



**HAL**  
open science

# Une approche groupoïdale au calcul pseudodifférentiel sur les variétés d'Heisenberg et au résidu de Wodzicki.

Nathan Couchet

► **To cite this version:**

Nathan Couchet. Une approche groupoïdale au calcul pseudodifférentiel sur les variétés d'Heisenberg et au résidu de Wodzicki.. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Clermont Auvergne, 2023. Français. NNT : 2023UCFA0023 . tel-04293360

**HAL Id: tel-04293360**

**<https://theses.hal.science/tel-04293360>**

Submitted on 18 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale des Sciences Fondamentales

Thèse

Présentée pour obtenir le grade de

Docteur d'université

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal

Nathan Couchet

*Une approche groupoïdale au calcul  
pseudodifférentiel sur les variétés  
d'Heisenberg et au résidu de Wodzicki*



Soutenue publiquement le 23 juin 2023 devant un jury composé de :

**Robert Yuncken**, Directeur de thèse  
**Dominique Manchon**, Co-directeur de thèse  
**Sylvie Paycha**, Rapporteur, Examineur  
**Jean-Marie Lescure**, Rapporteur et Examineur  
**Giuseppe Dito**, Examineur  
**Véronique Fischer**, Examineur  
**Julien Bichon**, Examineur  
**Hervé Oyono Oyono**, Examineur et Président

---

"Mathematics provides a universe of fascinating structures in which you can travel and explore on your own without the need for anything more than a piece of paper and a pen."  
Erik van Erp.

# Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Remerciements</b>  | <b>5</b>   |
| <b>1 Introduction</b>   | <b>9</b>   |
| 1.1 De la mécanique quantique aux opérateurs pseudo-différentiels . . . . .                               | 9          |
| 1.2 Résumé des trois projets conduits au sein du manuscrit . . . . .                                      | 13         |
| 1.3 État de l’art des opérateurs pseudo-différentiels . . . . .   | 17         |
| 1.3.1 Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels : des noyaux aux symboles . . . . .                | 17         |
| 1.3.2 Premier projet : Une nouvelle définition des opérateurs pseudo-différentiels classiques . . . . .   | 24         |
| 1.3.3 Ellipticité, hypoellipticité, théorème des carrés d’Hörmander . . . . .                             | 31         |
| 1.3.4 Développement asymptotique pseudo-homogène du noyau . . . . .                                       | 36         |
| 1.4 Approche groupoïdale au calcul pseudodifférentiel de BG et au résidu de Wodzicki . . . . .            | 42         |
| 1.4.1 Approche groupoïdale du calcul pseudo-différentiel sur les variétés filtrées de vEY . . . . .       | 42         |
| 1.4.1.1 Calcul de vEY : cas d’une variété non-filtrée . . . . .   | 42         |
| 1.4.1.2 Variété filtrée, algèbroïde et groupoïde osculants . . . . .                                      | 48         |
| 1.4.1.3 Calcul de vEY : cas d’une variété filtrée . . . . .   | 54         |
| 1.4.2 Second projet : L’approche groupoïdale au calcul d’Heisenberg de BG . . . . .                       | 56         |
| 1.4.3 Troisième projet : L’approche groupoïdale au résidu non commutatif de Wodzicki . . . . .            | 57         |
| <b>2 Les symboles poly-homogènes et les fonctions homogènes modulo Schwartz</b>                           | <b>63</b>  |
| 2.1 Définitions des fonctions (poly)-homogènes (modulo Schwartz) pour une dilatation $\delta_s$ . . . . . | 63         |
| 2.2 Théorème de caractérisation de $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . . . . .                    | 67         |
| 2.3 Quelques résultats supplémentaires sur les fonctions Schwartz et homogènes modulo Schwartz . . . . .  | 73         |
| 2.4 Construction du développement asymptotique . . . . .  | 76         |
| 2.5 Preuve du 2) $\Rightarrow$ 1) du théorème 2.1.11 . . . . .  | 78         |
| 2.6 Extension des fonctions poly-homogènes : Preuve 1) $\Rightarrow$ 2) du théorème 2.1.11 . . . . .      | 80         |
| <b>3 Prérequis à l’approche groupoïdale du calcul pseudo-différentiel de vEY</b>                          | <b>87</b>  |
| 3.1 Le groupoïde $H$ -tangent généralisé . . . . .  | 87         |
| 3.2 L’action de Debord-Skandalis . . . . .  | 90         |
| 3.3 Distributions $r$ -fibrées sur un groupoïde . . . . .   | 92         |
| 3.3.1 Retour sur le théorème des noyaux de Schwartz des années 50 . . . . .                               | 92         |
| 3.3.2 Introduction des distributions $\pi$ -fibrées par un exemple . . . . .                              | 94         |
| 3.3.3 Formalisme des distributions $\pi$ -fibrées et bijection de LMV . . . . .                           | 95         |
| 3.3.4 Convolution des distributions $r$ -fibrées . . . . .  | 101        |
| 3.3.5 $\pi$ -morphisms et action de Debord-Skandalis sur les distributions $r, s$ -fibrées . . . . .      | 102        |
| 3.4 Le fibré des 1-densités tangentes aux $\pi$ -fibres d’une submersion . . . . .                        | 104        |
| 3.4.1 Mesures lisses et fibré des 1-densités . . . . .  | 105        |
| 3.4.2 Cas des submersions $\pi : M \rightarrow B_M$ . . . . .   | 108        |
| <b>4 Équivalence du calcul de BG et de vEY</b>  | <b>111</b> |
| 4.1 Variétés d’Heisenberg, de contact et théorèmes de Darboux . . . . .                                   | 112        |
| 4.2 Philosophie du calcul d’Heisenberg de BG . . . . .  | 120        |
| 4.2.1 Des opérateurs sur $\mathbb{R}^d$ abélien... . . . . .  | 120        |
| 4.2.2 ...à $\mathbb{R}^d$ muni d’une structure non commutative . . . . .                                  | 121        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3      | Calculs de vEY et BG pour les variétés modèles . . . . .   | 124        |
| 4.3.1    | Comment BG gèlent-ils les coefficients de leurs opérateurs différentiels sur une variété d’Heisenberg ? . . . . .        | 124        |
| 4.3.2    | Cartes exponentielles sur une variété modèle . . . . .   | 125        |
| 4.3.3    | Définition du calcul pseudo-différentiel de BG . . . . .   | 127        |
| 4.3.4    | Équivalence du calcul de BG et vEY pour les variétés modèles $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ . . . . .                | 130        |
| 4.3.5    | Équivalence du calcul de BG et vEY pour les variétés de contact et feuilletages de codimension 1 . . . . .               | 134        |
| 4.4      | Application d’un théorème d’hypo-ellipticité de BG au sous-laplacien $\Delta_H$ sur $\mathbb{H}_n$ . . . . .             | 135        |
| <b>5</b> | <b>Comparaison du calcul pseudo-différentiel d’Hörmander, Kohn et Nirenberg avec celui de Beals et Greiner</b> . . . . . | <b>137</b> |
| <b>6</b> | <b>Applications du théorème de Rockland sur les variétés filtrées</b> . . . . .  | <b>145</b> |
| 6.1      | Le symbole principal d’un opérateur différentiel sur une variété filtrée . . . . .                                       | 145        |
| 6.2      | Du théorème Rockland original au théorème de Rockland filtré . . . . .   | 147        |
| 6.2.1    | Application du théorème de Rockland généralisé à l’opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R}^{d+1}$ . . . . .              | 152        |
| 6.2.2    | Application du théorème de Rockland généralisé à l’opérateur de Kolgomorov . . . . .                                     | 153        |
| <b>7</b> | <b>Une approche groupoïdale au résidu de Wodzicki</b> . . . . .  | <b>157</b> |
| 7.1      | Définition du résidu de Wodzicki . . . . .   | 157        |
| 7.2      | Définition du résidu groupoïdal . . . . .  | 158        |
| 7.3      | Le résidu groupoïdal est une trace . . . . .   | 161        |
| 7.4      | Le résidu de Wodzicki coïncide avec le résidu groupoïdal . . . . .   | 163        |
| 7.5      | Le résidu non commutatif de Ponge sur une variété d’Heisenberg coïncide avec le résidu groupoïdal . . . . .              | 168        |
| <b>A</b> | <b>Group(oïd)e et algèbr(oïd)e de Lie</b> . . . . .  | <b>173</b> |
| A.1      | Algèbres filtrées, gradués et groupes de Lie gradués . . . . .   | 173        |
| A.2      | Algèbre enveloppante d’une algèbre de Lie et opérateurs différentiels invariants par translation . . . . .               | 178        |
| A.3      | Les groupoïdes algébriques . . . . .   | 183        |
| A.4      | Les groupoïdes de Lie . . . . .  | 185        |
| A.5      | Système de Haar . . . . .  | 188        |
| A.6      | Les algébroïdes de Lie . . . . .   | 190        |
| <b>B</b> | <b>Les fibrés vectoriels lisses</b> . . . . .  | <b>197</b> |
| <b>C</b> | <b>Étude de deux groupoïdes tangents</b> . . . . .   | <b>209</b> |
| C.1      | Structure du groupoïde tangent sur $M = \mathbb{R}^n$ . . . . .  | 209        |
| C.2      | Structure du groupoïde tangent sur $G$ un groupe de Lie gradué . . . . .   | 211        |
| <b>D</b> | <b>Les distributions homogènes</b> . . . . .   | <b>215</b> |
| D.1      | Transformée de Fourier du logarithme . . . . .   | 220        |
| D.2      | Fonctions à croissance polynômiale et distributions tempérées . . . . .  | 222        |
| <b>E</b> | <b>Les solutions fondamentales d’un opérateur différentiel</b> . . . . .   | <b>223</b> |
| E.1      | Laplace et Poisson, deux précurseurs de la notion de solution fondamentale . . . . .                                     | 223        |
| E.2      | Fonctions, distributions invariantes par rotation, solution fondamentale de $-\Delta + c^2$ . . . . .                    | 230        |
| <b>F</b> | <b>Glossaire des symboles</b> . . . . .  | <b>235</b> |

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier personnellement les membres du jury pour avoir accordé leur temps à mon travail. En particulier, les rapporteurs, pour le grand soin qu'ils ont pris à détailler mon travail dans leurs rapports, contribuant à améliorer ma compréhension des objets développés dans ce manuscrit. J'espère que j'aurai réussi à transmettre l'esprit de leurs remarques dans mes nouvelles corrections.

Je dédicace ces lignes aux professeurs qui m'ont transmis leur soif d'apprendre et de découvrir les mathématiques. J'ai eu la chance de partager des moments de complicité précieuse à faire de la géométrie et du calcul littéral avec ma grand-mère Paulette, ancienne professeur des écoles. De la primaire à ma seconde nous avons beaucoup travaillé ensemble, puis j'ai fait une rencontre qui m'a définitivement conduit sur les rails des mathématiques. Matthieu<sup>1</sup>, depuis maintenant douze ans tu m'accompagnes dans ma scolarité à travers des discussions sur l'enseignement et les mathématiques, avec cette question qui nous occupe toujours l'esprit lors de nos interminables appels téléphoniques : "qu'est-ce que c'est vraiment faire des maths ?" Tu m'as donné l'opportunité de partager des moments de mathématiques avec tes classes de lycée, me poussant à m'interroger sur le sens profond du métier d'enseignant que je vais embrasser dans quelques mois déjà.

Fraîchement sorti de classes préparatoires, me voici plongé dans l'univers de la faculté dijonnaise. Toute l'équipe du LMB et en particulier Peggy Cénac, Ahmed Jebrane, Giuseppe Dito m'ont aidé à réussir mon cursus universitaire, me soutenant jusqu'à l'agrégation. C'est Giuseppe Dito qui m'a fait aimer l'analyse fonctionnelle - qui allait devenir l'un de mes champs des mathématiques favoris - suite à son cours de L3 et puis au mémoire sur la transformée de Weyl que nous avons fait ensemble lors de mon Master 1. Quel heureux hasard fut-ce de découvrir in fine que la transformée de Weyl est l'exemple d'un opérateur pseudo-différentiel, objets sur lesquels j'allais travailler deux ans plus tard en tant que chercheur ! C'est en hommage à ces moments passés ensemble que la première section de mon manuscrit est dédiée à cet objet. Je suis également très touché de sa présence dans mon jury de thèse. Quant à Ahmed Jebrane, il m'a aussi consacré beaucoup de temps personnel et m'a permis d'apprécier l'Algèbre à sa juste valeur grâce à son cours magistral (cet adjectif prenant alors tout son sens !) sur les corps et les anneaux. C'est bien au moment où je relis mon manuscrit que je peux attester l'importance, même pour un analyste<sup>2</sup>, d'avoir de bonnes bases en algèbre. Enfin, Peggy Cénac a toujours témoigné d'une extrême bienveillance envers moi et de bons conseils lors des oraux de préparation à l'agrégation. C'est aussi l'occasion de remercier l'équipe de Maths-Physique de Dijon pour m'avoir donné l'opportunité de présenter mes travaux de recherche sur les calculs groupoidal et d'Heisenberg.

Après l'agrégation, j'ai pu aller un an en Master de Recherche à Besançon. Malgré la période Covid qui s'est déclarée rapidement, j'ai été bien épaulé par Gilles Lancien et Uwe Franz qui aura été mon directeur de mémoire. Tandis qu'Uwe Franz m'a fait travailler sur la théorie des représentations de groupes localement compacts et le théorème de Stone-Von-Neumann qui classe les représentations irréductibles unitaires du groupe d'Heisenberg, Giles Lancien m'a souvent accueilli dans son bureau pour que nous discussions de topologie, ce sujet étant un de mes petits plaisirs du quotidien, tant il se sublime par ces subtilités. Par chance, Uwe Franz m'a mis en contact avec un certain Robert Yuncken qui allait devenir, quelques mois plus tard, mon directeur de thèse.

---

1. Je n'oublie pas les deux "t" car je sais que tu y tiens, tu veux te différencier des autres : c'est bien là le trait de caractère du matheux !

2. Oui désolé Bob, j'ai toujours du mal actuellement à me définir comme "géomètre non commutatif", mais tu le sais déjà :).

---

Cher Bob, avant d'être impressionné par tes capacités mathématiques, je suis touché par tes qualités humaines. Dès que nous avons été en contact j'ai senti une extrême bienveillance et beaucoup de bonne humeur qui émanait de ta personne : je ne me suis pas trompé. Ces trois années de travail sont passées vite et ont été riches en émotions. Pour quelqu'un qui ne pensait pas arriver au bout des trois années de recherche me voilà avec deux articles dans un domaine qui m'était au départ complètement étranger. Bien sûr, il aura fallu fournir beaucoup d'efforts pour en arriver là, répéter beaucoup les choses mais tu as toujours été patient, prévenant. Tu as toujours su être à l'écoute lorsque je ressentais le besoin de faire du hors-sujet sur les  $C^*$ -algèbres ou les algèbres d'opérateurs. Jamais tu n'as refusé de discuter d'autres mathématiques que celles qui nous occupaient au quotidien et je te remercie profondément pour cette ouverture d'esprit. Ces discussions ont à chaque fois été enrichissantes et m'ont gardé motivé pour avancer dans nos projets. Grâce à toi j'ai pu découvrir de très belles mathématiques (et surtout de belles idées!) que je n'aurais jamais découvertes par moi-même : tu m'as ouvert de nouvelles portes et m'en a aussi désigné d'autres que je n'ai qu'à ouvrir si l'envie m'en prend. Tu as aussi vite compris que j'aimais partager, enseigner les mathématiques devant différents auditoires. Aussi je te remercie de m'avoir soutenu dans toutes les démarches qui concernaient les enseignements, et notamment de m'avoir donné l'opportunité de co-encadrer un master de M1 avec toi. Bref, en un mot tu as toutes les qualités d'un grand enseignant et j'espère que je serai aussi doué que toi dans mon futur métier : merci d'avoir cru en moi.

Je veux aussi remercier les équipes des laboratoires de mathématiques de Clermont-Ferrand (LMBP) et Metz (IECL) pour l'accueil chaleureux qu'elles m'ont fait. En particulier, je veux témoigner mon affection pour Dominique Manchon qui a été un soutien incroyable pendant ces trois ans, notamment en acceptant d'être mon co-directeur sur Clermont-Ferrand : quel plaisir d'avoir fait Pint Of Science avec toi, un énorme merci pour le temps que tu as consacré à relire nos articles de recherche et mon manuscrit, ton aide a été extrêmement précieuse, qu'elle soit mathématique ou administrative. Je ne peux pas non plus oublier Laurent Serlet (ainsi que son sens de l'humour pimenté et certain : merci pour tes encouragements, ta bienveillance et ta disponibilité), et Andrzej Stos (pour avoir été mon parrain et s'être assuré le bon déroulement de mon doctorat). Plus généralement je remercie l'équipe de Clermont-Ferrand pour l'opportunité qu'elle m'a donné de co-diriger des mémoires de M1 et de participer aux cours du Mathématiques S2 sur les espaces vectoriels et l'analyse asymptotique, ce qui a indéniablement permis d'enrichir mon bagage pédagogique. Merci au bibliothécaire Noël Benoit du LMBP qui a su mettre la main sur les ouvrages dont j'avais besoin, son aide a été précieuse dans la rédaction de ce manuscrit. Voici aussi quelques mots pour remercier vivement l'équipe du secrétariat du LMBP : Valérie Sourlier, Laurence Schmitt et Sylvie Chassagne pour leur sérieux exemplaire et leur réactivité : je ne vous dirais jamais assez merci pour tout le temps que vous m'avez fait gagner lors des nombreuses démarches que j'ai dû effectuer pendant mes trois ans de thèse! De même je remercie aussi Émilie Habouzit de l'école doctorale pour son sérieux et sa réactivité, qualités importantes qui m'ont permises de garder ma concentration sur mon travail. L'équipe de Metz n'a toutefois pas à rougir des précédentes lignes, ma dernière année de thèse a été vraiment agréable, et j'ai eu droit à un accueil remarquable (merci aux organisateurs de la conférence de GNC pour le super resto). Ce changement de laboratoire m'a permis de rencontrer des personnes dont les thématiques de recherche gravitaient autour de mes centres d'intérêt. J'ai aussi une pensée pour ma collègue de TD, Renata Bunoiu-Schiltz, avec laquelle j'ai passé une remarquable année pédagogique.

"Comme il est vain de s'asseoir pour écrire quand on ne s'est pas levé pour vivre."

Henry David Thoreau.

Cette citation (vous verrez plus tard que j'ai développé une tendance pathologique à la citation) traduit mon ressenti actuel : ce manuscrit n'aurait su voir le jour sans tous ces moments avec mes ami(e)s et ma famille!

Ainsi, voici venu le temps de remercier mes parents et mes ami(e)s pour ce qu'ils m'ont apporté. Ma mère : son sens de l'honnêteté, sa franchise et son amour pour l'administratif bien fait (en temps et en heure, mais surtout trop en avance). Merci pour tout le temps que tu m'as fait gagner pendant mes années d'étude en t'occupant de mes papiers : j'ai pu me focaliser sur mon travail. Mon père : son côté rêveur, son amour du beau français<sup>3</sup>, sa passion pour la cuisine et les bons vins, mais plus encore, sa passion pour la musique :

---

3.

---

maîtresse et sauveuse des journées maussades, refuge éternel de l'esprit où je peux m'épanouir grâce à toi. Je suis très fier d'écrire que c'est grâce à toi que je suis en train de composer un album.

Pour tout leur soutien indéfectible je veux, il en va de soi, aussi saluer mes ami(e)s les plus proches. Mes ami(e)s de Dijon et collègues professeurs : Manon, Lydia, Étienne (leur nez se souvient avec tristesse des boîtes de sardine en salle d'agreg!) et Finelle pour l'aide qu'ils m'ont apporté notamment vis à vis des conseils pour les phases de mutations, mais aussi pour leur oreille attentive pendant les moments difficiles de mon doctorat. Mes amis du Jura : Delphine (courage pour ta thèse, tu vois enfin le bout! J'ai aussi une petite pensée pour nos indénombrables balades sur le petit chemin de cailloux), Juliette (pourquoi n'as-tu jamais voulu avouer que les maths c'était quand même plus drôle que la littérature?) Mathieu (Die Zukunft!!! Finalement le premier confinement n'était pas si mal), et Mon Loulou (mon frère, étoile filante vers la présidence du TC Champa) qui me soutiennent depuis maintenant plus de dix ans. Toute la famille Beaud-Brocard<sup>4</sup> dans son écrasante entièresité, de l'oncle à la tante, de la mère au père en bifurquant par les grands-parents et la sœur, tout droit jusqu'à la pièce de toutes mes convoitises : ma compagne Sarah à qui je ne saurais témoigner combien notre rencontre a changé la couleur de ma vie. Tu m'accompagnes au quotidien depuis deux ans déjà, portant un regard attentif sur ma musique et mes maths, et dans un an tu seras aussi docteur : courage! Mes amis guitaristes Rodolphe (merci pour m'avoir donné ta passion pour les guitares, il faut vraiment qu'on finisse ce morceau "couchetterie del espace en sol"...) et Dorian (avec un prénom pareil tu étais prédestiné à la musique, merci pour la relecture du manuscrit)<sup>5</sup>. Enfin mes amis matheux (courage aussi pour vos thèses!), Antoine, Damien, Aurélie, Geoffrey et Arnaud. Pour les deux derniers protagonistes : pendant les rares instants où je n'étais pas à la salle ou sur ma guitare, vous avez su capter toute mon attention. Merci pour le temps que vous avez accordé à la relecture de l'introduction de mon manuscrit et pour vos conseils avisés de façon générale.

---

**Théorème 0.0.1.** *Tout beau français peut contenir (malheureusement) des fautes d'orthographe.*

*Démonstration.* Laissez au lecteur (aussi malheureusement). □

4. "Tant que ça reste dans la famille!"

5. PS : nos visios repas à 1h30 du matin me manquent, la fin d'une époque...





# Chapitre 1

## Introduction

"The need for [noncommutative space] had already been felt in subatomic particle physics, as Heisenberg had observed, because paires of observables, like position and momentum, in subatomic systems had a strange "noncommutative behavior" that made it seem better to model their behavior not as usual in classical physics, by functions on appropriate topological spaces, but by self-adjoint operators on a Hilbert space, which do not, in general, commute with each other, unlike functions, when one multiplies them pointwise." Heath Emerson, [65]

"I do recall that we, in the small group who were interested in singular integrals then, felt a certain separateness from the larger community of analysts - not that this isolation was self-imposed, but more because our subject matter was seen by our colleagues as somewhat arcane, rarefied, and possibly not very relevant. However, this did change, and a fuller acceptance eventually came." Elias Stein [27, section 1.3 "Acceptance : 1957-1965" p 8].

### 1.1 De la mécanique quantique aux opérateurs pseudo-différentiels

La nécessité de comprendre les phénomènes non-commutatifs s'est fait pressante lorsque les physiciens ont commencé à manipuler, dans les années 20, la mécanique quantique. En effet, dans l'article [183, § 3] originel d'Hermann Weyl de 1927, on peut lire l'équation suivante :

$$[X, D] = XD - DX = i\hbar \text{Id}, \quad (1.1.1)$$

où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$  étant la constante de Planck), et où  $D, X$  sont respectivement les opérateurs non bornés de position et d'impulsion, soit :

$$Xf(x) = xf(x), \quad Df(x) = -i\hbar \partial_x f(x). \quad (1.1.2)$$

Toutefois l'équation (1.1.1) est antérieure à 1927 et remonte aux travaux de Dirac, Born et Jordan. Cette équation témoigne de la non commutativité des opérateurs  $X, D$  qui codent la position et la vitesse d'une particule, comme un électron. Dans ce qui suit nous prendrons  $\hbar = 1$ , sauf mention contraire. On rappelle [183, équation (2.6)] que c'est précisément Weyl qui a eu l'idée d'associer aux fonctions  $f$  vivant sur l'espace des phases  $\mathbb{R}^{2n}$  -  $n$  paramètres position,  $n$  paramètres vitesse - un opérateur auto-adjoint non borné, dont les propriétés spectrales rendraient a fortiori compte des propriétés de  $f$ . Cette association porte le nom de *quantification de Weyl* et les opérateurs (non bornés) auto-adjoints sont dits des *observables*.

Soit  $H$  un espace de Hilbert et on note  $\mathcal{L}_c(H)$  l'espace des endomorphismes linéaires continus sur  $H$ . Rappelons qu'un sous groupe unitaire fortement continu à un paramètre  $U : t \in \mathbb{R} \mapsto U(t) \in \mathcal{L}_c(H)$  est un morphisme à valeurs dans les opérateurs unitaires tel que pour tout  $x \in H$ ,  $t \mapsto U(t)x$  est continue. Il est connu, par le théorème de Stone [181, Théorème VIII.7 p 265, Théorème VIII 8. p 266], qu'il y a correspondance bijective entre :

$$\left\{ \text{Sous-groupes à un paramètre unitaires fortement continus sur } H \right\},$$

et

---

{ Opérateurs (possiblement non bornés) autoadjoints sur  $H$  }.

Cette correspondance s'effectue via l'application :

$$A \mapsto \left( t \mapsto U(t) := e^{itA} \right). \quad (1.1.3)$$

Weyl a alors l'idée de remplacer la relation dite de *commutation d'Heisenberg* (1.1.1) que l'on écrit avec le commutateur :

$$[pD, qX] = -ipq\text{Id}, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad (1.1.4)$$

par ce que l'on appelle aujourd'hui la relation de *commutation de Weyl* à savoir :

$$e^{ipD} e^{iqX} = e^{ipq} e^{iqX} e^{ipD}. \quad (1.1.5)$$

On pourra trouver une justification de cette formule dans les ouvrages de Hall, Thangavelu, Taylor et Bowers soit respectivement [104, équation (14.6) et (14.7) p 283], [213, p 2], [210, équation (1.13) p 43] et [21, § 8.4 p 121]. Il est aussi possible de montrer [210, équation (1.18) p 44], [104, équation (13.19) p 262, proposition 13.5 p 263] :

$$e^{i(pD+qX)} = e^{i\frac{qp}{2}} e^{iqX} e^{ipD}. \quad (1.1.6)$$

Un des processus de quantification est prescrit par la *transformée de Weyl*, voir le livre [238] de Wong. En effet, on rappelle que si  $\sigma$  est une "fonction sympathique" vivant sur l'espace des phases  $\mathbb{R}^2$  (une variable pour la position et l'autre pour la vitesse) à valeurs réelles alors on peut lui associer un opérateur auto-adjoint borné (selon le  $\sigma$  choisi, voir théorème 1.1.1) qui reflète les propriétés de  $\sigma$ . La procédure, décrite dans [80, "Weyl correspondence" p 79] et dans [104, section 13.3], consiste à postuler que les exponentielles  $(x, \xi) \mapsto e^{i(p\xi+qx)}$  correspondent précisément aux opérateurs  $e^{i(pD+qX)}$ . Grâce aux outils de l'analyse harmonique, c'est à dire la transformée de Fourier, on associe à une fonction Schwartz en les 2 variables  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$  représentée par l'intégrale :

$$\sigma(x, \xi) = \iint \hat{\sigma}(q, p) e^{i(p\xi+qx)} dq dp, \quad (1.1.7)$$

l'opérateur :

$$\sigma(X, D) = \iint \hat{\sigma}(q, p) e^{i(pD+qX)} dq dp, \quad (1.1.8)$$

où le lecteur devra comprendre le symbole  $\iint$  comme une intégrale itérée. Cet opérateur agit sur une fonction Schwartz  $f$  selon :

$$W_\sigma f(x) := \sigma(X, D) f(x) = \iint \hat{\sigma}(p, q) \left( e^{i(pD+qX)} f \right) (x) dq dp \quad (1.1.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint \sigma\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i(x-y)\cdot\xi} f(y) dy d\xi, \quad (1.1.10)$$

voir [238, équation (4.2) p 19]. Dans cette situation  $\sigma$  est dit le *symbole* de Weyl. L'application  $\sigma \mapsto W_\sigma$  est dite quantification de Weyl et  $W_\sigma$  est un exemple d'opérateur pseudo-différentiel soumis à une quantification par symétrisation<sup>1</sup>. Il existe d'autres types de quantification : la quantification à gauche, à droite et la notion d'amplitudes, consulter [81, section D chapitre 8 p 283], [104, section 13.3]. En fait la forme dans laquelle est écrite  $W_\sigma$  à l'équation (1.1.10) correspond précisément à [81, l'équation (8.22) p 284] de Folland où  $a(x, \xi, y) = \sigma\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)$  joue précisément le rôle d'une amplitude. On pourra aussi lire [168, l'exemple 4.7 p 191] du livre de Petersen qui traite du symbole de Weyl. Comme le souligne d'ailleurs Petersen [168, p 191] :

"The correspondence  $\sigma \mapsto W_\sigma$  has many properties which are nicer than the corresponding properties of the correspondence  $\sigma \mapsto \sigma(X, -iD)$  [des opérateurs pseudo-différentiels]. For example, the formal transpose of  $W_\sigma$  is  $W_{\tilde{\sigma}}$  where  $\tilde{\sigma}(x, \xi) = \sigma(x, -\xi)$ . As we shall see the formula for the symbol of the formal transpose of  $\sigma(X, -iD)$  is considerably more complicated."

La [168, p 194] montre aussi que le symbole de Weyl n'est pas idéal dans toutes les situations. Le lecteur pourra aussi lire la [213, section 1.3 p 10] de Thangavelu qui étudie la famille d'opérateurs  $\hat{f}(\pi_h)$  agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\pi_h$  une représentation de Schrödinger avec  $h \neq 0$  et  $f \in L^1(\mathbb{H}_n)$ . Avec la mesure de Plancherel, l'auteur rencontre la transformée de Weyl, [213, p 12 équation (1.3.8)].

---

1. A cause de l'apparition de la quantité  $\frac{x+y}{2}$  dans le symbole  $\sigma$ .

On note  $S(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions Schwartz. Soit  $f, g \in S(\mathbb{R})$ . On définit la transformée de Wigner, [238, équation (3.12) p 15] comme étant :

$$W(f, g)(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi \cdot v} f\left(x + \frac{v}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{v}{2}\right)} dv, \quad (1.1.11)$$

voir aussi l'article de Moyal [157] de 1949. Le [238, corollaire 3.4 p 16] montre que  $W$  s'étend en un opérateur bilinéaire sur  $L^2(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

La transformée de Wigner est reliée de près à la transformée de Weyl. En effet :

**Théorème 1.1.1.** [238, théorèmes 4.3 p 21, 4.4 p 22 et théorème 7.5 p 35] , [80, p80, proposition (2.5) p 81 et théorème (1.30) p 25 ]

Il existe un unique opérateur linéaire continu  $Q : \sigma \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto Q_\sigma \in \mathcal{L}_c^2(L^2(\mathbb{R}))$  qui soit une isométrie à valeurs dans les opérateurs Hilbert-Schmidt et elle est l'unique isométrie à satisfaire :

$$\langle Q_\sigma f, g \rangle = \iint \sigma(x, \xi) W(f, g)(x, \xi) dx d\xi, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.1.12)$$

De plus  $Q$  est autoadjoint si  $\sigma$  est réel. Lorsque  $f \in S(\mathbb{R})$  alors on a  $Q_\sigma(f) = W_\sigma(f)$ .

L'équation (1.1.12) est fondamentale : constatons que si  $f = g$  alors la transformée de Fourier-Wigner  $W(f, g)$  s'interprète comme une densité de probabilité. Ainsi  $\langle W_\sigma f, f \rangle$  correspond à la moyenne de l'observable  $W_\sigma$  dans l'état  $f = g$ . De plus cette moyenne est réelle car  $W_\sigma$  est autoadjoint pour  $\sigma$  à valeurs réelles<sup>2</sup>. On pourra lire [80, § Quantum Mechanics p 12] pour quelques mots sur le lien entre l'interprétation probabiliste et les opérateurs auto-adjoints.

Le théorème 1.1.1 admet des généralisations pour les classes de fonctions plus générales : les classes de symboles, voir [80, théorème (2.21) p 87]. Celles-ci seront d'un intérêt tout particulier dans ce manuscrit, notamment au chapitre 2. Enfin constatons que la transformée de Weyl joue bel et bien le rôle qui lui est prédestiné puisque :

$$\begin{cases} W_p &= D, \quad \sigma(p, q) = p \\ W_q &= X, \quad \sigma(p, q) = q. \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Nous regardons maintenant comment la transformée de Weyl agit comme moyen de quantification. Commençons par souligner que le monde des fonctions est commutatif, puisque ponctuellement,  $pq = qp$ . Cependant la traduction de la quantification d'un produit de fonctions n'est pas la composition des opérateurs de Weyl correspondant, sinon nous aurions :

$$W_{pq} = W_p W_q \quad (1.1.15)$$

et aussi :

$$W_{qp} = W_q W_p = W_{pq}. \quad (1.1.16)$$

---

2. En fait c'est un "si et seulement si" d'après le [238, théorème 7.5 p 35] :  $W_\sigma$  est auto-adjoint si et seulement si  $\sigma$  est réel. Très brièvement expliquons l'intérêt du calcul de Weyl. On pose pour  $\sigma \in S_{1,0}^m(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  dans les classes de symbole de type (1, 0), voir définition 1.3.5, l'opérateur pseudo-différentiel [238, équation (4.1) p20] :

$$T_\sigma(\phi) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \sigma(x, \xi) \phi(y) dy d\xi, \quad \phi \in S(\mathbb{R}). \quad (1.1.13)$$

Alors pour reprendre Wong [238, p 24] :

"Unfortunately, the pseudo-differential operator  $T_\sigma$  fails in general to be self-adjoint, despite the fact that  $\sigma$  is real-valued."

Ainsi [238, p 35] :

"Thus, a good model for the quantization  $\sigma(x, D)$  of the classical mechanical observable  $\sigma(x, \xi)$ , discussed at the end of Chapter 4, is  $W_\sigma$  instead of  $T_\sigma$ ."

Ceci est bien sûr impossible dans la mesure où les opérateurs  $W_p$  et  $W_q$  ne commutent pas, puisqu'ils quantifient précisément d'après (1.1.14) l'opérateur de dérivation, respectivement de multiplication. Ainsi pour palier ce problème, une astuce est de symétriser les opérateurs, soit :

$$W_{pq} = \frac{1}{2}(W_p W_q + W_q W_p). \quad (1.1.17)$$

Toutefois, il n'existe pas de quantification  $f \mapsto A_f$  qui satisfait :

$$A_{fg} = \frac{1}{2}(A_f A_g + A_g A_f), \quad (1.1.18)$$

comme le montre Folland à la [80, p 17]. On remarque aussi que l'on peut écrire (1.1.1) selon :

$$[W_q, W_p] = i\hbar W_{\{p,q\}}, \quad (1.1.19)$$

où  $\{p, q\}$  est le crochet de Poisson des deux fonctions  $p, q$  définies à [80, l'équation (1.2)]. De même c'est un résultat profond à savoir les théorèmes de Groenewold [97] (1946) et Van Hove [225] (1951) qui montrent qu'il n'existe pas de quantification  $f \mapsto A_f$  qui satisfait :

$$[A_f, A_g] = i\hbar A_{\{f,g\}}, \quad (1.1.20)$$

voir [80, "The Groenewold-van Hove Theorems" p 197]. La quantification de Weyl  $f \mapsto W_f$  réalise toutefois (1.1.20) pour les polynômes de degré plus petit ou égal à deux. Cette impossibilité d'avoir une quantification complète et a fortiori (1.1.20) porte parfois le nom de théorème de "no-go". On trouvera la définition d'une quantification complète dans le livre [180, définition 5.4.8] d'Abraham et Marsden et la preuve d'un théorème de "no-go" au [180, théorème 5.4.9 p 435]. Il est assez remarquable que la preuve (faite dans le cas unidimensionnel) se base sur le fait que le groupe  $SL_2(\mathbb{R})$  ne possède pas de représentations unitaires non triviales de dimension finie.

Il est aussi naturel de se demander si la composée de deux opérateurs de Weyl,  $W_f, W_g$  est un opérateur de  $W_k$  où  $k$  s'exprime en fonction de  $f, g$ . On montre que  $k$  est le symbole de Weyl dont la transformée de Fourier (lorsqu'elle existe) est donnée par le *produit de convolution tordu*, noté  $\star_t$  des transformées de Fourier des symboles  $f$  et  $g$  respectivement. A ce sujet le lecteur pourra lire la [98, section 2] de l'article de Grossmann, Loupias et Stein, ou le [238, chapitre 9, théorème 9.3 p 45] du livre de Wong, ou encore [80, section 3 "The product formula" p 103] du livre de Folland. En parallèle, on peut définir le *produit de Moyal #* (aussi dit *produit tordu*, voir [80, l'équation (2.44b)] agissant sur les fonctions et vérifiant :

$$\widehat{f\#g} = \hat{f} \star_t \hat{g}, \quad (1.1.21)$$

voir [80, p 104]. Ainsi la précédente discussion nous permet de dire :

$$W_f W_g = W_{f\#g}. \quad (1.1.22)$$

Il est remarquable voir [98, équation (16) p 349], [80, p 110] que pour  $f \in S_{1,0}^m, g \in S_{1,0}^{m'}$  - les classes de symboles de type (1, 0) respectivement d'ordre  $m$  et  $m'$ <sup>3</sup> - on ait :

$$f\#g = fg + c\{f, g\} \mod(S_{1,0}^{m+m'-2}), \quad (1.1.23)$$

pour  $c$  une constante. Pour les experts, la formule (1.1.23) est bien connue [81, corollaire (8.38) p 293] et dit que le développement asymptotique du symbole issu de la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels a pour premier terme le produit des symboles des deux opérateurs en question.

---

3. Nous restons volontairement flous ici, il s'agit moralement des fonctions  $f(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  à dérivées polynômialement bornées sur la variable  $\xi$ . Pour de plus amples précisions, consulter la définition 1.3.5.

Les effets de la non-commutativité que l'on a déjà rencontrés aux équations (1.1.4), (1.1.5), (1.1.19) se voient aussi dans la fameuse inégalité d'incertitude d'Heisenberg :

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.1.24)$$

qui se réinterprète en termes de commutateurs par :

$$\underbrace{\Delta q \Delta p}_{\text{fonctions sur l'espace des phases}} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \underbrace{[X, D]}_{\text{monde des observables}} \rangle|. \quad (1.1.25)$$

où  $\Delta q$ ,  $\Delta p$  représentent respectivement l'écart type de la position et de la vitesse de la particule et  $\langle \rangle$  la moyenne de l'observable<sup>4</sup>. Le fait que  $X, D$  ne commutent pas, traduit par  $[X, D] = i\hbar \text{Id}$  reflète ce qui a été constaté dans les expériences : lorsqu'un électron se déplace on ne peut connaître à la fois avec grande précision sa vitesse et sa position, c'est exactement ce que traduit l'inégalité (1.1.24). Or justement si on pouvait le faire, cela correspondrait à faire tendre  $\hbar \rightarrow 0$  de sorte que  $[X, D] = 0$ . Ceci traduirait que les opérateurs  $X, D$  commutent ! Ainsi, "modéliser mathématiquement" la mécanique quantique par des opérateurs auto-adjoints (non bornés) est une bonne approche vis à vis du principe d'incertitude d'Heisenberg.

## 1.2 Résumé des trois projets conduits au sein du manuscrit

On a précédemment remarqué que la transformée de Weyl est un exemple d'opérateur pseudo-différentiel. Nous avons aussi dit que l'intégrale (1.1.10) faisait sens pour des fonctions plus générales que des fonctions Schwartz, dites *symboles*, voir [238, chapitre 4].

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons en particulier aux opérateurs pseudo-différentiels *poly-homogènes*<sup>5</sup> qui sont définis avec des symboles *poly-homogènes*. Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Un symbole  $\sigma$  d'ordre  $m \in \mathbb{R}$ , noté  $\sigma \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , est une fonction  $\sigma \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  à dérivées polynomialement bornées en  $\xi$ . Plus précisément, on demande que pour tout compact  $K \subset U$ , pour tous multi-indices  $(\alpha, \beta)$  il existe une constante  $C_{K,\alpha,\beta} > 0$  pour que soit vraie :

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, |D_x^\beta D_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}. \quad (1.2.1)$$

A tout tel  $\sigma$ , on associe l'opérateur pseudo-différentiel :

$$Op(\sigma)(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \sigma(x, \xi) d\xi, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (1.2.2)$$

où  $\hat{f}$  désigne la transformée de Fourier de  $f$ .

Un symbole  $p \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est dit *poly-homogène* s'il admet en plus un développement asymptotique<sup>6</sup> par des fonctions homogènes d'ordre décroissant. Plus précisément, pour un tel symbole il existe des fonctions  $p_{m-j} \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  homogènes d'ordre  $m - j$  :

$$p_{m-j}(x, s\xi) = s^{m-j} p_{m-j}(x, \xi), \quad (1.2.3)$$

de sorte que pour tout entier  $N$  :

$$p(x, \xi) - \sum_{j=0}^N \chi(\xi) p_{m-j}(x, \xi) \in S_{1,0}^{m-N-1}(U \times \mathbb{R}^d), \quad (1.2.4)$$

où  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est une fonction cut-off lisse valant 0 sur un voisinage de l'origine et 1 aux infinis. L'ensemble des symboles *poly-homogènes* est noté  $S_{phg}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Ce développement asymptotique est l'analogue de la formule de Taylor en analyse, lire à ce sujet le début de la section 1.3.2. De même, à tout symbole *poly-homogène*  $p$ , on associe l'opérateur pseudodifférentiel  $Op(p)$  comme dans (1.2.2). Ainsi,  $Op(p)$  est par définition un opérateur pseudo-différentiel *poly-homogène* d'ordre  $m$ .

4. On rappelle que si  $A$  est une observable, c'est à dire, un opérateur auto-adjoint (possiblement non borné) alors la moyenne de  $A$  dans l'état  $\Psi$  est  $\langle A \rangle_\Psi = \langle A\Psi, \Psi \rangle$

5. On trouvera aussi la terminologie *classiques*.

6. Ou *expansion asymptotique* si l'on s'autorise les anglicismes.

La manipulation pratique des développements asymptotiques des symboles *poly-homogènes* peut se révéler particulièrement ardue, d'autant plus si l'on décide de définir les opérateurs pseudo-différentiels sur une variété lisse  $M$  car alors il faut s'assurer de l'indépendance de notre définition vis à vis des cartes locales. Ce genre de théorème porte le nom de "*théorème d'invariance par difféomorphisme*" dont les premières preuves ont été données par Seeley [201] en 1959, [161, section IV p 230] et Hörmander [111] en 1965. **Le premier projet de cette thèse vise à donner une définition alternative aux symboles *poly-homogènes* en utilisant une autre classe de fonctions vue dans une dimension supérieure et qui s'affranchit de la notion de développement asymptotique, avec  $\mathbb{R}^d$  muni d'une famille de dilatations à poids entiers.** Le théorème qui est résultera, [42, théorème 1.12], a pour but de :

1. Laisser transparaître l'approche groupoidale au calcul pseudo-différentiel sur les variétés filtrées de van Erp et Yuncken [223] de 2017.
2. Nous aider à montrer l'équivalence entre les travaux de Beals et Greiner [13] - où les auteurs définissent dans les années 80 un calcul pseudo-différentiel à la manière de Kohn, Nirenberg et Hörmander en utilisant des symboles poly-homogènes au sens de dilatations d'Heisenberg (1.2.12) - et les travaux de van Erp et Yuncken.

Expliquons rapidement les idées. Notons  $D^\alpha = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{\xi_d}^{\alpha_d}$ , avec  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un multi-indice. Un opérateur différentiel d'ordre  $m$  est de la forme :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad (1.2.5)$$

où  $a_\alpha \in C^\infty(U)$ . Il peut aussi être représenté par une intégrale (1.2.2) où :

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha, \quad (1.2.6)$$

son symbole, est polynomial en  $\xi$ . Ce polynôme en  $\xi$  n'est pas homogène d'ordre  $m$  au sens des dilatations triviales  $\delta_s(\xi) = s\xi$ <sup>7</sup>. Toutefois, ce polynôme est la restriction en  $t = 1$  d'une fonction  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  polynomiale sur les variables  $(\xi, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  et homogène d'ordre  $m$  pour la dilatation  $\tilde{\delta}_s(\xi, t) = (s\xi, st)$ , soit pour tout  $s > 0$  :

$$u(s, \tilde{\delta}_s(\xi, t)) - s^m u(x, \xi, t) = 0. \quad (1.2.7)$$

Il suffit en effet de pondérer les monômes d'ordre inférieur strict à  $m$  par une puissance de  $t$  adéquate. Inspirés par cette précédente observation, nous avons montré dans [42] que tout symbole *poly-homogène*  $p \in S_{phg}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est la restriction en  $t = 1$  d'une fonction  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  satisfaisant la condition d'homogénéité modulo Schwartz à savoir, pour tout  $s > 0$  :

$$u(s, \tilde{\delta}_s(\xi, t)) - s^m u(x, \xi, t) \in S(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) = C^\infty(U) \otimes S(\mathbb{R}^{d+1}), \quad (1.2.8)$$

où  $S(\mathbb{R}^{d+1})$  désigne l'espace de Schwartz usuel à  $d+1$  variables. Les fonctions  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  satisfaisant (1.2.8) sont dites homogènes modulo Schwartz d'ordre  $m$ . Ce résultat s'étend même à des dilatations à poids entiers sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^{d+1}$  :

$$\delta_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, (\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto (s^{\rho_1} \xi_1, \dots, s^{\rho_d} \xi_d), \quad (1.2.9)$$

$$\tilde{\delta}_s : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, (\xi, t) \mapsto (\delta_s(\xi), st), \quad (1.2.10)$$

où le  $d$ -uplet  $(\rho_1, \dots, \rho_d) \in (\mathbb{N}^*)^d$ , voir [42]. Lorsque les poids sont tous égaux à un, on dit que les dilatations précédentes sont triviales.

Ces dilatations à poids entiers apparaissent naturellement dans l'étude des opérateurs différentiels sur les groupes de Lie gradués et plus généralement sur les variétés filtrées, décrites chez Melin [149] en 1982. En effet, dans une seconde partie de ce manuscrit, nous allons travailler avec les variétés d'Heisenberg qui sont des variétés filtrées de pas deux, dont le fibré tangent admet une filtration en hyperplans. Plus précisément,

7. Nous pourrions dire "*dilatations simples*" mais nous choisissons délibérément l'adjectif "*trivial*".

une telle variété, disons de dimension  $d + 1$ , est la donnée d'un sous-fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  (chaque fibre a codimension 1 dans les espaces tangents) dont les sections satisfont :

$$[\Gamma^\infty(\mathcal{V}), \Gamma^\infty(\mathcal{V})] \subset \Gamma^\infty(TM), \quad (1.2.11)$$

où  $[ , ]$  est crochet de Lie sur les sections lisses  $\Gamma^\infty(TM)$  du fibré tangent  $TM$ . Dans le cas d'une filtration de pas deux, la condition (1.2.11) ci-dessus est automatiquement satisfaite.

Les variétés de contact dont les variétés  $CR$  forment un sous-ensemble, les feuilletages de codimension 1, les variétés *modèles*  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  où  $\mathbb{H}_n$  est le groupe d'Heisenberg, sont des exemples de variétés d'Heisenberg. Associées à ces objets, les dilatations d'Heisenberg :

$$\delta_s : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, (\xi_1, \dots, \xi_{d+1}) \mapsto (s^2\xi_1, s\xi_2, \dots, s\xi_{d+1}), \quad (1.2.12)$$

apparaissent dans des travaux des années 70 de Folland, Stein, Rothschild [83], [77], [188], [84], [79, p 917-919] alors que les auteurs Folland et Stein, par exemple, calculent les solutions fondamentales de l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{L}_\mu = -\frac{1}{2}\Delta_H + i\mu Z, \quad (1.2.13)$$

sur  $\mathbb{H}_n$ . Au delà des opérateurs différentiels sur la structure commutative de  $\mathbb{R}^d$  qui a été bien explorée dans les années 50-60, il apparaît dans la seconde moitié du 20ième siècle des opérateurs sur des structures non commutatives issus de l'analyse complexe en dimension  $n > 1$ , comme l'opérateur Kohn-Laplacien  $\square_b$  ou l'opérateur de Cauchy-Riemann complexe tangential  $\bar{\partial}_b$  introduit par Kohn et Rossi [129] en 1965. La résolution d'EDP mettant en jeu ces opérateurs est très reliée aux propriétés géométriques de domaines de  $\mathbb{C}^n$ <sup>8</sup>, voir [33], [22], [211, chapitre 12]. On peut par exemple montrer que l'opérateur  $\square_b$ , dont l'étude est étroitement reliée aux opérateurs (1.2.13), satisfait une  $\frac{1}{2}$ -estimée sous-elliptique sur la frontière d'un domaine *fortement pseudoconvexe* et y donc est hypo-elliptique, [22, p 30-31].

Rappelons qu'un opérateur différentiel est dit *hypo-elliptique* s'il possède la propriété régularisante suivante :

Soit  $u \in \mathcal{E}'(U)$  une distribution à support compact sur un ouvert  $U$  alors pour tout ouvert  $V \subset U$  on a  $u \in C^\infty(V)$  là où  $Pu \in C^\infty(V)$ .

Pour montrer l'hypo-ellipticité de certains opérateurs différentiels, on peut compter sur l'utilisation de la notion de solution fondamentale, le calcul d'estimées *a priori*, ou encore l'utilisation de certains théorèmes d'Hörmander [109], [112]. L'étude des opérateurs différentiels à coefficients non constants (lisses) s'avère néanmoins difficile et il n'existe pas de théorème général pour déterminer l'hypo-ellipticité. En 1978, Rockland [184] publie un article qui relie la théorie des représentations du groupe nilpotent  $\mathbb{H}_n$  et le caractère hypo-elliptique des opérateurs différentiels homogènes invariants à gauche par translation sur  $\mathbb{H}_n$ . Ceci est un pas important qui va ouvrir la voie vers d'autres généralisations, d'abord sur les groupes nilpotents généraux par Helffer et Nourrigat [105] en 1979 puis, plus récemment sur les variétés filtrées par Daver et Haller [47] en 2017. Dans les années 80, Taylor [209] et Beals et Greiner (BG) [13] traitent des opérateurs sur des groupes de Lie gradués de pas deux (pour étudier les opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés de contact), respectivement sur les groupes gradués "*modèles*"  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  (pour étudier les opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés d'Heisenberg). Dans les années 90, Christ, Geller, Glowacki et Polin [35] étudient les opérateurs pseudo-différentiels sur les groupes de Lie gradués.

Soit  $M$  une variété d'Heisenberg de dimension  $d+1$  et  $U$  un ouvert de  $M$  identifié à  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Soit  $(X_j)_{j \in \{0, \dots, d\}}$  des champs de vecteurs locaux sur  $U$  d'ordre 1 tels que  $(X_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$  génèrent le sous-fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  de  $TM$ . Les travaux de Beals et Greiner leur permettent notamment de réétudier l'opérateur  $\square_b$  sur une variété  $CR$ , [13, chapitre 4] et de donner une condition précise pour qu'un opérateur de la forme :

$$P = -\sum_{j=1}^d X_j^2 - i\lambda X_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j X_j + c_1, \quad (1.2.14)$$

8. (*fortement*) *pseudo-convexes*, domaines d'holomorphie pour les nommer.



où  $\lambda, (\gamma_j), c_1$  sont des fonctions à valeurs complexes, soit hypo-elliptique, [13, Théorème (18.4) p 141], en l'approchant en chaque point  $y \in U$  par un opérateur différentiel invariant à gauche par translation sur un groupe modèle  $\mathbb{H}_{n_y} \times \mathbb{R}^{m_y}$ ,  $2n_y + m_y = d$  :

$$P^y = - \sum_{j=1}^d (X_j^y)^2 - i\lambda(y)X_0^y, \quad (1.2.15)$$

qui joue le rôle d'un opérateur différentiel à coefficients constants. On rappelle en effet que dans le cadre commutatif de  $\mathbb{R}^d$ , à tout opérateur différentiel de la forme (1.2.5), on associe une famille d'opérateurs à coefficients gelés :

$$P^x = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (1.2.16)$$

qui n'est autre qu'une famille d'opérateurs à coefficients constants, a fortiori invariants à gauche par translation sur le groupe  $(\mathbb{R}^d, +)$ . Beals et Greiner créent en particulier, [13, section 10 p 90], un calcul pseudo-différentiel qui contient les paramétrixes des opérateurs non-elliptiques hypo-elliptiques de la forme (1.2.14). Les opérateurs pseudo-différentiels, dans le calcul de Beals et Greiner, dits  $\mathcal{V}$ -opérateurs, sont notés  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(M)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Ils sont définis à la façon d'Hörmander [111], Kohn et Nirenberg [128] par des  $\mathcal{V}$ -symboles et d'une intégrale similaire à (1.2.2). Les classes de  $\mathcal{V}$ -symboles sont incluses dans les classes de symbole  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  d'Hörmander, [13, proposition (10.22) p 92].

**Le second projet de cette thèse vise à démontrer l'équivalence entre le calcul groupoïdal de van Erp et Yuncken et celui de Beals et Greiner dans le cadre des variétés d'Heisenberg.**

Donnons les grandes idées. Dans les années 80-90 Connes souligne l'importance du groupoïde tangent :

$$\mathbb{T}M = M \times M \times \{0\} \bigcup TM \times \{0\}, \quad (1.2.17)$$

qui déforme et recolle de façon  $C^\infty$  en 0 le noyau de Schwartz d'un opérateur pseudo-différentiel, vu comme une distribution sur le groupoïde des paires  $M \times M$  et son symbole principal, vu comme une fonction lisse sur le fibré cotangent de  $M$ , [226, définition 2.1.11 p 53]. En 2014, Debord et Skandalis [52] utilisent les groupoïdes adiabatiques, dont fait partie  $\mathbb{T}M$ , et une action - dite *action de Debord-Skandalis*, ou *zoom action* - pour construire les opérateurs pseudo-différentiels polyhomogènes. En parallèle de ces travaux, Lescure, Manchon et Vassout (LMV) [138] généralisent en 2014 le théorème des noyaux de Schwartz pour des submersions lisses  $\pi : M \rightarrow B_M$  et étudient les distributions  $\pi$ -fibrées  $\pi$ -proprement supportées qui sont des applications linéaires  $C^\infty(B_M)$ -linéaires continues :

$$u : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(B_M). \quad (1.2.18)$$

L'article de Lescure, Manchon et Vassout se spécialise particulièrement au cas où  $\pi$  est l'application source ou but d'un groupoïde de Lie.

Inspirés par ces précédentes idées, van Erp et Yuncken (vEY) construisent un calcul groupoïdal sur les variétés filtrées. Tout d'abord, dans la même veine que Ponge [173] (pour les variétés d'Heisenberg), Choi et Ponge [34] (pour les variétés filtrées), van Erp et Yuncken construisent une généralisation du groupoïde tangent (1.2.17) pour une variété filtrée [224]. Il s'agit du groupoïde  $H$ -tangent :

$$\mathbb{T}_H M = M \times M \times \{0\} \bigcup \mathcal{T}_H M \times \{0\}, \quad (1.2.19)$$

où  $\mathcal{T}_H M$  est le groupoïde osculant, un fibré (non trivial) en groupes de Lie gradués nilpotents connexes simplement connexes qui vient remplacer le fibré tangent  $TM$  de (1.2.17), fibré (non trivial) en groupes de Lie abéliens. Les auteurs définissent ensuite les distributions  $r$ -fibrées essentiellement homogènes pour l'action de Debord-Skandalis, où  $r$  désigne l'application but<sup>9</sup> du groupoïde tangent  $\mathbb{T}_H M$ , qui est en particulier une submersion lisse [223]. Cet espace peut être vu comme l'analogie des fonctions homogènes modulo-Schwartz (1.2.8) dans le monde des groupoïdes. Alors ils définissent les opérateurs  $H$ -pseudo-différentiels comme la

9. La lettre  $r$  désignant la première lettre du mot anglais "range".

restriction en  $t = 1$  d'une telle précédente distribution  $r$ -fibrée sur laquelle on impose la condition d'être "*essentiellement homogène*", condition analogue à (1.2.8), dans le monde du groupoïde tangent (filtré). Ces éléments sont notés  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$ . Ce résultat peut être vu comme l'analogie de notre théorème de prolongement des  $G$ -symboles en les fonctions homogènes modulo Schwartz considérées dans une dimension supérieure, où l'axe  $\mathbb{R}$  qui paramétrise les groupoïdes tangents (1.2.17), (1.2.19) jouerait précisément le rôle de cette dimension supérieure. Un résultat important de van Erp et Yuncken est que leur calcul coïncide avec celui de Kohn-Nirenberg et d'Hörmander dans le cadre des variétés trivialement filtrées (de pas un). Nous nous sommes donc intéressés aux filtrations de pas deux, c'est à dire aux filtrations d'Heisenberg et avons ainsi montré [42], dans le cas où  $M$  est une variété de contact, un feuilletage de codimension un, une variété modèle, l'équivalence entre le calcul groupoïdal et celui de Beals et Greiner :

$$\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1} = \Psi_{\mathcal{V}}^m(M), m \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.20)$$

**Le troisième projet de cette thèse vise à donner une définition groupoïdale du résidu de Wodzicki.**

Un objet intéressant en théorie des opérateurs pseudo-différentiels est le résidu non commutatif de Wodzicki, défini en 1984 dans la thèse [236] de ce dernier. Le résidu non commutatif est aussi défini indépendamment en 1985 par Guillemin, [101, définition 6 p 151]. Cet objet se révèle très intéressant pour ces liens avec d'autres objets de la géométrie non commutative, telle que la trace de Dixmier [57] - une trace exotique née en 1966 - avec laquelle elle peut coïncider selon un théorème de Connes [39] de 1988. Nous proposons, dans [43], un analogue du résidu de Wodzicki pour les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre inférieur ou égal à  $-d_H$ , où  $d_H$  désigne la dimension homogène de la variété : c'est ce que nous avons appelé le "*résidu groupoïdal*", voir définition 7.2.6. Celui-ci, défini à partir du cocycle d'une distribution  $r$ -fibrée sur  $\mathbb{T}_H M$  essentiellement homogène au sens de l'action de Debord-Skandalis, prolonge la version du résidu de Wodzicki pour les variétés filtrées. En effet nous montrons que ce résidu groupoïdal coïncide avec celui de Wodzicki dans le cas des variétés trivialement filtrées, voir théorème 7.4.2. Nous montrons aussi que le résidu groupoïdal est une trace pour les opérateurs d'ordres adaptés, à l'instar du résidu de Wodzicki, voir théorème 7.3.2.

Ponge [174] a aussi défini en 2007 le résidu non commutatif pour les variétés d'Heisenberg et les opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels du calcul de BG [174]. Nous avons montré, grâce encore une fois au théorème 1.3.21 sur le prolongement des  $G$ -symboles, que le résidu groupoïdal coïncidait avec celui de Ponge dans le cas des variétés de contact, des feuilletages de codimension un et des variétés modèles, voir théorème 7.5.2.

**En résumé :**

L'approche groupoïdale au calcul pseudo-différentiel que nous avons incorporé à ces deux derniers projets dans le cadre de certaines variétés d'Heisenberg a pour but de s'affranchir de la notion de carte locale et de coordonnées privilégiées, et de donner une définition intrinsèque aux objets, concepts définis sur de telles variétés.

## 1.3 État de l'art des opérateurs pseudo-différentiels

### 1.3.1 Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels : des noyaux aux symboles

Dans ce qui suit, la notation  $\mathcal{D}'$  désigne les distributions sur un espace donné et la notation  $\mathcal{E}'$  désigne les distributions à support compact sur un espace donné. On note  $S(\mathbb{R}^d)$  l'espace de Schwartz sur  $\mathbb{R}^d$  et  $S'(\mathbb{R}^d)$ , son dual, c'est à dire les distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^d$ . On dénote par  $C^\infty$  les fonctions lisses sur un espace donné et  $C_c^\infty$  les fonctions lisses à support compact. On rappelle enfin les notations conventionnelles suivantes. Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un  $d$ -multi-indice, on note :

$$(i\xi)^\alpha = i^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}, \quad (1.3.1)$$

$$D^\alpha = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{\xi_d}^{\alpha_d}. \quad (1.3.2)$$

On définit la famille  $s > 0$ -paramétrée de dilatations à poids sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$\delta_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, (\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto (s^{\rho_1} \xi_1, \dots, s^{\rho_d} \xi_d), \quad (1.3.3)$$

et sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  :

$$\tilde{\delta}_s : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, (\xi, t) \mapsto (\delta_s(\xi), st), \quad (1.3.4)$$

où le  $d$ -uplet<sup>10</sup>  $(\rho_1, \dots, \rho_d) \in (\mathbb{N}^*)^d$ . Si tous les poids sont égaux à un alors les dilatations sont dites triviales.

**Important :** Lorsque  $\mathbb{R}^d$  est muni des dilatations (1.3.3), la "longueur graduée" d'un multi-indice  $\alpha$  est définie par :

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^d \rho_k \alpha_k, \quad (1.3.5)$$

ce qui correspond bien sûr, dans le cas des dilatations triviales, à la longueur usuelle :

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k. \quad (1.3.6)$$

**Définition 1.3.1.** Fonctions homogènes d'ordre  $m$

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. On définit l'espace des fonctions homogènes d'ordre  $m$ , noté  $\mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , comme l'espace des fonctions  $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  de sorte que pour tout  $x \in U$ , tout  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , on ait :

$$f(x, \delta_s(\xi)) = s^m f(x, \xi), \quad (1.3.7)$$

où  $\delta_s$  sont les dilatations à poids (1.3.3).

La transformation de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix \cdot \xi} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad (1.3.8)$$

que l'on notera aussi  $\mathcal{F}(f)$  au besoin, est l'un des outils les plus importants pour étudier les opérateurs différentiels, car elle entrelace l'opérateur de dérivation et de multiplication :

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi), \quad f \in S(\mathbb{R}^d). \quad (1.3.9)$$

De cette façon on peut faire correspondre l'opérateur  $\partial_j$  au monôme  $i\xi_j$ . Nous voulons généraliser cette correspondance entre les opérateurs différentiels à coefficients lisses  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ,  $a_\alpha \in C^\infty(U)$  et l'algèbre des fonctions  $C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  polynomiales à  $d$  variables  $(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ , lisses sur la variable  $x \in U$ .

**Définition 1.3.2.** Opérateur différentiel, symbole principal

On appelle opérateur différentiel d'ordre  $m \in \mathbb{N}$  sur  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert, l'opérateur linéaire  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ , où les fonctions lisses  $a_\alpha$  sont définies sur l'ouvert  $U$ . On définit le symbole de  $P$  par :

$$\sigma(P)(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha, \quad (1.3.10)$$

et le symbole principal  $\sigma^m(P) \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  comme étant la fonction homogène d'ordre  $m$  définie par :

$$\sigma^m(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha. \quad (1.3.11)$$

On pourra aussi noter parfois  $Op(\sigma(P))$ , en connaissance du symbole  $\sigma(P)$  de l'opérateur  $P$ . Le symbole  $\sigma(P)$  est simplement noté  $\sigma$  lorsque le contexte le permet. Par convention un opérateur différentiel d'ordre 0 est un opérateur de multiplication par une fonction lisse.

10. Nous attachons aux champs de vecteurs sur un groupe de Lie (homogène) définissant un opérateur différentiel invariant à gauche par translation une notion d'ordre. Ces familles de dilatations à poids entiers opèrent sur les champs vectoriels de l'algèbre de Lie associée à ce groupe, "mesurant le poids de ces champs". Dans le cas d'une variété filtrée, nous construirons une structure dite algébrique osculante, un fibré (non trivial) en algèbre de Lie graduées nilpotentes, munie d'une famille de dilatation qui permettra aussi de regarder les symboles principaux des opérateurs différentiels sur de telles variétés.

**Remarque 1.3.3.** Dans la définition 1.3.2,  $\sigma^m(P)$  est une fonction homogène lisse en 0 car polynomiale. En particulier, l'équation (1.3.7) se prolonge en  $\xi = 0$ . On fera donc ce petit abus de langage lorsque l'on parlera des symboles principaux des opérateurs différentiels.

On utilise la représentation intégrale de Fourier pour décrire l'action d'un opérateur différentiel  $P$  sur une fonction lisse. Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  alors :

$$Pf(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(P)(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (1.3.12)$$

Détaillons rapidement ce calcul :

$$\mathcal{F}(Pf)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{F}(a_\alpha(x) D^\alpha f)(\xi) \quad (1.3.13)$$

$$\stackrel{(1.3.9)}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha \hat{f}(x) \quad (1.3.14)$$

$$= \sigma(P)(x, \xi) \hat{f}(\xi). \quad (1.3.15)$$

D'où la conclusion en prenant la transformée de Fourier inverse.

**Exemple 1.** 1. Le laplacien  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}^d$  a symbole  $\sigma^2(x, \xi) = -|\xi|^2$ .

2. L'opérateur de la chaleur  $P = \partial_t - \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  a symbole  $\sigma^2(x, \xi, \eta) = i\eta + |\xi|^2$ , avec  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

3. L'opérateur des ondes  $P = \partial_t^2 - c^2 \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  a symbole  $\sigma^2(x, \xi, \eta) = -\eta^2 + c^2 |\xi|^2$ , avec  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

Les classes de symboles, qui ont pour but de généraliser les symboles (1.3.10) des opérateurs différentiels, sont définies respectivement par Kohn et Nirenberg [128] en 1965 et par Hörmander [108] (article "Seminar notes on pseudo-differential operators and boundary problems" constituant les notes du séminaire de 1965-1966), [111]. Dans [108], Hörmander cite également deux étudiants de Schwartz qui ont étudié les classes de symboles  $S_{1,0}^m$ <sup>11</sup> :

"Two students of Schwartz, Unterberger and Bokobza have carried out a study of the operators defined by arbitrary functions of this kind."

