



HAL
open science

Groupoïdes étales et théorie de l'indice supérieur

Fabien Bessière

► **To cite this version:**

Fabien Bessière. Groupoïdes étales et théorie de l'indice supérieur. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Lorraine, 2023. Français. NNT : 2023LORR0150 . tel-04286201

HAL Id: tel-04286201

<https://theses.hal.science/tel-04286201>

Submitted on 15 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Groupoïdes étales et théorie de l'indice supérieur

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 octobre 2023

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention mathématiques fondamentales)

par

Fabien BESSIÈRE

Composition du jury

<i>Présidente :</i>	Indira Lara Chatterji	Professeure à l'Université Côte d'Azur
<i>Examinatrice :</i>	Maria Paula Gómez Aparicio Angela Pasquale	Maître de conférences à l'Université Paris Saclay Professeure à l'Université de Lorraine
<i>Rapporteurs :</i>	Paulo Carrillo-Rouse Emmanuel Germain	Maître de conférences à l'Université Paul Sabatier Professeur à l'Université de Caen
<i>Directeurs de thèse :</i>	Hervé Oyono-Oyono Moulay Tahar Benameur	Professeur à l'Université de Lorraine Professeur à l'Université de Montpellier

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse, Hervé Oyono-Oyono, pour son soutien inestimable tout au long de ce projet de recherche. Je tiens à mettre à l'honneur ses compétences mathématiques et sa disponibilité sans faille ces dernières années. Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse, Moulay-Tahar Benameur, pour son soutien et ses compétences pédagogiques remarquables, que j'ai eu la chance de découvrir lors de mon master 2 recherche à Montpellier.

Je remercie chaleureusement Paulo Carrillo-Rouse et Emmanuel Germain d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Indira Lara Chatterji, Maria Paula Gómez Aparicio et Angela Pasquale d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je n'aurais probablement pas entrepris cette thèse sans l'initiation à la rigueur scientifique et l'amour pour les mathématiques que m'ont transmis mes deux professeurs de classe préparatoire, Antony Didier et Benoît Saleur. Je leur suis reconnaissant pour leur enseignement remarquable et leur influence positive sur ma carrière académique.

Je tiens à remercier le personnel administratif que j'ai eu l'occasion de côtoyer durant mes années à Metz, notamment les secrétaires du département de l'IECL, de l'UFR MIM et de l'école doctorale IAEM pour leur bonne humeur et leur efficacité remarquable. Je remercie également Jérémy Faupin et Victor Nistor d'avoir fait partie de mon comité de suivi de thèse. J'aimerais remercier Alexandre Baldare, pour ses encouragements, mais aussi toutes nos discussions sur la théorie de l'indice, elles m'ont été d'une grande aide tout au long de ma thèse. Un grand merci à tous mes collègues doctorants, notamment Simon Roby pour notre traditionnel *café-Francinou* le midi, mais aussi Benjamin Alvarez, Rémi Côme, Nicolas Frantz, Jérémy Mougél et Jimmy Payet. Leurs discussions et leur soutien ont été très précieux tout au long de cette aventure doctorale.

Un grand merci à mon ami Samuel Louviot, pour nos fous rires, nos discussions scientifiques tard le soir, mais aussi nos escapades new-yorkaises. C'est toujours un plaisir de passer du temps en sa compagnie.

Je remercie aussi tous mes ami·e·s de Mayotte pour leur soutien et leurs encouragements. J'ai pu, grâce à eux, m'aérer l'esprit et retrouver le sourire dans les moments difficiles. Je pense notamment à Alexandre Barrier, Anaïs Migniard, Arthur Compoin, Benjamin Chollet, Charlotte Ducret, Marthe-Lorine Pouchard, Marine Geissman, Pia Capdevielle, Typhaine Marrot et Vincent Bachelet. Merci également à Mathilde Duverneuil pour son aide en cette fin de thèse et avec qui je continue d'avoir des échanges enrichissants malgré la distance.

Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude envers ma famille. À mes grands-parents et parents, qui n'ont jamais douté de mes capacités ; à ma belle-mère qui a toujours su trouver les mots pour me reconforter et me conseiller durant mes années d'études ; à ma sœur pour qui j'ai la plus haute estime et avec qui j'aimerais passer plus de temps ; mais aussi mes deux demi-sœurs pour leur joie de vivre naturelle.

On dit souvent *le meilleur pour la fin*. Il n'y a pas meilleur exemple qu'ici. Je remercie infiniment Ninon Chaminadour, pour son amour inconditionnel, son soutien total et sa patience sans limite. Tout ce travail n'aurait pas été possible sans elle. J'ai beaucoup de chance de l'avoir à mes côtés.

Table des matières

Table des figures	v
Introduction	3
1 Groupoïdes et C^*-algèbres	11
1.1 Rappels sur les C^* -algèbres et les modules de Hilbert	11
1.2 Introduction aux groupoïdes	17
1.2.1 Définitions et premières propriétés	17
1.2.2 C^* -algèbre d'un groupoïde	21
1.3 Action de groupoïdes	24
1.3.1 Action sur les espaces	24
1.3.2 Action sur les algèbres	28
1.3.3 Action sur les modules	35
1.4 Produit croisé par un groupoïde	41
1.5 Principe d'induction	41
1.5.1 Induction d'espace et d'algèbre	41
1.5.2 Induction de modules de Hilbert	43
2 Champs de complexes simpliciaux	47
2.1 Réalisation géométrique, squelettes et centres	47
2.2 Étude locale et partie génératrice de la topologie	53
2.3 Propriétés de l'action d'un groupoïde sur un complexe simplicial	58
3 Calcul fonctionnel continu sur un module de Hilbert	65
3.1 Borélien régulier et localement régulier	65
3.2 Représentation régulière et localement régulière	73
3.3 Action localement induite par des boréliens réguliers	74
4 Géométrie coarse et représentations admissibles	79
4.1 Quelques résultats préliminaires	79
4.2 Existence de représentations régulières	85
4.3 Opérateurs à support contrôlé	90
4.4 Existence de représentations admissibles	95

5 Algèbre de Roe	101
5.1 Divisibilité des voisinages contrôlés de la diagonale	101
5.2 K -théorie de la C^* -algèbre de Roe	105
5.3 Quelques résultats de functorialité	114
6 Applications d'indices	119
6.1 Rappels de KK -théorie équivariante	119
6.2 Application d'assemblage de Baum-Connes	123
6.3 Indice coarse	125
Bibliographie	135

Table des figures

1.1	Action d'un groupoïde (\mathcal{G}, X) sur un espace topologique Z .	25
1.2	Illustration d'un fibré s.c.s	31
1.3	Pull-back d'un fibré s.c.s	32
2.1	De gauche à droite : $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ et σ_2° .	47
2.2	En bleu un domaine fondamental pour les sommets.	50
2.3	En rouge un domaine fondamental pour la réalisation géométrique.	50
2.4	La subdivision barycentrique d'un 2-simplexe.	50
2.5	En jaune, un élément de $S(\mu)$ dans $\rho^{-1}(x)$ dans le cas où $\text{supp}(\mu) = \{z_0, z_1\}$.	55
2.6	Le complexe simplicial (Y, Δ) et en violet le compact K .	61
2.7	En bleu les 0-simplexes et en rouge les 1-simplexes.	61
2.8	La réalisation géométrique du complexe simplicial vu en remarque 2.3.5.	61
3.1	Restriction du borélien $U \subseteq Y$ à $V \subseteq X$.	66
3.2	Recouvrement en bissection de la s -fibre.	72
4.1	Trivialisation de la base.	85
4.2	Cas où μ n'est pas dans un simplexe de dimension maximale.	89
5.1	Recouvrement de Δ_Z en orbite dans U .	103

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer une théorie de l'indice supérieur à la John Roe pour les actions propres et co-compactes de groupoïdes amples. Pour y parvenir, nous introduisons tous les outils nécessaires, notamment la notion de représentation admissible, d'opérateurs contrôlés et de C^* -algèbre de Roe équivariantes. Nous présentons également la notion de complexe simplicial sous l'action d'un groupoïde étale et démontrons l'existence de représentations admissibles dans ce cadre. Nous prouvons que la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe équivariante ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la représentation admissible choisie. Ce résultat permettra de définir un indice supérieur coarse équivariant pour des K -cycles admissibles de manière univoque. Enfin, nous établissons un lien entre cet indice supérieur coarse et l'application d'assemblage de Baum-Connes pour un groupoïde.

Mots-clés: Groupoïdes, algèbre d'opérateurs, théorie de l'indice, K -théorie, algèbre de Roe.

Abstract

The aim of this thesis is to develop a higher index theory for proper and co-compact actions of ample groupoids following John Roe's approach. To achieve this goal, we introduce all the necessary tools, in particular, the notion of admissible representation, controlled operators, and equivariant Roe C^* -algebra. We also present the notion of simplicial complex under the action of an étale groupoid and show the existence of admissible representation in this context. We prove that the K -theory of the equivariant Roe C^* -algebra does not depend, up to canonical isomorphism, on the chosen admissible representation. This result allows for an unambiguous definition of an equivariant coarse higher index map for admissible K -cycles. Finally, we establish a connection between this coarse higher index and the Baum-Connes assembly map for a groupoid.

Keywords: Groupoids, operator algebras, index theory, K -theory, Roe algebra.

Introduction

Depuis les travaux pionniers de Sir Michael Atiyah et Isadore Singer sur la théorie de l'indice, les C^* -algèbres et leur K -théorie ont révélé leur puissance en tant qu'outils pour étudier les invariants topologiques en géométrie différentielle. Les résultats les plus remarquables incluent la résolution de la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des hautes signatures, qui s'applique à une vaste classe de groupes fondamentaux, ainsi que les applications à la conjecture de Gromov-Lawson sur l'existence de métriques à courbure positive sur une variété. Le principe fondamental est de lier une situation géométrique à une C^* -algèbre via un groupoïde, et d'obtenir ensuite les invariants topologiques sous forme d'indices généralisés (appelés indices supérieurs) dont le réceptacle est la K -théorie de la C^* -algèbre.

Les travaux de Gennadi Kasparov sur la conjecture de Novikov ont considérablement élargi le champ d'application de la théorie de l'indice, en introduisant la K -théorie bivariante. Cette dernière est devenue un élément incontournable de la géométrie non-commutative en fournissant un cadre formel et adapté pour le concept d'indice supérieur. Ce nouveau formalisme a permis l'émergence de conjectures similaires à celle de Novikov, parmi lesquelles la célèbre conjecture de Baum-Connes, qui prédit le calcul de la K -théorie de la C^* -algèbre d'un groupe (et plus généralement d'un produit croisé, voire d'un groupoïde) en termes d'indices supérieurs, grâce à la bijectivité de l'application d'assemblage. Rappelons la construction de cette application. Pour tout groupe localement compact G , il existe un homomorphisme de groupes abéliens, appelé *application d'assemblage de Baum-Connes* :

$$\mu_G : K_*^{\text{top}}(G) \longrightarrow K_*(C_r^*(G)),$$

où :

- $K_*^{\text{top}}(G)$ est la K -théorie topologique du groupe G : objet de nature topologique.
- $K_*(C_r^*(G))$ est la K -théorie de la C^* -algèbre réduite du groupe G : objet de nature analytique.

La conjecture de Baum-Connes est le résultat suivant :

Conjecture 0.0.1 (Baum-Connes). Pour tout groupe localement compact G , l'application μ_G est un isomorphisme.

Cette conjecture se généralise avec un groupoïde et une C^* -algèbre. Plus précisément, si \mathcal{G} est un groupoïde localement compact, σ -compact muni d'un système de Haar et A une \mathcal{G} -algèbre, on peut construire une *application d'assemblage pour un groupoïde et à coefficients dans A* :

$$\mu_{\mathcal{G},A} : K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}, A) \longrightarrow K_*(A \rtimes_r \mathcal{G}),$$

où $A \rtimes_r \mathcal{G}$ désigne le produit croisé de la \mathcal{G} -algèbre A par le groupoïde \mathcal{G} . La version équivariante et à coefficients de la conjecture de Baum-Connes est la suivante :

Conjecture 0.0.2 (Baum-Connes pour un groupoïde et à coefficients dans A). Pour tout groupoïde \mathcal{G} localement compact, σ -compact muni d'un système de Haar et toute \mathcal{G} -algèbre A , l'application $\mu_{\mathcal{G},A}$ est un isomorphisme.

Une autre approche des indices supérieurs d'opérateurs différentielles elliptiques a été développée dans les années 90 par John Roe via la géométrie coarse. L'idée principale de cette théorie est d'étudier le comportement d'un espace métrique à grande échelle. Cela signifie que les distances entre les points éloignés jouent un rôle prépondérant par rapport aux distances entre les points proches. L'une des principales applications de la géométrie coarse est l'étude des actions de groupes sur les espaces métriques. Dans ce contexte, la géométrie coarse offre une compréhension profonde des propriétés globales de l'espace métrique sur lequel le groupe agit, qui peut ensuite être utilisée pour étudier les propriétés du groupe lui-même.

John Roe a alors associé à une structure coarse, une C^* -algèbre contenant le calcul pseudo-différentiel d'ordre zéro associé à un opérateur différentiel elliptique sur une variété non compacte. Ces C^* -algèbres, appelées C^* -algèbres de Roe, possèdent une propriété remarquable : elles capturent la structure à grande échelle des espaces métriques (munis d'une structure coarse) tout en étant insensibles à leur topologie locale. Leur K -théorie est alors le réceptacle des indices supérieurs.

Une version coarse de la conjecture de Baum-Connes a par la suite été présentée dans [42]. Rappelons l'énoncé de cette conjecture. Si X est un espace métrique à géométrie bornée, alors il existe une *application d'indice supérieur coarse* :

$$\tilde{\mu}_X : \lim_{d \rightarrow \infty} K_*(P_d(X)) \longrightarrow K_*(C^*(X)),$$

où :

- $K_*(P_d(X))$ désigne la K -homologie du complexe de Rips $P_d(X)$ avec $d \geq 1$,
- $K_*(C^*(X))$ désigne la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe de X , notée $C^*(X)$.

Conjecture 0.0.3 (Baum-Connes coarse). Pour tout espace métrique X à géométrie bornée, l'application $\tilde{\mu}_X$ est un isomorphisme.

Guoliang Yu a démontré que la conjecture de Baum-Connes coarse est vérifiée dans le cas où X est un espace métrique propre à géométrie bornée et de dimension asymptotique finie (voir [71]), mais également dans le cas où X est un espace métrique discret à géométrie bornée admettant un plongement uniforme dans un espace de Hilbert (voir [70]). Bien que ces classes d'exemples soient très vastes, des contre-exemples ont été présentés par Nigel Higson, Vincent Lafforgue et Georges Skandalis dans [66]. Ils ont notamment démontré que la géométrie des graphes expandeurs constituait un obstacle à la surjectivité de l'application $\tilde{\mu}_X$, et que cet obstacle persistait pour la conjecture de Baum-Connes.

Il existe également une version équivariante des C^* -algèbres de Roe où l'action d'un groupe est mise en jeu, ainsi qu'une version équivariante de la conjecture de Baum-Connes coarse. Plus précisément, si X est un espace métrique à géométrie bornée sur lequel agit proprement et de façon isométrique un groupe discret dénombrable G , alors il existe une *application d'indice supérieur coarse G -équivariante* (voir [45], [55], [68] et [69]) :

$$\tilde{\mu}_{X,G} : \lim_{d \rightarrow \infty} K_*^G(P_d(X)) \longrightarrow K_*^G(C_G^*(X)),$$

où :

- $K_*^G(P_d(X))$ désigne la K -homologie G -équivariante du complexe de Rips $P_d(X)$ avec $d \geq 1$,
- $K_*^G(C_G^*(X))$ désigne la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe G -équivariante de X , notée $C_G^*(X)$.

Conjecture 0.0.4 (Baum-Connes coarse G -équivariante). Pour tout espace métrique X à géométrie bornée, pour tout groupe discret dénombrable G agissant proprement et de façon isométrique sur X , l'application $\tilde{\mu}_{X,G}$ est un isomorphisme.

Lorsque le groupe G est trivial, on retrouve la conjecture de Baum-Connes coarse. Lorsque l'action de G sur X est co-compacte, les C^* -algèbres $C_G^*(X)$ et $C_r^*(G)$ sont Morita équivalentes (voir [42]) et de plus, la conjecture de Baum-Connes coarse G -équivariante est une reformulation de la conjecture de Baum-Connes (voir [55]).

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la construction d'un indice supérieur coarse \mathcal{G} -équivariant lorsque \mathcal{G} est un groupoïde ample. La première étape est de construire dans ce cadre une C^* -algèbre de Roe \mathcal{G} -équivariante. Pour cela, nous devons généraliser la notion de représentation localement libre au cadre des groupoïdes amples dont nous allons rappeler la définition (voir [55]). On considère G un groupe discret dénombrable, Z un G -espace propre à base d'ouverts dénombrable et H un espace de Hilbert séparable. Soient $U : G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ une représentation unitaire et $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ une représentation non-dégénérée, G -équivariante et ample. On dit que π est *localement libre* si pour tout sous-groupe fini F de G et tout borélien F -invariant U de X , il existe un espace de Hilbert H_U équipé de la représentation triviale de F tel que l'on a l'isomorphisme F -équivariant :

$$\bar{\pi}(\chi_U)(H) \simeq \ell^2(F) \otimes H_U$$

où $\bar{\pi}$ désigne l'extension de la représentation π à l'algèbre des fonctions boréliennes bornées. La difficulté qui se présente pour généraliser cette définition, dans le cas où G est remplacé par un groupoïde \mathcal{G} de base X et H est remplacé par un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E , est de prolonger le calcul fonctionnel continu aux fonctions caractéristiques. Autrement dit, nous souhaitons donner un sens à l'opérateur $\pi(\chi_U)$ où $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et U appartient à une classe adéquate de borélien de Z . Pour résoudre ce problème, on introduit la notion de *boréliens π -réguliers*, qui sont des boréliens de Z pour lesquelles l'extension du calcul fonctionnel continu pour π à χ_U est possible. Si \mathcal{U} désigne une partie génératrice de la topologie de Z (au sens de la définition 2.2.5), on introduit également la notion de représentation \mathcal{U} -régulière, qui sont des représentations pour lesquelles tout élément de \mathcal{U} est régulier. Il sera alors possible de définir une notion de représentation \mathcal{U} -admissible, qui concernera seulement les représentations \mathcal{U} -régulières et qui généralisera les représentations localement libre dans le cas d'un groupe. On prouve ensuite l'existence de représentations \mathcal{U} -admissibles pour les actions propres et simpliciales. Pour de telles actions, il existe une partie génératrice naturelle \mathcal{S} pour la topologie donnée par les coordonnées barycentriques (voir section 2.2.6).

Théorème 0.0.5 (Existence de représentation \mathcal{U} -admissible). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et σ -compact. Soit (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial propre, typé et \mathcal{G} -compact de dimension inférieure à n . Alors il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E et une représentation \mathcal{S} -admissible :

$$\pi : C_0(|\Delta|) \longrightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

Comme dans le cas d'un X -module non-dégénéré où X est un espace métrique propre (voir [50]), nous pouvons définir la notion d'opérateur à support contrôlé dans notre cadre. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre et \mathcal{G} -compact. On dit qu'un sous-ensemble $U \subseteq Z \times_X Z$ est contrôlé s'il existe un compact $K \subseteq Z$ tel que $U \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. Si E désigne un module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{G} -équivariante π de $C_0(Z)$, on peut définir l'algèbre de Roe \mathcal{G} -équivariante $C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)$ qui est la fermeture pour la norme de l'ensemble des opérateurs \mathcal{G} -équivariant, localement compact et à support contrôlé.

La deuxième étape est de montrer que la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe \mathcal{G} -équivariante ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la représentation \mathcal{U} -admissible choisie. Autrement dit, si E et E' désignent deux modules \mathcal{G} -équivariant munis de représentations \mathcal{U} -admissibles π et π' , alors on a l'isomorphisme de groupes :

$$K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)) \simeq K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')).$$

Comme dans le cas d'un groupe (voir [50] et [55]), ce résultat est la conséquence du résultat technique suivant, qui constitue le résultat principal de cette thèse :

Théorème 0.0.6. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Soit \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soient E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -régulière $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et E' un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -admissible $\pi' : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E')$. Pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U de Δ_Z , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$T : E \rightarrow E' \quad \text{avec} \quad \text{supp}(T) \subseteq U.$$

Une fois ces résultats obtenus, il sera alors possible de définir sans ambiguïté l'indice supérieur coarse \mathcal{G} -équivariant, noté $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}$, d'un K -cycle \mathcal{U} -admissible (E, π, T) en posant :

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(E, \pi, T) := [C_{\mathcal{G}}^*(Z), 1, T]$$

où T est supposé ici auto-adjoint, \mathcal{G} -équivariant, à support contrôlé et pour tout $f \in C_0(Z)$, l'opérateur $(T^2 - 1)\pi(f)$ est compact. On montre par la suite, de la même façon que dans le cas d'un groupe (voir [50]), l'existence d'une application naturelle (qui n'est pas un isomorphisme en général) :

$$K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)) \longrightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G})). \quad (1)$$

On conclut ce travail en démontrant que l'image du K -cycle $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(E, \pi, T)$ par l'application en (1) s'identifie avec l'application d'assemblage de Baum-Connes.

Dans les articles [58] et [67], une nouvelle approche du calcul de la K -théorie des C^* -algèbres de produit croisé par décomposition géométrique a été introduite. L'un des développements futurs, utilisant les résultats principaux de cette thèse, serait de démontrer la stabilité de la conjecture de Baum-Connes par décomposition géométrique sans supposer l'existence d'un élément γ (voir [47] pour la définition).

Plan détaillé de la thèse

Le premier chapitre de cette thèse comporte des rappels essentiels pour les résultats qui seront exposés dans la suite. Dans un premier temps, plusieurs rappels sur les C^* -algèbres et les modules de Hilbert sont présentés (voir [7], [54] et [59]). Ensuite, la notion de groupoïde est introduite, accompagnée d'exemples concrets et de premières propriétés (voir [2], [18], [34], [38] et [46]). La suite du chapitre s'attache à décrire les actions de groupoïde sur différents types d'objets : espace topologique, C^* -algèbre (voir [33] et [56]) et module de Hilbert (voir [32]). Dans cette optique, il est nécessaire de considérer l'objet sur lequel le groupoïde \mathcal{G} agit comme « fibrant » au-dessus de sa base X . Concernant les actions sur les C^* -algèbres, on introduit la notion de $C_0(X)$ -algèbre, de fibré de C^* -algèbres, d'espace de section, de fibre, de pull-back et de produit croisé. Les définitions et résultats précédemment présentés sont ensuite adaptés au cas des modules de Hilbert. Le chapitre se poursuit avec des rappels sur le principe d'induction (voir [10]) qui est présenté au niveau des algèbres, modules de Hilbert, opérateurs et représentations. On termine ce chapitre par le principe d'absorption pour un groupoïde et un module de Hilbert particulier (comparer avec [55] dans le cas d'un groupe discret dénombrable et d'un espace de Hilbert).

Lemme 0.0.7 (Principe d'absorption). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale, Y un compact-ouvert de X et H un espace de Hilbert. Considérons le $C_0(X)$ -module $E = H \otimes_{\mathbb{C}} C(Y)$. Supposons qu'il existe une action de \mathcal{G} sur E c'est-à-dire la donnée pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ d'un unitaire $V_\gamma : H \rightarrow H$ vérifiant les conditions de continuité et de composition. Soit E_T le même module que E mais muni de l'action triviale de \mathcal{G} . Alors on a l'isomorphisme \mathcal{G} -équivariant de $C_0(X)$ -module de Hilbert :

$$L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E \simeq L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E_T.$$

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des \mathcal{G} -complexes simpliciaux (voir [10] et [47]). On y présente plusieurs notions, telles que les coordonnées barycentriques, la réalisation géométrique, la subdivision barycentrique, le squelette et les centres. L'objectif principal de ce chapitre est la construction d'une partie génératrice adaptée \mathcal{S} de la topologie de la réalisation géométrique $|\Delta|$ d'un \mathcal{G} -complexe simplicial. On définit ensuite deux hypothèses sur $|\Delta|$ nous assurant que ce dernier espace topologique soit localement compact. On énonce par la suite plusieurs résultats associés aux actions sur $|\Delta|$ et on présente un \mathcal{G} -complexe simplicial vérifiant toutes les propriétés voulues : le complexe de Rips.

Le chapitre 3 vise à étendre le calcul fonctionnel continu aux fonctions caractéristiques (d'une partie génératrice de la topologie adéquate) dans le cadre des modules de Hilbert. Notre but est d'étudier les boréliens pour lesquels cette extension est possible, que nous appellerons boréliens réguliers. Nous obtenons plusieurs propriétés vérifiées par de telles boréliens, y compris le résultat suivant qui garantit que la régularité d'un borélien est préservée par passage à l'orbite :

Corollaire 0.0.8. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale compact agissant sur un espace localement compact Z d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$ que l'on suppose ouverte. Soient E un $C_0(X)$ -module de Hilbert à droite \mathcal{G} -équivariant et $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante. Si $U \subseteq Z$ est π -régulier alors l'orbite $U \cdot \mathcal{G}$ est π -régulière.

Nous présentons ensuite la notion de représentation régulière et localement régulière relativement à une partie génératrice de la topologie ainsi que quelques conséquences directes de cette définition. Pour clore ce chapitre, nous démontrons une adaptation d'un résultat de Jean-Louis Tu (voir [47]) qui affirme que l'action propre d'un groupoïde étale est localement induite par des sous-groupoïdes qui sont relativement clopens et des boréliens qui sont localement réguliers.

Théorème 0.0.9. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale agissant proprement à droite sur un espace localement compact Z . Soient \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z et E un $C_0(X)$ -module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant. Notons $\widehat{\mathcal{U}}_{\text{loc}}$, l'ensemble des ouverts relativement compacts de X qui sont localement π -réguliers pour toute représentation localement \mathcal{U} -régulière. Alors pour tout $z_0 \in Z$ et tout voisinage ouvert $U \subseteq Z$ de z_0 , il existe :

- un sous-groupoïde relativement clopen \mathcal{H} de \mathcal{G} ;
- un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de z_0 appartenant à $\widehat{\mathcal{U}}_{\text{loc}}$ et qui est \mathcal{H} -invariant;

tels que l'application :

$$\psi : \begin{cases} V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & V \cdot \mathcal{G} \\ [v, \gamma] & \longmapsto & v\gamma \end{cases}$$

soit un homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant.

Dans le chapitre 4, on démontre l'existence de représentations régulières dans le cas de \mathcal{G} -complexes simpliciaux relativement à la partie génératrice \mathcal{S} construite dans le chapitre 2.

Théorème 0.0.10. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial \mathcal{G} -compact et propre. Alors il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E et une représentation fidèle et \mathcal{S} -régulière :

$$\pi : C_0(|\Delta|) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

On introduit par la suite la notion de structure coarse relativement à un groupoïde étale (comparer avec [50] dans le cas d'un groupe localement compact).

Définition 0.0.11 (\mathcal{G} -structure coarse). Une \mathcal{G} -structure coarse sur Z est la donnée d'une collection \mathcal{E}_Z de sous-ensembles de $Z \times_X Z$, appelés ensembles contrôlés, telle que :

- (i) si $E \in \mathcal{E}_Z$ et $F \subseteq E$ alors $F \in \mathcal{E}_Z$;
- (ii) si $E, F \in \mathcal{E}_Z$, alors \overline{E} , E^{-1} , $E \circ F$ et $E \cup F$ sont dans \mathcal{E}_Z ;
- (iii) tout compact de $Z \times_X Z$ est un ensemble contrôlé;
- (iv) si $E \in \mathcal{E}_Z$ et $K \subseteq Z$ compact alors $E \circ K$ est un ensemble relativement compact de Z ;
- (v) l'union de tous les ensembles contrôlés est $Z \times_X Z$;
- (vi) si $E \in \mathcal{E}_Z$ alors $E \cdot \mathcal{G} \in \mathcal{E}_Z$.

On démontre que si (\mathcal{G}, X) est un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite, alors la collection de sous-ensembles de $Z \times_X Z$:

$$\mathcal{E}_Z := \left\{ E \subseteq Z \times_X Z \mid \exists K \subseteq Z \text{ compact, } E \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G} \right\}$$

définit une \mathcal{G} -structure coarse sur Z . Nous continuons ce chapitre en suivant [50], où nous introduisons la notion de support contrôlé d'un opérateur, ainsi que quelques premières propriétés. Nous introduisons ensuite une des notions centrale de cette thèse : les représentations \mathcal{U} -admissibles (comparer [55] dans le cas d'un groupe discret dénombrable) :

Définition 0.0.12 (Représentation \mathcal{U} -admissible). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Soient Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact d'ancrage $\rho : Z \rightarrow X$ et \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soit E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -régulière et \mathcal{G} -équivariante $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. On dit que la représentation π est \mathcal{U} -admissible si :

- 1) pour tout voisinage ouvert contrôlé U de Δ_Z , il existe une isométrie $T_U : E \oplus E \rightarrow E$ qui est \mathcal{G} -équivariante et à support dans U ;
- 2) pour tout $z_0 \in Z$, pour tout voisinage ouvert $V_0 \subseteq Z$ de z_0 , il existe un sous-groupoïde compact-ouvert $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, un voisinage ouvert $W \subseteq V_0$ de z_0 qui est \mathcal{H} -invariant, vérifiant $\rho(W) \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ et appartenant à $\widehat{\mathcal{U}}$ tels que :

- (a) l'application $\psi : \begin{cases} W \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & W \cdot \mathcal{G} \\ [w, \gamma] & \longmapsto & w\gamma \end{cases}$ soit un homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant,
- (b) il existe un isomorphisme de $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -module \mathcal{H} -équivariant :

$$p_{W,\pi}(E) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\rho(W)}, s|_{\mathcal{H}}),$$

où l'action de \mathcal{H} sur H est triviale et $p_{W,\pi}$ est le projecteur associé au voisinage ouvert π -régulier W .

Ensuite, nous démontrons l'existence de telles représentations pour les actions simpliciales en utilisant notamment le théorème de stabilisation (comparer avec [35] dans le cas d'un groupoïde propre à base dénombrable).

Théorème 0.0.13 (Stabilisation pour les groupoïdes compacts étales). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale compact et E un $C(X)$ -module à droite \mathcal{G} -équivariant dénombrablement engendré (en tant que $C(X)$ -module). Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors il existe un isomorphisme de $C(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant :

$$E \oplus C(\mathcal{G}, H) \simeq C(\mathcal{G}, H).$$

Dans le chapitre 5, nous commençons par définir la C^* -algèbre de Roe \mathcal{G} -équivariante relativement à un espace localement compact muni d'une \mathcal{G} -structure coarse sur laquelle \mathcal{G} agit proprement, et un module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{G} -équivariante. En exploitant plusieurs résultats faisant intervenir le procédé d'induction de module de Hilbert, on obtient le résultat qui constitue le coeur de cette thèse :

Théorème 0.0.14. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Soit \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soient E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -régulière $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et E' un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -admissible $\pi' : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E')$. Pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U de Δ_Z , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$T : E \rightarrow E' \quad \text{avec} \quad \text{supp}(T) \subseteq U.$$

Ce théorème aura comme conséquence importante que la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe équivariante ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la représentation admissible choisie (comparer avec [50], [55], [70] et [64] dans le cas d'un groupe).

Dans le chapitre 6, nous commençons par faire quelques rappels de KK -théorie équivariante (voir [32]). Les résultats du chapitre 5 nous permettrons de définir sans ambiguïté, lorsque (\mathcal{G}, X) est un groupoïde ample, l'indice supérieur coarse \mathcal{G} -équivariante, noté $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}$, d'un K -cycle \mathcal{U} -admissible (E, π, T) (comparer avec [55], [70] et [64] dans le cas d'un groupe discret dénombrable) en posant :

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(E, \pi, T) := [C_{\mathcal{G}}^*(Z), 1, T]$$

où T est supposé ici auto-adjoint, \mathcal{G} -équivariant, à support contrôlé et pour tout $f \in C_0(Z)$, l'opérateur $(T^2 - 1)\pi(f)$ est compact. Nous démontrons ensuite l'existence des $*$ -isomorphismes :

$$k_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G}) \simeq k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G} \simeq C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi')$$

où (\mathcal{G}, X) est un groupoïde étale et E un module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant et π' une représentation de $C_0(\mathcal{G})$ sur $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ donnée par la multiplication.

On conclut ce travail en établissant un lien entre cet indice supérieur coarse \mathcal{G} -équivariant et l'application d'assemblage de Baum-Connes. Pour cela, on construit d'abord une isométrie \mathcal{G} -équivariante

$$W : E \rightarrow L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E.$$

Alors, en notant $\text{Ad}_W : C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi) \rightarrow C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, E \otimes_{C_0(X)} L^2(\mathcal{G}), \pi')$ l'application définie pour tout $T \in C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)$ par $\text{Ad}_W(T) = W \circ T \circ W^*$, on a le résultat suivant :

Théorème 0.0.15 (Indice coarse et application d'assemblage). Pour tout K -cycle (E, π, T) dans $E_{\text{adm}}^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X))$, on a l'égalité dans $KK_*(\mathbb{C}, C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}))$:

$$(\text{Ad}_W)_* \circ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(E, \pi, T) = \Phi_* \circ \mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}([E, \pi, T]).$$

Autrement dit, modulo les identifications vues précédemment, l'indice supérieur coarse équivariant $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}$ et l'application d'assemblage de Baum-Connes $\mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}$ coïncident pour des K -cycles \mathcal{U} -admissibles.

Chapitre 1

Groupoïdes et C^* -algèbres

Dans ce chapitre, on commence par introduire la notion de C^* -algèbres et de groupoïdes. De la même façon que pour les groupes, nous verrons que nous pouvons définir des actions de groupoïdes sur des espaces, algèbres ou encore modules de Hilbert. Ceci nous permettra, en particulier, de construire le produit croisé par un groupoïde. On terminera ensuite ce chapitre sur la notion d'action induite pour les groupoïdes et nous étudierons les propriétés qui y seront associées.

1.1 Rappels sur les C^* -algèbres et les modules de Hilbert

Dans cette partie, on rappelle plusieurs définitions et propriétés indispensables sur les C^* -algèbres et modules de Hilbert.

Définition 1.1.1. On appelle \mathbb{C} -algèbre de Banach une \mathbb{C} -algèbre A munie d'une norme $\|\cdot\|$ pour laquelle $(A, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach vérifiant $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ pour tous $a, b \in A$.

On dira qu'une algèbre de Banach A est *unifère* si elle possède un élément unité pour la multiplication, noté 1_A .

Définition 1.1.2. On appelle *involution* sur une \mathbb{C} -algèbre A , une application $*$: $A \rightarrow A$; $a \mapsto a^*$ vérifiant pour tous $a, b \in A$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad (a^*)^* = a.$$

On dira qu'une algèbre est *involutive* si elle possède une involution.

Définition 1.1.3. Soient A et B deux \mathbb{C} -algèbres munies d'involutions $*_1$ et $*_2$ respectivement. On dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est un **-homomorphisme*, si f est un homomorphisme d'algèbres et si pour tout $a \in A$:

$$f(a^{*1}) = f(a)^{*2}.$$

Un **-isomorphisme* sera un *-homomorphisme d'algèbre bijectif.

Nous pouvons à présent introduire la notion de C^* -algèbre :

Définition 1.1.4. Une C^* -algèbre A est une \mathbb{C} -algèbre de Banach munie d'une involution $*$ vérifiant l'identité stellaire c'est-à-dire :

$$\forall a \in A, \quad \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Exemples 1.1.5. Soit H un espace de Hilbert.

1. L'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H , noté $\mathcal{L}(H)$, est une C^* -algèbre pour l'involution donnée par l'adjonction et la norme d'opérateur. Si H est de dimension finie n , on retrouve la C^* -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices de tailles $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} .
2. Toute sous-algèbre fermée et stable par involution de $\mathcal{L}(H)$ est une C^* -algèbre.

3. L'ensemble des opérateurs compacts de H , notée $k(H) \subseteq \mathcal{L}(H)$, est défini comme étant la fermeture dans $\mathcal{L}(H)$ de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $\theta_{x,y}$ où $x \in H, y \in H$. D'après le point précédent, $k(H)$ est une C^* -algèbre.
4. Soit X un espace localement compact. Notons $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans \mathbb{C} qui tendent vers 0 à l'infini c'est-à-dire :

$$C_0(X) := \left\{ \varphi : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subseteq X \text{ compact} : |\varphi| < \varepsilon \text{ sur } X \setminus K_\varepsilon \right\}.$$

Alors $C_0(X)$ est une C^* -algèbre pour l'involution et la norme données par $\varphi^* : x \mapsto \overline{\varphi(x)}$ et $\|\varphi\| := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$ où $\varphi \in C_0(X)$.

Définition 1.1.6 (Unitarisation d'une C^* -algèbre). Soit A une C^* -algèbre. Posons $A^+ = A \times \mathbb{C}$. Alors A^+ est une C^* -algèbre unifère qui contient A en tant qu'idéal bilatère maximal. Le produit et l'involution sont donnés pour tous $a, b \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ par :

$$(a, \lambda)(b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \quad (a, \lambda)^* := (a^*, \bar{\lambda}).$$

On munit A^+ de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|(a, \lambda)\|_{A^+} := \sup \left\{ \|ax + \lambda x\| \mid x \in A, \|x\| = 1 \right\},$$

ce qui confère à A^+ une structure de C^* -algèbre unifère avec $1_{A^+} := (0, 1)$.

Remarque 1.1.7. Soit X un espace localement compact. Alors $C_0(X)$ est une C^* -algèbre unifère si et seulement si X est compact.

Proposition 1.1.8 ([59], p. 73). Tout $*$ -homomorphisme injectif entre deux C^* -algèbres est une isométrie, c'est-à-dire conserve la norme.

Donnons quelques éléments particuliers d'une C^* -algèbre.

Définition 1.1.9. Soient A une C^* -algèbre et $a \in A$. On dit que :

- a est *hermitien* ou *auto-adjoint* si $a = a^*$;
- a est *normal* si $aa^* = a^*a$;
- a est *positif*, noté $a \geq 0$, s'il existe $b \in A$ tel que $a = b^*b$;
- dans le cas où A est unifère, a est *unitaire* si $aa^* = a^*a = 1_A$.

Une question naturelle est de savoir si un quotient d'une C^* -algèbre par un idéal fermé, est encore une C^* -algèbre. Pour répondre à cette question, on commence par définir la notion d'idéal d'une C^* -algèbre.

Définition 1.1.10. Soit A une C^* -algèbre. Un *idéal* dans A est un idéal bilatère fermé pour la norme.

Lorsqu'on travaille plus généralement avec des algèbres de Banach, la norme quotient sur A/I est définie pour tout $a \in A$ par :

$$\|a + I\|_{A/I} := \inf_{b \in I} \|a - b\|.$$

Elle munie bien A/I d'une structure d'algèbre de Banach. Lorsque A est une C^* -algèbre, cette même norme munie A/I d'une structure de C^* -algèbre. Il faut pour cela vérifier l'identité stellaire, on introduit par conséquent la notion d'approximation de l'unité.

Définition 1.1.11. • Un *ensemble filtrant* est un ensemble ordonné (Λ, \geq) tel que pour tout $(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2$, il existe $\lambda'' \in \Lambda$ tel que $\lambda'' \geq \lambda$ et $\lambda'' \geq \lambda'$.

- Une *suite généralisée* $u = (u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ à valeurs dans X est une fonction $u : \Lambda \rightarrow X; \lambda \mapsto u_\lambda$.

- Soient (Λ, \geq) un ensemble filtrant, X un espace topologique, $u = (u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une suite généralisée à valeurs dans X et $x \in X$. On dira que la suite généralisée $u = (u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers x , noté $u_\lambda \rightarrow x$, si pour tout voisinage ouvert $V \subseteq X$ de x , il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$, on a $u_\lambda \in V$. On note alors $x = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$ et x est appelé *limite généralisée* de $u = (u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Définition 1.1.12. Soit A une C^* -algèbre. Une *approximation de l'unité* pour A est une suite généralisée $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ à valeurs dans A telle que :

- $u_\lambda \geq 0$ et $\|u_\lambda\| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$;
- $\lim_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda a - a\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a u_\lambda - a\| = 0$ pour tout $a \in A$.

Le théorème suivant est un résultat fondamental sur l'existence des approximations de l'unité. Il permettra de travailler avec des C^* -algèbres qui ne sont pas forcément unifères.

Théorème 1.1.13 ([59] p. 98). Soient A une C^* -algèbre et I un idéal bilatère dense dans A . Alors I possède une approximation de l'unité $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ formée d'éléments de I . De plus, si A est séparable, alors on peut choisir la famille $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dénombrable.

Dans le lemme suivant, on donne le lien entre la norme quotient et les approximations de l'unité.

Lemme 1.1.14. Soient A une C^* -algèbre et I un idéal bilatère fermé dans A . Soit $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une approximation de l'unité pour I . Alors pour tout $a \in A$,

$$\|a + I\|_{A/I} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - a u_\lambda\|.$$

Proposition 1.1.15 ([59] p. 101). Soient A une C^* -algèbre et I un idéal bilatère fermé de A . Alors l'algèbre involutive A/I munie de la norme $\|\cdot\|_{A/I}$ est une C^* -algèbre.

Un corollaire immédiat mais important en théorie des C^* -algèbres est le suivant :

Corollaire 1.1.16. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de C^* -algèbres. Alors $f(A)$ est fermé dans B .

Définition 1.1.17. Une *représentation d'une C^* -algèbre* A est un couple (π, H) où $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est un $*$ -homomorphisme et H un espace de Hilbert. On dit que π est :

- *non-dégénérée* si le sous-espace $\pi(A)(H) := \{\pi(a)(h) \mid a \in A, h \in H\}$ est dense dans H ;
- *fidèle* si π est injective ;
- *ample* si pour tout $a \in A$ non nul, l'opérateur $\pi(a)$ n'appartient pas à $k(H)$.

On énonce un résultat pratique permettant d'étendre une représentation d'un idéal.

Lemme 1.1.18. Soient I un idéal fermé d'une C^* -algèbre A et $\pi : I \rightarrow \mathcal{L}(H)$ une représentation non-dégénérée. Alors il existe une unique représentation $\bar{\pi} : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ qui prolonge la représentation π .

Démonstration. On définit $\bar{\pi}$ sur $\pi(I)(H)$ en posant pour tous $a \in A, j \in I$ et $v \in H$:

$$\bar{\pi}(a)(\pi(j)v) := \pi(aj)(v).$$

- $\bar{\pi}$ est bien définie car si $\pi(j_1)(v_1) = \pi(j_2)(v_2)$ avec $j_1, j_2 \in I$ et $v_1, v_2 \in H$, alors en notant $(u_\lambda)_\lambda$ une approximation de l'unité pour I , on obtient :

$$\begin{aligned} \pi(aj_1)(v_1) &= \lim_{\lambda} \pi(au_\lambda j_1)(v_1) = \lim_{\lambda} \pi(au_\lambda) \pi(j_1)(v_1) \\ &= \lim_{\lambda} \pi(au_\lambda) \pi(j_2)(v_2) = \lim_{\lambda} \pi(au_\lambda j_2)(v_2) \\ &= \pi(aj_2)(v_2). \end{aligned}$$

- On a de plus pour tous $a \in A, j \in I$ et $v \in H$:

$$\|\bar{\pi}(a)(\pi(j)v)\| \leq \|a\| \cdot \|\pi(j)v\|.$$

Ceci permet d'étendre $\bar{\pi}(a)$ en un élément de $\mathcal{L}(H)$.

- On vérifie alors que $\bar{\pi}$ est multiplicative et $\bar{\pi}(a^*) = \bar{\pi}(a)^*$. En effet, en notant $\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$ le produit scalaire sur H à valeurs dans \mathbb{C} , on a pour tous $a \in A, j_1, j_2 \in I$ et $v_1, v_2 \in H$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\pi}(a^*)\pi(j_1)v_1, \pi(j_2)v_2 \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \pi(a^*j_1)v_1, \pi(j_2)v_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \pi(j_2^*a^*j_1)v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \pi(j_1)v_1, \pi(a j_2)v_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \pi(j_1)v_1, \bar{\pi}(a)\pi(j_2)v_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \bar{\pi}(a)^*\pi(j_1)v_1, \pi(j_2)v_2 \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

L'extension obtenue $\bar{\pi}$ est évidemment unique. ■

Théorème 1.1.19 (Gelfand-Naimark, [7] p. 109). Soit A une C^* -algèbre. Alors il existe un espace de Hilbert H et une représentation fidèle non-dégénérée $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$.

Remarque 1.1.20. Si $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est une représentation fidèle non-dégénérée, alors on construit une représentation ample de A qui est encore fidèle et non-dégénérée en posant :

$$\pi^\infty : A \rightarrow \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}, H)), \quad \pi^\infty(a)((h_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (\pi(a)h_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

c'est-à-dire, en utilisant l'identification $\ell^2(\mathbb{N}, H) \simeq \ell^2(\mathbb{N}) \otimes H$, que $\pi^\infty = \text{id}_{\ell^2(\mathbb{N})} \otimes \pi$. Ainsi d'après le théorème 1.1.19, toute C^* -algèbre admet une représentation fidèle, non-dégénérée et ample.

Définition 1.1.21. Soit $(A_j)_{j \in J}$ une famille de C^* -algèbres. On définit la *somme directe* de cette famille de C^* -algèbres par :

$$\bigoplus_{j \in I} A_j := \left\{ (a_j)_{j \in J} \mid \forall j \in J, a_j \in A_j \text{ et } \lim_{j \rightarrow +\infty} \|a_j\| = 0 \right\},$$

où $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|a_j\| = 0$ signifie que $\forall \varepsilon > 0, \exists J' \subset J$ fini tel que $\forall j \in J \setminus J', \|a_j\| < \varepsilon$. L'involution est donnée par $((a_j)_{j \in J})^* := (a_j^*)_{j \in J}$ et la norme par $\|(a_j)_{j \in J}\| := \sup_{j \in J} \|a_j\|$ où $(a_j)_{j \in J} \in \bigoplus_{j \in I} A_j$.

Remarque 1.1.22. Si A est une C^* -algèbre de dimension finie, on peut montrer qu'il existe des entiers non nuls p et n_1, \dots, n_p tels que :

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

En particulier, une C^* -algèbre de dimension finie est unifiée.

La KK -théorie de Kasparov utilise la notion de module de Hilbert. Nous allons maintenant rappeler cette construction. On se réfère à [30],[56] ou encore [54] pour plus de détails et pour les démonstrations. Nous voulons généraliser la notion d'espace de Hilbert en remplaçant le corps des scalaires \mathbb{C} par une C^* -algèbre A quelconque.

Sauf mention contraire, on ne considèrera que des modules à droite.

Définition 1.1.23. Soit A une C^* -algèbre. Un A -module préhilbertien est un \mathbb{C} -espace vectoriel E qui est un A -module muni d'une application sesquilinéaire (antilinéaire en la première variable, linéaire en la seconde) $\langle -, - \rangle_A : E \times E \rightarrow A$, appelée produit scalaire à valeurs dans A , satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) $\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}, x \in E, a \in A$;
- (ii) $\langle x, ya \rangle_A = \langle x, y \rangle_A a$ pour tous $x, y \in E, a \in A$;
- (iii) $\langle x, y \rangle_A^* = \langle y, x \rangle_A$ pour tous $x, y \in E$;
- (iv) $\langle x, x \rangle_A \geq 0$ pour $x \in E$.

Donnons à présent l'analogue de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas d'un A -module préhilbertien.

Proposition 1.1.24 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, [54] p. 233). Soient $(A, \|\cdot\|)$ une C^* -algèbre et E un A -module préhilbertien. Alors pour tous $x, y \in E$:

$$\|\langle x, y \rangle_A\|^2 \leq \|\langle x, x \rangle_A\| \cdot \|\langle y, y \rangle_A\|.$$

Définition 1.1.25. Soient $(A, \|\cdot\|)$ une C^* -algèbre et E un A -module préhilbertien. On définit une norme sur E (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, voir [54] p. 234) en posant pour tout $x \in E$:

$$\|x\|_E := \|\langle x, x \rangle_A\|^{1/2}.$$

Un A -module de Hilbert est un A -module préhilbertien complet pour la norme $\|\cdot\|_E$.

Lorsque $A = \mathbb{C}$, on retrouve la définition d'espace préhilbertien et d'espace de Hilbert. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $\|\cdot\|$ pour faire référence soit à $\|\cdot\|_A$ soit à $\|\cdot\|_E$. Voici quelques exemples de module de Hilbert.

- Exemples 1.1.26.**
1. Toute C^* -algèbre A est un A -module de Hilbert pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle_A := a^*b$ où $a, b \in A$.
 2. Si I est un idéal à droite et fermé d'une C^* -algèbre A , alors I est un sous-module de A et donc un A -module de Hilbert.
 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors A^n est un A -module de Hilbert pour le produit scalaire $\langle a, b \rangle_A := \sum_{j=1}^n a_j^* b_j$ où $a = (a_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $b = (b_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont tous les deux dans A^n .
 4. On peut généraliser l'exemple précédent à une famille dénombrable $(E_j)_{j \in J}$ de A -modules de Hilbert. On pose $E = \bigoplus_{j \in J} E_j$ le sous-ensemble de $\prod_{j \in J} E_j$ formé des éléments $(x_j)_{j \in J}$ tels que la série $\sum_{j \in J} \langle x_j, x_j \rangle_A$ converge. Alors E muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle_A := \sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle_A$ où $x = (x_j)_{j \in J}$ et $y = (y_j)_{j \in J}$ sont dans E , est un A -module de Hilbert.
 5. Soit E un A -module de Hilbert. Le A module de Hilbert $\bigoplus_{j \in J} E$ sera noté $\ell^2(J, E)$.

On introduit à présent la notion de morphisme entre modules de Hilbert.

Définition 1.1.27. Soient A une C^* -algèbre et E, F deux A -modules de Hilbert. Une application $T : E \rightarrow F$ est un *morphisme de A -modules de Hilbert* s'il existe une application $S : F \rightarrow E$ telle que pour tous $x \in E, y \in F$:

$$\langle T(x), y \rangle_A = \langle x, S(y) \rangle_A.$$

L'application S est appelée *adjoint* de T . L'ensemble des morphismes de A -modules sera noté $\mathcal{L}_A(E, F)$. On dira aussi *opérateur adjoignable* pour morphisme de A -modules de Hilbert. Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}_A(E) = \mathcal{L}_A(E, E)$. Si H est un espace de Hilbert (c'est-à-dire un \mathbb{C} -module), on a alors $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H) = \mathcal{L}(H)$.

Définition 1.1.28. Soient A et B deux C^* -algèbres. Soit E un B -module de Hilbert. Une *représentation de A sur E* est la donnée d'un $*$ -homomorphisme $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(E)$. On dit que π est :

- *non-dégénérée* si le sous-espace $\pi(A)(E) := \{\pi(a)(\xi) \mid a \in A, \xi \in E\}$ est dense dans E ;
- *fidèle* si π est injective.

Définition 1.1.29. Soient A une C^* -algèbre et E un A -module de Hilbert. On définit l'orthogonal E_0^\perp d'une partie E_0 de E comme le sous-module fermé de E donné par :

$$E_0^\perp := \left\{ y \in E \mid \forall x \in E_0, \langle x, y \rangle_A = 0 \right\}.$$

Les opérateurs adjoignables possèdent de nombreuses propriétés.

Proposition 1.1.30 ([54] p. 240). Soit A une C^* -algèbre. Soient E et F deux A -modules de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$. Alors :

- (i) L'adjoint de T , noté T^* , est unique. Il vérifie $T^* \in \mathcal{L}_A(F, E)$ et $(T^*)^* = T$.
- (ii) T est \mathbb{C} -linéaire, A -linéaire et continu.
- (iii) $\|T\| = \|T^*\|$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.
- (iv) $\mathcal{L}_A(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace des applications linéaires continues de E dans F , vus comme espaces de Banach.
- (v) $\mathcal{L}_A(E)$ est une C^* -algèbre pour la norme d'opérateur.

Démonstration. On démontre par exemple la continuité du point (ii), le reste est immédiat. Montrons que $G_T := \{(x, T(x)) \mid x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$. Soit $S := \{(-T^*(y), y) \mid y \in F\}$. On a :

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) \in S^\perp &\iff \forall y \in F, \langle x_0, -T^*(y) \rangle_A + \langle y_0, y \rangle_A = 0 \\ &\iff \forall y \in F, \langle y_0 - T(x_0), y \rangle_A = 0 \\ &\iff (x_0, y_0) \in G_T. \end{aligned}$$

Comme l'orthogonal d'un sous-espace est fermé, alors G_T est fermé donc d'après le théorème du graphe fermé dans les espaces de Banach, T est une application continue. ■

Remarque 1.1.31. Une application linéaire continue et A -linéaire n'admet pas forcément d'adjoint. En effet, prenons $A = C([0; 1])$ et $J = C_0([0; 1])$ qui est un idéal fermé et donc un A -module de Hilbert. Soit $T : J \rightarrow A$ l'inclusion. Si T était adjoignable alors $\langle 1_A, f \rangle_A = \langle T^*(1_A), f \rangle_A$ pour tout $f \in J$ c'est-à-dire $T^*(1_A)f = f$ pour tout $f \in J$ donc $T^*(1_A) = 1_A$ ce qui est absurde puisque $1_A \notin J$. Donc T n'admet pas d'adjoint.

Définition 1.1.32 (Isométrie et unitaire). Soit A une C^* -algèbre. Soient E, F deux A -modules de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$. On dit que :

- T est une *isométrie* si $T^* \circ T = \text{id}_E$.
- T est un *unitaire* si $T^* \circ T = \text{id}_E$ et $T \circ T^* = \text{id}_F$.

On peut caractériser les éléments auto-adjoints et les éléments positifs de la C^* -algèbre $\mathcal{L}_A(E)$:

Proposition 1.1.33. Soit $T \in \mathcal{L}_A(E)$

- (i) $T = T^* \iff \forall x \in E, \langle x, T(x) \rangle_A$ est auto-adjoint dans A .
- (ii) $T \geq 0 \iff \forall x \in E, \langle x, T(x) \rangle_A \geq 0$ dans A .

Définition 1.1.34. Soient E et F deux A -modules de Hilbert. Pour tous $x \in F, y \in E$, on considère l'application $\theta_{x,y} : E \rightarrow F$ définie par :

$$\forall z \in E, \theta_{x,y}(z) := x \langle y, z \rangle_A.$$

Proposition 1.1.35. Soient $x \in F$ et $y \in E$:

- (i) $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}_A(E, F)$ et $(\theta_{x,y})^* = \theta_{y,x}$.
- (ii) Pour tous $T \in \mathcal{L}_A(F)$ et $S \in \mathcal{L}_A(E)$ on a $T \circ \theta_{x,y} = \theta_{T(x),y}$ et $\theta_{x,y} \circ S = \theta_{x,S^*(y)}$.

On définit l'ensemble des opérateurs compacts de E vers F , que l'on note $k_A(E, F) \subseteq \mathcal{L}_A(E, F)$, comme étant la fermeture dans $\mathcal{L}_A(E, F)$ de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $\theta_{x,y}$ avec $x \in F, y \in E$. Lorsque $E = F$, on note $k_A(E) := k_A(E, E)$. Ainsi, $k_A(E)$ est un $*$ -idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}_A(E)$.

Définition 1.1.36. Soit A une C^* -algèbre. L'algèbre des multiplicateurs de A , notée $M(A)$, est la C^* -algèbre unifère :

$$M(A) := \mathcal{L}_A(A),$$

où A est vu comme un A -module de Hilbert.

Exemples 1.1.37. 1. Si A est unifère, alors $M(A) \simeq A$.

2. Soit X un espace localement compact. Si $A = C_0(X)$, alors $M(C_0(X)) \simeq C_b(X)$ où $C_b(X)$ désigne la C^* -algèbre des fonctions bornées de X à valeurs complexes.

Proposition 1.1.38 ([7] p. 146). Soit A une C^* -algèbre. Alors $k_A(A) \simeq A$. Plus généralement, Si E est un A -module, alors :

$$M(k_A(E)) \simeq \mathcal{L}_A(E).$$

Produit tensoriel de modules de Hilbert. Soient A et B deux C^* -algèbres. On considère E un B -module de Hilbert, F un A -module de Hilbert et $\pi : B \rightarrow \mathcal{L}_A(F)$ un $*$ -homomorphisme. On peut munir F d'une structure de B -module à gauche en posant $by := \pi(b)(y)$ pour tous $b \in B, y \in F$. Ainsi, on peut munir le produit tensoriel algébrique $E \odot F$ d'un produit scalaire à valeurs dans A en posant pour tous $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$:

$$\langle x \odot y, x' \odot y' \rangle_A := \langle y, \pi(\langle x, x' \rangle_B) y' \rangle_A.$$

Considérons l'ensemble $N := \{u \in E \odot F \mid \langle u, u \rangle_A = 0\}$. C'est un sous-module de $E \odot F$. Le produit tensoriel des modules de Hilbert E et F , noté $E \otimes_B F$ ou encore $E \otimes_\pi F$, est la complétion du quotient de $E \odot F$ par N pour la norme $\|u\| := \|\langle u, u \rangle_A\|^{1/2}$. Le produit tensoriel $E \otimes_B F$ est un A -module de Hilbert et l'action à droite est donnée pour tous $e \in E, f \in F$ et $a \in A$ par :

$$(e \otimes f) \cdot a := e \otimes (fa).$$

1.2 Introduction aux groupoïdes

Dans cette partie, nous allons introduire la notion de groupoïde et énoncer les propriétés et constructions qui y sont associées, en particulier pour les groupoïdes étales. Nous terminerons cette partie par la construction de la C^* -algèbre réduite d'un groupoïde dans le cas étale puis dans le cas général.

1.2.1 Définitions et premières propriétés

On se réfère à [34] et [38] pour les définitions et propriétés qui vont suivre. Les groupoïdes généralisent la notion de groupe et d'espace. C'est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

On notera X pour définir les objets et \mathcal{G} pour définir les morphismes. Donnons à présent une définition précise :

Définition 1.2.1. On appelle *groupoïde* \mathcal{G} de base X la donnée d'un couple d'ensembles $(\mathcal{G}^{(1)}, X)$ tel que :

- 1) Il existe deux applications $s, r : \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow X$ surjectives, respectivement applications source et but ;
- 2) Il existe une application produit $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}^{(1)}$, $(\gamma, \gamma') \mapsto \gamma\gamma'$ où $\mathcal{G}^{(2)}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{G}^{(1)} \times \mathcal{G}^{(1)}$ défini par $\mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G}^{(1)} \times \mathcal{G}^{(1)} \mid s(\gamma) = r(\eta)\}$;

3) Il existe une application unité $u : X \rightarrow \mathcal{G}^{(1)}$, $x \mapsto 1_x$ vérifiant $s(1_x) = r(1_x) = x$ et une application inverse $i : \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}^{(1)}$, $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ vérifiant les relations :

- (a) $r(\gamma\gamma') = r(\gamma)$, $s(\gamma\gamma') = s(\gamma')$ pour tout $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^{(2)}$ et l'application m est associative,
- (b) $\gamma 1_{s(\gamma)} = 1_{r(\gamma)} \gamma = \gamma$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}^{(1)}$,
- (c) $\gamma\gamma^{-1} = 1_{r(\gamma)}$ et $\gamma^{-1}\gamma = 1_{s(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}^{(1)}$.

Remarque 1.2.2. On oubliera la fonction u en considérant X comme un sous-ensemble de \mathcal{G} et on notera parfois $s(\gamma)$ (resp. $r(\gamma)$) à la place de $1_{s(\gamma)}$ (resp. $1_{r(\gamma)}$). Pour alléger les formules, on a noté ci-dessus $\gamma\eta$ à la place de $m(\gamma, \eta)$.

Dans la suite, on ne considérera que des groupoïdes topologiques séparés c'est-à-dire des groupoïdes $(\mathcal{G}^{(1)}, X)$ pour lesquels les espaces $\mathcal{G}^{(1)}$ et X sont munis de topologies, séparés pour ces topologies et tels que les applications r, s, m, u et i sont continues. Par abus de notation, on notera juste \mathcal{G} pour faire référence à $\mathcal{G}^{(1)}$ et donc (\mathcal{G}, X) pour faire référence au groupoïde \mathcal{G} de base X . La base de \mathcal{G} sera parfois notée $\mathcal{G}^{(0)}$.

Si $U, V \subseteq X$, on pose $\mathcal{G}_U := s^{-1}(U)$, $\mathcal{G}^V := r^{-1}(V)$ et $\mathcal{G}_U^V := \mathcal{G}_U \cap \mathcal{G}^V$. On notera $\mathcal{G}_x := \mathcal{G}_{\{x\}}$ appelé s -fibre, $\mathcal{G}^x := \mathcal{G}^{\{x\}}$ appelé r -fibre pour tout $x \in X$ et $\mathcal{G}_x^y = \mathcal{G}_x \cap \mathcal{G}^y$ pour tous x et y dans X .

Définition 1.2.3. Un *groupoïde localement compact* est un groupoïde topologique pour lequel l'espace $\mathcal{G}^{(1)}$ est localement compact. Un tel groupoïde est σ -compact si l'espace topologique $\mathcal{G}^{(1)}$ est σ -compact.

Sauf mention contraire, tous les groupoïdes que nous rencontrerons dans cette thèse seront supposés localement compacts et σ -compacts.

Définition 1.2.4 (Morphisme de groupoïdes). Soient (\mathcal{G}, X) et (\mathcal{G}', X') deux groupoïdes d'applications sources et buts notées respectivement s, r et s', r' . On dit que $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ est un *morphisme de groupoïdes* s'il existe une application $\Phi^{(0)} : X \rightarrow X'$ telle que :

- (i) $s' \circ \Phi = \Phi^{(0)} \circ s$ et $r' \circ \Phi = \Phi^{(0)} \circ r$, en particulier, l'image d'une paire composable est composable.
- (ii) Pour tout $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G}^{(2)}$, on a $\Phi(\gamma\eta) = \Phi(\gamma)\Phi(\eta)$.

On dira qu'un morphisme de groupoïdes Φ est *continu* si Φ est continu en tant qu'application entre \mathcal{G} et \mathcal{G}' .

Il existe une classe de groupoïdes qui nous intéressera tout particulièrement puisqu'elle généralise celle des groupes discrets :

Définition 1.2.5. (Groupoïde étale) Un groupoïde *étale* est un groupoïde localement compact pour lequel l'application s est un homéomorphisme local. Ceci signifie que tout élément $\gamma \in \mathcal{G}$ possède un voisinage ouvert $U \subseteq \mathcal{G}$ tel que $s(U)$ est ouvert dans X et l'application $s|_U : U \rightarrow s(U)$ est un homéomorphisme.

Remarque 1.2.6. Comme l'application inverse est un homéomorphisme et que $r = s \circ i$, alors \mathcal{G} est étale si et seulement si r est un homéomorphisme local.

Exemple 1.2.7. (Pull-back) Soient M un espace topologique et (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Soit $\varphi : M \rightarrow X$ une application continue. Considérons l'espace :

$$\varphi^*\mathcal{G} := \left\{ (m, \gamma, m') \in M \times \mathcal{G} \times M \mid \gamma \in \mathcal{G}_{\varphi(m)}^{\varphi(m')} \right\}.$$

On obtient alors un groupoïde topologique $\varphi^*\mathcal{G}$ de base M en posant :

$$\tilde{s}(m, \gamma, m') := m', \quad \tilde{r}(m, \gamma, m') := m, \quad (m, \gamma, m')^{-1} := (m', \gamma^{-1}, m), \quad \tilde{u}(m) := (m, 1_{\varphi(m)}, m).$$

Le produit est défini par $(m, \gamma, m')(m', \gamma', m'') := (m, \gamma\gamma', m'')$. L'application $\Phi : \varphi^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ donnée par $\Phi(m, \gamma, m') := \gamma$ est un morphisme de groupoïdes avec $\Phi^{(0)} := \varphi$.

Lemme 1.2.8. Soit (\mathcal{G}, X) est un groupoïde topologique. Si \mathcal{G} est séparé, alors X est fermé dans \mathcal{G} et $\mathcal{G}^{(2)}$ est fermé dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Si \mathcal{G} est σ -compact, alors X est σ -compact.

Démonstration. • Puisque \mathcal{G} est séparé, la diagonale $\Delta_{\mathcal{G}} := \{(\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathcal{G}\}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Puisque l'application $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}$; $f(\gamma) = (\gamma, s(\gamma))$ est continue, alors $X = f^{-1}(\Delta_{\mathcal{G}})$ est fermé.

- On a $\mathcal{G}^{(2)} = (r \times s)^{-1}(\Delta_{\mathcal{G}})$ donc $\mathcal{G}^{(2)}$ est fermé dans $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.
- Si (\mathcal{G}, X) est σ -compact alors \mathcal{G} s'écrit $\mathcal{G} = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ avec $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces compacts de \mathcal{G} . Comme $r : \mathcal{G} \rightarrow X$ est continue et surjective et que X est séparé alors $(r(K_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces compacts de X telle que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} r(K_n)$, donc X est σ -compact. ■

Lemme 1.2.9. Soit (\mathcal{G}, X) est un groupoïde étale.

- (i) La base X est ouverte dans \mathcal{G} .
- (ii) Pour tout $x \in X$, les fibres \mathcal{G}_x et \mathcal{G}^x sont discrètes.

Démonstration. (i) Un homéomorphisme local est une application ouverte, donc $X = s(\mathcal{G})$ est ouvert dans \mathcal{G} .

- (ii) Soit $x \in X$. Soient $\gamma \in \mathcal{G}^x$ et U un voisinage ouvert de γ dans \mathcal{G} tel que r soit un homéomorphisme sur U . Par injectivité de r sur U on obtient $U \cap \mathcal{G}^x = \{\gamma\}$ c'est-à-dire que $\{\gamma\}$ est un ouvert de \mathcal{G}^x . Tous les singletons sont donc ouverts et ainsi \mathcal{G}^x est un espace discret. ■

Définition 1.2.10. (Bisections, [2] p. 10) Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Une *bisection ouverte* est un sous-ensemble ouvert $U \subseteq \mathcal{G}$ tel que les applications s et r sont des homéomorphismes de U sur des ouverts de X respectivement. L'ensemble des bisections ouvertes est noté \mathcal{G}^{op} .

Définition 1.2.11. On dit qu'un groupoïde localement compact \mathcal{G} est *ample* si l'ensemble :

$$\mathcal{G}^a := \{A \in \mathcal{G}^{\text{op}} \mid A \text{ est compact}\}$$

forme une base pour la topologie de \mathcal{G} .

Exemple 1.2.12. Un espace topologique discret M est un groupoïde ample. En effet, M^a est l'ensemble des singletons de M qui constitue donc une base pour la topologie de M .

Remarque 1.2.13. Tout groupoïde ample est étale.

Définition 1.2.14. On dit qu'un espace topologique X est *totalemment discontinu* si les seules composantes connexes de X sont les singletons.

