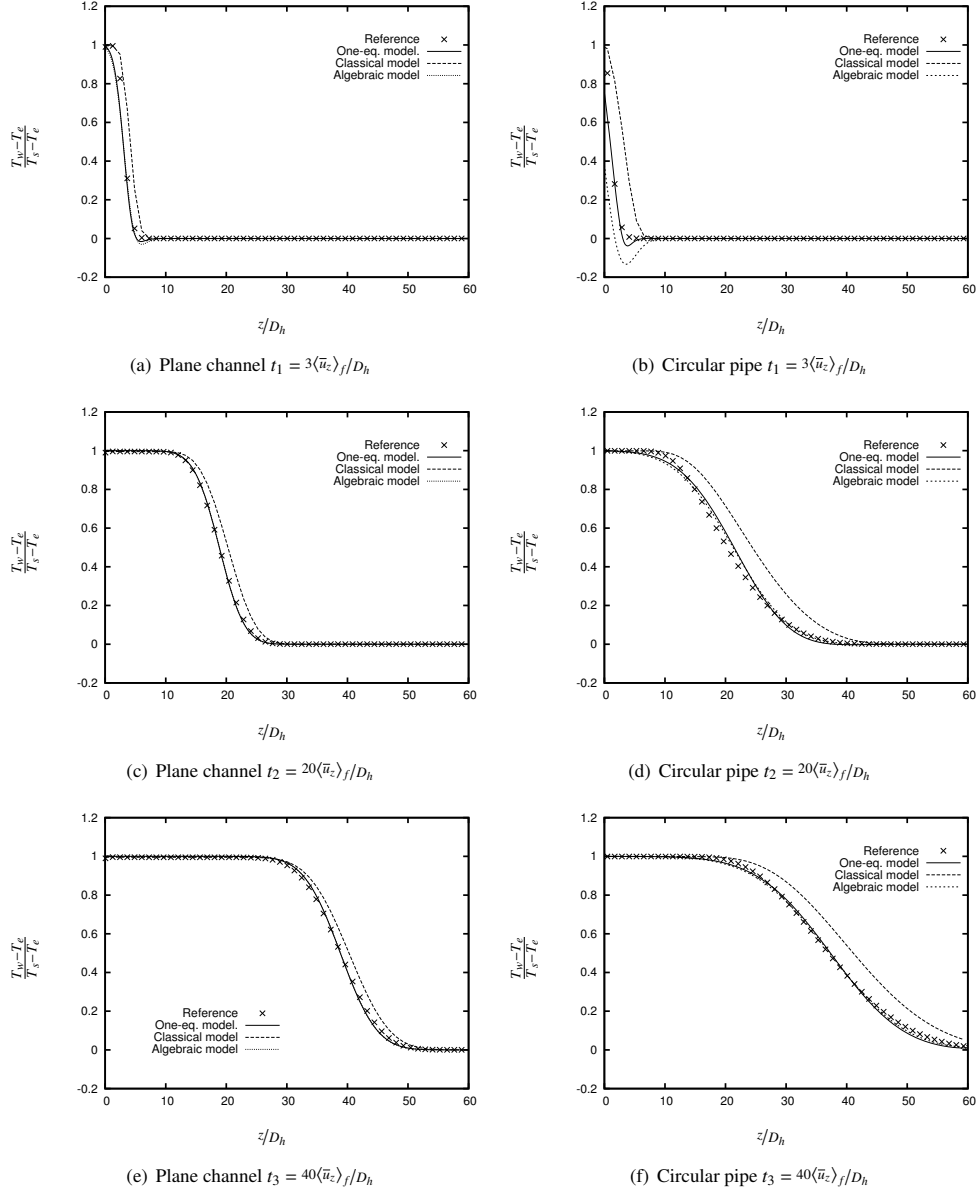


Figure 6: Non-dimensional wall temperature profiles. Turbulent adiabatic flows in plane channels and circular pipes (see table 4). $Re = 175$, $Pr = 1.48$. Comparison between classical (eqs. (15),(16),(33)), algebraic (eqs. (37) to (39)) and one-equation (eqs. (82) to (84), table 3) models and reference results coming from RANS simulations.