Nous allons légitimer l'étude de ces classes de symboles au détour des notions d'ellipticité et de paramétrix qui émergent naturellement dans l'étude des opérateurs différentiels. Prenons l'équation :

$$Pu = f, \quad (1.3.16)$$

avec  $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ ,  $f \in S(\mathbb{R}^d)$  et  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$ . On peut prendre la transformée de Fourier de (1.3.16). Il vient le fameux "division problem" [218, chapitre 1, section 1 p 2] :

$$\sigma(P)\hat{u} = \hat{f}, \quad (1.3.17)$$

et donc de façon formelle, l'intégrande n'étant pas forcément intégrable, on peut écrire :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\xi)}{\sigma(P)(\xi)} e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (1.3.18)$$

Concrétisons cela par un exemple. Prenons l'équation acoustique d'Helmholtz unidimensionnelle à savoir l'équation aux valeurs propres du laplacien :

$$\Delta u = -\lambda^2 u, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.3.19)$$

L'opérateur différentiel  $P = \Delta + \lambda^2 Id$  a pour symbole la fonction polynomiale  $\sigma(P) : \xi \mapsto \lambda^2 - \xi^2$ . De fait, l'équation (1.3.18) se réécrit :

11. On pourra lire l'introduction de l'article [18] de Bokobza de 1969 ou encore l'article [219] d'Unterberger et Bokobza de 1965.

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{\lambda^2 - \xi^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (1.3.20)$$

Les racines de la fonction polynomiale  $\sigma(P) : \xi \mapsto \lambda^2 - \xi^2$  sont incluses dans un compact (en dimension un, elles sont même de cardinal fini). Concrètement, cette propriété vient du fait que pour tout  $\xi \neq 0$  on a  $\sigma^2(P)(\xi) = -\xi^2 \neq 0$ . Elle se généralise en dimension  $d > 1$  [218, lemme 1.1]. Cela nous conduit à définir :

**Définition 1.3.4.** Opérateur différentiel elliptique

Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients lisses sur  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. On dit que  $P$  est elliptique si pour tout  $x \in U$  son symbole principal vérifie :

$$\sigma^m(P)(x, \xi) \neq 0, \text{ si } \xi \neq 0. \quad (1.3.21)$$

**Exemple 2.** On reprend les opérateurs de l'exemple 1

1. Le laplacien  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}^d$  est elliptique.
2. L'opérateur de la chaleur  $P = \partial_t - \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  n'est pas elliptique.
3. L'opérateur des ondes  $P = \partial_t^2 - c^2 \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  n'est pas elliptique.

Remarquons que sans cette condition (1.3.21), les racines d'un polynôme en dimension  $d > 1$  ne sont plus incluses dans un compact. Il suffit de prendre l'opérateur  $P = \partial_{x_1} \partial_{x_2}$  de symbole  $\sigma(P) = -\xi_1 \xi_2$ . Ainsi, lorsque l'opérateur est elliptique, son symbole n'est pas loin d'être inversible : il est inversible modulo une fonction cut-off lisse.

En effet, supposons que  $P$  dans (1.3.16) soit un opérateur elliptique à coefficients constants, notons  $K$  la boule fermée de centre 0 qui contient ses racines. On se donne une fonction cut-off lisse  $\chi_K$  valant 0 sur  $K$  et 1 aux infinis. Intuitivement un inverse de  $P$  serait l'opérateur défini comme l'intégrale contre l'inverse de son symbole :

$$\tilde{Q}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2 - \xi^2} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad (1.3.22)$$

mais on a dit que cette intégrale n'était pas forcément bien définie. Toutefois on peut considérer le "pseudo-inverse" :

$$Qf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2 - \xi^2} \chi_K(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (1.3.23)$$

On montre, voir [218, p4-5] que :

$$PQ - Id, \quad QP - Id : \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.3.24)$$

Ces deux opérateurs sont dits régularisants, ils ont un noyau de Schwartz lisses en les deux variables, voir la définition 1.3.13 et la proposition 3.3.3. Il ne s'agit pas d'un inverse usuel, nous n'avons pas :

$$PQ = Id, \quad QP = Id. \quad (1.3.25)$$

On dit que c'est un inverse *modulo les opérateurs régularisants* et l'opérateur  $Q$  s'appelle une *paramétrix* de  $P$ . Une autre façon de voir une paramétrix d'un opérateur différentiel  $P$  est comme une perturbation du Dirac [218, équation (1.12) p 5] [208, p 4], tandis qu'une solution fondamentale  $E$  de  $P$  ne le perturbe pas :

$$PE = \delta_0, \quad (1.3.26)$$

voir l'appendice E.1 pour des pré-requis sur la notion de solution fondamentale.

De la même façon que les opérateurs différentiels ont un symbole qui leur est associé dans la représentation intégrale de Fourier, il paraît naturel de définir le "symbole" de l'opérateur  $Q$  comme :

$$\sigma(Q)(\xi) = \frac{1}{\lambda^2 - \xi^2} \chi_K(\xi). \quad (1.3.27)$$

Ce n'est plus un polynôme en  $\xi$ , mais conceptuellement l'inverse d'un polynôme. La fonction  $\sigma(Q)$  demeure toutefois lisse et à dérivées polynomialement bornées en  $\xi$ . Voilà donc qui motive :

**Définition 1.3.5.** Symbole  $S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , opérateurs pseudo-différentiels [208, définition 1.1 p 37], [36, définition 1 p 29]

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On désigne par  $S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  l'ensemble des symboles  $\sigma$  d'ordre  $m$ , consistant en les fonctions de classe  $C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  telles que, pour tout compact  $K \subset U$ , pour tous multi-indices  $(\alpha, \beta)$  il existe une constante  $C_{K,\alpha,\beta} > 0$  pour que soit vraie :

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, |D_x^\beta D_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}. \quad (1.3.28)$$

On note  $S_{1,0}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . A un symbole  $\sigma$ , on associe un opérateur pseudo-différentiel :

$$Op(\sigma)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.3.29)$$

L'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels  $Op(\sigma)$  de symbole  $\sigma \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est noté  $\Psi_{1,0}^m(U)$  pour  $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

**Exemple 3.** 1. Il est clair que les symboles (1.3.10) des opérateurs différentiels d'ordre  $m$  à coefficients lisses sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$  sont contenus dans la classe  $S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

2. On peut vérifier que  $\sigma(Q) \in S_{1,0}^{-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , où  $\sigma(Q)$  est définie à l'équation (1.3.27).

D'ailleurs, ces classes de symboles permettent d'étendre la formule (1.3.12) à des fonctions  $\sigma$  (potentiellement) non polynomiales en  $\xi$ . Tandis que l'algèbre des polynômes à plusieurs variables n'est pas stable par passage à l'inverse, celle des symboles l'est, voir [208, proposition 1.3 p 37]. En conséquence, le but de ces classes est de contenir les symboles des paramétrixes d'un opérateur différentiel elliptique  $P$ , qui sont moralement des inverses de polynômes. Les opérateurs pseudo-différentiels possèdent les propriétés suivantes :

**Théorème 1.3.6.** [208, théorème 1.5 p 38], [1, théorème 5.12 p 134]

Soit  $\sigma \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  où  $U \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert. L'opérateur défini à l'équation (1.3.29) vérifie :

1. être un opérateur continu :

$$Op(\sigma) : C_c^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U). \quad (1.3.30)$$

2. s'étendre en un opérateur continu :

$$Op(\sigma) : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(U). \quad (1.3.31)$$

Si  $U = \mathbb{R}^d$ , l'opérateur défini à l'équation (1.3.29) vérifie ([239, prop 6.7 p 35], [1, section 5.4 p 133]) :

1. être un opérateur continu :

$$Op(\sigma) : S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d). \quad (1.3.32)$$

2. s'étendre en un opérateur continu :

$$Op(\sigma) : S'(\mathbb{R}^d) \rightarrow S'(\mathbb{R}^d). \quad (1.3.33)$$

**Définition 1.3.7.** Opérateur pseudo-local

Soit  $P : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$  un opérateur. On dit que  $P$  est pseudo-local lorsque :

$$\text{singsupp } Pu \subset \text{singsupp } u, \quad u \in \mathcal{E}'(U), \quad (1.3.34)$$

où  $\text{singsupp}$  désigne le support singulier d'une distribution, soit le complémentaire du plus grand ouvert où cette distribution s'identifie à une fonction lisse <sup>12</sup>.

**Théorème 1.3.8.** *Pseudolocalité [208, théorème 2.1], [81, théorème (8.9) p 273]*

Soit  $\sigma \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  alors l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $Op(\sigma)$  est pseudo-local.

**Remarque 1.3.9.** *La terminologie "pseudo-différentiel" est justifiée comme suit. Selon Bianchi dans [16], le préfixe "pseudo" fait référence au caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels dans le sens où :*

*"Pu does not have more singularities than u or perhaps the fact that P might not be local."*

*Pour reprendre les mots d'Hörmander dans [108], Friedrichs serait à l'initiative de cette terminologie :*

*"Since no singularities are visible any longer it is natural to talk about pseudo-differential operators - a term suggested by Friedrichs - instead of singular integral operators."*

Hörmander a, quant à lui, défini des classes plus générales : les classes  $S_{\rho,\delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  dont nous motivons l'intérêt en nous inspirant des notes de son séminaire [108] de 65-66.

**Définition 1.3.10.** Opérateur pseudo-différentiel hypo-elliptique

On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel  $P \in \Psi_{1,0}^m(U)$  est hypo-elliptique lorsque pour tout  $u \in \mathcal{E}'(U)$  on a :

Pour tout ouvert  $V \subset U$  où  $Pu$  est lisse alors  $u \in C^\infty(V)$ .

**Théorème 1.3.11.** *Hörmander 1963 [114], [218, théorème 1.1 p 218], [208, théorème 2.1 p 62], [81, théorème 6.36 (H4) p 216]*

*Un opérateur différentiel  $P$  d'ordre  $m$  à coefficients constants est hypoelliptique si et seulement si il existe  $\rho > 0$  et deux constantes  $C, R \geq 0$  telle que pour tout multi-indice  $\alpha$ , pour tout  $|\xi| \geq R$  :*

$$\left| \frac{\sigma(P)^{(\alpha)}(\xi)}{\sigma(P)(\xi)} \right| \leq C(1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha|}, \quad (1.3.35)$$

où  $\sigma(P)^{(\alpha)} = D^\alpha \sigma(P)$ , voir l'équation (1.3.2).

Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients constants. D'après le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, il existe une solution fondamentale notée  $E$ , voir l'appendice E.1. En utilisant la transformée de Fourier dans (1.3.26) on voit que la transformée de Fourier de cette distribution  $E$  doit être donnée moralement par  $\hat{E}(\xi) = \frac{1}{\sigma(P)(\xi)}$ , sous réserve d'ignorer que  $\sigma(P)$  peut s'annuler au voisinage de l'origine. Supposons que  $P$  soit hypo-elliptique. Alors, avec le théorème précédent pour  $|\alpha| = m$  de sorte que  $\sigma(P)^{(\alpha)}$  est une constante non nulle, l'équation (1.3.35) donne que pour  $|\xi| \geq R$  :

$$|\hat{E}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\rho m}. \quad (1.3.36)$$

Plus généralement <sup>13</sup> pour tout multi-indice  $\alpha$  :

12. Par exemple,  $\text{singsupp}(\delta_0) = \text{singsupp}(vp(\frac{1}{x})) = \{0\}$ , où  $vp(\frac{1}{x})$  est la distribution valeur principale, voir la section D.

13. Voici une esquisse de preuve pour un multi-indice de longueur 2 qui dérive sur les variables  $\xi_j, \xi_i$  c'est à dire  $D^\alpha = \partial_j \partial_i$ . Pour  $\xi$  grand, on a :

$$|\partial_j \partial_i \hat{E}(\xi)| = \left| \partial_j \left( \frac{-\partial_i \sigma(P)(\xi)}{\sigma(P)(\xi)^2} \right) \right| \quad (1.3.37)$$

$$= \left| \frac{-\partial_{i,j} \sigma(P)(\xi) \sigma(P)(\xi) + 2\partial_i \sigma(P)(\xi) \partial_j \sigma(P)(\xi)}{\sigma(P)(\xi)^3} \right| \quad (1.3.38)$$

$$\stackrel{\leq}{\underbrace{(1.3.35)}} \frac{1}{|\sigma(P)(\xi)|} C(1 + |\xi|)^{-2\rho} + 2 \frac{1}{|\sigma(P)(\xi)|} C^2(1 + |\xi|)^{-2\rho} \quad (1.3.39)$$

$$\stackrel{\leq}{\underbrace{(1.3.36)}} C_\alpha (1 + |\xi|)^{-(m+|\alpha|)\rho}, \quad (1.3.40)$$

où  $C_\alpha$  est une nouvelle constante dépendant de la constante  $C > 0$ .

$$|D^\alpha \hat{E}(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-(m+|\alpha|)\rho}, \quad C_\alpha > 0, \quad (1.3.41)$$

voir [218, p 219]. Trèves [218, exemple 1.1 p 219] propose l'exemple de l'opérateur de la chaleur sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  qui satisfait l'inégalité (1.3.35) pour  $\rho = \frac{1}{2}$ . En effet pour  $d = 1$ ,  $\sigma(P)(\eta, \xi) = -i\eta + \xi^2$  et  $\alpha = (0, 2)$  on vérifie que :

$$\left| \frac{\sigma(P)^{(\alpha)}(\eta, \xi)}{\sigma(P)(\eta, \xi)} \right| = \left| \frac{2}{\sigma(P)(\eta, \xi)} \right| \quad (1.3.42)$$

$$\leq C(1 + |(\eta, \xi)|)^{-1}. \quad (1.3.43)$$

Ce théorème motive Hörmander pour définir les classes de symboles de type  $(\rho, \delta)$ , qui apparaissent dans son article [113] de 1967 :

**Définition 1.3.12.** Classes de symboles  $S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , [208, définition 1.1]

Soit  $m \in \mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et deux réels  $\rho, \delta$  tels que  $0 \leq \rho \leq \delta \leq 1$ . On désigne par  $S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  l'ensemble des symboles  $\sigma$  d'ordre  $m$ , consistant en les fonctions de classe  $C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  telles que, pour tout compact  $K \subset U$ , pour tous multi-indices  $(\alpha, \beta)$  il existe une constante  $C_{K, \alpha, \beta} > 0$  pour que soit vraie :

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, |D_x^\beta D_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_{K, \alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}. \quad (1.3.44)$$

On note  $S_{\rho, \delta}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . De façon similaire à la formule (1.3.29), on peut définir  $\Psi_{\rho, \delta}^m(U)$  pour  $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels de type  $(\rho, \delta)$ ,  $Op(\sigma)$ , avec  $\sigma \in S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

Il y a toutefois de nombreuses complications lorsque  $\delta = 1$  ou  $\delta = \rho$ . Dans ce dernier cas, il n'y a plus de notion de développement asymptotique<sup>14</sup>. Plus précisément, les développements asymptotiques se comportent mal vis à vis de la composition et du passage à l'adjoint, voir [208, théorèmes 4.2, 4.3], où on a besoin de  $\rho \neq \delta$ . La section 1.3.2 étudiera la notion de développement asymptotique.

Malheureusement, l'apparition de ces symboles  $(\rho, \delta)$  pour des paramètres critiques n'est pas rare. En effet, les classes de  $\mathcal{V}$ -symboles  $S_{\mathcal{V}}^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , décrites par BG [13, définitions (10.13), (10.18)] dans le cadre du calcul pseudo-différentiel d'Heisenberg sont incluses dans les classes d'Hörmander  $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , [13, proposition (10.22) p 92]. De tels opérateurs ne sont pas composables entre eux, ce qui va poser problème au moment de construire une paramétrix, [13, discussion p 89-90]. Le lecteur pourra aussi regarder la section 4.4 où nous montrons que le sous laplacien  $\Delta_H$  sur le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_d = \mathbb{R}^{d+1}$  admet une paramétrix dans  $\Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-1}(\mathbb{R}^{d+1})$  à l'aide des outils développés par BG. Nous étudierons ces classes au chapitre 4. A ce stade de notre exposition, il paraît judicieux de souligner que l'avantage des approches via l'analyse harmonique sur les groupes de Lie gradués et plus généralement via le groupoïde tangent (que nous verrons plus tard) réside dans le fait que l'on n'utilise plus ces classes d'opérateurs de type  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Les travaux de Mikhlín et Giraud sur les intégrales à noyaux singuliers dans les années 30-40 ont permis d'esquisser peu à peu un lien symbole-noyau, voir [90], [72, p 54] et [150, p 4, p 11]. Ce lien est exprimé dans le contexte des opérateurs pseudo-différentiels par la formule suivante. Étant donné  $\sigma \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  alors le noyau de Schwartz est donné par :

$$k(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi \in \mathcal{D}'(U \times U), \quad (1.3.45)$$

voir [208, équation (2.6) p40], [5, p 35], [81, équation (8.6) p 272] et de façon extrêmement explicite au [1, théorème 5.2 p 134]. Ainsi, le noyau (1.3.45) permet de décrire l'action de l'opérateur  $Op(\sigma)$  sur une fonction

14. Voir la review du livre de BG [13] par Kenneth G. Miller : [https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet/pdf/953082.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&pg4=AUCN&pg5=TI&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&review\\_format=html&s4=Greiner](https://mathscinet-ams-org.ezproxy.math.cnrs.fr/mathscinet/pdf/953082.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&pg4=AUCN&pg5=TI&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&review_format=html&s4=Greiner)



$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  :

$$Op(\sigma)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y)f(y)dy \tag{1.3.46}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_2^{-1}(\sigma)(x, x - y)f(y)dy, \tag{1.3.47}$$

où  $\mathcal{F}_2^{-1}$  désigne la transformée de Fourier inverse sur la seconde variable.

C'est cette formule qui permet à Taylor<sup>15</sup> [209, § 1 p 9] dans son ouvrage de 1986 de définir les opérateurs pseudo-différentiels sur un groupe de Lie gradué comme étant des opérateurs à noyau de convolution (faisant ainsi intervenir la loi du groupe  $G$ , de la même façon qu'elle intervient ici lorsque l'on écrit  $x - y$ ).

**Remarque 1. Attention :** *L'intégrale (1.3.45) est à comprendre au sens distributionnel (dans les distributions tempérées), comme le rappelle Folland après [81, l'équation (8.6) p 272] ou [6, section 3.2.1 chapitre I p 34]. Plus précisément, on commencera par montrer que  $x \mapsto \sigma(x, \cdot)$  est une application lisse sur  $U$  à valeurs dans  $S'(\mathbb{R}^d)$ , dont il est ainsi licite de faire la transformée de Fourier sur la variable  $\xi$ .*

**Définition 1.3.13.** Opérateur régularisant [81, p274]

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Un opérateur  $T : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$  est dit régularisant lorsque son image est incluse dans  $C^\infty(U)$ . Cela est équivalent à dire que  $suppsing(T) = \emptyset$ .

On montre que si  $\sigma \in S_{1,0}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ , alors  $Op(\sigma) : \mathcal{E}'(U) \rightarrow C^\infty(U)$  est un opérateur régularisant donc le noyau  $k \in C^\infty(U \times U)$ , voir proposition 1.3.15, la proposition 3.3.3 et la remarque qui la précède. Tous les opérateurs pseudo-différentiels  $Op(\sigma)$ ,  $\sigma \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  ont leur noyaux dans  $S'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , voir [1, section 5.4 p 133]. En fait, le noyau est même une fonction lisse en dehors de la diagonale  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, x = y\}$ , [208, preuve du théorème 2.1 p 40], [1, section 5.4 p 133 dont théorème 5.12]. Cette dernière propriété correspond en réalité à la propriété de pseudo-localité des opérateurs pseudo-différentiels, voir définition 1.3.8.

### 1.3.2 Premier projet : Une nouvelle définition des opérateurs pseudo-différentiels classiques

En analyse, une des formules les plus importantes est celle de Taylor, à savoir que pour une fonction lisse  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  on puisse écrire pour tout  $N$ , au voisinage de 0 :

$$f(\xi) - \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \xi^j}_{\text{fonctions homogènes d'ordre } j} = o_0(|\xi|^N). \tag{1.3.48}$$

Ceci implique en particulier qu'il existe  $C > 0$  de sorte qu'au voisinage de 0 :

$$|f(\xi) - \sum_{j=0}^N \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \xi^j| \leq C|\xi|^N. \tag{1.3.49}$$

On peut donc reformuler l'équation précédente avec la terminologie des fonctions homogènes : Si l'on ôte à  $f$  une somme finie de fonctions homogènes de degré  $j$ , pour  $j \in \{0, \dots, N\}$  alors la différence de  $f$  avec cette somme est bornée par un polynôme de degré  $N$ . On se demande alors :

Peut-on donner un sens au développement asymptotique d'un symbole  $S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  ?

---

15. Je remercie Jean-Marie Lescure pour cette remarque.

Soit  $\Delta$  laplacien sur  $\mathbb{R}$ . L'opérateur  $P = (I - \Delta)^{-1}$  n'est plus un opérateur différentiel mais pseudo-différentiel d'ordre  $-2$  de symbole <sup>16</sup> :

$$p(x, \xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2} \quad (1.3.52)$$

On pose :

$$\begin{cases} p_{-2-2j}(x, \xi) = \frac{1}{|\xi|^{2j+2}} \\ p_{-2-2j-1} = 0 \end{cases} \quad (1.3.53)$$

Constatons que les fonctions  $p_{-2-k}$  sont homogènes lisses d'ordre  $k$  en la seconde variable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Soit  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que :

$$\chi = \begin{cases} 0 & \text{sur } \overline{B(0, \frac{1}{2})} \\ 1 & \text{sur } \overline{B(0, 1)} \end{cases} \quad (1.3.54)$$

Pour tout  $N$ , tout compact  $K \subset \mathbb{R}$  (la variable  $x$  ici n'importe pas de toute manière...) et tout indice  $\alpha$  (de même, dériver sur la variable  $x$  ne fait que donner une fonction nulle, on considère donc seulement un multi-indice sur la variable  $\xi$ ) il existe  $C_{\alpha, N, K}$  tels que pour  $|\xi| \geq 1$ , pour tout  $x \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$\left| \partial_\xi^\alpha \left( p(x, \xi) - \sum_{j=0}^N \chi(\xi) p_{-2-j}(x, \xi) \right) \right| = \left| \partial_\xi^\alpha \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|\xi|^{2j+2}} - \sum_{j=0}^N \chi(\xi) p_{-2-j}(x, \xi) \right) \right| \quad (1.3.55)$$

$$= \left| \partial_\xi^\alpha \left( \sum_{j=2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{\infty} \frac{1}{|\xi|^{2j+2}} \right) \right| \quad (1.3.56)$$

$$= \left| \sum_{j=2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{\infty} \frac{(2j+2+\alpha-1)!}{(2j+2-1)!} \frac{(-1)^\alpha}{|\xi|^{2j+2+\alpha}} \right| \quad (1.3.57)$$

$$\leq C_{\alpha, N, K} (1 + |\xi|)^{-2-N-1-\alpha}, \quad (1.3.58)$$

où nous avons fait un développement en série entière de  $p$  dans l'équation (1.3.55). Il est clair que la fonction  $(x, \xi) \mapsto p(x, \xi) - \sum_{j=0}^N \chi(\xi) p_{-2-j}(x, \xi)$  est bornée sur le compact  $\overline{B(0, 1)}$ . En conséquence, on a montré que pour tout  $N$  :

$$(x, \xi) \mapsto p(x, \xi) - \sum_{j=0}^N \chi(\xi) p_{-2-j}(x, \xi) \in S_{1,0}^{-2-N-1}(\mathbb{R}). \quad (1.3.59)$$

Ce phénomène se généralise grâce à la définition suivante.

**Définition 1.3.14.** Symbole et opérateur pseudo-différentiel poly-homogène (classique) d'ordre  $m \in \mathbb{R}$ . [208, définition 1.2 p 37], [211, chapitre 7], [120, appendice 7A définition 7.22 p 301]

Soit  $p \in S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . On dit que  $p$  est un symbole classique ou poly-homogène lorsqu'il existe une suite  $p_{m-j} \in \mathcal{H}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$  de fonctions homogènes d'ordre  $m-j$  au sens des dilatations triviales telle que pour tout entier  $N$  :

$$p(x, \xi) - \sum_{j=0}^N \chi(\xi) p_{m-j}(x, \xi) \in S_{1,0}^{m-N-1}(U), \quad (1.3.60)$$

16. L'opérateur  $(I - \Delta)^{-1}$  désigne l'inverse opératorielle de  $Id - \Delta : H^s \rightarrow H^{s-2}$ . A l'aide d'une paramétrix  $Q \in \Psi_{phg}^{-2}$  de  $Id - \Delta$  on montre que  $(I - \Delta)^{-1}$  est bien a fortiori un opérateur pseudo-différentiel. En effet, il existe un opérateur régularisant  $R \in \Psi^{-\infty}$  de sorte que :

$$P(Id - \Delta)Q = Q \quad (1.3.50)$$

$$= P(I + R). \quad (1.3.51)$$

Ainsi  $P = Q - PR \in \Psi_{phg}^{-2}$ .

où  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est fonction cut-off sur  $\mathbb{R}^d$ , nulle au voisinage de 0 et valant 1 aux infinis. On note  $S_{phg}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  l'ensemble de ces éléments et on adopte alors parfois la notation  $p \sim \sum_j p_{m-j}$ . Pour dit  $p \in S_{phg}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , on dit que  $Op(p)$  est un opérateur pseudo-différentiel classique ou poly-homogène via la formule (1.3.29), dont l'ensemble est noté  $\Psi_{phg}^m(U)$ . On note aussi  $\Psi_{phg}^{-\infty}(U) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Psi_{phg}^m(U)$ .

**Exemple 4.** Nous avons que  $P = (I - \Delta)^{-1} \in \Psi_{phg}^{-2}(\mathbb{R})$ .

**Remarque 2.** On montre que si  $m \leq m'$ ,  $(m, m') \in \mathbb{R}$ , alors  $S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d) \subset S_{1,0}^{m'}(U \times \mathbb{R}^d)$ . En effet il suffit de remarquer que pour un multi-indice  $\alpha$  :

$$(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} = (1 + |\xi|)^{m'-|\alpha|+m-m'} \quad (1.3.61)$$

$$\leq (1 + |\xi|)^{m'-|\alpha|}. \quad (1.3.62)$$

Toujours pour les mêmes  $m, m'$ , il n'y a pas de sens à dire que  $S_{phg}^m(U \times \mathbb{R}^d) \subset S_{phg}^{m'}(U \times \mathbb{R}^d)$  sauf si on impose à  $m - m'$  d'être des entiers relatifs. Il suffit de poser  $q_{m-j}(x, \xi) = p_{m'-j} \in \mathcal{H}_G^{m'-j}(U \times \mathbb{R}^d)$  le nouveau développement asymptotique.

**Proposition 1.3.15.** [13, proposition (9.10) p 81], [81, proposition (8.10) p 274], [217, corollaire 2.2 p 19]

1. Tout opérateur différentiel à coefficients lisses d'ordre  $m$  est un opérateur pseudo-différentiel classique.
2. Tout opérateur pseudo-différentiel régularisant 1.3.13 est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre  $-\infty$ . La réciproque est vraie.

*Démonstration.* 1. Il est clair que tout opérateur différentiel à coefficients lisses sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$  est en particulier un opérateur pseudo-différentiel sur  $U$ , car son symbole est polynomial en  $\xi$  et que donc la condition (1.3.28) est automatiquement vérifiée. Écrivons  $P := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ . Alors on pose  $p_{m-j}(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m-j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$  est une fonction homogène d'ordre  $m - j$  sur  $U \times \mathbb{R}^d$  et la condition (1.3.60) est vérifiée.

2. Soit  $P : \mathcal{E}'(U) \rightarrow C^\infty(U)$  un opérateur pseudo-différentiel régularisant. Ainsi son noyau de Schwartz est une fonction lisse sur  $U \times U$ , voir la proposition 3.3.3. De fait, c'est aussi un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est dans la classe  $\Psi_{1,0}^{-\infty}(U)$ <sup>17</sup>. Il est maintenant facile de voir que  $P$  admet un développement asymptotique nul, i.e.  $p_{m-j} = 0$  pour tout  $j$ . La réciproque s'obtient avec des arguments similaires. □

**Remarque 3. Attention :** Il y a une légère subtilité qui est mise en avant par Folland [81, p 274]. Tout opérateur régularisant 1.3.13 n'est pas pseudo-différentiel, voir le contre-exemple de Folland. Pour avoir l'équivalence entre "être régularisant" et "être un pseudo-différentiel classique d'ordre  $-\infty$ " comme cela est clairement énoncé chez Beals et Greiner [13, proposition (8.10) p 274] ou encore chez Trèves [217, corollaire 2.2 p19], il faut imposer dès le départ à notre opérateur d'être pseudo-différentiel. Toutefois, on peut encore noter la subtilité suivante. Le problème disparaît si l'on impose à notre opérateur régularisant 1.3.13 d'être à support propre (ce qui n'est pas le cas du contre-exemple mis en place par Folland), voir définition 1.3.25. En effet, soit  $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$  le noyau de Schwartz d'un tel opérateur. On pose :

$$p(x, \xi) = \mathcal{F}\left(z \mapsto k(x, x - z)\right)(\xi). \quad (1.3.63)$$

La condition de support propre entraîne que la fonction  $z \mapsto k(x, x - z)$  est à support compact pour tout  $x$  fixé<sup>18</sup>. Ainsi,  $p$  ci-dessus est Schwartz en  $\xi$  lisse en  $x$ , et donc dans l'espace  $S_{1,0}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = S(U \times \mathbb{R}^d)$ . Ainsi philosophiquement un opérateur régularisant n'est pas trop loin d'être un opérateur pseudo-différentiel.

17. Nous avons caché plusieurs arguments dans ces précédentes lignes. Le fait que tout tel opérateur  $P$  possède un noyau lisse provient du grand théorème des noyaux de Schwartz. On pourra lire le [216, chapitre 51] du livre de Trèves ou encore [85, chapitre 6]. D'autre part, le fait que la régularité du symbole entraîne l'appartenance du symbole à la classe  $\Psi_{1,0}^{-\infty}(U)$  provient du lien noyau symbole (voir [81, équation (8.6) p 272]) ou l'équation (1.3.45). On pourra aussi voir [81, proposition (8.10) p 274].

18. Il suffit de considérer  $U \times U$  comme le groupoïde des paires de  $U$ , et de dire que  $s^{-1}(\{x\}) \cap \text{supp}(k)$  est compact, où  $s$  est l'application source du groupoïde des paires de  $U$ . Le lecteur peut mettre cela de côté en attendant de lire sur les groupoïdes en appendice A.3.

Ainsi en résumé de cette précédente discussion :

**Proposition 1.3.16.** [226, proposition 2.1.5 p 49]

Un opérateur régularisant proprement supporté peut toujours s'écrire de la forme  $Op(p)$  avec  $p \in \Psi^{-\infty}$ . Réciproquement, tout opérateur de  $Op(p)$  où  $p \in \Psi^{-\infty}$  est régularisant.

On peut alors se demander :

Quel est le rapport entre le symbole principal de l'opérateur différentiel et son développement asymptotique ? Est-il possible de donner un sens au symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel comme on l'a fait pour les opérateurs différentiels 1.3.2 ?

**Exemple 5.** On prend par exemple l'opérateur différentiel d'ordre 2 suivant avec  $U = \mathbb{R}^2$  :  $P = \partial_1^2 + x_1 \partial_2^2 + x_2^2 \partial_1 - 3\partial_2 + 7$  dont le symbole est donné par  $\sigma(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = -\xi_1^2 - x_1 \xi_2^2 + x_2^2 i \xi_1 - 3i \xi_2 + 7$ . Son symbole principal est donné par  $\sigma^2(P) = -\xi_1^2 - x_1 \xi_2^2$ . On a aussi, conformément à la définition 1.3.2 que  $\sigma^2(P) = p_2$ , où  $p_2$  désigne la fonction homogène d'ordre 2 dans le développement asymptotique de  $P$ .

**Remarque 1.3.17.** Le symbole principal  $\sigma^m$  d'un opérateur différentiel  $Op(\sigma)$  d'ordre  $m$  correspond en fait au premier terme  $p_m$  de son développement asymptotique.

Ainsi, il semble raisonnable de définir :

**Définition 1.3.18.** Symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel poly-homogène (classique) [168, p 199]

Soit  $P \in \Psi_{phg}^m(U)$ , où  $U \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert. On définit le symbole principal de  $P$ , noté  $\sigma^m(P)$ , comme le premier terme  $p_m$  homogène d'ordre  $m$  de son développement asymptotique, suivant la notation de la définition 1.3.14.

C'est aussi par ailleurs, une bonne motivation pour définir la notion de symbole classique, c'est à dire, possédant un développement asymptotique. En effet, sans elle, on verrait mal comment définir une notion de symbole principal.

**Lemme 1.3.19.** [226, définition 2.1.6 p 50]

Soit  $P \in \Psi_{phg}^m(U)$  de symbole poly-homogène  $p$ , où  $U \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert. Alors ponctuellement :

$$\sigma^m(P)(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(x, t\xi)}{t^m}. \quad (1.3.64)$$

*Démonstration.* Soit  $\chi$  une fonction cut-off comme dans la définition 1.3.14. Il existe  $a_{m-1} \in S_{1,0}^{m-1}(U)$  telle que :

$$\frac{p(x, t\xi)}{t^m} = \frac{\chi(t\xi)}{t^m} a_m(x, t\xi) + \frac{1}{t^m} a_{m-1}(x, t\xi) \quad (1.3.65)$$

$$= \chi(t\xi) a_m(x, \xi) + \frac{1}{t^m} a_{m-1}(x, t\xi). \quad (1.3.66)$$

Par définition de  $S_{1,0}^{m-1}(U)$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , pour tout  $t > 0$  :

$$|a_{m-1}(x, t\xi)| \leq C(1 + |t\xi|)^{m-1}. \quad (1.3.67)$$

De cela et prenant la limite dans (1.3.66), on en déduit (1.3.64).  $\square$

**Remarque 4.** Le lemme 1.3.19 est un ingrédient clé pour montrer que l'on peut définir proprement le symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel classique sur une variété  $M$ , voir [226, section 2.1.5 p 52].

**Exemple 6.** L'opérateur  $(I - \Delta)^{-1}$  de l'exemple 4 a symbole principal  $p_{-2}(x, \xi) = \frac{1}{|\xi|^2}$ .

**Premier projet de la thèse : Donner une nouvelle caractérisation des symboles poly-homogènes.**

Dans son article de thèse [201] de 1959 (voir aussi [161, p 222-230]), Seeley a établi dans le cadre des intégrales singulières sur des variétés compactes, ce que nous appelons aujourd'hui "*le théorème d'invariance par difféomorphisme*" dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés et qu'on peut par exemple trouver dans la [208, section 5 p 47] ou la [218, section 5 p 44]. Stein, étudiant de Zygmund, se remémore, [27, section 1.3 "Acceptance : 1957-1965" p 9] :

"At about that time, because of the applicability of singular integrals to PDE, Calderon became interested in formulating the facts about singular integrals in the setting of manifolds. This required the analysis of the effect coordinate changes had on such operators. [...] R. Seeley was Calderon's student at that time, and he dealt with this problem in his thesis from 1959 [201]. [...] The result of Seeley was not only highly satisfactory as to its conclusions but it was also very timely in terms of events that were about to take place. Following an intervention by Gelfand [87], interest grew in calculating the "index" of an elliptic operator on a manifold."

Les démonstrations pour obtenir ces "*théorèmes d'invariance par difféomorphisme*" demeurent très techniques<sup>19</sup>. Cela s'explique par le fait que la classe de symboles classiques est elle-même difficile à appréhender en pratique. On pourra consulter celle de Seeley [161, section IV p 230] D'autres auteurs comme Bokobza se sont intéressés à définir les opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés, voir [18]. Nous allons proposer de "simplifier" cette définition en proposant une caractérisation des symboles  $G$ -poly-homogènes qui s'affranchit de la notion de développement asymptotique et qui laisse, en un sens, transparaître l'approche groupoïdale qui s'est développée ces dernières années. Exposons brièvement pourquoi il nous a été raisonnable de penser qu'une telle "simplification" était possible.

**Proposition 1.3.20.** *Soit  $a \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  avec  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Sont équivalentes :*

1.  *$a$  est un polynôme (inhomogène, pour la dilatation triviale (1.3.3)) en la variable  $\xi$  d'ordre  $\leq m$ .*
2. *Il existe  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  polynôme homogène d'ordre  $m$  en les variables  $(\xi, t)$  pour la dilatation triviale (1.3.4) et de plus  $u(x, \xi, 1) = a(x, \xi)$ .*

Dans cette proposition l'ensemble des polynômes inhomogènes en la variable  $\xi$  de degré inférieur ou égal à  $m$  représente les symboles des opérateurs différentiels à coefficients lisses. On dit alors que de tels symboles peuvent être vus comme la restriction en  $t = 1$  d'une fonction polynomiale homogène en  $\xi$  considérée dans une dimension supérieure.

**Exemple 7.** *L'opérateur différentiel  $P = \partial_x^2 + x\partial_x$  a symbole  $\sigma(x, \xi) = -\xi^2 - ix\xi$ , lequel est un polynôme inhomogène d'ordre 2 en la variable  $\xi$ . Le polynôme  $u(x, \xi, t) = -\xi^2 - ixt\xi$  en les variables  $(\xi, t)$  est homogène de degré 2 pour la dilatation triviale (1.3.4) :*

$$\tilde{\delta}_s(\xi, t) = (\delta_s(\xi), st), \tag{1.3.68}$$

*et on observe que  $u|_{t=1} = \sigma$ . La construction de  $u$  est faite de sorte à pondérer le monôme  $-ix\xi$  de degré inférieur strict à 2 grâce à la variable  $t$  afin de le rendre homogène de degré 2. Le fait que la fonction  $u$  soit homogène de degré 2 pour l'action  $\tilde{\delta}_s$  s'écrit :*

$$u(x, \tilde{\delta}_s(\xi, t)) - s^2 u(x, \xi, t) = 0, \quad \forall s > 0. \tag{1.3.69}$$

Encore une fois les symboles des opérateurs pseudo-différentiels ne sont, en principe, plus polynômiaux en  $\xi$  donc il y a peu d'espoir de leur trouver une extension  $u$  dans une dimension supérieure satisfaisant (1.3.69). Dans ce cas, on peut demander que la fonction à gauche de l'égalité dans (1.3.69) soit Schwartz en les variables  $(\xi, t)$  et lisse en  $x$ . Bien entendu, le fait de choisir un espace de type Schwartz n'est pas innocent, on sait que la transformée de Fourier est agréable à manier sur ce genre d'espace. On peut définir les fonctions homogènes modulo Schwartz d'ordre  $m \in \mathbb{R}$  comme les fonctions lisses  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  vérifiant :

$$u(x, \delta_s(\xi)) - s^m u(x, \xi) \in S_G(U \times \mathbb{R}^d) := C^\infty(U) \otimes S(\mathbb{R}^d). \tag{1.3.70}$$

<sup>19</sup>. Quitte à anticiper les choses, disons ici que c'est une raison pour laquelle l'approche groupoïdale au calcul pseudo-différentiel sur une variété est intéressante : elle permet de s'affranchir de la notion de carte locale.

L'ensemble de ces fonctions est noté  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  pour les dilatations générales (1.3.3). De même on note  $S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  l'espace des symboles poly-homogènes au sens des dilatations générales (1.3.3), voir définition 2.1.10. Les indices  $G$  indiquent que ces fonctions sont définies vis à vis des dilatations à poids. Alors en généralisation de la proposition (1.3.20), nous avons montré dans le cadre des dilatations à poids :

**Théorème 1.3.21.** *C. - Yuncken 2022 [42]*

Soit  $a \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Ayant muni  $\mathbb{R}^d$  de la dilatation (1.3.3) et  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  de la dilatation (1.3.4) alors sont équivalentes :

1.  $a \in S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .
2. Il existe  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  tel que  $u(x, \xi, 1) = a(x, \xi)$ .

Il est intéressant de remarquer que ce précédent théorème est vrai pour  $n$  a priori différent de  $d$ .

On propose un exemple explicite de fonction homogène modulo Schwartz correspondant au symbole d'un opérateur différentiel elliptique à coefficients constants, au sens des dilatations triviales.

**Exemple 8.** On considère l'opérateur  $P = (I - \Delta)^{-1}$ , où  $\Delta$  est le laplacien sur  $\mathbb{R}$  muni des dilatations triviales. Cet opérateur a symbole  $p(x, \xi) = \frac{1}{1+|\xi|^2}$ . Le symbole de  $I - \Delta$  est  $q(x, \xi) = 1 + |\xi|^2$ . Avec le théorème 1.3.21 une extension possible de  $q$  est :

$$v(x, \xi, t) = t^2 + |\xi|^2 \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad (1.3.71)$$

où  $U \subset \mathbb{R}$  un ouvert quelconque. Ainsi on a envie de définir le prolongement du symbole de l'opérateur  $P$  comme l'inverse du prolongement de  $I - \Delta$  c'est à dire :

$$u(x, \xi, t) = \frac{1}{t^2 + |\xi|^2}. \quad (1.3.72)$$

On remarque que la fonction  $u \in \mathcal{H}_G^{-2}(U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  n'est pas définie en  $(\xi, t) = (0, 0)$ . On se donne deux fonctions lisses cut-off  $\chi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  de valeur 1 sur une boule centre 0 et de rayon 2 et nulles aux infinis. On pose alors  $\chi(\xi, t) = \chi_1(\xi)\chi_2(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Alors on montre<sup>20</sup> que  $(1-\chi)u \in \mathcal{HS}_G^{-2}(U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  et la restriction en  $t = 1$  de  $\chi u$  est le symbole  $p$ .

### Question ouverte :

Est-il possible<sup>21</sup> d'avoir un théorème analogue au théorème 1.3.21 pour les symboles de classe  $s$  de Gevrey ?

Dans les années 60, Boutet de Monvel et Krée ont étudié d'autres classes de symboles, voir l'article [20, § 1 The symbols of class  $s$  p 302] de 1967, et donc d'opérateurs pseudo-différentiels plus généraux pour ces classes de symboles [20, § 2 p 308]. Tout d'abord faisons quelques rappels très brefs sur les classes  $s$  de Gevrey :

**Définition 1.3.22.** Classe  $s$  de Gevrey [89, section I p 132], [20, §2 Gevrey Classes p 296]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Une fonction  $f \in C^\infty(U)$  est dite de classe  $s$  de Gevrey,  $s \geq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , lorsque pour tout compact  $K \subset U$ , il existe des constantes  $c, A$  de sorte que pour tout  $x \in K$ , pour tout multi-indice  $\alpha$  l'inégalité suivante est vraie :

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq cA^{|\alpha|}(|\alpha|)!^s. \quad (1.3.73)$$

L'ensemble de telles fonctions est noté  $G^s(U)$ .

Les classes de Gevrey ont été introduites en 1918 par Gevrey [89, section I p 132]. Notons d'ailleurs que l'inégalité (1.3.73) tirée de Boutet de Monvel, Krée est en fait l'équivalent [89, (3) p 132] proposé par Gevrey lui même, puisque ce dernier définit en premier lieu les fonctions de classe  $s$  via l'emploi de la fonction Gamma d'Euler, voir [89, (1) p 132]. Selon Wikipédia<sup>22</sup> :

20. Il s'agit en fait du lemme 2.1.7 que nous verrons plus tard.

21. Merci à Giuseppe Dito pour m'avoir posé la question lors de ma visite à Dijon.

22. Voir [https://en.wikipedia.org/wiki/Gevrey\\_class](https://en.wikipedia.org/wiki/Gevrey_class).

"The Gevrey classes find application in discussing the smoothness of solutions to certain partial differential equations : Gevrey originally formulated the definition while investigating the homogeneous heat equation, whose solutions are in  $G^2(U)$ ."

On retrouve aussi cela dans l'article [113] de 1967 d'Hörmander, voir la page 139.

**Exemple 9.** 1. Il est connu que  $G^1(U)$  est égal à l'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert  $U$ , soit celles qui se développent en série entière au voisinage de chaque point de  $U$ .

2. La fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (1.3.74)$$

est bien connue pour être lisse sur  $\mathbb{R}$ , non analytique. Elle appartient à la classe de Gevrey  $G^2(\mathbb{R})$ . Ainsi, les classes de Gevrey  $G^s$ ,  $s > 1$  sont susceptibles de contenir des fonctions lisses non analytiques. Ainsi, en un sens, elles s'intercalent entre les fonctions analytiques et les fonctions lisses.

3. Dans l'article [146] l'auteur montre que l'équation différentielle linéaire pour  $l \geq 2$  :

$$x^l u'(x) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.3.75)$$

admet une solution dans  $G^{\frac{l}{l-1}}(\mathbb{R})$  donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{1-l}x^{1-l}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (1.3.76)$$

Remarquons que pour  $l = 2$  on retrouve exactement la fonction de l'équation (1.3.74).

Il est possible de considérer le dual de  $G^1(U)$ , noté  $H'(U)$  : il s'agit des hyperfonctions sur  $U$  de Sato [191] de 1959.

Voici maintenant la définition des classes de symboles de Boutet de Monvel et Krée :

**Définition 1.3.23.** Symboles  $(1,0)$  de classe  $s$  de Gevrey [20, définition 1.1 p 302], [146, définition 1]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Une fonction lisse  $p \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  est dite être un symbole  $(1,0)$  de classe  $s$  de Gevrey,  $s \geq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , lorsque pour tout compact  $K \subset U$  il existe des constantes  $c_0, c_1, A > 0$ , telles que pour tout multi-indice  $\alpha, \beta$ , pour tout  $x \in K$  l'inégalité suivante est vraie :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq c_0 c_1^{|\alpha+\beta|} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|} (|\alpha|)!^s \beta!, \quad |\xi| \geq A|\alpha|^s. \quad (1.3.77)$$

L'ensemble de ces éléments est noté  $S_{1,0,s}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Remarque 5.** Il est possible, comme dans le papier de Matsuzawa [146, définition 1], de considérer les symboles  $(\rho, \delta)$  de classe  $s$  de Gevrey, avec  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ , analogue des classes de symboles de type  $(\rho, \delta)$  d'Hörmander.

La condition (1.3.77) dit qu'un tel symbole appartient grossièrement aux classes de Gevrey en la variable  $x$ .

Comme le montre [20, p 303], la définition 1.3.23 force les fonctions  $p \in S_{1,0,s}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  à être holomorphes en la variable  $\xi$  dans le domaine :

$$\{\xi \in \mathbb{C}^d, c_1 |Im(\xi)| < |Re(\xi)| \}. \quad (1.3.78)$$

En fait Boutet de Monvel et Krée montrent [20, p 303 et définition 1.1 bis] que la définition 1.3.23 est équivalente à une autre définition faisant directement apparaître le caractère holomorphe des fonctions  $p$ .

Il est aussi possible de définir les expansions asymptotiques pour de tels symboles. On pourra consulter [20, équation (2.1) p308].

Toujours par une formule analogue à (1.3.29), on peut maintenant définir les opérateurs pseudo-différentiels associés à cette classe de symbole, voir la [20, section 2] qui est dédiée à définir les opérateurs pseudo-différentiels de classe  $s$ . Les propriétés des opérateurs pseudo-différentiels avec symbole dans  $S_{1,0,s}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  sont aussi données dans l'article [146] de Matsuzawa.

### 1.3.3 Ellipticité, hypoellipticité, théorème des carrés d'Hörmander

Pour mieux apprécier la discussion qui suit, nous conseillons au lecteur la lecture de l'appendice E.1 qui retrace grossièrement l'histoire de la notion de solution fondamentale et son importance dans l'étude de certaines EDP.

Nous avons défini la notion d'ellipticité pour un opérateur différentiel grâce à son symbole principal.

Comment élargir la notion d'ellipticité aux opérateurs pseudo-différentiels classiques ?

Grâce à la définition 1.3.18, on peut définir :

**Définition 1.3.24.** Ellipticité d'un opérateur pseudo-différentiel classique

Soit  $P \in \Psi_{phg}^m(U)$ , où  $U \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert. L'opérateur est dit elliptique si pour tout  $x \in U$ ,  $\xi \neq 0$ , on a  $\sigma^m(P)(x, \xi) = p_m(x, \xi) \neq 0$ .

Les [218, définition 4.4 p 40], [208, définition 1.1 p 60], [81, définition p 297] sont légèrement différentes de celle que nous venons de faire. Les auteurs précédents demandent en effet que pour tout  $K \subset U$  compact fixé,  $\exists C_K > 0, R_K > 0$  telles que :

$$\forall x \in K, |\xi| \geq R_K, \quad |\sigma(P)(x, \xi)| \geq C_K(1 + |\xi|)^m. \quad (1.3.79)$$

Cette condition porte donc sur le symbole entier et non le symbole principal comme dans notre définition 1.3.24. Les deux définitions sont équivalentes. Pour le prouver, on pourra utiliser la proposition 1.3.19. En fait la définition (1.3.79) fait sens pour les classes de symboles  $(\rho, \delta)$  générales, voir par exemple [208, définition 1.1 p 60].

Les théorèmes suivants montrent que les seuls opérateurs pseudo-différentiels  $\Psi_{phg}^m(U)$  à admettre des paramétrixes dans  $\Psi_{phg}^{-m}(U)$  sont les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques. Tout d'abord, nous commençons par définir la notion d'opérateur proprement supporté. Cela nous permet de rendre licite la composition.

On rappelle que le support d'une distribution  $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$  est dit propre s'il est  $r$ -propre et  $s$ -propre au sens de la définition 3.3.7 avec  $r, s$  les submersions lisses du groupoïde des paires de  $U$ . Cela veut dire que pour tout compact  $K \subset U$  les ensembles suivants sont compacts dans  $U \times U$  :

$$r^{-1}(K) \cap \text{supp}(k) = \{(x, y) \in \text{supp}(k), x \in K, y \in U\}, \quad s^{-1}(K) \cap \text{supp}(k) = \{(x, y) \in \text{supp}(k), x \in U, y \in K\}. \quad (1.3.80)$$

**Définition 1.3.25.** Opérateur proprement supporté, [81, p 275], [208, définition 3.6 p 43]

Un opérateur linéaire  $T : C_c^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  est dit proprement supporté lorsque son noyau de Schwartz  $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$  vérifie :  $\text{supp}(k)$  est propre dans  $U \times U$  au sens de (1.3.80).

La notion de "proprement supporté" est très bien détaillée dans le livre [81] de Folland, voir à partir de la page 275. En particulier un opérateur proprement supporté vérifie :

$$T : C_c^\infty(U) \rightarrow C_c^\infty(U), \quad (1.3.81)$$

et admet une extension :

$$\bar{T} : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U), \quad (1.3.82)$$

on pourra aussi consulter [218, proposition 3.2 p25] ou [168, lemme 3.8 p 181].

**Remarque 6. Attention :** Tout opérateur régularisant n'est pas obligatoirement proprement supporté. Il suffit de considérer l'opérateur de noyau lisse  $k(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  pour avoir un contre exemple. En effet, comme  $k$  est a fortiori continu, alors  $\text{supp}(k) = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, k(x, y) \neq 0\}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Il est clair que le support de  $k$  n'est pas propre. Un autre exemple est celui de Folland qu'on a donné à la remarque 3.



De façon équivalente à la définition 1.3.25 et sous réserve de supposer que  $T$  soit un opérateur pseudo-différentiel, il est possible de définir le caractère proprement supporté de cet opérateur  $T : C_c^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  en disant que :

$$T, {}^tT : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{E}'(U), \quad (1.3.83)$$

ce qui est le point de vue de la [217, définition 3.1 p 24]. Ainsi de tels opérateurs peuvent être composés entre eux, comme le montre le [81, corollaire 8.13 p 276]. Dans le cas où  $T$  n'est pas supposé pseudo-différentiel, la définition 1.3.25 est équivalente à dire que  $T : C_c^\infty(U) \rightarrow C_c^\infty(U)$  et  ${}^tT : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{E}'(U)$ .

Notons qu'il est toujours possible de modifier, à cause de la propriété de pseudo-localité, un opérateur pseudo-différentiel de sorte à l'écrire, modulo les opérateurs pseudo-différentiels régularisants  $\Psi^{-\infty}$  comme un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté. C'est précisément l'objectif des résultats suivants : [168, théorème 3.10 p 182], [13, proposition (9.25) p 84], [120, p 301], [226, proposition 2.1.7 p 50].

**Théorème 1.3.26.** [208, théorème 1.3 p 61], [217, corollaire 4.3 p 41], [81, théorème (8.42) p 298]

Soit  $P \in \Psi_{phg}^m(U)$  elliptique. Il existe un opérateur proprement supporté  $Q \in \Psi_{phg}^{-m}(U)$  qui soit une paramétrix de  $P$  au sens où :

$$PQ - Id, QP - Id \in \Psi_{phg}^{-\infty}(U). \quad (1.3.84)$$

On a la réciproque de ce précédent théorème :

**Théorème 1.3.27.** [239, théorème 10.3 p 71], [168, corollaire 9.6 p 214]

Soit  $P \in \Psi_{phg}^m(U)$  et  $Q \in \Psi_{phg}^{-m}(U)$  proprement supporté de sorte que l'équation (1.3.84) soit satisfaite, alors  $P$  est un opérateur elliptique.

Ce qui est usuellement fait, est de trouver une paramétrix modulo  $\Psi_{1,0}^{-1}(U)$  puis d'utiliser une série de von Neumann pour obtenir une paramétrix modulo  $\Psi_{phg}^{-\infty}(U)$ , voir [208, équations (1.3)-(1-4) p 61], [1, théorème 3.24 p 58, proposition 3.26 p 60, lemme 3.27 p 61], la preuve de la proposition précédemment citée faisant apparaître la série de von Neumann. Dans le livre de Petersen, la [168, remarque 9.7 p 215] fournit une discussion intéressante sur la notion de paramétrix pour des opérateurs non-elliptiques. Ainsi, à [168, l'exemple 9.8 p 218], Petersen calcule une paramétrix dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  de l'opérateur de la chaleur  $P = \partial_t - \Delta_x \in \Psi_{1,0}^2(\mathbb{R}^{d+1})$ . Bien que  $P$  ne soit pas elliptique, il est possible de trouver une paramétrix  $Q$  vivant dans  $\Psi_{\frac{1}{2},0}^{-1}(\mathbb{R}^{d+1})$  (et pas dans  $\Psi_{1,0}^{-2}(\mathbb{R}^{d+1})$  !) et respectant toujours (1.3.84). Ceci a encouragé Hörmander à étudier les classes de symboles plus générales  $S_{\rho,\delta}^m$  et fait écho à la discussion qui fait suite au théorème 1.3.11. Quant à eux BG, Taylor, Melin, vEY définissent des classes d'opérateurs pseudo-différentiels (et a fortiori de symboles) adaptés à une structure filtrée donnée.

Nous abordons de nouveau la notion d'hypo-ellipticité. Dans [196] L. Schwartz dit :

"J'avais eu le malheur, dans mon livre sur les distributions, d'appeler elliptique tout opérateur à coefficients  $C^\infty$  possédant la propriété suivante :"

**Définition 1.3.28.** Hypo-ellipticité

Soit  $P \in \Psi_{1,0}^m(U)$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On dit que  $P$  est hypo-elliptique si pour  $u \in \mathcal{E}'(U)$  on a :  
pour tout ouvert  $V \subset U$  où  $Pu \in C^\infty(V)$  alors  $u \in C^\infty(V)$ .

Nous rappelons aussi que le théorème E.1.5 donne le lien entre l'existence de solutions fondamentales lisses d'un opérateur différentiel à coefficients constants et son caractère hypo-elliptique.

Nous avons vu que les théorèmes 1.3.26 et 1.3.27 donnaient l'équivalence, dans le calcul d'Hörmander, entre "avoir une paramétrix modulo les opérateurs régularisants" et "être elliptique". Puisque l'opérateur  $\Delta$  est en particulier elliptique, la discussion après la définition E.1.4 de l'appendice laisse présager un lien entre elliptique et hypo-elliptique. En effet, on a le grand résultat :

**Théorème 1.3.29.** [208, théorème 1.4 p 61], [22, théorème 10 p 6, cas des opérateurs différentiels]

Soit  $P \in \Psi_{1,0}^m(U)$  proprement supporté, où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $P$  est elliptique alors  $P$  est hypo-elliptique.

---

**Exemple 10.** L'opérateur  $\Delta$  est elliptique, voir l'exemple 2 donc il est a fortiori hypo-elliptique, en vertu du théorème 1.3.29.

La preuve du théorème 1.3.29 est courte si l'on sait qu'un opérateur elliptique admet une paramétrix, voir théorème 1.3.26. Cependant avant les années 60, la notion de paramétrix n'était pas formalisée comme aujourd'hui et donc il fallait faire appel aux *estimées a priori*, voir [81, Section C p 210]. Ainsi, tout opérateur différentiel elliptique à coefficients lisses  $P$  d'ordre  $m$  sur un ouvert borné  $U \subset \mathbb{R}^d$ , se soumet pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , à l'inégalité (dite *estimée a priori*) :

$$\|u\|_s \leq C_s \left( \|Pu\|_{s-m} + \|u\|_{s-1} \right), \quad C_s > 0, \quad u \in H_s^0(U), \quad (1.3.85)$$

où  $H_s^0(U) = \overline{C_c^\infty(U)}^{H_s}$ , voir [81, p 200], avec :

$$H_s := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^d), \hat{f} \text{ est une fonction et } \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < +\infty \right\}, \quad (1.3.86)$$

l'espace de Sobolev d'ordre  $s$ , voir [81, équation (6.2) p 191]. En combinant cette inégalité avec un résultat de type "*Lemme de Sobolev*", voir [81, lemme (6.5) p 194], lequel dit que pour  $s > k + \frac{d}{2}$ , alors  $H_s \subset C^k(\mathbb{R}^d)$ , on montre encore que tout opérateur différentiel elliptique à coefficients lisses est hypo-elliptique, voir [81, corollaire (6.34) p 215]. Toutefois montrer les *estimées a priori* demandent un travail conséquent. Ainsi, la technologie des opérateurs pseudo-différentiels se révèle particulièrement efficace !

En terme de support singulier, la condition d'hypo-ellipticité est équivalente au fait que :

$$\text{singsupp } Pu = \text{singsupp } u, \quad u \in \mathcal{E}'(U). \quad (1.3.87)$$

En fait, comme tout opérateur pseudo-différentiel est pseudo-local, voir théorème 1.3.8, seule l'inclusion  $\supseteq$  est à vérifier.

Toutefois, déterminer si un opérateur non-elliptique est hypo-elliptique est une tâche très complexe. Par exemple, les opérateurs de la chaleur et des ondes, voir exemple 2, ne sont pas elliptiques mais sont-ils hypo-elliptiques ? Le lecteur doit être conscient que les deux opérateurs précédents étant à coefficients constants, la tâche de déterminer leur potentielle hypo-ellipticité en est grandement simplifiée. En effet, pour reprendre les mots de Marco Bramanti [22, p6] :

"No characterization of hypoelliptic operators with variable coefficients exists so far. The book [114] by Hörmander, 1963, contains a plenty of results giving sufficient conditions in order for an operator to be hypoelliptic. <sup>23</sup>"

"Using the existing theories of the early sixties there was no way to decide the hypoellipticity of an operator just looking at the coefficients ; it was sometimes necessary to compute the fundamental solution, a harder task."

Hörmander a toutefois trouvé de jolis théorèmes qui s'adaptent à deux cadres.

1. Lorsque l'opérateur différentiel est à coefficients complexes constants, il y a équivalence entre l'hypo-ellipticité d'un opérateur différentiel à  $P$  et le fait que la condition :

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{\|\nabla \sigma(P)(\xi)\|}{|\sigma(P)(\xi)|} = 0, \quad (1.3.88)$$

soit réalisée, où  $\sigma(P)$  est le symbole de  $P$ , et où  $\|\nabla \sigma(P)(\xi)\|$  représente la norme du gradient de  $\sigma(P)$  en  $\xi$  :

$$\left( \partial_{\xi_1} \sigma(P)(\xi), \dots, \partial_{\xi_d} \sigma(P)(\xi) \right),$$

voir [22, théorème 7 p 4] et a fortiori [63, p 80]. On pourra aussi relire le théorème 1.3.11, que l'on a mentionné plus haut.

---

23. Notamment le théorème 1.3.11.

2. Lorsque l'opérateur est à coefficients lisses "*with constant strength*" ("*de force égale*"), on peut montrer, voir [22, p 6] ou [208, § 2 p 62], qu'un opérateur différentiel avec de tels coefficients dont les opérateurs à coefficients gelés sont hypoelliptiques est un opérateur hypoelliptique.

**Attention :** Ce précédent phénomène sur les opérateurs différentiels à coefficients lisses "*de force égale*" est très particulier car, contrairement à l'ellipticité, l'hypo-ellipticité n'est pas en général, une propriété ponctuelle !

Pour le voir il faut considérer l'opérateur de Kolmogorov [22, équation (1.2) p 6] :

$$P = -\partial_x^2 + \partial_t + x\partial_y. \quad (1.3.89)$$

En 1934, Kolmogorov [130] a pu exhiber un noyau fondamental de cet opérateur, c'est à dire un analogue de la solution fondamentale dans le cadre des opérateurs différentiels à coefficients non constants. Comme on va le voir, l'opérateur est bien hypo-elliptique mais il n'est plus possible de l'affirmer avec le théorème E.1.5, celui-ci s'appliquant aux opérateurs différentiels à coefficients constants.

On rappelle, [216, définition 52.1], [197, p 140], qu'un noyau fondamental<sup>24</sup> de  $P$  est une distribution  $k(x, y, t, x', y', t') \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  de sorte que :

$$P_{x,y,t}k(x, y, t, x', y', t') - \delta_{x,y,t}(x', y', t') = 0 \quad (1.3.90)$$

De plus le noyau exhibé par Kolmogorov est très régulier au sens du livre de Trèves, [216, p 536], c'est à dire le noyau est régulier dans chaque variable et il est une fonction lisse sur le complémentaire de la diagonale. Pour montrer que  $P$  est hypo-elliptique on applique le [216, théorème 52.1 p 536] du livre de Trèves<sup>25</sup>, lequel dit que si  $P$  et  ${}^tP$  ont un noyau fondamental<sup>26</sup> très régulier alors  $P$  est hypo-elliptique.

Pourtant, [22, p 6] les opérateurs à coefficients gelés de  $P$  ne sont pas hypo-elliptiques. Un autre exemple de ce phénomène est donné par Folland [81, p 220] avec l'opérateur  $P = \partial_x^2 + (\partial_y + x\partial_z)^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour montrer que les opérateurs à coefficients gelés ne sont pas (tous) hypo-elliptiques, le lecteur pourra employer le théorème 1.3.32 à venir. Pour le moment, à moins de calculer un noyau fondamental de ces opérateurs, nous n'avons pas les bons outils pour les étudier.

Ainsi, il faudra attendre le très célèbre "*théorème des carrés d'Hörmander*" de 1967 pour expliquer ce genre de comportement. En particulier, le "*théorème des carrés d'Hörmander*" montrera que l'opérateur de Kolmogorov est bien hypo-elliptique (sans passer par le calcul du noyau fondamental!), voir exemple 13. Nous ne pouvons que recommander au lecteur le livre [22] de Marco Bramanti qui est dédié à ce théorème et dont nous nous sommes fortement inspirés pour rédiger certains passages de ce manuscrit.

Le "*théorème des carrés d'Hörmander*" permet de caractériser l'hypoellipticité des opérateurs différentiels sur  $\mathbb{R}^d$  de la forme :

$$P = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0 + c, \quad (1.3.91)$$

où  $m$  est un entier pouvant être différent de  $d$ ,  $X_j$  sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 à coefficients lisses réels,  $c$  une fonction lisse, tous définis sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$ .

**Théorème 1.3.30.** *Théorème des carrés d'Hörmander 1967, [112], [73, théorème A.1.2 p 491], [22, théorème 12 p 8]*

24. Lorsque  $P$  n'est plus à coefficients constants, on ne peut pas parler de solution fondamentale, mais de noyau fondamental.

25. Comme le mentionne Trèves : "Ce théorème en fait dû à Schwartz [197, théorème XII p 143 ]."

26. Notons toutefois que le [216, théorème 52.1 p 536] porte sur les paramétrix (au sens de la [216, définition 52.1]) et tout noyau fondamental est a fortiori une paramétrix au sens de cette définition.

Soit  $P$  un opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^d$  sous la forme (1.3.91), où  $m$  peut être différent de  $d$ . On suppose que les crochets itérés :

$$X_{j_1}, [X_{j_1}, X_{j_2}], [X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]], \dots, [X_{j_1}, [X_{j_2}, [X_{j_3}, \dots, X_{j_N}]]], \quad (1.3.92)$$

où  $j_i = 0, 1, \dots, m$ , et  $N$  est un entier quelconque, sont générateurs en chaque point  $x \in U$  de l'espace tangent  $T_x U$ . Alors  $P$  est hypo-elliptique.

**Remarque 1.3.31. Attention :** Insistons encore, les coefficients dans les champs  $X_j$  sont des fonctions lisses à valeurs réelles. En effet, si on omet cette hypothèse, cela nous conduirait par exemple à conclure que l'opérateur de Schrödinger :

$$S = i\partial_t + \partial_x^2, \quad (1.3.93)$$

qui diffère "seulement"<sup>27</sup> de  $i$  et d'un signe  $-1$  de l'opérateur de chaleur  $P = \partial_t - \partial_x^2$ , est hypo-elliptique. La mauvaise surprise est malheureusement que  $S$  n'est pas hypo-elliptique. Pour le voir le lecteur pourra appliquer la condition (1.3.88) (il s'agit du [22, théorème 7 p 4]) ou encore le théorème 1.3.32.