Lemme 1.2.15 ([46] p. 21). Soit X un espace topologique localement compact et totalement discontinu. Alors les ensembles compacts-ouverts forment une base pour la topologie de X c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et tout voisinage $U \subseteq X$ de x , il existe un compact-ouvert $V \subseteq X$ tel que $x \in V \subseteq U$.

On donne une caractérisation des groupoïdes amples :

Proposition 1.2.16 ([18] p. 8). Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale. Alors :

$$\mathcal{G} \text{ est ample} \iff X \text{ est totalement discontinu.}$$

Définition 1.2.17 (Sous-groupoïde). Soit \mathcal{G} un groupoïde. Un sous-ensemble $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ est un *sous-groupoïde* de \mathcal{G} s'il est stable par produit et inversion, c'est-à-dire que :

- pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathcal{H}$ tel que $r(\gamma') = s(\gamma)$ on a $\gamma\gamma' \in \mathcal{H}$;

- si $\gamma \in \mathcal{H}$, alors $\gamma^{-1} \in \mathcal{H}$.

Ainsi, la restriction des applications r, s, m, u et i à \mathcal{H} définit une structure de groupoïde sur \mathcal{H} avec $\mathcal{H}^{(0)} := s(\mathcal{H}) = r(\mathcal{H})$.

On dit qu'un sous-groupoïde \mathcal{H} de \mathcal{G} est *ouvert* (resp. *fermé*) dans \mathcal{G} si \mathcal{H} est ouvert (resp. fermé) dans \mathcal{G} en tant qu'espace topologique et si $\mathcal{H}^{(0)}$ est ouvert (resp. fermé) dans $\mathcal{G}^{(0)}$.

Remarque 1.2.18. Tout sous-groupoïde ouvert d'un groupoïde étale est encore étale.

Lemme 1.2.19. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale à base dénombrable. Alors \mathcal{G} admet une base dénombrable formée de bissections.

Démonstration. Comme \mathcal{G} est à base dénombrable, il est séparable. Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense de \mathcal{G} . Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère deux bases dénombrables de voisinages de γ_n notées $(U_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ et $(V_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $r|_{U_{n,i}}$ et $s|_{V_{n,i}}$ sont des homéomorphismes sur des ouverts de X . Ainsi, en posant $W = \{U_{n,i} \cap V_{n,i} \mid (n,i) \in \mathbb{N}^2\}$, on obtient une base dénombrable formée de bissections. ■

L'ensemble des bissections forme un semi-groupe inverse¹ pour la loi de composition :

$$UV = \{uv \mid (u,v) \in (U \times V) \cap \mathcal{G}^{(2)}\}, \quad \forall U, V \in \mathcal{G}^{\text{op}}.$$

L'élément neutre est X et l'inverse d'un élément $U \in \mathcal{G}^{\text{op}}$ est donné par $U^{-1} := i(U)$ (voir [34] pour plus de détails). On montre que \mathcal{G}^a est un sous semi-groupe inverse de \mathcal{G}^{op} . On énonce maintenant une caractérisation des groupoïdes étales.

Proposition 1.2.20 ([38] p. 19). Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (\mathcal{G}, X) est étale.
- L'application produit $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ est un homéomorphisme local.
- \mathcal{G}^{op} contient une base pour la topologie de \mathcal{G} .

Nous terminons ces rappels par une liste d'exemples classiques de groupoïdes.

Exemples 1.2.21. 1. Un groupe topologique G est un groupoïde topologique de base $\{1_G\}$ avec $s = r = (g \mapsto 1_G)$. De plus, G est étale en tant que groupoïde si et seulement si G est discret et dans ce cas, une bissection est un singleton et donc $G^{\text{op}} = \{\{g\} \mid g \in G\}$.

2. Une union disjointe de groupes $\bigsqcup_{i \in I} G_i$ est un groupoïde de base $\{1_{G_i} \mid i \in I\}$.

3. Un espace topologique M est un groupoïde topologique de base M avec $s = r = \text{id}_M$. C'est donc un groupoïde étale. Une bissection ouverte est ici n'importe quel ouvert de M .

4. Si X est un espace topologique, alors $X \times X$ est un groupoïde de base X avec $s(x, y) = y$ et $r(x, y) = x$. On l'appelle le *groupoïde des paires*.

5. Soient X un espace topologique et G un groupe topologique agissant à droite sur X . Alors l'espace $X \times G$ est un groupoïde topologique de base X où $s(x, g) = xg$ et $r(x, g) = x$. Le produit est défini par $(x, g)(xg, g') := (x, gg')$. De plus, si G est discret, alors $X \times G$ est étale.

6. Si dans l'exemple précédent, G est discret et X est totalement discontinu, alors $X \times G$ est ample. En effet, $X \times G$ est alors un groupoïde étale dont la base X est totalement discontinue donc d'après la proposition 1.2.16, c'est un groupoïde ample.

1. On dit que S est un semi-groupe inverse si S est un semi-groupe et si pour tout $s \in S$, il existe un unique élément $s^* \in S$ (appelé l'inverse de s) tel que $s = ss^*s$ et $s^* = s^*ss^*$.

7. Soient M un ensemble et \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur M . Posons :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} := \left\{ (x, y) \in M \times M \mid x\mathcal{R}y \right\}.$$

Alors $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ est un groupoïde de base M . Les applications s et r sont définies par $s(x, y) := y$ et $r(x, y) := x$ et la multiplication est donnée par $(x, y)(y, z) := (x, z)$ pour tous (x, y) et (y, z) dans $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$. Les applications inverse et unité sont données par $i(x, y) := (y, x)$ et $u(x) := (x, x)$. Le groupoïde $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ est en fait un sous-groupoïde du groupoïde des paires $(M \times M, M)$.

1.2.2 C^* -algèbre d'un groupoïde

Dans cette partie, nous allons construire une C^* -algèbre qui va « retenir » la structure de groupoïde. Pour ce faire, on procède comme dans le cas d'un groupe.

Le cas d'un groupoïde étale

On commence par faire cette construction avec (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale en définissant l'algèbre de convolution sur \mathcal{G} .

Définition 1.2.22. L'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ à support compact muni du produit de convolution donné pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(f \star g)(\gamma) := \sum_{\gamma_1 \in \mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma_1)g(\gamma_1^{-1}\gamma) \quad (1.1)$$

et de l'involution définie par $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$. Ces opérations confèrent à $C_c(\mathcal{G})$ une structure d'algèbre involutive.

Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, la fibre $\mathcal{G}^{r(\gamma)}$ étant discrète et les fonctions f, g étant à supports compacts, on déduit que $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap \text{supp}(f)$ est fini et la somme dans la formule (1.1) est donc finie. De plus, $f \star g \in C_c(\mathcal{G})$. Ce produit est associatif et on montre que pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(f + \lambda g)^* = f^* + \bar{\lambda}g^*, \quad (f \star g)^* = g^* \star f^* \quad \text{et} \quad (f^*)^* = f.$$

L'algèbre $C_c(\mathcal{G})$ est naturellement munie d'une structure de $C_0(X)$ -module (à droite) définie pour tous $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\varphi \in C_0(X)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(f \cdot \varphi)(\gamma) := f(\gamma)\varphi(s(\gamma)).$$

On peut munir $C_c(\mathcal{G})$ d'un produit scalaire à valeurs dans $C_0(X)$ en posant pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ et $x \in X$:

$$\langle f, g \rangle_{C_0(X)}(x) := \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \overline{f(\gamma^{-1})}g(\gamma^{-1}).$$

On vérifie que $\langle f, g \rangle_{C_0(X)} \in C_0(X)$ et $\langle f, g \cdot \varphi \rangle_{C_0(X)} = \langle f, g \rangle_{C_0(X)}\varphi$ pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ et $\varphi \in C_0(X)$ ce qui confère à $C_c(\mathcal{G})$ une structure de $C_0(X)$ -module préhilbertien.

Définition 1.2.23. On note $L^2(\mathcal{G})$ le $C_0(X)$ -module de Hilbert qui est le complété de $C_c(\mathcal{G})$ pour la norme induite par le produit scalaire, définie pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$ par :

$$\|f\|_{C_c(\mathcal{G})}^2 = \|\langle f, f \rangle_{C_0(X)}\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} |f(\gamma^{-1})|^2.$$

L'application $\lambda : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}))$ définie pour tous $f, \xi \in C_c(\mathcal{G})$ par :

$$(\lambda(f))(\xi) := f \star \xi$$

est alors un $*$ -homomorphisme. Vérifions par exemple que $\lambda(f^*) = \lambda(f)^*$ pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$. Soient $f, \xi_1, \xi_2 \in C_c(\mathcal{G})$ et $x \in X$. On a :

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda(f)(\xi_1), \xi_2 \rangle_{C_0(X)}(x) &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \overline{(f \star \xi_1)(\gamma^{-1})} \xi_2(\gamma^{-1}) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \sum_{\gamma_1 \in \mathcal{G}^{s(\gamma)}} \overline{f(\gamma_1)} \overline{\xi_1(\gamma_1^{-1} \gamma^{-1})} \xi_2(\gamma^{-1}) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^x} \overline{f(\gamma^{-1} \eta)} \overline{\xi_1(\eta^{-1})} \xi_2(\gamma^{-1}) \quad (\eta = \gamma \gamma_1) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^x} \overline{f(\eta^{-1} \gamma)} \overline{\xi_1(\gamma^{-1})} \xi_2(\eta^{-1}) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \sum_{\gamma_1 \in \mathcal{G}^{s(\gamma)}} \overline{f(\gamma_1^{-1})} \overline{\xi_1(\gamma^{-1})} \xi_2(\gamma_1^{-1} \gamma^{-1}) \quad (\gamma_1 = \gamma^{-1} \eta) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \overline{\xi_1(\gamma^{-1})} \sum_{\gamma_1 \in \mathcal{G}^{s(\gamma)}} f^*(\gamma_1) \xi_2(\gamma_1^{-1} \gamma^{-1}) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \overline{\xi_1(\gamma^{-1})} (f^* \star \xi_2)(\gamma^{-1}) \\
 &= \langle \xi_1, \lambda(f^*)(\xi_2) \rangle_{C_0(X)}(x)
 \end{aligned}$$

Définition 1.2.24. (C^* -algèbre réduite) La C^* -algèbre réduite du groupoïde étale (\mathcal{G}, X) , notée $C_r^*(\mathcal{G})$, est le complété de l'espace $C_c(\mathcal{G})$ pour la norme $\|\lambda(\cdot)\|_{\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}))}$.

Cas général

Lorsque le groupoïde localement compact n'est pas étale, les fibres ne sont pas forcément discrètes mais elle sont localement compactes. On va définir des mesures sur les fibres et la notion de système de Haar. Le produit de convolution sera défini en intégrant par rapport à ce système. Plus précisément :

Définition 1.2.25. (**Système de Haar**) Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Un système de Haar λ sur \mathcal{G} est une collection $\{\lambda^x \mid x \in X\}$ de mesures de Radon positives sur \mathcal{G} vérifiant :

- 1) pour tout $x \in X$, le support de λ^x est inclus dans \mathcal{G}^x ;
- 2) pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$, l'application $X \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$ est continue ;
- 3) pour tous $\gamma \in \mathcal{G}$ et $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\int_{\mathcal{G}^{s(\gamma)}} f(\gamma \gamma') d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') = \int_{\mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma') d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$.

Remarque 1.2.26. (a) Contrairement aux groupes localement compacts, un système de Haar sur un groupoïde n'existe pas nécessairement, et si c'est le cas, il n'est pas forcément unique.

- (b) Pour tout $x \in X$, on a $(\mathcal{G}^x)^{-1} = \mathcal{G}_x$ et l'application $\gamma \in \mathcal{G} \mapsto \gamma^{-1}$ est un homéomorphisme de \mathcal{G} sur \mathcal{G} , on peut donc associer à la famille $\{\lambda^x \mid x \in X\}$ une nouvelle famille $\{\lambda_x \mid x \in X\}$ définie pour tous $x \in X$ et $A \subseteq \mathcal{G}_x$ borélien par $\lambda_x(A) := \lambda^x(A^{-1})$. On obtient ainsi la formule :

$$\int_{\mathcal{G}_x} f(\gamma) d\lambda_x(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma).$$

Donnons plusieurs exemples de systèmes de Haar pour certaines classes de groupoïdes.

Exemples 1.2.27. 1. Lorsque \mathcal{G} est étale, un système de Haar naturel est la mesure de comptage sur les fibres c'est-à-dire que l'on pose $\lambda^x(U) = \text{Card}(U \cap \mathcal{G}^x)$ pour tous $U \subseteq \mathcal{G}^{\text{op}}$ et $x \in X$.

2. Si G est un groupe localement compact, alors le groupoïde $(G, \{1_G\})$ admet, à constante près, un unique système de Haar $\{\lambda_G\}$ où λ_G est la mesure de Haar du groupe G .

3. Si X est un espace localement compact, alors un système de Haar associé au groupoïde (X, X) est donné par $\{\delta_x \mid x \in X\}$ où δ_x désigne la mesure de Dirac en x .
4. Soient X un espace localement compact et G est un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar λ_G agissant continûment à droite sur X . Alors la famille $\{\delta_x \times \lambda_G \mid x \in X\}$ forme un système de Haar pour le groupoïde $(X \times G, X)$.

Nous énonçons à présent un résultat de topologie bien connu : le lemme d'Urysohn. Il nous servira à de nombreuses reprises dans cette thèse.

Lemme 1.2.28. (Lemme d'Urysohn, [43] p. 39) Soient Z un espace localement compact, V un ouvert de Z et K un compact de V . Alors il existe une fonction continue à support compact $f : Z \rightarrow [0; 1]$ telle que $f|_K = 1$ et $\text{supp}(f) \subseteq V$.

Corollaire 1.2.29. Soient Z un espace localement compact, K et L deux compacts disjoints de Z . Alors il existe une fonction continue à support compact $f : Z \rightarrow [0; 1]$ telle que $f|_K = 1$ et $f|_L = 0$.

Démonstration. On applique le lemme 1.2.28 avec l'ouvert $V = Z \setminus L$ qui contient K . ■

Lemme 1.2.30. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar que l'on note $\{\lambda^x \mid x \in X\}$ et $K \subseteq \mathcal{G}$ un compact. Alors l'ensemble $\{\lambda^x(K) \mid x \in X\}$ est borné.

Démonstration. D'après le lemme 1.2.28, il existe $f \in C_c(\mathcal{G})$ telle que $0 \leq f \leq 1$ et $f|_K = 1$. On a donc pour tout $x \in X$:

$$\int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) = \int_{K \cap \mathcal{G}^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) + \underbrace{\int_{(\mathcal{G} \setminus K) \cap \mathcal{G}^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)}_{\geq 0} \geq \int_{K \cap \mathcal{G}^x} d\lambda^x(\gamma) = \lambda^x(K).$$

Or l'application $x \mapsto \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$ est continue à support compact, donc $\{\lambda^x(K) \mid x \in X\}$ est borné. ■

Dans la suite, (\mathcal{G}, X) sera un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar que l'on notera $\lambda = \{\lambda^x \mid x \in X\}$.

Définition 1.2.31. On munit $C_c(\mathcal{G})$ d'un produit de convolution est d'une involution en posant pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$(f \star g)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma_1) g(\gamma_1^{-1} \gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma_1) \quad \text{et} \quad f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

La structure d'algèbre involutive obtenue sur $C_c(\mathcal{G})$ dépend donc du choix du système de Haar, mais s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $C_c(\mathcal{G})$ plutôt que $C_c(\mathcal{G}, \lambda)$. L'algèbre $C_c(\mathcal{G})$ est également munie d'une structure de $C_0(X)$ -module à droite donnée pour tous $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\varphi \in C_0(X)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(f \cdot \varphi)(\gamma) := f(\gamma) \varphi(s(\gamma)).$$

On munit $C_c(\mathcal{G})$ d'un produit scalaire à valeurs dans $C_0(X)$ en posant pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ et $x \in X$:

$$\langle f, g \rangle_{C_0(X)}(x) := \int_{\mathcal{G}^x} \overline{f(\gamma^{-1})} g(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma)$$

vérifiant $\langle f, g \cdot \varphi \rangle_{C_0(X)} = \langle f, g \rangle_{C_0(X)} \varphi$ pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G})$, $\varphi \in C_0(X)$ et $x \in X$ ce qui confère à $C_c(\mathcal{G})$ une structure de $C_0(X)$ -module préhilbertien.

Définition 1.2.32 (Module standard). On note $L^2(\mathcal{G}, \lambda)$ ou simplement $L^2(\mathcal{G})$, le $C_0(X)$ -module de Hilbert qui est le complété séparé de $C_c(\mathcal{G})$ pour la norme induite par le produit scalaire, définie par :

$$\|f\|_{C_c(\mathcal{G})}^2 = \|\langle f, f \rangle_{C_0(X)}\|_\infty = \sup_{x \in X} \int_{\mathcal{G}^x} |f(\gamma^{-1})|^2 d\lambda^x(\gamma).$$

Le $C_0(X)$ -module de Hilbert $L^2(\mathcal{G})$ est appelé le *module standard*.

De la même manière que dans le cas étale, l'application $\lambda : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}))$ définie pour tout $f, \xi \in C_c(\mathcal{G})$ par :

$$(\lambda(f))(\xi) := f \star \xi$$

est un $*$ -homomorphisme.

Définition 1.2.33. La C^* -algèbre réduite du groupoïde localement compact (\mathcal{G}, X) , notée $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)$ ou simplement $C_r^*(\mathcal{G})$, est le complété séparé de $C_c(\mathcal{G})$ pour la norme $\|\lambda(\cdot)\|_{\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \lambda))}$.

Exemple 1.2.34. (C^* -algèbre réduite du groupoïde des paires) Soient X un espace localement compact et μ une mesure borélienne sur X . Notons \mathcal{G} le groupoïde des paires $(X \times X, X)$. Alors on a l'isomorphisme suivant :

$$C_r^*(\mathcal{G}) \simeq k(L^2(X, \mu)).$$

Remarque 1.2.35. On peut définir la C^* -algèbre réduite d'une manière différente. Soit $x \in X$, on considère l'application $\pi_x : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}_x))$ définie pour tous $f, \xi \in C_c(\mathcal{G})$ par :

$$(\pi_x(f))(\xi) := f \star \xi.$$

Alors π_x est une représentation de $C_c(\mathcal{G})$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{G}_x)$. La C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$ est la complétion de $C_c(\mathcal{G})$ pour la norme $\sup_{x \in X} \|\pi_x(\cdot)\|$.

1.3 Action de groupoïdes

Cette partie est consacrée à l'étude des actions de groupoïdes sur les espaces, algèbres et modules de Hilbert.

1.3.1 Action sur les espaces

On commence par définir des actions de groupoïdes sur des espaces topologiques séparés. Contrairement aux cas des groupes, les groupoïdes agissent sur des objets qui « fibrent » au-dessus de leurs bases. L'application dite d'ancrage dans la définition suivante modélise ce concept.

Définition 1.3.1. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde topologique et Z un espace topologique séparé. Une *action à droite* de \mathcal{G} sur Z est la donnée d'une application continue $\rho : Z \rightarrow X$ et d'une application $\lambda : Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow Z$ continue avec $Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} := \{(z, \gamma) \in Z \times \mathcal{G} \mid \rho(z) = r(\gamma)\}$ telles que :

- (i) $\rho(\lambda(z, \gamma)) = s(\gamma)$ pour tout $(z, \gamma) \in Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$;
- (ii) $\lambda(z, 1_{\rho(z)}) = z$ pour tout $z \in Z$;
- (iii) $\lambda(\lambda(z, \gamma), \gamma') = \lambda(z, \gamma\gamma')$ pour tous $z \in Z$ et $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^{(2)}$ telles que $\rho(z) = r(\gamma)$.

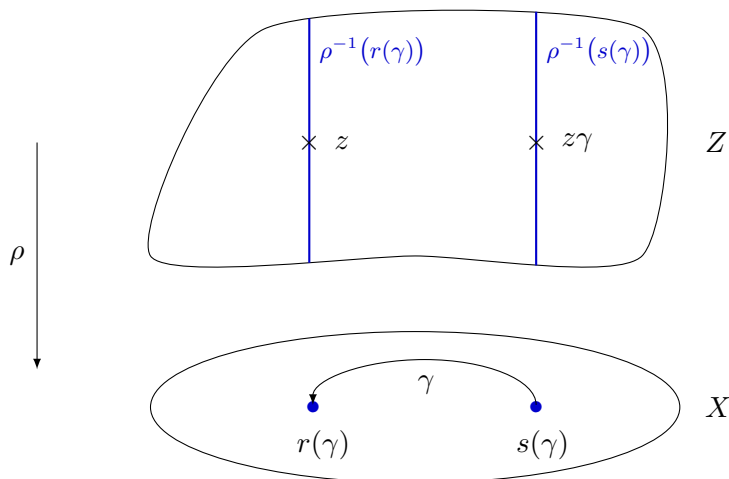
On dit alors que Z est un \mathcal{G} -espace à droite ou plus simplement un \mathcal{G} -espace. L'application ρ est parfois appelée *application d'ancrage*, ou *ancree de l'action* ou simplement *ancree*.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on utilisera la notation $z\gamma := \lambda(z, \gamma)$ et on notera (Z, ρ) ou même juste Z pour faire référence au \mathcal{G} -espace (Z, ρ, λ) .

Remarque 1.3.2. On peut définir de manière similaire des actions à gauche.

Exemples 1.3.3. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact.

1. \mathcal{G} agit sur lui-même à droite avec $\rho = s$ et λ est la multiplication à droite usuelle du groupoïde.
2. Soit \mathcal{H} un sous-groupoïde fermé de \mathcal{G} . Alors \mathcal{H} agit à droite sur $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$ avec $\rho = s|_Y$ et λ est la multiplication à droite du groupoïde \mathcal{G} .
3. \mathcal{G} agit à droite sur sa base X avec $\rho = \text{id}_X$ et $\lambda : (r(\gamma), \gamma) \in X \times_{\text{id}_X, r} \mathcal{G} \mapsto s(\gamma) \in X$.


 FIGURE 1.1 – Action d'un groupoïde (\mathcal{G}, X) sur un espace topologique Z .

4. Soit $P(\mathcal{G})$ l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes μ sur \mathcal{G} pour lesquelles il existe $x \in X$ tel que $\text{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{G}^x$. On peut dès lors construire une action (à gauche) de \mathcal{G} sur $P(\mathcal{G})$ avec pour application d'ancrage $\rho : P(\mathcal{G}) \rightarrow X$ l'application envoyant une mesure $\mu \in P(\mathcal{G})$ sur l'élément $x \in X$ tel que $\text{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{G}^x$. Soient $\mu \in P(\mathcal{G})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ tels que $x := \rho(\mu) = s(\gamma)$. On pose pour tout borélien $U \subseteq \mathcal{G}$:

$$(\gamma \cdot \mu)(U) := \mu(\gamma^{-1}U) \quad \text{avec} \quad \gamma^{-1}U := \{\gamma^{-1}\eta \mid \eta \in U \cap \mathcal{G}^{r(\gamma)}\}.$$

Exemple 1.3.4. (Groupoïde de transformation) Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact agissant à droite sur un espace topologique Z et d'ancrage $\rho : Z \rightarrow X$. Le *groupoïde produit croisé*, noté $Z \rtimes \mathcal{G}$, est défini de la manière suivante :

- $Z \rtimes \mathcal{G}^{(1)} := Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$ et $(Z \rtimes \mathcal{G})^{(0)} := Z$;
- l'application unité est définie par $\mathbf{u}(z) := (z, 1_{\rho(z)})$;
- les applications source et but sont définies par $\mathbf{s}(z, \gamma) := z\gamma$ et $\mathbf{r}(z, \gamma) := z$;
- Si $z' = z\gamma$, la multiplication est donnée par $(z, \gamma)(z', \gamma') := (z, \gamma\gamma')$ et l'application inverse est définie par $\mathbf{i}(z, \gamma) := (z\gamma, \gamma^{-1})$;
- Si $z_0 \in Z$, les fibres sont données par $(Z \rtimes \mathcal{G})^{z_0} \simeq \mathcal{G}^{\rho(z_0)}$ et $(Z \rtimes \mathcal{G})_{z_0} \simeq \mathcal{G}_{\rho(z_0)}$.

On obtient ainsi une structure de groupoïde sur $Z \rtimes \mathcal{G}$.

Proposition 1.3.5. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et (Z, ρ) un \mathcal{G} -espace à droite. Alors le groupoïde produit croisé $Z \rtimes \mathcal{G}$ est étale.

Démonstration. Soit $(z_0, \gamma_0) \in Z \rtimes \mathcal{G}$. Comme \mathcal{G} est étale, il existe une bissection ouverte U contenant γ_0 et telle que $r(U)$ est ouvert. Considérons l'ouvert $V = \rho^{-1}(r(U)) \subseteq Z$ et posons $\Omega = V \times_{\rho, r} U$. Alors Ω est un ouvert de $Z \rtimes \mathcal{G}$ sur lequel \mathbf{r} est une bijection continue sur son image $\mathbf{r}(\Omega) = V$. L'application inverse est :

$$\mathbf{r}_{|\mathbf{r}(\Omega)}^{-1} : \begin{cases} \mathbf{r}(\Omega) & \longrightarrow & \Omega \\ z & \longmapsto & (z, r_{|r(U)}^{-1}(\rho(z))) \end{cases}.$$

L'application but de $Z \rtimes \mathcal{G}$ est donc un homéomorphisme local c'est-à-dire que $Z \rtimes \mathcal{G}$ est un groupoïde étale. \blacksquare

Définition 1.3.6. • Un groupoïde (\mathcal{G}, X) est dit *propre* lorsque l'application :

$$(r, s) : \begin{cases} \mathcal{G} & \longrightarrow & X \times X \\ \gamma & \longmapsto & (r(\gamma), s(\gamma)) \end{cases}$$

est propre c'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact de $X \times X$ par (r, s) est un compact de \mathcal{G} .

- Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde et Z un \mathcal{G} -espace à droite. On dit que l'action de \mathcal{G} sur Z est *propre* lorsque le groupoïde $Z \rtimes \mathcal{G}$ est propre, c'est-à-dire lorsque l'application :

$$Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow Z \times Z; (z, \gamma) \mapsto (z, z\gamma)$$

est propre.

- On dit que l'action de \mathcal{G} sur Z est *libre* si pour tout $z \in Z$, le stabilisateur de z :

$$\mathcal{G}(z) := \{\gamma \in \mathcal{G}^{\rho(z)} \mid z\gamma = z\}$$

est égal à $\{1_{\rho(z)}\}$.

Lemme 1.3.7. Soient Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et $F \subseteq Z$ un sous-espace fermé et stable par \mathcal{G} . Alors F est un \mathcal{G} -espace propre.

Démonstration. Soit $f : Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow Z \times Z; (z, \gamma) \mapsto (z, z\gamma)$. Remarquons que l'on a :

$$(f|_{F \times_{\rho, r} \mathcal{G}})^{-1}(K \times K) = (F \times_{\rho, r} \mathcal{G}) \cap f^{-1}(K \times K)$$

et ce dernier ensemble est donc fermé dans le compact $f^{-1}(K \times K)$ donc compact. ■

Remarque 1.3.8. Soient \mathcal{G} est un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre. Soit $z \in Z$. Alors $\mathcal{G}(z)$ est fini. En effet, $\mathcal{G}(z)$ est compact puisque :

$$\mathcal{G}(z) = p_2\left(f^{-1}(\{(z, z)\})\right)$$

où p_2 désigne la projection de $Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$ sur le deuxième facteur et f l'application $(z, \gamma) \mapsto (z, z\gamma)$. Comme \mathcal{G} est étale, les fibres sont discrètes, en particulier $\mathcal{G}^{\rho(z)}$ est discret donc $\mathcal{G}(z)$ est fini.

On définit une relation d'équivalence sur le \mathcal{G} -espace Z :

$$z \sim z' \iff \exists \gamma \in \mathcal{G}^{\rho(z)}, \quad z\gamma = z',$$

et on pose :

$$Z/\mathcal{G} := Z/\sim.$$

Les classes d'équivalences sont appelées \mathcal{G} -orbites. Si $V \subseteq Z$, on note $V \cdot \mathcal{G}$ l'*orbite* de V sous l'action de \mathcal{G} c'est-à-dire :

$$V \cdot \mathcal{G} := \{z\gamma \mid (z, \gamma) \in V \times \mathcal{G} \text{ avec } r(\gamma) = \rho(z)\}.$$

On notera aussi $V \cdot \gamma$ ou plus simplement $V\gamma$ à la place de $V \cdot \{\gamma\}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$.

Définition 1.3.9 (Domaine fondamental). Un *domaine fondamental* pour l'action à droite d'un groupoïde topologique \mathcal{G} sur un espace Z est un sous-ensemble $A \subseteq Z$ tel que $Z = A \cdot \mathcal{G}$.

Donnons à présent plusieurs caractérisations d'une action propre d'un groupoïde sur un espace.

Proposition 1.3.10 ([49] p. 8). Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact et Z un \mathcal{G} -espace à droite. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Z est un \mathcal{G} -espace propre.
- (ii) Pour tout sous-ensemble compact $K \subseteq Z$, l'ensemble $\mathcal{F}_K := \{\gamma \in \mathcal{G} \mid K\gamma \cap K \neq \emptyset\}$ est compact.
- (iii) Il existe une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X telle que $\{\gamma \in \mathcal{G} \mid A_i\gamma \cap A_j \neq \emptyset\}$ est relativement compact pour tous $i, j \in I$ et $X = \cup_{i \in I} A_i$.

(iv) Si $(z_\lambda)_\lambda$ est une suite généralisée convergente dans Z et $(\gamma_\lambda)_\lambda$ une suite généralisée de \mathcal{G} vérifiant $r(\gamma_\lambda) = \rho(z_\lambda)$ et $(z_\lambda \gamma_\lambda)_\lambda$ convergente, alors $(\gamma_\lambda)_\lambda$ admet une sous-suite convergente.

Lemme 1.3.11. Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact et Z un \mathcal{G} -espace à droite. Alors pour tout compact $K \subseteq Z$, l'espace $\mathcal{F}_K = \{\gamma \in \mathcal{G} \mid K\gamma \cap K \neq \emptyset\}$ est fermé. Si l'action de \mathcal{G} sur Z est propre, alors l'orbite $K \cdot \mathcal{G}$ est fermée.

Démonstration. • Soit $(\gamma_\lambda)_\lambda$ une suite convergente dans \mathcal{F}_K vers un élément $\gamma \in \mathcal{G}$; alors pour tout λ il existe $k_\lambda, k'_\lambda \in K$ tels que $k_\lambda \gamma_\lambda = k'_\lambda$. Par compacité de K , on peut (quitte à extraire une sous-suite convergente) supposer que les suites $(k_\lambda)_\lambda$ et $(k'_\lambda)_\lambda$ convergent vers $k \in K$ et $k' \in K$ respectivement. Par continuité de l'action de \mathcal{G} sur Z , on obtient $\gamma k = k'$ c'est-à-dire que $\gamma \in \mathcal{F}_K$.

• Soit $(z_\lambda)_\lambda$ une suite dans $K \cdot \mathcal{G}$ convergente vers $z \in Z$; alors il existe une suite $(k_\lambda)_\lambda$ dans K et une suite $(\gamma_\lambda)_\lambda$ dans \mathcal{G} telles que pour tout λ , on a $z_\lambda = k_\lambda \gamma_\lambda$. Par compacité de K , on peut supposer que $(k_\lambda)_\lambda$ converge vers $k \in K$. L'action de \mathcal{G} sur K étant propre, on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite convergente) que $(\gamma_\lambda)_\lambda$ converge vers $\gamma \in \mathcal{G}$ et donc par continuité de l'action, $(z_\lambda)_\lambda$ converge vers $k\gamma$. ■

Exemple 1.3.12. (Action de \mathcal{G} sur lui-même) Soit \mathcal{G} un groupoïde localement compact. Alors l'action de \mathcal{G} sur lui-même est propre. En effet, si $K \subseteq \mathcal{G}$ est un compact, alors pour tout $\gamma \in \mathcal{F}_K$, il existe $k, k' \in K$ tel que $k\gamma = k'$. Donc $\gamma \in K^{-1} \cdot K$ qui est compact. Comme \mathcal{F}_K est fermé dans le compact $K^{-1} \cdot K$, alors \mathcal{F}_K est compact.

Définition 1.3.13. (Fonction cut-off sur \mathcal{G} , [47] p. 173) Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar $\lambda = \{\lambda^x \mid x \in X\}$. Une fonction *cut-off* sur \mathcal{G} est une application $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que :

- (i) pour tout $x \in X$, $\int_{\mathcal{G}^x} c(s(\gamma)) d\lambda^x(\gamma) = 1$;
- (ii) l'application $r : \text{supp}(c \circ s) \rightarrow X$ est propre.

Proposition 1.3.14 ([47] p. 174). Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar. Alors \mathcal{G} est propre si et seulement si il existe une fonction cut-off sur \mathcal{G} . De plus, si \mathcal{G} est propre et l'espace des orbites X/\mathcal{G} est compact, alors \mathcal{G} admet une fonction cut-off à support compact.

Dans le cas particulier où le groupoïde considéré est le groupoïde produit croisé $Z \rtimes \mathcal{G}$ (dont la base est égale à Z), on obtient alors la notion de fonction cut-off sur un \mathcal{G} -espace Z (voir définition 1.3.15 ci-dessous). En effet, d'une part la \mathbf{r} -fibre du groupoïde $Z \rtimes \mathcal{G}$ en $z \in Z$ s'identifie à $\mathcal{G}^{\rho(z)}$ et d'autre part, si l'on suppose que l'application $\mathbf{r} : \text{supp}(c \circ s) \rightarrow X$ est propre, alors pour tout compact $K \subseteq Z$, en notant $p_1 : Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow Z$ l'application $(z, \gamma) \mapsto z\gamma$, on remarque que² :

$$\underbrace{K \cdot \mathcal{G} \cap \text{supp}(c)}_{\text{fermé}} \subseteq \underbrace{p_1 \left((\mathbf{r}|_{\text{supp}(c \circ s)})^{-1}(K) \right)}_{\text{compact}}$$

et donc $K \cdot \mathcal{G} \cap \text{supp}(c)$ est compact.

Définition 1.3.15. (Fonction cut-off sur Z) Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar $\lambda = \{\lambda^x \mid x \in X\}$ et Z un \mathcal{G} -espace à droite. Une fonction *cut-off* sur Z est une application $c : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que :

- (i) pour tout $z \in Z$, $\int_{\mathcal{G}^{\rho(z)}} c(z\gamma) d\lambda^{\rho(z)}(\gamma) = 1$,

(ii) pour tout sous-espace compact K de Z , l'espace $(K \cdot \mathcal{G}) \cap \text{supp}(c)$ est compact.

2. En effet, pour tout $(z, \gamma) \in Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$, si $z\gamma \in \text{supp}(c)$, alors $(z, \gamma) \in \text{supp}(c \circ s)$.

Remarque 1.3.16. Réciproquement, si $c : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une application continue vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 1.3.15, alors $c : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction cut-off sur le groupoïde $Z \rtimes \mathcal{G}$.

Proposition 1.3.17. Soit \mathcal{G} un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar. Alors l'action de \mathcal{G} sur Z est propre si et seulement si il existe une fonction cut-off sur Z .

1.3.2 Action sur les algèbres

Nous savons définir l'action d'un groupe sur une C^* -algèbre et ainsi construire le produit croisé associé. Nous voulons généraliser cela avec les groupoïdes. La notion de $C_0(X)$ -algèbre énoncée dans la suite va jouer le rôle des C^* -algèbres et les groupoïdes vont jouer le rôle des groupes. Dans ce qui va suivre, les définitions et propriétés seront en grande partie issues de [56].

Si A est une C^* -algèbre, on note $Z(A)$ le centre de A . On fixe X un espace localement compact. On rappelle que :

$$C_0(X) := \left\{ \varphi : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subseteq X \text{ compact} : |\varphi| < \varepsilon \text{ sur } X \setminus K_\varepsilon \right\}.$$

Définition 1.3.18. Une $C_0(X)$ -algèbre est la donnée d'un couple (A, Φ_A) constitué d'une C^* -algèbre A et d'un $*$ -homomorphisme $\Phi_A : C_0(X) \rightarrow Z(M(A)) \subseteq \mathcal{L}_A(A)$ non-dégénéré c'est-à-dire que le sous-espace :

$$\Phi_A(C_0(X))A := \text{Vect} \left\{ \Phi_A(\varphi)(a) \mid (\varphi, a) \in C_0(X) \times A \right\}$$

est dense dans A pour la norme sur A .

On omettra souvent l'homomorphisme Φ_A et on notera $\varphi \cdot a$ ou juste φa à la place de $\Phi_A(\varphi)a$. De plus, on notera $C \cdot A$ à la place de $\Phi_A(C)A$ pour tout $C \subseteq C_0(X)$.

Remarque 1.3.19. L'homomorphisme Φ_A munit A d'une structure de $C_0(X)$ -module à gauche en posant $\varphi \cdot a := \Phi_A(\varphi)(a)$ pour tout $(\varphi, a) \in C_0(X) \times A$.

Définition 1.3.20. On dit qu'un $*$ -homomorphisme $\phi : A \rightarrow B$ entre deux $C_0(X)$ -algèbres est $C_0(X)$ -linéaire si pour tout $\varphi \in C_0(X)$ et tout $a \in A$:

$$\phi(\varphi a) = \varphi \phi(a).$$

Lemme 1.3.21. Soient A une $C_0(X)$ -algèbre et J un idéal de $C_0(X)$. Alors $J \cdot A$ est un $*$ -idéal bilatère de A .

Démonstration. Puisque $J \cdot A = \text{Vect}(I_0)$ où $I_0 = \{\varphi a \mid (\varphi, a) \in J \times A\}$, il suffit de montrer que si $(\varphi, b) \in J \times A$ et $u := \varphi \cdot b \in I_0$, alors au et ua sont aussi dans I_0 pour tout $a \in A$. Comme $\Phi_A(\varphi)$ est dans le centre de $M(A)$, alors $\Phi_A(\varphi)$ commute avec n'importe quel opérateur de $M(A)$, en particulier avec les opérateurs $L_a : b \mapsto ab$ et $R_a : b \mapsto ba$. On obtient donc pour tous $a, b \in A$ et $\varphi \in J$:

$$a(\varphi b) = \varphi(ab) \in I_0 \quad \text{et} \quad (\varphi b)a = \varphi(ab) \in I_0. \quad \blacksquare$$

La définition suivante montre que l'on peut voir les $C_0(X)$ -algèbres comme des objets « fibrés ».

Définition 1.3.22. (Fibre d'une C^* -algèbre) Soit A une $C_0(X)$ -algèbre. Soit $x \in X$. On pose :

$$I_x = \overline{J_x \cdot A} \quad \text{avec} \quad J_x = \{\varphi \in C_0(X) \mid \varphi(x) = 0\}$$

qui est un $*$ -idéal bilatère fermé de A d'après le lemme 1.3.21. La C^* -algèbre :

$$A_x := A/I_x$$

ainsi obtenue est appelée *fibre de A en x* et la classe dans A_x d'un élément a par l'homomorphisme quotient $\pi_x = A \rightarrow A_x$ sera notée $a(x)$. De plus, on vérifie que $(\varphi a)(x) = \varphi(x)a(x)$ pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $a \in A$ et $x \in X$.

En notant $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in X} A_x$, on peut montrer que l'application $A \rightarrow \mathcal{A}$ est injective. Ainsi, tout élément $a \in A$ peut être vu comme une fonction de X dans \mathcal{A} . On donne à présent quelques opérations vérifiées par les $C_0(X)$ -algèbres.

Exemple 1.3.23. (Push-forward) Soient X et Z deux espaces localement compacts, (A, Φ_A) une $C_0(Z)$ -algèbre et $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue. Alors A peut être munie d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre de la manière suivante. Puisque l'homomorphisme $\Phi_A : C_0(Z) \rightarrow Z(M(A))$ est non-dégénéré, alors Φ_A s'étend aux multiplicateurs de $C_0(Z)$ (voir [30], proposition 6.8), que l'on notera encore Φ_A :

$$\Phi_A : C_b(Z) \simeq M(C_0(Z)) \rightarrow M(Z(M(A))) = Z(M(A)).$$

Soit $\rho^* : C_0(X) \rightarrow C_b(Z)$ l'application définie pour tout $\varphi \in C_0(X)$ par $\rho^*(\varphi) = \varphi \circ \rho$. Posons :

$$\Phi := \Phi_A \circ \rho^* : C_0(X) \rightarrow Z(M(A))$$

Le couple (A, Φ) est alors une $C_0(X)$ -algèbre. Dans le cas particulier où $A = C_0(Z)$, on peut voir $C_0(Z)$ comme une $C_0(X)$ -algèbre, l'action à gauche de $C_0(X)$ sur $C_0(Z)$ est donnée pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $f \in C_0(Z)$ et $z \in Z$ par :

$$(\varphi \cdot f)(z) = \varphi(\rho(z))f(z).$$

En particulier, si $Z = X$ et $f = \text{id}_X$, alors $C_0(X)$ est une $C_0(X)$ -algèbre.

Lemme 1.3.24. La fibre de $C_0(Z)$ en $x \in X$, pour la structure de $C_0(X)$ -algèbre définie précédemment, est isomorphe à $C_0(Z_x)$ où $Z_x = \{z \in Z \mid \rho(z) = x\}$. En particulier, si $Z = X$ et $\rho = \text{id}_X$, la fibre de $C_0(X)$ en x est isomorphe à \mathbb{C} .

Démonstration. Soit $x \in X$. On considère l'homomorphisme surjectif³ $T_x : C_0(Z) \rightarrow C_0(Z_x)$ donné pour tout $f \in C_0(Z)$ par $T_x(f) = f|_{Z_x}$. On montre que $J_x \cdot C_0(Z)$ est dense dans $\text{Ker}(T_x)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in C_0(Z)$ tels que $f|_{Z_x} = 0$. Il existe un compact $K \subseteq Z$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $Z \setminus K$. Posons :

$$K' := \{z \in Z \mid |f(z)| \geq \varepsilon\}.$$

Alors K' est un fermé dans K qui est donc compact. Par hypothèse, $x \notin \rho(K')$ (car sinon, $x = \rho(k)$ avec $k \in K'$ et alors $0 = f(k) \geq \varepsilon$) on a donc deux compacts disjoints dans X à savoir $\{x\}$ et $\rho(K')$. D'après le corollaire 1.2.29, il existe alors une fonction $\varphi \in C_0(X)$ telle que :

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi(x) = 0, \quad \varphi|_{\rho(K')} = 1.$$

En particulier, φf est un élément de $J_x \cdot C_0(Z)$.

- Si $z \in K'$, alors $\varphi(\rho(z)) = 1$ et donc :

$$|f(z) - (\varphi f)(z)| = |f(z) - \varphi(\rho(z))f(z)| = |f(z) - f(z)| = 0 < \varepsilon.$$

- Si $z \notin K'$, alors $|1 - \varphi(\rho(z))| \leq 1$ car $0 \leq \varphi \leq 1$ et donc :

$$|f(z) - (\varphi f)(z)| = |f(z)| \cdot |1 - \varphi(\rho(z))| < \varepsilon.$$

Donc $|f(z) - (\varphi f)(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in Z$ et alors $\|f - \varphi f\|_\infty < \varepsilon$. ■

Définition 1.3.25. Soit X un espace topologique. On dit que $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est *semi-continue supérieurement* (abrégé en s.c.s.) si pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\{x \in X \mid \varphi(x) < r\}$$

est ouvert dans X .

3. Rappelons le théorème de prolongement de Tietze pour les espaces localement compacts : si Z est un espace localement compact, F un fermé de Z et $f \in C_0(F)$, alors il existe $g \in C_0(Z)$ telle que $g|_F = f$.

On se réfère à [56] pour la démonstration des deux résultats suivants.

Lemme 1.3.26. Soit A une $C_0(X)$ -algèbre. On a les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout $a \in A$, l'application $x \in X \mapsto \|a(x)\|$ est s.c.s. et tend vers 0 à l'infini, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid \|a(x)\| \geq \varepsilon\}$ est compact.
- (ii) La norme d'un élément $a \in A$ vérifie $\|a\| = \sup_{x \in X} \|a(x)\|$.

Proposition 1.3.27. Soient A une $C_0(X)$ -algèbre et $\Gamma \subseteq A$ un sous-espace vectoriel de A . Supposons que :

- $\varphi a \in \Gamma$ pour tous $a \in \Gamma$ et $\varphi \in C_0(X)$;
- l'image de Γ par l'application quotient $A \rightarrow A_x$ est dense dans A_x pour tout $x \in X$.

Alors Γ est dense dans A .

L'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'un $*$ -homomorphisme de $C_0(X)$ -algèbres peuvent être démontrés sur les fibres.

Proposition 1.3.28. Soient A, B deux $C_0(X)$ -algèbres et $\phi : A \rightarrow B$ un $*$ -homomorphisme de $C_0(X)$ -algèbres. L'application ϕ induit un morphisme au niveau des fibres $\phi_x : A_x \rightarrow B_x$ donné par $\phi(a(x)) = \phi(a)(x)$ où $a \in A$ et $x \in X$. Alors ϕ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si pour tout $x \in X$, ϕ_x est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Démonstration. • Soient $x \in X$ et J_x l'ensemble des fonctions de $C_0(X)$ s'annulant en x ; on note $I_x^A := \overline{J_x \cdot A}$ et $I_x^B := \overline{J_x \cdot B}$. Pour tous $\varphi \in J_x, a \in A$, on a :

$$\phi(\varphi a) = \varphi \phi(a) \in J_x \cdot B \subseteq I_x^B.$$

Par linéarité, on obtient donc que $\phi(I_x^A) \subseteq I_x^B$, ce qui prouve que ϕ induit un morphisme au niveau des fibres.

- Supposons ϕ injective et fixons $x \in X$. Soit $a \in A$ tel que $a(x) \in \text{Ker}(\phi_x)$, alors $\phi(a)(x) = \phi_x(a(x)) = 0$ donc $\phi(a) \in I_x^B$. Montrons que $a \in I_x^A$. Soient $\varepsilon > 0$ et $(u_\lambda)_\lambda$ une approximation de l'unité dans J_x , alors $\|u_\lambda b - b\| \rightarrow 0$ pour tout $b \in I_x^B$. Soit donc λ_0 tel que $\|u_{\lambda_0} \phi(a) - \phi(a)\| < \varepsilon$. Puisque ϕ est un $*$ -homomorphisme injectif de C^* -algèbres, alors c'est une isométrie et donc :

$$\|u_{\lambda_0} a - a\| = \|\phi(u_{\lambda_0} a - a)\| = \|u_{\lambda_0} \phi(a) - \phi(a)\| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $a \in I_x^A$.

- Supposons ϕ_x injective pour tout $x \in X$. Alors ϕ_x est une isométrie et on a d'après le lemme 1.3.26 pour tout $a \in A$,

$$\|\phi(a)\| = \sup_{x \in X} \|\phi(a)(x)\| = \sup_{x \in X} \|\phi_x(a(x))\| = \sup_{x \in X} \|a(x)\| = \|a\|,$$

et donc ϕ est injective.

- Il est clair que si ϕ est surjective, alors ϕ_x également pour tout $x \in X$.
- Supposons ϕ_x surjective pour tout $x \in X$ et posons $\Gamma := \phi(A)$. Alors pour tous $b \in A$ et $\varphi \in C_0(X)$ on a :

$$\varphi \phi(b) = \phi(\varphi b) \in \Gamma$$

et de plus, en notant $\pi_x : B \rightarrow B_x$ l'application quotient, on obtient :

$$B_x = \phi_x(A_x) = \overline{\phi_x(A_x)} = \overline{\pi_x(\phi(A)_x)} = \overline{\pi_x(\Gamma_x)}.$$

La deuxième égalité provient du fait que ϕ_x est un $*$ -homomorphisme de C^* -algèbres donc à image fermée. Par suite, Γ satisfait les conditions de la proposition 1.3.27 et en conséquence, $\overline{\phi(A)} = B$. Comme ϕ est aussi à image fermée, on a finalement $\phi(A) = B$ et donc ϕ est surjective. ■

Fibré semi-continu supérieurement

On se réfère à [56] pour les définitions et propositions suivantes. Nous avons vu que l'on pouvait voir les $C_0(X)$ -algèbres comme des objets fibrés. C'est ce que nous allons préciser dans cette partie. Il existe une correspondance biunivoque entre les $C_0(X)$ -algèbres et les fibrés semi-continus supérieurement de C^* -algèbres.

Définition 1.3.29. Un *fibré semi-continu supérieurement de C^* -algèbres* (abrégé en *fibré s.c.s.*) sur un espace localement compact X est la donnée d'un couple (\mathcal{A}, p) où \mathcal{A} est un espace topologique et $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ une application continue, ouverte et surjective pour laquelle chaque fibre $A_x := p^{-1}(\{x\})$ possède une structure de C^* -algèbre. De plus, les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) l'application $a \mapsto \|a\|$ est s.c.s de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^+ ;
- (ii) les applications $(a, b) \mapsto a + b$ et $(a, b) \mapsto ab$ sont continues de $\mathcal{A} * \mathcal{A}$ dans \mathcal{A} , avec :

$$\mathcal{A} * \mathcal{A} := \{(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid p(a) = p(b)\};$$

- (iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $a \mapsto \lambda a$ est continue de \mathcal{A} dans \mathcal{A} ;
- (iv) l'application $a \mapsto a^*$ est continue de \mathcal{A} dans \mathcal{A} ;
- (v) Si $(a_\lambda)_\lambda$ est une suite généralisée d'éléments de \mathcal{A} telle que $p(a_\lambda) \rightarrow x$ et $\|a_\lambda\| \rightarrow 0$, alors $(a_\lambda)_\lambda$ converge vers 0_x , l'élément nul de A_x .

Un *fibré continu de C^* -algèbres* est un fibré s.c.s. de C^* -algèbres pour lequel l'application $a \mapsto \|a\|$ est continue.

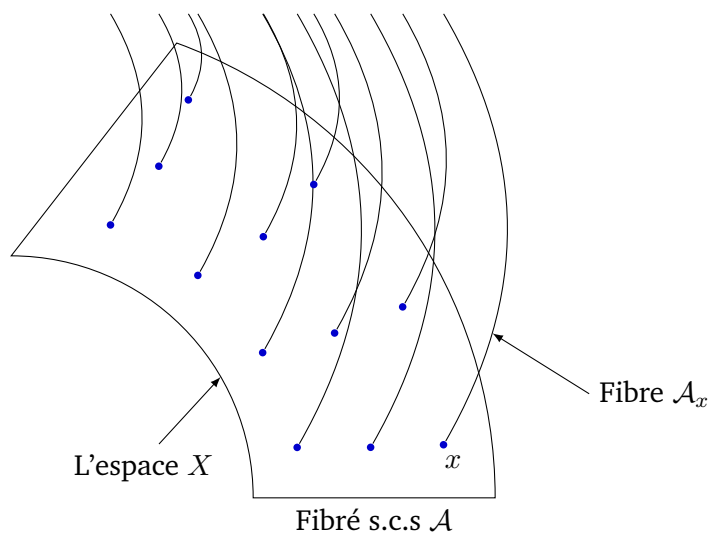


FIGURE 1.2 – Illustration d'un fibré s.c.s

Donnons à présent quelques propriétés de tels fibrés.

Proposition 1.3.30 ([56]). Soit $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ un fibré s.c.s. de C^* -algèbres. Soit $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} telle que $p(a_\lambda) \rightarrow p(a)$ pour un certain $a \in \mathcal{A}$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans \mathcal{A} et $u \in \mathcal{A}$ tels que $\|a - u\| < \varepsilon$ et $\|a_\lambda - u_\lambda\| < \varepsilon$ pour λ assez grand⁴ et tels que :

- $u_\lambda \rightarrow u$ dans \mathcal{A} ;
- pour tout $\lambda \in \Lambda$, $p(u_\lambda) = p(a_\lambda)$.

Alors $a_\lambda \rightarrow a$.

4. Il est sous-entendu ici que Λ est un ensemble ordonné filtrant.

Définition 1.3.31. • On note $\Gamma(X, \mathcal{A})$ l'espace des *sections continues* du fibré s.c.s. (\mathcal{A}, p) , c'est-à-dire :

$$\Gamma(X, \mathcal{A}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathcal{A} \text{ continue} \mid p \circ f = \text{id}_X \right\}.$$

- On définit de la même manière l'ensemble $\Gamma_c(X, \mathcal{A})$ des sections continues à supports compacts.
- On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathcal{A}$ tend vers 0 à l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ est compact. On note alors $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ les sections continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Les sections d'un fibré s.c.s. possèdent une structure de $C_0(X)$ -algèbre.

Lemme 1.3.32 ([56]). Soit X un espace localement compact. Alors $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ est une C^* -algèbre pour la norme infinie. L'espace des sections $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ est même une $C_0(X)$ -algèbre où l'action à gauche de $C_0(X)$ sur $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ est définie pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $f \in \Gamma_0(X, \mathcal{A})$, $x \in X$ par multiplication :

$$(\varphi \cdot f)(x) := \varphi(x)f(x).$$

De plus, pour tout $x \in X$, l'application $\text{ev}_x : \begin{cases} \Gamma_0(X, \mathcal{A}) & \longrightarrow & A_x \\ f & \longmapsto & f(x) \end{cases}$ induit l'isomorphisme :

$$(\Gamma_0(X, \mathcal{A}))_x \simeq A_x = p^{-1}(\{x\}).$$

Exemple 1.3.33. (Pull-Back de fibré s.c.s) Soient X et Y deux espaces localement compacts. Soient $f : Y \rightarrow X$ une application continue et $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ un fibré s.c.s. de C^* -algèbres sur X . Alors on peut construire le *pull-back* de \mathcal{A} par f :

$$f^* \mathcal{A} := \left\{ (y, a) \in Y \times \mathcal{A} \mid f(y) = p(a) \right\}.$$

On munit $f^* \mathcal{A}$ de la topologie induite par celle sur le produit $Y \times \mathcal{A}$. On définit $q : f^* \mathcal{A} \rightarrow Y$ par $q(y, a) = y$. On montre que $(f^* \mathcal{A}, q)$ est un fibré s.c.s. de C^* -algèbres sur Y et qui est continu si $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ est continu (voir [22], proposition 3.34).

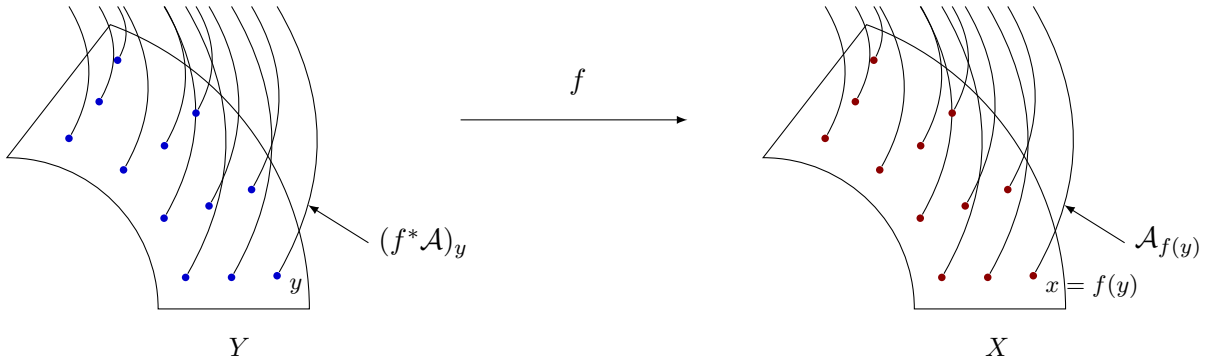


FIGURE 1.3 – Pull-back d'un fibré s.c.s

Proposition 1.3.34 ([33]). Soient X et Y deux espaces localement compacts, (\mathcal{A}, p) un fibré s.c.s sur X et $\tau : Y \rightarrow X$ une application continue. Alors $f \in \Gamma(Y, \tau^* \mathcal{A})$ si et seulement si il existe une application continue $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathcal{A}$ telle que $p(\tilde{f}(y)) = \tau(y)$ et $f(y) = (y, \tilde{f}(y))$ pour tout $y \in Y$.

Démonstration. Soit $f \in \Gamma(Y, \tau^* \mathcal{A})$. On définit pour tout $y \in Y$, $\tilde{f}(y) = \pi_{\mathcal{A}} \circ f(y)$ où $\pi_{\mathcal{A}} : \tau^* \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est la projection sur \mathcal{A} . Soit $y \in Y$. Comme $f(y) \in \tau^* \mathcal{A}$ alors il existe $(y', a) \in Y \times \mathcal{A}$ tel que $f(y) = (y', a)$ et $\tau(y') = p(a)$. En particulier, $y' = y$ car $y = q \circ f(y) = q(y', a) = y'$ et $a = \tilde{f}(y)$ car $a = \pi_{\mathcal{A}}(y, a) = \pi_{\mathcal{A}} \circ f(y) = \tilde{f}(y)$. On a donc :

$$p(\tilde{f}(y)) = p(\pi_{\mathcal{A}}(f(y))) = p(a) = \tau(y') = \tau(y) \quad \text{et} \quad f(y) = (y, \tilde{f}(y)).$$

La réciproque est immédiate. ■

Le résultat suivant établit un lien entre les $C_0(X)$ -algèbres et les fibrés s.c.s. de C^* -algèbres.

Théorème 1.3.35 ([56]). Soient X un espace localement compact et A une C^* -algèbre. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est une $C_0(X)$ -algèbre.
- (ii) Il existe un fibré s.c.s. de C^* -algèbres $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ sur X et un isomorphisme de $C_0(X)$ -algèbres de A dans $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$.

Corollaire 1.3.36 ([56]). Soit A une $C_0(X)$ -algèbre. On peut alors munir $\mathcal{A} := \sqcup_{x \in X} A_x$ d'une unique topologie qui en fait un fibré s.c.s. de C^* -algèbres tel que l'isomorphisme entre A et $\Gamma_0(X, \mathcal{A})$ est donné par $a \in A \mapsto a(\cdot) \in \Gamma_0(X, \mathcal{A})$.

Selon le contexte, on pourra donc alterner, via cette identification, entre le point de vue des $C_0(X)$ -algèbres et celui des fibrés s.c.s.

Définition 1.3.37. (Fibré s.c.s associé à une $C_0(X)$ -algèbre) Soient X un espace localement compact et A une $C_0(X)$ -algèbre. On définit le fibré s.c.s associé à A en posant :

$$\mathcal{A} := \bigsqcup_{x \in X} A_x \quad \text{et} \quad q : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow X \\ (a, x) & \longmapsto x \end{cases},$$

muni de la topologie du corollaire précédent. Une base pour cette topologie est donnée par les ensembles :

$$W(a, U, \varepsilon) := \left\{ b \in \mathcal{A} \mid q(b) \in U \quad \text{et} \quad \|b - a(q(b))\|_{A_{q(b)}} < \varepsilon \right\},$$

où $\|\cdot\|_{A_{q(b)}}$ désigne la norme sur la C^* -algèbre $A_{q(b)}$, $a \in A$, $U \subseteq X$ un ouvert et $\varepsilon > 0$.

Définition 1.3.38. (Pull-Back de $C_0(X)$ -algèbre) Soient X et Y deux espaces localement compacts. Soient $f : Y \rightarrow X$ une application continue et A une $C_0(X)$ -algèbre. Notons \mathcal{A} le fibré s.c.s. de C^* -algèbres associé à A . On définit le pullback de A par f , comme la $C_0(Y)$ -algèbre :

$$f^*A := \Gamma_0(Y, f^*\mathcal{A}).$$

Exemple 1.3.39. (Restriction à une sous-partie) Soient A une $C_0(X)$ -algèbre et $Y \subseteq X$ une partie de X . Alors la restriction de A à Y , notée $A|_Y$, est la $C_0(Y)$ -algèbre définie par :

$$A|_Y := i^*A,$$

où i est l'inclusion de Y dans X . Si U est un ouvert de X , alors $A|_U$ s'identifie à la $C_0(U)$ -algèbre $C_0(U) \cdot A$.

Remarque 1.3.40. Si A et B sont deux $C_0(X)$ -algèbres, alors en notant $A \otimes_{\max} B$ le produit tensoriel maximal de A par B et I_X l'idéal dans $A \otimes_{\max} B$ engendré par :

$$\left\{ \varphi \cdot a \otimes b - a \otimes \varphi \cdot b \mid (a, b, \varphi) \in A \times B \times C_0(X) \right\},$$

on définit $A \otimes_{C_0(X)} B := A \otimes_{\max} B / I_X$. On peut alors définir le pull-back d'une $C_0(X)$ -algèbre A par $f : Y \rightarrow X$ sans passer par les sections continues en posant $f^*A := A \otimes_{C_0(X)} C_0(Y)$ où $C_0(Y)$ est muni de la structure de $C_0(X)$ -algèbre induite par f (voir 1.3.23).

On passe maintenant à un résultat important que l'on utilisera souvent dans le cas particulier où Y est un groupoïde et f l'application source ou but.

Lemme 1.3.41. (Fibre du Pull-Back) Soient X et Y deux espaces localement compacts, $f : Y \rightarrow X$ une application continue et A une $C_0(X)$ -algèbre. Alors on a l'isomorphisme $(f^*A)_y \simeq A_{f(y)}$ pour tout $y \in Y$.

Démonstration. Notons $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ le fibré s.c.s. de C^* -algèbres associé à A . Alors $q : f^* \mathcal{A} \rightarrow Y$ est le fibré s.c.s. de C^* -algèbres associé à $f^* A$. Soit $y \in Y$. L'évaluation en y fournit un isomorphisme entre $(f^* A)_y$ et $(f^* \mathcal{A})_y$. De plus :

$$\begin{aligned} (f^* \mathcal{A})_y &:= \{(y', a) \in f^* \mathcal{A} \mid q(y', a) = y\} \\ &= \{(y', a) \in Y \times \mathcal{A} \mid p(a) = f(y) \text{ et } y' = y\} \\ &\simeq \{a \in \mathcal{A} \mid p(a) = f(y)\} \\ &=: \mathcal{A}_{f(y)} \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A}_{f(y)} = \{(a, x) \in \sqcup_{z \in X} A_z \mid x = f(y)\} = A_{f(y)}$, on obtient l'isomorphisme annoncé. ■

Le résultat suivant montre la functorialité de la construction du pull-back.

Lemme 1.3.42. Soient A et B deux $C_0(X)$ -algèbres et $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Si $\Phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme de $C_0(X)$ -algèbres, alors l'application $f^* \Phi : f^* A \rightarrow f^* B$ définie pour tous $\xi \in f^* A$ et $y \in Y$ par :

$$(f^* \Phi)(\xi)(y) = \Phi_{f(y)}(\xi(y))$$

est un $*$ -homomorphisme de $C_0(Y)$ -algèbres. De plus, la construction du pull-back est un foncteur covariant c'est-à-dire que si C est une $C_0(X)$ -algèbre et $\Psi : B \rightarrow C$ est un autre $*$ -homomorphisme de $C_0(X)$ -algèbres, alors :

$$f^* \Psi \circ f^* \Phi = f^*(\Psi \circ \Phi).$$

On peut à présent définir l'action d'un groupoïde sur une $C_0(X)$ -algèbre.

Définition 1.3.43. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Soient A une $C_0(X)$ -algèbre et \mathcal{A} le fibré s.c.s. associé à A . Une action continue de \mathcal{G} sur A est la donnée d'une application $\alpha : s^* A \rightarrow r^* A$ telle que :

- (i) pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, l'application $\alpha_\gamma : A_{s(\gamma)} \rightarrow A_{r(\gamma)}$ est un $*$ -isomorphisme de C^* -algèbres ;
- (ii) $\alpha_{\gamma\gamma'} = \alpha_\gamma \circ \alpha_{\gamma'}$ pour tout $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^{(2)}$;
- (iii) $\gamma \cdot a := \alpha_\gamma(a)$ définit une action continue de \mathcal{G} sur \mathcal{A} .⁵

On dit alors que (A, α) est une \mathcal{G} -algèbre ou simplement que A est une \mathcal{G} -algèbre s'il n'est pas nécessaire de préciser l'action.

Remarque 1.3.44. (a) Le $*$ -isomorphisme α_γ est une isométrie pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$.

- (b) L'application $\psi : s^* A \rightarrow r^* A$ donnée par $\psi(\gamma, a) = (\gamma, \alpha_\gamma(a))$ induit un $*$ -isomorphisme de $C_0(\mathcal{G})$ -algèbres $\alpha : s^* A \rightarrow r^* A$ donné par $\alpha(f) = \psi \circ f$.

Exemple 1.3.45. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Alors $(C_0(X), \alpha)$ est une \mathcal{G} -algèbre avec $\alpha_\gamma = \text{id}_C$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$.

Exemple 1.3.46. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact agissant à droite sur un espace localement compact Z et $\rho : Z \rightarrow X$ l'application d'ancrage associée à l'action. Alors en appliquant la construction du push-forward donnée dans 1.3.23, $C_0(Z)$ est une $C_0(X)$ -algèbre et la fibre de $C_0(Z)$ en $x \in X$ est $C_0(Z_x)$ avec $Z_x := \{z \in Z \mid \rho(z) = x\}$. Soit $\gamma \in \mathcal{G}$. Considérons le $*$ -isomorphisme $\alpha_\gamma : C_0(Z_{s(\gamma)}) \rightarrow C_0(Z_{r(\gamma)})$ donné pour tous $(z, \gamma) \in Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$ et $f \in C_0(Z_{s(\gamma)})$ par :

$$\alpha_\gamma(f)(z) = f(z\gamma).$$

Il définit une action continue et vérifie $\alpha_{\gamma\gamma'} = \alpha_\gamma \circ \alpha_{\gamma'}$ pour tout $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^{(2)}$. Ainsi, $(C_0(Z), \alpha)$ est une \mathcal{G} -algèbre. On notera souvent γf à la place de $\alpha_\gamma(f)$.

Remarque 1.3.47. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact et (A, α) une \mathcal{G} -algèbre. Alors :

5. C'est-à-dire que pour tout $a \in A$, l'application $\gamma \mapsto \alpha_\gamma(a(s(\gamma)))$ est continue pour la topologie forte.

- $\alpha_x = \text{id}_{A_x}$ pour tout $x \in X$;
- $\alpha_\gamma^{-1} = \alpha_{\gamma^{-1}}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$.

