



HAL
open science

Semi-Groupes d'opérateurs de composition pondérés

Eddy Bernard

► **To cite this version:**

Eddy Bernard. Semi-Groupes d'opérateurs de composition pondérés. Théorie spectrale [math.SP]. Université Gustave Eiffel, 2022. Français. NNT : 2022UEFL2082 . tel-04276592

HAL Id: tel-04276592

<https://theses.hal.science/tel-04276592>

Submitted on 9 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Mathématiques et STIC

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de docteur
de l'Université Gustave Eiffel

Spécialité

Mathématiques Fondamentales

par

EDDY BERNARD

Semi-groupes d'opérateurs de composition pondérés

Soutenue le 12 décembre 2022 devant le jury composé de

ISABELLE CHALENDAR
JOHN MCCARTHY
WOLFGANG ARENDT
FRÉDÉRIC BAYART
PASCAL LEFÈVRE

UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL
WASHINGTON UNIVERSITY - ST. LOUIS
ULM UNIVERSITY
UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE
UNIVERSITÉ D'ARTOIS

DIRECTRICE
EXAMINATEUR
EXAMINATEUR
RAPPORTEUR
RAPPORTEUR

Table des matières

1	Introduction	5
2	Propriétés spectrales de l'opérateur de composition à poids sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ induit par des rotations	9
2.1	Introduction	9
2.2	Invariance rotationnelle du spectre	10
2.3	Spectre ponctuel des opérateurs de composition à poids induit par des rotations périodique et apériodique	12
2.3.1	Cas périodique	13
2.3.2	Cas apériodique	16
2.4	Spectre de l'opérateur de composition induit par une rotation apériodique sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$: Arguments diophantiens	17
2.5	Spectre des opérateurs de composition à poids induits par des rotations apériodiques dans un espace de Banach	20
2.6	Décomposition spectrale et spectre de Waelbroeck	25
2.7	Le spectre de Waelbroeck pour les opérateurs de composition induits par des rotations apériodique sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$	28
2.8	Opérateurs de composition à poids induits par des automorphismes elliptiques	34
3	Théorie de Denjoy-Wolff et propriétés spectrales des opérateurs de composition pondérés sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$	35
3.1	Introduction	35
3.2	Opérateurs de composition pondérés arbitraires	36
3.3	Opérateurs de composition elliptique pondérés : spectre ponctuel	37
3.4	Spectre et décomposition des opérateurs de composition elliptiques pondérés	41
3.5	Fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} sans point fixe	47
3.6	Opérateurs de composition hyperbolique pondérés	51
3.6.1	Opérateurs de composition hyperbolique	52
3.6.2	Opérateur de composition hyperbolique pondéré	52
3.7	Opérateurs de composition parabolique pondérés	54
3.7.1	Opérateurs de composition parabolique	54
3.7.2	Opérateurs de composition parabolique pondérés	55
3.8	Opérateurs de composition non elliptiques pondérés	55
4	Semi-groupes de composition à poids	57
4.1	Introduction	57
4.2	Semiflot	58

4.3	Cocycle	60
4.4	Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de composition à poids	63
4.5	Caractérisation des semi-groupes de composition à poids	71
4.6	Semi-groupes d'opérateurs de composition à poids bornés inférieurement	78
5	Semi-groupe d'opérateurs de composition à poids équicontinu sur un Fréchet	81
5.1	Semi-groupe d'opérateurs équicontinu sur un Fréchet	81
5.1.1	Généralités	81
5.1.2	Théorèmes spectraux	84
5.2	Semi-groupe d'opérateurs de composition à poids équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$	88
6	Conclusions et perspectives	101
	Annexes	105
	Annexe A Théorèmes de Valiron et Pommerenke	107
A.1	Généralités	107
A.2	Théorème de Valiron	111
A.3	Théorème de Pommerenke	114
	Annexe B Exemples d'espaces de fonctions holomorphes	121
B.1	Espaces de Dirichlet	121
B.2	Espaces de Bergman	122
B.3	Espaces de Hardy	123
	Bibliographie	127

Abstract

The objective of this thesis is to study weighted composition operators on spaces of holomorphic functions, as well as semi-groups of such operators. This work follows the study of composition operators. Let Ω be a simply connected nonempty open set of \mathbb{C} . Let $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ and $m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ two holomorphic functions. We define the weighted composition operator $W_{m,\varphi}$ on $\text{Hol}(\Omega)$ by

$$W_{m,\varphi}f := m \cdot f \circ \varphi.$$

First, we looked at the spectral properties of the weighted composition operator on $\text{Hol}(\mathbb{D})$ where φ is an elliptic automorphism with a fixed point inside the unit disk. Thanks to a similarity transformation, we could consider here that φ is a rotation. We found very different spectral results depending on whether the rotation is periodic or aperiodic.

In a second step, we are interested in all other cases, i.e. when φ is not an elliptic automorphism. We started by giving a description of the point spectrum of weighted elliptic composition operators. Then, we showed that the spectrum is equal to the point spectrum to which we add zero. Then we considered the hyperbolic and parabolic cases. We have shown that the point spectrum of the weighted hyperbolic or parabolic composition operators can be empty or equal to $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

In a third step, we considered families of weighted composition operators on Banach spaces of holomorphic functions and more particularly of strongly continuous semi-groups on these spaces. First, we showed that the infinitesimal generator $(\Gamma, D(\Gamma))$ of the semi-group has the following form :

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\} \end{cases} \quad (1)$$

where g and G are holomorphic applications. Then, we showed the reciprocal implication. That is, if the infinitesimal generator $(\Gamma, D(\Gamma))$ of a semigroup has the form (1), then the semigroup is a family of weighted composition operators.

Finally, we looked at weighted composition semigroups on the Fréchet space $\text{Hol}(\mathbb{D})$. First, we gave criteria for the family of weighted composition operators to form an equicontinuous semigroup or not. Conversely, we have seen that if the family of weighted composition operators forms an equicontinuous semigroup on $\text{Hol}(\mathbb{D})$ then its generator is given by $\Gamma f = gf + Gf'$ with $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphic functions. In some cases, we were able to obtain the point spectrum of the generator and thus have information on the point spectrum of the semigroup. Finally, we have seen that if the generator of an equicontinuous semigroup on $\text{Hol}(\mathbb{D})$ is of the form $\Gamma f = gf + Gf'$ with $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphic functions, then the semigroup is composed of weighted composition operators.

Key words : Semi-groups, Weighted composition, Spectrum, Banach spaces of holomorphic functions, Operators, Complex analysis, Generators, Semiflows, Cocycles.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier les opérateurs de composition à poids sur des espaces de fonctions holomorphes, ainsi que des semi-groupes de tels opérateurs. Ces travaux font suite à l'étude des opérateurs de composition. Soit Ω un ouvert non vide simplement connexe de \mathbb{C} . Soient $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ et $m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. On définit l'opérateur de composition à poids $W_{m,\varphi}$ sur $\text{Hol}(\Omega)$ par

$$W_{m,\varphi}f := m \cdot f \circ \varphi.$$

Dans un premier temps, nous avons regardé les propriétés spectrales de l'opérateur de composition à poids sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ où φ est un automorphisme elliptique avec un point fixe à l'intérieur. Grâce à une transformation de similarité, on a pu considérer ici que φ est une rotation. On a trouvé des résultats spectraux très différents suivant que la rotation est périodique ou apériodique.

Dans second temps, nous nous sommes intéressés à tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque φ n'est pas un automorphisme elliptique. On a commencé par donner une description de l'ensemble du spectre ponctuel des opérateurs de composition elliptiques à poids. Puis, on a montré que le spectre est égal au spectre ponctuel auquel on ajoute zéro. Ensuite, nous avons considéré les cas hyperbolique et parabolique. Nous avons montré que le spectre ponctuel des opérateurs de composition hyperbolique ou parabolique pondérés peut être vide ou égal à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dans un troisième temps, nous avons considéré des familles d'opérateurs de composition à poids sur des espaces de Banach de fonctions holomorphes et plus particulièrement de semi-groupes fortement continus sur ces espaces. Tout d'abord, nous avons montré que le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ du semi-groupe à la forme suivante :

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\} \end{cases} \quad (2)$$

où g et G sont des applications holomorphes. Puis, nous avons montré l'implication réciproque. C'est-à-dire, si le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ d'un semi-groupe a la forme (2), alors le semi-groupe est une famille d'opérateurs de composition à poids.

Enfin, on a regardé les semi-groupes de composition à poids sur l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Tout d'abord, on a donné des critères pour que la famille d'opérateurs de composition à poids forme un semi-groupe équicontinuu ou non. Inversement, on a vu que si la famille d'opérateurs de composition à poids forme un semi-groupe équicontinuu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ alors son générateur est donné par $\Gamma f = gf + Gf'$ avec $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Dans certains cas, nous avons pu obtenir le spectre ponctuel du générateur et ainsi avoir des informations sur le spectre ponctuel du semi-groupe. Enfin, nous avons vu que si le générateur d'un semi-groupe équicontinuu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ est de la forme $\Gamma f = gf + Gf'$ avec $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes, alors le semi-groupe est composé d'opérateurs de composition à poids.

Mots clefs : Semi-Groupes, Composition pondérés, Spectre, Espaces de Banach de fonctions holomorphes, Opérateurs, Analyse complexe, Générateurs, Semiflots, Cocycles.

Introduction

Dans cette thèse, nous allons étudier les opérateurs de composition à poids sur des espaces de fonctions holomorphes. Soit Ω un ouvert non vide simplement connexe de \mathbb{C} . Soient $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ et $m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. On définit l'opérateur de composition à poids $W_{m,\varphi}$ sur $\text{Hol}(\Omega)$ par

$$W_{m,\varphi}f := m \cdot f \circ \varphi.$$

Dans le cas où l'on considère la restriction de cet opérateur sur un espace de Banach de fonctions analytiques $X \hookrightarrow \text{Hol}(\Omega)$, on exige que $W_{m,\varphi}(X) \subset X$. Des exemples d'espaces de Banach de fonctions holomorphes sont décrits en Annexe B. L'opérateur de composition, c'est-à-dire $C_\varphi := W_{1,\varphi}$ a déjà beaucoup été étudié sur ces espaces où l'ouvert Ω était le disque unité ouvert \mathbb{D} (voir par exemple [66]). La question que l'on peut se poser est pourquoi s'intéresse-t-on aux opérateurs de composition à poids? Il y a plusieurs raisons et motivations à cela. La première que l'on va énoncer est le théorème de Banach-Stone qui nous dit que pour tout compact X et Y et toute isométrie linéaire surjective $T : C(X) \rightarrow C(Y)$, il existe un homéomorphisme $\varphi : Y \rightarrow X$ et une application $g \in C(Y)$ tels que pour tout $y \in Y$, $|g(y)| = 1$ et pour tout $f \in C(X)$ et pour tout $y \in Y$, $Tf(y) = g(y) \cdot f(\varphi(y))$. Ainsi, T est un opérateur de composition à poids. Plusieurs généralisations de ce résultat ont été obtenues par Richard Fleming et James Jamison [39] et font encore l'objet de nombreuses études.

D'autre part, l'étude des opérateurs de composition à poids peut s'avérer utile pour le problème du sous-espace invariant qui reste toujours une question ouverte. Rappelons que le problème du sous-espace est le suivant :

Si T est un opérateur linéaire borné agissant sur un espace de Hilbert complexe séparable X de dimension infinie, est-il vrai qu'il existe toujours un sous-espace fermé F de X , non réduit à $\{0\}$ et distinct de X tout entier, tel que F soit invariant par T ?

En 1950, Bishop propose un opérateur de composition à poids comme contre-exemple potentiel. Soit $\alpha \in]0, 1[$ un irrationnel. Il a considéré l'opérateur $T_\alpha : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ défini par :

$$(T_\alpha h)(x) = xh(\{x + \alpha\}) \quad , \quad x \in [0, 1[$$

où $\{y\}$ est la partie fractionnaire de y . En 1974, Davie montre qu'il y a des sous-espaces invariants non-triviaux pour T_α pour presque tout $\alpha \in]0, 1[$ irrationnel (voir [32]). Le problème de savoir si c'est vrai pour tout $\alpha \in]0, 1[$ irrationnel est toujours ouvert.

L'étude de l'opérateur de composition à poids a aussi un grand intérêt lorsque l'on considère des espaces de fonctions holomorphes. En effet, en 1960, de Leeuw, Rudin et Wermer [34] ont caractérisé les isométries linéaires de l'espace de Hardy H^1 dans lui-même par des opérateurs de compositions à poids. En 1964, Forelli [40] a fait de même pour les espaces de Hardy H^p avec $1 < p < \infty$ et $p \neq 2$. On rappelle que les espaces de Hardy font partie des espaces de fonctions holomorphes les plus importants. Une description de ces espaces est donnée en Annexe B.

Une autre raison de s'intéresser aux compositions à poids est qu'il est très naturel de considérer d'autres domaines Ω que le disque unité pour l'opérateur de composition. Dans le cas particulier où le nouveau domaine est conforme au disque unité, l'étude des opérateurs de composition sur Ω est équivalent à étudier des opérateurs de composition pondérés sur le disque unité. Ce procédé peut grandement faciliter la chose. Plusieurs études ont déjà été effectuées sur l'opérateur de composition à poids lorsque que l'on considérait un espace de Banach qui s'injecte continument dans l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$ (voir [23, 84, 30, 65, 17, 44, 26]). Nous nous intéresserons donc ici plus particulièrement aux propriétés spectrales de ces opérateurs sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Pour plus de détails généraux sur le spectre d'un opérateur linéaire, vous pouvez vous référer au livre [33]. Jusqu'à récemment personne n'avait envisagé ce type d'opérateur sur l'espace $\text{Hol}(\mathbb{D})$. En effet, pour le cas où φ est elliptique et n'est pas un automorphisme, le spectre de l'opérateur de composition sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ a été obtenu en 2020 [5] alors que le spectre ponctuel a été déterminé par Koenigs au milieu du 19ème siècle. Pour les cas parabolique et hyperbolique, le spectre a été récemment obtenu par Frédéric Bayart en utilisant le théorème de Valiron et de Pommerenke qui sont redémontrés en Annexe A.

Dans le deuxième chapitre, nous regarderons les propriétés spectrales de l'opérateur de composition à poids sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ où φ est un automorphisme elliptique avec un point fixe à l'intérieur. Grâce à la transformation de similarité, on peut prendre une rotation pour φ . Ainsi, nous procédons de la manière suivante. On prend $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $|\beta| = 1$ et $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ pour l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ défini par } Tf(z) = m(z)f(\beta z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Il s'avère que cela mène à une large variété de résultats dépendants des cas où β est *périodique* (i.e. $\beta^N = 1$ pour un entier $N \geq 2$) ou *apériodique* (i.e. $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), et sur les propriétés de m . Tout d'abord, on va étudier les valeurs propres. On peut les décrire complètement dans les cas périodique et apériodique et aussi déterminer les sous-espaces propres. Suivant une idée de Bonet [12] nous pouvons considérer un β apériodique de la forme $\beta = e^{2i\pi\xi}$ où ξ est un nombre diophantien. Pour le poids $m \equiv 1$ nous montrons que

$$\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \mathbb{T} \setminus \{e^{2i\pi r} : r \in \mathbb{Q}, e^{2i\pi r} \neq 1\},$$

où $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ n'est pas bijective}\}$ est le spectre de T . Donc $\overline{\sigma(T)} = \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ et $\mathbb{T} \setminus \overline{\sigma(T)} = \mathbb{T}$. Ce cas démontre déjà comment peuvent être les surprenants comportements spectraux dans l'espace de Fréchet : le spectre peut ne pas être fermé et la résolvante peut ne pas être continue. Pour cette raison, comme dans la littérature spécialisée (voir par exemple la monographie de Vasilescu [82]), nous considérons le spectre de Waelbroeck $\sigma_W(T)$ de T . Si $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors nous verrons que

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}.$$

Mais nous verrons aussi que le cas où m a un zéro dans \mathbb{D} est beaucoup plus difficile. Le résultat principal du second chapitre, qui est le théorème 2.7.5, montre que $\sigma_W(T)$ est un disque. En fait, soit

$$M_r = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m(re^{it})| dt\right)$$

pour $0 < r < 1$ et $M_1 := \sup_{0 < r < 1} M_r \in [0, \infty]$. Alors

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M_1\}$$

si $M_1 < \infty$ et $\sigma_W(T) = \mathbb{C}$ autrement.

Dans un troisième chapitre, nous nous intéresserons à tous les autres cas. En fait, les automorphismes elliptiques sont très particuliers et les cas que nous traitons dans ce troisième chapitre nécessitent des arguments différents, de sorte qu'il n'y a pas de chevauchement. Tout d'abord, nous caractérisons l'inversibilité (proposition 3.2.1) et la compacité (proposition 3.2.4) de l'opérateur de composition pondéré T sur l'espace Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Par ailleurs nous mentionnons un lien utile (proposition 3.2.3) entre le spectre ponctuel de T et celui de C_φ . Ensuite, on obtient une description complète du spectre ponctuel et de ses espaces propres pour l'opérateur de composition elliptique pondéré (théorème 3.3.4), c'est-à-dire lorsque φ n'est pas un automorphisme et a un point fixe dans \mathbb{D} . Ceci généralise le théorème de Koenigs et nous a conduit à introduire une autre fonction clé, nommée *fonction de Koenigs pondérée*, qui est notée w . Combinée avec la fonction dite de Koenigs κ , nous pouvons prouver que les espaces propres sont de la forme $\mathbb{C}w\kappa^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

On va donner aussi une description de l'ensemble du spectre des opérateurs de composition elliptiques pondérés (théorème 3.4.1) et prouver que le spectre est égal au spectre ponctuel ou à l'union du spectre ponctuel avec $\{0\}$. En fait, nous prouvons une décomposition spectrale de l'opérateur T et obtenons une projection spectrale unidimensionnelle pour chaque valeur propre même si l'opérateur T n'est pas compact en général. Ces résultats sont des généralisations des résultats correspondants sans poids de [5]; mais nous simplifions également certains des arguments qui y sont donnés. Enfin, nous considérons les cas hyperbolique et parabolique. Nous montrons que le spectre ponctuel des opérateurs de composition hyperbolique ou parabolique pondérés peut être vide ou égal à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comme dit plus haut, le spectre des opérateurs de composition sans poids peut être entièrement décrit (théorème 3.6.1 et théorème 3.7.1) grâce aux théorèmes sur les modèles fractionnaires linéaires développés par Valiron, Pommerenke et Baker-Pommerenke. Le spectre est beaucoup plus mystérieux et chaotique si l'on ajoute un poids. Nous n'avons pas pu en donner une description complète. Nous donnons des réponses partielles telles que le théorème 3.6.3, donnant une condition de régularité suffisante mais non nécessaire sur le poids au point Denjoy-Wolff du symbole φ , ce qui implique que le spectre ponctuel est $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et chaque valeur propre est de multiplicité infinie.

Dans le chapitre 4, nous allons considérer des familles d'opérateurs de composition à poids sur des espaces de Banach de fonctions holomorphes et plus particulièrement de semi-groupes fortement continus sur ces espaces. Les semi-groupes fortement continus fournissent des solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants dans les espaces de Banach. De telles équations différentielles dans les espaces de Banach proviennent par exemple d'équations aux dérivées partielles qui ont un grand intérêt en physique et en mathématiques. Ainsi, nous allons introduire une dépendance en temps pour le poids et la fonction avec laquelle on compose. Rappelons que pour un semi-groupe fortement continu, on peut définir un générateur infinitésimal qui est un opérateur fermé

à domaine dense et qui caractérise le semi-groupe fortement continu. Pour que la famille d'opérateurs de composition à poids $(S_t)_{t \geq 0}$ de X dans X , définie par :

$$S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t \tag{1.1}$$

pour tout $t \geq 0$ et $f \in X$ ait une chance d'être un semi-groupe, il faut que les familles $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ et $(m_t)_{t \geq 0}$ vérifient certaines conditions. On va alors introduire la notion de semiflot et de cocycle. Notons que dans le cas où il n'y a pas de poids, le générateur Γ du semi-groupe d'opérateurs est de la forme $\Gamma f = Gf'$ où G est le générateur du semiflot dont la forme a été totalement caractérisée par Berkson et Porta. En 2015, dans l'article [8], une réciproque partielle a été démontrée, à savoir : si l'on suppose que Γ est de la forme $\Gamma f = Gf'$ à domaine dense et est le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ ou l'espace de Dirichlet \mathcal{D} , et si de plus on suppose que le semi-groupe est quasicontractant, alors nécessairement le semi-groupe est un semi-groupe d'opérateurs de composition. Une question ouverte était de savoir s'il existait ou non des semi-groupes (nécessairement non quasicontractants) sur ces mêmes espaces, avec un générateur de la forme $\Gamma f = Gf'$. En 2019, indépendamment, E. Gallardo-Gutiérrez et D. Yakubovich [43] ainsi que W. Arendt et I. Chalendar [6] ont répondu par la négative à cette question en proposant des approches différentes et surtout en obtenant des conditions différentes sur les Banach X pour lesquels un générateur de la forme $\Gamma f = Gf'$ engendre un semi-groupe d'opérateurs de composition.

Dans ce quatrième chapitre, nous généraliserons ces résultats. Nous commencerons par étudier le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ des semi-groupes fortement continus d'opérateurs de composition à poids et aussi les conditions pour qu'une telle famille soit un semi-groupe fortement continu. Notamment, nous montrons que son générateur est donné par :

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\}, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes. Ensuite, nous allons étudier la réciproque, c'est-à-dire si le générateur infinitésimal de $(S_t)_{t \geq 0}$ est de la forme (1.2), alors le semi-groupe fortement continu a la forme (1.1). Dans le cas où $g = 0$, on retrouve bien le résultat obtenu dans [43, 6].

Dans le dernier chapitre de cette thèse, on va regarder les semi-groupes de composition à poids sur l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. On va commencer par rappeler les résultats importants de la théorie des semi-groupes équicontinus sur les espaces de Fréchet qui est moins standard que celle des semi-groupes fortement continus sur les espaces de Banach, mais qui la généralise. Notamment, on va voir que l'on a toujours des théorèmes spectraux qui permettent de lier le spectre du semi-groupe avec celui de son générateur. Ensuite, on donnera des critères pour que la famille d'opérateurs de composition à poids forme un semi-groupe équicontinu ou non. Inversement, on verra que si la famille d'opérateurs de composition à poids forme un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ alors son générateur est donné par (1.2) où le domaine sera $\text{Hol}(\mathbb{D})$ tout entier. Dans certains cas, nous pourrons obtenir le spectre ponctuel du générateur et ainsi avoir des informations sur le spectre ponctuel du semi-groupe. Enfin, nous verrons que si le générateur d'un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ est de la forme $\Gamma f = gf + Gf'$ avec $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes, alors le semi-groupe est composé d'opérateurs de composition à poids.

Propriétés spectrales de l'opérateur de composition à poids sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ induit par des rotations

2.1 Introduction

Le sujet de ce chapitre est l'étude du spectre de l'opérateur de composition à poids sur l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Dans un article précédent [5] cela a déjà été fait pour l'opérateur de composition $f \mapsto f \circ \varphi$, où $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ a un point fixe à l'intérieur du disque unité et n'est pas un automorphisme. Ici, on considère le cas où φ est un automorphisme elliptique avec un point fixe à l'intérieur. Grâce à la transformation de similarité (voir section 2.8 plus bas), on peut prendre une rotation pour φ . Ainsi, nous procédons de la manière suivante. On prend $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $|\beta| = 1$ et $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ pour l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ défini par } Tf(z) = m(z)f(\beta z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Il s'avère que cela mène à une large variété de résultats dépendants des cas où β est *périodique* (i.e. $\beta^N = 1$ pour un entier $N \geq 2$) ou *apériodique* (i.e. $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), et sur les propriétés de m . Tout d'abord, on va étudier les valeurs propres (section 2.3). On peut les décrire complètement dans les cas périodique et apériodique et aussi déterminer les sous-espaces propres.

Suivant une idée de Bonnet [12] nous pouvons considérer un β apériodique de la forme $\beta = e^{2i\pi\xi}$ où ξ est un nombre diophantien. Pour le poids $m \equiv 1$ nous montrons que

$$\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \mathbb{T} \setminus \{e^{2i\pi r} : r \in \mathbb{Q}, e^{2i\pi r} \neq 1\},$$

où $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ n'est pas bijective}\}$ est le spectre de T . Donc $\overline{\sigma(T)} = \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ et $\overline{\mathbb{T} \setminus \sigma(T)} = \mathbb{T}$. Ce cas démontre déjà comment peuvent être les "mauvais" comportements spectraux dans l'espace de Fréchet : le spectre peut ne pas être fermé et la résolvante peut ne pas être continue. Pour cette raison, comme dans la littérature spécialisée (voir par exemple la monographie [82] de Vasilescu), nous considérons le *spectre de Waelbroeck* $\sigma_W(T)$ et son complémentaire, l'*ensemble résolvant de Waelbroeck* $\rho_W(T)$ de T . Celui-ci peut être défini dans un espace de Fréchet arbitraire mais nous préférons travailler seule-

ment dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ en utilisant les avantages liés à cet espace. Ici, nous définissons

$$\begin{aligned} \rho_W(T) &= \{ \lambda \in \rho(T) : \exists \delta > 0 \text{ tel que } D(\lambda, \delta) \subset \rho(T) \\ &\quad \text{et } \sup_{\mu \in D(\lambda, \delta)} \sup_{|z| \leq r} |((\mu \text{Id} - T)^{-1}f)(z)| < \infty \\ &\quad \text{pour tout } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), r < 1 \}. \end{aligned}$$

Cet ensemble est ouvert, et donc son complémentaire $\sigma_W(T)$ est fermé. Le cas apériodique est le plus intéressant. Nous allons considérer deux cas. Si $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors nous verrons (section 2.7) que

$$\sigma_W(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)| \}.$$

Mais nous verrons aussi que le cas où m a un zéro dans \mathbb{D} est beaucoup plus difficile. Notre résultat principal, théorème 2.7.5, montre que $\sigma_W(T)$ est un disque. En fait, soit

$$M_r = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m(re^{it})| dt \right)$$

pour $0 < r < 1$, et $M_1 := \sup_{0 < r < 1} M_r \in [0, \infty]$. Alors

$$\sigma_W(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M_1 \}$$

si $M_1 < \infty$ et $\sigma_W(T) = \mathbb{C}$ autrement.

Avant de prouver ce résultat, nous traitons les espaces de Banach. Dans la section 2.5, nous considérons la restriction T_X de T à $X = A(\mathbb{D})$ (requérant $m \in A(\mathbb{D})$) et aussi $X = H^p(\mathbb{D})$, par exemple. Nous montrons que dans le cas apériodique, si $m \in A(\mathbb{D})$ a un zéro dans \mathbb{D} , alors

$$\sigma(T_{A(\mathbb{D})}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M^* \},$$

où $M^* = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m(e^{it})| dt \right)$. Ce résultat est donné par Kamowitz [53, théorèmes 4.8 et 4.9], cependant la démonstration est assez compliquée et utilise des arguments délicats. Nous donnerons ici une preuve plus simple basée sur une décomposition spectrale. Celle-ci va nous conduire à une preuve dans le cas de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ dans la section 2.7.

Nous consacrons une section spéciale, la section 2.6, pour établir le théorème de décomposition spectrale dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ et aussi pour décrire le *spectre de Waelbroeck* pour des opérateurs linéaires arbitraires sur l'espace $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

Il est intéressant de comparer les résultats sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ et les espaces $X = A(\mathbb{D}), H^p(\mathbb{D})$. En réalité, il peut arriver que pour $m \in A(\mathbb{D}), M_1 < M^*$. Alors pour $M_1 < |\lambda| \leq M^*, \lambda \in \rho_W(T)$ mais $\lambda \in \sigma(T_X)$ pour $X = A(\mathbb{D})$ ou $H^p(\mathbb{D}), 1 \leq p \leq \infty$. Cela veut dire que $(\lambda \text{Id} - T)^{-1}X \not\subset X$ pour n'importe quel λ et tout espace de ce type.

2.2 Invariance rotationnelle du spectre

Soit $\beta \in \mathbb{C}, |\beta| = 1$ et soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D}), m \neq 0$. Nous considérons l'opérateur

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}), \text{ défini par } (Tf)(z) = m(z)f(\beta z).$$

Par $\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \text{Id} - T) \text{ est bijective} \}$ on dénote l'ensemble résolvant de T . Nous notons

$$R_\lambda := (\lambda \text{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D})), \quad \lambda \in \rho(T).$$

La continuité de R_λ est une conséquence directe du théorème du graphe fermé. On note

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

le spectre de T .

Le spectre est invariant par rotation β . Plus précisément, nous allons montrer dans cette section le résultat suivant.

Théorème 2.2.1.

$$\sigma(T) = \beta\sigma(T) \cup \{m(0)\}.$$

Les conséquences simples de l'invariance du spectre sont les suivantes.

Corollaire 2.2.2.

- a) Si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $\beta^n \lambda \in \sigma(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) $\{\beta^n m(0) : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T)$.

Pour la preuve du théorème 2.2.1 nous utilisons la restriction T_0 de T à l'espace

$$\text{Hol}_0(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}.$$

Comme $(Tf)(0) = m(0)f(0)$, on a alors que $T \text{Hol}_0(\mathbb{D}) \subset \text{Hol}_0(\mathbb{D})$, et donc $T_0 \in \mathcal{L}(\text{Hol}_0(\mathbb{D}))$. Le lemme suivant montre le lien entre le spectre de T_0 et celui de T .

Lemme 2.2.3.

$$\sigma(T_0) = \beta\sigma(T) \text{ et } \rho(T_0) = \beta\rho(T).$$

Preuve. Nous considérons l'application linéaire et bijective $\Phi : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}_0(\mathbb{D})$ donnée par $(\Phi f)(z) = zf(z)$ dont l'inverse est définie par $(\Phi^{-1}g)(z) = \frac{1}{z}g(z)$, $z \neq 0$. Alors $\Phi^{-1}T_0\Phi = \beta T$. Comme T_0 et βT sont similaires, les assertions du lemme en découlent. \square

Une étape supplémentaire dans la preuve du théorème 2.2.1 est la suivante.

Lemme 2.2.4.

- a) $m(0) \in \sigma(T)$,
- b) $\rho(T) \subset \rho(T_0)$ et
- c) $\rho(T_0) \subset \rho(T) \cup \{m(0)\}$.

Preuve. a) Comme $((m(0)\text{Id} - T)f)(0) = 0$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, l'opérateur $m(0)\text{Id} - T$ n'est pas surjectif.

b) Soit $\lambda \in \rho(T)$. Alors $m(0) \neq \lambda$ par a). Soit $g \in \text{Hol}_0(\mathbb{D})$, $f = R_\lambda g$. Ainsi,

$$\lambda f(z) - m(z)f(\beta z) = g(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

D'où $(\lambda - m(0))f(0) = g(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$, ce qui prouve que $R_\lambda \text{Hol}_0(\mathbb{D}) \subset \text{Hol}_0(\mathbb{D})$ et montre l'inclusion désirée.

c) Soit $m(0) \neq \lambda \in \rho(T_0)$. Alors $\lambda \text{Id} - T$ est injective. En effet, si $(\lambda \text{Id} - T)f = 0$, comme $\lambda \neq m(0)$, en évaluant en 0 cela montre que $f \in \text{Hol}_0(\mathbb{D})$. D'où, $f = 0$ comme $\lambda \in \rho(T_0)$. Pour montrer la surjectivité, comme $\text{Hol}(\mathbb{D}) = \text{Hol}_0(\mathbb{D}) \oplus \mathbb{C}$, il est suffisant de montrer qu'il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $(\lambda \text{Id} - T)f = e_0$, où e_0 est la fonction égale à 1 sur \mathbb{D} . En évaluant en 0 cela montre que $(\lambda - m(0))f(0) = 1$, et donc $f(0) = \frac{1}{\lambda - m(0)}$. De plus,

$$(\lambda \text{Id} - T)f(0)e_0 + (\lambda \text{Id} - T)(f - f(0))e_0 = e_0. \tag{2.1}$$

Comme $(\lambda \text{Id} - T)f(0)e_0 + (\lambda \text{Id} - T)(f - f(0)e_0) - f(0)(m - m(0)e_0)$, (2.1) est équivalent à

$$(\lambda \text{Id} - T)(f - f(0)e_0) = f(0)(m - m(0)e_0).$$

Comme $\lambda \in \rho(T_0)$, il existe un unique $f_1 \in \text{Hol}_0(\mathbb{D})$ tel que

$$(\lambda \text{Id} - T)f_1 = \frac{m - m(0)e_0}{\lambda - m(0)}.$$

Ainsi, $f := f_1 + \frac{1}{\lambda - m(0)}e_0$ est l'unique fonction dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ satisfaisant $\lambda f - Tf = e_0$. \square

Si $\beta = e^{2i\pi\alpha}$, $m(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et α est un nombre diophantien (voir 2.13 pour une définition), il a été montré par J. Bonet [12, Corollary 3] que $m(0) = 1 \in \rho(T_0)$. Ainsi le lemme 2.2.4 est optimal.

Le théorème 2.2.1 est une conséquence immédiate des lemmes 2.2.3 et 2.2.4.

Nous verrons dans la section 2.4 que $\sigma(T)$ n'est pas fermé en général. Nous ajoutons un résultat spectral, qui est plus précis que le corollaire 2.2.2 et qui nous sera utile plus tard.

Par e_k , on note la fonction $e_k(z) = z^k$ ($z \in \mathbb{D}$), où $k \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.2.5. Soient $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $m(0) \neq 0$, $\beta \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta^k \neq 1$ pour $k = 1, \dots, n$. Alors

$$e_k \notin (\beta^k m(0)e_0 - T) \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

Preuve. Tout d'abord, notons que $e_0 \notin (m(0)e_0 - T) \text{Hol}(\mathbb{D})$ puisque pour $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $((m(0)e_0 - T)f)(0) = 0$. Maintenant supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$e_k \in (\beta^k m(0)e_0 - T) \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

Choisissons le plus petit k avec cette propriété. Ainsi, il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$\beta^k m(0)f(z) - m(z)f(\beta z) = z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors $\beta^k m(0)f(0) - m(0)f(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ et il existe $f_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $f = e_1 f_1$. On en déduit que

$$\beta^k m(0)z f_1(z) - m(z)\beta z f_1(\beta z) = z^k, \quad z \in \mathbb{D}.$$

D'où

$$\beta^{k-1} m(0)(\beta f_1)(z) - m(z)(\beta f_1)(\beta z) = z^{k-1}, \quad z \in \mathbb{D},$$

ce qui contredit la minimalité de k . \square

2.3 Spectre ponctuel des opérateurs de composition à poids induit par des rotations périodique et apériodique

Le but principal de cette section est de déterminer le spectre ponctuel. On considère d'abord le cas périodique, où il est facile de déterminer l'ensemble du spectre, ce que nous faisons en premier. Le spectre ponctuel demande plus d'efforts. Soient $\beta \in \mathbb{T}$, $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$ et considérons l'opérateur T sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ par

$$(Tf)(z) = m(z)f(\beta z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ce que nous montrons dans ce qui suit est valable pour le cas périodique et apériodique. Par

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ n'est pas injectif}\}$$

nous désignons le *spectre ponctuel* de T . Comme dans la section précédente, par e_k nous désignons la fonction $e_k(z) = z^k$ ($z \in \mathbb{D}$), où $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3.1.

- a) $0 \notin \sigma_p(T)$.
- b) Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $\beta^n \lambda \in \sigma_p(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. a) Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $(Tf)(z) = m(z)f(\beta z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors $f(w) = 0$ pour tout $w \in \beta\{z : m(z) \neq 0\} =: \Omega$. Comme $m \neq 0$, Ω est ouvert et non vide. On en déduit que $f = 0$.

b) Soit $0 \neq f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $Tf = \lambda f$. Alors $f_k := e_k f \neq 0$ et $Tf_k = \beta^k \lambda f_k$. □

2.3.1 Cas périodique

Le spectre $\sigma(M)$ de l'opérateur de multiplication $M \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ donné par $Mf = mf$ est égal à $m(\mathbb{D})$. En effet, montrons que $\lambda \in \rho(M) \Leftrightarrow \lambda \notin m(\mathbb{D})$. Supposons tout d'abord que $\lambda \in \rho(M)$. Ainsi, pour tout $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $(M - \lambda \text{Id})f = g$. D'où pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $(m(z) - \lambda)f(z) = g(z)$. Supposons que $\lambda \in m(\mathbb{D})$, alors il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\lambda = m(z_0)$ et donc $g(z_0) = 0$, ce qui est absurde. Pour la seconde implication supposons que $\lambda \notin \rho(M)$. Si $M - \lambda \text{Id}$ non injectif, alors il existe $g \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telle que $(M - \lambda \text{Id})g = 0$ et donc il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\lambda = m(z_0)$. Si maintenant $M - \lambda \text{Id}$ non surjectif, alors il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $\forall g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, on ait $(M - \lambda \text{Id})g = (m - \lambda \text{Id})g \neq f$. Si on suppose que $\lambda \notin m(\mathbb{D})$, alors la fonction $\frac{f}{m-\lambda} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ est un antécédent de f pour $M - \lambda \text{Id}$, ce qui est absurde. Ainsi, $\lambda \in m(\mathbb{D})$. Ceci termine la preuve et ainsi le spectre de M est ouvert sauf si m est constant. Maintenant, soit $\beta \in \mathbb{C}$ une racine de l'unité différente de 1. En d'autres termes, il existe $N \geq 2$ tel que $\beta^N = 1$, $\beta^k \neq 1$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Alors T^N est l'opérateur de multiplication donné par

$$T^N f = m_N f \text{ où } m_N(z) = m(z)m(\beta z) \cdots m(\beta^{N-1}z).$$

Proposition 2.3.2. On a $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^N \in m_N(\mathbb{D})\}$.

Preuve. Comme $\sigma(T)^N = \sigma(T^N) = m_N(\mathbb{D})$, on a $\lambda^N \in m_N(\mathbb{D})$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$. Pour la réciproque, notons que, par le théorème 2.2.1, $\beta\sigma(T) \subset \sigma(T)$. Comme β est une racine n -ième de l'unité, cela implique que $\beta\sigma(T) = \sigma(T)$. Maintenant soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^N \in m_N(\mathbb{D})$. Alors $\lambda^N \in \sigma(T^N)$. Ainsi, il existe $\mu \in \sigma(T)$ tel que $\lambda^N = \mu^N$. D'où $\lambda = \beta^k \mu$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et donc $\lambda \in \sigma(T)$. □

Proposition 2.3.3. Supposons que $m(z_0) = 0$ pour un certain $z_0 \in \mathbb{D}$. Alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Preuve. Nous savons par la proposition 2.3.1 que $0 \notin \sigma_p(T)$. Supposons que $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$. Alors $\lambda^N \in \sigma_p(T^N)$ et il existe $0 \neq f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$m_N(z)f(z) = \lambda^N f(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Cela implique que $m_N(z) = \lambda^N$ si $f(z) \neq 0$. Comme $f \neq 0$, f n'a que des zéros isolés. Donc $m_N(z) = \lambda^N$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent, on aboutit à une contradiction

$$\lambda^N = m_N(z_0) = 0.$$

□

Maintenant, nous pouvons décrire le spectre ponctuel et les sous-espaces propres de T dans le cas périodique.

Théorème 2.3.4. Soient $\beta \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$ tels que $\beta^N = 1$, $\beta^k \neq 1$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Soient $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$ et considérons l'opérateur

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ défini par } (Tf)(z) = m(z)f(\beta z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$;

b) il existe $a_0 \in \mathbb{C}$, $f_j \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $j = 1, \dots, N-1$ tels que $m = \exp m_1$ où

$$m_1(z) = a_0 + zf_1(z^N) + z^2f_2(z^N) + \dots + z^{N-1}f_{N-1}(z^N) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dans ce cas,

$$T^N = e^{Na_0} \text{Id}, \quad \sigma_p(T) = \{e^{a_0}\beta^k : k = 0, \dots, N-1\} = \sigma(T)$$

et

$$\begin{aligned} \ker(T - e^{a_0}\beta^k \text{Id}) &= \{f(z) = z^k \exp g_1(z) : \widehat{g_1}(n) = \frac{\widehat{m_1}(n)}{1 - \beta^n} \text{ si } n \notin N\mathbb{N} \text{ et} \\ &\quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |\widehat{g_1}(Nn)|^{1/n} \leq 1\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la dimension des espaces propres est infinie.

Pour la preuve, nous avons besoin de caractériser quand la fonction m_N est constante.

Lemme 2.3.5. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^N = 1$, $\beta^k \neq 1$ pour $k = 1, \dots, N-1$ où $N \geq 2$. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $m_N(z) = c$ pour tout $z \in \mathbb{D}$;

(ii) il existe $a_0 \in \mathbb{C}$, $f_1, \dots, f_{N-1} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telles que

$$m = \exp(m_1) \text{ et } m_1(z) = a_0 + zf_1(z^N) + \dots + z^{N-1}f_{N-1}(z^N).$$

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) Par (i) $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Donc il existe $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $m = \exp(m_1)$ et

$$c = \exp(m_1(z) + m_1(\beta z) + \dots + m_1(\beta^{N-1}z)) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Ainsi

$$m_1(z) + m_1(\beta z) + \dots + m_1(\beta^{N-1}z) = e^{c_1} + 2i\pi k(z), \quad (2.2)$$

où $c = e^{c_1}$ et $k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue, d'où constante. Soit $m_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Alors

$$c_2 = \sum_{n \geq 0} a_n z^n (1 + \beta^n + \beta^{2n} + \dots + \beta^{(N-1)n}) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D} \text{ et un certain } c_2 \in \mathbb{C}.$$

Donc si $\beta^n = 1$, i.e. $n \in N\mathbb{N}^*$, alors $a_n = 0$, alors que pour $\beta^n \neq 1$, comme

$$1 + \beta^n + \beta^{2n} + \dots + \beta^{(N-1)n} = \frac{1 - \beta^{nN}}{1 - \beta^n} = 0,$$

m_1 satisfait (2.2) si et seulement si m_1 est de la forme

$$m_1(z) = \sum_{n \geq 0, n \notin N\mathbb{N}} a_n z^n.$$

2.3. SPECTRE PONCTUEL DES OPÉRATEURS DE COMPOSITION À POIDS INDUIT PAR DES ROTATIONS PÉRIODIQUE ET APÉRIODIQUE

Soit $f_k(z) = \sum_{m \geq 0} a_{mN+k} z^{mN}$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Alors, on obtient (ii).

(ii) \Rightarrow (i) Nous devons montrer que

$$M(z) := m_1(z) + m_1(\beta z) + \dots + m_1(\beta^{N-1}z) \text{ est constante pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons $M(0) = Na_0$. Comme $1 + \beta + \dots + \beta^{N-1} = 0$, on a

$$zf_1(z^N) + \beta zf_1(\beta^N z^N) + \dots + \beta^{N-1} zf_1(\beta^{N-1} z^N) = (1 + \beta + \dots + \beta^{N-1})zf_1(z^N) = 0.$$

De la même façon, $1 + \beta^k + \dots + (\beta^k)^{N-1} = 0$ et donc

$$z^k f_k(z^N) + (\beta z)^k f_k((\beta z)^N) + \dots + (\beta^{N-1}z)^k f_k((\beta z)^N) = 0,$$

pour $k = 1, \dots, N-1$. Ce qui prouve ce que l'on voulait. \square

Preuve du théorème 2.3.4. a) \Rightarrow b) Supposons que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$. Alors par la proposition 2.3.3, $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $\sigma_p(T^N) \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $0 \neq f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ telles que $m_N(z)f(z) = \lambda f(z)$ ($z \in \mathbb{D}$). Cela implique que $m_N(z) = \lambda$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et on en déduit b) par le lemme 2.3.5.

b) \Rightarrow a) On déduit de b) que $T^N = e^{Na_0} \text{Id}$. Ainsi $\sigma_p(T^N) = \sigma(T^N) = e^{Na_0}$, ce qui implique que

$$\sigma_p(T) = \{e^{a_0 \beta^k} : k = 0, \dots, N-1\} = \sigma(T),$$

puisque par la proposition 2.3.1, $\beta \sigma_p(T) \subset \sigma_p(T)$ et d'où $\beta \sigma_p(T) = \sigma_p(T)$ (utilisant $\beta^N = 1$). De la même façon $\beta \sigma(T) = \sigma(T)$ par le théorème 2.2.1.

Décrivons maintenant les fonctions $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $f \neq 0$, solutions de l'équation

$$\exp(m_1(z))f(\beta z) = e^{a_0 \beta^k} f(z) \text{ avec } m_1(0) = a_0, k \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (2.3)$$

Comme $f \neq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) = z^{n_0} g(z)$ sur \mathbb{D} , où $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $g(0) \neq 0$. Soit $0 < r < 1$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, r)$. Alors il existe $g_1 \in \text{Hol}(D(0, r))$ telle que $g(z) = e^{g_1(z)}$ sur $D(0, r)$. Ainsi (2.3) devient

$$\exp(m_1(z))z^{n_0} \beta^{n_0} \exp(g_1(\beta z)) = e^{a_0 \beta^k} z^{n_0} \exp(g_1(z)) \text{ si } |z| < r, \quad (2.4)$$

c'est-à-dire

$$\exp(m_1(z) + g_1(\beta z)) = e^{a_0 \beta^k - n_0} \exp(g_1(z)) \text{ si } |z| < r. \quad (2.5)$$

En prenant $z = 0$ on en déduit que $n_0 = k$ et donc (2.5) devient

$$\exp(m_1(z) + g_1(\beta z)) = e^{a_0} \exp(g_1(z)) \text{ si } |z| < r. \quad (2.6)$$

Comme $\widehat{m}_1(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}N^*$ et $\beta^N = 1$, la seule condition sur $\widehat{g}_1(n)$ avec $n \in \mathbb{N}N^*$ est donnée par la formule d'Hadamard sur le rayon de convergence, à savoir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\widehat{g}_1(nN)|^{1/(nN)} \leq 1,$$

ce qui équivalent à $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\widehat{g}_1(nN)|^{1/n} \leq 1$. De plus, (2.6) implique que

$$\widehat{g}_1(n) = \frac{\widehat{m}_1(n)}{1 - \beta^n} \text{ si } n \notin \mathbb{N}N.$$

Comme $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et puisqu'il existe $\delta > 0$ telle que $\delta \leq |1 - \beta^n| \leq 2$ pour tout $n \notin \mathbb{N}N$, une fonction g_1 telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\widehat{g}_1(nN)|^{1/n} \leq 1 \text{ et } \widehat{g}_1(n) = \frac{\widehat{m}_1(n)}{1 - \beta^n} \text{ si } n \notin \mathbb{N}N$$

est dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Cela prouve la dernière assertion du théorème. \square

2.3.2 Cas apériodique

Ici nous supposons que $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ et $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notre objectif est de déterminer le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ de T . Nous montrons d'abord que dans le cas apériodique, nous avons aussi $\sigma_p(T) = \emptyset$ quand m a un zéro.

Proposition 2.3.6. *S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $m(z_0) = 0$, alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.*

Preuve. Par la proposition 2.3.1 a), $0 \notin \sigma_p(T)$. Soit $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que $m(z_0) = 0$ et soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$m(z)f(\beta z) = \lambda f(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Alors $f(z_0) = 0$ et donc $0 = m(\bar{\beta}z_0)f(z_0) = \lambda f(\bar{\beta}z_0)$. En itérant l'argument, nous voyons que $f(\bar{\beta}^k z_0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi f est nulle sur $z_0\mathbb{T}$ qui est l'adhérence de $\{\bar{\beta}^k z_0 : k \in \mathbb{N}\}$. Cela implique que $f = 0$. \square

Maintenant supposons que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors il existe $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$m(z) = \exp(m_1(z)) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Soit $m_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On a alors ce qui suit.

Théorème 2.3.7. a) Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_n|}{|1 - \beta^n|} \right)^{1/n} \leq 1 \quad (2.7)$$

alors $\sigma_p(T) = \{m(0)\beta^n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\ker(T - m(0)\beta^n \text{Id})$ est de dimension 1, généré par la fonction

$$f_n(z) = z^n \exp(g_1(z)) \text{ où } g_1(z) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1 - \beta^n} z^n \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}. \quad (2.8)$$

b) Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_n|}{|1 - \beta^n|} \right)^{1/n} > 1 \quad (2.9)$$

alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$. Alors $\lambda \neq 0$ par la proposition 2.3.1 et il existe $0 \neq f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$m(z)f(\beta z) = \lambda f(z) \quad (z \in \mathbb{D}). \quad (2.10)$$

Cela implique que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. En fait, supposons que $f(z_0) = 0$ où $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Alors par (2.10), $f(\beta z_0) = 0$. En itérant cela donne $f(\beta^k z_0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme l'adhérence de $\{\beta^k z_0 : k \in \mathbb{N}\}$ est un cercle, on aboutit à une contradiction ($f = 0$). Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{N}$ et $f_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que

$$f(z) = z^M \exp(f_1(z)) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Choisissons $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = e^\gamma$. Soit $f_1(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Alors pour $\beta = e^{i\alpha}$,

$$e^{m_1(z)} z^M e^{i\alpha M} \exp(f_1(\beta z)) = e^\gamma z^M \exp(f_1(z)).$$

Ainsi, il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ telle que

$$m_1(z) + i\alpha M + f_1(\beta z) = \gamma + f_1(z) + 2i\pi k(z). \quad (2.11)$$

2.4. SPECTRE DE L'OPÉRATEUR DE COMPOSITION INDUIT PAR UNE ROTATION APÉRIODIQUE SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$: ARGUMENTS DIOPHANTIENS

Par continuité, $k(z) = k(0) := k_0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En prenant $z = 0$ dans (2.11) on obtient

$$a_0 + i\alpha M - \gamma = 2i\pi k_0.$$

D'où, $\exp(a_0 + i\alpha M - \gamma) = 1$. Rappelons que $\exp(a_0) = m(0)$. Donc, $m(0)e^{i\alpha M} = e^\gamma = \lambda$. Maintenant, (2.11) implique que

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n + \sum_{n \geq 1} b_n \beta^n z^n - \sum_{n \geq 1} b_n z^n = 0.$$

D'où, $b_n = \frac{a_n}{1-\beta^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1-\beta^n} z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 , i.e. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_n|}{|1-\beta^n|} \right)^{1/n} \leq 1$. Ainsi, on a (2.8) et $\lambda = m(0)e^{i\alpha M}$.