Bien que le théorème des carrés d'Hörmander 1.3.30 ait ses limitations, voir [22, remarque 17 p 11], il est très efficace en pratique, comme le prouvent les exemples suivants.

**Exemple 11.** Considérons l'opérateur  $P = \partial_x^2 + x\partial_t$ . Avec les notations du théorème des carrés d'Hörmander 1.3.30 on a  $d = 2$ ,  $U = \mathbb{R}^2$  et pour l'opérateur dans (1.3.91),  $m = 1$ ,  $c = 0$ ,  $X_0 = x\partial_t$  et  $X_1 = \partial_x$ . On va montrer qu'on peut trouver deux champs de vecteurs libres de la forme (1.3.92) en tout point de  $U$  et on en conclura que  $P$  est hypoelliptique. Calculons :

$$[X_0, X_1] = -\partial_t. \quad (1.3.94)$$

La famille  $(X_1, [X_0, X_1])$  est une famille libre en chaque point de  $U$  car est en particulier une base de l'espace tangent en ce point. Utilisant le théorème sus-mentionné, on conclut  $P$  est hypo-elliptique.

**Exemple 12.** [22, p 9], Le sous-laplacien  $\Delta_H$  sur  $\mathbb{H}_1$

Prenons le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_1 = \mathbb{R}^3$  et le sous-laplacien  $\Delta_H = X^2 + Y^2$ , où l'on a posé  $X = \partial_y - \frac{1}{2}x\partial_z$  et  $Y = \partial_x + \frac{1}{2}y\partial_z$  de sorte que  $[X, Y] = \partial_z$ . L'opérateur  $P$  est hypoelliptique puisque en tout point de  $\mathbb{R}^3$ , la famille  $(X, Y, [X, Y])$  est libre de  $\mathbb{R}^3$ . En vertu du théorème des carrés d'Hörmander 1.3.30,  $\Delta_H$  est hypoelliptique.

**Exemple 13.** L'opérateur de Kolmogorov

Pour satisfaire à la notation (1.3.91) d'Hörmander, on pose  $X_1 = \partial_x$  et  $X_0 = -x\partial_y - \partial_t$  et  $Q = X_1^2 + X_0$ . Alors  $-Q = P$  est l'opérateur de Kolmogorov (1.3.89). Un calcul montre que  $[X_0, X_1] = \partial_y$ . Reste à voir que la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des champs de vecteurs  $(X_0, X_1, [X_0, X_1])$  dans la base  $(\partial_x, \partial_y, \partial_t)$  de l'espace tangent  $T_{(x,y,t)}\mathbb{R}^3$  est inversible en tout point de  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ . Cette matrice est :

$$M_{x,y,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.95)$$

Elle a déterminant tout le temps  $-1$ . Donc par le théorème de Hörmander 1.3.30,  $P$  est hypoelliptique.

On peut également souligner, à titre culturel, un autre théorème du à Hörmander en 1967, critère assez puissant pour dire qu'un opérateur différentiel à coefficients lisses n'est pas hypo-elliptique.

**Théorème 1.3.32.** Critère de non hypo-ellipticité d'Hörmander, 1967, [112, théorème 2.1]

27. La lecture du livre [22] de Marco Bramanti nous fait sans aucun doute réaliser qu'une toute petite modification d'un coefficient, ne serait-ce qu'un changement de signe, peut avoir de grosses conséquences sur les propriétés de régularité de l'opérateur ! Il est donc difficile de deviner le caractère hypo-elliptique d'un opérateur "quasiment similaire" à un autre opérateur dont on connaît l'hypo-ellipticité.

Soit  $P$  un opérateur différentiel sur  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  à coefficients lisses. Supposons que le symbole principal  $\sigma^m(P)$  de  $P$  soit réel et que pour un  $x \in U$  on trouve  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  tels que :

1.  $\sigma^m(P)(x, \xi) = 0$
2.  $\exists j$  tel que  $\partial_{\xi_j} \sigma^m(P)(x, \xi) \neq 0$

Alors  $P$  n'est pas hypo-elliptique.

**Exemple 14.** 1. On prend  $P = x\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_t$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Cet opérateur a symbole principal  $\sigma^2(P)(x, y, t, \xi, \eta, \omega) = -x\xi^2 - \eta^2$ , **réel**. On constate que pour  $(x, y, t) = (-1, 0, 0)$  et  $(\xi, \eta, \omega) = (1, 1, 0)$  les conditions du théorème 1.3.32 sont vérifiées (dériver par rapport à  $\eta$ ) donc  $P$  n'est pas hypo-elliptique.

2. L'opérateur des ondes en dimension 1 :

$$P := \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2, \quad (1.3.96)$$

n'est pas hypo-elliptique. Pour le voir on applique le théorème d'Hörmander 1.3.32. Le symbole principal de  $P$  est  $\sigma^2(P)(\xi, \eta) = -\xi^2 + c^2\eta^2$ , **réel**, s'annule en  $(\xi, \eta) = (1, 1)$  mais de dérivée partielle en  $\eta$  non nulle quand évaluée en  $(1, 1)$ .

3. L'opérateur de Schrödinger (1.3.93) a pour symbole principal  $\sigma^2(P)(\xi, \eta) = -\xi^2$ , **réel**. On vérifie qu'il n'est pas hypo-elliptique en vertu du précédent théorème.

### 1.3.4 Développement asymptotique pseudo-homogène du noyau

On a vu à l'équation (1.3.45) que la transformée de Fourier permettait de relier le noyau d'un opérateur pseudodifférentiel et son symbole. Le fait qu'on puisse définir le développement asymptotique d'un symbole doit nous indiquer qu'on peut aussi faire de même avec le noyau. Le but de cette section est de décrire le lien qu'il subsiste entre le développement asymptotique du noyau et celui du symbole. Chemin faisant nous montrerons, proposition 1.3.36, un résultat important concernant le prolongement des fonctions homogènes en les distributions tempérées.

On rappelle que l'indice  $G$  fait référence au fait que l'espace  $\mathbb{R}^d$  est muni des dilatations à poids (1.3.3) (pouvant être tous égaux à un dans le cas des dilatations triviales). On demande au lecteur de se remémorer la définition 2.1.1 de norme quasi-homogène. Tout d'abord faisons quelques définitions :

**Définition 1.3.33.** Fonction pseudo-homogène [117, définition 7.1.1 p353 ], [13, définition (15.19)]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On définit l'ensemble  $\Psi\text{hf}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  des fonctions pseudo-homogènes d'ordre  $m$  sur la seconde variable comme suit.

1. Si  $m \notin \mathbb{N}$  alors :

$$\Psi\text{hf}_G^m(U \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d), \quad (1.3.97)$$

l'ensemble des fonctions homogènes d'ordre  $m$  1.3.1 pour les dilatations à poids (1.3.3).

2. Si  $m \in \mathbb{N}$  alors  $\Psi\text{hf}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est l'ensemble des éléments  $k \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  de la forme :

$$k(x, z) = f(x, z) + p(x, z) \log(|z|), \quad (1.3.98)$$

où  $p$  est un polynôme homogène en  $z$  de degré  $m$  dont les coefficients sont  $C^\infty$  en  $x$ , où  $f \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et où  $|\cdot|$  est une norme quasi-homogène sur  $\mathbb{R}^d$ .

Dans le cas où  $G$  est un groupe de Lie homogène, les noyaux de la forme :

$$k = k_0 + p \ln(|\cdot|), \quad (1.3.99)$$

où  $k_0$  est une fonction homogène,  $p$  est un polynôme homogène et  $|\cdot|$  est une norme quasi-homogène, apparaissent comme étant la solution fondamentale<sup>28</sup> des opérateurs hypo-elliptiques invariants à gauche par

28. Dans le sens que si  $P$  est l'opérateur en question alors  $P(f \star k) = f$ .

translation homogène d'ordre  $d_H$  dont la transposée (ou l'adjoint formel si les domaines n'ont pas été précisés) est aussi hypo-elliptique et où  $d_H$  désigne la dimension homogène de  $G$ , voir définition A.1.11. Par exemple, Ewert [68, remarque 8.16 p 61] résume cela brièvement. De plus amples informations sont données dans l'article de Folland<sup>29</sup> [78, théorème (2.1) p 172] de 1975 et de Geller [88] de 1983.

**Définition 1.3.34.** Noyau pseudo-homogène, [161, définition 2 p 209] [117, équation (7.1.2) p 354] [174, définition 3.5 p 414], [13, équations (15.40)-(15.41)]

Un noyau de Schwartz  $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$  admet un développement asymptotique d'ordre  $m \in \mathbb{R}$  si :

$$k \sim \sum_j k_{m+j}, \quad (1.3.100)$$

où  $k_{m+j} \in \Psi\text{hf}_G^{m+j}(U \times \mathbb{R}^d)$  et où le symbole  $\sim$  signifie que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $J_N \in \mathbb{N}$  :

$$k - \sum_{j \in J_N} k_{m+j} \in C^N(U \times U), \quad (1.3.101)$$

où  $C^N(U \times U)$  dénote l'ensemble des fonctions de classe  $C^N$ . L'espace de tels éléments  $m$  est dénoté par  $\Psi\text{hk}_G^m(U)$ .

Le développement asymptotique du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m < 0$  cache des termes logarithmiques. On retrouve ce phénomène au cours de différentes lectures : [13, p 3-4], [117, section 7.1 p 353, section 7.1.4 "kernel to symbol" p 392], [172], [68, remarque 8.16 p 61], [161, section III p 208] et [35, p 33 avant la définition 2.1]. On se propose de donner quelques détails pour expliquer ce phénomène.

Le théorème de Seeley [161, théorème 1 p 210] dit que tout opérateur pseudo-différentiel classique d'Hörmander d'ordre  $m < 0$  sur  $\mathbb{R}^d$  est un opérateur dont le noyau admet un développement asymptotique pseudo-homogène, voir aussi [117, théorème 7.1.1, section 7.1.1]. Plus précisément :

**Théorème 1.3.35.** Seeley 1969 [161, théorème 1 p 210]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert où  $\mathbb{R}^d$  est muni des dilatations triviales et  $m < 0$ . Alors  $P \in \Psi_{Hör}^m(U)$  si et seulement si :

$$Pu(x) = \int_U k(x, x-y)u(y)dy, \quad u \in C_c^\infty(U), \quad (1.3.102)$$

où le noyau de Schwartz de  $P$  satisfait  $k \in \Psi\text{hk}_G^{-m-d}(U)$ .

29. Les noyaux de type  $\alpha$  de Folland sont définis [78, p 164] en 1975, voir aussi son article [79, p 915-917] de 1977. Les noyaux de type  $\alpha$  sont passés en revue dans l'article de Rothschild, Stein [188, § 5 p 261] de 1976. En particulier dans cet article les opérateurs différentiels étudiés par Rothschild et Stein dans la [188, § 6 p 265], dans le contexte d'une algèbre de Lie stratifiée, possèdent un unique noyau fondamental de type 2. Les noyaux de type 2 font aussi leur apparition [79, p 919] comme solutions fondamentales de l'opérateur  $\square_b$  sur  $\mathbb{H}_n$ . De façon générale, les noyaux de type  $\alpha$  sont des distributions lisses en dehors de l'origine homogène d'ordre  $\alpha - d_H$ . Notons que, dans son [78, théorème (2.1)] central, Folland se place dans le cas où  $0 < \alpha < d_H$ . Ce théorème affirme que si  $P$  est un opérateur différentiel homogène d'ordre  $\alpha$  sur un groupe de Lie gradué  $G$ , de sorte que  $P$  et sa transposée sont hypo-elliptiques, alors  $P$  admet un unique noyau  $K_0$  de type  $\alpha$  qui soit solution fondamentale de  $P$ . Nous allons comparer ce que fait Folland vis à vis de la proposition 1.3.36. Prenons le cas du groupe  $\mathbb{R}^d$  muni des dilatations triviales de sorte que  $d_H = d$ . Alors le noyau  $K_0$  de type  $\alpha > 0$  du théorème (2.1) est donc par définition une distribution lisse en dehors de 0, homogène d'ordre  $m = \alpha - d > -d$ . De fait cette distribution se prolonge avec la proposition sus-mentionnée en une distribution tempérée homogène. En particulier et comme on le verra dans cette section, un tel prolongement ne fait pas apparaître des termes logarithmiques. Ces termes apparaissent pour  $m \leq -d, m \in \mathbb{Z}$ . En un sens et pour le dire grossièrement, Folland fait le sens "facile". Pour  $\alpha < -d_H$ , on entre dans le cadre des travaux datant du début des années 90 de [35, p 33] Chirst, Geller, Glowacki et Polin où les auteurs étudient des opérateurs donnés par la convolution avec un noyau plus général de type (1.3.99) et plus généralement, [35, définition 2.4 p 34] [78, théorème (2.1) p 172], des opérateurs pseudo-différentiels dont le développement asymptotique du noyau est donné par des éléments (1.3.99). Au regard de tous ces éléments techniques, il semble raisonnable de considérer ce commentaire de Folland [79, p 914] comme une bonne philosophie générale à garder en mémoire :

"The main tool for analyzing differential operators on nilpotent groups is the theory of homogeneous convolution operators."

**Remarque 7.** *Le cas du théorème de Seeley où  $m \geq 0$  est traité dans la [117, section 7.1.2, voir théorème 7.1.8 p 382].*

De surcroît, toujours pour  $\mathbb{R}^d$  muni des dilatations triviales, le développement asymptotique du symbole :

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}, \quad a_{m-j} \in \mathcal{H}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d), \quad (1.3.103)$$

et du noyau,

$$k \sim \sum_{j=0}^{\infty} k_{m+j}, \quad k_{m+j} \in \Psi h f_G^{m+j}(U \times \mathbb{R}^d), \quad (1.3.104)$$

sont reliés comme suit par une transformée de Fourier appropriée [117, Equation (7.1.81) p 393]. Soit  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  une fonction cut-off lisse satisfaisant :

$$\psi(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases} \quad (1.3.105)$$

Posons  $\kappa = -m - d$ . Alors pour  $m - j < 0$  :

$$a_{m-j}(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} k_{\kappa+j}(x, z) \psi\left(\frac{z}{t}\right) e^{-i\xi \cdot z} dz, \quad x \in U. \quad (1.3.106)$$

Le théorème 1.3.35 a son importance puisque les paramétrixes des opérateurs différentiels elliptiques sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m < 0$ . Par exemple, Hsiao et Wendland [117, équations (6.3.14), (2.1.18), (2.1.19), généralement section 2.1] citent les solutions fondamentales de l'opérateur acoustique d'Helmholtz  $P = \Delta + \lambda^2$  comme exemple noyaux pseudo-homogènes, voir aussi [63, exemple 2.118 p 234].

Dans le cas des dilatations d'Heisenberg, BG ont montré, [13, théorème (15.39) p 133, section § 15], que tout opérateur  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiel dans leur calcul pseudo-différentiel avait un noyau qui admettait précisément un développement asymptotique pseudo-homogène. Le [13, théorème (15.49) p 134] montre la réciproque de la précédente assertion. Dans le cadre des dilatations à poids entiers provenant d'un groupe de Lie gradué, les noyaux pseudo-homogènes sont le point de base des travaux de Christ-Geller-Glowacki-Polin, [35, définition 2.4 p 34] en 1992.

On voudrait comprendre "l'inverse" de la formule (1.3.106) dans le sens où on voudrait comprendre le passage du développement asymptotique du symbole vers celui du noyau. Reprenons par exemple l'opérateur  $P = (\text{Id} - \Delta)^{-1}$  sur  $\mathbb{R}$  filtré trivialement, et dont on connaît, voir (1.3.25), le développement asymptotique de son symbole.

Quid du développement asymptotique de son noyau ?

Comme le souligne BG [12, équation (11) p 4] dans l'introduction de leur livre, le développement du noyau devrait être de la forme :

$$k_j(x, z) = f_j(x, z) + p_j(x, z) \log(|z|), \quad (1.3.107)$$

où  $f_j$  est une fonction homogène de degré  $j$  en  $z$  et  $p_j$  un polynôme homogène en  $z$  de degré  $j$ .

Dans l'exemple de l'opérateur  $P = (\text{Id} - \Delta)^{-1}$ , notant  $\mathcal{F}_2$  la transformée de Fourier par rapport à la seconde variable (ici peut importe car la variable  $x$  ne joue aucun rôle), il est clair qu'on aimerait dire que le développement asymptotique du noyau de  $P$  est fourni par :

$$\begin{cases} k_{-2-2j}(x, x-z) = \mathcal{F}_2^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^{2j+2}}\right)(z) \\ k_{-2-2j-1}(x, x-z) = 0. \end{cases} \quad (1.3.108)$$

Toutefois il est difficile de donner un sens à :

$$k_{-2-2j}(x, x-z) = \mathcal{F}_2^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^{2j+2}}\right)(z), \quad (1.3.109)$$

et obtenir la décomposition (1.3.107) demande un peu de réflexion. En fait, il faut interpréter  $p_{-2j-2} : \xi \mapsto \frac{1}{|\xi|^{2j+2}}$  comme un élément de  $\mathcal{H}^{-2j-2}(U \times \mathbb{R})$ , où  $U$  est identifié à un point, et la prolonger en une distribution tempérée.

On rappelle qu'étant donnée une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  on définit la dilatée de  $u$  par :

$$\langle u_s, \phi \rangle = s^{-d} \langle u, \phi(s^{-1} \cdot) \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), s > 0. \quad (1.3.110)$$

On pourrait noter aussi  $u_s = \delta_s * u$ , où  $\delta_s$  représente la dilatation triviale sur  $\mathbb{R}^d$ . Le résultat suivant, concernant le prolongement des fonctions homogènes en des distributions, a été démontré par BG [13] dans le cadre des dilatations d'Heisenberg et explicité très clairement par Ponge [174]. Nous proposons une version pour les dilatations triviales où les preuves sont rigoureusement similaires, il faut simplement être précautionneux au fait que la dimension homogène n'est plus  $d+2$  (cas Heisenberg) mais  $d$  (cas trivial).

**Proposition 1.3.36.** *Extension d'une fonction homogène [174, lemme 3.1, appendice A p 459], [13, proposition 15.8], [40, lemme I.4 p 200], [175, p 33], [226, lemme 2.3.4 p 60]*

Soit  $f \in \mathcal{H}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , où  $U$  est identifié à un point.

1. Si  $m > -d$  alors  $f$  définit une distribution tempérée, unique prolongement homogène de  $f$ .
2. Si  $m \in \mathbb{Z}$  où  $m \leq -d$ , alors  $f$  se prolonge en une distribution  $\tau \in S'(\mathbb{R}^d)$  dont la dilatée est :

$$\tau_s = s^m \tau + s^m \log(s) \sum_{|\alpha| = -(m+d)} c_\alpha(f) \delta_0^{(\alpha)}, \quad s > 0, \quad (1.3.111)$$

où  $c_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} w^\alpha f(w) d\sigma(w)$ , où  $\mathbb{S}^{d-1}$  est la sphère unité dans  $\mathbb{R}^d$  et  $d\sigma$  la mesure sur cette sphère. En particulier,  $f$  admet une extension homogène si et seulement si tous les  $c_\alpha(f)$  s'annulent.

*Démonstration.* 1. Dans le cas où  $m > -d$  on montre, en utilisant la formule [81, p 7] d'intégration en coordonnées sphériques, que  $f$  est localement intégrable au voisinage de 0. Alors  $f$  définit une distribution tempérée. En effet, soit  $u \in S(\mathbb{R}^d)$  on calcule :

$$|\langle f, u \rangle| = \left| \int_{B_0(0, \frac{1}{2})} f(\xi) u(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_0(0, \frac{1}{2})} f(\xi) u(\xi) d\xi \right| \quad (1.3.112)$$

$$\leq C \|u\|_{0,0} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_0(0, \frac{1}{2})} |\xi|^m |f\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) u(\xi)| d\xi \quad (1.3.113)$$

$$\leq C \|u\|_{0,0} + \sup_{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}} |f(\omega)| \|u\|_{m,0}, \quad (1.3.114)$$

où  $C = \int_{B_0(0, \frac{1}{2})} |f(\xi)| d\xi < +\infty$  et  $\|u\|_{j,k} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^j \partial^k u(\xi)|$  est la semi-norme dans l'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R}^d)$ . Pour l'unicité, nous renvoyons le lecteur aux références proposées.

2. Dans le cas où  $m \in \mathbb{Z}$  où  $m \leq -d$ , on pose  $k = -(m+d) \in \mathbb{N}$  et pour tout  $u \in S(\mathbb{R}^d)$  :

$$\langle \tau, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \left( u(\xi) - \Psi(|\xi|) \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} u^{(\alpha)}(0) \right) f(\xi) d\xi, \quad (1.3.115)$$

où  $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  de valeur 1 dans un voisinage de 0. Nous allons montrer que  $\tau \in S'(\mathbb{R}^d)$ . Pour ce faire, on calcule avec  $u \in S(\mathbb{R}^d)$  :

$$\langle \tau, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi) (1 - \Psi(|\xi|)) f(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(|\xi|) \left( u(\xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} u^{(\alpha)}(0) \right) f(\xi) d\xi. \quad (1.3.116)$$

La première intégrale de (1.3.116) ne pose pas de soucis : la singularité potentielle de  $f$  en 0 est effacée et l'intégrande est à support compact. On constate que :



$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi) (1 - \Psi(|\xi|)) f(\xi) d\xi \right| \leq C \|u\|_{0,0}. \quad (1.3.117)$$

Nous traitons maintenant la seconde intégrale. Rappelons la formule de Taylor à l'ordre  $k = -(m+d)$  appliquée à  $u \in S(\mathbb{R}^d)$ , il vient :

$$u(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^j u}{\partial \xi^\alpha}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \xi^\alpha}(t\xi) dt \quad (1.3.118)$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^j u}{\partial \xi^\alpha}(0) + |\xi|^{k+1} \epsilon(\xi), \quad (1.3.119)$$

où  $\epsilon$  est une fonction de limite nulle en 0. Il s'ensuit dans la deuxième intégrale de (1.3.116) :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(|\xi|) \left( u(\xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} u^{(\alpha)}(0) \right) f(\xi) d\xi \right| \stackrel{(1.3.119)}{=} \left| \int_{\text{supp}(\Psi)} \Psi(|\xi|) |\xi|^{k+1} \epsilon(\xi) f(\xi) d\xi \right| \quad (1.3.120)$$

$$\leq \underbrace{\tilde{C} \|f\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \frac{1}{|\xi|^{d-1}}\|_{L^1(\text{supp}(\Psi))}}_{<+\infty} \|\epsilon\|_{L^\infty(\text{supp}(\Psi))}, \quad (1.3.121)$$

où  $\tilde{C} = \int_{\text{supp}(\Psi)} \Psi(|\xi|) d\xi < +\infty$  et où nous avons utilisé l'homogénéité de  $f$  dans (1.3.121). Pour voir que la quantité  $\|f\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \frac{1}{|\xi|^{d-1}}\|_{L^1(\text{supp}(\Psi))}$  est finie, le lecteur pourra passer aux coordonnées sphériques. On peut ensuite dire, avec le développement de Taylor de  $u$  rappelé ci-dessus, qu'il existe  $\hat{C} > 0$  :

$$\|\epsilon\|_{L^\infty(\text{supp}(\Psi))} \leq \hat{C} \sum_{|\alpha|=k+1} \|u\|_{0,|\alpha|}. \quad (1.3.122)$$

Les équations (1.3.117) et (1.3.122) permettent de conclure que  $\tau \in S'(\mathbb{R}^d)$ . De plus il est clair que  $\tau|_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} = f$ . Pour obtenir l'équation (1.3.111), on calcule pour  $s > 0$  et  $u \in S(\mathbb{R}^d)$  :

$$\langle \tau_s, u \rangle - s^m \langle \tau, u \rangle \stackrel{(1.3.110)}{=} s^{-d} \langle \tau, \delta_{s^{-1}}^* u \rangle - s^m \langle \tau, u \rangle \quad (1.3.123)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left( s^{-d} u(s^{-1}\xi) - s^{-d} \Psi(|\xi|) \sum_{|\alpha| \leq -(m+d)} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} s^{-|\alpha|} u^{(\alpha)}(0) \right) f(\xi) d\xi \\ - s^m \int_{\mathbb{R}^d} \left( u(\xi) - \Psi(|\xi|) \sum_{|\alpha| \leq -(m+d)} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} u^{(\alpha)}(0) \right) f(\xi) d\xi \quad (1.3.124)$$

$$= s^m \sum_{|\alpha| \leq -(m+d)} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \Psi(|\xi|) - \Psi(|s\xi|) \right) \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} f(\xi) d\xi \langle \delta_0^{(\alpha)}, u \rangle \quad (1.3.125)$$

$$= s^m \sum_{|\alpha| \leq -(m+d)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} r^{d+|\alpha|+m} (\Psi(r) - \Psi(sr)) \frac{dr}{r}}_{:=d_\alpha(s)} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{w^\alpha}{\alpha!} f(w) d\sigma(w)}_{:=c_\alpha(f)} \langle \delta_0^{(\alpha)}, u \rangle, \quad (1.3.126)$$

où nous avons effectué le changement de variable  $w = s^{-1}\xi$  dans la première intégrale de (1.3.124) pour obtenir (1.3.125) et où nous appliquons le changement de variable sur la sphère dans (1.3.126). Ceci étant fait, on peut calculer précisément les coefficients  $d_\alpha$  et  $c_\alpha$ . On montre, que pour une fonction  $\Psi$  bien choisie, voir [174, équation (A.7) p 460], on obtient  $d_\alpha(s) = 0$ , pour  $|\alpha| < -(m+d)$  et  $d_\alpha(s) = \log(s)$  pour  $|\alpha| = -(m+d)$ , voir [174, p 461]. De l'équation (1.3.126), il vient alors :

$$\langle \tau_s, u \rangle - s^m \langle \tau, u \rangle = s^m \log(s) \sum_{|\alpha|=-(m+d)} c_\alpha(f) \langle \delta_0^{(\alpha)}, u \rangle. \quad (1.3.127)$$

Ceci est l'équation (1.3.111) désirée. □

**Remarque 8.** En fait, pour  $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , voir [226, lemme 2.3.4], il existe une unique distribution homogène qui prolonge  $f$ .

Nous allons maintenant procéder comme chez [13, § 15 définition (15.6) p 128 et définition (15.19) p 130], en travaillant dans le cadre des dilatations triviales. Plus précisément nous allons voir que les distributions tempérées dont la dilatée est de la forme (1.3.111) et qui surgissent du prolongement de fonctions homogènes sont en bijection, via la transformée de Fourier, avec des distributions tempérées dont la dilatée fait apparaître des termes logarithmiques.

**Définition 1.3.37.** Soit  $m \in \mathbb{Z}$ .

1. On introduit  $\mathcal{G}_m$ , l'ensemble des distributions  $u \in S'(\mathbb{R}^d)$  dont le support singulier est inclus dans  $\{0\}$ <sup>30</sup> et tel qu'il existe des constantes  $c_\alpha$  :

$$u_s = s^m u + s^m \log(s) \sum_{\langle \alpha \rangle = -(m+d)} c_\alpha \delta_0^{(\alpha)}, s > 0, \quad (1.3.128)$$

où  $u_s$  représente la distribution dilatée de  $u$ .

2. On introduit  $\mathcal{K}_m$ , l'ensemble des distributions  $u \in S'(\mathbb{R}^d)$  dont le support singulier est contenu dans  $\{0\}$  et tel qu'il existe des constantes  $c_\alpha$  :

$$u_s = s^m u + s^m \log(s) \sum_{\langle \alpha \rangle = m} c_\alpha z^\alpha, s > 0, \quad (1.3.129)$$

Avec la [13, proposition (15.8)], on sait que tout élément  $u \in \mathcal{G}_m$  se restreint en  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  en un élément de  $\mathcal{H}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , où  $U$  est identifié à un point de  $\mathbb{R}^d$ . La proposition 1.3.36 constitue la réciproque de la précédente assertion. Enfin, on peut montrer :

**Lemme 1.3.38.** [174, p 414], [13, prop (15.24) p 131]

Soit  $m \in \mathbb{Z}$ . La transformée de Fourier inverse réalise une bijection entre  $\mathcal{G}_m$  et  $\mathcal{K}_{-m-d}$ .

*Démonstration.* Il suffit de se souvenir, voir l'appendice D :

1. Pour toute distribution  $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ , alors :

$$\left(\mathcal{F}(u)\right)_s = s^{-d} \mathcal{F}(u_{s^{-1}}), s > 0. \quad (1.3.130)$$

2. Toute distribution homogène est tempérée.

3. Une distribution  $u$  est homogène de degré  $m$  si et seulement si  $\mathcal{F}(u)$  est homogène de degré  $-(m+d)$ .

On pose l'application :

$$\mathcal{F} : \mathcal{G}_m \rightarrow \mathcal{K}_{-m-d}, u \mapsto \mathcal{F}(u) \quad (1.3.131)$$

Elle est bien définie. En effet, soit  $u \in \mathcal{G}_m$  alors il existe des constantes  $c_\alpha$  de sorte que pour tout  $s > 0$  :

$$u_s = s^m u + s^m \log(s) \sum_{\langle \alpha \rangle = -(m+d)} c_\alpha \delta_0^{(\alpha)}, s > 0, \quad (1.3.132)$$

Prenant la transformée de Fourier de la précédente équation il vient pour  $s > 0$  :

$$\mathcal{F}(u_s) = s^m \mathcal{F}(u) + s^m \log(s) \sum_{\langle \alpha \rangle = -(m+d)} c_\alpha \mathcal{F}(\delta_0^{(\alpha)}), \quad (1.3.133)$$

soit :

$$s^{-d} \mathcal{F}(u)_{s^{-1}} = s^m \mathcal{F}(u) + s^m \log(s) \sum_{\langle \alpha \rangle = -(m+d)} c_\alpha (-i\xi)^\alpha. \quad (1.3.134)$$

On en déduit que  $\mathcal{F}(u)$  est de la forme (1.3.129). Concernant les supports, on pourra regarder la preuve de BG.  $\square$

30. Cela signifie que  $u$  est lisse en dehors de 0 ! Par exemple,  $\text{suppsing}(\delta_0) = \{0\}$  et  $\text{suppsing}(vp_{\frac{1}{x}}) = \{0\}$

Il est même possible de mettre des topologies sur les espaces  $\mathcal{G}_m$  et  $\mathcal{K}_{-(m+d)}$ . On montre ensuite que la transformée de Fourier y réalise un homéomorphisme, voir [13, proposition (15.30) p 132]. Par définition, un élément  $u \in \mathcal{K}_m$  est une fonction lisse en dehors de 0. Ainsi prenant  $s = z|z|^{-1}$  pour  $z \neq 0$ , on montre :

**Proposition 1.3.39.** [13, proposition (15.21) p 130]

Soit  $u \in \mathcal{K}_m$  alors pour  $z \neq 0$  on a :

$$u(z) = f(z) + p(z) \log(|z|), \quad (1.3.135)$$

où  $f \in \mathcal{H}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $p$  est un polynôme homogène d'ordre  $m$ .

Ces résultats nous permettent de conclure sur la discussion que l'on avait commencée autour du développement asymptotique du noyau de l'opérateur  $P = (I - \Delta)^{-1}$ .

On sait que  $p_{-2j-2}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{2j+2}} \in \mathcal{H}^{-2j-2}(U \times \mathbb{R})$ , donc avec la proposition 1.3.36, pour tout  $j \geq 0$ , on peut prolonger  $p_{-2j-2}$  en un élément  $\tau_{-2j-2} \in \mathcal{G}_{-2j-2}$ . Avec le lemme 1.3.38, on peut trouver un élément  $k_{-2j-3} \in \mathcal{K}_{-2j-3}$  de sorte que :

$$k_{-2j-3} = \mathcal{F}(\tau_{-2j-2}) \quad (1.3.136)$$

Par ailleurs, en vertu de la proposition 1.3.39, il existe  $f_{-2j-3} \in \mathcal{H}^{-2j-3}(U \times \mathbb{R})$  et  $p_{-2j-3}$  un polynôme homogène d'ordre  $-2j-3$  de sorte que :

$$k_{-2j-3}(z) = f_{-2j-3}(z) + p_{-2j-3}(z) \log(|z|), \quad (1.3.137)$$

est le terme général du développement asymptotique pseudo-homogène (constant en  $x$ ) d'ordre -3 du noyau  $k$  de  $P$ .

## 1.4 Approche groupoïdale au calcul pseudodifférentiel de BG et au résidu de Wodzicki

### 1.4.1 Approche groupoïdale du calcul pseudo-différentiel sur les variétés filtrées de vEY

#### 1.4.1.1 Calcul de vEY : cas d'une variété non-filtrée

L'approche groupoïdale au calcul pseudodifférentiel, comme son nom l'indique, repose sur l'utilisation des groupoïdes et particulièrement du groupoïde tangent  $\mathbb{T}M$  que l'on doit à Connes<sup>31</sup> et qui est défini comme le recollement lisse en 0 du groupoïde des paires de  $M$  et du fibré tangent  $TM$  :

$$\mathbb{T}M = (M \times M \times \mathbb{R}^*) \cup (TM \times \{0\}). \quad (1.4.1)$$

La base de ce groupoïde est  $M \times \mathbb{R}$ . Les travaux [52] de Debord-Skandalis de 2014 sont à l'origine des idées développées par vEY dans leur article [223] sur le calcul pseudodifférentiel groupoïdal. Soit  $G$  un groupoïde de Lie et  $A(G)$  son algèbroïde associée, voir la section A.6. Debord et Skandalis définissent sur le groupoïde adiabatique (voir [52, section 2.2] ou encore [224, section 9]) :

$$G_{ad} = (G \times \mathbb{R}^*) \cup (A(G) \times \{0\}), \quad (1.4.2)$$

une action de  $\mathbb{R}_+^*$ , voir [52, section 2.3]. Donnons quelques exemples de groupoïdes adiabatiques et de la  $\mathbb{R}_+^*$ -action de Debord-Skandalis associée.

1. Si  $G$  est un groupe de Lie, s'offre à nous deux situations.

---

31. Connes, étudiant de Dixmier, a reçu la médaille Fields en 1982 pour ces travaux sur les algèbres de Von-Neumann.

- (a) Si  $G$  est **non gradué**, alors l'algèbroïde associée au groupoïde  $G$  est son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , voir la section A.6. On regarde en particulier l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  comme un groupe abélien (avec la loi de composition interne présente sur  $\mathfrak{g}$ ), on oublie complètement le crochet de Lie. Alors le groupoïde  $G_{ad}$  est un groupoïde de Lie et l'action de Debord-Skandalis dans ce cas est donnée par :

$$\begin{cases} \alpha_s(x, t) &= (x, s^{-1}t), \quad t \neq 0 \\ \alpha_s(\xi, 0) &= (s\xi, 0), \quad \xi \in T_x G. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

- (b) Si  $G$  est **gradué**<sup>32</sup>, alors comme auparavant, l'algèbroïde associée au groupoïde  $G$  est son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , voir la section A.6. Cette fois,  $\mathfrak{g}$  est regardé avec la structure de groupe offerte par l'application exponentielle et la loi de BCH. On note  $\delta_s$  la famille de dilatations à poids entiers agissant sur  $\mathfrak{g}$ . L'action de Debord-Skandalis dans ce cas est donnée par :

$$\begin{cases} \alpha_s(x, t) &= (x, s^{-1}t), \quad t \neq 0 \\ \alpha_s(\xi, 0) &= (\delta_s(\xi), 0), \quad \xi \in \mathfrak{g}. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

2. Si  $M$  est une variété lisse. S'offre encore à nous deux situations.

- (a) Si  $M$  est **non filtrée**, alors l'algèbroïde associée au groupoïde  $G$  des paires de  $M$  est  $A(G) = TM$  le fibré tangent de  $M$ , voir la section A.6. Ainsi, le groupoïde tangent (1.4.1) est un exemple de groupoïde adiabatique pour  $G = M \times M$  le groupoïde des paires. L'action de Debord-Skandalis sur  $TM$  est appelée "*zoom action*" dans les travaux de vEY [223]. Elle est définie par :

$$\begin{cases} \alpha_s(y, x, t) = (y, x, s^{-1}t) & (x, y) \in M \times M, \quad t \neq 0, \quad s > 0 \\ \alpha_s(x, \xi, 0) = (x, s\xi, 0) & x \in M, \quad \xi \in T_x M, \quad s > 0. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

C'est une famille  $s > 0$ -paramétrée d'automorphismes de groupoïdes de Lie.

- (b) Si  $M$  est une variété **filtrée**. Nous réservons cela pour une future section. Les variétés filtrées sont l'analogue des groupes de Lie gradués. Toutefois le groupoïde  $\mathbb{T}_H M$  n'est pas un groupoïde adiabatique car même si la variété est filtrée, l'algèbroïde de Lie associée au groupoïde des paires demeure le fibré tangent et ne devient pas le groupoïde osculant  $\mathcal{T}_H M$ .

Grâce à cette action sur  $G_{ad}$ , Debord et Skandalis définissent, [52, théorème 3.7], la notion d'opérateur pseudo-différentiel sur un groupoïde<sup>33</sup>  $G$  comme étant la moyenne d'une fonction  $t \mapsto t^m f_t$  contre la mesure de Haar du groupe  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ . Plus précisément, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^m f_t \frac{dt}{t}, \quad (1.4.6)$$

désigne un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $-m$  sur  $G$  où  $f$  est une fonction dans un \*-idéal  $\mathcal{J}(G)$  de  $S_c(G_{ad})$  l'algèbre de Schwartz de Carrillo-Rouse ([189]), voir [52, section 3.1 et proposition 3.5], [68, section 6.4].

Pour  $G = M \times M$  le groupoïde des paires d'une variété lisse  $M$ , le noyau de Schwartz de tout opérateur<sup>34</sup> d'ordre  $-m$  sur  $G$  est vu comme l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^m f_t \frac{dt}{t}, \quad (1.4.7)$$

où  $f$  est une fonction dans l'\*-idéal  $\mathcal{J}(G)$  de  $S_c(TM)$  l'algèbre de Schwartz de Carrillo-Rouse.

32. Voir la section A.1.

33. Au sens de [163, définition 7 p 124] : grossièrement un pseudo-différentiel (invariant) sur un groupoïde de Lie  $G$  est la donnée d'une famille lisse (voir [163, définition 6])  $(P_x)_{x \in G^{(0)}}$  d'opérateurs pseudo-différentiels classiques agissant sur les  $r$ -fibres et qui satisfont une condition d'invariance à gauche. Réinterprétée pour  $G$  un groupe de Lie, la [163, définition 7 p 124] englobe l'exemple des opérateurs différentiels invariants à gauche par translation. On pourra aussi consulter l'article de Montheubert et Pierrot [156].

34. Toujours grâce à la [163, définition 7 p 124], on montre que la condition (10) d'invariance de l'article en question pour  $G$  le groupoïde des paires de  $M$  implique qu'on peut identifier la famille lisse d'opérateurs pseudo-différentiels  $P_x$  agissant sur  $M \times \{x\}$  à un un même opérateur pseudo-différentiel classique agissant sur la variété  $M$ .

En parallèle de ces travaux, Lescure-Manchon-Vassout (LMV) ont étudié dans leur article [138] datant de 2014, des familles lisses de distributions à support compact dans les  $\pi$ -fibres :

$$(u^x)_{x \in B_M}, \quad x \mapsto u^x \in \mathcal{E}'(\pi^{-1}(x)) \quad \text{est lisse sur } B_M, \quad (1.4.8)$$

où  $\pi : M \rightarrow B_M$  est une submersion entre deux variétés lisses. Ces applications et les rappels qui suivent sont le cœur de la section 3.3.3.

Soit  $G$  un groupoïde de Lie avec  $G^{(0)}$  sa base. Les applications but et source  $r, s$  d'un groupoïde de Lie sont en particulier des submersions, voir la section A.4. Il est possible de montrer que la famille (1.4.8) coïncide avec les distributions  $r$ -fibrées  $r$ -proprement supportées (resp.  $s$ -fibrées  $s$ -proprement supportées), lesquelles sont des applications  $C^\infty(G^{(0)})$ -linéaires continues :

$$u : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G^{(0)}), \quad (1.4.9)$$

qui sont notées  $\mathcal{E}'_r(G)$  (resp.  $\mathcal{E}'_s(G)$ ). Pour les notions de support d'une telle distribution et de partie  $r$ -propre,  $s$ -propre, le lecteur pourra se référer aux définitions 3.3.7 et 3.3.8.

La  $C^\infty(G^{(0)})$ -linéarité pour une distribution  $r$ -fibrée signifie que pour tout  $f \in C^\infty(G)$  pour tout  $a \in C^\infty(G^{(0)})$  alors :

$$\langle u, (r^*a)f \rangle = a \langle u, f \rangle. \quad (1.4.10)$$

Avec le point de vue de LMV, une application  $u \in \mathcal{E}'_r(G)$  est une famille lisse :

$$x \in G^{(0)} \mapsto u^x \in \mathcal{E}'(G^x), \quad (1.4.11)$$

où  $\mathcal{E}'(G^x)$  désigne les distributions à support compact sur la  $r$ -fibre en  $x$  du groupoïde  $G$ . Il y a une interprétation analogue pour les  $s$ -fibres.

De la même façon que l'on pousse en avant les distributions ("pushforward" en anglais), il est possible de définir, pour tout  $s > 0$ , le poussé-en-avant par l'action de Debord-Skandalis  $\alpha_s$  d'une distribution  $r$ -fibrée de vEY, voir la proposition 3.3.21.

Pour comprendre l'idée de vEY à venir, examinons le petit exemple suivant.

**Exemple 15.** Soit  $P = \partial_x^2 + x\partial_x$  pour la variété (filtrée trivialement)  $M = \mathbb{R}$ . Cet opérateur différentiel d'ordre 2 a pour noyau de Schwartz la distribution :

$$k(x, y) = \delta_x''(y) + x\delta_x'(y) \in D'(M \times M). \quad (1.4.12)$$

Nous posons la distribution  $r$ -fibrée suivante sur  $\mathbb{T}M$  :

$$\mathbb{P} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{T}M), (x, t) \mapsto \begin{cases} \mathbb{P}(x, y, t) = t^2 k(x, y), & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbb{P}(x, v, 0) = \delta_0''(v), & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (1.4.13)$$

Constatons que :

1.  $\mathbb{P}(x, \cdot, t) \in \mathcal{E}'((M \times M)^{(x,t)}) = \mathcal{E}'(\{x\} \times M \times \{t\}) \cong \mathcal{E}'(M)$ .
2.  $\mathbb{P}(x, \cdot, 0) \in \mathcal{E}'(T_x M) \cong \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ .
3.  $\mathbb{P}|_{t=1} = k$ .

En utilisant les cartes exponentielles  $\text{Exp}^{\overline{X}}$  sur  $M = \mathbb{R}$ , voir la section C.1, on montrera, voir l'exemple 72 :

1.  $\mathbb{P} \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathcal{E}'(\mathbb{T}M)) = \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}M)$  est une distribution  $r$ -fibrée.
2.  $\alpha_{s*}\mathbb{P} = s^2\mathbb{P}$ .

Soit  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}M)$ , on rappelle qu'il est possible de définir le support de  $\mathbb{P}$ , voir définition 3.3.8 et que  $\mathbb{P}$  est proprement supportée si les applications  $r, s : \text{supp}(\mathbb{P}) \rightarrow M \times \mathbb{R}$  sont propres. Notons toutefois, voir proposition 3.3.12, que toute distribution  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}M)$  est automatiquement  $r$ -propre. L'exemple 15 motive la définition suivante.

**Définition 1.4.1.** Distribution  $r$ -fibrée homogène

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Une distribution proprement supportée  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}M)$  est dite homogène de degré  $m$  lorsque pour tout  $s > 0$  :

$$\alpha_{s*}\mathbb{P} = s^m\mathbb{P}, \quad (1.4.14)$$

où  $\alpha_s$  désigne l'action de Debord-Skandalis 3.2.1. On fait de même avec les distributions  $s$ -fibrées.

Une observation motivante pour le bon fonctionnement du calcul groupoïdal faite par vEY est :

**Proposition 1.4.2.** *vEY [223, proposition 1 p 3] 2017*

Soit  $M$  une variété lisse. Un noyau semi-régulier dans les deux variables  $P \in \mathcal{E}'_r(M \times M) \cong C^\infty(M, \mathcal{E}'(M))$  est le noyau de Schwartz d'un opérateur différentiel d'ordre  $m \in \mathbb{N}$  si et seulement si  $P = \mathbb{P}|_{t=1}$ , pour une distribution  $r$ -fibrée proprement supportée  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}M)$  homogène d'ordre  $m$ , au sens où :

$$\alpha_{s*}\mathbb{P} = s^m\mathbb{P}. \quad (1.4.15)$$

On peut même préciser :

$$\mathbb{P}_t = \begin{cases} t^m P & \text{si } t \neq 0 \\ \sigma^m(P) & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

De fait il y a une analogie très forte avec la proposition 1.3.20 : tout noyau d'un opérateur différentiel se prolonge en une distribution  $r$ -fibrée homogène sur le groupoïde tangent (l'axe  $\mathbb{R}$  qui paramétrise le groupoïde tangent représente la dimension supérieure qu'il nous faut rajouter pour ce prolongement) de la même façon que le symbole d'un opérateur différentiel se prolonge dans une dimension supérieure en une fonction homogène. De même, pour pouvoir traiter le cas des opérateurs pseudo-différentiels, il nous faut maintenant penser à une généralisation des distributions  $r$ -fibrées homogènes pour l'action de Debord-Skandalis. Dans ce qui suit,  $C_p^\infty(\mathbb{T}M, \Omega_r)$  représente les sections lisses propres du fibré  $\Omega_r$  des densités tangentes aux  $r$ -fibres du groupoïde  $\mathbb{T}M$ . Plus précisément le fibré des densités est  $\Omega_r = \bigsqcup_{p \in \mathbb{T}M} |\Omega|^1(T_p \mathbb{T}M^{r(p)})$ , où  $|\Omega|^1(T_p \mathbb{T}M^{r(p)})$  représente les 1-densités sur l'espace vectoriel  $T_p \mathbb{T}M^{r(p)}$ , voir la section 3.4. On définit alors :

**Définition 1.4.3.** L'ensemble des distributions  $r$ -fibrées essentiellement homogènes de poids  $m$ , [223, définition 18 p 10]

Soit  $M$  une variété lisse et  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}M)$  une distribution  $r$ -fibrée. Cette distribution est dite une distribution  $r$ -fibrée essentiellement homogène d'ordre  $m$  lorsque pour tout  $s > 0$  :

$$\alpha_{s*}\mathbb{P} - s^m\mathbb{P} \in C_p^\infty(\mathbb{T}M, \Omega_r), \quad (1.4.17)$$

et que  $\mathbb{P}$  est proprement supportée sur le groupoïde tangent  $\mathbb{T}M$ . On note alors  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$  l'ensemble de ces éléments et on appelle l'application  $s \mapsto \alpha_{s*}\mathbb{P} - s^m\mathbb{P}$ , le co-cycle de  $\mathbb{P}$ .

**Définition 1.4.4.** L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels groupoïdaux [223, définition 19 p 10]

Soit  $M$  une variété lisse trivialement filtrée. Un opérateur  $P$  (confondu à son noyau de Schwartz) est dit un opérateur (noyau)  $H$ -pseudo-différentiel d'ordre  $\leq m$  si  $P = \mathbb{P}|_{t=1}$  pour  $\mathbb{P} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$ . L'ensemble de ces éléments est noté  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)|_{t=1}$ . Il y a une définition analogue 1.4.16 dans le cas où  $M$  est filtrée dans laquelle  $\mathbb{T}M$  est bien entendu remplacé par  $\mathbb{T}_H M$ .

Ces définitions permettent à vEY de montrer :

**Théorème 1.4.5.** [223, théorème 2 p 3] 2017

Soit  $M$  une variété lisse trivialement filtrée. Le calcul pseudo-différentiel groupoïdal coïncide avec le calcul pseudo-différentiel d'Hörmander, Kohn et Nirenberg dans le cadre des opérateurs classiques proprement supportés :

$$\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)|_{t=1} = \Psi_{Hör}^m(M). \quad (1.4.18)$$

La notation  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)|_{t=1}$  évoque en effet que tout opérateur pseudo-différentiel dans le calcul d'Hörmander est la restriction en  $t = 1$  d'une distribution  $r$ -fibrée sur le groupoïde tangent essentiellement homogène d'ordre  $m$  pour l'action de Debord-Skandalis. On peut résumer le recollement lisse entre le noyau de Schwartz  $k$  d'un opérateur pseudo-différentiel et de son symbole principal  $\sigma^m(P)$  par :

$$\mathbb{T}M := \underbrace{M \times M}_{k \in \mathcal{E}'_r(M \times M)} \times \mathbb{R}^* \quad \bigcup \quad \underbrace{TM}_{\sigma^m(P) \in C^\infty(T^*M)} \times \{0\}, \quad (1.4.19)$$

où  $\sigma^m(P)$  représente le symbole principal de  $P$  qui est une fonction lisse homogène d'ordre  $m$  sur le fibré cotangent, voir [226, section 2.1.5 dont définition 2.1.11].

Expliquons pourquoi le symbole principal d'un opérateur différentiel peut être regardé de la sorte. Concernant les symboles principaux des opérateurs pseudo-différentiels, le lecteur pourra consulter [226]. Commençons par introduire quelques notations. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathfrak{U}^m(TM)$  la composante graduée d'ordre  $m$  de l'algèbre de Lie enveloppante  $\mathfrak{U}(TM)$  de l'algèbroïde de Lie  $TM$  munie de l'ancre et des crochets de Lie nuls<sup>35</sup>. On note  $DO(M)$  l'algèbre (pour la composition) filtrée des opérateurs différentiels  $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  sur une variété trivialement filtrée  $M$ . La filtration est donnée par les espaces :

$$DO^m(M) = \text{Vect}_{C^\infty(M)} \left( X_{i_1} \dots X_{i_m}, X_{i_j} \in \Gamma^\infty(TM) \right), \quad (1.4.20)$$

où le  $\text{Vect}_{C^\infty(M)}$  signifie qu'on permet les combinaisons finies d'éléments  $f X_{i_1} \dots X_{i_m}$ ,  $f \in C^\infty(M)$ .

Nous resterons relativement informels dans le sens rigoureux que nous donnons à  $\mathfrak{U}^m(TM)$  et plus généralement à l'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}(TM)$ .

La partie principale d'un opérateur différentiel  $P$  d'ordre  $m$  est bien définie modulo  $DO^{m-1}(M)$ . Pour s'en convaincre, regardons l'exemple suivant.

**Exemple 16.** *Mauvaise définition de la partie principale classique d'un opérateur différentiel sur une variété*

*Prenons :*

$$\begin{cases} X &= \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z \\ Y &= \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z \\ Z &= \partial_z, \end{cases} \quad (1.4.21)$$

les champs d'Heisenberg sur  $\mathbb{R}^3$  avec  $[X, Y] = Z$ . On rappelle qu'on regarde ces champs de vecteurs comme des opérateurs différentiels d'ordre 1. Posons :

$$P = XY, \quad Q = YX + Z. \quad (1.4.22)$$

Comme  $\mathbb{R}^3$  est considérée trivialement filtrée, le champ  $Z$  demeure<sup>36</sup> d'ordre 1 et les parties principales de  $P$  et  $Q$  sont respectivement  $XY$  et  $XY$ . Pourtant  $P \neq Q$  et donc ces opérateurs devraient avoir même partie principale. Cela justifie brièvement pourquoi la partie principale d'un opérateur différentiel sur une variété  $M$  n'est pas bien définie comme opérateur différentiel sur  $M$ . Remarquons aussi que :

$$\begin{cases} XY &= \partial_x \partial_y + \frac{1}{2} \partial_z + \frac{1}{2} x \partial_x \partial_z - \frac{1}{2} y \partial_z \partial_y - \frac{1}{4} xy \partial_z^2 \\ YX &= \partial_y \partial_x - \frac{1}{2} \partial_z - \frac{1}{2} y \partial_y \partial_z + \frac{1}{2} x \partial_z \partial_x - \frac{1}{4} xy \partial_z^2, \end{cases} \quad (1.4.23)$$

de sorte que, regardés dans le quotient  $DO^2(\mathbb{R}^3)/DO^1(\mathbb{R}^3)$ , ces deux éléments coïncident et constituent les parties principales de  $P$  et  $Q$ .

35. Rappelons que  $TM$  est un fibré vectoriel lisse, il est naturellement muni d'une structure d'algèbroïde de Lie avec ancre nulle et crochet de Lie nuls sur  $\Gamma^\infty(TM)$ , voir exemple 65 et à toute algèbroïde de Lie on peut associer une algèbre enveloppante. Nous ne détaillons pas la construction technique et on laisse le lecteur intéressé se référer à Nistor, Weinstein et Xu [163, p133]. Insistons aussi que ce n'est pas la seule structure d'algèbroïde de Lie possible, en effet  $TM$  peut aussi être vue comme l'algèbroïde de Lie associée au groupoïde des paires de  $M$ . Dans ce cas le crochet de Lie sur  $\Gamma^\infty(TM)$  est le crochet de Lie des champs de vecteurs et l'ancre est l'application identité.

36. Nous verrons dans ce manuscrit que pour la filtration dite d'Heisenberg, le champ  $Z$  se voit affecter d'un poids 2 et donc la partie principale est modifiée.

Il est possible de montrer que :

**Proposition 1.4.6.** *Soit  $M$  une variété trivialement filtrée et  $P \in DO(M)$  un opérateur différentiel sur  $M$ . Alors :*

$$DO^m(M)/DO^{m-1}(M) \cong \mathfrak{U}^m(TM). \quad (1.4.24)$$

**Remarque 9.** *Traisons le cas de  $M = \mathbb{R}^d$ . Un élément  $P \in DO^m(\mathbb{R}^d)$  s'écrit sous la forme :*

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad (1.4.25)$$

où  $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\partial^\alpha$  sont les dérivées usuelles dans la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi si l'on regarde  $P$  dans le quotient  $DO^m(\mathbb{R}^d)/DO^{m-1}(\mathbb{R}^d)$  il nous reste l'élément :

$$\left[ \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha \right]. \quad (1.4.26)$$

Cet élément peut être vu comme une famille lisse sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans les opérateurs différentiels à coefficients constants :

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d) \right), \quad (1.4.27)$$

c'est à dire comme une section lisse dans  $\mathfrak{U}^m(TM)$ . C'est bien, pour chaque  $x \in M$ , une application à valeurs dans les opérateurs différentiels invariants par translation à gauche sur  $T_x M \cong \mathbb{R}^d$  (donc à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^d$  d'après la proposition 4.2.1) homogènes d'ordre  $m$ .

Ainsi, en vertu de l'équation (1.4.24) la partie principale  $\sigma^m(P) := [P] \in DO^m(M)/DO^{m-1}(M)$  de  $P$  est vue comme une section lisse dans  $\mathfrak{U}^m(TM)$ , soit une application lisse :

$$\sigma^m(P) : x \in M \mapsto \sigma^m(P^x) \in \mathfrak{U}^m(T_x M), \quad (1.4.28)$$

où  $\mathfrak{U}^m(T_x M)$  représente les opérateurs différentiels  $Q : C^\infty(T_x M) \rightarrow C^\infty(T_x M)$  invariants à gauche par translation sur le groupe abélien  $(T_x M, +)$  et homogènes d'ordre  $m$ , voir<sup>37</sup> la section A.2. Cela veut dire plus précisément que l'élément  $\sigma^m(P^x)$  de l'équation (1.4.28) est dans l'ensemble :

$$\mathfrak{U}^m(T_x M) = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \partial^\alpha : C^\infty(T_x M) \rightarrow C^\infty(T_x M), c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}. \quad (1.4.29)$$

Avec l'identification  $T_x M \cong \mathbb{R}^d$  - ce qui correspond à fixer une base sur  $T_x M$  - alors (1.4.28) se réécrit :

$$x \mapsto \sigma^m(P^x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x) \partial_v^\alpha, \quad (1.4.30)$$

Fixer une base permet de donner un sens à  $\partial_v^\alpha$  dans (1.4.30) i.e. on dérive dans les directions données par cette base.

Puisque l'on regarde le groupe  $(T_x M, +)$  comme abélien alors on peut identifier l'espace dual  $\widehat{T_x M}$  - c'est à dire l'espace des caractères de ce groupe - et l'espace cotangent en  $x$ , noté  $T_x^* M$ , via l'application :

$$\xi \in T_x^* M \mapsto \left( \pi_\xi : v \in T_x M \mapsto e^{i\xi(v)} \right). \quad (1.4.31)$$

37. Cette section concerne notamment le lien entre les opérateurs différentiels invariants par translation sur un groupe de Lie et l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de ce groupe.



Ainsi la dérivée de la représentation<sup>38</sup>  $\pi_\xi$  est donnée par  $d\pi_\xi(\partial_j) = i\xi_j$  où  $\xi_j \in T_x^*M$  est la base duale à celle fixée précédemment sur  $T_xM$ . Ainsi le symbole principal de  $P$  est donnée par :

$$d\pi_\xi(\sigma^m(P^x)) := d\pi_\xi\left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)\partial_v^\alpha\right) \quad (1.4.32)$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha. \quad (1.4.33)$$

Par conséquent le symbole principal  $d\pi_\xi(\sigma^m(P))$ , renommé  $\sigma^m(P)$ , peut être vu comme une application lisse :

$$x \in M \mapsto \sigma^m(P^x) \in C^\infty(T_x^*M), \quad (1.4.34)$$

homogène d'ordre  $m$  en la variable  $\xi \in T_x^*M$ , ce qui revient à le voir comme une fonction lisse homogène d'ordre  $m$  sur l'espace co-tangent  $T^*M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^*M$  donnée par :

$$\sigma^m(P) : T^*M \rightarrow \mathbb{C}, (x, \xi) \mapsto d\pi_\xi(\sigma^m(P^x)). \quad (1.4.35)$$

Remarquons que nous n'avons pas besoin de la notion de carte locale pour définir cette fonction. La clé est d'interpréter  $\sigma^m(P^x)$  comme un élément de la composante  $\mathfrak{U}^m(T_xM)$  d'ordre  $m$  de  $\mathfrak{U}(T_xM)$  où l'on définit :

$$d\pi_\xi(X) = \partial_t|_{t=0}\pi_\xi(e^{tX}), X \in T_xM, \quad (1.4.36)$$

où  $T_xM$  est vue comme une algèbre de Lie à crochets nuls, puis où l'on prolonge cette précédente formule à  $\mathfrak{U}^m(T_xM)$ .

**Remarque 10.** Une construction analogue utilisant  $\mathfrak{U}(TM)$  est possible lorsque la variété  $M$  est filtrée pour définir la partie principale d'un opérateur différentiel, voir [223, p 26], [240], [49, section 2.2 p 12, p 15 dont remarque 2.6], [240, définition 2.1.7 p 10, discussion p 13]. Nous choisirons, dans le chapitre 6 destiné à la condition de Rockland généralisée, une autre astuce pour définir cette partie principale.

Enfin, pour d'autres références, le lecteur pourra consulter la [68, section 9.1] de la thèse d'Ewert sur le calcul de vEY et les [68, p 67-68] sur l'article de Debord-Skandalis.

#### 1.4.1.2 Variété filtrée, algèbroïde et groupoïde osculants

Pour palier le défaut d'ellipticité (comme  $\Delta_H$  sur  $\mathbb{H}_1$ ) de certains opérateurs différentiels définis sur des structures non commutatives, d'autres calculs ont été définis dans les années 80-90 grâce à Taylor [209] (sur des groupes de Lie gradués<sup>39</sup>), Christ-Geller-Glowacki-Polin [35] (sur groupes de Lie homogènes<sup>40</sup>), Melin [149] (cas des variétés filtrées) et BG [13] (cas des variétés d'Heisenberg qui sont des variétés filtrées de pas 2). Il est donc naturel de se demander :

1. Peut-on définir un calcul groupoïdal sur les variétés filtrées et regarder s'il coïncide avec les calculs pseudo-différentiels cités ci-dessus ?
2. En particulier, le calcul pseudo-différentiel de BG, défini par une approche symbolique, est-il en un sens équivalent à ce nouveau calcul ?

En réponse à ces différents calculs qui ont émergé dans les années 80 pour prendre en compte des structures non-commutatives, vEY définissent le calcul pseudo-différentiel groupoïdal sur les variétés filtrées, en généralisant le groupoïde tangent  $\mathbb{T}M$ .

38. Nous passons volontairement plusieurs choses sous silence qui ont pour vocation de réapparaître dans le chapitre 6 sur le théorème de Rockland. Disons simplement pour le lecteur non connaisseur qu'étant donnée une représentation  $\pi_\xi$  irréductible unitaire du groupe abélien  $(\mathbb{R}^d, +)$  alors on peut calculer sa dérivée et que pour un opérateur différentiel à coefficients constants  $P$ , alors  $d\pi_\xi(P)$  correspond au symbole entier de  $P$ .

39. **Attention :** Un groupe de Lie gradué n'est pas un groupe gradué. C'est, par définition, un groupe de Lie connexe simplement connexe dont l'algèbre de Lie est graduée, voir section A.1.

40. Tout groupe de Lie gradué est homogène, voir section A.1.

Notre but étant de présenter la construction du groupoïde tangent généralisé de Connes  $\mathbb{T}_H M$ , nous donnons dans cette section les outils nécessaires pour parvenir à cette construction : l'algèbroïde osculante et le groupoïde osculant. Le lecteur est invité à consulter [224, définition 6 p 4 ], [149, p 2.1] et plus généralement les sections [68, 3-4, dont section 4.1 p 29] pour les définitions du groupoïde osculant, algèbroïde osculante. Notons qu'on trouve déjà dans les travaux [83, 14. normal coordinates] de 1974 de Folland et Stein la terminologie "*osculating Heisenberg structure*", à laquelle le "*groupoïde osculant*" de vEY fait écho.

Si  $E$  est un fibré vectoriel lisse, on note  $\Gamma^\infty(E)$  l'espace de ces sections lisses.

Selon la terminologie de Choi et Ponge [34], les variétés filtrées sont dites *variétés de Carnot*. Elles apparaissent dans des travaux des années 80 de Melin [149] où l'auteur définit un calcul pseudo-différentiel sur ces variétés et leur origine serait l'article [207] de Tanaka en 1970. Les variétés d'Heisenberg sont des exemples de variétés filtrées et nous intéresseront tout particulièrement dans la suite de ce manuscrit.

**Définition 1.4.7.** Variété filtrée, [223, définition 13 p 7], [224, définition 1 p 2],[149, définition 2.1], [34]

Soit  $M$  une variété lisse. On se donne une famille de sous-fibrés<sup>41</sup> du fibré tangent  $TM$  qu'on note  $(H^i)$  de sorte que :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 \leq \dots \leq H^N := TM, \quad (1.4.37)$$

où  $H^i$  est un sous fibré de  $H^{i+1}$  et avec convention que  $H^i = TM, \forall i > N$ . L'entier  $N$  est dit longueur (ou *pas*) de la filtration. De surcroît on impose que les sections lisses de ces fibrés satisfassent :

$$[\Gamma^\infty(H^i), \Gamma^\infty(H^j)] \subset \Gamma^\infty(H^{i+j}), \quad (1.4.38)$$

ce qui veut dire que  $(\Gamma^\infty(H^i))_i$  est une filtration croissante de l'algèbre de Lie  $\Gamma^\infty(TM)$ . Munie de cette structure,  $M$  est dite variété filtrée de longueur  $N$ . On notera  $d_i := \text{Dim}(H^i)$  la dimension d'une fibre (et a fortiori de toutes) du sous fibré  $H^i$ .

**Exemple 17.** *Filtration triviale*

Prenons  $M$  une variété lisse quelconque et posons la filtration :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = TM. \quad (1.4.39)$$

**Exemple 18.** *Filtration non triviale sur  $\mathbb{R}^{d+1}$*

Prenons  $M = \mathbb{R}^{d+1}$  et posons la filtration :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \langle (\partial_i)_{i \in \{1, \dots, d\}} \rangle \leq H^2 := TM. \quad (1.4.40)$$

C'est un exemple d'une variété d'Heisenberg, voir exemple 23. Cette filtration sert à étudier l'opérateur de la chaleur, voir la section 6.2.1.

**Exemple 19.** *Filtration du groupe d'Heisenberg*

Soit  $M = \mathbb{R}^{2n+1}$  le groupe d'Heisenberg et on note  $((X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}, (Y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}, Z)$  les champs générant l'algèbre de Lie d'Heisenberg avec  $[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0$  et  $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$ . Posons la filtration :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \langle (X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}, (Y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \rangle \leq H^2 := TM. \quad (1.4.41)$$

C'est un exemple d'une variété d'Heisenberg, voir exemple 23.

**Exemple 20.** *Groupes de Lie gradués, [68, exemple 4.5 p29]*

41. Voir la définition B.0.10.

Tout groupe de Lie gradué  $G$  (voir section A.1) peut être muni d'une structure de variété filtrée. En particulier le groupe d'Heisenberg est un groupe de Lie gradué de pas 2, [68, exemple 3.2 p16].

Soit  $M$  une variété filtrée pour une filtration  $(H^i)$ . La définition B.0.12 sur les quotients de fibrés justifie qu'on peut poser (pour concorder aux notations de [68], [224], [223]) :

$$\mathfrak{t}_H^i M := H^i/H^{i-1}, \tag{1.4.42}$$

qui est alors un fibré vectoriel quotient lisse au dessus de  $M$ . En particulier, ayant noté  $N$  la longueur de la filtration, on remarque que :

$$\mathfrak{t}_H^i M = 0, \forall i > N. \tag{1.4.43}$$

On peut définir le fibré vectoriel gradué associé au fibré filtré  $TM$ <sup>42</sup> - vis à vis de la filtration  $(H^i)$  - par :

$$\mathfrak{t}_H M := \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{t}_H^i M. \tag{1.4.44}$$

Cette somme directe de fibrés s'interprète au sens des sommes de Whitney B.0.26.