Définition 1.3.48. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact. Soient (A, α) et (B, β) deux \mathcal{G} -algèbres. Un *morphisme de \mathcal{G} -algèbres* $\phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme $C_0(X)$ -linéaire tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$\phi_{r(\gamma)} \circ \alpha_\gamma = \beta_\gamma \circ \phi_{s(\gamma)}.$$

1.3.3 Action sur les modules

Étant donné (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact, A une \mathcal{G} -algèbre et E un A -module de Hilbert à droite, nous allons dans cette partie définir l'action de \mathcal{G} sur E . Comme nous l'avons vu précédemment, pour pouvoir définir l'action du groupoïde (\mathcal{G}, X) sur un espace, il faut que ce dernier « fibre » au-dessus de sa base X . Nous allons donc commencer par définir la fibre de E en $x \in X$. Pour cela, on procède comme pour la fibre d'une $C_0(X)$ -algèbre. La proposition II.7.1.9 p. 140 de [8] permet d'identifier $EA := \{ea \mid e \in E, a \in A\}$ avec E . On peut donc définir une action de $C_0(X)$ sur E à valeurs dans l'ensemble des opérateurs adjoignables en posant :

$$\Phi : \begin{cases} C_0(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}_A(E) \\ \varphi & \longmapsto & T_\varphi := [ea \mapsto e(a\varphi)] \end{cases}.$$

L'application Φ est à valeurs dans $Z(\mathcal{L}_A(E))$ car pour tous $e \in E, a \in A, \varphi \in C_0(X)$ et $S \in \mathcal{L}_A(E)$:

$$T_\varphi \circ S(ea) = T_\varphi(S(e)a) = S(e)(a\varphi) = S(ea\varphi) = S \circ T_\varphi(ea).$$

Dans la suite, cette action sera simplement notée $e \cdot \varphi$ ou juste $e\varphi$ au lieu de $\Phi(\varphi)(e)$ pour tous $e \in E, \varphi \in C_0(X)$.

Définition 1.3.49. (Fibre d'un A -module de Hilbert) On considère A une $C_0(X)$ -algèbre et E un A -module de Hilbert à droite. Si $x \in X$, on note $I_x = \overline{E \cdot J_x}$ avec $J_x = \{\varphi \in C_0(X) \mid \varphi(x) = 0\}$. La fibre de E en $x \in X$ est définie comme étant le quotient d'espaces vectoriels :

$$E_x = E / I_x.$$

La classe dans E_x d'un élément e par l'homomorphisme quotient $\pi_x : E \rightarrow E_x$ sera notée $e(x)$.

On peut montrer que E_x est munie d'une structure de A_x -module de Hilbert pour le produit scalaire à valeurs dans A_x :

$$\langle -, - \rangle_{A_x} : \begin{cases} E_x \times E_x & \longrightarrow & A_x \\ (e(x), e'(x)) & \longmapsto & \langle e, e' \rangle_A(x) \end{cases}.$$

On vérifie immédiatement que pour tout $e \in E$, on a $\|e\| = \sup_{x \in X} \|e(x)\|$. De plus, si E et F sont deux A -modules de Hilbert à droite et $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$, alors pour tout $x \in X$, l'opérateur T induit un opérateur adjoignable T_x sur les fibres :

$$T_x : \begin{cases} E_x & \longrightarrow & F_x \\ e(x) & \longmapsto & T(e)(x) \end{cases}.$$

En effet, soit $\pi_x^F : F \rightarrow F_x$ l'homomorphisme quotient, $\tilde{T} := \pi_x^F \circ T : E \rightarrow F_x$ et $e \in E, \varphi \in J_x$. Alors il existe $e' \in E, a \in A$ tels que $e = e'a$ et on a :

$$\tilde{T}(e\varphi) = \pi_x^F(T(e'a\varphi)) = \pi_x^F(T(e' \cdot (a\varphi))) = \pi_x^F \left(\underbrace{T(e') \cdot a\varphi}_{\in F \cdot J_x} \right) = 0.$$

Par linéarité et continuité de \tilde{T} , on obtient $\overline{E \cdot J_x} \subseteq \text{Ker}(\tilde{T})$.

Lemme 1.3.50. Soient A une $C_0(X)$ -algèbre et E, F deux A -modules de Hilbert à droite. Soit $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$. Alors :

$$\left(\forall x \in X, T_x = 0_{\mathcal{L}_{A_x}(E_x, F_x)} \right) \iff T = 0_{\mathcal{L}_A(E, F)}.$$

En particulier, deux opérateurs de $\mathcal{L}_A(E, F)$ sont égaux si et seulement si ils sont égaux en chaque point de la fibre de E en $x \in X$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $e \in E$:

$$\|T(e)\|^2 = \sup_{x \in X} \|T(e)(x)\|^2 = \sup_{x \in X} \|T_x(e(x))\|^2 = 0.$$

■

Remarque 1.3.51. On aurait pu définir la fibre de E en x en considérant le produit tensoriel de modules de Hilbert :

$$E_x = E \otimes_{\pi_x} A_x \quad \text{avec} \quad \pi_x : \begin{cases} A & \longrightarrow & A_x \\ a & \longmapsto & a(x) \end{cases}.$$

Ce point de vue est équivalent à celui de la définition 1.3.49 puisqu'un isomorphisme entre $E \otimes_{\pi_x} A_x$ et E/I_x défini sur les tenseurs élémentaires est donné par $e \otimes a(x) \mapsto (ea)(x)$.

Lemme 1.3.52. Soient X un espace topologique localement compact, A une $C_0(X)$ -algèbre et E un A -module de Hilbert à droite. Alors $k_A(E)$ est une $C_0(X)$ -algèbre.

Démonstration. L'application $\Phi : C_0(X) \rightarrow Z(\mathcal{L}_A(E))$ induit, grâce à l'identification entre $\mathcal{L}_A(E)$ et $M(k_A(E))$, un $*$ -homomorphisme encore noté Φ :

$$\Phi : C_0(X) \rightarrow Z(M(k_A(E))) \subseteq \mathcal{L}_{k_A(E)}(k_A(E))$$

où l'action à droite de $C_0(X)$ sur les opérateurs de rang 1 est donnée pour tous $e, e' \in E, \varphi \in C_0(X)$ par :

$$\theta_{e, e'} \cdot \varphi := \theta_{e\varphi, e'}.$$

Montrons que $\overline{k_A(E) \cdot C_0(X)} = k_A(E)$ c'est-à-dire que Φ est non-dégénérée.

- Tout opérateur compact s'écrit comme une limite de combinaisons linéaires d'opérateurs de rang 1, donc par continuité de l'action on a $k_A(E) \cdot C_0(X) \subseteq k_A(E)$ et donc on a bien l'inclusion $\overline{k_A(E) \cdot C_0(X)} \subseteq k_A(E)$.
- Pour l'inclusion réciproque, remarquons tout d'abord que $\overline{E \cdot C_0(X)} = E$.⁶ Par conséquent, si pour tous $e, f \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $e' \in E$ et $\varphi \in C_0(X)$ tels que $\|e - e'\varphi\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|}$. On a donc :

$$\|\theta_{e, f} - \theta_{e', f} \cdot \varphi\| = \|\theta_{e, f} - \theta_{e'\varphi, f}\| = \|\theta_{e - e'\varphi, f}\| \leq \|e - e'\varphi\| \cdot \|f\| < \varepsilon.$$

On a donc montré que tout opérateur de rang 1 est dans $\overline{k_A(E) \cdot C_0(X)}$ et donc on a l'inclusion $k_A(E) \subseteq \overline{k_A(E) \cdot C_0(X)}$.

■

Définition 1.3.53. Soient X un espace topologique localement compact, A une $C_0(X)$ -algèbre et E un A -module de Hilbert. Posons $\mathcal{E} := \sqcup_{x \in X} E_x$ et $p : \mathcal{E} \rightarrow X$ l'application définie par $p(e, x) = x$. Une base pour la topologie de \mathcal{E} est donnée par les ensembles :

$$W(e, U, \varepsilon) := \left\{ e' \in \mathcal{E} \mid q(e') \in U \quad \text{et} \quad \|e' - e(q(e'))\|_{E_{q(e')}} < \varepsilon \right\},$$

où $\|\cdot\|_{E_{q(e'')}}$ désigne la norme sur le $A_{q(e')}$ -module de Hilbert $E_{q(e')}$, $e \in E, U \subseteq X$ un ouvert et $\varepsilon > 0$.

⁶. En effet, identifions E avec EA et fixons $\varepsilon > 0, e \in E \setminus \{0\}$ et $a \in A$. Comme $A \cdot C_0(X)$ est dense dans A , il existe $\varphi \in C_0(X)$ et $b \in A$ tels que $\|a - b\varphi\| < \frac{\varepsilon}{\|e\|}$. On a donc $\|ea - eb\varphi\| < \|e\| \cdot \|a - b\varphi\| < \varepsilon$.

Définition 1.3.54. Soient X un espace topologique localement compact, A une $C_0(X)$ -algèbre et E un A -module de Hilbert. Posons $\mathcal{E} := \sqcup_{x \in X} E_x$ et $p : \mathcal{E} \rightarrow X$ l'application définie par $p(e, x) = x$.

- On note $\Gamma(X, \mathcal{E})$ l'espace des *sections continues* de \mathcal{E} c'est-à-dire :

$$\Gamma(X, \mathcal{E}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathcal{E} \text{ continue} \mid p \circ f = \text{id}_X \right\}.$$

- On définit de même l'ensemble $\Gamma_c(X, \mathcal{E})$ des sections continues à support compact.
- On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathcal{E}$ tend vers 0 à l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x \in X \mid \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ est compact. On note alors $\Gamma_0(X, \mathcal{E})$ les sections continues qui tendent vers 0 à l'infini. C'est un A -module de Hilbert à droite avec pour tous $f \in \Gamma_0(X, \mathcal{E})$, $a \in A$ et $x \in X$:

$$(f \cdot a)(x) := f(x)a(x).$$

Le résultat suivant est analogue à l'isomorphisme de $C_0(X)$ -algèbres $A \simeq \Gamma_0(X, A)$ vu dans le théorème 1.3.35.

Proposition 1.3.55. Soient X un espace topologique localement compact, A une $C_0(X)$ -algèbre et E un A -module de Hilbert. Posons $\mathcal{E} := \sqcup_{x \in X} E_x$ et $p : \mathcal{E} \rightarrow X$ l'application définie par $p(e, x) = x$. Alors on a l'isomorphisme de A -modules de Hilbert :

$$E \simeq \Gamma_0(X, \mathcal{E}), \quad e \mapsto [x \mapsto e(x)].$$

Définition 1.3.56. (Pull-back d'un module de Hilbert) Soient $f : Y \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts, A une $C_0(X)$ -algèbre, E un A -module de Hilbert à droite, $\mathcal{E} = \sqcup_{x \in X} E_x$ et $p : \mathcal{E} \rightarrow X$ l'application définie par $p(e, x) = x$. On pose :

$$f^* \mathcal{E} := \left\{ (y, e) \in Y \times \mathcal{E} \mid f(y) = p(e) \right\}$$

que l'on munit de la topologie induite par celle sur le produit $Y \times \mathcal{E}$. Le *pull-back* de E par f , noté f^*E , est défini par :

$$f^*E := \Gamma_0(Y, f^* \mathcal{E}).$$

Remarque 1.3.57. Soit $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_{f^*A}(f^*A)$ le $*$ -homomorphisme défini pour tous $a \in A$, $\xi \in f^*A$ et $y \in Y$ par :

$$(\pi(a)\xi)(y) := a(f(y))\xi(y).$$

On peut aussi définir le pull-back de E par f comme le produit tensoriel de modules de Hilbert $f^*E = E \otimes_{\pi} f^*A$ (voir [32]). Cet autre point de vue est équivalent à celui défini précédemment puisque un isomorphisme entre $E \otimes_{\pi} f^*A$ et $\Gamma_0(Y, f^* \mathcal{E})$ défini sur les tenseurs élémentaires est donné par $e \otimes g \mapsto [y \mapsto e(f(y))g(y)]$

Lemme 1.3.58 ([32]). L'espace f^*E est un f^*A -module de Hilbert. De plus, on a l'isomorphisme de $A_{f(y)}$ -modules de Hilbert $(f^*E)_y \simeq E_{f(y)}$ pour tout $y \in Y$.

Le résultat suivant montre comment le produit tensoriel de modules de Hilbert se comporte par rapport au pull-back.

Proposition 1.3.59 ([32]). Soient A et B deux $C_0(X)$ -algèbres. Soient E un A -module de Hilbert, F un B -module de Hilbert et $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(F)$ un $*$ -homomorphisme. Alors on a un isomorphisme de f^*B -modules de Hilbert :

$$f^*(E \otimes_A F) \simeq f^*E \otimes_{f^*A} f^*F.$$

En particulier si $f = \text{id}_X$, alors pour tout $x \in X$ on a un isomorphisme canonique :

$$(E \otimes_A F)_x \simeq E_x \otimes_{A_x} F_x.$$

De la même manière que pour les $C_0(X)$ -algèbres, nous pouvons considérer la restriction d'un $C_0(X)$ -module de Hilbert à une sous-partie Y de X .

Définition 1.3.60 (Restriction d'un module de Hilbert). Soient E un $C_0(X)$ -module de Hilbert et Y une partie de X . Alors la restriction de E à Y , notée $E|_Y$, est le $C_0(Y)$ -module de Hilbert défini par :

$$E|_Y = i^*E,$$

où i est l'inclusion de Y dans X . Si U est un ouvert de X , alors $E|_U$ s'identifie à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $\{e\varphi \mid (e, \varphi) \in E \times C_0(U)\}$. De plus, tout opérateur $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ induit un opérateur $T|_U \in \mathcal{L}_{C_0(U)}(E|_U)$ qui est défini par $T|_U := (T)|_{E|_U}$.

Remarque 1.3.61. Soit A une \mathcal{G} -algèbre d'action α . Puisque $\alpha : s^*A \rightarrow r^*A$ est un $*$ -isomorphisme, alors on peut munir r^*E d'une structure de s^*A -module de Hilbert à droite en posant pour tous $x, y \in r^*E$ et $a \in s^*A$:

$$x.a := x.\alpha(a) \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle_{s^*A} := \alpha^{-1}(\langle x, y \rangle_{r^*A}).$$

On considérera dans la définition suivante des opérateurs s^*A -linéaires en considérant la structure de s^*A -module sur r^*E vue dans la remarque 1.3.61.

Définition 1.3.62. Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact et A une \mathcal{G} -algèbre munie d'une action notée α . On note $\mathcal{L}_{s^*A}(s^*E, r^*E)$ l'ensemble des opérateurs adjoignables s^*A -linéaires c'est-à-dire des opérateurs $T : s^*E \rightarrow r^*E$ tels que :

- $T(xu) = T(x)\alpha(u)$ pour tous $x \in s^*E, u \in s^*A$;
- il existe un opérateur $S : r^*E \rightarrow s^*E$ tel que pour tous $x \in s^*E, y \in r^*E$ et $u \in s^*A$ on a :

$$S(xu) = S(x)\alpha^{-1}(u) \quad \text{et} \quad \langle T(x), y \rangle_{r^*A} = \alpha(\langle x, S(y) \rangle_{s^*A}).$$

Remarque 1.3.63. Soient $T \in \mathcal{L}_{s^*A}(s^*E, r^*E)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$. Les isomorphismes de f^*A -modules de Hilbert $(s^*E)_\gamma \simeq E_{s(\gamma)}$ et $(r^*E)_\gamma \simeq E_{r(\gamma)}$ permettent d'obtenir un opérateur $T_\gamma \in \mathcal{L}_{A_{s(\gamma)}}(E_{s(\gamma)}, E_{r(\gamma)})$ (comparer avec [6], appendice A).

Définition 1.3.64. Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact et (A, α) une \mathcal{G} -algèbre. Soit E un A -module de Hilbert. Une action de \mathcal{G} sur E est la donnée d'un unitaire $V \in \mathcal{L}_{s^*A}(s^*E, r^*E)$ tel que pour tout $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^{(2)}$, on a :

$$V_{\gamma\gamma'} = V_\gamma \circ V_{\gamma'}.$$

On dit alors que (E, V) , ou simplement E , est un A -module \mathcal{G} -équivariant.

Remarque 1.3.65. Pour tout $\xi \in s^*E$, on a $V(\xi) \in r^*E$ donc par définition du pull-back d'un module de Hilbert, la section $V(\xi) : \gamma \mapsto V_\gamma(\xi(\gamma))$ est continue.

Exemple 1.3.66 (Action sur le module standard). Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar $\lambda = \{\lambda^x \mid x \in X\}$. Dans la suite, nous allons définir un unitaire $V : s^*(L^2(\mathcal{G})) \rightarrow r^*(L^2(\mathcal{G}))$ donnant l'action de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G})$. On note :

$$\mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G} := \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid s(\gamma) = s(\eta)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G} := \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid s(\gamma) = r(\eta)\}.$$

- On munit $C_c(\mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G})$ d'un produit scalaire à valeurs dans $C_c(\mathcal{G})$ et d'une action à droite de $C_c(\mathcal{G})$ donnée pour tous $\xi, \xi_1, \xi_2 \in C_c(\mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G}), f \in C_c(\mathcal{G})$ et $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G}$ par :

$$(\xi \cdot f)(\gamma, \eta) := \xi(\gamma, \eta)f(\eta) \quad \text{et} \quad \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{C_c(\mathcal{G})}(\eta) := \int_{\mathcal{G}_{s(\eta)}} \overline{\xi_1(\gamma, \eta)} \xi_2(\gamma, \eta) d\lambda_{s(\eta)}(\gamma).$$

Le complété de $C_c(\mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G})$ pour le produit scalaire défini précédemment est isomorphe, en tant que $C_0(\mathcal{G})$ -module de Hilbert, à $s^*(L^2(\mathcal{G}))$.

- On munit $C_c(\mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G})$ d'un produit scalaire à valeurs dans $C_c(\mathcal{G})$ et d'une action à droite de $C_c(\mathcal{G})$ donnée pour tous $\xi, \xi_1, \xi_2 \in C_c(\mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G})$, $f \in C_c(\mathcal{G})$ et $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G}$ par :

$$(\xi \cdot f)(\gamma, \eta) := \xi(\gamma, \eta)f(\eta) \quad \text{et} \quad \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{C_c(\mathcal{G})}(\eta) := \int_{\mathcal{G}_{r(\eta)}} \overline{\xi_1(\gamma, \eta)} \xi_2(\gamma, \eta) d\lambda_{r(\eta)}(\gamma).$$

Le complété de $C_c(\mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G})$ pour le produit scalaire défini précédemment est isomorphe, en tant que $C_0(\mathcal{G})$ -module de Hilbert, à $r^*(L^2(\mathcal{G}))$.

Une fois ces deux identifications faites, on considère l'opérateur $V : s^*(L^2(\mathcal{G})) \rightarrow r^*(L^2(\mathcal{G}))$ définie pour tous $\xi \in C_c(\mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G})$ et $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G}$ par :

$$(V(\xi))(\gamma, \eta) := \xi(\gamma\eta, \eta).$$

On vérifie que l'opérateur V est adjoignable, d'adjoint donné pour tout $\xi \in C_c(\mathcal{G} \times_{s,r} \mathcal{G})$ et tout $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G}$ par :

$$(V^*(\xi))(\gamma, \eta) = \xi(\gamma\eta^{-1}, \eta)$$

et que V est unitaire. La fibre de $L^2(\mathcal{G})$ en $x \in X$ est isomorphe à $L^2(\mathcal{G}_x)$ et si $\gamma \in \mathcal{G}$, l'application $V_\gamma : L^2(\mathcal{G}_{s(\gamma)}) \rightarrow L^2(\mathcal{G}_{r(\gamma)})$ est définie pour tous $f \in C_c(\mathcal{G}_{s(\gamma)})$ et $\eta \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}$ par :

$$(V_\gamma(f))(\eta) = f(\eta\gamma).$$

Exemple 1.3.67. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar et A une \mathcal{G} -algèbre. On considère $\Phi : C_0(X) \rightarrow Z(M(A))$ le $*$ -homomorphisme donnant la structure de $C_0(X)$ -algèbre sur A et on note V l'action de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G})$. Alors le produit tensoriel de $L^2(\mathcal{G})$ par A au-dessus de $C_0(X)$:

$$L^2(\mathcal{G}) \otimes_{\Phi} A$$

est un A -module \mathcal{G} -équivariant d'action $V \otimes \alpha$. La fibre de $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{\Phi} A$ en $x \in X$ est isomorphe à $L^2(\mathcal{G}_x) \otimes_{\mathbb{C}} A_x$.

Exemple 1.3.68. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar $\{\lambda_x \mid x \in X\}$, A une \mathcal{G} -algèbre et (E, V') un A -module \mathcal{G} -équivariant. On note V l'action de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G})$.

La structure de $C_0(X)$ -algèbre de A induit, après avoir identifié E avec EA , un $*$ -homomorphisme :

$$\Phi : \begin{cases} C_0(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}_A(E) \\ \varphi & \longmapsto & [ea \mapsto e(a\varphi)] \end{cases}.$$

On montre que le produit tensoriel de $L^2(\mathcal{G})$ par E au-dessus de $C_0(X)$:

$$L^2(\mathcal{G}) \otimes_{\Phi} E$$

est un A -module \mathcal{G} -équivariant d'action $V \otimes V'$. La fibre de $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ en $x \in X$ est isomorphe à $L^2(\mathcal{G}_x, \lambda_x) \otimes_{\mathbb{C}} E_x$. On peut construire explicitement $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{\Phi} E$ comme étant la complétion du A -module $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ pour le produit scalaire à valeurs dans A donné pour tous $f, g \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ et $x \in X$ par :

$$\langle f, g \rangle_A(x) = \int_{\mathcal{G}^x} \langle f(\gamma^{-1}), g(\gamma^{-1}) \rangle_{A_x} d\lambda^x(\gamma),$$

et muni de l'action de A à droite donnée pour tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$, $a \in A$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(f \cdot a)(\gamma) = f(\gamma)\alpha_{\gamma^{-1}}(a(r(\gamma))).$$

On montre que l'application $\Psi : L^2(\mathcal{G}) \otimes_{\Phi} E \rightarrow \overline{\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})}$ définie pour tous $f \in C_c(\mathcal{G})$, $e \in E$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\Psi(f \otimes e)(\gamma) = f(\gamma)V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma)))$$

est un isomorphisme de A -modules de Hilbert.

Définition 1.3.69. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact et (E, V) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ est \mathcal{G} -équivariant si pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$T_{r(\gamma)} = V_\gamma \circ T_{s(\gamma)} \circ V_{\gamma^{-1}}.$$

L'ensemble des opérateurs \mathcal{G} -équivariants de $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ sera noté $\left(\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)\right)^\mathcal{G}$.

Définition 1.3.70. Soient A et B deux $C_0(X)$ -algèbres. Une $C_0(X)$ -représentation de A est la donnée d'un B -module de Hilbert à droite E et d'un $*$ -homomorphisme $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(E)$ tels que pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $a \in A$, $e \in E$ et $x \in X$:

$$\pi(a\varphi)(e) = \pi(a)(e\varphi).$$

Si $x \in X$, la représentation π induit une représentation π_x sur les fibres :

$$\pi_x : A_x \rightarrow \mathcal{L}_{B_x}(E_x).$$

En effet, si $a \in A$, l'opérateur $\pi(a) \in \mathcal{L}_B(E)$ induit un opérateur $\pi(a)_x \in \mathcal{L}_{B_x}(E_x)$. On peut ainsi définir une représentation $\pi_x : A_x \rightarrow \mathcal{L}_{B_x}(E_x)$ en posant pour tout $a(x) \in A_x$:

$$\pi_x(a(x)) := \pi(a)_x,$$

ce qui permet d'obtenir, pour tous $x \in X$, $a \in A$, $e \in E$, l'égalité :

$$\left(\pi(a)(e)\right)_x = \pi_x(a(x))(e(x)).$$

Remarque 1.3.71. On rappelle que si $\rho : Y \rightarrow X$ est une application continue, alors $C_0(Y)$ est muni d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre via l'application $\Phi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(Y)}(C_0(Y))$ définie pour tous $f \in C_0(X)$, $g \in C_0(Y)$ et $y \in Y$ par :

$$\Phi(f)(g)(y) = f(\rho(y))g(y).$$

Lemme 1.3.72. Soient A une $C_0(X)$ -algèbre, E un $C_0(X)$ -module de Hilbert et $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée. Alors pour tout $x \in X$, la représentation :

$$\pi_x : A_x \rightarrow \mathcal{L}_\mathbb{C}(E_x)$$

est non-dégénérée.

Démonstration. Soient $x \in X$, $e(x) \in E_x$ et $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse $e' \in E$, $a \in A$ tels que $\|e - \pi(a)(e')\| < \varepsilon$, donc :

$$\|e(x) - \pi_x(a(x))(e'(x))\| \leq \sup_{y \in X} \|e(y) - \pi_y(a(y))(e'(y))\| = \sup_{y \in X} \|(e - \pi(a)(e'))(y)\| =: \|e - \pi(a)(e')\| < \varepsilon.$$

■

Définition 1.3.73. Soient (A, α) une \mathcal{G} -algèbre et (E, V) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant. Une $C_0(X)$ -représentation $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ est \mathcal{G} -équivariante si pour tous $\gamma \in \mathcal{G}$ et $a \in A_{s(\gamma)}$:

$$\pi_{r(\gamma)}(\alpha_\gamma(a)) = V_\gamma \circ \pi_{s(\gamma)}(a) \circ V_{\gamma^{-1}}.$$

1.4 Produit croisé par un groupoïde

Dans cette partie, on construit le produit croisé réduit d'un groupoïde étale (\mathcal{G}, X) par une $C_0(X)$ -algèbre A (voir [33]). L'idée est de compléter l'espace des sections continues à supports compacts $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$ pour une certaine norme et ainsi former le produit croisé de A par \mathcal{G} , noté $A \rtimes_r \mathcal{G}$. Commençons tout d'abord par munir $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$ d'une structure d'algèbre involutive.

Proposition 1.4.1. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et (A, α) une \mathcal{G} -algèbre. Soit \mathcal{A} le fibré s.c.s. associé à A . Alors, muni des opérations suivantes, $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$ est une algèbre involutive (voir [33] p.17 pour la démonstration) :

$$f_1 \star f_2(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}^{r(\gamma)}} f_1(\eta) \alpha_\eta(f_2(\eta^{-1}\gamma)) \quad \text{et} \quad f^*(\gamma) = \alpha_\gamma(f(\gamma^{-1})^*),$$

où $f_1, f_2 \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$.

Dans la suite, on utilise les conventions de [58] p. 22. On rappelle que $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} A$ s'identifie (voir exemple 1.3.68 avec $E = A$) au complété de $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*A)$ pour le produit scalaire défini pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*A)$ et $x \in X$ par :

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_A(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \xi_1(\gamma^{-1})^* \xi_2(\gamma^{-1}).$$

Soit $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$. L'opérateur $\lambda(f) : \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*A) \rightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*A)$ définit pour tous $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*A)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(\lambda(f)\xi)(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}^{r(\gamma)}} \alpha_{\gamma^{-1}}(f(\eta)) \xi(\eta^{-1}\gamma)$$

s'étend en un opérateur adjoignable sur $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} A$. On obtient ainsi une représentation fidèle de $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$ sur l'ensemble des opérateurs adjoignables de $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} A$.

Définition 1.4.2 (Produit croisé $A \rtimes_r \mathcal{G}$). Le produit croisé réduit de A par \mathcal{G} , noté $A \rtimes_r \mathcal{G}$, est le complété de $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*A)$ pour la norme $\|\lambda(\cdot)\|$.

1.5 Principe d'induction

Dans cette partie, on rappelle la construction du principe d'induction pour les algèbres et les modules de Hilbert. Les définitions et résultats sont en grande partie issues de [10].

1.5.1 Induction d'espace et d'algèbre

Définition 1.5.1 (\mathcal{G} -Espace induit). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact et (\mathcal{H}, Y) un sous-groupoïde fermé de \mathcal{G} . Soit Z un \mathcal{H} -espace à droite d'application d'ancrage $\rho : Z \rightarrow Y$. On rappelle que :

$$Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} := \{(z, \gamma) \in Z \times \mathcal{G} \mid \rho(z) = r(\gamma)\}.$$

Le groupoïde \mathcal{H} agit sur $Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$ où l'ancre $\rho' : Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow Y$ et l'action à droite sont définies pour tous $(z, \gamma) \in Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$ et $\eta \in \mathcal{H}^{\rho(z)}$ par :

$$\rho'(z, \gamma) := \rho(z) = r(\gamma) \quad \text{et} \quad (z, \gamma)\eta := (z\eta, \eta^{-1}\gamma).$$

L'espace induit est l'espace des orbites de l'action de \mathcal{H} sur $Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$:

$$Z \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} := Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} / \mathcal{H}.$$

En supposant que les applications s et r sont ouvertes, on montre que l'action de \mathcal{H} sur $Z \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ est propre (voir [10]).

Définition 1.5.2 (*\mathcal{G} -algèbre induite*). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde localement compact et \mathcal{H} un sous-groupoïde fermé de (\mathcal{G}, X) . Soit A une \mathcal{H} -algèbre d'action α . Considérons le \mathcal{H} -espace à droite $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$ où l'ancre est donnée par $s|_Y : Y \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$. Soit \mathcal{A} le fibré s.c.s. au-dessus de $\mathcal{H}^{(0)}$ associé à A . On suppose que :

- $\mathcal{H}^{(0)}$ est fermé dans X (ce qui assurera que l'action de \mathcal{H} sur Y soit propre) ;
- les applications r et s sont ouvertes (ce qui assurera que le quotient Y/\mathcal{G} soit séparé).

On définit l'*algèbre induite de A* , notée $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A, \alpha)$ ou plus simplement $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$, comme l'ensemble des sections continues bornées $f : Y \rightarrow (s|_Y)^*\mathcal{A}$ telles que :

- (i) pour tous $y \in Y$ et $\gamma \in \mathcal{H}_{s(y)}$, on a $\alpha_\gamma(f(y)) = f(y\gamma^{-1})$;
- (ii) l'application $y\mathcal{H} \mapsto \|f(y)\|_{A_{s(y)}}$ est dans $C_0(Y/\mathcal{H})$.

$\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A, \alpha)$ est une C^* -algèbre en tant que sous-algèbre involutive fermée de $\Gamma_b(Y, (s|_Y)^*\mathcal{A})$.

Soit $x \in X$. Notons $Y^x := Y \cap \mathcal{G}^x$. On définit de manière similaire $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{Y^x}(A)$ comme l'ensemble des sections continues bornées $f : Y^x \rightarrow (s|_{Y^x})^*\mathcal{A}$ telles que :

- (i) pour tous $y \in Y^x$ et $\gamma \in \mathcal{H}_{s(y)}$, on a $\alpha_\gamma(f(y)) = f(y\gamma^{-1})$;
- (ii) l'application $y\mathcal{H} \mapsto \|f(y)\|_{A_{s(y)}}$ est dans $C_0(Y^x/\mathcal{H})$.

Théorème 1.5.3. Reprenons les notations de la définition précédente. Alors $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$ est une $C_0(X)$ -algèbre et pour tout $x \in X$:

$$\left(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A) \right)_x \simeq \text{Ind}_{\mathcal{H}}^{Y^x}(A).$$

De plus, la famille de $*$ -isomorphismes $(\beta_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ donnée pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\beta_\gamma : \begin{cases} \text{Ind}_{\mathcal{H}}^{Y^{s(\gamma)}}(A) & \longrightarrow & \text{Ind}_{\mathcal{H}}^{Y^{r(\gamma)}}(A) \\ f & \longmapsto & [y \mapsto f(\gamma^{-1}y)] \end{cases}$$

définit une action du groupoïde \mathcal{G} sur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{H}^{(0)}$ est fermé dans X , alors Y est fermé dans \mathcal{G} et donc $Y \rtimes \mathcal{H}$ est un sous-groupoïde fermé du groupoïde propre $\mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ (voir exemple 1.3.12). D'après le lemme 1.3.7, le groupoïde $Y \rtimes \mathcal{H}$ est alors propre donc par définition l'action de \mathcal{H} sur Y est propre. On définit une application $\bar{r} : Y/\mathcal{H} \rightarrow X$ en posant pour tout $y \in Y$:

$$\bar{r}(y\mathcal{H}) := r|_Y(y).$$

Cette application correspond à l'application d'ancrage associée à l'action de \mathcal{G} sur Y/\mathcal{H} . L'action de \mathcal{H} sur Y est propre donc $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$ est une $C_0(Y/\mathcal{H})$ -algèbre. En utilisant la construction du push-forward (voir exemple 1.3.23), on munit $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$ d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre. L'action de $C_0(X)$ sur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$ est donnée pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $f \in \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(\varphi \cdot f)(\gamma) = \varphi(r(\gamma))f(\gamma).$$

Le reste du théorème a été démontré dans [10] (voir lemme 3.19 et la proposition 3.20). ■

Proposition 1.5.4 ([10]). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et \mathcal{H} un sous-groupoïde fermé de (\mathcal{G}, X) . Soit U un \mathcal{H} -espace d'ancre $\rho : U \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$. Alors $C_0(U)$ est une \mathcal{H} -algèbre. Considérons le \mathcal{H} -espace à droite $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$. Alors on a un isomorphisme canonique :

$$\psi : \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(C_0(U)) \rightarrow C_0(U \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G})$$

donné pour tous $f \in \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(C_0(U))$, $u \in U$ et $\gamma \in \mathcal{G}^{\rho(u)}$ par :

$$\psi(f)([u, \gamma]) = (f(\gamma^{-1}))(u).$$

1.5.2 Induction de modules de Hilbert

Dans la suite, on suit la construction de [10] et on s'y réfère pour plus de détails. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale, \mathcal{H} un sous-groupoïde propre et ouvert de \mathcal{G} que l'on suppose également fermé dans $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$.⁷ Soient B une \mathcal{G} -algèbre d'action β et \mathcal{B} son fibré s.c.s. Soient $i : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ l'injection naturelle et $i_0 : \mathcal{H}^{(0)} \rightarrow X$ l'application entre les bases des groupoïdes. On rappelle que $B_{|\mathcal{H}^{(0)}} := \Gamma(\mathcal{H}^{(0)}, i_0^* \mathcal{B})$. Le sous-groupoïde \mathcal{H} agit à droite sur Y par multiplication et l'ancre est donnée par $s|_Y : Y \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$.

Soit (E, V) un $B_{|\mathcal{H}^{(0)}}$ -module \mathcal{H} -équivariant. Posons $\mathcal{E} = \bigsqcup_{x \in X} E_x$. On note E_c l'ensemble des sections continues bornées $\xi : Y \rightarrow (s|_Y)^* \mathcal{E}$ telles que :

- (i) pour tous $y \in Y$ et $\gamma \in \mathcal{H}_{s(y)}$, on a $V_\gamma(\xi(y)) = \xi(y\gamma^{-1})$;
- (ii) l'application $y\mathcal{H} \rightarrow \|\xi(y)\|_{E_{s(y)}}$ est à support compact dans Y/\mathcal{H} .

Commençons par identifier B avec $\Gamma_0(X, \mathcal{B})$. On définit sur E_c un produit scalaire à valeurs dans B en posant pour tous $\xi_1, \xi_2 \in E_c$ et $x \in X$:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{B(x)} = \sum_{y\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \beta_y \left(\langle \xi_1(y), \xi_2(y) \rangle_{B_{s(y)}} \right)$$

La condition (ii) assure que cette somme est bien finie et on montre que $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_B$ est un élément de $\Gamma_c(X, \mathcal{B})$. On définit une action à droite de B sur E_c en posant pour tous $\xi \in E_c, b \in B$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$(\xi \cdot b)(\gamma) = \xi(\gamma) \beta_{\gamma^{-1}}(b(r(\gamma)))$$

et qui vérifie $\langle \xi_1, \xi_2 \cdot b \rangle_B = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_B b$.

Définition 1.5.5. L'espace induit de E , noté $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E, V)$ ou plus simplement $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E)$, est le complété de E_c pour le produit scalaire défini précédemment.

Pour pouvoir définir une action de \mathcal{G} sur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E, V)$, nous allons avoir besoin d'identifier la fibre de $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E, V)$. Soit $x \in X$; posons $Y^x := Y \cap \mathcal{G}^x$. On note E_c^x l'ensemble des sections continues bornées $\xi : Y^x \rightarrow (s|_Y)^* \mathcal{E}$ telles que :

- (i) pour tous $y \in Y^x$ et $\gamma \in \mathcal{H}$ tels que $s(y) = s(\gamma)$, on a $V_\gamma(\xi(y)) = \xi(y\gamma^{-1})$;
- (ii) l'application $y\mathcal{H} \rightarrow \|\xi(y)\|_{E_{s(y)}}$ est à support compact dans Y^x/\mathcal{H} .

On définit sur E_c^x un produit scalaire à valeurs dans B_x en posant pour tous $\xi_1, \xi_2 \in E_c^x$ et $x \in X$:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{B_x} = \sum_{y\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \beta_y \left(\langle \xi_1(y), \xi_2(y) \rangle_{B_{s(y)}} \right).$$

On définit une action à droite de B_x sur E_c^x en posant pour tous $\xi \in E_c^x, b(x) \in B_x$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$(\xi \cdot b(x))(\gamma) = \xi(\gamma) \beta_{\gamma^{-1}}(b(x))$$

et qui vérifie $\langle \xi_1, \xi_2 \cdot b(x) \rangle_{B_x} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{B_x} b(x)$. Le complété de E_c^x par rapport au produit scalaire défini précédemment s'identifie à la fibre de $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E)$ en x (voir [10]). Une fois cette identification faite, on peut définir une action de \mathcal{G} sur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E)$.

Définition 1.5.6. L'action de \mathcal{G} sur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E)$ est donnée par la famille $(W_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ où pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$W_\gamma : \begin{cases} (\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E))_{s(\gamma)} & \longrightarrow & (\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E))_{r(\gamma)} \\ \xi & \longmapsto & [y \mapsto \xi(\gamma^{-1}y)] \end{cases}.$$

L'espace $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E)$ est alors muni d'une structure de B -module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant.

⁷ L'hypothèse \mathcal{H} ouvert dans \mathcal{G} assure que pour tout $x \in X$, le quotient Y^x/\mathcal{H} est discret et l'hypothèse \mathcal{H} fermée dans Y assure que l'action de \mathcal{H} sur Y est propre.

Proposition 1.5.7. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et \mathcal{H} un sous-groupoïde propre et ouvert-fermé de \mathcal{G} . Soient (A, α) une \mathcal{H} -algèbre, (B, β) une \mathcal{G} -algèbre et $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$. Soient E un $B|_{\mathcal{H}^{(0)}}$ -module de Hilbert \mathcal{H} -équivariant. On considère une $C_0(\mathcal{H}^{(0)})$ -représentation \mathcal{H} -équivariante :

$$\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_{B|_{\mathcal{H}^{(0)}}}(E).$$

Alors la représentation π induit une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante $\pi' : \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A) \rightarrow \mathcal{L}_B(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E))$ donnée pour tous $f \in \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$, $\xi \in E_c$ et $y \in Y$ par :

$$(\pi'(f)\xi)(y) = \pi_{s(y)}(f(y))\xi(y).$$

Démonstration. Soient $f \in \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(A)$, $\xi \in E_c$ et $y \in Y$. L'application $\pi'(f)\xi$ est une section continue bornée et on a pour tous $y \in Y$ et $\gamma \in \mathcal{H}$ tels que $s(y) = s(\gamma)$:

$$\begin{aligned} V_\gamma(\pi'(f)\xi(y)) &= V_\gamma(\pi_{s(\gamma)}(f(y))\xi(y)) \\ &= \pi_{r(\gamma)}(\alpha_\gamma(f(y)))V_h(\xi(y)) \\ &= \pi_{s(y\gamma^{-1})}(f(y\gamma^{-1}))\xi(y\gamma^{-1}) \\ &= \pi'(f)\xi(y\gamma^{-1}). \end{aligned}$$

De plus, l'application $y\mathcal{H} \rightarrow \|\pi_{s(y)}(f(y))\xi(y)\|$ est à support compact dans Y/\mathcal{H} car $y\mathcal{H} \rightarrow \|\xi(y)\|$ l'est. On montre que l'opérateur $\pi'(f)$ est borné et donc s'étend en un opérateur adjoignable sur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E)$ d'adjoint $\pi'(\bar{f})$. De plus la représentation π' est \mathcal{G} -équivariante. En effet, on a pour tous $\gamma \in \mathcal{G}$, $f \in \text{Ind}_{\mathcal{H}}^{Y^{s(\gamma)}}(A)$, $\xi \in E_c^{r(\gamma)}$ et $y \in Y^{r(\gamma)}$:

$$\begin{aligned} (W_\gamma \circ \pi'_{s(\gamma)}(f) \circ W_{\gamma^{-1}}(\xi))(y) &= W_\gamma(\pi'_{s(\gamma)}(f)(W_{\gamma^{-1}}(\xi)))(y) \\ &= (\pi'_{s(\gamma)}(f)(W_{\gamma^{-1}}(\xi)))(\gamma^{-1}y) \\ &= \pi_{s(\gamma)}(f(\gamma^{-1}y))(W_{\gamma^{-1}}(\xi)(\gamma^{-1}y)) \\ &= \pi_{s(\gamma)}(f(\gamma^{-1}y))\xi(y) \\ &= \pi_{s(\gamma)}(\beta_\gamma(f)(y))\xi(y) \\ &= (\pi'_{r(\gamma)}(\beta_\gamma(f))(\xi))(y). \end{aligned}$$

■

Lemme 1.5.8. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et \mathcal{H} un sous-groupoïde propre et ouvert-fermé de \mathcal{G} . Soient (B, β) une \mathcal{G} -algèbre et $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$. Soient E et E' deux $B|_{\mathcal{H}^{(0)}}$ -modules de Hilbert \mathcal{H} -équivariants et $T \in \mathcal{L}_{C_0(B|_{\mathcal{H}^{(0)}})}(E, E')$. Alors T induit un opérateur :

$$\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T) \in \mathcal{L}_B(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E), \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E')),$$

défini pour tous $\xi \in E_c$ et $y \in Y$ par :

$$(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)(\xi))(y) = T_{s(y)}(\xi(y)).$$

De plus, si T est une isométrie, alors $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)$ aussi.

Démonstration. L'opérateur $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)$ définit bien un élément dans $\mathcal{L}_B(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E), \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(E'))$ (voir

[10] p. 93). Si T est une isométrie, alors pour tous $\xi_1, \xi_2 \in E_c$ et $x \in X$:⁸

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)(\xi_1), \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)(\xi_2) \right\rangle_B(x) &= \sum_{y \in Y^x / \mathcal{H}} \beta_y \left(\left\langle \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)(\xi_1)(y), \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)(\xi_2)(y) \right\rangle_{B_{s(y)}} \right) \\
 &= \sum_{y \in Y^x / \mathcal{H}} \beta_y \left(\left\langle T_{s(y)}(\xi_1(y)), T_{s(y)}(\xi_2(y)) \right\rangle_{B_{s(y)}} \right) \\
 &= \sum_{y \in Y^x / \mathcal{H}} \beta_y \left(\left\langle \xi_1(y), \xi_2(y) \right\rangle_{B_{s(y)}} \right) \\
 &= \left\langle \xi_1, \xi_2 \right\rangle_B(x),
 \end{aligned}$$

et donc $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)$ est une isométrie. ■

Si (\mathcal{G}, X) est un groupoïde étale et H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, on note $C_c(\mathcal{G}, H)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact $f : \mathcal{G} \rightarrow H$. On définit sur $C_c(\mathcal{G}, H)$ un produit scalaire à valeurs dans $C_0(X)$ en posant pour tous $f, g \in C_c(\mathcal{G}, H)$ et $x \in X$:

$$\left\langle f, g \right\rangle_{C_0(X)}(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \left\langle f(\gamma^{-1}), g(\gamma^{-1}) \right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

On définit une action à droite de $C_0(X)$ sur $C_c(\mathcal{G}, H)$ en posant pour $f \in C_c(\mathcal{G}, H), \varphi \in C_0(X)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$(f \cdot \varphi)(\gamma) = f(\gamma)\varphi(s(\gamma)).$$

On notera $L^2(\mathcal{G}, H)$, le complété de $C_c(\mathcal{G}, H)$ pour le produit scalaire défini précédemment qui est alors muni d'une structure de $C_0(X)$ -module de Hilbert.

On donne à présent une généralisation du principe d'absorption de Fell (voir proposition C.2.1 dans [55] pour l'énoncé) dans le cas d'un groupoïde étale et d'un module de Hilbert particulier.

Lemme 1.5.9 (Principe d'absorption). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale, Y un compact-ouvert de X et H un espace de Hilbert. Considérons le $C_0(X)$ -module $E = H \otimes_{\mathbb{C}} C(Y)$. Supposons qu'il existe une action de \mathcal{G} sur E c'est-à-dire la donnée pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ d'un unitaire $V_\gamma : H \rightarrow H$ vérifiant les conditions de continuité et de composition. Soit E_T le même module que E mais muni de l'action triviale de \mathcal{G} .⁹ Alors on a l'isomorphisme \mathcal{G} -équivariant de $C_0(X)$ -modules de Hilbert :

$$L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E \simeq L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E_T.$$

Démonstration. Notons U l'action de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G})$. L'action de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ est donnée par l'action diagonale c'est-à-dire $(U_\gamma \otimes V_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ et celle de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E_T$ par $(U_\gamma \otimes 1)_{\gamma \in \mathcal{G}}$. On identifie à présent $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ (resp. $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E_T$) avec $L^2(\mathcal{G}_Y, H)$ (resp. $L^2(\mathcal{G}_Y, H)_T$) grâce à l'isomorphisme \mathcal{G} -équivariant de $C_0(X)$ -modules de Hilbert défini sur le tenseur élémentaire :

$$f \otimes h \otimes \varphi \mapsto \left[\gamma \mapsto f(\gamma)\varphi(s(\gamma))h \right].$$

Les actions de \mathcal{G} sur $L^2(\mathcal{G}_Y, H)$ et $L^2(\mathcal{G}_Y, H)_T$ sont notées W et W^T respectivement et sont définies pour tous $\gamma \in \mathcal{G}, f \in C_c(\mathcal{G}_{s(\gamma)}, H)$ et $\gamma' \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}$ par :

$$\left(W_\gamma(f) \right)(\gamma') = V_\gamma(f(\gamma'\gamma)) \quad \text{et} \quad \left(W_\gamma^T(f) \right)(\gamma') = f(\gamma'\gamma).$$

8. Rappelons que $T : E \rightarrow E$ est une isométrie si et seulement si $T_x : E_x \rightarrow E_x$ est une isométrie pour tout $x \in X$.

9. Cela veut dire que les fibres de E_T sont isomorphes à H et, une fois ces identifications faites, l'unitaire associé à l'action de \mathcal{G} sur E_T est donné pour tout γ par id_H .

L'application $\Phi : \begin{cases} L^2(\mathcal{G}_Y, H) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{G}_Y, H)_T \\ f & \longmapsto & [\gamma \mapsto V_\gamma(f(\gamma))] \end{cases}$ est un isomorphisme de $C_0(X)$ -modules de Hilbert, d'inverse $\Phi^{-1} : \begin{cases} L^2(\mathcal{G}_Y, H)_T & \longrightarrow & L^2(\mathcal{G}_Y, H) \\ g & \longmapsto & [\eta \mapsto V_{\eta^{-1}}(g(\eta))] \end{cases}$, et \mathcal{G} -équivariant car :

$$\begin{aligned} \Phi_{r(\gamma)}(W_\gamma(f))(\gamma') &= V_{\gamma'}(W_\gamma(f)(\gamma')) \\ &= V_{\gamma'}(V_\gamma(f(\gamma'\gamma))) \\ &= V_{\gamma'\gamma}(f(\gamma'\gamma)) \\ &= \Phi_{s(\gamma)}(f)(\gamma'\gamma) \\ &= W_\gamma^T(\Phi_{s(\gamma)}(f))(\gamma'). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.5.10. Moins formellement, nous pourrions dire que ce principe assure que le module standard $L^2(\mathcal{G})$ « absorbe par produit tensoriel » l'action de n'importe quel autre module de Hilbert de la forme $H \otimes_{\mathbb{C}} C(Y)$ où H est un espace de Hilbert et Y un compact-ouvert de la base de \mathcal{G} .

Chapitre 2

Champs de complexes simpliciaux

Ce chapitre est consacré à l'étude des complexes simpliciaux munis d'une action de groupoïdes (voir définition 2.1.2). Nous y construisons notamment une partie génératrice de la topologie de la réalisation géométrique associée à ces complexes simpliciaux. Nous terminons ce chapitre en étudiant les propriétés associées à ces actions ainsi qu'un cas particulier important vérifiant toutes les propriétés voulues : le complexe de Rips.

2.1 Réalisation géométrique, squelettes et centres

Nous commençons par présenter la notion de simplexe standard, puis nous introduisons la notion de champ de complexes simpliciaux équivariants par rapport à un groupoïde étale. Nous introduisons également d'autres notions indispensables pour ce qui va suivre telles que les coordonnées barycentriques, la réalisation géométrique, la subdivision barycentrique, les squelette et les centres.

Définition 2.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le n -simplexe standard σ_n est le sous-ensemble de \mathbb{R}^{n+1} défini par :

$$\sigma_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ et } t_i \geq 0, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}.$$

On peut aussi définir de façon équivalente σ_n comme étant l'enveloppe convexe de la base canonique (e_0, \dots, e_n) de \mathbb{R}^{n+1} c'est-à-dire :

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ et } t_i \geq 0, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}.$$

Les réels t_0, \dots, t_n sont appelés les coordonnées barycentriques.¹⁰

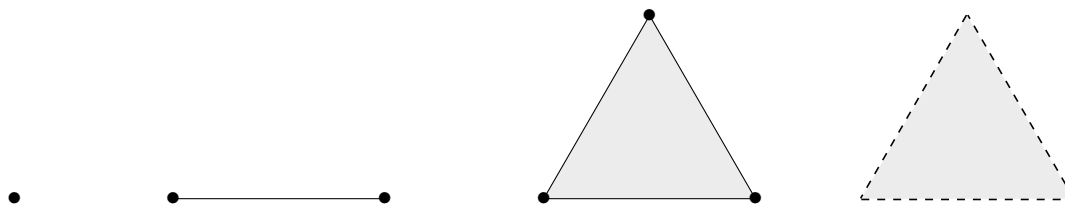


FIGURE 2.1 – De gauche à droite : $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ et σ_2° .

Définition 2.1.2 (\mathcal{G} -complexe simplicial). Soient $n \in \mathbb{N}$ et \mathcal{G} un groupoïde étale de base X . Un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n ou simplement \mathcal{G} -complexe simplicial, est la donnée

¹⁰. L'intérieur de σ_n est alors $\sigma_n^\circ = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ et } t_i > 0, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

d'un couple (Y, Δ) où Y est un \mathcal{G} -espace à droite localement compact (l'ensemble des sommets) et Δ est une collection de sous-ensembles non vides de Y , chacun de cardinal au plus $n + 1$ appelés simplexes, vérifiant :

- 1) pour tout $\sigma \in \Delta$, il existe $x \in X$ tel que $\sigma \subseteq \rho^{-1}(x)$;
- 2) pour tout $\sigma = \{y_0, \dots, y_m\} \in \Delta$, pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $r(\gamma) = \rho(y_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a $\sigma \cdot \gamma := \{y_0\gamma, \dots, y_m\gamma\} \in \Delta$;
- 3) l'application d'ancrage $\rho : Y \rightarrow X$ est un homéomorphisme local c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$ il existe un ouvert $U \subseteq Y$ contenant y tel que $\rho|_U : U \rightarrow \rho(U)$ est un homéomorphisme sur un ouvert de X ;
- 4) si $\sigma \in \Delta$ et σ' est un sous-ensemble non vide de σ , alors $\sigma' \in \Delta$;
- 5) pour tout simplexe $\sigma := \{y_0, \dots, y_m\}$ avec $x \in X$ tel que $\sigma \subseteq \rho^{-1}(x)$, il existe un voisinage ouvert $V \subseteq X$ de x et des applications continues appelées *sections* $s_0, \dots, s_m : V \rightarrow Y$ telles que :
 - (a) $\rho \circ s_i = \text{id}_V$ et $y_i = s_i(x)$ pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$,
 - (b) $\{s_0(v), \dots, s_m(v)\} \in \Delta$ pour tout $v \in V$.

Dans toute cette thèse, l'ensemble des sommets Y sera automatiquement supposé σ -compact.

Remarque 2.1.3. Si on suppose \mathcal{G} ample, alors on peut choisir le voisinage V de x de la condition 5) compact-ouvert. De plus, l'application d'ancrage $\rho : Y \rightarrow X$ vérifie : pour tout $y \in Y$ il existe un compact-ouvert $U \subseteq Y$ contenant y tel que $\rho|_U : U \rightarrow \rho(U)$ est un homéomorphisme sur un compact-ouvert de X .

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On appelle *j -simplexe dans Δ* tout sous-ensemble $\sigma \in \Delta$ de cardinal $j + 1$. Si on a $\sigma = \{y_0, \dots, y_m\} \in \Delta$, les éléments y_0, \dots, y_m sont appelés *sommets de σ* .

Dans la suite, on rappelle que l'on note $Y_x := \{y \in Y \mid \rho(y) = x\}$ pour tout $x \in X$.

Définition 2.1.4. Soit \mathcal{G} un groupoïde étale. On dit qu'un \mathcal{G} -complexe simplicial (Y, Δ) est :

- *\mathcal{G} -compact* si Y est \mathcal{G} -compact;
- *propre* si l'action de \mathcal{G} sur Y est propre;
- *typé* s'il existe une partie finie T de \mathbb{N} et une application continue et \mathcal{G} -invariante $\tau : Y \rightarrow T$ ¹¹ telles que pour tout simplexe $\sigma \in \Delta$, les images par τ des sommets de σ sont deux à deux distincts;
- *localement fini* si pour tout $y \in Y$, l'ensemble :

$$\left\{ y' \in Y_{\rho(y)} \mid \{y, y'\} \in \Delta \right\}$$

est fini; ce qui est donc une condition fibre à fibre.

Nous allons définir la réalisation géométrique d'un \mathcal{G} -complexe simplicial. Pour ce faire, nous faisons quelques rappels sur $P(Y)$. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Y un \mathcal{G} -espace localement compact dont l'application d'ancrage $\rho : Y \rightarrow X$ est un homéomorphisme local. On note $P(Y)$ l'ensemble des mesures de probabilités pour lesquelles il existe un unique $x \in X$ tel que $\text{supp}(\mu) \subseteq Y_x$. On peut donc définir une application d'ancrage $\tilde{\rho} : P(Y) \rightarrow X$ et l'action à gauche de \mathcal{G} sur $P(Y)$ est définie pour tout borélien $U \subseteq Y_{\tilde{\rho}(\mu)}$, pour tous $\mu \in P(Y)$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}$ par :

$$(\gamma \cdot \mu)(U) = \mu(U\gamma).$$

Soient $\mu \in P(Y)$ et $x := \tilde{\rho}(\mu)$. La mesure μ s'écrit :

11. $\tau : Y \rightarrow T$ est \mathcal{G} -invariante dans le sens où l'on a l'égalité $\tau(y\gamma) = \tau(y)$ pour tout $(y, \gamma) \in Y \times_{\rho, r} \mathcal{G}$.

$$\mu = \sum_{y \in Y_x} \lambda_y(\mu) \delta_y \quad \text{avec} \quad \text{supp}(\mu) = \left\{ y \in Y \mid \lambda_y(\mu) \neq 0 \right\},$$

où δ_y est la mesure de Dirac au point $y \in Y_x$ et $\lambda_y(\mu) \in [0; 1]$ est appelé *coordonnée barycentrique* de μ suivant y , elle vérifie :

- $\sum_{y \in Y_x} \lambda_y(\mu) = 1$;
- $\lambda_y(\gamma \cdot \mu) = \lambda_{y\gamma}(\mu)$ pour tous $y \in Y$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}^{\rho(y)}$.

Posons pour tout $f \in C_c(Y)$,

$$I_\mu(f) := \int_Y f(y) d\mu = \sum_{y \in \text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(f)} \lambda_y(\mu) f(y).$$

On munit à présent $P(Y)$ de la topologie \star -faible comme suit. On dira qu'une suite (généralisée) $(\mu_\lambda)_\lambda$ dans $P(Y)$ converge vers μ si pour tout $f \in C_c(Y)$, la suite $(I_{\mu_\lambda}(f))_\lambda$ converge vers $I_\mu(f)$. On pose pour $\varepsilon > 0$, $f \in C_c(Y)$ et $\mu \in P(Y)$:

$$W(\mu, f, \varepsilon) := \left\{ \nu \in P(Y) \mid |I_\mu(f) - I_\nu(f)| < \varepsilon \right\}.$$

On définit aussi pour I ensemble fini, $(\varphi_i)_{i \in I} \in C_c(Y)^I$ et $\varepsilon > 0$:

$$W_{\varepsilon, (\varphi_i)_{i \in I}}(\mu) := \bigcap_{i \in I} W(\mu, \varphi_i, \varepsilon).$$

Alors la famille $\left(W_{\varepsilon, (\varphi_i)_{i \in I}}(\mu) \right)_{\varepsilon, I, (\varphi_i)_{i \in I}}$ forme un système fondamental de voisinages ouverts de μ .

Étant donné un \mathcal{G} -complexe simplicial, nous allons construire un espace topologique par recolllements de simplexes que l'on appellera sa réalisation géométrique.

Définition 2.1.5 (Réalisation géométrique). Soient \mathcal{G} un groupoïde étale et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial. La *réalisation géométrique* de (Y, Δ) est le sous-espace de $P(Y)$:

$$|\Delta| = \left\{ \mu \in P(Y) \mid \text{supp}(\mu) \in \Delta \right\}$$

muni de la topologie \star -faible.

Définition 2.1.6 (Simplexe dans la réalisation géométrique). Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Un j -simplexe de $|\Delta|$ est un sous-ensemble de $|\Delta|$ de la forme :

$$\left\{ \mu \in |\Delta| \mid \tilde{\rho}(\mu) = x \text{ et } \text{supp}(\mu) \subseteq \sigma \right\},$$

où $x \in X$ et σ est un j -simplexe dans Δ .

L'action \mathcal{G} sur $P(Y)$ induit une action de \mathcal{G} sur $|\Delta|$. En effet, montrons que $|\Delta|$ est stable par l'action de \mathcal{G} sur $P(Y)$. Soient $\mu \in |\Delta|$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}$. On a

$$y \in \text{supp}(\gamma \cdot \mu) \Leftrightarrow \lambda_y(\gamma \cdot \mu) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_{y\gamma}(\mu) \neq 0 \Leftrightarrow y\gamma \in \text{supp}(\mu) \Leftrightarrow y \in \text{supp}(\mu)\gamma^{-1}$$

donc $\text{supp}(\gamma \cdot \mu) = \text{supp}(\mu)\gamma^{-1}$ et $\text{supp}(\mu)\gamma^{-1}$ est bien un simplexe d'après la condition 2) d'un \mathcal{G} -complexe simplicial, donc $\gamma \cdot \mu$ est un élément de $|\Delta|$.

Exemple 2.1.7. Prenons $\mathcal{G} = \mathbb{Z} = Y$ avec \mathcal{G} agissant par translation sur Y et :

$$\Delta := \left\{ \{n\} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alors (Y, Δ) est un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à 1 et $|\Delta| = \mathbb{R}$. Un domaine fondamental compact, pour l'action de \mathcal{G} sur Y est donné (par exemple) par le singleton $\{0\}$ et un domaine fondamental associé pour l'action de \mathcal{G} sur $|\Delta|$ est $[0; 1]$.

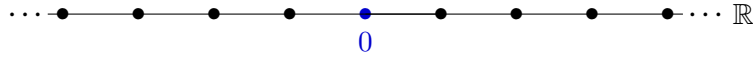


FIGURE 2.2 – En bleu un domaine fondamental pour les sommets.

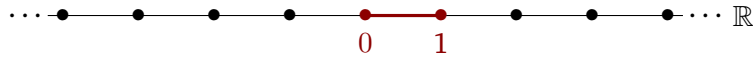


FIGURE 2.3 – En rouge un domaine fondamental pour la réalisation géométrique.

Définition 2.1.8 (Subdivision barycentrique). Soient \mathcal{G} un groupoïde étale et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial. Posons pour tout $\mu \in |\Delta|$,

$$b(\mu) := \frac{1}{\text{Card}(\text{supp}(\mu))} \sum_{y \in \text{supp}(\mu)} \delta_y \in |\Delta|.$$

La *subdivision barycentrique* de (Y, Δ) est la paire (Y', Δ') où :

- $Y' := \{b(\mu) \mid \mu \in |\Delta|\} \subseteq |\Delta|$ et l'action de \mathcal{G} sur Y' est induite par l'action de \mathcal{G} sur $|\Delta|$.¹²
- Un ensemble $\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ est dans Δ' si l'ensemble $\{\text{supp}(\nu_1), \dots, \text{supp}(\nu_k)\}$ est totalement ordonné pour l'inclusion.

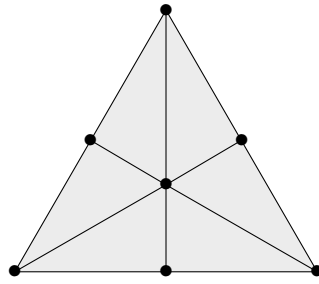


FIGURE 2.4 – La subdivision barycentrique d'un 2-simplexe.

Définition 2.1.9 (Squelette et centre). Soient \mathcal{G} un groupoïde étale et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n . Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Le *j-squelette* de $|\Delta|$, noté Z_j , est le sous-espace de $|\Delta|$ défini par :

$$Z_j := \left\{ \mu \in |\Delta| \mid \text{Card}(\text{supp}(\mu)) \leq j + 1 \right\}.$$

L'espace $Z_j \setminus Z_{j-1}$, lorsque $j \geq 1$, correspond alors à la réunion des j -simplexes de $|\Delta|$. On notera $Z_{-1} := \emptyset$.

- L'ensemble des *centres des j-simplexes* de $|\Delta|$, noté Z'_j , est le sous-espace de $|\Delta|$ défini par :

$$Z'_j := \left\{ b(\mu) \mid \mu \in Z_j \setminus Z_{j-1} \right\}.$$

En particulier, Z'_n représente la réunion des centres des simplexe de taille maximales c'est-à-dire n .

Remarque 2.1.10. Le 0-squelette s'identifie à un sous-ensemble de Y et le n -squelette est égal à $|\Delta|$. De plus, on a la chaîne d'inclusions suivante :

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_{n-1} \subseteq Z_n.$$

12. On vérifie facilement qu'un centre est envoyé sur un centre par l'action de \mathcal{G} , c'est-à-dire que $\gamma \cdot b(\mu) = b(\gamma \cdot \mu)$ pour tous $\mu \in |\Delta|$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\bar{\rho}(\mu)}$.

Lemme 2.1.11. Soient \mathcal{G} un groupoïde étale et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n , \mathcal{G} -compact, propre, et typé. Alors $(Z_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une famille de sous-espaces \mathcal{G} -invariants de $|\Delta|$ telle que pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a l'homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant :

$$Z_j \setminus Z_{j-1} \cong Z'_j \times \sigma_j,$$

où l'action de \mathcal{G} sur σ_j est triviale.

Démonstration. Dans la suite, on fixe $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

• L'égalité :

$$\text{supp}(\gamma\mu) = \text{supp}(\mu)\gamma^{-1}$$

valable pour tous $\mu \in |\Delta|$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}$ assure que Z_j est \mathcal{G} -invariant. Puisque le complexe simplicial est typé, il existe une partie finie T de \mathbb{N} et une application continue \mathcal{G} -invariante $\tau : Y \rightarrow T$ injective sur chaque simplexe. On peut définir le type d'une mesure grâce à τ en posant pour tout $\mu \in Z_j \setminus Z_{j-1}$:

$$\tilde{\tau}(\mu) := \{\tau(y) \mid y \in \text{supp}(\mu)\}.$$

Ceci nous permet d'obtenir une décomposition de $Z_j \setminus Z_{j-1}$:

$$Z_j \setminus Z_{j-1} = \bigsqcup_{i=1}^m U_i$$

où $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille d'ouverts disjoints de $|\Delta|$ telle que l'application $\tilde{\tau}|_{U_i}$ soit constante et U_i soit \mathcal{G} -invariant pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Montrons que l'on a l'homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant :

$$U_i \cong (U_i \cap Z'_j) \times \sigma_j.$$

• Soient $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $\mu \in U_i$. L'ensemble $\tilde{\tau}(\mu)$ étant une partie finie à $j+1$ éléments, il existe des entiers $n_0 < \dots < n_j$ tels que $\tilde{\tau}(\mu) = \llbracket n_0, \dots, n_j \rrbracket$. On pose pour tout $i \in \tilde{\tau}(\mu)$, $y_i := (\tau|_{\text{supp}(\mu)})^{-1}(n_i)$ ¹³.

Alors $\mu = \sum_{i=0}^j \lambda_{y_i}(\mu) \delta_{y_i}$ et chaque coordonnée barycentrique de μ est strictement positive. On définit Φ sur U_i par :

$$\Phi(\mu) := (\mathbf{b}(\mu), (\lambda_{y_0}(\mu), \dots, \lambda_{y_j}(\mu))) \in (U_i \cap Z'_j) \times \sigma_j$$

Pour tous $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}$ et $i \in \llbracket n_0, \dots, n_j \rrbracket$, on a $(\tau|_{\text{supp}(\gamma\mu)})^{-1}(i) = y_i \gamma^{-1}$ donc l'application Φ est \mathcal{G} -équivariante :

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma \cdot \mu) &= (\mathbf{b}(\gamma \cdot \mu), (\lambda_{y_0 \gamma^{-1}}(\gamma \cdot \mu), \dots, \lambda_{y_j \gamma^{-1}}(\gamma \cdot \mu))) \\ &= (\gamma \cdot \mathbf{b}(\mu), ((\lambda_{y_0}(\mu), \dots, (\lambda_{y_j}(\mu))) \\ &= \gamma \cdot \Phi(\mu). \end{aligned}$$

Si s_0, \dots, s_j désignent des sections associées aux sommets de μ alors on remarque que :

$$\mathbf{b}(\mu) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \delta_{s_i \circ \tilde{\rho}(\mu)}$$

donc l'application $\mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$ est continue et comme l'application τ est continue on en déduit que Φ l'est également.

13. L'application $\tau : \begin{cases} \text{supp}(\mu) & \longrightarrow & \tilde{\tau}(\mu) \\ y & \longmapsto & \tau(y) \end{cases}$ est une bijection.