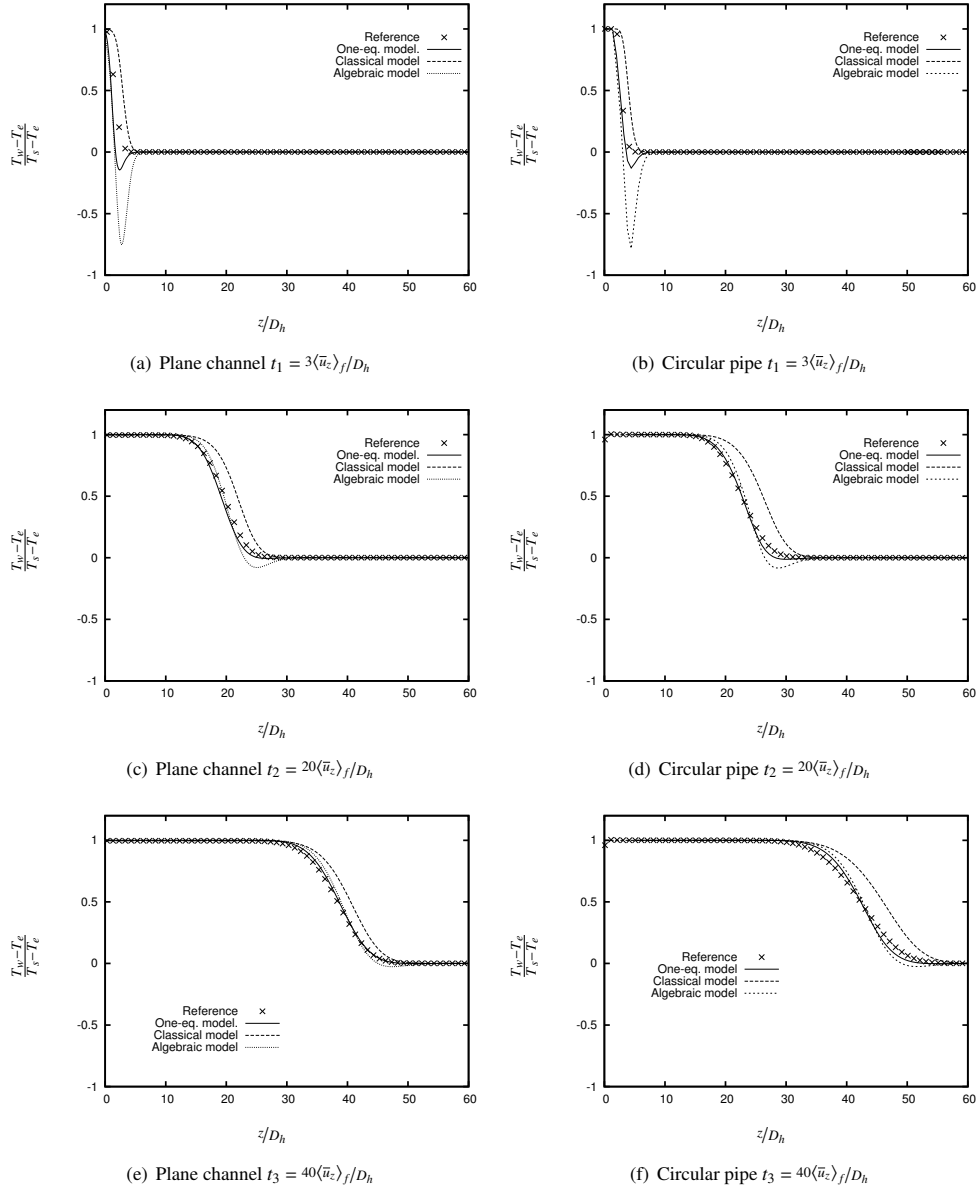


Figure 7: Non-dimensional wall temperature profiles. Turbulent adiabatic flows inplane channel and circular pipe (see table 4). $Re = 15000$, $Pr = 0.74$. Comparison between classical (eqs. (15),(16),(33)), algebraic (eqs. (37) to (39)) and one-equation (eqs. (82) to (84), table 3) models and reference results coming from RANS simulations.