**Proposition 1.4.8.** *Algèbroïde osculante, algèbre osculante en  $x$  [149, proposition 2.2]*

Soit  $M$  une variété filtrée de pas  $N$ . Le fibré vectoriel gradué  $\mathfrak{t}_H M$  peut être muni d'une structure d'algèbroïde de Lie, avec l'ancre nulle et le crochet des sections lisses  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  induit par le crochet de Lie sur les sections lisses  $\Gamma^\infty(TM)$  du fibré tangent  $TM$ . Avec cette structure additionnelle,  $\mathfrak{t}_H M$  est dite algèbroïde osculante de  $M$ . En particulier, l'algèbroïde osculante :

$$\mathfrak{t}_H M := \underbrace{\bigcup_{x \in M} \bigoplus_{i=1}^N \underbrace{H_x^i/H_x^{i-1}}_{:=\mathfrak{t}_H^i M_x}}_{:=\mathfrak{t}_H M_x} \tag{1.4.45}$$

est un fibré (non trivial) en algèbres de Lie nilpotentes graduées. Chacune des fibres  $\mathfrak{t}_H M_x$  de cette algèbroïde en  $x$  est dite algèbre osculante en  $x$ .

*Démonstration.* Nous allons opérer la stratégie de preuve suivante :

1. On montre que  $\mathfrak{t}_H M$  est bien une algèbroïde de Lie : pour cela on définit l'ancre et les crochets de Lie sur  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$ .
2. Un résultat classique permet de dire que si l'ancre de l'algèbroïde  $\mathfrak{t}_H M$  est nulle alors l'algèbroïde est en fibré (non trivial) d'algèbres de Lie. De plus l'application qui envoie un point de la base dans une fibre  $\mathfrak{t}_H M_x$  de l'algèbroïde, précisément  $x \mapsto [ , ]_x$ , est lisse.
3. On voit que ces algèbres de Lie sont nilpotentes compte tenu de la définition des crochets et de la filtration.

Le fibré  $\mathfrak{t}_H M$  est muni de l'ancre nulle  $\rho : \mathfrak{t}_H M \rightarrow TM$ . Nous allons définir un crochet de Lie sur les sections de  $\mathfrak{t}_H M$ . On considère l'application :

$$[ , ] : \Gamma^\infty(H^i) \times \Gamma^\infty(H^j) \rightarrow \Gamma^\infty(H^{i+j}), \tag{1.4.46}$$

où  $[ , ]$  désigne les crochets de Lie sur  $\Gamma^\infty(TM)$  restreints aux sous fibrés  $H^i, H^j$ . Cette application (1.4.46) a bien un sens au vu de l'équation (1.4.38). On rappelle également que  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^i M) \cong \Gamma^\infty(H^i)/\Gamma^\infty(H^{i-1})$ , par le corollaire B.0.14. On fixe alors  $Y \in \Gamma^\infty(H^j)$ , de sorte à regarder l'application partielle linéaire :

$$[ , Y] : \Gamma^\infty(H^i) \rightarrow \Gamma^\infty(H^{i+j}). \tag{1.4.47}$$

42. Principe : à un "objet" filtré on associe un "objet" gradué.

On passe au quotient <sup>43</sup> et on peut jouir de l'application linéaire :

$$\Phi : \underbrace{\Gamma^\infty(H^i)/\Gamma^\infty(H^{i-1})}_{\cong \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^i M)} \rightarrow \underbrace{\Gamma^\infty(H^{i+j})/\Gamma^\infty(H^{i+j-1})}_{\cong \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^{i+j} M)}, [X]_{\Gamma^\infty(H^{i-1})} \mapsto [[X, Y]]_{\Gamma^\infty(H^{i+j-1})}, \quad (1.4.48)$$

où  $[ ]_{\Gamma^\infty(H^k)}$  signifie la classe d'équivalence d'un élément donné dans le quotient  $\Gamma^\infty(H^k)/\Gamma^\infty(H^{k-1})$ .

On vérifie que  $\Phi$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire : Soit  $f \in C^\infty(M)$  et on calcule  $\Phi(f[X]) := [[fX, Y]]_{\Gamma^\infty(H^{i+j-1})} = [f[X, Y] - (Yf)X]_{\Gamma^\infty(H^{i+j-1})} = f[[X, Y]]_{\Gamma^\infty(H^{i+j-1})} - (Yf)[X]_{\Gamma^\infty(H^{i+j-1})} = f\Phi([X])$  car  $X \in \Gamma^\infty(H^i)$ . On fait de même avec la variable  $X \in \Gamma^\infty(H^i)$  fixée et on obtient une application  $C^\infty(M)$ -bilinéaire :

$$[ , ] : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^i M) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^j M) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^{i+j} M). \quad (1.4.49)$$

La graduation nous permet d'étendre le précédent crochet de Lie en un crochet de Lie sur les sections  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$ , il est de plus  $C^\infty(M)$ -bilinéaire :

$$[ , ] : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M). \quad (1.4.50)$$

Ainsi  $\mathfrak{t}_H M$  est bien une algèbroïde de Lie pour l'ancre nulle et les crochets de Lie (1.4.50) sur ses sections lisses.

Comme l'ancre est nulle, de la proposition A.6.4, on sait que les fibres de l'algèbroïde sont des algèbres de Lie <sup>44</sup>. De plus comme  $M$  est une variété filtrée et que  $\mathfrak{t}_H^i M = 0$  lorsque  $i > N$ , alors il s'ensuit que le crochet défini sur chacune des fibres  $\mathfrak{t}_H M_x$  s'annule à la suite de plusieurs itérations :  $\mathfrak{t}_H M_x$  est en fait une algèbre de Lie (graduée) nilpotente de pas  $N$ .  $\square$

**Remarque 1.4.9. Attention :** *Le crochet de Lie sur les champs de vecteurs n'est pas  $C^\infty(M)$ -bilinéaire, il souscrit à la règle de Leibniz voir [137, lemme 4.15 p 91]. Dans le cadre des variétés filtrées, le crochet de Lie défini maintenant sur  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$ , possède une structure plus forte. En effet, il est en réalité  $C^\infty(M)$ -bilinéaire en raison du calcul suivant, voir [224, p 4], [240, p 12], que l'on a déjà fait dans la preuve ci-dessus mais que l'on redonne dans un format plus compact. Pour  $X \in \Gamma^\infty(H^i)$ ,  $Y \in \Gamma^\infty(H^j)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$  :*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \quad (1.4.51)$$

$$= fg[X, Y] \text{ mod } \Gamma^\infty(H^{i+j-1}). \quad (1.4.52)$$

C'est cette propriété particulière qui nous a permis de descendre le crochet sur  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  aux fibres de ce fibré :

$$\mathfrak{t}_H M_x = \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{t}_H M_x^i. \quad (1.4.53)$$

En effet, c'est ce qui est "caché" dans les preuves de la proposition A.6.4 et du lemme B.0.24, lorsque l'on veut montrer que  $I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  est bien un idéal de  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$ .

On définit alors le groupoïde osculant.

**Définition 1.4.10.** Groupoïde osculant, groupe osculant en  $x$ , [224, définition 7] et [68, définition 4.6]

43. **Attention :** Si  $f : E \rightarrow F$  linéaire et  $E'$  sev de  $E$  alors on récupère une application linéaire  $\tilde{f} : E/E' \rightarrow F/f(E')$ . Bien entendu si  $E' = \ker(f)$  on obtient une application linéaire  $\tilde{f} : E/\ker(f) \rightarrow F$ .

44. Voici quelques détails pour le lecteur, mais qui ne sont vraiment rien de plus que ce que l'on a fait à la proposition A.6.4 et au lemme B.0.24, dont on suit les notations. On observe que :

1. L'idéal  $I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  de  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  permet de mettre une structure d'algèbre de Lie sur le quotient  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)/I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$ . En effet, l'application  $C^\infty(M)$ -bilinéaire  $[ , ]$  définie à l'équation (1.4.50) passe au quotient par  $I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  en une application notée  $[ , ]_x : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)/I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)/I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)/I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$ . Notons par ailleurs que le crochet (1.4.50) vérifie l'identité de Jacobi, ceci découlant du fait que le crochet  $[ , ] : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \rightarrow \Gamma^\infty(TM)$  le vérifie aussi. En conséquence le crochet  $[ , ]_x$  aussi et il en est du même argument pour le caractère alterné.
2. On utilise que  $\mathfrak{t}_H M_x$  et  $\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)/I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  sont isomorphes ce qui permet de dire que la fibre en  $x$  de l'algèbroïde osculante admet une structure d'algèbre de Lie.

Le groupoïde osculant  $\mathcal{T}_H M$  d'une variété filtrée  $M$  est le fibré  $\mathfrak{t}_H M$  muni de la structure d'un groupoïde de Lie via la loi de Baker-Campbell-Hausdorff ([41, p 11-12]) dans chacune des fibres. Plus précisément, la structure de groupoïde sur  $\mathcal{T}_H M$  est la suivante : Les applications source et but sont données par la projection sur la base dans le fibré gradué  $\mathfrak{t}_H M$ . Ainsi deux éléments de  $\mathcal{T}_H M$  sont composables s'ils sont dans la même fibre et dans ce cas leur composition est donnée par la formule de BCH. L'application  $u$  des unités est donnée par le plongement  $M \hookrightarrow \mathcal{T}_H M, x \mapsto e_x$ , (la section nulle), dont l'image est l'élément neutre dans chaque fibre de  $\mathcal{T}_H M$ . L'inverse est donnée par  $v \in \mathfrak{t}_H M \mapsto -v \in \mathfrak{t}_H M$ . Les fibres  $\mathcal{T}_H M_x$  du groupoïde osculant munies de la loi BCH sont dites groupes osculants en  $x$  et sont des groupes de Lie nilpotents (gradués) simplement connexes, connexes.

**Remarque 1.4.11.** *La longueur de la formule de BCH sur les groupes osculants est finie, n'excédant jamais la longueur de la filtration.*

**Remarque 1.4.12. Attention :** *Le groupoïde osculant, parfois dit dangereusement "fibré en groupe osculant", n'est pas en général un fibré en groupe au sens usuel ([142, définition 1.1.19 p 11]) car le groupe structural varie de points en points, et peut donc, voir exemples 35, 34, donner des groupes non isomorphes pour des points distincts. On parle de fibré **non localement trivial** en tant que fibré en groupe de Lie (mais il est bien sûr localement trivialisable en tant que fibré vectoriel). De la même façon on trouvera parfois la terminologie trompeuse pour  $\mathfrak{t}_H M$  de "fibré en algèbres de Lie" mais le lecteur devra bien garder en tête que bien que les structures varient de façon  $C^\infty$ , il n'est en général pas possible de trouver un isomorphisme local entre  $\mathfrak{t}_H M$  et  $U \times \mathfrak{g}$ , où  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie fixée. On pourra lire [47, section 2.2 p 12].*

On montre, [224], [34], alors que l'ensemble :

$$\mathbb{T}_H M = \left( M \times M \times \mathbb{R}^* \right) \cup \left( \mathcal{T}_H M \times \{0\} \right), \quad (1.4.54)$$

peut être muni d'une structure de groupoïde de Lie, et on l'appelle le groupoïde  $H$ -tangent généralisé de Connes. Le groupoïde osculant  $\mathcal{T}_H M$  représente une généralisation, un remplaçant, du fibré tangent de l'équation (1.4.1) que Dave et Haller appelle [48, p 338] :

"A non commutative tangent bundle".

La structure  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}_H M$  est donnée à la section 3.1.

**Exemple 21. Filtration triviale**

On reprend l'exemple d'une filtration triviale 17. Tous les groupes osculants sont les  $T_x M$  isomorphes à  $\mathbb{R}^n$  abélien. Les crochets  $[\cdot, \cdot] : \Gamma^\infty(H^1) \times \Gamma^\infty(H^1) \rightarrow \Gamma^\infty(H^2) = \Gamma^\infty(H^1)$  passent au quotient sur  $\mathfrak{t}_H^1 M$  et alors il s'ensuit :

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M) \rightarrow \Gamma^\infty(H^2)/\Gamma^\infty(H^1) \quad (1.4.55)$$

Cette application est nulle car a image nulle. De surcroît, l'algèbroïde osculante n'étant constituée que de  $\mathfrak{t}_H^1 M$  alors il n'y a rien à faire pour étendre les crochets à toute la graduation. Ainsi l'application restreinte aux fibres :

$$[\cdot, \cdot]_x : \underbrace{\Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M_x)}_{=\Gamma^\infty(T_x M)} \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M_x) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M_x), \quad (1.4.56)$$

est nulle. Ceci est exactement dire que chaque algèbre de Lie osculante, identifiée en tant qu'espace tangent en  $x$  à  $\mathbb{R}^n$ , est abélienne.

La réciproque est fautive : Le fait que  $M$  soit une variété filtrée dont les groupes osculants sont tous isomorphes à  $\mathbb{R}^n$  (en particulier abéliens) n'implique pas en général que  $M$  est une variété à filtration triviale. Il suffit de prendre la filtration de  $\mathbb{R}^{d+1}$  en feuilletage de codimension 1, voir l'exemple 18. Alors  $M$  est filtrée selon un hyperplan et tous les groupes osculants sont  $\mathbb{R}^{d+1}$  abéliens.

La graduation sur  $\mathfrak{t}_H M$  nous permet de définir des dilatations. On définit sur chaque composante  $\mathfrak{t}_H^i M$  du fibré vectoriel gradué (1.4.44) un automorphisme de fibré vectoriel en posant :

$$\delta_s(v) = s^i v, v \in \mathfrak{t}_H^i M, s > 0. \quad (1.4.57)$$

On le prolonge par linéarité sur toute la graduation et on note le prolongement toujours  $\delta_s$ . On demande au lecteur de se remémorer la définition A.6.3 de morphisme d'algébroïdes de Lie.

**Proposition 1.4.13.** [240, lemme 2.5.2 p 14]

Les dilatations  $\delta_s : \mathfrak{t}_H M \rightarrow \mathfrak{t}_H M, s > 0$ , sont des automorphismes d'algébroïdes de Lie. De plus  $\delta_s \delta_t = \delta_{st}$ , pour tout  $s, t > 0$ .

*Démonstration.* Soit  $s > 0$  fixé. Tout d'abord on laisse au lecteur le soin de constater que  $\delta_s$  est bien un automorphisme de fibrés vectoriels lisses, voir définition B.0.18. Passons maintenant au caractère "algébroïde". D'une part on montre que (A.6.4) est satisfaite. Soit  $X, Y \in \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  on écrit :

$$X = \sum_i X_i, Y = \sum_j Y_j, \quad (1.4.58)$$

où  $X_i, Y_j \in \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^i M)$ . Alors il vient :

$$\delta_s([X, Y]) = \delta_s \left( \sum_{i,j} \underbrace{[X_i, Y_j]}_{\in \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^{i+j} M)} \right) \quad (1.4.59)$$

$$= \sum_{i,j} s^{i+j} [X_i, Y_j] \quad (1.4.60)$$

$$= [\delta_s(X), \delta_s(Y)], \quad (1.4.61)$$

où l'on insiste auprès du lecteur, à titre de remarque, que les crochets  $[, ]$  que l'on a utilisé sont ceux qu'on a volontairement définis sur les sections lisses de l'algébroïde  $\mathfrak{t}_H M$ . D'autre part comme l'ancre est nulle sur cette algébroïde, alors la condition (A.6.5) est trivialement vérifiée. De fait  $\delta_s$  est bien un automorphisme d'algébroïdes de Lie.  $\square$

Ainsi par définition d'un automorphisme de fibrés vectoriels lisses, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels entre chaque fibre (1.4.53) :

$$\delta_s : \mathfrak{t}_H M_x \rightarrow \mathfrak{t}_H M_x, s > 0, \quad (1.4.62)$$

qui agit sur chaque composante de la graduation par :

$$\delta_s(X) = s^i X, X \in \mathfrak{t}_H M_x^i := H_x^i / H_x^{i-1}, s > 0. \quad (1.4.63)$$

La famille  $s > 0$ -paramétrée d'automorphismes (1.4.62) est donc une famille de dilatations à poids entiers de type (1.3.3). D'une part, on constate que :

$$\delta_s([X, Y]) = [\delta_s(X), \delta_s(Y)], X, Y \in \mathfrak{t}_H M_x. \quad (1.4.64)$$

D'autre part, les dilatations se prolongent sur la fibre  $\mathfrak{t}_H M_x := \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{t}_H M_x^i$ . Ainsi, cette famille a la propriété supplémentaire de respecter la structure d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{t}_H M_x$ .

Enfin la famille  $s > 0$ -paramétrée d'automorphismes  $\delta_s$  sur l'algébroïde  $\mathfrak{t}_H M$  s'intègre ensuite sur le groupoïde osculant  $\mathcal{T}_H M$  en une famille  $s > 0$ -paramétrée d'automorphismes de groupoïde de Lie, voir [240, lemme 2.5.2 p 14].

**Définition 1.4.14.** Dimension homogène

Soit  $M$  une variété filtrée de filtration  $(H^i)$  de pas  $N$ . On définit la dimension homogène de la variété  $M$  comme la dimension homogène du fibré vectoriel gradué  $\mathfrak{t}_H M$ , soit l'entier :

$$d_H = \sum_{i=1}^N i \left( \dim(H^i) - \dim(H^{i-1}) \right). \quad (1.4.65)$$

- Exemple 22.** 1. D'après [68, l'exemple 4.5 p 29] tout groupe de Lie gradué  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  peut être vue comme une variété filtrée, pour laquelle, [68, l'exemple 4.11 p 30] chaque fibre en  $x$  de l'algébroïde osculante  $\mathfrak{t}_H M_x$  est isomorphe à  $\mathfrak{g}$ . De même les groupes osculants en  $x$  sont isomorphes à  $G$ . La dimension homogène d'un groupe de Lie gradué considéré comme une variété filtrée coïncide avec la définition de dimension homogène d'un groupe de Lie homogène de la définition A.1.11.
2. Le groupe gradué d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n := \mathbb{R}^{2n+1}$  de dimension  $n$  est une variété filtrée de dimension  $2n+1$  et de dimension homogène  $2n+2$ . Le groupe d'Heisenberg est un groupe de Lie gradué de pas 2.
3. La dimension homogène et la dimension usuelle d'une variété  $M$  trivialement filtrée coïncident.

### 1.4.1.3 Calcul de vEY : cas d'une variété filtrée

De façon générale, étant donnée une variété filtrée, on peut redéfinir l'action de Debord-Skandalis (1.4.5) en remplaçant l'action par dilatations triviales en  $t = 0$  par l'action par dilatations à poids (1.4.63). C'est dorénavant une action de  $\mathbb{T}_H M$ , le groupoïde  $H$ -tangent pour une variété filtrée. On note  $C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  l'ensemble des sections lisses propres du fibré  $\Omega_r$  des densités tangentes aux  $r$ -fibres du groupoïde  $\mathbb{T}_H M$ . On en profite pour rappeler au lecteur que ces objets sont étudiés plus en détails à la section 3.4. On définit de même que pour la définition 1.4.3 :

**Définition 1.4.15.** Distributions  $r$ -fibrées essentiellement homogènes sur le groupoïde tangent  $H$ -filtré

Soit  $M$  une variété filtrée. Une distribution  $r$ -fibrée  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$  supposée aussi proprement supportée est dite essentiellement homogène d'ordre  $m$  lorsque pour tout  $s > 0$ , son cocycle vérifie :

$$\alpha_{s*} \mathbb{P} - s^m \mathbb{P} \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r), \quad (1.4.66)$$

où l'action  $\alpha_s$  est celle de Debord-Skandalis au sens filtré i.e. les dilatations graduées à poids entiers agissent en  $t = 0$ . L'ensemble de ces éléments est noté  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$ .

Grâce à cela et étant inspirés par le théorème 1.4.5, les auteurs définissent :

**Définition 1.4.16.** Noyau  $H$ -pseudo-différentiel, vEY, [223, définition 19 p 10]

Soit  $M$  une variété filtrée. Un noyau de Schwartz  $P \in \mathcal{E}'_r(M \times M)$  est un noyau  $H$ -pseudo-différentiel d'ordre  $\leq m$  si  $P = \mathbb{P}|_{t=1}$ , où  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$  essentiellement homogène modulo  $C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  d'ordre  $m$ . On note par  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  l'ensemble de ces éléments. On confondra les noyaux de Schwartz avec les opérateurs pseudo-différentiels.

Le calcul de vEY englobe les propriétés connues du calcul d'Hörmander. C'est un calcul pseudo-différentiel pertinent dans le sens que :

1. La définition 1.4.16 ne fait pas mention de la notion de carte. A fortiori, vEY s'affranchissent donc de la notion de carte locale que l'on rencontre lorsqu'on définit dans le calcul d'Hörmander les opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés, [217, § 5 p 44 et définition 5.1 p 46], [208, § 5 p 47] :

**Définition 1.4.17.** Opérateur pseudo-différentiel sur une variété lisse  $M$ , [168, p 205] , [226, p 52]

Soit  $M$  une variété (trivialement filtrée) de dimension  $d$ . Un opérateur continu  $A : C_c^\infty(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$  est dit un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  sur  $M$  lorsque pour toute carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$ , l'opérateur de transfert  $A^\phi$  défini par :

$$A^\phi = \phi_* \circ A \circ (\phi_*^{-1}) : \mathcal{E}'(\phi(U)) \rightarrow \mathcal{D}'(\phi(U)), \quad (1.4.67)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  dans l'ouvert  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^d$ .

Cette définition dit basiquement qu'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété est localement un opérateur pseudo-différentiel sur un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^d$ . Ainsi, vEY s'évitent de devoir montrer un "théorème d'invariance par difféomorphisme".

2. Les noyaux  $\mathbb{P} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$  sont réguliers sur  $\mathbb{T}_H M \setminus \mathbb{T}_H M^{(0)}$ , où la base du groupoïde est assimilée à la diagonale de  $M \times M$  en  $t \neq 0$ . En particulier  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  est lisse en dehors de la diagonale, [223, proposition 22 p 11]. C'est la notion de pseudolocalité que l'on a dans le calcul classique d'Hörmander, à savoir, les singularités du noyau se situent sur sa diagonale.
3. On peut définir la notion de (co)symbole principal [223, § 6, dont définitions 34-35 p 16], a fortiori d'opérateurs  $H$ -elliptiques (i.e. elliptique dans un sens généralisé par vEY), [223, définition 54 p 23].
4. On peut montrer que les opérateurs  $H$ -elliptiques possèdent une paramétrix modulo les opérateurs d'ordre -1 puis les opérateurs régularisants d'ordre  $-\infty$ , [223, lemme 56 p 23 et théorème 60 p 24] et sont hypo-elliptiques, [223, corollaire 61 p 24]. Le [223, corollaire 53 p 23] montre que les opérateurs pseudo-différentiels régularisants  $\Psi^{-\infty}(M)$  sur  $M$  sont les sections lisses du fibré des densités  $\Omega_r$  associées au groupoïde des paires  $M \times M$ . Rappelons en effet que :

(a)  $\mathcal{E}'_r(M \times M) = C^\infty(M, \mathcal{E}'(M))$ , voir la section 3.3.3.

(b)  $C^\infty(M \times M, |\Omega_r|) = C^\infty(M, C^\infty(M, |\Omega|^1(M))) \cong \Psi^{-\infty}(M)$  Expliquons rapidement cela en se basant sur la section 3.4. Pour  $G = M \times M$  le groupoïde des paires, le fibré des densités tangentes aux  $r$ -fibres est <sup>45</sup> :

$$ker(dr) = |\Omega_r| = \bigsqcup_{(x,y) \in G} T_{(x,y)} G^{r(x,y)}, \quad (1.4.68)$$

voir le théorème 3.4.14. Or  $r(x, y) = x$ , donc on peut réécrire que :

$$|\Omega_r| = \bigsqcup_{(x,y) \in M \times M} |\Omega|^1(T_{(x,y)}(\{x\} \times M)) \quad (1.4.69)$$

$$= \bigsqcup_{(x,y) \in M \times M} |\Omega|^1(\{x\} \times T_y M) \quad (1.4.70)$$

$$= \bigsqcup_{(x,y) \in M \times M} \{x\} \times |\Omega|^1(T_y M). \quad (1.4.71)$$

On note  $\rho$  la projection sur le fibré  $|\Omega|^1(M) = \bigsqcup_{y \in M} |\Omega|^1(T_y M)$  et on pose  $\pi : (x, \omega) \in |\Omega_r| \mapsto (x, \rho(\omega))$  la projection sur le fibré  $|\Omega_r|$  regardé avec l'égalité (1.4.71). De fait, on peut écrire l'isomorphisme :

$$C^\infty(M \times M, |\Omega_r|) \rightarrow C^\infty(M, C^\infty(M, |\Omega|^1(M))), \quad (1.4.72)$$

donnée par :

$$\left( \sigma : (x, y) \in M \times M \mapsto \{x\} \times |\Omega|^1(T_y M) \right) \mapsto \left( x \mapsto \sigma(x, \cdot) \right) \quad (1.4.73)$$

Ainsi on a les espaces de sections suivants sont isomorphes :

$$C^\infty(M \times M, |\Omega_r|) \underset{(1.4.71)}{\cong} C^\infty(M \times M, |\Omega|^1) \underset{(1.4.72)}{\cong} C^\infty(M, C^\infty(M, |\Omega|^1(M))). \quad (1.4.74)$$

Reste enfin à se souvenir que les opérateurs pseudo-différentiels régularisants  $\Psi^{-\infty}(M)$  sont ceux dont le noyau est lisse en les deux variables.

Il y a une analogie très forte entre les travaux de vEY et le théorème 1.3.21. On l'a dit, les dilatations  $(\delta_s)$  et  $(\tilde{\delta}_s)$  apparaissent naturellement en réponse au fait que la variété  $M$  soit filtrée, et c'est pourquoi le chapitre 2 est écrit dans le langage général des dilatations à poids entiers. La dimension supérieure dont nous avons besoin pour prolonger tout  $G$ -symbole classique  $S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  - une généralisation de la notion de symbole classique pour ces dilatations - en une fonction  $G$ -homogène modulo Schwartz  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  peut être entendue comme l'axe  $\mathbb{R}$  qui paramétrise le groupoïde tangent ( $H$ -filtré). L'espace  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  est l'analogue dans le monde des classes de symboles des distributions essentiellement homogènes modulo les sections propres lisses du fibré des densités.

45. On rappelle au lecteur que, dans ce manuscrit, la notation  $C^\infty(G, |\Omega_r|)$  (resp.  $C^\infty(M, |\Omega|^1(M))$ ) désigne les sections lisses sur le fibré des densités tangentes aux  $r$ -fibres  $|\Omega_r|$  pour  $G$  un groupoïde de Lie (resp. les sections lisses du fibré des densités  $|\Omega|^1(M)$ ).



## 1.4.2 Second projet : L'approche groupoïdale au calcul d'Heisenberg de BG

Soit  $M$  une variété d'Heisenberg de dimension  $d + 1$  et  $U$  un ouvert de  $M$  identifié à  $\mathbb{R}^{d+1}$ . On rappelle qu'une variété d'Heisenberg est une variété filtrée par un sous fibré  $\mathcal{V}$  en hyperplans :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \mathcal{V} \leq H^2 = TM. \quad (1.4.75)$$

Soit  $(X_j)$  sont des champs de vecteurs locaux sur  $U$  d'ordre 1 vérifiant :

$$(X_j)_{j \in \{0, \dots, d\}} \text{ sont linéairement indépendants point par point.} \quad (1.4.76)$$

et tels que  $(X_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$  génèrent le sous-fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  de  $TM$ . Dans les années 80, BG [13] ont défini un calcul pseudo-différentiel pour étudier des opérateurs différentiels sur des variétés lisses de dimension  $d+1$  de la forme générale :

$$P = - \sum_{j=1}^d X_j^2 - i\lambda X_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j X_j + c_1, \quad (1.4.77)$$

où  $\lambda, (\gamma_j), c_1$  sont des fonctions définies sur  $U$  à valeurs complexes.

**Exemple 23.**  $\mathbb{R}^{d+1}$  muni de la filtration de l'exemple 18 est variété d'Heisenberg de dimension  $d+1$ . Cette filtration n'est pas totalement anodine, c'est la filtration adaptée à l'étude du caractère hypoelliptique de l'opérateur de la chaleur sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  lorsqu'on utilise le théorème de Rockland généralisé, voir la section 6.2.1.

Pour étudier l'hypo-ellipticité d'opérateurs de la forme (1.4.77), BG les abordent par des opérateurs à coefficients gelés invariants à gauche par translation pour une structure de groupe donnée par les variétés (groupes en prime ici) modèles  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ , où  $2n + m = d$ . Ces opérateurs jouent le rôle des opérateurs à coefficients constants dans le calcul pseudo-différentiel classique sur la structure  $(\mathbb{R}^d, +)$  abélienne.

En utilisant une approche symbolique à la manière d'Hörmander, Kohn et Nirenberg, BG définissent généralement l'ensemble  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(U)$  des opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels d'ordre  $m$  dans ce calcul, voir définition 4.3.5. L'ensemble  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(U)$  vise à contenir en particulier les exemples du sous-laplacien, de sa généralisation à savoir les opérateurs  $\mathcal{L}_{\mu}$  (voir l'équation (1.2.13)), de l'opérateur de la chaleur, de l'opérateur  $\square_b$  de Kohn-Laplace (une généralisation du laplacien qui est associé à la structure  $CR$  de la frontière de domaines particuliers (pseudo-convexes) de  $\mathbb{C}^n$ , voir théorème 4.1.8) et les paramétrixes des opérateurs  $H$ -elliptiques (Heisenberg-elliptiques). Ces derniers sont des opérateurs hypoelliptiques non elliptiques **au sens d'Hörmander Kohn et Nirenberg**. Par exemple, au [13, chapitre 4], BG réétudient certains opérateurs standards qui étaient sous le feu des projecteurs dans les années 70 comme par exemple les opérateurs de Kohn-Laplace et Cauchy-Riemann complexe tangentiel  $\square_b, \bar{\partial}_b$  sur les variétés  $CR$ , voir l'article de Folland et Stein [83] de 1974, [175, section 2.2.2 p 23], [209, chapitre III p 85 dont section 4 p 106]. Nous recommandons au lecteur, pour un éclairage pédagogique sur ces deux précédents opérateurs, le livre de Marco Bramanti [22, section 2.2] ou encore l'article [79, p 917-919] de Folland, les auteurs expliquant à la fois l'importance du groupe d'Heisenberg comme *groupe modèle* et l'intérêt de calculer  $\square_b$  sur  $\mathbb{H}_n$ .

### Second projet de la thèse : L'approche groupoïdale du calcul d'Heisenberg de Beals et Greiner.

On peut confronter le calcul de vEY avec d'autres calculs, de sorte à en vérifier la pertinence. Les précédents auteurs ayant déjà établi l'équivalence, pour les variétés trivialement filtrées (c'est à dire de pas 1), entre leur calcul et celui d'Hörmander, on peut donc se questionner si l'équivalence tient toujours dans des contextes de la géométrie différentielle mettant en jeu des structures de pas 2. Ce sont exactement les variétés d'Heisenberg où l'exemple de référence demeure le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n$ , perçu comme la première version d'espace non commutatif. Nous avons montré que le calcul d'Heisenberg de BG de 1983 est un cas particulier du calcul pseudo-différentiel groupoïdal de vEY pour les variétés de contact, les feuilletages de codimension 1 et les variétés modèles  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ . Rappelons que dans le cadre des variétés filtrées, l'analogie de  $TM$  est le groupoïde tangent généralisé  $\mathbb{T}_H M$ .

**Théorème 1.4.18.** *C.- Yuncken 2022, [42]*

Soit  $M$  une variété d'Heisenberg de dimension  $d + 1$  munie d'une structure de contact ou d'un feuilletage de codimension 1 ou encore qui soit une variété modèle  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ ,  $2n + m = d$ . Alors :

$$\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1} = \Psi_{\mathcal{V}}^m(M). \quad (1.4.78)$$

La preuve du précédent théorème repose sur le théorème 1.3.21. Explicitement le lecteur curieux peut consulter le petit paragraphe et diagramme commutatif qui suivent le théorème 4.3.8 et le théorème 4.3.16.

L'égalité entre ces deux calculs nous permet d'appliquer tous les résultats de l'article de vEY [223] et permet de retrouver les propriétés que BG ont démontrées dans [13] à l'aide d'une pléthore de techniques d'analyse (notamment d'analyse complexe). A fortiori, grâce au calcul de vEY, on peut définir un calcul pseudo-différentiel pour les variétés mentionnées dans le théorème 1.4.18 sans montrer le théorème d'invariance par difféomorphisme, chose qu'ont du faire BG, voir [12, théorème (10.67) p98], [13, section § 16 p 135], [175, section 3.1.5 p 35].

### Question ouverte :

Le théorème 1.4.18 est-il vrai pour les variétés d'Heisenberg générales ?

Nous prévoyons que la réponse à cette question soit positive. Toutefois la preuve risque de s'avérer très technique puisque dans le cas général d'une variété d'Heisenberg générale, il n'y a plus de théorèmes type Darboux 4.1.9 ou Frobenius 4.1.13 lesquels nous permettent d'identifier localement la variété  $M$  avec une structure modèle  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  comme dans le cas contact ou le cas feuilletage de codimension 1. En fait, dans le cas général, la structure osculante  $\mathbb{H}_{n_x} \times \mathbb{R}^{m_x}$  varie de points en points avec  $2n_x + m_x = d$  alors que dans le cas d'une variété de contact, les groupes osculants sont tous isomorphes à  $\mathbb{H}_n$ , voir corollaire 4.1.7, ce qui nous permettait d'exploiter facilement la situation où la variété  $M$  était munie la variété modèle  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  ( $n, m$  fixés). Ainsi, bien que notre résultat ne soit pas optimal, on peut s'en satisfaire en disant que dans la grande majorité de la littérature, la plupart des contextes sont ceux de la géométrie de contact (a fortiori  $CR$ ) ou des feuilletages.

Dans son preprint [149] de 1982, Mellin a défini un autre calcul pseudo-différentiel sur les variétés filtrées.

### Question ouverte :

A-t-on l'équivalence entre le calcul groupoïdal de vEY et celui de Mellin ?

Dans son ouvrage [209] de 1984, Taylor définit un calcul pseudo-différentiel pour les opérateurs pseudo-différentiels donnés comme des noyaux de convolution sur des groupes de Lie gradués, [209, section 2 p 20].

### Question ouverte :

A-t-on l'équivalence entre le calcul groupoïdal de vEY et celui de Taylor [209] de 1984 ?

## 1.4.3 Troisième projet : L'approche groupoïdale au résidu non commutatif de Wodzicki

Un objet très intéressant en théorie des opérateurs pseudo-différentiels est le résidu non commutatif de Wodzicki, défini en 1984 dans sa thèse "*Spectral asymmetry and noncommutative residue*" [236], voir aussi [237]. Le résidu non commutatif est aussi défini indépendamment en 1985 par Guillemin, [101, définition 6 p 151]. Pour reprendre les mots de Vassout dans [226, p 57] :

"Les premiers travaux sur le résidu non commutatif proviennent de l'étude d'un résidu dans le cadre de la géométrie symplectique par Guillemin, et de l'introduction par Adler [4] et Manin [145] du résidu non commutatif en dimension un<sup>46</sup>. Mariusz Wodzicki a repris et étendu ces travaux dans sa thèse et les a reliés à une notion analytique de résidu pour un opérateur pseudo-différentiel classique sur une variété compacte."

46. Pour  $M = \mathbb{S}^1$  le tore de dimension un. Les deux articles que l'on vient de mentionner datent de 1978.

Le résidu de Wodzicki est aussi donné par le coefficient logarithmique  $c_P(x)$  du développement asymptotique du noyau de Schwartz de l'opérateur au voisinage de la diagonale comme l'énonce Vassout dans [226, p 13] et où  $c_P(x)$  est défini à la [226, proposition 2.3.5 p 62 et section 2.3.3] où Vassout donne la définition du résidu de Wodzicki comme étant  $c_P(x)dx$ , voir [226, définition 2.3.7 p 65]. D'autres informations sont données au début de la [120, section 7.3 p 264].

On dénote par  $\Psi_{\text{Hör}}^m(M)$  les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre  $m$  dans le calcul d'Hörmander sur une variété lisse  $M$  de dimension  $d$ . Ce sont ceux qui, localement, dans chaque carte, sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques  $\Psi_{\text{phg}}^m(U)$  où  $U \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert, voir [208, p 49] ou la définition 1.4.17 dans ce manuscrit.

**Définition 1.4.19.** Résidu de Wodzicki [226, p 58] , [123, § 1.8 formule locale], [235, § 7]

Soit  $M$  une variété riemannienne de dimension  $d$ . On définit le résidu au point  $x \in M$  d'un opérateur pseudo-différentiel classique  $P \in \Psi_{\text{Hör}}^m(M)$  comme :

$$\text{Res}_x^W(P) = \frac{1}{(2\pi)^d} \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} a_{-d}(x, \xi) d\sigma(\xi) \right) dx, \quad (1.4.79)$$

où  $a_{-d}(x, \xi)$  est la partie homogène de degré  $-d$  en  $\xi$  provenant du développement asymptotique de  $P$  dans n'importe quelle carte autour de  $x$  et où  $dx$  est la mesure provenant de la structure riemannienne [137, p 370-374]. Si de plus  $M$  est une variété compacte (voir [137, p 273]), alors on définit le résidu (global) de  $P$  par :

$$\text{Res}^W(P) = \int_M \text{Res}_x^W(P). \quad (1.4.80)$$

**Remarque 1.4.20.** Si  $M$  n'est pas supposée être une variété riemannienne, alors  $dx$  dans (7.1.2) peut être remplacée par une 1-densité positive lisse quelconque. Pour ce qui nous concerne nous oublierons rapidement le caractère "riemannien" de la variété car nous n'en aurons pas besoin pour les résultats que nous souhaitons obtenir.

Cet objet s'est avéré posséder des liens importants avec d'autres outils mathématiques :

1. Il y a des liens entre ce résidu pour un opérateur différentiel elliptique sur une variété compacte et le développement asymptotique de la trace de l'opérateur de la chaleur  $e^{-tP}$ , voir [3].
2. Connes a aussi montré en 1988 - voir [39, proposition 5 p 313], [30, section 2.6 p 17], [120, section 7.6], [176, proposition 4.11 p 16] - que lorsque  $P$  était un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $-dim(M)$ ,  $M$  variété compacte, alors la trace de Dixmier de  $P$  coïncidait avec le résidu de Wodzicki à constante près. Pour des lectures sur la trace de Dixmier, on recommande les lectures suivantes :
  - (a) Scott [198] (donne aussi un état des lieux conséquents des différentes notions de trace sur les différents idéaux de  $\mathcal{L}_c(H)$  - les opérateurs bornés sur un espace de Hilbert  $H$  -, avec des notes historiques importantes en fin de sections).
  - (b) Gracia-Bondia, Varilly et Figueroa [120]
  - (c) Lord, Sukochev et Zanin [139] (le chapitre 4 donne l'application de la notion de trace à la géométrie non commutative, mettant en avant la trace de Dixmier et le résidu de Wodzicki, la section 1.2 présente la correspondance de Calkin, basée sur le papier original de 1941 de Calkin [29], selon laquelle certains idéaux des suites bornées  $l^\infty(\mathbb{N})$  sont en correspondance avec certains idéaux de  $\mathcal{L}_c(H)$ ).
  - (d) Enfin pour d'autres références "pédagogiques" sur la théorie des opérateurs (opérateurs Hilbert-Schmidt, traçables, classes de Schatten) citons entre-autres : Murphy [159], Reed et Simon [181], [56, chapitre 19,20], Scott [198, § 1.3.5 classes de Schatten], Simon [203] (le chapitre 2 met aussi en avant la correspondance de Calkin), Abramovich et Aliprantis [2] et dans une moindre mesure [82, Appendices A1,A2,A3],
  - (e) L'article de Guichardet [100] retrace l'Histoire de la trace de Dixmier et plus généralement de la théorie des opérateurs au début du XXIème siècle.

3. Après avoir prolongé la définition du résidu de Wodzicki au calcul de BG sur les variétés d'Heisenberg, Ponge a montré [174, proposition 6.3 p 454] en 2007 le lien qu'il y avait entre le résidu de l'opérateur de Kohn-Laplace  $\square_b$  sur une variété CR compacte, voir [174, équation (6.9)], et le volume de  $M$ , défini à [174, l'équation (6.4)].
4. On pourra lire [226, l'introduction p 13] de la thèse de Vassout pour d'autres références ou encore le [120, chapitre 7] du livre de Gracia-Bondia, Varilly, Figueroa.
5. Si  $M$  est une variété compacte connexe de dimension  $> 1$ , le résidu de Wodzicki  $Res^W$  est l'unique trace (modulo constante) sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre entier, voir [198, § 1.5.4 p 92], [120, théorème 7.6 p 268].

### Troisième projet de la thèse : L'approche groupoïdale au résidu non commutatif de Wodzicki.

Le résidu de Wodzicki se définit de plusieurs façons différentes [226], [123], [174], [48] dans différents contextes. Cependant, il n'existe pas à ce jour de définition groupoïdale, c'est à dire, mettant en jeu les groupoïdes tangents de Connes ( $\mathbb{T}M$  et  $\mathbb{T}_H M$ ). La définition groupoïdale permettrait en outre de s'affranchir d'un résultat profond permettant d'affirmer que ce résidu (1.4.80) est bien défini indépendamment de la carte. Pour appuyer notre propos on peut citer Connes [39, p 314] :

"It is a quite remarkable result, due to Wodzicki (1984), that the integral (1.4.80) over  $M$  of this coordinate dependent symbol is independent of any choice and defines a trace."

En fait, le résidu local (1.4.79) est soumis à la formule suivante lorsque  $\phi$  désigne un difféomorphisme :

$$\phi^* res_{\phi(x)}(P) = res_x(P^\sharp), \quad (1.4.81)$$

où  $P^\sharp$  désigne l'opérateur  $P$  translaté par le difféomorphisme  $\phi$ , voir l'équation (5.0.5). On pourra trouver cette précédente formule par exemple dans la thèse de Vassout [226, p 57] où l'auteur ajoute :

"Cette propriété implique en particulier l'invariance par difféomorphisme du résidu non commutatif."

Nous sommes partis du calcul concret de résidu de Wodzicki d'opérateurs pseudo-différentiels, ainsi que du lemme suivant pour avoir l'idée de définir un résidu groupoïdal [43] comme suit. On rappelle que la dimension homogène d'une variété filtrée est prescrite par la définition 1.4.14. Au vu des travaux de vEY, deux questions naturelles sont ainsi :

Existe-t-il une façon de définir le résidu de Wodzicki dans le cadre des variétés filtrées ?

Tout d'abord commençons par constater :

**Lemme 1.4.21.** C.-Yuncken 2023 [43]

Soit  $M$  une variété filtrée de dimension homogène  $d_H$  et  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$ . Étant donné  $x \in M$ , la fonction définie par :

$$s \mapsto \left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)}, \quad (1.4.82)$$

est un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  vers  $(\mathbb{C}, +)$ . Ainsi, il existe  $r_x \in \mathbb{C}$  tel que pour tout  $s > 0$  :

$$\left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)} = r_x \log(s). \quad (1.4.83)$$

Rappelons qu'avec l'identification (1.4.18) tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  dans le calcul classique d'Hörmander Kohn et Nirenberg est la restriction en  $t = 1$  d'un élément  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$  et que, par la définition 1.4.4, un opérateur  $H$ -pseudo-différentiel dans le calcul de vEY est la restriction en  $t = 1$  d'un élément  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$ . L'idée est alors de définir la quantité  $r_x$  comme étant le résidu en  $x$  de l'opérateur de noyau  $k = \mathbb{k}|_{t=1}$ . Par ailleurs nous observons aussi, voir lemme 7.2.5, que la quantité  $r_x$  est indépendante du choix de  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  prolongeant un noyau de Schwartz  $k = \mathbb{k}|_{t=1}$  donné. Ces deux précédentes observations rendent licites la définition suivante :

**Définition 1.4.22.** C.-Yuncken 2023, résidu groupoïdal, [43]

Soit  $M$  une variété filtrée de dimension homogène  $d_H$  et  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  avec  $m \leq -d_H$ . Soit  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  un élément du calcul groupoïdal de  $vEY$  de sorte que  $\mathbb{k}|_{t=1}$  soit le noyau de Schwartz de  $P$ . On définit le résidu non commutatif de  $P$  en  $x \in M$  comme :

$$Res_x(P) = \frac{1}{\log(s)} \left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)}, \quad (1.4.84)$$

pour n'importe quel  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ .

**Remarque 11.** La définition (1.4.22) ne s'applique qu'à des opérateurs d'ordre  $\leq -d_H$ . Il devrait être possible d'étendre cette définition aux opérateurs d'ordre arbitraire. Dans le cas du calcul classique non filtré, cela est traité dans un article à paraître par Higson, Sukochev and Zanin [107]. Lorsque nous écrivions notre article [43], nous avons eu vent de ces travaux parallèles.

Soit  $M$  une variété trivialement filtrée. La définition du résidu groupoïdal 1.4.22 est-elle équivalente à la définition 1.4.19 du résidu de Wodzicki ?

Oui, nous avons montré au théorème 7.4.2 :

**Théorème 1.4.23.** *C.-Yuncken 2023 [43]*

Soit  $M$  une variété trivialement filtrée et  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$ ,  $m \leq -d$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  :

$$Res_x(P) = Res_x^W(P), \quad (1.4.85)$$

où  $Res_x(P)$  est entendu au sens de (1.4.84) dans n'importe quelle distribution  $r$ -fibrée essentiellement homogène prolongeant  $P$  en  $t = 1$ .

Ensuite, nous avons montré<sup>47</sup>, voir théorème 7.3.2, que le résidu groupoïdal  $Res_x(P)$  définit toujours une trace au sens où :

**Théorème 1.4.24.** *C.-Yuncken 2023 [43]*

Soit  $M$  une variété filtrée de dimension homogène  $d_H$ ,  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  et  $Q \in \Psi_H^{m'}(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  avec  $m + m' \leq -d_H$ . Alors le résidu de Wodzicki en  $x \in M$  vérifie :

$$Res_x([P, Q]) = 0, \quad (1.4.86)$$

où  $[P, Q] = PQ - QP$ .

Pour tester la pertinence de la définition qu'on a formulé dans le cadre des variétés filtrées, il est intéressant de la confronter au travail de Ponge [174]. En effet, on rappelle que dans le cas général des variétés d'Heisenberg, Ponge a défini un résidu non commutatif en 2007, s'appliquant aux opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels de BG. Ainsi on peut demander :

Le résidu défini par Ponge dans [174] dans le cadre des variétés d'Heisenberg coïncide-t-il avec le résidu groupoïdal 1.4.22 ?

En nous basant sur [42], et a fortiori sur le fait que le calcul groupoïdal coïncide avec le calcul de BG dans le cadre des variétés  $M$  de dimension  $d + 1$  modèles, de contact et des feuilletages de codimension 1, nous avons montré, voir théorème 7.5.1 et corollaire 7.5.2, que le résidu non commutatif de Ponge coïncide avec le résidu groupoïdal pour un opérateur  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^{-d_H}(M)$ ,  $d_H = d + 2$ , pour ces mêmes variétés. Le résidu en  $x$  d'un tel opérateur  $P$  est noté, chez Ponge, par  $c_P(x)$ . Plus précisément voici les énoncés en questions :

**Théorème 1.4.25.** *C.-Yuncken 2023 [43]*

<sup>47</sup>. Merci à Sylvie Paycha pour nous avoir indiqué que notre théorème, énoncé d'abord pour  $Q \in \Psi_H^0(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  se prolongeait avec la version plus forte énoncée dorénavant.

Soit  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  une variété modèle de dimension homogène  $d_H = d + 2$ ,  $2n + m = d$ , avec la structure standard (4.3.10) et  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^m(M)$ , avec  $m \leq -d_H$ . Alors le résidu non commutatif de Ponge en  $x$  coïncide avec le résidu groupoïdal 1.4.22 :

$$Res_x(P) = c_P(x). \quad (1.4.87)$$

**Corollaire 1.4.26.** *C.-Yuncken 2023 [43]*

Si  $M$  est une variété d'Heisenberg de dimension  $d+1$  de type contact ou feuilletage de codimension un, alors le résidu groupoïdal 1.4.22 coïncide avec le résidu non commutatif de Ponge pour les opérateurs  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^{-d_H}(M)$ , signifiant que (1.4.87) tient.

### Question ouverte :

Le théorème précédent est-il vrai pour les variétés d'Heisenberg générales ?

Guillemin [101, définition 6 p 151] définit le résidu de Wodzicki via une fonction zêta de Riemann. Plus précisément avec l'article [123, p 200-201] de 1989 de Kassel on sait qu'étant donné un opérateur pseudo-différentiel  $A$  opérant sur une variété lisse compacte  $M$  de dimension  $d$ , on peut définir le résidu non commutatif de  $A$  par la formule :

$$Res^W(A) = m \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \left( Res_{s=-1} \zeta(P + uA, s) \right), \quad (1.4.88)$$

où  $P$  est un opérateur elliptique sur  $M$  d'ordre  $m$  strictement supérieur à l'ordre de  $A$  et où :

$$\zeta(P + uA, s) = \sum_{\lambda \in \sigma(P+uA) \setminus \{0\}} \lambda^{-s}, \quad (1.4.89)$$

est la fonction zêta holomorphe pour  $Re(s) > \frac{d}{m}$ . C'est ce qu'a fait Wodzicki [236] dans sa thèse en 1984. Ce dernier montre de plus que :

$$Res^W(A) = m Res_{s=0} Tr(AP^{-s}), \quad (1.4.90)$$

voir aussi [123, théorème 1.4 p 201].

### Question ouverte <sup>48</sup> :

La définition du résidu groupoïdal s'étend-elle aux opérateurs d'ordre supérieur ou égal à  $-d_H$  ?

### Question ouverte <sup>49</sup> :

Quel lien y a-t-il entre le résidu groupoïdal et la définition du résidu de Wodzicki faite à partir de la fonction zêta ?

Des travaux récents de 2020 ont été effectués sur le sujet par Dave et Haller, [48, § 7 p 374] pour définir le résidu dans le contexte d'une variété filtrée  $M$  de dimension homogène  $d_H$  et pour les opérateurs pseudo-différentiels de  $vEY$ . Étant donné un opérateur pseudo-différentiel  $A$  dans le calcul de  $vEY$  d'ordre entier  $k \in \mathbb{Z}$ , on fixe un opérateur différentiel  $D$  strictement positif de type Rockland d'ordre pair  $r > 0$ . Les auteurs s'assurent alors que  $AD^{-z} \in \Psi_{vEY}^{k-rz}(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  est traçable pour :

$$Re(z) > \frac{d_H + k}{r}, \quad (1.4.91)$$

et définit la fonction holomorphe ([48, corollaire 2 p 347]) :

$$\zeta_A(z) = tr(AD^{-z}), \quad Re(z) > \frac{d_H + k}{r}. \quad (1.4.92)$$

48. Merci à Sylvie Paycha pour nous avoir suggéré cette question.

49. Merci à Dominique Manchon pour nous avoir suggéré cette question.

---

Cette fonction s'étend de façon méromorphe sur le plan complexe entier avec des pôles simples au plus localisés de façon arithmétiques, voir le [48, corollaire 2 p 347]. Alors, le résidu de Dave et Haller est défini via le résidu en 0 de cette fonction  $\zeta_A(z)$  voir [48, p 377] :

$$Res^{DH}(A) := r \operatorname{res}_{z=0}(\zeta_A(z)), \quad A \in \Psi_{vEY}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}. \quad (1.4.93)$$

C'est le [48, corollaire 6 p 377] qui montre que ce résidu ne dépend pas de l'opérateur de Rockland  $D$  choisi. Il serait naturel de penser, d'espérer du moins, que leur définition coïncide également avec notre résidu groupoïdal.

**Question ouverte <sup>50</sup> :**

Peut-on définir la trace canonique de Kontsevich et Vishik [133] de 1994 par une approche groupoïdale ?

---

50. Merci à Sylvie Paycha pour nous avoir suggéré cette question.

## Chapitre 2

# Les symboles poly-homogènes et les fonctions homogènes modulo Schwartz

"With the activity surrounding the index theorem, it suddenly seemed as if everyone was interested in the algebra of singular integral operators. However, one further step was needed to make this a household tool for analysts : it required a change of point of view. Even though this change of perspective was not major, it was significant psychologically and methodologically, [...]. The idea was merely to change the role of the definitions of the operators :

$$T(f)(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)dy, \quad (2.0.1)$$

for singular integrals to pseudo-differential operators :

$$Op(\sigma)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{i\pi x \cdot \xi} d\xi, \quad (2.0.2)$$

with symbol  $\sigma$ . [...] The advantage lies in the emphasis in (2.0.2) on the  $L^2$  theory and Fourier transform, and the wider class of operators that can be considered, in particular, including differential operators. [...] It is in this way that singular integrals were subsumed by pseudo-differential operators. Despite this, singular integrals, with their formulation in terms of kernels, still retained their primacy when treating real-variable issues, issues such as  $L^p$  or  $L^1$  estimates [...]." Elias Stein [27, section 1.3 "Acceptance : 1957-1965" p10-11]

### 2.1 Définitions des fonctions (poly)-homogènes (modulo Schwartz) pour une dilatation $\delta_s$

On munit respectivement les espaces  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^{d+1}$  des dilatations à poids :

$$\delta_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, (\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto (s^{\rho_1} \xi_1, \dots, s^{\rho_d} \xi_d), \quad (2.1.1)$$

$$\tilde{\delta}_s : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, (\xi, t) \mapsto (\delta_s(\xi), st), \quad (2.1.2)$$

où le  $d$ -uplet  $(\rho_1, \dots, \rho_d) \in (\mathbb{N}^*)^d$ .

**Exemple 24.** *Dilatations d'Heisenberg*

On munit  $\mathbb{R}^{d+1}$  vu comme le groupe d'Heisenberg, de la dilatation :

$$\delta_s(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) = (s^2 \xi_0, s \xi_1, \dots, s \xi_d) \quad (2.1.3)$$

Notons que ces dilatations proviennent du fait que le groupe d'Heisenberg est un groupe de Lie gradué de pas 2.



On rappelle maintenant la définition de norme quasi-homogène (nqh) qu'on pourra notamment trouver dans le livre [74, section 3.1.6] de Fischer et Ruzhansky. Ces nqh apparaissent dans les travaux de Folland et Stein dans les années 70, voir les articles [83],[77]. On pourra aussi consulter la [22, section 3.2] du livre de Bramanti.

**Définition 2.1.1.** nqh sur  $\mathbb{R}^d$

Une nqh est une fonction  $|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Symétrie :  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$  on a  $|\xi| = |-\xi|$ .
2. Homogénéité :  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall s > 0$   $|\delta_s \xi| = s|\xi|$ .
3. Positivité :  $|\xi| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ .
4. Inégalité triangulaire : il existe  $C > 0$  telle que  $\forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^d$  on a :

$$|\xi_1 + \xi_2| \leq C(|\xi_1| + |\xi_2|).$$

Dans ce qui suit,  $|\cdot|$  désigne une nqh sur  $\mathbb{R}^d$ . Par exemple nous pourrions prendre  $|\xi| := \sum_{k=1}^d |\xi_k|^{\frac{1}{\rho_k}}$  ou  $|\xi| := (\sum_{k=1}^d |\xi_k|^{\frac{2a}{\rho_k}})^{\frac{1}{2a}}$  où  $a = \text{ppcm}(\rho_j)$ .

**Exemple 25.** Pour la dilatation (2.1.3), on peut prendre la nqh définie par  $|\xi| = |\xi_0|^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^d |\xi_k|$ .

Il est bon de remarquer, comme dit dans [74], qu'une nqh se comporte quasiment comme la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^d$  : Deux nqh sur  $\mathbb{R}^d$  sont équivalentes au sens usuel. De plus, une nqh engendre la même topologie que la norme euclidienne, et donc, comme nous sommes en dimension finie, comme n'importe quelle autre norme sur  $\mathbb{R}^d$ .

Enfin, si  $\|\cdot\|_d$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ , il existe des constantes strictement positives  $a, b, C_1, C_2$  telles que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  on ait :

$$C_1 \|\xi\|_d^a \leq |\xi| \leq C_2 \|\xi\|_d^b. \quad (2.1.4)$$

Nous avons maintenant tous les outils en main pour généraliser la notion de fonctions homogènes, Schwartz, homogènes modulo Schwartz au sens des dilatations graduées 2.1.1.

**Attention :** Dans ce qui suit, nous allons manipuler des fonctions à valeurs complexes, ainsi on prendra grand soin de distinguer le module  $|\cdot|$  qui porte sur des éléments de  $\mathbb{C}$  et la nqh  $|\cdot|$  qui porte sur des éléments de  $\mathbb{R}^d$ .

**Attention :** Dans ce qui suit, nos espaces de fonctions sont affublés du préfixe  $G$  pour rappeler la graduation sur  $\mathbb{R}^d$ . On l'oubliera rapidement.

**Rappel :** Dans ce qui suit  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  étant possiblement différent de  $d$ , et  $m \in \mathbb{R}$ .

**Attention :** Dans ce qui suit, on s'autorisera au besoin, par abus de langage, de prendre l'ouvert  $U = \{x_0\}$  : nos définitions fonctionnent sans variable  $x$  supplémentaire, les caractères homogènes, Schwartz, homogènes modulo Schwartz s'exprimant sur la variable  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

**Définition 2.1.2.** Fonctions  $G$ -homogènes d'ordre  $m$ .

On désigne par  $\mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  l'ensemble des fonctions lisses sur  $U \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  qui sont  $G$ -homogènes de degré  $m$  au sens où pour tout  $x \in U$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $s > 0$  :

$$f(x, \delta_s \xi) = s^m f(x, \xi). \quad (2.1.5)$$

**Exemple 26.** 1. On pose  $U = \{x_0\}$ . La fonction  $(x_0, \xi) \in U \times \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{|\xi|^m}$  est homogène d'ordre  $-m$  pour la dilatation  $\delta_s$  avec  $\rho_1 = 1$ .

2. On pose  $U = \{x_0\}$ . La fonction  $(x_0, \xi) \in U \times \mathbb{R}^3 \mapsto f(x, \xi) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_0$  est homogène d'ordre 2 pour la dilatation d'Heisenberg (2.1.3) sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.1.3.** Fonctions  $G$ -Schwartz

On dit qu'une fonction lisse  $f \in \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  est  $G$ -Schwartz, lorsque pour tout compact  $K$  de  $U$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout couple de multi-indices  $(\alpha, \beta)$ , il existe une constante  $C_{\alpha, \beta, k, K} > 0$  telle que  $\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta f(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k, K} (1 + |\xi|)^{-k}. \quad (2.1.6)$$

Cet espace est noté  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Remarque 12.** Dans cette définition 2.1.3, il suffit en fait de montrer l'inégalité pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus K'$ ,  $x \in K \subset U$  où  $K' \subset \mathbb{R}^d$  un compact quelconque contenant 0.

**Remarque 13.** Bien entendu, lorsque  $U = \{x_0\}$  et que  $\mathbb{R}^d$  n'est pas considéré comme un espace muni d'une dilatation, alors  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , l'espace de Schwartz usuel.

**Définition 2.1.4.** Fonctions  $G$ -homogènes modulo Schwartz d'ordre  $m$

On dit qu'une fonction lisse  $u \in \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  est  $G$ -homogène modulo Schwartz d'ordre  $m$ <sup>1</sup> lorsque  $\forall s > 0$  :

$$(x, \xi) \mapsto u(x, \delta_s \xi) - s^m u(x, \xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.1.7)$$

Cet espace est noté  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Remarque 14.** Toute fonction Schwartz est homogène mod Schwartz d'ordre quelconque.

Le résultat qui suit nécessite ce lemme préliminaire.

**Lemme 2.1.5.** Générateurs de  $\mathbb{R}_+^*$

Tout élément de  $\mathbb{R}_+^*$  est le produit fini d'éléments de  $[1, 2]$  et de leurs inverses.

*Démonstration.* Supposons donc que  $s > 1$ . On pose la suite  $u_n = s^{\frac{1}{n}}$  qui a pour limite 1. Alors il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} \in [1, 2]$  d'où  $s = u_{n_0}^{n_0}$ . Si  $0 < s < 1$ , alors  $s^{-1} > 1$  et on peut appliquer ce qu'on vient de faire. Ce qui permet de conclure que  $\langle [1, 2] \rangle = \mathbb{R}_+^*$ .  $\square$

**Proposition 2.1.6.** Soit  $b \in \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ . Notons ( $\clubsuit$ ) la propriété suivante :

$$(x, \xi, t) \mapsto b(x, \delta_s \xi) - s^m b(x, \xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.1.8)$$

La propriété ( $\clubsuit$ ) est vraie pour tout  $s \in [1, 2]$  si et seulement si elle est vraie pour tout  $s > 0$ . Dans ce cas par définition  $b \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Supposons que la propriété ( $\clubsuit$ ) soit vraie pour  $s \in [1, 2]$ . Si  $u, v \in [1, 2]$  vérifient ( $\clubsuit$ ) alors  $uv$  et  $u^{-1}$  aussi. En effet, pour le cas de  $uv$ , on a le calcul suivant :

$$b(x, \delta_{uv} \xi) - (uv)^m b(x, \xi) = b(x, \delta_u(\delta_v \xi)) - u^m b(x, \delta_v \xi), \quad (2.1.9)$$

$$+ u^m \left( b(x, \delta_v \xi) - v^m b(x, \xi) \right), \quad (2.1.10)$$

lequel permet de conclure sur le fait que :

$$(x, \xi) \mapsto b(x, \delta_{uv} \xi) - (uv)^m b(x, \xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d).$$

Le cas de l'inverse se traite de façon similaire. Puis comme  $\mathbb{R}_+^*$  est généré par  $[1, 2]$  selon le lemme 2.1.5, alors la propriété ( $\clubsuit$ ) sera vraie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La réciproque est claire.  $\square$

Ainsi, pour montrer que  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , il suffit de montrer (2.1.7) pour tout  $s \in [1, 2]$ .

**Lemme 2.1.7.** Soit  $f \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et soit  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  vérifiant  $\chi = 0$  dans un voisinage de 0 et  $\chi = 1$  en dehors d'un compact alors  $\chi f \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

1. On dira homogène mod Schwartz.

*Démonstration.* D'une part, on observe que  $\chi f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  puisque la fonction cut-off efface la singularité potentielle de  $f$  en 0. D'autre part, on remarque que pour  $\xi \neq 0$  :

$$\chi(\delta_s \xi) f(x, \delta_s \xi) - s^m \chi(\xi) f(x, \xi) = s^m [\chi(\delta_s \xi) - \chi(\xi)] f(x, \xi). \quad (2.1.11)$$

Or cette dernière fonction est à support compact en  $\xi$  à  $s > 0$  fixé et de là on en déduit qu'elle est Schwartz.  $\square$

**Définition 2.1.8.** *G*-symboles homogènes d'ordre  $m$

On dit qu'une fonction lisse  $p \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  est un symbole *G*-homogène d'ordre  $m$  lorsque pour tout compact  $K$  dans  $U$  et tout couple de multi-indices  $(\alpha, \beta)$  il existe une constante  $C_{K, \alpha, \beta} > 0$  telle que  $\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}. \quad (2.1.12)$$

Cet espace est noté  $S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . On pose  $S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Remarque 15.** *Dans cette définition, il suffit en fait de montrer l'inégalité pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus K'$ ,  $x \in K \subset U$  où  $K' \subset \mathbb{R}^d$  un compact quelconque contenant 0.*

**Proposition 2.1.9.**  $S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Commençons par l'inclusion  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d) \subset S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ . On fixe un  $m \in \mathbb{R}$ , un couple de multi-indices  $(\alpha, \beta)$  et un compact  $K \subset U$ . Alors on choisit un entier  $k_\beta$  de sorte que  $k_\beta > |\beta| - m$ . Soit  $p \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . Il existe une constante  $C_{\alpha, \beta, k_\beta, K}$  de sorte que pour tout  $x \in K$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , il vienne :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k_\beta, K} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|} \underbrace{(1 + |\xi|)^{-m + |\beta| - k_\beta}}_{\leq 1}. \quad (2.1.13)$$

Ceci montre que  $p \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Ce raisonnement étant vrai pour  $m$  quelconque on en déduit que  $S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ . L'autre inclusion se montre sur le même principe et nous la laissons donc au lecteur.  $\square$

**Remarque 16.** *En particulier, chemin faisant, on a montré que pour tout  $m \in \mathbb{R}$  on a :*

$$S_G(U \times \mathbb{R}^d) \subset S_G^m(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.1.14)$$

**Définition 2.1.10.** Symboles *G*-classiques / *G*-poly-homogènes d'ordre  $m$

L'ensemble des symboles *G*-classiques (*G*-poly-homogènes) d'ordre  $m$  est l'ensemble des éléments  $p \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  admettant un développement asymptotique  $p \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{m-j}$  avec  $p_{m-j} \in \mathcal{H}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$  tels que pour tout entier naturel  $N$  non nul et pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^d$  contenant 0 :

$$p - \sum_{j=0}^N \chi_K p_{m-j} \in S_G^{m-N-1}(U \times \mathbb{R}^d).$$

où  $\chi_K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est définie selon :

$$\chi_K(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{au voisinage de } 0 \\ 1 & \text{en dehors de } K \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Cet espace est noté  $S_{phg, G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Remarque 17.** *Remarquons que  $S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{phg, G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .*

Nous invitons maintenant le lecteur à reparcourir rapidement la section 1.3.2. En particulier, la proposition 1.3.20 montrait qu'on pouvait prolonger le symbole d'un opérateur différentiel en une fonction homogène vue dans une dimension supérieure.