Réciproquement, supposons (2.7). Soit $M \in \mathbb{N}$ et soit

$$f(z) := z^M \exp \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1-\beta^n} z^n \right\}.$$

Alors en vertu de (2.7), $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $f \neq 0$ et

$$\begin{aligned} (Tf)(z) &= m(z)f(\beta z) \\ &= \exp \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \beta^M z^M \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1-\beta^n} \beta^n z^n \right) \\ &= m(0) \beta^M z^M \exp \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \left(1 + \frac{\beta^n}{1-\beta^n} \right) \right) z^n \right) \\ &= m(0) \beta^M f(z), \end{aligned}$$

puisque $m(0) = \exp(a_0)$. Cela montre que $m(0)\beta^M \in \sigma_p(T)$ pour tout $M \in \mathbb{N}$ si l'on a (2.7). \square

2.4 Spectre de l'opérateur de composition induit par une rotation apériodique sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$: Arguments diophantiens

Soit $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, et supposons que β n'est pas une racine de l'unité, i.e. $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ définie par $\varphi(z) = \beta z$. Un tel φ est appelé une *rotation apériodique*. Définissons ensuite

$$C_\varphi : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ donné par } C_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Nous déterminons tout d'abord le spectre ponctuel.

Proposition 2.4.1. $\sigma_p(C_\varphi) = \{\beta^n : n \in \mathbb{N}\}$

Preuve. Ceci est un corollaire du théorème 2.3.7 ou de [12, proposition 1] avec une preuve facile et directe. \square

Nous commençons avec le résultat suivant provenant de [12] et on ajoute une preuve par soucis de complétude.

Proposition 2.4.2. $\sigma(C_\varphi) \subset \mathbb{T}$.

CHAPITRE 2. PROPRIÉTÉS SPECTRALES DE L'OPÉRATEUR DE COMPOSITION À POIDS SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$ INDUIT PAR DES ROTATIONS

Preuve. Nous devons prouver que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T} \subset \rho(C_\varphi)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \neq 1$. Soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et écrivons $g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ avec $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$. Notre objectif est de résoudre

$$C_\varphi f - \lambda f = g \quad (2.12)$$

avec $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ donné par $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. A partir de (2.12), nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \beta^n - \lambda a_n = b_n \Leftrightarrow a_n = \frac{b_n}{\beta^n - \lambda}.$$

Cependant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|\beta^n - \lambda| \geq |1 - |\lambda||$. Ainsi,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Nous avons prouvé ceci " $\forall g \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \exists! f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $C_\varphi f - \lambda f = g$ ". D'où, $\lambda \in \rho(T)$. \square

Inspiré par l'article [12] nous voulons étudier le spectre de C_φ si $\beta = e^{2i\pi\xi}$ où ξ est un nombre diophantien. Soit $\tau > 2$ et

$$\mathcal{D}(\tau) := \{\xi \in \mathbb{R} : \exists \gamma > 0 \text{ tel que } |p/q - \xi| \geq \gamma q^{-\tau} \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\} \quad (2.13)$$

l'ensemble de tous les *nombre diophantiens* d'ordre τ . Il est bien connu que $\mathbb{R} \setminus \cup_{\tau > 2} \mathcal{D}(\tau)$ a une mesure de Lebesgue 0 (voir par exemple [21]).

Théorème 2.4.3. Soient $\tau > 2, \xi \in \mathcal{D}(\tau)$. Définissons $\varphi(z) = e^{2i\pi\xi} z$ et considérons l'opérateur C_φ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ donné par $C_\varphi f = f \circ \varphi$. Alors,

$$\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(C_\varphi) \subset \{e^{2i\pi x} : x \notin \mathbb{Q}\} \cup \{1\}.$$

Preuve. Grâce aux propositions 2.4.1 et 2.4.2, il est suffisant de montrer que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \exists r \in \mathbb{Q}, \lambda = e^{2i\pi r}\} \subset \rho(C_\varphi).$$

Soit $\lambda = e^{2i\pi r} \neq 1$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

Soit $\gamma > 0$ tel que $|\xi - p/q| \geq \gamma q^{-\tau}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Soient $r = \frac{p_0}{q_0}, p_0 \in \mathbb{Z}, q_0 \in \mathbb{N}^*$. Nous prétendons que

$$\frac{1}{|\lambda - \beta^k|} \leq \left(\frac{q_0^\tau}{4\gamma}\right) k^{\tau-1} \quad (k \in \mathbb{N}^*),$$

où $\beta := e^{2i\pi\xi}$. En effet, comme la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$, on a $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$ pour $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|(\xi k - r) - p| \leq \frac{1}{2}$ (nous avons $p = \lfloor \xi k - r \rfloor$, ou $p = \lfloor \xi k - r \rfloor + 1$).

En utilisant ces estimations, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\beta^k - \lambda| &= |e^{2i\pi\xi k} - e^{2i\pi r}| = |e^{2i\pi\xi k} - e^{2i\pi(r+p)}| \\ &= |e^{2i\pi(\xi k - r - p)} - 1| = |e^{i\pi(\xi k - r - p)} - e^{-i\pi(\xi k - r - p)}| \\ &= 2|\sin(\pi(\xi k - r - p))| \\ &\geq 2\frac{2}{\pi}\pi|\xi k - r - p| \end{aligned}$$

comme $p \in \mathbb{Z}$ est choisi tel que $|\xi k - r - p| \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\beta^k - \lambda|} &\leq \frac{1}{4} \frac{1}{|\xi k - r - p|} = \frac{1}{4k} \frac{1}{\left|\xi - \frac{p_0 + p q_0}{q_0 k}\right|} \\ &\leq \frac{1}{4k} \frac{1}{\gamma (q_0 k)^{-\tau}} = ck^{\tau-1}, \end{aligned}$$

2.4. SPECTRE DE L'OPÉRATEUR DE COMPOSITION INDUIT PAR UNE ROTATION
APÉRIODIQUE SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$: ARGUMENTS DIOPHANTIENS

où $c := \frac{1}{4\gamma} q_0^\tau$.

Donc

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\beta^k - \lambda|^{1/k}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} c^{1/k} k^{(\tau-1)/k} \leq 1.$$

Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tel que $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Alors, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\beta^n - \lambda} z^n$ satisfait $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $f \circ \varphi(z) - \lambda f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi $C_\varphi - \lambda \text{Id}$ est surjective. Par la proposition 2.4.1 nous savons que $C_\varphi - \lambda \text{Id}$ est injective. Donc le théorème est prouvé. \square

Ainsi, sous les hypothèses du théorème 2.4.3, pour $\beta = e^{2i\pi\xi}$,

$$\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(C_\varphi) \subset \mathbb{T} \setminus \{\lambda \neq 1 : \exists r \in \mathbb{Q}, \lambda = e^{2i\pi r}\}.$$

En particulier, l'adhérence de $\sigma(C_\varphi)$ est \mathbb{T} et l'adhérence de $\mathbb{T} \setminus \sigma(C_\varphi)$ est aussi \mathbb{T} .

Remarque 2.4.4. L'espace $\text{Hol}_0(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$ est invariant par C_φ . J. Bonet a considéré la restriction T_0 de C_φ à $\text{Hol}_0(\mathbb{D})$ et il a montré que sous les hypothèses du théorème 2.4.3, $1 \notin \sigma(T_0)$ (voir [12, Corollary 3]). Par le lemme 2.2.3 cela implique que

$$\bar{\beta} \notin \sigma(C_\varphi). \quad (2.14)$$

Remarque 2.4.5. Soient $\xi \in D(\tau)$, $\beta = e^{2i\pi\xi}$. Soit $r_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda_0 := e^{2i\pi r_0} \neq 1$. Alors, par le théorème 2.4.3, $\lambda_0 \in \rho(C_\varphi)$. Mais la résolvante n'est plus fortement continue en λ_0 . En réalité, si $\lambda_n \notin \mathbb{T}$ et $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ alors pour tout $0 < r < 1$ il existe $f \in A(\mathbb{D})$ telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_{\lambda_n} f\|_{A(r\mathbb{D})} = \infty.$$

Ici $A(r\mathbb{D}) = \mathcal{C}(r\bar{\mathbb{D}}) \cap \text{Hol}(r\mathbb{D})$ et pour $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $\|g\|_{A(r\mathbb{D})} = \sup_{|z| \leq r} |g(z)|$.

Preuve. Supposons qu'il existe $r \in (0, 1)$ avec $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_{\lambda_n} f\|_{A(r\mathbb{D})} < \infty$ pour tout $f \in A(\mathbb{D})$. Alors par le théorème de Banach–Steinhaus, il existe $c > 0$ telle que

$$\|R_{\lambda_n} f\|_{A(r\mathbb{D})} \leq c \|f\|_{A(\mathbb{D})}$$

pour tout $f \in A(\mathbb{D})$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Choisissons $f = e_k$. Comme $C_\varphi e_k = \beta^k e_k$, $R_{\lambda_n} e_k = \frac{1}{\lambda_n - \beta^k} e_k$. D'où,

$$r \frac{1}{|\lambda_n - \beta^k|} = \|R_{\lambda_n} e_k\|_{A(r\mathbb{D})} \leq c \|e_k\|_{A(\mathbb{D})} = c$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. D'où,

$$\frac{1}{|\lambda_n - \lambda_0|} \leq \sup_{|w|=1} \frac{1}{|\lambda_n - w|} = \sup_k \frac{1}{|\lambda_n - \beta^k|} \leq \frac{c}{r}.$$

Cela est une contradiction puisque $|\lambda_n - \lambda_0| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. \square

Le phénomène exprimé dans le théorème 2.4.3 persiste même pour une plus grande classe de ξ que les nombres diophantiens, considéré par exemple par Lang dans [63].

Théorème 2.4.6. Soit $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\forall q_0 \in \mathbb{N}^*$, $\liminf_{k \rightarrow \infty} g(q_0 k)^{1/k} \geq 1$. Soit $\beta = e^{2i\pi\xi}$, où $|\xi - p/q| \geq g(q) \geq 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(C_\varphi) \subset \{e^{2i\pi x} : x \notin \mathbb{Q}\} \cup \{1\}.$$

Ce résultat est une généralisation du théorème 2.4.3 : pour $\tau > 2$, $\gamma > 0$, et $g(q) = \gamma q^{-\tau}$, on obtient le résultat indiqué dans le théorème 2.4.3.

Preuve. Grâce aux propositions 2.4.1 et 2.4.2, il est suffisant de montrer que si $\lambda = e^{2i\pi r}$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $\lambda \neq 1$, alors $\lambda \in \rho(C_\varphi)$. Soit $\lambda = e^{2i\pi r}$ un nombre complexe de la sorte. Soient $p_0 \in \mathbb{Z}$ et $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p_0}{q_0}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|(\xi k - r) - p| \leq \frac{1}{2}$. Alors, avec les mêmes calculs que dans la preuve du théorème 2.4.3, nous obtenons

$$|\beta^k - \lambda| \geq 4 |\xi k - r - p|.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\beta^k - \lambda|} &\leq \frac{1}{4k} \frac{1}{\left| \xi - \frac{p_0 + q_0 p}{q_0 k} \right|} \\ &\leq \frac{1}{4k} \frac{1}{g(q_0 k)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{1}{|\beta^k - \lambda|} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{4^{\frac{1}{k}} k^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{g(q_0 k)^{\frac{1}{k}}},$$

et donc

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|\beta^k - \lambda|} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{\liminf_{k \rightarrow \infty} g(q_0 k)^{\frac{1}{k}}} \leq 1.$$

La conclusion de la preuve est alors identique à celle de la preuve du théorème 2.4.3. \square

2.5 Spectre des opérateurs de composition à poids induits par des rotations apériodiques dans un espace de Banach

Nous interrompons notre étude des opérateurs de composition pondérés induits par les rotations sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ et considérons des espaces de Banach de fonctions holomorphes. Une des raisons est que nous utiliserons ces résultats sur l'algèbre du disque

$$A(\mathbb{D}) := \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap \text{Hol}(\mathbb{D})$$

quand nous considérerons $\text{Hol}(\mathbb{D})$ à nouveau dans la section 2.7. L'autre raison est que la technique que nous utilisons (i.e. décomposition spectrale) est plus simple sur les espaces de Banach.

Soit X un espace de Banach tel que

$$X \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}),$$

i.e. X est un sous espace de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ et l'injection canonique est continue, où $\text{Hol}(\mathbb{D})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de \mathbb{D} . Soit $e_n(z) = z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{D}$. Nous supposons que

$$e_0 \in X; \tag{2.15}$$

$$\text{si } f, f_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ sont telles que } f = e_1 f_1, \text{ alors } f \in X \iff f_1 \in X; \tag{2.16}$$

$$\text{si } f \in X, \text{ alors } z \mapsto f(\beta z) \in X \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{T}. \tag{2.17}$$

On en déduit par (2.15) et (2.16) que $\mathbb{C}[z] \subset X$. De plus, pour chaque $\beta \in \mathbb{T}$, $(U_\beta f)(z) = f(\beta z)$, $z \in \mathbb{D}$ définit un isomorphisme U_β sur X .

Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tel que

$$mf \in X \text{ pour tout } f \in X. \quad (2.18)$$

Alors, en se donnant $\beta \in \mathbb{T}$, nous considérons l'opérateur $T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ donné par

$$(Tf)(z) = m(z)f(\beta z).$$

Celui-ci laisse X invariant et on note par T_X la restriction de T à X . Alors $T_X \in \mathcal{L}(X)$ par le théorème du graphe fermé. Nous nous sommes principalement intéressés au *cas apériodique*; i.e. quand β n'est pas une racine de l'unité. Alors le spectre de T_X est invariant par rotation comme on le prouve dans la proposition 2.5.2.

Nous commençons par un lemme technique qui sera utile plus tard. Rappelons (cf. Remarque 2.4.4) qu'il peut arriver que $\lambda \in \rho(T)$ mais $\lambda\beta \in \sigma_p(T)$.

Lemme 2.5.1. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\bar{\beta}m(0)\}$, $\mu \neq 0$.

- a) Si $\mu \text{Id} - T$ est surjectif, alors $\beta\mu \text{Id} - T$ l'est aussi;
- b) Si $\mu \in \rho(T)$ et $\beta\mu \notin \sigma_p(T)$, alors $R_{\beta\mu}$ peut être obtenu depuis R_μ par ce qui suit : pour $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ de la forme $g(z) = zg_1(z)$ avec $g_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ on a

$$R_{\beta\mu}g = e_1 R_\mu(\bar{\beta}g_1); \quad (2.19)$$

$$R_{\beta\mu}e_0 = \frac{1}{\beta\mu - m(0)}e_0 + R_{\beta\mu} \left(\frac{m - m(0)}{\beta\mu - m(0)} \right); \quad (2.20)$$

- c) Si $\mu \in \rho(T_X)$ et $\beta\mu \notin \sigma_p(T_X)$ alors $\beta\mu \in \rho(T_X)$ et $R_{\beta\mu}$ est donnée par (2.19) et (2.20).

Preuve. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu \neq 0$ et $\beta\mu \neq m(0)$.

a) Supposons que $(\mu \text{Id} - T)$ est surjectif.

Premier cas : Soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $g(0) = 0$. Alors il existe $g_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $g(z) = zg_1(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Par hypothèse, il existe $f_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $(\mu \text{Id} - T)f_1 = \bar{\beta}g_1$. Soit $f(z) = zf_1(z)$. Alors

$$\begin{aligned} ((\beta\mu \text{Id} - T)f)(z) &= \beta\mu z f_1(z) - m(z)\beta z f_1(\beta z) \\ &= \beta z ((\mu \text{Id} - T)f_1)(z) = \beta z g_1(z) = g(z). \end{aligned}$$

Second cas : Soit $g = e_0$. Par le premier cas, il existe $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$(\beta\mu \text{Id} - T)\tilde{f} = \frac{m - m(0)}{\beta\mu - m(0)} \text{ et } \tilde{f}(0) = 0.$$

Soit $f(z) = \frac{1}{\beta\mu - m(0)} + \tilde{f}(z)$. Alors $f(0) = \frac{1}{\beta\mu - m(0)}$ et par conséquent,

$$\begin{aligned} (\beta\mu \text{Id} - T)f &= (\beta\mu - m)f(0) + (\beta\mu \text{Id} - T)\tilde{f} \\ &= \beta\mu f(0) - mf(0) + (m - m(0))f(0) = 1. \end{aligned}$$

Comme $\text{Hol}(\mathbb{D}) = \text{Hol}_0(\mathbb{D}) \oplus \mathbb{C}e_0$ avec $\text{Hol}_0(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(0) = 0\}$, a) et b) sont prouvés.

c) Par notre hypothèse sur X nous avons $X = X_0 \oplus \mathbb{C}e_0$ où $X_0 = \{f \in X : f(0) = 0\}$. De plus, comme $mX \subset X$, $m = me_0 \in X$. Maintenant, la preuve ci-dessus donne également c). \square

Maintenant nous montrons l'invariance rotationnelle du spectre de T_X . Posons $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Proposition 2.5.2. *Supposons que $|\beta| = 1$ et $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

- a) $m(0)\mathbb{T} \subset \sigma(T_X)$.
- b) $\lambda \in \sigma(T_X)$ implique $\lambda\mathbb{T} \subset \sigma(T_X)$.

Preuve. a) On déduit du lemme 2.2.5 que $\beta^k m(0) \text{Id} - T_X$ n'est pas surjective. Comme $\sigma(T_X)$ est fermé, il s'ensuit que $\mathbb{T}m(0) \subset \sigma(T_X)$.

b) Soit $\lambda \in \sigma(T_X)$, $|\lambda| \neq |m(0)|$.

Premier cas : $\lambda \in \sigma_p(T)$. Alors $\beta^k \lambda \in \sigma_p(T_X)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par la preuve de la proposition 2.3.1. Puisque $\sigma(T_X)$ est fermé, par le théorème de densité de Kronecker [61], cela implique que $\lambda\mathbb{T} \subset \sigma(T_X)$.

Second cas : $(\lambda \text{Id} - T_X)$ n'est pas surjectif. En appliquant le lemme 2.5.1 à $\mu = \bar{\beta}\lambda$, nous déduisons que $(\bar{\beta}\lambda - T_X)$ n'est pas surjectif. Donc, par itération, $\bar{\beta}^k \lambda \in \sigma(T_X)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par le théorème de densité de Kronecker, cela implique encore que $\lambda\mathbb{T} \subset \sigma(T_X)$. \square

Ensuite nous montrons que le spectre de T_X est un disque même quand m a un zéro dans \mathbb{D} . Par $r_\sigma(T_X)$ nous notons le rayon spectral de T_X .

Théorème 2.5.3. *Supposons que $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $m(z_0) = 0$. Alors*

$$\sigma(T_X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma(T_X)\}.$$

Preuve. Puisque $(T_X f)(z_0) = 0$ pour tout $f \in X$, T_X n'est pas inversible et donc $0 \in \sigma(T_X)$. Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(T_X)$ tel que

$$0 < r_0 := |\lambda_0| < r_\sigma(T_X).$$

Alors, par la proposition 2.5.2, $r_0\mathbb{T} \subset \rho(T_X)$. Donc, par le théorème de décomposition spectrale [35, VII théorème 19], il existe un sous espace fermé X_j de X tel que $T X_j \subset X_j$, $j = 1, 2$, $X = X_1 \oplus X_2$ et pour $T_j := T|_{X_j}$,

$$\sigma(T_1) = \{\lambda \in \sigma(T_X) : |\lambda| < r_0\} \text{ et } \sigma(T_2) = \{\lambda \in \sigma(T_X) : |\lambda| > r_0\}.$$

Puisque $\sigma(T_X) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_\sigma(T_X)\} \neq \emptyset$, on a $X_2 \neq \{0\}$. L'opérateur T_2 est inversible. Soit $0 \neq f \in X_2$. Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $g_n \in X_2$ telle que $f = T_2^n g_n$. Ainsi

$$f(z) = m(z)m(\beta z) \cdots m(\beta^{n-1}z)g_n(\beta^n z). \quad (2.21)$$

Premier cas : $z_0 \neq 0$. On déduit de (2.21) que $f(\bar{\beta}^{n-1}z_0) = 0$. Comme n est arbitraire, f s'annule sur $z_0\mathbb{T}$ et d'où $f = 0$, et on aboutit à une contradiction.

Second cas : $z_0 = 0$. Alors il existe $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $m(z) = zm_1(z)$. On déduit de (2.21) que 0 est un zéro de f d'ordre n . Comme n est arbitraire, on a $f = 0$, et on aboutit à une contradiction.

Nous avons montré que $D(0, r_\sigma(T_X)) \subset \sigma(T_X)$. Puisque $\sigma(T_X)$ est fermé, on a démontré ce que l'on souhaitait. \square

Nous considérons trois exemples : l'algèbre du disque $A(\mathbb{D}) := \mathcal{C}(\bar{\mathbb{D}}) \cap \text{Hol}(\mathbb{D})$, l'algèbre de Wiener $W^+(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty\}$, où pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, nous posons $\hat{f}(n) := a_n$, et les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$. Rappelons que $H^\infty(\mathbb{D})$ est l'algèbre de toutes les fonctions holomorphes bornées sur \mathbb{D} équipée de la norme sup alors que pour $1 \leq p < \infty$,

$$H^p(\mathbb{D}) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_p^p := \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt < \infty\}.$$

2.5. SPECTRE DES OPÉRATEURS DE COMPOSITION À POIDS INDUITS PAR DES
ROTATIONS APÉRIODIQUES DANS UN ESPACE DE BANACH

Ils vérifient tous (2.15)-(2.17). On en déduit que U_β est une isométrie sur X .
Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Alors $mX \subset X$ si et seulement si

$$m \in A(\mathbb{D}) \text{ pour } X = A(\mathbb{D}),$$

$$m \in W^+(\mathbb{D}) \text{ pour } X = W^+(\mathbb{D}) \text{ et}$$

$$m \in H^\infty(\mathbb{D}) \text{ pour } X = H^p(\mathbb{D}) \text{ si } 1 \leq p \leq \infty.$$

Dans les deux premiers cas, nous avons $X \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ et la preuve du théorème 2.5.3 reste vraie même si m a un 0 dans $\overline{\mathbb{D}}$ (et pas seulement dans \mathbb{D}). Nous l'énonçons comme corollaire (à partir de la preuve).

Corollaire 2.5.4. *Soit $X = A(\mathbb{D})$ et $m \in A(\mathbb{D})$, ou $X = W^+(\mathbb{D})$ et $m \in W^+(\mathbb{D})$. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. S'il existe $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que $m(z_0) = 0$, alors*

$$\sigma(T_X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_\sigma(T_X)\}.$$

Pour $X = A(\mathbb{D})$, le corollaire 2.5.4 est donné par Kamowitz [53, théorème 4.8 et théorème 4.9] avec une preuve qui utilise un changement de limites (7 lignes après (4.2)) et des arguments concernant des ensembles négligeables qui semblent difficilement justifiables. Notre preuve est très différente. Notons que T^n est donné par

$$(T^n f)(z) = m_n(z)f(\beta^n z), \quad (f \in \text{Hol}(\mathbb{D}))$$

où $m_n(z) = m(z)m(\beta z) \cdots m(\beta^{n-1}z)$. Cela nous permet de calculer, ou au moins d'estimer, le rayon spectral $r_\sigma(T_X)$ pour $X = A(\mathbb{D})$, $W^+(\mathbb{D})$ ou $H^p(\mathbb{D})$. En fait,

$$r_\sigma(T_X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_X^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{D}} |m_n(z)|^{1/n}.$$

Dans le cas où $X = A(\mathbb{D})$ ou $X = W^+(\mathbb{D}) \subset A(\mathbb{D})$, cette expression peut être calculée. Le lemme suivant a été obtenu par Kamowitz [53, lemme 4.2 et 4.4].

Lemme 2.5.5. *Soient $m \in A(\mathbb{D})$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

a) *Alors*

$$r_\sigma(T_{A(\mathbb{D})}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z| \leq 1} |m_n(z)|^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m(e^{it})| dt\right) =: M^*.$$

b) *Si $m(z) \neq 0$ pour tout $|z| = 1$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |m_n(z)|^{1/n} = M^* \text{ uniformément dans } z \in \mathbb{T}.$$

Si $m \in H^\infty(\mathbb{D})$, alors nous posons

$$M^* := \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m^*(e^{it})| dt\right) < \infty,$$

où m^* est la limite radiale de m . Dans ce cas, nous avons simplement une estimation inférieure du rayon spectral.

Lemme 2.5.6. *Soient $m \in H^\infty(\mathbb{D})$, $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $X = H^p(\mathbb{D})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

$$r_\sigma(T_X) \geq M^*.$$

Preuve. On a

$$\sup_{|z|<1} |m_n(z)|^{1/n} = \text{ess sup}_{\theta \in \mathbb{R}} |m_n^*(e^{i\theta})|^{1/n}$$

puisque $\|f\|_{H^\infty} = \|f^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Mais

$$\begin{aligned} \log |m_n^*(e^{i\theta})|^{1/n} &= \frac{1}{n} (\log |m^*(e^{i\theta})| + \log |m^*(\beta e^{i\theta})| + \cdots + \log |m^*(\beta^{n-1} e^{i\theta})|) \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m^*(e^{it})| dt \quad \theta\text{-p.p. quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

par le théorème ergodique ponctuel. Cela conclut la preuve. \square

Dans chaque cas, pour $m \in A(\mathbb{D})$, par le lemme 2.5.5,

$$r_\sigma(T_{A(\mathbb{D})}) = r_\sigma(T_{H^p(\mathbb{D})}); \quad (2.22)$$

et pour $m \in W^+(\mathbb{D}) \subset A(\mathbb{D})$,

$$r_\sigma(T_{W^+(\mathbb{D})}) = r_\sigma(T_{A(\mathbb{D})}) = r_\sigma(T_{H^p(\mathbb{D})}). \quad (2.23)$$

Pour $m \in A(\mathbb{D})$, l'opérateur $T_{A(\mathbb{D})}$ est inversible si et seulement si $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Dans ce cas $\frac{1}{m} \in A(\mathbb{D})$ et

$$(T^{-1}f)(z) = \frac{1}{m(\beta z)} f(\beta z).$$

Si $m \in W^+(\mathbb{D})$ telle que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, alors par le théorème de Wiener, $\frac{1}{m} \in W^+(\mathbb{D})$. Ainsi $T_{W^+(\mathbb{D})}$ est inversible (voir par exemple [74, Chap.18, exercice 8]).

Notons que pour $m \in A(\mathbb{D})$ telle que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m(e^{it})| dt\right) = |m(0)|, \quad (2.24)$$

(voir [74, 15.18]). A partir de cela nous obtenons le résultat suivant (obtenu par Kamowitz [53, théorème 4.7] dans le cas $X = A(\mathbb{D})$) dont la courte preuve est répétée ici.

Proposition 2.5.7. *Soient*

- a) $X = A(\mathbb{D})$ ou $H^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p \leq \infty$) et $m \in A(\mathbb{D})$; ou
- b) $X = W^+(\mathbb{D})$ et $m \in W^+(\mathbb{D})$.

Supposons que $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors

$$\sigma(T_X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}.$$

Preuve. Par (2.24) et le lemme 2.19 nous avons

$$r_\sigma(T_X) = |m(0)| \text{ et } r_\sigma(T_X^{-1}) = \frac{1}{|m(0)|}.$$

Si $\lambda \in \sigma(T_X)$ alors $\frac{1}{|\lambda|} \leq r_\sigma(T_X^{-1}) = \frac{1}{|m(0)|}$. Ainsi

$$|m(0)| \leq |\lambda| \leq r_\sigma(T_X) = |m(0)|.$$

Le résultat souhaité s'ensuit par le corollaire 2.2.2. \square

2.6 Décomposition spectrale et spectre de Waelbroeck

Nous continuons maintenant notre étude sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. C'est un espace de Fréchet pour la topologie induite par les semi-normes

$$\|f\|_{A(r\mathbb{D})} := \sup_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$$

pour $r \in]0, 1[$. Ainsi $f_n \rightarrow f$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ si et seulement si $\|f_n - f\|_{A(r\mathbb{D})} \rightarrow 0$ pour tout $0 < r < 1$.

Soit $T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ un opérateur linéaire et continu. Si $\lambda \in \rho(T)$, alors $R_\lambda = (\lambda \text{Id} - T)^{-1}$ est continu (par le théorème du graphe fermé). Cela veut dire la chose suivante : pour tout $r \in (0, 1)$ il existe $r' \in (0, 1)$ et $c > 0$ tels que

$$\|R_\lambda f\|_{A(r\mathbb{D})} \leq c \|f\|_{A(r'\mathbb{D})} \text{ pour tout } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}). \quad (2.25)$$

Nous avons vu que le spectre $\sigma(T)$ de T n'est pas fermé, en général, et la résolvante peut ne pas être fortement continue sur $\rho(T)$, voir section 2.4. Pour cette raison, nous considérons aussi le *spectre de Waelbroeck*. Ici nous définissons l'ensemble résolvant de Waelbroeck par

$$\begin{aligned} \rho_W(T) = \{ \lambda \in \rho(T) : \exists \delta > 0 \text{ tel que } \overline{D}(\lambda, \delta) \subset \rho(T) \text{ et} \\ \sup_{|\lambda - \mu| \leq \delta} \|R_\mu f\|_{A(r\mathbb{D})} < \infty \text{ pour tout } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ et } r < 1 \} \end{aligned}$$

Alors le spectre de Waelbroeck est par définition $\sigma_W(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_W(T)$.

Il est clair que $\rho_W(T)$ est un sous ensemble ouvert de \mathbb{C} . On peut exprimer $\rho_W(T)$ aussi par la *propriété d'équicontinuité*, i.e. (2.25) qui est de demander de rester uniforme par rapport à λ (voir (2.26)).

Lemme 2.6.1. Soit $\Lambda \subset \rho_W(T)$ un compact. Alors pour tout $0 < r < 1$ il existe $0 < r' < 1$ et $c \geq 0$ tels que

$$\|R_\lambda f\|_{A(r\mathbb{D})} \leq c \|f\|_{A(r'\mathbb{D})} \quad (2.26)$$

pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et tout $\lambda \in \Lambda$.

Preuve. Soit $0 < r < 1$. Par la compacité de Λ et la définition de $\rho_W(T)$,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|R_\lambda f\|_{A(r\mathbb{D})} < \infty \text{ pour tout } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ et } r \in (0; 1).$$

On procède maintenant comme pour la démonstration du théorème de Banach-Steinhaus. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$X_n := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|R_\lambda f\|_{A(r\mathbb{D})} \leq n \quad \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Comme X_n est fermé et $\text{Hol}(\mathbb{D}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$, par le théorème de Baire appliqué à l'espace métrique complet $\text{Hol}(\mathbb{D})$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'intérieur de X_{n_0} est non vide. Donc il existe $f_0 \in X_{n_0}$, $r' \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ tels que

$$\mathcal{U} := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f - f_0\|_{A(r'\mathbb{D})} \leq \varepsilon\} \subset X_{n_0}.$$

Soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $\|g\|_{A(r'\mathbb{D})} \leq 1$. Alors $f_0 + \varepsilon g \in \mathcal{U}$. D'où

$$\varepsilon \|R_\lambda g\|_{A(r\mathbb{D})} \leq \|R_\lambda(f_0 + \varepsilon g)\|_{A(r\mathbb{D})} + \|R_\lambda f_0\|_{A(r\mathbb{D})} \leq 2n_0 \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Ainsi $\|R_\lambda f\|_{A(r\mathbb{D})} \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \|f\|_{A(r'\mathbb{D})}$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $\lambda \in \Lambda$. □

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert, une fonction $F : \Omega \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ est appelée *holomorphe* si

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} =: F'(\lambda_0)$$

existe dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $\lambda_0 \in \Omega$.

Lemme 2.6.2. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. La fonction

$$\lambda \mapsto R_\lambda f : \rho_W(T) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$$

est holomorphe et donc continue. En particulier, pour chaque $z \in \mathbb{D}$ la fonction $\lambda \mapsto (R_\lambda f)(z)$ est holomorphe sur $\rho_W(T)$.

Preuve. Soit $\lambda_0 \in \rho_W(T)$. Choisissons $\delta > 0$ tel que $\overline{D}(\lambda_0, \delta) \subset \rho_W(T)$. Soit $0 < r < 1$. Par le lemme 2.6.1 il existe $c > 0, 0 < r' < 1$ tels que

$$\|R_\lambda f\|_{A(r\mathbb{D})} \leq c \|f\|_{A(r'\mathbb{D})}$$

pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $\lambda \in \overline{D}(\lambda_0, \delta)$. Donc, par l'identité de la résolvante pour $\lambda \in \overline{D}(\lambda_0, \delta)$,

$$\begin{aligned} \|R_\lambda f - R_{\lambda_0} f\|_{A(r\mathbb{D})} &= |\lambda - \lambda_0| \|R_\lambda R_{\lambda_0} f\|_{A(r\mathbb{D})} \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| c \|R_{\lambda_0} f\|_{A(r'\mathbb{D})}. \end{aligned}$$

D'où $R_\lambda f \rightarrow R_{\lambda_0} f$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$. En particulier

$$\frac{R_\lambda f - R_{\lambda_0} f}{\lambda - \lambda_0} = -R_\lambda R_{\lambda_0} f \rightarrow -R_{\lambda_0}^2 f$$

dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_0$. □

Nous aurons besoin de la décomposition spectrale suivante qui est bien connue dans le cas de l'espace de Banach. Pour être complet, nous donnons une preuve dans cette situation particulière. Pour plus de résultats généraux dans les espaces de Fréchet on se réfère au Théorème III. 3.11 du livre [82] de Vasilescu.

Théorème 2.6.3. [Décomposition spectrale] Soient $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ et $r_0 \in (0, \infty)$ tels que $r_0\mathbb{T} \subset \rho_W(T)$. Alors il existe des sous espaces fermés X_1, X_2 de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $TX_j \subset X_j, j = 1, 2, \text{Hol}(\mathbb{D}) = X_1 \oplus X_2$ et pour $T_j := T|_{X_j}$,

$$\sigma_W(T_1) = \{\lambda \in \sigma_W(T_X) : |\lambda| < r_0\} \text{ et } \sigma_W(T_2) = \{\lambda \in \sigma_W(T_X) : |\lambda| > r_0\}.$$

Pour la preuve nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 2.6.4. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ et soit $g : \Lambda \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $g(t, \cdot) \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $t \in \Lambda$. Alors g est continue si et seulement si

$$t \mapsto g(t, \cdot) : \Lambda \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$$

est continue.

Preuve. \Rightarrow Soient $t_n \rightarrow t_0, K \subset \mathbb{D}$ un compact. Supposons que $g(t_n, z)$ ne converge pas vers $g(t_0, z)$ uniformément sur K . Alors, en passant à une sous suite nous trouvons $\varepsilon > 0, z_n \in K$ tels que $|g(t_n, z_n) - g(t_0, z_n)| \geq \varepsilon$. Nous pouvons aussi supposer que $z_n \rightarrow z_0$. Ainsi g n'est pas continue en (t_0, z_0) .

\Leftarrow Si $t_n \rightarrow t_0$ dans Λ et $z_n \rightarrow z_0$ dans \mathbb{D} , alors

$$|g(t_n, z_n) - g(t_0, z_0)| \leq |g(t_n, z_n) - g(t_0, z_n)| + |g(t_0, z_n) - g(t_0, z_0)| \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ par hypothèse. □

Remarque 2.6.5. Le lemme 2.6.4 nous permet de décrire $\rho_W(T)$ d'une façon différente. C'est le plus grand ouvert Ω dans $\rho(T)$ tel que l'application

$$(\lambda, z) \mapsto (R_\lambda f)(z) : \Omega \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

est continue pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$.

Soit $g : [0, 2\pi] \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ une application continue. Nous définissons l'intégrale de Riemann de g par

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\Pi_n, g). \quad (2.27)$$

Ici, $(\Pi_n)_n$ est une suite de partitions telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\Pi_n} = 0$. Pour une partition arbitraire $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi\}$, la somme de Riemann est définie par $S(\Pi, g) = \sum_{i=1}^m g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$ et $\delta_\Pi := \max_{1 \leq i \leq m} (t_i - t_{i-1})$. Puisque $g(t)|_{r\mathbb{D}} \in A(r\mathbb{D})$, la convergence de (2.27) est une conséquence du résultat correspondant dans les espaces de Banach $A(r\mathbb{D})$.

Lemme 2.6.6. Soient $g : [0, 2\pi] \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ une application continue et $R \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$. Alors

$$R \int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} Rg(t) dt.$$

Preuve. On a $RS(\Pi, g) = S(\Pi, Rg)$. Le résultat découle de (2.27). \square

Le même argument montre que

$$\left(\int_0^{2\pi} g(t) dt \right) (z) = \int_0^{2\pi} g(t)(z) dt \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}. \quad (2.28)$$

Preuve du théorème 2.6.3. Il existe $r_0 < r_1$ tel que $\lambda \in \rho_W(T)$ lorsque $r_0 \leq |\lambda| \leq r_1$. Définissons $P \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$ par

$$(Pf)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} (R_\lambda f)(z) d\lambda$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Nous montrons que $P^2 = P$. Notons que

$$Pf(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\mu|=r_1} (R_\mu f)(z) d\mu$$

par le théorème de Cauchy. De plus, en utilisant l'identité de la résolvante, la formule intégrale de Cauchy et le lemme 2.6.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} P(Pf)(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} (R_\lambda(Pf))(z) d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\mu|=r_1} (R_\lambda R_\mu f)(z) d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\mu|=r_1} \frac{(R_\lambda f)(z)}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{|\mu|=r_1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{(R_\mu f)(z)}{\mu - \lambda} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} (R_\lambda f)(z) d\lambda - 0 = (Pf)(z). \end{aligned}$$

On en déduit du lemme 2.6.6 que $TP = PT$. Soient $X_2 = \ker P$, et $T_2 = T|_{X_2}$. Nous montrons que $\sigma_W(T_2) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r_0\}$. En fait, soit $|\mu| < r_0$. Définissons

$$S_\mu : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ par } S_\mu f := \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{1}{\mu - \lambda} R_\lambda f d\lambda.$$

Comme $(\mu \text{Id} - T)R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\lambda + \text{Id}$,

$$\begin{aligned} (\mu \text{Id} - T)Sf &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} R_\lambda f d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{1}{\mu - \lambda} d\lambda f \\ &= Pf + f. \end{aligned}$$

Donc, pour $f \in X_2 = \ker P$, $(\mu \text{Id} - T)S_\mu f = f = S_\mu(\mu \text{Id} - T)f$. Cela montre que $P^2 = P$.

Soient $X_1 = P \text{Hol}(\mathbb{D})$, $T_1 = T|_{X_1}$. Nous montrons que

$$\sigma_W(T_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r_0\}.$$

Plus généralement, soit $|\mu| > r_0$. Définissons $\tilde{S}_\mu : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ par

$$\tilde{S}_\mu f = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{1}{\lambda - \mu} R_\lambda f d\lambda.$$

pour $f \in X_1$,

$$f = Pf = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_1} R_\lambda f d\lambda \in X_1.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\mu \text{Id} - T)\tilde{S}_\mu f &= (\mu \text{Id} - T)\tilde{S}_\mu Pf \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} -R_\lambda f d\lambda + 0 \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} -R_\lambda (Pf) d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda'|=r_1} \frac{R_\lambda f}{\lambda' - \lambda} d\lambda' d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} \frac{R_{\lambda'} f}{\lambda' - \lambda} d\lambda d\lambda' \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\lambda|=r_0} R_\lambda f d\lambda - 0 = Pf = f. \end{aligned}$$

Puisque $(\mu \text{Id} - T)\tilde{S}_\mu = \tilde{S}_\mu(\mu \text{Id} - T)$, on en déduit que $\tilde{S}_\mu = (\mu \text{Id} - T)^{-1}$. Nous avons alors montré que

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > r_0\} \subset \rho_W(T_1) \text{ et } (\mu \text{Id} - T_1)^{-1} = \tilde{S}_{\mu|_{X_1}}.$$

□

2.7 Le spectre de Waelbroeck pour les opérateurs de composition induits par des rotations apériodique sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$

Dans toute cette section nous considérons $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, tel que $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$, et définissons $T \in \mathcal{L}(\text{Hol}(D))$ par

$$(Tf)(z) = m(z)f(\beta z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Nous savons déjà grâce au théorème 2.2.1 que

$$\sigma(T) = \beta\sigma(T) \cup \{m(0)\}.$$

En particulier $\beta^n m(0) \in \sigma(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définissons pour $0 < r < 1$

$$M_r := \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m(re^{it})| dt \right). \quad (2.29)$$

Alors par la formule de Jensen [74, 15.18]

$$M_r = |m_1(0)| r^N \prod_{k=1}^m \frac{r}{|\alpha_k|}, \quad (2.30)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont les zéros de m dans le disque unité fermé $\overline{D}(0, r) \setminus \{0\}$ et où $m(z) = z^N m_1(z)$ avec $N \in \mathbb{N}$, $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $m_1(0) \neq 0$. En particulier

$$M_r = |m_1(0)| r^N \text{ si } m(z) \neq 0 \text{ sur } \overline{D}(0, r) \setminus \{0\}.$$

On déduit de (2.30) que

$$M_r \leq M_s \text{ pour } 0 < r < s < 1. \quad (2.31)$$

Soit

$$M_1 := \sup_{r < 1} M_r \in [0, \infty]. \quad (2.32)$$

On déduit de (2.30) que $M_1 < \infty$ si et seulement si $\sum_k (1 - |\alpha_k|) < \infty$, où les α_k sont maintenant les zéros de m dans le disque unité ouvert \mathbb{D} comptés avec leur multiplicité. Ainsi, par le théorème de Weierstrass [74, 15.11], il existe $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $M_1 = \infty$. Cependant, si $m \in H^\infty(\mathbb{D})$, ou plus généralement, si m est dans la classe de Nevanlinna, alors $M_1 < \infty$. Si $m \in H^\infty(\mathbb{D})$, alors

$$M_1 \leq M^* \text{ où } M^* := \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |m^*(e^{it})| dt \right). \quad (2.33)$$

Considérons la factorisation unique (à une constante de module un) $m = BSF$ où B est le produit de Blaschke associé avec les zéros de m , S est la partie intérieure singulière de m et F est le facteur extérieur de m . Alors

$$M_1 = M^* \text{ si et seulement si } S = 1,$$

voir [49, p. 67 et p.68]. À la fin de cette section, nous donnerons une fonction concrète m telle que dans (2.33) uniquement l'inégalité stricte est vraie. Pour $0 < r < 1$ posons $A(r\mathbb{D}) := \mathcal{C}(r\overline{D}) \cap \text{Hol}(r\mathbb{D})$. Alors

$$(\tilde{T}_r f)(z) = m(z) f(\beta z)$$

définit un opérateur $\tilde{T}_r \in \mathcal{L}(A(r\mathbb{D}))$.

Proposition 2.7.1.

- a) $r_\sigma(\tilde{T}_r) = M_r$.
- b) Si $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in r\overline{D}$, alors $\sigma(\tilde{T}_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}$.
- c) Si $m(z_0) = 0$ pour un $z_0 \in r\overline{D}$, alors $\sigma(\tilde{T}_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M_r\}$.

Preuve. Définissons $\Phi : A(r\mathbb{D}) \rightarrow A(\mathbb{D})$ par $(\Phi f)(z) = f(rz)$. Alors Φ est une bijection, linéaire et $\Phi \tilde{T}_r \Phi^{-1} = T_r$ où $T_r \in \mathcal{L}(A(\mathbb{D}))$ est donné par

$$(T_r f)(z) = m_r(z) f(\beta z), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

où nous posons $m_r(z) = m(rz)$, ($z \in \mathbb{D}$). Le résultat découle du théorème 2.5.3 et de la proposition 2.5.7. \square

CHAPITRE 2. PROPRIÉTÉS SPECTRALES DE L'OPÉRATEUR DE COMPOSITION À POIDS SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$ INDUIT PAR DES ROTATIONS

Nous établissons d'abord une inclusion spectrale. Rappelons que le spectre de Waelbroeck $\sigma_W(T)$ est fermé et $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$.

Proposition 2.7.2. a) Si $|\lambda| > M_r$ pour tout $r < 1$, alors $\lambda \in \rho(T)$.
 b) $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < M_1\}$ si m a un zéro dans \mathbb{D} .
 c) $\sigma_W(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M_1\}$ si $M_1 < \infty$.

Preuve. a) Soit $|\lambda| > M_r$ pour tout $0 < r < 1$. Soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Prenons $0 < r < 1$, par la proposition 2.29 a), il existe un unique $f_r \in A(r\mathbb{D})$ vérifiant

$$\lambda f_r(z) - f_r(\beta z) = g(z) \text{ pour tout } z \in r\mathbb{D}.$$

Ainsi, pour $r < r' < 1$, $f_{r'}|_{r\mathbb{D}} = f_r$. En définissant $f(z) := f_r(z)$ si $|z| \leq r$ nous obtenons une fonction $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$\lambda f(z) - m(z)f(\beta z) = g(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$; i.e. $\lambda f - Tf = g$. Comme $f|_{r\mathbb{D}} \in A(r\mathbb{D})$, l'unicité découle du fait que $\lambda \text{Id} - \tilde{T}_r$ est injectif. Cela prouve a).

b) Si m a un zéro dans \mathbb{D} , alors, par (2.30), $M_r < M_1$ pour tout $r < 1$. Ainsi, le résultat découle de a).

c) Soit $|\lambda_0| > M_1$. Soit $\delta > 0$ tel que $\overline{D}(\lambda_0, \delta) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > M_1\}$. Soient $0 < r < 1$, $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Nous avons à montrer que

$$\sup_{|\lambda - \lambda_0| \leq \delta} \sup_{|z| \leq r} |(R_\lambda f)(z)| < \infty.$$

Mais

$$(R_\lambda f)(z) = ((\lambda \text{Id} - \tilde{T}_r)^{-1} f|_{A(r\mathbb{D})})(z) \text{ pour } |z| \leq r.$$

Puisque $r_\sigma(\tilde{T}_r) \leq M_r < M_1$ le résultat s'ensuit. \square

Théorème 2.7.3. Supposons que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors

- a) $\{\beta^n m(0) : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}$.
 b) $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}$.

Preuve. La première inclusion est le corollaire 2.2.2. Puisque $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, $M_r = |m(0)|$ pour tout $0 < r < 1$, voir (2.30). D'où $M_1 = |m(0)|$ et la proposition 2.7.2 c) montre que $\sigma_W(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq |m(0)|\}$. Mais T est inversible et

$$(T^{-1}f)(z) = \frac{1}{m(\beta z)} f(\beta z).$$

Depuis l'égalité $(\mu \text{Id} - T^{-1}) = \frac{T}{\mu}(T - \frac{1}{\mu})^{-1}$ on peut voir que $\sigma_W(T^{-1}) = \sigma_W(T)^{-1}$. On en déduit de la première partie de la preuve appliquée à T^{-1} que $\frac{1}{|\mu|} \leq \frac{1}{|m(0)|}$ pour tout $\mu \in \sigma_W(T)$. D'où $|\mu| \geq |m(0)| \geq |\mu|$ pour tout $\mu \in \sigma_W(T)$. Cela prouve que

$$\sigma_W(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\},$$

et la première partie de a) implique l'autre inclusion puisque $\sigma_W(T)$ est fermé. Donc b) est prouvé. La seconde inclusion dans a) découle de b) puisque $\sigma(T) \subset \sigma_W(T)$. \square

Ensuite, nous voulons déterminer le spectre de Waelbroeck de T lorsque m a des zéros dans \mathbb{D} .

Nous montrons d'abord l'invariance rotationnelle du spectre de Waelbroeck.

Lemme 2.7.4. a) Soit $\lambda \in \rho_W(T)$. Alors $\beta\lambda \in \rho_W(T)$.
 b) Si $\lambda \in \sigma_W(T)$, alors $\mathbb{T}\lambda \subset \sigma_W(T)$.
 c) Si $\lambda \in \rho_W(T)$, alors $\mathbb{T}\lambda \subset \rho_W(T)$.

Preuve. 1. Par le corollaire 2.2.2 a) $\lambda \in \sigma(T)$ implique que

$$\{\beta^n \lambda : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \sigma_W(T).$$

Comme $\sigma_W(T)$ est fermé, on en déduit que $\mathbb{T}\lambda \subset \sigma_W(T)$.

2. Nous prouvons a). Dans cet objectif, prenons $\lambda \in \rho_W(T)$, et montrons que $\beta\lambda \in \rho_W(T)$. Il existe $\delta > 0$ tel que $D(\lambda, \delta) \subset \rho(T)$ et pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$,

$$\sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sup_{|z|\leq r} |R_\mu f(z)| < \infty. \quad (2.34)$$

Par 1. cela implique que $\beta\mu \in \rho(T)$ pour tout $\mu \in D(\lambda, \delta)$. Remarquons que $\beta D(\lambda, \delta) = D(\beta\lambda, \delta)$. Ainsi il suffit de montrer que pour tout $r < 1$,

$$\sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sup_{|z|\leq r} |R_{\beta\mu} g(z)| < \infty \quad (2.35)$$

pour tout $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Soient $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $0 < r < 1$.