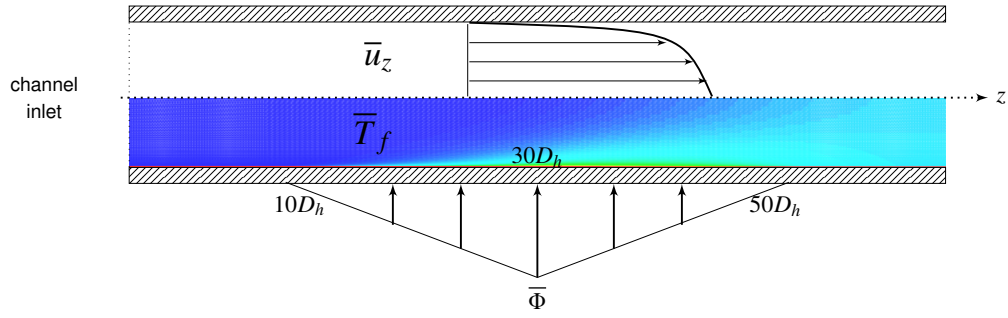


Figure 8: Description of the wall temperature model test-cases: steady flows with piecewise linear wall heat flux.

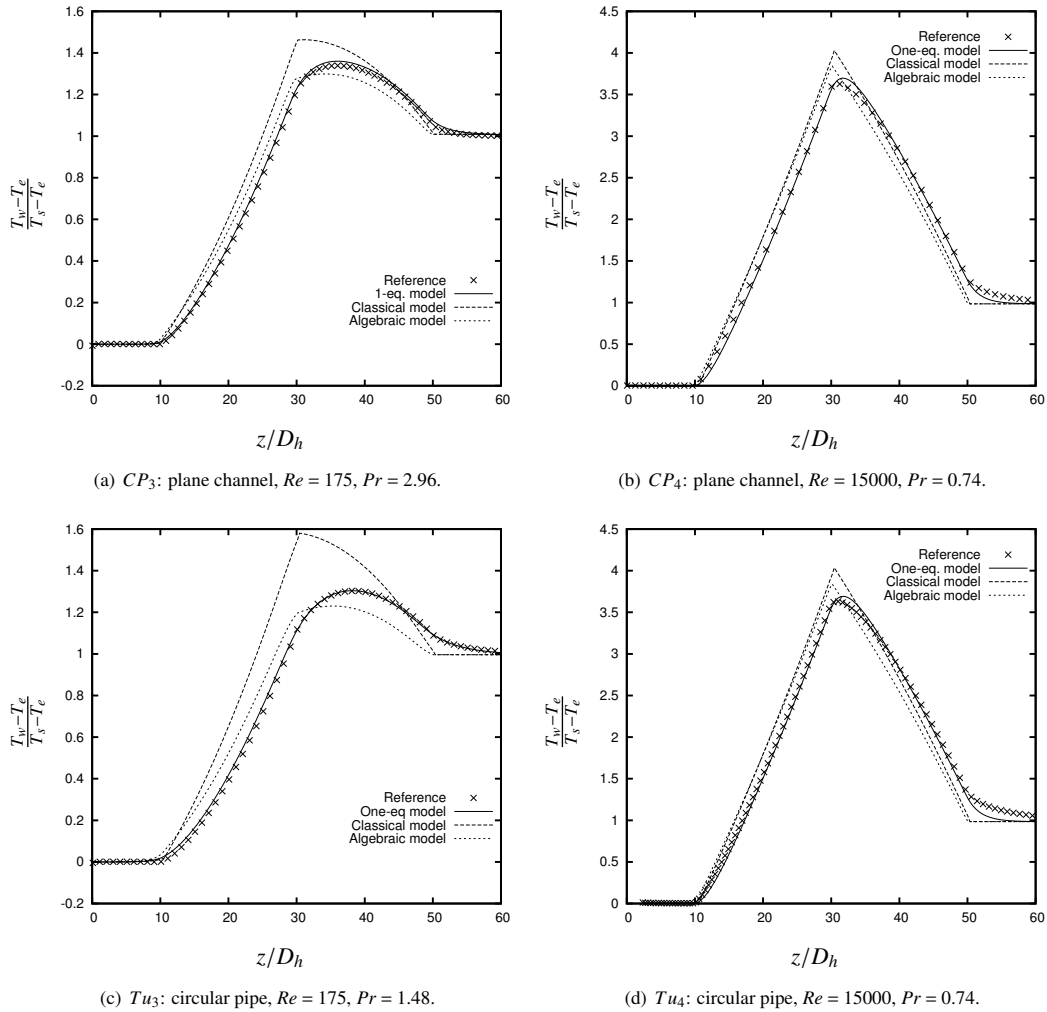


Figure 9: Non-dimensional wall temperature profiles. non-uniformly heated flows in pipes. Comparison between classical, algebraic and one-equation models and reference results.