Cette observation étant faite et les définitions précédentes dans le cadre des dilatations à poids étant énoncées, voici le théorème de prolongement des  $G$ -symboles dont la preuve est reléguée aux sections suivantes.

**Théorème 2.1.11.** *Soit  $a \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Ayant muni  $\mathbb{R}^d$  de la dilatation (2.1.1) et  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  de la dilatation (2.1.2) alors sont équivalentes :*

1.  $a \in S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .
2. Il existe  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  tel que  $u(x, \xi, 1) = a(x, \xi)$ .

**Remarque 18. Rappel :** Nos espaces de fonctions portent l'indice  $G$ . Le  $G$  désigne la première lettre du mot "gradué". La raison pour cela est que toute algèbre de Lie graduée est munie naturellement d'une famille de dilatations à poids entiers, [73, définition 3.11 p 92, proposition 31.10 p 95], [84, proposition 1.3 p 4-5] ou encore l'appendice A.1. Comme nous le verrons plus tard dans le manuscrit, étant donnée une variété filtrée  $M$ , on peut construire l'algébroïde osculante  $\mathfrak{t}_H M$ . C'est un fibré lisse non trivial en algèbres de Lie nilpotentes graduées. Chaque fibre est donc munie d'une famille de dilatation à poids entiers (2.1.1). Bien souvent, nous dirons juste symbole au lieu de  $G$ -symbole, Schwartz au lieu de  $G$ -Schwartz, etc...

## 2.2 Théorème de caractérisation de $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$

Nous avons parlé des fonctions homogènes mod Schwartz dans la section précédente. Une question toute naturelle<sup>2</sup> :

A quoi ressemblent les fonctions homogènes modulo Schwartz ?

Le théorème de caractérisation des fonctions homogènes modulo Schwartz, but central de cette section, répond à cette question : toute fonction homogène modulo Schwartz d'ordre  $m$  est, en dehors d'un voisinage compact contenant 0, la somme de deux fonctions, l'une étant homogène pile d'ordre  $m$  et l'autre étant Schwartz. Il nous sera fondamental pour prouver le théorème 2.1.11 de prolongement des  $G$ -symboles.

**Rappel :** Encore, dans tout ce qui suit  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  où  $n$  est a priori différent de  $d$ .

On commence par un lemme. Nous abrévions  $\sum_k$  pour  $\sum_{k=1}^d$ .

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $m \in \mathbb{R}$  et on fixe un  $d$ -tuple  $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_d)$ . On pose aussi  $|\beta| = \sum_k \rho_k \beta_k$ .*

1. *Soit  $u \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Alors  $\partial_\xi^\beta u \in \mathcal{H}_G^{m-|\beta|}(U \times \mathbb{R}^d)$ .*
2. *Soit  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Alors  $\partial_\xi^\beta u \in \mathcal{HS}_G^{m-|\beta|}(U \times \mathbb{R}^d)$ .*

*Démonstration.* On prouve le point 2), le point 1) se faisant de façon similaire. Par hypothèse sur  $u$ , pour tout  $s > 0$  on a :

$$(x, \xi) \mapsto u(x, \delta_s \xi, st) - s^m u(x, \xi, t) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1}). \quad (2.2.1)$$

On calcule alors :

$$\partial_\xi^\beta [u(x, s^{\rho_1} \xi_1, \dots, s^{\rho_d} \xi_d, st) - s^m u(x, \xi, t)] = s^{\sum_k \rho_k \beta_k} [(\partial_\xi^\beta u)(x, \delta_s, st) - s^{m-\sum_k \rho_k \beta_k} \partial_\xi^\beta u(x, \xi, t)]. \quad (2.2.2)$$

L'espace de Schwartz étant stable par dérivation, alors on a la conclusion . □

---

<sup>2</sup> Toute naturelle pour Alexandre Afgoustidis plus que pour l'auteur de ces lignes au moment où il a eu la question pendant son exposé. Je remercie donc Alexandre pour les questionnements que sa question a entraîné!

On passe au premier résultat important de cette partie : la restriction d'une fonction homogène d'ordre  $m$  est un symbole d'ordre  $m$ .

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})$  homogène d'ordre  $m$  pile en la seconde variable  $(\xi, t)$  pour l'action  $\tilde{\delta}_s$ . Alors  $a(x, \xi) := u(x, \xi, 1) \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse sur  $u$  on a pour tout  $s > 0$  :

$$u(x, \tilde{\delta}_s(\xi, t)) = u(x, \delta_s \xi, st) = s^m u(x, \xi, t). \quad (2.2.3)$$

Ceci implique avec  $t = \frac{1}{s}$  :

$$u(x, \delta_s \xi, 1) = s^m u(x, \xi, \frac{1}{s}). \quad (2.2.4)$$

Donc :

$$u(x, \xi, 1) = u(x, \delta_s \delta_{s^{-1}} \xi, 1) \quad (2.2.5)$$

$$\underbrace{=}_{(2.2.4)} s^m u(x, \delta_{s^{-1}} \xi, \frac{1}{s}). \quad (2.2.6)$$

On se donne maintenant un compact  $K \subset U$ . Il est suffisant de montrer qu'il existe  $C_K > 0$  telle que  $\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$|u(x, \xi, 1)| \leq C_K (1 + |\xi|)^m. \quad (2.2.7)$$

En effet, en vertu du lemme 2.2.1,  $\partial_\xi^\beta u$  est homogène pile d'ordre  $m - \sum_k \rho_k \beta_k$ . Donc si l'équation (2.2.7) est réalisée, le raisonnement montre in fine que :

$$\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-m + \sum_k \rho_k \beta_k} |\partial_\xi^\beta u(x, \xi, 1)|,$$

est bornée. Il reste à se convaincre que dériver en  $x$  ne change rien aux estimées. D'où la conclusion.

Reste donc à voir que (2.2.7) est vraie. Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , on pose  $s := |(\xi, 1)| > 0$ . Cette quantité représente la norme homogène sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  avec le poids  $\rho_{d+1} = 1$ . Pour tout  $x \in K, \xi \in \mathbb{R}^d$ , il vient :

$$|(1 + |\xi|)^{-m} u(x, \xi, 1)| \underbrace{=}_{\text{équation (2.2.5)}} |(1 + |\xi|)^{-m} s^m u(x, \delta_{s^{-1}} \xi, \frac{1}{s})|. \quad (2.2.8)$$

On voit par définition de la norme homogène sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  que  $|(\delta_{s^{-1}} \xi, \frac{1}{s})| = |\tilde{\delta}_{s^{-1}}(\xi, 1)| = s^{-1} |(\xi, 1)| = 1$ . On note  $S_{|\cdot|}^{d+1}$  la sphère unité pour la norme homogène qui est bien un compact de  $\mathbb{R}^{d+1}$  en tant que fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

$$|(1 + |\xi|)^{-m} u(x, \xi, 1)| = \left| \frac{s^m}{(1 + |\xi|)^m} u(x, \delta_{s^{-1}} \xi, \frac{1}{s}) \right| \quad (2.2.9)$$

$$\leq \frac{s^m}{(1 + |\xi|)^m} \sup_{x \in K, \eta \in S_{|\cdot|}^{d+1}} |u(x, \eta)|. \quad (2.2.10)$$

La fonction  $\xi \mapsto \frac{s^m}{(1 + |\xi|)^m} = \frac{|(\xi, 1)|^m}{(1 + |\xi|)^m}$  est bornée. Ainsi l'inégalité (2.2.7) est acquise et on a fini.  $\square$

**Proposition 2.2.3.** [208, p 37]

*Soit  $u \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  de sorte que  $\chi$  est nulle dans un voisinage de 0 et 1 aux infinis. Alors  $\chi u \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .*

*Démonstration.* Comme dans la preuve précédente et en vertu du lemme 2.2.1, il suffit de montrer une estimée sur  $u$  pour en déduire celles sur ses dérivées. De même, dériver en  $x$  ne change rien à la validité de nos calculs. Soit  $K \subset U$  un compact. D'une part on sait que la fonction  $(x, \xi) \mapsto \chi(\xi)u(x, \xi)$  est bornée dans un large voisinage (compact) de 0 en  $\xi$  et sur  $K$ . Au delà de ce voisinage, on a pour tout  $\xi$  large, pour tout  $x \in K$  :

$$|\chi(\xi)u(x, \xi)| = |\chi(\xi)|\xi^m u(x, \delta_{|\xi|^{-1}}\xi) \quad (2.2.11)$$

$$\underbrace{\leq}_{\chi \leq 1} |\xi|^m \underbrace{\sup_{x \in K, \eta \in S_{|\cdot|}^d} |u(x, \eta)|}_{< +\infty} \quad (2.2.12)$$

$$= C(1 + |\xi|)^m, \quad (2.2.13)$$

où  $C > 0$  est une constante adéquate. D'où la conclusion.  $\square$

On passe maintenant au théorème central de cette partie. Ce théorème est très inspiré du livre de Taylor [209, proposition 2.2] de 1984. Nous ne pouvons toutefois pas l'attribuer avec certitude à Taylor car il semblerait également que ce résultat soit déjà mentionné dans le livre de BG [13, proposition (12.72) p113] de 1983. Nous l'avons adapté à notre contexte général des dilatations à poids entiers sur  $\mathbb{R}^d$ . La clé de voûte du théorème suivant est l'étude du co-cycle donné par  $\Omega_s$ , voir l'équation (2.2.15).

**Théorème 2.2.4.** *Caractérisation des fonctions de  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$*

Soit  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ . Alors sont équivalentes :

1.  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .
2. Soit  $K$  un voisinage compact de 0 dans  $\mathbb{R}^d$ . Alors il existe  $u' \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  homogène pile d'ordre  $m$  et  $u'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  de sorte qu'en dehors de  $K$  l'égalité suivante est vraie :

$$u = u' + u''. \quad (2.2.14)$$

*Démonstration.* **Montrons que 2) implique 1).** Soit  $K$  un voisinage compact contenant 0. On pose le co-cycle :

$$\Omega_s(x, \xi) := u(x, \delta_s \xi) - s^m u(x, \xi). \quad (2.2.15)$$

Pour tout  $\xi \in K^c$  on peut écrire :

$$\Omega_s(x, \xi) = u'(x, \delta_s \xi) - s^m u'(x, \xi) + u''(x, \delta_s \xi) - s^m u''(x, \xi) \quad \underbrace{=}_{u' \text{ homogène pile}} u''(x, \delta_s \xi) - s^m u''(x, \xi). \quad (2.2.16)$$

Avec la remarque 13, on en déduit que  $\Omega_s \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . Par définition, cela signifie  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Montrons que 1) implique 2).** Supposons  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et montrons qu'on peut avoir la décomposition de  $u$  comme annoncée. Soit  $s > 0$ . Par hypothèse  $\Omega_s \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . La fonction exponentielle de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+^*$  étant bijective, on peut faire le changement de variable consistant à poser  $s = e^t$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Ainsi on a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Omega_{e^t} \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.2.17)$$

Soit  $K$  un voisinage compact contenant 0. On fixe une fonction  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  :

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \text{ au voisinage de } 0 \\ 1 & \text{si } \xi \text{ en dehors de } K. \end{cases}$$

La stratégie de la preuve est de construire une fonction suffisamment sympathique  $v \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  à partir de la fonction  $u$ , de sorte que soient vraies :

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(x, \delta_{e^t} \xi) = e^{tm} v(x, \xi), \quad (2.2.18)$$

et :

$$(x, \xi) \mapsto u''(x, \xi) := \chi(\xi)[u(x, \xi) - v(x, \xi)] \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d), \quad (2.2.19)$$

$$(x, \xi) \mapsto u'(x, \xi) := v(x, \xi) \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.2.20)$$

On explique maintenant pourquoi il suffit de faire ça. En effet, ayant effectué la construction mentionnée aux équations (2.2.19) et (2.2.20), en dehors de ce compact  $K$ , il serait licite d'écrire :

$$u''(x, \xi) = u(x, \xi) - u'(x, \xi) \Leftrightarrow u(x, \xi) = (u' + u'')(x, \xi), \quad (2.2.21)$$

ce qui est la décomposition attendue.

On passe maintenant à la construction de  $v$  de sorte que  $v$  vérifie notamment (2.2.19) et (2.2.20). Grâce à (2.2.17), il vient pour  $t = 1$  :

$$(x, \xi) \mapsto h(x, \xi) := u(x, \delta_{e^1}\xi) - e^m u(x, \xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.2.22)$$

Il s'ensuit, pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :

$$(x, \xi) \mapsto h(x, \delta_{e^j}\xi) = u(x, \delta_{e^{j+1}}\xi) - e^m u(x, \delta_{e^j}\xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.2.23)$$

On entame un processus de sommation. Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , il vient :

$$\sum_{k=0}^j h(x, \delta_{e^k}\xi) e^{-mk} = \sum_{k=0}^j \left( u(x, \delta_{e^{k+1}}\xi) e^{-mk} - u(x, \delta_{e^k}\xi) e^{-m(k-1)} \right) \quad (2.2.24)$$

$$= e^{-mj} u(x, \delta_{e^{j+1}}\xi) - e^m u(x, \xi), \quad (2.2.25)$$

par télescopage des termes. Multipliant de chaque côté la précédente équation par  $e^{-m}$ , il en résulte que :

$$\sum_{k=0}^j h(x, \delta_{e^k}\xi) e^{-m(k+1)} = e^{-m(j+1)} u(x, \delta_{e^{j+1}}\xi) - u(x, \xi). \quad (2.2.26)$$

On pose :

$$v(x, \xi) := \sum_{k=0}^{+\infty} h(x, \delta_{e^k}\xi) e^{-m(k+1)} + u(x, \xi). \quad (2.2.27)$$

Dans un premier temps on vérifie que la série infinie  $v$  est bien définie et lisse sur  $U \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ . Puisque  $h \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  selon l'équation (2.2.22), le fait de se donner un compact  $\tilde{K}$  de  $U$  et un entier  $\beta$  pour lequel on impose la condition  $\beta + m > 0$ , force l'existence d'une constante  $C_{\tilde{K}, \beta} > 0$  de telle sorte que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\forall x \in \tilde{K}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$|(1 + |\delta_{e^k}\xi|)^\beta h(x, \delta_{e^k}\xi)| \leq C_{\tilde{K}, \beta}. \quad (2.2.28)$$

Il vient :

$$|e^{-m(k+1)} h(x, \delta_{e^k}\xi)| \leq C_{\tilde{K}, \beta} (1 + |\delta_{e^k}\xi|)^{-\beta} e^{-m(k+1)} \quad (2.2.29)$$

$$\underbrace{\equiv}_{|\cdot| \text{ nqh}} C_{\tilde{K}, \beta} (1 + e^k |\xi|)^{-\beta} e^{-m(k+1)}. \quad (2.2.30)$$

On fixe, maintenant un compact  $\hat{K}$  de  $\mathbb{R}^d$  en dehors de 0. Avec (2.1.4), on peut trouver une constante  $C_1 > 0$  et  $a > 0$  de sorte que pour tout  $\xi \in \hat{K}$  :

$$|\xi| \geq C_1 \|\xi\|_d^a \geq C := C_1 \min_{\xi \in \hat{K}} \|\xi\|_d^a > 0. \quad (2.2.31)$$

Reprenant l'équation (2.2.30), on en déduit :

$$C_{\tilde{K}, \beta} (1 + C e^k)^{-\beta} e^{-m(k+1)} \underbrace{\equiv}_{\beta+m>0} o_{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} \right). \quad (2.2.32)$$

Ceci vaut pour tous les compacts  $\tilde{K}$  dans  $U$  et les compacts  $\tilde{K}$  de  $\mathbb{R}^d$  évitant 0. Donc on a établi que la série convergeait normalement sur tout compact de  $U \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  et y est bien définie et continue. Pour le caractère  $C^\infty$  de  $v$ , il s'obtient de la même façon en vertu des théorèmes usuels de dérivation des séries de fonctions.

Maintenant que l'existence de la série est a fortiori justifiée, on peut revenir à (2.2.26) et prendre la limite :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^j h(x, \delta_{e^k} \xi) e^{-m(k+1)} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left( e^{-m(j+1)} u(x, \delta_{e^{j+1}} \xi) - u(x, \xi) \right). \quad (2.2.33)$$

Il s'ensuit par (2.2.27) :

$$v(x, \xi) := \lim_{j \rightarrow +\infty} e^{-mj} u(x, \delta_{e^j} \xi). \quad (2.2.34)$$

Pour passer de  $j$  entier à  $t$  réel dans la limite précédente, on procède d'abord sur  $\mathbb{Q}$  puis on utilise la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Remplaçons la fonction  $h(x, \xi) := u(x, \delta_{e^1} \xi) - e^m u(x, \xi)$  par la fonction  $h_q(x, \xi) := u(x, \delta_{e^{\frac{1}{q}}} \xi) - e^{\frac{m}{q}} u(x, \xi)$  avec  $q \in \mathbb{N}^*$ . Le raisonnement précédent s'applique et on va trouver une fonction  $v_q \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  qui vérifie :

$$v_q(x, \xi) := \lim_{j \rightarrow +\infty} e^{-m \frac{j}{q}} u(x, \delta_{e^{\frac{j}{q}}} \xi). \quad (2.2.35)$$

Remarquons que la suite  $\left( e^{-mj} u(x, \delta_{e^j} \xi) \right)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite d'extraction  $\phi(j) = jq$  de la suite  $\left( e^{-m \frac{j}{q}} u(x, \delta_{e^{\frac{j}{q}}} \xi) \right)_{j \in \mathbb{N}}$  et en conséquence les deux fonctions  $v$  et  $v_q$  coïncident en tant que limite de ces suites.

Ceci implique que  $v$  est bien homogène additivement de degré  $m$  (au sens de la dilatation exponentielle) donc multiplicativement par l'astuce qu'on a utilisée à l'équation (2.2.17). Ainsi pour  $t := \frac{j}{q} \in \mathbb{Q}$  il vient :

$$v(x, \delta_{e^t} \xi) = v_q(x, \delta_{e^t} \xi) = \lim_{j \rightarrow +\infty} e^{-\frac{jm}{q}} u(x, \delta_{e^{\frac{j}{q}}} \delta_{e^t} \xi) \quad (2.2.36)$$

$$= e^{mt} \lim_{j \rightarrow +\infty} e^{-m(\frac{j}{q}+t)} u(x, \delta_{e^{\frac{j}{q}+t}} \xi) \quad (2.2.37)$$

$$= e^{mt} v_q(x, \xi) = e^{mt} v(x, \xi). \quad (2.2.38)$$

Ainsi, par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  et continuité de  $v$ , alors  $v$  est homogène additivement sur  $\mathbb{R}$  (au sens de la dilatation exponentielle) donc multiplicativement par l'astuce qu'on a utilisée à l'équation (2.2.17). Reste à voir que :

$$u'' : \xi \mapsto \chi(\xi) [u(x, \xi) - v(x, \xi)] \underset{(2.2.27)}{=} \chi(\xi) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-m(k+1)} h(x, \delta_{e^k} \xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.2.39)$$

On se donne  $\tilde{K} \subset U$  un compact et  $k$  un entier, un couple de multi-indices  $(\alpha, \beta)$ . Toujours profitant de la remarque après la définition de fonction Schwartz, il suffit de vérifier que la fonction :

$$(x, \xi) \mapsto (1 + |\xi|)^k D_x^\alpha D_\xi^\beta u''(x, \xi), \quad (2.2.40)$$

est bornée en dehors d'un compact de  $\mathbb{R}^d$  contenant 0. Rappelons que  $K \subset \mathbb{R}^d$  est un compact donc a fortiori inclus dans une boule (pour la nqh) de centre 0 et de rayon  $R > 0$ . Nous allons montrer que la fonction (2.2.40) est bornée en dehors de cette précédente boule.



Comme la série est  $C^\infty$  et est à dérivées normalement convergentes sur tout compact, on peut intervertir la sommation et les dérivations  $D_x^\alpha, D_\xi^\beta$ . Il vient pour tout  $|\xi| \geq R$ ,  $\chi(\xi) = 1$  et donc aussi pour  $x \in \tilde{K}$  :

$$(1 + |\xi|)^k D_x^\alpha D_\xi^\beta u''(x, \xi) \underset{(2.2.39)}{=} (1 + |\xi|)^k D_x^\alpha D_\xi^\beta \left( \chi(\xi)[u(x, \xi) - v(x, \xi)] \right) \quad (2.2.41)$$

$$= (1 + |\xi|)^k D_x^\alpha \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-m(j+1)} D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi) \quad (2.2.42)$$

$$= (1 + |\xi|)^k \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-m(j+1)} e^{j \sum_l \rho_l \beta_l} D_x^\alpha D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi). \quad (2.2.43)$$

$$= (1 + |\xi|)^k \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-m(j+1) + j\sigma} D_x^\alpha D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi) \quad (2.2.44)$$

où l'on a posé  $\sigma := \sum_l \rho_l \beta_l$ . Maintenant on fixe  $\gamma$  un entier positif strict de sorte que  $m - \sigma + \gamma > 0$ . On utilise le fait que  $h \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  pour conclure. En effet, il existe  $C_{\alpha, \beta, k, \tilde{K}, \gamma} > 0$  telle que  $\forall x \in \tilde{K}$  et  $\forall |\xi| \geq R, \forall j \in \mathbb{N}$  :

$$(1 + |\delta_{e^j} \xi|)^{k+\gamma} |D_x^\alpha D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k, \tilde{K}, \gamma}. \quad (2.2.45)$$

Puis il vient :

$$(1 + |\xi|)^k |D_x^\alpha D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi)| = \underbrace{\frac{(1 + |\xi|)^k}{(1 + |\delta_{e^j} \xi|)^k}}_{\leq 1 \text{ car } e^j \geq 1} \frac{1}{(1 + |\delta_{e^j} \xi|)^\gamma} (1 + |\delta_{e^j} \xi|)^{k+\gamma} |D_x^\alpha D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi)| \quad (2.2.46)$$

$$\underset{(2.2.45)}{\leq} C_{\alpha, \beta, k, \tilde{K}, \gamma} (1 + e^j |\xi|)^{-\gamma}. \quad (2.2.47)$$

Remarquons que pour tout  $j \geq 0$  et pour tout  $|\xi| \geq R$  on a :

$$(1 + e^j |\xi|)^{-\gamma} \leq (1 + e^j R)^{-\gamma}. \quad (2.2.48)$$

Pour tout  $j \geq 0$  et pour tout  $|\xi| \geq R$  on peut donc dire :

$$|e^{-m(j+1) + j\sigma} (1 + |\xi|)^k D_x^\alpha D_\xi^\beta h(x, \delta_{e^j} \xi)| \underset{(2.2.47)}{\leq} C_{\alpha, \beta, k, \tilde{K}, \gamma} e^{-m(j+1) + j\sigma} (1 + e^j |\xi|)^{-\gamma} \quad (2.2.49)$$

$$\underset{(2.2.48)}{\leq} C_{\alpha, \beta, k, \tilde{K}, \gamma} e^{-m(j+1) + j\sigma} (1 + e^j R)^{-\gamma}. \quad (2.2.50)$$

On rappelle que la quantité  $m - \sigma + \gamma$  est strictement positive. Ainsi, le membre de droite de (2.2.50) est un  $o_{+\infty}(\frac{1}{j^2})$ . De là on en conclut que la fonction de l'équation (2.2.40) est bornée pour  $|\xi| \geq R$ . Par recollement, on peut donc conclure que  $u'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . □

Il est possible de voir les fonctions homogènes modulo-Schwartz comme des fonctions poly-homogènes admettant un seul terme non nul dans leur développement asymptotique. De plus la fonction homogène apparaissant dans la décomposition (2.2.14) d'une fonction homogène modulo-Schwartz est unique<sup>3</sup>. En effet :

**Proposition 2.2.5.** *Toute fonction  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est une fonction  $G$ -poly-homogène dont le développement asymptotique possède uniquement un premier terme non nul, celui homogène d'ordre  $m$ . La réciproque est vraie.*

3. Merci à Jean-Marie Lescure pour ces deux remarques.

*Démonstration.* 1. D'une part, (nous le verrons ensuite à la proposition 2.3.5 à venir) toute telle fonction est un symbole  $S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Soit  $K$  un voisinage compact de 0 dans  $\mathbb{R}^d$ . Par le théorème 2.2.4, il existe  $u' \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  homogène pile d'ordre  $m$  et  $u'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  partout :

$$u = \chi_K u' + u'', \quad (2.2.51)$$

où  $\chi_K$  est une fonction cut-off lisse nulle sur  $K$  et de valeur 1 aux infinis. De cela découle naturellement la conclusion souhaitée, en posant  $p_m = \chi_K u'$  et  $p_{m-j} = 0, j > 0$ .

2. Réciproquement, supposons que  $u \in S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  de sorte que son développement asymptotique  $p_{m-j}$  soit nul pour  $j > 0$ . Posons  $u' = p_m$  alors par définition de ce développement on sait que :

$$u - \chi p_m \in S_G^{m-1}(U \times \mathbb{R}^d), \quad (2.2.52)$$

pour  $\chi$  une fonction cut-off lisse nulle au voisinage de 0 et 1 aux infinis. Par suite pour tout  $N$  :

$$u - \sum_{j=0}^N \chi p_{m-j} \in S_G^{m-N-1}(U \times \mathbb{R}^d), \quad (2.2.53)$$

soit :

$$u - \chi p_m \in S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = S_G(U \times \mathbb{R}^d), \quad (2.2.54)$$

où la dernière égalité est vraie en vertu de la proposition 2.1.9. La preuve est alors achevée.  $\square$

## 2.3 Quelques résultats supplémentaires sur les fonctions Schwartz et homogènes modulo Schwartz

On répertorie une série de résultats qui seront utiles par la suite. On rappelle qu'une suite exhaustive de  $U$  est une suite  $(K_i)$  de compacts de  $U$ , d'union  $U$ . De plus tout compact de  $U$  est contenu dans un  $K_i$ . De tels  $K_i$  existent. Il suffit de se donner :

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq i, d(x, \mathbb{R}^d \setminus U) \geq \frac{1}{2^i}\}, \quad (2.3.1)$$

où, pour une partie  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$ . Une référence très complète<sup>4</sup> sur les espaces de Fréchet est le livre [204] de Simon. On pourra aussi lire les notes de cours de Gallagher [86].

**Proposition 2.3.1.** [1, p 42], [6, section 2.2 chapitre I p 30]

L'espace  $S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est un espace de Fréchet pour la famille dénombrable de semi-normes séparantes :

$$|u|_{k,j} := \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \sup_{x \in K_j, \xi \in \mathbb{R}^d} |D_x^\alpha D_\xi^\beta u(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{-m+|\beta|}, \quad (2.3.2)$$

où  $(K_j)$  est une suite exhaustive de  $U$ .

**Proposition 2.3.2.** L'espace  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est un espace de Fréchet pour la famille dénombrable de semi-normes séparantes :

$$\begin{cases} |u|_{k,j} & := \sup_{x \in K_j, \xi \in \overline{S(0,1)^d}} |D_x^\alpha D_\xi^\beta u'(x, \xi)| \\ |u|_{k,j,l} & := \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \sup_{x \in K_j, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus K} |D_x^\alpha D_\xi^\beta u''(x, \xi)| (1 + |\xi|)^l \\ |u|_{k,j} & := \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \sup_{x \in K_j, \xi \in K} |D_x^\alpha D_\xi^\beta u(x, \xi)|, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

où  $(K_j)$  est une suite exhaustive de  $U$ , et où  $K$  est un voisinage compact comme dans le théorème 2.2.4 permettant la décomposition :

$$u = u' + u'', \quad (2.3.4)$$

en dehors de  $K$  où  $u' \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $u'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

4. Nous conseillons aussi l'article historique de 1949 de Dieudonné et Schwartz où les auteurs introduisent les espaces (LF) comme "limite inductive" d'espaces de Fréchet, [55].

*Démonstration.* Laissée au lecteur.  $\square$

**Lemme 2.3.3.** Soit  $g \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}$ . Alors la fonction  $(x, \xi) \mapsto g(x, \xi, t)$  est dans  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Laissée au lecteur.  $\square$

**Rappel :** Dans ce qui suit, l'homogénéité est au sens de  $\tilde{\delta}_s$  lorsqu'il est question de  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

**Proposition 2.3.4.** Soit  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On pose  $a(x, \xi) := u(x, \xi, 1)$  alors  $a \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Soit  $u$  comme annoncée. Grâce au théorème 2.2.4, on peut écrire en dehors d'un voisinage compact  $K$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  :

$$u(x, \xi, t) := \underbrace{u'(x, \xi, t)}_{\in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})} + \underbrace{u''(x, \xi, t)}_{\in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})} \quad (2.3.5)$$

On pose alors  $a'(x, \xi) = u'(x, \xi, 1)$  de sorte que, grâce à la proposition 2.2.2, on ait  $a' \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Posons aussi  $a''(x, \xi) := u''(x, \xi, 1)$ . Grâce au lemme 2.3.3 on vérifie que  $a'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . A fortiori avec la remarque 16, on peut dire  $a'' \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . En dissociant les  $\xi$  en dedans ou en dehors de  $K$ , on peut conclure que  $a \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , comme somme de  $G$ -symboles d'ordre  $m$ .  $\square$

On peut en fait montrer<sup>5</sup> la proposition suivante, ce qui fournit une preuve tout à fait élégante de la précédente proposition 2.3.4.

**Proposition 2.3.5.** 1.  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d) \subset S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

2. L'application :

$$\text{ev}_1 : S_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow S_G^m(U \times \mathbb{R}^d), u \mapsto u|_{t=1}. \quad (2.3.6)$$

est bien définie.

*Démonstration.* 1. Il suffit d'utiliser le théorème 2.2.4 ainsi que la proposition 2.2.3.

2. Laissée au lecteur.  $\square$

**Lemme 2.3.6.** Soit  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Alors la fonction  $\xi \mapsto a_0(x, \xi) := u(x, \xi, 0)$  est dans  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Appliquer le lemme 2.3.3 précédent à  $g_s : (x, \xi, t) \mapsto u(x, \tilde{\delta}_s(\xi, t)) - s^m u(x, \xi, t)$ . Reste à évaluer en  $t = 0$ .  $\square$

**Remarque 2.3.7.** Le précédent lemme 2.3.6 n'est pas vrai pour  $t \neq 0$ . La restriction en  $t \neq 0$  d'une fonction homogène modulo Schwartz n'est pas une telle fonction vue dans une dimension inférieure, contrairement au fait que la restriction d'une fonction Schwartz en n'importe quel  $t$ , elle, demeure une telle fonction. En effet, si  $t \neq 0$ , la dilatation  $\tilde{\delta}_s$  agit sur la dernière variable et nous empêche de conclure quant au fait que la différence des fonctions impliquées est bien une fonction Schwartz. Quant à lui, le théorème 2.1.11 (qui est le cœur de ce chapitre) affirme que la restriction en n'importe quel  $t$  d'une fonction homogène modulo Schwartz est toujours un symbole poly-homogène vu dans une dimension inférieure.

**Lemme 2.3.8.** Soit  $a \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  et on se donne  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Alors la fonction  $F : (x, \xi, t) \mapsto a(x, \xi)\chi(t)$  est dans  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .

*Démonstration.* Laissée au lecteur.  $\square$

**Proposition 2.3.9.** Soit  $f \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  dont le support est inclus dans le compact  $[a, b]$  où  $a > 0$ . Alors la fonction  $F : (x, \xi, t) \mapsto f(x, \delta_{t-1}\xi)g(t)$  est dans  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .

**Remarque 2.3.10.** Cette précédente affirmation est crédible : nous multiplions une fonction cut-off lisse en la variable  $t$ , dont le support évite 0, avec une famille  $t$ -paramétrée de fonctions Schwartz dilatées par  $\delta_{t-1}$ . En voici maintenant la preuve.

5. Cela nous a été suggéré par Jean Marie-Lescure, que l'on remercie.

*Preuve de la proposition 2.3.9.* Avant toute chose constatons que  $\forall t > 0$  :

$$\delta_{t^{-1}}\xi = \left(\frac{1}{t^{\rho_1}}\xi_1, \dots, \frac{1}{t^{\rho_d}}\xi_d\right). \quad (2.3.7)$$

Soit  $K$  un compact de  $U$ ,  $(\alpha, \beta)$  un couple de multi-indices et  $k$  un entier naturel alors il existe une constante  $M_{\alpha, \beta, k, K} > 0$  de sorte que  $\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$|(1 + |\xi|)^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \xi)| \leq M_{\alpha, \beta, k, K}. \quad (2.3.8)$$

Alors  $\forall t > 0$  on a :

$$|(1 + |\delta_{t^{-1}}\xi|)^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \delta_{t^{-1}}\xi)| \leq M_{\alpha, \beta, k, K}. \quad (2.3.9)$$

Ceci prouve que :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+^*, \xi \in \mathbb{R}^d, x \in K} \left| (1 + |\delta_{t^{-1}}\xi|)^k \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \delta_{t^{-1}}\xi) \right| \leq M_{\alpha, \beta, k, K}. \quad (2.3.10)$$

Pour la suite des calculs, on prend  $\beta' = 1$ . Pour un  $\beta'$  quelconque, nous laissons le soin au lecteur de mener les calculs, grâce à la formule de Leibniz. On calcule, de sorte à majorer la quantité suivante :

$$\left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^{\beta'} [F(x, \xi, t)] \right| = \left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^{\beta'} [g(t) f(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] \right|, \quad (2.3.11)$$

dans laquelle on peut permuter l'ordre de dérivation par le théorème de Schwartz :

$$= \left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \partial_x^\alpha \partial_t^{\beta'} g(t) \partial_\xi^\beta [f(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] \right|, \quad (2.3.12)$$

de sorte qu'en dérivant en la variable  $\xi$  en premier dans (2.3.12) et en s'aidant de la formule (2.3.7), il vienne :

$$= \left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \partial_t^{\beta'} g(t) \prod_{j=1}^d (t^{-1})^{\rho_j \beta_j} \partial_x^\alpha [(\partial_\xi^\beta f)(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] \right|, \quad (2.3.13)$$

on applique ensuite la règle de Leibniz pour la dérivée par rapport à  $t$  :

$$= \left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \left( \partial_t^{\beta'} \left[ \frac{g(t)}{\prod_{j=1}^d t^{\rho_j \beta_j}} \right] \partial_x^\alpha [(\partial_\xi^\beta f)(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] + \frac{g(t)}{\prod_{j=1}^d t^{\rho_j \beta_j}} \partial_t^{\beta'} \partial_x^\alpha [(\partial_\xi^\beta f)(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] \right) \right|, \quad (2.3.14)$$

puis par inégalité triangulaire et puisque  $g$  est à support dans  $[a, b]$  il s'ensuit :

$$\begin{aligned} &\leq \left| t^{k'} \partial_t^{\beta'} \left[ \frac{g(t)}{\prod_{j=1}^d t^{\rho_j \beta_j}} \right] \left( \frac{1 + |\xi|}{1 + |\delta_{t^{-1}}\xi|} \right)^k 1_{[a, b]}(t) (1 + |\delta_{t^{-1}}\xi|)^k \partial_x^\alpha [(\partial_\xi^\beta f)(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] \right| \\ &\quad + \underbrace{\left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \frac{g(t)}{\prod_{j=1}^d t^{\rho_j \beta_j}} 1_{[a, b]}(t) \partial_t^{\beta'} \partial_x^\alpha [(\partial_\xi^\beta f)(x, \delta_{t^{-1}}\xi)] \right|}_{:= (\spadesuit)}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Grâce à l'équation (2.3.9), il vient :

$$\left| (1 + |\xi|)^{k t^{k'}} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^{\beta'} [F(x, \xi, t)] \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} \left| t^{k'} \partial_t^{\beta'} \left[ \frac{g(t)}{\prod_{j=1}^d t^{\rho_j \beta_j}} \right] \right| M_{\alpha, \beta, k, K} \underbrace{\left( \frac{1 + |\xi|}{1 + \frac{1}{b}|\xi|} \right)^k}_{\text{bornée sur } \mathbb{R}^d} + (\spadesuit). \quad (2.3.16)$$

Reste à dominer la partie (♠). On commence par déterminer la quantité  $\partial_t^{\beta'} [\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \delta_{t-1}\xi)]$ . Dénotant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^d$ , on calcule :

$$\partial_t^{\beta'} \left[ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \delta_{t-1}\xi) \right] = \langle \nabla \left( \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f \right) (x, \delta_{t-1}\xi), \left( \frac{-\rho_j}{t^{\rho_j+1}} \xi_j \right)_j \rangle \quad (2.3.17)$$

$$= \sum_{j=1}^d \frac{-\rho_j}{t^{\rho_j+1}} \xi_j \partial_{\xi_j} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \delta_{t-1}\xi) \quad (2.3.18)$$

$$= \sum_{j=1}^d \frac{-\rho_j}{t^{\rho_j+1}} \xi_j \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta+1} f(x, \delta_{t-1}\xi). \quad (2.3.19)$$

Reprenant dans (♠) il vient :

$$(\spadesuit) \leq \sum_{j=1}^d \left| \frac{\rho_j}{t^{\rho_j+1}} 1_{[a,b]}(t) t^{k'} \left[ \frac{g(t)}{\prod_{l=1}^d t^{\rho_l \beta_l}} \right] (1 + |\xi|)^k \xi_j \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta+1} f(x, \delta_{t-1}\xi) \right|. \quad (2.3.20)$$

On pose alors  $C := \max_{j \in \{1, \dots, d\}} \left( \sup_{t \in [a,b]} \left| \frac{\rho_j}{t^{\rho_j+1}} \right| \sup_{t \in [a,b]} \left| t^{k'} \left[ \frac{g(t)}{\prod_{l=1}^d t^{\rho_l \beta_l}} \right] \right| \right)$ . De plus, toujours en utilisant le fait que  $|\cdot|$  est une norme homogène<sup>6</sup> :

$$|\xi_j| \leq \|\xi\|_d \leq \frac{1}{C_1} |\xi|^{1/a} \leq \frac{1}{C_1} (1 + |\xi|)^{1/a}, \quad (2.3.21)$$

où  $\|\cdot\|_d$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et où  $a > 0$  est issu de l'équation (2.1.4). On choisit  $k''$  un entier grand de sorte que :

$$|\xi_j| \leq \frac{1}{C_1} (1 + |\xi|)^{1/a} \leq \frac{1}{C_1} (1 + |\xi|)^{k''}. \quad (2.3.22)$$

Retournant dans (♠) et utilisant la même idée que dans l'équation (2.3.16) pour dominer  $(\xi, t) \mapsto \left( \frac{1+|\xi|}{1+|\delta_{t-1}\xi|} \right)^k$  il s'ensuit :

$$(\spadesuit) \leq C \sum_{j=1}^d (1 + |\delta_{t-1}\xi|)^k \underbrace{\left( \frac{1 + |\xi|}{1 + \frac{1}{b}|\xi|} \right)^k}_{\text{bornée sur } \mathbb{R}^d} \frac{1}{C_1} (1 + |\delta_{t-1}\xi|)^{k''} \underbrace{\left( \frac{1 + |\xi|}{1 + \frac{1}{b}|\xi|} \right)^{k''}}_{\text{bornée sur } \mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta+1} f(x, \delta_{t-1}\xi)|.$$

On pose  $\hat{C} := \frac{C}{C_1} \left( \frac{1+|\xi|}{1+\frac{1}{b}|\xi|} \right)^{k+k''}$  et il vient :

$$(\spadesuit) \leq \hat{C} \sum_{j=1}^d (1 + |\delta_{t-1}\xi|)^{k+k''} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta+1} f(x, \delta_{t-1}\xi)|. \quad (2.3.23)$$

Cette dernière quantité est dominée car  $f \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . Des équations (2.3.16) et (2.3.23) on peut alors déduire que  $F \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .  $\square$

## 2.4 Construction du développement asymptotique

Nous allons montrer dans cette partie l'implication 2)  $\Rightarrow$  1) du théorème 2.1.11. Pour ce qui suit, on se donne un élément  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On se donne une partition lisse de l'unité  $\chi_0 + \chi_1 = 1$ , où la fonction cut-off lisse à support compact  $\chi_0$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq 2 \\ 1 & \text{si } |t| \leq 1 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

6. le  $a$  issu de la norme homogène est différent du  $a$  du support de  $g$  : on s'autorise momentanément ce conflit de notation.

**Théorème 2.4.1.** Soit  $a \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , on définit :

$$b(x, \xi, t) := \chi_0(t)a(x, \xi) + \underbrace{\chi_1(t)|t|^m a(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi)}_{(\spadesuit)}. \quad (2.4.2)$$

Alors  $b \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .

**Remarque 2.4.2.** Pour tout  $|t| \leq 1$ , remarquons que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et  $x \in U$ , on a  $b(x, \xi, t) = a(x, \xi)$ . L'idée de la construction (2.4.2) est de forcer  $(\spadesuit)$  à être homogène en l'infini.

*Preuve du théorème 2.4.1.* Grâce à la remarque 14, il suffit de montrer le résultat pour  $s \in [1, 2]$ . Soit un tel  $s$ . Il est clair que  $t \mapsto \chi_0(st) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et de fait on peut affirmer que  $(x, \xi, t) \mapsto [a(x, \delta_s \xi) - s^m a(x, \xi)]\chi_0(st) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On calcule pour tout  $x \in U$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$b(x, \delta_s \xi, st) - s^m b(x, \xi, t) = \underbrace{[a(x, \delta_s \xi) - s^m a(x, \xi)]\chi_0(st)}_{\in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})} \quad (2.4.3)$$

$$+ s^m \underbrace{\left( a(x, \xi)[\chi_0(st) - \chi_0(t)] + a(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi)|t|^m[\chi_1(st) - \chi_1(t)] \right)}_{:= \tilde{w}}. \quad (2.4.4)$$

De fait, il nous reste à prouver que  $\tilde{w} \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Utilisant le fait que,  $\chi_1 = 1 - \chi_0$ , on a pour tout  $x \in U$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  :

$$s^m \tilde{w}(x, \xi, t) = s^m \left( \chi_0(st) - \chi_0(t) \right) \left( a(x, \xi) - |t|^m a(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi) \right). \quad (2.4.5)$$

On applique alors le théorème de décomposition 2.2.4 à la fonction  $a$  et pour le compact  $K = \overline{B(0, R)}$ , désignant la boule fermée de rayon  $R > 0$  pour la nqh  $|\cdot|$  :

$$\forall x \in U, \forall \xi \in K^c, \quad a(x, \xi) = a'(x, \xi) + a''(x, \xi), \quad (2.4.6)$$

où  $a' \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $a'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

Malheureusement, on ne peut pas appliquer la précédente décomposition directement à la fonction  $(x, \xi) \mapsto a(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi)$  de l'équation (2.4.5), avec le même compact  $K$  pour tout  $t$  car il n'est pas assuré que pour  $\xi \in K^c$  donné, alors on ait que pour tout  $t \neq 0$  alors  $\delta_{t^{-1}}\xi \in K^c$ . Cela motive donc la construction suivante.

Grâce à  $\chi_0$  dans (2.4.5), remarquons pour un élément  $s \in [1, 2]$  fixé, il existe  $0 < M_1 \leq 1 < M_2$  tel que  $\tilde{w}(x, \xi, t) = 0$ , pour tout  $x \in U, \xi \in \mathbb{R}^d$  et pour tout  $t \in \left( [-M_2, -M_1] \cup [M_1, M_2] \right)^c$ . Choisisant alors le compact  $\tilde{K} = \overline{B_0(0, \tilde{R})}$ , où  $\tilde{R} > M_2 R > R$  on a :

$$\forall \xi \in \tilde{K}^c, \forall t \in [-M_2, -M_1] \cup [M_1, M_2], \quad \delta_{t^{-1}}\xi \in K^c. \quad (2.4.7)$$

Il est clair que  $K = \overline{B(0, R)} \subset \tilde{K}$  et en conséquence la décomposition (2.4.6) reste vraie en particulier pour  $\xi \in \tilde{K}^c$ . Dans l'équation (2.4.5) on écrit, pour tout  $x \in U$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} s^m \chi_{\tilde{K}^c}(\xi) \tilde{w}(x, \xi, t) &= s^m [\chi_0(st) - \chi_0(t)] \chi_{\tilde{K}^c}(\xi) \underbrace{\left( a'(x, \xi) - |t|^m a'(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi) \right)}_{=0, \text{ car } a' \text{ est homogène pile d'ordre } m} \\ &+ \chi_{\tilde{K}^c}(\xi) \underbrace{s^m [\chi_0(st) - \chi_0(t)] a''(x, \xi)}_{\in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})} + \chi_{\tilde{K}^c}(\xi) (s|t|)^m [\chi_0(st) - \chi_0(t)] a''(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi), \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

où  $\chi_{\tilde{K}^c} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est une fonction cut-off lisse, égale à 1 sur  $\tilde{K}^c$  et 0 sur  $K$ . Utilisant la proposition 2.3.9 on peut affirmer que :

$$(x, \xi, t) \mapsto (s|t|)^m [\chi_0(st) - \chi_0(t)] a''(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi) \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1}). \quad (2.4.9)$$

Ainsi, avec l'équation (2.4.8), cela prouve  $\chi_{\tilde{K}^c} s^m \tilde{w} \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . Puisque  $(x, \xi, t) \mapsto s^m (1 - \chi_{\tilde{K}}(w)) \tilde{w}(x, w, t)$  a un support compact en les variables  $(\xi, t)$ , alors on en déduit que  $\tilde{w} \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  comme somme de deux telles fonctions. De là, le lecteur utilisera l'équation (2.4.4) pour conclure la preuve.  $\square$

**Remarque 19.** *Il est intéressant de noter la différence entre ce théorème et le lemme 2.3.8 dans lequel il suffit de multiplier une fonction Schwartz par une fonction cut-off lisse à support compact pour obtenir une fonction Schwartz vue dans une dimension supérieure. Ici, faire le produit d'une fonction homogène modulo Schwartz par une fonction cut-off lisse à support compact ne nous donne pas une fonction homogène modulo Schwartz vue dans une dimension supérieure. Explicitons un contre-exemple. Soit  $\chi_0$  comme à l'équation (2.4.1) et  $a \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Un calcul similaire à celui de l'équation (2.4.4) montre que  $b(x, \xi, t) = \chi_0(t)a(x, \xi)$  est homogène modulo Schwartz si et seulement si :*

$$s^m a(x, \xi)[\chi_0(st) - \chi_0(t)], \quad (2.4.10)$$

*est Schwartz. Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction dans (2.4.10) soit Schwartz. On applique alors le théorème de décomposition 2.2.4 à la fonction  $a$  et pour un compact  $K$  voisinage de 0 quelconque, on peut écrire que  $\forall x \in U, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$  :*

$$a(x, \xi) = \chi_K(\xi)a'(x, \xi) + a''(x, \xi), \quad (2.4.11)$$

*où  $a' \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ,  $a'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $\chi_K \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  vaut 0 sur  $K$  et 1 aux infinis. Combinant (2.4.10) et (2.4.11) il viendrait que la fonction :*

$$f(x, \xi, t) = \chi_K(\xi)\phi(t)a'(x, \xi), \quad (2.4.12)$$

*où  $\phi(t) = \chi_0(st) - \chi_0(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , est Schwartz. Donnons un contre-exemple en dimension  $d = 1$  et où la fonction  $a'$  est constante sur la variable  $x$ . Posons la fonction :*

$$f(x, \xi, t) = \chi_K(\xi)\phi(t)\xi. \quad (2.4.13)$$

*Pour  $k = 0$ ,  $(\alpha, \beta)$  multi-indices nuls,  $K \subset U$  un compact, il n'existe pas de constante  $C_{\alpha, \beta, k, K} > 0$  telle que pour tout  $x \in K, \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  :*

$$|f(x, \xi, t)| \leq C, \quad (2.4.14)$$

*et donc la fonction  $a'$  ne peut être dans l'espace  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^2)$ . Par conséquent rien ne nous assure que  $b$  est homogène modulo Schwartz. La partition de l'unité que nous avons employé dans cette section est donc un élément clé de la preuve du théorème 2.4.1.*

## 2.5 Preuve du 2) $\Rightarrow$ 1) du théorème 2.1.11

Toujours avec notre fonction  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , on rappelle que l'on a posé  $a(x, \xi) = u(x, \xi, 1)$ . Nous avons déjà montré à la proposition 2.3.4, que  $a$  était un symbole d'ordre  $m$ . Notre but est de montrer que c'est un symbole poly-homogène. Nous allons construire par récurrence son développement asymptotique. Rappelons aussi que  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est un espace de Fréchet par la proposition 2.3.2.

**Lemme 2.5.1.** *On définit le sous espace  $I_0^m := \{f \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1}) / f(x, \xi, 0) = 0\}$  de  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Alors, l'application suivante est un isomorphisme linéaire d'espaces de Fréchet :*

$$M_t : \mathcal{HS}_G^{m-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow I_0^m, f \mapsto (x, \xi, t) \mapsto tf(x, \xi, t). \quad (2.5.1)$$

*Démonstration.*  $I_0^m$  est clairement un espace vectoriel et un espace de Fréchet comme fermé de l'espace de Fréchet  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . En effet  $I_0^m$  est l'image réciproque du singleton  $\{0\}$  par l'application  $\delta_0 : \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d), f \mapsto \delta_0(f) : (x, \xi, t) \mapsto f(x, \xi, 0)$  qui est bien définie par le lemme 2.3.6 et continue. On montre que l'application  $M_t$  est bijective et on laisse le caractère isomorphisme de Fréchet au lecteur. En fait, il suffira d'appliquer le théorème de Banach-Schauder qui est un corollaire du théorème de l'application ouverte dans les espaces de Fréchet, voir pour cela le [204, théorème 9.10 p 138] du livre de Simon.

1. On commence par montrer l'injectivité de  $M_t$ . Soit donc  $f, g$  deux fonctions de  $\mathcal{HS}_G^{m-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  telles que  $tf(x, \xi, t) = tg(x, \xi, t)$ . Ainsi,  $tf(x, \xi, t) = tg(x, \xi, t)$  sur l'ensemble  $U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^*$  qui est dense dans  $U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ . Par continuité des fonctions mises en jeu  $f = g$  et finalement l'injectivité est prouvée.
2. On s'enquiert alors de la surjectivité de  $M_t$ . Soit  $f \in I_0^m$  en particulier  $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  et  $f(x, \xi, 0) = 0$ . On va utiliser une petite astuce abondante au sein de la théorie des distributions. On calcule :

$$\begin{aligned}
f(x, \xi, t) &= f(x, \xi, t) - f(x, \xi, 0) = t \underbrace{\int_{[0,1]} \partial_t f(x, \xi, ut) du}_{:=g(x, \xi, t)} \\
&= M_t(g)(x, \xi, t).
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Reste à voir que  $g \in \mathcal{HS}_G^{m-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On montre avec les théorèmes classiques de dérivation sous le signe intégrale que la fonction  $g$  est lisse. Il n'y a pas de soucis majeur à cela puisque la fonction  $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  et que l'on intègre en la dernière variable sur le compact  $[0, 1]$ . On rappelle qu'il suffit de considérer les éléments  $s \in [1, 2]$  pour démontrer le caractère homogène modulo Schwartz de  $g$ . Posons et calculons :

$$\Omega_s(x, \xi, t) = g(x, \delta_s(\xi), st) - s^{m-1}g(x, \xi, t) \tag{2.5.3}$$

$$= \int_{[0,1]} \partial_t f(x, \delta_s(\xi), ust) - s^{m-1} \partial_t f(x, \xi, ut) du. \tag{2.5.4}$$

Montrons que  $\Omega_s \in S_G(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Avec le lemme 2.2.1 on sait que  $\partial_t f \in \mathcal{HS}_G^{m-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . De fait, pour tout  $s > 0$ , la fonction :

$$\partial_t f(x, \delta_s(\xi), ust) - s^{m-1} \partial_t f(x, \xi, ut) \in S_G(U \times \mathbb{R}^{d+1}). \tag{2.5.5}$$

On en déduit que  $\Omega_s$  est toujours une fonction Schwartz.

Finalement on a bien montré que  $M_t$  est bijective. □

**Remarque 2.5.2.** *Nous n'utiliserons pas le caractère isomorphisme de Fréchet dans ce qui suit, simplement le caractère bijectif de l'application.*

Passons maintenant à la récurrence.

**Proposition 2.5.3.** *Soit  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On peut construire les fonctions :*

$$u_j \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^{d+1}), \tag{2.5.6}$$

avec la propriété que chaque  $a_j(x, \xi) := u_j(x, \xi, 0) \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$ . Alors :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, u_j(x, \xi, 1) = a(x, \xi) - \sum_{i=0}^{j-1} a_i(x, \xi). \tag{2.5.7}$$

*Démonstration.* Pour  $j = 0$ , on pose  $u = u_0$  et l'équation (2.5.7) est triviale puisque par définition  $u_0(x, \xi, 1) = a(x, \xi)$ . Supposons que nous ayons construit les fonctions souhaitées  $u_0, \dots, u_j$ . Alors on définit la fonction  $b_j$  sur le même modèle que l'équation (2.4.2) :

$$b_j(x, \xi, t) := \chi_0(t)a_j(x, \xi) + \chi_1(t)|t|^m a_j(x, \delta_{|t|^{-1}}\xi). \tag{2.5.8}$$

Puisque la fonction  $a_j$  appartient à l'espace  $\mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$  le théorème 2.4.1 nous permet d'affirmer que  $b_j \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .



Remarquons que  $u_j(x, \xi, 0) - b_j(x, \xi, 0) = 0$ . Grâce à l'isomorphisme du lemme 2.5.1 et l'hypothèse d'induction permettant d'affirmer que  $u_j - b_j \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , on en déduit qu'il existe  $u_{j+1} \in \mathcal{HS}_G^{m-j-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  satisfaisant  $M_t(u_{j+1}) = tu_{j+1} = u_j - b_j$ . Il est alors légitime d'écrire l'équation (2.5.9) suivante :

$$u_{j+1}(x, \xi, t) = \frac{u_j(x, \xi, t) - b_j(x, \xi, t)}{t} \in \mathcal{HS}_G^{m-j-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1}), \quad (2.5.9)$$

un développement de Taylor à l'ordre 1 en  $t$  montrant que la singularité en  $t = 0$  est effacée. On pose maintenant,  $a_{j+1} := u_{j+1}|_{t=0}$ . Avec le lemme 2.3.6, on sait que  $a_{j+1} \in \mathcal{HS}_G^{m-j-1}(U \times \mathbb{R}^d)$ . Il demeure à montrer l'égalité (2.5.7). Nous laissons le soin au lecteur de le montrer après avoir observé que :

$$\forall j, \forall |t| \leq 1, b_j(x, \xi, t) = a_j(x, \xi). \quad (2.5.10)$$

Ainsi la récurrence a été menée à bien et la proposition est acquise.  $\square$

*Preuve 2)  $\Rightarrow$  1) du théorème 2.1.11.* Soit  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Tout d'abord, grâce à la proposition 2.3.4,  $a = u|_{t=1} \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . On utilise maintenant la proposition 2.5.3 pour construire le développement asymptotique pour  $a$ , voir à ce sujet la définition 2.1.10. Grâce à la proposition 2.5.3, on peut écrire, pour tout entier naturel  $N$  :

$$a(x, \xi) = \sum_{j=0}^N a_j(x, \xi) + u_{N+1}(x, \xi, 1), \quad (2.5.11)$$

où  $a_j \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $u_{N+1} \in \mathcal{HS}_G^{m-N-1}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Encore une fois, invoquant la proposition 2.3.4,  $u_{N+1}|_{t=1} \in S_G^{m-N-1}(U \times \mathbb{R}^d)$ . Enfin, avec une légère modification dans la conclusion que nous obtenons au théorème 2.2.4, on peut écrire<sup>7</sup> que pour tout entier  $j$  :

$$a_j(x, \xi) = \chi_K(\xi) a'_j(x, \xi) + a''_j(x, \xi) \quad (2.5.12)$$

où, pour tout entier  $j$ ,  $a'_j \in \mathcal{H}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$ ,  $a''_j \in S_G(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $\chi_K$  est n'importe quelle fonction cut-off comme dans la définition 2.1.10. Par conséquent, grâce à la définition 2.1.10,  $\sum_j a'_j$  est un développement asymptotique pour  $a$ . L'implication 2)  $\Rightarrow$  1) du théorème 2.1.11 est maintenant chose faite.  $\square$

**Remarque 2.5.4.** *Il semble aussi possible de montrer<sup>8</sup> que :*

$$S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})|_{t=1} \subset S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d), \quad (2.5.13)$$

*ce qui serait un résultat légèrement plus fort que celui que nous avons obtenu à savoir en particulier :*

$$\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})|_{t=1} \subset S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.5.14)$$

*Ce résultat serait donc légèrement plus fort au sens où nous avons dit que toute fonction homogène modulo Schwartz d'ordre  $m$  était une fonction poly-homogène particulière, voir la proposition 2.2.5.*

## 2.6 Extension des fonctions poly-homogènes : Preuve 1) $\Rightarrow$ 2) du théorème 2.1.11

Soit  $a \in S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  on construit maintenant à la main un élément  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  de sorte que  $a$  soit sa restriction en  $t = 1$ . En vertu de la définition 2.1.10, nous avons un développement asymptotique  $a \sim \sum_j a_j$ .

7. Il est intéressant de souligner que le compact  $K$  du théorème 2.2.4 est indépendant de la fonction  $a$ . Ici, on choisit le même  $K$  pour tous les  $(a_j)$ .

8. Merci à Jean-Marie Lescure pour cette remarque.

Nous posons, avec  $|\cdot|$  étant la nqh, la fonction cut-off lisse  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  :

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \geq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Le résultat suivant est largement inspiré des ouvrages suivants : [208, théorème 3.1 p 40], et [239, théorème 6.10 p 36] cette dernière référence contenant des détails additionnels. En effet, nous allons généralisé ces résultats aux dilatations  $\delta_t$ .

On rappelle qu'une suite exhaustive de  $U$  est suite  $(K_i)$  de compact de  $U$ , d'union  $U$ . De plus tout compact de  $U$  est contenu dans un  $K_i$ . De tels  $K_i$  existent. Il suffit de se donner :

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq i, d(x, \mathbb{R}^d \setminus U) \geq \frac{1}{2^i}\}. \quad (2.6.2)$$

**Proposition 2.6.1.** *Il existe une suite  $(\epsilon_j)$  de réels strictement positifs convergeant vers 0 de sorte que la série  $(x, \xi) \mapsto \sigma(x, \xi) := \sum_{j=0}^{+\infty} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi)$  appartienne à l'espace  $S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .*

*Démonstration.* On fixe pour commencer une suite positive stricte  $(\epsilon_j)$  de limite nulle. On commence par prouver que la série est localement finie donc de classe  $C^\infty$ . Soit  $(x_0, \xi_0) \in U \times \mathbb{R}^d$  pour lequel on se donne un voisinage  $V \times W$  précompact. Alors par définition de  $\phi$ , voir (2.6.1), et puisque la suite  $(\epsilon_j)$  tend vers 0, on peut trouver un entier  $N$  de sorte que lorsque  $j > N$  il vienne  $\forall (x, \xi) \in V \times W \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) = 0$ . D'où la série  $\sigma$  est dans  $C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ . Il est vrai que :

$$(x, \xi) \mapsto \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \in S_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d), \quad (2.6.3)$$

en vertu de la proposition 2.2.3. Attirons l'attention du lecteur sur le fait que la précédente fonction est bien lisse en 0 grâce à la fonction cut-off, bien que  $a_j$  ne le soit pas forcément.

On se donne une suite exhaustive  $(K_i)$  de compacts de  $U$ . En connaissance de l'équation (2.6.3) il vient : pour tout  $j$  entier non nul, pour tout couple de multi-indices  $(\alpha, \beta)$ , pour tout  $i$  entier non nul, il existe une constante  $C_{j, K_i, \beta, \alpha} > 0$  telle que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in K_i, \forall \epsilon \in ]0, 1]$  :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \phi(\delta_\epsilon \xi) a_j(x, \xi)| \leq C_{j, K_i, \beta, \alpha} (1 + |\xi|)^{m-j-|\beta|} \quad (2.6.4)$$

$$= C_{j, K_i, \beta, \alpha} (1 + |\xi|)^{-1} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta|}. \quad (2.6.5)$$

On pose alors :

$$\epsilon_j := 2^{-j} \min \left\{ \frac{1}{2C_{j, K_i, \beta, \alpha}} \mid \alpha, \beta, i \text{ tels que } |\beta| + |\alpha| + i \leq j \right\}. \quad (2.6.6)$$

Cette suite tend bien vers 0 en  $+\infty$ . Observons que :

1. Si  $\xi$  est tel que  $1 + |\xi| \leq \frac{1}{2}\epsilon_j^{-1}$  alors, en particulier,  $|\xi| \leq \frac{1}{2}\epsilon_j^{-1}$  et donc :

$$\phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) = 0. \quad (2.6.7)$$

2. Si  $\xi$  est tel que  $1 + |\xi| \geq \frac{1}{2}\epsilon_j^{-1}$  alors  $(1 + |\xi|)^{-1} \leq 2\epsilon_j$ .

Soit  $K$  un compact de  $U$ , alors il existe  $i$  tel que  $K \subset K_i \subset U$ . Pour tous les couples de multi-indices  $(\alpha, \beta)$  tels que  $|\beta| + |\alpha| + i \leq j$  alors on a  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in K$ , grâce à (2.6.4), à (2.6.6) et à la précédente observation :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi)| \leq \frac{1}{2^j} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta|}. \quad (2.6.8)$$

On se donne maintenant un couple de multi-indices  $(\alpha_0, \beta_0)$ . On trouve un  $j_0 \geq 1$  qui convient pour assurer :

$$|\beta_0| + |\alpha_0| + i \leq j_0. \quad (2.6.9)$$

En particulier on a  $m - j_0 + 1 \leq m$ . On réalise le calcul suivant :

$$\sigma(x, \xi) := \underbrace{\sum_{j=0}^{j_0-1} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi)}_{(\blacksquare)} + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi). \quad (2.6.10)$$

On sait que  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\xi \mapsto \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \in S_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d) \subset S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Ceci entraîne :

$$(\blacksquare) \quad (x, \xi) \mapsto \sum_{j=0}^{j_0-1} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.6.11)$$

Pour la somme infinie, on a  $j \geq j_0 \geq |\beta_0| + |\alpha_0| + i$ , donc on peut appliquer (2.6.8) :

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \quad |D_x^{\alpha_0} D_\xi^{\beta_0} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi)| \leq \frac{1}{2^j} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta_0|}. \quad (2.6.12)$$

D'où :

$$\left| D_x^{\alpha_0} D_\xi^{\beta_0} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \right| = \left| \sum_{j=j_0}^{+\infty} D_x^{\alpha_0} D_\xi^{\beta_0} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \right| \quad (2.6.13)$$

$$\stackrel{(2.6.12)}{\leq} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta_0|} \quad (2.6.14)$$

$$= \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (1 + |\xi|)^{m-j_0+1-|\beta_0|} \underbrace{(1 + |\xi|)^{-j+j_0}}_{\leq 1} \quad (2.6.15)$$

$$\stackrel{(2.6.15)}{\leq} \sum_{m-j_0+1 \leq m} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (1 + |\xi|)^{m-|\beta_0|} \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\beta_0|}, \quad (2.6.16)$$

où  $C > 0$  désigne la somme tronquée  $\sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}$ . D'où :

$$\sigma : (x, \xi) \mapsto \sum_{j=j_0}^{+\infty} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.6.17)$$

□

Motivés par ce résultat, nous introduisons les fonctions  $a'_j$  :

$$a'_j(x, \xi) := \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi), \quad (2.6.18)$$

et en appliquant le lemme 2.1.7, on obtient sans peine :

$$a'_j \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d). \quad (2.6.19)$$

On introduit également la partition de l'unité lisse sur  $\mathbb{R}$  suivante :

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq 1 \\ 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.6.20)$$

$$\chi_1 = 1 - \chi_0. \quad (2.6.21)$$

On pose :

$$b_j(x, \xi, t) := \chi_0(t) a'_j(x, \xi) + \chi_1(t) |t|^{m-j} a'_j(x, \delta_{|t|^{-1}} \xi). \quad (2.6.22)$$

Remarquons que  $b_j$  est construit sur le même modèle que  $b_0$ , voir équation (2.4.2). En conséquence, grâce au théorème 2.4.1,  $b_j \in \mathcal{HS}_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Finalement on pose :

$$b(x, \xi, t) := \sum_{j=0}^{+\infty} t^j b_j(x, \xi, t). \quad (2.6.23)$$

Le point clé dans ce qui va suivre est de montrer que  $b \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  : il s'agit exactement du théorème 2.6.3 ci-après. Remarquons que la série  $b$  définie à l'équation (2.6.23) est localement finie donc  $C^\infty$  sur  $U \times \mathbb{R}^{d+1}$ .

Il suffit encore, par la remarque 14, de ne considérer que les  $s \in [1, 2]$ . On calcule pour tout  $s \in [1, 2]$ , pour tout  $(\xi, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ , pour tout  $x \in U$  :

$$\begin{aligned} b(x, \delta_s \xi, st) - s^m b(x, \xi, t) &= \sum_{j=0}^{+\infty} (st)^j b_j(x, \delta_s \xi, st) - s^m \sum_{j=0}^{+\infty} t^j b_j(x, \xi, t) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (st)^j f_{j,s}(x, \xi, t), \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

où nous avons posé :

$$f_{j,s}(x, \xi, t) := b_j(x, \delta_s \xi, st) - s^{m-j} b_j(x, \xi, t). \quad (2.6.25)$$

De l'équation (2.6.25), le lecteur peut prouver que la suite de fonctions  $(f_{j,s})$  est lisse à support compact dans :

$$U \times \overline{B(0, \epsilon_j^{-1})} \times [-1, 1], \quad (2.6.26)$$

où  $s \geq 1$  est fixé. Sans aucun doute, pour montrer cela, il sera profitable au lecteur de se convaincre d'abord que : pour tout  $|t| \leq 1$ , pour tout  $|\xi| \geq \epsilon_j^{-1}$ , pour tout  $x \in U$ ,  $t^{m-j} a'_j(x, \delta_{t^{-1}} \xi) = a'_j(x, \xi)$ .