Premier cas : $g(0) = 0$. Alors il existe $g_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $g = e_1 g_1$. Par (2.19) nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sup_{|z|\leq r} |R_{\beta\mu} g(z)| &= \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sup_{|z|\leq r} |e_1 R_\mu(\bar{\beta} g_1)(z)| \\ &\leq \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} r |(R_\mu g_1)(z)| < \infty \end{aligned}$$

par (2.34).

Second cas : $g = e_0$. Par (2.20),

$$\begin{aligned} \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sup_{|z|\leq r} |(R_{\beta\mu} e_0)(z)| &= \\ \sup_{|\lambda-\mu|<\delta} \sup_{|z|\leq r} \left| \frac{1}{\beta\mu - m(0)} + (R_{\beta\mu}(m - m(0))f(0))(z) \right| &< \infty \end{aligned}$$

par le premier cas. Puisque $\text{Hol}(\mathbb{D}) = \text{Hol}_0(\mathbb{D}) \oplus \mathbb{C}e_0$, (2.35) est prouvée.

3. Nous prouvons b). Soit $\lambda \in \sigma_W(T)$. Alors par a) $\bar{\beta}\lambda \in \sigma_W(T)$. D'où

$$\{\bar{\beta}^k \lambda : k \in \mathbb{N}\} \subset \sigma_W(T).$$

Cela implique que $\lambda\mathbb{T} \subset \sigma_W(T)$.

4. c) découle de b). □

Théorème 2.7.5. Soit $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $m(z_0) = 0$ pour un $z_0 \in \mathbb{D}$. Considérons $T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ donné par

$$(Tf)(z) = m(z)f(\beta z) \quad z \in \mathbb{D}.$$

Alors $\sigma_W(T) = \bar{D}(0, M_1)$ si $M_1 < \infty$ et $\sigma_W(T) = \mathbb{C}$ si $M_1 = \infty$.

Preuve. a) Nous savons déjà par la proposition 2.7.2 que $\sigma_W(T) \subset \bar{D}(0, M_1)$ si $M_1 < \infty$.

b) Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda_0| < M_1$, $\lambda_0 \notin \sigma_W(T)$. Alors par le lemme 2.7.4,

$\lambda_0 \mathbb{T} \subset \rho_W(T)$. Par le théorème de décomposition spectrale, théorème 2.6.3, il existe des sous-espaces fermés X_1, X_2 de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $TX_j \subset X_j$ et, pour $T_j = T|_{X_j}$, $j = 1, 2$, on a

$$\sigma_W(T_1) = \{\lambda \in \sigma_W(T) : |\lambda| < |\lambda_0|\} \text{ et } \sigma_W(T_2) = \{\lambda \in \sigma_W(T) : |\lambda| > |\lambda_0|\}.$$

Supposons que $X_2 = \{0\}$. Alors $X_1 = X$ et $|\lambda| < |\lambda_0|$ pour tout $\lambda \in \sigma_W(T)$. Soit $0 < r < 1$ tel que $|\lambda_0| < M_r$ et tel que $m(z) \neq 0$ quand $|z| = r$. Considérons l'opérateur $\tilde{T}_r \in \mathcal{L}(A(r\mathbb{D}))$ défini dans la proposition 2.7.1. Alors $r_\sigma(\tilde{T}_r) = M_r$. Pour $|\lambda| > M_r$,

$$g_\lambda(z) := ((\lambda \text{Id} - \tilde{T}_r)^{-1} e_0)(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{m_n(z)}{\lambda^{n+1}} \quad (2.36)$$

définit une fonction $g_\lambda \in A(r\mathbb{D})$. De plus, pour $|z| = r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |m_n(z)|^{1/n} = M_r$ par le lemme 2.5.5. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé avec $|z| = r$, la série (2.36) a un point singulier $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda_1| = M_r$. Cela veut dire que la fonction $\lambda \mapsto g_\lambda(z)$ n'a pas d'extension holomorphe sur un ensemble ouvert Ω contenant $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > M_1\} \cup \{\lambda_1\}$.

Nous montrons que $\lambda_1 \in \sigma_W(T)$. Plus précisément, supposons que $\lambda_1 \in \rho_W(T)$. Alors $\lambda \mapsto (R_\lambda e_0)(z)$ est holomorphe sur $\rho_W(T)$ et coïncide avec g_λ sur $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > M_1\}$. Cela est une contradiction. Donc nous avons prouvé que $\lambda_1 \in \sigma_W(T)$. Cela implique que $X_2 \neq \{0\}$. Soit $0 \neq f \in X_2$. Comme T_2 est une bijection pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in X_2$ telle que $f = T_2^n g_n$. Puisque m a un zéro z_0 dans \mathbb{D} , cela implique $f = 0$ comme dans la preuve du théorème 2.5.3, on aboutit alors à une contradiction. □

Nous voulons donner un exemple concret où $M_1 < M^*$ (voir le début de la section 2.7).

Exemple 2.7.6. Soit

$$m(z) = (1 - z) \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right). \quad (2.37)$$

Alors $m \in A(\mathbb{D})$. On a $M_1 = |m(0)| = \frac{1}{e}$ puisque $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Nous voulons montrer que $M_1 < M^*$. En effet, $|m(e^{it})| = |1 - e^{it}| = 2|\sin(t/2)|$, et ainsi

$$\begin{aligned} M^* &= \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |2(\sin(t/2))| dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |2(\sin(u))| du\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log(\sin(u)) du + \log(2)\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log(\sin(u)) du &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(u)) du + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log(\sin(u)) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(u)) du + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log(\sin(\pi - u)) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(u)) du. \end{aligned}$$

2.7. LE SPECTRE DE WAELBROECK POUR LES OPÉRATEURS DE COMPOSITION
INDUITS PAR DES ROTATIONS APÉRIODIQUE SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$

Posons $I := \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(u)) du$. Par changement de variable $v = \frac{\pi}{2} - u$, on constate que $I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(v)) dv$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2I &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(u) \cos(u)) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin(2u)}{2}\right) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2u)) du - \frac{\log(2)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin(2u)) du + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2u)) du - \frac{\log(2)}{2} \\ &= \frac{I}{2} + \frac{I}{2} - \frac{\log(2)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $I = -\frac{\log(2)}{2}$ et donc $M^* = \exp(0) = 1$. Ainsi, $M^* = 1 > \frac{1}{e} = M_1$ et par conséquent, pour la fonction m donnée par (2.32),

$$\sigma(T_{A(\mathbb{D})}) = \overline{\mathbb{D}} \text{ alors que } \sigma_W(T) = C(0, 1/e).$$

Si $M_1 = \frac{1}{e} < |\lambda| \leq M^* = 1$, alors $(\lambda \text{Id} - T)$ est inversible sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ mais

$$(\lambda \text{Id} - T)^{-1} A(\mathbb{D}) \not\subset A(\mathbb{D}).$$

Pour cette fonction m nous avons aussi

$$r_\sigma(T_{H^p(\mathbb{D})}) = M^* = 1.$$

Ainsi

$$(\lambda \text{Id} - T)^{-1} H^p(\mathbb{D}) \not\subset H^p(\mathbb{D}), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

et de même lorsque $M_1 < |\lambda| \leq M^*$.

On ne sait pas si dans le théorème 2.7.5

$$\sigma_W(T) = \overline{\sigma(T)}.$$

Cela est le cas si m est constant. Si m ne l'est pas, il peut arriver que le spectre lui-même coïncide avec le disque unité ouvert de rayon M_1 . Donnons un exemple.

Exemple 2.7.7. Soit $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m(z) = z$. Alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Notons que $M_r = r$ pour $r \in]0; 1[$. Ainsi $M_1 = 1$.

Preuve. Comme $0 = m(0)$, nous avons $0 \in \sigma(T)$ (voir théorème 2.2.1).

Maintenant, soit $\lambda \neq 0$ avec $|\lambda| < 1$. Nous cherchons à montrer que $\lambda \in \sigma(T)$. En effet, supposons que $\lambda \notin \sigma(T)$. Alors, il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$zf(\beta z) - \lambda f(z) = e_0(z) \quad (\forall z \in \mathbb{D}). \quad (2.38)$$

Écrivons $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Alors, l'équation (2.38) devient

$$\sum_{n \geq 0} \beta^n a_n z^{n+1} - \lambda \sum_{n \geq 0} a_n z^n = 1,$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} -\lambda a_0 = b_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \beta^n a_n - \lambda a_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

Nous obtenons maintenant $a_n = \frac{-\beta^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\lambda^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|\lambda|} > 1$, donc cela fournit une contradiction.

Nous avons maintenant prouvé que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$. De plus, comme $M_r = r$ pour $0 < r < 1$ et $M_1 = 1$, nous avons par la proposition 2.7.2 (b) que $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. \square

2.8 Opérateurs de composition à poids induits par des automorphismes elliptiques

Dans cette section de conclusion, nous décrivons certains de nos résultats si la rotation est remplacée par un automorphisme elliptique arbitraire avec un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{D}$. Cela veut dire que nous considérons $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ donnée par

$$\varphi(z) = \Psi_\alpha \circ r_\beta \circ \Psi_\alpha$$

où $\beta \in \mathbb{T}$, $\beta \neq 1$, $r_\beta(z) = \beta z$ et $\Psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} = \Psi_\alpha^{-1}(z)$. Donc φ est conjuguée à une rotation r_β .

Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et définissons

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ par } Tf = mf \circ \varphi.$$

Soit $U : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ l'opérateur donné par $Uf = f \circ \Psi_\alpha$. Alors U est un isomorphisme et $U = U^{-1}$. Soit $\tilde{T} = UTU^{-1} = UTU$. Alors

$$\tilde{T}f = \tilde{m}f \circ r_\beta \text{ où } \tilde{m} = m \circ \Psi_\alpha.$$

Donc T est similaire à un opérateur de composition à poids induit par une rotation \tilde{T} comme considéré précédemment et par conséquent

$$\sigma(T) = \sigma(\tilde{T}), \quad \sigma_W(T) = \sigma_W(\tilde{T}).$$

Nous appelons φ *apériodique* si $\varphi_n \neq \text{Id}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $\varphi_n := \varphi \circ \dots \circ \varphi$ (n fois). Cela est équivalent à $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi les théorèmes 2.7.3 et 2.7.5 donnent le résultat suivant.

Théorème 2.8.1. *Supposons que φ est apériodique.*

a) *Si $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors*

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(\alpha)|\}.$$

b) *S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $m(z_0) = 0$, alors il existe $0 < R \leq \infty$ tel que*

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\} \text{ si } R < \infty \text{ et } \sigma_W(T) = \mathbb{C} \text{ autrement.}$$

Concernant le spectre ponctuel nous notons simplement les propositions 2.3.3 et 2.3.6 dans la situation considérée ici.

Théorème 2.8.2. *Si $m(z_0) = 0$ pour un $z_0 \in \mathbb{D}$, alors $\sigma_p(T) = \emptyset$. Ceci est toujours valide, peu importe si φ est périodique ou apériodique.*

Théorie de Denjoy-Wolff et propriétés spectrales des opérateurs de composition pondérés sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$

3.1 Introduction

La théorie spectrale des opérateurs de composition ou opérateurs de composition à poids est l'un des sujets les plus populaires de la théorie des opérateurs. Nous renvoyons aux livres [29] de Cowen et Mc Cluer et [76] de Shapiro pour une présentation complète. Dans ces deux livres ainsi que dans la vaste littérature sur ce sujet, ces opérateurs sont considérés sur des espaces de Banach de fonctions analytiques tels que l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ ou les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$. Plus généralement, on peut multiplier par un poids et considérer des opérateurs de composition à poids comme dans l'article classique [53] de Kamowitz ou des contributions plus récentes de Bourdon [15], Bonet et al. [13], Chalendar et al. [23], Galindo et al. [41], Hyvärinen et al. [51].

Ils considèrent tous ces opérateurs sur un espace de Banach X qui est continument injecté dans l'espace Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de toutes les fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert \mathbb{D} . L'objectif de ce chapitre est d'étudier le spectre directement sur l'espace Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Dans un article précédent [5] cela avait déjà été fait pour l'opérateur de composition pure $f \mapsto f \circ \varphi$, où $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ a un point fixe à l'intérieur et n'est pas un automorphisme. Ensuite, dans [4] et détaillé dans le chapitre 2, on ajoute un poids et on se restreint au cas où le symbole φ de l'opérateur de composition est un automorphisme elliptique, c'est-à-dire un automorphisme avec un point fixe dans \mathbb{D} .

Ce chapitre est une autre partie d'une étude avancée des propriétés spectrales des opérateurs de composition pondérés sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$, dans laquelle nous considérons les symboles φ des opérateurs de composition C_φ dans tous les cas omis dans [4]. En fait, les automorphismes elliptiques sont très particuliers et les cas que nous traitons ici nécessitent des arguments différents : il n'y a pas de chevauchement avec le chapitre précédent. Le contenu de ce chapitre a donné lieu à la publication suivante [3].

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, dans la section 3.2, nous caractérisons l'inversibilité (proposition 3.2.1) et la compacité (proposition 3.2.4) de l'opérateur de composition pondéré T sur l'espace Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Par ailleurs nous mentionnons un lien utile (proposition 3.2.3) entre le spectre ponctuel de T et celui de C_φ .

Ensuite, dans la section 3.3, on obtient une description complète du spectre ponctuel et

de ses espaces propres pour l'opérateur de composition elliptique pondéré (théorème 3.3.4), c'est-à-dire lorsque φ n'est pas un automorphisme et a un point fixe dans \mathbb{D} . Ceci généralise le théorème de Koenigs et nous a conduit à introduire une autre fonction clé, nommée *fonction de Koenigs pondérée*, qui est notée w . Combinée avec la fonction dite de Koenigs κ , nous pouvons prouver que les espaces propres sont de la forme $\mathbb{C}w\kappa^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Le but de la section 3.4 est de décrire l'ensemble du spectre des opérateurs de composition elliptiques pondérés (théorème 3.4.1) et de prouver que le spectre est égal au spectre ponctuel ou à l'union du spectre ponctuel avec $\{0\}$. En fait, nous prouvons une décomposition spectrale de l'opérateur T et obtenons une projection spectrale unidimensionnelle pour chaque valeur propre même si l'opérateur T n'est pas compact en général. Ces résultats sont des généralisations des résultats correspondants sans poids de [5]; mais nous simplifions également certains des arguments qui y sont donnés.

Dans la section 3.5 nous recueillons quelques définitions et résultats de la théorie dynamique holomorphe pour les applications du disque unité \mathbb{D} dans lui-même, sans point fixe dans \mathbb{D} , lesquelles se divisent principalement en deux classes : les hyperboliques et les paraboliques. Les deux dernières sections s'appuient fortement sur tout ce matériel préliminaire, où nous montrons que le spectre ponctuel des opérateurs de composition hyperbolique ou parabolique pondérés peut être vide ou égal à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Le spectre des opérateurs de composition pure peut être entièrement décrit (théorème 3.6.1 et théorème 3.7.1) grâce aux théorèmes sur les modèles fractionnaires linéaires développés par Valiron, Pommerenke et Baker-Pommerenke. Le spectre est beaucoup plus mystérieux et chaotique si l'on ajoute un poids. Nous n'avons pas pu en donner une description complète. Nous donnons des réponses partielles telles que le théorème 3.6.3, donnant une condition de régularité suffisante mais non nécessaire sur le poids au point Denjoy-Wolff du symbole φ , ce qui implique que le spectre ponctuel est $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et chaque valeur propre est de multiplicité infinie.

3.2 Opérateurs de composition pondérés arbitraires

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats qui sont valables pour des symboles arbitraires φ .

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe et $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Nous considérons l'opérateur $T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par

$$Tf = mf \circ \varphi.$$

Alors T est linéaire et continu si l'on considère la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de \mathbb{D} pour l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Dans un premier temps, nous décrivons quand T est inversible. Le résultat suivant a été obtenu par Bourdon dans [14], mais nous en donnons une preuve différente. Comme cas particulier, nous considérons l'opérateur de composition C_φ donné par

$$C_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Proposition 3.2.1. *L'opérateur T est inversible si et seulement si φ est un automorphisme et $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Preuve. Si φ est un automorphisme et $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'inverse de T est donné par

$$T^{-1}f(z) = \frac{1}{m(\varphi^{-1}(z))} f(\varphi^{-1}(z)).$$

Maintenant nous montrons la réciproque. Si $m(z_0) = 0$, alors

$$T \text{Hol}(\mathbb{D}) \subset \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(z_0) = 0\}.$$

Ainsi T n'est pas surjective. Maintenant supposons que T soit bijective. Alors $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $C_\varphi f = \frac{1}{m} T f$ définit aussi un opérateur bijectif. On déduit de [5, Corollary 2.4] que φ est un automorphisme. \square

La proposition 3.2.1 décrit le cas $0 \in \sigma(T)$. Si φ est constant, disons $\varphi(z) = \alpha$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors T est un opérateur de rang un et 0 est une valeur propre. Dans tous les autres cas $0 \notin \sigma_p(T)$.

Proposition 3.2.2. *Si φ n'est pas constant, alors $0 \notin \sigma_p(T)$.*

Preuve. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tel que $T f = 0$. Comme $m \neq 0$, on en déduit que $f \circ \varphi = 0$. Si φ n'est pas constant, alors $\varphi(\mathbb{D})$ est un ouvert non vide. Puisque f est holomorphe et s'annule sur $\varphi(\mathbb{D})$, on a que $f = 0$. \square

Nous utiliserons fréquemment le fait simple suivant dont la démonstration est omise.

Proposition 3.2.3. *Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $\mu \in \sigma_p(C_\varphi)$, alors $\lambda\mu \in \sigma_p(T)$.*

Ensuite, nous décrivons quand l'opérateur T est compact.

Rappelons que $\mathcal{V} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ est un voisinage de 0 si et seulement s'il existe un compact $K \subset \mathbb{D}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\mathcal{V}_{K,\varepsilon} := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : |f(z)| < \varepsilon \ \forall z \in K\} \subset \mathcal{V}.$$

Une application linéaire $T : X \rightarrow X$, où X est un espace Fréchet, est appelée *compacte* s'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que $T\mathcal{V}$ est relativement compacte. Chaque application linéaire compacte est continue. On se réfère à Kelley–Namioka [55] pour ces notions et propriétés des opérateurs compacts.

Nous donnons maintenant une caractérisation complète des opérateurs de composition pondérés compacts non nuls sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$, ce qui est facile ici, mais qui constitue un problème difficile sur les espaces de Banach, même sur l'un des espaces de Banach les plus sympathiques, à savoir l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. La preuve se rapproche de la preuve de [5, théorème 2.5], avec quelques modifications.

Proposition 3.2.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) T est compact sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$;
- ii) $m = 0$ ou $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)| < 1$.

Preuve. ii) \Rightarrow i) : Supposons que $m \neq 0$. Par [5, théorème 2.5], C_φ est compact si et seulement si $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\varphi(z)| < 1$. Dans ce cas T est compact comme la composition de C_φ et de l'opérateur de multiplication $f \mapsto m f$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

i) \Rightarrow ii) Supposons que $m \neq 0$ et $\varphi(\mathbb{D}) \not\subset r\mathbb{D}$ pour tout $r \in]0, 1[$. Une légère modification de la preuve de (i) \Rightarrow (ii) dans [5, théorème 2.5] montre que T n'est pas compact. Il suffit de choisir dans cette preuve $w_0 = \varphi(z_0) \in \mathbb{D}$ tel que $m(z_0) \neq 0$ et $|\varphi(z_0)| > r$. Cela est possible puisque $m \neq 0$ et $\varphi(\mathbb{D})$ est ouvert lorsque φ n'est pas constante. \square

3.3 Opérateurs de composition elliptique pondérés : spectre ponctuel

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe avec un point fixe $\alpha \in \mathbb{D}$ et telle que φ n'est pas un automorphisme. Comme conséquence du lemme de Schwarz, le théorème de Denjoy–Wolff nous dit que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact K de \mathbb{D} vers α , avec

$$\varphi_n := \varphi \circ \dots \circ \varphi \quad (n \text{ fois}).$$

Comme d'habitude, nous pouvons supposer que $\alpha = 0$. En effet, si nous considérons $\tilde{\varphi} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ donnée par

$$\tilde{\varphi}(z) = \Psi_\alpha \circ \varphi \circ \Psi_\alpha$$

où $\Psi_\alpha(z) = \frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z} = \Psi_\alpha^{-1}(z)$, alors $\tilde{\varphi}$ est conjuguée à φ avec $\tilde{\varphi}(0) = 0$.

Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et définissons

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ par } Tf = mf \circ \varphi.$$

Soit $U : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ l'opérateur donné par $Uf = f \circ \Psi_\alpha$. Alors U est un isomorphisme et $U = U^{-1}$. Posons $\tilde{T} = UTU^{-1} = UTU$. Alors

$$\tilde{T}f = \tilde{m}f \circ \tilde{\varphi} \text{ où } \tilde{m} = m \circ \Psi_\alpha.$$

Ainsi T est similaire à un opérateur de composition pondéré induit par un symbole elliptique fixant 0 et par conséquent

$$\sigma(T) = \sigma(\tilde{T}).$$

Ceci explique pourquoi dans certaines preuves nous supposons que $\varphi(0) = 0$, φ n'est pas une rotation, ce qui implique que $|\varphi'(0)| < 1$. Rappelons maintenant un résultat bien connu dû à Koenigs [56].

Théorème 3.3.1. Soient $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe tels que

$$\varphi(\alpha) = \alpha \text{ et } |\varphi'(\alpha)| < 1.$$

a) Si $\varphi'(\alpha) \neq 0$, alors $\left(\frac{\varphi^n}{\varphi'(\alpha)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de \mathbb{D} vers une fonction $\kappa \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. De plus, κ est l'unique solution de l'équation dite de Schröder associée à $\varphi'(\alpha)$:

$$f \circ \varphi = \varphi'(\alpha)f \text{ et } f'(\alpha) = 1.$$

De plus, il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telle que $f \circ \varphi = \beta f$ si et seulement si $\beta \in \{\varphi'(\alpha)^n : n \in \mathbb{N}\}$. Finalement, $f \circ \varphi = \varphi'(\alpha)^n f$ si et seulement si $f \in \mathbb{C}\kappa^n$.

b) Si $\varphi'(\alpha) = 0$, il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telle que $f \circ \varphi = \beta f$ si et seulement si $\beta = 1$ et dans ce cas f est constante.

En d'autres termes, le théorème de Koenigs fournit une description complète du spectre ponctuel de l'opérateur de composition C_φ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ lorsque $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $0 \leq |\varphi'(\alpha)| < 1$. La fonction κ est appelée *fonction de Koenigs* de φ . Afin de décrire le spectre ponctuel lorsque l'on ajoute un poids $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ à C_φ , nous nous restreignons d'abord au cas $m(\alpha) \neq 0$.

Proposition 3.3.2. Soient $\alpha \in \mathbb{D}$, $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $m(\alpha) \neq 0$ et soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que

$$\varphi(\alpha) = \alpha \text{ et } |\varphi'(\alpha)| < 1.$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de \mathbb{D} vers une fonction w , où

$$w_n(z) := \frac{m(z)m(\varphi(z)) \cdots m(\varphi_{n-1}(z))}{m(\alpha)^n}. \quad (3.1)$$

De plus w est l'unique fonction dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$m w \circ \varphi = m(\alpha)w \text{ et } w(\alpha) = 1.$$

La fonction w est appelée *fonction de Koenigs pondérée*.

Un outil utile est un léger raffinement du lemme de Schwarz, dont la preuve est répétée ici par souci d'exhaustivité (voir [76, Preuve de la proposition 1, section 5.2]).

Lemme 3.3.3. *Supposons que $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe telle que*

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } |\varphi'(0)| < 1.$$

Prenons $0 < r < 1$. Alors il existe $\delta = \delta(r) \in (0, 1)$ tel que

$$|\varphi_n(z)| \leq \delta^n |z| \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}, |z| \leq r, n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Notons $M(r)$ le maximum de $|\varphi(z)|$ pour $|z| \leq r$. Par le lemme de Schwarz $\delta(r) := \frac{M(r)}{r} < 1$. Ensuite, nous appliquons à nouveau le lemme de Schwarz à la fonction

$$\Psi(z) = \frac{\varphi(rz)}{M(r)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

et nous obtenons $|\Psi(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme Ψ est continue dans le disque unité fermé, l'inégalité est également valable pour $|z| \leq 1$. On en déduit que

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M(r)}{r} |z| = \delta(r) |z| \text{ pour tout } |z| \leq r.$$

L'itération de la dernière inégalité donne :

$$|\varphi_n(z)| \leq \delta(r) |\varphi_{n-1}(z)| \leq \delta^2 |\varphi_{n-2}(z)| \leq \dots \leq \delta^n |z| \text{ pour tout } |z| \leq r.$$

□

Preuve de la proposition 3.3.2. Comme expliqué au début de cette section, en remplaçant φ par $\tilde{\varphi} = \Psi_\alpha \circ \varphi \circ \Psi_\alpha$ et m par $\tilde{m} = m \circ \Psi_\alpha$, on peut supposer que $\alpha = 0$.

Prenons $r \in (0, 1)$ et posons $\overline{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $|\varphi'(0)| < 1$, par le lemme 3.3.3, il existe $\delta(r) \in (0, 1)$ tel que

$$|\varphi_n(z)| \leq \delta(r)^n r \text{ pour tout } z \in \overline{D}_r.$$

Le théorème de Weierstrass pour les produits infinis de fonctions holomorphes [73, p. 228] nous dit que la convergence uniforme de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \overline{D}_r découle de la convergence uniforme sur \overline{D}_r de la somme

$$\sum_{k \geq 0} \left| \frac{m(\varphi_k(z))}{m(0)} - 1 \right| = \frac{1}{|m(0)|} \sum_{k \geq 0} |m(\varphi_k(z)) - m(0)|.$$

Comme $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m(z) - m(0) = zm_1(z)$ où $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Posons $C(r) := \sup_{z \in \overline{D}_r} |m_1(z)|$. Alors

$$|m(\varphi_k(z)) - m(0)| \leq C(r) \delta(r)^k r.$$

Comme $\delta(r) < 1$, cela montre l'existence de w .

Puisque $m w_n \circ \varphi = m(0)w_{n+1}$, la convergence de $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$, implique que $m w \circ \varphi = m(0)w$. De plus, comme $w_n(0) = 1$ pour tout n , on a $w(0) = 1$.

Finalement, pour $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telle que $mf \circ \varphi = m(0)f$, une récurrence évidente implique que

$$m(m \circ \varphi)(m \circ \varphi_2) \cdots (m \circ \varphi_{n-1})f \circ \varphi_n = m(0)^n f.$$

Utilisant la convergence de φ_n vers 0 et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers w dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$, on en déduit que $f = f(0)w$. Ceci termine la preuve de la caractérisation de la fonction de Koenigs pondérée w .

□

Grâce à l'existence et aux propriétés de la fonction de Koenigs κ et de la fonction de Koenigs pondérée w , nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section, qui est une description complète du spectre ponctuel pour un opérateur de composition elliptique pondérée sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

Théorème 3.3.4. *Soient $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe tels que*

$$\varphi(\alpha) = \alpha \text{ et } |\varphi'(\alpha)| < 1.$$

Supposons que $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$. Notons κ la fonction de Koenigs quand $\varphi'(\alpha) \neq 0$ et par w la fonction de Koenigs pondérée quand $m(\alpha) \neq 0$.

a) Si $\varphi'(\alpha) \neq 0$ et $m(\alpha) \neq 0$, alors

$$\sigma_p(T) = \{m(\alpha)\varphi'(\alpha)^N : N \in \mathbb{N}\}.$$

De plus $\ker(T - m(\alpha)\varphi'(\alpha)^N \text{Id}) = \mathbb{C}w\kappa^N$.

b) Si $\varphi'(\alpha) = 0$, $m(\alpha) \neq 0$, et $\varphi \neq 0$, alors

$$\sigma_p(T) = \{m(\alpha)\}.$$

De plus $\ker(T - m(\alpha) \text{Id}) = \mathbb{C}w$.

c) Si $m(\alpha) = 0$ et $\varphi \neq 0$, alors

$$\sigma_p(T) = \emptyset.$$

d) Si $\varphi = \alpha$ et $m(\alpha) \neq 0$, alors

$$\sigma_p(T) = \{0, m(\alpha)\}.$$

De plus $\ker(T - m(\alpha) \text{Id}) = \mathbb{C}m$ et $\ker(T) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(\alpha) = 0\}$.

e) Si $\varphi = \alpha$ et $m(\alpha) = 0$, alors

$$\sigma_p(T) = \{0\},$$

avec $\ker(T) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(\alpha) = 0\}$.

Preuve. Comme d'habitude nous supposons que $\alpha = 0$.

Notons que $Tf = \lambda f$ pour $f \neq 0$, $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, est équivalent à

$$m(z)\varphi(z)^N g(\varphi(z)) = \lambda z^N g(z), \quad (3.2)$$

où $f(z) = z^N g(z)$, $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $g(0) \neq 0$. En particulier, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $g(z) \neq 0$ pour $|z| \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $0 < |z| \leq \varepsilon$,

$$\lambda = m(z) \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)^N \frac{g(\varphi(z))}{g(z)}.$$

Ainsi, en prenant la limite quand $z \rightarrow 0$, nous obtenons $\lambda = m(0)\varphi'(0)^N$. En d'autres termes nous avons prouvé que

$$\sigma_p(T) \subset \{m(0)\varphi'(0)^N : N \in \mathbb{N}\}. \quad (3.3)$$

De plus $Tf = m(0)\varphi'(0)^N f$ implique que $T^n f = m(0)^n \varphi'(0)^{Nn} f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$m(0)^n \varphi'(0)^{Nn} z^N g(z) = m(z) \cdots m(\varphi_{n-1}(z)) \varphi_n(z)^N g(\varphi_n(z)), \quad (3.4)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) Puisque $m(0) \neq 0$ et $\varphi'(0) \neq 0$, (3.4) donne

$$f(z) = z^N g(z) = w_n(z) \left(\frac{\varphi_n(z)}{\varphi'(0)^n} \right)^N g(\varphi_n(z)),$$

où w_n est définie par (3.1). En prenant la limite quand $n \rightarrow \infty$, par le théorème 3.3.1 et la proposition 3.3.2, nous obtenons

$$f = g(0)w\kappa^N.$$

b) Si $m(0) \neq 0$ et $\varphi'(0) = 0$, par (3.3), $\sigma_p(T) \subset \{m(0), 0\}$. Puisque $\text{Hol}(\mathbb{D})$ est une algèbre intégrale avec $\varphi \neq 0$ et $m \neq 0$, $0 \notin \sigma_p(T)$. Par la proposition 3.3.2, $\ker(T - m(0)\text{Id}) = \mathbb{C}w$.

c) Si $m(0) = 0$, par (3.3), $\sigma_p(T) \subset \{0\}$. Comme $m \neq 0$ et $\varphi \neq 0$, comme dans b), puisque $\text{Hol}(\mathbb{D})$ est une algèbre intégrale, $0 \notin \sigma_p(T)$ et donc $\sigma_p(T) = \emptyset$.

d) et e) Si $\varphi = 0$, alors T est un opérateur de rang 1, à savoir, $Tf = mf(0)$, dont le spectre ponctuel et les espaces propres sont faciles à décrire. \square

Le tableau suivant résume nos résultats sur le spectre ponctuel de T , où $Tf = mf \circ \varphi$, à condition que $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ soit une fonction holomorphe fixant $\alpha \in \mathbb{D}$ et que φ ne soit pas un automorphisme.

	0 < $ \varphi'(\alpha) < 1$	0 = $\varphi'(\alpha)$, $\varphi \neq \alpha$	$\varphi = \alpha$
$m(\alpha) \neq 0$	$\{m(\alpha)\varphi'(\alpha)^n : n \in \mathbb{N}\}$	$\{m(\alpha)\}$	$\{0, m(\alpha)\}$
$m(\alpha) = 0$	\emptyset	\emptyset	$\{0\}$

3.4 Spectre et décomposition des opérateurs de composition elliptiques pondérés

Dans cette section, nous considérons une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ avec un point fixe interne $\alpha \in \mathbb{D}$. On suppose que φ n'est pas un automorphisme. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$, et considérons l'opérateur

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ défini par } Tf = mf \circ \varphi.$$

Dans la section 3.3 le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ a été complètement déterminé. L'un des objectifs de cette section est de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.4.1.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}. \tag{3.5}$$

Rappelons que la proposition 3.2.2 nous dit que $0 \notin \sigma_p(T)$ à moins que φ soit constante. D'autre part, puisque φ n'est pas un automorphisme, nous savons d'après la proposition 3.2.1 que $0 \in \sigma(T)$. Ceci explique le rôle de 0 dans (3.5).

Le lemme suivant sera crucial.

Lemme 3.4.2. *Supposons que $\alpha = 0$. Soient $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $0 < \varepsilon < 1$ et $f \in \text{Hol}(\varepsilon\mathbb{D})$ vérifient*

$$\lambda f(z) - m(z)f(\varphi(z)) = g(z) \text{ pour tout } z \in \varepsilon\mathbb{D}, \tag{3.6}$$

alors f a une extension $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$(\lambda \text{Id} - T)\tilde{f} = g \text{ sur } \mathbb{D}.$$

La preuve de [5, lemme 4.2] pour le cas où $m \equiv 1$ est aussi valable dans notre situation plus générale.

Nous considérerons les différents cas considérés dans le théorème 3.3.4 pour la description du spectre ponctuel.

Cas a) $\varphi'(\alpha) \neq 0$ et $m(\alpha) \neq 0$.

C'est le cas le plus intéressant. Comme précédemment on note la fonction de Koenigs par κ ; i.e.

$$\kappa \circ \varphi = \varphi'(\alpha)\kappa, \quad \kappa'(\alpha) = 1,$$

et par w la fonction de Koenigs pondérée qui vérifie

$$m w \circ \varphi = m(\alpha)w, \quad w(\alpha) = 1.$$

Rappelons que les valeurs propres de T sont

$$\lambda_n := m(\alpha)\varphi'(\alpha)^n,$$

avec pour sous espace propre $\mathbb{C}w\kappa^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Posons

$$W_n = \text{Span}\{w\kappa^l : l = 0, 1, \dots, n\}$$

et

$$\text{Hol}_n(\alpha) := \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ pour } l = 0, 1, \dots, n\}.$$

Proposition 3.4.3. *Supposons que $\varphi'(\alpha) \neq 0$ et $m(\alpha) \neq 0$. Alors, ce qui suit est valable.*

a) $\text{Hol}(\mathbb{D}) = W_n \oplus \text{Hol}_n(\alpha)$.

b) Les projections Q_n sur W_n associées à la décomposition en a) sont données par

$$Q_n = \sum_{k=0}^n P_k, \quad P_k f = \langle \Psi_k, f \rangle w\kappa^k,$$

où $\Psi_k \in \text{Hol}(\mathbb{D})'$, $k \in \mathbb{N}$ peut être obtenu par récurrence par les formules

$$\langle \Psi_0, f \rangle = f(\alpha)w \text{ et } \langle \Psi_n, f \rangle = \frac{1}{n!}(f - Q_{n-1}f)^{(n)}(\alpha) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

c) $TQ_n = Q_n T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $P_n T = T P_n = \lambda_n P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) $P_n P_k = \delta_{n,k} P_n$, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ (où $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker).

f) Il existe une constante $c_{n,k} \in \mathbb{C}$, $n \geq k$, telle que

$$\langle \Psi_n, f \rangle = \sum_{k=0}^n c_{n,k} f^{(k)}(\alpha).$$

Pour $m \equiv 1$ cette proposition est prouvée dans [5, corollaire 3.3 et théorème 3.2]. Nous donnons ici un argument plus simple pour obtenir les projections Q_n de manière récursive.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord nous montrons que

$$W_n \cap \text{Hol}_n(\alpha) = \{0\}.$$

D'après [5, Lemma 3.1] on a que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\kappa(\alpha) = 0, \quad (\kappa^n)^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ pour } l = 0, \dots, n-1 \text{ et } (\kappa^n)^{(n)} = n!. \quad (3.7)$$

Soit

$$f = \sum_{l=0}^n c_l w\kappa^l \in \text{Hol}_n(\alpha).$$

Alors nous montrons que $c_l = 0$ pour $l = 0, \dots, n$. Pour $l = 0$ cela est une conséquence de $0 = f(\alpha) = c_0$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $c_l = 0$ pour $0 \leq l \leq k - 1$. Alors $f = \sum_{l=k}^n c_l w \kappa^l$. Remarquons que par (3.7) $(w\kappa)^{(l)}(\alpha) = 0$ pour tout $l \geq k + 1$ et $(w\kappa^k)^{(k)}(\alpha) = w(\alpha)(\kappa^k)^{(k)} = k!$. Ainsi $c_k = 0$ et cela prouve ce que l'on voulait.

Ensuite, montrons b) par récurrence.

Posons Ψ_0 par

$$\langle \Psi_0, f \rangle = f(\alpha).$$

Alors $Q_0 f = \langle \Psi_0, f \rangle w \in W_0$ et donc $f - Q_0 f = (f - f(\alpha)w)(\alpha) = 0$. D'où $f - Q_0 f \in \text{Hol}_0(\alpha)$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Cela prouve b) pour $n = 0$.

Supposons que $\Psi_l \in \text{Hol}(\mathbb{D})'$ ont été construits de telle sorte que pour

$$P_l f = \langle \Psi_l, f \rangle w \kappa^l \text{ et } Q_k = \sum_{l=0}^k P_l,$$

on ait

$$f - Q_l f \in \text{Hol}_l(\alpha) \text{ for } l = 0, \dots, n - 1 \text{ et tout } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Nous cherchons $c := \langle \Psi_n, f \rangle$ telle que pour

$$Q_n f := Q_{n-1} f + c w \kappa^n,$$

nous ayons

$$f - Q_n f \in \text{Hol}_n(\alpha).$$

Pour $l < n$, par (3.7),

$$(f - Q_n f)^{(l)}(\alpha) = (f - Q_{n-1} f)^{(l)}(\alpha)$$

et ce dernier terme est 0 par l'hypothèse de récurrence. Pour $l = n$, nous avons

$$\begin{aligned} (f - Q_n f)^{(n)}(\alpha) &= (f - Q_{n-1} f)^{(n)}(\alpha) - (c w \kappa)^{(n)}(\alpha) \\ &= (f - Q_{n-1} f)^{(n)}(\alpha) - c n!, \end{aligned}$$

par (3.7). Ainsi $c = \langle \Psi_n, f \rangle$ comme définie dans b), est l'unique constante telle que $(f - Q_n f)^{(n)}(\alpha) = 0$. Les preuves de a) et b) sont alors complètes.

c) Il est clair que $TW_n \subset W_n$. Nous montrons maintenant que $T \text{Hol}_n(\alpha) \subset \text{Hol}_n(\alpha)$. Soit $f \in \text{Hol}_n(\alpha)$. Il existe $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$f(z) = (z - \alpha)^{n+1} g(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Puisque $\varphi(\alpha) = \alpha$, il existe $\Psi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $\varphi(z) - \alpha = (z - \alpha)\Psi(z)$ sur \mathbb{D} . Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} T f(z) &= m(z)(\varphi(z) - \alpha)^{n+1} g(\varphi(z)) \\ &= m(z)(z - \alpha)^{n+1} \Psi(z)^{n+1} g(\varphi(z)). \end{aligned}$$

On en déduit que $T f \in \text{Hol}_n(\alpha)$. Les inclusions

$$TW_n \subset W_n \text{ et } T \text{Hol}_n(\alpha) \subset \text{Hol}_n(\alpha)$$

impliquent que $Q_n T = T Q_n$.

d) Puisque $P_0 = Q_0$ et $P_n = Q_n - Q_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on déduit de c) que $P_n T = T P_n$. De plus,

$$T P_n f = \langle \Psi_n, f \rangle T(w \kappa^n) = \langle \Psi_n, f \rangle \lambda_n w \kappa^n = \lambda_n P_n f.$$

e) Soit $k, l \in \mathbb{N}, k \neq l$. Alors par d),

$$\lambda_k P_l(w\kappa^k) = P_l T(w\kappa^k) = \lambda_l P_l(w\kappa^k).$$

On en déduit que $P_l(w\kappa^k) = 0$. D'où

$$P_l P_k f = P_l \langle \Psi_k, f \rangle (w\kappa^k) = \langle \Psi_k, f \rangle P_l(w\kappa^k) = 0.$$

Nous montrons par récurrence que $P_n^2 = P_n$.

Pour $n = 0$ nous avons $\langle \Psi_0, w \rangle = w(\alpha) = 1$. Cela implique que $P_0^2 = P_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_k^2 = P_k$ pour tout $k \leq n-1$. Alors

$$\begin{aligned} P_n^2 &= (Q_n - Q_{n-1})^2 = Q_n^2 - Q_n Q_{n-1} - Q_{n-1} Q_n + Q_{n-1}^2 \\ &= Q_n - 2 \sum_{k=0}^n P_k \sum_{l=0}^{n-1} P_l + Q_{n-1} = Q_n - 2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k^2 + Q_{n-1} \\ &= Q_n - 2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k + Q_{n-1} = P_n. \end{aligned}$$

f) se déduit par récurrence à partir de b). □

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal de cette section. Pour $m \equiv 1$ ceci est prouvé dans [5, Theorem 4.1]. Ici, nos arguments sont légèrement différents.

Posons $\lambda_n := m(\alpha)\varphi'(\alpha)^n, n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ et

$$0 < |\lambda_{n+1}| < |\lambda_n| \text{ si } m(\alpha) \neq 0 \text{ et } \varphi'(\alpha) \neq 0.$$

Théorème 3.4.4. *Supposons que $m(\alpha) \neq 0$ et $\varphi'(\alpha) \neq 0$. Alors*

$$\sigma(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

Preuve. Nous utilisons les résultats de la proposition 3.4.3. Soit $T_n := T|_{\text{Hol}_n(\alpha)}$ et $S_n := T_{W_n}$. Alors

$$\sigma(T) = \sigma(T_n) \cup \sigma(S_n) \tag{3.8}$$

et

$$\sigma(S_n) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}. \tag{3.9}$$

Cela découle de la proposition 3.4.3 c). Nous cherchons à montrer que

$$\sigma(T_n) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq |\lambda_{n+1}|\}. \tag{3.10}$$

Soit $|\lambda| > |\lambda_{n+1}|$. Comme $w\kappa^k \notin \text{Hol}_n(\alpha)$ pour $k = 0, \dots, n$, on en déduit que $\lambda \notin \sigma_p(T_n)$. Ainsi $\lambda \text{Id} - T_n$ est injectif. Montrons la surjectivité. Prenons $\eta > 1$ et $q > |\varphi'(\alpha)|$ tels que $\eta|m(\alpha)|q^{n+1} < |\lambda|$. Cela est possible puisque

$$|\lambda| > |\lambda_{n+1}| = |m(\alpha)||\varphi'(\alpha)|^{n+1}.$$

Maintenant prenons $0 < \varepsilon < 1$ tel que, pour $|z| \leq \varepsilon$,

$$|m(z)| \leq \eta|m(\alpha)| \text{ et } |\varphi(z)| \leq q|z|.$$

Alors $|\varphi_k(z)| \leq q^k |z| \leq q^k$ pour $|z| \leq \varepsilon$. Soit $g \in \text{Hol}_n(\alpha)$. Alors il existe $B \geq 0$ tel que $|g(z)| \leq B|z|^{n+1}$ si $|z| \leq \varepsilon$. Maintenant nous estimons, pour $|z| \leq \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{m_k(z)g(\varphi_k(z))}{\lambda^{k+1}} \right| &\leq \frac{\eta^k |m(\alpha)|^k B |\varphi_k(z)|^{n+1}}{|\lambda|^{k+1}} \\ &\leq \frac{B}{|\lambda|} \left(\frac{\eta |m(\alpha)| q^{n+1}}{|\lambda|} \right)^k. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\eta |m(\alpha)| q^{n+1}}{|\lambda|} < 1$, la série

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k(z)g(\varphi_k(z))}{\lambda^{k+1}}$$

converge uniformément sur $\varepsilon\mathbb{D}$ et définit une fonction $f \in \text{Hol}(\varepsilon\mathbb{D})$. On peut voir facilement que

$$\lambda f - m f \circ \varphi = g \text{ sur } \varepsilon\mathbb{D}.$$

On déduit du lemme 3.4.2 que f a une extension holomorphe $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ vérifiant

$$\lambda \tilde{f} - m \tilde{f} \circ \varphi = g.$$

Cela prouve la surjectivité et (3.10) est prouvée. Maintenant on déduit de (3.9) et (3.10) que

$$\sigma(T) \subset \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Puisque $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ par le théorème 3.3.4, la preuve est terminée. □

On déduit le corollaire suivant de la preuve.

Corollaire 3.4.5. Soit $T_n := T|_{\text{Hol}_n(\alpha)}$. Alors

$$\sigma(T_n) = \{\lambda_k : k \geq n+1\} \cup \{0\}.$$

Preuve. Par le théorème 3.4.4 et (3.8) et (3.9) nous avons

$$\{0\} \cup \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}^*\} = \sigma(T_n) \cup \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\} \text{ et } |\lambda| \leq |\lambda_m| \text{ pour } \lambda \in \sigma(T_n).$$

Ainsi, on en déduit le résultat. □

La proposition 3.4.3 et le théorème 3.4.4 montrent que T a les mêmes propriétés spectrales qu'un opérateur compact. Cependant, nous savons d'après la proposition 3.2.4 que T n'est compact que dans une situation particulière, à savoir lorsque $\varphi(\mathbb{D}) \subset r\mathbb{D}$ pour $r \in]0, 1[$.

Signalons enfin que l'opérateur P_n est la projection spectrale associée à λ_n . Rendons cela plus précis.

Proposition 3.4.6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $X_1 = \mathbb{C}w\kappa^n$ et $X_2 = \ker P_n$. Alors X_1 et X_2 sont invariants par T , $\text{Hol}(\mathbb{D}) = X_1 \oplus X_2$ et

$$\sigma(T_{X_1}) = \{\lambda_n\} \text{ et } \sigma(T_{X_2}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda_n\}. \quad (3.11)$$

De plus, la décomposition de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ en deux tels sous-espaces invariants X_1 et X_2 tels que (3.11) soit vraie est unique.

La preuve de cette proposition est similaire à [5, Theorem 4.6] et l'unicité est facile à prouver.

Considérons maintenant les cas restants $b) - e)$ du théorème 3.3.4. Tout d'abord, nous supposons que $\varphi'(\alpha) = 0$. La preuve du résultat suivant nécessite une légère modification de celle donnée dans [5, Theorem 4.10].

Théorème 3.4.7. *Supposons que $\varphi'(\alpha) = 0$. Alors*

$$\sigma(T) = \{m(\alpha), 0\} = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

Preuve. Nous savons d'après le théorème 3.3.4 que $\sigma_p(T) \cup \{0\} = \{m(\alpha), 0\}$, et d'après la proposition 3.2.1 que $0 \in \sigma(T)$. Soit $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq m(\alpha)$. Montrons que $\lambda \notin \sigma(T)$. Nous savons déjà que $\lambda \text{Id} - T$ est injectif. Dans le but de prouver la surjectivité, nous supposons d'abord que $\alpha = 0$. La preuve de la surjectivité se divise en trois étapes.

Étape 1. Soit $g = cw$, avec $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Puisque

$$\lambda w - Tw = (\lambda - m(0))w + (m(0) \text{Id} - T)w = (\lambda - m(0))w,$$

$f = \frac{c}{\lambda - m(0)}$ résout l'équation fonctionnelle $\lambda f - Tf = cw$.

Étape 2. Soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $g(0) = 0$. Alors il existe $g_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $g(z) = zg_1(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme $\varphi'(0) = 0$ il existe des fonctions holomorphes τ_n dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ telles que $\varphi_n(z) = z^{2^n} \tau_n(z)$. On déduit du lemme de Schwarz que $\tau_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Soient $0 < r_0 < 1$, $c_1 = \sup_{|z| \leq r_0} |g_1(z)|$ et $c = \sup_{|z| \leq r_0} |m(z)|$. Alors, pour $|z| \leq r_0$,

$$\frac{|m_n(z)g(\varphi_n(z))|}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{c^n |z|^{2^n} c_1}{|\lambda|^n} \leq \frac{c^n |z|^{2^n} c_1}{|\lambda|^n |\lambda|},$$

où $m_n(z) := m(z)m(\varphi(z)) \cdots m(\varphi_{n-1}(z))$. Maintenant prenons $0 < \varepsilon \leq r_0$ tel que $\frac{c\varepsilon^2}{|\lambda|} < 1$. Alors

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(z)g(\varphi_n(z))}{\lambda^{n+1}}$$

converge uniformément sur $\varepsilon\mathbb{D}$ et définit une fonction $f \in \text{Hol}(\varepsilon\mathbb{D})$ vérifiant $\lambda f - mf \circ \varphi = g$ sur $\varepsilon\mathbb{D}$. Alors, par le lemme 3.4.2 nous trouvons $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $\lambda \tilde{f} - m\tilde{f} \circ \varphi = g$.

Étape 3. Soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Par l'étape 2 nous trouvons $f_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$\lambda f_1 - mf \circ \varphi = g - g(0)w,$$

et par l'étape 1 nous trouvons $f_2 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que

$$\lambda f_2 - mf \circ \varphi = g(0)w.$$

Ainsi $f := f_1 + f_2$ résout $\lambda f - mf \circ \varphi = g$.

Enfin, le cas $\alpha \neq 0$ peut être réduit à $\alpha = 0$ via la transformation de similarité habituelle comme expliqué au début de la section 3.3. \square

Dans le théorème précédent $m(\alpha) = 0$ était admis. Mais dans ce cas, l'hypothèse " $\varphi'(\alpha) = 0$ " n'est pas nécessaire. En fait, ce qui suit est valable. Rappelons que nous supposons toujours que φ n'est pas un automorphisme.