• Réciproquement, on définit une application $\Psi : (U_i \cap Z'_j) \times \sigma_j \rightarrow U_i$ de la manière suivante. Soient $(\mu, (a_0, \dots, a_j)) \in (U_i \cap Z'_j) \times \sigma_j$ et $\nu \in U_i$ tels que $\mu = \mathbf{b}(\nu)$. De même que précédemment, l'ensemble $\tilde{\tau}(\nu)$ étant une partie finie à $j + 1$ éléments, il existe des entiers $n_0 < \dots < n_j$ tels que $\tilde{\tau}(\nu) = \llbracket n_0, \dots, n_j \rrbracket$. On pose pour tout $i \in \tilde{\tau}(\nu)$, $y_i := (\tau|_{\text{supp}(\nu)})^{-1}(n_i)$ et :

$$\Psi\left(\mu, (a_0, \dots, a_j)\right) := \sum_{i=0}^j a_i \delta_{y_i}.$$

De même que précédemment, on peut trouver des sections s_0, \dots, s_j telles que $y_i = s_i \circ \tilde{\rho}(\nu)$ et comme l'application τ est continue, on en déduit que Ψ l'est également. On vérifie facilement que :

$$\Psi \circ \Phi = \text{id}_{U_i} \quad \text{et} \quad \Phi \circ \Psi = \text{id}_{(U_i \cap Z'_j) \times \sigma_j}.$$

On a donc :

$$Z_j \setminus Z_{j-1} = \bigsqcup_{i=1}^m U_i \cong \bigsqcup_{i=1}^m \left[(U_i \cap Z'_j) \times \sigma_j \right] = \left(\bigsqcup_{i=1}^m (U_i \cap Z'_j) \right) \times \sigma_j = Z'_j \times \sigma_j. \quad \blacksquare$$

Proposition 2.1.12. Soient \mathcal{G} un groupoïde étale et (Y, Δ) est un \mathcal{G} -complexe simplicial. Alors (Y', Δ') est un \mathcal{G} -complexe simplicial typé. De plus, il existe un homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant entre $|\Delta|$ et $|\Delta'|$.

Démonstration. Le fait que (Y', Δ') soit un \mathcal{G} -complexe simplicial a été démontré dans [10]. Montrons que (Y', Δ') est typé. On considère l'application :

$$\tau : \begin{cases} Y' & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \mu' & \longmapsto \text{Card}(\text{supp}(\mu')) \end{cases}.$$

Par définition de Δ' , l'application τ est injective sur le support d'un simplexe dans Δ' . Si $\mu' \in Y'$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu')}$, alors en notant $\text{supp}(\mu') = \{y_0, \dots, y_k\}$ on a $\text{supp}(\gamma \cdot \mu') = \{y_0 \gamma^{-1}, \dots, y_k \gamma^{-1}\}$ et donc $\tau(\gamma \cdot \mu') = \tau(\mu')$ c'est-à-dire que τ est \mathcal{G} -équivariante. De plus, τ est localement constante sur chaque intérieur de simplexe, donc elle est continue. On a :

$$|\Delta'| := \left\{ f : Y' \rightarrow [0, 1] \mid \text{supp}(f) \in \Delta' \text{ et } \sum_{\mu' \in Y'} f(\mu') = 1 \right\} \subseteq P(Y').$$

Tout élément $f \in |\Delta'|$ s'écrit donc sous la forme $f = \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{\nu_i}$ où $\{\nu_0, \dots, \nu_n\}$ désigne le support de f et $\lambda_i := f(\nu_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On considère alors l'application bijective (voir [47]) suivante :

$$\Phi : \begin{cases} |\Delta'| & \longrightarrow |\Delta| \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{\nu_i} & \longmapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i \nu_i \end{cases}$$

qui est \mathcal{G} -équivariante car pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $r(\gamma) = \tilde{\rho}(\nu_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a :

$$\Phi \left(\gamma \cdot \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{\nu_i} \right) = \Phi \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{\gamma \cdot \nu_i} \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i (\gamma \cdot \nu_i) = \gamma \cdot \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \nu_i \right) = \gamma \cdot \Phi \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{\nu_i} \right).$$

Les applications Φ et Φ^{-1} sont continues (voir proposition 3.3 p. 153 dans [47]). \blacksquare

D'après la proposition précédente, on pourra donc toujours supposer qu'un \mathcal{G} -complexe simplicial est typé, quitte à le remplacer par sa subdivision barycentrique et supposer que l'application τ est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

2.2 Étude locale et partie génératrice de la topologie

Dans cette partie, on fixe (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n . Le but de cette partie est de construire une partie génératrice de la topologie de la réalisation géométrique d'un complexe simplicial (voir théorème 2.2.6). Comme nous l'avons vu dans la remarque 2.1.3, Y est donc totalement discontinu. On suppose dans la suite que (Y, Δ) est localement fini.¹⁴

Dans toute la suite, on fixe $\mu \in |\Delta|$, $x = \tilde{\rho}(\mu)$ et z_0, \dots, z_m les éléments du support de μ . La mesure μ est contenue dans un nombre fini de simplexes, disons r , que l'on note :

$$\sigma_1 := \{y_0^{(1)}, \dots, y_{n_1}^{(1)}\}, \quad \dots, \quad \sigma_r := \{y_0^{(r)}, \dots, y_{n_r}^{(r)}\}.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 0, n_j \rrbracket$, il existe un triplet $(U_i^{(j)}, V_x^{(i,j)}, s_i^{(j)})$ tel que :

- (i) $U_i^{(j)} \subseteq Y$ est un compact-ouvert contenant $y_i^{(j)}$ tel que $\rho|_{U_i^{(j)}} : U_i^{(j)} \rightarrow \rho(U_i^{(j)})$ est un homéomorphisme sur un compact-ouvert de X ;
- (ii) $V_x^{(i,j)} \subseteq X$ est un voisinage compact-ouvert de x ;
- (iii) $s_i^{(j)} : V_x^{(i,j)} \rightarrow U_i^{(j)}$ est une application continue vérifiant :
 - (a) $\rho \circ s_i^{(j)} = \text{id}_{V_x^{(i,j)}}$ et $y_i^{(j)} = s_i^{(j)}(x)$ pour tous $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n_j \rrbracket$,
 - (b) $\{s_0^{(j)}(v), \dots, s_{n_j}^{(j)}(v)\} \in \Delta$ pour tous $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $v \in V_x^{(i,j)}$.

On obtient un voisinage compact-ouvert de x indépendant des indices i et j en considérant dans la suite la notion de voisinage μ -simplicial.

Définition 2.2.1 (Voisinage μ -simplicial). En gardant les notations précédentes, on dira qu'un voisinage compact-ouvert $V_x \subseteq X$ de x est μ -simplicial s'il vérifie :

- (i) $y_i^{(j)} = s_i^{(j)}(x)$ pour tous $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n_j \rrbracket$;
- (ii) $V_x \subseteq \bigcap_{j=1}^r \bigcap_{i=0}^{n_j} V_x^{(i,j)}$.

On notera parfois V à la place de V_x .

Remarque 2.2.2. (a) D'après la condition (ii) de la définition d'un voisinage μ -simplicial, on déduit que $\rho \circ s_i^{(j)}|_{V_x} = \text{id}_{V_x}$ et que $\{s_0^{(j)}(v), \dots, s_{n_j}^{(j)}(v)\}$ est un simplexe pour tous $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $i \in \llbracket 0, n_j \rrbracket$ et $v \in V_x$.

- (b) Un voisinage ouvert-fermé de x inclus dans un voisinage μ -simplicial de x est encore un voisinage μ -simplicial de x .

Notation. Soient $\mu = \sum_{i=0}^m \lambda_i \delta_{z_i} \in |\Delta|$, $x_0 := \tilde{\rho}(\mu)$ et s_0, \dots, s_m des sections associées aux sommets z_0, \dots, z_m respectivement. Soit V_{x_0} un voisinage μ -simplicial de x_0 . Pour tout $x \in V_{x_0}$, on notera μ_x la mesure de même coordonnées barycentriques que μ « transportée au-dessus de V_{x_0} » grâce aux sections c'est-à-dire :

$$\forall x \in V_{x_0}, \quad \mu_x := \sum_{i=0}^m \lambda_i \delta_{s_i(x)} \quad \text{avec} \quad \text{supp}(\mu_x) \subseteq \rho^{-1}(x).$$

Nous avons à présent les outils nécessaires pour définir les éléments constituant notre partie génératrice de la topologie de $|\Delta|$.

14. Nous verrons dans la suite que cette condition est automatique sous certaines hypothèses.

On distingue deux cas, suivant l'entier $m = \text{Card}(\text{supp}(\mu))$:

- Si $m = 1$ c'est-à-dire que $\mu = \delta_{z_0}$, on pose :

$$S(\mu) := \left\{ W \left(\mu, \chi_{s(V_x)}, \varepsilon \right) \mid 0 < \varepsilon < 1, V_x \text{ voisinage } \mu\text{-simplicial de } x \text{ et } s \text{ section associée à } z_0 \right\}.$$

- Si $m \geq 2$, on pose :

$$\Lambda_{\mu, z_0, \dots, z_m} = \left\{ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \varepsilon_i > 0 \text{ et } \varepsilon_i < \lambda_{z_i}(\mu) < 1 - \varepsilon_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 0, m \rrbracket \right\}.$$

et :

$$S(\mu) := \left\{ \bigcap_{i=0}^m W \left(\mu, \chi_{s_i(V_x)}, \varepsilon_i \right) \mid (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m) \in \Lambda_{\mu, z_0, \dots, z_m}, V_x \text{ voisinage } \mu\text{-simplicial de } x \text{ et } s_i \text{ sections associée à } z_i \right\}$$

Lemme 2.2.3. Tout élément de $S(\mu)$ « fibre au-dessus de V_x » c'est-à-dire que pour tout $W \in S(\mu)$, on a l'inclusion dans $|\Delta|$:

$$W \subseteq (\tilde{\rho})^{-1}(V_x).$$

Démonstration. • Supposons que $m = 1$. Soient $W \left(\mu, \chi_{s(V_x)}, \varepsilon \right) \in S(\mu), \nu \in W \left(\mu, \chi_{s(V_x)}, \varepsilon \right)$. On va montrer que $x_1 := \tilde{\rho}(\nu)$ appartient à V_x . Si par l'absurde, $\text{supp}(\nu) \cap s(V_x) = \emptyset$, alors on obtient $I_\nu(\chi_{s(V_x)}) = 0$ et comme $I_\mu(\chi_{s(V_x)}) = 1$ alors :

$$1 = \left| I_\mu(\chi_{s(V_x)}) - I_\nu(\chi_{s(V_x)}) \right| < \varepsilon$$

ce qui est absurde. Il existe donc $y \in \text{supp}(\nu)$ et $v \in V_x$ tels que $y = s(v)$ avec $\rho(y) = x_1$. On a alors :

$$x_1 = \rho(y) = \rho(s(v)) = v.$$

En particulier, $x_1 \in V_x$.

- Supposons que $m \geq 2$. Soient $W = \bigcap_{i=0}^m W \left(\mu, \chi_{s_i(V_x)}, \varepsilon_i \right) \in S(\mu), \nu \in W$. On va montrer que $x_1 := \tilde{\rho}(\nu)$ appartient à V_x . Supposons par l'absurde que pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket, s_i(V_x) \cap \text{supp}(\nu) = \emptyset$. On a d'une part, $I_\nu(\chi_{s_i(V_x)}) = 0$ et d'autre par $I_\mu(\chi_{s_i(V_x)}) = \lambda_{z_i}(\mu)$ car $s_i(V_x) \cap \text{supp}(\mu) = \{z_i\}$. Donc :

$$\lambda_{z_i}(\mu) = \left| I_\nu(\chi_{s_i(V_x)}) - I_\mu(\chi_{s_i(V_x)}) \right| < \varepsilon_i$$

ce qui est absurde. Il existe donc $i_0 \in \llbracket 0, m \rrbracket, y \in \text{supp}(\nu)$ et $v \in V_x$ tels que $y = s_{i_0}(v)$ avec $\rho(y) = x_1$. Donc :

$$x_1 = \rho(y) = \rho(s_{i_0}(v)) = v.$$

En particulier, $x_1 \in V_x$. ■

Remarque 2.2.4. Dans la définition de $S(\mu)$ dans le cas $m \geq 2$, on choisit de prendre $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ dans $\Lambda_{\mu, z_0, \dots, z_m}$ et non pas dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$ pour trois raisons :

- tout élément de $S(\mu)$ fibre au-dessus de V_x ;
- si $\mu \notin Z_{n-1}$ alors tout ouvert dans $S(\mu)$ n'intersecte pas Z_{n-1} ;
- si μ est sur une face, alors tout ouvert de $S(\mu)$ n'intersecte pas une autre face. Par exemple dans la figure 2.5, la partie hachurée en jaune ne rencontre pas une autre arête que celle qui contient μ .

Définition 2.2.5 (Partie génératrice de la topologie). Soient Z un espace topologique et \mathcal{U} une famille d'ouverts (non vides) de Z . On dit que \mathcal{U} est une *partie génératrice de la topologie* de Z si pour tout $z_0 \in Z$, pour tout voisinage $U \subseteq Z$ de z_0 , il existe un entier $n \geq 1$ et des ouverts U_1, \dots, U_n dans \mathcal{U} telles que :

$$z_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U.$$

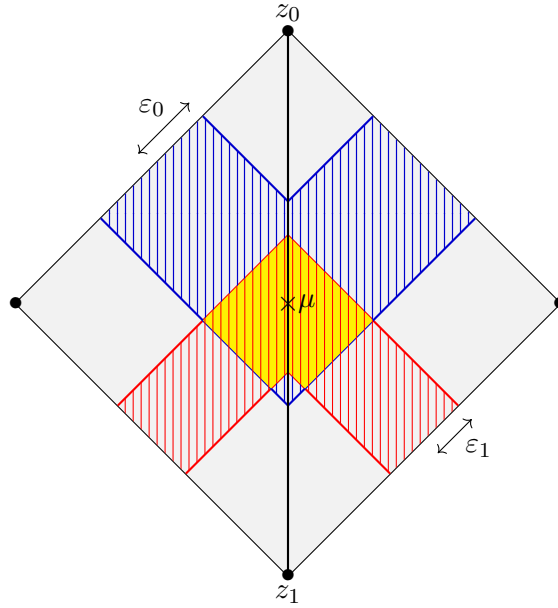


FIGURE 2.5 – En jaune, un élément de $S(\mu)$ dans $\rho^{-1}(x)$ dans le cas où $\text{supp}(\mu) = \{z_0, z_1\}$.

Dans la figure précédente, la partie hachurée en bleu correspond à $W(\mu, \chi_{s_0(V_x)}, \varepsilon_0) \cap \rho^{-1}(x)$, celle en rouge à $W(\mu, \chi_{s_1(V_x)}, \varepsilon_1) \cap \rho^{-1}(x)$ et celle en jaune à l'intersection des deux.

On rappelle dans la suite que $Y_x := \{y \in Y \mid \rho(y) = x\}$ pour tout $x \in X$.

Théorème 2.2.6. La famille $\mathcal{S} := \{W \in S(\mu) \mid \mu \in |\Delta|\}$ forme une partie génératrice de la topologie de $|\Delta|$.

Démonstration. Soit $\mu_0 \in |\Delta|$. Tout voisinage de μ_0 contient un élément de $\left(W_{\varepsilon, (\varphi_i)_{i \in I}}(\mu_0)\right)_{\varepsilon, I, (\varphi_i)_{i \in I}}$. Il nous suffit donc de montrer que pour tous $f \in C_c(Y)$ et $\varepsilon > 0$, $W(\mu_0, f, \varepsilon)$ contient une intersection finie d'éléments de $S(\mu_0)$. Fixons donc $f \in C_c(Y)$ et $\varepsilon > 0$. Alors f est la limite uniforme d'une suite de fonctions étagées $(f_m)_{m \geq 1}$ où $f_m := \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}$. Soient $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|f - f_{m_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$ et $\mu \in W(\mu_0, f_{m_0}, \frac{\varepsilon}{2})$. Remarquons que l'on a :

$$\left|I_{\mu_0}(f) - I_{\mu_0}(f_{m_0})\right| \leq \|f - f_{m_0}\|_\infty \quad \text{et} \quad \left|I_\mu(f) - I_\mu(f_{m_0})\right| \leq \|f - f_{m_0}\|_\infty$$

donc :

$$\begin{aligned} \left|I_{\mu_0}(f) - I_\mu(f)\right| &= \left|I_{\mu_0}(f) - I_{\mu_0}(f_{m_0})\right| + \left|I_\mu(f_{m_0}) - I_\mu(f)\right| + \left|I_{\mu_0}(f_{m_0}) - I_\mu(f_{m_0})\right| \\ &< 2\|f - f_{m_0}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mu \in W(\mu_0, f, \varepsilon)$. On a donc montré que $W(\mu_0, f, \varepsilon) \supset W(\mu_0, f_{m_0}, \frac{\varepsilon}{2})$. L'inégalité triangulaire assure que pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $g_1, \dots, g_N \in C_c(Y)$, on a :

$$W(\mu_0, g_1 + \dots + g_N, \varepsilon) \supseteq W\left(\mu_0, g_1, \frac{\varepsilon}{N}\right) \cap \dots \cap W\left(\mu_0, g_N, \frac{\varepsilon}{N}\right).$$

En particulier :

$$W\left(\mu_0, \sum_{k=1}^{m_0} a_k \chi_{A_k}, \varepsilon\right) \supseteq \bigcap_{k=1}^{m_0} W\left(\mu_0, a_k \chi_{A_k}, \frac{\varepsilon}{m_0}\right).$$

De plus, on montre que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$W\left(\mu_0, a_k \chi_{A_k}, \frac{\varepsilon}{m_0}\right) \supseteq W\left(\mu_0, \chi_{A_k}, \frac{\varepsilon}{|a_k| m_0}\right).$$

En posant $\varepsilon' = \min_{1 \leq k \leq m_0} \frac{\varepsilon}{|a_k| m_0}$ on obtient alors :

$$W(\mu_0, f, \varepsilon) \supseteq \bigcap_{k=1}^{m_0} W(\mu_0, \chi_{A_k}, \varepsilon').$$

Il suffit donc de montrer que si A est un compact-ouvert de Y , alors $W(\mu_0, \chi_A, \varepsilon')$ contient un élément de $S(\mu_0)$. Soit $x_0 \in X$ tel que $\text{supp}(\mu_0) \subseteq Y_{x_0}$. On distingue deux cas :

► **Cas où $x_0 \notin \rho(A)$.** On a $A \cap Y_{x_0} = \emptyset$ donc $I_{\mu_0}(\chi_A) = 0$. Par conséquent :

$$W(\mu_0, \chi_A, \varepsilon') = \{\mu \in |\Delta| \mid I_\mu(\chi_A) < \varepsilon'\}.$$

Soient V_{x_0} un voisinage μ_0 -simplicial de x_0 tel que $\rho(A) \cap V_{x_0} = \emptyset$ et s_0, \dots, s_m des sections associées aux éléments du support de μ_0 notés z_0, \dots, z_m . Soient $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m) \in \Lambda_{\mu_0, z_0, \dots, z_m}$ et $\mu \in \bigcap_{i=0}^m W(\mu_0, \chi_{s_i(V_{x_0})}, \varepsilon_i)$. D'après le lemme 2.2.3, $\rho(\text{supp}(\mu)) \subseteq V_{x_0}$ donc $I_\mu(\chi_A) = 0$. En particulier, $\mu \in W(\mu_0, \chi_A, \varepsilon')$ ce qui veut dire que $W(\mu_0, \chi_A, \varepsilon')$ contient un élément de $S(\mu_0)$.

► **Cas où $x_0 \in \rho(A)$.** Soient V_{x_0} un voisinage μ_0 -simplicial de x_0 . Remarquons que :

$$A = \underbrace{A \cap \rho^{-1}(V_{x_0})}_{A_1} \sqcup \underbrace{A \setminus \rho^{-1}(V_{x_0})}_{A_2},$$

où A_1 et A_2 sont deux compacts-ouverts de Y avec $x_0 \in \rho(A_1) \subseteq V_{x_0}$ et vérifient :

$$W(\mu_0, \chi_A, \varepsilon') \supseteq W\left(\mu_0, \chi_{A_1}, \frac{\varepsilon'}{2}\right) \cap W\left(\mu_0, \chi_{A_2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Puisque $x_0 \notin \rho(A_2)$, alors d'après le cas précédent, $W(\mu_0, \chi_{A_2}, \varepsilon')$ contient un élément de $S(\mu_0)$. Montrons que $W(\mu_0, \chi_{A_1}, \varepsilon')$ contient un élément de $S(\mu_0)$. Puisque A_1 est un compact-ouvert de Y , alors d'après le point 3) de la définition 2.1.2, il existe une famille finie $(B_i)_{1 \leq i \leq r}$ de compacts-ouverts dans Y vérifiant l'égalité $A_1 = \bigcup_{i=1}^r B_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'application $\rho|_{B_i} : B_i \rightarrow \rho(B_i) \subseteq V_{x_0}$ est un homéomorphisme. Quitte à remplacer B_i par $B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$, on peut supposer que les B_i sont deux à deux disjoints. On obtient alors $\chi_{A_1} = \sum_{i=1}^r \chi_{B_i}$ et donc en posant $\varepsilon'' := \frac{\varepsilon'}{r}$, on a :

$$W(\mu_0, \chi_{A_1}, \varepsilon') \supseteq \bigcap_{i=1}^r W(\mu_0, \chi_{B_i}, \varepsilon'').$$

Puisque $x_0 \in \rho(A_1) = \bigcup_{i=1}^r \rho(B_i)$, alors il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $x_0 \in \rho(B_i)$. On en déduit que $B_i \cap Y_{x_0} \neq \emptyset$ et par injectivité de ρ sur B_i , il existe $y_i \in Y$ tel que $B_i \cap Y_{x_0} = \{y_i\}$. On va montrer que $W(\mu_0, \chi_{B_i}, \varepsilon'')$ contient un élément de $S(\mu_0)$.

- Supposons que y_i soit dans le support de μ_0 . Posons $V := \rho(B_i) \subseteq V_{x_0}$. C'est un voisinage μ_0 -simplicial de x_0 . Soit $N \geq 1$ un entier tel que $\left(\frac{\varepsilon''}{N}, \dots, \frac{\varepsilon''}{N}\right) \in \Lambda_{z_0, \dots, z_m, \mu_0}$. On peut supposer que $s_i|_V$ est à valeurs dans B_i ¹⁵ Posons :

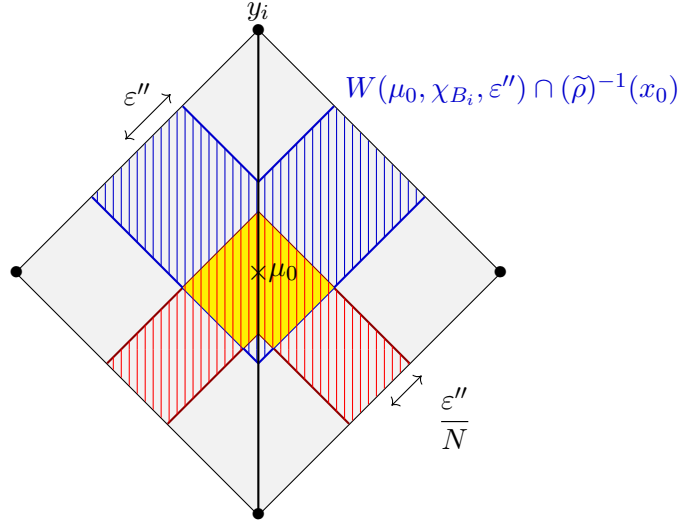
$$W := \bigcap_{j=0}^m W\left(\mu_0, \chi_{(s_j)|_V(V)}, \frac{\varepsilon''}{N}\right) = \bigcap_{j \neq i} W\left(\mu_0, \chi_{s_j(V)}, \frac{\varepsilon''}{N}\right) \cap W\left(\mu_0, \chi_{B_i}, \frac{\varepsilon''}{N}\right)$$
¹⁶

15. Quitte à remplacer V par $V \cap \bigcap_{i=1}^m s_i^{-1}(B_i)$ qui est encore un voisinage μ_0 -simplicial de x_0 .

16. La deuxième égalité provient du fait que : $s_i(V) = B_i$ car

$$s_i|_V \circ \rho|_{B_i} = (\rho|_{B_i})^{-1} \circ \underbrace{\rho|_{B_i} \circ s_i|_V}_{=\text{id}_V} \circ \rho|_{B_i} = \text{id}_{B_i}$$

Alors $W \in S(\mu_0)$ et est inclus dans $W(\mu_0, \chi_{B_i}, \varepsilon'')$. Par exemple, dans la fibre $(\tilde{\rho})^{-1}(x_0)$, le voisinage $W \cap (\tilde{\rho})^{-1}(x_0)$ est représenté par la partie hachurée en jaune et est contenu dans la partie en bleu :



- Supposons que y_i ne soit pas dans le support de μ_0 . Alors $I_{\mu_0}(\chi_{B_i}) = \lambda_{y_i}(\mu_0) = 0$ donc $W(\mu_0, \chi_{B_i}, \varepsilon'') = \{\mu \in |\Delta| \mid I_\mu(\chi_{B_i}) < \varepsilon''\}$. Posons $V = \rho(B_i) \subseteq V_{x_0}$. C'est un voisinage μ_0 -simplicial de x_0 . Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} \left(\frac{\varepsilon''}{N}, \dots, \frac{\varepsilon''}{N} \right) \in \Lambda_{z_0, \dots, z_m, \mu_0}, \\ m \times \frac{\varepsilon}{N} < \varepsilon''. \end{cases}$$

Posons $W = \bigcap_{j=0}^m W(\mu_0, \chi_{s_j(V)}, \frac{\varepsilon}{N}) \in S(\mu_0)$. Montrons que $W \subseteq W(\mu_0, \chi_{B_i}, \varepsilon'')$. Soient $\mu \in W$ et $x := \tilde{\rho}(\mu) \in V$. On a pour tout $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$\left| I_\mu(\chi_{s_j(V)}) - I_{\mu_0}(\chi_{s_j(V)}) \right| < \frac{\varepsilon}{N}$$

L'ensemble $s_j(V) \cap Y_x$ (qui est non vide car $x \in V = \rho(s_j(V))$) possède un unique élément (par injectivité de ρ sur B_j) que l'on note \tilde{z}_j . De plus, $s_j(V) \cap Y_{x_0} = \{z_j\}$ donc on obtient :

$$|\lambda_{\tilde{z}_j}(\mu) - \lambda_{z_j}(\mu_0)| < \frac{\varepsilon}{N}$$

puis en sommant :

$$\sum_{j=0}^m |\lambda_{\tilde{z}_j}(\mu) - \lambda_{z_j}(\mu_0)| < m \times \frac{\varepsilon}{N} < \varepsilon''$$

et donc :

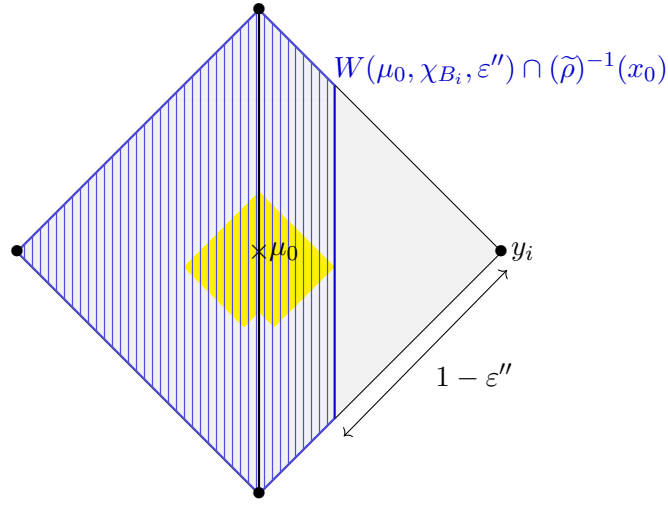
$$1 - \sum_{j=0}^m \lambda_{\tilde{z}_j}(\mu) = \left| \sum_{j=0}^m (\lambda_{\tilde{z}_j}(\mu) - \lambda_{z_j}(\mu)) \right| \leq \sum_{j=0}^m |\lambda_{\tilde{z}_j}(\mu) - \lambda_{z_j}(\mu)| < \varepsilon''.$$

L'ensemble $B_i \cap Y_x$ possède au plus un élément. Dans le cas où $B_i \cap Y_x = \emptyset$, alors $I_\mu(\chi_{B_i}) = 0 < \varepsilon''$. Sinon, on note \tilde{y}_i son unique élément. Comme $\sum_{y \in Y_x} \lambda_y(\mu) = 1$, alors on obtient :

$$I_\mu(\chi_{B_i}) = \lambda_{\tilde{y}_i}(\mu) = 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^m \lambda_{\tilde{z}_j}(\mu)}_{< \varepsilon''} - \underbrace{\sum_{y \in Y_x \setminus \{\tilde{y}_i, \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_m\}} \lambda_y(\mu)}_{\geq 0} < \varepsilon''$$

et ainsi $\mu \in W(\mu_0, \chi_{B_i}, \varepsilon'')$.

■



2.3 Propriétés de l'action d'un groupoïde sur un complexe simplicial

Dans cette partie, on fixe (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n . Nous allons définir deux propriétés (H_1) et (H_2) sur (Y, Δ) qui vont nous assurer (voir le lemme 2.3.1 et la proposition 2.3.4) que (Y, Δ) soit localement fini et que sa réalisation géométrique $|\Delta|$ soit localement compacte. Pour cela, on commence par considérer pour tout $A \subseteq Y$, le sous-ensemble de Y :

$$C_A = \left\{ y \in Y \mid \exists y' \in A, \{y, y'\} \in \Delta \right\}$$

constitué des sommets connectés à A . La propriété 1) de la définition 2.1.2 assure que pour tous $y, y' \in Y$:

$$\{y, y'\} \in \Delta \implies \rho(y) = \rho(y')$$

et donc $\rho(C_A) = \rho(A)$. On considère les hypothèses (H_1) et (H_2) suivantes.

(H_1) : Pour tout compact $K \subseteq Y$, l'ensemble $C_K \subseteq Y$ est compact.

(H_2) : Soient $m \geq 0$ et $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Soit $(y_\lambda^{(i)})_\lambda$ une suite dans Y telle que :

- $\{y_\lambda^{(0)}, \dots, y_\lambda^{(m)}\} \in \Delta$ pour tout λ ;
- $(y_\lambda^{(i)})_\lambda$ converge vers une limite notée $y^{(i)} \in Y$ pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

Alors $\{y^{(0)}, \dots, y^{(m)}\} \in \Delta$.

On commence par énoncer un premier lemme dont la démonstration découle immédiatement de la définition de l'hypothèse (H_1) .

Lemme 2.3.1. Tout \mathcal{G} -complexe simplicial vérifiant la propriété (H_1) est localement fini.

Démonstration. Soient (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial vérifiant (H_1) et $z \in Y$. Considérons le compact $K = \{z\}$. D'après (H_1) , l'ensemble :

$$C_K = \{y \in Y_{\rho(z)} \mid \{y, z\} \in \Delta\}$$

est compact et étant de plus discret, il est donc fini. Donc (Y, Δ) est localement fini. ■

Lemme 2.3.2. Soit K un compact de Y tel que la restriction de l'application d'ancrage $\rho : Y \rightarrow X$ à K soit un homéomorphisme local. Alors la restriction de ρ à C_K est également un homéomorphisme local.

Démonstration. Soient $y' \in C_K$ et $y \in K$ tel que $\{y, y'\} \in \Delta$. Posons $x = \rho(y) = \rho(y')$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V_y de y dans Y tel que :

- (i) $\rho(V_y)$ est ouvert dans X et l'application $\rho|_{V_y} : V_y \rightarrow \rho(V_y)$ est un homéomorphisme ;
- (ii) $\rho(V_y \cap K)$ est ouvert dans $\rho(K)$ c'est-à-dire de la forme $W \cap \rho(K) = \underbrace{W \cap \rho(V_y)}_{=: W'} \cap \rho(K)$ où W est ouvert dans X ;
- (iii) il existe des sections $s_y, s_{y'} : \rho(V_y) \rightarrow Y$ telles que $s_y(x) = y, s_{y'}(x) = y'$ et $\{s_y(v), s_{y'}(v)\} \in \Delta$ pour tout $v \in V$.

Comme W' est ouvert dans X , alors $s_{y'}(W')$ est ouvert dans Y donc $s_{y'}(W') \cap C_K$ est un ouvert de C_K contenant y' et tel que l'application :

$$\rho|_{s_{y'}(W') \cap C_K} : s_{y'}(W') \cap C_K \rightarrow W' \cap \rho(K)$$

est un homéomorphisme d'inverse :

$$(s_{y'})|_{W' \cap \rho(K)} : W' \cap \rho(K) \rightarrow s_{y'}(W') \cap C_K.$$

Ainsi, $\rho|_{C_K}$ est un homéomorphisme local. ■

Lemme 2.3.3. Soient Z un espace compact, X un espace localement compact et $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Notons $Z_x := \{z \in Z \mid \rho(z) = x\}$ pour tout $x \in X$. Alors pour tout $f \in C(Z)$, l'application :

$$\lambda_f : x \mapsto \sum_{z \in Z_x} f(z)$$

est continue sur X . En particulier, l'application $x \mapsto \text{Card}(Z_x)$ est continue sur X .

Démonstration. ► Soit $f \in C(Z)$ avec $\text{supp}(f) \subseteq U$ où U est un ouvert de Z tel que $\rho|_U : U \rightarrow \rho(U)$ soit un homéomorphisme avec $\rho(U)$ ouvert dans X . Soit $x \in \rho(U)$, alors $Z_x \cap U = \{(\rho|_U)^{-1}(x)\}$ donc :

$$\lambda_f(x) = \sum_{z \in Z_x \cap U} f(z) = f((\rho|_U)^{-1}(x)).$$

Ainsi, $(\lambda_f)|_{\rho(U)} = f \circ (\rho|_U)^{-1}$. En particulier, $(\lambda_f)|_{\rho(U)}$ est continue à support compact dans l'ouvert $\rho(U)$ et on a aussi $(\lambda_f)|_{X \setminus \rho(U)} = 0$, donc λ_f est continue sur X

► Traitons le cas général. Soit $f \in C(Z)$. Comme $\text{supp}(f)$ est compact (car fermé dans Z compact) et ρ est un homéomorphisme local, alors il existe $n \geq 1$ et des ouverts $U_1, \dots, U_n \subseteq Z$ tels que :

- $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$;
- $\rho|_{U_i} : U_i \rightarrow \rho(U_i)$ est un homéomorphisme, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Puisque Z est compact, il existe une partition de l'unité associée à ce recouvrement, que l'on notera $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$. Considérons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'application $f_i := f\Phi_i \in C(Z)$ qui est à support dans U_i . D'après le cas précédent, λ_{f_i} est continue sur X . De plus, $f = \sum_{i=1}^n f_i$ et donc

$$\lambda_f = \sum_{i=1}^n \lambda_{f_i}$$

ainsi, λ_f est continue sur X . On obtient alors la continuité de $x \mapsto \text{Card}(Z_x)$ en appliquant ce résultat à l'application $z \in Z \mapsto 1$. ■

Proposition 2.3.4. La réalisation géométrique d'un \mathcal{G} -complexe simplicial vérifiant les propriétés (H_1) et (H_2) est localement compacte.

Démonstration. Soit (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial vérifiant les propriétés (H_1) et (H_2) . Soient $\mu \in |\Delta|$ et $x := \tilde{\rho}(\mu)$. Soient V un voisinage compact-ouvert μ -simplicial de x , s_0, \dots, s_m des sections associées aux sommets z_0, \dots, z_m de μ et $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m) \in \Lambda_{\mu, z_0, \dots, z_m}$. Posons :

$$\widetilde{W}_V = \bigcap_{i=0}^m W\left(\mu, \chi_{s_i(V)}, \frac{\varepsilon_i}{2}\right) \quad \text{et} \quad W_V = \bigcap_{i=0}^m W\left(\mu, \chi_{s_i(V)}, \varepsilon_i\right).$$

On va montrer que \widetilde{W}_V est un voisinage relativement compact de μ dans $|\Delta|$. Pour cela, prenons $(\mu_\lambda)_\lambda$ une suite dans \widetilde{W}_V et montrons qu'elle admet une sous-suite convergente dans W_V . La suite $(\tilde{\rho}(\mu_\lambda))_\lambda$ est à valeur dans le compact V donc, quitte à extraire une sous-suite convergente, on peut supposer qu'elle converge vers une limite notée $v \in V$. Considérons le compact-ouvert de Y :

$$K = \bigsqcup_{i=0}^m s_{i|V}(V).$$

D'après (H_1) , C_K est compact. D'après le lemme 2.2.3, la suite $(\tilde{\rho}(\mu_\lambda))_\lambda$ est à valeurs dans V . La restriction de ρ à K est un homéomorphisme local donc d'après le lemme 2.3.2, la restriction de ρ à C_K également et par conséquent, les fibres $(Z_x)_{x \in \rho(C_K)}$ sont discrètes. De plus, C_K étant compact (d'après (H_1)), ces fibres sont de cardinal finis.

L'application $\varphi : x \mapsto \text{Card}(Z_x)$ est alors continue sur le compact $\rho(C_K)$ d'après le lemme 2.3.3. On peut donc poser :

$$r := \max\left\{\varphi(x) \mid x \in \rho(C_K)\right\} \quad \text{et} \quad U_i := (\varphi|_{\rho(C_K)})^{-1}(\{i\}), \quad \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$$

où :

- chaque U_i est un compact-ouvert de $\rho(C_K)$;
- $\rho(C_K) = \bigsqcup_{i=1}^r U_i$;
- l'application φ est constante sur U_i pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Or :

$$v \in U = \rho(K) = \rho(C_K) = \bigsqcup_{i=1}^r U_i.$$

Soit donc $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $v \in U_{i_0}$. On peut supposer que la suite $(\tilde{\rho}(u_\lambda))_\lambda$ est dans U_{i_0} . Il existe un entier $p \geq m$ et des sections s_{m+1}, \dots, s_p tels que :

$$(C_K) \cap \rho^{-1}(U_{i_0}) = \bigcup_{j=0}^p (s_j)_{|U_{i_0}}(U_{i_0}) \subseteq Y$$

Comme la suite $(u_\lambda)_\lambda$ est dans \widetilde{W}_V , alors pour tout λ , on a $\text{supp}(\mu_\lambda) \subseteq C_K \cap \rho^{-1}(U_{i_0})$ et on peut donc écrire :

$$\mu_\lambda = \sum_{i=0}^p a_\lambda^{(i)} \delta_{y_\lambda^{(i)}}$$

où $(y_\lambda^{(0)})_\lambda, \dots, (y_\lambda^{(p)})_\lambda$ (resp. $(a_\lambda^{(0)})_\lambda, \dots, (a_\lambda^{(p)})_\lambda$) sont dans l'intersection $C_K \cap \rho^{-1}(U_{i_0})$ (resp. $[0; 1]$). Quitte à extraire une sous-suite et à réordonner, on peut supposer qu'il existe $p' \leq p$ tel que $\text{supp}(u_\lambda) = \{y_\lambda^{(0)}, \dots, y_\lambda^{(p')}\}$ pour tout λ . Quitte à extraire plusieurs sous-suites, on peut supposer que $\{y_\lambda^{(0)}, \dots, y_\lambda^{(p')}\} \in \Delta$ pour tout λ et que les suites $(y_\lambda^{(i)})_\lambda$ et $(a_\lambda^{(i)})_\lambda$ sont convergentes pour

tout $i \in \llbracket 0, p' \rrbracket$. Les limites des suites $(y_\lambda^{(i)})_\lambda$ et $(a_\lambda^{(i)})_\lambda$ sont notées $y^{(i)}$ et $a^{(i)}$ respectivement. Les hypothèses de la propriété (H_2) sont donc vérifiées, donc $\{y^{(0)}, \dots, y^{(p')}\} \in \Delta$. Posons donc :

$$\nu := \sum_{i=0}^{p'} a^{(i)} \delta_{y^{(i)}} \in W_V.$$

Pour tous $f \in C_c(Y)$ et $i \in \llbracket 0, p' \rrbracket$, on a $a_\lambda^{(i)} f(y_\lambda^{(i)}) \xrightarrow{\lambda} a^{(i)} f(y^{(i)})$ et donc :

$$\forall f \in C_c(Y), \quad I_{\mu_\lambda}(f) \xrightarrow{\lambda} I_\nu(f),$$

c'est-à-dire que $(\mu_\lambda)_\lambda$ converge vers la mesure $\nu \in W_V$. ■

Remarque 2.3.5. Posons $Y = (\{0\} \times [0; 1]) \cup (\{1\} \times [0; 1])$, $X = [0; 1]$ et $\rho : Y \rightarrow X$ la projection sur la seconde coordonnée. Soit $\Delta = \bigcup_{x \in [0; 1]} \rho^{-1}(\{x\})$ et $K = \{0\} \times [0; 1]$. Alors K est compact et $C_K = Y$ ne l'est pas. Donc (Y, Δ) ne vérifie pas (H_1) . On a de plus $|\Delta| = \{(0, 0)\} \cup]0; 1]^2$ qui n'est pas localement compact car aucun compact de $|\Delta|$ ne contient un voisinage de $(0, 0)$.

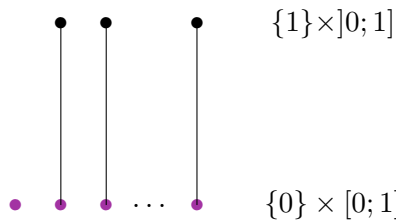


FIGURE 2.6 – Le complexe simplicial (Y, Δ) et en violet le compact K .

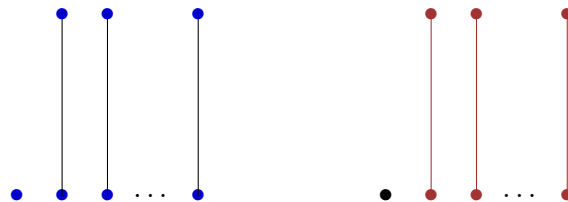


FIGURE 2.7 – En bleu les 0-simplices et en rouge les 1-simplices.

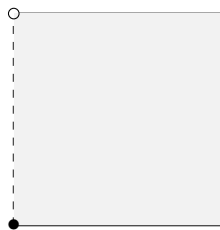


FIGURE 2.8 – La réalisation géométrique du complexe simplicial vu en remarque 2.3.5.

Dans la suite, tous les \mathcal{G} -complexes simpliciaux que nous considérerons vérifieront les propriétés (H_1) et (H_2) .

En conséquence, d'après le lemme 2.3.1 et la proposition 2.3.4, toutes les réalisations géométriques que nous considérerons seront localement compactes et localement finies. D'autres résultats vont aussi en découler.

Lemme 2.3.6. Soit K un compact dans Y . Alors l'ensemble des mesures de $|\Delta|$ à support dans K est un compact de $|\Delta|$ pour la topologie \star -faible.

Démonstration. Notons $K' = \{\mu \in |\Delta| \mid \text{supp}(\mu) \in K\}$. On va montrer que K' est fermé dans la boule unité fermée de $C_c(Y)^*$ qui est compact pour la topologie \star -faible (d'après le théorème de Banach-Alaoglu). Soit $(\mu_\lambda)_\lambda$ une suite dans K' convergente dans la boule unité fermée de $C_c(Y)^*$. La suite $(\text{Card}(\text{supp}(\mu_\lambda)))_\lambda$ est une suite bornée d'entiers donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle est constante égale à $m \in \mathbb{N}$. Ceci nous permet d'écrire :

$$\mu_\lambda = \sum_{i=0}^m a_\lambda^{(i)} \delta_{y_\lambda^{(i)}}.$$

On sait par hypothèse que pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, la suite $(y_\lambda^{(i)})_\lambda$ est dans K donc, quitte à extraire une sous-suite convergente, on peut supposer qu'elle converge vers une limite notée $y^{(i)} \in K$. Étant à valeurs dans $[0; 1]$, on peut aussi supposer que la suite $(a_\lambda^{(i)})_\lambda$ converge, disons vers $a^{(i)}$. L'hypothèse (H_2) assure que :

$$\{y^{(0)}, \dots, y^{(m)}\} \in \Delta$$

et on obtient donc que la suite $(\mu_\lambda)_\lambda$ converge vers $\sum_{i=0}^m a^{(i)} \delta_{y^{(i)}} \in K'$. ■

Le lemme précédent a pour conséquence le résultat suivant.

Lemme 2.3.7. Si Y est \mathcal{G} -compact, alors $|\Delta|$ est \mathcal{G} -compact.

Démonstration. Soit $K \subseteq Y$ compact tel que $Y = K \cdot \mathcal{G}$. Posons :

$$K' = \left\{ \mu \in |\Delta| \mid \text{supp}(\mu) \subseteq C_K \right\}.$$

D'après (H_1) , l'ensemble C_K est un compact de Y donc d'après le lemme 2.3.6, K' est un compact de $|\Delta|$ pour la topologie \star -faible. Soit $\mu \in |\Delta|$ de support $\{y_0, \dots, y_m\}$. Il existe $k \in K, \gamma \in \mathcal{G}^{\rho(k)}$ tels que $y_0 = k\gamma$. Posons $\nu = \gamma \cdot \mu$, alors $\text{supp}(\nu) = \text{supp}(\mu)\gamma^{-1} = \{k, y_1\gamma^{-1}, \dots, y_m\gamma^{-1}\} \in \Delta$ et donc par définition d'un \mathcal{G} -complexe simplicial, $\{k, y_i\gamma\} \in \Delta$ pour tout $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$. On a donc montré que tous les sommets de ν sont connectés à K , autrement dit $\nu \in K'$. Ainsi $\mu = \gamma^{-1} \cdot \nu \in \mathcal{G} \cdot K'$ et donc :

$$|\Delta| = \mathcal{G} \cdot K'. \quad \blacksquare$$

Lemme 2.3.8. Si \mathcal{G} agit proprement sur Y , alors \mathcal{G} agit proprement sur $|\Delta|$.

Démonstration. Soit K un compact dans $|\Delta|$.

• On commence par montrer qu'il existe un compact $A_K \subseteq Y$ tel que :

$$\forall \mu \in K, \quad \text{supp}(\mu) \subseteq A_K.$$

Par compacité de K , il existe $m \geq 1, \mu_1, \dots, \mu_m \in |\Delta|$ et $W_1 \in S(\mu_1), \dots, W_m \in S(\mu_m)$ tels que :

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m W_j.$$

Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Notons $\text{supp}(\mu_j) = \{y_0^{(j)}, \dots, y_{n_j}^{(j)}\}$ et $x_j := \tilde{\rho}(\mu_j)$. On considère $V_j \subseteq X$ un voisinage μ_j -simplicial (compact-ouvert) de x_j . Pour tout $i \in \llbracket 0, n_j \rrbracket$, il existe une section $s_i^{(j)} : V_j \rightarrow s_i^{(j)}(V_j)$ associée au sommet $y_i^{(j)}$. Considérons le compact dans Y :

$$K' := \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=0}^{n_j} s_i^{(j)}(V_j)$$

et posons $A_K := C_{K'}$ qui est encore compact d'après (H_1) . Si $\mu \in K$, alors $\mu \in W_{j_0}$ pour un certain $j_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $W_{j_0} \in S(\mu_{j_0})$. Alors μ est dans un simplexe dont l'un des sommets est un élément de $\bigcup_{i=0}^{n_{j_0}} s_i^{(j_0)}(V_{j_0}) \subseteq K'$. Par conséquent, pour tout $y \in \text{supp}(\mu)$, il existe $y' \in K'$ tel que $\{y, y'\} \in \Delta$. Ce qui prouve que pour tout $\mu \in K$, $\text{supp}(\mu) \subseteq A_K$.

• Fixons à présent $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$. Alors il existe deux mesures μ_1, μ_2 dans K (et à support dans A_K d'après ce que nous venons de montrer) telles que $\tilde{\rho}(\mu_1) = s(\gamma)$ et $\gamma \cdot \mu_1 = \mu_2$. Il existe donc $y_1 \in \text{supp}(\mu_1) \subseteq A_K$ et $y_2 \in \text{supp}(\mu_2) \subseteq A_K$ tels que $\rho(y_2) = r(\gamma)$ et :

$$y_2 \gamma = y_1.$$

En d'autres termes, $A_K \gamma \cap A_K \neq \emptyset$. Par conséquent, on a prouvé l'inclusion :

$$\mathcal{F}_K = \{\gamma \in \mathcal{G} \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \{\gamma \in \mathcal{G} \mid A_K \gamma \cap A_K \neq \emptyset\}.$$

L'ensemble de droite est compact par hypothèse et \mathcal{F}_K est fermé (car K est compact) donc \mathcal{F}_K est compact et donc l'action de \mathcal{G} sur $|\Delta|$ est propre. ■

Dans la suite, on rappelle que $Y' := \{\mathbf{b}(\mu) \mid \mu \in |\Delta|\} \subseteq |\Delta|$.

Lemme 2.3.9. Soient (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial. Alors Y' est fermé dans $|\Delta|$.

Démonstration. On montre que $|\Delta| \setminus Y'$ est ouvert dans $|\Delta|$. Soient donc $\mu \in |\Delta| \setminus Y'$, $x := \tilde{\rho}(\mu)$ et z_0, z_1 deux éléments distincts dans le support de μ tels que $\lambda_{z_0}(\mu) \neq \lambda_{z_1}(\mu)$. Soient $V_x \subseteq X$ un voisinage μ -simplicial de x et s_0, s_1 des sections associées aux sommets z_0 et z_1 respectivement. Il existe $(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \in \Lambda_{\mu, z_0, z_1}$ tel qu'en posant $W = W(\mu, \chi_{s_0(V_x)}, \varepsilon_0) \cap W(\mu, \chi_{s_1(V_x)}, \varepsilon_1)$, on obtient un voisinage ouvert de μ vérifiant :

$$W \cap Y' = \emptyset$$

c'est-à-dire inclus dans $|\Delta| \setminus Y'$. ■

Lemme 2.3.10. Si \mathcal{G} agit proprement sur Y , alors \mathcal{G} agit proprement sur Y' .

Démonstration. Remarquons que Y' est stable par l'action de \mathcal{G} . En effet, si $\mu \in |\Delta|$ et $\gamma \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}$, alors en notant $\text{supp}(\mu) = \{y_0, \dots, y_n\}$, on a $\text{supp}(\gamma \cdot \mu) = \{y_0 \gamma^{-1}, \dots, y_n \gamma^{-1}\}$ et alors pour tout borélien $U \subseteq Y$:

$$(\gamma \cdot \mathbf{b}(\mu))(U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i}(U \gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i \gamma^{-1}}(U) = (\mathbf{b}(\gamma \cdot \mu))(U).$$

Y' est fermé dans $|\Delta|$ (lemme 2.3.9) et \mathcal{G} agit proprement sur $|\Delta|$ (lemme 2.3.8) donc l'action de \mathcal{G} sur Y' est propre (lemme 1.3.7). ■

Donnons à présent un exemple important de \mathcal{G} -complexe simplicial vérifiant les deux propriétés (H_1) et (H_2) : le complexe de Rips.

Définition 2.3.11 (Complexe de Rips). Soient \mathcal{G} un groupoïde ample et K un compact de \mathcal{G} . Posons :

$$\Delta_K(\mathcal{G}) := \left\{ \sigma \subseteq \mathcal{G} \mid \forall \gamma, \eta \in \sigma : r(\gamma) = r(\eta) \text{ et } \gamma^{-1} \eta \in K \right\}.$$

Alors $(\mathcal{G}, \Delta_K(\mathcal{G}))$ est un \mathcal{G} -complexe simplicial (voir [10]) et est appelé *complexe de Rips*. Sa réalisation géométrique sera notée $P_K(\mathcal{G})$.

Théorème 2.3.12. Soient \mathcal{G} un groupoïde ample et K un compact-ouvert de \mathcal{G} . Alors le complexe de Rips $(\mathcal{G}, \Delta_K(\mathcal{G}))$ vérifie les propriétés (H_1) et (H_2) . En particulier, $P_K(\mathcal{G})$ est localement compact.

Démonstration. Soit K un compact-ouvert de \mathcal{G} .

(H_1) : Soit $K' \subseteq Y$ un compact. Alors le sous-ensemble de \mathcal{G} :

$$C_K = \left\{ \gamma \in \mathcal{G} \mid \exists \eta \in K', r(\gamma) = r(\eta) \text{ et } \gamma^{-1}\eta \in K \right\} = K' \cdot K^{-1}$$

est compact.

(H_2) : Soient $m \geq 0$ et $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Soit $(\gamma_\lambda^{(i)})_\lambda$ une suite dans \mathcal{G} telle que pour tout λ , $\{\gamma_\lambda^{(0)}, \dots, \gamma_\lambda^{(m)}\}$ est un simplexe dans $\Delta_K(\mathcal{G})$ c'est-à-dire que pour tous $i, j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ et tout λ :

$$r(\gamma_\lambda^{(i)}) = r(\gamma_\lambda^{(j)}) \quad \text{et} \quad \left(\gamma_\lambda^{(i)}\right)^{-1} \gamma_\lambda^{(j)} \in K.$$

On suppose de plus que pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, la suite $(\gamma_\lambda^{(i)})_\lambda$ converge vers une limite notée $\gamma^{(i)} \in \mathcal{G}$. Soient $i, j \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Par continuité de r , on obtient $r(\gamma^{(i)}) = r(\gamma^{(j)})$. De plus, comme $K \subseteq \mathcal{G}$ est compact, la suite $\left(\left(\gamma_\lambda^{(i)}\right)^{-1} \gamma_\lambda^{(j)}\right)_\lambda$ converge vers $(\gamma^{(i)})^{-1} \gamma^{(j)} \in K$ donc $\{\gamma^{(0)}, \dots, \gamma^{(m)}\} \in \Delta_K(\mathcal{G})$.

D'après la proposition 2.3.4, la réalisation géométrique $P_K(\mathcal{G})$ est donc localement compact. ■

Chapitre 3

Calcul fonctionnel continu sur un module de Hilbert

Dans ce chapitre, on introduit la notion de borélien π -régulier et localement π -régulier avec :

- Z et X deux espaces localement compacts ;
- E un $C_0(X)$ -module de Hilbert ;
- $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée.

Après avoir étudié quelques propriétés de ces boréliens, on introduira la notion de représentation \mathcal{U} -régulière et localement \mathcal{U} -régulière où \mathcal{U} désigne une partie génératrice de la topologie de Z . On termine ce chapitre avec le théorème 3.3.5, affirmant que l'action propre d'une groupoïde ample est « localement induite » par une famille de sous-groupoïdes et de boréliens réguliers (comparé avec le résultat de Jean-Louis Tu dans [49] p. 17) .

3.1 Borélien régulier et localement régulier

L'objectif de cette partie est de donner un sens à l'opérateur $\pi(\chi_U)$ où $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ est une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée sur le $C_0(X)$ -module de Hilbert E et χ_U la fonction caractéristique d'un borélien $U \subseteq Z$. Dans le cas particulier où X est un point, on a $C_0(X) \simeq \mathbb{C}$ et donc E est un espace de Hilbert. La proposition 1.6.11 dans [55] permet alors d'étendre la représentation π à la C^* -algèbre des fonctions boréliennes bornées sur X , ce qui permet ainsi de définir l'opérateur $\pi(\chi_U)$. Nous souhaiterions à présent étudier le cas où l'espace X n'est pas réduit à un point. On rappelle que si $\rho : Z \rightarrow X$ est une application continue entre deux espaces localement compacts, alors l'algèbre $C_0(Z)$ est munie d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre grâce à l'application $\Phi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(Z)}(C_0(Z))$ définie pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $\xi \in C_0(Z)$ et $z \in Z$ par :

$$\Phi(\varphi)(\xi)(z) = \varphi(\rho(z))\xi(z).$$

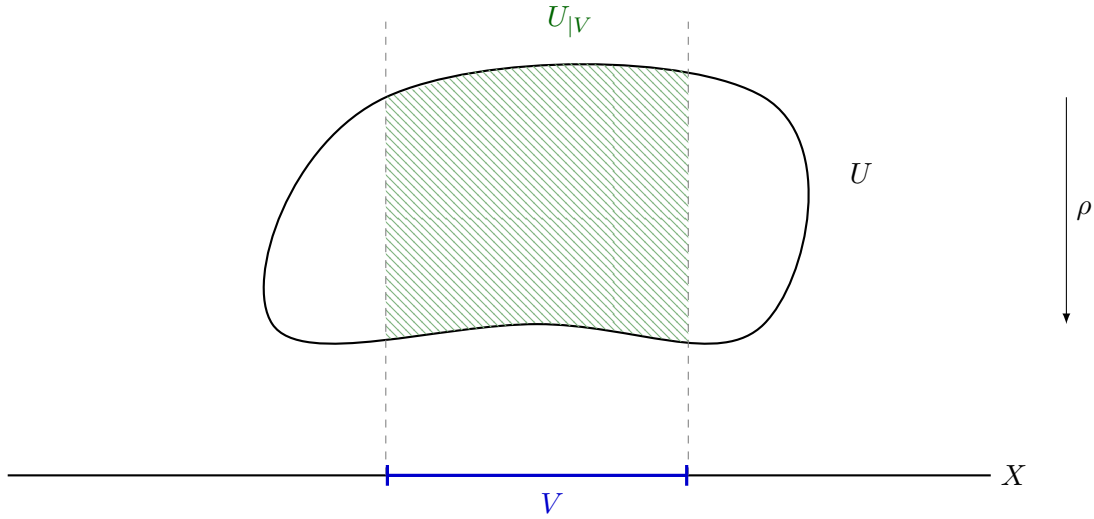
Si $U \subseteq Z$ et $V \subseteq X$ sont deux boréliens, on définit la restriction de U à V par $U|_V := U \cap \rho^{-1}(V)$. Si $V = \{x\}$, on notera simplement $U_x := U_{\{x\}}$

Définition 3.1.1 (Borélien π -régulier). Soient X et Z deux espaces localement compacts. Soit $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue. Soient E un $C_0(X)$ -module de Hilbert et :

$$\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$$

une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée. On dit qu'un borélien $U \subseteq Z$ est :

- π -régulier s'il existe un projecteur $p_{U,\pi}$ dans $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ tel que pour tout $x \in X$, le projecteur $p_{U,\pi}$ restreint à la fibre E_x en x , noté $p_{U,\pi,x}$, est égal à $\overline{\pi_x}(\chi_{U_x})$ où $\overline{\pi_x}$ désigne l'extension de la représentation π_x à la C^* -algèbre des fonctions boréliennes bornées.


 FIGURE 3.1 – Restriction du borélien $U \subseteq Y$ à $V \subseteq X$.

- *localement π -régulier* si pour tout $x \in \rho(U)$, il existe un voisinage ouvert $V \subseteq X$ de x tel que $U|_V$ est $\pi|_V$ -régulier où $\pi|_V$ désigne la restriction de la représentation π à $C_0(Z|_V)$:

$$\pi|_V : C_0(Z|_V) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(V)}(E|_V)$$

(voir la définition 1.3.60 pour la restriction d'un module et d'un opérateur à un ouvert de la base).

Lorsque la représentation est sous-entendue, et s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement π_x , p_U et $p_{U,x}$ à la place de $\overline{\pi}_x$, $p_{U,\pi}$ et $p_{U,\pi,x}$ respectivement.

Remarque 3.1.2.

- Si U est π -régulier, alors l'opérateur p_U est uniquement déterminé et $p_U^* = p_U$.
- Puisque $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ est non-dégénérée, π_x l'est aussi pour tout $x \in X$ d'après le lemme 1.3.72, ce qui permet d'étendre π_x à la C^* -algèbre des fonctions boréliennes bornées.
- Un borélien $U \subseteq Z$ qui est π -régulier est localement π -régulier. En effet, si $x \in \rho(U)$, il suffit de prendre $V_x = X$ et dans ce cas $U|_{V_x} = U$ et $\pi|_{V_x} = \pi$.
- Si U est π -régulier alors pour tout ouvert $V \subseteq X$, le borélien $U|_V$ est $\pi|_V$ -régulier. En effet, il suffit pour cela de considérer le projecteur p_U associé à U et de le restreindre à V :

$$(p_U)|_V \in \mathcal{L}_{C_0(V)}(E|_V).$$

Exemples 3.1.3. 1. Si X est un point, alors tout borélien $U \subseteq Z$ est π -régulier et le projecteur associé est simplement $\overline{\pi}(\chi_U)$.

2. Si $U \subseteq Z$ est un ouvert-fermé, alors la fonction caractéristique χ_U de U est continue. Dans ce cas, U est π -régulier et le projecteur associé est $\pi(\chi_U)$.

3. Soient $Z = X \times Y$ le produit de deux espaces localement compacts, μ une mesure borélienne sur Y et $\rho : Z \rightarrow X$ la projection sur X . Si V est un borélien de Y alors le borélien $X \times V$ est π -régulier pour la représentation $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(C_0(X, L^2(Y, \mu)))$ définie pour tous $f \in C_0(Z)$, $\xi \in C_0(X, L^2(Y, \mu))$ et $x \in X$ par :

$$\pi(f)(\xi)(x) = f(x, \cdot)\xi(x)$$

et le projecteur associé $p \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(C_0(X, L^2(Y, \mu)))$ est défini pour tous $\xi \in C_0(X, L^2(Y, \mu))$ et $x \in X$ par :

$$p(\xi)(x) = \chi_V(\cdot)\xi(x).$$

En effet, la fibre de π en $x \in X$ est :

$$\pi_x : C_0(\{x\} \times Y) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(L^2(Y, \mu))$$

et on a pour tout $\xi \in C_0(\{x\}, L^2(Y, \mu))$:

$$\begin{aligned} \pi_x(\chi_{(X \times V)_x})(\xi)(x) &= \chi_{\{x\} \times V}(x, \cdot)\xi(x) \\ &= \chi_{\{x\}}(x)\chi_V(\cdot)\xi(x) \\ &= \chi_V(\cdot)\xi(x) \\ &= p(\xi)(x). \end{aligned}$$

4. Soient $Z = [0; 1]^2$, $X = [0; 1]$ et $\rho : Z \rightarrow X$ la projection sur le premier facteur. Posons $U = (]0; 1[\times [0; 1]) \cup \{(0, 0)\}$. Alors $U_x = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si } x = 0 \\ \{x\} \times [0; 1] & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}$,

(a) Soit $E = C(X, L^2(X))$. Alors la fibre de E en $x \in X$ est isomorphe à $L^2(X)$. On considère la représentation $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ définie pour tous $f \in C_0(Z)$, $\xi \in E$ et $x \in X$ par :

$$\pi(f)(\xi)(x) = f(x, \cdot)\xi(x).$$

Dans ce cas, le borélien U n'est pas π -régulier car sinon il existerait $p \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ tel que pour tout $x \in X$, $p_x = \pi_x(\chi_{U_x})$. Notons 1_X la fonction constante égale à 1 sur X . Alors pour tout $x \in X$:

$$\langle p(1_X), p(1_X) \rangle_{C_0(X)}(x) = \langle \pi_x(\chi_{U_x})(1_X), \pi_x(\chi_{U_x})(1_X) \rangle_{\mathbb{C}} = \int_0^1 \chi_{U_x}(x, t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}$$

et donc la fonction $\langle p(1_X), p(1_X) \rangle_{C_0(X)}$ n'est pas continue sur X , ce qui est absurde.

(b) Soit $E = C(X) \oplus [C_0(X \setminus \{0\}), L^2(X)]$. L'action à droite de $C(X)$ sur E est donnée pour tout $f \oplus g \in E$ et $\varphi \in C(X)$ par :

$$(f \oplus g) \cdot \varphi = [\varphi(0)f] \oplus [g\varphi|_{X \setminus \{0\}}]$$

et la fibre de E en $x \in X$ est donnée par :

$$E_x \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{C} \oplus L^2(X) & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}.$$

Considérons la représentation $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ définie pour tout $f \in C_0(Z)$ et tout $\xi_1 \in C(X)$, $\xi_2 \in C_0(X \setminus \{0\}, L^2(X))$ par :

$$\pi(f)(\xi_1 \oplus \xi_2) = f(\cdot, 0)\xi_1 \oplus [x \mapsto f(x, \cdot)\xi_2(x)].$$

Alors le borélien U est π -régulier et le projecteur associé est l'identité sur E .

Lemme 3.1.4 (Propriétés du projecteur p_U). Soient X et Z deux espaces localement compacts et $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue. Soit E un $C_0(X)$ -module de Hilbert que l'on munit d'une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. Soient $U \subseteq Z$ un borélien π -régulier et p_U le projecteur associé. Alors :

- (i) pour tout $f \in C_0(Z)$, $p_U \circ \pi(f) = \pi(f) \circ p_U$.
- (ii) pour tout $f \in C_0(Z)$ à support dans U , $p_U \circ \pi(f) = \pi(f)$.
- (iii) pour tout $f \in C_0(Z)$ qui vaut 1 sur U , $p_U \circ \pi(f) = p_U$.

Démonstration. D'après le lemme 1.3.50, il suffit de démontrer chacune des égalités sur les fibres.

(i) Soient $x \in X$ et $f \in C_0(Z)$. Comme $f\chi_U = \chi_U f$ alors on a :

$$p_{U,x} \circ \pi_x(f|_{Z_x}) = \pi_x(\chi_{U_x}) \circ \pi_x(f|_{Z_x}) = \pi_x(f|_{Z_x}) \circ p_{U,x}.$$

(ii) Si $f \in C_0(Z)$ est à support dans U , alors $\chi_U f = f$ et donc pour tout $x \in X$,

$$p_{U,x} \circ \pi_x(f|_{Z_x}) = \pi_x(\chi_{U_x} f|_{Z_x}) = \pi_x(f|_{Z_x}).$$

(iii) Si $f \in C_0(Z)$ vaut 1 sur U , alors $\chi_U f = \chi_U$ et donc pour tout $x \in X$,

$$p_{U,x} \circ \pi_x(f|_{Z_x}) = \pi_x(\chi_{U_x} f|_{Z_x}) = p_{U,x}.$$

■

Proposition 3.1.5 (Propriétés des boréliens réguliers). Soit $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts. Soit E un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. Soient U et V deux boréliens π -réguliers de Z et p_U, p_V les projecteurs associés. Alors les boréliens $U \cup V$, $U \cap V$ et $U \setminus V$ sont π -réguliers et les projecteurs associés sont :

$$p_{U \cup V} := p_U + p_V - p_U \circ p_V, \quad p_{U \cap V} := p_U \circ p_V, \quad p_{U \setminus V} := p_U - p_U \circ p_V.$$

Plus généralement, une réunion finie, intersection finie et une différence de boréliens π -réguliers de Z est π -régulier.

Démonstration. Les projecteurs p_U et p_V commutent car ils commutent fibre à fibre. En effet, pour tout $x \in X$:

$$p_{U,x} \circ p_{V,x} = \pi_x(\chi_{U_x} \chi_{V_x}) = \pi_x(\chi_{V_x} \chi_{U_x}) = p_{V,x} \circ p_{U,x}.$$

• Montrons que le projecteur $p_{U \cup V}$ convient. On a pour tout $x \in X$:

$$p_{U \cup V,x} = p_{U,x} + p_{V,x} - p_{U,x} \circ p_{V,x} = \pi_x(\chi_{U_x}) + \pi_x(\chi_{V_x}) - \pi_x(\chi_{U_x} \chi_{V_x}) = \pi_x(\chi_{U_x \cup V_x}) = \pi_x(\chi_{(U \cup V)_x})$$

donc $U \cup V$ est π -régulier et le projecteur associé est $p_{U \cup V}$.

• Montrons que le projecteur $p_{U \cap V}$ convient. On a pour tout $x \in X$:

$$p_{U \cap V,x} = p_{U,x} \circ p_{V,x} = \pi_x(\chi_{U_x}) \circ \pi_x(\chi_{V_x}) = \pi_x(\chi_{U_x \cap V_x}) = \pi_x(\chi_{(U \cap V)_x})$$

donc $U \cap V$ est π -régulier et le projecteur associé est $p_{U \cap V}$.