Malheureusement, comme on peut le voir en regardant l'équation (2.6.26), quand  $j$  devient grand, la suite  $(\epsilon_j^{-1})$  diverge vers  $+\infty$ , signifiant alors que le support des fonctions  $f_{j,s}$  ne cessera de grandir. Mais on peut s'en tirer grâce à l'astuce suivante. Si l'on redéfinit la suite  $(\epsilon_j)$  de sorte que chaque nouveau terme est plus petit ou égal à l'ancien terme de rang correspondant - voir la définition (2.6.6) implicitement faite à la proposition 2.6.1, et donc conservant sa conclusion intacte - alors on obtient la convergence rapide de la série (2.6.24). De fait, un des engrenages clés de la preuve est de redéfinir la suite  $(\epsilon_j)$  de sorte qu'elle soit suffisamment rapidement convergente. Tel est l'objectif des équations (2.6.31) et (2.6.32) à venir.

En vue de simplifier la rédaction dans les calculs finaux dans la preuve du théorème 2.6.3, nous commençons par un lemme dont la preuve est laissée au lecteur. Les hypothèses exigées par ce lemme sont très proches de la définition de  $S_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , l'intérêt du lemme est principalement de se "débarrasser" du paramètre  $t$  en exigeant que la fonction soit à support compact en ce paramètre.

**Lemme 2.6.2.** *Soit  $F \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . On suppose que les conditions suivantes sont acquises :*

1.  $\text{supp}(F) \subset U \times \mathbb{R}^d \times [-1, 1]$ .
2. *Pour tout  $(\beta, \beta', \gamma)$  multi-indices, pour tout compact  $K$  inclus dans  $U$ ,  $\exists C_{\beta, \beta', \gamma, K} > 0$  de sorte que  $\forall x, \xi \in K \times \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}$  ce qui suit tient :*

$$|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta \partial_t^{\beta'} F(x, \xi, t)| \leq C_{\beta, \beta', \gamma, K} (1 + |\xi|)^{m - |\beta + \beta'|},$$

alors  $F \in S_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .

**Théorème 2.6.3.** On a  $b \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ .

*Démonstration.* Pour montrer que  $b \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , on profite des égalités suivantes :

$$S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^{d+1}) \underbrace{=}_{\text{proposition 2.1.9}} \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^{d+1}) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S_G^{m-N}(U \times \mathbb{R}^{d+1}), \quad (2.6.27)$$

et on montre :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall s \in [1, 2], \quad (x, \xi, t) \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} (st)^j f_{j,s}(x, \xi, t) \in S_G^{m-N}(U \times \mathbb{R}^{d+1}). \quad (2.6.28)$$

On se donne  $s \in [1, 2]$ . Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , on écrit :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (st)^j f_{j,s}(x, \xi, t) = \sum_{j=0}^{N-1} (st)^j f_{j,s}(x, \xi, t) + \underbrace{\sum_{j=N}^{+\infty} (st)^j a'_j(x, \delta_s \xi) - s^m \sum_{j=N}^{+\infty} t^j a'_j(x, \xi)}_{(x, \xi, t) \mapsto \sum_{j=N}^{+\infty} (st)^j f_{j,s}(x, \xi, t)}. \quad (2.6.29)$$

On remarque que le premier terme sur la droite de cette égalité est lisse et à support compact. Ainsi, grâce à l'équation (2.6.29), il suffit de montrer que les deux sommes infinies satisfont les conditions du lemme 2.6.2. Nous allons le montrer pour la première des deux sommes, les calculs étant similaires pour l'autre somme. Par définition, on rappelle que les fonctions  $a_j$  sont  $C^\infty(U \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ , homogènes pile d'ordre  $m - j$ . Ainsi, grâce à la proposition 2.2.3, on rappelle encore que  $a'_j(x, \xi) = \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi) \in S_G^{m-j}(U \times \mathbb{R}^d)$ .

On fixe une suite exhaustive de compacts  $(K_i)$  recouvrant  $U$ . Il vient alors, pour tout entier naturel  $j$ , pour tout ensemble compact  $K$  de  $U$ , il existe un entier naturel  $i$  de sorte que  $K \subset K_i$ , pour tout  $\beta, \gamma'$  multi-indices, il existe  $C_{\beta, \gamma', j, K_i} > 0$  (indépendant de  $s \in [1, 2]$ , le paramètre  $s$  étant fixé au début une bonne fois pour toutes) de sorte que  $\forall x, \xi \in K \times \mathbb{R}^d$  :

$$|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^\beta \phi(x, \delta_{\epsilon_j s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi)| \leq C_{\beta, \gamma', j, K_i} (1 + |\xi|)^{m-j-|\beta|}. \quad (2.6.30)$$

On remplace la suite  $(\epsilon_j)$  par une séquence  $(\epsilon'_j)$ , avec  $0 < \epsilon'_j \leq \epsilon_j$ , pour tout entier naturel  $j$ . Donc  $(\epsilon'_j)$  converge toujours vers 0. On demande aussi à ce que la suite  $(\epsilon'_j)$  satisfasse toujours :

$$\epsilon'_j \leq 2^{-2j} \min \left\{ \frac{1}{C_{\beta, \gamma, j, K_i}} \mid \gamma, \beta, i \text{ tels que } |\beta| + |\gamma| + i \leq j \right\}, \quad (2.6.31)$$

$$\epsilon'_j \leq \frac{1}{4}. \quad (2.6.32)$$

Grâce à la définition (2.6.1) de  $\phi$ , il vient que :

- Si  $\xi$  est tel que  $1 + |\xi| \leq \frac{1}{2}(s\epsilon'_j)^{-1}$  alors en particulier  $|\xi| \leq \frac{1}{2}(s\epsilon'_j)^{-1}$  donc  $\phi(\delta_{\epsilon'_j s} \xi) = 0$ .
- Si  $\xi$  est tel que  $1 + |\xi| \geq \frac{1}{2}(s\epsilon'_j)^{-1}$  alors  $(1 + |\xi|)^{-1} \leq 2s\epsilon'_j \underset{s \in [1, 2]}{\leq} 4\epsilon'_j$ .

Le membre droit de l'équation (2.6.30) peut être réécrit selon :

$$|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^\beta \phi(\delta_{\epsilon'_j s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi)| \leq C_{\beta, \gamma', j, K_i} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta|} (1 + |\xi|)^{-1}. \quad (2.6.33)$$

Au regard des équations (2.6.31), (2.6.32) et du précédent rappel, l'équation (2.6.33) peut être réécrite selon :

$$|\partial_x^{\gamma'} \partial_\xi^\beta \phi(\delta_{\epsilon'_j s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi)| \leq 4 \cdot 2^{-2j} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta|}. \quad (2.6.34)$$

Dès lors, soit  $i \in \mathbb{N}$  et  $\beta_0, \gamma_0$  des multi-indices et  $\alpha_0 \in \mathbb{N}$  fixés. A ce moment de la preuve, on choisit  $j_0$  assez grand, dépendant de  $i, N, \alpha_0$  et  $\beta_0, \gamma_0$  de sorte que :

$$j_0 \geq |\beta_0| + |\gamma_0| + i, \quad (2.6.35)$$

$$j_0 \geq N + 1 + \alpha_0. \quad (2.6.36)$$

Du fait que les séries suivantes soient localement finies, il est licite d'invertir l'ordre somme-dérivation et il vient  $\forall (x, \xi, t) \in K \times \mathbb{R}^d \times [-1, 1]$  :

$$\begin{aligned} & \left| \partial_x^{\gamma_0} \partial_t^{\alpha_0} \partial_\xi^{\beta_0} \sum_{j=N}^{+\infty} (st)^j \phi(\delta_{\epsilon'_j, s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi) \right| \\ &= \left| \partial_x^{\gamma_0} \partial_t^{\alpha_0} \partial_\xi^{\beta_0} \sum_{j=N}^{j_0-1} (st)^j \phi(\delta_{\epsilon'_j, s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \partial_x^{\gamma_0} \partial_t^{\alpha_0} \partial_\xi^{\beta_0} (st)^j \phi(\delta_{\epsilon'_j, s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi) \right|. \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

Pour ce qui est des questions de domination, la somme finie peut être écartée. Dans la somme infinie, nous avons  $j \geq j_0 \geq |\beta_0| + |\gamma_0| + i$ , et en particulier on a  $j \geq |\beta_0|$ . Au vu de l'équation (2.6.34) nous avons  $\forall (x, \xi, t) \in K \times \mathbb{R}^d \times [-1, 1]$  :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=j_0}^{+\infty} \partial_x^{\gamma_0} \partial_t^{\alpha_0} \partial_\xi^{\beta_0} (st)^j \phi(\delta_{\epsilon'_j, s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi) \right| \leq \sum_{s \in [1, 2]} \sum_{j=j_0}^{+\infty} 2^j \frac{j!}{(j - \alpha_0)!} \left| \partial_x^{\gamma_0} \partial_\xi^{\beta_0} \phi(\delta_{\epsilon'_j, s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi) \right| \\ & \leq \underbrace{4}_{(2.6.34)} \sum_{j=j_0}^{+\infty} 2^{-j} \frac{j!}{(j - \alpha_0)!} (1 + |\xi|)^{m-j+1-|\beta_0|} \\ & \leq 4 (1 + |\xi|)^{m-N-|\beta_0|-\alpha_0} \sum_{j=j_0}^{+\infty} 2^{-j} \frac{j!}{(j - \alpha_0)!} \underbrace{(1 + |\xi|)^{N-j+1+\alpha_0}}_{\leq 1}, \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

où l'inégalité dans le crochet horizontal est vraie car nous avons à la fois  $j \geq j_0$  et  $j_0 \geq N + 1 + \alpha_0$  en vertu de l'équation (2.6.36). La règle de D'Alembert appliquée à  $\left( u_j := 2^{-j} \frac{j!}{(j - \alpha_0)!} \right)_j$  permet de montrer que la dernière expression dans l'équation (2.6.38) est une série convergente. En conséquence, grâce à l'équation (2.6.38) il vient :

$$\left| \partial_x^{\gamma_0} \partial_t^{\alpha_0} \partial_\xi^{\beta_0} \sum_{j=j_0}^{+\infty} (st)^j \underbrace{\phi(\delta_{\epsilon'_j, s} \xi) a_j(x, \delta_s \xi)}_{:= a'_j(x, \delta_s \xi)} \right| \leq C_{N, \beta_0, \alpha_0, \gamma_0, K} (1 + |\xi|)^{m-N-|\beta_0|-\alpha_0}, \quad (2.6.39)$$

où nous avons posé  $C_{N, \beta_0, \alpha_0, \gamma_0, K} := 4 \sum_{j=j_0}^{+\infty} 2^{-j} \frac{j!}{(j - \alpha_0)!} > 0$ . Cela montre que la première série infinie dans l'équation (2.6.29) satisfait les conditions du lemme 2.6.2. Ainsi la série  $(x, \xi, t) \mapsto \sum_{j=N}^{+\infty} (st)^j a'_j(x, \delta_s \xi) \in S_G^{m-N}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . De façon similaire, on pourra aussi montrer que la série  $(x, \xi, t) \mapsto \sum_{j=N}^{+\infty} t^j a'_j(x, \delta_s \xi) \in S_G^{m-N}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$

Combinant l'équation (2.6.29) et la remarque qui la suit, on en déduit que pour tout  $N$ , la série  $(x, \xi, t) \mapsto \sum_{j=j_0}^{+\infty} (st)^j f_{j,s}(x, \xi, t) \in S_G^{m-N}(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Le résultat s'ensuit par la discussion au tout début de cette preuve.  $\square$

Terminons maintenant la preuve du théorème 2.1.11 en montrant que  $a \in S_{phg, G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est bien la restriction en  $t = 1$  d'une fonction homogène modulo Schwartz  $u$  d'ordre  $m$  vue dans une dimension supérieure.

*Fin de la preuve du théorème 2.1.11, 1)  $\Rightarrow$  2) .* Soit  $a \in S_{phg, G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Le théorème 2.6.3 nous dit que  $b \in \mathcal{H}S_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . De plus on a  $b(x, \xi, 1) = \sum_{j=0}^{+\infty} a'_j(x, \xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \phi(\delta_{\epsilon_j} \xi) a_j(x, \xi)$ . En conséquence,  $a$  et  $b|_{t=1}$  sont deux symboles ( $b|_{t=1}$  est un symbole d'ordre  $m$  à cause de la proposition 2.3.4) ayant même développement asymptotique. Par ailleurs, un résultat classique de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, précisément [239, théorème 6.10 p 37]<sup>9</sup>, affirme que deux symboles ayant même développement asymptotique diffèrent seulement d'une fonction vivant dans l'espace  $S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ , en vertu de la

9. Pour d'autres références consulter : [5, proposition 2.3 p 32], [13, proposition 9.40 p 86 ] .

---

proposition 2.1.9. En conclusion, cela nous conduit à affirmer que  $l := a - b|_{t=1} \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . Introduisons maintenant  $u(x, \xi, t) = b(x, \xi, t) + l(x, \xi)\tilde{\phi}(t)$ , où  $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\tilde{\phi} = 1$  sur  $[-1, 1]$ . On récupère d'une part  $u(x, \xi, 1) = a(x, \xi)$ . D'autre part, puisque  $(x, \xi, t) \mapsto l(x, \xi)\tilde{\phi}(t)$  est une fonction Schwartz, alors il vient que  $u \in \mathcal{HS}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ . La preuve est terminée.  $\square$

## Chapitre 3

# Prérequis à l'approche groupoïdale du calcul pseudo-différentiel de vEY

### 3.1 Le groupoïde $H$ -tangent généralisé

Pour construire le groupoïde  $H$ -tangent filtré (ou  $H$ -généralisé), il faut mimer la construction originelle du groupoïde tangent d'Alain Connes sur une variété (trivialement filtrée) lisse [39] à savoir :

$$\mathbb{T}M = \left( M \times M \times \mathbb{R}^* \right) \cup \left( TM \times \{0\} \right). \quad (3.1.1)$$

Le groupoïde  $H$ -tangent filtré a été indépendamment introduit par Choi et Ponge [34] (2015) et vEY (2016) [224]. Rappelons aussi que dans les années 2000, Ponge<sup>1</sup> [173] et van Erp<sup>2</sup> [220] avaient considéré une première version non trivialement filtrée du groupoïde tangent, dans le cas des variétés d'Heisenberg et de contact (respectivement aux auteurs). En particulier, van Erp a de cette façon pu obtenir un théorème de l'indice sur ces variétés [220]. Au niveau terminologique, dans le cas d'une variété d'Heisenberg (même de contact), van Erp appelle le *groupoïde tangent parabolique* le groupoïde  $H$ -tangent filtré, [222, section 3.1].

Soit  $M$  une variété filtrée de dimension  $d$ , dont la filtration est de longueur  $N$  et de dimension homogène  $d_H$ . Gardons en tête que le groupoïde osculant  $\mathcal{T}_H M$ , voir définition 1.4.10, est une généralisation *non commutative* du fibré tangent  $TM$  et qu'on l'a recollé en 0 de façon  $C^\infty$  au groupoïde des paires  $M \times M$ , ce qu'exprime l'équation (3.1.1). Voici la structure algébrique de ce groupoïde :

**Définition 3.1.1.** Groupoïde  $H$ -tangent filtré, [68, section 5.1], [34, section 9.1]

Soit  $M$  une variété filtrée. On pose l'ensemble :

$$\mathbb{T}_H M = \left( M \times M \times \mathbb{R}^* \right) \cup \left( \mathcal{T}_H M \times \{0\} \right). \quad (3.1.2)$$

On le munit d'une structure de groupoïde algébrique en procédant comme suit. La base de ce groupoïde est  $\mathbb{T}_H M^{(0)} = M \times \mathbb{R}$ . Les applications source et but  $r, s : \mathbb{T}_H M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  sont données par :

$$r(x, y, t) = (x, t), \quad s(x, y, t) = (y, t), \quad x, y \in M, \quad t \neq 0 \quad (3.1.3)$$

$$r(x, v, 0) = (x, 0), \quad s(x, v, 0) = (x, 0), \quad v \in \mathcal{T}_H M_x \quad (3.1.4)$$

Les applications unités  $u : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_H M$  et inverse  $i : \mathbb{T}_H M \rightarrow \mathbb{T}_H M$  sont définies comme suit :

$$u(x, t) = (x, x, t), \quad i(x, y, t) = (y, x, t), \quad x, y \in M, \quad t \neq 0 \quad (3.1.5)$$

$$u(x, 0) = (x, 0, 0), \quad i(x, v, 0) = (x, v^{-1}, 0), \quad v \in \mathcal{T}_H M_x. \quad (3.1.6)$$

---

1. La [173, section 3.2 p 168] de l'ouvrage de Ponge détaille avec grande précision la structure lisse du groupoïde  $H$ -tangent pour une variété d'Heisenberg à l'aide de cartes privilégiées décrite dans la [173, section 2.3 p 159].

2. Dans le cas d'une variété d'Heisenberg, van Erp explique comment intégrer l'algèbre de Lie du groupe  $H$ -tangent *parabolique* (l'adjectif *parabolique* est rajouté dans la terminologie de van Erp) à l'aide des résultats de Benamèur [15] et Nistor [162] pour obtenir que ce dernier est lisse, voir [220, § 5.5 p 72, § 5.6 p 73]. Nous reparlerons de ces deux auteurs dans cette section. C'est le théorème de Darboux qui permet à van Erp [220, § 5.7 p 75] de décrire le groupoïde  $H$ -tangent parabolique pour une variété de contact (ce sont des exemples de variétés d'Heisenberg, voir la définition 4.1.4).



La multiplication est donnée par :

$$(x, y, t)(y, z, t) = (x, z, t), \quad x, y, z \in M, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.1.7)$$

$$(x, v, 0)(x, w, 0) = (x, v.w, 0), \quad v, w \in \mathcal{T}_H M_x. \quad (3.1.8)$$

Les opérations de multiplication et d'inversion en  $t = 0$  sont celles des groupes osculants. Les  $r$ -fibres sont données par :

$$\mathcal{T}_H M^{(x,t)} = \begin{cases} \{(x, y, t), y \in M\}, & x \in M, t \neq 0 \\ \{(x, \xi, 0), \xi \in \mathcal{T}_H M_x\}, & x \in M, t = 0. \end{cases}$$

Nous allons maintenant rappeler comment définir la structure  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}_H M$ . Nous conseillons en plus au lecteur quelques références pour lire sur les groupoïdes tangents usuel et généralisé [34, section 8 "Lie Groupoids and Connes' Tangent Groupoid" ], [68, chapitre 5 définition 5.3, chapitre 4] et [224], [223] et la [165, section "The tangent groupoid of a manifold" p 78], qui en particulier décrit la structure  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}M$  via des suites. Le [165, théorème 2.3.4 p 83] montre que  $\mathbb{T}M$  est un groupoïde de Lie.

Une première possibilité pour définir une structure lisse fait écho à la discussion que nous avons sur l'intégration des algébroïdes de Lie, voir appendice A.6. Yuncken dit dans [240, p 13] :

"The difficulty lies in giving the correct global smooth structure on  $\mathbb{T}_H M$ . As usual, this is most easily achieved by beginning with the Lie algebroid  $\mathfrak{t}_H M$ ."

puis [240, p 14] :

"Having defined a smooth Lie algebroid structure on  $\mathfrak{t}_H M$ , there are many results which permit us to integrate it to a Lie groupoid [50], [45]. In this case, we already have smooth groupoid structures on the two components  $\mathfrak{t}_H M \times \{0\}$  and  $TM \times \mathbb{R}^*$ , so the most easily applicable result from the literature is a theorem of Nistor, [162] (with its correction in [15])."

Le [15, théorème 10] de Nistor-Benameur permet à vEY d'en déduire immédiatement l'existence d'une structure  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}_H M$  de sorte que l'algébroïde associée à  $\mathbb{T}_H M$  soit bien l'algébroïde  $(TM \times \mathbb{R}^*) \cup (\mathfrak{t}_H M \times \{0\})$ . De façon grossière, le précédent théorème permet si  $A$  est - en particulier - une algébroïde avec deux "composantes" - ici  $TM \times \mathbb{R}^*$  et  $\mathfrak{t}_H M \times \{0\}$  - de l'intégrer en un groupoïde de Lie  $G$  formé de la réunion des groupoïdes de Lie intégrant chacune des "composantes" et de sorte que l'algébroïde de Lie associée à ce groupoïde redonne  $A$ . Toutefois, cette construction ne donne pas accès explicitement à la structure de carte. On pourra aussi consulter [220, § 5.4 p 70]. Il existe aussi d'autres théorèmes d'intégration de [45] et [51] nés au début des années 2000.

Une seconde possibilité est offerte par les travaux de Choi et Ponge [34, section 4 "Carnot Coordinates"]. Les auteurs donnent la structure  $C^\infty$  via les "cartes privilégiées" ou encore les " $\epsilon$ -applications de Carnot", voir [34, section 9.2, dont définition 9.3, définition 9.7]. Dans cet article de Choi et Ponge, le lecteur trouvera [34, section 8.1], une description précise de la structure  $C^\infty$  du groupoïde tangent trivialement filtré.

Une troisième possibilité<sup>3</sup> est d'utiliser les cartes exponentielles, c'est à dire, à la manière de Choi et Ponge, de donner directement la structure  $C^\infty$  via les cartes au lieu d'invoquer son existence par un théorème d'intégration. La terminologie "cartes exponentielles" se retrouve par exemple dans les travaux de vEY [224] et Nistor [163, p 128-129] (les auteurs les construisent les cartes avec des connections<sup>4</sup>) et chez [15, théorème 10]. Voici une description de ces cartes, qui sont au cœur de nos travaux.

**Définition 3.1.2.** Repère adapté à la filtration.

Soit  $M$  une variété filtrée de dimension  $d$  et dont la filtration est de pas  $N$ . Un repère local  $\overline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  défini sur un ouvert  $U \subset M$  est dit adapté à la filtration  $(H^i)$  sur  $M$  si pour tout  $x \in U$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  on a que  $H_x^i$  est engendré par  $(X_1(x), \dots, X_{d_i}(x))$ , avec  $d_i = \dim(H^i)$ <sup>5</sup>.

3. Qui m'a été suggérée par Bob pendant ma thèse.

4. Voir [149] pour une définition. Nous n'utiliserons pas ces objets dans le manuscrit.

5. Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse, la dimension du fibré (aussi dit "rang du fibré") est par définition la dimension (commune) de toutes les fibres  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in M$ .

Si  $\overline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  est un repère local sur  $U$  adapté à la filtration, alors la composante  $\mathfrak{t}_H^i M_x$  d'ordre  $i$  dans le gradué associé  $\mathfrak{t}_H M_x$  a pour base la famille :

$$([X_{d_{i-1}+1}(x)], \dots, [X_{d_i}(x)]). \quad (3.1.9)$$

Soit  $\overline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  une collection de champs vectoriels lisses locaux sur  $M$ ,  $Y$  un champ de vecteur lisse quelconque sur  $M$  et  $v \in \mathbb{R}^d$ . On note :

1.  $v.\overline{X} := \sum_{i=1}^d v_i X_i$ .
2. La quantité  $\exp(Y).x$  désigne le flot<sup>6</sup> du champ de vecteur  $Y$  au temps  $t = 1$  et passant au temps  $t = 0$  par le point  $x$ , lorsqu'il est possible de le définir<sup>7</sup>.

On rappelle que  $(\delta_t)$  représente la famille  $t$ -paramétrée d'automorphismes d'algèbres de Lie qui agit sur chaque fibre  $\mathfrak{t}_H M_x$  et a fortiori par exponentiation sur  $\mathcal{T}_H M_x$ , voir la proposition 1.4.13. Explicitement cette famille de dilatations  $(\delta_t)$  provient de la filtration sur  $M$  et ce sont des dilatations à poids entiers. Quitte à identifier  $\mathfrak{t}_H M_x$  à  $\mathbb{R}^d$  à l'aide d'une base construite avec la famille (3.1.9), alors on fait agir les  $\delta_t$  sur  $\mathbb{R}^d$  de sorte que :

$$\delta_t(v_1, \dots, v_d) = (tv_1, \dots, tv_{d_1}, t^2 v_{d_1+1}, \dots, t^2 v_{d_2}, \dots, t^N v_{d_{N-1}+1}, \dots, t^N v_d). \quad (3.1.11)$$

**Lemme 3.1.3.** [223, lemma 27 p 14], [42, proposition 5.13]

Soit  $M$  une variété filtrée lisse de dimension  $d$ ,  $x_0 \in M$ ,  $(U_0, \phi)$  une carte en  $x_0$  et  $\overline{X} = (X_1, \dots, X_d)$  un repère local défini sur  $U_0$  en  $x_0$  et adapté à la filtration - voir définition 3.1.2 -, alors on a :

1. Il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $U_0 \times \{0\}$  avec  $\mathcal{U} \subset U_0 \times \mathbb{R}^d$  de sorte que :

$$\text{Exp}^{\overline{X}} : \mathcal{U} \rightarrow M \times M, (x, v) \mapsto (x, \exp(v.\overline{X}).x), \quad (3.1.12)$$

soit un difféomorphisme sur son image.

2. La dérivée de  $\text{Exp}^{\overline{X}}$  au point  $(x_0, 0)$  est :

$$D_{(x_0, 0)} \text{Exp}^{\overline{X}} : (w, v) \in T_x U_0 \times \mathbb{R}^d \mapsto (w, v.\overline{X}|_x)^8 \quad (3.1.13)$$

3. Posons  $\tilde{\mathcal{U}} := \{(x, v, t) \in U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, (x, \delta_t(v)) \in \mathcal{U}\}$ . Alors l'application :

$$\mathbb{E}\text{xp}^{\overline{X}} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{T}_H M, (x, v, t) \mapsto \begin{cases} \mathbb{E}\text{xp}^{\overline{X}}(x, v, t) = (\text{Exp}^{\overline{X}}(x, \delta_t(-v)), t), & t \neq 0 \\ \mathbb{E}\text{xp}^{\overline{X}}(x, v, 0) = (x, [v.\overline{X}]|_x), & t = 0, \end{cases} \quad (3.1.14)$$

définit une carte inverse sur le groupoïde  $H$ -tangent  $\mathbb{T}_H M$ , dite carte exponentielle, et où  $[ ]|_x$  signifie qu'on prend les classes d'équivalence dans l'algèbre osculante en  $x$ .

4. Soit  $\mathbb{U} = \mathbb{E}\text{xp}^{\overline{X}}(\tilde{\mathcal{U}}) \in \mathbb{T}M$  le domaine de cette carte. Alors :

$$\mathbb{U} = \left( \mathcal{T}_H M \times \{0\} \right) \cup \left( \text{Exp}^{\overline{X}}(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^* \right), \quad (3.1.15)$$

est un voisinage ouvert de  $\left( \mathcal{T}_H M \times \{0\} \right) \cup \left( \text{diag}(U_0) \times \mathbb{R}^* \right)$  dans  $\mathbb{T}_H M$ , où  $\text{diag}(U_0) = \{(x, x), x \in U_0\}$ .

6. On rappelle que par définition (voir [137, chapitre 17 p 435]), le flot d'un champ de vecteur  $Y$  passant au temps  $t = 0$  en un point  $x \in M$  est la donnée d'une courbe lisse - dite courbe intégrale -  $\gamma : J \rightarrow M$ , -  $J$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0 - qui vérifie :

$$\begin{cases} Y_{\gamma(t)} = \gamma'(t), & \forall t \in J, \\ \gamma(0) = x. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

7. On renvoie à la lecture des [137, exemples 9.9 et 9.10 p 211], lesquels montrent que toute courbe intégrale d'un champ de vecteur n'est pas obligatoirement définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  (mais au voisinage de 0 de sûr).

8.  $T_x U_0$  s'identifie en fait à  $T_x M$  selon [137, proposition 3.7 p 67] : Si  $i : U_0 \rightarrow M$  représente l'injection canonique alors pour tout  $x \in U_0$  on a  $i_* : T_x U_0 \rightarrow T_x M$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Nous allons montrer les deux premiers points et laissons les autres au lecteur. En vertu du théorème d'inversion locale [137, théorème 7.10 p 166], pour montrer que l'application (3.1.12) est un difféomorphisme, il suffit de montrer (3.1.13) et de constater que cette application dérivée est bijective. Il s'agit donc de calculer la dérivée de l'application (3.1.12). Pour ce faire, donnons nous une courbe :

$$\gamma : t \mapsto (x_0, tv) \in U_0 \times \mathbb{R}^d, \quad (3.1.16)$$

et calculons :

$$\partial_t|_{t=0} \text{Exp}^{\bar{X}} \circ \gamma(t) = \partial_t|_{t=0} (x_0, \underbrace{\text{exp}(tv.\bar{X}).x_0}_{\tilde{\gamma}(1)=\gamma(t), \text{ voir notation ci-après}}) \quad (3.1.17)$$

$$= \partial_t|_{t=0} (x_0, \gamma(t)) \quad (3.1.18)$$

$$= (0, v.\bar{X}|_{x_0}). \quad (3.1.19)$$

Nous avons, dans ces précédentes équations, utilisé que si une courbe  $\gamma$  souscrit au problème :

$$\begin{cases} (v.\bar{X})_{\gamma(s)} &= \gamma'(s) \\ \gamma(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.1.20)$$

alors la courbe translatée  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(ts)$  souscrit au problème :

$$\begin{cases} (tv.\bar{X})_{\tilde{\gamma}(s)} &= \tilde{\gamma}'(s) \\ \tilde{\gamma}(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.1.21)$$

□

**Remarque 3.1.4.** *Il n'y a sauf exception rare, pas de formule explicite définie sur tout  $M$  pour les cartes exponentielles. Cependant, dans la section 4.3.2, nous décrivons précisément la structure du groupoïde tangent pour une variété d'Heisenberg modèle  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ ,  $2n + m = d$ . Dans ce cas précis là on peut explicitement calculer les cartes. Nous invitons également le lecteur à lire l'appendice C où nous étudions la structure analytique du groupoïde tangent de  $M = \mathbb{R}^n$  et  $M = G$  un groupe de Lie gradué.*

**Théorème 3.1.5.** [224, section 8 théorème 16, pour  $\mathbb{T}_H M$ ], [165, théorème 2.3.4 p 83, pour  $\mathbb{T}M$ ]

*Soit  $M$  une variété filtrée. Muni de la structure algébrique de la définition 3.1.1 et des cartes exponentielles du lemme 3.1.3, le groupoïde  $\mathbb{T}_H M$  est un groupoïde de Lie .*

## 3.2 L'action de Debord-Skandalis

Sur le groupoïde  $H$ -tangent on dispose de l'action suivante, rouage vital dans la définition du calcul de vEY 1.4.16, l'action de Debord-Skandalis. Cette action est définie à partir de la  $\mathbb{R}_+^*$ -action sur les fibres du groupoïde osculant  $\delta_s \curvearrowright \mathcal{T}_H M$ , laquelle, on le rappelle, intègre la  $\mathbb{R}_+^*$ -action  $\delta_s \curvearrowright \mathfrak{t}_H M$  définie à la proposition 1.4.13.

**Définition 3.2.1.** Action de Debord-Skandalis sur  $\mathbb{T}_H M$ , [52], [223, définition 17]

Soit  $M$  une variété filtrée. On définit l'action de Debord-Skandalis de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{T}_H M$ ,  $s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha_s \in \text{Aut}(\mathbb{T}_H M)$  sur :

$$\begin{cases} \alpha_s(y, x, t) = (y, x, s^{-1}t) & (y, x) \in M \times M \\ \alpha_s(x, v, 0) = (x, \delta_s(v), 0) & x \in M, v \in \mathcal{T}_H M_x, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $\delta_s \curvearrowright \mathcal{T}_H M$  correspond précisément aux automorphismes de groupoïdes de Lie agissant sur le groupoïde osculant.

**Remarque 3.2.2.** *Chaque  $\alpha_s$  est un automorphisme de groupoïdes de Lie. De plus, on peut restreindre cette action à  $\mathbb{T}_H U$ , pour tout ouvert  $U \subset M$ .*

On rappelle que les actions  $\delta_s$  et  $\tilde{\delta}_s$  sont définies aux équations (2.1.1) et (2.1.2). On pose alors :

$$\beta_s : M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, (x, v, t) \mapsto (x, \delta_s(v), st) = (x, \tilde{\delta}_s(v, t)). \quad (3.2.2)$$

**Lemme 3.2.3.** [223, équation (4.1) p 9 section 4.1, section 7.3]

On reprend les notations du lemme 3.1.3.

1. Le voisinage ouvert  $\mathbb{U}$  est invariant pour l'action de Debord-Skandalis  $\alpha_s$ , et le transfert de cette action par les cartes exponentielles  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}}$  :

$$\tilde{\alpha}_s := (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1} \circ \alpha_s \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}} : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}, \quad (3.2.3)$$

est donné par :

$$\tilde{\alpha}_s(x, v, t) = (x, \delta_s(v), s^{-1}t). \quad (3.2.4)$$

2. La transformée de Fourier en la seconde variable  $\mathcal{F}_2$  entrelace les actions  $\beta_s$  et  $\tilde{\alpha}_s$  :

$$\mathcal{F}_2 \circ \tilde{\alpha}_{s*} \circ \mathcal{F}_2^{-1} = \beta_s^*. \quad (3.2.5)$$

*Démonstration.* 1. On laisse au lecteur le soin de montrer que  $\alpha_s(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ . On établit ensuite la relation (3.2.4). Constatons que l'équation (3.2.3) est bien définie car  $\tilde{\mathbb{U}}$  est stable par  $\alpha_s$ . Pour  $(x, v, t) \in \tilde{\mathbb{U}} \subset M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , pour  $t \neq 0$  il vient :

$$(\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1} \circ \alpha_s \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, t) = (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1} \circ \alpha_s(x, \exp(\delta_t(-v) \cdot \bar{X}).x, t) \quad (3.2.6)$$

$$= (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1}(x, \exp(\delta_t(-v) \cdot \bar{X}).x, s^{-1}t) \quad (3.2.7)$$

$$= (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1}(x, \exp(\delta_{s^{-1}t}(-\delta_s(v)) \cdot \bar{X}).x, s^{-1}t) \quad (3.2.8)$$

$$= (x, \delta_s(v), s^{-1}t). \quad (3.2.9)$$

Pour  $t = 0$ , on a :

$$(\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1} \circ \alpha_s \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, 0) = (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1} \circ \alpha_s(x, [v \cdot X]|_x, 0) \quad (3.2.10)$$

$$= (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1}(x, \delta_s([v \cdot X]|_x), 0) \quad (3.2.11)$$

$$= (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1}(x, [\delta_s(v) \cdot X]|_x, 0) \quad (3.2.12)$$

$$= (x, \delta_s(v), 0). \quad (3.2.13)$$

D'où la conclusion.

2. On établit maintenant la relation (3.2.5). Soit  $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ . Dans ce qui suit,  $dv$  représente la mesure de Lebesgue dans chaque fibre du fibré trivial  $M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ . Notons  $d_H$  la dimension homogène de  $M$ . D'une part :

$$\mathcal{F}_2 \circ \tilde{\alpha}_{s*}(f dv) = \mathcal{F}_2 \left( (\tilde{\alpha}_s^{-1})^* \underbrace{f \frac{dv}{s^{d_H}}}_{=\tilde{\alpha}_{s*}(dv)} \right) \quad (3.2.14)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x, \delta_{s^{-1}}(v), st) e^{-i\langle v, \xi \rangle} \frac{dv}{s^{d_H}} \quad (3.2.15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x, \tilde{\delta}_{s^{-1}}(v, t)) e^{-i\langle v, \xi \rangle} \frac{dv}{s^{d_H}}. \quad (3.2.16)$$

D'autre part :

$$\beta_s^* \mathcal{F}_2(f dv) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x, w, st) e^{-i\langle w, \delta_s(\xi) \rangle} dw \quad (3.2.17)$$

$$\underbrace{=}_{v=\delta_s^{-1}(w)} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x, \tilde{\delta}_{s^{-1}}(v, t)) e^{-i\langle v, \xi \rangle} \frac{dv}{s^{d_H}}. \quad (3.2.18)$$

La formule souhaitée est établie pour les 1-densités, voir le théorème 3.4.14 qui affirme que les 1-densités sont en bijection avec les familles lisses de mesures lisses fibrées. Or, d'après le théorème 3.4.16 ces dernières sont denses dans les distributions  $r$ -fibrées  $\mathcal{E}'_r(M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  donc on a la conclusion.  $\square$

**Remarque 20.** Le lemme 7.4.4 qu'on énoncera bien plus tard permet de transporter une distribution  $r$ -fibrée essentiellement homogène pour l'action de Debord-Skandalis  $\mathbb{k}$  dont le support est contenu dans l'ouvert  $\mathbb{U}$  du lemme 3.1.3 via la carte exponentielle, en une distribution  $r$ -fibrée essentiellement homogène pour l'action  $\tilde{\alpha}_s$ .

### 3.3 Distributions $r$ -fibrées sur un groupoïde

#### 3.3.1 Retour sur le théorème des noyaux de Schwartz des années 50

Commençons par deux constatations.

##### 1. En dimension finie :

On se donne  $(k_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  et on regarde l'opérateur :

$$Op(k) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto \left( \sum_{j=1}^m k_{1j}v_j, \dots, \sum_{j=1}^m k_{nj}v_j \right). \quad (3.3.1)$$

Pour deux vecteurs  $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$ , on calcule :

$$\langle Op(k)v, u \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m k_{ij}v_j \right) u_i \quad (3.3.2)$$

$$= \sum_{i=1, j=1}^{n,m} k_{ij} \underbrace{u_i v_j}_{:=u_i \otimes v_j} \quad (3.3.3)$$

$$= \langle k, u \otimes v \rangle. \quad (3.3.4)$$

Dans la dernière équation on regarde la matrice  $k$  comme un élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ .

##### 2. En dimension infinie :

On se donne  $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  et on regarde l'opérateur :

$$Op(k)\psi(x) := \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y)\psi(y)dy, \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (3.3.5)$$

Au vu de la régularité du noyau on obtient que :

$$Op(k) : C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (3.3.6)$$

Pour  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on calcule :

$$\langle Op(k)\psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y)\psi(y)dy\phi(x)dx \quad (3.3.7)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} k(x, y) \underbrace{\phi(x)\psi(y)}_{:=\phi \otimes \psi(x, y)} dx dy \quad (3.3.8)$$

$$= \langle k, \phi \otimes \psi \rangle. \quad (3.3.9)$$

Dans la dernière équation on regarde la fonction  $k$  comme un élément de  $\mathcal{L}(C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \mathbb{R}) \cong \mathcal{L}(C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m}), \mathbb{R}) = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ <sup>9</sup>. De plus on voudrait dire que :

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)) \cong \mathcal{L}_c(C_c^\infty(\mathbb{R}^m), C^\infty(\mathbb{R}^n)), \quad (3.3.10)$$

c'est à dire que l'intégrale de l'équation (3.3.5) est interprétée comme une famille lisse sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs distributionnelles :

$$x \mapsto \underbrace{\left( \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y)\psi(y)dy \right)}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)}. \quad (3.3.11)$$

La bonne façon de regarder  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  est comme un fibré de base  $\mathbb{R}^n$  et dont les fibres sont toutes  $\mathbb{R}^m$ , avec la projection sur la première variable :

9. Nous passons sous silence les technicités liées au produit tensoriel, on pourra se référer à [216] et à la remarque 21.

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.3.12)$$

Constatons aussi que l'opérateur  $Op(k)$ , confondu à son noyau distributionnel  $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ , est  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -linéaire au sens où l'accouplement suivant est vérifié :

$$\langle Op(k), (\pi^*a)f \rangle = a \langle Op(k), f \rangle, \quad a \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \quad (3.3.13)$$

où  $\pi^*a$  est le tiré en arrière de  $a$  par  $\pi$ .

**Bilan :** Étant donnée la distribution  $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ , on peut la voir comme une famille lisse  $x \mapsto k(x, \cdot)$  à valeurs dans les distributions sur les fibres de  $\pi$  à savoir  $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^m$ , qu'on note  $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m))$ .

**Attention :** Toute distribution  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  ne se restreint pas en une famille lisse de distributions sur les fibres de la projection  $\pi$ , comme c'est le cas pour la distribution  $\delta_{(0,0)}$  suivante<sup>10</sup>.

**Lemme 3.3.1.** *La distribution  $\delta_0 \otimes \delta_0 = \delta_{(0,0)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  mais  $\delta_{(0,0)} \notin C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ .*

Pour qu'une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  puisse se restreindre en une famille lisse de distributions sur les fibres de  $\pi$  comme ci-dessus, il faut des conditions supplémentaires, comme le fait que cette distribution soit lisse en l'une des variables, ce qui est bien le cas pour  $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  mais pas de  $\delta_{(0,0)}$ . Toutefois la distribution  $k = \delta_{(0,0)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  peut être vue comme une application continue :

$$P : \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \underbrace{\left( \psi \mapsto \langle \delta_{(0,0)}(x, y), \phi(x) \otimes \psi(y) \rangle \right)}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})}. \quad (3.3.14)$$

Cela est un résultat très profond :

**Théorème 3.3.2.** *Théorème des noyaux de Schwartz, 1953, [192], [208, p 39], [217, p 10], [85, théorème 6.1.1 p 70]*

Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $Y$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Alors un opérateur linéaire :

$$P : C_c^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X), \quad (3.3.15)$$

est continu si et seulement si il est engendré par un noyau  $k \in \mathcal{D}'(X \times Y)$  tel que  $\forall \phi \in C_c^\infty(X), \forall \psi \in C_c^\infty(Y) :$

$$P = Op(k) \quad (3.3.16)$$

$$\langle Op(k)\psi, \phi \rangle = \langle k, \phi \otimes \psi \rangle, \quad (3.3.17)$$

où  $\phi \otimes \psi(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ .

Le théorème des noyaux de Schwartz se réexprime dans le formalisme des produits tensoriels de Grothendieck en disant, voir [216, théorème 51.7 p 531] :

$$\mathcal{D}'(X \times Y) \cong \mathcal{D}'(X) \otimes \mathcal{D}'(Y) \cong \mathcal{L}_c(C_c^\infty(Y), \mathcal{D}'(X)). \quad (3.3.18)$$

**Remarque 21. Attention :** La notion de produit tensoriel de tels espaces est loin d'être simple, nous négligeons les technicités à savoir par exemple qu'il existe différents types de symbole  $\otimes$ , évoquant différentes tensorisations (projective, injective). Une très bonne lecture sur le sujet, outre le livre de Trèves [216], est une référence plus moderne à savoir le livre de Ryan [190]. Rappelons que Schwartz et Dieudonné sont les maîtres de thèse de Grothendieck et que ce dernier s'inspire de leurs travaux sur les limites inductives d'espaces de Fréchet<sup>11</sup> pour définir les espaces nucléaires, voir son article [99] de 1955, et construire le produit tensoriel sur ces espaces. Il s'avère que la plupart des espaces d'analyse fonctionnelle que nous manipulons sont des

10. Merci Dominique pour la remarque!

11. L'exemple usuel est l'espace vectoriel topologique localement convexe  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui est muni de la topologie dite "topologie limite inductive". On se donne une suite exhaustive de compacts  $(K_i)$  qui recouvre  $\mathbb{R}^n$ . L'espace  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est alors regardé comme une union croissante d'espaces de Fréchet  $(C_c^\infty(K_i) = C^\infty(K_i))_i$ . On pourra consulter à ce sujet le document de Gallagher [86].

espaces nucléaires, en fait mention le [216, corollaire du théorème 51.5 p 530]. Pour  $S(\mathbb{R}^n), C_c^\infty(X), C^\infty(X)$  ( $X \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert) et leurs duaux, les [216, théorème 51.6 et corollaire 51.6 p 530-351] donnent des isomorphismes dans le style de (3.3.18). Le théorème des noyaux de Schwartz précédent est très général dans le sens où il considère les applications d'un espace très "contraignant",  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à valeurs dans un espace très "gros",  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Or on a vu que si  $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ , l'application linéaire  $Op(k)$  associée a en vérité image dans un espace beaucoup plus sympathique que  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  à savoir  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Ainsi, et c'est précisément le but de [216, p 532-534], selon la régularité du noyau, on peut espérer que  $Op(k)$  ait image dans un espace plus régulier que  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . En particulier :

**Proposition 3.3.3.** *Noyaux réguliers, semi-réguliers en  $x, y$*

Soit  $X, Y$  deux ouverts respectivement de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  et  $k(x, y) \in \mathcal{D}'(X \times Y)$  un noyau.

1. Si  $k$  est semi-régulier en  $x$ , i.e.  $k \in C^\infty(X) \otimes \mathcal{D}'(Y) \cong C^\infty(X, \mathcal{D}'(Y))$ , si et seulement si  $Op(k) : C_c^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$  est une application continue.
2. Si  $k$  est semi-régulier en  $y$ , i.e.  $k \in \mathcal{D}'(X) \otimes C^\infty(Y) \cong C^\infty(Y, \mathcal{D}'(X))$ , si et seulement si  $Op(k) : C_c^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$  est une application continue.
3. Si  $k$  est un régulier en  $x, y$ , i.e.  $k \in C^\infty(X) \otimes C^\infty(Y) \cong C^\infty(X \times Y)$ , si et seulement si  $Op(k) : \mathcal{E}'(Y) \rightarrow C^\infty(X)$  est une application continue.
4. Plus généralement, si  $E$  est un espace de Fréchet alors  $C^\infty(X, E) \cong C^\infty(X) \otimes E$  et  $S(\mathbb{R}^n, E) \cong S(\mathbb{R}^n) \otimes E$ .

**Remarque 3.3.4.** *Précisément, l'exemple "En dimension infinie" que nous avons donné ci-dessus en début de section est un exemple de noyau régulier en  $x$  et  $y$ .*

### 3.3.2 Introduction des distributions $\pi$ -fibrées par un exemple

Dans la section suivante, nous allons aborder la notion de distribution  $\pi$ -fibrée. Cette notion s'inspire des remarques de la section précédente sur les opérateurs  $Op(k)$ , où  $k \in C^\infty(X, \mathcal{D}'(Y))$  est un noyau, et les plonge dans le contexte des groupoïdes et des opérateurs (pseudo)-différentiels qui sont des opérateurs à noyaux de Schwartz. Le langage des groupoïdes fait l'objet des sections A.3, A.4 de l'appendice.

**Exemple 27.** *On se donne l'opérateur d'impulsion  $P = \partial_x$ . Il a noyau de Schwartz  $k(x, y) = -\delta'_x(y)$ . En effet l'action de  $P$  sur une fonction lisse  $\phi$  est donnée par :*

$$P\phi(x) = Op(k)\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} k(x, y)\phi(y)dy, \tag{3.3.19}$$

où l'intégrale est à comprendre au sens distributionnel. Comme auparavant, on peut donc voir  $k$  comme l'application :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto k(x, \cdot) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}). \tag{3.3.20}$$

Avec la proposition 3.3.3, on sait que cela veut dire que  $k$  est semi-régulier sur la variable  $x$  à valeurs dans les distributions à support compact sur les fibres de la submersion lisse (projection pour être plus précis encore) :

$$r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x. \tag{3.3.21}$$

La notation  $r$  n'est pas anodine et rappelle l'application but dans un groupoïde. Essayons de voir comment les groupoïdes apparaissent. On prend le groupoïde des paires  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Alors on a  $G^{(0)} = \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in G^{(0)}$  on a  $G^x = \{x\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ,  $G_x = \mathbb{R} \times \{x\} \cong \mathbb{R}$ . On peut réécrire l'équation (3.3.20) :

$$x \in G^{(0)} \mapsto k(x, \cdot) \in \mathcal{E}'(G^x) \tag{3.3.22}$$

Une question naturelle, et que nous avons volontairement omise jusqu'ici est alors :

*Peut-on donner un sens au fait que l'application  $x \mapsto k(x, \cdot)$  est lisse ? Comment définir l'espace  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{E}'(\mathbb{R}))$  ?*

La situation est considérablement simplifiée par le fait que les fibres sont toutes  $\mathbb{R}$  et ne dépendent plus du point  $x$  de la base du groupoïde des paires de  $\mathbb{R}$ . De surcroît,  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  est le dual d'un espace de Fréchet et est donc muni de la topologie faible\*. On utilise alors le lemme suivant qui caractérise les applications  $C^\infty$  à valeurs dans un Fréchet :

**Lemme 3.3.5.** *Applications  $C^\infty$  à valeurs dans un espace de Fréchet*

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $E$  un espace de Fréchet. Alors une application  $f : U \rightarrow E^*$  est lisse si et seulement si pour tout  $\phi \in E$ , l'application  $x \in U \mapsto \langle f(x), \phi \rangle$  est lisse.

On reprend l'équation (3.3.22) et on se donne  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ . L'application :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \langle k(x, \cdot), \phi \rangle = P\phi(x), \quad (3.3.23)$$

est bien entendu lisse. On dira alors que  $k$  est une distribution  $r$ -fibrée sur le groupoïde  $G$  des paires de  $\mathbb{R}$  et au vu de (3.3.22), on pourra écrire que :

$$k \in C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{E}'(G)), \quad (3.3.24)$$

où  $\mathcal{E}'(G)$  signifie que pour  $x \in G^{(0)}$ ,  $k(x)$  est une distribution à support compact sur la fibre  $G^x = r^{-1}(x)$ .

Bien qu'il serait naturel de définir les distributions  $r$ -fibrées comme (3.3.24), nous ne procéderons pas comme cela. Un résultat de LMV [138] permet de montrer l'équivalence entre les deux définitions.

### 3.3.3 Formalisme des distributions $\pi$ -fibrées et bijection de LMV

Nous allons maintenant définir une nouvelle famille d'objets, les distributions  $\pi$ -fibrées à support  $\pi$ -propre, pour  $\pi$  une submersion lisse, comme le font LMV dans [138]. Pour un groupoïde  $G$ , nous prendrons  $\pi = r, s$ , respectivement les applications but et source. Philosophiquement, et pour faire écho à ce qui a été dit précédemment, ce sont des applications lisses de la base d'un groupoïde  $G$  à valeurs dans les distributions à support compact sur les  $\pi$ -fibres de ce groupoïde. Une première difficulté que le lecteur pourra entrevoir réside dans le fait que les fibres du groupoïde dépendent d'un élément  $x$  choisi dans sa base et qu'il n'est plus raisonnable de les identifier à un même espace comme on l'a fait dans l'exemple 27. Il faudra donc prendre soin de définir le caractère "lisse" de ces applications. Cette vision fait partie intégrante des travaux de 2014 de LMV, [138] où les auteurs vont généraliser le théorème des noyaux de Schwartz dans le cadre des submersions. Nous n'aborderons pas ces aspects techniques dans ce manuscrit. Le langage des groupoïdes fait l'objet des sections A.3, A.4 de l'appendice.

**Important :** Nous rappelons dans ce qui suit que les groupoïdes considérés sont Hausdorff et à base dénombrable et qu'il en est de même pour leur espace des unités.<sup>12</sup>

Tout d'abord un petit rappel de la topologie sur les fonctions lisses sur une variété :

**Remarque 3.3.6.** *On rappelle que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , avec  $(K_j)$  une suite exhaustive de compacts :*

$$\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j. \quad (3.3.25)$$

On définit sur  $C^k(\Omega)$  une structure d'espace de Fréchet en posant les semi-normes séparantes dénombrables :

$$p_{K_j, k}(u) = \sup_{x \in K_j, |\alpha| \leq k} |\partial_x^\alpha u(x)|, \quad u \in C^k(\Omega), \quad (3.3.26)$$

qui donnent lieu à une métrique complète :

$$d(f, g) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_{K_j, k}(f - g)}{1 + p_{K_j, k}(f - g)}. \quad (3.3.27)$$

12. Cette hypothèse sera vérifiée par les groupoïdes que nous manipulerons. Grâce à cette hypothèse, un groupoïde lisse  $G$  possède un recouvrement dénombrable par des ouverts précompacts de  $G$  et il en découle qu'on peut attribuer une partition lisse de l'unité à ce recouvrement.



On définit sur  $C^\infty(\Omega)$  une structure d'espace de Fréchet en posant les semi-normes séparantes dénombrables :

$$p_{K_j,k}(u) = \sup_{x \in K_j, |\alpha| \leq k} |\partial_x^\alpha u(x)|, \quad u \in C^\infty(\Omega), \quad (3.3.28)$$

qui donnent lieu à une métrique complète :

$$d(f, g) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{2^l} \frac{q_l(f - g)}{1 + q_l(f - g)}, \quad (3.3.29)$$

où  $q_l(h) = \max\{p_{K_j,k}(h), \quad |j| + |k| \leq l\}$ .

Maintenant, si  $M$  est une variété lisse de dimension  $d$ , on choisit un atlas formé par des ouverts relativement compacts  $(U_i, \phi_i)_i$  (voir par exemple [137, lemme 1.6 p 8]) et on se donne  $(\Psi_i)_i$  une partition de l'unité lisse subordonnée à ce recouvrement (voir par exemple [137, théorème 2.25 p 54]) c'est à dire :

1.  $0 \leq \Psi_i \leq 1$ .
2.  $\text{supp}(\Psi_i) \subset U_i$ .
3.  $\text{supp}(\Psi_i)$  est localement fini.
4.  $\sum_i \Psi_i(x) = 1$  pour tout  $x$  dans  $M$ .

Soit  $K \subset M$  un compact et  $k \in \mathbb{N}$ . Pour  $f \in C^k(M)$  on définit :

$$p_{K,k}(f) := \sum_i p_{\overline{\phi_i(K \cap U_i)}, k} \left( (\Psi_i f) \circ \phi_i^{-1} \right), \quad (\Psi_i f) \circ \phi_i^{-1} \in C^k(\phi_i(\overline{U_i})), \quad (3.3.30)$$

où  $p_{\overline{\phi_i(K \cap U_i)}, k}$  est défini (3.3.26),  $\phi_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une carte en  $U_i$ . Pour  $(K_j)$  une suite exhaustive de compacts de  $M$  les semi-normes  $p_{K_j,k}$  définissent une topologie de Fréchet sur  $C^k(M)$ .

Les semi-normes (3.3.30) avec  $k$  quelconque définissent sur  $C^\infty(M)$  une topologie d'espace de Fréchet.

On peut montrer que pour différentes partitions de l'unité ou recouvrement, les topologies définies par ces nouvelles semi-normes ne diffèrent pas.

La topologie que nous mettons sur  $C_c^\infty(M)$  est la topologie limite inductive par rapport à un recouvrement de  $M$  par des compacts  $(K_i)$ ,  $C_c^\infty(M)$  devient un espace  $LF$ <sup>13</sup>. Cette précédente topologie ne joue aucun rôle dans ce manuscrit.

### Définition 3.3.7. Partie $\pi$ -propre

Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion entre deux variétés lisses. Une partie  $X \subset M$  est dite  $\pi$ -propre lorsque pour tout compact  $K \subset B_M$ , l'ensemble  $X \cap \pi^{-1}(K)$  est compact.

### Définition 3.3.8. Support d'une application $C^\infty(B_M)$ -linéaire continue

Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion entre deux variétés lisses et  $u : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(B_M)$  une application  $C^\infty(B_M)$ -linéaire (voir (3.3.33)) continue (voir (3.3.32)). On définit le support de  $u$  comme étant le sous ensemble fermé de  $M$  vérifiant la propriété :

$$\gamma \notin \text{supp}(u) \Leftrightarrow \exists U \text{ voisinage inclus dans } M \text{ de } \gamma, \quad u(f) = 0, \quad f \in C_c^\infty(U). \quad (3.3.31)$$

Le support de  $u$  est dit  $\pi$ -propre s'il est une partie  $\pi$ -propre de  $M$  au sens de la définition 3.3.7.

### Définition 3.3.9. Distribution $\pi$ -fibrées, [138, définition 2.3 p 761] , [223, définition 6]

Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion entre deux variétés lisses. On dit que  $u : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(B_M)$  est une distribution  $\pi$ -fibrée à support  $\pi$ -propre lorsque :

13. Pour reprendre la philosophie de Dieudonné et Schwartz [55] en 1949 : "les espaces  $LF$  peuvent être considérés comme des "limites inductives" de suites d'espaces  $F$ ", les espaces  $F$  représentant les espaces de Fréchet.

1.  $u$  est une application continue au sens des topologies Fréchet des deux espaces respectifs. Plus précisément cela veut dire que pour tout compact  $K_1 \subset B_M$ , pour tout entier  $N_1$ , il existe un compact  $K_2 \subset M$ , un entier  $N_2$  et  $C > 0$  de sorte que :

$$p_{K_1, N_1}(u(f)) \leq Cp_{K_2, N_2}(f), \quad f \in C^\infty(M). \quad (3.3.32)$$

2.  $u$  est  $C^\infty(B_M)$ -linéaire ce qui veut dire que  $\forall f \in C^\infty(M), \forall a \in C^\infty(B_M)$  :

$$\langle u, (\pi^*a)f \rangle = a \langle u, f \rangle, \quad (3.3.33)$$

où  $\pi^*a := a \circ \pi$  est le tiré en arrière de  $a$  par  $\pi$ .

On note  $\mathcal{E}'_\pi(M)$  l'ensemble de ces éléments.

**Remarque 3.3.10.** L'équation (3.3.33) fait sens : le tiré en arrière permet de ramener  $a$  à une fonction sur  $M$  de sorte que  $(\pi^*a)f \in C^\infty(M)$ , ce qui est nécessaire pour l'accoupler avec  $u$ . Enfin à droite  $\langle u, f \rangle$  est une fonction de  $B_M$  et  $a$  aussi.

On demande au lecteur de se remémorer la définition 3.3.7 d'une partie  $\pi$ -propre.

**Remarque 3.3.11.** 1. De la même façon que les distributions à support compact sur  $\mathbb{R}^d$  sont définies comme les formes linéaires continues sur  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  sans mention du support, on a défini ci-dessus les distributions  $\pi$ -fibrées à support  $\pi$ -propre sans mention du support. Nous verrons que l'inégalité (3.3.32) entraîne automatiquement une condition sur le support à savoir qu'il est une partie  $\pi$ -propre de  $M$ . Cela justifie le rajout du qualificatif  $\pi$ -propre dans la définition 3.3.9.

2. Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion entre deux variétés lisses. On note  $C^\infty_\pi(M)$  les fonctions lisses dont le support est  $\pi$ -propre. Si on remplace dans la définition 3.3.9 le domaine d'une distribution  $\pi$ -fibrée par  $C^\infty_\pi(M)$  et on modifie (3.3.32) par la bonne topologie, on obtient les distributions  $\pi$ -fibrées de LMV [138] sans condition de support. Elles sont notées  $\mathcal{D}'_\pi(M)$ .

**Exemple 28.** Soit la submersion  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x, \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et nous définissons :

$$u : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto \left( u(f) : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi(y) f(x, y) dy \right). \quad (3.3.34)$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une distribution  $\pi$ -fibrée. La  $C^\infty(\mathbb{R})$ -linéarité est laissée au lecteur. Montrons la continuité en conservant les notations de la définition 3.3.9.

Soit  $K_1 \subset \mathbb{R}$  un compact et  $N_1$  un entier. On pose  $K_2 = K_1 \times \text{supp}(\chi)$ , qui est un compact comme produit de compacts. Il vient alors pour  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  :

$$p_{K_1, N_1}(u(f)) = \sup_{x \in K_1} \max_{|\alpha| \leq N_1} |\partial^\alpha u(f)(x)| \quad (3.3.35)$$

$$\leq \max_{|\alpha| \leq N_1} \sup_{x \in K_1} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi(y) \partial_x^\alpha f(x, y) dy \right| \quad (3.3.36)$$

$$\leq \max_{|\alpha| \leq N_1} \int_{\text{supp}(\chi)} |\chi(y)| dy \|\partial_x^\alpha f\|_{\infty, K_2} \quad (3.3.37)$$

$$\leq C \max_{|\alpha| \leq N_1} \|\partial_x^\alpha f\|_{\infty, K_2} \quad (3.3.38)$$

$$= Cp_{K_2, N_2}(f), \quad (3.3.39)$$

où  $C = \int_{\text{supp}(\chi)} |\chi(y)| dy < +\infty$  et  $N_2 = N_1$ . D'où  $u \in \mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^2)$ .

**Exemple 29.** Reprenons la distribution  $\pi$ -fibrée de l'exemple 28. Montrons que son support est  $\mathbb{R} \times \text{supp}(\chi)$ . Tout d'abord si  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \text{supp}(\chi)^c$ , on se donne un voisinage  $U$  petit autour de  $(x, y)$  de sorte que  $\pi_2(U) \cap \text{supp}(\chi) = \emptyset$ , où  $\pi_2$  représente la projection sur la seconde coordonnée de  $\mathbb{R}^2$ . Alors pour tout  $f \in C_c^\infty(U)$  on a  $u(f)(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . De fait avec la définition 3.3.8, on en déduit que  $(x, y) \notin \text{supp}(u)$ . Par contraposée on en déduit que  $\text{supp}(u) \subset \mathbb{R} \times \text{supp}(\chi)$ . Montrons maintenant que  $\text{supp}(u)^c \subset \mathbb{R} \times \text{supp}(\chi)^c$ .

Soit donc  $(x_0, y_0) \in \text{supp}(u)^c$ . Toujours par la définition 3.3.8, il existe un voisinage  $U$  de  $(x_0, y_0)$  de sorte que :

$$u(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(y) f(x, y) dy = 0, \quad f \in C_c^\infty(U), \quad x \in \pi(U). \quad (3.3.40)$$

Supposons que  $y_0 \in \text{supp}(\chi)$ . Soit  $V$  un voisinage de  $y_0$ . Par définition du support qui est l'adhérence de  $\{w \in \mathbb{R}, \chi(x) \neq 0\}$  l'intersection de  $V$  avec ce précédent ensemble est non vide. Subséquemment, il existe  $\tilde{y}_0 \in V$  tel que  $\chi(\tilde{y}_0) \neq 0$ . Par continuité de  $\chi$  en ce point, il existe un voisinage  $\tilde{V} \subset V$  de  $\tilde{y}_0$  de sorte que  $\chi|_{\tilde{V}} \neq 0$ . On fixe un  $x_0 \in \pi(U)$  et on se donne un compact  $K \subset \tilde{V}$ <sup>14</sup>. Avec le lemme d'Urysohn différentiel - voir [81, théorème (0.17)] -, il existe  $g \in C_c^\infty(\tilde{V})$  tel que  $g|_K = 1$ . On prolonge  $g$  par 0 en dehors de  $\tilde{V} \subset \pi_2(U)$ . On se donne alors de la même façon une fonction lisse  $h$  de valeur 1 en  $\{x_0\}$  et à support compact sur  $\pi(U)$ . On pose alors :

$$f(x, y) = h(x)g(y)\overline{\chi(y)} \in C_c^\infty(U) \quad (3.3.41)$$

et  $f|_{\{x_0\} \times K} = 1$ . De fait :

$$0 = u(f)(x_0) = \int_{\tilde{V}} |\chi(y)|^2 dy \neq 0, \quad (3.3.42)$$

absurde. Ainsi on conclut que  $\text{supp}(u) = \mathbb{R} \times \text{supp}(\chi)$ .

**Exemple 30.** Reprenons la distribution  $\pi$ -fibrée de l'exemple 28, dont nous avons calculé le support à l'exemple 29. On constate que le support de  $u$  est bien  $\pi$ -propre.

La proposition 3.3.12 suivante montre que les distributions de la définition 3.3.9 sont automatiquement à support  $\pi$ -propre - voir également les notes de bas de page liées aux [240, définition 2.2.2 p 10], [223, définition 6 p 5].

**Proposition 3.3.12.** 1. Toute distribution  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) = C^\infty(\mathbb{R}^d)^*$  a un support compact.

2. Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion lisse entre deux variétés lisses. Les distributions de la définition 3.3.9 sont à support  $\pi$ -propre au sens de la définition 3.3.7.

*Démonstration.* 1. Le premier point est bien connu, mais on en refait tout de même la preuve. Soit  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ , c'est à dire une forme linéaire continue sur l'espace de Fréchet  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . De fait par définition de la continuité sur le dual d'un espace Fréchet, il existe, voir [85, définition 3.1.1 p 34], un compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ ,  $C > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  de sorte que :

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \phi\|_{\infty, K}. \quad (3.3.43)$$

Soit  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  de sorte que  $\text{supp}(\phi) \subset K^c$ . On déduit de (3.3.43) que  $\langle u, \phi \rangle = 0$ . Cela veut dire que  $\text{supp}(u) \subset K$ . D'où la conclusion.

2. Soit  $K$  un compact de  $B_M$ . On veut montrer que  $\pi^{-1}(K) \cap \text{supp}(u)$  est compact. On se donne un compact  $K_1 \subset B_M$  de sorte que  $K \subset \overset{\circ}{K}_1$ . Avec la définition d'une telle distribution pour  $N_1 = 0$  on sait qu'il existe  $K_2 \subset M$  un compact et  $N_2$  un entier de sorte que :

$$p_{K_1, 0}(u(f)) \leq Cp_{K_2, N_2}(f), \quad f \in C^\infty(M). \quad (3.3.44)$$

Nous allons montrer que :

$$\pi^{-1}(K) \cap \text{supp}(u) \subset K_2. \quad (3.3.45)$$

Procédons par contraposée. Soit  $\gamma \in K_2^c$ . Montrons que  $\gamma \notin \pi^{-1}(K)$  ou  $\gamma \notin \text{supp}(u)$ . Cela revient à montrer, utilisant que  $K \subset \overset{\circ}{K}_1$  que si  $\gamma \in K_2^c \cap \pi^{-1}(\overset{\circ}{K}_1)$  alors  $\gamma \notin \text{supp}(u)$ . On constate que  $K_2^c \cap \pi^{-1}(\overset{\circ}{K}_1)$  est un ouvert voisinage de  $\gamma$ . Soit  $\phi \in C^\infty(M)$  avec  $\text{supp}(\phi) \subset K_2^c \cap \pi^{-1}(\overset{\circ}{K}_1)$ .