Théorème 3.4.8. *Si $m(\alpha) = 0$ alors $\sigma(T) = \{0\}$.*

Preuve. En utilisant la transformation de similarité au début de la section 3.3, nous pouvons supposer que $\alpha = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. D'après le théorème 3.3.4 nous savons que $\sigma_p(T) = \emptyset$. Ainsi $\lambda \text{Id} - T$ est injectif. Montrons la surjectivité. Soit $0 < \varepsilon < \min\{|\lambda|, 1\}$. Comme $m(0) = 0$, il existe $0 < r < 1$ tel que $|m(z)| \leq \varepsilon$ si $|z| \leq r$. Puisque $|\varphi(z)| \leq |z|$, on en déduit que $|m_n(z)| \leq \varepsilon^n$ pour $|z| \leq r$. Soit $c = \sup_{|z| \leq r} |g(z)|$. Alors, pour $|z| \leq r$,

$$\frac{|m_n(z)g(\varphi_n(z))|}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{|c|}{|\lambda|} \left(\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right)^n.$$

Donc

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(z)}{\lambda^{n+1}} g(\varphi_n(z))$$

converge uniformément sur $\varepsilon\mathbb{D}$ et définit une fonction $f \in \text{Hol}(\varepsilon\mathbb{D})$ vérifiant $\lambda f - m f \circ \varphi = g$. Le lemme 3.4.2 nous donne maintenant $\tilde{f} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ vérifiant $(\lambda \text{Id} - T)\tilde{f} = g$. Nous avons montré que $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \rho(T)$. D'un autre côté, on a $0 \in \sigma(T)$ puisque $m(\alpha) = 0$. \square

Enfin nous discutons du cas où φ est constante, c'est-à-dire $\varphi(z) = \alpha$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors T est l'opérateur de rang un donné par

$$Tf = f(\alpha)m.$$

Théorème 3.4.9. *Si φ est constante, alors $\sigma(T) = \{m(\alpha), 0\} = \sigma_p(T)$.*

Preuve. a) Si $m(\alpha) = 1$, alors T est une projection et donc $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0, 1\}$.

b) Si $m(\alpha) \neq 0$, on déduit de a) que

$$\sigma\left(\frac{1}{m(\alpha)}T\right) = \sigma_p\left(\frac{1}{m(\alpha)}T\right) = \{0, 1\},$$

ce qui implique ce que l'on veut.

c) Si $m(\alpha) = 0$, alors $Tm = 0$. Donc $0 \in \sigma_p(T)$. On déduit du théorème 3.4.8 que $\sigma(T) = \{0\}$. \square

Maintenant le théorème 3.4.1 se déduit des théorèmes 3.4.7, 3.4.8 et 3.4.9.

3.5 Fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} sans point fixe

Dans cette section nous recueillons quelques résultats et définitions de la théorie dynamique holomorphe, très utiles dans les sections 3.6 et 3.7.

On rappelle d'abord la notion de limite non tangentielle et de dérivée angulaire en un point ξ du cercle unité que l'on peut retrouver dans le livre [19].

Soient $\beta \in (0, \pi/2)$ et $r \in (0, 2 \cos \beta)$. Un angle de Stolz \hat{S} en $\xi \in \partial\mathbb{D}$ est défini par

$$\hat{S} := \{z \in \mathbb{D} : |\arg(1 - \bar{\xi}z)| < \beta, |z - \xi| < r\}.$$

Définition 3.5.1. *Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On dit que f a une limite non tangentielle ou limite angulaire $L \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ au point $\xi \in \partial\mathbb{D}$ s'il existe un angle de Stolz \hat{S} en ξ tel que $f(z) \rightarrow L$ quand $z \rightarrow \xi$, $z \in \hat{S}$. Dans ce cas, on écrit*

$$\angle \lim_{z \rightarrow \xi} f(z) = L.$$

On dit que f a une dérivée angulaire $f'(\tau)$ au point $\tau \in \partial\mathbb{D}$ si $f(\tau) := \angle\lim_{z \rightarrow \tau} f(z)$ existe dans \mathbb{C} et si

$$f'(\tau) = \angle\lim_{z \rightarrow \tau} \frac{f(z) - f(\tau)}{z - \tau}$$

existe dans $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$.

Rappelons maintenant le remarquable théorème de Denjoy-Wolff (voir par exemple [76, Chapitre 5] pour une démonstration détaillée).

Théorème 3.5.2. Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe sans point fixe dans \mathbb{D} . Alors il existe un unique point $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tous les sous-ensembles compacts de \mathbb{D} vers ξ .

Le point ξ est appelé le *point de Denjoy-Wolff* de φ .

La proposition suivante permet sous certaines conditions de relier la dérivée angulaire avec la limite angulaire de la dérivée [77, 71].

Proposition 3.5.3. Soient $\xi \in \partial\mathbb{D}$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Supposons que $f(\tau) := \angle\lim_{z \rightarrow \tau} f(z)$ existe dans \mathbb{C} , alors

$$\angle\lim_{z \rightarrow \tau} \frac{f(z) - f(\tau)}{z - \tau} = l \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$$

si et seulement si $\angle\lim_{z \rightarrow \xi} f'(z) = l \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$.

Maintenant, rappelons le théorème de Julia–Carathéodory qui décrit la dérivée angulaire au point de Denjoy-Wolff de φ [76, p.78].

Théorème 3.5.4. Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) φ n'a pas de point fixe dans \mathbb{D} ;
- ii) il existe un unique $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$\gamma := \angle\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{\varphi(z) - \xi}{z - \xi}$$

existe avec $0 < \gamma \leq 1$;

- iii) il existe un unique $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$\angle\lim_{z \rightarrow \xi} \varphi(z) = \xi \quad \text{et} \quad \angle\lim_{z \rightarrow \xi} \varphi'(z) = \gamma \leq 1;$$

- iv) il existe un unique $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$d(\xi) := \liminf_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} = \gamma \in (0, 1].$$

De plus, les trois points ξ dans ii), iii) et iv) sont les mêmes que le point ξ dans le théorème 3.5.2.

Le théorème suivant est le théorème de Julia (voir [76, p. 63]).

Théorème 3.5.5. Soient $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe non constante, $\eta, \omega \in \partial\mathbb{D}$. s'il existe $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ qui converge vers ω et tel $\varphi(p_n) \rightarrow \eta$ et

$$\frac{1 - |\varphi(p_n)|}{1 - |p_n|} \rightarrow \delta < \infty,$$

alors

a) $\delta > 0$;

b) $\varphi(H(\omega, \lambda)) \subset H(\eta, \lambda\delta)$ pour tout $\lambda > 0$ où

$$H(\omega, \lambda) := \{z \in \mathbb{D} : |1 - z\bar{\omega}|^2 < \lambda(1 - |z|^2)\};$$

c) $\angle \lim_{z \rightarrow \omega} \varphi(z) = \eta$.

L'ensemble $H(\omega, \lambda)$ dans le théorème de Julia est un disque à l'intérieur de \mathbb{D} qui touche la frontière de \mathbb{D} au point w et est appelé horodisque. Le lemme suivant nous montre que celui-ci est un disque euclidien.

Lemme 3.5.6. Soient $\tau \in \partial\mathbb{D}$ et $k > 0$. L'horodisque $H(\tau, k)$ est le disque centré en $\frac{\tau}{k+1}$ et de rayon $\frac{k}{k+1}$.

Les fonctions holomorphes de \mathbb{D} dans \mathbb{D} avec aucun point fixe dans \mathbb{D} se divisent en deux catégories.

Définition 3.5.7. Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} avec aucun point fixe dans \mathbb{D} , et soit ξ son point de Denjoy-Wolff.

a) Si la dérivée angulaire $\varphi'(\xi)$ est dans $]0, 1[$, alors φ est dite hyperbolique.

b) Si la dérivée angulaire $\varphi'(\xi)$ est égale à 1, alors φ est dite parabolique.

Lorsque φ hyperbolique, on peut ajouter un peu de raffinement dans le théorème 3.5.2 (voir [29, Lemma 2.66, p82]).

Lemme 3.5.8. Soit φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , et notons par $\xi \in \partial\mathbb{D}$ son point de Denjoy-Wolff. Soit $K \subset \mathbb{D}$ un compact, il existe un angle de Stolz en ξ qui contient $\varphi_n(K)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En fait, toutes les fonctions holomorphes de \mathbb{D} dans \mathbb{D} sans point fixe dans \mathbb{D} peuvent être modélisées par une fraction linéaire.

Soit \mathbb{H} le demi-plan droit ouvert de \mathbb{C} .

Le premier outil très utile pour les propriétés spectrales des opérateurs de composition est dû à Valiron [81].

Théorème 3.5.9. Soit φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} avec ξ comme point de Denjoy-Wolff. Il existe une fonction holomorphe $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ telle que

$$\Psi \circ \varphi = \frac{1}{\varphi'(\xi)} \Psi.$$

On peut aussi associer une fonction de Koenigs unique à une fonction hyperbolique, comme démontré dans [20].

Proposition 3.5.10. Soit φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} avec ξ comme point de Denjoy-Wolff. Il existe une unique fonction holomorphe $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ telle que

$$\Psi \circ \varphi = \frac{1}{\varphi'(\xi)} \Psi \text{ et } |\Psi(0)| = 1.$$

Pommerenke et Baker ont montré en 1979 [9, 72] que les fonctions holomorphes paraboliques de \mathbb{H} se divisent en deux sous-cas, distingués par le comportement des orbites par rapport à la métrique pseudo-hyperbolique, définie sur \mathbb{H} par

$$\rho(z, w) = \frac{|z - w|}{|1 - \bar{w}z|}.$$

Nous suivons la terminologie introduite dans [25].

Définition 3.5.11. Soit φ une fonction holomorphe parabolique de \mathbb{H} dans \mathbb{H} . La fonction φ est dite de *pas hyperbolique positif* si

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \rho(\varphi_{n+1}(z_0), \varphi_n(z_0)) > 0,$$

pour tout $z_0 \in \mathbb{H}$.

La fonction φ est dite de *pas hyperbolique nul* si

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \rho(\varphi_{n+1}(z_0), \varphi_n(z_0)) = 0,$$

pour tout $z_0 \in \mathbb{H}$.

Dans les deux cas l'infimum est le même que la limite car φ diminue la métrique pseudo-hyperbolique ρ . Il s'avère que cette dichotomie de séparation est indépendante du "point de base" : si elle vaut pour un $z_0 \in \mathbb{H}$ alors elle vaut pour tous.

Pommerenke [72] a prouvé le résultat suivant.

Théorème 3.5.12. Soit φ une fonction holomorphe parabolique de \mathbb{H} dans \mathbb{H} et de *pas hyperbolique positif*. Il existe une fonction holomorphe $\Lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ solution de l'équation d'Abel

$$\Lambda \circ \varphi = \Lambda + i.$$

Puis Pommerenke et Baker [9] ont étudié le cas restant, et ont obtenu un résultat similaire au théorème 3.5.12, sauf que l'image de Λ n'est pas nécessairement contenue dans un demi-plan.

Théorème 3.5.13. Soit φ une fonction holomorphe parabolique de \mathbb{H} dans \mathbb{H} et de *pas hyperbolique nul*. Il existe une fonction holomorphe $\Lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\Lambda \circ \varphi = \Lambda + i.$$

Compte tenu des résultats de Valiron et Baker-Pommerenke, la terminologie "hyperbolique" et "parabolique" semble naturelle puisque φ vérifie une relation d'entrelacement par Ψ ou Λ avec un automorphisme hyperbolique ou parabolique du demi-plan droit, respectivement.

Pour la suite, rappelons quelques définitions (voir [74, Chapter 15] et [2]).

Définition 3.5.14. Soient $a \in \mathbb{H}$ et φ une fonction holomorphe de \mathbb{H} dans \mathbb{H} . L'orbite de z_0 par φ est la suite $(\varphi_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 3.5.15. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$ est appelée

a) une suite de Blaschke si

$$\sum_{n \geq 0} (1 - |a_n|) < \infty,$$

b) une suite interpolante si chaque problème d'interpolation $f(a_j) = b_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, avec $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans \mathbb{C} , a une solution f dans l'algèbre des fonctions bornées et analytiques sur \mathbb{D} .

Proposition 3.5.16. La suite $(B_n)_{n \geq 0}$ associée à la suite de Blaschke $(a_n)_{n \geq 0}$ converge dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$, où

$$B_n(z) = \prod_{k=0}^n \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}$$

et avec la convention $\frac{\overline{a_n}}{|a_n|} = 1$ si $a_n = 0$. La limite de $(B_n)_{n \geq 0}$ est le produit de Blaschke associé à la suite de Blaschke $(a_n)_{n \geq 0}$.

De plus, une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite interpolante si et seulement si c'est une suite de Blaschke telle que

$$\inf_{k \geq 0} \prod_{j \geq 0, j \neq k} \left| \frac{a_k - a_j}{1 - \overline{a_k}a_j} \right| > 0.$$

Un autre phénomène, présenté ici et spécifique aux fonctions hyperboliques arbitraires de \mathbb{D} , est démontré dans [16, Theorem 4.4].

Théorème 3.5.17. Soit φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} . Pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'orbite de z par φ , à savoir $(\varphi_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite de Blaschke.

Pour une fonction parabolique de \mathbb{D} , la situation est plus délicate. Le résultat suivant est dû à Cowen [28, proposition 4.9].

Théorème 3.5.18. Soit φ une fonction holomorphe parabolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} de **pas hyperbolique positif**. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'orbite de z par φ est une suite interpolante de \mathbb{D} et donc est une suite de Blaschke.

Nous concluons cette section avec le cas restant, c'est-à-dire les fonctions paraboliques de \mathbb{D} de pas hyperbolique nul.

Théorème 3.5.19. a) La fonction φ définie par

$$\varphi(z) = \exp\left(-2 \frac{1-z}{1+z}\right)$$

est une fonction holomorphe **parabolique** de \mathbb{D} dans \mathbb{D} de **pas hyperbolique nul** telle que pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$\sum_{n \geq 1} (1 - |\varphi_n(z_0)|) = \infty.$$

b) Il existe des exemples de fonctions paraboliques de \mathbb{D} de **pas hyperbolique nul** telle que toutes les orbites de $z \in \mathbb{D}$ par φ soit une suite de Blaschke.

Preuve. a) est la proposition 4.7 dans [16] et b) découle de Aaronson [1], et est détaillé dans [16, section 5.2]. \square

3.6 Opérateurs de composition hyperbolique pondérés

Dans cette section nous supposons que φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$. L'opérateur T est l'opérateur de composition pondéré défini sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ par

$$Tf = m C_\varphi f = m f \circ \varphi.$$

3.6.1 Opérateurs de composition hyperbolique

Grâce aux théorème 3.5.9 et à la proposition 3.2.1 nous pouvons donner une description complète du spectre de C_φ lorsque φ est hyperbolique.

Théorème 3.6.1. *Le spectre ponctuel de C_φ est donné par*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ avec } \dim \ker(C_\varphi - \mu \text{Id}) = \infty \text{ pour tout } \mu \neq 0.$$

De plus, $\sigma(C_\varphi) = \mathbb{C}$ si et seulement si φ n'est pas un automorphisme.

Preuve. Par le théorème 3.5.9, il existe $\beta > 1$ et $\Psi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ et $\Psi \circ \varphi = \beta\Psi$. Pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, remarquons que

$$C_\varphi(\Psi^s) = (\Psi \circ \varphi)^s = \beta^s \Psi^s.$$

On en déduit que

$$\{\beta^s : s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \subset \sigma_p(C_\varphi).$$

Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = \beta^s$ avec $s = s_1 + is_2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. En d'autres termes $\mu = e^{s_1 \ln(\beta) + is_2 \ln(\beta)}$, et alors

$$\begin{cases} |\mu| = e^{s_1 \ln(\beta)} = \beta^{s_1} \\ \arg(\mu) = s_2 \ln(\beta) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Par conséquent $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \sigma_p(C_\varphi)$. De plus, comme $\beta^s = \beta^{s+i\frac{2k\pi}{\ln(\beta)}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$\Psi^{s+i\frac{2k\pi}{\ln(\beta)}} \in \ker(C_\varphi - \beta^s \text{Id}) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Puisque Ψ n'est pas constant ($\beta > 1$), on en déduit que $\dim \ker(C_\varphi - \mu \text{Id}) = \infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Puisque $\sigma_p(C_\varphi) \subset \sigma(C_\varphi)$, le spectre de C_φ est \mathbb{C} ou $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Par la proposition 3.2.2 nous savons que $0 \in \sigma(C_\varphi)$ si et seulement si φ n'est pas un automorphisme, ce qui conclut la preuve. \square

3.6.2 Opérateur de composition hyperbolique pondéré

Les propriétés spectrales des opérateurs de composition hyperboliques pondérés sont radicalement différentes de celles des opérateurs de composition hyperboliques. Voici un premier résultat pour illustrer cette affirmation.

Théorème 3.6.2. *Il existe un produit de Blaschke B tel que si $m \neq 0$ et $m \in B \text{Hol}(\mathbb{D})$, alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.*

Preuve. Par le théorème 3.5.17, en prenant $z_0 \in \mathbb{D}$, la suite $(\varphi_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Blaschke. Notons par B le produit de Blaschke associé à $(\varphi_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$ et prenons $m \in B \text{Hol}(D)$, $m \neq 0$.

Remarquons que $B \circ \varphi(\varphi_n(z_0)) = B(\varphi_{n+1}(z_0)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $f_k \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $f_k \neq 0$ telle que $B \circ \varphi_k = B f_k$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma_p(T)$. Alors $\lambda \neq 0$ et soit $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $g \neq 0$ telle que

$$Tg = \lambda g.$$

Sous ces hypothèses, $m = Bm_1$ où $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m_1 \neq 0$. On en déduit que

$$T^n g = m_1(m_1 \circ \varphi) \dots (m_1 \circ \varphi_{n-1}) B(B \circ \varphi) \dots (B \circ \varphi_{n-1}) g \circ \varphi_n = \lambda^n g,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $g(z_0) = 0$ et la multiplicité de z_0 comme zéro de g est plus grande ou égale à n pour tout $n \geq 1$. Ceci est absurde. Donc $\sigma_p(T) = \emptyset$. \square

Nous donnons maintenant un résultat dans la direction opposée, montrant que le spectre ponctuel est aussi grand que possible, à condition de supposer une certaine régularité sur le poids au point Denjoy-Wolff de φ .

Théorème 3.6.3. *Soit φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et soit ξ son point de Denjoy-Wolff. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que m a une limite angulaire non nulle en $\xi \in \mathbb{C}$ et m a une dérivée angulaire en ξ finie. Alors*

$$\sigma_p(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ et } \sigma(T) = \sigma_p(T) \text{ si et seulement si } T \text{ est inversible.}$$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$w_n(z) = \frac{m(z)m(\varphi(z))\dots m(\varphi_{n-1}(z))}{m(\xi)^n},$$

où $m(\xi)$ est la limite angulaire de m en ξ . Remarquons que

$$T(w_n(z)) = m(\xi)w_{n+1}(z).$$

Notre but est maintenant de montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Soit K un compact de \mathbb{D} et \hat{S} un angle de Stolz en ξ tels que $\varphi_n(K) \subset \hat{S}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'existence de \hat{S} découle du lemme 3.5.8. Puisque m a une dérivée angulaire $m'(\xi) \in \mathbb{C}$, il existe $\varepsilon_{\hat{S}} > 0$ tel que pour tout $z \in \hat{S}$ et $|z - \xi| < \varepsilon_{\hat{S}}$, on ait

$$\left| \frac{m(z) - m(\xi)}{z - \xi} - m'(\xi) \right| \leq 1/2.$$

Comme $(\varphi_n(K))_n$ converge vers ξ , il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq N_0$,

$$\varphi_k(z) \in \hat{S} \text{ et } |\varphi_k(z) - \xi| < \varepsilon_{\hat{S}}.$$

Ainsi, pour $k \geq N_0$ et $z \in K$, on a

$$\left| \frac{m(\varphi_k(z)) - m(\xi)}{\varphi_k(z) - \xi} - m'(\xi) \right| < 1/2.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{m(\varphi_k(z))}{m(\xi)} - 1 \right| < \left(\frac{1}{2|m(\xi)|} + \left| \frac{m'(\xi)}{m(\xi)} \right| \right) |\varphi_k(z) - \xi|$$

pour tout $k \geq N_0$ et $z \in K$. Soit $c > 0$ tel que $K \subset H(\xi, c)$. Par le théorème 3.5.5 $\varphi_k(z) \in H(\xi, c\varphi'(\xi)^k)$ pour tout $k \geq 0$ et $z \in K$. Par le lemme 3.5.6, nous avons

$$H(\xi, c\varphi'(\xi)^k) = D \left(\frac{1}{1 + c\varphi'(\xi)^k}, \frac{c\varphi'(\xi)^k}{1 + c\varphi'(\xi)^k} \right).$$

Puisque ξ appartient à la fermeture du disque ci-dessus, on en déduit que

$$|\varphi_k(z) - \xi| < 2 \times \frac{c\varphi'(\xi)^k}{1 + c\varphi'(\xi)^k} < 2c\varphi'(\xi)^k,$$

pour tout $k \geq 0$ et $z \in K$. Donc, pour tout $k \geq N_0$ et $z \in K$, on a

$$\left| \frac{m(\varphi_k(z))}{m(\xi)} - 1 \right| < C\varphi'(\xi)^k,$$

où C est une constante positive. Comme $|\varphi'(\xi)| < 1$, on en déduit que $P_n = \prod_{k=N_0}^{n-1} \frac{m(\varphi_k)}{m(\xi)}$ converge uniformément sur K , et ainsi

$$\kappa_n := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{m(\varphi_k)}{m(\xi)}$$

converge vers une fonction κ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$. De plus, $T\kappa = m(\xi)\kappa$, et donc $m(\xi) \in \sigma_p(T)$. Par la proposition 3.2.1 et le théorème 3.6.1, on a $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$. La conclusion découle de la proposition 3.2.2. \square

Ensuite nous donnons un exemple qui montre que les hypothèses du théorème 3.6.3 ne sont pas nécessaires.

Proposition 3.6.4. *Soit φ un automorphisme hyperbolique défini par*

$$\varphi(z) = \frac{z+r}{1+rz} \text{ avec } r \in (0, 1).$$

Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ un poids défini par

$$m(z) = \frac{1}{\exp\left(\frac{2r}{1-r}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right) \exp\left(\frac{2r}{1+r}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right)}.$$

Alors le point de Denjoy-Wolff de φ est 1, m et m' ont une limite angulaire en 1 égale à 0. Néanmoins $\sigma_p(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Preuve. Considérons la fonction $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ définie par

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{\exp\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}.$$

Remarquons que $mf \circ \varphi = f$. En d'autres termes $1 \in \sigma_p(T)$. Par la proposition 3.2.3 et le théorème 3.6.1, nous obtenons $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$. Puisque $m \neq 0$, $0 \notin \sigma_p(T)$, ce qui termine la preuve. \square

3.7 Opérateurs de composition parabolique pondérés

Dans cette section φ est une fonction holomorphe parabolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et C_φ est l'opérateur de composition défini par φ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. De plus, $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et T est encore l'opérateur de composition pondéré défini sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ par

$$Tf = m f \circ \varphi.$$

3.7.1 Opérateurs de composition parabolique

Pour les opérateurs de composition paraboliques nous sommes capables de donner une description complète du spectre ponctuel et du spectre.

Théorème 3.7.1. *Le spectre ponctuel de C_φ est donné par*

$$\sigma_p(C_\varphi) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ avec } \dim \ker(C_\varphi - \lambda \text{Id}) = \infty \text{ pour tout } \lambda \neq 0.$$

De plus, $\sigma(C_\varphi) = \mathbb{C}$ si φ n'est pas un automorphisme et $\sigma(C_\varphi) = \sigma_p(C_\varphi)$ autrement.

Preuve. Par les théorème 3.5.12 et théorème 3.5.13, en remplaçant Λ par $\frac{1}{i}\Lambda$, il existe une fonction holomorphe $\Lambda : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\Lambda \circ \varphi = \Lambda + 1.$$

Soit $\mu = |\mu|e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $f(z) = |\mu|^{\Lambda(z)}e^{i\theta\Lambda(z)}$. Alors $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et

$$\begin{aligned} f \circ \varphi &= |\mu|^{\Lambda(\varphi(z))}e^{i\theta\Lambda(\varphi(z))} \\ &= |\mu|^{\Lambda(z)+1}e^{i\theta(\Lambda(z)+1)} \\ &= |\mu|e^{i\theta}|\mu|^{\Lambda(z)}e^{i\theta\Lambda(z)} = \mu f. \end{aligned}$$

Ainsi $\sigma_p(C_\varphi) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Puisque $\mu = \mu e^{2ik\pi}$, si $f \in \ker(C_\varphi - \mu \text{Id})$, alors $f e^{2ik\pi\Lambda}$ est aussi dans $\ker(C_\varphi - w \text{Id})$. Comme Λ n'est pas constante,

$$\dim \ker(C_\varphi - w \text{Id}) = \infty \text{ pour tout } \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Par la proposition 3.2.2, $\sigma(C_\varphi) = \mathbb{C}$ si et seulement si φ n'est pas un automorphisme. \square

3.7.2 Opérateurs de composition parabolique pondérés

Si l'on ajoute un poids, la situation peut complètement changer : le spectre ponctuel peut être vide si le symbole parabolique φ est de pas hyperbolique positif.

Théorème 3.7.2. *Supposons que φ a un pas hyperbolique positif. Alors il existe un produit de Blaschke B tel que si $m \in B \text{Hol}(\mathbb{D})$ alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.*

Preuve. La preuve suit le même schéma que la preuve du théorème 3.6.2, en utilisant l'assertion du théorème 3.5.18 : soit $z_0 \in \mathbb{D}$, la suite $(\varphi_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Blaschke. \square

Remarque 3.7.3. *Grâce au théorème 3.5.19 b), il existe des opérateurs de composition pondérés induits par des symboles holomorphes paraboliques de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et de pas hyperbolique nul tels que le spectre ponctuel soit vide.*

3.8 Opérateurs de composition non elliptiques pondérés

Nous terminons cette section par deux résultats qui sont valables lorsque le symbole φ associé à l'opérateur de composition n'a pas de point fixe dans \mathbb{D} , c'est-à-dire lorsque φ est indifféremment parabolique ou hyperbolique.

Théorème 3.8.1. *Soit φ une fonction holomorphe parabolique ou hyperbolique de \mathbb{D} . Il existe $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $\sigma_p(T) = \emptyset$.*

Preuve. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ et considérons la suite $(\varphi_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite converge vers le point de Denjoy-Wolff ξ de φ sur le cercle unité. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $m(\varphi_n(z_0)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \neq 0$. L'existence d'un tel m est une conséquence du théorème de Mittag-Leffler et Weierstrass (voir [74, théorème 15.13]).

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $f \neq 0$ tels que $Tf = \lambda f$. On en déduit que

$$T^n f = m(m \circ \varphi) \cdots (m \circ \varphi_{n-1})f \circ \varphi_n = \lambda^n f$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $(m \circ \varphi_k)(z_0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors z_0 est un zéro de f dont la multiplicité est au moins n pour tout n , cela entraîne une contradiction. De plus, $0 \notin \sigma_p(T)$ est immédiate puisque $m \neq 0$. \square

Théorème 3.8.2. *Soit φ une fonction holomorphe parabolique ou hyperbolique de \mathbb{D} . Il existe des poids $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tels que $\sigma_p(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Par les théorème 3.6.1 et théorème 3.7.1, il existe $f_1, \dots, f_n \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telles que $f_i \circ \varphi = \mu_i f_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Considérons le poids

$$m(z) = \exp((1 - \mu_1 \dots \mu_n) f_1 \dots f_n).$$

Posons $f := \exp(f_1 \dots f_n)$. On en déduit que

$$f \circ \varphi = \exp(\mu_1 \dots \mu_n f_1 \dots f_n),$$

ce qui implique que $m f \circ \varphi = f$, c'est-à-dire $1 \in \sigma_p(T)$. La conclusion découle de la proposition 3.2.3. \square

Semi-groupes de composition à poids

4.1 Introduction

Nous allons maintenant étudier des familles d'opérateurs de composition à poids et plus particulièrement de semi-groupes de tels opérateurs. Ainsi, nous allons introduire une dépendance en temps pour le poids et la fonction avec laquelle on compose. Soit Ω un sous-ensemble ouvert non vide simplement connexe de \mathbb{C} et soit X un espace de Banach complexe qui se plonge continûment dans l'espace de Fréchet de toutes les fonctions holomorphes sur Ω , noté $\text{Hol}(\Omega)$. Rappelons la définition de semi-groupe fortement continu ou C_0 -semi-groupe :

Définition 4.1.1 (Semi-groupe fortement continu). *Une famille $(S_t)_{t \geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est appelée semi-groupe fortement continu sur X si*

- $S_0 = Id_X$;
- $S_{t+s} = S_t \circ S_s, \forall t, s \geq 0$;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} S_t x = x, \forall x \in X$.

Pour un semi-groupe fortement continu, on peut définir un générateur infinitésimal qui est un opérateur fermé à domaine dense et qui caractérise le semi-groupe fortement continu :

Définition 4.1.2 (Générateur infinitésimal). *Le générateur infinitésimal $(A, D(A))$ d'un semi-groupe fortement continu $(S_t)_{t \geq 0}$ est défini par*

$$Af := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f - f}{t} \quad \text{et} \quad D(A) := \{f \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f - f}{t} \text{ existe dans } X\}.$$

Une famille qui possède uniquement les deux premières propriétés de semi-groupe fortement continu est appelée un semi-groupe. Pour que la famille d'opérateurs de composition à poids $(S_t)_{t \geq 0}$ de X dans X , définie par :

$$S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$$

pour tout $t \geq 0$ et $f \in X$ ait une chance d'être un semi-groupe, il faut que les familles $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ et $(m_t)_{t \geq 0}$ vérifient certaines conditions. On va alors introduire la notion de semiflot (voir

section 4.2) et de cocycle (voir section 4.3). Dans la section 4.4 nous étudierons le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ des semi-groupes fortement continu d'opérateurs de composition à poids et aussi les conditions pour qu'une telle famille soit un semi-groupe fortement continu. Notamment nous verrons que son générateur est donné par :

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes.

Dans la section 4.5, nous allons étudier la réciproque, c'est-à-dire si le générateur infinitésimal de $(S_t)_{t \geq 0}$ est de la forme (4.1), alors le semi-groupe fortement continu a la forme (4.1). Récemment, deux articles [43] et [6] traitent en parallèle le cas où $g = 0$ pour différentes conditions sur X . Ils ont montré que le semi-groupe fortement continu a la forme (4.1), mais avec le poids $m_t = 1$ pour tout $t \geq 0$. Dans ce chapitre, nous généralisons ce résultat au cas de $g \neq 0$ avec les mêmes conditions utilisées dans [6] et nous commentons la généralisation récente obtenue dans [42]. Enfin, dans la section 4.6, nous étudierons les semi-groupes d'opérateurs de composition à poids borné inférieurement. Une partie de ce chapitre a fait l'objet de la publication suivante [11].

Dans les sections suivantes, nous utilisons les applications $e_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) définies par $e_n(z) = z^n$ pour tout $z \in \Omega$ et des résultats basiques sur les semi-groupes fortement continus seront utilisés. Pour plus de détails vous pouvez consulter les livres [38, 70, 54] ou encore l'article [64].

4.2 Semiflot

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la famille de fonction avec laquelle on compose. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, cette famille doit vérifier certaines propriétés pour que la famille d'opérateurs de composition à poids ait une chance d'être un semi-groupe fortement continu. Soit $G \in \text{Hol}(\Omega)$ où Ω est un ouvert non vide simplement connexe de \mathbb{C} . Dans le but de définir un semiflot, on considère le problème de Cauchy suivant :

$$u'(t) = G(u(t)) \text{ avec } u(0) = z \in \Omega. \quad (4.2)$$

On note

$$\varphi(\cdot, z) : [0, \tau(z)) \rightarrow \Omega,$$

l'unique solution maximale de (4.2).

On note $\Phi = (\varphi(t, \cdot))_{0 \leq t < \tau(\cdot)}$ le semiflot généré par G . Pour $z \in \Omega$, on a

$$\varphi(t + s, z) = \varphi(t, \varphi(s, z)) \quad (4.3)$$

où $t + s < \tau(z)$ et $t < \tau(\varphi(s, z))$. On dit que le semiflot est global si $\tau(z) = \infty$ pour tout $z \in \Omega$. Dans ce cas, l'égalité (4.3) est vérifiée pour tout $t, s \geq 0$ et $z \in \Omega$. De plus, d'après le théorème 2 dans [48, Chap.8, §7], $\varphi : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \Omega$ est continue et d'après le théorème 9 dans [50, Chap.1], $\varphi(t, \cdot) \in \text{Hol}(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$. Réciproquement, soit $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ une famille de fonctions analytiques dans Ω telle que l'application $t \mapsto \varphi_t(z)$ est continue pour tout $z \in \Omega$, $\varphi_0(z) = z$ et $\varphi_{t+s}(z) = \varphi_t(\varphi_s(z))$ pour tout $z \in \Omega$ et $t, s \in [0, \infty)$. Berkson and Porta ont montré dans [10] qu'il existe une unique fonction holomorphe $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(z) = G(\varphi_t(z)) \quad (z \in \Omega),$$

et $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ est la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_t(z) = G(\varphi_t(z)), & (t \in \mathbb{R}_+, z \in \Omega) \\ \varphi_0(z) = z, & (z \in \Omega). \end{cases}$$

Ainsi, la famille $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ est un semiflot global généré par G . De plus,

$$G(z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_t(z) - z}{t}. \quad (4.4)$$

Sauf mention du contraire, dans la suite du manuscrit lorsque que l'on considèrera un semiflot $(\varphi_t)_{t \geq 0}$, celui-ci sera défini comme ci-dessus et donc sera global et généré par (4.4).

Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot. On dira par la suite que $z_0 \in \Omega$ est un point fixe pour le semiflot si $\varphi_t(z_0) = z_0$ pour tout $t \geq 0$. Une première propriété des semiflots est que φ_t est injective pour tout $t \geq 0$ (voir [52]). Dans le cas où Ω est l'unité disque \mathbb{D} , Berkson et Porta [10] ont montré que le générateur a la forme

$$G(z) = F(z)(\bar{b}z - 1)(z - b),$$

où $|b| \leq 1$ et $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe vérifiant $Re[F(z)] \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Le point b est unique et on l'appelle le point de Denjoy-Wolff du semiflot Φ . Si le semiflot ne consiste pas en des automorphismes elliptiques du disque unité, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(z) = b$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Si $|b| < 1$, b est l'unique point fixe du semiflot Φ . Les auteurs de [78], [27] et [37] ont montré qu'on peut associer une unique fonction univalente à un semiflot. Plus précisément,

- Si $b \in \partial\mathbb{D}$, alors il existe une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$h(\varphi_t(z)) = h(z) + G(0)t$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $t \geq 0$.

- Si $b \in \mathbb{D}$, alors il existe une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$(h \circ \gamma_b)(\varphi_t(z)) = e^{ct}(h \circ \gamma_b)(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $t \geq 0$, où $c = G'(b)$ et $\gamma_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$.

Dans les deux cas, la fonction h est appelée fonction univalente associée à Φ .

Par la suite nous étudierons des semi-groupes fortement continus où le semiflot est composé de fractions linéaires. Rappelons que l'on appelle ensemble des fractions linéaires l'ensemble des transformations de Möbius F tel que $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et on le notera $LFM(\mathbb{D})$. Dans [18] et [19], il a été montré que s'il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi_{t_0} \in LFM(\mathbb{D})$, alors $\varphi_t \in LFM(\mathbb{D})$ pour tout $t \geq 0$. Ils ont aussi démontré la caractérisation suivante du générateur infinitésimal :

Théorème 4.2.1. *Soit $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) G est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de fractions linéaires.

b) G est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe dans \mathbb{D} et c 'est un polynôme de degré au plus deux.

c) G est de la forme :

$$G(z) = a - \bar{a}z^2 - z(mz + n), \quad (z \in \mathbb{D})$$

avec $a, m, n \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(n) \geq |m|$.

d) G est un polynôme de la forme $G(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(\beta) + |\alpha + \bar{\gamma}| \leq 0$.

e) G est un polynôme de degré au plus deux satisfaisant la condition suivante $\operatorname{Re}(G(\sigma)\bar{\sigma}) \leq 0$ pour tout $\sigma \in \partial\mathbb{D}$.

De plus, $\operatorname{Re}(n) = m = 0$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\beta) = |\alpha + \bar{\gamma}| = 0$ si et seulement si il y a égalité dans e) pour tout $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ si et seulement si G est le générateur infinitésimal d'un groupe.

Pour finir cette section, rappelons la proposition suivante obtenue dans [18], [19] et [22] qui donne la forme du semiflot lorsque que l'on prend un polynôme de degré un comme générateur :

Proposition 4.2.2. Soit $G(z) = \mu(z - c)$ un polynôme complexe de degré un avec $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{D}$. Alors G est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe dans \mathbb{D} si et seulement si $\operatorname{Re}(\mu) + |\mu c| \leq 0$. Dans ce cas, le semi-groupe associé (φ_t) a pour point de Denjoy-Wolff $c \in \bar{D}$ et

$$\varphi_t(z) = e^{\mu t} z + c(1 - e^{\mu t}), \quad (z \in \mathbb{D}).$$

De plus,

- a) Si $\operatorname{Re}(\mu) = 0$ alors $c = 0$ et (φ_t) est un groupe de rotations.
- b) Si $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ et $c \in \mathbb{D}$, alors (φ_t) est un semi-groupe elliptique.
- c) Si $c \in \partial\mathbb{D}$ alors $\mu \in]-\infty, 0[$ et (φ_t) est un semi-groupe hyperbolique.

4.3 Cocycle

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la famille de fonctions de poids. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, cette famille doit vérifier certaines propriétés pour que la famille d'opérateurs de composition à poids ait une chance d'être un semi-groupe fortement continu. On introduit alors la notion de cocycle qui est relatif à un semiflot :

Définition 4.3.1 (cocycle). Soit Ω un ouvert simplement connexe non vide de \mathbb{C} . Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot. On appelle cocycle pour Φ toute famille $(m_t)_{t \geq 0}$ de fonctions analytiques $m_t : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- $m_0(z) = 1$ pour tout $z \in \Omega$;
- $m_{t+s}(z) = m_t(z)m_s(\varphi_t(z))$ pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $t, s \geq 0$;

- L'application $t \mapsto m_t(z)$ est continue pour tout $z \in \Omega$.

On dit que le cocycle est continu si l'application $(t, z) \mapsto m_t(z)$ est continue.

On dit que le cocycle est différentiable si pour tout $z \in \Omega$, l'application $t \mapsto m_t(z)$ est différentiable.

On dit que le cocycle est borné si pour tout $t \geq 0$, m_t est bornée.

On dit que le cocycle est un "coboundary" pour Φ s'il existe une application holomorphe $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas et vérifiant :

$$m_t(z) = \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)},$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \Omega$.

Les trois prochaines propositions sont dû à König [60]. La première est la construction d'un cocycle différentiable très important. En effet, on verra dans la prochaine section que si la famille d'opérateur de composition à poids forme un semi-groupe fortement continu alors la famille de poids aura forcément cette forme-là. La seconde proposition nous dit qu'un cocycle n'a pas de zéro et nous donne une condition pour laquelle le cocycle est borné. On verra dans la section suivante que ce sera une des conditions pour montrer que la famille de composition à poids forme un semi-groupe fortement continu. La troisième proposition nous dit qu'un cocycle est "coboundary" sauf éventuellement au point de Denjoy-Wolff du semiflot.

Proposition 4.3.2. Soit Ω un ouvert simplement connexe non vide de \mathbb{C} . Soient $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique, et $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un flot holomorphe continu. Alors la famille de fonctions définie par

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right), \quad z \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

forme un cocycle différentiable pour Φ . De plus,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \right|_{t=0} = g(z)$$

pour tout $z \in \Omega$.

Preuve. i) On a clairement $m_0(z) = 1$ pour tout $z \in \Omega$.

ii) Soit $t, s \geq 0$ et $z \in \Omega$. On a par changement de variable que

$$\begin{aligned} m_t(z)m_s(\varphi_t(z)) &= m_t(z) \exp \left[\int_0^s g(\varphi_{p+t}(z)) dp \right] \\ &= m_t(z) \exp \left[\int_t^{t+s} g(\varphi_p(z)) dp \right] \\ &= \exp \left[\int_0^{t+s} g(\varphi_p(z)) dp \right] = m_{t+s}(z). \end{aligned}$$

iii) Par convergence dominée, on a pour tout $a \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow a} \int_0^t g(\varphi_s(z)) ds = \int_0^a g(\varphi_s(z)) ds.$$

Ainsi, l'application $t \mapsto m_t(z)$ est continue pour tout $z \in \Omega$. Enfin, on a

$$\frac{d}{dt} m_t(z) = m_t(z) g(\varphi_t(z)).$$

D'où le resultat. □

Proposition 4.3.3. Soit Ω un ouvert simplement connexe non vide de \mathbb{C} . Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un flot holomorphe continu non trivial et $(m_t)_{t \geq 0}$ un cocycle pour Φ . Alors,

a) Si $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty < +\infty$ alors le cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ est borné.

b) m_t n'a pas de zéro ($t \geq 0$).

Preuve. a) Par hypothèse, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty < +\infty$. Ainsi, il existe $M, \delta > 0$ tels que $|m_t(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$ et $t \in [0, \delta]$. Soit $t > 0$. Il existe alors $\tau \in [0, \delta]$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $t = n\tau$. Ainsi, par la propriété ii) des cocycles et celles des semiflotes, on a

$$\begin{aligned} m_t(z) = m_{n\tau}(z) &= m_\tau(z)m_{(n-1)\tau}(\varphi_\tau(z)) \\ &= m_\tau(z)m_\tau(\varphi_\tau(z))m_{(n-2)\tau}(\varphi_{2\tau}(z)) \\ &= \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} m_\tau(\varphi_{k\tau}(z)) \end{aligned}$$

pour tout $z \in \Omega$. Ainsi,

$$|m_t(z)| = \prod_{k=0}^{n-1} |m_\tau(\varphi_{k\tau}(z))| \leq M^n < +\infty$$

pour tout $z \in \Omega$. Donc le cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ est borné.

b) Supposons qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $t_0 \geq 0$ tels que $m_{t_0}(z_0) = 0$. Posons $I := \{t \geq 0 \mid m_t(z_0) = 0\} = m_{t_0}^{-1}(z_0)(\{0\})$ et $\tau := \inf I$. Comme $(m_t)_{t \geq 0}$ un cocycle, on a alors que $t \mapsto m_t(z_0)$ est continue. Ainsi, I est fermé et $\tau = \inf I \in \text{Adh}_{\mathbb{R}}(I) = I$. D'autre part, on a $m_0 \equiv 1$ et donc $0 \notin I$. Pour tout $s \geq 0$ on a $m_{\tau+s}(z_0) = m_\tau(z_0)m_s(\varphi_\tau(z_0)) = 0$, d'où $I = [\tau, +\infty[$. Soit $\varepsilon \in]0, \tau[$. On a alors $m_{\tau+s-\varepsilon}(z_0) = m_s(z_0)m_{\tau-\varepsilon}(\varphi_s(z_0))$ pour tout $s \geq 0$. Or pour $s \in [\varepsilon, \tau[$, on a $\tau + s - \varepsilon \geq \tau$ et donc $m_{\tau+s-\varepsilon}(z_0) = 0$. Or comme $m_s(z_0) \neq 0$, on a alors $m_{\tau-\varepsilon}(\varphi_s(z_0)) = 0$ pour tout $s \in [\varepsilon, \tau[$. On considère alors deux cas de figures.

- Cas où $\varphi_s(z_0) = z_0$ pour tout $s \in [\varepsilon, \tau[$: On a alors $\tau - \varepsilon \in I$ ce qui est en contradiction avec $I = [\tau, +\infty[$.

- Dans l'autre cas : posons $f : [\varepsilon, \tau[\rightarrow \Omega$ qui à s associe $\varphi_s(z_0)$. On a alors que f est une application non constante et continue. Comme $m_{\tau-\varepsilon}(f([\varepsilon, \tau[)) = \{0\}$, par le principe des zéros isolés, on a $m_{\tau-\varepsilon} \equiv 0$. D'où, $\tau - \varepsilon \in I$ ce qui est absurde. \square

Proposition 4.3.4. Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur le disque unité \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ et b son point de Denjoy-Wolff. Si $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique, alors il existe une application $w : \mathbb{D} \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)} = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right), \quad z \in \mathbb{D}, t \geq 0.$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b \neq 0$. Posons pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{b\}$

$$w(z) = \exp \left[\int_0^z \frac{g(\xi)}{G(\xi)} d\xi \right].$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, on a alors

$$w(z) = (z - b)^\alpha \Psi(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{b\}$ avec

$$\Psi(z) = (-b)^{-\alpha} \exp \left[\int_0^z \frac{g(\xi)(\xi - b) - \alpha G(\xi)}{G(\xi)(\xi - b)} d\xi \right].$$

en prenant α de tel sorte que la fonction $\xi \mapsto \frac{g(\xi)(\xi - b) - \alpha G(\xi)}{G(\xi)(\xi - b)}$ soit analytique sur \mathbb{D} . Ainsi, Ψ est analytique sur \mathbb{D} sans zéros. Donc $w : \mathbb{D} \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique. Soient $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$. Posons $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{D}$ qui à s associe $\varphi_s(z)$. On a clairement que γ est un chemin continument dérivable de z vers $\varphi_t(z)$. De plus, $\gamma'(s) = G(\varphi_s(z))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)} &= \exp \left[\int_0^{\varphi_t(z)} \frac{g(\xi)}{G(\xi)} d\xi - \int_0^z \frac{g(\xi)}{G(\xi)} d\xi \right] \\ &= \exp \left[\int_0^{\varphi_t(z)} \frac{g(\xi)}{G(\xi)} d\xi + \int_z^0 \frac{g(\xi)}{G(\xi)} d\xi \right] \\ &= \exp \left[\int_z^{\varphi_t(z)} \frac{g(\xi)}{G(\xi)} d\xi \right] \\ &= \exp \left[\int_0^t \frac{g(\varphi_s(z))}{G(\varphi_s(z))} \gamma'(s) ds \right] = m_t(z). \end{aligned}$$

□

4.4 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de composition à poids

Soit Ω un ouvert simplement connexe non vide de \mathbb{C} . Soit X un espace de Banach de fonctions analytiques sur Ω . Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot et $(m_t)_{t \geq 0}$ une famille de fonctions analytiques de Ω dans \mathbb{C} . Dans cette section, on appellera famille d'opérateurs de composition à poids sur X , la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ de X dans X , définie par :

$$S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t \tag{4.5}$$

pour tout $t \geq 0$ et $f \in X$. Tout d'abord, on montre que si Ω est borné, si les applications $e_0, e_1 \in X$ et si $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X , alors

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right) \tag{4.6}$$

où $g := \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \Big|_{t=0}$ est analytique. La preuve de [60, théorème 1] pour les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p < \infty$) est également valable dans notre situation plus générale mais nous la détaillons quand même ici :

Théorème 4.4.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et X un Banach de fonctions holomorphes qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$. De plus, on suppose que $e_0, e_1 \in X$. Si la famille d'opérateur $(S_t)_{t \geq 0}$ définie en (4.5) est un semi-groupe fortement continu sur X , alors $(m_t)_{t \geq 0}$ est un cocycle différentiable pour Φ , la fonction $g := \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \Big|_{t=0}$ est analytique sur Ω et*

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right).$$

Preuve. Montrons que g est analytique. Notons $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal de $(S_t)_{t \geq 0}$. On sait que $D(A)$ est dense dans X . Montrons que $D(A)$ est dense dans X par rapport à la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit $f \in X$. Par hypothèse, il existe une suite $f_n \in D(A)$ telle que $f_n \xrightarrow{X} f$. Notons d la distance sur $\text{Hol}(\Omega)$. Par hypothèse, l'injection canonique $i : X \rightarrow \text{Hol}(\Omega)$ est continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $g \in X$, $\|f - g\|_X < \eta \Rightarrow d(i(f), i(g)) = d(f, g) < \varepsilon$. De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|f_n - f\|_X < \eta$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $d(f_n, f) < \varepsilon$. D'où, $f_n \xrightarrow{\text{Hol}(\Omega)} f$.

Soit $z \in \Omega$, $t > 0$ et $U \subset \Omega$ un voisinage fermé borné de z , donc U est un compact de Ω . De plus, $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \Omega$ qui à (s, z) associe $\varphi_s(z)$ est continue (voir [48] Chap.8, §7, Thm.2). Ainsi, $V := \varphi([0, t] \times U)$ est un compact de Ω . Soit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. D'après ce que l'on vient de voir, comme $e_0 \in X$ il existe $f \in D(A)$ telle que $\|f - e_0\|_{\infty, V} < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $s \in [0, t]$ et $\xi \in U$, $|f(\varphi_s(\xi)) - 1| < \varepsilon$ et donc $f(\varphi_s(\xi)) \neq 0$ pour $s \in [0, t]$ et $\xi \in U$. D'où,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{m_s(\xi) - 1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(\varphi_s(\xi))} \left[\frac{S_s f(\xi) - f(\xi)}{s} - \frac{f(\varphi_s(\xi)) - f(\xi)}{s} \right] = \frac{Af(\xi) - f'(\xi)G(\xi)}{f(\xi)}$$

uniformément pour $\xi \in U$. D'où g est analytique sur Ω .