Modélisation des écoulements turbulents anisothermes en milieu macroporeux par une approche de double filtrage

Ce travail porte sur la modélisation d'écoulements turbulents anisothermes dans des milieux macroporeux. Ce problème intéresse de nombreux domaines : échangeurs de chaleur, réacteurs nucléaires, canopées... Notre objectif est de modéliser des écoulements traversant une structure solide selon un approche multi-échelle. L'utilisation d'un opérateur de moyenne spatiale permet ainsi d'obtenir une description homogénéisée des écoulements, tandis que l'aspect turbulent est traité grâce à un opérateur de moyenne statistique. Au cours du processus de moyenne, une partie des informations sur l'état microscopique est perdue. Cela se traduit, à l'échelle macroscopique, par l'apparition de termes inconnus liés à la turbulence (contraintes de Reynolds) et à la présence de la matrice solide (dispersion). C'est sur ces termes de dispersion présents dans les équations macroscopiques de quantité de mouvement et de la température que porte notre travail. Nous proposons un modèle de dispersion thermique qui permet de prédire de façon satisfaisante l'évolution de la température moyenne du fluide pour des écoulements à l'équilibre hydraulique présentant de forts gradients de température ou de flux thermique à la paroi. De plus, un modèle macroscopique de température de paroi basé sur le modèle de température moyenne est dérivé. Il permet de prédire avec précision l'évolution de la température de paroi pour des écoulements hors équilibre thermique. Afin de pouvoir traiter aussi des cas hors équilibre hydraulique, un modèle macroscopique de turbulence est proposé. Une analyse physique détaillée des transferts énergétiques a montré que c'est l'énergie dispersive qui permet de caractériser le déséquilibre hydraulique. Un modèle de turbulence prenant en compte les déséquilibres d'énergie dispersive a donc été dérivé. Il permet de prédire de façon satisfaisante la dynamique d'établissement d'écoulements entrant dans des canaux et de fournir des conditions aux limites précises à la sortie des canaux. Enfin, nous proposons un modèle dynamique pour le tenseur de dispersion basé sur l'énergie dispersive et la dissipation associée.

Mots-clés : Turbulence, dispersion, approche multi-échelle, énergie dispersive, température de paroi, modèle macroscopique, milieux poreux.

Modelling of anisothermal turbulent flows in macroporous media by means of a multi-scale approach

This work deals with the modelling of anisothermal turbulent flows in macroporous media. This topic concerns many practical applications such as heat exchangers, nuclear reactors, canopies... Our aim is to model flows through porous matrices by means of a multi-scale approach. A macroscopic description of the flows is obtained thanks to a spatial average operator, while a statistical average operator is used to handle turbulence. The successive application of both filters leads to a loss of information. Therefore, at macroscopic scale, unknown contributions linked to turbulence (Reynolds stresses) and the presence of the solid matrix (dispersion) appear. We focus on dispersion terms. We propose a thermal dispersion model for hydrodynamically established flows. Mean temperature predictions obtained with this model are very accurate for channel flows with strong temperature and wall heat flux gradients. We also derive a wall temperature model based on the mean temperature model. It gives good macroscopic results for thermally developing flows. In order to be able to simulate hydrodynamically developing flows, a turbulence model is needed. A two-scale analysis of energy transfers within the flow shows that the dynamic behaviour of unbalanced flows can be described using the dispersive kinetic energy. A turbulence model that accounts for dispersive energy is derived. It predicts very well the dynamics of a flow near a channel inlet and provides accurate boundary conditions for exit flows. Finally, a dynamic model based on the dispersive energy and its dissipation rate is proposed for the dispersion tensor.

Keywords : Turbulence, dispersion, multi-scale approach, dispersive energy, wall temperature, macroscopic model, porous media.