• Montrons que le projecteur $p_{U \setminus V}$ convient. On a pour tout $x \in X$:

$$p_{U \setminus V,x} = p_{U,x} - p_{U,x} \circ p_{V,x} = \pi_x(\chi_{U_x \setminus (U_x \cap V_x)}) = \pi_x(\chi_{(U \setminus V)_x})$$

donc $U \setminus V$ est π -régulier et le projecteur associé est $p_{U \setminus V}$. ■

Proposition 3.1.6 (Propriétés des ouverts localement réguliers). Soit $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts. Soient E un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. Soient U et U' deux boréliens localement π -régulier de Z . Alors $U \cap U'$ est encore localement π -régulier.

Plus généralement, une intersection finie de boréliens localement π -réguliers de Z est localement π -régulière.

Démonstration. Soient U et U' deux boréliens localement π -réguliers de Z et $x \in \rho(U \cap U')$. Il existe deux voisinages ouverts V et V' de x dans X tels que $U|_V$ est $\pi|_V$ -régulier et $U'|_{V'}$ est $\pi|_{V'}$ -régulier. D'après la remarque 3.1.2, on obtient que $(U|_V)|_{V \cap V'}$ (resp. $(U'|_{V'})|_{V \cap V'}$) est $(\pi|_V)|_{V \cap V'}$ -régulier (resp. $(\pi|_{V'})|_{V \cap V'}$ -régulier). Posons $W = V \cap V' \subseteq X$. Alors $U|_W$ et $U'|_W$ sont $\pi|_W$ -régulier et :

$$(U \cap U')|_W = U|_W \cap U'|_W$$

donc d'après la proposition 3.1.5, le borélien $(U \cap U')|_W$ est encore $\pi|_W$ -régulier. ■

Nous allons à présent voir que les notions définies précédemment sont compatibles avec l'action d'un groupoïde c'est-à-dire que la régularité (resp. régularité locale) d'un borélien est conservée par l'action d'un groupoïde ample (resp. étale).

Proposition 3.1.7 (Translaté d'un borélien régulier si \mathcal{G} est ample). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$. Soit (E, V) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée et \mathcal{G} -équivariante :

$$\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

Si $U \subseteq Z$ est un borélien π -régulier et K une bissection compacte-ouverte de \mathcal{G} , alors le translaté $U \cdot K$ est encore π -régulier.

Démonstration. En utilisant la description du pull-back à l'aide du produit tensoriel (voir remarque 1.3.57), on a :

$$s^*E = E \otimes_{\Phi_s} C_0(\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad r^*E = E \otimes_{\Phi_r} C_0(\mathcal{G})$$

où les applications $\Phi_s : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(\mathcal{G})}(C_0(\mathcal{G}))$ et $\Phi_r : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(\mathcal{G})}(C_0(\mathcal{G}))$ sont définies pour tous $\varphi \in C_0(X)$, $\xi \in C_0(\mathcal{G})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\left(\Phi_s(\varphi)(\xi) \right)(\gamma) = \varphi(s(\gamma))\xi(\gamma) \quad \text{et} \quad \left(\Phi_r(\varphi)(\xi) \right)(\gamma) = \varphi(r(\gamma))\xi(\gamma).$$

Soient i l'injection de K dans \mathcal{G} et j l'injection de $s(K)$ dans X . Puisque $s(K) \cong K$, alors :

$$(s|_K)^*C_0(X) \simeq C(K) \simeq C(s(K)) \simeq j^*C_0(X),$$

et donc :

$$\begin{aligned} (s^*E)|_K &= i^*(s^*E) \\ &= (s \circ i)^*(E) \\ &= s|_K^*E \\ &= E \otimes_{\Phi_{s|_K}} s|_K^*C_0(X) \\ &\simeq E \otimes_{\Phi_{s|_K}} j^*C_0(X) \\ &= j^*E \\ &= E|_{s(K)}. \end{aligned}$$

On a de même, $(r^*E)|_K \simeq E|_{r(K)}$. Ainsi, en restreignant l'unitaire V à la bissection K , on obtient un unitaire noté W :

$$W : E|_{s(K)} \rightarrow E|_{r(K)}$$

qui est $C(K)$ -linéaire (après avoir identifié K , $s(K)$ et $r(K)$) et vérifie pour tout $\gamma \in K$:

$$W_{s(\gamma)} = V_\gamma \quad \text{et} \quad (W^*)_{r(\gamma)} = V_{\gamma^{-1}}.$$

Soit p_U le projecteur associé au borélien π -régulier U . Soit $p_{U \cdot K} : E \rightarrow E$ l'opérateur défini pour tout $\xi \in E$ par :

$$p_{U \cdot K}(\xi) := \begin{cases} W^* \circ (p_U)|_{E|_{r(K)}} \circ W(\xi) & \text{si } \xi \in E|_{s(K)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions que le projecteur $p_{U \cdot K}$ convient. Soit $x \in X$.

- Si $x \notin s(K)$, alors $(U \cdot K)_x = \emptyset$ donc $\pi_x(\chi_{(U \cdot K)_x}) = 0 = p_{U \cdot K, x}$.
- Si $x \in s(K)$, alors il existe $\gamma \in K$ tel que $x = s(\gamma)$. Par injectivité de s sur la bissection K , on obtient :

$$(U \cdot K)_x = U\gamma.$$

Comme la représentation π est \mathcal{G} -équivariante, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \pi_x(\chi_{(U \cdot K)_x}) &= \pi_{s(\gamma)}(\chi_{U\gamma}) \\
 &= V_{\gamma^{-1}} \circ \pi_{r(\gamma)}(\chi_U) \circ V_\gamma \\
 &= V_{\gamma^{-1}} \circ p_{U,r(\gamma)} \circ V_\gamma \\
 &= (W^*)_{r(\gamma)} \circ p_{U,r(\gamma)} \circ W_{s(\gamma)} \\
 &= \left(W^* \circ (p_U)|_{E|_{r(K)}} \circ W \right)_{s(\gamma)} \\
 &= p_{U \cdot K, x}.
 \end{aligned}$$

Donc $\pi_x(\chi_{U \cdot K}) = p_{U \cdot K, x}$ pour tout $x \in X$ et donc le translaté $U \cdot K$ est π -régulier. ■

Proposition 3.1.8 (Translaté d'un borélien localement régulier si \mathcal{G} est étale). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$. Soient (E, V) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant et $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée et \mathcal{G} -équivariante. Soient $U \subseteq Z$ un borélien localement π -régulier et $B \subseteq \mathcal{G}$ est une bissection ouverte. Alors il existe une bissection ouverte $B' \subseteq \mathcal{G}$ telle que $(U \cdot B)|_{s(B')}$ est $\pi|_{s(B')}$ -régulier. En particulier, le translaté $U \cdot B$ est localement π -régulier.

Démonstration. Soit $y \in \rho(U \cdot B)$. Il existe $u \in U$ et $\gamma \in B \cap \mathcal{G}^{\rho(u)}$ tels que $y = \rho(u\gamma) = s(\gamma)$. Comme $r(\gamma) \in \rho(U)$ et que U est localement π -régulier, il existe un voisinage ouvert $V' \subseteq X$ de $r(\gamma)$ tel que $U|_{V'}$ soit $\pi|_{V'}$ -régulier. Quitte à remplacer V' par $V' \cap r(B)$, on peut supposer que $V' \subseteq r(B)$. La bissection ouverte $B' := B \cap r^{-1}(V')$ vérifie $r(B') = V'$. Montrons que $(U \cdot B)|_{s(B')}$ est $\pi|_{s(B')}$ -régulier. De la même façon que dans la démonstration de la proposition 3.1.7, on a :

$$(s^*E)|_{B'} = E \otimes_{\Phi_{s|_{B'}}} C_0(B) \simeq E|_{s(B')} \quad \text{et} \quad (r^*E)|_{B'} = E \otimes_{\Phi_{r|_{B'}}} C_0(B') \simeq E|_{r(B')}.$$

Ainsi, en restreignant l'unitaire V à la bissection B' , on obtient un unitaire noté W :

$$W : E|_{s(B')} \rightarrow E|_{r(B')}$$

induisant l'unitaire $V_\gamma : E_{s(\gamma)} \rightarrow E_{r(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in B'$, et qui est $C_0(B')$ -linéaire (après avoir identifié $B', s(B')$ et $r(B')$). On a de plus, pour tout $\gamma \in B'$:

$$W_{s(\gamma)} = V_\gamma \quad \text{et} \quad (W^*)_{r(\gamma)} = V_{\gamma^{-1}}.$$

On note $(p_U)|_{r(B')} \in \mathcal{L}_{C_0(r(B'))}(E|_{r(B')})$ le projecteur associé à l'ouvert $\pi|_{r(B')}$ -régulier $U|_{r(B')}$. On considère la projection :

$$p_{U \cdot B} := W^* \circ (p_U)|_{r(B')} \circ W \in \mathcal{L}_{C_0(s(B'))}(E|_{s(B')}).$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 E|_{s(B')} & \xrightarrow{W} & E|_{r(B')} \\
 p_{U \cdot B} \downarrow & & \downarrow (p_U)|_{r(B')} \\
 E|_{s(B')} & \xleftarrow{W^*} & E|_{r(B')}
 \end{array}$$

Vérifions que le projecteur $p_{U \cdot B}$ convient. Soit $x \in s(B')$. Il existe $\gamma \in B'$ tel que $x = s(\gamma)$. Par injectivité de s sur la bissection B , on obtient :

$$(U \cdot B)_x = U\gamma$$

de plus, $W_{s(\gamma)} = V_\gamma$ et $(W^*)_{r(\gamma)} = V_{\gamma^{-1}}$. Comme la représentation π est \mathcal{G} -équivariante, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\pi|_{s(B')})_x(\chi_{(U \cdot B)_x}) &= \pi_{s(\gamma)}(\chi_{U\gamma}) \\
 &= V_{\gamma^{-1}} \circ \pi_{r(\gamma)}(\chi_U) \circ V_\gamma \\
 &= V_{\gamma^{-1}} \circ p_{U,r(\gamma)} \circ V_\gamma \\
 &= (W^*)_{r(\gamma)} \circ p_{U,r(\gamma)} \circ W_{s(\gamma)} \\
 &= (W^* \circ p_U \circ W)_{s(\gamma)} \\
 &= p_{U \cdot B, x}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $(U \cdot B)|_{s(B')}$ est $\pi|_{s(B')}$ -régulier et donc le translaté $U \cdot B$ est localement π -régulier. ■

Corollaire 3.1.9. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et compact. Soit Z un \mathcal{G} -espace d'application d'ancrage $\rho : Z \rightarrow X$. Soit E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée et \mathcal{G} -équivariante $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. Si $U \subseteq Z$ est π -régulier alors $U \cdot \mathcal{G}$ est π -régulier.

Démonstration. Le groupoïde \mathcal{G} étant ample et compact, il se décompose en une réunion finie de bissections compactes $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ et on a :

$$U \cdot \mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n U \cdot K_i.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le translaté $U \cdot K_i$ est π -régulier donc d'après la proposition 3.1.7, l'orbite $U \cdot \mathcal{G}$ est π -régulière. ■

Proposition 3.1.10. Soit $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts. Soit E un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. Soit $U \subseteq Z$ un ouvert. Supposons qu'il existe des ouverts V_1, \dots, V_n dans X tels que :

- $\rho(U) = \bigcup_{i=1}^n V_i$;
- $U|_{V_i}$ est $\pi|_{V_i}$ -régulier pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On suppose qu'il existe également une partition de l'unité $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n} : \rho(U) \rightarrow [0; 1]$ associée au recouvrement de $\rho(U)$. Alors l'ouvert U est π -régulier.

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $p_i : E|_{V_i} \rightarrow E|_{V_i}$ le projecteur associé à l'ouvert $U|_{V_i}$. Soit $p : E \rightarrow E$ l'opérateur adjoignable défini pour tout $e \in E$ par :

$$p(e) = \sum_{i=1}^n p_i(e \cdot \Phi_i).$$

Montrons que $p_x = \pi_x(\chi_{U_x})$ pour tout $x \in X$. Soit $x \in X$. On distingue deux cas.

- Cas où $x \in \rho(U)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $x \notin V_i$, alors $\phi_i(x) = 0$ et comme $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$, on obtient :

$$p_x = \sum_{i=1}^n p_{i,x} \phi_i(x) = \sum_{i=1}^n (\pi|_{V_i})_x(\chi_{U|_{V_i \cap \{x\}}}) \phi_i(x) = \sum_{i=1}^n \pi_x(\chi_{U_x}) \phi_i(x) = \pi_x(\chi_{U_x}).$$

- Cas où $x \in X \setminus \rho(U)$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x \notin V_i$ donc $\phi_i(x) = 0$. On obtient alors $p_x = 0$. De plus, $U_x = \emptyset$ donc $\pi_x(\chi_{U_x}) = 0$. ■

Nous pouvons à présent généraliser le corollaire 3.1.9 aux cadres des groupoïdes étales et compacts.

Corollaire 3.1.11. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et compact et Z un \mathcal{G} -espace d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$ que l'on suppose ouverte. Soient E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivalent et $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une $C_0(X)$ -représentation non-dégénérée et \mathcal{G} -équivalente. Si $U \subseteq Z$ est π -régulier alors l'orbite $U \cdot \mathcal{G}$ est π -régulière.

Démonstration. Soit $\eta \in \mathcal{G}$. La fibre $\mathcal{G}_{s(\eta)}$ est finie (car elle est compacte et discrète), on note :

$$\mathcal{G}_{s(\eta)} = \{\gamma_1^\eta, \dots, \gamma_p^\eta\}.$$

Soit $B_{\gamma_j^\eta} \subseteq \mathcal{G}$ une bissection ouverte contenant γ_j^η . Quitte à réduire chacune des bissections, on peut supposer que l'ouvert $s(B_{\gamma_j^\eta})$ est indépendant de j ¹⁷ et que l'application $x \in s(B_{\gamma_1^\eta}) \mapsto \text{Card}(\mathcal{G}_x)$ est constante (une telle application est continue d'après le lemme 2.3.3).

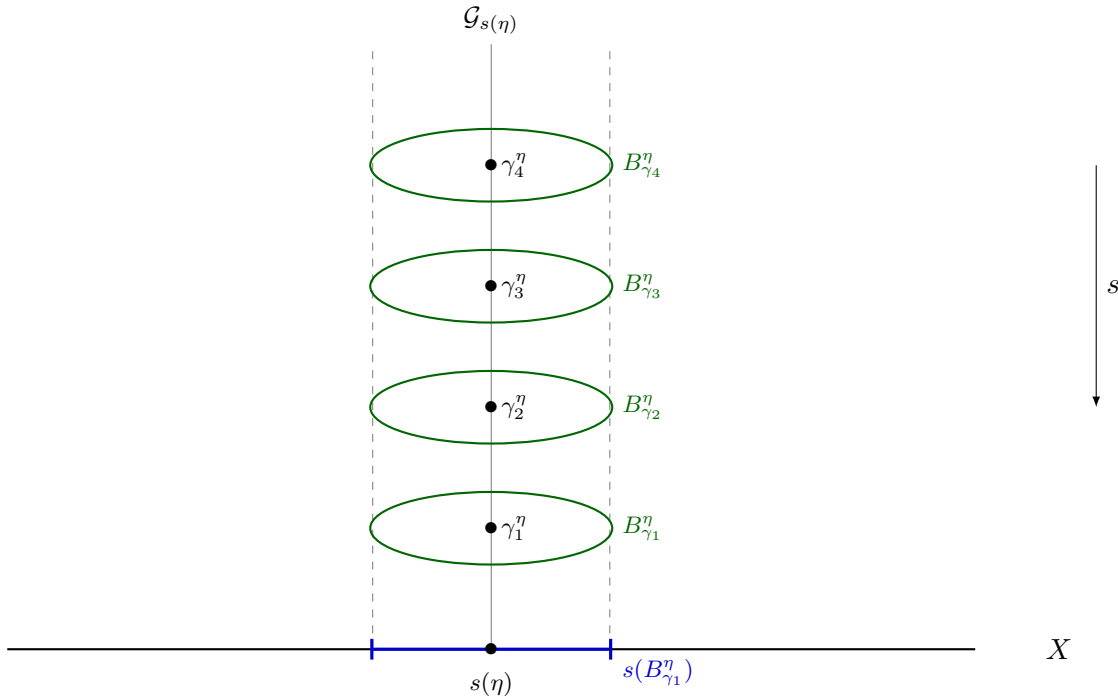


FIGURE 3.2 – Recouvrement en bissection de la s -fibre.

Par compacité de \mathcal{G} , on obtient l'existence d'une famille de bissections ouvertes $(B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p_i}}$ de \mathcal{G} telle que :

(i) $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^q \bigcup_{j=1}^{p_i} B_{i,j}$;

(ii) pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, l'ouvert $s(B_{i,j})$ est indépendant de j et on pose $V_i := s(B_{i,1})$;

(iii) pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on a l'égalité $\mathcal{G}_{V_i} = \bigcup_{j=1}^{p_i} B_{i,j}$.

D'après (iii), on a pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$(U \cdot \mathcal{G})|_{V_i} = \bigcup_{j=1}^{p_i} U \cdot B_{i,j}$$

17. Plus précisément, quitte à remplacer $B_{\gamma_j^\eta}$ par $B_{\gamma_j^\eta} \cap s^{-1} \left(\bigcap_{k=1}^p s(B_{\gamma_k^\eta}) \right)$, on peut supposer que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, on a $s(B_{\gamma_i^\eta}) = s(B_{\gamma_j^\eta})$.

et d'après (i), on a $X = \bigcup_{i=1}^q V_i$.

Soient $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p_i \rrbracket$. Par hypothèse, U est π -régulier. En particulier, la restriction $U|_{r(B_{i,j})}$ est donc $\pi|_{r(B_{i,j})}$ -régulière. En utilisant la démonstration de la proposition 3.1.8 avec $V = r(B_{i,j})$, le translaté $U \cdot B_{i,j} = (U \cdot B_{i,j})|_{s(B_{i,j})}$ est $\pi|_{s(B_{i,j})}$ -régulier c'est-à-dire $\pi|_{V_i}$ -régulier. D'après la proposition 3.1.5, $(U \cdot \mathcal{G})|_{V_i}$ est $\pi|_{V_i}$ -régulier. Finalement, d'après la proposition 3.1.10, on en déduit que l'orbite $U \cdot \mathcal{G}$ est π -régulière. ■

3.2 Représentation régulière et localement régulière

Étant donnée \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z , l'objectif de cette partie est d'étudier les propriétés des représentations $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ pour lesquelles tous les ouverts de \mathcal{U} sont π -réguliers ou localement π -réguliers.

Définition 3.2.1 (Représentation régulière). Soient $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts, E un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie Z . On dit que la représentation π est :

- \mathcal{U} -régulière si π est non-dégénérée et si tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est π -régulier ;
- localement \mathcal{U} -régulière si π est non-dégénérée et si tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est localement π -régulier.

De plus, on pose :

- $\widehat{\mathcal{U}}$ l'ensemble des ouverts relativement compacts de X qui sont π -réguliers pour toute représentation \mathcal{U} -régulière.
- $\widehat{\mathcal{U}}_{\text{loc}}$ l'ensemble des ouverts relativement compacts de X qui sont localement π -réguliers pour toute représentation localement \mathcal{U} -régulière.

Exemples 3.2.2. 1. Si X est réduit à un point, alors on a vu que tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est π -régulier. On en déduit que toute représentation non-dégénérée de $C_0(Z)$ sur un espace de Hilbert est \mathcal{U} -régulière pour toute partie génératrice \mathcal{U} de la topologie de Z , et $\widehat{\mathcal{U}}$ est l'ensemble de tous les ouverts relativement compacts.

2. Dans le cas où $Z = X$ et $\rho = \text{id}_X$, alors si \mathcal{U} désigne une partie génératrice de la topologie de X , la représentation $\pi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(C_0(X))$ donnée par la multiplication est localement \mathcal{U} -régulière. En effet, si $U \in \mathcal{U}$ et $x \in \rho(U) = U$, alors on pose $V_x = U$. Dans ce cas, $U|_{V_x} = U$ et le projecteur est $\text{id}_{C_0(U)} \in \mathcal{L}_{C_0(U)}(C_0(U)) \simeq C_b(U)$.

Une première conséquence directe de la définition est que la régularité est conservée par somme directe.

Lemme 3.2.3. Soient $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts et \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soient E_1 et E_2 deux $C_0(X)$ -modules de Hilbert munis de représentations \mathcal{U} -régulières $\pi_1 : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1)$ et $\pi_2 : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_2)$. Notons $\pi_1 \oplus \pi_2 \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1 \oplus E_2)$ la somme directe des représentations π_1 et π_2 .

- (i) Si π_1 et π_2 sont \mathcal{U} -régulières, alors $\pi_1 \oplus \pi_2$ est encore \mathcal{U} -régulière.
- (ii) Si π_1 et π_2 sont localement \mathcal{U} -régulières, alors $\pi_1 \oplus \pi_2$ est encore localement \mathcal{U} -régulière.

Démonstration. (i) Soient $U \in \mathcal{U}$ et p_i le projecteur associé à la représentation \mathcal{U} -régulière π_i . Alors le projecteur $p_1 \oplus p_2 \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1 \oplus E_2)$ vérifie :

$$\forall x \in X, \quad (p_1 \oplus p_2)_x = (\pi_1 \oplus \pi_2)_x(\chi_{U_x}).$$

- (ii) Soient $U \in \mathcal{U}$ et $x \in \rho(U)$. Comme π_1 et π_2 sont localement \mathcal{U} -régulières, il existe deux voisinages ouverts $V_1, V_2 \subseteq X$ de x tels que $U|_{V_1}$ est $\pi_1|_{V_1}$ -régulier et $U|_{V_2}$ est $\pi_2|_{V_2}$ -régulier. Posons $V := V_1 \cap V_2$. Alors d'après la remarque 3.1.2, l'ouvert $U|_V$ est à la fois $\pi_1|_V$ -régulier et $\pi_2|_V$ -régulier. Soient $p_1 \in \mathcal{L}_{C_0(V)}(E_1|_V)$ et $p_2 \in \mathcal{L}_{C_0(V)}(E_2|_V)$ les projecteurs associés. Considérons le projecteur $p = p_1 \oplus p_2$ dans $\mathcal{L}_{C_0(V)}((E_1 \oplus E_2)|_V)$. Alors pour tout $x \in V$:

$$p_x = p_{1,x} \oplus p_{2,x} = \pi_{1,x}(\chi_{U_x}) \oplus \pi_{2,x}(\chi_{U_x}) = (\pi_1 \oplus \pi_2)_x(\chi_{U_x})$$

et donc $U|_V$ est $(\pi_1 \oplus \pi_2)|_V$ -régulier c'est-à-dire que la représentation $\pi_1 \oplus \pi_2$ est localement \mathcal{U} -régulière. ■

On donne à présent une caractérisation des représentations \mathcal{U} -régulières dans le cas où la base est totalement discontinue (typiquement, la base d'un groupoïde ample).

Lemme 3.2.4. Soit $\rho : Z \rightarrow X$ une application continue entre deux espaces localement compacts. Soient E un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Supposons que X est totalement discontinu et que pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\rho(U)$ soit un compact-ouvert de X . Alors on a l'équivalence :

$$\pi \text{ est } \mathcal{U}\text{-régulière} \iff \pi \text{ est localement } \mathcal{U}\text{-régulière.}$$

Démonstration. \implies Si π est \mathcal{U} -régulière, alors d'après la remarque 3.1.2, tout borélien π -régulier est localement π -régulier donc π est localement \mathcal{U} -régulière.

\impliedby Soient $U \in \mathcal{U}$, $x_0 \in \rho(U)$ et V un voisinage ouvert de x_0 dans X tel que $U|_V$ est $\pi|_V$ -régulier. Comme X est totalement discontinu, il existe un voisinage compact-ouvert $W \subseteq V$ de x_0 et en conséquence, $\chi_W \in C_0(V)$. Notons $p_V \in \mathcal{L}_{C_0(V)}(E|_V)$ le projecteur associé à $U|_V$. La restriction de p_V à l'ouvert W fournit un projecteur noté $p|_W \in \mathcal{L}_{C_0(W)}(E|_W)$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$(p|_W)_x = \begin{cases} \pi_x(\chi_{U_x}) & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{si } x \notin W \end{cases} = \pi_x(\chi_{U|_{W \cap \{x\}}})$$

donc $U|_W$ est π -régulier. Par compacité de $\rho(U)$, il existe un entier $n \geq 1$ et des compacts-ouverts W_1, \dots, W_n dans X tels que $\rho(U) = \cup_{i=1}^n W_i$ et $U|_{W_i}$ est π -régulier pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient donc la décomposition :

$$U = \bigcup_{i=1}^n U|_{W_i},$$

donc d'après la proposition 3.1.5, le borélien U est π -régulier. Ainsi, π est \mathcal{U} -régulière. ■

3.3 Action localement induite par des boréliens réguliers

Le but de cette partie est de démontrer un résultat analogue à celui de Jean-Louis Tu (voir [49] p. 17) mais adapté à notre cadre. Dans la suite, on rappelle que la notion de sous-groupoïde a été introduite dans la définition 1.2.17.

Définition 3.3.1. Soit \mathcal{G} un groupoïde localement compact. Un sous-groupoïde relativement clopen de \mathcal{G} est un sous-groupoïde \mathcal{H} ouvert dans \mathcal{G} tel que \mathcal{H} est fermé dans $\mathcal{G}_{\mathcal{H}^{(0)}}$.

Remarque 3.3.2. Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact et \mathcal{H} un sous-groupoïde relativement clopen de \mathcal{G} . Alors \mathcal{H} est fermé dans $\mathcal{G}^{\mathcal{H}^{(0)}}$ ¹⁸ et donc \mathcal{H} est fermé dans $\mathcal{G}^{\mathcal{H}^{(0)}} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{H}^{(0)}} = \mathcal{G}_{\mathcal{H}^{(0)}}^{\mathcal{H}^{(0)}}$.

18. Car l'application $\gamma \in \mathcal{G} \mapsto \gamma^{-1}$ est un homéomorphisme

Lemme 3.3.3. Soit $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local entre deux espaces localement compacts. Soient $s_1, s_2 : X \rightarrow Z$ deux sections de ρ égales en un point x_0 . Alors il existe un voisinage $U \subseteq X$ de $x_0 \in X$ tel que $s_{1|U} = s_{2|U}$.

Démonstration. Notons $z_0 = s_1(x_0) = s_2(x_0)$. Il existe un voisinage $V \subseteq Z$ de z_0 tel que l'application $\rho|_V : V \rightarrow \rho(V)$ soit un homéomorphisme. Comme $x_0 \in \rho(V)$, alors par continuité de s_1 et s_2 , il existe un voisinage $U \subseteq \rho(V)$ de x_0 tel que $s_1(U) \subseteq V$ et $s_2(U) \subseteq V$. Alors pour tout $x \in U$:

$$\rho|_V \circ s_1(x) = x = \rho|_V \circ s_2(x),$$

donc $s_1(x) = (\rho|_V)^{-1} \circ \rho|_V \circ s_2(x) = s_2(x)$. D'où $s_{1|U} = s_{2|U}$. ■

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème suivant (puis le théorème 3.3.5), affirmant que l'action propre d'un groupoïde ample est localement induite par une famille de sous-groupoïdes relativement clopens. On rappelle que :

- si \mathcal{G} un groupoïde localement compact, \mathcal{H} un sous-groupoïde fermé de \mathcal{G} et Z un \mathcal{H} -espace à droite d'application d'ancrage $\rho : Z \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$, alors l'espace induit est l'espace des orbites de l'action de \mathcal{H} sur $Z \times_{\rho, r} \mathcal{G}$:

$$Z \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} := Z \times_{\rho, r} \mathcal{G} / \mathcal{H}.$$

- $\widehat{\mathcal{U}}_{\text{loc}}$ désigne l'ensemble des ouverts relativement compacts de X qui sont localement π -réguliers pour toute représentation localement \mathcal{U} -régulière.

Théorème 3.3.4. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale agissant proprement à droite sur un espace localement compact Z . Soient \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z et E un $C_0(X)$ -module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant. Alors pour tout $z_0 \in Z$ et tout voisinage ouvert $U \subseteq Z$ de z_0 , il existe :

- un sous-groupoïde relativement clopen \mathcal{H} de \mathcal{G} ;
- un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de z_0 appartenant à $\widehat{\mathcal{U}}_{\text{loc}}$ et qui est \mathcal{H} -invariant ;

tels que l'application :

$$\psi : \begin{cases} V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & V \cdot \mathcal{G} \\ [v, \gamma] & \longmapsto & v\gamma \end{cases}$$

soit un homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant.

Démonstration. Soient $z_0 \in Z$ et $\rho : Z \rightarrow X$ l'application d'ancrage associée à l'action de \mathcal{G} sur Z . Posons $x_0 = \rho(z_0)$. Comme X est localement compact, il existe un voisinage compact $W_0 \subseteq X$ de x_0 . Considérons F_0 , le stabilisateur de z_0 c'est-à-dire $F_0 = \{\gamma \in \mathcal{G}^{\rho(z_0)} \mid z_0\gamma = z_0\}$ et remarquons que pour tout $\gamma \in F_0$, on a $x_0 = s(\gamma) = r(\gamma)$. L'action de \mathcal{G} sur Z étant propre, F_0 est un sous-groupoïde fini de \mathcal{G} qui est un groupe. Pour tout $\gamma \in F_0$, il existe une bissection ouverte U_γ contenant γ . Quitte à remplacer W_0 par $\bigcap_{\eta \in F_0} (W_0 \cap r(U_\eta))$ (qui est non vide car contient x_0), on peut supposer que $W_0 \subset r(U_\gamma)$ pour tout $\gamma \in F_0$. Soient $\gamma \in F_0$ et p_γ la section locale en γ associée à r c'est-à-dire l'application :

$$p_\gamma : \begin{cases} W_0 & \longrightarrow & U_\gamma \\ x & \longmapsto & (r|_{U_\gamma})^{-1}(x) \end{cases}$$

vérifiant $p_\gamma(x_0) = \gamma$. On considère l'homéomorphisme local $\varphi_\gamma := s \circ p_\gamma : W_0 \rightarrow s(U_\gamma)$. Soient $\gamma, \eta \in F_0$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} p_\gamma(x_0)p_\eta(\varphi_\gamma(x_0)) &= p_\gamma(x_0)p_\eta(s(\gamma)) \\ &= p_\gamma(x_0)p_\eta(x_0) \\ &= \gamma\eta \\ &= p_{\gamma\eta}(x_0). \end{aligned}$$

Posons $W'_0 := \bigcap_{\eta \in F_0} \varphi_\eta^{-1}(s(U_\eta) \cap W_0)$. Les applications :

$$x \in W'_0 \mapsto p_\gamma(x)p_\eta(\varphi_\gamma(x)) \quad \text{et} \quad x \in W'_0 \mapsto p_{\gamma\eta}(x)$$

sont deux sections locales continues de r égales en x_0 donc sont égales sur un voisinage de x_0 d'après le lemme 3.3.3. Il existe donc un voisinage compact $W_1 \subseteq W'_0$ de x_0 tel que pour tous $\gamma, \gamma' \in F_0$ et tout $x \in W_1$:

$$p_\gamma(x)p_{\gamma'}(\varphi_\gamma(x)) = p_{\gamma\gamma'}(x).$$

Posons :

$$A := \bigcap_{\gamma \in F_0} \varphi_\gamma(\overset{\circ}{W}_1) \subseteq X.$$

Alors A est un ouvert de X ¹⁹. Si $\gamma, \gamma' \in F_0$ et $x \in A$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma'}(\varphi_\gamma(x)) &:= s \circ p_{\gamma'}(\varphi_\gamma(x)) \\ &= s(p_\gamma(x)p_{\gamma'}(\varphi_\gamma(x))) \\ &= s(p_{\gamma\gamma'}(x)) \\ &=: \varphi_{\gamma\gamma'}(x). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in A$:

$$\varphi_{x_0}(x) = s \circ (r|_{U_{x_0}})^{-1}(x) = s(x) = x.$$

On définit alors une action à droite de F_0 sur A en posant $x\gamma := \varphi_\gamma(x)$ pour tous $\gamma \in F_0, x \in A$. De plus, A contient x_0 car pour tout $\gamma \in F_0, x_0 = s(\gamma) = s \circ p_\gamma(x_0) = \varphi_\gamma(x_0) \in A$ et par définition, A est invariant sous l'action de F_0 . Ainsi, A est un voisinage F_0 -invariant de x_0 .

• Considérons les applications continues²⁰ suivantes :

$$\Phi : \begin{cases} A \rtimes F_0 & \longrightarrow & \mathcal{G}_A^A \\ (x, \gamma) & \longmapsto & p_\gamma(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi^{(0)} : \begin{cases} A & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x \end{cases}.$$

On vérifie que $s \circ \Phi = \Phi^{(0)} \circ s_{A \rtimes F_0}, r \circ \Phi = \Phi^{(0)} \circ r_{A \rtimes F_0}$. De plus, si (x, γ) et (x', γ') sont deux paires composables dans $A \rtimes F_0$, alors on a $x' = x\gamma = \varphi_\gamma(x)$ et donc :

$$\begin{aligned} \Phi(x, \gamma)\Phi(x', \gamma') &= p_\gamma(x)p_{\gamma'}(x') \\ &= p_\gamma(x)p_{\gamma'}(x\gamma) \\ &= p_{\gamma\gamma'}(x) \\ &= \Phi(x, \gamma\gamma'). \end{aligned}$$

Ainsi, Φ est un morphisme de groupoïdes (voir définition 1.2.4). Considérons le sous-espace de \mathcal{G}_A^A suivant :

$$\mathcal{H} := \Phi(A \rtimes F_0).$$

\mathcal{H} est stable par produit et inverse donc c'est un sous-groupoïde de \mathcal{G}_A^A dont la base est :

$$\mathcal{H}^{(0)} = \Phi^{(0)}\left((A \rtimes F_0)^{(0)}\right) = \Phi^{(0)}(A) = A.$$

Nous allons montrer qu'il est relativement clopen dans \mathcal{G} . Remarquons que l'on a :

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\gamma \in F_0} \Phi(A \times \{\gamma\}).$$

19. φ_γ est un homéomorphisme local donc $\varphi_\gamma(\overset{\circ}{W}_1)$ est ouvert.

20. Si $\gamma_0 \in F_0$, alors l'application $x \in A \mapsto p_{\gamma_0}(x)$ est continue donc $\Phi|_{A \times \{\gamma_0\}}$ aussi, et comme F_0 est fini, alors Φ est continue.

Pour montrer que \mathcal{H} est ouvert dans \mathcal{G} , il suffit donc de montrer que $\Phi(A \times \{\gamma\})$ est ouvert pour tout $\gamma \in F_0$. Pour tout $\gamma \in F_0$, on a $\Phi(A \times \{\gamma\}) = (r|_{U_\gamma})^{-1}(A)$ qui est ouvert car A est ouvert dans X . De plus, la base de \mathcal{H} , c'est-à-dire A , est aussi ouverte dans la base de \mathcal{G} , c'est-à-dire X . Donc \mathcal{H} est ouvert dans \mathcal{G} . Montrons que \mathcal{H} est fermé dans $s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$. Soit $(h_\lambda)_\lambda$ une suite dans \mathcal{H} convergente vers $h \in s^{-1}(A)$. Montrons que $h \in \mathcal{H}$. Il existe deux suites $(a_\lambda)_\lambda$ dans A et $(\gamma_\lambda)_\lambda$ une suite dans F_0 telles que pour tout λ :

$$h_\lambda = \Phi(a_\lambda, \gamma_\lambda).$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(\gamma_\lambda)_\lambda$, on peut supposer que la suite $(\gamma_\lambda)_\lambda$ est constante égale à γ_0 . En composant par s , on obtient :

$$s(h_\lambda) = a_\lambda \gamma_0,$$

c'est-à-dire que $a_\lambda = (s(h_\lambda))\gamma_0^{-1}$. Comme la suite $(s(h_\lambda))_\lambda$ converge dans A vers $s(h) \in A$ et que A est stable par F_0 , alors la suite $(a_\lambda)_\lambda$ converge dans A vers $a := (s(h))\gamma_0^{-1} \in A$. Ainsi, comme A est séparé, alors par unicité de la limite, $h = \Phi(a, \gamma_0)$ donc $h \in \mathcal{H}$.

• Dans la suite, on montre qu'il existe un voisinage π -régulier $V_1 \subseteq \rho^{-1}(A)$ de z_0 tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, l'ensemble $V_1 \cap V_1\gamma$ est vide. Posons $C = (Z \times_{\rho,r} \mathcal{G}) \setminus (Z \times_{\rho,r} \mathcal{H})$ et :

$$\alpha : \begin{cases} Z \times_{\rho,r} \mathcal{G} & \longrightarrow & Z \times Z \\ (z, \gamma) & \longmapsto & (z, z\gamma) \end{cases} .$$

Remarquons que si $\gamma \in F_0$, alors $\gamma = p_\gamma(x_0) = \Phi(x_0, \gamma) \in \mathcal{H}$ donc $F_0 \subseteq \mathcal{H}$ et ainsi $(z_0, z_0) \notin \alpha(C)$. Comme \mathcal{H} est ouvert dans \mathcal{G} , alors C est fermée. L'action de \mathcal{G} sur Z est propre donc α est propre et donc fermée. Ainsi, $\alpha(C)$ est un fermé de $Z \times Z$. Soit donc $V_1 \subseteq U$ un voisinage ouvert de z_0 tel que $(V_1 \times V_1) \cap \alpha(C) = \emptyset$. Soit $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une représentation localement \mathcal{U} -régulière quelconque. Un voisinage ouvert de z_0 dans V_1 vérifie encore l'égalité précédente donc quitte à restreindre V_1 , on peut supposer que :

- V_1 est relativement compact ;
- $V_1 \in \mathcal{U}$ et en particulier, V_1 est localement π -régulier ;
- $V_1 \subseteq \rho^{-1}(A)$.

Si $V_1 \cap V_1\gamma \neq \emptyset$, alors il existe $v, v' \in V_1$ tels que $(v, v'\gamma) \in V_1 \times V_1$ et donc $\gamma \in \mathcal{H}$. Remarquons que tout ouvert dans V_1 vérifie encore cette propriété. Posons :

$$V = \bigcap_{\gamma \in F_0} V_1 \cdot \Phi(A, \{\gamma\}) \subseteq U.$$

Pour tout $\gamma \in F_0$, $V_1 \cdot \Phi(A, \{\gamma\})$ est bien définie puisque $r(\Phi(A, \{\gamma\})) \subseteq \mathcal{H}^{(0)} = A$ et que l'on a choisi V_1 dans $\rho^{-1}(A)$. De plus, V est un voisinage ouvert de z_0 dans U qui est \mathcal{H} -invariant (par définition de \mathcal{H}). Pour tout $\gamma \in F_0$, on a $\Phi(A, \{\gamma\}) \subseteq U_\gamma$ donc $\Phi(A, \{\gamma\})$ est une bissection ouverte et V_1 est localement π -régulier donc d'après la proposition 3.1.8, le translaté $V_1 \cdot \Phi(A, \{\gamma\})$ est localement π -régulier. Puisque V est une intersection finie de boréliens localement π -régulier, alors V est localement π -régulier (proposition 3.1.6). Ceci étant vrai pour toute représentation \mathcal{U} -régulière π , on a donc montré que $V \in \widehat{\mathcal{U}}_{\text{loc}}$. Considérons l'application :

$$\psi : \begin{cases} V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & V \cdot \mathcal{G} \\ [v, \gamma] & \longmapsto & v\gamma \end{cases} .$$

- ψ est bien définie car si $[v, \gamma] = [v', \gamma']$ pour $v, v' \in V$ et $\gamma \in \mathcal{G}^{\rho(v)}, \gamma' \in \mathcal{G}^{\rho(v')}$, alors il existe $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $v = v'\eta$ et $\gamma = \eta^{-1}\gamma'$ donc $v\gamma = v'\eta\eta^{-1}\gamma' = v'\gamma'$.
- L'application ψ est continue et \mathcal{G} -équivariante.

- ψ est injective car si $v\gamma = v'\gamma'$, alors $v = v'\gamma'\gamma^{-1} \in V \cap V(\gamma'\gamma^{-1})$ et donc $\gamma'\gamma^{-1} \in \mathcal{H}$ d'où $[v, \gamma] = [v', \gamma']$. L'application inverse est :

$$\psi^{-1} : \begin{cases} V \cdot \mathcal{G} & \longrightarrow & V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \\ v\gamma & \longmapsto & [v, \gamma] \end{cases}$$

qui est bien définie pour les raisons évoquées plus haut. On montre que ψ est une application ouverte ce qui prouvera la continuité de ψ^{-1} . L'application $f : V \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow V \cdot \mathcal{G}$ est ouverte donc si O est un ouvert de $V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$, alors en notant $q : V \times_{\rho, r} \mathcal{G} \rightarrow V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ l'application quotient, on obtient :

$$\psi(O) = f(q^{-1}(O)).$$

Donc ψ est ouverte puisque f l'est et que $q^{-1}(O)$ est un ouvert de $V \times_{\rho, r} \mathcal{G}$. ■

Dans le théorème suivant, on rappelle que $\widehat{\mathcal{U}}$ désigne l'ensemble des ouverts relativement compacts de X qui sont π -réguliers pour toute représentation \mathcal{U} -régulière.

Théorème 3.3.5. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre. Soient \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z et E un $C_0(X)$ -module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant. Alors pour tout $z_0 \in Z$, pour tout voisinage ouvert $U \subseteq Z$ de z_0 , il existe :

- un sous-groupoïde compact-ouvert $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$;
- un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de z_0 appartenant à $\widehat{\mathcal{U}}$ et qui est \mathcal{H} -invariant ;

tels que l'application :

$$\psi : \begin{cases} V \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & V \cdot \mathcal{G} \\ [v, \gamma] & \longmapsto & v\gamma \end{cases}$$

soit un homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant.

Démonstration. On reprend la démonstration précédente en y indiquant les changements obtenus dans le cas où l'on suppose \mathcal{G} ample. La base X du groupoïde \mathcal{G} étant totalement discontinue, on peut choisir $W_1 \subseteq X$ compact-ouvert et poser :

$$A := \bigcap_{\gamma \in F_0} \phi_{\gamma}(W_1) \subseteq X$$

qui est encore compact-ouvert. Par conséquent, le sous-groupoïde de \mathcal{G} :

$$\mathcal{H} := \bigcup_{\gamma \in F_0} \phi(A \times \{\gamma\})$$

est à son tour compact-ouvert. Soit $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une représentation \mathcal{U} -régulière. Puisque $V_1 \in \mathcal{U}$ alors en particulier V_1 est π -régulier. Par ailleurs, $\phi(A \times \{\gamma\})$ est une bissection compacte-ouverte de \mathcal{G} , donc d'après la proposition 3.1.7, le translaté $V_1 \cdot \phi(A \times \{\gamma\})$ est π -régulier puis par intersection finie, V est π -régulier. Ceci étant vrai pour toute représentation \mathcal{U} -régulière, on a donc $V \in \widehat{\mathcal{U}}$. La fin de la démonstration est similaire à la précédente. ■

Chapitre 4

Géométrie coarse et représentations admissibles

Dans ce chapitre, nous commencerons par énoncer quelques résultats préliminaires qui nous permettront de démontrer, dans le cas des \mathcal{G} -complexes simpliciaux, l'existence des représentations régulières (théorème 4.2.1). Nous introduirons ensuite la notion d'ensembles contrôlés puis celle de support d'un opérateur et les propriétés qui y sont associées. Nous terminerons ce chapitre en démontrant l'existence de représentations admissibles dans le cas des \mathcal{G} -complexes simpliciaux (voir théorème 4.4.3).

4.1 Quelques résultats préliminaires

Dans cette partie, nous introduisons les définitions et les résultats préliminaires nécessaires à la démonstration des théorèmes 4.2.1 et 4.4.3.

Définition 4.1.1. Soient Z et X deux espaces localement compacts et $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local. On munit $C_c(Z)$ d'un produit scalaire à valeurs dans $C_0(X)$ et d'une action à droite de $C_0(X)$ en posant pour tous $f, g \in C_c(Z)$, $\varphi \in C_0(X)$ et $x \in X$:

$$\langle f, g \rangle_{C_0(X)}(x) = \sum_{z \in Z_x} \overline{f(z)}g(z) \quad \text{et} \quad (f \cdot \varphi)(z) = f(z)\varphi(\rho(z)),$$

où l'on a posé $Z_x := \{z \in Z \mid \rho(z) = x\}$ qui est un espace discret, en particulier, la somme précédente est finie car f et g sont à support compact.

On note alors $L^2(Z, \rho)$ le complété séparé de $C_c(Z)$ pour le produit scalaire précédent. Ces opérations confèrent à $L^2(Z, \rho)$ une structure de $C_0(X)$ -module de Hilbert. De plus, la fibre en $x \in X$ de $L^2(Z, \rho)$ s'identifie à $\ell^2(Z_x)$.

Remarque 4.1.2. Si $Z = \mathcal{G}$ et $\rho = s$, on retrouve le $C_0(X)$ -module standard $L^2(\mathcal{G})$.

Notre but dans la suite sera de montrer que l'on peut construire une représentation admissible dans le cas de \mathcal{G} -complexe simpliciaux. L'idée est de construire d'abord une représentation régulière injective puis, en tensorisant par un module de Hilbert adéquat, on obtiendra une représentation admissible.

Lemme 4.1.3. Soient Z et X deux espaces localement compacts et $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Alors l'application $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(Z, \rho))$ définie pour tous $f \in C_0(Z)$ et $\xi \in C_c(Z)$ par :

$$\pi(f)(\xi) = f\xi$$

est une $C_0(X)$ -représentation fidèle et non-dégénérée. De plus, si \mathcal{U} désigne l'ensemble des ouverts U de Z tels que $\rho|_U$ est un homéomorphisme sur un ouvert de X^{21} , alors π est une représentation localement \mathcal{U} -régulière.

Démonstration. • Soient $f \in C_0(Z)$ et $\xi \in C_c(Z)$. On a

$$\|\pi(f)(\xi)\|_{L^2(Z,\rho)}^2 = \|f\xi\|_{L^2(Z,\rho)}^2 = \sup_{x \in X} \sum_{z \in Z_x} |f(z)|^2 |\xi(z)|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|\xi\|_{L^2(Z,\rho)}^2$$

Donc $\|\pi(f)\|_{\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(Z,\rho))} \leq \|f\|_\infty$ et alors $\pi(f)$ s'étend en un opérateur borné sur $L^2(Z,\rho)$. On vérifie que $\pi(f)$ est adjoignable avec $\pi(f)^* = \pi(\bar{f})$. De plus, si $\varphi \in C_0(X)$ et $z \in Z$ on a :

$$\left(\pi(f \cdot \varphi)(\xi)\right)(z) = f(z)\varphi(\rho(z))\xi(z) = f(z)(\xi \cdot \varphi)(z) = \left(\pi(f)(\xi \cdot \varphi)\right)(z).$$

Donc π est une $C_0(X)$ -représentation et elle est fidèle car chaque π_x l'est pour tout $x \in X$ où $\pi_x : C_0(Z_x) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\ell^2(Z_x))$.

• Soient $\xi \in C_c(Z)$ et $f : Z \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue à support compact qui vaut 1 sur $\text{supp}(\xi)$. Alors $\pi(f)(\xi) = f\xi = \xi$. Par densité de $C_c(Z)$ dans $L^2(Z,\rho)$, on obtient que le sous-espace :

$$\left\{ \pi(f)(\xi) \mid f \in C_0(Z), \xi \in L^2(Z,\rho) \right\}$$

est dense dans $L^2(Z,\rho)$. Ainsi π est une représentation non-dégénérée.

• Soit U un ouvert de Z tel que $\rho|_U$ est un homéomorphisme sur un ouvert de X . Soit $x \in \rho(U)$ et V un voisinage de x dans X relativement compact tel que $\bar{V} \subseteq \rho(U)$. Donc $(\rho|_U)^{-1}(\bar{V}) \subseteq U$ et d'après le lemme 1.2.28, il existe $\varphi \in C_c(Z)$ tel que $\varphi|_{(\rho|_U)^{-1}(V)} = 1$ et $\text{supp}(\varphi) \subseteq U$. Notons M_φ l'opérateur de multiplication par φ sur $L^2(Z,\rho)$. Soient $x \in V$, $f \in C_c(Z_x)$ et $z \in Z_x$.

• Si $z \notin U$, alors :

$$\left[(M_\varphi)_x(f) \right](z) = \underbrace{\varphi(z)}_{=0} f(z) = \chi_{U_x}(z) f(z) = \left[\pi_x(\chi_{U_x}(f)) \right](z).$$

• Si $z \in U$, alors $z \in U \cap Z_x \subseteq (\rho|_U)^{-1}(V)$, donc :

$$\left[(M_\varphi)_x(f) \right](z) = \underbrace{\varphi(z)}_{=1} f(z) = f(z) = \chi_{U_x}(z) f(z) = \left[\pi_x(\chi_{U_x}(f)) \right](z).$$

On a donc montré que :

$$\forall x \in V, \quad (M_\varphi)_x = \pi_x(\chi_{(U|_V)_x}).$$

Ainsi, l'ouvert $U|_V$ est $\pi|_V$ -régulier et le projecteur associé est $(M_\varphi)|_{L^2(Z|_V,\rho|_V)}$. Tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est localement π -régulier, ce qui prouve que π est une représentation localement \mathcal{U} -régulière. ■

Lemme 4.1.4. Soient X et Z deux espaces localement compacts et $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Si X est totalement discontinu alors Z aussi.

Démonstration. Soient $z \in Z$ et U un voisinage compact de z . Il existe un voisinage U' dans U de z tel que $\rho|_{U'} : U' \rightarrow \rho(U')$ soit un homéomorphisme. Comme X est totalement discontinu, il existe un voisinage compact-ouvert V de $\rho(z)$ dans $\rho(U)$. Posons $W = (\rho|_{U'})^{-1}(V) \cap U$. Alors W est un voisinage compact-ouvert de z dans U . ■

Dans [35], Alan Paterson démontre un théorème de stabilisation pour les groupoïdes propres à base dénombrable. Nous allons démontrer dans la suite un résultat similaire dans le cas d'un groupoïde étale compact (voir 4.1.6). Si (\mathcal{G}, X) est un groupoïde compact étale et H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, alors $C(\mathcal{G}, H)$ est un $C(X)$ -module (à droite) \mathcal{G} -équivariant où :

21. \mathcal{U} est bien une partie génératrice de la topologie de Z .

- l'action à droite de $C(X)$ sur $C(\mathcal{G}, H)$ est donnée pour tous $\xi \in C(\mathcal{G}, H)$, $\varphi \in C(X)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(\xi \cdot \varphi)(\gamma) := \xi(\gamma)\varphi(s(\gamma)),$$

- le produit scalaire sur $C(\mathcal{G}, H)$ à valeurs dans $C(X)$ est donné pour tous $\xi_1, \xi_2 \in C(\mathcal{G}, H)$ et $x \in X$ par :

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{C(X)}(x) := \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} \langle \xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma) \rangle_{\mathbb{C}},$$

- la fibre de $C(\mathcal{G}, H)$ en $x \in X$ est isomorphe à $C(\mathcal{G}_x, H)$ et l'action de \mathcal{G} sur $C(\mathcal{G}, H)$ est alors donnée pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$U_\gamma : \begin{cases} C(\mathcal{G}_{s(\gamma)}, H) & \longrightarrow & C(\mathcal{G}_{r(\gamma)}, H) \\ f & \longmapsto & [\eta \mapsto f(\eta\gamma)] \end{cases}.$$

On passe à présent à un lemme technique qui permettra de démontrer le théorème 4.1.6 de stabilisation pour les groupoïdes compacts étales.

Lemme 4.1.5. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale compact et (E, V) un $C(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant dénombrablement engendré (en tant que $C(X)$ -module). Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors E est isomorphe, en tant que $C(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant, à un facteur direct de $C(\mathcal{G}, H)$.

Démonstration. Puisque H est séparable, alors d'après le théorème de stabilisation de Kasparov, on a l'isomorphisme de $C(X)$ -modules :

$$E \oplus (H \otimes_{\mathbb{C}} C(X)) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} C(X).$$

c'est-à-dire $E \oplus C(X, H) \simeq C(X, H)$. Il existe donc une isométrie $W : E \rightarrow C(X, H)$ obtenue comme la composée des isométries $E \hookrightarrow E \oplus C(X, H) \rightarrow C(X, H)$. Considérons $W_{\mathcal{G}}$ la composition :

$$E \xrightarrow{\varphi_1} s^*E \xrightarrow{V} r^*E \xrightarrow{r^*W} r^*(C(X, H)) \simeq C(\mathcal{G}, H) \xrightarrow{\varphi_2} C(\mathcal{G}, H)$$

où

$\varphi_1 : e \mapsto [\gamma \mapsto e(s(\gamma))]$ et $\varphi_2 : \xi \mapsto [\gamma \mapsto \frac{\xi(\gamma)}{\text{Card}(\mathcal{G}_{s(\gamma)})^{1/2}}]$ ²² c'est-à-dire que l'on a pour tous $e \in E$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$W_{\mathcal{G}}(e)(\gamma) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_{s(\gamma)})^{1/2}} W_{r(\gamma)} \circ V_\gamma(e(s(\gamma))).$$

On vérifie que $W_{\mathcal{G}}$ est adjoignable d'adjoint donné par la composition :

$$C(\mathcal{G}, H) \simeq r^*(C(X, H)) \xrightarrow{r^*W^*} r^*E \xrightarrow{V^{-1}} s^*E \xrightarrow{\varphi_3} E$$

où φ_3 est l'application qui envoie $\xi \in \Gamma(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ sur la section continue²³ $x \mapsto \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_x)^{1/2}} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} \xi(\gamma)$.

L'adjoint $W_{\mathcal{G}}^*$ est donc défini pour tous $\xi \in C(\mathcal{G}, H)$ et $x \in X$ par :

$$W_{\mathcal{G}}^*(\xi)(x) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_x)^{1/2}} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} V_{\gamma^{-1}} \circ W_{r(\gamma)}^*(\xi(\gamma)).$$

22. L'application $\gamma \in \mathcal{G} \mapsto \text{Card}(\mathcal{G}_{s(\gamma)})$ est continue d'après le lemme 2.3.3.

23. Le lemme 2.3.3 assure que $x \mapsto \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} \xi(\gamma)$ et $x \mapsto \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_x)^{1/2}}$ sont continues donc on conclut par produit.

$W_{\mathcal{G}}$ est \mathcal{G} -équivariant. En effet, remarquons tout d'abord que $\text{Card}(\mathcal{G}_{s(\gamma)}) = \text{Card}(\mathcal{G}_{r(\gamma)})$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ puisqu'une bijection (entre ensembles finis) est donnée par $\eta \in \mathcal{G}_{s(\gamma)} \mapsto \eta\gamma^{-1} \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}$. On a donc pour tous $\gamma \in \mathcal{G}, e \in E$ et $\eta \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}$:

$$\begin{aligned} \left(U_{\gamma} \circ (W_{\mathcal{G}})_{s(\gamma)} \right) (e(s(\gamma))) (\eta) &= (W_{\mathcal{G}})_{s(\gamma)} (e(s(\gamma))) (\eta\gamma) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_{s(\eta\gamma)})} W_{r(\eta\gamma)} \circ V_{\eta\gamma} (e(s(\gamma))) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_{s(\gamma)})} W_{r(\eta)} \circ V_{\eta} (V_{\gamma} (e(s(\gamma)))) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_{r(\gamma)})} W_{r(\eta)} \circ V_{\eta} (V_{\gamma} (e(s(\gamma)))) \\ &= \left((W_{\mathcal{G}})_{r(\gamma)} \circ V_{\gamma} \right) (e(s(\gamma))) (\eta). \end{aligned}$$

De plus, $W_{\mathcal{G}}$ est une isométrie car pour tous $e \in E$ et $x \in X$:

$$\begin{aligned} \left[(W_{\mathcal{G}}^* \circ W_{\mathcal{G}}) (e) \right] (x) &= \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_x)^{1/2}} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} V_{\gamma^{-1}} \circ W_{r(\gamma)}^* (W_{\mathcal{G}}(e)(\gamma)) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_x)} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} V_{\gamma^{-1}} \circ W_{r(\gamma)}^* \circ W_{r(\gamma)} \circ V_{\gamma} (e(s(\gamma))) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{G}_x)} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} e(x) \\ &= e(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, $E \simeq \text{Im}(W_{\mathcal{G}}) = \text{Im}(W_{\mathcal{G}} \circ W_{\mathcal{G}}^*)$ et :

$$C(\mathcal{G}, H) = \text{Im}(W_{\mathcal{G}} \circ W_{\mathcal{G}}^*) \oplus \text{Ker}(W_{\mathcal{G}} \circ W_{\mathcal{G}}^*).$$

■

Théorème 4.1.6 (Stabilisation pour les groupoïdes compacts étales). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale compact et E un $C(X)$ -module à droite \mathcal{G} -équivariant dénombrablement engendré (en tant que $C(X)$ -module). Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors il existe un isomorphisme de $C(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant :

$$E \oplus C(\mathcal{G}, H) \simeq C(\mathcal{G}, H).$$

Démonstration. Soit E un $C(X)$ -module à droite \mathcal{G} -équivariant dénombrablement engendré. D'après le lemme 4.1.5, il existe un $C(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E' tel que :

$$E \oplus E' \simeq C(\mathcal{G}, H)$$

en tant que $C(X)$ -modules \mathcal{G} -équivariants. On a donc :

$$C(\mathcal{G}, H) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} C(\mathcal{G}, H) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} (E \oplus E') \simeq (H \otimes_{\mathbb{C}} E) \oplus (H \otimes_{\mathbb{C}} E') \quad (\star)$$

et alors :

$$E \oplus C(\mathcal{G}, H) \stackrel{(\star)}{\simeq} \left(E \oplus (H \otimes_{\mathbb{C}} E) \right) \oplus (H \otimes_{\mathbb{C}} E') \simeq (H \otimes_{\mathbb{C}} E) \oplus (H \otimes_{\mathbb{C}} E') \stackrel{(\star)}{\simeq} C(\mathcal{G}, H)$$

en tant que $C(X)$ -modules \mathcal{G} -équivariants. ■

Lemme 4.1.7. Soient Z un espace compact et totalement discontinu, X un espace compact et $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif. Alors il existe une section globale de ρ c'est-à-dire une application continue $s : X \rightarrow Z$ telle que $\rho \circ s = \text{id}_X$.

Démonstration. Soit $z \in Z$. Il existe un voisinage ouvert $U \subseteq Z$ de z , que l'on peut supposer compact-ouvert (car Z est totalement discontinu et compact) tel que $\rho|_U : U \rightarrow \rho(U)$ soit un homéomorphisme avec $\rho(U)$ ouvert dans X . Par compacité de Z , il existe alors des compacts-ouverts $U_1, \dots, U_n \subseteq Z$ tels que $Z = \bigcup_{i=1}^n U_i$ et $\rho|_{U_i} : U_i \rightarrow \rho(U_i)$ soit un homéomorphisme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc par surjectivité de ρ :

$$X = \bigcup_{i=1}^n \rho(U_i).$$

Chaque $\rho(U_i)$ étant ouvert-fermé, on peut supposer, quitte à remplacer $\rho(U_i)$ par $\rho(U_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \rho(U_j)$ qui est encore ouvert-fermé, que l'union est disjointe $X = \bigsqcup_{i=1}^n \rho(U_i)$. On pose alors :

$$s_i := (\rho|_{U_i})^{-1} : \rho(U_i) \rightarrow U_i$$

qui est une section locale de ρ . On obtient ainsi une section globale de ρ . ■

Le résultat suivant assure que le module $H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z, \rho)$ est « trivialisable » sous certaines hypothèses.

Proposition 4.1.8. Soient Z un espace compact et totalement discontinu, X un espace compact et $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$, des compacts-ouverts $U_1, \dots, U_m \subseteq X$ et k_1, \dots, k_m dans \mathbb{N}^* tels que :

(i) $X = \bigsqcup_{i=1}^m U_i$;

(ii) pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a l'homéomorphisme $\rho^{-1}(U_i) \cong U_i \times \{1, \dots, k_i\}$ et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \rho^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\quad} & U_i \times \{1, \dots, k_i\} \\ & \searrow \rho & \swarrow \Pi_1 \\ & & U_i \end{array}$$

où Π_1 désigne la projection sur le premier facteur.

En particulier, on a l'isomorphisme de $C(X)$ -modules de Hilbert :

$$H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z, \rho) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} C(X).$$

Démonstration. On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, pour tout homéomorphisme local surjectif $\rho : Z \rightarrow X$ avec Z totalement discontinu compact tels que $\max \{\text{Card}(Z_x) \mid x \in X\} = n$, il existe $m \geq 1$, des compacts-ouverts $U_1, \dots, U_m \subseteq X$, des entiers $k_1, \dots, k_m \geq 1$ tels que les propriétés (i) et (ii) soient vérifiées.

- Si $n = 1$, alors toutes les fibres sont de cardinal 1, ²⁴ donc ρ est injective et donc $\rho : Z \rightarrow X$ est un homéomorphisme. On prend alors $m = 1$, $U_1 = X$ compact-ouvert, et $k_1 = 1$ et on a :

$$\rho^{-1}(U_1) = Z \cong X = U_1 \cong U_1 \times \{1\}.$$

En notant $\Phi : z \in \rho^{-1}(U_1) \mapsto (\rho(z), 1)$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \rho^{-1}(U_1) & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & U_1 \times \{1\} \\ & \searrow \rho & \swarrow \Pi_1 \\ & & U_1 \end{array}$$

24. Les fibres sont non vides par surjectivité de ρ .

- Soit $n \geq 2$. Soit $\rho : Z \rightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif avec Z totalement discontinu et compact tel que $\max \{\text{Card}(Z_x) \mid x \in X\} = n + 1$. D'après le lemme 4.1.7, il existe une section globale $s : X \rightarrow Z$ de ρ . Posons

$$Z_1 := Z \setminus s(X) \quad \text{et} \quad \rho_1 := \rho|_{Z_1} : Z_1 \rightarrow \rho(Z_1).$$

Alors le compact Z_1 est totalement discontinu en tant que sous-espace d'un espace totalement discontinu et ρ_1 est encore un homéomorphisme local surjectif car $n \geq 2$ avec :

$$\max \left\{ \text{Card}(\rho_1^{-1}(x)) \mid x \in \rho(Z_1) \right\} = (n + 1) - 1 = n.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\rho_1 : Z_1 \rightarrow \rho(Z_1)$ et obtenir l'existence d'un entier $m \geq 1$, de compacts-ouverts $U_1, \dots, U_m \subseteq \rho(Z_1)$, d'entiers $k_1, \dots, k_m \geq 1$ tels que :

$$\rho(Z_1) = \bigsqcup_{i=1}^m U_i \quad \text{et} \quad (\rho_1)^{-1}(U_i) \cong U_i \times \{1, \dots, k_i\}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

et pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \rho_1^{-1}(U_i) & \longrightarrow & U_i \times \{1, \dots, k_i\} \\ & \searrow \rho & \swarrow \Pi_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Posons $U_{m+1} = X \setminus \rho(Z_1) = \bigcap_{i=1}^m (X \setminus U_i)$. C'est un compact-ouvert de X qui vérifie $\text{Card}(Z_x) = 1$

pour tout $x \in U_{m+1}$. On a donc $\rho^{-1}(U_{m+1}) \cong U_{m+1} \times \{1\}$. Si on pose $\tilde{k}_i := \begin{cases} k_i + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 1 & \text{si } i = m + 1 \end{cases}$, on a :

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{m+1} U_i \quad \text{et} \quad \rho^{-1}(U_i) \cong U_i \times \{1, \dots, \tilde{k}_i\}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m + 1 \rrbracket,$$

et pour tout $i \in \llbracket 1, m + 1 \rrbracket$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \rho^{-1}(U_i) & \longrightarrow & U_i \times \{1, \dots, \tilde{k}_i\} \\ & \searrow \rho & \swarrow \Pi_1 \\ & & U_i \end{array}$$

On a donc l'isomorphisme de $C(U_i)$ -modules de Hilbert $L^2(\rho^{-1}(U_i), \rho|_{\rho^{-1}(U_i)}) \simeq C(U_i \times \{1, \dots, \tilde{k}_i\})$

pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Comme $Z = \bigsqcup_{i=1}^m \rho^{-1}(U_i)$, alors on obtient les isomorphismes de $C(X)$ -modules de Hilbert :

$$\begin{aligned} H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z, \rho) &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{i=1}^m L^2(\rho^{-1}(U_i), \rho|_{\rho^{-1}(U_i)}) \\ &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{i=1}^m C(U_i \times \{1, \dots, \tilde{k}_i\}) \\ &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{i=1}^m (C(U_i) \otimes \mathbb{C}^{\tilde{k}_i}) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^m (C(U_i) \otimes H) \\ &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{i=1}^m C(U_i) \\ &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} C(X). \end{aligned}$$

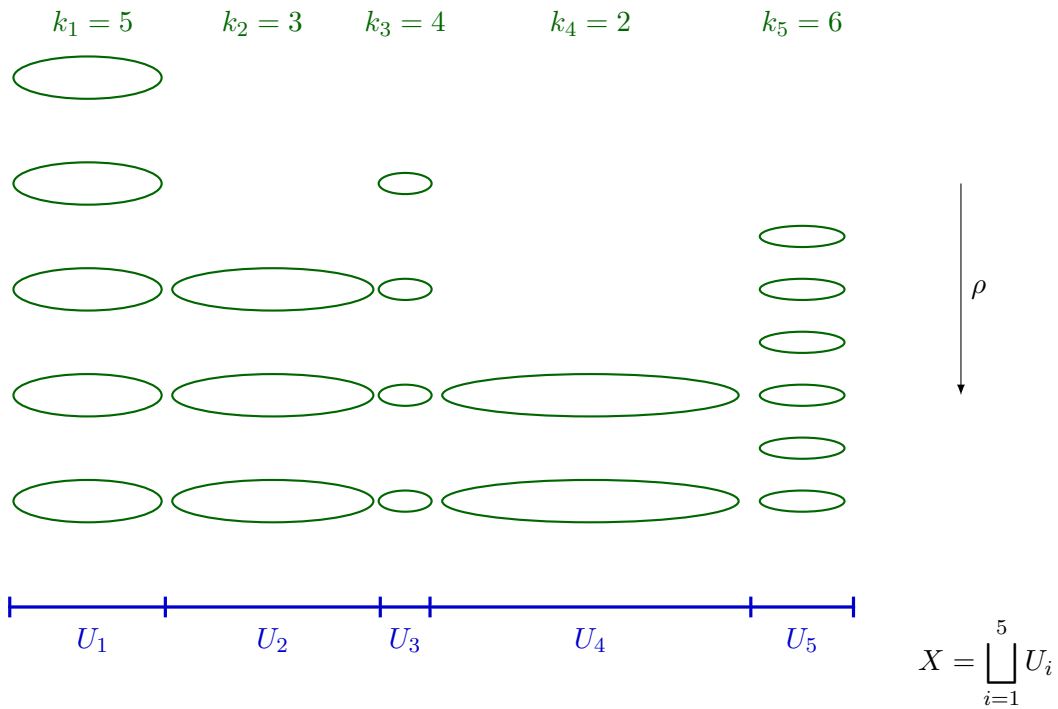


FIGURE 4.1 – Trivialisation de la base.