Montrons que $(m_t)_{t \geq 0}$ est un cocycle différentiable pour Φ . Par hypothèse, $e_0, e_1 \in X$ et on remarque que $m_t(z) = S_t e_0(z)$. D'où, par propriété des semi-groupes fortement continus, on a $t \mapsto m_t(z)$ continue et $m_0(z) = 1$. De plus, on remarque que $S_{t+s} e_1(z) = m_{t+s}(z) \varphi_{t+s}$. Or, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ et $S_{t+s} e_1(z) = S_t(S_s e_1(z)) = m_t(z) m_s(\varphi_t(z)) \varphi_s(\varphi_t(z))$. D'où, $m_{t+s}(z) = m_t(z) m_s(\varphi_t(z))$. Ainsi, $(m_t)_{t \geq 0}$ est un cocycle.

Par propriété du cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ et de la définition de g , on a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{m_{t+s}(z) - m_t(z)}{s} = m_t(z) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{m_s(\varphi_t(z)) - 1}{s} = m_t(z) g(\varphi_t(z))$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \Omega$. Or, $t \mapsto m_t(z) g(\varphi_t(z))$ continue (car $t \mapsto m_t(z)$ et $t \mapsto \varphi_t(z)$ continues). On rappelle que si $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue et possède une dérivée à droite continue, alors f est différentiable. Ainsi, on a que m_t différentiable pour tout $t \geq 0$.

D'après ce que l'on vient de voir on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} m_t(z) = m_t(z) g(\varphi_t(z)) & z \in \Omega \\ m_0(z) = 1 & z \in \Omega \end{cases}$$

qui d'après la théorie des équations différentielles ordinaires, a une unique solution qui est donnée par

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right).$$

□

Maintenant, nous donnons une condition sur g telle que $(S_t)_{t \geq 0}$ défini par (4.5) et (4.6) soit un semi-groupe fortement continu sur X . Le théorème suivant généralise le théorème 2 de [60] et le théorème 1 de [79] dans le cadre où X est un espace de Banach uniformément

convexe. On rappelle qu'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon \in]0, 2]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ vérifiant $\|x\| = \|y\| = 1$ et $1 - \|\frac{x+y}{2}\| < \delta$, on ait $\|x - y\| < \varepsilon$. Dans les articles de König et Siskakis, seuls les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p < \infty$) ont été considérés. Notons que pour tout $1 < p < \infty$, les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ et les espaces de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ sont des espaces de Banach uniformément convexes qui satisfont les conditions du théorème suivant.

Théorème 4.4.2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et X un Banach de fonctions holomorphes uniformément convexe qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique vérifiant $\sup_{z \in \Omega} \text{Re}[g(z)] < \infty$. Soit une famille d'opérateur $(S_t)_{t \geq 0}$ définie en 4.5 avec $m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right)$. Supposons de plus que*

$$\|hf\|_X \leq \|h\|_\infty \|f\|_X$$

pour tout $f \in X$ et $h \in H^\infty$ et que

$$\|f \circ \varphi_t\|_X \leq C_t \|f\|_X$$

pour tout $t \geq 0$ et $f \in X$ où C_t est une fonction continue de la variable t , à valeurs réelles positives et vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0^+} C_t = 1$. Alors, $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X .

Preuve. Les deux premières propriétés des semi-groupes découlent de la définition de $(S_t)_{t \geq 0}$.

Comme $\sup_{z \in \Omega} \text{Re}[g(z)] < M$ avec $M \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} \|m_t\|_\infty &= \left\| \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right) \right\|_\infty \\ &= \sup_{z \in \Omega} \exp\left(\int_0^t \text{Re}[g(\varphi_s(z))] ds\right) \leq e^{Mt}. \end{aligned}$$

D'où, $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty \leq 1$ et donc par la proposition 4.3.3, m_t borné pour tout $t \geq 0$. Soit $f \in X$, on a alors par hypothèse que

$$\|S_t f\|_X \leq \|m_t\|_\infty \|f \circ \varphi_t\|_X \leq C_t \|m_t\|_\infty \|f\|_X < \infty. \quad (*)$$

Ainsi, $S_t : X \rightarrow X$ est bien défini et $\{\|S_t\| \mid t \in [0, 1]\}$ est borné.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élément de $[0, 1]$ qui converge vers 0. On a alors que $S_{t_n} f$ est une suite bornée dans X . D'après le théorème de Milman-Pettis (voir [46], p.671), comme X est un espace de Banach uniformément convexe, X est réflexif. Ainsi, d'après le théorème 10.2.10 ([46], p.657), toute suite bornée de $(X, \|\cdot\|_X)$ possède une sous suite faiblement convergente. D'où, il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que $S_{t_{\psi(n)}} f \rightharpoonup h \in X$. Or par hypothèse, $X \hookrightarrow \text{Hol}(\Omega)$, c'est-à-dire que les évaluations $\delta_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ qui à f associe $f(z)$ sont des formes linéaires continues. Ainsi, par définition, on a $S_{t_{\psi(n)}} f(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h(z)$ pour tout $z \in \Omega$. Or, $S_{t_{\psi(n)}} f(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(z)$. Donc, $S_{t_{\psi(n)}} f \rightharpoonup f$. Ainsi, d'après la proposition 10.2.1 ([46], p.646), $(\|S_{t_{\psi(n)}} f\|_X)_{n \geq 0}$ est bornée et $\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|S_{t_{\psi(n)}} f\|_X$. D'autre part d'après l'inégalité (*) et le fait que $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty \leq 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} C_t = 1$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|S_{t_{\psi(n)}} f\|_X \leq \|f\|_X.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{t_{\psi(n)}} f\|_X = \|f\|_X$. D'après le théorème 10.4.1 ([46], p.671), comme X est uniformément convexe, que $S_{t_{\psi(n)}} f \rightharpoonup f$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{t_{\psi(n)}} f\|_X = \|f\|_X$, alors $S_{t_{\psi(n)}} f \xrightarrow{X} f$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{t_{\psi(n)}} f - f\|_X = 0$ et donc $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X . \square

Plus généralement, en utilisant un résultat de la théorie des semi-groupe, on montre le résultat suivant.

Théorème 4.4.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et X un Banach de fonctions holomorphes réflexif qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique vérifiant $\sup_{z \in \Omega} \text{Re}[g(z)] < \infty$. Soit une famille d'opérateur $(S_t)_{t \geq 0}$ définie en 4.5 avec $m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right)$. Supposons de plus que*

$$\|hf\|_X \leq \|h\|_\infty \|f\|_X$$

pour tout $f \in X$ et $h \in H^\infty$ et que

$$\|f \circ \varphi_t\|_X \leq C \|f\|_X$$

pour tout $0 < t \leq 1$ et $f \in X$ où $C > 0$. Alors, $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X .

Preuve. Les deux premières propriétés des semi-groupe découlent de la définition de $(S_t)_{t \geq 0}$. Soit $f \in X$. Par hypothèse, on a alors

$$\|S_t f\|_X = \|m_t f \circ \varphi_t\|_X \leq \|m_t\|_\infty \|f \circ \varphi_t\|_X \leq C \|m_t\|_\infty \|f\|_X$$

pour tout $0 < t \leq 1$. Comme X est réflexif, alors toute suite borné dans X possède une sous-suite faiblement convergente. Ainsi, on en déduit qu'il existe une suite $t_n \rightarrow 0$ et $g \in X$ tel que $S_{t_n} f \rightharpoonup g$. Montrons que $g = f$. Or par hypothèse, $X \hookrightarrow \text{Hol}(\Omega)$, c'est-à-dire que les évaluations $\delta_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ qui à f associe $f(z)$ sont des formes linéaires continues. Ainsi, par définition, on a $S_{t_n} f(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(z)$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$, par propriétés des semiflats et des cocycles, on a $S_{t_n} f(z) = m_{t_n}(z) f(\varphi_{t_n}(z)) \rightarrow f(z)$. Par unicité de la convergence, on en déduit que $g = f$. Ainsi, $S_{t_n} f \rightharpoonup f$ pour tout $f \in X$ et donc par le théorème [70, Théorème 1.4 p.43], on en déduit que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X . \square

Pour montrer que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur d'autres espaces de Banach, on peut utiliser le résultat suivant.

Théorème 4.4.4. *Soit X un espace de Banach. Soit X' un espace de Banach tel que $X' \hookrightarrow X$ et tel que X' soit dense dans X . Soit $(S_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}(X)$ tel qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\|S_t\| \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X' , alors $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X .*

Considérons notamment le cas $p = 1$. En effet, on a que $H^1(\mathbb{D})$ est un espace de Banach tel que $H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{D})$ et $H^q(\mathbb{D})$ dense dans $H^1(\mathbb{D})$ pour tout $q \in]1, +\infty[$. Donc si $\sup_{z \in \Omega} \text{Re}[g(z)] < \infty$ alors $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur $H^1(\mathbb{D})$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $f \in X$ et $g \in X'$ telles que $\|g - f\|_X \leq \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|S_t f - f\|_X \leq \|S_t f - S_t g\|_X + \|S_t g - g\|_X + \|g - f\|_X.$$

Par hypothèse, on a

$$\|S_t f - S_t g\|_X \leq \|S_t\| \|g - f\|_X \quad , \quad \|S_t g - g\|_X \leq \|S_t g - g\|_{X'}.$$

De plus, il existe $M > 0$ tel que $\|S_t\| \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\|S_t f - f\|_X \leq (M + 1)\varepsilon + \|S_t g - g\|_{X'}.$$

Puis, en prenant la limite quand $t \rightarrow 0$ cela montre que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X . \square

Remarquons que pour $1 < q < +\infty$ et $0 < p \leq 1$, on a $H^q(\mathbb{D}) \hookrightarrow H^p(\mathbb{D})$ et $H^q(\mathbb{D})$ est dense dans $H^p(\mathbb{D})$. Cependant, $H^p(\mathbb{D})$ n'est pas ici un espace de Banach donc on ne peut pas appliquer le théorème précédent. Il faudrait considérer une théorie plus large que la théorie des semi-groupes fortement continus pour parler de semi-groupes sur $H^p(\mathbb{D})$.

Le théorème suivant donne le générateur d'un semi-groupe de composition pondéré ainsi que son spectre ponctuel suivant où se situe le point de Denjoy-Wolff. La preuve du [79, théorème 2] pour les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p < \infty$) est également valable dans notre situation plus générale mais nous la réécrivons ici dans un soucis de complétude.

Théorème 4.4.5. *Soit X un Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité qui s'injecte continuellement dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$. De plus, on suppose que $e_0, e_1 \in X$. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ définie en 4.5, où le semiflot Φ a pour générateur $G \neq 0$. Si $(S_t)_{t \geq 0}$ forme un semi-groupe fortement continu sur X , alors d'après le théorème 4.4.1, on a*

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right).$$

avec $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est alors donné par

$$\begin{cases} \Gamma f = g f + G f' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid g f + G f' \in X\}. \end{cases}$$

Notons $\sigma_p(\Gamma)$ le spectre ponctuel de Γ , h la fonction univalente associée à Φ et w l'application construite à la proposition 4.3.4.

i) Si le point de Denjoy-Wolff b de Φ appartient à $\partial\mathbb{D}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda G(0) \in \sigma_p(\Gamma)$ si et seulement si $\frac{e^{\lambda h}}{w} \in X$.

ii) Cas où le point de Denjoy-Wolff b de Φ appartient à \mathbb{D} . Posons $\alpha = \frac{g(b)}{G'(b)}$. On a alors,

$$\sigma_p(\Gamma) = \left\{ k G'(b) + g(b) \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in X \right\},$$

où $h_0 = h \circ \gamma_b$ et $\gamma_b(z) = \frac{(z-b)}{(1-\bar{b}z)}$.

Preuve. Notons $D = \{f \in X \mid g f + G f' \in X\}$. Par définition, on a

$$D(\Gamma) = \{f \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f - f}{t} \text{ existe dans } X\}.$$

Soit $f \in D(\Gamma)$. Soit $z \in \mathbb{D}$. On a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f(z) - f(z)}{t} = \left. \frac{\partial}{\partial t} S_t f(z) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) f \circ \varphi_t(z) \right|_{t=0} = g(z) f(z) + G(z) f'(z).$$

Or comme $X \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$, la convergence dans X entraîne la convergence ponctuelle. D'où, $gf + Gf' \in X$ et $D(\Gamma) \subset D$. Ainsi, l'opérateur défini par $\Delta f = gf + Gf'$ pour tout $f \in D$ étend l'opérateur Γ . Par le lemme VIII-1.4 du livre de Dunford et Schwartz [35], on a que $w_0 := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|S_t\|}{t}$ existe et $-\infty \leq w_0 < +\infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}[\lambda] > w_0$. Par un résultat connu sur les semi-groupes d'opérateurs (voir par exemple [70, 38]), on a $\lambda \in \rho(\Gamma)$ et ainsi, l'opérateur $\Gamma - \lambda : D(\Gamma) \rightarrow X$ est surjectif.

Considérons le cas de figure où le point b de Denjoy-Wolff du semiflot $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ appartient à $\partial\mathbb{D}$. D'après ce que l'on a vu dans la section 4.2, il existe une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$h(\varphi_t(z)) = h(z) + G(0)t$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $t \geq 0$. D'une part, on a $\left. \frac{\partial}{\partial t} h(\varphi_t(z)) \right|_{t=0} = G(0)$ et d'autre part, $\left. \frac{\partial}{\partial t} h(\varphi_t(z)) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(z) \right|_{t=0} h'(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = G(z)h'(z)$. Or, comme h univalente, on obtient que h' ne s'annule pas, d'où $G(z) = \frac{G(0)}{h'(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Comme $b \in \partial\mathbb{D}$, par la proposition 4.3.4, il existe $w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $m_t(z) = \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)}$. D'où, $g(z) = \left. \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \right|_{t=0} = \frac{G(z)w'(z)}{w(z)}$. Soit $\lambda > \max(w_0, \log \|S_1\|)$. Montrons que $\Delta - \lambda$ est injective. Supposons le contraire. Ainsi, il existe $f \in D \setminus \{0\}$ telle que $\Delta f - \lambda f = 0$. D'où,

$$\frac{G(0)w'(z)}{h'(z)w(z)} f(z) + \frac{G(0)}{h'(z)} f'(z) = \lambda f(z).$$

L'unique solution analytique différente de l'application nulle de ce problème est

$$f(z) = \frac{c}{w(z)} \exp\left(\frac{\lambda}{G(0)} h(z)\right)$$

où c est une constante. Ainsi,

$$S_t f(z) = m_t(z) f(\varphi_t(z)) = \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)} \frac{c}{w(\varphi_t(z))} \exp\left(\frac{\lambda}{G(0)} h(\varphi_t(z))\right) = e^{\lambda t} f(z).$$

Or, d'une part, on a $\|S_t f\|_X \leq \|S_t\| \|f\|_X$ et d'autre part, $\|S_t f\|_X = e^{\lambda t} \|f\|_X$ avec $f \neq 0$. D'où en prenant $t = 1$, on obtient $e^\lambda \leq \|S_1\|$ est donc $\lambda \leq \log \|S_1\|$, ce qui est en contradiction avec notre choix de λ . Ainsi, $\Delta - \lambda$ injective. Supposons que $D \neq D(\Gamma)$. Il existe alors $f \in D$ telle que $f \notin D(\Gamma)$. On a cependant, $\Delta f - \lambda f \in X$, donc par surjectivité de $\Gamma - \lambda : D(\Gamma) \rightarrow X$, il existe $g \in D(\Gamma)$ telle que $\Gamma g - \lambda g = \Delta f - \lambda f$. D'où, $\Delta(g - f) - \lambda(g - f) = 0$ et par injectivité, on a $f = g$. Or, $f \notin D(\Gamma)$ ce qui est absurde. Finalement, $D = D(\Gamma)$ et $\Gamma = \Delta$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que $\lambda G(0) \in \sigma_p(\Gamma)$. Comme on l'a vu précédemment, le vecteur propre f associé à cette valeur propre est

$$f(z) = \frac{c}{w(z)} \exp(\lambda h(z))$$

et donc $\frac{1}{w(z)} \exp(\lambda h(z)) \in D(\Gamma) \subset X$. Supposons que $\frac{1}{w(z)} \exp\left(\frac{\lambda}{G(0)} h(z)\right) \in X$. On vérifie alors que $\Gamma f = \lambda G(0) f$ et donc $f \in D(\Gamma)$ et $\lambda G(0) \in \sigma_p(\Gamma)$.

Considérons le cas de figure où le point b de Denjoy-Wolff du semiflot $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ appartient à \mathbb{D} . D'après ce que l'on a vu dans la section 4.2, il existe une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$(h \circ \gamma_b)(\varphi_t(z)) = e^{ct}(h \circ \gamma_b)(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $t \geq 0$, où $c = G'(b)$ et $\gamma_b(z) = \frac{(z-b)}{(1-bz)}$. Posons $h_0 = h \circ \gamma_b$. D'une part, on a $\frac{\partial}{\partial t} h_0(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = G'(b)h_0(z)$ et d'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(z) \Big|_{t=0} h'_0(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = G(z)h'_0(z).$$

D'où, $G(z) = \frac{G'(b)h_0(z)}{h'_0(z)}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que $\Delta - \lambda$ ne soit pas injective. Ainsi, il existe $f \in D \setminus \{0\}$ telle que $\Delta f = \lambda f$. Par le principe des zéros isolés, il existe $|b| < r < 1$ tel que f n'a pas de zéros sur $|z| = r$. Par la proposition 4.3.4, il existe $w : \mathbb{D} \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $m_t(z) = \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)}$. D'où, $g(z) = \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \Big|_{t=0} = \frac{G(z)w'(z)}{w(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{b\}$. Ainsi, on a sur le cercle de rayon r :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'_0(z)\lambda}{G'(b)h_0(z)} - \frac{g(z)}{G(z)}.$$

Notons Z le nombre de zéros de f , comptés avec leur multiplicité, situés à l'intérieur du cercle de rayon r . On alors, par la formule de Kronecker (voir [73] p.162) et le théorème des résidus, que

$$Z = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\lambda}{G'(b)} - \frac{g(b)}{G'(b)}.$$

D'où, l'ensemble des valeurs propres λ de Δ est dénombrable et donc il existe $\lambda > w_0$ tel que $\Delta - \lambda$ soit injective. De la même façon que le cas précédent, on montre que $D = D(\Gamma)$ et $\Gamma = \Delta$.

Soit $\lambda \in \sigma_p(\Gamma)$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe $f \in D(\Gamma) \setminus \{0\}$ telle que $\lambda = ZG'(b) + g(b)$ avec Z le nombre de zéros de f . D'où, $\lambda \in \{kG'(b) + g(b) \mid k \in \mathbb{N}\}$. De plus, on a $\Gamma f = (kG'(b) + g(b))f$ et donc

$$f' - \left(\frac{(kG'(b) + g(b))h'_0(z)}{G'(b)h_0(z)} - \frac{w'}{w} \right) f = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $f(z) = \frac{ch_0(z)^{k+\alpha}}{w(z)}$. D'où, $\frac{h_0(z)^{k+\alpha}}{w(z)} \in X$ et donc

$$\sigma_p(\Gamma) \subset \left\{ kG'(b) + g(b) \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in X \right\}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in X$. Montrons que $kG'(b) + g(b) \in \sigma_p(\Gamma)$. En dérivant $f := \frac{h_0^{k+\alpha}}{w}$, on obtient $\Gamma f = Gf' + gf = (kG'(b) + g(b))f$. D'où, $f \in D(\Gamma)$ et $kG'(b) + g(b) \in \sigma_p(\Gamma)$, ce qui montre la seconde inclusion. \square

On donne ensuite des conditions sur X pour que le générateur Γ soit continu si et seulement si $G \equiv 0$, autrement dit si et seulement si le semiflot est trivial.

Théorème 4.4.6. Soit X un Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ définie en 4.5, où le semiflot Φ a pour générateur G . Supposons que $(S_t)_{t \geq 0}$ forme un semi-groupe fortement continu sur X , que $e_n \in D(\Gamma)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où Γ est le générateur du semi-groupe $(S_t)_{t \geq 0}$. De plus, supposons que :

- a) $\exists C > 0$ tel que $\|hf\|_X \leq C\|h\|_\infty \cdot \|f\|_X$ ($h \in H^\infty(\mathbb{D})$, $f \in X$)
- b) $e_n f \in X$ ($f \in X$, $n \in \mathbb{N}$)
- c) $\exists C_n > 0$ tel que $C_n \|f\|_X \leq \|e_n f\|_X$ ($f \in X$, $n \in \mathbb{N}$)
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|e_n\|_X}{nC_n} = 0$.

D'après le théorème 4.4.1, on a alors

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right),$$

avec $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si l'on suppose enfin que g bornée, alors Γ est continu si et seulement si $G \equiv 0$.

Preuve. D'après le théorème 4.4.5, le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est alors donné par

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\}. \end{cases}$$

Supposons que $G \equiv 0$. Alors, $\|\Gamma f\|_X = \|gf\|_X \leq C\|g\|_\infty \cdot \|f\|_X \leq C_1\|f\|_X$. D'où, Γ continu.

Supposons que Γ continu. Comme $e_0 \in D(\Gamma)$, on a $\|\Gamma e_0\|_X = \|g\|_X \leq \|\Gamma\| \cdot \|e_0\|_X$. D'où, $g \in X$. Comme $e_1 \in D(\Gamma)$, on a $\|G\|_X \leq \|\Gamma\| \cdot \|e_1\|_X + \|ge_1\|_X \leq \|\Gamma\| \cdot \|e_1\|_X + \|g\|_\infty \cdot \|e_1\|_X$. D'où, $G \in X$. Comme $e_n \in D(\Gamma)$, par hypothèse on a alors

$$C_{n-1}\|ge_1 + nG\|_X \leq \|(ge_1 + nG)e_{n-1}\|_X = \|ge_n + nGe_{n-1}\|_X \leq \|\Gamma\| \cdot \|e_n\|_X.$$

D'où,

$$\|G\|_X \leq \|\Gamma\| \cdot \frac{\|e_n\|_X}{nC_{n-1}} + \frac{\|g\|_\infty \cdot \|e_1\|_X}{n}.$$

Ainsi en faisant d'entendre n vers l'infini, on aboutit à $G \equiv 0$. □

Par exemple, on peut considérer l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Comme $\|e_n f\|_2 = \|f\|_2$ et $\|e_n\|_2 = 1$ pour tout $n \geq 0$ $H^2(\mathbb{D})$ cet espace satisfait toutes les conditions du théorème 4.4.6. On peut aussi considérer les espaces de Dirichlet pondérés D_α quand $\alpha \in [1, +\infty[$ (voir B.1). En effet, on sait que D_α s'injecte continument dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ (voir B.1.5). De plus, on a les deux propositions suivantes qui nous permettent d'appliquer le théorème 4.4.6 à D_α quand $\alpha \in [1, +\infty[$.

Proposition 4.4.7. Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Pour tout $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in D_\alpha$, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|hf\|_{D_\alpha} \leq C\|h\|_\infty \cdot \|f\|_{D_\alpha}$.

Preuve. Cela découle des propositions B.3.13 et B.3.11. □

Proposition 4.4.8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $f \in D_\alpha$ et $k \in \mathbb{N}$, $e_k f \in D_\alpha$ et il existe une constante $C_k > 0$ telle que $C_k \|f\|_{D_\alpha} \leq \|e_k f\|_{D_\alpha}$ vérifiant $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|e_k\|_{D_\alpha}}{kC_k} = 0$.

Preuve. Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in D_\alpha$. On a

$$\|e_k f\|_{D_\alpha}^2 = \sum_{n \geq 0} w_{n+k} |a_n|^2 = \sum_{n \geq 0} \frac{w_{n+k}}{w_n} w_n |a_n|^2 \geq \inf_n \left(\frac{w_{n+k}}{w_n} \right) \times \sum_{n \geq 0} w_n |a_n|^2 = \inf_n \left(\frac{w_{n+k}}{w_n} \right) \|f\|_{D_\alpha}^2.$$

De plus, on constate que

$$\frac{w_{n+k}}{w_n} = \frac{(n+k)(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{n(\alpha+(n+1))(\alpha+(n+2))\dots(\alpha+(n+k))} \geq \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{(\alpha+(n+1))(\alpha+(n+2))\dots(\alpha+(n+k))}.$$

Or, comme la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+\alpha}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que

$$\frac{w_{n+k}}{w_n} \geq \frac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)} =: C_k^2.$$

On en déduit que $C_k \|f\|_{D_\alpha} \leq \|e_k f\|_{D_\alpha}$. De plus, on a

$$\frac{\|e_k\|_{D_\alpha}^2}{k^2 C_k^2} = \frac{w_k (\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)}{k^2 k!} = \frac{1}{k}.$$

D'où, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|e_k\|_{D_\alpha}}{k C_k} = 0$. □

4.5 Caractérisation des semi-groupes de composition à poids

Nous étudions maintenant l'implication réciproque, c'est-à-dire si le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est de la forme (4.1), alors le semi-groupe fortement continu a la forme (4.5). Récemment, deux articles [43] et [6] traitent en parallèle le cas où $g = 0$ pour différentes conditions sur X . Ils montrent que le semi-groupe fortement continu a la forme (4.5), mais avec le poids $m_t = 1$ pour tout $t \geq 0$. Dans cette thèse, nous généralisons ce résultat au cas de $g \neq 0$ avec les mêmes conditions utilisées dans [6] et nous commentons la généralisation récente obtenue dans [42]. Tout d'abord, nous considérons les mêmes conditions sur l'espace de Banach X que dans l'article [6], c'est-à-dire une condition d'évaluation de la forme :

(E) Soit $z_n \in \Omega$ tel que $z_n \rightarrow z \in \text{Adh}(\Omega) \cup \{\infty\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ existe dans \mathbb{C} pour tout $f \in X$, alors $z \in \Omega$.

Par exemple, les espaces de Hardy $H^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ satisfont cette condition avec $\Omega = \mathbb{D}$ ou Ω le demi plan droit. Avant de montrer le résultat qui nous intéresse, commençons par démontrer quelques lemmes.

Lemme 4.5.1. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, X un Banach de fonctions holomorphes et $g, G \in \text{Hol}(\Omega)$. On définit l'opérateur Γ par $\Gamma f = gf + Gf'$ sur un domaine dense $D(\Gamma) \subset X$. On note δ_z l'évaluation en z et Γ' l'adjoint de Γ . Alors pour tout $z \in \Omega$, $\delta_z \in D(\Gamma')$ et $\Gamma' \delta_z = g(z) \delta_z + G(z) \delta'_z$ où $\langle \delta'_z, f \rangle = f'(z)$.

Preuve. Soit $f \in D(\Gamma)$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle \Gamma' \delta_z, f \rangle &= \langle \delta_z, \Gamma f \rangle = \langle \delta_z, gf + Gf' \rangle = g(z)f(z) + G(z)f'(z) \\ &= g(z) \langle \delta_z, f \rangle + \langle G(z) \delta'_z, f \rangle \\ &= \langle g(z) \delta_z + G(z) \delta'_z, f \rangle \end{aligned}$$

D'où $\delta_z \in D(\Gamma')$ et $\Gamma' \delta_z = g(z) \delta_z + G(z) \delta'_z$. □

Lemme 4.5.2. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, X un Banach de fonctions holomorphes, $g, G \in \text{Hol}(\Omega)$ et $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X de générateur $(\Gamma, D(\Gamma))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in D(\Gamma)$. Soit $f \in X$. Notons $u(t, z) = (S_t f)(z)$. Alors $\frac{d}{dt}u(t, z) = g(z)u(t, z) + G(z)\frac{d}{dz}u(t, z)$ pour tout $t \geq 0$ et $z \in \Omega$.

Preuve. D'après le lemme 4.5.1, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, z) &= \frac{d}{dt} \langle \delta_z, S_t f \rangle = \langle \delta_z, \frac{d}{dt}S_t f \rangle = \langle \delta_z, \Gamma S_t f \rangle \\ &= \langle \Gamma' \delta_z, S_t f \rangle \\ &= \langle g(z)\delta_z + G(z)\delta'_z, S_t f \rangle \\ &= g(z)S_t f(z) + G(z)(S_t f)'(z) \\ &= g(z)u(t, z) + G(z)\frac{d}{dz}u(t, z). \end{aligned}$$

□

Lemme 4.5.3. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et X un Banach de fonctions holomorphes. Soient $g \in \text{Hol}(\Omega)$ et $G \in \text{Hol}(\Omega)$ qui génère le semiflot $(\varphi_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X de générateur $(\Gamma, D(\Gamma))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in D(\Gamma)$. Soit $f \in X$. Alors $(S_t f)(z) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$ pour tout $z \in \Omega$ et $0 \leq t < \tau(z)$, où

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z))ds\right), \quad z \in \Omega.$$

Preuve. Notons $u(t, z) = (S_t f)(z)$ pour $z \in \Omega$ et $0 \leq t < \tau(z)$. Définissons $w : [0, t] \rightarrow \mathbb{C}$ qui à s associe $w(s) = m_s(z)u(t-s, \varphi_s(z))$. On a alors par le lemme 4.5.3,

$$\begin{aligned} w'(s) &= \frac{d}{ds}w(s) = \frac{d}{ds}m_s(z)u(t-s, \varphi_s(z)) \\ &= \frac{d}{ds}[m_s(z)] \cdot u(t-s, \varphi_s(z)) + m_s(z) \cdot \frac{d}{ds}[u(t-s, \varphi_s(z))] \\ &= m_s(z)g(\varphi_s(z))u(t-s, \varphi_s(z)) + m_s(z) \cdot \left[-\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) + \frac{d}{ds}\varphi_s(z) \cdot \frac{d}{dz}u(t-s, \varphi_s(z))\right] \\ &= m_s(z) \cdot \left[g(\varphi_s(z))u(t-s, \varphi_s(z)) + G(\varphi_s(z))\frac{d}{dz}u(t-s, \varphi_s(z))\right] - m_s(z)\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) \\ &= m_s(z)\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) - m_s(z)\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) = 0 \end{aligned}$$

D'où $w(t) = w(0)$ avec $w(0) = u(t, z) = (S_t f)(z)$ et $w(t) = m_t(z)u(0, \varphi_t(z)) = m_t(z)(S_0 f)(\varphi(t, z)) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$. Ainsi, $(S_t f)(z) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$ pour tout $z \in \Omega$ et $0 \leq t < \tau(z)$. □

Lemme 4.5.4. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et X un Banach de fonctions holomorphes qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$. De plus, on suppose que X vérifie la condition d'évaluation suivante :

(E) Soit $z_n \in \Omega$ tel que $z_n \rightarrow z \in \text{Adh}(\Omega) \cup \{\infty\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ existe dans \mathbb{C} pour tout $f \in X$, alors $z \in \Omega$.

Soient $G \in \text{Hol}(\Omega)$ qui génère le semiflot $(\varphi_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$ et $g \in \text{Hol}(\Omega)$. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X de générateur $(\Gamma, D(\Gamma))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in D(\Gamma)$. On a alors $\tau(z) = \infty$ pour tout $z \in \Omega$ et donc le semiflot φ est global sur Ω .

Preuve. Supposons qu'il existe $z \in \Omega$ tel que $\tau(z) < \infty$. Ainsi, il existe une suite croissante $(t_n)_n$ qui converge vers $\tau(z)$ et il existe $\alpha \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, z) = \alpha$. Soit $f \in X$. On a alors par continuité et le lemme 4.5.3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{t_n}(z)f(\varphi(t_n, z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{t_n} f)(z) = (S_{\tau(z)} f)(z).$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi(t_n, z)) = \frac{(S_{\tau(z)}f)(z)}{m_{\tau(z)}(z)}$$

existe dans \mathbb{C} pour tout $f \in X$. D'où d'après la condition (E), on a $\alpha \in \Omega$ et on aboutit donc à une contradiction. \square

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème suivant qui est une généralisation d'un résultat obtenu dans [6] :

Théorème 4.5.5. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et X un Banach de fonctions holomorphes qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$. De plus, on suppose que X vérifie la condition d'évaluation suivante :*

(E) *Soit $z_n \in \Omega$ tel que $z_n \rightarrow z \in \text{Adh}(\Omega) \cup \{\infty\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ existe dans \mathbb{C} pour tout $f \in X$, alors $z \in \Omega$.*

Soient $G \in \text{Hol}(\Omega)$ qui génère le semiflot $(\varphi_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$ et $g \in \text{Hol}(\Omega)$. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X de générateur $(\Gamma, D(\Gamma))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in D(\Gamma)$. Alors le semiflot est global et $(S_t f)(z) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$ pour tout $f \in X, t \geq 0$ et $z \in \Omega$ avec

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right).$$

De plus, le domaine de Γ est donné par $D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\}$.

Preuve. Soit $f \in X$. D'après les lemmes 4.5.3 et 4.5.4, on a $S_t f = m_t f \circ \varphi_t$ pour tout $t \geq 0$.

Par définition, on a

$$D(\Gamma) = \left\{ f \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f - f}{t} \text{ existe dans } X \right\}. \quad (4.7)$$

Soit $f \in D(\Gamma)$. Comme X s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$, la convergence dans X entraîne la convergence ponctuelle. Ainsi, pour tout $z \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f(z) - f(z)}{t} &= \left. \frac{d}{dt} S_t f(z) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} m_t(z) f(\varphi_t(z)) \right|_{t=0} \\ &= [m_t(z) g(\varphi_t(z)) f(\varphi_t(z)) + m_t(z) (Gf')(\varphi_t(z))]_{t=0} \\ &= g(z) f(z) + G(z) f'(z). \end{aligned}$$

D'où, $gf + Gf' \in X$. Montrons maintenant l'autre inclusion. Pour ce faire montrons tout d'abord que la famille d'opérateurs $(T_t)_{t \geq 0}$ de X dans X définie par $T_t f = f \circ \varphi_t$ est un semi-groupe fortement continu qui a pour générateur infinitésimal $Af = Gf'$. Par les propriétés des semiflots, on a directement que $T_0 = I_X$ et que $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ pour tout $t, s \geq 0$. De plus, par définition de T_t , on a pour tout $f \in X$ que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f}{m_t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} S_t f = f.$$

Ainsi, la famille d'opérateurs $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X . Son générateur infinitésimal est alors donné par

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t f - f}{t} = \left. \frac{d}{dt} T_t f \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \frac{S_t f}{m_t} \right|_{t=0}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \frac{S_t f(z)}{m_t(z)} \right|_{t=0} &= \left[m_t(z) \frac{g(z)S_t f(z) + G(z)(S_t f)'(z) - g(\varphi_t(z))S_t f(z)}{m_t(z)^2} \right]_{t=0} \\ &= G(z) [(S_t f)'(z)]_{t=0} = G(z) f'(z). \end{aligned}$$

Soit $f \in X$ tel que $h := gf + Gf' \in X$. Alors pour tout $z \in \Omega$, on a d'après le lemme 4.5.2 appliqué à $T_s f$ et à $T_s Id$ que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [m_s(z) f(\varphi_s(z))] &= m_s(z) g(\varphi_s(z)) f(\varphi_s(z)) + m_s(z) \frac{d}{ds} T_s f \\ &= m_s(z) g(\varphi_s(z)) f(\varphi_s(z)) + m_s(z) G(z) \frac{d}{dz} f(\varphi_s(z)) \\ &= m_s(z) g(\varphi_s(z)) f(\varphi_s(z)) + m_s(z) G(z) \frac{d}{dz} [\varphi_s(z)] f'(\varphi_s(z)) \\ &= m_s(z) g(\varphi_s(z)) f(\varphi_s(z)) + m_s(z) G(\varphi_s(z)) f'(\varphi_s(z)) = m_s(z) h(\varphi_s(z)). \end{aligned}$$

pour tout $s \geq 0$.

Soit $t > 0$. On a alors,

$$\int_0^t (S_s h)(z) ds = \int_0^t m_s(z) h(\varphi_s(z)) ds = m_t(z) f(\varphi_t(z)) - m_0(z) f(\varphi_0(z)) = S_t f(z) - f(z).$$

D'autre part, par une propriété des semi-groupes, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t (S_s h)(z) ds = S_0 h(z) = h(z).$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f(z) - f(z)}{t} = h(z).$$

D'où $\Gamma f = h$ et $f \in D(\Gamma)$. Ce qui termine la preuve de la seconde inclusion. \square

On remarque que, si X vérifie les conditions du théorème 4.4.2 et la condition d'évaluation 4.5, on a l'équivalence suivante :

Théorème 4.5.6. *Soit $G \in \text{Hol}(\Omega)$ génère le semiflot $(\varphi_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique vérifiant $\sup_{z \in \Omega} \text{Re}[g(z)] < \infty$. Soit $(S_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$ défini par (4.1) et (4.6) et $(\Gamma, D(\Gamma))$ défini par (4.1). Les assertions suivantes sont équivalents :*

1. Γ engendre un semi-groupe fortement continu S sur X ;
2. $\tau(z) = +\infty$.

Dans ce cas, on a $S = (S_t)_{t \geq 0}$.

Récemment, dans [42], les auteurs ont montré qu'une autre condition sur les espaces de Banach X permettait d'obtenir le même résultat. Cette condition est la suivante :

$$\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \hookrightarrow X \hookrightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$$

où les deux plongements sont continus et $\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ est l'ensemble des fonctions $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tel qu'il existe un sous-ensemble ouvert $\overline{\mathbb{D}} \subset U_f$ tel que f se prolonge analytiquement sur U_f . La condition $\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \hookrightarrow X$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, l'algèbre du disque $A(D(0, 1 + \varepsilon))$ se plonge continûment dans X : $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|f\|_X \leq C_\varepsilon \|f\|_{\infty, D(0, 1 + \varepsilon)}$$

pour tout $f \in A(D(0, 1 + \varepsilon))$. En particulier, $e_n : z \mapsto z^n$ est dans $A(D(0, 1 + \varepsilon))$, ainsi $\|e_n\|_X \leq C_\varepsilon(1 + \varepsilon)^n$ et donc $\overline{\lim}_n \|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

En fait, la condition $\overline{\lim}_n \|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq 1$ est équivalente à $\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \hookrightarrow X$. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $f \in A(D(0, 1 + \varepsilon))$. Alors, les coefficients de Taylor de f sont donnés par la formule de Cauchy :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

D'où, on a

$$|a_n| \leq \frac{2\pi}{2\pi} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\|f\|_{\infty, D(0, 1+\varepsilon)}}{(1 + \frac{\varepsilon}{2})^{n+1}} = \frac{\|f\|_{\infty, D(0, 1+\varepsilon)}}{(1 + \frac{\varepsilon}{2})^n}.$$

D'autre part, par hypothèse, il existe un entier N tel que $\|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$ pour $n \geq N$ et $M > 0$ tels que $\|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq M$ pour $n < N$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \|e_n\|_X \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{M \|f\|_{\infty, D(0, 1+\varepsilon)}}{(1 + \frac{\varepsilon}{2})^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\|f\|_{\infty, D(0, 1+\varepsilon)} (1 + \frac{\varepsilon}{4})^n}{(1 + \frac{\varepsilon}{2})^n},$$

ce qui montre l'existence d'une constante C_ε et donc $\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \hookrightarrow X$. Ainsi, on peut réécrire le [42, théorème 3.1] de la façon suivante :

Théorème 4.5.7. *Soit X un espace de Banach de fonctions analytiques sur \mathbb{D} vérifiant : $e_n \in X$, pour tout $z \in \mathbb{D}$ les évaluations $E_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ qui à f associe $f(z)$ sont continues, et $\overline{\lim}_n \|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq 1$. Soient $G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Notons Γ l'opérateur $f \mapsto gf + Gf'$, défini sur le domaine $D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\}$. Si Γ engendre un C_0 -semi-groupe fortement continu sur X , alors il génère un C_0 -semi-groupe fortement continu de composition à poids.*

Preuve. Supposons que Γ engendre un C_0 -semi-groupe fortement continu $(S_t)_{t \geq 0}$ sur X . L'objectif est de montrer l'existence d'un semiflot $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ tel que $S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour toute fonction $f \in X$ avec $m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right)$. Soit $0 < r < 1$. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t(z)}{\partial t} = G(\varphi_t(z)) \\ \varphi_0(z) = z \end{cases} \quad (z \in D(0, r)).$$

On sait, par la théorie standard des équations différentielles ordinaires dans un domaine complexe, qu'il existe $t_0 > 0$ et une solution analytique unique $(\varphi_t(z))$ définie sur $D(0, r)$ et pour tout t complexe vérifiant $|t| < t_0$ (voir [47]). Nous n'avons besoin ici que des temps réels $-t_0 < t < t_0$. Soient $s, t, t + s \in]-t_0, t_0[$ et $z, \varphi_s(z) \in D(0, r)$. Comme l'équation différentielle dans le problème de Cauchy est autonome, $\varphi_{t+s}(z)$ et $\varphi_t(\varphi_s(z))$ vérifie la même équation différentielle pour $t \in]-t_0 + |s|, t_0 - |s|[$ avec la même valeur initiale à $t = 0$. Par unicité on a alors, $\varphi_{t+s}(z) = \varphi_t(\varphi_s(z))$. De plus, le problème de Cauchy, montre que $t \mapsto \varphi_t(z)$ est différentiable, donc continue. D'où, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_t(z) = \varphi_0(z) = z$ pour tout $z \in D(0, r)$.

Affirmation 1 : Pour tout $f \in D(\Gamma)$, $S_t f(z) = m_t(z) \cdot f \circ \varphi_t(z)$ pour $z \in D(0, r)$ et $0 \leq t < t_0$.

Preuve de l'Affirmation 1 : Soit $f \in D(\Gamma)$. Posons $f_t(z) = S_t f(z)$ avec $z \in \mathbb{D}$ et $t \geq 0$. Par les propriétés des semi-groupes $f_t \in D(\Gamma)$ et

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \Gamma f_t(z) = g(z) f_t(z) + G(z) f_t'(z)$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$. Par le problème de Cauchy, on a $\frac{\partial \varphi_{-t}(z)}{\partial t} = -G(\varphi_{-t}(z))$. Ainsi, en utilisant en plus la formule de dérivée des composées, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(m_{-t}(z)f_t \circ \varphi_{-t}(z)) \\ &= \frac{d}{dt}[m_{-t}(z)] \cdot f_t \circ \varphi_{-t}(z) + m_{-t}(z) \cdot \frac{d}{dt}[f_t \circ \varphi_{-t}(z)] \\ &= -m_{-t}(z)g(\varphi_{-t}(z))f_t \circ \varphi_{-t}(z) + m_{-t}(z) \cdot \left(\frac{\partial f_t(\varphi_{-t}(z))}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{-t}(z)}{\partial t} \cdot f'_t(\varphi_{-t}(z)) \right) \\ &= -m_{-t}(z)g(\varphi_{-t}(z))f_t \circ \varphi_{-t}(z) \\ &+ m_{-t}(z) \cdot (g(\varphi_{-t}(z))f_t(\varphi_{-t}(z)) + G(\varphi_{-t}(z))f'_t(\varphi_{-t}(z)) - G(\varphi_{-t}(z))f'_t(\varphi_{-t}(z))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour $0 \leq t < t_0$. Ainsi, pour tout $z \in D(0, r)$ et $0 \leq t < t_0$, on a $m_{-t}(z) \cdot f_t \circ \varphi_{-t}(z) = m_0(z) \cdot f_0 \circ \varphi_0(z) = f(z)$. Au dessus, nous avons montré que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_t(0) = 0$ c'est-à-dire qu'il existe $t_1 \in (0, t_0]$ tel que $|\varphi_t(0)| < \frac{r}{2}$ pour tout $t \in [0, t_1]$. D'autre part, $\varphi_t : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en 0 pour tout $t \in [0, t_1]$. Alors, il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $z \in D(0, r_1)$, $|\varphi_t(z)| < \frac{r}{2} + |\varphi_t(0)| < r$. Ainsi, en choisissant un plus petit t_0 , on peut trouver $r' \in]0, r[$ tel que $\varphi_t(z) \in D(0, r)$ pour $t \in]-t_0, t_0[$ et $z \in D(0, r')$. Soit $z \in D(0, r')$. On a alors $\varphi_t(z) \in D(0, r)$ et donc $\varphi_{-t} \circ \varphi_t(z) = \varphi_0(z) = z$. D'où, d'après ce que l'on vient de montrer, on a $f_t(z) = \frac{f \circ \varphi_t(z)}{m_{-t}(\varphi_t(z))}$ pour tout $z \in D(0, r')$. Or, on a

$$\begin{aligned} m_{-t}(\varphi_t(z)) &= \exp \left(\int_0^{-t} g(\varphi_s(\varphi_t(z))) ds \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^t g(\varphi_{t-p}(z)) dp \right) \\ &= \exp \left(\int_t^0 g(\varphi_s(z)) ds \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

pour tout $z \in D(0, r')$ et $0 \leq t < t_0$. Ainsi, $f_t(z) = m_t(z) \cdot f \circ \varphi_t(z)$ pour tout $z \in D(0, r')$. Or, f_t et $m_t(z) \cdot f \circ \varphi_t(z)$ sont analytique sur $D(0, r)$, ce qui entraine l'affirmation 1. \square

En utilisant les évaluations on peut écrire l'affirmation 1 comme $E_z(S_t f) = m_t(z) \cdot E_{\varphi_t(z)} f$. Comme par hypothèse les E_z sont continues et que $D(\Gamma)$ est dense dans X , on a que pour tout $f \in X$, $S_t f(z) = m_t(z) \cdot f \circ \varphi_t(z)$ pour $z \in D(0, r)$ et $0 \leq t < t_0$. De plus, par hypothèse, la fonction $Id(z) = z \in X$, on obtient donc $(S_t Id)(z) = m_t(z) Id \circ \varphi_t(z) = m_t(z) \varphi_t(z)$ pour $z \in D(0, r)$ dans un premier temps et dans tout \mathbb{D} par prolongement analytique. Cela montre que $m_t \varphi_t \in X$ pour tout $0 \leq t < t_0$. De la même façon, on montre que $(T_t z^n)(a) = m_t(a) \varphi_t(a)^n$ pour tout $a \in \mathbb{D}$.

Affirmation 2 : Il existe $t_1 \leq t_0$ tel que $|\varphi_t(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $0 \leq t < t_1$.

Preuve de l'Affirmation 2 : Par hypothèse, on a $\overline{\lim}_n \|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant en plus la continuité de E_a et T_t , il existe alors une constante $C_\varepsilon > 0$ et un entier N tels que pour tout $t \in [0, t_0[$, $a \in \mathbb{D}$ et pour tout $n \geq N$, on ait

$$|\varphi_t(a)|^n = \frac{|E_a(T_t e_n)|}{|m_t(a)|} \leq \frac{\|E_a\| \cdot \|T_t\| \cdot \|e_n\|_X}{|m_t(a)|} \leq \frac{C_\varepsilon}{|m_t(a)|} \|E_a\| \cdot \|T_t\| (1 + \varepsilon)^n.$$

En passant à la racine n -ième, puis en faisant tendre $n \rightarrow \infty$ et enfin $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient que $|\varphi_t(a)| \leq 1$ pour tout $a \in \mathbb{D}$. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_t(0) = 0$ et donc il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $|\varphi_t(0)| < 1$ pour tout $0 \leq t < t_1$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $|\varphi_t(a)| = 1$. Par le principe du maximum cela entraine que φ_t est constante égale à 1 sur tout \mathbb{D} . Or on a vu que $|\varphi_t(0)| < 1$. On aboutit donc à une contradiction. D'où l'Affirmation 2. \square

Comme $m_t \varphi_t = S_t Id$ pour tout $0 \leq t < t_1$, on peut alors étendre l'égalité $\varphi_{t+s}(z) = \varphi_t(\varphi_s(z))$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En effet, soit $s, t, t+s \in]-t_1, t_1[$. On a alors pour $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \varphi_{t+s}(z) &= \frac{S_{t+s} Id(z)}{m_{t+s}(z)} = \frac{S_t(S_s Id)(z)}{m_t(z)m_s(\varphi_t(z))} \\ &= \frac{S_t(m_s \varphi_s)(z)}{m_t(z)m_s(\varphi_t(z))} \\ &= \frac{m_t(z)m_s(\varphi_t(z))\varphi_s(\varphi_t(z))}{m_t(z)m_s(\varphi_t(z))} = \varphi_s(\varphi_t(z)). \end{aligned}$$

La fonction $\varphi_t(z) = \frac{E_z(S_t Id)}{m_t(z)}$ est continue sur $[0, t_1[$ comme composée et quotient de fonctions continues. Ainsi, par la proposition 3.3.1 dans [77], la famille $(\varphi_t(z))$ peut être étendue continuellement en un semiflot. Enfin, soient $t > 0$ et un entier N tel que $\frac{t}{N} < t_1$. Alors pour tout $f \in X$, on a par propriété du cocycle m_t , du semiflot et du semi-groupe que

$$\begin{aligned} S_t f &= S_{\frac{t}{N}}^N f = S_{\frac{t}{N}}^{N-1}(m_{\frac{t}{N}} f \circ \varphi_{\frac{t}{N}}) \\ &= S_{\frac{t}{N}}^{N-2}((m_{\frac{t}{N}} m_{\frac{t}{N}}(\varphi_{\frac{t}{N}}) f(\varphi_{\frac{2t}{N}})) \\ &= S_{\frac{t}{N}}^{N-2}((m_{\frac{2t}{N}} f(\varphi_{\frac{2t}{N}})) \\ &= \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &= m_t \cdot f \circ \varphi_t. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 4.5.8. *Soit X un espace de Banach de fonctions analytiques sur \mathbb{D} vérifiant : $e_n \in X$, pour tout $z \in \mathbb{D}$ les évaluations $E_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ qui à f associe $f(z)$ sont continues, et $\overline{\lim}_n \|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq 1$. Soient $G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Notons Γ l'opérateur $f \mapsto gf + Gf'$, défini sur le domaine $D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\}$. Alors Γ génère un C_0 -semi-groupe fortement continu $(S_t)_{t \geq 0}$ sur X , si et seulement si $(S_t)_{t \geq 0}$ est de la forme $S_t f = m_t f \circ \varphi_t$ où $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ est un semiflot généré par G et*

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right).$$

Preuve. Cela découle des théorèmes 4.5.7 et 4.4.5. □

En fait, les deux points de vue peuvent être intéressants. En effet, d'une part si la norme de X est exprimée sous forme d'intégrale alors l'injection continue sera plus facile à vérifier et d'autre part si la norme est exprimée avec les coefficients de Taylor alors il sera plus facile de vérifier $\overline{\lim}_n \|e_n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq 1$. Notez que pour l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, pour les espaces de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ ($p \geq 1$) et l'espace de Dirichlet \mathcal{D} , ces deux conditions sont vraies :

Exemple 4.5.9 (Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$). *Comme on a $\|e_n\|_2 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a directement $\overline{\lim}_n \|e_n\|_{H^2(\mathbb{D})}^{\frac{1}{n}} \leq 1$. D'autre part, soient $\varepsilon > 0$ et $f \in A(D(0, 1 + \varepsilon))$, on a*

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(e^{it})|^2\right)^{1/2} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(e^{it})| \leq \sup_{|z| \leq 1 + \varepsilon} |f(z)|.$$

Cela montre que l'injection est continue.