(a) Pour  $x \in K_1$ . Il vient par l'équation (3.3.44) :

$$|\langle u, \phi \rangle(x)| \leq Cp_{K_2, N_2}(\phi) = 0. \quad (3.3.46)$$

De fait  $\langle u, \phi \rangle(x) = 0$ .

14. Quitte à avoir pris  $\tilde{V}$  une boule de centre  $\tilde{y}_0$  et de rayon  $r > 0$  on prend  $K = \overline{B_0(\tilde{y}_0, \frac{r}{2})}$

(b) Pour  $x \notin K_1$ , montrons que  $\langle u, \phi \rangle(x) = 0$ . Soit  $\chi \in C^\infty(B_M)$  de sorte que :

$$\begin{cases} \chi(x) &= 1 \\ \chi|_{K_1} &= 0, \end{cases} \quad (3.3.47)$$

alors par  $C^\infty(B_M)$ -linéarité, il vient :

$$\langle u, \phi \rangle(x) = \chi(x) \langle u, \phi \rangle(x) \quad (3.3.48)$$

$$= \langle u, (\pi^* \chi) \phi \rangle(x) \quad (3.3.49)$$

$$= 0, \quad (3.3.50)$$

où la dernière égalité est vraie car :

$$\text{supp}(\pi^* \chi \phi) \subset \text{supp}(\pi^* \chi) \cap \text{supp}(\phi) \subset \pi^{-1}(\overset{\circ}{K}_1)^c \cap \pi^{-1}(\overset{\circ}{K}_1) = \emptyset. \quad (3.3.51)$$

De fait  $\text{supp}(u)$  est  $\pi$ -propre. □

La notation  $\mathcal{E}'_\pi(M)$  rappelle les distributions à support compact et cela n'est pas anodin. Effectivement, la  $C^\infty(B_M)$ -linéarité entraîne en particulier - voir la preuve du point 2) du lemme 3.3.13 suivant - que pour tout  $u \in \mathcal{E}'_\pi(M)$ , pour tout  $b \in B_M$ , on peut définir une distribution  $u_b \in \mathcal{E}'(\pi^{-1}(b))$ . On voit facilement qu'en particulier la distribution  $\pi$ -fibrée de l'exemple 28 satisfait le premier point du lemme 3.3.13 suivant.

**Lemme 3.3.13.** *Soit  $u \in \mathcal{E}'_\pi(M)$ .*

1. *Soit  $f \in C^\infty(M)$  et  $b \in B_M$ . Si  $f$  s'annule sur la fibre  $\pi^{-1}(b)$  alors  $u(f)$  s'annule en  $b$ .*
2. *La distribution  $\pi$ -fibrée  $u$  se restreint en chaque fibre en une distribution à support compact  $u_b \in \mathcal{E}'(\pi^{-1}(b))$ , en posant pour  $b \in B_M$  :*

$$\langle u_b, g \rangle := \langle u, f \rangle(b), \quad g \in C^\infty(\pi^{-1}(b)), \quad (3.3.52)$$

où  $f \in C^\infty(M)$  est n'importe quelle fonction telle que  $f|_{\pi^{-1}(b)} = g$ .

*Démonstration.* 1. On se place dans le cas où  $\pi$  est la submersion :

$$\pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto y, \quad (3.3.53)$$

et où  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$  de sorte que  $f(x, b) = 0$ . Montrons que  $u(f)(b) = 0$ . Par la formule de Taylor à l'ordre 0 on en déduit que :

$$f(x, y) = f(x, b) + \sum_{i=1}^m (y_i - b_i) \int_0^1 \partial_{x_i} f(x, t(y - b) + b) dt \quad (3.3.54)$$

$$= \sum_{i=1}^m (\pi^* h_i)(x, y) g_i(x, y), \quad (3.3.55)$$

où  $h_i(y) = y_j - b_j \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  de sorte que  $h_i(b) = 0$  et  $g_i(x, y) = \int_0^1 \partial_{x_i} f(x, t(y - b) + b) dt \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ . Alors par  $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ -linéarité il vient :

$$u(f)(b) = \sum_{i=1}^m h_i(b) u(g_i)(b) = 0. \quad (3.3.56)$$

On considère maintenant une submersion quelconque  $\pi : M \rightarrow B_M$ . On peut recouvrir  $M$  par des ouverts  $U_\alpha \subset M$  munis des cartes de feuilletage  $\psi_\alpha^M, \psi_\alpha^{B_M}$  au sens où :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{\psi_\alpha^M} & \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \pi(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha^{B_M}} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad (3.3.57)$$

et la flèche verticale à droite est la projection standard de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , avec  $m \leq n$ , sur les  $m$  premières coordonnées :

$$\pi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m). \quad (3.3.58)$$

En effet, avec [137, proposition 2.24], chaque recouvrement de  $M$  admet un raffinement régulier  $\{U_\alpha\}$ , voir [137, définition p 52-53]. En tant que submersion, l'application  $\pi$  est de rang constant. Alors avec le [137, théorème des applications de rang constant 7.13], l'application  $\pi$  s'écrit, dans les coordonnées de  $M$  et  $B_M$ , comme l'application de projection sur les  $m$  premières variables.

Soit  $(\phi_\alpha)$  une partition de l'unité localement finie (c'est à dire tout compact intersecte seulement un nombre fini des supports des  $(\phi_\alpha)$ , voir la preuve du [137, théorème 2.25 p 54]) subordonnée au recouvrement  $\{U_\alpha\}$ . On définit une distribution  $\pi$ -fibrée  $\psi_{\alpha*}^M(\phi_\alpha u)$  sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$\langle \psi_{\alpha*}^M(\phi_\alpha u), \tilde{f} \rangle(x) = \langle u, \phi_\alpha(\psi_\alpha^M)^* \tilde{f} \rangle \left( (\psi_\alpha^{B_M})^{-1}(x) \right), \tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.3.59)$$

On vérifie que c'est bien un distribution  $\pi$ -fibrée vis à vis de la projection standard  $\pi_m$  ci-dessus. Ainsi on a :

$$\langle u, \phi_\alpha f \rangle(b) = \langle \psi_{\alpha*}^M(\phi_\alpha u), (\psi_\alpha^{M,-1})^* f \rangle \left( \psi_\alpha^{B_M}(b) \right), f \in C^\infty(M). \quad (3.3.60)$$

Puisque  $f|_{\pi^{-1}(b)} = 0$  alors  $(\psi_\alpha^{M,-1})^* f|_{\pi^{-1}(\psi_\alpha^{B_M}(b))} = 0$  donc d'après le cas précédent l'équation (3.3.60) est nulle. Ainsi :

$$\langle u, f \rangle(b) = \sum_{\alpha} \langle u, \phi_\alpha f \rangle(b) = 0, \quad (3.3.61)$$

et on a terminé.

2. L'application de l'équation (3.3.52) est bien définie. En effet soient  $f, h \in C^\infty(M)$  de sorte que  $f|_{\pi^{-1}(b)} = g = h|_{\pi^{-1}(b)}$ . La fonction  $f - h$  s'annule sur  $\pi^{-1}(b)$  par hypothèse. Par le premier point on a donc que  $u(f - h)(b) = 0$ , c'est à dire  $u(f)(b) = u(h)(b)$ . La linéarité de  $u_b$  est claire.

Reste à montrer la continuité sur l'espace  $C^\infty(\pi^{-1}(b))$ . Comme dans le point 1) on commence avec le cas où  $\pi = \pi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est la projection standard sur les  $m$  premières coordonnées. Soit  $g \in C^\infty(\pi^{-1}(b))$ , définissons la fonction lisse  $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  par :

$$\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) = g(b, x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (3.3.62)$$

on remarque qu'on a  $p_{K,k}(\tilde{g}) \leq p_{\pi^{-1}(b) \cap K,k}(g)$ , pour  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . On applique l'équation (3.3.52) pour  $K_1 = \{b\}$  et  $N_1 = 0$  alors il existe un compact  $K_2 \subset M$ , un entier  $N_2$  entier et  $C > 0$  de sorte que :

$$|\langle u, f \rangle(b)| \leq Cp_{K_2, N_2}(f), \quad f \in C^\infty(M). \quad (3.3.63)$$

Alors pour  $g \in C^\infty(\pi^{-1}(b))$  et  $f|_{\pi^{-1}(b)} = g$  il vient :

$$|\langle u_b, g \rangle(b)| = |\langle u, \tilde{g} \rangle(b)| \quad (3.3.64)$$

$$\leq Cp_{K_2, N_2}(\tilde{g}) \quad (3.3.65)$$

$$\leq Cp_{\pi^{-1}(b) \cap K_2, N_2}(g), \quad (3.3.66)$$

ce qui est la définition de la continuité d'une application linéaire sur  $C^\infty(\pi^{-1}(b))$ . D'où  $u \in \mathcal{E}'(\pi^{-1}(b))$ . Finalement pour le cas général, on utilise un atlas par des cartes de feuilletage comme dans le point 1).  $\square$

Dans le cas d'un groupoïde de Lie  $G$  de base  $G^{(0)}$ , on peut prendre la submersion but ou source  $\pi = r, s : G \rightarrow G^{(0)}$  et définir les distributions  $r$ -fibrées ou  $s$ -fibrées. C'est ce qui est fait dans l'article [223] de vEY. Comme tout à l'heure insistons sur un point technique. La façon dont on définit les distributions  $r$ -fibrées 3.3.9 entraînent qu'elles ont un support  $r$ -propre mais pas forcément  $s$ -propre ! Cela justifie donc la définition suivante dans laquelle en réalité, seule la condition de propreté vis à vis de  $r$  ou  $s$  est à vérifier.

**Définition 3.3.14.** Distribution  $r$ -fibrée proprement supportée sur un groupoïde de Lie

Soit  $G$  un groupoïde de Lie de base  $G^{(0)}$  et  $\pi = r, s$  la submersion but ou source. Une distribution  $\pi$ -fibrée,  $u \in \mathcal{E}'_\pi(G)$ , est dite proprement supportée lorsque son support est  $r$ -propre et  $s$ -propre dans  $G$ . Cela veut dire par définition que pour tout compact  $K \subset G^{(0)}$ , les ensembles  $\text{supp}(u) \cap r^{-1}(K)$  et  $\text{supp}(u) \cap s^{-1}(K)$  sont compacts.

LMV définissent l'espace  $C_r^\infty(G^{(0)}, \mathcal{E}'(G))$ , voir [138, définition 2.6]. Il s'agit moralement des familles lisses  $x \in G^{(0)} \mapsto u^x \in \mathcal{E}'(r^{-1}(x))$ . On peut maintenant énoncer :

**Théorème 3.3.15.** *LMV 2014, [138, proposition 2.7 p 763]*

*L'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques :*

$$C_r^\infty(G^{(0)}, \mathcal{E}'(G)) \rightarrow \mathcal{E}'_r(G), (u^x)_{x \in G^{(0)}} \mapsto \tilde{u}, \quad (3.3.67)$$

où on définit :

$$\tilde{u} : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G^{(0)}), f \mapsto \tilde{u}(f), \quad (3.3.68)$$

où  $\tilde{u}(f)(x) = \langle u^x, f|_{G^x} \rangle$ . On a le même résultat pour  $\mathcal{E}'_s(G)$ .

### 3.3.4 Convolution des distributions $r$ -fibrées

Comme pour les distributions sur  $\mathbb{R}^d$ , on peut définir un produit de convolution sur les distributions  $r, s$ -fibrées. Rappelons que sur  $\mathbb{R}^d$  le produit de convolution de deux distributions  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  est défini selon (voir le [85, théorème 5.1.1 p 52]) :

$$\langle u \star v, \phi \rangle = \langle v(y), \langle u(x), \phi(x+y) \rangle \rangle, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (3.3.69)$$

Posons  $m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, (x, y) \mapsto x + y$ , qui induit l'application :

$$m^* : f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto m^* f \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) : (x, y) \mapsto f(x+y), \quad (3.3.70)$$

de sorte que l'équation (3.3.69) se reformule selon :

$$u \star v = (u \otimes v) \circ m^*. \quad (3.3.71)$$

En effet soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  il vient :

$$\langle (u \otimes v), m^* f \rangle \stackrel{\text{équation (4.3.6) p 46 [85]}}{=} \langle v(y), \langle u(x), m^* f(x, y) \rangle \rangle = \langle v(y), \langle u(x), f(x+y) \rangle \rangle \quad (3.3.72)$$

$$\stackrel{\text{équation (4.3.7) p 47 [85]}}{=} \langle u(x), \langle v(y), f(x+y) \rangle \rangle. \quad (3.3.73)$$

Pour ces raisons, il est naturel de chercher à définir le produit de convolution sur les distributions  $r, s$ -fibrées comme suit :

**Définition 3.3.16.** Convolution sur les distributions  $r, s$ -fibrées

Soit  $u, v \in \mathcal{E}'_r(G)$  on définit  $u \star v \in \mathcal{E}'_r(G)$  comme étant la distribution  $r$ -fibrée donnée par :

$$\langle u \star v, \phi \rangle(x) = \langle u^x(\gamma), \langle v^{s(\gamma)}(\beta), \phi(\gamma\beta) \rangle \rangle, \phi \in C^\infty(G^x), x \in G^{(0)}, \quad (3.3.74)$$

qu'on peut reformuler en disant :

$$u \star v = u \circ s^* v \circ m^*, \quad (3.3.75)$$

où la distribution  $s^* v$  étant donnée par :

$$(s^* v)^\gamma = v^{s(\gamma)}, \quad (3.3.76)$$

et où

$$m^* : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G^{(2)}), f \mapsto m^*(f) : (\beta, \gamma) \in G^{(2)} \mapsto f(\beta\gamma). \quad (3.3.77)$$

On peut d'ailleurs détailler que :

$$(s^*v \circ m^*)(\phi)(\gamma) = \langle v^{s(\gamma)}(\beta), \phi(\gamma\beta) \rangle, \quad \phi \in C^\infty(G). \quad (3.3.78)$$

De même si  $u, v \in \mathcal{E}'_s(G)$ , on définit  $u \star v \in \mathcal{E}'_s(G)$  comme étant la distribution  $s$ -fibrée donnée par :

$$\langle u \star v, \phi \rangle(x) = \langle v_x(\gamma), \langle u_{r(\gamma)}(\beta), \phi(\beta\gamma) \rangle \rangle \quad \phi \in C^\infty(G_x), \quad x \in G^{(0)}, \quad (3.3.79)$$

qu'on peut reformuler en disant :

$$u \star v = v \circ r^* u \circ m^*. \quad (3.3.80)$$

**Théorème 3.3.17.** *Structure d'algèbres des distributions  $r, s$ -fibrées, [223], [68, p 64], [138]*

$\mathcal{E}'_r(G)$  et  $\mathcal{E}'_s(G)$  sont des algèbres uniales pour la convolution, définition 3.3.16. Leurs unités est commune et est l'application :

$$e : C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G^{(0)}), \phi \mapsto e(\phi), \quad (3.3.81)$$

où  $e(\phi)(x) = \phi(x)$ . Avec le théorème 3.3.15, cette distribution est identifiée à l'application :

$$e : x \in G^{(0)} \mapsto \delta_x \in \mathcal{E}'(G^x) \text{ ou } \mathcal{E}'(G_x). \quad (3.3.82)$$

### 3.3.5 $\pi$ -morphisme et action de Debord-Skandalis sur les distributions $r, s$ -fibrées

Sur  $\mathbb{R}^d$ , on peut toujours définir, voir [85, proposition 11.3.3 p 156], le poussé en avant d'une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  par une application  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  lisse :

$$\langle \alpha_* u, \phi \rangle = \langle u, \alpha^* \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (3.3.83)$$

où l'étoile supérieure désigne le tiré en arrière. Pour motiver le besoin de généraliser (3.3.83) voici deux perspectives :

1. Pour définir leur calcul pseudo-différentiel groupoidal, vEY dans [223] ont eu besoin de définir comment l'action de Debord Skandalis  $\alpha_s : \mathbb{T}_H M \rightarrow \mathbb{T}_H M$  agit sur une distribution  $r$ -fibrée  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$ . Cela leur permet de définir les distributions  $r$ -fibrées essentiellement homogènes d'ordre  $m$ , notée  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$ , voir la définition 1.4.15, et qui sont un analogue dans le monde groupoidal des fonctions homogènes modulo Schwartz d'ordre  $m$ .
2. Sur  $M = \mathbb{R}^d$ , grâce aux cartes exponentielles  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}}$ , il sera plus facile de constater qu'une distribution  $r$ -fibrée  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$  est bien lisse en  $t = 0$ , en la transformant en une distribution  $r$ -fibrée sur le fibré vectoriel lisse  $M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  de base  $M \times \mathbb{R}$  grâce à :  $(\mathbb{E}xp^{\bar{X}})_*^{-1} \mathbb{P}$ , voir l'exemple 15. On pourra consulter la définition 3.3.23, qui rend licite le poussé en avant par la carte exponentielle d'une distribution  $r$ -fibrée.

Nous allons donc nous intéresser à la généralisation de l'équation (3.3.83) pour les distributions  $\pi$ -fibrées, où  $\pi : M \rightarrow B_M$  est une submersion entre deux variétés lisses.

**Définition 3.3.18.**  $\pi$ -morphisme

Soit  $\pi_M : M \rightarrow B_M$  et  $\pi_N : N \rightarrow B_N$  deux submersions entre variétés lisses. On dit qu'une application lisse  $\alpha : M \rightarrow N$  est un  $\pi$ -morphisme si :

1. Il existe un difféomorphisme  $\alpha^{(0)} : B_M \rightarrow B_N$ .
2.  $\alpha^{(0)} \circ \pi_M = \pi_N \circ \alpha$ .

**Proposition 3.3.19.** *Poussé en avant d'une distribution  $\pi$ -fibrée par un  $\pi$ -morphisme*

Soit  $\pi_M : M \rightarrow B_M$  et  $\pi_N : N \rightarrow B_N$  deux submersions entre variétés lisses,  $\alpha : M \rightarrow N$  un  $\pi$ -morphisme et  $u \in \mathcal{E}'_{\pi_M}(M)$ . On définit une nouvelle distribution  $\alpha_* u \in \mathcal{E}'_{\pi_N}(N)$  où pour tout  $\phi \in C^\infty(N)$  :

$$\langle \alpha_* u, \phi \rangle = ((\alpha^{(0)})^{-1})^* \langle u, \phi \circ \alpha \rangle. \quad (3.3.84)$$

*Démonstration.* D'une part montrons que  $\phi \mapsto \langle \alpha_* u, \phi \rangle$  est  $C^\infty(B_N)$ -linéaire au sens de  $\pi_N$ . Soit  $f \in C^\infty(B_N)$  et  $\phi \in C^\infty(N)$ , il vient :

$$\langle \alpha_* u, (f \circ \pi_N) \phi \rangle = ((\alpha^{(0)})^{-1})^* \langle u, [(f \circ \pi_N) \cdot \phi] \circ \alpha \rangle \quad (3.3.85)$$

$$\stackrel{\alpha^{(0)} \circ \pi_M = \pi_N \circ \alpha}{=} \underbrace{((\alpha^{(0)})^{-1})^* \langle u, (f \circ \alpha^{(0)} \circ \pi_M) \cdot (\phi \circ \alpha) \rangle}_{(3.3.84)} \quad (3.3.86)$$

$$= ((\alpha^{(0)})^{-1})^* \left( f \circ \alpha^{(0)} \cdot \langle u, \phi \circ \alpha \rangle \right) \quad (3.3.87)$$

$$\stackrel{(3.3.84)}{=} f \langle \alpha_* u, \phi \rangle. \quad (3.3.88)$$

D'autre part, on vérifie aisément que  $\langle \alpha_* u, \phi \rangle = ((\alpha^{(0)})^{-1})^* \langle u, \phi \circ \alpha \rangle \in C^\infty(B_N)$  puisque  $u : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(B_M)$  et que  $\alpha^{(0)}$  est un difféomorphisme. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que  $\alpha_* u : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(B_N)$  est continue. D'où la conclusion.  $\square$

Nous allons considérer la discussion précédente dans le cas des morphismes de groupoïdes de Lie.

**Lemme 3.3.20.** 1. *Tout isomorphisme de groupoïdes de Lie, voir définition A.4.6, est un  $r$ -morphisme et un  $s$ -morphisme au sens de la définition 3.3.18.*

2. *Si  $\alpha : G \rightarrow H$  est un isomorphisme de groupoïdes de Lie, alors  $\alpha_*$  de l'équation (3.3.84) définit un isomorphisme d'algèbres de convolution  $\mathcal{E}'_{r_G}(G) \rightarrow \mathcal{E}'_{r_H}(H)$  et aussi  $\mathcal{E}'_{s_G}(G) \rightarrow \mathcal{E}'_{s_H}(H)$ .*

*Démonstration.* 1. Comme  $\alpha$  est un isomorphisme de groupoïdes de Lie alors par définition A.4.6, il existe un difféomorphisme  $\alpha^{(0)} : G^{(0)} \rightarrow H^{(0)}$  qui satisfait :

$$\begin{cases} \alpha^{(0)} \circ r_G &= r_H \circ \alpha \\ \alpha^{(0)} \circ s_G &= s_H \circ \alpha. \end{cases} \quad (3.3.89)$$

Cela prouve que  $\alpha$  peut être vu à la fois comme un  $r$ -morphisme et un  $s$ -morphisme.

2. On prouve la proposition pour  $\alpha_* : \mathcal{E}'_{r_G}(G) \rightarrow \mathcal{E}'_{r_H}(H)$ , l'autre se faisant de façon similaire. L'application précédente est bien définie en vertu de la proposition 3.3.19 et du point précédent. Montrons maintenant le caractère morphisme. Soit  $u, v \in \mathcal{E}'_{r_G}(G)$ . Soit  $\phi \in C^\infty(H)$ ,  $x \in H^{(0)}$  alors il vient :

$$\langle \alpha_*(u) \star \alpha_*(v), \phi \rangle(x) \stackrel{(3.3.74)}{=} \langle (\alpha_* u)^x(\gamma), \langle (\alpha_* v)^{s_H(\gamma)}, \phi(\gamma\beta) \rangle \rangle \quad (3.3.90)$$

$$= \langle u^{(\alpha^{(0)})^{-1}(x)}(\gamma), \langle \alpha_*(v)^{s_H \circ \alpha(\gamma)}(\beta), \phi(\alpha(\gamma)\beta) \rangle \rangle \quad (3.3.91)$$

$$= \langle u^{(\alpha^{(0)})^{-1}(x)}(\gamma), \langle v^{(\alpha^{(0)})^{-1} \circ s_H \circ \alpha(\gamma)}(\beta), \phi(\alpha(\gamma)\alpha(\beta)) \rangle \rangle \quad (3.3.92)$$

$$\stackrel{\alpha^{(0)} \circ s_G = s_H \circ \alpha}{=} \underbrace{\langle u^{(\alpha^{(0)})^{-1}(x)}(\gamma), \langle v^{(\alpha^{(0)})^{-1} \circ \alpha^{(0)} \circ s_G(\gamma)}(\beta), \phi(\alpha(\gamma\beta)) \rangle \rangle}_{(3.3.93)}$$

$$= \langle u^{(\alpha^{(0)})^{-1}(x)}(\gamma), v^{s_G(\gamma)}(\beta), \phi(\alpha(\gamma\beta)) \rangle, \quad (3.3.94)$$

où nous avons utilisé que  $\alpha$  préserve la structure de produit dans l'équation (3.3.93). De plus :

$$\langle \alpha_*(u \star v), \phi \rangle(x) = \langle u \star v^{(\alpha^{(0)})^{-1}(x)}, \phi \circ \alpha \rangle \quad (3.3.95)$$

$$= \langle u^{(\alpha^{(0)})^{-1}(x)}(\gamma), v^{s_G(\gamma)}(\beta), \phi(\alpha(\gamma\beta)) \rangle. \quad (3.3.96)$$

D'où :

$$\alpha_*(u \star v) = \alpha_*(u) \star \alpha_*(v). \quad (3.3.97)$$

$\square$

On pourra trouver une autre version de la proposition suivante dans [68, lemme 5.9 p 38].



**Proposition 3.3.21.** *Soit  $M$  une variété filtrée. L'action de Debord-Skandalis 3.2.1 sur  $\mathbb{T}_H M$  est un automorphisme de groupoïdes de Lie. Avec le lemme 3.3.20 elle définit pour tout  $s > 0$  une famille à un paramètre d'automorphismes d'algèbres,  $\alpha_{s*} : \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M) \rightarrow \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$ , qui agit sur  $\mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$  via :*

$$\langle \alpha_{s*} u, f \rangle(x, t) = \langle u, \alpha_s^* f \rangle(x, st), \quad (3.3.98)$$

où  $u \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{T}_H M)$ . On obtient également, toujours avec le lemme 3.3.20 une famille à un paramètre d'automorphismes d'algèbres sur  $\mathcal{E}'_s(\mathbb{T}_H M)$ .

*Démonstration.* On fixe un  $s > 0$  et on pose  $\alpha = \alpha_s$ . Le lecteur pourra vérifier que  $\alpha$  est un automorphisme du groupoïde  $\mathbb{T}_H M$  au sens de la définition A.4.6. En fait cela utilise les calculs dans les cartes exponentielles de  $\alpha_s$  que l'on rencontre dans la preuve du lemme 3.2.3. Par suite, d'après le lemme 3.3.20,  $\alpha$  est un  $r$ -morphisme et un  $s$ -morphisme. Reste à déterminer  $\alpha^{(0)} : \mathbb{T}_H M^{(0)} \rightarrow \mathbb{T}_H M^{(0)}$ . Soit  $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ , il vient :

$$\left(\alpha^{(0)}\right)^{-1}(x, t) = (\alpha_s)^{-1}(x, x, t) = (x, x, st), \quad (3.3.99)$$

ce dernier triplet étant identifié à  $(x, st)$  dans  $\mathbb{T}_H M^{(0)}$ . Appliquant la proposition 3.3.19, on trouve la formule (3.3.98) annoncée.  $\square$

**Proposition 3.3.22.** *Soit  $M$  une variété filtrée de dimension  $d$ . On se donne un repère local  $\bar{X}$  adapté à la filtration, voir la définition 3.1.2. La carte exponentielle  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{T}_H M$ , voir lemme 3.1.3 est un  $\pi_{1,3}$ -morphisme, voir définition 3.3.18, lorsque l'on munit  $\tilde{U}$  (resp.  $\mathbb{T}_H M$ ) des submersions  $\pi_{1,3} : \tilde{U} \subset M \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$  la projection sur la première et dernière variable (resp.  $r : \mathbb{T}_H M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ , l'application but de  $\mathbb{T}_H M$ ).*

*Cela fonctionne de même en remplaçant  $r$  par  $s$  dans le cas d'une distribution  $s$ -fibrée sur  $\mathbb{T}_H M$ .*

*Démonstration.* Il suffit de constater que  $(\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{(0)} = id$  et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\mathbb{E}xp^{\bar{X}}} & \mathbb{T}_H M \\ \pi_{1,3} \downarrow & & \downarrow r \\ M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & M \times \mathbb{R} \end{array}$$

Ainsi l'équation (3.3.100) est simplement la traduction de la proposition 3.3.19 pour les  $\pi$ -morphisms considérés.  $\square$

Cette précédente proposition, le fait que  $(\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{(0)} = id$  et la proposition 3.3.19 justifient la validité de la définition suivante.

**Définition 3.3.23.** *Poussé en avant des distributions  $r$ -fibrées par les cartes exponentielles Soit  $M$  une variété filtrée et on reprend les notations du lemme 3.1.3. On note  $\pi_{1,3} : \tilde{U} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ ,  $(x, \xi, t) \mapsto (x, t)$ . On définit, pour  $\mathbb{P} \in \mathcal{E}'_{\pi_{1,3}}(\tilde{U})$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{T}_H M)$  :*

$$\langle (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})_* \mathbb{P}, f \rangle = \langle \mathbb{P}, (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^* f \rangle. \quad (3.3.100)$$

### 3.4 Le fibré des 1-densités tangentes aux $\pi$ -fibres d'une submersion

Dans cette section, nous allons maintenant définir le fibré des densités tangentes aux  $\pi$ -fibres où  $\pi : M \rightarrow B_M$  est une submersion entre deux variétés lisses. Cette construction s'applique aux  $r$ -fibres et aux  $s$ -fibres d'un groupoïde de Lie  $G$ , notre but étant en fait de l'appliquer au groupoïde  $H$ -tangent  $\mathbb{T}_H M$ . Dans cette section nous esquissons la preuve du fait que l'ensemble des mesures lisses est en bijection avec l'ensemble des sections du fibré des 1-densités sur une variété lisse  $M$ .

### 3.4.1 Mesures lisses et fibré des 1-densités

On commence par quelques rappels algébriques et de géométrie différentielle [137, p 375-377] :

1. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $d$ . On dit que la fonction  $\mu : V^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une densité sur  $V$  si elle satisfait la condition suivante. Si  $T : V \rightarrow V$  est une application linéaire alors :

$$\mu(Tx_1, \dots, Tx_d) = |\det(T)|\mu(x_1, \dots, x_d), \quad (x_1, \dots, x_d) \in V^d. \quad (3.4.1)$$

L'espace vectoriel de ces éléments est noté  $|\Omega|^1(V)$ . Une densité  $\mu \in |\Omega|^1(V)$  est dite positive si  $\mu(x_1, \dots, x_d) > 0$ , pour toute famille  $(x_1, \dots, x_d) \in V^d$  de vecteurs linéairement indépendants.

2. Soit  $M$  une variété lisse. On définit le fibré des densités de  $M$  comme étant le fibré :

$$|\Omega|^1(M) = \bigsqcup_{p \in M} |\Omega|^1(T_p M). \quad (3.4.2)$$

Une section lisse de ce fibré est dite une 1-densité.

**Remarque 22.** 1. **Attention :** Dans certains ouvrages, on peut rencontrer la notation  $\Omega^1(M)$  ou  $\Omega(M)$  pour noter le fibré des densités. Cependant cette notation peut aussi désigner les sections du fibré des tenseurs 1-covariants alternés  $\Gamma^\infty(\Lambda(M))$ . Le lecteur devra donc rester attentif sur le sens des symboles. Nous avons ainsi préféré utiliser la notation  $|\Omega|^1(M)$  qui rappelle l'équation (3.4.1).

2. On peut aussi définir les  $\alpha$ -densités qui sont des généralisations des 1-densités, voir [39], [138]. Ce sont précisément les  $\frac{1}{2}$ -densités sur un groupoïde de Lie  $G$  qui sont intéressantes pour définir la convolution, voir [138], [39, p 106] où Connes dit :

*"The notion of a  $\frac{1}{2}$ -density on a smooth manifold allows one to define in a canonical manner the convolution algebra of a smooth groupoid  $G$ ."*

A fortiori l'algèbre des  $\frac{1}{2}$ -densités à support compact sur un groupoïde de Lie  $G$  est une  $*$ -algèbre et permet de définir la  $C^*$ -algèbre réduite du groupoïde de Lie  $G$ , voir [39, proposition 3 p 106] ou encore [182, définition 2.8 p 82]. Cette idée d'utiliser les  $\frac{1}{2}$ -densités pour définir la  $C^*$ -algèbre réduite serait due à Connes à la fin des années 70, voir [37]. Connes s'est particulièrement intéressé aux feuilletages et aux groupes d'holonomie dont il a pu définir la  $C^*$ -algèbre de groupe, voir [39, § 9 p 123]. Debord [53] dans l'abstract de son article dit :

*"Alain Connes introduced the use of Lie groupoids in noncommutative geometry in his pioneering work on the index theory of foliations."*

puis page 2 du même article :

*"Two almost simultaneous major contributions forced groupoids into the topological noncommutative world i.e.  $C^*$ -algebras :*

(a) *The construction by Jean Renault of the  $C^*$ -algebra of a locally compact groupoid, its representation theory [182].*

(b) *The construction by Alain Connes of the von Neumann algebra and the  $C^*$ -algebra of a foliation based on its holonomy groupoid [37], [38], [39].*

On invite vivement le lecteur à poursuivre la lecture de l'introduction de cet article de Debord où sont clairement énoncées les motivations de Connes.

Dans ce qui suit, pour  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $d$ , on désigne par  $\Lambda^d(V)$  l'ensemble des formes  $d$ -linéaires alternées sur  $V$ . On rappelle aussi que  $\dim(\Lambda^1(V)) = 1$ .

**Exemple 31.** 1. Toute forme  $d$ -linéaire alternée  $\omega \in \Lambda^d(V)$  détermine une densité sur  $V$ , voir [137, p 377, proposition 14.26], en posant :

$$|\omega| : V^d \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \mapsto |\omega(x_1, \dots, x_d)|. \quad (3.4.3)$$

En effet, par un théorème classique d'algèbre multilinéaire, voir [186, théorème 17.9], pour  $T : V \rightarrow V$  linéaire, il vient :

$$|\omega|(T(x_1), \dots, T(x_d)) = |\det(T)|\omega(x_1, \dots, x_d), \quad (3.4.4)$$

où  $\det$  désigne le déterminant de matrice. En particulier, l'application  $|\det|$  est une densité sur l'espace vectoriel  $V = \mathbb{R}^d$ .

2. Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $d$ . On pose la matrice  $C = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$  et l'application  $\mu_{\text{vol}} : V^d \rightarrow \mathbb{R}, v_1, \dots, v_d \mapsto \sqrt{|\det(C)|}$ . Alors  $\mu_{\text{vol}}$  est une densité sur  $V$ .

On rappelle les propriétés de base des densités sur un espace vectoriel  $V$  et du fibré des densités sur une variété lisse  $M$ .

**Proposition 3.4.1.** *Propriété des densités, [137, proposition 14.26]*

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $d \geq 1$ . Alors :

1.  $|\Omega|^1(V)$  est un espace vectoriel pour l'addition de fonctions et multiplication par un scalaire.
2. Si deux éléments de  $|\Omega|^1(V)$  coïncident sur une base de  $V$  alors ils sont égaux.
3.  $|\Omega|^1(V)$  est un espace vectoriel de dimension 1, engendré par un élément  $|w|$  où  $w \in \wedge^d(V)$  comme à l'équation (3.4.3), qui est non nul.

Maintenant on introduit la notion de mesure lisse. On rappelle :

**Définition 3.4.2.** Poussé en avant d'une mesure

1. Soit  $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$  deux espaces mesurables,  $\phi : X \rightarrow Y$  une application mesurable et  $\mu : \Sigma_X \rightarrow \mathbb{C}$  une mesure complexe. Alors on note  $\phi_*\mu$  la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$  en posant :

$$(\phi_*\mu)(B) = \mu(\phi^{-1}(B)), B \in \Sigma_Y. \quad (3.4.5)$$

2. Une fonction  $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable par rapport à  $\phi_*\mu$  si et seulement si  $g \circ \phi$  est intégrable pour  $\mu$ . Dans ce cas on a :

$$\int_Y g d(\phi_*\mu) = \int_X (g \circ \phi) d\mu. \quad (3.4.6)$$

**Définition 3.4.3.** Mesure lisse

Soit  $M$  une variété de dimension  $d$ . Soit  $\mu$  une mesure complexe sur  $M$ . On dit que  $\mu$  est lisse sur  $M$  lorsque dans toute carte  $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^d$  il existe  $f_\phi \in C^\infty(\phi(U))$  telle que :

$$\phi_*\mu|_U = f_\phi \lambda, \quad (3.4.7)$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur l'ouvert  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^d$ . On note par  $\mathcal{M}^\infty(M)$  l'espace des mesures lisses sur  $M$ .

**Exemple 32.** Soit  $M = \mathbb{R}$  alors on pose la densité de probabilité gaussienne :

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (3.4.8)$$

où  $dx$  symbolise la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 3.4.4.** La définition 3.4.3 est équivalente à dire que : pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et  $f_\phi \in C^\infty(\phi(U))$  :

$$\phi_*\mu = f_\phi \lambda, \quad (3.4.9)$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur l'ouvert  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^d$ .

Le but de cette exposition est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 3.4.5.** Soit  $M$  une variété lisse. Alors :

$$\mathcal{M}^\infty(M) \cong \Gamma^\infty(|\Omega|^1(M)). \quad (3.4.10)$$

La preuve du résultat suivant utilise le [137, lemme 14.28 p 377] qui dit qu'il existe toujours une 1-densité positive sur  $M$ . On montre ensuite que le fibré des densités est trivial :

**Proposition 3.4.6.** *Propriété du fibré des densités  $|\Omega|^1(M)$ , [137, lemme 14.27 p 376]*

---

Soit  $M$  une variété lisse, alors  $|\Omega|^1(M)$  est un fibré trivialisable de dimension 1 au dessus de  $M$ <sup>15</sup>.

De façon explicite, soit  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  une carte locale en  $x \in M$ . Alors il est possible de définir une section locale  $\nu \in \Gamma^\infty(|\Omega|^1(M))$  du fibré  $|\Omega|^1(M)$  en posant :

$$\nu_x = \phi^*(|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d|), \quad (3.4.11)$$

où  $(dx_i)$  est la base duale de  $(\partial_i)$ . L'équation (3.4.11) fait sens. En effet, voir [143, exemple 3.3 p 16]  $dx_i : y \in U \mapsto dx_i(y)$  est une 1-forme et  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$  retourne, par définition du produit wedge, une  $d$ -forme. Le fait de prendre le module permet en particulier à cette  $d$ -forme alternée (avec aussi le point 1) de l'exercice 31) de souscrire à l'équation (3.4.1).

Il est possible de définir l'intégration de ces 1-densités. Tout d'abord, si  $V \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert et  $f \in C_c^\infty(V)$  est de telle sorte que  $f|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d|$  est une 1-densité sur  $V$  alors on définit :

$$\int_V f|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d| = \int_V f(x)d\lambda(x), \quad (3.4.12)$$

où  $d\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $V$ .

La même définition fonctionne pour  $f \in C_c^0(V)$ , auquel cas on dit que  $f|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d| \in \Gamma^0(|\Omega|^1(M))$  est une 1-densité continue.

**Lemme 3.4.7.** Soit  $\Psi : \tilde{V} \rightarrow V$  un difféomorphisme alors :

$$\int_{\tilde{V}} (\Psi^* f) \cdot \Psi^*(|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d|) = \int_V f|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d|. \quad (3.4.13)$$

**Corollaire 3.4.8.** Soit  $M$  une variété lisse et  $U, \tilde{U}$  deux ouverts de  $M$ . Si  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$  sont deux cartes différentes et si  $\nu \in \Gamma^0(|\Omega|^1(M))$  a support dans  $U \cap \tilde{U}$  alors :

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \nu = \int_{\tilde{\phi}(\tilde{U})} (\tilde{\phi}^{-1})^* \nu. \quad (3.4.14)$$

*Démonstration.* D'une part sur  $U \cap \tilde{U}$  on peut écrire que la section  $\nu$  a la forme :

$$\phi^*(f|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d|), \quad (3.4.15)$$

pour  $f \in C_c^0(\phi(\tilde{U} \cap U))$ . On pose :

$$\Phi = \phi \circ \tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\phi}(\tilde{U} \cap U) \rightarrow \phi(\tilde{U} \cap U). \quad (3.4.16)$$

et on écrit :

$$(\tilde{\phi}^{-1})^* \nu = \Phi^*((\phi^{-1})^* \nu). \quad (3.4.17)$$

On applique ensuite le lemme 3.4.7. □

Ce corollaire implique que la définition suivante est licite, indépendante d'un choix d'atlas.

**Définition 3.4.9.** [137, p 378-379]

Soit  $M$  une variété lisse et  $\nu \in \Gamma^\infty(|\Omega|^1(M))$ . On se donne  $(U_i, \phi_i)$  un atlas pour  $M$  ainsi qu'une partition de l'unité  $(\chi_i)$  subordonnée à cet atlas. On définit alors :

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M (\phi_i^{-1})^*(\chi_i \nu). \quad (3.4.18)$$

Nous passons maintenant à l'équivalence entre les 1-densités lisses et les mesures lisses.

---

15. On dit "real line bundle over  $M$ " en anglais.

**Proposition 3.4.10.** Soit  $M$  une variété lisse et  $\nu \in \Gamma^\infty(|\Omega|^1(M))$ . L'application linéaire :

$$\mu_\nu : C_c^0(M) \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \int_M g\nu, \quad (3.4.19)$$

définit une mesure lisse sur  $M$ , soit avec nos conventions  $\mu_\nu \in \mathcal{M}^\infty(M)$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in M$  et  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  une carte en  $x$ . Soit  $g \in C_c^\infty(\phi(U))$ . Alors :

$$\mu_\nu(\phi^*g) = \int_U \phi^*g\nu \quad (3.4.20)$$

$$= \int_{\phi(U)} gd(\phi_*\nu) \quad (3.4.21)$$

$$= \int_{\phi(U)} g \cdot f_\phi d\lambda, \quad (3.4.22)$$

où  $f_\phi \in C^\infty(\phi(U))$ . L'égalité (3.4.21) est vraie par définition de la formule de transfert (3.4.6) et enfin l'égalité (3.4.22) est vraie par la définition 3.4.3. Ainsi pour tout  $h \in C_c^0(M)$  avec une partition de l'unité  $(\chi_i)$  subordonnée à un atlas, on peut écrire :

$$\mu_\nu(h) = \sum_i \mu_\nu(\chi_i h) \quad (3.4.23)$$

$$= \sum_i \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^*(\chi_i h) f_{\phi_i} d\lambda. \quad (3.4.24)$$

Cette application linéaire  $h \mapsto \mu_\nu(h)$  est continue sur  $C_c^0(M)$ , donc définit une mesure par le théorème de représentation de Riesz-Markov. En plus (3.4.12) montre que cette mesure est lisse. Cela prouve voir définition 3.4.3, que  $\mu_\nu$  définit une mesure lisse.  $\square$

On passe maintenant à la :

*preuve du théorème 3.4.5.* L'application :

$$\Gamma^\infty(|\Omega|^1(M)) \rightarrow \mathcal{M}^\infty(M), \nu \mapsto \mu_\nu, \quad (3.4.25)$$

est bien définie par la proposition 3.4.10 précédente. Réciproquement, soit  $(\phi_i, U_i)$  un atlas de  $M$  et  $\chi_i$  une partition de l'unité subordonnée à cet atlas. Tout élément  $\mu \in \mathcal{M}^\infty(M)$  s'écrit dans chaque carte selon :

$$(\phi_i)_*\mu = f_i d\lambda. \quad (3.4.26)$$

L'application inverse de (3.4.25) est :

$$\mu \mapsto \sum_i \chi_i \phi_i^*(f_i |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d|). \quad (3.4.27)$$

$\square$

### 3.4.2 Cas des submersions $\pi : M \rightarrow B_M$

On commence par une définition.

**Définition 3.4.11.** Famille de mesures fibrées

Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion entre deux variétés lisses. Une famille de mesures fibrées sur  $M$  est la donnée de  $\mu = (\mu_b)_{b \in B_M}$  avec  $\mu_b \in \mathcal{M}(\pi^{-1}(b))$ . On note  $\mathcal{M}_\pi(M)$  l'ensemble de ces familles de mesure.

**Exemple 33.** Soit  $\pi : U \times V \rightarrow V$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$  un fibré trivial au dessus de  $U$ . Alors on peut poser  $\mu = (\mu_b)$  avec  $\mu_b = \tilde{\lambda}$  la mesure de Lebesgue sur  $U$ .

On se rappelle la définition 3.3.18 de  $\pi$ -morphisme.

**Définition 3.4.12.** Poussé en avant d'une famille de mesures par un  $\pi$ -morphisme

Soit  $\pi_M : M \rightarrow B_M$  et  $\pi_N : N \rightarrow B_N$  deux submersions entre variétés lisses. Soit  $\alpha : M \rightarrow N$  un  $\pi$ -morphisme et  $\mu$  une famille de mesures fibrées sur  $M$ . On définit alors :

$$\alpha_*\mu = \left(\alpha_*\mu_{(\alpha^{(0)})^{-1}(b')}\right)_{b' \in B_N}, \quad (3.4.28)$$

une famille de mesures fibrées sur  $N$ .

**Remarque 23.** Soit  $U \subset M$  un ouvert, on peut définir  $\mu|_U$  par :

$$(\mu|_U)_b = \mu_b|_{U \cap \pi^{-1}(b)}. \quad (3.4.29)$$

**Définition 3.4.13.** Famille lisse de mesures lisses fibrées

Une famille de mesures lisses  $\mu \in \mathcal{M}_\pi(M)$  est lisse lorsque pour tout  $\pi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  morphisme alors il existe  $f_\phi \in C^\infty(\phi(U))$  telle que :

$$\phi_*\mu|_U = f_\phi \tilde{\lambda}, \quad (3.4.30)$$

où  $\phi$  est une carte de feuilletage. On note  $\mathcal{M}_\pi^\infty(M)$  l'ensemble de ces mesures.

**Théorème 3.4.14.** Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion entre deux variétés lisses. Alors :

$$\mathcal{M}_\pi^\infty(M) \cong \Gamma^\infty(|\Omega_\pi|), \quad (3.4.31)$$

où :

$$|\Omega_\pi| = \bigsqcup_{x \in M} |\Omega|^\perp(T_x \pi^{-1}(\pi(x))), \quad (3.4.32)$$

est le fibré des 1-densités tangentes aux  $\pi$ -fibres.

La démonstration de ce théorème suit les mêmes idées que celles du théorème 3.4.5.

**Remarque 24.** L'espace des sections du fibré des 1-densités tangentes aux  $\pi$ -fibres, que nous avons noté  $\Gamma^\infty(|\Omega_\pi|)$  sera noté  $C^\infty(M, \Omega_\pi)$  dans la suite du manuscrit, afin de coïncider avec les travaux de vEY [223]. Les sections dont le support est propre, voir définition, seront notées  $C_p^\infty(M, \Omega_\pi)$ . Si  $G$  est un groupoïde de Lie :

$$|\Omega_r| = \bigsqcup_{p \in G} |\Omega|^\perp(T_p G^r(p)). \quad (3.4.33)$$

**Remarque 25.** On a une inclusion :

$$C^\infty(M, \Omega_\pi) \cong \mathcal{M}_\pi^\infty(M) \hookrightarrow \mathcal{E}'_\pi(M), \quad (3.4.34)$$

par l'application :

$$\mu \mapsto \left(f \in C^\infty(M) \mapsto \mu(f) \in C^\infty(B_M)\right), \quad (3.4.35)$$

où :

$$\mu(f)(b) = \int_{\pi^{-1}(b)} f(x) d\mu_b(x). \quad (3.4.36)$$

On se place désormais sur un groupoïde de Lie  $G$ . On rappelle au lecteur que nous avons vu à la section 3.3.4 la convolution des distributions  $r$  ou  $s$ -fibrées.

**Théorème 3.4.15.** [138], [223, proposition 9], [240, lemme 2.2.6]

L'espace  $C_p^\infty(G, \Omega_r)$  (resp.  $C_p^\infty(G, \Omega_s)$ ) des sections proprement supportées du fibré des densités tangentes aux  $r$ -fibres (resp.  $s$ -fibres) est un idéal à droite dans l'espace des distributions  $r$ -fibrées proprement supportées (resp.  $s$ -fibrées proprement supportées).

**Remarque 26.** Pour saisir la philosophie du précédent théorème, prenons par exemple  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le groupoïde des paires de  $\mathbb{R}$  et donnons nous  $k \in \mathcal{E}'_r(G) \cong C^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ . Soit  $h \in C^\infty(\mathbb{R}) \otimes C^\infty(\mathbb{R})$ . On met de côté le caractère "proprement supporté" qui ne joue pas de rôle dans notre présent commentaire. Formellement on peut écrire les accouplements suivants et l'on constate :

$$k \star h(x, z) = \int_M k(x, y)h(y, z)dy \in C^\infty(\mathbb{R}) \otimes C^\infty(\mathbb{R}), \quad (3.4.37)$$

et

$$h \star k(x, z) = \int_M h(x, y)k(y, z)dy \in C^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}'(\mathbb{R}). \quad (3.4.38)$$

Cela nous conforte dans l'idée que  $C_p^\infty(G, \Omega_r)$  n'est pas un idéal bilatère dans  $\mathcal{E}'_r(G)$ .

**Théorème 3.4.16.** Soit  $\pi : M \rightarrow B_M$  une submersion lisse. L'espace des sections propres du fibré des densités du fibré des densités tangentes aux  $\pi$ -fibres  $C_p^\infty(M, \Omega_\pi)$  est dense dans les distributions  $\pi$ -fibrées  $\mathcal{E}'_\pi(M)$ .

*Démonstration.* 1. Nous allons procéder dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et  $B_M = \mathbb{R}^n$ . Soit donc  $u \in \mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \cong C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m))$ , par le théorème 3.3.15. Notons  $\phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m, |\Omega|^1)$  une suite de 1-densités à support compact qui converge vers  $\delta_0$  au sens de  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$  (une telle suite existe par le théorème classique [85, théorème 5.2.2]). Posons :

$$\tilde{\phi}_j(x) = \phi_j, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.4.39)$$

de sorte que  $\tilde{\phi}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \Omega_\pi)$  et a de plus support  $\pi$ -propre car de support compact constant en chaque fibre. Posons :

$$u_j = u \star \tilde{\phi}_j : x \mapsto \left( u|_{\pi^{-1}(x)} \star \tilde{\phi}_j(x) \right). \quad (3.4.40)$$

Pour comprendre correctement cette expression, le lecteur donnera provisoirement à  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  la structure de groupoïde de Lie en tant que fibré vectoriel trivial de base  $\mathbb{R}^n$  et de fibre  $\mathbb{R}^m$ <sup>16</sup>. La convolution en question est la convolution classique usuelle dans la variable  $\mathbb{R}^m$ , voir la section 3.3.4.

On constate que  $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \Omega_\pi)$ . Alors il reste à montrer que  $(u_j)$  converge vers  $u$  pour la topologie de l'espace  $C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m))$ , décrite à [138, l'équation (2.8) p762]. Pour ce faire on bénéficie du fait que l'application :

$$\Lambda : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{E}'_\pi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \cong C_\pi^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)), u \mapsto \left( \tilde{u} : x \mapsto u \right), \quad (3.4.41)$$

est continue et que LMV ont montré, voir [138, théorème 3.2 p773] que la convolution était une application bilinéaire continue en chaque variable. Par continuité de  $\Lambda$  on constate que :

$$\tilde{\phi}_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_0. \quad (3.4.42)$$

Par la continuité de la convolution et les équations (3.4.40), (3.4.42) on a la conclusion

2. Pour le cas général, on utilise une partition de l'unité et des ouverts trivialisants pour se ramener au cas précédent. La topologie de l'espace  $\mathcal{E}'_\pi(M)$  est décrite dans l'article de LMV [138, définition 2.6 et équation (2.9)].

□

16. Cette structure de groupoïde de Lie n'aura aucune signification plus profonde, ce sera juste une astuce pour démontrer le résultat, qui est purement topologique et n'a rien à voir avec aucune structure algébrique.

## Chapitre 4

# Équivalence du calcul de BG et de vEY

"The Heisenberg calculus is, in essence, nothing more than the working out of the consequences of an alternative filtration on the algebra of differential operators on  $M$ ." Erik van Erp, [221].

Dans ce chapitre nous allons montrer que le calcul pseudo-différentiel sur les variétés d'Heisenberg développé en 1983 par BG dans [13] et le calcul pseudo-différentiel groupoidal sur les variétés filtrées développé en 2017 par vEY dans [223] sont équivalents dans le cadre des variétés modèles, de contact et les feuilletages de codimension 1 tous trois des cas particuliers d'une variété d'Heisenberg. Rappelons de plus qu'une variété d'Heisenberg est une variété filtrée de pas 2, c'est à dire qui admet une filtration en hyperplans. La stratégie est la suivante, nous commençons par l'étude de la variété modèle  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ , où  $\mathbb{H}_n$  désigne le groupe d'Heisenberg de dimension  $n$  et de sorte que la variété  $M$  ait dimension  $d+1$  avec  $d = 2n+m$ . Nous montrons l'équivalence des calculs pseudo-différentiels susmentionnés pour cette variété modèle. Localement, les théorèmes de Darboux et de Frobenius affirment qu'une variété de contact et un feuilletage de codimension 1 se comportent comme une variété modèle. On peut ainsi en déduire l'équivalence des calculs pseudo-différentiels susmentionnés dans le cadre de ces variétés. Le calcul pseudo-différentiel sur les variétés d'Heisenberg de BG est introduit précisément au [13, chapitre 3 en particulier la section 10 p 90]. Le but du calcul de BG est de contenir les paramétrixes des opérateurs différentiels non-elliptiques (possiblement) hypo-elliptiques de la forme générale :

$$P = - \sum_{j=1}^d X_j^2 - i\lambda X_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j X_j + c_1, \quad (4.0.1)$$

où  $(X_j)$  sont des champs de vecteurs sur une variété d'Heisenberg,  $\lambda, \gamma_j, c_1$  sont des fonctions lisses. En particulier cette famille générale d'opérateurs différentiels contient l'opérateur sous-laplacien, les opérateurs  $\mathcal{L}_\mu$  - voir l'équation (1.2.13)- ou encore l'opérateur de la chaleur.

Nous donnons maintenant quelques citations clés pour illustrer l'intérêt du calcul d'Heisenberg. Tout d'abord, reprenons les mots de BG [13, introduction p3] :

"Our goal has been to develop an operator calculus which bears the same relation to  $\square_b$  as the classical elliptic pseudodifferential operator calculus bears to  $\Delta$ ...",

où  $\square_b$  est l'opérateur de Kohn-Laplace, une généralisation du laplacien sur les variétés  $CR$  (un exemple de variété de contact en géométrie différentielle complexe), voir à ce sujet [22, section 2.2.1 p26 et section 2.2.3 sur  $\square_b$ ], [79, p 917-919]. Les groupes osculants  $\mathcal{T}_H M_x$ , voir la définition 1.4.10, permettent d'approcher localement un opérateur différentiel en  $x \in M$  par un opérateur à coefficients gelés  $P^x$  invariant par translation sur  $\mathcal{T}_H M_x$  : On mime le comportement des opérateurs à coefficients constants sur  $(\mathbb{R}^d, +)$ , qui sont bel et bien invariant par translation. Ainsi, pour BG [13, p9] :

"The classical calculus is based on pointwise approximation of an operator  $P$  by freezing the coefficients of the principal part<sup>1</sup>. This procedure fails for  $\square_b$ . Folland and Stein noted that a possible alternative is to model  $P$  at point by an operator which is left invariant on a certain group<sup>2</sup>. The group structure is allowed to vary from point to point."

---

1. Et considérer la partie principale comme un opérateur différentiel à coefficients constants sur le groupe abélien  $(\mathbb{R}^d, +)$ .  
2. Lire [79, p 917-919].



puis [13, p8] :

"Folland and Stein introduced the use of the Heisenberg group as a good pointwise model for a  $CR$  (Cauchy-Riemann) manifold with non degenerate Levi form<sup>3</sup>. They determined kernels for the inverses of model operators on the group, which gave them explicitly the principal term of a parametrix for  $\square_b$  on a manifold with "Levi form". This knowledge of the kernel allowed them to deduce the first Hölder and  $L^p$  regularity results for the  $\square_b$ ."

De facto, grâce à leur calcul pseudo-différentiel sur les variétés d'Heisenberg, BG peuvent maintenant s'intéresser au cas particulier des variétés  $CR$  et réétudier l'opérateur  $\square_b$ , voir le [13, chapitre 4].

Plus récemment dans les années 2000, Ponge s'est intéressé au calcul pseudo-différentiel sur les variétés d'Heisenberg et au résidu de Wodzicki pour ces variétés [172], [174]. Dans [174, Introduction p400] Ponge dit du calcul de BG et de Taylor<sup>4</sup> :

"The Heisenberg calculus was built independently by Beals, Greiner [13] and Taylor [209] as the relevant pseudodifferential tool to study the main geometric operators on contact and  $CR$  manifolds, which fail to be elliptic, but may be hypoelliptic."

Nous supposons connues les notions de groupoïde tangent, distributions  $r$ -fibrées, ainsi que les travaux de vEY sur le calcul pseudo-différentiel groupoïdal. Le lecteur retrouvera l'exposition de ces outils au chapitre 3 et en introduction 1.4.1.

## 4.1 Variétés d'Heisenberg, de contact et théorèmes de Darboux

Dans cette section nous donnons le matériel nécessaire pour appréhender les variétés d'Heisenberg. Chemin faisant, nous rappelons le théorème de Darboux et Frobenius qui décrivent localement la structure d'une variété de contact et d'un feuilletage de codimension 1. Cette section est également très bien détaillée dans la thèse [220, § 2.7 p 19] de van Erp.

**Définition 4.1.1.** [13, définition (10.1) p 90] .

Une variété d'Heisenberg  $M$  est une variété filtrée lisse de dimension  $d + 1$  munie d'un fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$ , c'est à dire, un sous fibré  $\mathcal{V} \subset TM$ , de sorte que pour tout  $x \in M$ , la fibre  $\mathcal{V}_x$  ait codimension 1 dans l'espace tangent en  $x$ ,  $T_x M$ . Avec nos notations pour les variétés filtrées on a donc :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \mathcal{V} \leq H^2 = TM. \quad (4.1.1)$$

Une variété d'Heisenberg  $M$  a donc pas 2.

**Remarque 4.1.2.** Les variétés d'Heisenberg  $M$  de dimension  $d + 1$  ont une dimension homogène 1.4.14 de valeur  $d + 2$ .

Donnons maintenant quelques exemples de variétés d'Heisenberg dont on précisera la nature des groupes osculants associés.

**Exemple 34.** Variété d'Heisenberg modèle, [13, introduction p 5, chapitre 1 p12-13], [68, exemple 4.10]

On se donne  $M$  une variété d'Heisenberg de dimension  $d + 1$ . Les groupes osculants  $\mathcal{T}_H M_x$  sont isomorphes au produit de groupe  $\mathbb{H}_{n_x} \times \mathbb{R}^{m_x}$  avec la condition  $2n_x + m_x = d$ . Expliquons pourquoi. L'algèbre osculante en  $x$  est une algèbre de Lie graduée de pas 2 où la composante  $\mathfrak{t}_H^1 M_x$  est de codimension 1 dans  $\mathfrak{t}_H M_x$ . Fixons un vecteur  $Z$  non nul dans  $\mathfrak{t}_H^2 M_x$  de sorte qu'il soit une base de cet espace. Le crochet de Lie sur  $\mathfrak{t}_H M_x$  est entièrement déterminé par sa restriction à  $\mathfrak{t}_H^1 M_x$  :

$$[ , ] : \mathfrak{t}_H^1 M_x \times \mathfrak{t}_H^1 M_x \rightarrow \mathfrak{t}_H^2 M_x = \text{Vect}(Z) \cong \mathbb{R}, \quad (4.1.2)$$

ce qui entraîne que  $[ , ]$  est une forme bilinéaire antisymétrique sur  $\mathfrak{t}_H^1 M_x$ . Maintenant, il faut se souvenir du résultat d'algèbre bilinéaire rappelé en note de bas de page<sup>5</sup> et que l'on applique à la forme bilinéaire antisymétrique  $[ , ]$ . De cela et avec la formule de BCH, on conclue sur la loi de groupe osculant en  $x$ .

3. Voir [33, définitions 7.2.1, 7.2.2]

4. Dans ce manuscrit nous ne nous intéresserons néanmoins pas au calcul de Taylor [209].

5.

On appelle généralement  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ ,  $2n + m = d$ , une variété d'Heisenberg modèle et la précédente discussion justifie l'intérêt qu'on leur porte. La filtration sur  $M$  est donnée par :

$$\begin{cases} X_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \\ X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \forall 1 \leq j \leq d, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

où  $(b_{jk})$  est une matrice anti-symétrique et on pose  $\mathcal{V} = \langle X_1, \dots, X_d \rangle$  le sous fibré en hyperplans. Lorsque  $n = 0$ , on permet la convention  $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}$ . Ainsi les groupes osculants, dits "y-groupes" dans la terminologie de BG [13, p100], peuvent osciller de façon  $C^\infty$  entre une structure commutative et une structure non commutative. Les champs (4.1.3) sont invariants par translation à gauche pour ces y-groupes, voir [13, proposition (1.16) p 13]. On discutera plus longuement de cela à la section 4.3.1, dont le lemme 4.3.1.

**Exemple 35.** [68, exemple 4.7 p 30]

On se donne la variété  $M = \mathbb{R}^3$  et on définit les champs vectoriels :  $X = \partial_x + y^2 \partial_z$ ,  $Y = \partial_y$  et  $Z = \partial_z$ . On prend le sous fibré en hyperplans  $H^1 = \langle X, Y \rangle$  et  $H^2 = TM$ , on vérifie que  $[X, Y] = -2yZ$ . Ainsi  $M$  est une variété d'Heisenberg de pas 2. On y retrouve les deux cas extrêmes de groupes osculants : Si  $y = 0$  alors le groupe osculant est abélien isomorphe à  $\mathbb{R}^3$  sinon il est isomorphe au groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_1$ . Pour le voir, nous allons détailler la structure de l'algèbre osculante, faite de deux composantes :

$$\mathfrak{t}_H M = \mathfrak{t}_H^1 M \oplus \mathfrak{t}_H^2 M. \quad (4.1.4)$$

Soit  $\underline{x}_0 = (x, 0, z)$  montrons que l'algèbre osculante en  $\underline{x}_0$ , notée pour rappel  $\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}_0}$ , est abélienne. On s'intéresse aux crochets respectifs en  $\underline{x}_0$  sur les composantes  $\mathfrak{t}_H^1 M_{\underline{x}_0}$  et  $\mathfrak{t}_H^2 M_{\underline{x}_0}$ . Le crochet :

$$[\cdot, \cdot]_{\underline{x}_0} : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M_{\underline{x}_0}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M_{\underline{x}_0}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M_{\underline{x}_0}), \quad (4.1.5)$$

est tout le temps nul car  $[X_{\underline{x}_0}, Y_{\underline{x}_0}] = 0$  et  $[X_{\underline{x}_0}, X_{\underline{x}_0}] = [Y_{\underline{x}_0}, Y_{\underline{x}_0}] = 0$ .

De plus pour  $i \in \{1, 2\}$  le crochet :

$$[\cdot, \cdot]_{\underline{x}_0} : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M_{\underline{x}_0}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^i M_{\underline{x}_0}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M_{\underline{x}_0}), \quad (4.1.6)$$

est tout le temps nul aussi car  $Z$  commute à  $X$  et  $Y$  et bien entendu, on a toujours  $[X_{\underline{x}_0}, Y_{\underline{x}_0}] = 0$ . Donc par recollement sur  $\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}_0}$ , le crochet est nul et l'algèbre osculante en  $\underline{x}_0$  est bien abélienne. En revanche si  $\underline{x}_0 = (x, y, z)$  avec  $y \neq 0$  alors on a que le crochet :

$$[\cdot, \cdot]_{\underline{x}_0} : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}_0}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}_0}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}_0}), \quad (4.1.7)$$

vérifie la relation :

$$[X_{\underline{x}_0}, Y_{\underline{x}_0}]_{\underline{x}_0} = -2yZ_{\underline{x}_0}. \quad (4.1.8)$$

Donc l'algèbre osculante en  $\underline{x}_0$  est isomorphe à une algèbre de Lie d'Heisenberg.

On rappelle que par définition, une 1-forme  $\theta \in \Omega^1(M)$  est une section lisse du fibré des 1-tenseurs covariants alternés<sup>6</sup>  $\Lambda^1(TM)$  soit :

$$\Omega^1(M) := \Gamma^\infty(\Lambda^1(TM)). \quad (4.1.9)$$

On rappelle que l'opération *wedge* sur les formes, notée  $\wedge$ , est définie dans [137, équation (12.3) p 299, p 302-303], ou [143, définition 2.5 p 8].

**Définition 4.1.4.** Variété de contact, [8, appendice 4], [137, proposition 22.24 p 582 (seconde édition)]

**Lemme 4.1.3.** *Forme normale*

Soit  $b$  une forme bilinéaire antisymétrique sur un espace vectoriel  $V$  de dimension  $d$ . On peut trouver une base  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T_1, \dots, T_m)$  avec  $d = 2n + m$  telle que  $b(X_i, Y_i) = -b(Y_i, X_i) = 1$  et tout autre accouplement est nul.

6. Voir par exemple [137, p 303 "differential forms on manifold"]

Une variété de contact est une variété d'Heisenberg de dimension  $d + 1$ ,  $d = 2n$ , dont le sous fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$ , dit sous-fibré en hyperplans de contact, est localement le noyau d'une 1-forme de contact c'est à dire une 1-forme  $\theta \in \Omega^1(M)$  de sorte que :

$$\theta \wedge \underbrace{d\theta \wedge \dots \wedge d\theta}_{n \text{ fois}} \text{ est nulle part égal à zéro.} \quad (4.1.10)$$

Ainsi on a  $\mathcal{V} = \ker(\theta)$ . On note aussi  $(d\theta)^n$  pour  $\underbrace{d\theta \wedge \dots \wedge d\theta}_{n \text{ fois}}$ .