■

Remarque 4.1.9. Lorsque Z n'est plus supposé totalement discontinu mais que X est à base dénombrable d'ouverts, l'isomorphisme de $C(X)$ -modules de Hilbert $H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z, \rho) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} C(X)$ est encore valable en utilisant la théorie des champs hilbertiens de Dixmier-Douady (voir [17]).

4.2 Existence de représentations régulières

Nous avons à présent les outils nécessaires pour démontrer l'existence des représentations régulières dans le cas de \mathcal{G} -complexes simpliciaux. On rappelle que la partie génératrice \mathcal{S} de la topologie de la réalisation géométrique d'un \mathcal{G} -complexe simplicial a été construite dans la section 2.2.

Théorème 4.2.1. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial \mathcal{G} -compact et propre. Alors il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E et une représentation fidèle et \mathcal{S} -régulière :

$$\pi : C_0(|\Delta|) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension du complexe simplicial (Y, Δ) . Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition :

« Pour tout \mathcal{G} -complexe simplicial (Y, Δ) propre et \mathcal{G} -compact de dimension inférieure à n , il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E muni d'une représentation \mathcal{S} -régulière $\pi : C_0(|\Delta|) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ ».

• Soient (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension 0 et Z_0 sa réalisation géométrique. Comme Z_0 s'identifie à un sous-ensemble de Y , l'application d'ancrage ρ restreinte à Z_0 vérifie la propriété : pour tout $y \in Z_0$ il existe un compact-ouvert $U \subseteq Z_0$ contenant y tel que $\rho|_U : U \rightarrow \rho(U)$ est un homéomorphisme sur un compact-ouvert de X . Puisque X est totalement discontinu, alors $\rho(Z_0)$ aussi et d'après le lemme 4.1.4, Z_0 aussi. On considère l'application suivante :

$$\pi_0 : \begin{cases} C_0(Z_0) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(Z_0, \rho)) \\ f & \longmapsto & [\xi \mapsto f\xi] \end{cases} .$$

D'après le lemme 4.1.3, π est une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante, non-dégénérée, fidèle et localement \mathcal{S} -régulière donc \mathcal{S} -régulière d'après le lemme 3.2.4.

• Supposons que le résultat soit vrai pour tout \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à $n - 1$. Montrons que le résultat est vrai pour tout \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n .

Soit Z_n la réalisation géométrique d'un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à n sur lequel l'action de \mathcal{G} est propre et co-compacte. Soient Z_{n-1} son $(n - 1)$ -squelette et $U_n := Z_n \setminus Z_{n-1}$ l'union de tous les n -simplexes ouvert. On a la décomposition :

$$Z_n = Z_{n-1} \sqcup U_n.$$

L'ensemble Z'_n des barycentres des n -simplexes est un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension 0. De plus, quitte à remplacer Z_n par sa subdivision barycentrique, on peut supposer que le \mathcal{G} -complexe simplicial est typé et que l'application τ est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. D'après le lemme 2.1.11, on a l'homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant :

$$Z_n \setminus Z_{n-1} \cong (Z'_n \times \sigma_n^\circ),$$

où σ_n° désigne l'intérieur du n -simplexe standard muni de l'action triviale de \mathcal{G} . Donc on a :

$$Z_n \cong Z_{n-1} \sqcup (Z'_n \times \sigma_n^\circ).$$

On a de plus (voir [55] p. 34) une suite exacte courte de $C_0(X)$ -algèbres :

$$0 \longrightarrow C_0(Z_n \setminus Z_{n-1}) \hookrightarrow C_0(Z_n) \xrightarrow{\psi} C_0(Z_{n-1}) \longrightarrow 0$$

où ψ est la restriction à Z_{n-1} . Notons \mathcal{S}' la partie génératrice de la topologie de Z_{n-1} (voir la section 2.2.6 pour le détail de la construction). Puisque Z_{n-1} est un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension inférieure à $n - 1$, alors par hypothèse de récurrence, il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E_1 muni d'une représentation \mathcal{S}' -régulière :

$$p : C_0(Z_{n-1}) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1).$$

On obtient alors une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante en posant :

$$\pi_1 := p \circ \psi : C_0(Z_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1).$$

$$\begin{array}{ccc} C_0(Z_n) & \xrightarrow{\psi} & C_0(Z_{n-1}) \\ & \searrow \pi & \downarrow p \\ & & \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1) \end{array}$$

Elle est non-dégénérée. En effet, comme ψ est surjective et p est non-dégénérée, on a :

$$\overline{\pi_1(C_0(Z_n))(E_1)} = \overline{p(C_0(Z_{n-1}))(E_1)} = E_1$$

D'après le point (ii) de la remarque 2.2.4, on a pour tout $\mu \in Z_n$:

$$S'(\mu) = \begin{cases} \{W \cap Z_{n-1} \mid W \in S(\mu)\} & \text{si } \mu \in Z_{n-1} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

$$S' = \{W \cap Z_{n-1} \mid W \in S\}.$$

Ainsi, π_1 est \mathcal{S} -régulière. Comme Z'_n est un \mathcal{G} -complexe simplicial de dimension 0, alors d'après le lemme 4.1.3 on obtient une $C_0(X)$ -représentation fidèle non-dégénérée et \mathcal{G} -équivariante :

$$\pi_0 : C_0(Z'_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}\left(L^2(Z'_n, \rho|_{Z'_n})\right).$$

On considère l'isomorphisme de $C_0(X)$ -modules de Hilbert :

$$\Phi : L^2(\sigma_n) \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z'_n, \rho|_{Z'_n}) \rightarrow L^2(Z_n \setminus Z_{n-1}, \rho|_{Z_n \setminus Z_{n-1}})$$

donné pour $g \in C_c(\sigma_n)$, $\xi \in C_c(Z'_n)$ et $\nu = \sum_{i=0}^n \lambda_{y_i}(\nu) \delta_{y_i} \in Z_n \setminus Z_{n-1}$ ²⁵ par la formule :

$$\Phi(g \otimes \xi)(\nu) = \xi(\mathbf{b}(\nu))g\left(\lambda_{y_0}(\nu), \dots, \lambda_{y_n}(\nu)\right).$$

Posons $E_2 = L^2\left(Z_n \setminus Z_{n-1}, \rho|_{Z_n \setminus Z_{n-1}}\right)$ et considérons la représentation fidèle non-dégénérée :

$$\pi_0 \otimes \lambda : C_0(Z'_n \times \sigma_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_2)$$

définie (modulo l'identification Φ et l'identification $C_0(Z'_n \times \sigma_n) \simeq C_0(Z'_n) \otimes C_0(\sigma_n)$) pour tous $f \in C_0(Z'_n)$, $g \in C_0(\sigma_n)$, $\xi_1 \in C_c(\sigma_n)$ et $\xi_2 \in C_c(Z'_n)$ par :

$$\left((\pi_0 \otimes \lambda)(f \otimes g)\right)(\xi_1 \otimes \xi_2) := (f\xi_2) \otimes (g\xi_1).$$

Comme $C_0(Z'_n \times \sigma_n)$ est un idéal dans $C_0(Z_n)$ et que $\pi_0 \otimes \lambda$ est non-dégénérée, alors la représentation $\pi_0 \otimes \lambda$ s'étend de façon unique en une $C_0(X)$ -représentation de $C_0(Z_n)$ notée π_2 :

$$\pi_2 : C_0(Z_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_2),$$

qui est définie (modulo l'identification Φ) pour tous $f \in C_0(Z_n)$, $g \in C_c(Z_n \setminus Z_{n-1})$:

$$\pi_2(f)(g) = f|_{Z_n \setminus Z_{n-1}}g.$$

Posons $E := E_1 \oplus E_2$ et considérons :

$$\pi := \pi_1 \oplus \pi_2 : C_0(Z_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

C'est une $C_0(X)$ -représentation fidèle de $C_0(Z_n)$. En effet, soit $f \in C_0(Z_n)$ telle que $\pi(f) = 0$. Alors $\pi_1(f) = \pi_2(f) = 0$. Comme $\pi_1 = p \circ \psi$, alors par injectivité de la représentation p , on a $\psi(f) = 0$ donc $f \in \text{Ker}(\psi) = \text{Im}(\varphi)$ où $\varphi : C_0(Z'_n \times \sigma_n) \rightarrow C_0(Z_n)$ est l'application induite par :

$$C_0(Z'_n \times \sigma_n) \simeq C_0(Z_n \setminus Z_{n-1}) \hookrightarrow C_0(Z_n).$$

Soit donc $g \in C_0(Z'_n \times \sigma_n)$ tel que $f = \varphi(g)$. On a donc $(\pi_2 \circ \varphi)(g) = 0$. Or $\pi_2 \circ \varphi = \pi_0 \otimes \lambda$ donc $\pi_0 \otimes \lambda(g) = 0$ et par injectivité de la représentation $\pi_0 \otimes \lambda$, on a $g = 0$ donc $f = 0$.

Comme π_1 est \mathcal{S} -régulière, alors d'après le lemme 3.2.3, il suffit de montrer que π_2 est une représentation \mathcal{S} -régulière. Soient $\mu \in Z_n$ et $x_0 := \tilde{\rho}(\mu)$. Notons z_0, \dots, z_m les éléments du support de μ . On suppose dans la suite que $m \geq 1$ (le cas où $m = 0$ se traite de façon similaire). Soient $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m) \in \Lambda_{\mu, z_0, \dots, z_m}$, V un voisinage μ -simplicial de x_0 et s_0, \dots, s_m des sections associées aux sommets z_0, \dots, z_m . Si $x \in V$, on rappelle que μ_x désigne la mesure de même coordonnées barycentriques que μ « transportée au-dessus de V » grâce aux sections c'est-à-dire :

$$\forall x \in V, \quad \mu_x = \sum_{i=0}^m \lambda_i \delta_{s_i(x)} \quad \text{avec} \quad \text{supp}(\mu_x) \subseteq \rho^{-1}(x).$$

25. Rappelons ici que c'est le type qui nous permet d'obtenir une numérotation des sommets de ν .

Posons $\varphi_i := \chi_{s_i(V)}$. Nous allons montrer que :

$$W := \bigcap_{i=0}^m W(\mu, \varphi_i, \varepsilon_i)$$

est π_2 -régulier. Soient $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ et $f_i :]0, 1[\rightarrow [0; 1]$ une fonction continue à support compact valant 1 sur l'intervalle $[I_\mu(\varphi_i) - \varepsilon_i, I_\mu(\varphi_i) + \varepsilon_i]$. Si $\nu \in W$ alors pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$\left| I_\nu(\varphi_i) - I_\mu(\varphi_i) \right| < \varepsilon_i$$

donc $f_i(I_\nu(\varphi_i)) = 1$, pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Ainsi, en posant :

$$c_\mu : \begin{cases} Z_n & \longrightarrow [0; 1] \\ \nu & \longmapsto \prod_{i=0}^m f_i(I_\nu(\varphi_i)) \end{cases}$$

on obtient une fonction qui vaut 1 sur W et telle que pour tout $x \in X$, la restriction $c_\mu|_{Z_n^x}$ est à support dans la réunion des simplexes de $|\Delta|$ contenant μ_x .

Puisque l'on travaille avec la topologie \star -faible, pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, l'application $\nu \in Z_n \mapsto I_\nu(\varphi_i)$ est continue donc $c_\mu \in C(Z_n)$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ dans $[0; 1]$ tels que $\mu = \sum_{i=0}^m \lambda_i \delta_{s_i(x_0)}$. Considérons μ' la mesure μ transportée dans le simplexe standard c'est-à-dire²⁶ :

$$\mu' = \sum_{i=0}^m \lambda_i \delta_{\tau(y_i)} \in \sigma_n.$$

Posons :

$$S_i := \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda'_k \delta_{\tau(y_k)} \mid (\lambda'_0, \dots, \lambda'_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ vérifiant } \sum_{k=0}^m \lambda'_k = 1 \text{ et } |\lambda_i - \lambda'_i| < \varepsilon_i, \forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket \right\} \subseteq \sigma_n.$$

On a donc $\chi_{\cap_{i=0}^m S_i} \in L^2(\sigma_n)$ et on peut considérer l'application bien définie :

$$p_{W, \pi_2} : \begin{cases} E_2 & \longrightarrow E_2 \\ \Phi(g \otimes \xi) & \longmapsto c_\mu|_{Z_n \setminus Z_{n-1}} \Phi\left((\chi_{\cap_{i=0}^m S_i} g) \otimes \xi \cdot \chi_V \right) \end{cases}.$$

Fixons $x \in X$. On distingue deux cas :

► Soit $x \notin V$ et alors pour tous $g \in C_c(\sigma_n)$ et $\xi \in C_c(Z'_n)$, on a :

$$\begin{aligned} (p_{W, \pi_2})_x \left(\Phi(g \otimes \xi)|_{(Z_n \setminus Z_{n-1})_x} \right) &= c_\mu|_{(Z_n \setminus Z_{n-1})_x} \Phi\left((\chi_{\cap_{i=0}^m S_i} g) \otimes \xi|_{Z_n^x} \underbrace{\chi_V(x)}_{=0} \right) \\ &= c_\mu|_{(Z_n \setminus Z_{n-1})_x} \Phi\left((\chi_{\cap_{i=0}^m S_i} g) \otimes 0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $(p_{W, \pi_2})_x = 0$. Or d'après le lemme 2.2.3, on a $W \cap (\tilde{\rho})^{-1}(x) = \emptyset$ et donc :

$$\pi_{2,x}(\chi_{W \cap Z_n^x}) = 0.$$

► Soit $x \in V$ et on distingue alors deux cas :

26. On a ici utilisé l'application τ pour pouvoir obtenir une numérotation des sommets dans σ_n .

- Supposons que la mesure μ_x ne soit pas dans un simplexe de dimension maximale. Alors $c_{\mu|Z_n^x}$ est à support dans Z_{n-1}^x donc $c_{\mu|(Z_n \setminus Z_{n-1})_x} = 0$. On en déduit que :

$$(p_{W, \pi_2})_x = 0 = \pi_{2,x} \left(c_{\mu|Z_n^x} \right).$$

Par ailleurs, c_{μ} valant 1 sur W , on a :

$$\chi_W = c_{\mu} \chi_W.$$

Donc en composant par le $*$ -homomorphisme $\pi_{2,x}$, on obtient :

$$\pi_{2,x} (\chi_{W \cap Z_n^x}) = \pi_{2,x} \left(c_{\mu|Z_n^x} \right) \circ \pi_{2,x} (\chi_{W \cap Z_n^x}) = 0.$$

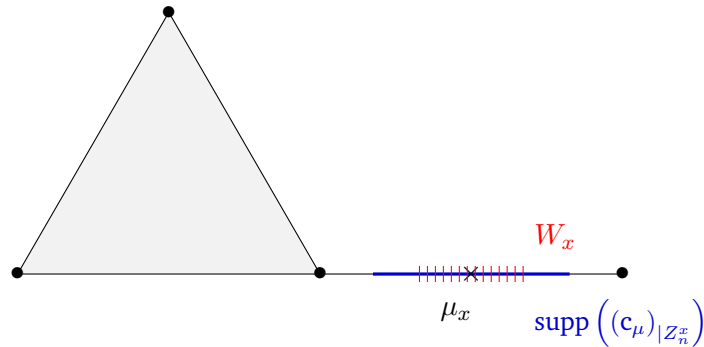


FIGURE 4.2 – Cas où μ n'est pas dans un simplexe de dimension maximale.

- Supposons que la mesure μ_x soit dans un simplexe de dimension maximale. Si $\xi \in C_c(Z'_n)$ et $\nu = \sum_{i=0}^n \lambda_{y_i} \delta_{y_i} \in (Z_n \setminus Z_{n-1})_x$, on a :

$$\chi_{W \cap (Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) = c_{\mu|(Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) \chi_{\cap_{i=0}^m S_i}(\lambda_{y_1}(\nu), \dots, \lambda_{y_{n+1}}(\nu))^{27}$$

et :

$$(\xi \cdot \chi_V)(\mathbf{b}(\nu)) = \xi(\mathbf{b}(\nu)) \chi_V \left(\underbrace{\tilde{\rho}(\mathbf{b}(\nu))}_{\in V} \right) = \xi(\mathbf{b}(\nu)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \pi_{2,x} (\chi_{W \cap Z_n^x}) (\Phi(g \otimes \xi))(\nu) &= \chi_{W \cap (Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) \Phi(g \otimes \xi)(\nu) \\ &= \chi_{W \cap (Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) \xi(\mathbf{b}(\nu)) g(\lambda_{y_1}(\nu), \dots, \lambda_{y_{n+1}}(\nu)) \\ &= c_{\mu|(Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) \chi_{\cap_{i=0}^m S_i}(\lambda_{y_1}(\nu), \dots, \lambda_{y_{n+1}}(\nu)) \xi(\mathbf{b}(\nu)) g(\lambda_{y_1}(\nu), \dots, \lambda_{y_{n+1}}(\nu)) \\ &= c_{\mu|(Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) (\xi \cdot \chi_V)(\mathbf{b}(\nu)) (\chi_{\cap_{i=0}^m S_i} g)(\lambda_{y_1}(\nu), \dots, \lambda_{y_{n+1}}(\nu)) \\ &= c_{\mu|(Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) \Phi \left(\chi_{\cap_{i=0}^m S_i} g \otimes \xi \cdot \chi_V \right) (\nu) \\ &= (p_{W, \pi_2})_x \left(\Phi(g \otimes \xi) \right) (\nu) \end{aligned}$$

et donc $\pi_{2,x} (\chi_{W \cap Z_n^x}) = (p_{W, \pi_2})_x$.

Dans tous les cas, pour tout $x \in X$:

$$\pi_{2,x} (\chi_{W \cap Z_n^x}) = (p_{W, \pi_2})_x$$

Et donc W est π_2 -régulier. ■

27. Si $\nu \in W$, on a $1 = 1 \times 1$. Si $\nu \notin W$, on distingue deux cas : soit ν est dans un même simplexe maximal que μ et dans ce cas $0 = c_{\mu|(Z_n \setminus Z_{n-1})_x}(\nu) \times 0$; soit ν est dans un autre simplexe maximal que μ et alors $0 = 0 \chi_{\cap_{i=0}^m S_i}(\lambda_{y_1}(\nu), \dots, \lambda_{y_{n+1}}(\nu))$. Dans tous les cas, l'égalité est vérifiée.

4.3 Opérateurs à support contrôlé

Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace à droite d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$. On note pour tout $x \in X$:

$$Z_x := \{z \in Z \mid \rho(z) = x\} \quad \text{et} \quad Z \times_X Z := \{(z, z') \in Z \times Z \mid \rho(z) = \rho(z')\}.$$

Si E, F sont deux parties de $Z \times_X Z$ et C une partie de Z , on définit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{-1} = \{(z, z') \in Z \times_X Z \mid (z', z) \in E\}, \\ E \circ F = \{(z_1, z_3) \in Z \times_X Z \mid \exists z_2 \in Z_{\rho(z_1)}, (z_1, z_2) \in E \text{ et } (z_2, z_3) \in F\}, \\ E \circ C = \{z \in Z \mid \exists z' \in C \cap Z_{\rho(z)}, (z, z') \in E\}, \\ C \circ E = \{z \in Z \mid \exists z' \in C \cap Z_{\rho(z)}, (z', z) \in E\}, \\ \Delta_Z = \{(z, z) \mid z \in Z\}. \end{array} \right.$$

Si $U := E \cup F$, on remarque que :

$$U \circ U = (E \circ E) \cup (E \circ F) \cup (F \circ E) \cup (F \circ F).$$

Définition 4.3.1 (\mathcal{G} -structure coarse). Une \mathcal{G} -structure coarse sur Z est la donnée d'une collection \mathcal{E}_Z de sous-ensembles de $Z \times_X Z$, appelés *ensembles contrôlés*, telle que :

- (i) si $E \in \mathcal{E}_Z$ et $F \subseteq E$ alors $F \in \mathcal{E}_Z$;
- (ii) si $E, F \in \mathcal{E}_Z$, alors \overline{E} , E^{-1} , $E \circ F$ et $E \cup F$ sont dans \mathcal{E}_Z ;
- (iii) tout compact de $Z \times_X Z$ est un ensemble contrôlé;
- (iv) si $E \in \mathcal{E}_Z$ et $K \subseteq Z$ compact alors $E \circ K$ est un ensemble relativement compact de Z ;
- (v) l'union de tous les ensembles contrôlés est $Z \times_X Z$;
- (vi) si $E \in \mathcal{E}_Z$ alors $E \cdot \mathcal{G} \in \mathcal{E}_Z$.

Proposition 4.3.2. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite. Alors la collection de sous-ensembles de $Z \times_X Z$:

$$\mathcal{E}_Z := \left\{ E \subseteq Z \times_X Z \mid \exists K \subseteq Z \text{ compact, } E \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G} \right\}$$

définit une \mathcal{G} -structure coarse sur Z . De plus, si on suppose que Z est \mathcal{G} -compact, alors la diagonale Δ_Z est un ensemble contrôlé.

Démonstration. On vérifie chaque point de la définition :

(i) Immédiat.

- (ii) • Soit $E \in \mathcal{E}_Z$. Alors il existe $K \subseteq Z$ compact tel que $E \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. L'orbite d'un compact par une action propre est fermée, donc :

$$\overline{E} \subseteq \overline{(K \times_X K) \cdot \mathcal{G}} = (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$$

Ainsi, $\overline{E} \in \mathcal{E}_Z$.

- Soit $E \in \mathcal{E}_Z$. Alors il existe $K \subseteq Z$ compact tel que $E \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. On montre immédiatement que $E^{-1} \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$ et donc $E^{-1} \in \mathcal{E}_Z$.

- Soient $E, F \in \mathcal{E}_Z$. Alors il existe K_1, K_2 compacts de Z tels que $E \subseteq (K_1 \times_X K_1) \cdot \mathcal{G}$ et $F \subseteq (K_2 \times_X K_2) \cdot \mathcal{G}$. Soit $(z_1, z_3) \in E \circ F$. Alors il existe $z_2 \in Z$ tel que $(z_1, z_2) \in E$ et $(z_2, z_3) \in F$. Donc il existe $k_1, k'_1 \in K_1$, $k_2, k'_2 \in K_2$ et $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}$ tels que :

$$(z_1, z_3) = (k_1\gamma, k_2\gamma') \quad \text{et} \quad k'_1\gamma = k_2\gamma' = z_2.$$

On a donc $(z_1, z_3) = (k_1, k_2\gamma'\gamma^{-1})\gamma$. On définit :

$$\mathcal{G}_{K_1, K_2} := \left\{ \gamma \in \mathcal{G} \mid K_1 \cap K_2\gamma \neq \emptyset \right\}.$$

Cet ensemble est compact car l'action de \mathcal{G} sur Z est propre et comme $k'_1\gamma = k_2\gamma'$ alors $k'_1 = k_2\gamma'\gamma^{-1}$ donc $\gamma'\gamma^{-1} \in \mathcal{G}_{K_1, K_2}$ et donc $k_2\gamma'\gamma^{-1} \in K_2 \cdot \mathcal{G}_{K_1, K_2}$. On définit alors le compact :

$$K := K_1 \cup [K_2 \cdot \mathcal{G}_{K_1, K_2}]$$

on obtient alors $(z_1, z_3) \in (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$ d'où $E \circ F \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. Ainsi, $E \circ F \in \mathcal{E}_Z$.

- Soient $E, F \in \mathcal{E}_Z$. Alors il existe K_1, K_2 compacts de Z tels que $E \subseteq (K_1 \times_X K_1) \cdot \mathcal{G}$ et $F \subseteq (K_2 \times_X K_2) \cdot \mathcal{G}$. Posons $K := K_1 \cup K_2$. Alors $E \cup F \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$ et donc $E \cup F \in \mathcal{E}_Z$.

- (iii) Soit K un compact de $Z \times_X Z$. Il existe deux compacts K_1 et K_2 dans Z tels que $K \subseteq K_1 \times_X K_2$. En notant $K' := K_1 \cup K_2 \subseteq Z$ compact, on a :

$$K \subseteq K_1 \times_X K_2 \subseteq (K' \times_X K') \cdot \mathcal{G}$$

Donc $K \in \mathcal{E}_Z$.

- (iv) Soient $E \in \mathcal{E}_Z$ et $K \subseteq Z$ compact. Alors il existe $C \subseteq Z$ compact tel que $E \subseteq (C \times_X C) \cdot \mathcal{G}$. Soit $(z_\lambda)_\lambda$ une suite dans $E \circ K$. Alors il existe une suite $(k_\lambda)_\lambda$ dans K telle que la suite $(z_\lambda, k_\lambda)_\lambda$ soit dans $(C \times_X C) \cdot \mathcal{G}$. Il existe donc deux suites $(c_\lambda)_\lambda$ et $(c'_\lambda)_\lambda$ dans C et une suite $(g_\lambda)_\lambda$ dans \mathcal{G} telles que :

$$(z_\lambda, k_\lambda) = (c_\lambda g_\lambda, c'_\lambda g_\lambda).$$

Par compacité de K et C , on peut supposer que la suite $(k_\lambda)_\lambda$ converge dans K et que les suites $(c_\lambda)_\lambda$ et $(c'_\lambda)_\lambda$ convergent dans C . Comme l'action est propre, $(g_\lambda)_\lambda$ possède une sous-suite convergente. Donc la suite $(z_\lambda)_\lambda$ possède une sous-suite convergente et ainsi $E \circ K$ est relativement compact.

- (v) Soit $(z, z') \in Z \times_X Z$. Considérons le compact $K = \{z, z'\}$. Alors :

$$(z, z') \in K \times_X K \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G} \in \mathcal{E}_Z.$$

Donc (z, z') appartient à un ensemble contrôlé et donc :

$$Z \times_X Z \subseteq \bigcup_{E \in \mathcal{E}_Z} E.$$

L'inclusion réciproque est immédiate.

- (vi) Immédiat.

Finalement, \mathcal{E}_Z définit bien une \mathcal{G} -structure coarse sur Z . De plus, si Z est \mathcal{G} -compact, alors il existe $K \subseteq Z$ compact tel que $Z = K \cdot \mathcal{G}$. Soit $z \in Z$, il existe $k \in K, \gamma \in \mathcal{G}$ tels que :

$$(z, z) = (k\gamma, k\gamma) = (k, k)\gamma$$

donc $(z, z) \in (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. Ainsi, $\Delta_Z \in \mathcal{E}_Z$. ■

Lemme 4.3.3. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Alors il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de Δ_Z dans $Z \times_X Z$.

Démonstration. Soient $K \subseteq Z$ un compact tel que $\Delta_Z \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$ et V un voisinage ouvert relativement compact de K . Alors $(V \times_X V) \cdot \mathcal{G}$ est un voisinage ouvert \mathcal{G} -invariant de Δ_Z dans $Z \times_X Z$ qui est de plus contrôlé. En effet, $\overline{V} \times_X \overline{V}$ est compact donc contrôlé d'après (iii) et contient $V \times_X V$ qui est à son tour contrôlé d'après (i) donc l'orbite $(V \times_X V) \cdot \mathcal{G}$ est contrôlée d'après (vi). ■

La définition suivante montre le lien entre les opérateurs sur E et la \mathcal{G} -structure coarse de Z .

Définition 4.3.4 (Support d'un opérateur). Soient X et Z deux espaces localement compacts. Pour $i = 1, 2$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation $\pi_i : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$. Soit $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$. Le *support* de T , noté $\text{supp}(T)$, est le complémentaire du sous-ensemble ouvert de $Z \times_X Z$:

$$\left\{ (z, z') \in Z \times Z \mid \exists f, g \in C_0(Z), f(z) \neq 0, g(z') \neq 0 \text{ et } \pi_2(f) \circ T \circ \pi_1(g) = 0 \right\}.$$

Définition 4.3.5 (Opérateur à support contrôlé). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre et \mathcal{G} -compact. Pour $i = 1, 2$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module de Hilbert \mathcal{G} -équivalent muni d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivalente $\pi_i : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$. On dit que $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$ est à *support contrôlé* si $\text{supp}(T) \in \mathcal{E}_Z$.

Lemme 4.3.6. Soient X et Z deux espaces localement compacts. Pour $i = 1, 2$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation $\pi_i : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$. Soit $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$ un opérateur qui commute avec $C_0(Z)$ c'est-à-dire que pour tout $f \in C_0(Z)$:

$$T \circ \pi_1(f) = \pi_2(f) \circ T.$$

Alors $\text{supp}(T) \subseteq \Delta_Z$.

Démonstration. Soit $(z, z') \in Z^2$ tel que $z \neq z'$. Soient U et U' deux ouverts de Z tels que $z \in U$, $z' \in U'$ et $U \cap U' = \emptyset$. D'après le lemme 1.2.28 appliqué au compact $\{z\} \subseteq U$ (resp. au compact $\{z'\} \subseteq U'$), il existe une fonction continue à support compact $f : Z \rightarrow [0; 1]$ telle que $f(z) = 1$ et $\text{supp}(f) \subseteq U$ (resp. une fonction continue à support compact $g : Z \rightarrow [0; 1]$ telle que $g(z') = 1$ et $\text{supp}(g) \subseteq U'$). Les fonctions f et g vérifient donc :

$$f(z) \neq 0, g(z') \neq 0 \quad \text{et} \quad fg = 0 \quad (\text{car } \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset).$$

Ainsi, comme T commute avec $C_0(Z)$, on a :

$$\pi_2(f) \circ T \circ \pi_1(g) = \pi_2(fg) \circ T = 0,$$

donc $(z, z') \notin \text{supp}(T)$. ■

Proposition 4.3.7 (Propriétés du support). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre et \mathcal{G} -compact. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module de Hilbert \mathcal{G} -équivalent muni d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivalente et non dégénérée $\pi_i : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$. Alors :

- (i) $\text{supp}(\text{id}_{E_1}) \subseteq \Delta_Z$;
- (ii) $\text{supp}(S + T) \subseteq \text{supp}(S) \cup \text{supp}(T)$, pour tous $T, S \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1)$;
- (iii) $\text{supp}(T^*) = \text{supp}(T)^{-1}$, pour tout $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$;
- (iv) $\text{supp}(S \circ T) \subseteq \text{supp}(S) \circ \text{supp}(T)$, pour tous $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$ et $S \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_2, E_3)$ à supports contrôlés.

Ainsi, l'ensemble des opérateurs dans $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ à support contrôlé forment une algèbre involutive.

Démonstration. (i) L'opérateur id_{E_1} commute avec $C_0(Z)$ donc d'après 4.3.6, $\text{supp}(\text{id}_{E_1}) \subseteq \Delta_Z$.

- (ii) Si $(z, z') \notin \text{supp}(S) \cup \text{supp}(T)$, alors il existe quatre fonctions $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C_0(Z)$ telles que $f_1(z) \neq 0, f_2(z) \neq 0, g_1(z') \neq 0, g_2(z') \neq 0$ avec :

$$\pi_1(f_1) \circ S \circ \pi_1(g_1) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_1(f_2) \circ T \circ \pi_1(g_2) = 0.$$

Posons $f := f_1 f_2$ et $g := g_1 g_2$, alors $f(z) \neq 0, g(z') \neq 0$ et on a :

$$\pi_1(f) \circ (S + T) \circ \pi_1(g) = 0,$$

donc $(z, z') \notin \text{supp}(S + T)$.

- (iii) Si $(z, z') \notin \text{supp}(T^*)$ alors il existe $f, g \in C_0(Z)$ avec $f(z) \neq 0, g(z') \neq 0$ telles que :

$$\pi_1(f) \circ T^* \circ \pi_2(g) = 0,$$

donc $\pi_2(\bar{g}) \circ T \circ \pi_1(\bar{f}) = 0$ c'est-à-dire que $(z, z') \notin \text{supp}(T)^{-1}$. La réciproque se traite de la même façon.

- (iv) Supposons que $(z_1, z_2) \notin \text{supp}(S) \circ \text{supp}(T)$ et montrons que $(z_1, z_2) \notin \text{supp}(S \circ T)$. Considérons alors les sous-ensembles fermés de Z suivants :

$$\begin{cases} K_{z_1} & := \{z \in Z \mid (z_1, z) \in \text{supp}(S)\} \subseteq \{z_1\} \circ \text{supp}(S), \\ K_{z_2} & := \{z \in Z \mid (z, z_2) \in \text{supp}(T)\} \subseteq \text{supp}(T) \circ \{z_2\} \end{cases}$$

Ils sont disjoints car $(z_1, z_2) \notin \text{supp}(S) \circ \text{supp}(T)$. Comme S et T sont à support contrôlé, alors $\{z_1\} \circ \text{supp}(S)$ et $\text{supp}(T) \circ \{z_2\}$ sont relativement compacts et donc K_{z_1} et K_{z_2} sont compacts. Soient U et V deux ouverts relativement compacts de Z tels que $K_{z_1} \subseteq U, K_{z_2} \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$. Soit $\varphi : Z \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue à support compact telle que :

$$\varphi|_U = 0 \quad \text{et} \quad \varphi|_V = 1.$$

On a en particulier :

$$\text{supp}(\varphi) \cap K_{z_1} = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{supp}(1 - \varphi) \cap K_{z_2} = \emptyset.$$

Soit $k \in \text{supp}(\varphi)$. Alors $k \notin K_{z_1}$, donc $(z_1, k) \notin \text{supp}(S)$. Il existe donc $\psi_k, \varphi_k \in C_0(Z)$ telles que :

$$\psi_k(z_1) \neq 0, \quad \varphi_k(k) \neq 0 \quad \text{et} \quad \pi_3(\psi_k) \circ S \circ \pi_2(\varphi_k) = 0,$$

et on peut supposer que φ_k est à valeurs dans $[0; 1]$ et que $\varphi_k(k) = 1$. On obtient donc le recouvrement suivant :

$$\text{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup_{k \in \text{supp}(\varphi)} (\varphi_k)^{-1} \left(\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\right).$$

Par compacité de $\text{supp}(\varphi)$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_n \in \text{supp}(\varphi)$ telles que :

$$\text{supp}(\varphi) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\varphi_{k_i})^{-1} \left(\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\right).$$

Puisque $\sum_{i=1}^n (\varphi_{k_i})|_{\text{supp}(\varphi)} > \frac{1}{2}$, alors il existe $g \in C(Z)$ telle que $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i} \varphi g$. On considère la

fonction $f := \prod_{i=1}^n \psi_{k_i} \in C_0(Z)$. Alors $f(z_1) \neq 0$ et :

$$\pi_3(f) \circ S \circ \pi_2(\varphi) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \pi_3(\psi_{k_j}) \circ \underbrace{\pi_3(\psi_{k_i}) \circ S \circ \pi_2(\varphi_{k_i})}_{=0} \circ \pi_2(\varphi g) \right) = 0.$$

Soit $\psi \in C_c(Z)$ une fonction valant 1 sur $\text{supp}(f) \circ \text{supp}(S)$. On montre que le support de l'opérateur $\pi_3(f) \circ S \circ (\text{id}_{E_2} - \pi_2(\psi))$ est vide, donc $\pi_3(f) \circ S \circ (\text{id}_{E_2} - \pi_2(\psi)) = 0$ c'est-à-dire que :

$$\pi_3(f) \circ S = \pi_3(f) \circ S \circ \pi_2(\psi).$$

Puisque la fonction $\psi(1 - \varphi)$ est continue à support compact et que $\text{supp}(\psi(1 - \varphi)) \cap K_{z_2} = \emptyset$, on démontre de la même manière que précédemment l'existence d'une fonction $g \in C_0(Z)$ telle que :

$$g(z_2) \neq 0 \quad \text{et} \quad \pi_2(\psi(1 - \varphi)) \circ T \circ \pi_1(g) = 0.$$

En notant $\overline{\pi_2} : C_b(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_2)$ l'extension de la représentation non-dégénérée π_2 à $C_b(Z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_3(f) \circ S \circ T \circ \pi_1(g) &= \pi_3(f) \circ S \circ \left(\pi_2(\varphi) + \overline{\pi_2}(1 - \varphi) \right) \circ T \circ \pi_1(g) \\ &= \overbrace{\pi_3(f) \circ S \circ \pi_2(\varphi)}^{=0} \circ T \circ \pi_1(g) + \pi_3(f) \circ S \circ \overline{\pi_2}(1 - \varphi) \circ T \circ \pi_1(g) \\ &= \pi_3(f) \circ S \circ \pi_2(\psi) \circ \overline{\pi_2}(1 - \varphi) \circ T \circ \pi_1(g) \\ &= \pi_3(f) \circ S \circ \underbrace{\pi_2(\psi(1 - \varphi))}_{=0} \circ T \circ \pi_1(g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $(z_1, z_2) \notin \text{supp}(S \circ T)$. ■

Lemme 4.3.8 (Support du projecteur associé à un borélien régulier). Soient X et Z deux espaces localement compacts. Soient E un $C_0(X)$ -module de Hilbert et $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ une $C_0(X)$ -représentation. Soient $U \subseteq Z$ un borélien π -régulier relativement compact et p_U le projecteur associé. Alors :

$$\text{supp}(p_U) \subseteq \Delta_Z \cap (\overline{U} \times_X \overline{U}).$$

Démonstration. D'après le lemme 4.3.6, le support de p_U est inclus dans Δ_Z . Montrons que le support de p_U est inclus dans $\overline{U} \times_X \overline{U}$. Soit $(z, z') \in (Z \times_X Z) \setminus (\overline{U} \times_X \overline{U})$. Quitte à échanger z et z' , on peut supposer que $z \notin \overline{U}$.

- Si $z = z'$ alors $z, z' \notin \overline{U}$. Comme $\{z\}$ et \overline{U} sont deux compacts disjoints, il existe une fonction continue à support compact $f : Z \rightarrow [0; 1]$ telle que $f|_{\overline{U}} = 0$, $f(z) = f(z') = 1$. Donc $f\chi_U f = 0$. Ainsi pour tout $x \in X$,

$$0 = \pi_x(f|_{Z_x}) \circ \pi_x(\chi_{U_x}) \circ \pi_x(f|_{Z_x}) = \pi_x(f|_{Z_x}) \circ p_{U,x} \circ \pi_x(f|_{Z_x})$$

donc $\pi(f) \circ p_U \circ \pi(f) = 0$ et alors $(z, z') \notin \text{supp}(p_U)$.

- Si $z \neq z'$ alors $(z, z') \notin \Delta_Z$ donc $(z, z') \notin \text{supp}(p_U)$. ■

Lemme 4.3.9 (Support d'une somme directe). Soient X et Z deux espaces localement compacts. Pour $i = 1, 2$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module de Hilbert ainsi que $\pi_i : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$ une $C_0(X)$ -représentation. Soient $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$ et $S \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_2)$. Alors l'opérateur :

$$T \oplus S : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_2 \oplus E_2$$

est à support dans $\text{supp}(T) \cup \text{supp}(S)$.

Démonstration. Si $(z, z') \notin \text{supp}(T) \cup \text{supp}(S)$ alors il existe $f, g \in C_0(Z)$ tels que $f(z) \neq 0, g(z') \neq 0$ avec :

$$\pi_2(f) \circ T \circ \pi_1(g) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_2(f) \circ S \circ \pi_2(g) = 0,$$

et alors :

$$(\pi_2 \oplus \pi_2)(f) \circ (T \oplus S) \circ (\pi_1 \oplus \pi_2)(g) = \left(\pi_2(f) \circ T \circ \pi_1(g) \right) \oplus \left(\pi_2(f) \circ S \circ \pi_2(g) \right) = 0$$

c'est-à-dire que $(z, z') \notin \text{supp}(T \oplus S)$. ■

4.4 Existence de représentations admissibles

Dans cette partie, on énonce un analogue de la définition 4.5.2 de [55] p. 164 au cadre des groupoïdes amples puis on démontre l'existence de telles représentations dans le cas des \mathcal{G} -complexes simpliciaux.

Définition 4.4.1 (Représentation \mathcal{U} -admissible). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Soient Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$ et \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soit E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -régulière et \mathcal{G} -équivariante $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. On dit que la représentation π est \mathcal{U} -admissible si :

- 1) pour tout voisinage ouvert contrôlé U de Δ_Z , il existe une isométrie $T_U : E \oplus E \rightarrow E$ qui est \mathcal{G} -équivariante et à support dans U ;
- 2) pour tout $z_0 \in Z$, pour tout voisinage ouvert $V_0 \subseteq Z$ de z_0 , il existe un sous-groupoïde compact-ouvert $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, un voisinage ouvert $W \subseteq V_0$ de z_0 qui est \mathcal{H} -invariant, vérifiant $\rho(W) \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ et appartenant à $\widehat{\mathcal{U}}$ tels que :

(a) l'application $\psi : \begin{cases} W \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow & W \cdot \mathcal{G} \\ [w, \gamma] & \longmapsto & w\gamma \end{cases}$ soit un homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant,

- (b) il existe un isomorphisme de $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -module \mathcal{H} -équivariant :

$$p_{W, \pi}(E) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\rho(W)}, s|_{\mathcal{H}}),$$

où l'action de \mathcal{H} sur H est triviale et $p_{W, \pi}$ est le projecteur associé au voisinage ouvert π -régulier W .

Remarque 4.4.2.

- (a) Si H est un espace de Hilbert séparable et $\pi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est une représentation ample, alors $\pi \oplus \pi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}(H \oplus H)$ est encore une représentation ample et dans ce cas, pour tout voisinage ouvert contrôlé U de Δ_X , il existe une isométrie $H \oplus H \rightarrow H$ à support dans U (voir [55]).
- (b) En gardant les notations de la définition précédente, on a $W_{r(\gamma)}\gamma = W_{s(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{H}$ ²⁸ donc $\gamma \cdot \chi_{W_{s(\gamma)}} = \chi_{W_{r(\gamma)}}$ et donc, si V désigne l'unitaire associé à l'action de \mathcal{G} sur E , on a pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$V_{\gamma} \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}}) = \pi_{r(\gamma)}(\chi_{W_{r(\gamma)}}) \circ V_{\gamma}.$$

Autrement dit, pour tout $\gamma \in \mathcal{H}$, si $\xi \in (p_{W, \pi}(E))_{s(\gamma)}$, alors $V_{\gamma}(\xi) \in (p_{W, \pi}(E))_{r(\gamma)}$. Donc $p_{W, \pi}(E)$ est muni d'une action de \mathcal{H} induite par celle de \mathcal{G} . Par conséquent, le module $p_{W, \pi}(E)$ est muni d'une structure de $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -module \mathcal{H} -équivariant, et donc, comme $\mathcal{H}^{(0)}$ est ouvert dans X , d'une structure de $C_0(X)$ -module \mathcal{H} -équivariant.

28. On a plus généralement $W_{r(\gamma)}\gamma = (W\gamma)_{s(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$.

Théorème 4.4.3. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et σ -compact. Soit (Y, Δ) un \mathcal{G} -complexe simplicial propre, typé et \mathcal{G} -compact de dimension inférieure à n . On note \mathcal{S} la partie génératrice de la topologie de $|\Delta|$ (voir section 2.2.6). Alors il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E et une représentation \mathcal{S} -admissible :

$$\pi : C_0(|\Delta|) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

Démonstration. Soit Z_n la réalisation géométrique d'un \mathcal{G} -complexe simplicial (Y, Δ) de dimension inférieure à n . D'après la démonstration du théorème 4.2.1, il existe une représentation fidèle et \mathcal{S} -régulière :

$$\pi_n : C_0(Z_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)} \left(\bigoplus_{i=0}^n F_i \right)$$

avec :

$$F_0 := L^2(Z_0, \rho|_{Z_0}) \quad \text{et} \quad F_i := L^2(\sigma_i) \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z'_i, \rho|_{Z'_i}), \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

où l'action de \mathcal{G} sur σ_i est triviale. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Posons :

$$\begin{cases} E_i & := H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} F_i \quad \text{pour tout } i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \\ E & := \bigoplus_{i=0}^n E_i \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} \left(\bigoplus_{i=0}^n F_i \right), \\ \pi & := 1 \otimes 1 \otimes \pi_n : C_0(Z_n) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E). \end{cases}$$

Alors π est encore une représentation fidèle et \mathcal{S} -régulière. Nous allons montrer que cette représentation est \mathcal{S} -admissible.

Montrons 1). Soit T_0 un unitaire entre $H \oplus H$ et H . Le module E est de la forme $H \otimes_{\mathbb{C}} E'$ où E' est un $C_0(X)$ -module de Hilbert. Alors, l'application $T : E \oplus E \rightarrow E$ donnée par :

$$E \oplus E \simeq (H \oplus H) \otimes_{\mathbb{C}} E' \xrightarrow{T_0 \otimes 1} H \otimes_{\mathbb{C}} E' = E$$

est une composée d'isométries \mathcal{G} -équivariantes donc une isométrie \mathcal{G} -équivariante. On a de plus pour tout $f \in C_0(Z_n)$:

$$T \circ \left((\pi \oplus \pi)(f) \right) = \pi(f) \circ T$$

car pour tous $h_1, h_2 \in H, x_1, x_2 \in C_c(\mathcal{G})$ et $x'_1, x'_2 \in \bigoplus_{i=1}^n F_i$:

$$\begin{aligned} T \left((\pi \oplus \pi)(f)(h_1 \otimes x_1 \otimes x'_1, h_2 \otimes x_2 \otimes x'_2) \right) &= T \left(h_1 \otimes x_1 \otimes \pi_n(f)(x'_1), h_2 \otimes x_2 \otimes \pi_n(f)(x'_2) \right) \\ &= (V \otimes 1) \left((h_1, 0) \otimes x_1 \otimes \pi_n(f)(x'_1) + (0, h_2) \otimes x_2 \otimes \pi_n(f)(x'_2) \right) \\ &= V(h_1, 0) \otimes x_1 \otimes \pi_n(f)(x'_1) + V(0, h_2) \otimes x_2 \otimes \pi_n(f)(x'_2) \\ &= \pi(f) \left(V(h_1, 0) \otimes x_1 \otimes x'_1 + V(0, h_2) \otimes x_2 \otimes x'_2 \right) \\ &= \pi(f) \left[(V \otimes 1) \left((h_1, 0) \otimes x_1 \otimes x'_1 + (0, h_2) \otimes x_2 \otimes x'_2 \right) \right] \\ &= \pi(f) \left(T(h_1 \otimes x_1 \otimes x'_1, h_2 \otimes x_2 \otimes x'_2) \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.3.6, on obtient $\text{supp}(T) \subseteq \Delta_{Z_n}$. En particulier, si $U \subseteq Z_n \times_X Z_n$ est un voisinage ouvert contrôlé de Δ_{Z_n} , alors $\text{supp}(T) \subseteq U$.

Montrons 2) (a). Soient $\mu_0 \in Z_n$ et $V_0 \subseteq Z_n$ un voisinage ouvert de μ_0 . Soit $x_0 \in X$ tel que $\text{supp}(\mu_0) \subseteq \rho^{-1}(x_0)$. Notons z_1, \dots, z_m les éléments du support de μ_0 où $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par définition d'une partie génératrice de la topologie, V_0 contient un élément de \mathcal{S} c'est-à-dire qu'il existe un

voisinage μ_0 -simplicial V' (compact-ouvert) de x_0 , des sections $s_i : V' \rightarrow s_i(V')$ associées aux sommets z_i et un m -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \Lambda_{\mu_0, z_1, \dots, z_m}$ tels que :

$$W' = \bigcap_{i=1}^m \left\{ \mu \in |\Delta|, \left| I_\mu(\chi_{s_i(V')}) - I_{\mu_0}(\chi_{s_i(V')}) \right| < \varepsilon_i \right\} \subseteq V_0.$$

Quitte à restreindre V' et le remplacer par :

$$V' \cap \bigcap_{i=1}^m s_i^{-1} \left(\tau^{-1}(\{\tau(z_i)\}) \cap s_i(V') \right)$$

qui est encore un voisinage μ_0 -simplicial (compact-ouvert) de x_0 , on peut supposer que l'application τ est constante (et égale à $\tau(z_i)$) sur chaque $s_i(V')$. Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Puisque $s_i(V') \subseteq Y$ est un voisinage ouvert de z_i , alors d'après le théorème 3.3.5, il existe un sous groupoïde compact-ouvert $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{G}$ (dont la base contient x_0 par construction) et un voisinage ouvert $U_i \subseteq s_i(V')$ de z_i appartenant à $\widehat{\mathcal{S}}$ et qui est \mathcal{H}_i -équivariant tels que l'on ait l'homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant :

$$U_i \times_{\mathcal{H}_i} \mathcal{G} \cong U_i \cdot \mathcal{G}.$$

Rappelons que, par construction, la famille d'ouverts $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ vérifie pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $\eta \in \mathcal{G}$:

$$U_i \cap U_i \eta \neq \emptyset \implies \eta \in \mathcal{H}_i.$$

Puisque $\rho|_{s_i(V')} = (s_i|_{V'})^{-1}$ et $U_i \subseteq s_i(V')$, alors $\rho(U_i) = s_i^{-1}(U_i)$. Comme U_i est \mathcal{H}_i -invariant, alors $\rho(U_i)$ aussi et donc $\bigcap_{i=1}^m \rho(U_i)$ est invariant par $\bigcap_{i=1}^m (\mathcal{H}_i)$. On pose donc sans ambiguïté :

$$V := \bigcap_{i=1}^m \rho(U_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{H} := \bigcap_{i=1}^m (\mathcal{H}_i)|_V.$$

Alors V est un voisinage μ_0 -simplicial \mathcal{H} -invariant de x_0 dans V' , et aussi dans $\mathcal{H}^{(0)}$ ²⁹. Comme X est totalement discontinu et localement compact, on peut supposer, quitte à le restreindre, que V est compact-ouvert. Alors \mathcal{H} est encore un sous-groupoïde compact-ouvert de \mathcal{G} . On considère alors :

$$W := \bigcap_{i=1}^m \left\{ \mu \in |\Delta|, \left| I_\mu(\chi_{s_i(V)}) - I_{\mu_0}(\chi_{s_i(V)}) \right| < \varepsilon_i \right\} \subseteq W' \subseteq V_0.$$

C'est un voisinage ouvert de μ_0 dans \mathcal{S} donc dans $\widehat{\mathcal{S}}$. Vérifions qu'il est \mathcal{H} -invariant. Soient $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\gamma \in \mathcal{H}_x$ et $\mu \in W$ avec $\tilde{\rho}(\mu) = x$. Par construction de V , on a pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $s_i(V) \subseteq U_i$ et U_i est \mathcal{H}_i -invariant donc $s_i(r(\gamma))\gamma \in U_i$ et comme :

$$\rho\left(\underbrace{s_i(r(\gamma))\gamma}_{\in U_i}\right) = \rho\left(\underbrace{(s_i(s(\gamma)))}_{\in U_i}\right),$$

alors par injectivité de ρ sur U_i ³⁰, on obtient $s_i(r(\gamma))\gamma = s_i(s(\gamma)) = s_i(x) = z_i$. Dans ce cas,

$$I_{\gamma \cdot \mu}(\chi_{s_i(V)}) = \sum_{y \in s_i(V)_{r(\gamma)}} \lambda_y(\gamma \cdot \mu) = \sum_{y \in s_i(\{r(\gamma)\})} \lambda_y(\mu) = \lambda_{s_i(r(\gamma))\gamma}(\mu) = \lambda_{z_i}(\mu)$$

et :

$$I_\mu(\chi_{s_i(V)}) = \sum_{y \in s_i(V)_x} \lambda_y(\mu) = \lambda_{s_i(r(\gamma))\gamma}(\mu) = \lambda_{z_i}(\mu)$$

29. En suivant la démonstration du théorème 3.3.5, l'ouvert que l'on construit, noté U_i ici, vérifie $\rho(U_i) \subseteq \mathcal{H}_i^{(0)}$. Donc $V \subseteq H^{(0)}$.

30. Si $\rho(u) = \rho(u')$ avec $u, u' \in U_i \subseteq s_i(V')$, alors il existe $v, w \in V'$ tels que $u = s_i(v)$ et $u' = s_i(w)$ donc $v = \rho(u) = \rho(u') = w$ donc $u = u'$.

et donc $I_{\gamma \cdot \mu}(\chi_{s_i(V)}) = I_\mu(\chi_{s_i(V)})$ ce qui prouve que $\gamma \cdot \mu \in W$ et donc que W est \mathcal{H} -invariant.

L'application $\psi : \begin{cases} W \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} & \longrightarrow W \cdot \mathcal{G} \\ [\mu, \gamma] & \longmapsto \gamma \cdot \mu \end{cases}$ est continue, on va montrer qu'elle est injective. Il suffit pour cela de montrer que pour tous $\eta \in \mathcal{G}_{\tilde{\rho}(\mu)}$ et $\mu, \mu' \in W$, on a :

$$\mu' = \eta \cdot \mu \quad \implies \quad \left(U_i \cap U_i \eta \neq \emptyset \quad \text{pour tout } i \in \llbracket 1, m \rrbracket \right)$$

et dans ce cas, $\eta \in \mathcal{H}$. Soient donc $\mu, \mu' \in W$ et $\eta \in \mathcal{G}$ tels que $\mu' = \eta \mu$. Il existe $v, w \in V$, $y_1, \dots, y_p, y'_1, \dots, y'_q$ dans Y tels que :

$$\begin{cases} \text{supp}(\mu) & = \{s_1(v), \dots, s_m(v), y_1, \dots, y_p\} \\ \text{supp}(\mu') & = \{s_1(w), \dots, s_m(w), y'_1, \dots, y'_q\} \end{cases}$$

et alors :

$$\{s_1(w), \dots, s_m(w), y'_1, \dots, y'_q\} = \{s_1(v)\eta^{-1}, \dots, s_m(v)\eta^{-1}, \dots, y_1\eta^{-1}, \dots, y_p\eta^{-1}\}.$$

- Si $s_i(w) = s_j(v)\eta^{-1}$ avec $i \neq j$, alors par \mathcal{G} -équivariance de τ , on a $\tau(s_i(w)) = \tau(s_j(v))$ et comme τ est constante égale à $\tau(z_k)$ sur chaque $s_k(V) \subseteq s_k(V')$, on a $\tau(z_i) = \tau(z_j)$. Ceci est impossible car $\{z_i, z_j\} \in \Delta$ et τ est injective sur le support d'un simplexe.
- Si $s_i(w) = y_j\eta^{-1}$, alors de même que précédemment, $\tau(s_i(v)) = \tau(s_i(w)) = \tau(y_j)$ ce qui est absurde car $\{s_i(v), y_j\} \in \Delta$.

On a donc nécessairement, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$s_i(w) = s_i(v)\eta.$$

Or $s_i(v), s_i(w) \in s_i(V) \subseteq U_i$, donc $U_i \cap U_i \eta \neq \emptyset$.

Montrons 2) (b). Notons $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le cardinal du support de μ_0 . On rappelle que :

$$E_m := H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} \left(L^2(\sigma_m^\circ) \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z'_m, \tilde{\rho}|_{Z'_m}) \right).$$

Soit p_{W, π_n} le projecteur associé à l'ouvert π_n -régulier W défini dans la démonstration du théorème 4.2.1. Alors le projecteur $p_{W, \pi}$ associé à l'ouvert π -régulier W est :

$$p_{W, \pi} = 1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n}.$$

Soit $\tilde{\rho} : Z_n \rightarrow X$ l'ancre associée à l'action de \mathcal{G} sur Z_n . Montrons que l'on a un isomorphisme de $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -modules \mathcal{H} -équivariant :

$$(1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_m}(E_m) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}})$$

où l'action de \mathcal{H} sur H est triviale. On a :

$$(1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_m}(E_m) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)}, s) \otimes_{C_0(\tilde{\rho}(W))} \left(L^2(\sigma_m^\circ) \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z'_m \cap W, \tilde{\rho}|_{Z'_m \cap W}) \right).$$

Puisque $Z'_m \cap W$ est compact, en tant qu'image du compact V par l'application $v \mapsto \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{s_i(v)}$ qui est continue, la proposition 4.1.8 permet alors d'obtenir :

$$H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(Z'_m \cap W, \tilde{\rho}|_{Z'_m \cap W}) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} C(V).$$

Donc :

$$(1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_m}(E_m) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)}, s) \otimes_{C_0(\tilde{\rho}(W))} \left(L^2(\sigma_m^\circ) \otimes_{\mathbb{C}} C(V) \right).$$

Puisque $\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}$ est un sous-groupe ouvert-fermé de $\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)}$, alors on a la partition en deux ouverts-fermés $\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)} = \mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)} \sqcup (\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)} \setminus \mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)})$ qui induit un isomorphisme \mathcal{H} -équivariant :

$$L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)}, s) \simeq L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}}) \oplus L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)} \setminus \mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s)$$

Le théorème 4.1.6 appliqué à $H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)} \setminus \mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s)$ qui est un $C_0(\tilde{\rho}(W))$ -module dénombrablement engendré et au groupe compact étale $\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}$ donne :

$$\left[H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)} \setminus \mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s) \right] \oplus \left[H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}}) \right] \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}})$$

Donc :

$$H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{G}_{\tilde{\rho}(W)}, s) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}}).$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} (1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_m}(E_m) &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}}) \otimes_{C_0(\tilde{\rho}(W))} \left(L^2(\sigma_m^\circ) \otimes_{\mathbb{C}} C(V) \right) \\ &\simeq L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}}) \otimes_{C_0(\tilde{\rho}(W))} H \otimes_{\mathbb{C}} C(V) \end{aligned}$$

et on peut supposer, d'après le lemme 1.5.9, que l'action de \mathcal{H} sur $H \otimes_{\mathbb{C}} C(V)$ est triviale. On a donc l'isomorphisme de $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -module \mathcal{H} -équivariant :

$$(1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_m}(E_m) \simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}})$$

où l'action de \mathcal{H} sur H est triviale. Puisque $E = \bigoplus_{i=0}^n E_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} p_{W, \pi}(E) &= (1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})(E) \\ &= \bigoplus_{i=0}^n (1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_i}(E_i) \\ &\simeq \bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^n (1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_i}(E_i) \oplus [H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}})] \\ &\simeq H \otimes_{\mathbb{C}} L^2(\mathcal{H}_{\tilde{\rho}(W)}, s|_{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme de $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -modules \mathcal{H} -équivariant provient du théorème 4.1.6 appliqué

au module $\bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^n (1 \otimes 1 \otimes p_{W, \pi_n})|_{E_i}(E_i)$. ■

Chapitre 5

Algèbre de Roe

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir la C^* -algèbre de Roe équivariante relativement à un groupoïde localement compact. Par la suite, l'objectif sera de construire un ouvert contrôlé vérifiant une condition particulière (voir proposition 5.1.1). Enfin, nous construirons une isométrie équivariante à support arbitrairement petit. Ce résultat nous permettra de démontrer, comme dans le cas des groupes, que la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la représentation admissible choisie.

Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Soit (E, V) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante :

$$\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E).$$

On note $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)^\mathcal{G}$, l'ensemble des opérateurs \mathcal{G} -équivariants de $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ c'est-à-dire les opérateurs $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ tels que :

$$\forall \gamma \in \mathcal{G}, \quad T_{r(\gamma)} \circ V_\gamma = V_\gamma \circ T_{s(\gamma)}.$$

Définition 5.0.1 (Algèbre de Roe). L'algèbre de Roe \mathcal{G} -équivariante, notée $C_\mathcal{G}^*(Z, E, \pi)$, est la fermeture pour la norme sur $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ de l'algèbre involutive :

$$\left\{ T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)^\mathcal{G} \mid T \text{ est à support contrôlé et } T\pi(f), \pi(f)T \in k_{C_0(X)}(E), \forall f \in C_0(Z) \right\}.$$

5.1 Divisibilité des voisinages contrôlés de la diagonale

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.1.1. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Alors pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant $U \subseteq Z \times_X Z$ de Δ_Z , il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant $U' \subseteq Z \times_X Z$ de Δ_Z tel que :

$$U' \circ U' \subseteq U.$$

Démonstration. Comme U est contrôlé, il existe un compact K dans Z tel que :

$$\Delta_K \subseteq \Delta_Z \subseteq U \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}.$$

En particulier, comme $\Delta_Z \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$, alors $Z = K \cdot \mathcal{G}$. Soit $(k, k) \in \Delta_K \subseteq \Delta_Z$. Puisque U est un voisinage ouvert de Δ_Z , il existe un voisinage ouvert $U_k \subseteq Z$ de k tel que $U_k \times_X U_k \subseteq U$. D'après la proposition 3.3.5, il existe un sous-groupoïde compact-ouvert \mathcal{H}_k de \mathcal{G} , un voisinage ouvert $V_k \subseteq U_k$ de k appartenant à \mathcal{U} et qui est \mathcal{H}_k -invariant tels que l'on ait l'homéomorphisme

\mathcal{G} -équivariant $V_k \times_{\mathcal{H}_k} \mathcal{G} \cong V_k \cdot \mathcal{G}$. Remarquons que par construction (voir la démonstration du théorème 3.3.5), on a également $\rho(V_k) \subseteq \mathcal{H}_k^{(0)}$.

Par compacité de Δ_K , il existe $n \in \mathbb{N}^*$, des ouverts V_1, \dots, V_n dans \mathcal{U} et des sous-groupeïdes compacts-ouverts $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ de \mathcal{G} tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- $\rho(V_k) \subseteq \mathcal{H}_k^{(0)}$, V_k est \mathcal{H}_k -invariant et $V_k \times_X V_k \subseteq U$;
- on a l'homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant $V_k \times_{\mathcal{H}_k} \mathcal{G} \cong V_k \cdot \mathcal{G}$;
- $\Delta_K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_k \times_X V_k$.

Donc $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_k$. On en déduit que $Z \subseteq \bigcup_{k=1}^n (V_k \cdot \mathcal{G})$ et donc $\Delta_Z \subseteq \bigcup_{k=1}^n (V_k \times_X V_k) \cdot \mathcal{G}$. De plus, par \mathcal{G} -invariance de U , on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(V_k \times_X V_k) \cdot \mathcal{G} \subseteq U \cdot \mathcal{G} \subseteq U.$$

Par conséquent :

$$\Delta_Z \subseteq \bigcup_{k=1}^n (V_k \times_X V_k) \cdot \mathcal{G} \subseteq U.$$

On est donc ramené à trouver un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U' de Δ_Z tel que :

$$U' \circ U' \subseteq \bigcup_{k=1}^n (V_k \times_X V_k) \cdot \mathcal{G}.$$

► **Cas de deux orbites.** Démontrons le résultat voulu pour $n = 2$ c'est-à-dire que l'on suppose que $K \subseteq V_1 \cup V_2$ et $\Delta_Z \subseteq (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G} \cup (V_2 \times_X V_2) \cdot \mathcal{G} \subseteq U$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant $U' \subseteq Z \times_X Z$ de Δ_Z tel que $U' \circ U' \subseteq U$. Soient $K_1, K_2 \subseteq Z$ deux compacts tels que $K_1 \subseteq V_1$, $K_2 \subseteq V_2$ et $K = K_1 \cup K_2$.³¹ Considérons les trois ensembles ouverts \mathcal{G} -invariants suivants :

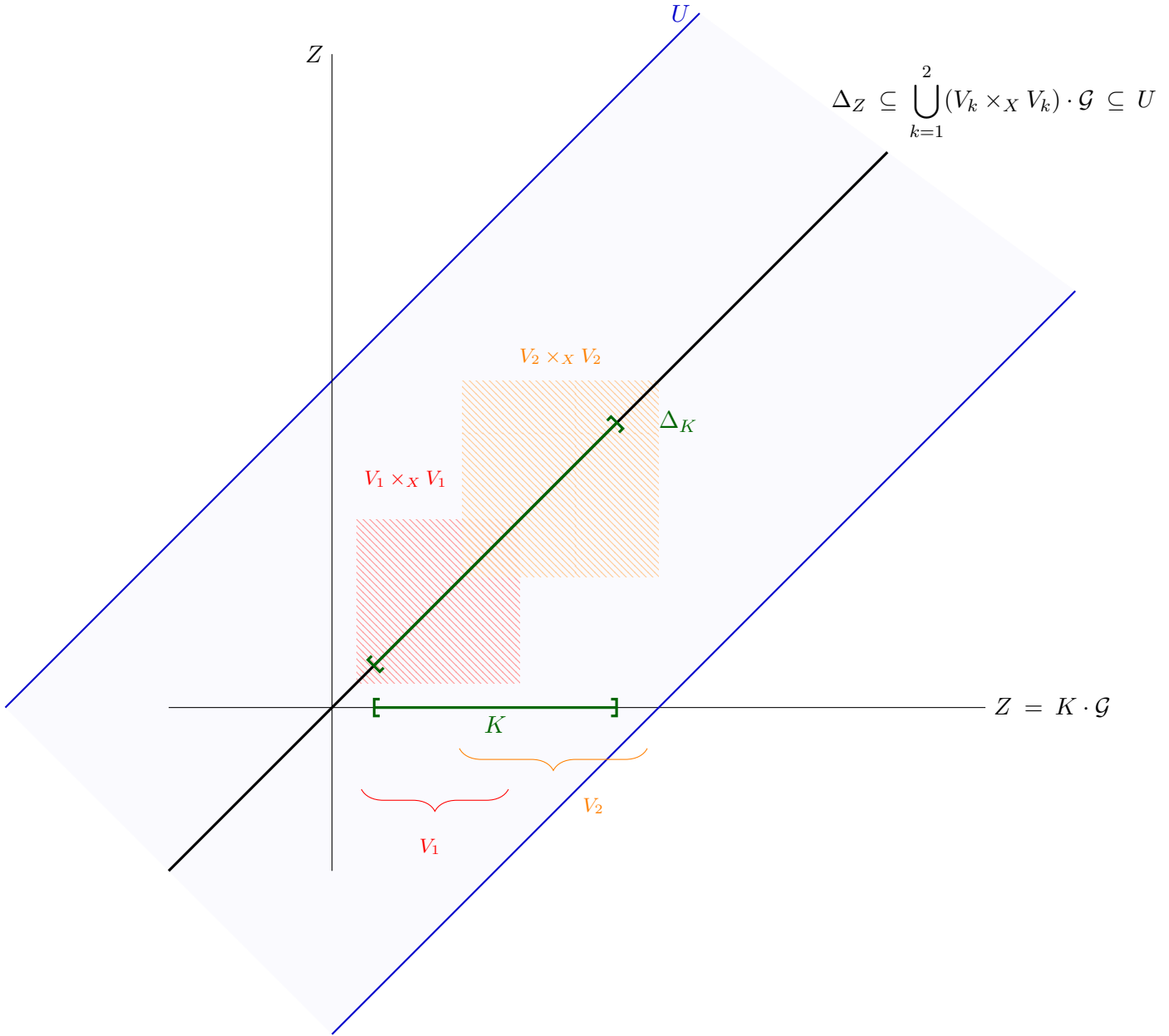
$$\left\{ \begin{array}{l} E = (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G} \setminus (Z \times_X K_2 \cdot \mathcal{G}) \cup (K_2 \cdot \mathcal{G} \times_X Z) = \left(V_1 \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G}) \times V_1 \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G}) \right) \cdot \mathcal{G}, \\ F = (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G} \cap (V_2 \times_X V_2) \cdot \mathcal{G}, \\ G = (V_2 \times_X V_2) \cdot \mathcal{G} \setminus (Z \times_X K_1 \cdot \mathcal{G}) \cup (K_1 \cdot \mathcal{G} \times_X Z) = \left(V_2 \setminus (K_1 \cdot \mathcal{G}) \times V_2 \setminus (K_1 \cdot \mathcal{G}) \right) \cdot \mathcal{G}. \end{array} \right.$$

et posons :

$$U' := E \cup F \cup G.$$

- Par construction, U' est un ouvert \mathcal{G} -invariant.
- Les ensembles E, F et G sont contrôlés car ils sont inclus dans $(K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. Donc par union, U' est encore contrôlé.
- Vérifions que U' contient Δ_Z . Soit $(z, z) \in \Delta_Z$.
 - Supposons que $(z, z) \in (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G}$. Soient $u \in V_1, \gamma \in \mathcal{G}$ tels que $(z, z) = (u\gamma, u\gamma)$. Si $u \notin K_2 \cdot \mathcal{G}$, alors $(z, z) \in E \subseteq U'$. Si $u \in K_2 \cdot \mathcal{G}$, alors comme $K_2 \subseteq V_2$, on obtient $(z, z) \in (V_2 \times_X V_2) \cdot \mathcal{G}$ et donc $(z, z) \in F \subseteq U'$.
 - Supposons que $(z, z) \in (V_2 \times_X V_2) \cdot \mathcal{G}$. Alors de la même façon que précédemment, on obtient $(z, z) \in E \subseteq U'$ ou $(z, z) \in G \subseteq U'$.