Exemple 4.5.10 (Espaces de Bergman). Soient $p \geq 1$ et $\alpha > -1$. On considère les espaces de Bergman $A_\alpha^p(\mathbb{D})$ qui sont définis par

$$A_\alpha^p(\mathbb{D}) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) < \infty\}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in A(D(0, 1 + \varepsilon))$, on a alors

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{D}}^p \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

Or, $\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) := C_\alpha < \infty$ pour $\alpha > -1$. Ainsi,

$$\|f\|_{A_\alpha^p} \leq C_\alpha^{1/p} \|f\|_{\infty, D(0, 1+\varepsilon)}.$$

Exemple 4.5.11 (Espace de Dirichlet). On a vu dans la preuve de la proposition 4.4.8, que $\|e_n\|_{D_\alpha}^2 \underset{+\infty}{\sim} n^{1-\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $\overline{\lim}_n \|e_n\|_{D_\alpha}^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

4.6 Semi-groupes d'opérateurs de composition à poids bornés inférieurement

Soit $h \in H^p(\mathbb{D})$ et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Dans cette section, on définit l'opérateur de composition à poids $W_{h,\psi}$ sur $H^p(\mathbb{D})$ par :

$$W_{h,\psi} f = h \cdot f \circ \psi.$$

Dans un premier temps on va rappeler les conditions pour que ce opérateur soit borné inférieurement. La définition d'un tel opérateur est la suivante.

Définition 4.6.1 (Opérateur borné inférieurement). Soient X et Y deux espaces vectoriel normés et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur. On dit que T est borné inférieurement s'il existe $\delta > 0$ tel que $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$ pour tout $x \in X$.

On remarque que si X et Y sont des espaces de Banach et que T est injectif, alors T est borné inférieurement si et seulement si T est à image fermée.

Pour montrer la caractérisation qui nous intéresse, on va utiliser deux lemmes. Le premier a été démontré dans [26] et le second dans [62, 24] :

Lemme 4.6.2. Soit $1 < p < +\infty$. Soit $h \in H^p(\mathbb{D})$ et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telles que l'opérateur $W_{h,\psi}$ soit borné. Posons $\mu_{h,\psi}$ la mesure borélienne sur $\overline{\mathbb{D}}$ définie par

$$\mu_{h,\psi}(E) = \int_{\psi^{-1}(E) \cap \mathbb{T}} |h|^p dm$$

où m est la mesure de Lebesgue normalisée. On a alors

$$\int_{\mathbb{D}} g d\mu_{h,\psi} = \int_{\mathbb{T}} |h|^p g \circ \psi dm$$

où g est une fonction mesurable positive sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Lemme 4.6.3. *Soit $1 < p < +\infty$. Soit $h \in H^p(\mathbb{D})$ et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telles que l'opérateur $W_{h,\psi}$ soit borné. Alors, $W_{h,\psi}$ est borné inférieurement si et seulement si $g_{h,\psi} = \frac{d\mu_{h,\psi}}{dm}$ est essentiellement borné inférieurement loin de zéro. Autrement dit, si et seulement s'il existe $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ telle que $g_{h,\psi} = f$ presque partout et $|f(z)| > \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ pour tout $z \in \mathbb{T}$.*

On peut maintenant démontrer l'équivalence suivante qui est très utile pour montrer qu'un opérateur de composition à poids est borné inférieurement, celle-ci a été obtenue dans [24].

Théorème 4.6.4. *Soit $1 < p < +\infty$. Soient $h \in H^p(\mathbb{D})$ et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telles que l'opérateur $W_{h,\psi}$ soit borné. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $W_{h,\psi}$ est borné inférieurement ;

ii) il existe $C > 0$ tel que $\|W_{h,\psi}k_\lambda\|_p \geq C\|k_\lambda\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ où k_λ est le noyau reproduisant de H^p .

Preuve. D'après le lemme 4.6.3, on a que $W_{h,\psi}$ est borné inférieurement si et seulement si $g_{h,\psi} = \frac{d\mu_{h,\psi}}{dm}$ est essentiellement borné inférieurement loin de zéro. D'après le théorème 2.1 de l'article [45], ceci est équivalent au fait qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{D}} |k_\lambda|^p d\mu_{h,\psi} \geq C\|k_\lambda\|_p^p.$$

Or, d'après le lemme 4.6.2 on a

$$\int_{\mathbb{D}} |k_\lambda|^p d\mu_{h,\psi} = \|W_{h,\psi}k_\lambda\|_p^p.$$

D'où le résultat. □

Maintenant, on va introduire une dépendance en temps et considérer des semi-groupes d'opérateurs de composition à poids bornés inférieurement. Commençons par introduire la notion de semi-groupes d'opérateurs borné inférieurement.

Définition 4.6.5 (Semi-groupes d'opérateurs borné inférieurement). *Soient X un espace de Banach et $(S_t)_t$ un semi-groupe de composition à poids sur X de la forme $S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in X$. On dit que $(S_t)_t$ est borné inférieurement s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, on ait $\|S_t f\| \geq \delta\|f\|$.*

L'objectif maintenant est de réécrire le théorème 4.6.4 dans le cas des semi-groupes d'opérateurs de composition à poids où le semiflot est constitué de "Linear fractional transformation" (LFT). Soit $G(z) = \mu(z - c)$ avec $\mu \neq 0$ tel que $Re(\mu) + |\mu c| \leq 0$. On a vu plus haut que dans ce cas là, G engendre un semiflot de LFM(\mathbb{D}, \mathbb{D}) de la forme

$$\varphi_t(z) = e^{\mu t} z + c(1 - e^{\mu t}), \quad (z \in \mathbb{D}),$$

avec $c \in \overline{\mathbb{D}}$ son point de Denjoy-Wolff. Considérons le semi-groupe fortement continu $S_t f := e^t f \circ \varphi_t$ sur $H^2(\mathbb{D})$. Considérons tout d'abord le cas général, c'est-à-dire lorsque $c = c_1 + ic_2 \in \overline{\mathbb{D}}$. Soient $t \geq 0$ et $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{D}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|S_t k_\lambda\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t} \left| \frac{1}{1 - \bar{\lambda}[e^{\mu t} e^{ix} + c(1 - e^{\mu t})]} \right|^2 dx \\ &= \frac{e^{2t}}{2\pi|\lambda|^2} \int_\gamma \frac{dz}{-e^{\mu_1 t}(F + iE)z^2 + iz(E^2 + F^2 + e^{2\mu_1 t}) + e^{\mu_1 t}(F - iE)} \end{aligned}$$

où $z = e^{ix}$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ et

$$E_{\lambda,c,\mu,t} := \frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} - c_1 + e^{\mu_1 t}(c_1 \cos(\mu_2 t) - c_2 \sin(\mu_2 t)),$$

$$F_{\lambda,c,\mu,t} := \frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} - c_2 + e^{\mu_1 t}(c_1 \sin(\mu_2 t) + c_2 \cos(\mu_2 t)).$$

Le polynôme au dénominateur dans l'intégrale a pour racines

$$z_1 = \frac{e^{\mu_1 t}(E + iF)}{E^2 + F^2}, \quad z_2 = \frac{E + iF}{e^{\mu_1 t}}$$

qui ont pour module

$$|z_1| = \frac{e^{\mu_1 t}}{\sqrt{E^2 + F^2}} \quad \text{et} \quad |z_2| = \frac{1}{|z_1|}.$$

Ainsi, si $c = 0$, alors $E^2 + F^2 = \frac{1}{|\lambda|^2}$ et par hypothèse $\mu_1 \leq 0$. Ainsi, $|z_1| = |\lambda|e^{\mu_1 t} \leq |\lambda| < 1$ et c'est donc l'unique pôle. D'où, par le théorème des résidus, on a

$$\|S_t k_\lambda\|_2^2 = \frac{e^{2t}}{1 - |\lambda|^2} = e^{2t} \|k_\lambda\|_2^2 \geq \|k_\lambda\|_2^2.$$

Si $\mu_1 = 0$, on a $\varphi_t(z) = e^{i\mu_2 t} z$ et donc

$$\|S_t f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|e^t f \circ \varphi_t\|_{H^2(\mathbb{D})} = e^t \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} \geq \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Ainsi, $(S_t)_{t \geq 0}$ est borné inférieurement. D'autre part, si $\mu_1 < 0$, on a $|\varphi_t(z)| = e^{\mu_1 t} |z|$ et pour tout $N \geq 1$, on a

$$\|S_t e_N\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|e^t e_N \circ \varphi_t\|_{H^2(\mathbb{D})} = e^t e^{N\mu_1 t}.$$

Or, comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} e^t e^{N\mu_1 t} = 0$, on en déduit que $(S_t)_{t \geq 0}$ n'est pas borné inférieurement. Par conséquent, cet exemple nous permet d'affirmer qu'il n'est pas suffisant de regarder les noyaux reproduisant k_λ pour montrer qu'un semi-groupe est borné inférieurement.

Semi-groupe d'opérateurs de composition à poids équicontinu sur un Fréchet

Tout d'abord, dans ce chapitre nous commencerons par rappeler la théorie générale des semi-groupes équicontinus sur un espace de Fréchet, qui est moins standard que celle des semi-groupes fortement continus sur un espace de Banach, mais qui la généralise. Pour l'écriture de cette section, nous nous sommes référés aux articles et livres suivant [57, 59, 67, 68, 69, 83, 38]. Ensuite, dans une deuxième section, on appliquera cette théorie pour des semi-groupes de composition à poids sur l'espace $\text{Hol}(\mathbb{D})$ muni de sa structure de Fréchet.

5.1 Semi-groupe d'opérateurs équicontinu sur un Fréchet

5.1.1 Généralités

Tout d'abord, on rappelle ce qu'est un sous-ensemble borné et une famille équicontinue lorsque que l'on considère des espaces vectoriels topologiques.

Définition 5.1.1 (Sous-ensemble borné). *Soient E un espace vectoriel topologique et B un sous ensemble de E . On dit que B est borné si pour tout voisinage V de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que $B \subset sV$.*

Définition 5.1.2 (Famille équicontinue). *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille d'applications linéaires de E dans F . On dit que Γ est équicontinue si pour tout voisinage W de 0 dans F , il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f(V) \subset W$ pour tout $f \in \Gamma$.*

Ainsi, on peut alors maintenant définir la notion de semi-groupe d'opérateurs équicontinu sur un espace de Fréchet.

Définition 5.1.3 (Semi-groupe d'opérateurs équicontinu sur un Fréchet). *Soit X un espace de Fréchet. Une famille $(T_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus de X dans X telle que :*

- i) $T_0 = Id_X$;
- ii) $T_t T_s = T_{t+s}$ pour tout $s, t \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t x = x$ pour tout $x \in X$;
- iv) il existe $\omega \geq 0$ tel que $\{e^{-\omega t} T_t x \mid t \geq 0\}$ est borné dans X pour tout $x \in X$;

est appelée semi-groupe équicontinu sur X . Dans ce cas on dit que $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu sur X de paramètre ω .

Remarque : D'après le théorème de Banach-Steinhaus pour les espaces de Fréchet (voir [46]), la condition iv) est équivalente à dire que la famille $(e^{-\omega t}T_t)_{t \geq 0}$ est équicontinue, ce qui est aussi équivalent à dire que pour tout $n \geq 1$, p_n est majorée sur $\{e^{-\omega t}T_t x \mid t \geq 0\}$ pour tout $x \in X$ où $(p_n)_{n \geq 1}$ est la famille de semi-norme définissant la topologie de X .

On remarque aussi que cette définition généralise celle des semi-groupe fortement continus sur des espaces de Banach. Ainsi, de la même façon, on peut définir un générateur infinitésimal. Dans l'article [67], il est montré que son domaine est un sous-espace vectoriel dense de X et que cet opérateur est fermé.

Définition 5.1.4 (Générateur infinitésimal). Soient X un espace de Fréchet et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur X . On appelle générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ l'opérateur linéaire $(A, D(A))$ défini par

$$D(A) = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\}, \quad (5.1)$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A). \quad (5.2)$$

Yosida [83] a montré que l'on a le résultat suivant qui était aussi vrai pour les semi-groupe fortement continu d'opérateurs.

Théorème 5.1.5. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur un Fréchet X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Alors l'application :

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)x \in X \quad (5.3)$$

est dérivable sur \mathbb{R}_+ pour tout $x \in D(A)$ et on a :

(i) $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$ pour tout $t \geq 0$.

(ii) $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds$ pour tout $t \geq 0$.

Dans le but d'avoir une représentation intégrale de la résolvante, on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.1.6. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur un Fréchet X de paramètre ω et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Alors l'ensemble $\{e^{-\omega t}T_t x \mid t \geq 0, x \in B\}$ est borné pour tout ensemble borné $B \subset E$.

Preuve. Soit W un voisinage de 0. Par hypothèse, comme la famille $(e^{-\omega t}T_t)_{t \geq 0}$ est équicontinue, il existe un voisinage V de 0 tel que $e^{-\omega t}T_t(V) \subset W$ pour tout $t \geq 0$. Comme B est borné, il existe $s > 0$ tel que $sB \subset V$. Ainsi, $se^{-\omega t}T_t(B) \subset W$ pour tout $t \geq 0$. Ce qui montre que $\{e^{-\omega t}T_t x \mid t \geq 0, x \in B\}$ est borné. \square

Ainsi, on peut démontrer le résultat important suivant qui nous donne des informations sur l'ensemble résolvant du générateur. La démonstration est issue de l'article [67].

Théorème 5.1.7. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur un Fréchet X de paramètre ω et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}[\lambda] > \omega$ l'application

$$\begin{aligned} R_\lambda &: X \rightarrow X, \\ R_\lambda x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

est bien définie et est un opérateur linéaire continu de X dans X . De plus, $(\lambda - A)R_\lambda x = x$ pour tout $x \in X$ et $R_\lambda(\lambda - A)x = x$ pour tout $x \in D(A)$.

Preuve. Montrons tout d'abord que R_λ est un sens. Soient $p, q > 0$. On définit l'application R_λ^p par $R_\lambda^p x = \int_0^p e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$ qui a un sens car l'application $e^{-\lambda t} T(t)x$ est continue de \mathbb{R}_+ dans X par hypothèse. Notons $(p_n)_{n \geq 1}$ la famille de semi-norme qui définit la topologie sur X . Soit $n \geq 1$. On a alors

$$p_n(R_\lambda^p x - R_\lambda^q x) \leq \int_q^p e^{-\operatorname{Re}[\lambda]t} p_n(T(t)x) \, dt.$$

Or, il existe $M_n > 0$ tel que $p_n(T(t)x) \leq e^{\omega t} M_n$ pour tout $t \geq 0$. D'où,

$$p_n(R_\lambda^p x - R_\lambda^q x) \leq M_n \int_q^p e^{-\operatorname{Re}[\lambda]t} e^{\omega t} \, dt \rightarrow 0$$

quand p, q tendent vers $+\infty$. Ainsi, la limite $\lim_{p \rightarrow +\infty} R_\lambda^p x$ existe et on définit R_λ par

$$R_\lambda x = \lim_{p \rightarrow +\infty} R_\lambda^p x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt.$$

Il est clair que R_λ est linéaire. Montrons qu'il est continu. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de X telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi la suite (x_n) est bornée et donc par la proposition 5.1.6, $\{e^{-\omega t} T_t x_n \mid t \geq 0, n \geq 0\}$ est borné. Soit $m \geq 1$. Ainsi, il existe $M_m > 0$ tel que $p_m(T(t)x_n) \leq e^{\omega t} M_m$ pour tout $t \geq 0$ et $n \geq 0$. On a alors

$$p_m(R_\lambda x_n) \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}[\lambda]t} p_m(T(t)x_n) \, dt.$$

Par continuité de p_m et $T(t)$ on a $p_m(T(t)x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus,

$$e^{-\operatorname{Re}[\lambda]t} p_m(T(t)x_n) \leq e^{-\operatorname{Re}[\lambda]t} e^{\omega t} M_m \in L^1$$

pour tout $n \geq 0$. Ainsi par le théorème de convergence dominé, on a $p_m(R_\lambda x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'où, par continuité de p_m , $R_\lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ce qui montre que R_λ continu. La seconde partie du théorème se montre de la même façon que dans le cadre des espaces de Banach. \square

On donne à présent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe équicontinu commute avec un opérateur linéaire continu.

Théorème 5.1.8. Soit X un espace de Fréchet. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur X de générateur infinitésimal $(A, D(A))$ et $F \in \mathcal{L}(X)$. Alors $T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si :

$$FD(A) \subset D(A) \quad (5.5)$$

et

$$FAx = AFx \quad , \quad \forall x \in D(A). \quad (5.6)$$

Preuve. Soit $F \in \mathcal{L}(X)$ tel que $T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$. Soit $x \in D(A)$. Par hypothèse et par linéarité de F , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)Fx - Fx}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{FT(t)x - Fx}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} F \left(\frac{T(t)x - x}{t} \right). \quad (5.7)$$

Ainsi, par continuité de F on a $Fx \in D(A)$ et $AFx = FAx$.

Supposons maintenant que $F \in \mathcal{L}(X)$ tel que :

$$FD(A) \subset D(A) \quad (5.8)$$

et

$$FAx = AFx, \quad \forall x \in D(A). \quad (5.9)$$

Soit $t \geq 0$ et $x \in D(A)$. Par hypothèse et par le théorème 5.1.5, on peut définir l'application :

$$[0, t] \ni s \mapsto U(s)x = T(t-s)FT(s)x \in D(A). \quad (5.10)$$

De plus, d'après le même théorème, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \left[\frac{d}{ds}T(t-s)\right]FT(s)x + T(t-s)\left[\frac{d}{ds}FT(s)x\right] \\ &= -T(t-s)AFT(s)x + T(t-s)FAT(s)x = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Par conséquent, $U(0)x = U(t)x$ pour tout $x \in D(A)$. D'où, on obtient $T(t)Fx = FT(t)x$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in D(A)$. Or, $D(A)$ est dense dans X et $T(t)F, FT(t) \in \mathcal{L}(X)$, d'où $T(t)Fx = FT(t)x$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in X$. \square

5.1.2 Théorèmes spectraux

Montrons maintenant le lemme suivant, qui va nous permettre d'obtenir un premier théorème spectral.

Lemme 5.1.9. Soit X un espace de Fréchet. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur X de paramètre ω et de générateur infinitésimal $(A, D(A))$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}[\lambda] > \omega$ alors l'application :

$$\begin{aligned} B_\lambda(t) &: X \rightarrow X, \\ B_\lambda(t)x &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x \, ds \end{aligned} \quad (5.12)$$

définit un opérateur linéaire continu sur X vérifiant les propriétés suivantes :

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad \forall x \in X \quad (5.13)$$

et

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad \forall x \in D(A). \quad (5.14)$$

De plus, $B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t)$.

Remarque : Les égalités 5.13 et 5.14 sont vraies pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve. La continuité de $B_\lambda(t)$ se montre de la même manière que pour l'opérateur R_λ . De plus, soit $x \in X$ et $h > 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{T(h)-I}{h} B_\lambda(t)x &= \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s+h)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
 &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
 &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left[\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \right] - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \\
 &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left[\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \right] \\
 &+ \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau \\
 &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau + \frac{e^{\lambda h}-1}{h} B_\lambda(t)x - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x \, d\tau.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ainsi, par passage à la limite on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)B_\lambda(t)x - B_\lambda(t)x}{h} = T(t)x + \lambda B_\lambda(t)x - e^{\lambda t}x \equiv AB_\lambda(t)x. \tag{5.16}$$

Ainsi, $B_\lambda(t)x \in D(A)$ et $(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x$ pour tout $x \in X$.

Soit $x \in D(A)$. D'après le théorème 5.1.5, on a

$$B_\lambda(t)Ax = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)Ax \, ds = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{d}{ds} T(s)x \, ds. \tag{5.17}$$

Puis par intégration par parties, on obtient :

$$B_\lambda(t)Ax = T(t)x - e^{\lambda t}x + \lambda B_\lambda(t)x. \tag{5.18}$$

D'où,

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x, \quad \forall x \in D(A). \tag{5.19}$$

Enfin, on a vu que $B_\lambda(t)D(A) \subset D(A)$ et que pour tout $x \in D(A)$, on a $B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)B_\lambda(t)x$. D'où, $AB_\lambda(t)x = B_\lambda(t)Ax$ pour tout $x \in D(A)$. Ainsi d'après le théorème 5.1.8, on a $B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t)$ pour tout $t \geq 0$. \square

Voici un premier théorème spectral qui nous permet d'avoir des informations sur le spectre et le spectre ponctuel d'un semi-groupe équicontinu à partir du spectre et du spectre ponctuel de son générateur infinitésimal. La preuve est basée sur la preuve dans le cas des semi-groupes fortement continus sur des Banach (voir [38]). Je n'ai vu nulle part ce résultat pour des semi-groupes équicontinus.

Théorème 5.1.10 (Spectral Mapping 1). *Soit X un espace de Fréchet. Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur X de paramètre ω et de générateur infinitésimal $(A, D(A))$. Alors*

$$e^{t\sigma(A)} = \{e^{\lambda t} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(T(t)), \quad \forall t \geq 0. \tag{5.20}$$

et

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(T(t)), \quad \forall t \geq 0. \tag{5.21}$$

Preuve. Soit $z \in \rho(T(t))$. On peut écrire z sous la forme $e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Par définition, on a $Q := (e^{\lambda t} - T(t))^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. D'après le lemme 5.1.9, on a

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x, \quad \forall x \in E \tag{5.22}$$

et

$$QB_\lambda(t)(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A). \quad (5.23)$$

De plus, en utilisant le même lemme, on a $B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t)$, d'où

$$(e^{\lambda t} - T(t))B_\lambda(t) = B_\lambda(t)(e^{\lambda t} - T(t)). \quad (5.24)$$

En multipliant par Q à gauche et à droite, on obtient $QB_\lambda(t) = B_\lambda(t)Q$. Par conséquent,

$$B_\lambda(t)Q(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A). \quad (5.25)$$

Ce qui montre que $(\lambda I - A)$ est bijectif. Par le théorème du graphe fermé, on a alors que $(\lambda I - A)^{-1}$ continu et donc que $e^{\lambda t} \in e^{t\rho(A)}$. Ainsi, $\rho(T(t)) \subset e^{t\rho(A)}$ et donc $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$.

Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$. Il existe alors $x_0 \in D(A)$ avec $x_0 \neq 0$ tel que $(\lambda - A)x_0 = 0$. D'après le lemme 5.1.9, on a alors $(e^{\lambda t} - T(t))x_0 = 0$ et donc $e^{\lambda t} \in \sigma_p(T(t))$. \square

Afin d'obtenir un second théorème spectral, on va commencer par définir ce qu'est un semi-groupe équicontinu périodique sur un Fréchet.

Définition 5.1.11 (Semi-groupe équicontinu périodique sur un Fréchet). *Soit X un espace de Fréchet et $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur X . On dit que $(T_t)_{t \geq 0}$ est périodique s'il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t_0) = Id_X$. Dans ce cas, on définit sa période τ par*

$$\tau := \inf\{t_0 > 0 \mid T(t_0) = Id_X\}.$$

Voici un premier lemme qui nous dit, dans le cas très particulier des semi-groupes équicontinus périodiques, que les éléments du spectre de son générateur sont de la forme $\frac{2i\pi}{\tau}\mathbb{Z}$ où τ est la période. De plus, on peut avoir une nouvelle écriture de l'opérateur résolvant.

Lemme 5.1.12. *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu périodique sur un Fréchet X de période $\tau > 0$ et de générateur $(A, D(A))$. Alors*

$$\sigma(A) \subset \frac{2i\pi}{\tau}\mathbb{Z}$$

et

$$R(\mu, A) = \frac{1}{1 - e^{-\mu\tau}} \int_0^\tau e^{-\mu s} T(s) ds$$

pour tout $\mu \notin \frac{2i\pi}{\tau}\mathbb{Z}$.

Preuve. D'après le lemme 5.1.9, en utilisant les égalités 5.13 et 5.14 pour $t = \tau$, on a que $(\mu - A)$ admet un inverse pour $\mu \neq \frac{2i\pi n}{\tau}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donné par

$$R(\mu, A) = \frac{1}{1 - e^{-\mu\tau}} \int_0^\tau e^{-\mu s} T(s) ds.$$

Ainsi, $(\frac{2i\pi}{\tau}\mathbb{Z})^c \subset \rho(A)$. D'où, $\sigma(A) \subset \frac{2i\pi}{\tau}\mathbb{Z}$. \square

Un premier résultat intéressant pour les semi-groupes équicontinus périodiques est que le spectre de son générateur est égal à son spectre ponctuel. De plus, l'ensemble des vecteurs propres engendre un sous espace dense.

Théorème 5.1.13. Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu périodique sur un Fréchet X de période $\tau > 0$ et de générateur $(A, D(A))$. Alors

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \subset \frac{2i\pi}{\tau} \mathbb{Z}$$

et les vecteurs propres correspondant engendrent un sous espace dense de X .

Preuve. D'après le lemme précédent 5.1.12, on constate que $R(\cdot, A)$ est une application méromorphe avec des pôles d'ordre maximal 1 et de résidus

$$P_n := \lim_{\mu \rightarrow \mu_n} (\mu - \mu_n) R(\mu, A) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-\mu_n s} T(s) ds$$

en $\mu_n := \frac{2i\pi n}{\tau}$, $n \in \mathbb{Z}$. Soit $\mu \in \sigma(A)$. D'après le lemme précédent, il existe alors $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu = \frac{2i\pi n}{\tau} := \mu_n$. D'après [83] VIII-8 théorème 3, on a alors que $\mu \in \sigma_p(A)$ et $\text{Ker}(\mu_n - A) = \text{Im}(P_n)$. Ainsi, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Supposons qu'il existe $x' \in X'$ tel que x' est nulle sur l'ensemble des vecteurs propres de A et $x' \neq 0$. Soit $x \in X$. Posons $\xi_{x,x'} : s \mapsto \langle x', T(s)x \rangle$. Par hypothèse cette fonction est clairement périodique de période τ et on montre facilement que ses coefficients de Fourier sont donnés par $\langle x', P_n x \rangle$. Or, comme $\text{Ker}(\mu_n - A) = \text{Im}(P_n)$ et x' nulle sur l'ensemble des vecteurs propres de A , on a $\langle x', P_n x \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\xi_{x,x'}$ est nulle. Or, par hypothèse il existe $x \in X$ tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$, on aboutit donc à une contradiction. Ainsi, par le corollaire 9.4.3 du livre [46], on aboutit au résultat. \square

Voici deux propositions qui découlent des définitions et qui permet pour la première de connaître le générateur lorsque que l'on considère la restriction à un sous-espace fermé d'un semi-groupe équicontinu. La seconde permet de connaître la forme du générateur et son spectre lorsque que l'on considère la famille $(e^{\mu t} T(\alpha t))_{t \geq 0}$ avec $\mu \in \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$.

Proposition 5.1.14. Soient $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur un Fréchet X de générateur $(A, D(A))$ et Y un sous espace fermé de X tel que $T(t)Y \subset Y$ pour tout $t \geq 0$. Alors la restriction $T(t)|_Y := T(t)|_Y$ est un semi-groupe équicontinu sur Y et son générateur $(A|_Y, D(A|_Y))$ est donné par $A|_Y y = Ay$ et $D(A|_Y) = D(A) \cap Y$.

Proposition 5.1.15. Soient $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur un Fréchet X de générateur $(A, D(A))$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$. Alors la famille $(e^{\mu t} T(\alpha t))_{t \geq 0}$ forme un semi-groupe équicontinu sur X de générateur $B = \alpha A + \mu I$ et $D(B) = D(A)$. De plus, $\sigma(B) = \alpha \sigma(A) + \mu$ et $R(\lambda, B) = \frac{1}{\alpha} R\left(\frac{\lambda - \mu}{\alpha}, A\right)$ pour tout $\lambda \in \rho(B)$.

Ainsi, nous pouvons démontrer le théorème spectral suivant qui nous donne le spectre ponctuel d'un semi-groupe équicontinu en fonction du spectre ponctuel de son générateur. De plus, on a aussi des informations sur les sous-espaces propres du semi-groupe et de son générateur qui sont liés l'un à l'autre. La preuve est basée sur la preuve dans le cas des semi-groupes fortement continus sur des Banach (voir [38]). Je n'ai vu nulle part ce résultat pour des semi-groupes équicontinus.

Théorème 5.1.16 (Spectral Mapping 2). *Soit X un espace de Fréchet. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe équicontinu sur X de paramètre ω et de générateur infinitésimal $(A, D(A))$. Alors*

$$e^{t\sigma_p(A)} = \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} \quad , \quad \forall t \geq 0. \quad (5.26)$$

De plus, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, on a

$$Ker(\mu - A) \subset \bigcap_{s \geq 0} Ker(e^{\mu s} - T(s)) \quad (5.27)$$

et

$$Ker(e^{\mu t_0} - T(t_0)) = \overline{\text{lin}_{n \in \mathbb{Z}} Ker(\mu + \frac{2i\pi n}{t_0} - A)} \quad (5.28)$$

pour tout $t_0 > 0$.

Preuve. Soient $t_0 > 0$ et $\lambda \in \sigma_p(T(t_0)) \setminus \{0\}$. D'après la proposition 5.1.15, on peut passer facilement entre le semi-groupe original et le "ré-échelonné" suivant $(S(t))_{t \geq 0} := (e^{-t \log \lambda} T(t_0 t))_{t \geq 0}$ qui a pour générateur $B = t_0 A - \log \lambda$. Comme 1 est une valeur propre de $S(1)$, on peut supposer que $t_0 = 1$ et $\lambda = 1$ depuis le début. Posons maintenant $Y := \{y \in X \mid T(1)y = y\}$ qui est non trivial par hypothèse. De plus, on peut montrer facilement que Y est fermé et que $T(t)Y \subset Y$ pour tout $t \geq 0$ (par l'absurde). Ainsi, d'après la proposition 5.1.14, la restriction $T(t)|_Y := T(t)|_Y$ est un semi-groupe équicontinu sur Y et son générateur $(A|_Y, D(A|_Y))$ est donné par $A|_Y y = Ay$ et $D(A|_Y) = D(A) \cap Y$. De plus, on remarque que $T(1)|_Y = Id_Y$, ainsi $T(t)|_Y$ est périodique avec pour période $\tau \in \mathbb{N}^{-1}$. D'après le théorème 5.1.13, comme le spectre de $A|_Y$ est non vide, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu := 2i\pi n \in \sigma_p(A|_Y)$. Or, par définition, $\sigma_p(A|_Y) \subset \sigma_p(A)$. Ainsi, on a $2i\pi n \in \sigma_p(A)$ et donc $1 \in e^{\sigma_p(A)}$. Ce qui montre, quitte à ré-échelonner, que $\sigma_p(T(t)) \setminus \{0\} \subset e^{t\sigma_p(A)}$ pour tout $t \geq 0$. L'autre inclusion vient du théorème Spectral Mapping 1 5.1.10.

L'inclusion 5.27 découle directement de l'égalité 5.14. Pour montrer l'égalité 5.28, en utilisant le changement d'échelle suivant $(S(t))_{t \geq 0} := (e^{-\frac{t}{t_0} \log \mu} T(t))_{t \geq 0}$, on peut alors supposer que $\mu = 0$ (1 est valeur propre de $S(t_0)$). De la même façon que précédemment, on montre que la restriction de $(T(t))_{t \geq 0}$ à $Ker(1 - T(t_0))$ est un semi-groupe équicontinu périodique de période $\frac{1}{mt_0}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ (car $T(t_0)|_{Ker(1 - T(t_0))} = Id$). Ainsi, l'égalité découle du théorème 5.1.13. \square

5.2 Semi-groupe d'opérateurs de composition à poids équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$

Nous allons à présent appliquer la théorie exposée dans la section 1 de ce chapitre aux familles d'opérateurs de composition à poids sur l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Nous allons considérer deux cas de figure très différents. Dans le premier, on va considérer le cas où le point de Denjoy-Wolff du semiflot est à l'intérieur du disque et dans ce cas, on donne une condition pour que la famille de composition à poids soit un semi-groupe équicontinu. Dans le second cas, le point de Denjoy-Wolff sera sur $\partial\mathbb{D}$ et dans ce cas, on donne une condition pour que la famille de composition à poids ne soit pas un semi-groupe équicontinu et on ne peut a priori rien dire dans le cas contraire.

Théorème 5.2.1. Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} et $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Considérons le cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ pour Φ défini par :

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right), \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \geq 0.$$

Considérons la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ définie par $T_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Si le point de Denjoy-Wolff de Φ appartient à \mathbb{D} , que Φ n'est pas composé d'automorphismes elliptiques et que $\sup_{z \in \mathbb{D}} \text{Re}[g(z)] \leq M \in \mathbb{R}_+$, alors la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu de paramètre M .

Considérons le cas où le point de Denjoy-Wolff de Φ appartient à $\partial\mathbb{D}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \leq |m_t(0)|$ pour tout $t \geq 0$ alors le point iv) de la définition des semi-groupes équicontinus n'est vérifié pour aucun $\omega \geq 0$. En particulier, $(T_t)_{t \geq 0}$ n'est pas équicontinu s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $A > 0$, on ait $\int_0^A \text{Re}[g(\varphi_s(z))] ds \geq M$.

Preuve. Supposons tout d'abord que le point de Denjoy-Wolff α de Φ appartient à \mathbb{D} . Soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite exhaustive de compact de \mathbb{D} . Notons p_n les semi-normes sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ définies par $p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. $\text{Hol}(\mathbb{D})$ associé à cette famille de semi-norme est un espace de Fréchet. Soit $t \geq 0$. Montrons que $T_t \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$. La linéarité est immédiate. Montrons que T_t est continu. Rappelons que d'après la proposition 4.3.3, le cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ est borné. Soit $n \geq 1$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On a alors

$$p_n(T_t f) = \sup_{z \in K_n} |m_t(z) \cdot f(\varphi_t(z))| \leq C \sup_{z \in K_n} |f(\varphi_t(z))|.$$

Or, $\varphi_t(K_n)$ est un compact de \mathbb{D} . Ainsi il existe $m \geq 1$ tel que $\varphi_t(K_n) \subset K_m$. D'où, $p_n(T_t f) \leq C p_m(f)$. Cela montre que T_t est continu.

Par les propriétés des semiflots et des cocycles, les points i) et ii) sont vérifiés. Montrons que $\lim_{t \rightarrow 0^+} m_t \cdot f \circ \varphi_t = f$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. C'est-à-dire que pour tout compact K de \mathbb{D} , $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|m_t \cdot f \circ \varphi_t - f\|_{\infty, K} = 0$. Soit K un compact de \mathbb{D} . Soit $t \geq 0$ et $z \in K$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$. On a par inégalité triangulaire que

$$|m_t(z) f(\varphi_t(z)) - f(z)| \leq |m_t(z) - 1| \cdot |f(\varphi_t(z)) - f(z)| + |f(\varphi_t(z)) - f(z)| + |f(z)| \cdot |m_t(z) - 1|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f sur K , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z_1, z_2 \in K$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \delta$, on ait $|f(z_1) - f(z_2)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ et $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. D'autre part, on sait, d'après le théorème de Vitali, que l'application $(t, z) \mapsto \varphi_t(z)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ elle est donc uniformément continue sur $[0, 1] \times K$. En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$ vérifiant $|t| < \eta$, on ait $|\varphi_t(z) - z| < \delta$. Posons $M := \sup_{z \in K} |f(z)| > 0$. Par hypothèse, $t \mapsto m_t(z)$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, par hypothèse, la famille $(m_t)_{t \geq 0}$ est bornée et donc par le théorème de Vitali l'application $(t, z) \mapsto m_t(z)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ et donc uniformément continue sur $[0, 1] \times K$. En particulier, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$ vérifiant $|t| < \eta_1$, on ait $|m_t(z) - 1| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ et $|m_t(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{3M}$ (car $m_0(z) = 1$). Finalement, en posant $\eta_2 = \min(\eta, \eta_1)$, on a pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$ vérifiant $|t| < \eta_2$ que

$$|m_t(z) f(\varphi_t(z)) - f(z)| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

D'où, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|m_t \cdot f \circ \varphi_t - f\|_{\infty, K} = 0$.

Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Montrons enfin que $B := \{e^{-Mt}T_t f \mid t \geq 0\}$ est borné sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Pour cela, montrons que pour tout $n \geq 1$, p_n est majorée sur B . On prendra comme suite exhaustive de compact $K_n := \overline{D(0, r_n)}$ avec (r_n) une suite croissante de $[0, 1[$ qui converge vers 1. Soit $n \geq 1$. Par hypothèse, on a $\sup_{z \in K_n} |m_t(z)| \leq e^{Mt}$, on a alors

$$p_n(e^{-Mt}T_t f) = \sup_{z \in K_n} |e^{-Mt}m_t(z) \cdot f(\varphi_t(z))| \leq e^{-Mt}e^{Mt} \sup_{z \in K_n} |f(\varphi_t(z))| = \sup_{z \in K_n} |f(\varphi_t(z))|.$$

Soit $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $r_{N_\alpha} > |\alpha|$. Par le théorème de Denjoy-Wolff, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, on ait $\|\varphi_t - \alpha\|_{K_n, \infty} < r_{N_\alpha} - |\alpha|$. D'où, $p_n(\varphi_t) < r_{N_\alpha}$ pour tout $t \geq T$. D'autre part, l'application $(t, z) \mapsto \varphi_t(z)$ est continue sur $[0, T] \times K_n$ qui est compact. Ainsi, l'image K' de cette application est compacte et donc il existe M tel que $K' \subset K_M$. En posant $p = \max(M, N_\alpha)$, on a alors $p_n(\varphi_t) < r_p$ pour tout $t \geq 0$ et donc $\varphi_t(K_n) \subset K_p$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a $p_n(f \circ \varphi_t) \leq p_p(f) < +\infty$. Donc, on a $p_n(e^{-Mt}T_t f) \leq p_p(f)$. D'où, p_n est majorée sur B et donc $B := \{e^{-Mt}T_t f \mid t \geq 0\}$ est borné sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Finalement, la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu de paramètre M .

Supposons maintenant que le point de Denjoy-Wolff α de Φ appartient à $\partial\mathbb{D}$. Soit $\omega \geq 0$. Posons $f(z) = e^{(\omega+1)\frac{\bar{c}}{|c|^2}h(z)} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ où $c = G(0)$ (G générateur du semiflot (φ_t)) et h la fonction univalente associée au semiflot (φ_t) . Soit $t \geq 0$. Ainsi, comme il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \leq |m_t(0)|$, on a

$$\left| m_t(0)e^{-\omega t} f(\varphi_t(0)) \right| = \left| m_t(0)e^{-\omega t} e^{(\omega+1)\frac{\bar{c}}{|c|^2}h(\varphi_t(0))} \right| = \left| m_t(0)e^{-\omega t} e^{(\omega+1)\frac{\bar{c}}{|c|^2}ct} \right| = |m_t(0)| e^t \geq \delta e^t.$$

Considérons la suite exhaustive de compact $K_n := \overline{D(0, r_n)}$ avec (r_n) une suite croissante de $[0, 1[$ qui converge vers 1. Soit $M > 0$. Comme $0 \in K_n$ pour tout $n \geq 0$, il existe $t \geq 0$ tel que

$$M < \delta e^t \leq p_n(e^{-\omega t}m_t \cdot f \circ \varphi_t)$$

pour tout $n \geq 0$. En particulier, il existe un m tel que p_m non majorée sur $C_\omega := \{e^{-\omega t}m_t \cdot f \circ \varphi_t \mid t \geq 0\}$. Donc, la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ n'est pas un semi-groupe équicontinu de paramètre ω . Enfin, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $A > 0$, on ait $\int_0^A \text{Re}[g(\varphi_s(z))] ds \geq M$. Alors, on a

$$|m_t(z)| = \exp\left(\int_0^t \text{Re}[g(\varphi_s(z))] ds\right) \geq e^M > 0$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$. Donc d'après ce que l'on vient de voir la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ n'est pas un semi-groupe équicontinu de paramètre $\omega \geq 0$. \square

Dans le cas du semiflot trivial, on montre le même résultat que le théorème précédent dans le cas où le point de Denjoy-Wolff est à l'intérieur de \mathbb{D} .

Théorème 5.2.2. Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Considérons le cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ pour le semiflot trivial défini par :

$$m_t(z) = \exp(g(z)t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \geq 0.$$

Considérons la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ définis par $T_t f = m_t \cdot f$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Alors $\sup_{z \in \mathbb{D}} \text{Re}[g(z)] \leq M$ si et seulement si la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu de paramètre M .

5.2. SEMI-GROUPE D'OPÉRATEURS DE COMPOSITION À POIDS ÉQUICONTINU SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$

Preuve. Soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite exhaustive de compact de \mathbb{D} . Notons p_n les semi-normes sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ définies par $p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. $\text{Hol}(\mathbb{D})$ associé à cette famille de semi-norme est un espace de Fréchet. Soit $t \geq 0$. Montrons que $T_t \in \mathcal{L}(\text{Hol}(\mathbb{D}))$. La linéarité est immédiate. Montrons que T_t est continu. Rappelons que d'après la proposition 4.3.3, le cocycle $(m_t)_{t \geq 0}$ est borné. Soit $n \geq 1$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On a alors $p_n(T_t f) = \sup_{z \in K_n} |m_t(z) \cdot f(z)| \leq C \sup_{z \in K_n} |f(z)|$. D'où, $p_n(T_t f) \leq C p_n(f)$. Cela montre que T_t est continu.

Par les propriétés des cocycles, les points i) et ii) sont vérifiés. Montrons que $\lim_{t \rightarrow 0^+} m_t \cdot f = f$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. C'est-à-dire que pour tout compact K de \mathbb{D} , $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|m_t \cdot f - f\|_{\infty, K} = 0$. Soit K un compact de \mathbb{D} . Soient $t \geq 0$ et $z \in K$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$. On a que

$$|m_t(z)f(z) - f(z)| = |f(z)| \cdot |m_t(z) - 1|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $P := \sup_{z \in K} |f(z)| > 0$. Par hypothèse, $t \mapsto m_t(z)$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, par hypothèse, la famille $(m_t)_{t \geq 0}$ est bornée et donc par le théorème de Vitali l'application $(t, z) \mapsto m_t(z)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$ et donc uniformément continue sur $[0, 1] \times K$. En particulier, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$ vérifiant $|t| < \eta_1$, on ait $|m_t(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{N}$ (car $m_0(z) = 1$). Finalement, on a pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$ vérifiant $|t| < \eta_1$ que

$$|m_t(z)f(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

D'où, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|m_t \cdot f - f\|_{\infty, K} = 0$.

Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Montrons enfin que $B := \{e^{-Mt} T_t f \mid t \geq 0\}$ est borné sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Pour cela, montrons que pour tout $n \geq 1$, p_n est majorée sur B . Soient $n \geq 1$. Par hypothèse, on a $\sup_{z \in K_n} |m_t(z)| \leq e^{Mt}$, on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$p_n(e^{-Mt} T_t f) = \sup_{z \in K_n} |e^{-Mt} m_t(z) \cdot f(z)| \leq e^{-Mt} e^{Mt} \sup_{z \in K_n} |f(z)| = \sup_{z \in K_n} |f(z)| = p_n(f) < +\infty.$$

D'où, p_n est majorée sur B et donc $B := \{e^{-Mt} T_t f \mid t \geq 0\}$ est borné sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Finalement, la famille $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu de paramètre M .

Inversement, supposons que $\sup_{z \in \mathbb{D}} \text{Re}[g(z)] > M$. Ainsi, il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\text{Re}[g(z_0)] > M$.

On en déduit que

$$|e^{-Mt} m_t(z_0)| = |e^{-Mt} e^{g(z_0)t}| = e^{-Mt} e^{\text{Re}[g(z_0)]t} \rightarrow +\infty.$$

En considérant la fonction $f \equiv 1$, on montre alors que le semi-groupe n'est pas équicontinu de paramètre M . \square

Maintenant on va s'intéresser aux familles de composition à poids qui sont des semi-groupes équicontinus sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ et on va déterminer leur générateur ainsi que leur spectre ponctuel. Voici le résultat que l'on obtient dans le cas où le point de Denjoy-Wolff du semiflot appartient à \mathbb{D} .

Théorème 5.2.3. Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ et de point de Denjoy Wolff $b \in \mathbb{D}$. Soit $(m_t)_{t \geq 0}$ une famille d'application holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{C} . Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$. Si $(S_t)_{t \geq 0}$

CHAPITRE 5. SEMI-GROUPE D'OPÉRATEURS DE COMPOSITION À POIDS ÉQUICONTINU SUR UN FRÉCHET

forme un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de paramètre $\omega \geq 0$, alors $(m_t)_{t \geq 0}$ est un cocycle différentiable pour Φ , la fonction $g := \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \Big|_{t=0}$ est analytique sur \mathbb{D} et

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right).$$

De plus, le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est alors donné par

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid gf + Gf' \in \text{Hol}(\mathbb{D})\} = \text{Hol}(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Notons $\sigma_p(\Gamma)$ le spectre ponctuel de Γ . Alors $\sigma_p(\Gamma) = \{kG'(b) + g(b) \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D})\}$ avec $\alpha := \frac{g(b)}{G'(b)}$ et $h_0 = h \circ \gamma_b$ et $\gamma_b(z) = \frac{(z-b)}{(1-bz)}$.

Preuve. La première partie du théorème se montre de la même façon que le théorème 4.4.1. Par définition, on a

$$D(\Gamma) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f - f}{t} \text{ existe dans } \text{Hol}(\mathbb{D})\}.$$

Soit $f \in D(\Gamma)$. Soit $z \in \mathbb{D}$. On a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f(z) - f(z)}{t} = \frac{\partial}{\partial t} S_t f(z) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) f \circ \varphi_t(z) \Big|_{t=0} = g(z)f(z) + G(z)f'(z).$$

Or la convergence dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ entraîne la convergence ponctuelle. D'où, $\Gamma f = gf + Gf'$. Ainsi, l'opérateur défini par $\Delta f = gf + Gf'$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ étend l'opérateur Γ . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}[\lambda] > \omega$. Par le théorème 5.1.7, on a $\lambda \in \rho(\Gamma)$ et ainsi, l'opérateur $\Gamma - \lambda : D(\Gamma) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ est surjectif.

Comme le point b de Denjoy-Wolff du semiflot $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ appartient à \mathbb{D} . Il existe alors une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$(h \circ \gamma_b)(\varphi_t(z)) = e^{ct}(h \circ \gamma_b)(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $t \geq 0$, où $c = G'(b)$ et $\gamma_b(z) = \frac{(z-b)}{(1-bz)}$. Posons $h_0 = h \circ \gamma_b$. D'une part, on a $\frac{\partial}{\partial t} h_0(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = G'(b)h_0(z)$ et d'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(z) \Big|_{t=0} h'_0(\varphi_t(z)) \Big|_{t=0} = G(z)h'_0(z).$$

D'où, $G(z) = \frac{G'(b)h_0(z)}{h'_0(z)}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que $\Delta - \lambda$ ne soit pas injective. Ainsi, il existe $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ telle que $\Delta f = \lambda f$. Par le principe des zéros isolés, il existe $|b| < r < 1$ tel que f n'a pas de zéros sur $|z| = r$. Par la proposition 4.3.4, il existe $w : \mathbb{D} \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique tel que $m_t(z) = \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)}$. D'où, $g(z) = \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \Big|_{t=0} = \frac{G(z)w'(z)}{w(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{b\}$. Ainsi, on a sur le cercle de rayon r :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h'_0(z)\lambda}{G'(b)h_0(z)} - \frac{g(z)}{G(z)}.$$

Notons Z le nombre de zéros de f , comptés avec leur multiplicité, situés à l'intérieur du cercle de rayon r . On alors par la formule de Kronecker (voir [73] p.162) et le théorème des résidus, que

$$Z = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\lambda}{G'(b)} - \frac{g(b)}{G'(b)}.$$

5.2. SEMI-GROUPE D'OPÉRATEURS DE COMPOSITION À POIDS ÉQUICONTINU SUR $\text{Hol}(\mathbb{D})$

D'où, l'ensemble des valeurs propres λ de Δ est dénombrable et donc il existe $\lambda > \omega$ tel que $\Delta - \lambda$ soit injective. Supposons que $\text{Hol}(\mathbb{D}) \neq D(\Gamma)$. Il existe alors $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $f \notin D(\Gamma)$. On a cependant, $\Delta f - \lambda f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, donc par surjectivité de $\Gamma - \lambda : D(\Gamma) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$, il existe $g \in D(\Gamma)$ telle que $\Gamma g - \lambda g = \Delta f - \lambda f$. D'où, $\Delta(g - f) - \lambda(g - f) = 0$ et par injectivité, on a $f = g$. Or, $f \notin D(\Gamma)$ ce qui est absurde. Finalement, $\text{Hol}(\mathbb{D}) = D(\Gamma)$ et $\Gamma = \Delta$.

Soit $\lambda \in \sigma_p(\Gamma)$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe $f \in D(\Gamma) \setminus \{0\}$ telle que $\lambda = ZG'(b) + g(b)$. D'où, $\lambda \in \{kG'(b) + g(b) \mid k \in \mathbb{N}\}$. De plus, on a $\Gamma f = (kG'(b) + g(b))f$ et donc

$$f' - \left(\frac{(kG'(b) + g(b))h_0'(z)}{G'(b)h_0(z)} - \frac{w'}{w} \right) f = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $f(z) = \frac{ch_0(z)^{k+\alpha}}{w(z)}$. D'où, $\frac{h_0(z)^{k+\alpha}}{w(z)} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et donc

$$\sigma_p(\Gamma) \subset \left\{ kG'(b) + g(b) \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \right\}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Montrons que $kG'(b) + g(b) \in \sigma_p(\Gamma)$. En dérivant $f := \frac{h_0^{k+\alpha}}{w}$, on obtient $\Gamma f = Gf' + gf = (kG'(b) + g(b))f$. D'où, $f \in D(\Gamma)$ et $kG'(b) + g(b) \in \sigma_p(\Gamma)$, ce qui montre la seconde inclusion. \square

Dans le cas où le semiflot est trivial, on retrouve le résultat précédent avec $G \equiv 0$.

Proposition 5.2.4. Soit $(m_t)_{t \geq 0}$ une famille d'application holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{C} . Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = m_t \cdot f$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$. Si $(S_t)_{t \geq 0}$ forme un semi-groupe fortement continu et équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de paramètre $\omega \geq 0$, alors $(m_t)_{t \geq 0}$ est un cocycle différentiable pour le semiflot trivial, la fonction $g := \left. \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) \right|_{t=0}$ est analytique sur \mathbb{D} et

$$m_t(z) = \exp(g(z)t).$$

De plus, le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est alors donné par

$$\begin{cases} \Gamma f = gf \\ D(\Gamma) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid gf \in \text{Hol}(\mathbb{D})\} = \text{Hol}(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Preuve. La première partie du théorème se montre de la même façon que le théorème 4.4.1. Par définition, on a

$$D(\Gamma) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f - f}{t} \text{ existe dans } \text{Hol}(\mathbb{D}) \right\}.$$

Soit $f \in D(\Gamma)$. Soit $z \in \mathbb{D}$. On a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_t f(z) - f(z)}{t} = \left. \frac{\partial}{\partial t} S_t f(z) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} m_t(z) f(z) \right|_{t=0} = g(z) f(z).$$

Or la convergence dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$ entraîne la convergence ponctuelle. D'où, $\Gamma f = gf$. Le fait que $\text{Hol}(\mathbb{D}) = D(\Gamma)$ est immédiat. \square

Une question, qui reste ouverte, est de se demander qu'elle serait le spectre ponctuel du générateur dans le cas précédent.

Dans le cadre des espaces de Banach, on a montré que sous certaines conditions, on avait que le générateur Γ est continu si et seulement si $G \equiv 0$. Dans le cas où l'on considère les semi-groupe équicontinus sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ on a toujours la seconde implication, mais la première est fausse puisque l'on a le théorème de Weierstrass.

Proposition 5.2.5. *Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur G . Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$ où*

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right)$$

avec $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu et équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de paramètre $\omega \geq 0$, si $G \equiv 0$ alors son générateur Γ est continu. La réciproque est fausse.

Preuve. Supposons que $G \equiv 0$. On a alors $\Gamma f = gf$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors $p_n(\Gamma f) = p_n(gf) \leq \sup_{z \in K_n} |g(z)| \cdot p_n(f) \leq c_n p_n(f)$ où $c_n < +\infty$. Ce qui montre que Γ continu.

Supposons que Γ est continu. Considérons la suite exhaustive de compact $K_n := \overline{D(0, r_n)}$ avec (r_n) une suite croissante de $[0, 1[$ qui converge vers 1. Par définition, pour tout $n \geq 1$, il existe $c_n > 0$ et un sous ensemble fini I_n de \mathbb{N}^* tel que pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, on ait $p_n(\Gamma f) \leq c_n \max_{i \in I_n} p_i(f)$. Par croissance de la suite $(p_n(f))$, cela est équivalent à dire que pour tout $n \geq 1$, il existe $c_n > 0$ et $i > n$ tel que pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, on ait $p_n(\Gamma f) \leq c_n p_i(f)$. Soit $n \geq 1$. Prenons f une fonction constante. On a alors $p_n(g) \leq c_n$. D'autre part, d'après le théorème de Weierstrass, l'application $f \mapsto f'$ est continue de $\text{Hol}(\mathbb{D})$ dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n > 0$ et $i > n$ tel que pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, on ait $p_n(f') \leq a_n p_i(f)$. Prenons $G(z) := -z$. On a alors pour tout $n \geq 1$ et pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$:

$$p_n(\Gamma f) = p_n(gf + Gf') \leq p_n(g)p_n(f) + p_n(G)p_n(f') \leq c_n p_n(f) + r_n a_n p_i(f) \leq (c_n + r_n a_n) p_i(f).$$

Ainsi, Γ continu et $G \neq 0$. □

Nous étudions maintenant l'implication réciproque, c'est-à-dire si le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est de la forme (5.2.3), alors le semi-groupe équicontinu est une famille d'opérateurs de composition à poids. On retrouve ainsi le même résultat qu'en considérant des espaces de Banach de fonctions holomorphes vérifiant une certaine condition d'évaluation qui est vérifié dans le cas où l'espace est $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Avant de montrer le résultat qui nous intéresse, commençons par démontrer quelques lemmes :

Lemme 5.2.6. *Soient $g, G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On définit l'opérateur Γ par $\Gamma f = gf + Gf'$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ qui est alors continu. On note δ_z l'évaluation en z et Γ' la transposée de Γ . Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\Gamma' \delta_z = g(z) \delta_z + G(z) \delta'_z$ où $\langle \delta_z, f \rangle = f(z)$.*

Preuve. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle \Gamma' \delta_z, f \rangle &= \langle \delta_z, \Gamma f \rangle = \langle \delta_z, gf + Gf' \rangle &= g(z)f(z) + G(z)f'(z) \\ &= g(z) \langle \delta_z, f \rangle + \langle G(z) \delta'_z, f \rangle &= g(z) \langle \delta_z, f \rangle + \langle G(z) \delta'_z, f \rangle \\ &= \langle g(z) \delta_z + G(z) \delta'_z, f \rangle \end{aligned}$$

D'où $\Gamma'\delta_z = g(z)\delta_z + G(z)\delta'_z$. \square

Lemme 5.2.7. Soient $g, G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de générateur $(\Gamma, \text{Hol}(\mathbb{D}))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Notons $u(t, z) = (S_t f)(z)$. Alors $\frac{d}{dt}u(t, z) = g(z)u(t, z) + G(z)\frac{d}{dz}u(t, z)$ pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$.

Preuve. D'après le lemme 5.2.6, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, z) &= \frac{d}{dt} \langle \delta_z, S_t f \rangle = \langle \delta_z, \frac{d}{dt}S_t f \rangle = \langle \delta_z, \Gamma S_t f \rangle \\ &= \langle \Gamma' \delta_z, S_t f \rangle \\ &= \langle g(z)\delta_z + G(z)\delta'_z, S_t f \rangle \\ &= g(z)S_t f(z) + G(z)(S_t f)'(z) \\ &= g(z)u(t, z) + G(z)\frac{d}{dz}u(t, z). \end{aligned}$$

\square

Nous pouvons maintenant prouver le résultat qui nous intéresse.

Théorème 5.2.8. Soient $g, G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ où G génère le semiflot $(\varphi_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de générateur $(\Gamma, \text{Hol}(\mathbb{D}))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Alors $(S_t f)(z) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $0 \leq t < \tau(z)$, où

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z))ds\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

De plus, $\tau(z) = \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et donc le semiflot φ est global sur \mathbb{D} .

Preuve. Notons $u(t, z) = (S_t f)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $0 \leq t < \tau(z)$. Définissons $w : [0, t] \rightarrow \mathbb{C}$ qui à s associe $w(s) = m_s(z)u(t-s, \varphi_s(z))$. On a alors par le lemme 5.2.7,

$$\begin{aligned} w'(s) &= \frac{d}{ds}w(s) = \frac{d}{ds}m_s(z)u(t-s, \varphi_s(z)) \\ &= \frac{d}{ds}[m_s(z)] \cdot u(t-s, \varphi_s(z)) + m_s(z) \cdot \frac{d}{ds}[u(t-s, \varphi_s(z))] \\ &= m_s(z)g(\varphi_s(z))u(t-s, \varphi_s(z)) + m_s(z) \cdot \left[-\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) + \frac{d}{ds}\varphi_s(z) \cdot \frac{d}{dz}u(t-s, \varphi_s(z))\right] \\ &= m_s(z) \cdot \left[g(\varphi_s(z))u(t-s, \varphi_s(z)) + G(\varphi_s(z))\frac{d}{dz}u(t-s, \varphi_s(z))\right] - m_s(z)\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) \\ &= m_s(z)\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) - m_s(z)\frac{d}{dt}u(t-s, \varphi_s(z)) = 0 \end{aligned}$$

D'où $w(t) = w(0)$ avec $w(0) = u(t, z) = (S_t f)(z)$ et $w(t) = m_t(z)u(0, \varphi_t(z)) = m_t(z)(S_0 f)(\varphi(t, z)) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$. Ainsi, $(S_t f)(z) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $0 \leq t < \tau(z)$.

Supposons que $\tau(z) < \infty$. Ainsi, il existe une suite croissante $(t_n)_n$ qui converge vers $\tau(z)$ et il existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, z) = \alpha$. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On a alors par continuité et d'après ce que l'on a vu avant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{t_n}(z)f(\varphi(t_n, z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{t_n} f)(z) = (S_{\tau(z)} f)(z).$$

D'où,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi(t_n, z)) = \frac{(S_{\tau(z)} f)(z)}{m_{\tau(z)}(z)}$$

existe dans \mathbb{C} pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Ce qui est absurde. Ainsi $\tau(z) = \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et donc le semiflot φ est global sur \mathbb{D} . \square

On remarque que l'on peut retrouver une partie du résultat de Koenigs. En effet, on peut retrouver le spectre ponctuel de l'opérateur de composition défini sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

Proposition 5.2.9. *Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ et de point de Denjoy-Wolff 0. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$. Posons $\varphi = \varphi_1$. Alors $\sigma_p(C_\varphi) = \sigma_p(S_1) = \{(\varphi'(0))^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Preuve. D'après le théorème 5.2.1, on a que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de paramètre 0. Ainsi, d'après le théorème 5.2.3, on a que le spectre ponctuel du générateur Γ de $(S_t)_{t \geq 0}$ est $\sigma_p(\Gamma) = \{kG'(0) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Montrons que $\varphi'(0) = e^{G'(0)}$. On a alors $h(\varphi(z)) = e^{G'(0)}h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ où h est la fonction univalente associée au semiflot. Ainsi, en dérivant, on obtient $\varphi'(z)h'(\varphi(z)) = e^{G'(0)}h'(z)$. Or, $\varphi(0) = 0$ car zéro est le point de Denjoy-Wolff de $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$. D'où, $\varphi'(0)h'(0) = e^{G'(0)}h'(0)$. Or, $h'(0) = 1$. Ainsi, $\varphi'(0) = e^{G'(0)}$. De plus, d'après le théorème de Berkson et Porta, on a $G'(0) = -F(0)$ où $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe vérifiant $\text{Re}[F(z)] \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi, $0 < |\varphi'(0)| = e^{-\text{Re}[F(0)]} \leq 1$. D'autre part, par le théorème spectral, on a $\sigma_p(S_1) \setminus \{0\} = e^{\sigma_p(\Gamma)} = \{e^{kG'(0)} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{(\varphi'(0))^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. \square

Dans le cas où l'on considère les semi-groupes équicontinus de composition, on peut obtenir les sous-espaces propres de son générateur ainsi que les sous-espaces propres de l'opérateur de composition qui avaient déjà été obtenus par Koenigs.

Proposition 5.2.10. *Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ et de point de Denjoy-Wolff 0. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$. D'après le théorème 5.2.1, on a que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de paramètre 0. Notons Γ son générateur. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\text{Ker}(kG'(0) - \Gamma) = \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{kG'(0)t} - S_t) = \mathbb{C}.h^k.$$

où $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'unique fonction univalente avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$h(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t}h(z)$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$.

Preuve. D'après le théorème 5.1.16, on a que $\text{Ker}(kG'(0) - \Gamma) \subset \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{kG'(0)t} - S_t)$. Montrons l'autre inclusion. Soit $f \in \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{kG'(0)t} - S_t)$. D'après le théorème 5.1.5, on a

$$\frac{d}{dt} S_t f = \Gamma S_t f = \Gamma(e^{kG'(0)t} f) = e^{kG'(0)t} \Gamma f$$

pour tout $t \geq 0$. D'autre part,

$$\frac{d}{dt} S_t f = \frac{d}{dt} e^{kG'(0)t} f.$$

On a vu qu'il existe alors une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$h(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t}h(z)$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$. D'où en dérivant, on obtient

$$\varphi'_t(z)h'(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t}h'(z).$$

Comme h est univalente, on a que h' ne s'annule pas et donc en zéro, on a

$$\varphi'_t(0) = \frac{e^{G'(0)t}h'(0)}{h'(\varphi_t(0))} = e^{G'(0)t}$$

pour tout $t \geq 0$ et donc $e^{kG'(0)t} = \varphi'_t(0)^k$. Ainsi,

$$\frac{d}{dt}S_t f = f \frac{d}{dt}\varphi'_t(0)^k = k \frac{d}{dt}[\varphi'_t(0)]\varphi'_t(0)^{k-1} f = k f \varphi'_t(0)^{k-1} \frac{d}{dt}[e^{G'(0)t}] = kG'(0)\varphi'_t(0)^k f.$$

Finalement, on a

$$\Gamma f = kG'(0)f,$$

ce qui veut dire que $f \in \text{Ker}(kG'(0) - \Gamma)$. Ainsi on a l'égalité recherchée. Enfin, comme pour tout $t \geq 0$, on a

$$h(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t}h(z),$$

en passant à la puissance k -ième de chaque côté, on obtient que

$$\text{Ker}(e^{kG'(0)t} - S_t) = \mathbb{C}.h^k,$$

pour tout $t \geq 0$, ce qui termine la preuve. \square

Nous allons à présent généraliser le résultat précédent au cas d'une famille de composition à poids.

Proposition 5.2.11. Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ et de point de Denjoy-Wolff 0. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = m_t.f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$ où

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z))ds\right), \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \geq 0.$$

avec $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $\sup_{z \in \mathbb{D}} \text{Re}[g(z)] \leq M \in \mathbb{R}_+$. D'après le théorème 5.2.1, on a que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Notons Γ son générateur. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{h^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ où $\alpha = \frac{g(0)}{G'(0)}$, $w : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que $m_t = \frac{w \circ \varphi_t}{w}$ et $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'unique fonction univalente avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$h(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t}h(z)$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$. Alors,

$$\text{Ker}(kG'(0) + g(0) - \Gamma) = \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{kG'(0)t + g(0)t} - S_t) = \mathbb{C} \cdot \frac{h^{k+\alpha}}{w}.$$

Preuve. D'après le théorème 5.1.16, on a que

$$\text{Ker}(kG'(0) + g(0) - \Gamma) \subset \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{kG'(0)t+g(0)t} - S_t).$$

Montrons l'autre inclusion. Soit $f \in \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker}(e^{kG'(0)t+g(0)t} - S_t)$. D'après le théorème 5.1.5, on a

$$\frac{d}{dt} S_t f = \Gamma S_t f = \Gamma(e^{kG'(0)t+g(0)t} f) = e^{kG'(0)t+g(0)t} \Gamma f$$

pour tout $t \geq 0$. D'autre part,

$$\frac{d}{dt} S_t f = \frac{d}{dt} (e^{kG'(0)t+g(0)t} f).$$

On a vu qu'il existe alors une unique fonction univalente $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$ telle que

$$h(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t} h(z)$$

pour tout $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{D}$. D'où en dérivant, on obtient

$$\varphi'_t(z) h'(\varphi_t(z)) = e^{G'(0)t} h'(z).$$

Comme h est univalente, on a que h' ne s'annule pas et donc en zéro, on a

$$\varphi'_t(0) = \frac{e^{G'(0)t} h'(0)}{h'(\varphi_t(0))} = e^{G'(0)t}$$

pour tout $t \geq 0$ et donc $e^{kG'(0)t} = \varphi'_t(0)^k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_t f &= f \frac{d}{dt} (\varphi'_t(0)^k e^{g(0)t}) \\ &= \left[k \varphi'_t(0)^{k-1} \frac{d}{dt} [\varphi'_t(0)] e^{g(0)t} + g(0) \varphi'_t(0)^k e^{g(0)t} \right] \\ &= (kG'(0) + g(0)) (e^{kG'(0)t+g(0)t} f). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\Gamma f = (kG'(0) + g(0)) f,$$

ce qui veut dire que $f \in \text{Ker}(kG'(0) + g(0) - \Gamma)$. Ainsi on a l'égalité recherchée. Montrons que $\text{Ker}(e^{kG'(0)t+g(0)t} - S_t) = \mathbb{C} \cdot \frac{h^{k+\alpha}}{w}$ pour tout $t \geq 0$. En effet, d'une part on a

$$S_t \left(\frac{h^{k+\alpha}}{w} \right) = m_t \left(\frac{h^{k+\alpha}}{w} \right) \circ \varphi_t = m_t \frac{e^{(k+\alpha)G'(0)t} h^{k+\alpha}}{w \circ \varphi_t} = e^{kG'(0)t+g(0)t} \frac{h^{k+\alpha}}{w}.$$

D'où, $\mathbb{C} \cdot \frac{h^{k+\alpha}}{w} \subset \text{Ker}(e^{kG'(0)t+g(0)t} - S_t)$. Montrons l'autre inclusion. Soit $f \in \text{Ker}(e^{kG'(0)t+g(0)t} - S_t)$. Posons $p(z) = \frac{w(z)f(z)}{h^\alpha(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Par hypothèse, on a

$$m_t f \circ \varphi_t = e^{kG'(0)t+g(0)t} f.$$

D'où,

$$(wf) \circ \varphi_t = e^{kG'(0)t+g(0)t} (wf).$$

Ainsi, on a

$$p \circ \varphi_t = \frac{(wf) \circ \varphi_t}{h^\alpha \circ \varphi_t} = \frac{e^{kG'(0)t+g(0)t} (wf)}{h^\alpha \circ \varphi_t} = \frac{e^{kG'(0)t+g(0)t} (wf)}{e^{g(0)t} h^\alpha} = e^{kG'(0)t} p.$$

Donc d'après le théorème précédent, on a $p = \lambda h^k$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. D'où, $f = \lambda \frac{h^{k+\alpha}}{w}$, ce qui termine la preuve. \square

Enfin, on conjecture le résultat suivant qui donne le spectre du semi-groupe équicontinu de composition à poids dans tous les cas de figure.

Conjecture 5.2.12. Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ de point de Denjoy-Wolff b et h sa fonction univalente associée. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$ où

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right), \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \geq 0.$$

avec $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty < +\infty$. Posons $\alpha := \frac{g(b)}{G'(b)}$ et $h_0 = h \circ \gamma_b$ et $\gamma_b(z) = \frac{(z-b)}{(1-\bar{b}z)}$. Supposons $(S_t)_t$ forme un semi groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Alors, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\sigma(S_t) = \begin{cases} \{0\} \cup \left\{ e^{kG'(b)t+g(b)t} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \right\} & \text{si } |b| < 1 \text{ et } \varphi_t \text{ non automorphe ;} \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{si } |b| = 1 \text{ et } \varphi_t \text{ automorphisme ;} \\ \mathbb{C} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $|b| < 1$, d'après la proposition 3.2.1, comme φ_t n'est pas un automorphisme on a que S_t n'est pas inversible et donc $0 \in \sigma(S_t)$. D'où,

$$\{0\} \cup \left\{ e^{kG'(b)t+g(b)t} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \right\} \subset \sigma(S_t).$$

Il reste à montrer l'autre inclusion.

Dans le cas où $|b| = 1$, on peut montrer que le poids m_t ($t \geq 0$) est borné inférieurement et supérieurement. Comme $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty < +\infty$, on a que m_t est bornée supérieurement.

Montrons que m_t est bornée inférieurement. Soit $z \in \mathbb{D}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $z \in K_n$ où $(K_n)_n$ est une suite exhaustive de compacts de \mathbb{D} . Or, $Re[g \circ \varphi_s] : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. D'où, $Re[g \circ \varphi_s(K_n)]$ est un fermé borné de \mathbb{R} . Notons a un minorant de ce fermé borné. On a alors

$$|m_t(z)| = \exp \left(\int_0^t Re[g \circ \varphi_s(z)] ds \right) \geq e^{at} > 0.$$

Ainsi, d'après la proposition 3.2.1, si φ_t est un automorphisme alors S_t est inversible et donc $0 \notin \sigma(S_t)$ et si φ_t n'est pas un automorphisme alors S_t n'est pas inversible et donc $0 \in \sigma(S_t)$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \sigma(S_t)$.

Conclusions et perspectives

Cette thèse a fait l'objet de trois publications acceptées [4, 3, 11].

Dans cette thèse, nous avons étudié les opérateurs de composition à poids sur des espaces de fonctions holomorphes, ainsi que des semi-groupes de tels opérateurs. Ces travaux font suite à l'étude des opérateurs de composition. Soit Ω un ouvert non vide simplement connexe de \mathbb{C} . Soient $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ et $m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. On définit l'opérateur de composition à poids T sur $\text{Hol}(\Omega)$ par

$$Tf := m.f \circ \varphi.$$

Dans le chapitre 2, nous avons regardé les propriétés spectrales de l'opérateur de composition à poids sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ lorsque φ est un automorphisme elliptique. Grâce à une transformation de similarité, on a pu considérer ici que φ est une rotation. Dans le cas des rotations périodiques, nous avons montré que le spectre ponctuel était non vide si seulement si le poids a une forme très particulière (décrite dans le théorème ci-dessous). De plus, dans ce cas là on a obtenu le spectre ponctuel ainsi que le spectre, qui lui est égal ici.

Théorème 6.0.1. Soient $\beta \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$ tels que $\beta^N = 1$, $\beta^k \neq 1$ pour $k = 1, \dots, N - 1$. Soient $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $m \neq 0$ et considérons l'opérateur

$$T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ défini par } (Tf)(z) = m(z)f(\beta z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) $\sigma_p(T) \neq \emptyset$;
- b) il existe $a_0 \in \mathbb{C}$, $f_j \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $j = 1, \dots, N - 1$ tels que $m = \exp m_1$ où

$$m_1(z) = a_0 + z f_1(z^N) + z^2 f_2(z^N) + \dots + z^{N-1} f_{N-1}(z^N) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dans ce cas,

$$T^N = e^{Na_0} \text{Id}, \quad \sigma_p(T) = \{e^{a_0} \beta^k : k = 0, \dots, N - 1\} = \sigma(T).$$

Dans le cas des rotations apériodiques (c'est-à-dire quand $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ et $\beta^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on a montré dans un premier temps que si le poids s'annulait alors le spectre ponctuel de l'opérateur de composition à poids était vide. Ensuite, nous avons supposé que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et dans ce cas il existe $m_1 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tel que

$$m(z) = \exp(m_1(z)) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

En posant $m_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On a démontré le résultat suivant.

Théorème 6.0.2. a) Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_n|}{|1 - \beta^n|} \right)^{1/n} \leq 1 \quad (6.1)$$

alors $\sigma_p(T) = \{m(0)\beta^n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\ker(T - m(0)\beta^n \text{Id})$ est de dimension 1, généré par la fonction

$$f_n(z) = z^n \exp(g_1(z)) \text{ où } g_1(z) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1 - \beta^n} z^n \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}. \quad (6.2)$$

b) Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_n|}{|1 - \beta^n|} \right)^{1/n} > 1 \quad (6.3)$$

alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.

D'autre part, on a montré aussi que le spectre de l'opérateur de composition à poids n'était pas forcément fermé. On a donc considéré le spectre de Waelbroeck $\sigma_W(T)$ et nous avons obtenu le résultat suivant lorsque le poids ne s'annule pas.

Théorème 6.0.3. Supposons que $m(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Alors

- a) $\{\beta^n m(0) : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}$.
- b) $\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = |m(0)|\}$.

De plus, lorsque le poids s'annule, nous avons montré que le spectre de Waelbroeck n'était pas un cercle mais un disque fermé ou \mathbb{C} tout entier. Une question qui reste ouverte est de savoir si l'on a toujours $\sigma_W(T) = \overline{\sigma(T)}$.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque φ n'est pas un automorphisme elliptique. On a commencé par donner une description de l'ensemble du spectre des opérateurs de composition elliptiques à poids. Si l'on appelle $\alpha \in \mathbb{D}$ le point de Denjoy-Wolff de φ et si $m(\alpha) \neq 0$ et $\varphi'(\alpha) \neq 0$, alors on a trouvé que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{m(\alpha)\varphi'(\alpha)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Dans le cas où φ est hyperbolique ou parabolique, nous avons montré que le spectre ponctuel des opérateurs de composition hyperbolique ou parabolique pondérés était soit vide ou soit égal à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nous avons aussi trouvé une condition sur le poids pour que le spectre ponctuel de l'opérateur de composition hyperbolique soit égal à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Théorème 6.0.4. Soit φ une fonction holomorphe hyperbolique de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et soit ξ son point de Denjoy-Wolff. Soit $m \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ tel que m a une limite angulaire non nulle en $\xi \in \mathbb{C}$ et m a une dérivée angulaire en ξ finie. Alors

$$\sigma_p(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ et } \sigma(T) = \sigma_p(T) \text{ si et seulement si } T \text{ est inversible.}$$

Cependant, nous avons trouvé un exemple explicite tel que le poids ne vérifie pas le critère du théorème ci-dessus, mais vérifiant $\sigma_p(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Une question qui reste ouverte est la suivante : Peut-on trouver un meilleur critère sur le poids pour que $\sigma_p(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Dans le chapitre 4, nous avons considéré des familles d'opérateurs de composition à

poids sur des espaces de Banach de fonctions holomorphes et plus particulièrement de semi-groupes fortement continus sur ces espaces. Tout d'abord, nous avons montré que le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ du semi-groupe à la forme suivante :

$$\begin{cases} \Gamma f = gf + Gf' \\ D(\Gamma) = \{f \in X \mid gf + Gf' \in X\} \end{cases} \quad (6.4)$$

où g et G sont des applications holomorphes. Ensuite, nous avons donné des conditions sur l'espace de Banach et la famille de poids pour que la famille d'opérateurs de composition à poids soit un semi-groupe fortement continu.

Théorème 6.0.5. *Soit X un Banach de fonctions holomorphes uniformément convexe qui s'injecte continument dans $\text{Hol}(\Omega)$. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique vérifiant $\sup_{z \in \Omega} \text{Re}[g(z)] < \infty$. Soit une famille d'opérateur $(S_t)_{t \geq 0}$ définie en 4.5 avec $m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right)$. Supposons de plus que*

$$\|hf\|_X \leq \|h\|_\infty \|f\|_X$$

pour tout $f \in X$ et $h \in H^\infty$ et que

$$\|f \circ \varphi_t\|_X \leq C_t \|f\|_X$$

pour tout $t \geq 0$ et $f \in X$ où C_t est une fonction continue de la variable t , à valeurs réelles positives et vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0^+} C_t = 1$. Alors, $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X .

Une question qui reste ouverte est de savoir si l'on peut trouver des conditions plus général sur X et g dans le théorème ci-dessus. Enfin, dans ce chapitre, lorsque l'espace de Banach vérifie une condition d'évaluation, nous avons montré que si le générateur infinitésimal $(\Gamma, D(\Gamma))$ d'un semi-groupe a la forme (6.4), alors le semi-groupe est une famille d'opérateurs de composition à poids.

Dans le chapitre 5, on a regardé cette fois-ci les semi-groupes de composition à poids, sur l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Tout d'abord, on a donné des critères pour que la famille d'opérateurs de composition à poids forme un semi-groupe équicontinu ou non. Inversement, on a vu que si la famille d'opérateurs de composition à poids forme un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ alors son générateur est donné par $\Gamma f = gf + Gf'$ avec $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Dans certains cas, nous avons pu obtenir le spectre ponctuel du générateur et ainsi avoir des informations sur le spectre ponctuel du semi-groupe. Ensuite, nous avons vu que si le générateur d'un semi-groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ est de la forme $\Gamma f = gf + Gf'$ avec $G, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes, alors le semi-groupe est composé d'opérateurs de composition à poids.

Théorème 6.0.6. *Soient $g, G \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ où G génère le semiflot $(\varphi_t)_{0 \leq t < \tau(z)}$. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de générateur $(\Gamma, \text{Hol}(\mathbb{D}))$ avec $\Gamma f = gf + Gf'$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Soit $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Alors $(S_t f)(z) = m_t(z)f(\varphi_t(z))$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $0 \leq t < \tau(z)$, où*

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

De plus, $\tau(z) = \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et donc le semiflot φ est global sur \mathbb{D} .

Enfin, on conjecture le résultat suivant, dont on a des éléments de réponse, qui donne le spectre du semi-groupe équicontinu de composition à poids dans tous les cas de figure.

Conjecture 6.0.7. Soient $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ un semiflot sur \mathbb{D} de générateur $G \neq 0$ de point de Denjoy-Wolff b et h sa fonction univalente associée. Considérons la famille d'opérateurs $(S_t)_{t \geq 0}$ sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$ défini par $S_t f = m_t \cdot f \circ \varphi_t$ pour tout $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ et $t \geq 0$ où

$$m_t(z) = \exp \left(\int_0^t g(\varphi_s(z)) ds \right), \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \geq 0.$$

avec $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|m_t\|_\infty < +\infty$. Posons $\alpha := \frac{g(b)}{G'(b)}$ et $h_0 = h \circ \gamma_b$ et $\gamma_b(z) = \frac{(z-b)}{(1-\bar{b}z)}$. Supposons $(S_t)_t$ forme un semi groupe équicontinu sur $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Alors, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\sigma(S_t) = \begin{cases} \{0\} \cup \left\{ e^{kG'(b)t + g(b)t} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{h_0^{k+\alpha}}{w} \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \right\} & \text{si } |b| < 1 \text{ et } \varphi_t \text{ non automorphe ;} \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{si } |b| = 1 \text{ et } \varphi_t \text{ automorphisme ;} \\ \mathbb{C} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Appendices

Théorèmes de Valiron et Pommerenke

A.1 Généralités

Par la suite, on notera $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}[z] > 0\}$ le demi-plan droit. Commençons cette section par des rappels de définitions et de résultats importants.

Définition A.1.1 (Limite angulaire). Soit $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$. On dit que f a une limite non-tangentielle ou angulaire L au point $\xi \in \partial\mathbb{D}$ si $f(z) \rightarrow L$ quand $z \rightarrow \xi$ à travers tout angle de Stolz \hat{S} au point ξ , où

$$\hat{S} := \{z \in \mathbb{D} \mid |\operatorname{Arg}(1 - \bar{\xi}z)| < \beta, |z - \xi| < r, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[, r \in]0, 2 \cos \beta\}.$$

Dans ce cas, on note

$$\angle \lim_{z \rightarrow \xi} f(z) = L.$$

Soit $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$. On dit que f a une limite non-tangentielle ou angulaire L à l'infini si $f(z) \rightarrow L$ quand $z \rightarrow \infty$ à travers tout secteur de la forme

$$S_\beta := \{z \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Arg}(z)| < \beta\}$$

avec $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on note

$$\angle \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L.$$

Définition A.1.2 (Dérivée angulaire). Soit $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$. Soit $\tau \in \partial\mathbb{D}$. On dit que f admet une dérivée angulaire $f'(\tau)$ au point τ si $f'(\tau) := \angle \lim_{z \rightarrow \tau} f(z)$ existe dans \mathbb{C} et si

$$f'(\tau) := \angle \lim_{z \rightarrow \tau} \frac{f(z) - f(\tau)}{z - \tau}$$

existe dans $\mathbb{C} \cup \{+\infty\}$.

Définition A.1.3 (Distance pseudo-hyperbolique). On appelle distance pseudo-hyperbolique sur le disque l'application $d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$d(p, q) := \left| \frac{p - q}{1 - \bar{p}q} \right|$$

pour tout $p, q \in \mathbb{D}$. Soit $p \in \mathbb{D}$ et $r > 0$. Notons

$$\Delta(p, r) := \{z \in \mathbb{D} \mid d(p, z) < r\}.$$

On appelle $\Delta(p, r)$ le disque pseudo-hyperbolique de centre p et de rayon r .

Remarque : L'application d est continue.

Lemme A.1.4 (Lemme de Schwarz-Pick). Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analytique. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{D}$, on a

$$d(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$$

ou de manière équivalente pour tout $p \in \mathbb{D}$ et $r > 0$, on a

$$f(\Delta(p, r)) \subset \Delta(f(p), r).$$

Il y a égalité si et seulement si f est un automorphisme.

Preuve. Cela découle du lemme de Schwarz. Voir [76]. □

Théorème A.1.5 (Théorème de Julia). Soient $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analytique non constante et $\eta, \omega \in \partial\mathbb{D}$. S'il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{D} qui converge vers ω telle que $f(p_n) \rightarrow \eta$ et

$$\frac{1 - |f(p_n)|}{1 - |p_n|} \rightarrow \delta < \infty,$$

alors

a) $\delta > 0$;

b) $f(H(\omega, \lambda)) \subset H(\eta, \lambda\delta)$ pour tout $\lambda > 0$ où l'horodisque

$$H(w, \lambda) := \{z \in \mathbb{D} \mid |1 - z\bar{w}|^2 < \lambda(1 - |z|^2)\};$$

c) $\angle \lim_{z \rightarrow \omega} f(z) = \eta$.

Preuve. Voir [76]. □

Théorème A.1.6 (Théorème de Julia-Carathéodory - Coefficient de dilatation). Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analytique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f n'a pas de point fixe dans \mathbb{D} ;

ii) il existe un unique $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$\alpha := \angle \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z) - \xi}{z - \xi}$$

existe avec $0 < \alpha \leq 1$;

iii) il existe un unique $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$\angle \lim_{z \rightarrow \xi} f(z) = \xi \quad \text{et} \quad \angle \lim_{z \rightarrow \xi} f'(z) = \alpha \leq 1;$$

iv) il existe un unique $\xi \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$d(\xi) := \liminf_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \alpha \leq 1.$$

Dans ii), iii) et iv) ξ est le même. On appelle α le coefficient de dilatation de f au point de Denjoy-Wolff ξ de f . Si $\alpha < 1$, on dit que f est de type hyperbolique. Si $\alpha = 1$, on dit que f est de type parabolique.

Preuve. Voir [77] et [76]. □

Pour effectuer les preuves des théorèmes de Valiron et Pommerenke, on va se placer dans le demi-plan droit. Commençons par montrer l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan.

Théorème A.1.7 (Inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan). *Soit $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ une application analytique. Alors*

$$\left| \frac{f(p) - f(q)}{f(p) + \overline{f(q)}} \right| \leq \left| \frac{p - q}{p + \overline{q}} \right|$$

pour tout $p, q \in \mathbb{H}$.

Preuve. Cela découle du lemme de Schwarz-Pick qui nous dit que $d^H(f(p), f(q)) \leq d^H(p, q)$. Ainsi par définition de d^H et de τ la transformation de Cayley, on obtient

$$\left| \frac{\frac{f(p)-1}{f(p)+1} - \frac{f(q)-1}{f(q)+1}}{1 - \overline{(f(p)-1)} \cdot \left(\frac{1}{f(p)+1}\right) \cdot \frac{f(q)-1}{f(q)+1}} \right| \leq \left| \frac{\frac{p-1}{p+1} - \frac{q-1}{q+1}}{1 - \overline{(p-1)} \cdot \left(\frac{1}{p+1}\right) \cdot \frac{q-1}{q+1}} \right|.$$

D'où en réarrangeant des deux côtés, on obtient le résultat voulu. □

Énonçons maintenant le théorème de Julia-Carathéodory dans le demi-plan et la définition du conjugué de Cayley.

Théorème A.1.8 (Théorème de Julia-Carathéodory dans le demi-plan). *Soit $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ une application analytique. Alors*

$$\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\Phi(w)}{w} = c$$

où $c = \inf_{w \in \mathbb{H}} \frac{Re[\Phi(w)]}{Re[w]}$.

Preuve. Voir [76], page 66. □

Théorème A.1.9 (Conjugué de Cayley). *Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application analytique qui n'a pas de point fixe dans \mathbb{D} de coefficient de dilatation α et de point de Denjoy-Wolff ξ . Considérons la transformation de Cayley $\tau : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ (qui est une bijection analytique) définie par :*

$$\tau(w) = \frac{w - 1}{w + 1}$$

pour tout $w \in \mathbb{H}$, laissant l'infini jouer le rôle de ξ . On appelle conjuguée de Cayley de φ , l'application analytique $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par $\Phi = \tau^{-1} \circ \varphi \circ \tau$. Cette dernière application a alors la forme $\Phi(w) = cw + p(w)$ avec $Re[p(w)] \geq 0$ pour tout $w \in \mathbb{H}$, $c = \frac{1}{\alpha} = \inf_{w \in \mathbb{H}} \frac{Re[\Phi(w)]}{Re[w]} \geq 1$ et $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$.

De plus, il existe $z \in \mathbb{H}$ tel que $Re[p(z)] = 0$ si et seulement si $\Phi(w) = cw + i \operatorname{Im}[\Phi(1)]$ pour tout $w \in \mathbb{H}$.

Preuve. D'après le point iv) du théorème de Julia-Carathéodory et le théorème de Julia, on a $\varphi(H(\xi, \lambda)) \subset H(\eta, \lambda\alpha)$ pour tout $\lambda > 0$ où $\angle \lim_{z \rightarrow \omega} \varphi(z) = \eta \in \partial\mathbb{D}$. Quitte à appliquer des rotations on peut supposer que $\xi = \eta = 1$. Un calcul direct montre que pour tout $w \in \mathbb{H}$, on a

$$1 - \tau(w) = \frac{2}{w+1} \quad \text{et} \quad 1 - |\tau(w)|^2 = \frac{4\operatorname{Re}[w]}{|1+w|^2}.$$

Ainsi, on montre que $\tau^{-1}(H(1, \lambda)) = \Pi(\lambda) := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}[z] > \frac{1}{\lambda}\}$. D'où, $\Phi(\Pi(\lambda)) \subset \Pi(\lambda\alpha)$. Exprimé analytiquement, pour tout $w \in \mathbb{H}$, cela nous donne

$$\frac{\operatorname{Re}[\Phi(w)]}{\operatorname{Re}[w]} \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Posons $c = \inf_{w \in \mathbb{H}} \frac{\operatorname{Re}[\Phi(w)]}{\operatorname{Re}[w]}$ et $p(z) := \Phi(z) - cz$. On a alors $\operatorname{Re}[\Phi(w)] \geq c\operatorname{Re}[w]$ pour tout $w \in \mathbb{H}$ et c est la valeur la plus grande vérifiant cette propriété. D'où, $\operatorname{Re}[p(w)] \geq 0$. De plus, on a

$$\frac{1 - \varphi(\tau(w))}{1 - \tau(w)} = \frac{w+1}{\Phi(w)+1}$$

et

$$\alpha = \angle \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\varphi(z) - 1}{z - 1}$$

D'où,

$$\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\Phi(w)}{w} = \frac{1}{\alpha}.$$

Or, d'après le théorème de Julia-Carathéodory pour le demi-plan, on a

$$\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\Phi(w)}{w} = c.$$

D'où, $c = \frac{1}{\alpha}$. La propriété $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$ est immédiate.

La dernière équivalence a été démontré dans [58]. Supposons que $\Phi(w) = cw + i\operatorname{Im}[\Phi(1)]$ pour tout $w \in \mathbb{H}$. Alors pour tout $w \in \mathbb{H}$, on a $p(w) = i\operatorname{Im}[\Phi(1)]$, donc $\operatorname{Re}[p(w)] = 0$. Réciproquement, comme \mathbb{H} est un ouvert connexe de \mathbb{C} et que $p \in \operatorname{Hol}(\mathbb{H})$ par somme, on a que $\operatorname{Re}[p]$ est harmonique sur \mathbb{H} . De plus, $\operatorname{Re}[p] \geq 0$. Ainsi, si il existe $z \in \mathbb{H}$ tel que $\operatorname{Re}[p(z)] = 0$, alors $\operatorname{Re}[p]$ admet un minimum global sur \mathbb{H} . Par le principe du maximum harmonique, on en déduit que $\operatorname{Re}[p] = 0$, ce qui implique que p est constante sur \mathbb{H} par les équations de Cauchy-Riemann. Finalement, pour tout $w \in \mathbb{H}$, comme $c \in \mathbb{R}$, on a

$$p(w) = p(1) = i\operatorname{Im}[p(1)] = i\operatorname{Im}[\Phi(1) - c] = i\operatorname{Im}[\Phi(1)].$$

□

Dans les preuves des théorèmes de Valiron, de Pommerenke et de Baker-Pommerenke, on va avoir souvent recourt à la notion de famille normale. On rappelle donc sa définition et les résultats liés que nous allons utiliser qui sont issus de l'ouvrage [75].

Définition A.1.10 (Famille normale). *Une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω est normale s'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \geq 0}$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω .*

Théorème A.1.11 (Théorème de Montel). Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de fonctions holomorphes sur Ω . Alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est normale.

Corollaire A.1.12. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes de \mathbb{H} dans \mathbb{H} . Alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est normale.

Théorème A.1.13 (Test fondamental de normalité). Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $\text{Hol}(\Omega)$, où Ω est un ouvert connexe de \mathbb{C} . Si il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \geq 0$, f_n évite les valeurs a et b , alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est normale.

Enfin, redonnons la définition d'orbite qui nous sera très utile par la suite.

Définition A.1.14 (Orbite). Soit D un sous ensemble de \mathbb{C} . Soit $\varphi : D \rightarrow D$ analytique et $z_0 \in D$. On dit que la suite $z_n := \varphi^n(z_0) = \varphi(z_{n-1})$ est une orbite de φ associée à z_0 .

A.2 Théorème de Valiron

Dans cette section on va démontrer le théorème de Valiron qui concerne la composition par une application de type hyperbolique. Pour cela nous nous sommes basés sur l'article [20]. Tout d'abord, montrons le résultat suivant :

Théorème A.2.1. Soit Φ la conjugué de Cayley d'une application $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de type hyperbolique. Soit $w \in \mathbb{H}$. Alors l'orbite $\{w_n\} := \{\Phi^n(w)\}$ appartient à un secteur de la forme

$$S_\beta = \{w \in \mathbb{H} \mid |\text{Arg}(w)| < \beta\}$$

avec $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Posons $c = \inf_{w \in \mathbb{H}} \frac{\text{Re}[\Phi(w)]}{\text{Re}[w]}$. Alors le ratio $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ converge vers c .

Preuve. Définissons l'application $d^H : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $d^H(z, w) = d(\tau(z), \tau(w))$. Soit $b \in \mathbb{H}$ et s son image par τ et $r > 0$. On définit le disque pseudo-hyperbolique dans le demi-plan par $\Delta^H(b, r) := \tau^{-1}(\Delta(s, r)) = \{z \in \mathbb{H} \mid d^H(z, b) < r\}$. De plus, on notera $\overline{\Delta^H(b, r)} := \{z \in \mathbb{H} \mid d^H(z, b) \leq r\}$. Notons $w_n = \Phi^n(w)$ et $\rho = d^H(w, w_1)$. D'une part, comme le coefficient de dilatation α de φ est strictement inférieur à 1, on a $\text{Re}[w_{n+1}] > \text{Re}[w_n]$. D'autre part, par le lemme de Schwarz-Pick, on a que pour tout $n \geq 0$, $d^H(w_n, w_{n+1}) \leq \rho$. D'où

$$w_{n+1} \in \overline{\Delta^H(w_n, \rho)}$$

Soit $p \in \mathbb{H}$. Posons $A_p(w) = \text{Re}[p]w + i \text{Im}[p]$. On a alors que A_p est un automorphisme de \mathbb{H} . Le lemme de Schwarz-Pick écrit pour le demi-plan nous dit que $A_p(\Delta^H(1, \rho)) = \Delta^H(p, \rho)$. D'où,

$$\overline{\Delta^H(w_n, \rho)} = \text{Re}[w_n] \overline{\Delta^H(1, \rho)} + i \text{Im}[w_n].$$

Ainsi, il existe $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ tel que $w_{n+1} \in w_n + S_\beta$ pour tout $n \geq 0$ (voir Figure 5.1 page 81 du livre [76]). Ainsi, par récurrence, on a que l'orbite $\{w_n\}$ appartient à $w + S_\beta$ et donc dans un secteur ayant 0 pour origine et un angle d'ouverture assez large. Ainsi, l'orbite $(w_n)_n$ reste dans un secteur et $w_n \rightarrow \infty$. Ainsi, d'après le théorème de Julia-Carathéodory pour le demi-plan, on a que le ratio $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ converge vers c . \square

A partir de ce résultat, on est capable de démontrer le théorème de Valiron :

Théorème A.2.2 (Théorème de Valiron). *Soit Φ la conjugué de Cayley d'une application $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de type hyperbolique. Soit $w \in \mathbb{H}$. Considérons l'orbite $\{w_n\} := \{\Phi^n(w)\}$. Alors la limite $Arg(w_n)$ existe. De plus, Il existe une application holomorphe $\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que $\sigma \circ \Phi = c\sigma$ où $c = \inf_{w \in \mathbb{H}} \frac{Re[\Phi(w)]}{Re[w]}$. En particulier, il existe une application holomorphe $\sigma_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ tel que $\sigma_1 \circ \varphi = c\sigma_1$.*

Preuve. Notons $w_n = x_n + iy_n = |w_n|e^{i\theta_n}$ l'orbite de w . D'après la proposition A.2.1, le ratio $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ converge vers c . D'où,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} - c = o(1).$$

De plus, d'après la proposition A.2.1, comme l'orbite reste dans un secteur, on a que la suite $\frac{w_n}{x_n} = 1 + i\frac{y_n}{x_n}$ est bornée. D'où,

$$\frac{w_{n+1}}{x_n} - c\frac{w_n}{x_n} = \frac{w_n}{x_n}o(1).$$

En prenant la partie réelle des deux côtés, on obtient

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - c = o(1).$$

D'où, la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge vers c . D'autre part, par l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, on a

$$\left| \frac{\Phi(w_{n+1}) - \Phi(w_n)}{\Phi(w_{n+1}) + \Phi(w_n)} \right| = \left| \frac{w_{n+2} - w_{n+1}}{w_{n+2} + w_{n+1}} \right| \leq \left| \frac{w_{n+1} - w_n}{w_{n+1} + w_n} \right|$$

pour tout $n \geq 0$. Par passage au carré, on en déduit que la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}$$

est décroissante. Comme elle est aussi positive, on a alors que la suite p_n converge vers un $\eta \geq 0$. Comme $\frac{y_n}{x_n} = \tan(\theta_n)$ pour tout $n \geq 0$, on en déduit que $\eta > 0$ et que la suite θ_n possède au maximum deux valeurs d'adhérence opposées l'une de l'autre, que l'on note $\pm\theta$. Si $\theta = 0$ alors la suite θ_n possède une seule valeur d'adhérence et donc converge vers 0. Si $\theta \neq 0$. Supposons que la suite possède deux valeurs d'adhérence. Par le théorème A.2.1, on a

$$Arg\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \theta_{n+1} - \theta_n \rightarrow Arg(c) = 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, il existe $n \geq 0$ tel que

$$|\theta_n - \theta| < \frac{|\theta|}{3}, \quad |\theta_{n+1} + \theta| < \frac{|\theta|}{3}, \quad \text{et} \quad |\theta_{n+1} - \theta_n| < \frac{|\theta|}{3}.$$

On en déduit que

$$\frac{4|\theta|}{3} = 2|\theta| - \frac{2|\theta|}{3} \leq |\theta_{n+1} - \theta_n| < \frac{|\theta|}{3}.$$

Ce qui est absurde. Ainsi, la suite θ_n possède une seule valeur d'adhérence et donc converge. Dans tous les cas, la suite θ_n converge vers une valeur que l'on note θ_∞ .