31. Puisque $K \setminus V_1$ et $K \setminus V_2$ sont deux compacts disjoints alors d'après le Théorème 9 page 141 dans [29], il existe deux ouverts disjoints W_1 et W_2 tels que $K \setminus V_1 \subseteq W_1$ et $K \setminus V_2 \subseteq W_2$. On pose alors $K_1 := K \setminus W_1$ et $K_2 := K \setminus W_2$ qui sont deux compacts dans V_1 et V_2 respectivement et vérifient $K = K_1 \cup K_2$.


 FIGURE 5.1 – Recouvrement de Δ_Z en orbite dans U .

- Vérifions que $U' \circ U' \subseteq U$. Pour cela, on commence par calculer les carrés puis les doubles produits. Soit $(x, z) \in E \circ E$. Il existe $y \in Z$ tel que $(x, y) \in E$ et $(y, z) \in E$. Soient v, v', w, w' dans $V_1 \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G})$ et γ, γ' dans \mathcal{G} tels que :

$$(x, y) = (v\gamma, w\gamma) \quad \text{et} \quad (y, z) = (v'\gamma', w'\gamma').$$

Alors $w\gamma = v'\gamma'$ donc par injectivité de l'application $[x, \eta] \in V_1 \times_{\mathcal{H}_1} \mathcal{G} \mapsto x\eta \in V_1 \cdot \mathcal{G}$, on obtient $\gamma'\gamma^{-1} \in \mathcal{H}_1$. Comme V_1 est \mathcal{H}_1 -invariant, alors $w'\gamma'\gamma^{-1} \in V_1$ et donc :

$$(x, z) = (v, w'\gamma'\gamma^{-1})\gamma \in (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G}.$$

Donc $E \circ E \subseteq (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G}$. On montre de la même manière que :

- $F \circ F, E \circ F$ et $F \circ E$ sont dans $(V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G}$,
- $G \circ G, F \circ G$ et $G \circ F$ sont dans $(V_2 \times_X V_2) \cdot \mathcal{G}$.

Il reste à déterminer $E \circ G$ et $G \circ E$ et nous allons montrer qu'ils sont vides. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x, z) \in E \circ G$ et soit $y \in Z$ tel que $(x, y) \in E$ et $(y, z) \in G$.

Soient $v, w \in V_1 \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G})$, $v', w' \in V_2 \setminus (K_1 \cdot \mathcal{G})$ et $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}$ tels que $(x, y) = (v\gamma, w\gamma)$ et $(y, z) = (v'\gamma', w'\gamma')$. Alors :

$$w\gamma = v'\gamma' \in [V_1 \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G})] \cdot \mathcal{G} \cap [V_2 \setminus (K_1 \cdot \mathcal{G})] \cdot \mathcal{G}.$$

Or :

$$\begin{aligned} [V_1 \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G})] \cdot \mathcal{G} \cap [V_2 \setminus (K_1 \cdot \mathcal{G})] \cdot \mathcal{G} &= [(V_1 \cdot \mathcal{G}) \setminus (K_2 \cdot \mathcal{G})] \cap [(V_2 \cdot \mathcal{G}) \setminus (K_1 \cdot \mathcal{G})] \\ &= (V_1 \cdot \mathcal{G}) \cap (V_2 \cdot \mathcal{G}) \cap {}^c[K_2 \cdot \mathcal{G} \cup K_1 \cdot \mathcal{G}] \\ &= V_1 \cdot \mathcal{G} \cap V_2 \cdot \mathcal{G} \cap {}^c(K \cdot \mathcal{G}) \\ &= V_1 \cdot \mathcal{G} \cap V_2 \cdot \mathcal{G} \cap {}^c Z \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $E \circ G = \emptyset$. De la même manière, on obtient $G \circ E = \emptyset$.

Ainsi U' est donc un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de Δ_Z vérifiant :

$$U' \circ U' \subseteq (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G} \cup (V_2 \times_X V_2) \subseteq U.$$

► **Cas général.** Soient K_1, \dots, K_n des compacts de Z vérifiant :

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{et} \quad K_i \subseteq V_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Nous allons construire, par récurrence, des ouverts contrôlés \mathcal{G} -invariants U_1, \dots, U_n dans $Z \times_X Z$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(i) \quad \Delta_{\bigcup_{j=1}^i V_j \cdot \mathcal{G}} \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{j=1}^i (V_j \times_X V_j) \cdot \mathcal{G}.$$

(ii) pour tous x, y, z dans Z tels que (x, y) et (y, z) appartiennent à U_i et $y \in \bigcup_{j=1}^i K_j \cdot \mathcal{G}$, alors :

$$(x, z) \in \bigcup_{j=1}^i (V_j \times_X V_j) \cdot \mathcal{G}.$$

- Pour $i = 1$, l'ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant $U_1 := (V_1 \times_X V_1) \cdot \mathcal{G}$ convient.
- Supposons que l'on ait construit des ouverts contrôlés \mathcal{G} -invariants U_1, \dots, U_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et vérifiant les conditions (i) et (ii). Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i = \bigcup_{j=1}^i K_j \cdot \mathcal{G}, \\ E = U_i \setminus \left((Z \times_X K_{i+1} \cdot \mathcal{G}) \cup (K_{i+1} \cdot \mathcal{G} \times_X Z) \right), \\ F = U_i \cap \left((V_{i+1} \times_X V_{i+1}) \cdot \mathcal{G} \right), \\ G = (V_{i+1} \times_X V_{i+1}) \cdot \mathcal{G} \setminus \left((Z \times_X Z_i) \cup (Z_i \times_X Z) \right). \end{array} \right.$$

Alors on montre, de la même façon que dans le cas de deux orbites, que $U_{i+1} := E \cup F \cup G$ est un ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant vérifiant les conditions requises ; ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, en posant $U' := U_n$, on obtient un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de $\Delta_{\bigcup_{j=1}^n V_j \cdot \mathcal{G}} = \Delta_Z$ vérifiant :

$$U' \circ U' \subseteq \bigcup_{i=1}^n (V_i \times_X V_i) \cdot \mathcal{G}.$$

■

Remarque 5.1.2. Si $U' \circ U' \subseteq U$, alors en particulier U contient U' car :

$$U' = U' \circ \Delta_Z \subseteq U' \circ U' \subseteq U.$$

D'après la proposition 5.1.1, il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U'' de Δ_Z tel que $U'' \circ U'' \subseteq U'$, donc $U'' \circ U'' \circ U'' \circ U'' \subseteq U$ et alors :

$$U'' \circ U'' \circ U'' = U'' \circ U'' \circ U'' \circ \Delta_Z \subseteq U'' \circ U'' \circ U'' \circ U'' \subseteq U.$$

Plus généralement, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U' de Δ_Z tel que $\underbrace{U' \circ \dots \circ U'}_{n \text{ fois}} \subseteq U$.

Remarque 5.1.3. On se place dans le cadre de la définition 4.4.1 en supposant que le point 1) est vérifié. Alors pour tout voisinage ouvert contrôlé U de Δ_Z , on peut construire une isométrie :

$$T_U : E \oplus E \oplus E \rightarrow E$$

à support dans U . En effet, d'après la proposition 5.1.1, il existe un voisinage ouvert contrôlé U' de Δ_Z tel que $U' \circ U' \subseteq U$ et aussi une isométrie $T_{U'} : E \oplus E \rightarrow E$ à support dans U' . L'opérateur :

$$T_U := T_{U'} \circ (T_{U'} \oplus \text{id}_E) : E \oplus E \oplus E \rightarrow E$$

est encore une isométrie et d'après le lemme 4.3.9, $T_{U'} \oplus \text{id}_E$ est à support dans $U' \cup \Delta_Z \subseteq U'$ donc :

$$\text{supp}(T_U) \subseteq U' \circ U' \subseteq U.$$

La point (c) de la remarque 5.1.2 permet de généraliser ce résultat à n facteurs. L'isométrie recherchée est alors :

$$T_{U'} \circ (T_{U'} \oplus \text{id}_E) \circ (T_{U'} \oplus \text{id}_E \oplus \text{id}_E) \circ \underbrace{\dots}_{(n-1)\text{-fois}} \circ \left(T_{U'} \oplus \text{id}_E \oplus \underbrace{\dots}_{(n-1)\text{-fois}} \oplus \text{id}_E \right)$$

et est à support dans $U' \circ \underbrace{\dots}_{n\text{-fois}} \circ U' \subseteq U$.

5.2 K -théorie de la C^* -algèbre de Roe

Le but de cette partie est de construire une isométrie équivariante, à support dans un voisinage ouvert contrôlé équivariant de Δ_Z fixé, entre deux modules de Hilbert munis de représentations admissibles. Nous en déduisons que la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe équivariante ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la représentation admissible choisie.

Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre. Soient \mathcal{H} un sous-groupoïde compact-ouvert de \mathcal{G} ³² et $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$. Soit F un $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -module \mathcal{H} -équivariant muni d'une $C(\mathcal{H}^{(0)})$ -représentation \mathcal{H} -équivariante :

$$\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C(\mathcal{H}^{(0)})}(F).$$

Le $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(F)$ est naturellement muni d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante de $C_0(Z \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G})$ (voir proposition 1.5.7 puis 1.5.4) donc d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante de $C_0(Z)$ grâce à l'application $Z \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightarrow Z; [z, \gamma] \mapsto z\gamma$ en considérant l'application :

$$\hat{\pi} : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}\left(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(F)\right)$$

définie pour tous $f \in C_0(Z)$, $\xi \in F_c$ et $\gamma \in Y$ par :

$$\hat{\pi}(f)(\xi)(\gamma) := \pi_{s(\gamma)}(f(\cdot \gamma^{-1}))(\xi(\gamma)).$$

32. Le sous-groupoïde \mathcal{H} est donc en particulier propre et ouvert-fermé dans \mathcal{G} .

Lemme 5.2.1 (Support d'un opérateur induit). Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite d'ancre $\rho : Z \rightarrow X$. Soient \mathcal{H} un sous-groupoïde compact-ouvert de \mathcal{G} et $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$. Pour $i = 1, 2$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante $\pi_i : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$. Soit V un ouvert de Z tel que :

- V est π et π' -régulier et on note $p_{V,\pi}$ et $p_{V,\pi'}$ les projecteurs associés ;
- $\rho(V) \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ et V est \mathcal{H} -invariant ;
- il existe un ouvert \mathcal{H} -invariant W dans Z tel que $\bar{V} \subseteq W$ et $W\gamma \cap W = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$.

Alors pour tout opérateur \mathcal{H} -équivariant $T : p_{V,\pi}(E_1) \rightarrow p_{V,\pi'}(E_2)$, on a :

$$\text{supp}\left(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)\right) \subseteq \left(\bar{V} \times_X \bar{V}\right) \cdot \mathcal{G}$$

(voir lemme 1.5.8 pour la construction de l'opérateur induit $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)$).

Démonstration. Tout d'abord, le support de $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)$ est un sous-ensemble de $(\bar{V} \cdot \mathcal{G}) \times_X (\bar{V} \cdot \mathcal{G})$. Soit $(z, z') \in \left((\bar{V} \cdot \mathcal{G}) \times_X (\bar{V} \cdot \mathcal{G})\right) \setminus (\bar{V} \times_X \bar{V}) \cdot \mathcal{G}$. Alors il existe (v, γ) et (v', η) dans $\bar{V} \times_{\rho,r} \mathcal{G}$ tels que $z = v\gamma$ et $z' = v'\eta$. De plus, $\gamma\eta^{-1} \notin \mathcal{H}$ car sinon $(z, z') = \underbrace{(v\gamma\eta^{-1}, v')}_{\in \bar{V}} \eta \in (\bar{V} \times_X \bar{V}) \cdot \mathcal{G}$. Puisque $\gamma\eta^{-1}$ est dans l'ouvert $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, alors il existe deux bissections B_γ et B_η dans \mathcal{G} contenant respectivement γ et η telles que :

$$\forall (a, b) \in B_\gamma \times_{s,s} B_\eta, \quad ab^{-1} \notin \mathcal{H}$$

ce qui implique que $(W \cdot B_\gamma) \cap (W \cdot B_\eta) = \emptyset$ ³³. Comme :

$$z \in W \cdot B_\gamma \quad \text{et} \quad z' \in W \cdot B_\eta$$

et que $W \cdot B_\gamma$ et $W \cdot B_\eta$ sont deux ouverts de Z , le lemme 1.2.28 fournit l'existence de deux fonctions $f, g : Z \rightarrow [0; 1]$ continues à supports compacts telles que :

$$f(z) = 1, \quad g(z') = 1, \quad \text{supp}(f) \subseteq W \cdot B_\gamma, \quad \text{supp}(g) \subseteq W \cdot B_\eta.$$

Considérons les sous-ensembles A_f^γ et A_g^η de \mathcal{G} (non vides car contenant respectivement γ^{-1} et η^{-1}) suivants :

$$\begin{cases} A_f^\gamma := \left\{ \gamma' \in \mathcal{G} \mid \exists w \in W_{s(\gamma')}, w\gamma'^{-1} \in W \cdot B_\gamma \right\}, \\ A_g^\eta := \left\{ \gamma' \in \mathcal{G} \mid \exists w \in W_{s(\gamma')}, w\gamma'^{-1} \in W \cdot B_\eta \right\}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que les fonctions $\tilde{f} : \gamma' \mapsto f(\cdot\gamma'^{-1})$ et $\tilde{g} : \gamma' \mapsto g(\cdot\gamma'^{-1})$ appartenant à $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(C_0(Z))$ sont à supports dans A_f^γ et A_g^η respectivement.

De plus, $A_f^\gamma \cap A_g^\eta = \emptyset$. En effet, si $w_1\gamma'^{-1} = w_2a$ et $w_3\gamma'^{-1} = w_4b$ avec $w_i \in W, a \in B_\gamma, b \in B_\eta$, alors $w_1 = w_2a\gamma'$ et $w_3 = w_4b\gamma'$ et on distingue deux cas :

- Soit $a\gamma' \in \mathcal{H}$ et alors il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que $w_3 = w_4ba^{-1}h$ donc $\underbrace{w_3h^{-1}}_{\in W} = \underbrace{w_4(ab^{-1})^{-1}}_{\notin \mathcal{H}}$.
- Soit $a\gamma' \notin \mathcal{H}$ et alors $\underbrace{w_1}_{\in W} = \underbrace{w_2a\gamma'}_{\notin \mathcal{H}}$.

Ainsi, les fonctions \tilde{f} et \tilde{g} ne peuvent pas être non nulles en même temps et par conséquent, pour tous $\xi \in (p_{V,\pi}(E_1))_c$ et $\gamma' \in \mathcal{G}$, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{\pi'}(g) \circ \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T) \circ \widehat{\pi}(f)(\xi)(\gamma') &= \pi_{s(\gamma')}(g(\cdot\gamma'^{-1})_{Z|_{s(\gamma')}}) \circ T_{s(\gamma')} \circ \pi_{s(\gamma')}(f(\cdot\gamma'^{-1})_{Z|_{s(\gamma')}}) \\ &= \pi_{s(\gamma')}\left(\tilde{g}(\gamma')_{Z|_{s(\gamma')}}\right) \circ T_{s(\gamma')} \circ \pi_{s(\gamma')}\left(\tilde{f}(\gamma')_{Z|_{s(\gamma')}}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

33. Si $wa = w'b$ avec $v, v' \in W$ et $a \in B_\gamma, b \in B_\eta$, alors $w' = \underbrace{wab^{-1}}_{\notin \mathcal{H}} \in W \cap W(ab^{-1}) = \emptyset$.

Finalement, $\text{supp}\left(\text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(T)\right) \subseteq \left(\overline{V} \times_X \overline{V}\right) \cdot \mathcal{G}$. ■

Proposition 5.2.2. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite d'ancrage $\rho : Z \rightarrow X$. Soit \mathcal{H} un sous-groupoïde compact-ouvert de \mathcal{G} . Soit (E, V) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$. Soit W un ouvert de Z tel que :

- W est π -régulier et on note $p_{W,\pi}$ le projecteur associé ;
- $\rho(W) \subseteq \mathcal{H}^{(0)}$ et W est \mathcal{H} -invariant ;
- $W\gamma \cap W = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$.

Notons $Y := s^{-1}(\mathcal{H}^{(0)})$ et considérons l'application bien définie³⁴ :

$$\Theta_{W,E} : \begin{cases} \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(p_{W,\pi}(E)) & \longrightarrow & E \\ \xi & \longmapsto & \left[x \mapsto \sum_{\gamma \mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} V_{\gamma}(\xi(\gamma)) \right] \end{cases} .$$

Alors :

- (i) $\Theta_{W,E}$ est une isométrie \mathcal{G} -équivariante à support dans Δ_Z .
- (ii) $\Theta_{W,E}$ est adjoignable et son adjoint est $\Theta_{W,E}^* : \begin{cases} E & \longrightarrow & \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(p_{W,\pi}(E)) \\ e & \longmapsto & \left[\gamma \mapsto \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma)))) \right] \end{cases} .$
- (iii) Pour tout $x \in X$, on a $(\Theta_{W,E} \circ (\Theta_{W,E})^*)_x = \pi_x(\chi_{(W \cdot \mathcal{G})_x})$.

Démonstration. (i) Notons $Y^x := Y \cap \mathcal{G}^x$ pour tout $x \in X$. Soit $\xi \in (p_{W,\pi}(E))_c$. Remarquons que pour tous $\gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ et $e(s(\gamma)) \in p_{W,\pi}(E)_{s(\gamma)}$:

$$\begin{aligned} \pi_{r(\gamma)}(\chi_{W_{r(\gamma)}}) \circ V_{\gamma}(e(s(\gamma))) &= \pi_{r(\gamma)}(\chi_{W_{r(\gamma)}}) \circ V_{\gamma} \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(e'(s(\gamma))) \\ &= V_{\gamma} \circ \pi_{s(\gamma)}(\gamma^{-1} \cdot \chi_{W_{r(\gamma)}}) \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(e'(s(\gamma))) \\ &= V_{\gamma} \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{r(\gamma)\gamma}}) \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(e'(s(\gamma))) \\ &= V_{\gamma} \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{(W\gamma \cap W)_{s(\gamma)}})(e'(s(\gamma))) \quad \text{Car } W_{r(\gamma)\gamma} = (W\gamma)_{s(\gamma)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci permet d'en déduire que pour tous $\gamma, \eta \in Y^x$ vérifiant $\gamma\mathcal{H} \neq \eta\mathcal{H}$ c'est-à-dire vérifiant $\eta^{-1}\gamma \notin \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle V_{\eta^{-1}\gamma}(\xi(\gamma)), (p_{W,\pi})_{s(\gamma)}(e(s(\gamma))) \right\rangle_{\mathbb{C}} &= \overbrace{\left\langle (p_{W,\pi})_{s(\gamma)} \circ V_{\eta^{-1}\gamma}(\xi(\gamma)), e(s(\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}}}^{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $V_{\eta^{-1}\gamma}(\xi(\gamma)) \in (p_{W,\pi}(E)_{s(\eta)})^{\perp}$. Ainsi, pour tous $\gamma, \eta \in Y^x$ vérifiant $\gamma\mathcal{H} \neq \eta\mathcal{H}$, on a :

$$\left\langle V_{\eta}(\xi(\eta)), V_{\gamma}(\xi(\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle \underbrace{\xi(\eta)}_{\in p_{W,\pi}(E)_{s(\eta)}}, \underbrace{V_{\eta^{-1}\gamma}(\xi(\gamma))}_{\in (p_{W,\pi}(E)_{s(\eta)})^{\perp}} \right\rangle_{\mathbb{C}} = 0.$$

34. Voir lemme 3.6.3 dans [10] p. 91.

On peut à présent conclure que $\Theta_{W,E}$ est une isométrie. En effet, pour tous $\xi_1, \xi_2 \in \left(p_{W,\pi}(E)\right)_c$ et $x \in X$:

$$\begin{aligned} \left\langle \Theta_{W,E}(\xi_1), \Theta_{W,E}(\xi_2) \right\rangle_{C_0(X)}(x) &= \left\langle \Theta_{W,E}(\xi_1)(x), \Theta_{W,E}(\xi_2)(x) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{\eta\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \left\langle V_\eta(\xi(\eta)), V_\gamma(\xi(\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{\eta\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \left\langle V_\eta(\xi(\eta)), V_\eta(\xi(\eta)) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &=: \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{C_0(X)}(x). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\Theta_{W,E}$ est \mathcal{G} -équivariant. L'opérateur $\Theta_{W,E}$ commute avec $C_0(Z)$ car pour tous $f \in C_0(Z), \xi \in \left(p_{W,\pi}(E)\right)_c$ et $x \in X$:

$$\begin{aligned} \Theta_{W,E}(\widehat{\pi}(f)(\xi))(x) &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} V_\gamma(\widehat{\pi}(f)(\xi)(\gamma)) \\ &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} V_\gamma \circ \pi_{s(\gamma)}(f \cdot \gamma^{-1}|_{Z_{s(\gamma)}})(\xi(\gamma)) \\ &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \pi_{r(\gamma)}(f|_{Z_{r(\gamma)}}) \circ V_\gamma(\xi(\gamma)) \\ &= \pi_x(f|_{Z_x}) \circ \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} V_\gamma(\xi(\gamma)) \\ &= \left(\pi(f) \circ \Theta_{W,E}(\xi)\right)(x), \end{aligned}$$

et donc d'après le lemme 4.3.6, $\Theta_{W,E}$ est à support dans Δ_Z .

(ii) Soient $\xi \in \left(p_{W,\pi}(E)\right)_c, e \in E$ et $x \in X$. Alors $\xi(\gamma) = \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(\xi(\gamma))$ pour tout $\gamma \in Y^x$ et donc :

$$\begin{aligned} \left\langle \Theta_{W,E}(\xi), e \right\rangle_{C_0(X)}(x) &= \left\langle \Theta_{W,E}(\xi)(x), e(x) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \left\langle V_\gamma(\xi(\gamma)), e(r(\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \left\langle \xi(\gamma), V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma))) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \left\langle \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(\xi(\gamma)), V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma))) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \sum_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \left\langle \xi(\gamma), \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}}) \circ V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma))) \right\rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Theta_{W,E}$ est adjoignable et son adjoint est l'application bien définie :

$$\Theta_{W,E}^* : \begin{cases} E & \longrightarrow & \text{Ind}_{\mathcal{H}}^Y(p_{W,\pi}(E)) \\ e & \longmapsto & \left[\gamma \mapsto \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}})(V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma)))) \right]. \end{cases}$$

(iii) Soit $x \in X$. Soient $\gamma, \eta \in Y^x$ vérifiant $\gamma\mathcal{H} \neq \eta\mathcal{H}$. Alors par hypothèse $W\gamma^{-1} \cap W\eta^{-1} = \emptyset$ donc la famille $(W\gamma^{-1})_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}}$ est disjointe et on a :

$$(W \cdot \mathcal{G})_x = \bigsqcup_{\gamma\mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} (W\gamma^{-1})_x.$$

On obtient donc pour tout $e \in E$:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{W,E}(\Theta_{W,E}^*(e))(x) &= \sum_{\gamma \mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} V_\gamma(\Theta_{W,E}^*(e)(\gamma)) \\
 &= \sum_{\gamma \mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} V_\gamma \circ \pi_{s(\gamma)}(\chi_{W_{s(\gamma)}}) \circ V_{\gamma^{-1}}(e(r(\gamma))) \\
 &= \sum_{\gamma \mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \pi_{r(\gamma)}(\gamma \cdot \chi_{W_{s(\gamma)}})(e(r(\gamma))) \\
 &= \sum_{\gamma \mathcal{H} \in Y^x/\mathcal{H}} \pi_x(\chi_{(W\gamma^{-1})_x})(e(x)) \\
 &= \pi_x(\chi_{(W \cdot \mathcal{G})_x})(e(x)).
 \end{aligned}$$

■

Remarque 5.2.3. Si W est un ouvert de Z vérifiant les conditions de la proposition 5.2.2, alors l'orbite $W \cdot \mathcal{G}$ est π -régulière et le projecteur associé est $\Theta_{W,E} \circ (\Theta_{W,E}^*)^*$. On obtient donc la régularité de l'orbite sans supposer le groupoïde compact (comparer avec les corollaires 3.1.9 et 3.1.11).

Théorème 5.2.4. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Soit \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soient (E, V^E) un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -régulière $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et $(E', V^{E'})$ un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -admissible $\pi' : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E')$. Pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U de Δ_Z , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$T : E \rightarrow E' \quad \text{avec} \quad \text{supp}(T) \subseteq U.$$

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de Δ_Z . D'après la proposition 5.1.1, il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U' de Δ_Z tel que :

$$U' \circ U' \subseteq U.$$

Il existe un compact $K \subseteq Z$ tel que :

$$\Delta_K \subseteq \Delta_Z \subseteq U' \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}.$$

Soit $(z, z) \in \Delta_K \subseteq \Delta_Z$. Comme Z est localement compact, il existe un voisinage ouvert $U_z \subseteq Z$ de z tel que $\overline{U_z} \times_X \overline{U_z} \subseteq U'$. Puisque π' est une représentation \mathcal{U} -admissible (voir définition 4.4.1), il existe un sous-groupoïde compact-ouvert $\mathcal{H}_z \subseteq \mathcal{G}$ et un voisinage ouvert $V_z \subseteq U_z$ de z qui est \mathcal{H}_z -invariant avec $\rho(V_z) \subseteq \mathcal{H}_z^{(0)}$ et appartenant à $\tilde{\mathcal{U}}$ tels que :

- on a l'homéomorphisme \mathcal{G} -équivariant $V_z \times_{\mathcal{H}_z} \mathcal{G} \simeq V_z \cdot \mathcal{G}$;
- on a les isomorphismes de $C(\mathcal{H}_z^{(0)})$ -modules \mathcal{H}_z -équivariant :

$$p_{V_z, \pi'}(E') \simeq \ell^2(\mathbb{N}) \otimes_{\mathbb{C}} L^2((\mathcal{H}_z)_{\rho(V_z)}, s|_{\mathcal{H}_z}) \simeq C((\mathcal{H}_z)_{\rho(V_z)}, \ell^2(\mathbb{N})),$$

où l'action de \mathcal{H}_z sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est triviale et $p_{V_z, \pi'}$ est le projecteur associé au voisinage ouvert π' -régulier V_z .

Quitte à restreindre V_z , on peut supposer qu'il existe un ouvert \mathcal{H}_z -invariant W_z dans Z tel que $\overline{V_z} \subseteq W_z$ et $W_z \gamma \cap W_z = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}_z$.

Par compacité de Δ_K , il existe un entier $n \geq 1$, des sous-groupoïdes compacts-ouverts $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ dans \mathcal{G} et des ouverts V_1, \dots, V_n dans $\tilde{\mathcal{U}}$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- $\rho(V_k) \subseteq \mathcal{H}_k^{(0)}$ et V_k est \mathcal{H}_k -invariant ;

- il existe un ouvert \mathcal{H}_k -invariant W_k dans Z tel que $\overline{V_k} \subseteq W_k$ et $W_k \gamma \cap W_k = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}_k$;
- $\overline{V_k} \times_X \overline{V_k} \subseteq U'$;
- on a l'isomorphisme \mathcal{G} -équivariant $V_k \times_{\mathcal{H}_k} \mathcal{G} \simeq V_k \cdot \mathcal{G}$; $[v_k, \gamma] \mapsto v_k \gamma$. En particulier, l'injectivité de cette application donne :

$$\gamma \notin \mathcal{H}_k \implies V_k \cap V_k \gamma = \emptyset$$

- on a les isomorphismes de $C(\mathcal{H}_k^{(0)})$ -modules \mathcal{H}_k -équivariant :

$$p_{V_k, \pi'}(E') \simeq \ell^2(\mathbb{N}) \otimes_{\mathbb{C}} L^2((\mathcal{H}_k)_{\rho(V_k)}, s|_{\mathcal{H}_k}) \simeq C((\mathcal{H}_k)_{\rho(V_k)}, \ell^2(\mathbb{N})),$$

où l'action de \mathcal{H}_k sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est triviale et $p_{V_k, \pi'}$ est le projecteur associé au voisinage ouvert π' -régulier V_k ;

- $\Delta_K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_k \times_X V_k$.

On obtient en particulier le recouvrement $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_k$ et alors $Z = \bigcup_{k=1}^n V_k \cdot \mathcal{G}$. Nous allons construire une isométrie \mathcal{G} -équivariante $T : E \rightarrow E'$ à support dans U .

► **Cas de deux orbites.** Supposons que :

$$Z = (V_1 \cdot \mathcal{G}) \cup (V_2 \cdot \mathcal{G})$$

et considérons, pour $k = 1, 2$, les projecteurs $p_{V_k, \pi}$ et $p_{V_k, \pi'}$ associés aux boréliens π et π' -réguliers V_1 et V_2 . Comme le module E' est admissible, il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$T_{U'} : E' \oplus E' \rightarrow E' \quad \text{avec} \quad \text{supp}(T_{U'}) \subseteq U'.$$

Notons $Y_k := s^{-1}(\mathcal{H}_k^{(0)})$ et considérons $W_1 : E \rightarrow E'$, la composée des applications :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(\Theta_{V_1, E})^*} \text{Ind}_{\mathcal{H}_1}^{Y_1} (p_{V_1, \pi}(E)) & \xrightarrow{\Phi_1} \text{Ind}_{\mathcal{H}_1}^{Y_1} (p_{V_1, \pi'}(E')) \\ & \searrow W_1 & \downarrow \Theta_{V_1, E'} \\ & & E' \\ & & \downarrow j_1^{(2)} \\ & & E' \oplus E' \\ & & \downarrow T_{U'} \\ & & E' \end{array}$$

et $W_2 : E \rightarrow E'$, la composée des applications :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(\Theta_{V_2, E})^*} \text{Ind}_{\mathcal{H}_2}^{Y_2} (p_{V_2, \pi}(E)) & \xrightarrow{\Phi_2} \text{Ind}_{\mathcal{H}_2}^{Y_2} (p_{V_2, \pi'}(E')) \\ & \searrow W_2 & \downarrow \Theta_{V_2, E'} \\ & & E' \\ & & \downarrow j_2^{(2)} \\ & & E' \oplus E' \\ & & \downarrow T_{U'} \\ & & E' \end{array}$$

Explicitons chaque application intervenant dans ce diagramme. Pour $k = 1, 2$:

- l'application $\Theta_{V_k, E'} : \begin{cases} \text{Ind}_{\mathcal{H}_k}^{Y_k} (p_{V_k, \pi}(E')) & \longrightarrow & E' \\ \xi & \longmapsto & \left(x \mapsto \sum_{\eta \in Y_k^x / \mathcal{H}_k} V_\eta^{E'}(\xi(\eta)) \right) \end{cases}$ est une isométrie \mathcal{G} -équivariante à support dans Δ_Z d'après la proposition 5.2.2.
- $(\Theta_{V_k, E})^* : \begin{cases} E & \longrightarrow & \text{Ind}_{\mathcal{H}_k}^{Y_k} (p_{V_k, \pi}(E)) \\ e & \longmapsto & \left[\gamma \mapsto \pi_{s(\gamma)}(\chi_{V_k, s(\gamma)})(V_{\gamma^{-1}}^E(e(r(\gamma)))) \right] \end{cases}$.
- On a $p_{V_k, \pi'}(E') \simeq C((\mathcal{H}_k)_{\rho(V_k)}, \ell^2(\mathbb{N}))$ donc d'après le théorème 4.1.6, on a l'isomorphisme de $C(\mathcal{H}_k^{(0)})$ -modules \mathcal{H} -équivariant :

$$p_{V_k, \pi}(E) \oplus p_{V_k, \pi'}(E') \simeq p_{V_k, \pi'}(E').$$

L'injection $p_{V_k, \pi}(E) \hookrightarrow p_{V_k, \pi}(E) \oplus p_{V_k, \pi'}(E')$ permet alors d'obtenir une isométrie \mathcal{G} -équivariante $p_{V_k, \pi}(E) \rightarrow p_{V_k, \pi'}(E')$. D'après le lemme 1.5.8, on obtient encore une isométrie par le procédé d'induction :

$$\Phi_k : \text{Ind}_{\mathcal{H}_k}^{Y_k} (p_{V_k, \pi}(E)) \rightarrow \text{Ind}_{\mathcal{H}_k}^{Y_k} (p_{V_k, \pi'}(E')).$$

Comme l'ouvert V_k vérifie les hypothèses du lemme 5.2.1, alors :

$$\text{supp}(\Phi_k) \subseteq (\overline{V_k} \times_X \overline{V_k}) \cdot \mathcal{G} \subseteq U' \cdot \mathcal{G} \subseteq U'.$$

- $j_1^{(2)} : E' \rightarrow E' \oplus E'$ (resp. $j_2^{(2)} : E' \rightarrow E' \oplus E'$) est l'injection sur le premier facteur (resp. l'injection sur le deuxième facteur). Ceux sont des isométries à supports dans Δ_Z vérifiant $(j_1^{(2)})^* j_2^{(2)} = 0$.

L'opérateur W_k est donc \mathcal{G} -équivariant et d'après la proposition 4.3.7 :

$$\text{supp}(W_k) \subseteq U' \circ \Delta_Z \circ \Delta_Z \circ U' \circ \Delta_Z = U' \circ U'.$$

Toutes les applications définies dans les deux diagrammes commutatifs précédemment sont des isométries, mise à part $(\Theta_{V_k, E})^*$. On a donc :

$$W_k^* \circ W_k = \Theta_{V_k, E} \circ (\Theta_{V_k, E})^*$$

et on a d'après la proposition 5.2.2, on a pour tout $x \in X$:

$$\left(\Theta_{V_k, E} \circ (\Theta_{V_k, E})^* \right)_x = \pi_x(\chi_{V_k \cdot \mathcal{G} \cap \rho^{-1}(x)}).$$

Puisque $Z = (V_1 \cdot \mathcal{G}) \cup (V_2 \cdot \mathcal{G})$, alors $\chi_{V_1 \cdot \mathcal{G}} + \chi_{V_2 \cdot \mathcal{G}} \geq 1$ donc $q_E := \Theta_{V_1, E} \circ (\Theta_{V_1, E})^* + \Theta_{V_2, E} \circ (\Theta_{V_2, E})^*$ est inversible. On peut donc poser :

$$T_k := W_k \circ q_E^{-1/2} : E \rightarrow E', \quad k = 1, 2$$

Avec $q_E^{-1/2}$ à support dans Δ_Z .³⁵ Puisque $(j_1^{(2)})^* \circ j_2^{(2)} = 0$ alors $W_1^* \circ W_2 = 0$ et donc $T_1^* \circ T_2 = 0$. De la même manière, $T_2^* \circ T_1 = 0$. Posons $T = T_1 + T_2 : E \rightarrow E'$, c'est une isométrie (\mathcal{G} -équivariante) car :

$$\begin{aligned} T^* \circ T &= T_1^* \circ T_1 + T_2^* \circ T_2 \\ &= q_E^{-1/2} \circ W_1^* \circ W_1 \circ q_E^{-1/2} + q_E^{-1/2} \circ W_2^* \circ W_2 \circ q_E^{-1/2} \\ &= q_E^{-1/2} \circ (W_1^* \circ W_1 + W_2^* \circ W_2) \circ q_E^{-1/2} \\ &= q_E^{-1/2} \circ q_E \circ q_E^{-1/2} \\ &= \text{id}_E \end{aligned}$$

35. Si $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ vérifie $T^* = T$ et $f \in C(\text{Sp}(T))$, alors par calcul fonctionnel continu, $f(T) \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ commute avec tout opérateur qui commute avec T . En particulier, si T commute avec $C_0(Z)$, alors il en est de même pour $f(T)$ et donc son support est dans Δ_Z .

et son support vérifie $\text{supp}(T) \subseteq U' \circ U' \circ \Delta_Z = U' \circ U' \subseteq U$.

► **Cas général.** Soit $n \geq 2$. D'après la remarque 4.4.2, il existe une isométrie :

$$T_{U'}^n : E' \oplus \underbrace{\dots}_{n \text{ fois}} \oplus E' \rightarrow E' \quad \text{avec} \quad \text{supp}(T_{U'}^n) \subseteq U'$$

De la même façon que précédemment, on construit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un opérateur $W_k : E \rightarrow E'$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(\Theta_{V_k, E})^*} & \text{Ind}_{\mathcal{H}_k}^{Y_k}(p_{V_k, \pi}(E)) & \xrightarrow{\Phi_k} & \text{Ind}_{\mathcal{H}_k}^{Y_k}(p_{V_k, \pi'}(E')) \\ & \searrow & & & \downarrow \Theta_{V_k, E'} \\ & & & & E' \\ & & & & \downarrow j_k^{(n)} \\ & & & & E' \oplus \underbrace{\dots}_{n \text{ fois}} \oplus E' \\ & & & & \downarrow T_{U'}^n \\ & & & & E' \end{array}$$

W_k

où $j_k^{(n)}$ est l'injection sur le $k^{\text{ème}}$ -facteur. Comme dans le cas de deux orbites, chaque W_k est à support dans U . Considérons l'opérateur \mathcal{G} -équivariant :

$$T_k := W_k \circ \left(\Theta_{V_1, E} \circ (\Theta_{V_1, E})^* + \dots + \Theta_{V_n, E} \circ (\Theta_{V_n, E})^* \right)^{-1/2} : E \rightarrow E'$$

à support dans U . On a pour tous $k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, $(j_k^{(n)})^* \circ j_l^{(n)} = 0$ donc $W_k^* \circ W_l = 0$ et alors $T_k^* \circ T_l = 0$. On obtient ainsi une isométrie \mathcal{G} -équivariante en posant :

$$T := \sum_{k=1}^n T_k$$

qui est à support dans U . ■

Lemme 5.2.5 ([60], p.90). Soient $\Phi : A \rightarrow B$ un $*$ -homomorphisme de C^* -algèbres et $V \in M(B)$ une isométrie partielle telle que $\Phi(a) \circ V^* \circ V = \Phi(a)$ pour tout $a \in A$. Alors l'application :

$$\text{Ad}_V \circ \Phi : \begin{cases} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & V\Phi(a)V^* \end{cases}$$

est un $*$ -homomorphisme égal en K -théorie à Φ c'est-à-dire que $(\text{Ad}_V \circ \Phi)_* = \Phi_*$.

On énonce et démontre à présent le théorème principal de cette thèse, affirmant que la K -théorie de la C^* -algèbre de Roe équivariante ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la représentation admissible choisie.

Théorème 5.2.6. Soient (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact. Soit \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie de Z . Soient E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -régulière $\pi : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ et E' un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U} -admissible $\pi' : C_0(Z) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E')$. Alors toute isométrie de E dans E' donnée par le théorème 5.2.4 induit un homomorphisme de groupes :

$$K_* \left(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi) \right) \rightarrow K_* \left(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi') \right)$$

indépendant du choix de cette isométrie. De plus, si on suppose que la représentation π est \mathcal{U} -admissible, alors l'homomorphisme canonique précédent est un isomorphisme.

Démonstration. L'action de \mathcal{G} sur Z étant propre, on munit Z de la \mathcal{G} -structure coarse définie dans la proposition 4.3.2. D'après le théorème 5.2.4, il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$V : E \rightarrow E'$$

à support contrôlé. Soit $\text{Ad}_V : E \rightarrow E'$ l'application définie pour tout $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ par :

$$\text{Ad}_V(T) := V \circ T \circ V^*.$$

Montrons que Ad_V envoie $C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)$ sur $C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')$. Soit donc $T \in C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)$. D'après le point (iv) de la proposition 4.3.7, il est clair que $\text{Ad}_V(T)$ est à support contrôlé. Soit $f \in C_c(Z)$. Comme $K := \text{supp}(f) \circ \text{supp}(V) = \text{supp}(V)^{-1} \circ \text{supp}(f) \subseteq Z$ est relativement compact, alors d'après le lemme 1.2.28, il existe une fonction continue à support compact $\varphi : Z \rightarrow [0; 1]$ telle que $\varphi|_{\overline{K}} = 1$, donc en particulier $\varphi|_K = 1$. On obtient alors :

$$\pi(f) \circ V = \pi(f) \circ V \circ \pi(\varphi)$$

et donc :

$$\pi(f) \circ V \circ T \circ V^* = \pi(f) \circ V \circ \underbrace{\pi(\varphi) \circ T \circ V^*}_{\text{compact}}.$$

Donc $\pi(f) \circ V \circ T \circ V^*$ est compact. On montre de la même manière que $V \circ T \circ V^* \circ \pi(f)$ est compact. Par conséquent, l'opérateur $\text{Ad}_V(T)$ est localement compact. Notons W (resp. W') l'action de \mathcal{G} sur E (resp. E'). Puisque T et V sont \mathcal{G} -équivariants, on a pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} W_\gamma \circ (\text{Ad}_V(T))_{s(\gamma)} \circ W_\gamma^* &= W_\gamma \circ V_{s(\gamma)} \circ T_{s(\gamma)} \circ V_{s(\gamma)}^* \circ W_\gamma^* \\ &= W_\gamma \circ V_{s(\gamma)} \circ U_\gamma^* \circ T_{r(\gamma)} \circ U_\gamma \circ V_{s(\gamma)}^* \circ W_\gamma^* \\ &= V_{r(\gamma)} \circ U_\gamma \circ U_\gamma^* \circ T_{r(\gamma)} \circ U_\gamma \circ U_\gamma^* \circ V_{r(\gamma)}^* \\ &= V_{r(\gamma)} \circ T_{r(\gamma)} \circ V_{r(\gamma)}^* \\ &= (\text{Ad}_V(T))_{r(\gamma)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\text{Ad}_V(T)$ est \mathcal{G} -équivariant. On obtient donc :

$$\text{Ad}_V : \begin{cases} C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi) & \longrightarrow & C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi') \\ T & \longmapsto & V \circ T \circ V^* \end{cases}.$$

• Étant données deux isométries \mathcal{G} -équivariantes $V_1 : E \rightarrow E'$ et $V_2 : E \rightarrow E'$ à supports contrôlés, on montre que Ad_{V_1} et Ad_{V_2} induisent la même application en K -théorie. Il suffit pour cela de montrer que les $*$ -homomorphismes :

$$\Phi_1 : \begin{cases} C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')) \\ T & \longmapsto & \begin{bmatrix} \text{Ad}_{V_1}(T) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} ; \quad \Phi_2 : \begin{cases} C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')) \\ T & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Ad}_{V_2}(T) \end{bmatrix} \end{cases}$$

sont égaux en K -théorie. On vérifie que $V_i \circ V_j^*$ est dans $C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')$, pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}$. Considérons l'élément de $\mathcal{M}_2(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi'))$:

$$S := \begin{bmatrix} 1 - V_1 \circ V_1^* & V_1 \circ V_2^* \\ V_2 \circ V_1^* & 1 - V_2 \circ V_2^* \end{bmatrix}$$

On vérifie que c'est une isométrie (donc une isométrie partielle) et un multiplicateur de $\mathcal{M}_2(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi'))$ donc en appliquant le lemme 5.2.5 à $A = C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')$ et $B = \mathcal{M}_2(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi'))$, on obtient que les applications $(\text{Ad}_S \circ \Phi_1)_*$ et $(\Phi_1)_*$ sont égales. Or un calcul montre que pour tout $T \in C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)$:

$$\Phi_2(T) = S\Phi_1(T)S^*.$$

D'où :

$$(\mathrm{Ad}_{V_2})_* = (\Phi_2)_* = (S\Phi_1(\cdot)S^*)_* = (\mathrm{Ad}_S \circ \Phi_1)_* = (\Phi_1)_* = (\mathrm{Ad}_{V_1})_*$$

Ainsi, l'application :

$$\mathrm{Ad}_V : K_*\left(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)\right) \rightarrow K_*\left(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')\right)$$

est un homomorphisme canonique de groupes.

Supposons que la représentation π est \mathcal{U} -admissible. D'après le théorème 5.2.4, il existe donc une isométrie \mathcal{G} -équivariante $V' : E' \rightarrow E$ à support contrôlé. En utilisant le lemme 5.2.5 avec l'application $\Phi = \mathrm{id}_{C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi')}$ et $V \circ V'$ puis l'application $\Phi = \mathrm{id}_{C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)}$ et $V' \circ V$, on obtient :

$$(\mathrm{Ad}_V)_* \circ (\mathrm{Ad}_{V'})_* = \mathrm{id}_{K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E', \pi'))} \quad \text{et} \quad (\mathrm{Ad}_{V'})_* \circ (\mathrm{Ad}_V)_* = \mathrm{id}_{K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi))}$$

d'où l'isomorphisme annoncé. ■

5.3 Quelques résultats de functorialité

Dans cette partie, on introduit la notion de support d'un opérateur $T : E_1 \rightarrow E_2$ où E_i est un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation non-dégénérée $\pi_i : C_0(Z_i) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$ pour $i = 1, 2$. On démontre par la suite quelques résultats analogues au théorème 5.2.4.

Fixons (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et que Z_1, Z_2 deux \mathcal{G} -espaces propres et \mathcal{G} -compacts. Notons ρ_1 (resp. ρ_2) l'application d'ancrage associée à l'action de \mathcal{G} sur Z_1 (resp. Z_2). Posons :

$$Z_1 \times_X Z_2 := \left\{ (z, z') \in Z_1 \times Z_2 \mid \rho_1(z) = \rho_2(z') \right\}.$$

On rappelle que si \mathcal{U}_i est une partie génératrice de la topologie de Z_i , alors $\widehat{\mathcal{U}}_i$ désigne l'ensemble des ouverts π -réguliers pour toute représentation \mathcal{U}_i -régulière $\pi : C_0(Z_i) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$.

Si $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ vérifie $\rho_1 = \rho_2 \circ f$, on notera $\mathrm{id} \times f$ l'application : $\left\{ \begin{array}{ll} Z_2 \times Z_1 & \longrightarrow Z_2 \times Z_2 \\ (z, z') & \longmapsto (z, f(z')) \end{array} \right.$ et

$$\Delta_f := (\mathrm{id} \times f)^{-1}(\Delta_{Z_2}) = \left\{ (f(z), z) \mid z \in Z_1 \right\} \subseteq Z_2 \times_X Z_1.$$

On peut à présent généraliser la notion de support d'un opérateur.

Définition 5.3.1 (Support contrôlé par f). Pour $i = 1, 2$, on considère E_i un $C_0(X)$ -module de Hilbert muni d'une $C_0(X)$ -représentation $\pi_i : C_0(Z_i) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_i)$. Soit $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_1, E_2)$. Le support de T , noté $\mathrm{supp}(T)$, est le complémentaire du sous-ensemble de $Z_2 \times_X Z_1$:

$$\left\{ (z_1, z_2) \in Z_2 \times_X Z_1 \mid \exists \varphi \in C_0(Z_1), \psi \in C_0(Z_2) : \varphi(z_1) \neq 0, \psi(z_2) \neq 0 \text{ et } \pi_2(\psi) \circ T \circ \pi_1(\varphi) = 0 \right\}.$$

Si l'on suppose de plus que Z_1 et Z_2 sont deux \mathcal{G} -espace propres à droite et que les modules de Hilbert E_1, E_2 sont \mathcal{G} -équivariants (ainsi que leurs représentations π_1, π_2 associées), alors on dira que T est à support contrôlé par f si :

$$(\mathrm{id} \times f)(\mathrm{supp}(T)) \in \mathcal{E}_{Z_2}.$$

Nous aurons pour la suite besoin du résultat suivant.

Lemme 5.3.2. Soient $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ une application et A un sous-ensemble de $Z_2 \times Z_2$. Alors :

- (i) on a l'inclusion dans $Z_2 \times Z_1$: $A \circ \Delta_f \subseteq (\mathrm{id} \times f)^{-1}(A)$.
- (ii) on a l'inclusion dans $Z_2 \times Z_2$: $(\mathrm{id} \times f)\left((\mathrm{id} \times f)^{-1}(A) \circ (f \times f)^{-1}(A)\right) \subseteq A \circ A$.

Proposition 5.3.3. Soient \mathcal{U}_i une partie génératrice de la topologie de Z_i et $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ une application continue, propre, \mathcal{G} -équivariante vérifiant $\rho_1 = \rho_2 \circ f$. Soient E_1 un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U}_1 -régulière π_1 de $C_0(Z_1)$ et E_2 un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U}_2 -admissible π_2 de $C_0(Z_2)$. Supposons qu'il existe un $C_0(X)$ -module E_f muni d'une représentation \mathcal{U}_1 -régulière π_f de $C_0(Z_1)$ tel que :

- (i) pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant W de Δ_{Z_1} , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante de E_1 dans E_f à support dans W ;
- (ii) $f^{-1}(U)$ est π_f -régulier pour tout $U \in \mathcal{U}_2$.

Alors pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U de Δ_{Z_2} , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$V : E_1 \rightarrow E_2 \quad \text{avec} \quad (\text{id} \times f)(\text{supp}(V)) \subseteq U.$$

Démonstration. Fixons U un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de Δ_{Z_2} . D'après la proposition 5.1.1, il existe un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U' de Δ_{Z_2} tel que $U' \circ U' \subseteq U$. Remarquons que l'on peut munir E_f d'une représentation \mathcal{G} -équivariante de $C_0(Z_2)$ en considérant :

$$\pi_f \circ \Phi_f : C_0(Z_2) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E_f) \quad \text{avec} \quad \Phi_f : \begin{cases} C_0(Z_2) & \longrightarrow & C_0(Z_1) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{cases}$$

qui est de plus \mathcal{U}_2 -régulière. En effet, soit $U \in \mathcal{U}_2$. Alors $f^{-1}(U)$ est π_f -régulier, on note p le projecteur dans $\mathcal{L}_{C_0(X)}(E_f)$ associé. Comme $\chi_{f^{-1}(U)} = \chi_U \circ f = \Phi_f(\chi_U)$, alors on a pour tout $x \in X$:

$$p_x = \pi_{f,x}(\chi_{f^{-1}(U)_x}) = \pi_{f,x} \circ \Phi_{f|_{Z_1^x}}(\chi_{U_x}) = (\pi_f \circ \Phi_f)_x(\chi_{U_x}).$$

Donc U est $\pi_f \circ \Phi_f$ -régulier. Par conséquent :

- il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante $V_1 : E_1 \rightarrow E_f$ telle que $\text{supp}(V_1) \subseteq (f \times f)^{-1}(U')$, car $(f \times f)^{-1}(U')$ est un voisinage ouvert \mathcal{G} -invariant contrôlé de Δ_{Z_1} ³⁶ ;
- il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante $V_2 : E_f \oplus E_2 \rightarrow E_2$ telle que $\text{supp}(V_2) \subseteq U'$. En effet, l'existence de cette isométrie est assurée par le théorème 5.2.4 car la représentation $(\pi_f \circ \Phi_f) \oplus \pi_2$ est \mathcal{U}_2 -régulière (en tant que somme de représentations \mathcal{U}_2 -régulières) et π_2 est \mathcal{U}_2 -admissible.

Notons i l'injection de E_f dans $E_f \oplus E_2$ et considérons l'isométrie $V := V_2 \circ i \circ V_1 : E_1 \rightarrow E_2$:

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{V_1} & E_f & \xrightarrow{i} & E_f \oplus E_2 \\ & \searrow V & & & \downarrow V_2 \\ & & & & E_2 \end{array}$$

Le support de l'injection i est un sous-ensemble de $Z_1 \times_X Z_2$. Montrons que son support est inclus dans Δ_f .

Soit $(z_1, z_2) \in Z_1 \times_X Z_2$ tel que $z_2 \neq f(z_1)$. Puisque z_2 et $f(z_1)$ sont deux éléments distincts dans Z_2 , alors il existe deux fonctions continues à supports compacts $\varphi : Z_2 \rightarrow [0; 1]$ et $\psi : Z_2 \rightarrow [0; 1]$ telles que :

$$\psi(z_2) \neq 0, \quad \varphi(f(z_1)) \neq 0, \quad \psi\varphi = 0.$$

Posons $\tilde{\varphi} := \varphi \circ f : Z_1 \rightarrow [0; 1]$ qui est continue à support compact. Alors $\tilde{\varphi}(z_1) \neq 0$ et pour tout $z \in Z_1$:

$$((\psi \circ f)\tilde{\varphi})(z) = \psi(f(z))\varphi(f(z)) = (\psi\varphi)(f(z)) = 0$$

36. Si $K \subseteq Z_2$ est compact, alors on vérifie immédiatement que $(f \times f)^{-1}((K \times K) \cdot \mathcal{G}) \subseteq (K' \times K') \cdot \mathcal{G}$ où $K' := f^{-1}(K) \subseteq Z_1$ est compact car f est propre.

Alors :

$$\begin{aligned}
 \left((\pi_f \circ \Phi_f) \oplus \pi_2 \right) (\psi) \circ i \circ \pi_f(\tilde{\varphi}) &= (\pi_f \circ \Phi_f)(\psi) \circ \pi_f(\tilde{\varphi}) \\
 &= \pi_f(\psi \circ f) \circ \pi_f(\tilde{\varphi}) \\
 &= \pi_f((\psi \circ f)\tilde{\varphi}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Donc $(z_1, z_2) \notin \text{supp}(i)$, ce qui prouve que $\text{supp}(i) \subseteq \Delta_f$. En appliquant le lemme 5.3.2 à $A = U'$, on obtient :

$$\text{supp}(V) \subseteq U' \circ \Delta_f \circ (f \times f)^{-1}(U') \subseteq (\text{id} \times f)^{-1}(U') \circ (f \times f)^{-1}(U'),$$

puis, en composant cette inclusion par $(\text{id} \times f)$:

$$(\text{id} \times f)(\text{supp}(V)) \subseteq (\text{id} \times f)\left((\text{id} \times f)^{-1}(U') \circ (f \times f)^{-1}(U')\right) \subseteq U' \circ U' \subseteq U.$$

■

De la proposition 5.3.3, on déduit deux corollaires :

- le premier affirme que si E_f est muni d'une représentation admissible, on peut se dispenser de l'hypothèse (i) ;
- le deuxième permet de se dispenser de l'existence du module E_f si on a $f^{-1}(\mathcal{U}_2) \subseteq \widehat{\mathcal{U}_1}$.

Corollaire 5.3.4. Soient \mathcal{U}_i une partie génératrice de la topologie de Z_i et $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ une application continue, propre, \mathcal{G} -équivariante vérifiant $\rho_1 = \rho_2 \circ f$. Soient E_1 un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U}_1 -régulière π_1 de $C_0(Z_1)$ et E_2 un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U}_2 -admissible π_2 de $C_0(Z_2)$. Supposons qu'il existe un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant E_f muni d'une représentation \mathcal{U}_1 -admissible π_f de $C_0(Z_1)$ telles que :

$$\forall U \in \mathcal{U}_2, \quad f^{-1}(U) \text{ est } \pi_f\text{-régulier.}$$

Alors pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U de Δ_{Z_2} , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$V : E_1 \rightarrow E_2 \quad \text{avec} \quad (\text{id} \times f)(\text{supp}(V)) \subseteq U.$$

Démonstration. Soit W un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de Δ_{Z_1} . Puisque π_1 est \mathcal{U}_1 -régulière et π_f est \mathcal{U}_1 -admissible, alors d'après le théorème 5.2.4, il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante de E_1 dans E_f à support dans W . On conclut en appliquant la proposition 5.3.3. ■

Corollaire 5.3.5. Soient \mathcal{U}_i une partie génératrice de la topologie de Z_i et $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ une application continue, propre, \mathcal{G} -équivariante vérifiant $\rho_1 = \rho_2 \circ f$. Soient E_1 un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U}_1 -régulière π_1 de $C_0(Z_1)$ et E_2 un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant muni d'une représentation \mathcal{U}_2 -admissible π_2 de $C_0(Z_2)$. Supposons que :

$$f^{-1}(\mathcal{U}_2) \subseteq \widehat{\mathcal{U}_1}.$$

Alors pour tout voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant U de Δ_{Z_2} , il existe une isométrie \mathcal{G} -équivariante :

$$V : E_1 \rightarrow E_2 \quad \text{avec} \quad (\text{id} \times f)(\text{supp}(V)) \subseteq U.$$

Démonstration. Soit W un voisinage ouvert contrôlé \mathcal{G} -invariant de Δ_{Z_1} . On applique la proposition 5.3.3, avec $E_f = E_1$ et l'identité qui est une isométrie \mathcal{G} -équivariante à support dans $\Delta_{Z_1} \subseteq W$. ■

Les résultats de functorialité précédent pourraient s'appliquer au cas des \mathcal{G} -complexes simpliciaux.

Définition 5.3.6 (Application simplicial). Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample. Pour $i = 1, 2$, on considère (Y_i, Δ_i) un \mathcal{G} -complexe simplicial d'application d'ancrage $\rho_i : Y_i \rightarrow X$. Soit $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ une application continue et propre. On dit que f est une *application simplicial* si elle vérifie :

(i) $f(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$;

(ii) $\rho_2 \circ f = \rho_1$.

Une application simpliciale $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ induit une application $\tilde{f} : |\Delta_1| \rightarrow |\Delta_2|$ entre les réalisations géométriques, qui est défini pour tout $\mu := \sum_{y \in \rho^{-1}(\rho(\mu))} \lambda_y(\mu) \delta_y \in |\Delta_1|$:

$$\tilde{f}(\mu) = \sum_{y \in \rho^{-1}(\rho(\mu))} \lambda_y(\mu) \delta_{f(y)} \in |\Delta_2|.$$

En notant \mathcal{S}_i la partie génératrice de la topologie de $|\Delta_i|$ et $\pi : C_0(|\Delta_1|) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ la représentation \mathcal{S}_1 -admissible construite dans la démonstration du théorème 4.4.3, on pourrait démontrer, dans un développement futur, que :

$$\forall W \in \mathcal{S}_2, \quad \tilde{f}^{-1}(W) \text{ est } \pi\text{-régulier.}$$

Chapitre 6

Applications d'indices

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la construction des groupes de KK -théorie équivariante ainsi que la construction de Kasparov de l'application d'assemblage de Baum-Connes pour un groupoïde. Après avoir identifié le produit croisé $k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}$ avec l'algèbre de Roe équivariante de \mathcal{G} (voir proposition 6.1.11), on construit une isométrie \mathcal{G} -équivariante à support contrôlé entre les $C_0(X)$ -modules de Hilbert E et $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ (voir lemme 6.3.4). Enfin, nous établissons un lien entre l'application d'indice coarse \mathcal{G} -équivariant et l'application d'assemblage de Baum-Connes pour un groupoïde dans le cas de cycles admissibles (voir théorème 6.3.6).

Sauf mention contraire, \mathcal{G} désignera dans la suite un groupoïde de base X que l'on supposera étale et σ -compact.

6.1 Rappels de KK -théorie équivariante

Dans son article [32], Pierre-Yves Le Gall généralise les groupes de KK -théorie équivariante au cadre des groupoïdes. On rappelle ici plusieurs résultats liés à cette construction.

Définition 6.1.1. Soient A et B deux \mathcal{G} -algèbres. Un (A, B) -bimodule \mathcal{G} -équivariant (pair) est la donnée d'un couple (E, π) tel que :

- E est un B -module à droite de Hilbert \mathcal{G} -équivariant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gradué (c'est-à-dire $E = E_0 \oplus E_1$),
- $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(E)$ est un $*$ -homomorphisme \mathcal{G} -équivariant pair c'est-à-dire que pour tout $a \in A$, $\pi(a) = \pi_0(a) \oplus \pi_1(a)$ où $\pi_0(a) \in \mathcal{L}_B(E_0)$ et $\pi_1(a) \in \mathcal{L}_B(E_1)$.

Définition 6.1.2. Soient A et B deux \mathcal{G} -algèbres. Un cycle \mathcal{G} -équivariant (pair) sur (A, B) est la donnée d'un triplet (E, π, T) où :

- (E, π) est un (A, B) -bimodule \mathcal{G} -équivariant ;
- T est un opérateur adjoignable dans $\mathcal{L}_B(E)$ de degré impair c'est-à-dire que $T = \begin{bmatrix} 0 & T_1 \\ T_0 & 0 \end{bmatrix}$ où $T_1 \in \mathcal{L}_B(E_1, E_0)$ et $T_0 \in \mathcal{L}_B(E_0, E_1)$ et vérifie de plus :
 - $\pi(a)(T - T^*)$, $\pi(a)(T^2 - 1)$, $[\pi(a), T] \in k_B(E)$ pour tout $a \in A$;
 - si V désigne l'action de \mathcal{G} sur E , alors pour tout $f \in r^*A \simeq \Gamma_0(\mathcal{G}, r^*A)$, l'application :

$$\gamma \mapsto \pi_{r(\gamma)}(f(\gamma)) (T_{r(\gamma)} - V_\gamma \circ T_{s(\gamma)} \circ V_\gamma^*)$$

définit un élément de $\Gamma_0(\mathcal{G}, r^*K_B(E)) \simeq r^*(k_B(E))$.

L'ensemble des (classes d'isomorphismes de) cycles \mathcal{G} -équivariants pairs sur (A, B) , noté $E^{\mathcal{G}}(A, B)$, est un semi-groupe abélien pour la somme directe de cycles :

$$(E, \pi, T) + (E', \pi', T') := (E \oplus E', \pi \oplus \pi', T \oplus T').$$

Exemple 6.1.3. Si $\pi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme \mathcal{G} -équivariant entre deux \mathcal{G} -algèbres, alors en utilisant l'identification $B \simeq k_B(B)$, le triplet $(B, \pi, 0)$ définit un cycle \mathcal{G} -équivariant sur (A, B) .

Soient A, B et C trois \mathcal{G} -algèbres et $\varphi : B \rightarrow C$ un $*$ -homomorphisme \mathcal{G} -équivariant. Alors φ induit une application :

$$\varphi_* : \begin{cases} E^{\mathcal{G}}(A, B) & \longrightarrow & E^{\mathcal{G}}(A, C) \\ (E, \pi, T) & \longmapsto & (E \otimes_{\varphi} C, \pi \otimes \text{id}_C, T \otimes \text{id}_C) \end{cases} .$$

Nous allons munir $E^{\mathcal{G}}(A, B)$ d'une relation d'équivalence qui sera la relation d'homotopie. Pour tout $t \in [0; 1]$, on note $\text{ev}_t : C([0; 1], B) \rightarrow B$ l'application évaluation en t .

Définition 6.1.4 ([32]). On dit que deux cycles x_0 et x_1 dans $E^{\mathcal{G}}(A, B)$ sont *homotopes*, noté $x_0 \sim_h x_1$, s'il existe un élément $x \in E^{\mathcal{G}}(A, C([0; 1], B))$ tel que $\text{ev}_{0,*}(x) \simeq x_0$ et $\text{ev}_{1,*}(x) \simeq x_1$. On montre, de la même manière que pour un groupe, que la relation \sim_h définit une relation d'équivalence sur $E^{\mathcal{G}}(A, B)$.

Définition 6.1.5 (Groupe de KK -théorie équivariante, [32]). On note $KK^{\mathcal{G}}(A, B)$, le quotient de $E^{\mathcal{G}}(A, B)$ par la relation d'équivalence \sim_h et la classe d'un élément (E, π, T) dans $KK^{\mathcal{G}}(A, B)$ sera notée $[E, \pi, T]$. C'est un groupe abélien pour la loi induite par la somme directe des cycles. Lorsque le groupoïde \mathcal{G} est le groupe trivial, on le note $KK(A, B)$.

Remarque 6.1.6. D'après l'exemple 6.1.3, tout $*$ -homomorphisme \mathcal{G} -équivariant $f : A \rightarrow B$ entre deux \mathcal{G} -algèbres définit donc une classe $[B, f, 0]$ dans $KK^{\mathcal{G}}(A, B)$ que l'on notera pour simplifier $[f] := [B, f, 0]$.

Définition 6.1.7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour toutes \mathcal{G} -algèbres A et B :

$$KK_n^{\mathcal{G}}(A, B) := KK^{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(\mathbb{R}^n), B).$$

On énonce à présent un résultat de functorialité en KK -théorie équivariante :

Proposition 6.1.8 (Functorialité). Soient A_1, A_2 et B trois \mathcal{G} -algèbres. On considère $\Psi : A_1 \rightarrow A_2$ un $*$ -homomorphisme \mathcal{G} -équivariant.

(i) $KK^{\mathcal{G}}$ est un foncteur contravariant en la première variable et Ψ induit un morphisme de groupes :

$$\Psi_* : \begin{cases} KK_*^{\mathcal{G}}(A_2, B) & \longrightarrow & KK_*^{\mathcal{G}}(A_1, B) \\ [E, \pi, T] & \longmapsto & [E, \pi \circ \varphi, T] \end{cases} .$$

(ii) $KK^{\mathcal{G}}$ est un foncteur covariant en la seconde variable et Ψ induit un morphisme de groupes :

$$\Psi_* : \begin{cases} KK_*^{\mathcal{G}}(B, A_1) & \longrightarrow & KK_*^{\mathcal{G}}(B, A_2) \\ [E, \pi, T] & \longmapsto & [E \otimes_{\Psi} A_2, \pi \otimes \text{id}_{A_2}, T \otimes \text{id}_{A_2}] \end{cases} .$$

Le résultat suivant donne l'existence d'un produit de Kasparov (voir [32]).

Théorème 6.1.9 (Produit de Kasparov). Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale à base d'ouvert dénombrable. Soient A, B et C trois \mathcal{G} -algèbres séparables. Alors il existe une application bilinéaire appelée produit de Kasparov :

$$\otimes_B : \begin{cases} KK_n^{\mathcal{G}}(A, B) \times KK_m^{\mathcal{G}}(B, C) & \longrightarrow & KK_{n+m}^{\mathcal{G}}(A, C) \\ (x, y) & \longmapsto & x \otimes_B y \end{cases}$$

qui est associative c'est-à-dire que si D est une autre \mathcal{G} -algèbre avec $x \in KK^{\mathcal{G}}(A, B)$, $y \in KK^{\mathcal{G}}(B, C)$ et $z \in KK^{\mathcal{G}}(C, D)$, alors :

$$(x \otimes_B y) \otimes_C z = x \otimes_B (y \otimes_C z).$$

Le produit de Kasparov est de plus distributif par rapport à la somme.

Les groupes de KK -théorie équivariante et non équivariante (lorsque le groupoïde est le groupe trivial) sont reliés par un homomorphisme appelé morphisme de descente. Détaillons cette construction. Soient A et B deux \mathcal{G} -algèbres et (E, π, T) un cycle dans $E^{\mathcal{G}}(A, B)$.

- Notons β l'action de \mathcal{G} sur B . L'espace des sections continues à support compact $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ est muni d'un produit scalaire à valeurs dans $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B})$ donné pour tous $f, g \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ par :

$$\langle f, g \rangle_{B \rtimes_r \mathcal{G}}(\gamma) := \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \beta_{\eta^{-1}} \left(\langle f(\eta), g(\eta\gamma) \rangle_{B_{r(\eta)}} \right),$$

ainsi que d'une structure de $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B})$ -module à droite donnée pour tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$, $\varphi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(f \cdot \varphi)(\gamma) := \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} f(\eta) \beta_{\eta}(\varphi(\eta^{-1}\gamma)).$$

On montre que $\langle f, g \rangle_{B \rtimes_r \mathcal{G}}$ et $f \cdot \varphi$ définissent bien des éléments dans $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B})$ et $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ respectivement.

Définition 6.1.10 (Produit croisé d'un module par un groupoïde). On note $E \rtimes_r \mathcal{G}$ le $B \rtimes_r \mathcal{G}$ -module de Hilbert obtenu en complétant $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ pour le produit scalaire défini précédemment.

- On montre que l'application $\gamma \in \mathcal{G} \mapsto T_{r(\gamma)}(f(\gamma))$ définit bien un élément dans $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$. On note alors $T_{\mathcal{G}}$ l'opérateur de $\mathcal{L}_{B \rtimes_r \mathcal{G}}(E \rtimes_r \mathcal{G})$ défini pour tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(T_{\mathcal{G}}f)(\gamma) := T_{r(\gamma)}(f(\gamma)).$$

- Notons $V : s^*E \rightarrow r^*E$ l'action de \mathcal{G} sur E . L'application $\pi_{\mathcal{G}} : A \rtimes_r \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}_{B \rtimes_r \mathcal{G}}(E \rtimes_r \mathcal{G})$ définie pour tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A})$, $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\left(\pi_{\mathcal{G}}(f)(\xi) \right)(\gamma) := \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \pi_{r(\eta)}(f(\eta)) V_{\eta}(\xi(\eta^{-1}\gamma))$$

est bien définie et on montre que c'est une représentation de $A \rtimes_r \mathcal{G}$.

Dans la suite, si B désigne une bissection ouverte de \mathcal{G} , on notera $V|_B : E|_{s(B)} \rightarrow E|_{r(B)}$ la restriction de l'unitaire V à la bissection B (voir la démonstration de la proposition 3.1.7 pour la construction).

Proposition 6.1.11. En gardant les notations précédentes, on a l'isomorphisme de C^* -algèbres :

$$k_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G}) \simeq k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}.$$

Démonstration. On rappelle que $k_{C_0(X)}(E)$ est une $C_0(X)$ -algèbre (voir lemme 1.3.52). On note $\mathcal{K}(E)$ son fibré s.c.s. c'est-à-dire que $\mathcal{K}(E) := \bigsqcup_{x \in X} k(E_x)$.

- L'injection $\pi : k_{C_0(X)}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ induit une application encore injective au niveau du produit croisé $\pi_{\mathcal{G}} : k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G})$ donnée par le produit de convolution c'est-à-dire pour tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{K}(E))$, $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$\left(\pi_{\mathcal{G}}(f)(\xi) \right)(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} f(\eta) \circ V_{\eta}(\xi(\eta^{-1}\gamma)).$$

- Montrons que $\pi_{\mathcal{G}}$ est bien à valeurs dans $k_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G})$. On fixe $f \in C_c(\mathcal{G})$ telle que $\text{supp}(f) \subseteq U$ où $U \subseteq \mathcal{G}$ est une bissection ouverte et $e, e' \in E|_{r(U)}$. Il suffit de démontrer que :

$$\pi_{\mathcal{G}}(h) \in k_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G}) \quad \text{avec} \quad h : \gamma \mapsto f(\gamma) [\theta_{e, e'}]_{r(\gamma)}.$$

Soit $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact dans $s(U)$ et valant 1 sur le compact $s(\text{supp}(f))$. Soient φ_1 et φ_2 les fonctions de $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ définies pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\varphi_1(\gamma) = f(\gamma)e(r(\gamma)) \quad \text{et} \quad \varphi_2(\gamma) = \varphi^*(\gamma)V_\gamma\left([V_{|U^{-1}}(e')]_{s(\gamma)}\right).$$

On va montrer que $\pi_{\mathcal{G}}(h) = \theta_{\varphi_1, \varphi_2}$. Pour cela, fixons $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$. Puisque U est une bissection de \mathcal{G} , alors $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap U$ est de cardinal au plus 1. Si cette intersection est vide, alors on a clairement $(\pi_{\mathcal{G}}(h)(\xi))(\gamma) = 0 = (\theta_{\varphi_1, \varphi_2}(\xi))(\gamma)$. Sinon, notons a l'unique élément de $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap U$. Comme a est en particulier dans U , on a :

$$V_{1_{s(a)}}\left([V_{|U^{-1}}(e')]_{s(a)}\right) = V_{1_{s(a)}} \circ V_{a^{-1}}(e'(r(a))) = V_{a^{-1}}(e'(r(a))) \quad \text{et} \quad \varphi^*(1_{s(a)}) = 1$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left\langle e'(r(a)), V_a(\xi(a^{-1}\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}} &= \left\langle V_{a^{-1}}(e'(r(a))), \xi(a^{-1}\gamma) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\langle \varphi^*(1_{s(a)})V_{1_{s(a)}}\left([V_{|U^{-1}}(e')]_{s(a)}\right), \xi(a^{-1}\gamma) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\langle \varphi_2(1_{s(a)}), \xi(a^{-1}\gamma) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\langle \varphi_2, \xi \right\rangle_{C_r^*(\mathcal{G})}(a^{-1}\gamma) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathcal{G}}(h)(\xi))(\gamma) &= h(a) \circ V_a(\xi(a^{-1}\gamma)) \\ &= f(a)e(r(a)) \left\langle e'(r(a)), V_a(\xi(a^{-1}\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \varphi_1(a) \left\langle \varphi_2, \xi \right\rangle_{C_r^*(\mathcal{G})}(a^{-1}\gamma) \\ &= (\theta_{\varphi_1, \varphi_2}(\xi))(\gamma). \end{aligned}$$

• Démontrons à présent la surjectivité de $\pi_{\mathcal{G}}$. Pour cela, il suffit de trouver un antécédent par $\pi_{\mathcal{G}}$ d'une fonction dans $k_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G})$ de la forme $\theta_{\varphi_1, \varphi_2}$ où φ_1 et φ_2 sont deux éléments dans $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ de la forme :

$$\varphi_1(\gamma) = f(\gamma)e(r(\gamma)) \quad \text{et} \quad \varphi_2(\gamma) = g(\gamma)e'(r(\gamma)) \quad \gamma \in \mathcal{G}$$

où $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ telles que $\text{supp}(f) \subseteq U_1$, $\text{supp}(g) \subseteq U_2$ avec U_1, U_2 deux bissections ouvertes dans \mathcal{G} telles que $s(U_2) = s(U_1)$ et $e \in E_{|r(U_1)}$, $e' \in E_{r(U_2)}$. Nous allons montrer que l'antécédent recherché est la fonction $h \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ définie pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$h(\gamma) = (f \star g^*)(\gamma) \left[\theta_{e, V_{|U_1 \cdot U_2^{-1}}(e')} \right]_{r(\gamma)}.$$

Soient $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$. Puisque $U_1 \cdot U_2^{-1}$ et U_1 sont deux bissections de \mathcal{G} , alors $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap U_1 \cdot U_2^{-1}$ et $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap U_1$ sont de cardinaux au plus 1. Si l'une des intersections est vide, le résultat est clair. Sinon, on note a l'unique élément de $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap U_1 \cdot U_2^{-1}$ et b l'unique élément de $\mathcal{G}^{r(\gamma)} \cap U_1$. Dans ce cas, on a $\mathcal{G}_{s(b)} \cap U_2 = \{a^{-1}b\}$, donc :

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathcal{G}}(h)(\xi))(\gamma) &= f(b)\bar{g}(a^{-1}b)e(r(a)) \left\langle V_a(e'(s(a))), V_a(\xi(a^{-1}\gamma)) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= f(b)\bar{g}(a^{-1}b)e(r(b)) \left\langle e'(s(a)), \xi(a^{-1}\gamma) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= (\theta_{\varphi_1, \varphi_2}(\xi))(\gamma). \end{aligned}$$

■

Proposition 6.1.12 (Morphisme de descente). Soient A et B deux \mathcal{G} -algèbres. L'application appelée *morphisme de descente* :

$$j_{\mathcal{G}} : \begin{cases} KK_*^{\mathcal{G}}(A, B) & \longrightarrow & KK_*^{\mathcal{G}}(A \rtimes_r \mathcal{G}, B \rtimes_r \mathcal{G}) \\ [E, \pi, T] & \longmapsto & [E \rtimes_r \mathcal{G}, \pi_{\mathcal{G}}, T_{\mathcal{G}}] \end{cases}$$

est un homomorphisme de groupes abéliens $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradués.

Définition 6.1.13. Soient A, B deux \mathcal{G} -algèbres et (E, π, T) un cycle dans $E^{\mathcal{G}}(A, B)$. On dit qu'un opérateur $S \in \mathcal{L}_B(E)$ est une *perturbation compacte de T* si pour tout $a \in A$, les opérateurs :

$$\pi(a) \circ (S - T) \quad \text{et} \quad (S - T) \circ \pi(a)$$

sont dans $k_B(E)$. Par conséquent, si (E, π, T) et (E, π, S) sont deux cycles dans $E^{\mathcal{G}}(A, B)$ avec S une perturbation compacte de T , alors $(E, \pi, T) \sim_h (E, \pi, S)$ via le cycle $(C([0; 1], E), \pi, (tT + (1-t)S)_{t \in [0; 1]})$ dans $E^{\mathcal{G}}(A, C([0; 1], B))$.

6.2 Application d'assemblage de Baum-Connes

Définition 6.2.1. Un *espace classifiant pour les actions propres de \mathcal{G}* est un \mathcal{G} -espace propre, noté $\underline{E}\mathcal{G}$, tel que pour tout \mathcal{G} -espace propre Z , il existe une application continue \mathcal{G} -équivariante $Z \rightarrow \underline{E}\mathcal{G}$, et deux telles applications continues \mathcal{G} -équivariantes de Z dans $\underline{E}\mathcal{G}$ sont \mathcal{G} -homotopes.

Remarque 6.2.2. Un tel espace $\underline{E}\mathcal{G}$ existe (voir [62]) et est unique seulement à homotopie \mathcal{G} -équivariante près.

Soient B une \mathcal{G} -algèbre, Z et Z' deux \mathcal{G} -espaces propres et \mathcal{G} -compacts. Soit $\varphi : Z \rightarrow Z'$ une application continue et \mathcal{G} -équivariante. Alors $\varphi : Z \rightarrow Z'$ est propre (voir [10] p. 107) et induit un $*$ -homomorphisme \mathcal{G} -équivariant :

$$\varphi^* : \begin{cases} C_0(Z') & \longrightarrow & C_0(Z) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{cases}$$

puis un homomorphisme de groupes :

$$[\varphi^*] \otimes \cdot : \begin{cases} KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z), B) & \longrightarrow & KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z'), B) \\ \alpha & \longmapsto & [\varphi^*] \otimes \alpha \end{cases} .$$

En particulier, si Z et Z' sont deux \mathcal{G} -espaces \mathcal{G} -compacts tels que $Z \subseteq Z' \subseteq \underline{E}\mathcal{G}$ et φ l'inclusion de Z dans Z' , alors on peut définir sans ambiguïté la limite inductive (ordonnée pour l'inclusion) dans la définition suivante.

Définition 6.2.3 (K -théorie topologique). Soit B une \mathcal{G} -algèbre. La *K -théorie topologique de \mathcal{G} à coefficients dans B* , notée $K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}, B)$, est définie par :

$$K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}, B) := \varinjlim KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z), B),$$

où la limite inductive est prise sur les sous-espaces Z de $\underline{E}\mathcal{G}$ qui sont \mathcal{G} -compacts.

Proposition 6.2.4. Soit (\mathcal{G}, X) un groupoïde étale et propre tel que l'espace des orbites X/\mathcal{G} est compact. Soit $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction cut-off continue à support compact sur \mathcal{G} .³⁷ Alors l'application :

$$p_c : \begin{cases} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \gamma & \longmapsto & \sqrt{c(s(\gamma))c(r(\gamma))} \end{cases}$$

définit une projection dans $C_r^*(\mathcal{G})$ dont la classe³⁸ $[p_c] \in KK(\mathbb{C}, C_r^*(\mathcal{G}))$ ne dépend pas de la fonction cut-off choisie c .

37. La notion de fonction cut-off a été introduite dans la définition 1.3.13 et son existence dans la proposition 1.3.14.

38. Le $*$ -homomorphisme $P_c : \mathbb{C} \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}), \lambda \mapsto \lambda p_c$ définit une classe $[C_r^*(\mathcal{G}), P_c, 0]$ dans $KK(\mathbb{C}, C_r^*(\mathcal{G}))$ que l'on note $[p_c]$.

Démonstration. Puisque $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction cut-off à support compact sur \mathcal{G} , alors d'après le point (ii) de la définition 1.3.13, l'ensemble $\text{supp}(c \circ s) \cap r^{-1}(\text{supp}(c))$ est compact et on montre facilement que :

$$\text{supp}(p_c) \subseteq \text{supp}(c \circ s) \cap r^{-1}(\text{supp}(c)),$$

donc $p_c \in C_c(\mathcal{G})$. Soit $\gamma \in \mathcal{G}$, on a :

$$p_c^*(\gamma) = \overline{p_c(\gamma^{-1})} = p_c(\gamma^{-1}) = \sqrt{c(s(\gamma^{-1}))c(r(\gamma^{-1}))} = \sqrt{c(r(\gamma))c(s(\gamma))} = p_c(\gamma),$$

et comme $\sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} c(s(\eta)) = 1$, alors le produit de convolution de p_c par lui-même donne pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} p_c \star p_c(\gamma) &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} p_c(\eta)p_c(\eta^{-1}\gamma) \\ &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sqrt{c(s(\eta))c(r(\eta))}\sqrt{c(s(\eta^{-1}\gamma))c(r(\eta^{-1}\gamma))} \\ &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sqrt{c(s(\eta))c(r(\gamma))}\sqrt{c(s(\gamma))c(s(\eta))} \\ &= \sqrt{c(s(\gamma))c(r(\gamma))} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} c(s(\eta)) \\ &= \sqrt{c(s(\gamma))c(r(\gamma))} \\ &= p_c(\gamma), \end{aligned}$$

donc p_c est une projection dans $C_r^*(\mathcal{G})$. Soient c_1 et c_2 deux fonctions cut-off sur \mathcal{G} à support compact. Posons pour tout $t \in [0; 1]$:

$$c_t := tc_1 + (1-t)c_2.$$

Alors $(c_t)_{t \in [0;1]}$ définit un chemin continu de fonctions cut-off sur \mathcal{G} à support compact reliant c_1 et c_2 . Donc $(p_{c_t})_{t \in [0;1]}$ définit un chemin continu de projections dans $C_r^*(\mathcal{G})$ reliant p_{c_1} et p_{c_2} et alors on a l'égalité $[p_{c_1}] = [p_{c_2}]$. Donc la classe du projecteur p_c ne dépend pas de la fonction cut-off choisie. ■

Soient Z un \mathcal{G} -espace propre et \mathcal{G} -compact dans $\underline{E}\mathcal{G}$ et B une \mathcal{G} -algèbre. Par définition, le groupoïde de transformation $Z \rtimes \mathcal{G}$ est propre. Soit $c : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction cut-off sur $Z \rtimes \mathcal{G}$. En appliquant la proposition précédent avec le groupoïde $Z \rtimes \mathcal{G}$, on obtient l'existence d'une projection p_c dans $C_r^*(Z \rtimes \mathcal{G})$ dont la classe de K -théorie $[p_c]$ ne dépend pas de c . On a les isomorphismes :

$$K_*(B \rtimes_r \mathcal{G}) \simeq KK_*(\mathbb{C}, B \rtimes_r \mathcal{G}) \quad \text{et} \quad C_0(Z) \rtimes_r \mathcal{G} \simeq C_0(Z \rtimes_r \mathcal{G}).$$

Une fois ces identifications faites, on définit l'application :

$$\mu_{\mathcal{G}, B}^{(Z)} : KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z), B) \longrightarrow K_*(B \rtimes_r \mathcal{G})$$

comme étant la composée des applications :

$$KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z), B) \xrightarrow{j_{\mathcal{G}}} KK_*(C_0(Z) \rtimes_r \mathcal{G}, B \rtimes_r \mathcal{G}) \xrightarrow{[p_c] \otimes \cdot} K_*(B \rtimes_r \mathcal{G})$$

où $j_{\mathcal{G}}$ est le morphisme de descente de Kasparov et $[p_c] \otimes \cdot$ est le produit de Kasparov avec $[p_c]$.

Soient Z, Z' deux \mathcal{G} -espaces propres et \mathcal{G} -compacts et $\varphi : Z \rightarrow Z'$ une application continue et \mathcal{G} -équivariante. Soit $c' : Z' \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction cut-off sur $Z' \rtimes \mathcal{G}$. Considérons l'application :

$$\varphi^* \rtimes_r \mathcal{G} : \begin{cases} C_0(Z' \rtimes \mathcal{G}) & \longrightarrow & C_0(Z \rtimes \mathcal{G}) \\ f & \longmapsto & [(z, \gamma) \mapsto f(\varphi(z), \gamma)] \end{cases} .$$

Alors on vérifie que $c := c' \circ \varphi : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ est encore une fonction cut-off sur $Z \rtimes \mathcal{G}$ telle que :

$$p_{c'} = (\varphi^* \rtimes_r \mathcal{G})(p_c)$$

ce qui permet d'en déduire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z), B) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}}} & KK_*(C_0(Z) \rtimes_r \mathcal{G}, B \rtimes_r \mathcal{G}) & \xrightarrow{[p_c] \otimes \cdot} & K_*(B \rtimes_r \mathcal{G}) \\
[\varphi^*] \otimes \cdot \downarrow & & [\varphi^* \rtimes_r \mathcal{G}] \otimes \cdot \downarrow & & \downarrow = \\
KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(Z'), B) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}}} & KK_*(C_0(Z') \rtimes_r \mathcal{G}, B \rtimes_r \mathcal{G}) & \xrightarrow{[p_{c'}] \otimes \cdot} & K_*(B \rtimes_r \mathcal{G})
\end{array}$$

En particulier, on a :

$$\mu_{\mathcal{G}, B}^{(Z)} = \mu_{\mathcal{G}, B}^{(Z')} \circ ([\varphi^*] \otimes \cdot).$$

On peut donc définir sans ambiguïté l'application d'assemblage de Baum-Connes pour un groupoïde.

Définition 6.2.5 (Application d'assemblage de Baum-Connes). L'application d'assemblage de Baum-Connes $\mu_{\mathcal{G}, B} : K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}, B) \rightarrow K_*(B \rtimes_r \mathcal{G})$ est l'application définie pour tout $\alpha \in K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}, B)$ par :

$$\mu_{\mathcal{G}, B}(\alpha) := \varinjlim \mu_{\mathcal{G}, B}^{(Z)}(\alpha),$$

où la limite inductive est prise sur tous les \mathcal{G} -espaces propres et \mathcal{G} -compacts dans $\underline{E}\mathcal{G}$.

Remarque 6.2.6. Soit $\alpha := [E, \pi, T] \in KK^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X))$ avec π une représentation \mathcal{U} -admissible. D'après la proposition 6.1.11, on a $C_r^*(\mathcal{G}) \sim_M k_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G}) \simeq k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}$ où \sim_M désigne l'équivalence de Morita. On en déduit que $\mathcal{L}_{C_r^*(\mathcal{G})}(E \rtimes_r \mathcal{G})$ s'identifie avec les multiplicateurs de $k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}$, ce qui permet d'obtenir la description du cycle $\mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(\alpha)$ suivante :

$$\mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(\alpha) = \left[k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}, 1, \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ T_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) + 1 - \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \right].$$

Remarque 6.2.7. Notons $P_K(\mathcal{G})$ la réalisation géométrique du complexe de Rips $(\mathcal{G}, \Delta_K(\mathcal{G}))$ (voir 2.3.11) associée au compact $K \subseteq \mathcal{G}$ c'est-à-dire l'ensemble des mesures μ dans $P(\mathcal{G})$ telles qu'il existe un (unique) élément $x \in X$ pour lequel $\text{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{G}^x$ et $\gamma\eta^{-1} \in K$ pour tous $\gamma, \eta \in \text{supp}(\mu)$. On munit $P_K(\mathcal{G})$ de la topologie \star -faible. Dans son article [61], Jean-Louis Tu démontre que l'action de \mathcal{G} sur $P_K(\mathcal{G})$ est propre et \mathcal{G} -compacte (proposition 3.1). Il démontre aussi (lemme 3.2) que pour tout espace \mathcal{G} -espace Z propre et \mathcal{G} -compact, il existe un compact $K \subseteq \mathcal{G}$ et une application continue \mathcal{G} -équivariante $Z \rightarrow P_K(\mathcal{G})$ (qui est unique à homotopie près, quitte à composer avec une inclusion de la forme $P_K(\mathcal{G}) \rightarrow P_{K'}(\mathcal{G})$ où $K' \subseteq \mathcal{G}$ est compact). Ces deux résultats permettent de démontrer que la K -théorie topologique de \mathcal{G} à coefficients dans une \mathcal{G} -algèbre B peut se calculer à partir de l'espace $P_K(\mathcal{G})$:

$$K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}, B) \simeq \varinjlim_{K \subseteq \mathcal{G} \text{ compact}} KK_*^{\mathcal{G}}(C_0(P_K(\mathcal{G})), B).$$

6.3 Indice coarse

Dans toute cette partie, on fixe :

- (\mathcal{G}, X) un groupoïde ample et σ -compact ;
- Z un \mathcal{G} -espace propre à droite et \mathcal{G} -compact muni de sa \mathcal{G} -structure coarse définie dans la proposition 4.3.2 ;
- \mathcal{U} une partie génératrice de la topologie Z ;

et on considère aussi l'ensemble des cycles \mathcal{U} -admissibles :

$$E_{\mathcal{U}\text{-adm}}^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X)) := \left\{ (E, \pi, T) \in E^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X)) \mid \pi \text{ est } \mathcal{U}\text{-admissible} \right\}.$$

Lemme 6.3.1 ([61], lemme 3.6). Soit (E, π, T) un cycle dans $E^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X))$ avec T auto-adjoint et $c : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction cut-off à support compact. Alors il existe un unique opérateur $T' \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$ tel que pour tout $x \in X$:

$$T'_x = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} V_\gamma \circ \pi_{s(\gamma)}(c_{|Z_{s(\gamma)}}^{1/2}) \circ T_{s(\gamma)} \circ \pi_{s(\gamma)}(c_{|Z_{s(\gamma)}}^{1/2}) \circ V_{\gamma^{-1}}$$

de sorte que T' est auto-adjoint, \mathcal{G} -équivariant, à support contrôlé. De plus, T' est une perturbation compacte de T donc vérifie $(T'^2 - 1)\pi(f) \in k_{C_0(X)}(E)$ pour tout $f \in C_0(Z)$.

Dans la suite, on verra T' comme un multiplicateur de $C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi)$ et c'est cet opérateur qui définira le K -cycle dans la définition suivante.

Définition 6.3.2 (Indice coarse \mathcal{G} -équivariant). Le théorème 5.2.6 affirme que si (E, π, T) est un cycle dans $E_{\mathcal{U}\text{-adm}}^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X))$, alors $K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi))$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du couple (E, π) . On peut donc le noter simplement $K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z))$ et définir sans ambiguïté l'application d'indice coarse \mathcal{G} -équivariante sur les cycles admissibles :

$$\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)} : \begin{cases} E_{\text{adm}}^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X)) & \longrightarrow & K_*(C_{\mathcal{G}}^*(Z)) \\ (E, \pi, T) & \longmapsto & [C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi), 1, T'] \end{cases} .$$

Si (E, V) désigne un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant, alors le $C_0(X)$ -module de Hilbert $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ sera muni :

- d'une action \tilde{V} en considérant pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ l'application bien définie :

$$\tilde{V}_\gamma : \begin{cases} \ell^2(\mathcal{G}_{s(\gamma)}, E_{s(\gamma)}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathcal{G}_{r(\gamma)}, E_{r(\gamma)}) \\ \xi & \longmapsto & [\eta \mapsto V_\gamma(\xi(\eta\gamma))] \end{cases} ,$$

- d'une application $\pi' : C_0(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E)$ donnée pour tout $f \in C_0(\mathcal{G})$ et tous $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*E)$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$(\pi'(f)\xi)(\gamma) := f(\gamma)\xi(\gamma).$$

On vérifie que l'application π' est bien définie et est une $C_0(X)$ -représentation \mathcal{G} -équivariante.

Lemme 6.3.3 (Propriété du noyau d'un opérateur). Soient E un $C_0(X)$ -module \mathcal{G} -équivariant d'action V et $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E)$ un opérateur \mathcal{G} -équivariant c'est-à-dire vérifiant pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, $T_{r(\gamma)} \circ \tilde{V}_\gamma = \tilde{V}_\gamma \circ T_{s(\gamma)}$. Supposons que pour tout $x \in X$, il existe une application $k_x : \mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x \rightarrow k(E_x)$ telle que pour tous $\xi \in C_c(\mathcal{G}_x, E_x)$ et $\gamma \in \mathcal{G}_x$:

$$(T_x(\xi))(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}_x} k_x(\gamma, \eta)(\xi(\eta)).$$

Alors pour tous $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\eta \in \mathcal{G}_{s(\gamma)}$:

$$k_{s(\gamma)}(\gamma, \eta) = V_{\gamma^{-1}} \circ k_{r(\gamma)}(r(\gamma), \eta\gamma^{-1}) \circ V_\gamma.$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Commençons par remarquer que l'on a pour tous $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_x$ et $v \in E_x$:

$$T_x(\delta_\eta v)(\gamma) = (k_x(\gamma, \eta))(v),$$

où $\delta_\eta v : \mathcal{G}_x \rightarrow E_x$ désigne l'application $\eta' \mapsto \begin{cases} v & \text{si } \eta' = \eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc pour tous $\gamma \in \mathcal{G}, \eta \in \mathcal{G}_{s(\gamma)}$ et $v \in E_{s(\gamma)}$:

$$\begin{aligned} V_{\gamma^{-1}} \circ k_{r(\gamma)}(r(\gamma), \eta\gamma^{-1}) \circ V_\gamma(v) &= V_{\gamma^{-1}} \left(T_{r(\gamma)}(\delta_{\eta\gamma^{-1}} V_\gamma(v))(r(\gamma)) \right) \\ &= \tilde{V}_{\gamma^{-1}} \left(T_{r(\gamma)}(\delta_{\eta\gamma^{-1}} V_\gamma(v)) \right)(\gamma) && (\gamma^{-1}\gamma = r(\gamma)) \\ &= T_{s(\gamma)} \left(\tilde{V}_{\gamma^{-1}}(\delta_{\eta\gamma^{-1}} V_\gamma(v)) \right)(\gamma) \\ &= T_{s(\gamma)}(\delta_\eta v)(\gamma) \\ &= k_{s(\gamma)}(\gamma, \eta)(v). \end{aligned}$$

■

Dans la suite, on rappelle que le groupoïde \mathcal{G} agit (à gauche) sur $C_0(Z)$ (voir exemple 1.3.46). On rappelle également que le produit tensoriel $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ peut être vu comme le complété de $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ pour le produit scalaire défini dans l'exemple 1.3.68.

Lemme 6.3.4. Gardons les notations de la définition 6.3.1. L'application $W : E \rightarrow L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$ définie pour tous $e \in E$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$W(e)(\gamma) = \pi_{s(\gamma)} \left(\gamma^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\gamma)}}^{1/2} \right) (e(s(\gamma)))$$

est bien définie et est une isométrie \mathcal{G} -équivariante. De plus, il existe un compact K dans $\mathcal{G} \times Z$ tel que $\text{supp}(W) \subseteq K \cdot \mathcal{G}$.

Démonstration. • Vérifions que W est bien à valeurs dans $L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E$. Par densité de $\pi(C_c(Z))(E)$ dans E , il suffit de vérifier que pour tous $f \in C_c(Z)$ et $e \in E$, l'application :

$$W(\pi(f)(e)) : \gamma \mapsto \pi_{s(\gamma)} \left(\gamma^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\gamma)}}^{1/2} f_{|Z_{s(\gamma)}} \right) (e(s(\gamma)))$$

est un élément de $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$. Fixons $f \in C_c(Z)$ et $e \in E$. L'application $W(\pi(f)(e))$ est à support compact, de support inclus dans $K_1 := p_2 \left(\lambda^{-1}(\text{supp}(f), \text{supp}(c)) \right)$ où $p_2 : Z \times_{\rho, s} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ est la projection sur le deuxième facteur et λ est l'application propre $(z, \eta) \in Z \times_{\rho, s} \mathcal{G} \rightarrow (z, z\eta^{-1})$. Il reste à montrer la continuité. Puisque l'action de \mathcal{G} sur E est continue et que π est une représentation \mathcal{G} -équivariante, alors :

$$\forall \xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E}), \quad \gamma \mapsto \pi_{s(\gamma)} \left(\gamma^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\gamma)}}^{1/2} f_{|Z_{s(\gamma)}} \right) (\xi(\gamma)) \text{ est continue} \quad (*)$$

On souhaiterait appliquer ce résultat à la section $\xi : \gamma \mapsto e(s(\gamma))$ mais elle n'est pas à support compact (elle est constante sur la s -fibre). On choisit donc une fonction continue à support compact $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vaut 1 sur le compact K_1 défini précédemment. Alors :

$$\forall \gamma \in \mathcal{G}, \quad \varphi(\gamma) (\gamma^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\gamma)}}^{1/2}) f = (\gamma^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\gamma)}}^{1/2}) f.$$

On obtient alors la continuité de l'application $W(\pi(f)(e))$ en appliquant la propriété (*) à la section $\xi : \gamma \mapsto \varphi(\gamma)e(s(\gamma))$ de $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$.

- L'opérateur W est une isométrie sur $\pi(C_c(Z))(E)$ car pour tous $e, e' \in \Gamma_c(X, \mathcal{E})$ et $x \in X$:

$$\begin{aligned}
 \langle W(e), W(e') \rangle_{C_0(X)}(x) &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle W(e)(\gamma^{-1}), W(e')(\gamma^{-1}) \rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle \pi_{r(\gamma)} \left(\gamma \mathbf{c}_{|Z_{s(\gamma)}}^{1/2} \right) e(r(\gamma)), \pi_{r(\gamma)} \left(\gamma \mathbf{c}_{|Z_{s(\gamma)}}^{1/2} \right) e'(r(\gamma)) \rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle \pi_x \left(\gamma \mathbf{c}_{|Z_{s(\gamma)}}^{1/2} \gamma \mathbf{c}_{|Z_{s(\gamma)}}^{1/2} \right) (e(x)), e'(x) \rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \left\langle \sum_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \pi_x(\gamma \mathbf{c}_{|Z_{s(\gamma)}})(e(x)), e'(x) \right\rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \langle e(x), e'(x) \rangle_{\mathbb{C}} \\
 &= \langle e, e' \rangle_{C_0(X)}(x)
 \end{aligned}$$

les sommes précédentes étant finies par hypothèse sur e et e' . Par densité de $\pi(C_c(Z))(E)$ dans E , l'opérateur W se prolonge par continuité en une isométrie sur le module E entier. On vérifie facilement que W est \mathcal{G} -équivariante.

- Déterminons le support de W , qui est un sous-ensemble de $\mathcal{G} \times Z$. Soit $(\gamma, z) \in \mathcal{G} \times Z$ tel que $\rho(z) = s(\gamma)$ et $z\gamma^{-1} \notin \text{supp}(c)$. Il existe un voisinage ouvert $U \subseteq Z$ de z et une bissection ouverte $B \subseteq \mathcal{G}$ contenant γ tels que $\mathbf{c}_{|U \cdot B^{-1}} = 0$. Soient $\varphi \in C_c(Z)$ et $\psi \in C_c(\mathcal{G})$ telles que $\varphi(z) = 1$, $\text{supp}(\varphi) \subseteq U$ et $\psi(\gamma) = 1$, $\text{supp}(\psi) \subseteq B^{-1}$. On a donc :

$$\forall (w, \eta) \in Z \times_{\rho, s} \mathcal{G}, \quad \psi(\eta) \mathbf{c}^{1/2}(w\eta^{-1}) \varphi(w) = 0,$$

c'est-à-dire que $\psi(\eta)(\eta^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\eta)}}^{1/2}) \varphi|_{Z_{s(\eta)}} = 0$ pour tout $\eta \in \mathcal{G}$. Par conséquent, pour tous $e \in E$ et $\eta \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
 \pi'(\psi) \circ W \circ \pi(\varphi)(e)(\eta) &= \pi'(\psi) \left(W(\pi(\varphi)(e)) \right) (\eta) \\
 &= \psi(\eta) \pi_{s(\eta)} \left(\eta^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\eta)}}^{1/2} \right) \left(\pi_{s(\eta)}(\varphi|_{Z_{s(\eta)}})(e(s(\eta))) \right) \\
 &= \psi(\eta) \pi_{s(\eta)} \left((\eta^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\eta)}}^{1/2}) \varphi|_{Z_{s(\eta)}} \right) (e(s(\eta))) \\
 &= \pi_{s(\eta)} \left(\psi(\eta) (\eta^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\eta)}}^{1/2}) \varphi|_{Z_{s(\eta)}} \right) (e(s(\eta))) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

On a donc montré que $\text{supp}(W) \subseteq \left\{ (\gamma, z) \in \mathcal{G} \times Z \mid \rho(z) = s(\gamma) \text{ et } z\gamma^{-1} \in \text{supp}(c) \right\}$ et ce dernier ensemble est inclus dans $K \cdot \mathcal{G}$ avec $K := \rho(\text{supp}(c)) \times \text{supp}(c)$ qui est un compact de $\mathcal{G} \times Z$.³⁹

De plus, on montre que son adjoint $W^* : L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E \rightarrow E$ existe et est donné pour tout $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^* \mathcal{E})$ par :

$$W^*(\xi) = \left[x \mapsto \sum_{\gamma \in \mathcal{G}_x} \pi_x \left(\gamma^{-1} \mathbf{c}_{|Z_{r(\gamma)}}^{1/2} \right) (\xi(\gamma)) \right].$$

D'après le lemme 2.3.3 (étendu aux sections à support compact) appliqué au compact $\text{supp}(\xi)$ et $s : \mathcal{G} \rightarrow X$, on obtient la continuité de $W^*(\xi)$, vu comme un élément de $\Gamma_0(X, \mathcal{E})$, pour tout $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^* \mathcal{E})$. ■

Proposition 6.3.5 (Produit croisé et algèbre de Roe). En gardant les notations précédentes, on a un $*$ -isomorphisme de C^* -algèbres entre $k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}$ et $C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi')$ donné pour

39. Rappelons que la base X du groupoïde \mathcal{G} est vue comme un sous-ensemble de \mathcal{G} .

tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{K}(E))$, $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\left(\Phi(f)(\xi)\right)(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \circ f(\eta) \circ V_{\gamma} \left(\xi(\eta^{-1}\gamma)\right).$$

Démonstration. D'après la remarque ??, on peut voir $k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}$ comme une sous C^* -algèbre de $\mathcal{L}_{k_{C_0(X)}(E)}\left(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} k_{C_0(X)}(E)\right)$. D'autre part, on a un morphisme injectif :⁴⁰

$$\mathcal{L}_{k_{C_0(X)}(E)}\left(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} k_{C_0(X)}(E)\right) \longrightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}\left(\underbrace{L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} k_{C_0(X)}(E) \otimes_{k_{C_0(X)}(E)} E}_{\simeq L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E}\right)$$

envoyant pour tout $T \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(E)$, l'opérateur :

$$f \otimes K \mapsto f \otimes (T \circ K) \in \mathcal{L}_{k_{C_0(X)}(E)}\left(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} k_{C_0(X)}(E)\right)$$

sur l'opérateur :

$$f \otimes e \mapsto f \otimes T(e) \in \mathcal{L}_{C_0(X)}\left(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E\right).$$

On obtient ainsi, par composition, un $*$ -homomorphisme injectif :

$$\Phi : k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}\left(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E\right)$$

qui est donné pour tous $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{K}(E))$, $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\left(\Phi(f)(\xi)\right)(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \circ f(\eta) \circ V_{\gamma} \left(\xi(\eta^{-1}\gamma)\right) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}_s(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \circ f(\gamma\eta^{-1}) \circ V_{\gamma} \left(\xi(\eta)\right).$$

L'application $\gamma \in \mathcal{G} \mapsto (\Phi(f)(\xi))(\gamma)$ est bien élément de $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$. Nous allons montrer que $\Phi(f)$ appartient à $C^*_\mathcal{G}(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi')$. On a pour tout $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{K}(E))$:

$$\text{supp}(\Phi(f)) \subseteq \left\{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times_{s,s} \mathcal{G} \mid \gamma\eta^{-1} \in \text{supp}(f)\right\} \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$$

avec $K := \text{supp}(f) \cup s(\text{supp}(f))$ compact de \mathcal{G} , donc $\Phi(f)$ est un opérateur à support contrôlé.

• L'opérateur $\Phi(f)$ est \mathcal{G} -équivariant car pour tous $\gamma \in \mathcal{G}$, $\xi \in C_c(\mathcal{G}_s(\gamma), E_{s(\gamma)})$ et $\eta \in \mathcal{G}_r(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{V}_\gamma \circ \Phi(f)\right)(\xi)(\eta) &= V_\gamma \circ \Phi(f)(\xi)(\eta\gamma) \\ &= V_\gamma \circ \sum_{z \in \mathcal{G}_r(\eta\gamma)} V_{\gamma^{-1}\eta^{-1}} \circ f(\eta\gamma z^{-1}) \circ V_{\eta\gamma}(\xi(z)) \quad (s(\eta) = r(\gamma)) \\ &= V_\gamma \circ \sum_{\eta' \in \mathcal{G}_s(\eta)} V_{\gamma^{-1}\eta^{-1}} \circ f(\eta\eta'^{-1}) \circ V_{\eta\gamma}(\xi(\eta'\gamma)) \quad (\eta' = z\gamma^{-1}) \\ &= \sum_{\eta' \in \mathcal{G}_s(\eta)} V_{\eta^{-1}} \circ f(\eta\eta'^{-1}) \circ V_\eta\left(\widetilde{V}_\gamma(\xi)(\eta')\right) \\ &= \left(\Phi(f) \circ \widetilde{V}_\gamma\right)(\xi)(\eta). \end{aligned}$$

• De plus, pour tous $g \in C_c(\mathcal{G})$, $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{K}(E))$, $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$\pi'(g) \circ \Phi(f)(\xi)(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \underbrace{g(\eta) V_{\gamma^{-1}} \circ f(\gamma\eta^{-1}) \circ V_\gamma(\xi(\eta))}_{=: k_f(\gamma, \eta)}$$

40. Si E est un B -module de Hilbert, F un A -module de Hilbert et $\phi : A \rightarrow \mathcal{L}_B(E)$ est une représentation fidèle, alors l'application $\phi_* : \mathcal{L}_A(F) \rightarrow \mathcal{L}_B(F \otimes_A E)$ définie par $\phi_*(T)(f \otimes e) = T(f) \otimes e$ est injective (voir [30] p. 42). On applique ce résultat avec $A = k_{C_0(X)}(E)$, $B = C_0(X)$ et $F = L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} k_{C_0(X)}(E)$.

et pour tout $x \in X$, l'application $(k_f)|_{\mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x}$ est à support fini car :

$$\text{supp}((k_f)|_{\mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x}) \subseteq \left(\text{supp}(g) \times m(\text{supp}(f)^{-1}, \text{supp}(g)) \right) \cap (\mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x)$$

où $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ désigne la multiplication dans \mathcal{G} .

On en déduit que $(\pi'(g) \circ \Phi(f))_x \in k(\ell^2(\mathcal{G}_x) \otimes_{\mathbb{C}} E_x)$ pour tout $x \in X$ et donc que $\pi'(g) \circ \Phi(f)$ appartient à $k_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E)$. De la même manière, $\Phi(f) \circ \pi'(g) \in k_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E)$.

• Montrons à présent que l'application $f \mapsto \Phi(f)$ est surjective. Soit $S \in \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E)$ un opérateur \mathcal{G} -équivariant, à support contrôlé tel que pour tout $g \in C_0(\mathcal{G})$, les opérateurs :

$$S \circ \pi'(g) \quad \text{et} \quad \pi'(g) \circ S$$

sont dans $k_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E)$. On note pour tout $x \in X$, $k_x : \mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x \rightarrow k(E_x)$ le noyau associé à l'opérateur S_x . Soit K un compact de \mathcal{G} tel que $\text{supp}(S) \subseteq (K \times_X K) \cdot \mathcal{G}$. On commence par montrer que pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, il existe une bissection ouverte et relativement compacte U_γ contenant γ et $f_\gamma \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{K}(E))$ tel que $f_\gamma(\gamma') = k_{r(\gamma')}(\gamma', \gamma'^{-1})$ pour tout $\gamma' \in U_\gamma$. Soient $\gamma \in \mathcal{G}$, V_γ une bissection ouverte contenant γ et $U_\gamma \subseteq V_\gamma$ un voisinage ouvert relativement compact de γ . Puisque $r(\overline{U_\gamma})$ est compact et $r(V_\gamma)$ est ouvert, alors d'après le lemme 1.2.28, il existe $\tilde{\varphi}_\gamma \in C_c(X)$ tel que :

$$(\tilde{\varphi}_\gamma)|_{r(U_\gamma)} = 1 \quad \text{et} \quad \text{supp}(\tilde{\varphi}_\gamma) \subseteq r(V_\gamma).$$

Alors l'application $(\tilde{\varphi}_\gamma \circ s)|_{V_\gamma^{-1}}$ est continue à support compact ; on peut donc la prolonger à tout \mathcal{G} en posant $\varphi_\gamma := (\tilde{\varphi}_\gamma \circ s)\chi_{V_\gamma^{-1}} \in C_c(\mathcal{G})$. En particulier, comme $V_\gamma^{-1} \cap \mathcal{G}_{r(U_\gamma)} = U_\gamma^{-1}$, alors :

$$(\varphi_\gamma)|_{\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}} = (\tilde{\varphi}_\gamma \circ s)|_{\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}} (\chi_{V_\gamma^{-1}})|_{\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}} = \underbrace{(\tilde{\varphi}_\gamma \circ s)|_{\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}}}_{=1} \chi_{U_\gamma^{-1}} = \chi_{U_\gamma^{-1}}.$$

L'application $\varphi_\gamma \in C_c(\mathcal{G})$ vérifie donc :

$$(\varphi_\gamma)|_{\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}} = \chi_{U_\gamma^{-1}} \quad \text{et} \quad \text{supp}(\varphi_\gamma) \subseteq V_\gamma^{-1}.$$

De plus, l'application $\tilde{\varphi}_\gamma$ est continue à support compact dans l'ouvert $r(V_\gamma)$, on peut donc la prolonger à tout \mathcal{G} en une fonction notée $\psi_\gamma \in C_c(\mathcal{G})$ qui vérifie :

$$(\psi_\gamma)|_{r(U_\gamma)} = 1 \quad \text{et} \quad \text{supp}(\psi_\gamma) \subseteq r(V_\gamma).$$

Soit $\widehat{S}_\gamma : E \rightarrow E$ l'application définie comme la composition :

$$\widehat{S}_\gamma : E \xrightarrow{\Phi_\gamma} L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E \xrightarrow{S} L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E \xrightarrow{\Psi_\gamma} E$$

où $\Phi_\gamma : e \mapsto \varphi_\gamma \otimes e$ et $\Psi_\gamma : \xi \otimes e \mapsto e \cdot \langle \xi, \psi_\gamma \rangle_{C_0(X)}$. Alors $\widehat{S}_\gamma \in k_{C_0(r(V_\gamma))}(E|_{r(V_\gamma)})$ car S est localement compact. Les identifications :

$$k_{C_0(r(V_\gamma))}(E|_{r(V_\gamma)}) \simeq (k_{C_0(X)}(E))|_{r(V_\gamma)} \simeq (r^* k_{C_0(X)}(E))|_{V_\gamma}$$

permettent alors d'obtenir, par transport, un élément $f_\gamma \in [r^*(\mathcal{K}(E))]_{|_{V_\gamma}}$, c'est-à-dire une fonction dans $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{K}(E))$ à support dans V_γ , telle que $f_\gamma(\eta) = k_{r(\eta)}(\eta, \eta^{-1})$ pour tout $\eta \in U_\gamma$. Remarquons que :

$$(r(\gamma), \gamma^{-1}) \in \text{supp}(S) \implies \gamma \in K \cdot K^{-1}$$

et $K \cdot K^{-1}$ est compact donc il existe un entier $n \geq 1$, des bissections ouvertes et relativement compactes U_1, \dots, U_n dans \mathcal{G} et f_1, \dots, f_n dans $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{K}(E))$ telles que :

$$K \cdot K^{-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \quad \text{et} \quad f_i(\gamma) = k_{r(\gamma)}(\gamma, \gamma^{-1}), \quad \forall \gamma \in U_i.$$

Soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors l'application $f := \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{K}(E))$ vérifie pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$f(\gamma) = k_{r(\gamma)}(r(\gamma), \gamma^{-1})$$

et est bien un antécédent de S car d'après le lemme 6.3.3, on a pour tous $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^* \mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$:

$$\left(\Phi(f)(\xi) \right)(\gamma) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}_{s(\gamma)}} V_{\gamma^{-1}} \circ f(\gamma \eta^{-1}) \circ V_{\gamma}(\xi(\eta)) = \sum_{\eta \in \mathcal{G}_{s(\gamma)}} k_{s(\gamma)}(\gamma, \eta)(\xi(\eta)) = S(\xi)(\gamma).$$

■

On termine ce chapitre en établissant un lien entre l'application d'indice coarse \mathcal{G} -équivariante et l'application d'assemblage de Baum-Connes pour un groupoïde.

Théorème 6.3.6 (Indice coarse et application d'assemblage). Pour tout cycle (E, π, T) dans $E_{\mathcal{U}\text{-adm}}^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X))$, on a l'égalité dans $K_*\left(C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi')\right)$:

$$(\text{Ad}_W)_* \circ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(E, \pi, T) = \Phi_* \circ \mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}([E, \pi, T]).$$

Autrement dit, modulo les identifications vues précédemment, l'indice supérieur coarse équivariant $\tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}$ et l'application d'assemblage de Baum-Connes $\mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}$ coïncident pour des K -cycles admissibles.

Démonstration. Soient $(E, \pi, T) \in E_{\mathcal{U}\text{-adm}}^{\mathcal{G}}(C_0(Z), C_0(X))$ et p_c le projecteur dans $C_0(Z) \rtimes_r \mathcal{G}$ associé à la fonction cut-off $c : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ défini pour tous $z \in Z$ et $\gamma \in \mathcal{G}^{\rho(z)}$ par :

$$(p_c(\gamma))(z) = c(z\gamma)^{1/2} c(z)^{1/2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_W)_* \circ \tilde{\mu}_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}(E, \pi, T) &= (\text{Ad}_W)_* \left([C_{\mathcal{G}}^*(Z, E, \pi), 1, T'] \right) \\ &= \left[C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi'), 1, W \circ T' \circ W^* + 1 - W \circ W^* \right]. \end{aligned}$$

De plus, en composant l'égalité :

$$\mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}([E, \pi, T]) = \left[k_{C_0(X)}(E) \rtimes_r \mathcal{G}, 1, \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ T_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) + 1 - \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \right].$$

par le *-homomorphisme Φ_* induit en K -théorie, on obtient :

$$\Phi_* \circ \mu_{\mathcal{G}, C_0(X)}^{(Z)}([E, \pi, T]) = \left[C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi'), 1, \Phi \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ T_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ \Phi^{-1} + 1 - \Phi \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ \Phi^{-1} \right].$$

Pour conclure, il nous reste à démontrer que $W \circ W^*$ (resp. $W \circ T' \circ W^*$) est égale à $\Phi \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ \Phi^{-1}$ (resp. $\Phi \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ T_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c) \circ \Phi^{-1}$) vu comme multiplicateur de $C_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{G}, L^2(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(X)} E, \pi')$.

Il suffit de démontrer cette égalité sur l'image de Φ . Fixons alors $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{K}(E))$, $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ et $\gamma \in \mathcal{G}$. On a :

$$\begin{aligned}
 W\left(W^*(\Phi(f)(\xi))\right)(\gamma) &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \pi_{s(\gamma)}(\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}) \circ \pi_{s(\eta)}(\eta^{-1}c_{Z_{|r(\eta)}}^{1/2}) \left((\Phi_f(\xi))(\eta) \right) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \sum_{z \in \mathcal{G}^r(\eta)} \pi_{s(\gamma)} \left((\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2})(\eta^{-1}c_{Z_{|r(\eta)}}^{1/2}) \right) \circ V_{\eta^{-1}} \circ f(z) \circ V_{\eta} (\xi(z^{-1}\eta)) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \sum_{z' \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \pi_{s(\gamma)} \left((\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2})(\eta^{-1}c_{Z_{|r(\eta)}}^{1/2}) \right) \circ V_{\eta^{-1}} \circ f(\eta\gamma^{-1}z') \circ V_{\eta} (\xi(z'^{-1}\gamma)) \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \pi_{s(\gamma)} \left((\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2})(z^{-1}c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}) \right) \circ V_{z^{-1}} \circ f(z\gamma^{-1}\eta) \circ V_z (\xi(\eta^{-1}\gamma)) \\
 &= \sum_{z' \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \pi_{s(\gamma)} \left((\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2})(\gamma^{-1}z')c_{Z_{|s(z')}}^{1/2} \right) \circ V_{\gamma^{-1}z'} \circ f(z'^{-1}\eta) \circ V_{z'^{-1}} \circ V_{\gamma} (\xi(\eta^{-1}\gamma)) \\
 &= \sum_{z' \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \circ \pi_{r(\gamma)} \left(c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}(z'c_{Z_{|s(z')}}^{1/2}) \right) \circ V_{z'} \circ f(z'^{-1}\eta) \circ V_{z'^{-1}} \circ V_{\gamma} (\xi(\eta^{-1}\gamma)) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \circ \pi_{\mathcal{G}}(p_c)(f)(\eta) \circ V_{\gamma} (\xi(\eta^{-1}\gamma)) \\
 &= \left(\Phi\left(\pi_{\mathcal{G}}(p_c)(f)\right)(\xi) \right)(\gamma)
 \end{aligned}$$

où l'on posé $z' = \gamma\eta^{-1}z$ (i.e $z = \eta\gamma^{-1}z'$) dans la troisième égalité, renommé η (resp. z') en z (resp. η) dans la quatrième égalité, posé $z' = \gamma z^{-1}$ (i.e $z = z'^{-1}\gamma$) dans la cinquième égalité, utilisé la \mathcal{G} -équivariance de π dans la sixième égalité et utilisé le théorème de Fubini dans la septième égalité. Dans la suite, on rappelle que l'opérateur T' à été défini dans le lemme 6.3.1.

$$\begin{aligned}
 W\left(T'(W^*(\Phi(f)(\xi))\right)(\gamma) &= \pi_{s(\gamma)}(\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}) \left(T'_{s(\gamma)}(W^*_{s(\gamma)}(\Phi(f)(\xi))) \right) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^s(\gamma)} \pi_{s(\gamma)}(\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}) V_{\eta} \pi_{s(\eta)}(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2}) T_{s(\eta)} \pi_{s(\eta)}(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2}) V_{\eta^{-1}} \left(W^*_{s(\gamma)}(\Phi(f)(\xi)) \right) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^s(\gamma)} \sum_{z \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \pi_{s(\gamma)}(\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}) V_{\eta} \pi_{s(\eta)}(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2}) T_{s(\eta)} \pi_{s(\eta)}(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2}) V_{\eta^{-1}} \pi_{s(\gamma)}(z^{-1}c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}) \left((\Phi(f)(\xi))(z) \right) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^s(\gamma)} \sum_{z \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \sum_{h \in \mathcal{G}^r(z)} \pi_{r(\eta)}(\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}) V_{\eta} \pi_{s(\eta)}(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2}) T_{s(\eta)} \pi_{s(\eta)}(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2}) V_{\eta^{-1}} \pi_{r(\eta)}(z^{-1}c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}) V_{z^{-1}} f(h) V_z \xi(h^{-1}z) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^s(\gamma)} \sum_{z \in \mathcal{G}_s(\gamma)} \sum_{h \in \mathcal{G}^r(z)} V_{\eta} \pi_{s(\eta)} \left((\eta^{-1}\gamma^{-1}c_{Z_{|r(\gamma)}}^{1/2}) c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2} \right) T_{s(\eta)} \pi_{s(\eta)} \left(c_{Z_{|s(\eta)}}^{1/2} (\eta^{-1}z^{-1}c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}) \right) V_{\eta^{-1}z^{-1}} f(h) V_z \xi(h^{-1}z) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{z \in \mathcal{G}_s(k)} \sum_{h \in \mathcal{G}^r(z)} V_{\gamma^{-1}k} \pi_{s(k)} \left((k^{-1}c_{Z_{|r(k)}}^{1/2}) c_{Z_{|s(k)}}^{1/2} \right) T_{s(k)} \pi_{s(k)} \left(c_{Z_{|s(k)}}^{1/2} (k^{-1}\gamma z^{-1}c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}) \right) V_{k^{-1}\gamma z^{-1}} f(h) V_z \xi(h^{-1}z) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{p \in \mathcal{G}^s(k)} \sum_{h \in \mathcal{G}^s(p)} V_{\gamma^{-1}k} \pi_{s(k)} \left((k^{-1}c_{Z_{|r(k)}}^{1/2}) c_{Z_{|s(k)}}^{1/2} \right) T_{s(k)} \pi_{s(k)} \left(c_{Z_{|s(k)}}^{1/2} (pc_{Z_{|s(p)}}^{1/2}) \right) V_p f(h) V_{p^{-1}k^{-1}\gamma} \xi(h^{-1}p^{-1}k^{-1}\gamma) \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{p \in \mathcal{G}^s(k)} \sum_{k' \in \mathcal{G}^r(k)} V_{\gamma^{-1}k} \pi_{s(k)} \left((k^{-1}c_{Z_{|r(k)}}^{1/2}) c_{Z_{|s(k)}}^{1/2} \right) T_{s(k)} \pi_{s(k)} \left(c_{Z_{|s(k)}}^{1/2} (pc_{Z_{|s(p)}}^{1/2}) \right) V_p f(p^{-1}k^{-1}k') V_{p^{-1}k^{-1}\gamma} \xi(k'^{-1}\gamma) \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{h \in \mathcal{G}^s(z)} \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}z} \pi_{s(z)} \left((z^{-1}c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}) c_{Z_{|s(z)}}^{1/2} \right) T_{s(z)} \pi_{s(z)} \left(c_{Z_{|s(z)}}^{1/2} (hc_{Z_{|s(h)}}^{1/2}) \right) V_h f(h^{-1}z^{-1}\eta) V_{h^{-1}z^{-1}\gamma} \xi(\eta^{-1}\gamma) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} \sum_{z \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \pi_{r(z)} \left(c_{Z_{|r(z)}}^{1/2}(zc_{Z_{|s(z)}}^{1/2}) \right) V_z T_{s(z)} \pi_{\mathcal{G}}(p_c)(f)(z^{-1}\eta) V_{z^{-1}} V_{\gamma} \xi(\eta^{-1}\gamma) \\
 &= \sum_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} V_{\gamma^{-1}} \pi_{\mathcal{G}}(p_c) T_{\mathcal{G}} \pi_{\mathcal{G}}(p_c)(f)(\eta) V_{\gamma} \xi(\eta^{-1}\gamma) \\
 &= \left[\Phi\left(\pi_{\mathcal{G}}(p_c) T_{\mathcal{G}} \pi_{\mathcal{G}}(p_c)(f)\right)(\xi) \right](\gamma)
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la \mathcal{G} -équivariance de π dans la cinquième égalité, posé $k = \gamma\eta$ (i.e $\eta = \gamma^{-1}k$) dans la sixième

égalité, posé $p = k^{-1}\gamma z^{-1}$ (i.e $z = p^{-1}k^{-1}\gamma$) dans la septième égalité, posé $k' = kph$ (i.e $h = p^{-1}k^{-1}k'$) dans la huitième égalité, renommé k' en η , p en h et k en z dans la neuvième égalité et utilisé la \mathcal{G} -équivariance de π et le théorème de Fubini dans la dixième égalité. ■

Bibliographie

- [1] Christian Bönicke and Clément Dell’Aiera. Going-down functors and the kunneth formula for crossed products by étale groupoids. *Transactions of the American Mathematical Society*, 372(11) :8159–8194, 2019.
- [2] Claire Anantharaman-Delaroche. Exact groupoids. arXiv preprint arXiv :1605.05117, 2016.
- [3] William Arveson. Notes on extensions of C^* -algebras. *Duke Mathematical Journal*, 44(2) :329–355, 1977.
- [4] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^* -algebras. *Contemporary Mathematics*, 167 :241–241, 1994.
- [5] Paul Baum and Erik van Erp. K-homology and fredholm operators II : Elliptic operators. arXiv preprint arXiv :1604.03535, 2016.
- [6] Moulay-Tahar Benameur and Indrava Roy. The Higson-Roe sequence for étale groupoids I. dual algebras and compatibility with the bc map. *Journal of Noncommutative Geometry*, 14(1) :25–71, 2020.
- [7] Bruce Blackadar. *K-theory for operator algebras*, volume 5. Cambridge University Press, 1998.
- [8] Bruce Blackadar. *Operator algebras : theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, volume 122. Springer Science & Business Media, 2006.
- [9] Étienne Blanchard. Déformations de C^* -algèbres de Hopf. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 124(1) :141–215, 1996.
- [10] Christian Bönicke. A going-down principle for ample groupoids and the Baum-Connes conjecture. arXiv preprint arXiv :1806.00391, 2018.
- [11] Martin R Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] Nathaniel Patrick Brown and Narutaka Ozawa. *C^* -Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, volume 88. American Mathematical Soc., 2008.
- [13] Xiaoman Chen, Qin Wang, and Guoliang Yu. The maximal coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a fibred coarse embedding into Hilbert space. *Advances in Mathematics*, 249 :88–130, 2013.
- [14] Alain Connes, Joachim Cuntz, Marc A Rieffel, and Guoliang Yu. Noncommutative geometry. *Oberwolfach Reports*, 10(3) :2553–2629, 2014.
- [15] Joachim Cuntz, Siegfried Echterhoff, Xin Li, and Guoliang Yu. *K-theory for Group C^* -algebras and Semigroup C^* -algebras*. Springer, 2017.
- [16] Jacques Dixmier. Sur les C^* -algèbres *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 88 :95–112, 1960.
- [17] Jacques Dixmier and Adrien Douady. Champs continus d’espaces hilbertiens et de C^* -algèbres. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 91 :227–284, 1963.
- [18] Ruy Exel. Reconstructing a totally disconnected groupoid from its ample semigroup. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(8) :2991–3001, 2010.

- [19] Carla Farsi, Alex Kumjian, David Pask, and Aidan Sims. Ample groupoids : equivalence, homology, and matui's HK conjecture. arXiv preprint arXiv :1808.07807, 2018.
- [20] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. Riemannian geometry, volume 2. Springer, 1990.
- [21] Peter B Gilkey. Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem. CRC press, 2018.
- [22] Geoff Goehle. Groupoid crossed products. arXiv preprint arXiv :0905.4681, 2009.
- [23] Erik Guentner, Rufus Willett, and Guoliang Yu. Dynamical complexity and controlled operator K-theory. arXiv preprint arXiv :1609.02093, 2016.
- [24] Nigel Higson. C^* -algebra extension theory and duality. Journal of Functional Analysis, 129(2) :349–363, 1995.
- [25] Nigel Higson and John Roe. Mapping surgery to analysis I : Analytic signatures. K-theory, 33(4), 2004.
- [26] Kjeld Knudsen Jensen and Klaus Thomsen. Elements of KK-theory. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] Gennadi G Kasparov. Equivariant KK-theory and the novikov conjecture. Inventiones mathematicae, 91(1) :147–201, 1988.
- [28] GG Kasparov. Hilbert C^* -modules : theorems of stinespring and voiculescu. Journal of operator theory, pages 133–150, 1980.
- [29] John L Kelley. General topology. Courier Dover Publications, 2017.
- [30] E Christopher Lance. Hilbert C^* -modules : a toolkit for operator algebraists, volume 210. Cambridge University Press, 1995.
- [31] Ivan Lassagne. K-théorie équivariante et groupoïdes. PhD thesis, Université de Lorraine, 2013.
- [32] Pierre-Yves Le Gall. Théorie de kasparov équivariante et groupoïdes. K-theory, 16(4) :361–390, 1999.
- [33] Paul S Muhly and Dana P Williams. Renault's equivalence theorem for groupoid crossed products. State University of New York at Albany, New York journal of mathematics, 2008.
- [34] Alan Paterson. Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras, volume 170. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] Alan LT Paterson. The stabilization theorem for proper groupoids. arXiv preprint arXiv :0909.3951, 2009.
- [36] Gert K Pederson. C^* -algebras and their automorphism groups academic press, london, 1979. MR548006 (81e : 46037).
- [37] Iain Raeburn and Dana P Williams. Morita equivalence and continuous-trace C^* -algebras. Number 60. American Mathematical Soc., 1998.
- [38] Jean Renault. A groupoid approach to C^* -algebras, volume 793. Springer, 2006.
- [39] Alain Robert. Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, volume 80. Cambridge University Press, 1983.
- [40] John Roe. Notes on operator algebras. 2000.
- [41] John Roe. Lectures on coarse geometry. Number 31. American Mathematical Soc., 2003.
- [42] John Roe. Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds. volume 90. American Mathematical Soc., 1996.
- [43] Walter Rudin. Real and complex analysis. Tata McGraw-hill education, 2006.
- [44] George Skandalis. Exact sequences for the kasparov groups of graded algebras. Canadian Journal of Mathematics, 37(2) :193–216, 1985.

-
- [45] Georges Skandalis, Jean-Louis Tu, and Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture and groupoids. *Topology*, 41(4) :807–834, 2002.
- [46] Markus Stroppel. *Locally compact groups*, volume 3. European Mathematical Society, 2006.
- [47] Jean Louis Tu. La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-theory*, 16(2) :129–184, 1999.
- [48] Jean-Louis Tu. The Baum-Connes conjecture for groupoids. In *C*-algebras*, pages 227–242. Springer, 2000.
- [49] Jean-Louis Tu. Non-hausdorff groupoids, proper actions and K-theory. *Doc. Math*, 9(565-597) :7, 2004.
- [50] Kroum Tzanev. *C*-algebres de Hecke et K-theorie*. PhD thesis, Paris 7, 2000.
- [51] Alain Valette. *Introduction to the Baum-Connes conjecture*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [52] Alain Valette. On the Baum-Connes assembly map for discrete groups. In *Proper group actions and the Baum-Connes conjecture*, pages 79–127. Springer, 2003.
- [53] Dan Voiculescu. A non-commutative Weyl-von Neumann theorem. *Rev. roum. math. pures et appl.*, 21 :97–113, 1976.
- [54] Niels Erik Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras*. 1993.
- [55] R. Willett and G. Yu. *Higher Index Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2020.
- [56] Dana P Williams. *Crossed products of C*-algebras*. Number 134. American Mathematical Soc., 2007.
- [57] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. 1998.
- [58] Hervé Oyono-Oyono. Groupoids decomposition, propagation and K-theory. *arXiv preprint arXiv :2010.01827*, 2020.
- [59] Vahid Shirbisheh. Lectures on C*-algebras. *arXiv preprint arXiv :1211.3404*, 2012.
- [60] Nigel Higson, John Roe, and Guoliang Yu. A coarse mayer-vietoris principle. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 114, pages 85–97. Cambridge University Press, 1993.
- [61] Jean-Louis Tu. The coarse Baum-Connes conjecture and groupoids II. *arXiv preprint arXiv :1005.0407*, 2010.
- [62] Jean-Louis Tu. La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables. *K-theory*, 17(3) :215–264, 1999.
- [63] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into hilbert space. 1998.
- [64] Gennadi Kasparov and Guoliang Yu. The Novikov conjecture and geometry of Banach spaces. *Geometry & Topology*, 16(3) :1859–1880, 2012.
- [65] Gennadi Kasparov and Guoliang Yu. The coarse geometric Novikov conjecture and uniform convexity. *Advances in Mathematics*, 206(1) :1–56, 2006.
- [66] Nigel Higson, Vincent Lafforgue, and Georges Skandalis. Counterexamples to the Baum-Connes conjecture. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 12 :330–354, 2002.
- [67] Erik Guentner, Rufus Willett, and Guoliang Yu. Dynamic asymptotic dimension : relation to dynamics, topology, coarse geometry, and C*-algebras. *Mathematische Annalen*, 367(1-2) :785–829, 2017.
- [68] Jintao Deng, Benyin Fu, and Qin Wang. The equivariant coarse Baum-Connes conjecture for metric spaces with proper group actions. *arXiv preprint arXiv :2109.11643*, 2021.

- [69] Benyin Fu and Jiawen Zhang. The equivariant coarse Baum-Connes conjecture for actions by a-T-menable groups. *arXiv preprint arXiv :2204.13313*, 2022.
- [70] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. 1998.
- [71] Guoliang Yu. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension. *Annals of Mathematics*, 147(2) :325–355, 1998.