Montrons maintenant la seconde partie du théorème. Considérons l'automorphisme τ_n de \mathbb{H} qui envoie w_n vers 1 :

$$\tau_n(z) = \frac{z - iy_n}{x_n}.$$

Posons

$$q_n = \tau_n(w_{n+1}) = \frac{x_{n+1}}{x_n} + i \frac{y_{n+1} - y_n}{x_n}.$$

Posons $\sigma_n = \tau_n \circ \Phi^n$. On a alors $\sigma_n(w) = \tau_n(w_n) = 1$ pour tout $n \geq 0$ et $\sigma_n(w_1) = \tau_n(w_{n+1}) = q_n$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, d'après la première partie de la preuve, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(w_1) = c + i(c-1) \tan(\theta_\infty).$$

Dans la suite nous noterons $b_\infty := (c-1) \tan(\theta_\infty)$. De plus, soit $z \in \mathbb{H}$, par le lemme de Schwarz-Pick, on a

$$d^H(\sigma_n(z), 1) = d^H(\sigma_n(z), \sigma_n(w)) = d^H(\Phi^n(z), \Phi^n(w)) \leq d^H(z, w).$$

Ainsi, $(\sigma_n(z))_n$ reste dans un compact de \mathbb{H} . De plus,

$$\sigma_{n+1}(z) = (\tau_{n+1} \circ \Phi \circ \tau_n^{-1})(\sigma_n(z)).$$

Montrons que la suite $\psi_n = \tau_{n+1} \circ \Phi \circ \tau_n^{-1}$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{H} vers l'identité. Comme $\tau_n^{-1}(z) = zx_n + iy_n$, un calcul simple nous permet d'écrire :

$$\psi_n(z) = \frac{\Phi(zx_n + iy_n)}{zx_n + iy_n} \frac{x_n z}{x_{n+1}} + i \frac{y_n}{x_n} \frac{x_n}{x_{n+1}} \frac{\Phi(zx_n + iy_n)}{zx_n + iy_n} - i \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}.$$

Rappelons que $\frac{y_n}{x_n} = \tan \text{Arg}(w_n)$ a une limite. De plus, comme w_n tend vers l'infini non tangentiellement, on a que $x_n z + iy_n$ tend vers l'infini non tangentiellement. Ainsi, par passage à la limite quand n tend vers ∞ , on peut appliquer le théorème de Julia-Carathéodory pour le demi-plan, ce qui nous donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z) = z.$$

Ainsi, ψ_n converge simplement vers l'identité. Or, puisque pour tout $n \geq 0$, ψ_n est une fonction holomorphe de \mathbb{H} dans \mathbb{H} , la suite $(\psi_n)_{n \geq 0}$ est normale. Ainsi, ψ_n converge uniformément vers l'identité sur tout compact de \mathbb{H} .

Soit σ_N une sous suite de σ_n , comme la famille est normale ($Re[\sigma_n(z)] > 0$ et $\sigma_n(w) = 1$), il existe une sous-limite σ . Or, d'après ce que l'on vient de voir on a aussi que σ_{N+1} tend vers σ . D'autre part, on a

$$\sigma_n \circ \Phi = (\tau_n \circ \tau_{n+1}^{-1}) \circ \sigma_{n+1}$$

et

$$\tau_n \circ \tau_{n+1}^{-1}(z) = z \frac{x_{n+1}}{x_n} + i \frac{y_{n+1} - y_n}{x_n} \rightarrow cz + b_\infty.$$

Donc on doit avoir $\sigma \circ \Phi = c\sigma + b_\infty$. Finalement, comme $d^H(1, \sigma_n(z)) = d^H(\Phi^n(z), \Phi^n(w))$ est une suite décroissante, elle doit donc converger vers $d(1, \sigma(z))$. Ainsi, une autre sous-limite normale $\tilde{\sigma}$ doit vérifier $d(1, \tilde{\sigma}(z)) = d(1, \sigma(z))$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, c'est-à-dire que $\tilde{\sigma}$ et σ diffèrent seulement par un automorphisme de \mathbb{H} qui fixe 1. Posons $T(z) = cz + b_\infty$. On a alors $\sigma \circ \Phi^n = T_n \circ \sigma$. D'où, comme $\sigma(w) = 1$, on a

$$\sigma(w_n) = T_n(\sigma(w)) = T_n(1) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, $\tilde{\sigma}$ et σ diffèrent seulement par un automorphisme de \mathbb{H} qui fixe 1 et ∞ , qui ne peut être que l'identité. En conclusion, σ_n converge vers σ sur les compacts de \mathbb{H} et $\sigma \circ \Phi = c\sigma + b_\infty$. En posant $\hat{\sigma} := \sigma + \frac{b_\infty}{c-1}$, on obtient le résultat souhaité $\hat{\sigma} \circ \Phi = c\hat{\sigma}$. Puis, en posant $\sigma_1 := \hat{\sigma} \circ \tau^{-1}$, on obtient $\sigma_1 \circ \varphi = c\sigma_1$. \square

A.3 Théorème de Pommerenke

Dans cette section on va démontrer le théorème de Pommerenke et le théorème de Baker-Pommerenke qui concernent la composition par une application de type parabolique. Pour cela nous nous sommes basés sur les articles [72, 9]. Nous montrons tout d'abord le théorème de Pommerenke pour une fonction de type parabolique qui a certaine forme.

Théorème A.3.1 (Théorème de Pommerenke - Premier cas). *Soit f la conjugué de Cayley d'une application $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de type parabolique de la forme $f(w) = w + p(w)$ avec $\operatorname{Re}[p(w)] > 0$ pour tout $w \in \mathbb{H}$ et $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, notons $f^n(1) := z_n = x_n + iy_n$ et posons*

$$q_n := \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} + \bar{z}_n}.$$

On remarque que

$$q_{n+1} = \frac{f(z_{n+1}) - f(z_n)}{f(z_{n+1}) + f(z_n)}.$$

D'où, par l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, on a $|q_{n+1}| \leq |q_n|$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n|$ existe. Enfin, pour tout $n \geq 0$, posons

$$g_n(z) := \frac{f^n(z) - iy_n}{x_n}$$

qui vérifie $g_n(1) = 1$ et $\operatorname{Re}[g_n(z)] > 0$ pour $z \in \mathbb{H}$ (car $\operatorname{Re}[f(z)] > \operatorname{Re}[z] > 0$). Alors la limite

$$g(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) \quad (z \in \mathbb{H})$$

existe localement uniformément et vérifie $\operatorname{Re}[g(z)] > 0$, $g(1) = 1$ et

$$g(f(z)) = \Phi(g(z)) \quad (z \in \mathbb{H})$$

où Φ est un automorphisme de \mathbb{H} qui fixe l'infini.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| > 0$, alors Φ est parabolique.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = 0$, alors $\Phi(z) \equiv 1$ et $g(z) \equiv 1$.

Preuve. Considérons la suite de fonctions analytiques suivante

$$\phi_n(z) = \frac{f^{n+1}(z) - z_{n+1}}{f^{n+1}(z) + \bar{z}_{n+1}} \cdot \frac{f^n(z) + \bar{z}_n}{f^n(z) - z_n} = \frac{g_{n+1}(z) - 1}{g_{n+1}(z) + 1} \cdot \frac{g_n(z) + 1}{g_n(z) - 1}. \quad (\text{A.1})$$

Comme $f^{n+1}(z) = f(f^n(z))$ et $z_{n+1} = f(z_n)$. D'après l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, on obtient que $|\phi_n(z)| \leq 1$. D'autre part, on remarque que

$$\Phi_n(1) = f'(z_n) \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad \text{et} \quad \Phi_n(f(1)) = \frac{q_{n+1}}{q_n}.$$

Montrons que $\phi_n(z) \rightarrow 1$ quand n tend vers l'infini localement uniformément dans \mathbb{H} . Par définition de p , q_n et comme $|q_n| \leq |q_0| = \frac{|z_1 - 1|}{|z_1 + 1|}$, on a

$$\frac{|p(z_n)|}{x_n} = \frac{|z_{n+1} - z_n|}{x_n} = \left| \frac{2q_n}{1 - q_n} \right| \leq \frac{2|q_0|}{1 - |q_0|}. \quad (\text{A.2})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| > 0$, on a $|\Phi_n(f(1))| \rightarrow 1$. De plus, comme $|\phi_n(z)| \leq 1$, par le théorème de Montel, on a $|\phi_n(z)| \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$. En particulier,

$$|\Phi_n(1)| = |f'(z_n)| \frac{x_n}{x_{n+1}} \rightarrow 1.$$

Posons

$$\lambda_n := \frac{\operatorname{Re}[p(z_n)]}{x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \quad \text{et} \quad p'(z_n) = a_n + ib_n.$$

Ainsi, comme $f'(z) = 1 + p'(z)$, on obtient que $|1 + p'(z_n)| \sim 1 + \lambda_n$ quand n tend vers ∞ . Donc $(1 + a_n)^2 + b_n^2 \sim (1 + \lambda_n)^2$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$(1 + \lambda_n)^2 - \varepsilon(1 + \lambda_n)^2 \leq (1 + a_n)^2 + b_n^2.$$

L'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, permet de montrer que $|p'(z_n)| \leq \frac{\operatorname{Re}[p(z_n)]}{x_n}$. D'où,

$$a_n^2 + b_n^2 \leq \lambda_n^2.$$

Or comme $a_n > 0$ et $\lambda_n > 0$, on a alors $a_n \leq \lambda_n$ et donc

$$\lambda_n - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \lambda_n)^2 \leq a_n \leq \lambda_n. \quad (\text{A.3})$$

Ainsi,

$$-\frac{\varepsilon}{2}(1 + \lambda_n)^2 \leq a_n - \lambda_n \leq 0. \quad (\text{A.4})$$

Or, on a vu que $\frac{|p(z_n)|}{x_n}$ bornée d'où, λ_n bornée et donc $a_n - \lambda_n \rightarrow 0$. Finalement, on a $b_n \rightarrow 0$ et donc

$$f'(z_n) - \frac{x_{n+1}}{x_n} = (a_n - \lambda_n) + ib_n \rightarrow 0.$$

Ce qui montre que $\Phi_n(1) \rightarrow 1$. Or, $|\phi_n(z)| \leq 1$, donc par le théorème de Montel, on a que $\phi_n(z) \rightarrow 1$ quand n tend vers l'infini localement uniformément dans \mathbb{H} .

Montrons maintenant le théorème. Comme $\operatorname{Re}[g_n] > 0$ et $g_n(1) = 1$, la suite (g_n) est normale. Soit (g_{n_ν}) une sous suite de (g_n) qui converge localement uniformément vers une fonction g . Par définition, on a

$$g_n(f(z)) = \frac{f_{n+1}(z) - iy_n}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} g_{n+1}(z) + i \frac{y_{n+1} - y_n}{x_n}. \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, par l'inégalité A.2, quitte à remplacer (n_ν) par une autre sous suite, on peut supposer que

$$\frac{x_{n_\nu+1}}{x_{n_\nu}} \rightarrow a \quad \text{et} \quad \frac{y_{n_\nu+1} - y_{n_\nu}}{x_{n_\nu}} \rightarrow b. \quad (\text{A.6})$$

Comme $\phi_n(z) \rightarrow 1$ quand n tend vers l'infini localement uniformément dans \mathbb{H} et comme on a l'égalité A.1, cela montre que $g_{n_\nu+1} \rightarrow g$. Ainsi, par passage à la limite dans A.5 on obtient

$$g(f(z)) = ag(z) + ib =: \Phi(g(z)) \quad (\text{A.7})$$

avec $\Phi(w) = aw + ib$. Nous allons montrer que $a = 1$. Montrons tout d'abord que $\frac{z_{k+1}}{z_k} \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow \infty$. Soit (z_{k_ν}) une sous suite qui appartient à un certain angle de Stolz. On a alors

$$\frac{z_{k_\nu+1}}{z_{k_\nu}} = 1 + \frac{p(z_{k_\nu})}{z_{k_\nu}} \rightarrow 1$$

quand $k \rightarrow \infty$. Comme $z_{k\nu} \rightarrow \infty$ ($Re[f(z)] > Re[z]$) et que $z_{k\nu}$ reste dans un angle de Stolz, on a que $0 < \frac{x_{k\nu}}{|z_{k\nu}|} \leq \frac{1}{x_k} \rightarrow 0$. Ainsi, par l'inégalité A.2, on obtient

$$\left| \frac{z_{k\nu+1}}{z_{k\nu}} - 1 \right| \leq \frac{x_{k\nu}}{|z_{k\nu}|} \frac{2|q_0|}{1 - |q_0|} \rightarrow 0$$

quand $\nu \rightarrow \infty$. Supposons que $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ ne converge pas vers 1. Ainsi, comme $x_{n+1} > x_n$, on a nécessairement $a > 1$. Par application successive de A.7, on obtient $Re[g(z_k)] = a^k Re[g(1)] = a^k$. Par l'inégalité de Schwarz-Pick, on peut montrer que

$$Re[g(z)] \leq \frac{|z+1|^2}{x} Re[g(1)]$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$. D'où, l'on en déduit que

$$1 < \sqrt{a} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} |z_k|^{1/k}.$$

Ce qui contredit ce que l'on vient de voir. D'où, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 1$ et donc $a = 1$.

a) Cas $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| > 0$:

Par inégalité triangulaire et A.2, on a

$$\frac{|y_{n+1} - y_n|}{x_n} \geq \frac{|z_{n+1} - z_n|}{x_n} - \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) = \frac{2|q_n|}{|1 - q_n|} - \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \right).$$

Ainsi, comme $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| > 0$, on a par passage à la limite que $b \neq 0$ et donc que Φ est parabolique.

Supposons que (g_n) ne converge pas quand $n \rightarrow +\infty$. C'est-à-dire qu'il existe une autre fonction limite g^* . Comme $|\Phi_n(z)| \leq 1$, on a que la suite $\left| \frac{g_n - 1}{g_n + 1} \right|$ décroît et donc tend vers une limite quand $n \rightarrow +\infty$. D'où, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{g^*(z) - 1}{g^*(z) + 1} = e^{i\alpha} \frac{g(z) - 1}{g(z) + 1}$$

pour $z \in \mathbb{H}$. Comme $g(f(z)) = g(z) + ib$ et $g(z_0) = g(1) = 1$, on a $g(z_k) = 1 + ikb$. De la même façon que pour g , on peut montrer que $g^*(f(z)) = g^*(z) + ib^*$ avec $b^* \neq 0$. Ainsi, on a

$$\frac{g(z_k) - 1}{g(z_k) + 1} = \frac{ikb}{2 + ikb} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{g^*(z_k) - 1}{g^*(z_k) + 1} = \frac{ikb^*}{2 + ikb^*} \rightarrow 1$$

quand $k \rightarrow \infty$. D'où, $\alpha = 0$ et donc $g = g^*$.

b) Cas $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = 0$:

Posons $\Psi_n(s) = g(x_n s + iy_n)$ pour tout $s \in \mathbb{H}$. Comme $q_n \rightarrow 0$, d'après A.2 et A.6, on a que $b = 0$. D'où, d'après A.7, pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a

$$g(z) = g(f_n(z)) = \Psi_n(g_n(z)). \tag{A.8}$$

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$s_{nk} = \frac{z_{n+k} - iy_n}{x_n} = g_n(z_k) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

On a alors

$$\Psi_n(s_{nk}) = g(x_n s_{nk} + iy_n) = g(z_{n+k}) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z_{n+k}) = 1. \quad (\text{A.9})$$

Pour n fixé, les points s_{nk} sont tous distincts. Comme $\text{Re}[\Psi_n(s)] > 0$, on a que la famille Ψ_n est normale. Si $\Psi \in \text{Hol}(\mathbb{H})$ est une valeur d'adhérence de $(\Psi_n)_{n \geq 0}$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a $\Psi(s_{nk}) = 1$. Or, la famille $(s_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$ admet un point d'accumulation, donc par le principe des zéros isolés, $\Psi \equiv 1$ sur \mathbb{H} . Ainsi, $\Psi_n(s) \rightarrow 1$ localement uniformément dans \mathbb{H} quand $n \rightarrow \infty$. Enfin, comme $g_{n\nu} \rightarrow g$ quand $\nu \rightarrow \infty$, on conclut que $g(z) \equiv 1$. \square

Montrons le lemme suivant qui nous permettra d'obtenir le résultat que l'on souhaite dans un autre cas de figure que le précédent.

Lemme A.3.2. *Soit f la conjugué de Cayley d'une application $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de type parabolique de la forme $f(w) = w + p(w)$ avec $\text{Re}[p(w)] > 0$ pour tout $w \in \mathbb{H}$ et $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, notons $f^n(1) := z_n = x_n + iy_n$. Soient S un angle de Stolz à l'infini, $0 < \delta < 1$ et $0 < \lambda < +\infty$. Posons*

$$G = S \cup \bigcup_{n \geq 1} \{x + iy \mid \delta x_n \leq x < +\infty, |y - y_n| \leq \lambda x_n\}.$$

Alors quand $z \rightarrow \infty$ avec $z \in G$, on a

$$\frac{\text{Re}[f(z)]}{\text{Re}[z]} \rightarrow 1, \quad f'(z) \rightarrow 1, \quad \frac{f(z)}{z} \rightarrow 1.$$

De plus, f est univalente sur $G \cap \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > \rho\}$ si ρ est suffisamment grand.

Preuve. Posons $u(z) = \text{Re}[p(z)]$. Par inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, on a :

$$u(z)^2 - 2u(z)u(z_n) \leq |u(z) - u(z_n)|^2 \leq |z - z_n|^2 \cdot \frac{u(z)u(z_n)}{xx_n}.$$

Si $|y - y_n| \leq \lambda x_n$ et $\delta x_n \leq x \leq x_n$, alors $|z - z_n| \leq (1 + \lambda)x_n$ et donc

$$\frac{u(z)}{x} \leq \left(\frac{(1 + \lambda)^2 x_n^2}{x^2} + \frac{2x_n}{x} \right) \frac{u(z_n)}{x_n} \leq \left(\frac{(1 + \lambda)^2}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} \right) \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \right).$$

Comme $\frac{u(x+iy)}{x}$ décroît suivant x (car $|u'(z)| \leq \frac{u(z)}{x}$), l'inégalité reste valable pour $x > x_n$. Or, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 1$. Ainsi, $\frac{u(z)}{x} \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \infty$ dans $G \setminus S$. Or, $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$, donc $\frac{u(z)}{x} \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow \infty$ avec $z \in G$. Finalement, on a alors $\frac{\text{Re}[f(z)]}{\text{Re}[z]} \rightarrow 1$ quand $z \rightarrow \infty$ avec $z \in G$. Les deux autres limites s'obtiennent alors en utilisant l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan. Soient $z, z' \in G$. Par définition de f , l'inégalité triangulaire inverse et l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, on a

$$1 - \left(\frac{\text{Re}[p(z)]\text{Re}[p(z')]}{\text{Re}[z]\text{Re}[z']} \right)^{1/2} \leq 1 - \left| \frac{p(z) - p(z')}{z - z'} \right| \leq \left| \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} \right|.$$

Ainsi, d'après ce que l'on vient de voir, si on prend un ρ suffisamment grand, alors f est injective sur $G \cap \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > \rho\}$. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Baker-Pommerenke.

Théorème A.3.3 (Théorème de Baker-Pommerenke). *Soit f la conjuguée de Cayley d'une application $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de type parabolique de la forme $f(w) = w + p(w)$ avec $\operatorname{Re}[p(w)] > 0$ pour tout $w \in \mathbb{H}$ et $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, notons $f^n(1) := z_n = x_n + iy_n$ et posons*

$$q_n := \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} + \bar{z}_n}.$$

On remarque que

$$q_{n+1} = \frac{f(z_{n+1}) - f(z_n)}{f(z_{n+1}) + f(z_n)}.$$

D'où, par l'inégalité de Schwarz-Pick pour le demi-plan, on a $|q_{n+1}| \leq |q_n|$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n|$ existe. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = 0$. Pour tout $n \geq 1$, posons pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$h_n(z) := \frac{f^n(z) - z_n}{z_{n+1} - z_n}.$$

Alors

$$h(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) \quad (z \in \mathbb{H})$$

existe localement uniformément et vérifie

$$h(f(z)) := h(z) + 1 \quad (z \in \mathbb{H}).$$

Preuve. D'après le théorème A.3.2, on a que f est univalent sur

$$G_m := \bigcup_{k \geq m} \{x + iy \mid \frac{x_k}{2} < x, |y - y_k| < x_k\}$$

si m est suffisamment grand. Soit D un disque tel que $1 \in D$, $f(1) \in D$ et $\bar{D} \subset \mathbb{H}$. D'après le théorème A.3.1, on a vu que

$$g(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) \quad (z \in \mathbb{H})$$

existe localement uniformément où

$$g_n(z) := \frac{f^n(z) - iy_n}{x_n}$$

et que $g(z) \equiv 1$. Ainsi, on peut choisir N assez grand tel que $B := \bigcup_{n \geq N} f_n(D) \subset G_m$ et que B soit connexe. Comme $f_\nu(B) \subset B \subset G_m$ pour tout $\nu \geq 0$, la fonction

$$h_n^*(z) = \frac{f_{n-N}(z) - z_n}{z_{n+1} - z_n} \quad (n \geq N)$$

est univalente sur B et par définition on a $h_n(z) = h_n^*(f_N(z))$ pour $z \in \mathbb{H}$ et $n \geq N$. On en déduit que $h_n^*(z_N) = h_n(1) = 0$ et $h_n^*(z_{N+1}) = h_n(z_1) = 1$. On peut en déduire, par le test fondamental de normalité, que la famille h_n^* est normale dans B . Enfin, remarquons que $f_N(D) \subset B$. Ainsi, la suite $(h_n)_{n \geq N}$ est normale dans D , donc la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ aussi (puisqu'on ajoute un nombre fini de termes). Enfin, on considérant la suite croissante de disques

$D_k := D(k, k - \frac{1}{k}) \subset \mathbb{H}$, on peut montrer que $(h_n)_{n \geq 0}$ est normale sur D_k à partir d'un certain rang. Or, comme $\mathbb{H} = \bigcup_{k \geq 0} D_k$, on peut montrer par récurrence que $(h_n)_{n \geq 0}$ est une famille normale dans \mathbb{H} .

Dans la démonstration du théorème A.3.1, on a montré que quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\phi_n(z) := \frac{f^{n+1}(z) - z_{n+1}}{f^{n+1}(z) + \overline{z_{n+1}}} \cdot \frac{f^n(z) + \overline{z_n}}{f^n(z) - z_n} \rightarrow 1$$

localement uniformément dans \mathbb{H} . D'autre part, par définition de ϕ_n , on a

$$h_n(f(z)) = \frac{f^n(f(z)) - z_n}{z_{n+1} - z_n} = \frac{f^{n+1}(z) - z_{n+1}}{z_{n+1} - z_n} + 1 = \frac{f^{n+1}(z) + \overline{z_{n+1}}}{f^n(z) + \overline{z_n}} \phi_n(z) h_n(z) + 1.$$

De plus,

$$\frac{f^n(z) + \overline{z_n}}{x_n} = g_n(z) + 1 \rightarrow 2.$$

De plus, dans la preuve du théorème A.3.1, on a montré que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 1$. Considérons maintenant une sous suite (h_{n_ν}) et notons h sa fonction limite. Ainsi d'après ce que l'on vient de voir en faisant tendre n_ν vers ∞ dans l'égalité A.3, on obtient $h(f(z)) = h(z) + 1$. En particulier, on a $h(z_n) = h(f_n(1)) = h(1) + n = n$.

Enfin montrons que la suite (h_n) converge. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Posons

$$\Phi_{nk}(s) := \frac{f_k(z_n + x_n s) - z_{n+k}}{x_{n+k}}, \quad (|s| < 1).$$

On remarque alors que $\Phi_{nk}(0) = 0$ et que $Re[\Phi_{nk}(s)] > -1$. Ainsi, d'après ([80], p.175), on a

$$|\Phi_{nk}(s)| \leq \frac{2|s|}{1 - |s|}, \quad (|s| < 1).$$

En particulier, on a $|\Phi_{nk}(s)| < \frac{1}{2}$ si $|s| < \frac{1}{5}$. Ainsi, on a $f_k(z_n + x_n s) \in G_m$ pour $|s| < \frac{1}{5}$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq m$. Or, f est univalente sur G_m , donc par récurrence on a que $f_k(z_n + x_n s)$ est univalente sur $|s| < \frac{1}{5}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n > m$. Prenons $k = n_\nu$ et faisons tendre n_ν vers l'infini, par définition de h_{n_ν} , on a alors $h(z_n + x_n s)$ est univalente sur $|s| < \frac{1}{5}$ pour $n \geq m$. De plus, par définition de q_n et par hypothèse, on a

$$\eta_n := \frac{z_{n+1} - z_n}{x_n} = \frac{2q_n}{1 - q_n} \rightarrow 0.$$

Ainsi, si $n \geq m$ la fonction $\Psi_n(s) = \eta_n[h(z_n + x_n s) - n] = \lambda_n s + \dots$ est univalente dans $|s| < \frac{1}{5}$ et on a

$$\Psi_n(\eta_n) = \eta_n[h(z_{n+1}) - n] = \eta_n \rightarrow 0.$$

D'après le théorème de distorsion de Koebe (voir [71]), il existe alors $K > 0$ tel que

$$\left| \frac{\Psi_n(s)}{\lambda_n} - s \right| \leq K|s|^2, \quad (|s| < \frac{1}{5}, \in \mathbb{N}).$$

Ainsi, on obtient que $\lambda_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme $\eta_w \rightarrow 0$ pour tout w , il existe un unique s_n vérifiant $|s_n| < \frac{1}{5}$ tel que $\Psi_n(s_n) = \eta_n w$ si $n > n_0$. Ainsi, d'après l'inégalité précédente, on a $s_n \rightarrow 0$ et

$$\frac{\Psi_n^{-1}(\eta_n w)}{\eta_n w} = \frac{s_n}{\Psi_n(s_n)} \rightarrow 1.$$

Nous avons donc que

$$\Psi_n \left(\frac{f_n(z) - z_n}{x_n} \right) = \eta_n [h(f_n(z)) - n] = \eta_n h(z).$$

D'où,

$$h_n(z) = \frac{f_n(z) - z_n}{z_{n+1} - z_n} = \frac{f_n(z) - z_n}{x_n \eta_n} = \frac{1}{\eta_n} \Psi_n^{-1}(\eta_n h(z)).$$

Finalement, on a $h_n(z) \rightarrow h(z)$ quand $n \rightarrow \infty$ pour z fixé et donc localement uniformément par normalité. \square

Finalement, on peut réunir le théorème de Pommerenke et de Baker-Pommerenke en un seul de la façon suivante.

Théorème A.3.4 (Théorème de Baker-Pommerenke). *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application analytique de type parabolique. Alors il existe une application $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\sigma \circ f = \sigma + 1$.*

Preuve. Notons ϕ la conjugué de Cayley de f . Il y a deux cas de figure suivant à considérer :

- $\phi(w) = w + p(w)$ avec $Re[p(w)] > 0$ pour tout $w \in \mathbb{H}$ et $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$.
- $\phi(w) = w + p(w)$ avec $Re[p(w)] = 0$ pour tout $w \in \mathbb{H}$ et $\angle \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{p(w)}{w} = 0$.

Considérons le premier cas. Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| > 0$, et dans ce cas le théorème A.3.1, nous montre qu'il existe $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ holomorphe tel que $g \circ \phi = g + ib$ avec $b \neq 0$. D'où en posant, $\sigma = \frac{g}{ib} \circ \tau^{-1}$, on obtient $\sigma \circ f = \sigma + 1$. Dans le cas où $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = 0$, le théorème A.3.3 nous montre qu'il existe une application $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ holomorphe tel que $h \circ \phi = h + 1$. D'où, en posant $\sigma = h \circ \tau^{-1}$, on obtient $\sigma \circ f = \sigma + 1$.

Considérons maintenant l'autre cas. On a alors $\phi(w) = w + i \operatorname{Im}[\phi(1)]$ (cf A.1.9). D'où, la fonction $j := \frac{Id}{i \operatorname{Im}[\phi(1)]}$ vérifie $j \circ \phi = j + 1$. D'où, en posant $\sigma = j \circ \tau^{-1}$, on obtient $\sigma \circ f = \sigma + 1$. \square

Exemples d'espaces de fonctions holomorphes

B.1 Espaces de Dirichlet

Nous allons nous intéresser ici à un certain type d'espaces de fonctions holomorphes qui sont les espaces de Dirichlet pondérés qui sont définis de la manière suivante.

Définition B.1.1 (Espaces de Dirichlet pondérés). Soit $w : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $r \mapsto rw(r) \in L^1([0, 1])$. L'espace D_w est l'ensemble des fonctions f holomorphes sur \mathbb{D} telles que la quantité

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(|z|) \frac{dA(z)}{\pi}$$

soit finie.

On peut définir un produit scalaire sur ces espaces. Vous pouvez retrouver les preuves de cette section dans la thèse de Benjamin Céleriès [31].

Théorème B.1.2. Soit $w : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $r \mapsto rw(r) \in L^1([0, 1])$. L'application définie par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{D_w} : \begin{cases} D_w \times D_w & \rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) & \mapsto f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}w(|z|)\frac{dA(z)}{\pi} \end{cases}$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel D_w .

Voici une seconde écriture du produit scalaire en fonction des coefficients de Taylor des deux fonctions.

Théorème B.1.3. Soit $w : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $r \mapsto rw(r) \in L^1([0, 1])$. Soient $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $g = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux fonctions de D_w . Posons $w_n = 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} w(r) dr$ pour tout $n \geq 1$ et $w_0 = 1$. Alors,

$$\langle f, g \rangle_{D_w} = \sum_{n \geq 0} w_n a_n \overline{b_n}.$$

On peut considérer une classe d'espaces de Dirichlet avec un poids particulier de la façon suivante.

Définition B.1.4 (Espaces D_α). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. L'espace de Dirichlet pondéré D_α est l'espace vectoriel formé des fonctions f holomorphes sur \mathbb{D} telles que la quantité

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}$$

soit finie.

Remarque : D_α est l'espace D_w avec la fonction $w : r \mapsto (1 - r^2)^\alpha$.

On a que ces espaces s'injectent continument dans l'espace de Fréchet $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

Théorème B.1.5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On a alors $w_n := 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} w(r) dr = n \frac{n!}{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}$ pour tout $n \geq 1$. D'où d'après la proposition B.1.3, si $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in D_\alpha$, on a alors

$$\|f\|_{D_\alpha}^2 = \sum_{n \geq 0} w_n |a_n|^2.$$

De plus, D_α s'injecte continument dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

On définit l'espace de Dirichlet comme l'espace D_0 .

Définition B.1.6 (Espace de Dirichlet). On dit que l'espace D_0 est l'espace de Dirichlet noté \mathcal{D} .

On peut alors réécrire le théorème B.1.5 dans ce cas particulier.

Théorème B.1.7. Pour l'espace de Dirichlet, on a $w_n := 2n^2 \int_0^1 r^{2n-1} w(r) dr = n$ pour tout $n \geq 1$. D'où d'après la proposition B.1.3, si $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{D}$ on a alors

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n \geq 0} w_n |a_n|^2 = |a_0|^2 + \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2.$$

B.2 Espaces de Bergman

Nous allons nous intéresser ici à un type d'espaces de fonctions holomorphes qui sont les espaces de Bergman pondérés qui sont définis de la manière suivante.

Définition B.2.1 (Espaces de Bergman pondérés). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. L'espace de Bergman pondéré B_α est l'espace vectoriel formé des fonctions f holomorphes sur \mathbb{D} telles que la quantité

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}$$

soit finie.

On dit que l'espace B_0 est l'espace de Bergman noté B^2 .

Tout comme les espaces de Dirichlet pondérés, les espaces de Bergman pondérés sont des espaces de Hilbert.

Théorème B.2.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On définit sur B_α une application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\alpha}$ par

$$\langle f, g \rangle_{B_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^\alpha \frac{dA(z)}{\pi}.$$

Cette application est un produit scalaire sur B_α et muni de ce produit scalaire B_α est un espace de Hilbert.

En fait, on peut même identifier les espaces B_α avec les espaces $D_{\alpha+2}$.

Théorème B.2.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Alors, $D_{\alpha+2}$ et B_α sont les mêmes et leurs normes hilbertiennes sont équivalentes.

Ainsi on peut montrer que pour tout $\alpha \in [2, +\infty[$, le produit d'une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ avec une fonction de D_α reste dans D_α .

Proposition B.2.4. Soit $\alpha \in [2, +\infty[$. Pour tout $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in D_\alpha$, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|hf\|_{D_\alpha} \leq C \|h\|_\infty \|f\|_{D_\alpha}$.

Preuve. D'après la proposition B.2.3, on a que D_α est identique à $B_{\alpha-2}$ et qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $c > 0$ telles que

$$\|hf\|_{D_\alpha}^2 \leq C \|hf\|_{B_{\alpha-2}}^2 \leq C \|h\|_\infty^2 \|f\|_{B_{\alpha-2}}^2 \leq cC \|h\|_\infty^2 \|f\|_{D_\alpha}^2.$$

Ceci termine la preuve. □

B.3 Espaces de Hardy

Pour cette section, on s'est appuyé sur le livre de Peter Duren [36] et les thèses de Benjamin Céleriès [31] et de Corentin Avicou [7].

Définition B.3.1 (Espaces de Hardy). Pour $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, on définit les quantités suivantes :

$$M_p(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 0 < p < \infty,$$

et

$$M_\infty(f, r) = \sup_{t \in [0, 2\pi[} |f(re^{it})|.$$

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$, est défini par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \sup_{0 \leq r < 1} M_p(f, r) < \infty\}.$$

Remarque : on a que

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \|f\|_p := \lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f, r) < \infty\}.$$

On rappelle qu'entre espaces de Hardy, on a les inclusions suivantes.

Proposition B.3.2. On a

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$$

pour $0 < s < p < \infty$.

On rappelle aussi que certains espaces de Hardy sont des espaces de Banach et que d'autres sont seulement des espaces métriques complets.

Théorème B.3.3. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors $H^p(\mathbb{D})$ est un espace vectoriel, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur celui-ci et muni de cette norme $H^p(\mathbb{D})$ est un Banach.

Théorème B.3.4. Soit $0 < p < 1$. Alors $(H^p(\mathbb{D}), d)$ est un espace vectoriel métrique complet où $d(f, g) := \|f - g\|_p^p$.

Théorème B.3.5. Soit $p \in]0, \infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Alors la limite radiale de f , notée f^* est telle que $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.

Dans le cas, où $p = 2$, on a une autre caractérisation de l'espace $H^2(\mathbb{D})$, ainsi qu'une autre écriture de la norme.

Théorème B.3.6. Une fonction $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Dans ce cas $\|f\|_2 = \left(\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

On peut aussi montrer dans ce cas là que $H^2(\mathbb{D})$ est un espace Hilbertien.

Théorème B.3.7. $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt.$$

On va maintenant décrire la généralisation de $H^2(\mathbb{D})$ lorsque l'on considère un poids.

Définition B.3.8 (Espaces de Hardy Hilbertiens pondérés). Soit $\beta = (\beta_n)_n$ une suite de réels strictement positif. L'espace de Hardy pondéré par β est l'espace vectoriel $H^2(\beta)$ formé des fonctions f holomorphe sur \mathbb{D} telles que si $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, la somme $\sum_{n \geq 0} \beta_n |a_n|^2$ soit finie.

De même ces espaces sont toujours des espaces Hilbertiens.

Théorème B.3.9. Soit $\beta = (\beta_n)_n$ une suite de réels strictement positif. On définit sur $H^2(\beta)$ une application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\beta)}$ par

$$\langle f, g \rangle_{B_\alpha} = \sum_{n \geq 0} \beta_n a_n \overline{b_n},$$

où $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $g = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Cette application est un produit scalaire sur $H^2(\beta)$ et muni de ce produit scalaire $H^2(\beta)$ est un espace de Hilbert. De plus, $H^2(\beta)$ s'injecte continument dans $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

On peut aussi définir une classe d'espace de Hardy avec des poids particuliers.

Définition B.3.10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On définit l'espace de Hardy pondéré $H^2(\alpha)$ comme étant l'espace $H^2(\beta)$ avec $\beta_n = (n + 1)^{1-\alpha}$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque : lorsque $\alpha = 1$ on retrouve l'espace de Hardy usuel $H^2(\mathbb{D})$.

En fait, on peut montrer que les espaces de Dirichlet D_α et les espaces $H^2(\alpha)$ sont les mêmes.

Théorème B.3.11. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Alors, D_α et $H^2(\alpha)$ sont les mêmes et leurs normes hilbertiennes sont équivalentes.*

Sous une certaine condition le produit d'une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ avec une fonction de $H^2(\beta)$ reste dans $H^2(\beta)$.

Théorème B.3.12. *Soit β une suite décroissante de réels positifs telle que $\liminf(\beta_n)^{\frac{1}{2n}} \geq 1$. Si $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\beta)$ alors $fg \in H^2(\beta)$.*

Corollaire B.3.13. *Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Si $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\alpha)$ alors $fg \in H^2(\alpha)$.*

Preuve. On a que $\beta_n = (n+1)^{1-\alpha}$ est une suite décroissante de réels positifs telle que $\liminf(\beta_n)^{\frac{1}{2n}} = 1$. D'où d'après la proposition précédente [B.3.12](#), on a le résultat. \square

Bibliographie

- [1] J Aaronson. Ergodic theory for inner functions of the upper half plane. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 14, pages 233–253, 1978. [51](#)
- [2] J Agler and J. E McCarthy. *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, volume 44. American Mathematical Soc., 2002. [50](#)
- [3] W Arendt, E Bernard, B Célariès, and I Chalendar. Denjoy-wolff theory and spectral properties of weighted composition operators on $hol(d)$. *Illinois Journal of Mathematics*, 66(4). [35](#), [101](#)
- [4] W Arendt, E Bernard, B Célariès, and I Chalendar. Spectral properties of weighted composition operators on $hol(d)$ induced by rotations. *Indiana Univ Math. Journal*, accepted, 2021. [35](#), [101](#)
- [5] W Arendt, B Célariès, and I Chalendar. In koenigs' footsteps : Diagonalization of composition operators. *Journal of Functional Analysis*, 278(2) :108313, 2020. [6](#), [7](#), [9](#), [35](#), [36](#), [37](#), [41](#), [42](#), [44](#), [46](#)
- [6] W Arendt and I Chalendar. Generators of semigroups on banach spaces inducing holomorphic semiflows. *Israel Journal of Mathematics*, 229(1) :165–179, 2019. [8](#), [58](#), [71](#), [73](#)
- [7] C Avicou. *Semigroupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, 2015. [123](#)
- [8] C Avicou, I Chalendar, and J. R Partington. A class of quasicontractive semigroups acting on hardy and dirichlet space. *Journal of Evolution Equations*, 15(3) :647–665, 2015. [8](#)
- [9] I. N Baker and C Pommerenke. On the iteration of analytic functions in a halplane ii. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2) :255–258, 1979. [50](#), [114](#)
- [10] E Berkson and H Porta. Semigroups of analytic functions and composition operators. *Michigan Mathematical Journal*, 25(1) :101–115, 1978. [58](#), [59](#)
- [11] E Bernard. Weighted composition semigroups on banach spaces of holomorphic functions. *Archiv der Mathematik*, pages 1–12, 2022. [58](#), [101](#)
- [12] J Bonet. A note about the spectrum of composition operators induced by a rotation. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 114(2) :1–6, 2020. [6](#), [9](#), [12](#), [17](#), [18](#), [19](#)
- [13] J Bonet, P Galindo, and M Lindström. Spectra and essential spectral radii of composition operators on weighted banach spaces of analytic functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 340(2) :884–891, 2008. [35](#)
- [14] P Bourdon. Invertible weighted composition operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(1) :289–299, 2014. [36](#)

- [15] P. S Bourdon. Spectra of some composition operators and associated weighted composition operators. *Journal of Operator Theory*, pages 537–560, 2012. [35](#)
- [16] P. S Bourdon, V Matache, and J. H Shapiro. On convergence to the denjoy-wolff point. *Illinois Journal of Mathematics*, 49(2) :405–430, 2005. [51](#)
- [17] P. S Bourdon and S. K Narayan. Normal weighted composition operators on the hardy space $h^2(u)$. *Journal of mathematical analysis and applications*, 367(1) :278–286, 2010. [6](#)
- [18] F Bracci, M. D Contreras, and S Díaz-Madrigal. Infinitesimal generators associated with semigroups of linear fractional maps. *Journal d'Analyse Mathématique*, 102(1) :119–142, 2007. [59](#), [60](#)
- [19] F Bracci, M. D Contreras, and S Díaz-Madrigal. *Continuous semigroups of holomorphic self-maps of the unit disc*. Springer, 2020. [47](#), [59](#), [60](#)
- [20] F Bracci and P Poggi-Corradini. On valiron's theorem. *arXiv preprint math/0310440*, 2003. [49](#), [111](#)
- [21] Y Bugeaud. *Approximation by algebraic numbers*, volume 160. Cambridge University Press, 2004. [18](#)
- [22] I Chalendar and G. R Exner. Subnormality of weighted shifts associated to composition operators. *Computational Methods and Function Theory*, 19(2) :193–225, 2019. [60](#)
- [23] I Chalendar, E. A Gallardo-Gutierrez, and J. R Partington. Weighted composition operators on the dirichlet space : boundedness and spectral properties. *Mathematische Annalen*, 363(3) :1265–1279, 2015. [6](#), [35](#)
- [24] I Chalendar and J. R Partington. The reproducing kernel thesis for lower bounds of weighted composition operators. *Archiv der Mathematik*, 113(2) :179–187, 2019. [78](#), [79](#)
- [25] M. D Contreras, S Diaz-Madrigal, and C Pommerenke. Boundary behavior of the iterates of a self-map of the unit disk. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 396(1) :93–97, 2012. [50](#)
- [26] M. D Contreras and A. G Hernández-Díaz. Weighted composition operators on hardy spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 263(1) :224–233, 2001. [6](#), [78](#)
- [27] C. C Cowen. Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk. *Transactions of the American Mathematical Society*, 265(1) :69–95, 1981. [59](#)
- [28] C. C Cowen. Composition operators on h^2 . *Journal of Operator Theory*, pages 77–106, 1983. [51](#)
- [29] C. C Cowen Jr. *Composition operators on spaces of analytic functions*. Routledge, 2019. [35](#), [49](#)
- [30] Z Cuckovic and R Zhao. Weighted composition operators between different weighted bergman spaces and different hardy spaces. *Illinois Journal of mathematics*, 51(2) :479–498, 2007. [6](#)
- [31] B Célariès. *Opérateurs et semi-groupes d'opérateurs sur des espaces de fonctions holomorphes : Applications à la théorie de l'universalité*. PhD thesis, Université de Lyon, 2019. [121](#), [123](#)
- [32] A. M Davie. Invariant subspaces for bishop's operators. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 6(3) :343–348, 1974. [5](#)
- [33] E. B Davies. *Linear operators and their spectra*, volume 106. Cambridge University Press, 2007. [6](#)
- [34] K DeLeeuw, W Rudin, and J Wermer. The isometries of some function spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11(5) :694–698, 1960. [6](#)

- [35] N Dunford and J. T Schwartz. *Linear operators, part 1 : general theory*, volume 10. John Wiley & Sons, 1988. [22](#), [68](#)
- [36] P. L Duren. *Theory of hp spaces*. mineola, 2000. [123](#)
- [37] M Elin, V Goryainov, S Reich, and D Shoikhet. Fractional iteration and functional equations for functions analytic in the unit disk. *Computational Methods and Function Theory*, 2(2) :353–366, 2004. [59](#)
- [38] K. J Engel and R Nagel. *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006. [58](#), [68](#), [81](#), [85](#), [87](#)
- [39] R. J Fleming and J. E Jamison. *Isometries in Banach Spaces : Vector-valued Function Spaces and Operator Spaces, Volume Two*. Chapman and Hall/CRC, 2007. [5](#)
- [40] F Forelli. The isometries of h_p . *Canadian Journal of Mathematics*, 16 :721–728, 1964. [6](#)
- [41] P Galindo, M Lindström, and N Wikman. Spectra of weighted composition operators on analytic function spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17(1) :1–22, 2020. [35](#)
- [42] E. A Gallardo-Gutiérrez, A. G Siskakis, and D Yakubovich. Generators of c_0 -semigroups of weighted composition operators. *arXiv preprint arXiv :2110.05247*, 2021. [58](#), [71](#), [74](#), [75](#)
- [43] E. A Gallardo-Gutiérrez and D. V Yakubovich. On generators of c_0 -semigroups of composition operators. *Israel Journal of Mathematics*, 229(1) :487–500, 2019. [8](#), [58](#), [71](#)
- [44] G Gunatillake. Compact weighted composition operators on the hardy space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(8) :2895–2899, 2008. [6](#)
- [45] A Hartmann, X Massaneda, A Nicolau, and J Ortega-Cerdà. Reverse carleson measures in hardy spaces. *Collectanea mathematica*, 65(3) :357–365, 2014. [79](#)
- [46] N. E .H Hassan. *Topologie générale et espaces normés-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2018. [65](#), [66](#), [82](#), [87](#)
- [47] E Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Courier Corporation, 1997. [75](#)
- [48] M Hirsch and S Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra (pure and applied mathematics, vol. 60)*. 1974. [58](#), [64](#)
- [49] K Hoffman. *Banach spaces of analytic functions*. Courier Corporation, 2007. [29](#)
- [50] W Hurewicz. *Lectures on ordinary differential equations*. Courier Corporation, 1990. [58](#)
- [51] O Hyvärinen, M Lindström, I Nieminen, and E Saukko. Spectra of weighted composition operators with automorphic symbols. *Journal of Functional Analysis*, 265(8) :1749–1777, 2013. [35](#)
- [52] F Jafari, T Tonev, E Toneva, and K Yale. Holomorphic flows, cocycles, and coboundaries. *Michigan Mathematical Journal*, 44(2) :239–253, 1997. [59](#)
- [53] H Kamowitz. The spectra of a class of operators on the disc algebra. *Indiana University Mathematics Journal*, 27(4) :581–610, 1978. [10](#), [23](#), [24](#), [35](#)
- [54] S Kantorovitz. *Semigroups of operators and spectral theory*, volume 330. CRC Press, 1995. [58](#)
- [55] J. L Kelley, I Namioka, W. F Donoghue, K. R Lucas, B. J Pettis, E. T Poulsen, G. B Price, W Robertson, W. R Scott, and K. T Smith. Linear topological spaces. In *Linear Topological Spaces*, pages 26–82. Springer, 1963. [37](#)
- [56] G Koenigs. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. In *Annales scientifiques de l’Ecole normale supérieure*, volume 1, pages 3–41, 1884. [38](#)

- [57] H Komatsu. Semi-groups of operators in locally convex spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 16(3) :230–262, 1964. [81](#)
- [58] Y Komatu. On angular derivative. In *Kodai Mathematical Seminar Reports*, volume 13, pages 167–179. Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 1961. [110](#)
- [59] T Komura. Semigroups of operators in locally convex spaces. *Journal of Functional Analysis*, 2(3) :258–296, 1968. [81](#)
- [60] W König. Semicocycles and weighted composition semigroups on hp. *Michigan Mathematical Journal*, 37(3) :469–476, 1990. [61](#), [63](#), [64](#)
- [61] L Kronecker. Nherungsweise ganzzahlige auflssung linearer gleichungen, sitzungsb. *Berliner-Akad. WiNs*, 46 :1071, 1884. [22](#)
- [62] R Kumar and J. R Partington. Weighted composition operators on hardy and bergman spaces. In *Recent advances in operator theory, operator algebras, and their applications*, pages 157–167. Springer, 2004. [78](#)
- [63] S Lang. Transcendental numbers and diophantine approximations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 77(5) :635–677, 1971. [19](#)
- [64] L. D Lemle. La formule de lie-trotter pour les semi-groupes fortement continus. *arXiv preprint arXiv :0704.1399*, 2007. [58](#)
- [65] S Li and S Stevic. Weighted composition operators from bergman-type spaces into bloch spaces. *Proceedings Mathematical Sciences*, 117(3) :371–385, 2007. [6](#)
- [66] R A Martnez-Avendano and P Rosenthal. *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*, volume 237. Springer Science & Business Media, 2007. [5](#)
- [67] I Miyadera. Semi-groups of operators in frchet space and applications to partial differential equations. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 11(2) :162–183, 1959. [81](#), [82](#)
- [68] R. T Moore. Banach algebras of operators on locally convex spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75(1) :68–73, 1969. [81](#)
- [69] S Ouchi. Semi-groups of operators in locally convex spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 25(2) :265–276, 1973. [81](#)
- [70] A Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012. [58](#), [66](#), [68](#)
- [71] C Pommerenke. Univalent functions. *Vandenhoeck and Ruprecht*, 1975. [48](#), [119](#)
- [72] C Pommerenke. On the iteration of analytic functions in a halfplane, i. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3) :439–447, 1979. [50](#), [114](#)
- [73] H Queffelec and M Queffelec. *Analyse complexe et applications*. Calvage & Mounet, 2017. [39](#), [69](#), [92](#)
- [74] W Rudin. Real and complex analysis (mcgraw-hill international editions : Mathematics series). 1987. [24](#), [29](#), [50](#), [55](#)
- [75] J. L Schiff. *Normal families*. Springer Science & Business Media, 1993. [110](#)
- [76] J. H Shapiro. *Composition operators : and classical function theory*. Springer Science & Business Media, 2012. [35](#), [39](#), [48](#), [108](#), [109](#), [111](#)
- [77] D Shoikhet. *Semigroups in geometrical function theory*. Springer Science & Business Media, 2001. [48](#), [77](#), [109](#)

- [78] A. G Siskakis. *Semigroups of Composition Operators and the Cesaro Operator on $H^p(d)$ (Bergman Space, Infinitesimal Generator)*. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1985. [59](#)
- [79] A. G Siskakis. Weighted composition semigroups on hardy spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, 84 :359–371, 1986. [64](#), [67](#)
- [80] E. C Titchmarsh et al. *The theory of functions*. 1939. [119](#)
- [81] G Valiron. Sur l'iteration des fonctions holomorphes dans un demi-plan. *Bull. Sci. Math*, 2(55) :105–128, 1931. [49](#)
- [82] F. H Vasilescu. *Analytic functional calculus and spectral decompositions*, editura academiei and d. *Reidel Publ. Co., Bucharest/Dordrecht*, 1982. [6](#), [9](#), [26](#)
- [83] K Yosida. *Functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2012. [81](#), [82](#), [87](#)
- [84] R Zhao et al. Weighted composition operators on the bergman space. *Journal of the London Mathematical Society*, 70(2) :499–511, 2004. [6](#)