**Remarque 27.** *Au cours de ses lectures sur le sujet des variétés de contact, le lecteur pourra rencontrer la notion de champ vectoriel de Reeb, nous ne l'aborderons pas ici. On pourra consulter [9, section 2.2 p3].*

**Lemme 4.1.5.** *L'ensemble  $\mathcal{V} = \ker(\theta)$  défini ci-dessus est un sous-fibré en hyperplans de  $TM$ .*

*Démonstration.* Rappelons que l'application  $\theta$  peut être vue comme le morphisme de fibré :

$$\theta : \Gamma^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(M) = \Gamma^\infty(M \times \mathbb{R}), X \mapsto \left( x \mapsto \theta_x(X_x) \right), \quad (4.1.11)$$

où l'on rappelle que  $C^\infty(M)$  peut être vu comme les sections lisses du fibré trivial  $M \times \mathbb{R}$ . On peut définir son noyau comme étant justement le recollement sur  $M$  des noyaux des applications linéaires sur chaque fibre :

$$\ker(\theta) := \bigsqcup_{x \in M} \ker(\theta_x). \quad (4.1.12)$$

L'application  $\theta$  est de rang constant <sup>7</sup> égal à 1 car ne s'annule jamais. En effet, pour  $x \in M$  :

$$\left( \theta \wedge \underbrace{d\theta \wedge \dots \wedge d\theta}_{n \text{ fois}} \right)_x \neq 0. \quad (4.1.13)$$

Raisonnant par l'absurde et au regard de la définition du  $\wedge$ , voir [143, définition 2.5 p 8], il est clair que cela contraint forcément  $\theta_x \neq 0$ . Comme  $\theta_x$  est une forme linéaire sur  $T_x M$  et qu'elle est non nulle, elle est de rang 1. En vertu de la proposition B.0.29, on a que  $\ker(\theta) = \mathcal{V}$  est bien un sous fibré lisse de  $TM$ . De plus, chaque fibre  $\mathcal{V}_x = \ker(\theta_x)$  est le noyau de la forme linéaire  $\theta_x \in (T_x M)^*$ , donc un hyperplan par définition. Finalement,  $\mathcal{V}$  est un sous-fibré en hyperplans.  $\square$

**Proposition 4.1.6.** [149, exemple 2.3]

*Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $d + 1$ ,  $d = 2n$ , muni d'un sous fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  de  $TM$ . Les définitions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$M$  est une variété de contact.*
2. *L'algébroïde de Lie osculante  $\mathfrak{t}_H M$  est un fibré en algèbres de Lie d'Heisenberg (trivialisable au sens où le fibré est localement isomorphe à  $U \times \mathfrak{h}_n$  pour  $U$  un ouvert de  $M$ ).*
3. *Pour tout  $x \in M$ , pour tout  $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$  il existe  $Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$  de sorte que  $[X, Y]_x \notin \mathcal{V}_x$ .*

Dans la preuve qui suit, on note  $\mathfrak{S}(n)$  l'ensemble des permutations de 1 à  $n$ . On note  $\epsilon(\sigma)$  la signature d'une telle permutation. On note  $\mathfrak{S}(p, q)$  l'ensemble des *shuffles* au sens de [143, définition 2.4], c'est à dire l'ensemble des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}(p + q)$  telles que :

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p), \text{ et } \sigma(p + 1) < \dots < \sigma(p + q). \quad (4.1.14)$$

*Preuve de la proposition 4.1.6. Montrons 3)  $\Rightarrow$  2).* Par définition, l'algèbre osculante en  $x$  est  $\mathfrak{t}_H M_x = \mathcal{V}_x \oplus T_x M / \mathcal{V}_x$  et on sait déjà que c'est un fibré en algèbres de Lie graduées nilpotentes. Il reste donc seulement à montrer que chaque fibre de  $\mathfrak{t}_H M$  est isomorphe à l'algèbre de Lie d'Heisenberg. On constate que le crochet de Lie sur les fibres :

$$[ , ] : \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x \rightarrow T_x M / \mathcal{V}_x, \quad (4.1.15)$$

7. Cela veut dire que l'application  $p \in M \mapsto \dim\left(\text{Im}(\theta_p|_{T_p M})\right)$  est constante.

est bilinéaire antisymétrique et non dégénéré. En effet le noyau de crochet est :

$$\ker([\ , \ ]) = \left\{ X \in \mathcal{V}_x, \forall Y \in \mathcal{V}_x, [X, Y] = 0_{T_x M / \mathcal{V}_x} \right\} \quad (4.1.16)$$

$$= \left\{ X \in \mathcal{V}_x, \forall Y \in \mathcal{V}_x, [X, Y] \in \mathcal{V}_x \right\} \quad (4.1.17)$$

$$= \{0\}, \quad (4.1.18)$$

par hypothèse sur  $\mathcal{V}$ . Comme  $\dim(T_x M / \mathcal{V}_x) = 1$  on se donne une base  $Z(x)$  de cet espace, et  $Z(x)$  est identifié à 1 dans  $\mathbb{R}$ . Alors<sup>8</sup>, il existe une base  $(X_1(x), \dots, X_n(x), Y_1(x), \dots, Y_n(x))$  de  $\mathcal{V}_x$  de sorte que  $[X_i(x), X_j(x)] = [Y_i(x), Y_j(x)] = 0$  et  $[X_i(x), Y_j(x)] = \delta_{ij}1$  et par identification, on a  $[X_i(x), Y_j(x)] = \delta_{ij}Z(x)$ . D'où la conclusion.

**Montrons que 1)  $\Rightarrow$  3).** Soit  $\theta$  la 1-forme de contact de sorte que  $\mathcal{V} = \ker(\theta)$ . Soit  $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$ . On pose  $X_1 = X$  et on complète - voir [137, proposition 10.15 p 258, seconde édition] - cet élément dans un repère local  $(X_1, \dots, X_{2n})$  pour  $\mathcal{V}$ . Comme  $\mathcal{V}$  est un sous fibré en hyperplans, on peut trouver  $X_{2n+1} \in \Gamma^\infty(TM)$  avec  $\theta(X_{2n+1}) \neq 0$ . Calculons :

$$\theta \wedge (d\theta)^n(X_{2n+1}, X_1, \dots, X_{2n}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(1, 2n)} \epsilon(\sigma) \theta(X_{\sigma(2n+1)}) (d\theta)^n(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(2n)}) \quad (4.1.20)$$

$$= \theta(X_{2n+1}) (d\theta)^n(X_1, \dots, X_{2n}), \quad (4.1.21)$$

puisque  $\theta$  annule  $\mathcal{V}$  par définition, de sorte qu'il ne reste que le *shuffle* qui change 1 en  $2n+1$  et qui est l'identité sur les autres entiers. Par hypothèse sur  $\theta$ , on rappelle que  $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$  en tout point. Ceci implique que :

$$(d\theta)^n(X_1, \dots, X_{2n}) \neq 0. \quad (4.1.22)$$

Or par définition :

$$(d\theta)^n(X_1, \dots, X_{2n}) = c \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(2n)} \epsilon(\sigma) d\theta(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) d\theta(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}) \dots d\theta(X_{\sigma(2n-1)}, X_{\sigma(2n)}), \quad (4.1.23)$$

où  $c$  est une constante combinatoire. Avec (4.1.22) on en déduit qu'il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}(2n)$  de sorte que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  alors :

$$d\theta(X_{\sigma(2i-1)}, X_{\sigma(2i)}) \neq 0. \quad (4.1.24)$$

A fortiori il existe  $i_0 \in \{1, \dots, 2n\}$  de sorte que :

$$d\theta(X_1, X_{i_0}) \neq 0. \quad (4.1.25)$$

De plus on sait, [137, proposition 12.17 p 310], que :

$$\begin{aligned} d\theta(X_1, X_{i_0}) &= X_1(\theta(X_{i_0})) - X_{i_0}(\theta(X_1)) - \theta([X_1, X_{i_0}]) \\ &= -\theta([X_1, X_{i_0}]), \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

car  $\theta$  annule  $\mathcal{V}$ . D'où avec les équations (4.1.25) et (4.1.26) il vient :

$$\theta([X_1, X_{i_0}]) \neq 0. \quad (4.1.27)$$

On a bien trouvé l'élément  $Y = X_{i_0}$  tel que pour tout  $x$  :

$$[X, Y]_x \notin \mathcal{V}_x. \quad (4.1.28)$$

8. Un résultat classique d'algèbre bilinéaire affirme que toute forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée :

$$b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.1.19)$$

se représente dans une base  $\beta := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  de sorte que  $w(x_i, x_j) = w(y_i, y_j) = 0$  et  $w(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ .

**Montrons 2)  $\Rightarrow$  1).** Supposons que  $\mathfrak{t}_H M$  soit un fibré en algèbre de Lie d'Heisenberg. On fixe un repère local  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z)$  de  $\mathfrak{t}_H M$  de sorte que localement :

$$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0, [X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z. \quad (4.1.29)$$

Cela correspond à avoir choisi une trivialisaton du fibré en algèbre de Lie d'Heisenberg. En particulier cela revient à dire que  $Z \in \mathfrak{t}_H^2 M$ . On rappelle que  $\mathfrak{t}_H^2 M$  est un fibré quotient, mais pas un sous fibré de  $TM$ . Il faut donc relever  $Z$  en un champ  $\tilde{Z} \in \Gamma^\infty(TM)$  - on peut le faire au moins localement avec le lemme B.0.13 - de sorte que  $[\tilde{Z}] = Z \in \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M)$ . On définit alors une 1-forme  $\theta$  en posant :

$$\theta_x(\tilde{Z}_x) = 1, \theta_x(X_i(x)) = \theta_x(Y_i(x)) = 0. \quad (4.1.30)$$

Il reste à vérifier que :

$$\theta \wedge (d\theta)^n(\tilde{Z}, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) \neq 0, \quad (4.1.31)$$

et pour ce faire on procède comme ci-dessus.  $\square$

**Corollaire 4.1.7.** [220, corollaire 25 p 22] Soit  $M$  une variété de contact de dimension  $d+1$ ,  $d = 2n$ . Tous les groupes osculants sont isomorphes à  $\mathbb{H}_n$ .

*Démonstration.* Il suffit de se souvenir que par définition, chaque groupe osculant est l'algèbre osculante munie de la loi de BCH.  $\square$

**Exemple 36.** Les variétés modèles 34 ne sont pas des variétés de contact par contraposée du corollaire 4.1.7 précédent, sauf si  $m = 0$ . Tous les groupes de Lie nilpotents ne peuvent pas être munis d'une structure de contact invariante à gauche par translation pour la loi du groupe. Les deux exemples suivants illustrent le fait qu'on peut par exemple munir un groupe de Lie abélien, a fortiori nilpotent, d'une structure de contact tant que l'on exige pas que le sous-fibré en hyperplans généré par la forme de contact soit invariant par translation pour la loi du groupe :

1. On peut munir  $(\mathbb{R}^3, +)$  abélien du sous-fibré en hyperplans  $\mathcal{V} = \langle \partial_x, \partial_y \rangle$ . Comme il est invariant par translation, alors on ne peut mettre une structure de contact. En effet, puisque le groupe de Lie dont il est question est abélien, son algèbre de Lie est abélienne et donc tous les champs commutent pour le crochet de Lie. Il n'y a donc aucune chance de réaliser la condition 3) de la proposition 4.1.6.
2. On peut munir  $(\mathbb{R}^3, +)$  abélien du sous-fibré en hyperplans  $\mathcal{V} = \langle \partial_x, \partial_y + x\partial_z \rangle$ , qui n'est pas invariant par translation à gauche et forme un sous-fibré en hyperplans de contact, en raison du point 3) de la proposition 4.1.6.

**Exemple 37.** [35, p 37] Le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n$  est une variété de contact pour la forme de contact :

$$\theta = dz + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (y_j dx_j - x_j dy_j) \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n+1}). \quad (4.1.32)$$

Prenons  $n = 1$  de sorte que  $\theta = dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy)$ . Calculons  $\mathcal{V} = \ker(\theta)$ . Soit  $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ . Par définition :

$$\ker(\theta_{\underline{x}_0}) := \{X \in T_{\underline{x}_0}\mathbb{R}^3, \theta_{\underline{x}_0}(X) = 0\}. \quad (4.1.33)$$

Soit  $X_{\underline{x}_0} = (\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z)|_{\underline{x}_0}$  un élément de  $T_{\underline{x}_0}\mathbb{R}^3$  tel que  $\theta_{\underline{x}_0}(X) = 0$ . Alors utilisant que  $(dz, dx, dy)$  est la base duale de  $(\partial_z, \partial_x, \partial_y)$ , on calcule comme suit :

$$\theta_{\underline{x}_0}(X) = 0 \Leftrightarrow [dz + \frac{1}{2}(y_0 dx - x_0 dy)]((\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z)|_{\underline{x}_0}) = 0 \quad (4.1.34)$$

$$\Leftrightarrow \gamma + \frac{1}{2}y_0\alpha - \frac{1}{2}x_0\beta = 0 \quad (4.1.35)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}y_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2}x_0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.36)$$

De fait :

$$\ker(\theta_{\underline{x}_0}) = \text{Vect}((\partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z)|_{\underline{x}_0}, (\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z)|_{\underline{x}_0}). \quad (4.1.37)$$

Ainsi  $\mathcal{V} = \ker(\theta)$  est engendré par les champs de vecteurs  $(\partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z, \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z)$ .

---

**Exemple 38.** *Variété CR*

Les variétés CR sont des cas particuliers des variétés de contact donc a fortiori des exemples de variétés d'Heisenberg. Pour une définition précise, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [13, p 151], [83, p 431], [222, exemple p 1653], [33, définition 7.1.1 p 165], [17, section 7.4 p 120].

Le bord d'un domaine pseudo-convexe<sup>9</sup> de  $\mathbb{C}^n$  possède une structure particulièrement intéressante :

**Théorème 4.1.8.** *Bord d'un domaine pseudo-convexe de  $\mathbb{C}^n$*

Soit  $D \subset \mathbb{C}^n$  un domaine pseudo-convexe. On pose  $M = \partial D$ . Alors  $M$  est une variété CR. En particulier, pour tout  $x \in M$  on a :

$$\mathcal{T}_H M_x \cong \mathbb{H}_{2n-1}. \quad (4.1.38)$$

*Démonstration.* D'après le théorème [33, 7.2.3 p 169], la frontière  $M$  d'un tel domaine est bien une variété CR pseudo-convexe. En particulier c'est une variété de contact. La conclusion s'ensuit par la proposition 4.1.6.  $\square$

Il est temps de faire un petit interlude sur le groupe d'Heisenberg, le lecteur ayant sûrement saisi à ce stade du manuscrit à quel point il est un objet essentiel dans de nombreux domaines mathématiques. Le livre [213, p 5-7] de Thangavelu explique non seulement la connection du groupe d'Heisenberg avec certains domaines de  $\mathbb{C}^n$ , comme le domaine de Siegel et la boule unité, mais aussi son importance en mécanique quantique où il apparaît lors du produit des opérateurs  $e^{ipD}$  et  $e^{iqX}$  décrits dans la section 1.1. Donnons quelques précisions largement non-exhaustives pour satisfaire la curiosité du lecteur :

1. Plus précisément, se servant des formules (1.1.5) et (1.1.6), on montre que :

$$\begin{aligned} e^{i(t_1+p_1D+q_1X)} e^{i(t_2+p_2D+q_2X)} &= e^{i(t_1+t_2)} e^{i(q_1X+p_1D)} e^{i(q_2X+p_2D)} \\ &= e^{i(t_1+t_2)} e^{i\frac{q_1p_1}{2}} e^{iq_1X} e^{ip_1D} e^{i\frac{p_2q_2}{2}} e^{iq_2X} e^{ip_2D} \\ &= e^{i\left(t_1+t_2+\frac{1}{2}(p_1q_1+p_2q_2)\right)} e^{iq_1X} e^{ip_1q_2} e^{iq_2X} e^{ip_1D} e^{ip_2D} \\ &= e^{i\left(t_1+t_2+\frac{1}{2}(p_1q_1+p_2q_2)+p_1q_2\right)} e^{i(q_1+q_2)X} e^{i(p_1+p_2)D} \\ &= e^{i\left(t_1+t_2+\frac{1}{2}(p_1q_1+p_2q_2)+p_1q_2-\frac{1}{2}(p_1+p_2)(q_1+q_2)\right)} e^{i\left((q_1+q_2)X+(p_1+p_2)D\right)} \\ &= e^{i\left(t_1+t_2+\frac{1}{2}(p_1q_2-p_2q_1)+(p_1+p_2)D+(q_1+q_2)X\right)}, \end{aligned}$$

voir [210, équation (1.25) p 44], [104, équation (14.10) p 284] ce qui conduit à définir la loi de groupe d'Heisenberg bien connue :

$$(p_1, q_1, t_1)(p_2, q_2, t_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2, t_1 + t_2 + \frac{1}{2}(p_1q_2 - p_2q_1)). \quad (4.1.39)$$

Parfois, on rencontrera le "*groupe d'Heisenberg polarisé*", voir [213, équation (1.1.2) p 3] ou [80, équation (1.20) p 19]. Il s'agit de l'ensemble  $\mathbb{R}^3$  muni de la loi de groupe donnée par :

$$(p_1, q_1, t_1)(p_2, q_2, t_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2, t_1 + t_2 + p_2q_1), \quad (4.1.40)$$

qui est en réalité isomorphe à la loi (4.1.39), voir [213, p 4] via l'application :

$$(p_1, q_1, t_1) \mapsto (p_1, q_1, t + \frac{1}{2}p_1q_1). \quad (4.1.41)$$

Toutes les précédentes formules fonctionnent en dimension supérieure, le produit étant remplacé par le produit scalaire.

2. Passons maintenant au domaine de Siegel (aussi dit *demi-plan supérieur généralisé*). D'après Folland [79, p 918] :

---

9. Voir la [33, section 3.4] pour la définition de pseudo-convexe.

"As we all know, the unit disc  $B^1$  in  $\mathbb{C}$  is holomorphically equivalent to the upper half plane  $S_1$  via a linear fractional transformation, and the boundary of  $D^1$  - the real axis - can be naturally identified with a group of holomorphic automorphisms of  $D^1$ , namely the horizontal translations. It was discovered by Pjateckii-Šapiro [170] in 1961 that an analogue of this holds in  $\mathbb{C}^n$ ."

Le domaine de Siegel est défini comme étant [33, équation (7.3.1) p 170] :

$$S_{n+1} = \{(z, t) \in \mathbb{C}^{n+1}, \operatorname{Im}(t) > |z|^2\} \quad (4.1.42)$$

alors on montre que  $\mathbb{H}_n$  peut être réalisé comme un sous-groupe des translations (affines) holomorphes bijectives sur  $S_{n+1}$  (des automorphismes holomorphes de  $S_{n+1}$  dans lui-même, noté  $\operatorname{Aut}(S_{n+1})$ ), voir [33, § 10.1 p 234]. Chemin faisant, on montre qu'on peut identifier  $\mathbb{H}_n$  avec  $\partial S_{n+1}$ , c'est à dire, la frontière du domaine de Siegel possède une structure de groupe. Il suffit de considérer l'application :

$$\pi : \mathbb{H}_n \rightarrow \partial S_{n+1}, (z, t) \mapsto (z_1, \dots, z_n, t + i|z|^2), |z|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2. \quad (4.1.43)$$

Notons enfin que la transformée de Cayley, [33, p 170] :

$$\Phi : B_{n+1} \rightarrow S_{n+1}, w = (z, t) \mapsto i \frac{e_n + w}{1 - t} = \left( \frac{iz_1}{1-t}, \dots, \frac{iz_n}{1-t}, i \frac{1+t}{1-t} \right), e_n = (0, \dots, 0, 1), \quad (4.1.44)$$

réalise un biholomorphisme entre  $S_{n+1}$  et la boule unité  $B_{n+1}$  (ouverte) dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Vérifions que l'application  $\Phi$  est bien définie. Soit  $(z, t) \in B_{n+1}$  montrons que :

$$\operatorname{Im}\left(i \frac{1+t}{1-t}\right) > \sum_{k=1}^n \left| \frac{iz_k}{1-t} \right|^2. \quad (4.1.45)$$

En effet :

$$\operatorname{Im}\left(i \frac{1+t}{1-t}\right) = \operatorname{Im}\left(i \frac{1 + 2i \operatorname{Re}(t) - |t|^2}{|1-t|^2}\right) \quad (4.1.46)$$

$$= \frac{1 - |t|^2}{|1-t|^2}. \quad (4.1.47)$$

Or, puisque  $|z|^2 + |t|^2 < 1$  alors :

$$1 - |t|^2 > \sum_{k=1}^n |z_k|^2. \quad (4.1.48)$$

Utilisant (4.1.47) et (4.1.48), on en déduit (4.1.45).

On pourra, au sujet de ces précédentes identifications, aussi consulter [80, p 74-76]. L'article [79, p 917-919] de Folland, explique avec clarté et concision l'intérêt du groupe d'Heisenberg et a fortiori de l'opérateur  $\mathcal{L}_\mu = -\frac{1}{2}\Delta_H + i\mu Z$  sur  $\mathbb{H}_n$  pour approcher localement l'opérateur  $\square_b$  défini sur une hypersurface fortement pseudo-convexe. En complément de ces informations, le [33, chapitre 10 p 234] du livre de Chen et Shaw s'intéresse aux solutions fondamentales de l'opérateur  $\square_b$  sur  $\mathbb{H}_n$  et un calcul bien détaillé offre que sur  $\mathbb{H}_n$ ,  $\square_b = \mathcal{L}_\mu$  pour un bon paramètre  $\mu$ , [33, p 235-237]. Rappelons au lecteur qu'historiquement, c'est Folland en 1973 [77] et puis Folland et Stein en 1974 [83, § 6 p 439] qui ont calculé les solutions fondamentales de  $\mathcal{L}_0$  respectivement  $\mathcal{L}_\mu$ , pour un bon paramètre  $\mu$  (voir page 443).

On rappelle maintenant le théorème de Darboux.

**Théorème 4.1.9.** *Théorème de Darboux [8, Appendice 4, section H p 362], [35, p 37], [222, théorème 1 p 1653], [137, théorème 22.31 p 584], [220, théorème 24 p 22]*

Toute variété de contact  $M$  de dimension  $d + 1$ ,  $d = 2n$ , est localement difféomorphe à la variété de contact  $\mathbb{H}_n$  pour la forme de contact (4.1.32). Plus précisément pour tout point  $x \in M$  il existe un ouvert  $U \subset M$  et une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  telle que la forme de contact sur  $M$  est égale au tiré en arrière par la carte  $\phi$  de la forme de contact canonique (4.1.32) sur  $\mathbb{H}_n$ .

On rappelle que par définition, [137, p 495], le terme "distribution" désigne un sous-fibré lisse du fibré tangent.

**Définition 4.1.10.** Feuilletage, [220, § 2.7 p 19]

Un feuilletage (ou une variété feuilletée) lisse  $(M, \mathcal{V})$  est la donnée d'une distribution  $\mathcal{V} \subset TM$  intégrable c'est à dire une distribution dont les espaces de sections satisfont la condition d'involutivité [137, p 496] :

$$[\Gamma^\infty(\mathcal{V}), \Gamma^\infty(\mathcal{V})] \subset \Gamma^\infty(\mathcal{V}). \quad (4.1.49)$$

La codimension du feuilletage est la codimension des fibres de la distribution  $\mathcal{V}$ .

**Remarque 4.1.11.** 1. Cette situation (4.1.49) est l'opposé du point 3) de la proposition 4.1.6 où on peut toujours trouver un champ vectoriel dans  $\mathcal{V}$  dont le crochet avec un autre champ vectoriel de  $\mathcal{V}$  sort de  $\mathcal{V}$ .

2. La notion d'involutivité est très reliée à celle d'intégrabilité. Rappelons qu'une distribution lisse  $\mathcal{V} \subset TM$  est dite intégrable lorsqu'il existe une sous variété immergée  $N \subset M$  dite variété intégrale, de sorte que pour tout  $p \in N$ ,  $T_p N = \mathcal{V}_p$ . Tandis que la [137, proposition 19.3 p 497] montre que toute distribution intégrable est involutive, le [137, théorème de Frobenius 19.10 p 501] montre la réciproque. En fait le théorème montre qu'il y a complète intégrabilité, une condition plus forte mettant en jeu l'existence de cartes de feuilletage, voir [137, p 500-501].

3. Soit  $(M, \mathcal{V})$  un feuilletage de codimension un. Avec la filtration  $H^1 = \mathcal{V}$  et  $H^2 = TM$ , la variété  $M$  est bien une variété d'Heisenberg.

On montre maintenant que l'algèbroïde de Lie osculante d'un feuilletage de codimension un est un fibré en algèbre de Lie abélienne.

**Proposition 4.1.12.** Groupes osculants d'un feuilletage de codimension 1, [220, proposition 20 p 19]

Une distribution de codimension un  $\mathcal{V} \subset TM$  est un feuilletage (c'est à dire est intégrable) si et seulement si tous les groupes osculants sont abéliens.

Cette proposition fonctionne en fait peu importe la codimension du feuilletage.

*Démonstration.* 1. Supposons que  $(M, \mathcal{V})$  soit une variété feuilletée de codimension un. Posons la filtration  $H^1 = \mathcal{V}$  et  $H^2 = TM$ . Soit  $X, Y \in \Gamma^\infty(H^1)$  alors par la condition (4.1.49),  $[X, Y] \in \Gamma^\infty(H^1)$ . Ce crochet est nul lorsqu'on le regarde dans le quotient  $\Gamma^\infty(H^2/H^1) = \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M) \cong \Gamma^\infty(H^2)/\Gamma^\infty(H^1)$  où l'isomorphisme est vrai en raison du corollaire B.0.14. Ainsi l'application :

$$[ , ] : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M), \quad (4.1.50)$$

est nulle. Par extension, le crochet  $[ , ] : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H M)$  est nul. Par conséquent, les crochets  $[ , ]_x$  sur les fibres sont nuls eux aussi, ce n'est autre que dire que les algèbres osculantes en  $x$  sont abéliennes.

2. La réciproque se trouve dans l'ouvrage de van Erp mentionné dans le titre de cette proposition. □

**Théorème 4.1.13.** Théorème de Frobenius, [137, théorème 19.10 p 501]

Si une distribution est involutive au sens de (4.1.49) alors on a un feuilletage soit encore la donnée de cartes particulières, voir [137, p 500],  $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  avec  $\phi_*(D) = \langle \partial_i, i \in \{1, \dots, 2n\} \rangle$  où  $(\partial_i)$  sont les champs usuels sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ .



## 4.2 Philosophie du calcul d'Heisenberg de BG

### 4.2.1 Des opérateurs sur $\mathbb{R}^d$ abélien...

On constate qu'il y a un lien entre les opérateurs différentiels à coefficients constants et les opérateurs  $P : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$  invariant à gauche par translation pour la loi de groupe sur  $(\mathbb{R}^d, +)$ . Si  $L_x : y \mapsto x + y$  désigne la translation par  $x$  dans le groupe  $(\mathbb{R}^d, +)$  abélien - la translation à gauche - alors on dit que  $P$  est invariant à gauche par translation lorsque :

$$P(L_x^* f) = L_x^* P(f), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (4.2.1)$$

Les champs de vecteurs invariants par translation à gauche sur  $(\mathbb{R}^d, +)$  sont ceux à coefficients constants, [137, exemple 4.22 p 96]. De cela on en déduit :

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $P$  un opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^d$ . Sont équivalentes :*

1.  $P$  est à coefficients constants.
2.  $P$  est invariant par translation sur le groupe  $(\mathbb{R}^d, +)$ .

Concernant le théorème suivant on pourra aussi lire [168, l'exercice 18.14 p 52].

**Théorème 4.2.2.** *Endomorphisme de  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  invariant par translation*

*Soit  $P : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$  un opérateur continu à noyau de Schwartz dans  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d))$ . Alors sont équivalentes :*

1.  $P$  est invariant par translation.
2. Il existe  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  de sorte que  $Pf = u \star f$

*Démonstration.* **Pour le point 2)  $\Rightarrow$  1).** Grâce au [85, théorème 5.2.1 p 53], on sait que le produit de convolution d'une distribution à support compact  $u$  avec une fonction lisse  $f$  est une fonction lisse donnée pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  par :

$$u \star f(x) = \langle u(y), f(x - y) \rangle. \quad (4.2.2)$$

De là on en déduit :

$$L_{x_0}^*(Pf)(x) = L_{x_0}^* \langle u(y), f(x - y) \rangle \quad (4.2.3)$$

$$= \langle u(y), (L_{x_0} \circ L_x)^* f(-y) \rangle \quad (4.2.4)$$

$$= P(L_{x_0}^* f)(x). \quad (4.2.5)$$

D'où la conclusion.

**Pour le point 1)  $\Rightarrow$  2).** Tout d'abord constatons qu'à cause de la propriété d'invariance de l'opérateur, son noyau de Schwartz vérifie, pour tout  $x_0, x, y \in \mathbb{R}^d$  :

$$k(x_0 + x, y) = k(x, y - x_0). \quad (4.2.6)$$

Posons la distribution  $u = k(0, \cdot)$ . Elle a bien support compact par hypothèse sur  $k$ . Avec l'équation (4.2.6) on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  alors :

$$k(x, \cdot) = L_{x*} u. \quad (4.2.7)$$

Cela étant acquis, on vérifie que pour  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$Op(k)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y) f(y) dy \quad (4.2.8)$$

$$= u \star f(x), \quad (4.2.9)$$

où l'intégrale ci-dessus est à comprendre au sens d'un accouplement avec une distribution.  $\square$

**Remarque 4.2.3.** Les opérateurs différentiels à coefficients constants sont invariants par translations et sont donc des opérateurs de convolution, dont la convolution est donnée par une distribution à support compact contenu dans  $\{0\}$ . Plus exactement si  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$  est un opérateur différentiel à coefficients constants :

$$Pf = u \star f, \tag{4.2.10}$$

où  $u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0(\cdot)$ . Ainsi, il y a une bijection entre :

1. Les opérateurs différentiels à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^d$ .
2. Les distributions à support compact sur  $\mathbb{R}^d$  dont le support est inclus dans  $\{0\}$
3. L'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}(\mathbb{R}^d)$ .

Plus généralement, soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il y a une bijection entre :

1. Les opérateurs différentiels invariants à gauche par translation sur  $G$ .
2. Les distributions à support compact sur  $G$  dont le support est inclus dans  $\{e_G\}$ .
3. L'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ .

On pourra consulter la section A.2 pour plus de détails.

**Corollaire 4.2.4.** Soit  $P \in \Psi_{1,0}^m(\mathbb{R}^d)$  invariant à gauche par translation au sens de (4.2.1) et dont le noyau de Schwartz  $k$  est donné par  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d))$  alors la distribution  $u$  du théorème 4.2.2 est lisse en dehors de 0.

*Démonstration.* Avec ces hypothèses sur le noyau, l'opérateur pseudo-différentiel réalise  $P : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors en vertu du théorème 4.2.2, il existe une distribution  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  de sorte que pour tout  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  :

$$Pf = u \star f. \tag{4.2.11}$$

Rappelons aussi que cette distribution est donnée par  $u = k(0, \cdot)$ , où l'on rappelle que  $k$  est le noyau de Schwartz de  $P$ . Comme  $P$  est pseudo-local, voir théorème 1.3.8, il s'ensuit que les singularités du noyau sont placées sur la diagonale, voir les références données dans le petit paragraphe qui suit la définition 1.3.13. On reformule cela mathématiquement par :

$$\text{singsupp}(k) \subset \text{diag}(\mathbb{R}^d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d, x = y\}, \tag{4.2.12}$$

ce qui contraint à avoir :

$$\text{singsupp}(u) \subset \{0\}. \tag{4.2.13}$$

D'où la conclusion. □

**Exemple 39.** Des exemples d'opérateurs pseudo-différentiels dont le noyau de Schwartz souscrit aux hypothèses du précédent corollaire 4.2.4 sont les opérateurs différentiels à coefficients constants, les opérateurs pseudo-différentiels invariants à gauche par translation proprement supportés. En effet rappelons pour ces derniers qu'un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté  $P$  satisfait :

$$P : E \rightarrow E, \tag{4.2.14}$$

où  $E = C^\infty(\mathbb{R}^d), C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  au choix. Cela implique en particulier que son noyau de Schwartz est un élément de  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d))$ .

### 4.2.2 ...à $\mathbb{R}^d$ muni d'une structure non commutative

Prenons  $M = \mathbb{R}^3$  et posons les champs :

$$\begin{cases} X &= \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z, \\ Y &= \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z, \\ Z &= \partial_z. \end{cases} \tag{4.2.15}$$

On voit que  $[X, Y] = Z$ . Ainsi, l'algèbre de Lie engendrée par  $X, Y, Z$  est isomorphe à l'algèbre de Lie d'Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$ .

Considérons, pour ces champs  $(X, Y, Z)$  sur  $M = \mathbb{R}^3$  les opérateurs laplacien et sous-laplacien respectivement.

1.  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ .
2.  $\Delta_H = X^2 + Y^2$ .

Que dire de l'hypoellipticité de  $\Delta$  et  $\Delta_H$  ?

1. L'opérateur laplacien  $\Delta$  étant elliptique, il est hypo-elliptique, comme vu à l'exemple 10 .
2. L'opérateur sous-laplacien  $\Delta_H$  n'est plus à coefficients constants sur  $(\mathbb{R}^3, +)$  donc pas invariant à gauche par translation. De plus, si on regarde l'opérateur à coefficients gelés  $\Delta_H^{(0,0,0)} = \partial_x^2 + \partial_y^2$ , il n'est elliptique sur  $M$  et a fortiori  $\Delta_H$  n'est pas (ponctuellement) elliptique. On ne peut plus affirmer quelque chose sur son hypo-ellipticité en utilisant le théorème 1.3.29.

Ainsi dans le contexte non commutatif, la notion d'ellipticité ponctuelle est mise en défaut pour déterminer l'hypo-ellipticité d'un opérateur. On ne peut plus geler "naïvement" les coefficients d'un opérateur différentiel  $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  en pensant que l'opérateur à coefficients gelés va être une bonne approximation de  $P$  au point où on a gelé. Pour se convaincre de l'arrivée de cette difficulté, regardons le lemme suivant.

**Lemme 4.2.5.** *Pour  $G = \mathbb{R}^3$ , muni de la structure d'Heisenberg et des champs de vecteurs (4.2.15), l'opérateur à coefficients gelés  $X^{(0,0,0)} = \partial_x$  n'est pas un opérateur invariant à gauche par translation sur  $\mathbb{R}^3$  muni de la structure d'Heisenberg.*

*Démonstration.* Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . D'une part :

$$L_{(x',y',z')} \circ X^{(0,0,0)} f = \partial_x f(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)). \quad (4.2.16)$$

D'autre part :

$$X^{(0,0,0)}(L_{(x',y',z')} f)(x, y, z) = X^{(0,0,0)}\left(f(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))\right) \quad (4.2.17)$$

$$= \partial_x f(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)) \\ + \frac{1}{2}y' \partial_z f(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)) \quad (4.2.18)$$

$$\neq L_{(x',y',z')} \circ X^{(0,0,0)} f. \quad (4.2.19)$$

D'où la conclusion. □

Cet exemple motive deux choses :

1. Comprendre et définir un analogue de l'opérateur à coefficients gelés  $P^x$  comme on l'a fait sur  $(\mathbb{R}^d, +)$  abélien, dans un contexte non commutatif.
2. Trouver une nouvelle notion d'ellipticité qui nous permette de déduire l'hypo-ellipticité d'un opérateur.

Sans rentrer dans les détails mais en mettant en avant la machinerie, voici quelques éléments de réponse pour le lecteur :

1. Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Dans le contexte commutatif, on se donne :

$$P : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U), \quad (4.2.20)$$

un opérateur différentiel à coefficients lisses sur  $U$  de la forme :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(U). \quad (4.2.21)$$

L'opérateur à coefficients gelés  $P^x$  en  $x \in U$  :

$$P^x := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha, \quad (4.2.22)$$

est un considéré comme un opérateur à coefficients constants sur le groupe  $(\mathbb{R}^d, +)$  :

$$P^x : C^\infty(T_x U) \rightarrow C^\infty(T_x U). \quad (4.2.23)$$

Or quelque soit  $x$  choisi, l'espace tangent  $T_x U$  s'identifie à  $(\mathbb{R}^d, +)$  abélien.

Maintenant dans le contexte non commutatif, on sait que le groupoïde osculant (resp. les groupes osculants en  $x$ ) doit être vu comme un remplaçant du fibré tangent (resp. les espaces tangents en  $x$ ). Il est donc possible de définir des opérateurs :

$$P^x : C^\infty(\mathcal{T}_H M_x) \rightarrow C^\infty(\mathcal{T}_H M_x), \quad (4.2.24)$$

invariant par translation sur le groupe nilpotent  $\mathcal{T}_H M_x$ , voir [47, section 2.2 p12]. Cet opérateur est appelé *symbole principal d'Heisenberg*.

Pour illustrer cela citons van Erp qui écrit dans [221] :

"As before, the highest order part of  $P$  is not an operator on  $M$ , but it has a natural interpretation as a smooth family  $x \in M \mapsto P^x$ , of operators in the tangent fiber  $T_x M$ . [...] [It] is usually taken to be a constant coefficient operator on the tangent fiber  $T_x M \cong \mathbb{R}^n$ , independent of coordinate choices. [...] The difference is that in the Heisenberg calculus the operator  $P^x$  is not a constant coefficient operator, but an operator that is left invariant for a nilpotent group structure on the tangent fiber<sup>10</sup>."

Les propos de van Erp font écho à l'exemple 16.

2. Dans le contexte commutatif, l'ellipticité d'un opérateur différentiel à coefficients lisses se définit via la famille  $(P^x)_{x \in U}$  des opérateurs à coefficients gelés (4.2.22). Nous rappelons que la définition d'ellipticité 1.3.4 que nous avons déjà donnée, exprime le fait que **ponctuellement**, les opérateurs  $P^x$  sont elliptiques. L'analogie de la notion d'ellipticité ponctuelle est l'*Heisenberg-ellipticité* 6.2.6. Cette terminologie particulière est issue des travaux de van Erp et Ponge. Cette condition d'*Heisenberg-ellipticité* est en fait la *condition de Rockland* dans le cadre des variétés filtrées, voir définition (6.2.2). La section 6.2 est réservée à ce théorème et nous avons pris soin de donner des exemples d'applications.

En fait si nous ne disposions pas de cette technologie, une stratégie pour montrer que  $\Delta_H$  est hypo-elliptique pourrait être de calculer une solution fondamentale. Bien que cela soit en fait possible comme l'a montré Folland en 1973 [77] et ensuite Folland et Stein en 1974 dans [83, section 6 p 439 dont théorème 6.2 p 440] pour l'opérateur légèrement plus général :

$$\mathcal{L}_\mu = -\frac{1}{2}\Delta_H + i\mu Z, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (4.2.25)$$

le calcul de solution fondamentale est relativement laborieux. Cependant, Folland est parvenu à montrer en 1973 dans [77] qu'une solution fondamentale de  $\Delta_H$  est donnée par :

$$E(x, y, t) = \frac{c}{|(x, y, t)|^{2-Q}}, \quad (4.2.26)$$

où  $|(x, y, t)| = \left((|x|^2 + |y|^2)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{4}}$  désigne une norme quasi-homogène,  $c$  une constante bien choisie et où  $Q$  représente la dimension homogène du groupe  $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^{2n+1}$ , soit dans ce cas  $Q = 2n + 2$ . Cette norme quasi-homogène est l'analogie du module que l'on rencontre dans le calcul des solutions fondamentales du laplacien sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ , voir le théorème E.1.3 et [22, section 3.2.3]. Ces opérateurs  $\mathcal{L}_\mu$  apparaissent lors de l'étude du Kohn-Laplacien  $\square_b$  sur la frontière du domaine de Siegel (4.1.42) que l'on rappelle :

$$S_{n+1} = \{(z, t) \in \mathbb{C}^{n+1}, \text{Im}(t) > |z|^2\}, \quad (4.2.27)$$

puisque, comme on l'évoquait auparavant,  $\partial S_{n+1}$  s'identifie au groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n$ , voir [22, section 2.2.4 p 31 dont théorème 24 p 33]. Plus précisément, on définit d'abord l'opérateur Cauchy-Riemann complexe tangentiel  $\bar{\partial}_b$  - [22, section 2.2.3] - avec lequel on définit ensuite le Laplacien de Kohn :

$$\square_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b. \quad (4.2.28)$$

Ainsi, à l'aube des années 70, Folland et Stein réalisent peu à peu que la bonne structure osculante est celle donnée par des groupes nilpotents et mettent a fortiori en lumière l'importance du groupe d'Heisenberg dans l'étude de structure non commutative. Dans l'article de 1974 de Folland et Stein [83, § 1 Background], les auteurs écrivent :

10. Où l'on comprend "tangent fiber" dans un sens plus général que  $T_x M$ , précisément au sens des groupes osculants.

---

"Later Folland [76] (1972) made a detailed study [of  $\bar{\partial}_b$  in] the case of  $M = \{z \in \mathbb{C}^n, |z| = 1\}$  by using the symmetry of  $M$  with respect to the unitary group. Meanwhile, however, the suspicion had arisen (cf. Stein [205], 1970), that the natural group to consider in connection with  $\bar{\partial}_b$  was not the unitary group but the Heisenberg group : supporting evidence for this idea was presented by Folland [77] (1973) and Stein [206] (1973)."

### 4.3 Calculs de vEY et BG pour les variétés modèles

#### 4.3.1 Comment BG gèlent-ils les coefficients de leurs opérateurs différentiels sur une variété d'Heisenberg ?

Pour étudier à la fois les opérateurs : l'opérateur de Kohn-Laplace  $\square_b$ , l'opérateur de la chaleur  $P = \partial_t - \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  ou encore l'opérateur  $\mathcal{L}_\mu = -\Delta_H + i\mu X_0$  de l'équation (4.2.25) sur  $\mathbb{H}_1$ , BG étudie une famille générale d'opérateurs différentiels du second ordre sur une variété lisse  $M$  de dimension  $d+1$  qui localement sont de la forme :

$$P = -\sum_{j=1}^d X_j^2 - i\lambda X_0 + \sum_{j=1}^d \gamma_j X_j + c_1, \quad (4.3.1)$$

où  $\lambda, (\gamma_j), c_1$  sont des fonctions à valeurs complexes et  $(X_j)$  sont des champs de vecteurs locaux d'ordre 1 sur  $M$  vérifiant :

$$(X_j)_{j \in \{0, \dots, d\}} \text{ sont linéairement indépendants point par point.} \quad (4.3.2)$$

Le cadre idéal de travail est celui des variétés d'Heisenberg. Soit  $M$  une variété d'Heisenberg de dimension  $d+1$ . Soit  $y \in M$ , on identifie alors un ouvert  $U \subset M$  contenant  $y$  en  $\mathbb{R}^{d+1}$  via une carte. Sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  on va mettre une structure de groupe  $\mathcal{T}_H M_y$  qui est isomorphe à  $\mathbb{H}_{n_y} \times \mathbb{R}^{m_y}$  où  $d = 2n_y + m_y$ , cette structure varie de point en point ! C'est la fameuse terminologie "*osculating Heisenberg structure*" de Folland et Stein [83, 14. Normal coordinates]. Localement sur  $U$ , on se donne  $(X_j)_{j \in \{0, \dots, d\}}$  des champs de vecteurs de sorte que le sous fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  est engendré par des champs de vecteur  $(X_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$ . On suppose que la carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, x \mapsto (x_0(x), \dots, x_d(x))$  est centrée en  $y$ , ce qui correspond à écrire pour tout  $0 \leq j \leq d$  la première équation de (4.3.3), et les champs dans ces coordonnées sont :

$$\begin{cases} x_j(y) &= 0, \\ X_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^d \beta_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \beta_{jk}(0) = 0, \quad x \in \phi(U). \end{cases} \quad (4.3.3)$$

où  $\beta_{jk}$  sont des fonctions lisses sur  $\phi(U)$ . cela correspond à [13, l'équation (11.1)]. Pour geler les champs  $X_j$  en le point  $y$ , il faut bien garder en tête que cela correspond à considérer  $X_j^y$  comme étant un opérateur sur  $T_y M$  où  $T_y M$  est à entendre dans un sens généralisé que nous précisons au lemme 4.3.1. Or l'espace tangent en un point  $y$  consiste à approcher la variété par un espace vectoriel (un "*objet linéaire*") ce qui, philosophiquement, correspond à effectuer un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de ce point.

Grâce à cela on peut avoir l'idée de réaliser une approximation linéaire de ces champs en  $y$  - c'est à dire en 0 dans nos coordonnées sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  - en faisant un développement limité d'ordre 1 des fonctions  $\beta_{jk}$ . Il vient donc :

$$\beta_{jk}(x) \simeq \beta_{jk}(0) + \langle \nabla \beta_{jk}(0), x \rangle \quad (4.3.4)$$

$$= \sum_{l=0}^d \frac{\partial}{\partial x_l} \beta_{jk}(0) x_l. \quad (4.3.5)$$

En faisant ce développement limité pour  $\beta_{j0}$ , cela nous amène à réécrire l'équation (4.3.3) en :

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \beta_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \beta_{j0}(0) x_k \frac{\partial}{\partial x_0} \quad (4.3.6)$$

De là BG suggèrent<sup>11</sup> qu'il nous faut introduire les champs modèles suivants pour approximer au mieux les champs  $(X_j)$  de (4.3.3) au point  $y$  :

$$\begin{cases} X_0^y = \frac{\partial}{\partial x_0} \\ X_j^y = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \forall 1 \leq j \leq d, \end{cases} \quad (4.3.7)$$

où  $b_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \beta_{j0}(0)$ , voir [13, équation (11.2)]. Avec cela, BG définissent un opérateur [13, définition (1.12)] :

$$P^y = - \sum_{j=1}^d (X_j^y)^2 - i\lambda(y) X_0^y. \quad (4.3.8)$$

Il est dit *opérateur modèle* dans leur terminologie. On introduit alors, voir [13, définition (1.14)], une loi de groupe sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  :

$$\begin{cases} (x.x')_0 = x_0 + x'_0 + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^d b_{jk} x_k x'_k \\ (x.x')_j = x_j + x'_j, \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad (4.3.9)$$

De sorte à correspondre à la notation utilisée par vEY, nous notons ce groupe  $\mathcal{T}_H M_y$ , en considérant la filtration en hyperplans  $\mathcal{V}$  engendrée en tout point par les champs  $(X_j^y)_{j \in \{1, \dots, d\}}$ .

Le passage de l'équation (4.3.6) à (4.3.7) aura pu intriguer le lecteur, car on a enlevé la partie  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \beta_{jk}(x) \partial_{x_k}$ . En fait avec l'ouvrage [174, p 406] de Ponge, on comprend que l'intérêt de garder seulement la partie  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial x_0}$  est pour conserver la partie homogène de ces champs. En effet BG montre le résultat suivant.

**Lemme 4.3.1.** [13, proposition (1.16)]

*Les champs modèles  $(X_j^y)_{j \in \{0, \dots, d\}}$  et en conséquence les opérateurs modèles  $P^y$  sont invariants à gauche par translation pour la loi du groupe  $\mathcal{T}_H M_y$  définie par (4.3.9). Ce groupe est isomorphe à  $\mathbb{H}_{n_y} \times \mathbb{R}^{m_y}$  où  $d = 2n_y + m_y$ .*

De plus, la [13, proposition (11.8) p 101] montre que si l'on choisit un autre repère local pour  $\mathcal{V}$  que les champs (4.3.3), alors les groupes osculants sont isomorphes.

### Moralité :

L'opérateur  $P^y$  n'est pas à coefficients constants mais est un opérateur invariant par translation pour la loi du groupe (4.3.9) - possiblement non abélien -  $\mathcal{T}_H M_y$ . Cet opérateur  $P^y$  joue le rôle d'un opérateur à coefficients constants sur le groupe  $\mathcal{T}_H M_y$ .

## 4.3.2 Cartes exponentielles sur une variété modèle

Dans ce qui suit on considère la variété lisse  $M = \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  de dimension  $d+1$  avec  $d = 2n + m$  de sorte que les champs modèles :

$$\begin{cases} X_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \\ X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \forall 1 \leq j \leq d, \end{cases} \quad (4.3.10)$$

forment un repère global pour le fibré tangent avec  $B = (b_{jk})$  une matrice anti-symétrique d'ordre  $d$ . De plus  $X_1, \dots, X_d$  génèrent le fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$ , faisant de  $\mathbb{R}^{d+1}$  une variété d'Heisenberg pour la filtration de pas 2 :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \mathcal{V} \leq H^2 = TM. \quad (4.3.11)$$

11. Pour reprendre leurs mots [13, p12] :

"The philosophy is that the model operator should be as simple as possible, to facilitate calculation, but should contain the relevant information."

Les champs de vecteurs  $(X_j)$  sont invariants à gauche pour la loi de groupe (4.3.9), d'après le lemme 4.3.1. L'exemple suivant montre que la loi de groupe (4.3.9) entremêle les deux structures extrêmes qu'on peut rencontrer sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ , à savoir une structure commutative et non-commutative.

**Exemple 40.** Dans le cas où  $d = 2n$  et

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad (4.3.12)$$

la loi de groupe (4.3.9) correspond au groupe d'Heisenberg usuel. Le cas où  $b_{jk} = 0$  pour tout  $(j, k)$  conduit au groupe  $(\mathbb{R}^{d+1}, +)$  abélien.

**Remarque 4.3.2.** On montre que :

$$[X_j, X_l] = b_{lj}X_0. \quad (4.3.13)$$

En effet en se souvenant que  $(b_{jk})$  est une matrice antisymétrique :

$$[X_j, X_l] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^d b_{lp} [\partial_{x_j}, x_p \partial_{x_0}] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} [x_k \partial_{x_0}, \partial_{x_l}] + \frac{1}{4} \sum_{k,p=1}^d b_{jk} b_{lp} [x_k \partial_{x_0}, x_p \partial_{x_0}] \quad (4.3.14)$$

$$= \frac{1}{2} b_{lj} (\partial_{x_0} - x_j \partial_{x_0} \partial_{x_j}) + \frac{1}{2} b_{jl} (x_l \partial_{x_0} \partial_{x_l} - \partial_{x_0}) \quad (4.3.15)$$

$$= b_{lj} X_0. \quad (4.3.16)$$

On équivaut alors  $M = \mathbb{R}^{d+1}$  de la dilatation :

**Définition 4.3.3.** Pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit les dilatations d'Heisenberg par :

$$\delta_s : (v_0, v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \mapsto (s^2 v_0, s v_1, \dots, s v_d) \in \mathbb{R}^{d+1}. \quad (4.3.17)$$

On rappelle aussi qu'on note le flot  $t \mapsto \gamma(t)$  au temps  $t = 1$  d'un champ de vecteur  $Y$  passant en  $t = 0$  au point  $x \in M$  par  $\gamma(1) =: \exp(Y).x$ , lorsque qu'il est possible de le définir. Nous allons maintenant donner la structure différentiable du groupoïde tangent  $\mathbb{T}_H M$  en calculant explicitement les cartes exponentielles. On rappelle que pour  $M$  une variété filtrée, elles sont données par :

$$\mathbb{E}xp^{\bar{X}} : M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_H M, (x, v, t) \mapsto \begin{cases} (x, \exp(\delta_t(-v).\bar{X}).x, t) & \text{si } t \neq 0 \\ (x, v.\bar{X}|_x, 0) & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (4.3.18)$$

où  $\bar{X} = (X_0, \dots, X_d)$  est un repère local. Ici, comme  $M$  est en particulier un groupe de Lie, il est parallélisable donc on peut considérer un repère global, donné par les champs (4.3.10).

**Proposition 4.3.4.** Les cartes exponentielles sont données en  $t \neq 0$  par :

$$\mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, t) = (x, x', t), \quad (4.3.19)$$

où  $x' = \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k \neq j} v_j b_{jk} x_k t - v_0 t^2 + x_0, -v_1 t + x_1, \dots, -v_d t + x_d \right)$ . En particulier,

$$\mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, 1) = (x, \phi_x(v) + x, 1), \quad (4.3.20)$$

où nous avons défini l'application linéaire bijective  $\phi_x(v) = \left( -v_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k \neq j} v_j b_{jk} x_k, -v_1, \dots, -v_d \right)$ .

*Démonstration.* On montre que :

$$\exp(X_0).x = (1 + x_0, x_1, \dots, x_d). \quad (4.3.21)$$

Calculons le flot  $\exp(v.\bar{X}).x = \exp(\sum_{k=0}^d v_k X_k).x$ . Il vient alors :

$$v.\bar{X} = \sum_{k=0}^d v_k X_k \quad (4.3.22)$$

$$= (v_0 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq d} v_j b_{jk} x_k) \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4.3.23)$$

Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, t \mapsto (\gamma_j(t))$  une courbe intégrale<sup>12</sup> vérifiant le système différentiel :

$$\begin{cases} \gamma'_0(t) &= v_0 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq d} v_j b_{jk} \gamma_k(t) \\ \gamma'_j(t) &= v_j, \quad 1 \leq j \leq d. \end{cases} \quad (4.3.24)$$

Résolvant ce système on obtient d'abord que  $\gamma_j(t) = v_j t + x_j$  pour  $1 \leq j \leq d$  et puis intégrant la première équation de (4.3.24) :

$$\gamma(t) = \left( v_0 t + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq d} v_j b_{jk} (v_k \frac{t^2}{2} + x_k t) + x_0, x_1 + v_1 t, \dots, x_d + v_d t \right). \quad (4.3.25)$$

En utilisant l'anti-symétrie de la matrice  $(b_{jk})$  le lecteur aboutira à l'équation :

$$\gamma(t) = \left( x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k \neq j} v_j b_{jk} x_k t, x_1 + v_1 t, \dots, x_d + v_d t \right). \quad (4.3.26)$$

Alors prenant  $t = 1$  dans l'équation (4.3.26) pour obtenir le flot de  $v \cdot \bar{X}$  au point  $x$  et en remplaçant  $v$  par  $\delta_t(-v) = (-t^2 v_0, -t v_1, \dots, -t v_d)$  pour tout  $t \neq 0$ , on obtient l'application exponentielle  $\mathbb{E} \exp^{\bar{X}}$  de l'équation (4.3.20). □

### 4.3.3 Définition du calcul pseudo-différentiel de BG

Dans cette section, nous définissons le calcul pseudo-différentiel de BG grâce aux  $\mathcal{V}$ -symboles et exhibons le lien entre transformée de Fourier de ces derniers et les cartes exponentielles de la proposition 4.3.4.

Le lecteur trouvera les propriétés suivantes [13, p 26] du livre de BG. Nous conservons l'esprit des notations. Les opérateurs différentiels définis à l'équation (4.3.10) ont pour symbole :

$$\begin{cases} \sigma_0(x, \eta) = \eta_0 \\ \sigma_j(x, \eta) = \eta_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \eta_0, \quad \forall 1 \leq j \leq d. \end{cases} \quad (4.3.27)$$

Posons alors :

$$\sigma(x, \xi) = (\sigma_0(x, \xi), \dots, \sigma_d(x, \xi)), \quad (4.3.28)$$

$$\bar{\sigma}(x, \xi) = (x, \sigma(x, \xi)). \quad (4.3.29)$$

On peut définir l'inverse  $\tilde{\sigma}$  de  $\sigma$ , au sens où  $\sigma(x, \tilde{\sigma}(x, \eta)) = \eta$ , par la formule :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_0(x, \eta) = \eta_0 \\ \tilde{\sigma}_j(x, \eta) = \eta_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \eta_0, \quad \forall 1 \leq j \leq d. \end{cases} \quad (4.3.30)$$

De fait  $\bar{\sigma}^{-1}(y, v) = (y, \tilde{\sigma}(y, v))$ .

**Attention : Dans ce qui suit  $m$  désignera un entier relatif.**

**Définition 4.3.5.** Opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels [13, p 91, équation (9.12) p 81 définition (9.1) p 80]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$  un ouvert. On définit  $S_{\mathcal{V}}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  la classe des  $\mathcal{V}$ -symboles d'ordre  $m$ . Il s'agit des fonctions  $q \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , qui sont de la forme :

$$q(x, \xi) = f(x, \sigma(x, \xi)) = \bar{\sigma}^* f(x, \xi), \quad (4.3.31)$$

pour une fonction  $f \in S_{phg, G}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , voir la définition 2.1.10, où les dilatations sont celles d'Heisenberg (4.3.17). Étant donné  $q \in S_{\mathcal{V}}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  on définit, pour  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ , l'opérateur :

12. Cette courbe intégrale est définie sur  $\mathbb{R}$  entier car  $M$  est en particulier un groupe de Lie, on parle de champs de vecteurs complets, voir [137, lemme 20.1 p 519].



$$Op(q)\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{ix \cdot \xi} q(x, \xi) \hat{\phi}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{d+1}}. \quad (4.3.32)$$

Cet opérateur est dit  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiel de symbole  $q$ . Son noyau de Schwartz  $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$  est la distribution donnée par :

$$k(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}(q)(x, x - y) \in \mathcal{D}'(U \times U), \quad (4.3.33)$$

où  $\mathcal{F}_2$  dénote la transformée de Fourier en la seconde variable, soit  $\mathcal{F}_2^{-1}(q)(x, \xi) = \mathcal{F}^{-1}(v \mapsto q(x, v))(\xi)$ . On dénote  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(U)$  l'ensemble des opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels d'ordre  $m$ .

**Remarque 4.3.6.** *On constate que cette définition de calcul pseudo-différentiel est naturelle et se base sur les travaux d'Hörmander, Kohn et Nirenberg des années 60, en utilisant la transformée de Fourier et en prescrivant d'abord la notion de symbole. En comparaison, Taylor [209, section 1, chapitre I] et Christ-Geller-Glowacki-Polin [35, définition 2.4 p 34] définissent leurs opérateurs pseudo-différentiels comme des opérateurs à noyaux de convolution. Grâce à la théorie des représentations, Taylor définit le symbole d'un opérateur de convolution, voir [209, section 3, chapitre I].*

**Exemple 41.** *On prend les champs modèles (4.3.10) pour  $d = 2$ . On considère la matrice  $B$  de l'exemple 40 pour  $n = 1$  de sorte que les champs  $X_0, X_1, X_2$  soient :*

$$\begin{cases} X_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial}{\partial x_0}. \end{cases} \quad (4.3.34)$$

On prend l'opérateur :

$$\mathcal{L}_\mu = -(X_1^2 + X_2^2) + i\mu X_0, \quad (4.3.35)$$

où  $\mu \in \mathbb{C}$ . Alors  $\mathcal{L}_\mu \in \Psi_{\mathcal{V}}^2(\mathbb{R}^3)$ . Le symbole  $q$  de  $\mathcal{L}_\mu$  est la fonction :

$$q(x, \xi) = f(x, \sigma(x, \xi)), \quad (4.3.36)$$

où  $f(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2) = -(\xi_1^2 + \xi_2^2) + i\mu\xi_0 \in S_{phg,G}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ .

Le premier résultat important que nous allons obtenir est un lien explicite entre  $f$  et la transformée de Fourier du noyau de Schwartz de l'opérateur  $Op(q)$  poussé en avant par une carte exponentielle. Ce résultat est conceptuellement la raison pour laquelle le calcul groupoïdal de vEY et le calcul d'Heisenberg de BG coïncident.

Avant cela, remarquons que la partie linéaire  $\phi_y$  de la proposition 4.3.4 est reliée à  $\tilde{\sigma}$  par la formule suivante suivant directement des équations (4.3.20) et (4.3.30).

**Proposition 4.3.7.** *L'application linéaire  $\phi_y$  satisfait :*

$${}^t\phi_y^{-1}(\eta) = \tilde{\sigma}(y, -\eta).$$

*Démonstration.* Grâce à la proposition 4.3.4 il vient :

$$\phi_y(v) = \left( -v_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k \neq j} v_j b_{jk} y_k, -v_1, \dots, -v_d \right) \quad (4.3.37)$$

Calculons son inverse :

$$\phi_y^{-1}(v) = \left( -v_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k \neq j} v_j b_{jk} y_k, -v_1, \dots, -v_d \right) \quad (4.3.38)$$

Calculons la matrice de l'application linéaire  $\phi_y^{-1}$  dans la base canonique  $\beta$  de  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Il s'agit de la matrice triangulaire :

$$mat_{\beta}\phi_y^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \sum_{k \neq 1} b_{1k} y_k & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} \sum_{k \neq d} b_{dk} y_k \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.39)$$

D'où :

$${}^t [mat_{\beta}\phi_y^{-1}] \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_d \end{pmatrix} = \left( -\eta_0, (-\eta_j + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} b_{jk} y_k \eta_0)_{j \in \{1, \dots, d\}} \right) \quad (4.3.40)$$

$$= \tilde{\sigma}(y, -\eta). \quad (4.3.41)$$

□

**Théorème 4.3.8.** Soit  $f \in S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$  où  $U = \mathbb{R}^{d+1}$ . On dénote par  $k \in D'(U \times U)$  le noyau de Schwartz de l'opérateur  $Op(q)$  de  $BG$ , où la fonction  $q$  est définie à la définition 4.3.5. En posant  $\tilde{k} := (\text{Exp}^{\bar{X}}|_{t=1})_*^{-1} k$ , on a :

$$\mathcal{F}_2(\tilde{k})(y, \xi) = f(y, \xi). \quad (4.3.42)$$

**Remarque 4.3.9.** Nous pouvons résumer ce précédent résultat grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{(\text{Exp}^{\bar{X}}|_{t=1})_*^{-1}} & \tilde{k} \\ \mathcal{F}_2 \circ (\tau \circ m)_* \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_2 \\ q & \xrightarrow{(\bar{\sigma}^{-1})_*} & f \end{array}$$

où :

$$\tau : (y, v) \in \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \mapsto (y, y + v), \quad (4.3.43)$$

$$m : (y, v) \in \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \mapsto (y, -v). \quad (4.3.44)$$

### Conséquences du théorème 4.3.8 :

Ce théorème nous permettra d'utiliser dans un instant le résultat du premier projet de cette thèse. En effet, en vertu du théorème 2.1.11, comme  $f \in S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ , il existe  $u \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$  de sorte que  $u|_{t=1} = \mathcal{F}_2(\tilde{k})$ . Soulignons que les flèches de haut en bas (à gauche du diagramme) et de gauche à droite (partie basse du diagramme) sont données par la définition du calcul de  $BG$ , le vrai travail à fournir correspond à la flèche de haut en bas à droite du diagramme.

Avant de débiter la preuve, rappelons au lecteur que si  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une application linéaire et que  $\mathcal{F}$  dénote la transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}^d$ , alors  $\mathcal{F} \circ \phi_* = {}^t \phi^* \circ \mathcal{F}$ , où  $\phi_* : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  représente le poussé en avant d'une distribution et  $\phi^* : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$  est le tiré en arrière d'une fonction, voir par exemple le livre de Folland [81, proposition (0.21) b)], où l'auteur montre ce résultat pour les fonctions (et qu'on peut donc ensuite démontrer pour les distributions).

Preuve du théorème 4.3.8. Introduisons l'application :

$$\Phi : (x, w) \mapsto (x, \phi_x(w)), \quad (4.3.45)$$

où  $\phi_x$  est l'application linéaire de la proposition 4.3.4. Remarquons aussi, grâce à la définition 4.3.5 que  $k(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}(q)(x, x - y)$  donne  $k(y, y - v) = \mathcal{F}_2^{-1}(q)(y, v)$ . Puisque  $(\tau \circ m)^{-1} = \tau \circ m$ , alors il vient :

$$\mathcal{F}_2\left((\tau \circ m)_*k\right)(y, \xi) = q(y, \xi). \quad (4.3.46)$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2\left((\mathbb{E}\text{xp}^{\bar{X}}|_{t=1})_*^{-1}(k)\right)(y, \xi) &\stackrel{\text{équations (4.3.20),(4.3.45)}}{=} \mathcal{F}_2\left((\tau \circ \Phi)_*^{-1}k\right)(y, \xi) \\ &= \mathcal{F}_2\left(\Phi_*^{-1} \circ \tau_*^{-1}k\right)(y, \xi) \\ &= \mathcal{F}_2\left(\tau_*^{-1}k\right)(y, {}^t(\phi_y^{-1})(\xi)) \\ &\stackrel{\text{proposition 4.3.7}}{=} \mathcal{F}_2\left(\tau_*^{-1}k\right)(y, \tilde{\sigma}(y, -\xi)) \\ &= \mathcal{F}_2\left((\tau \circ m)_*k\right)(y, \tilde{\sigma}(y, \xi)) \\ &\stackrel{(4.3.46)}{=} q(y, \tilde{\sigma}(y, \xi)) \\ &= f(y, \xi), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est vraie puisque  $\sigma(y, \tilde{\sigma}(y, \xi)) = \xi$ , voir juste après l'équation (4.3.30), et  $q(y, \xi) = f(y, \sigma(y, \xi))$  par la définition 4.3.5.  $\square$

**Remarque 4.3.10.** *Il y a une analogie<sup>13</sup> entre les travaux de BG et ceux de Taylor [209, section 1 p 9]. En effet, grâce à la preuve précédente (en se servant de la première et de la dernière ligne), on remarque que le noyau de Schwartz  $k$  définissant l'opérateur de BG est donné par :*

$$k(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}(f)\left((\mathbb{E}\text{xp}^{\bar{X}}|_{t=1})_*^{-1}(x, y)\right) \quad (4.3.47)$$

$$= \mathcal{F}_2^{-1}(f)(x, xy^{-1}), \quad (4.3.48)$$

puisque'il est possible de constater que :

$$xy^{-1} = \phi_x^{-1}(y - x), \quad (4.3.49)$$

où  $xy^{-1}$  sous-entend que l'on fait le produit des deux éléments en questions dans le groupe  $\mathbb{R}^{d+1}$  avec la loi de groupe (4.3.9), de sorte que l'on retrouve la situation de Taylor à savoir :

$$\text{Op}(q)\psi(x) = \int \tilde{k}(x, xy^{-1})\psi(y)dy, \quad (4.3.50)$$

qui met en jeu la convolution avec la loi de groupe.

#### 4.3.4 Équivalence du calcul de BG et vEY pour les variétés modèles $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$

Dans cette section nous montrons au théorème 4.3.16 que l'approche groupoïdale de vEY coïncide avec le calcul de BG, dans le cadre des variétés modèles  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ ,  $2n + m = d$ . Tout d'abord nous aurons besoin des définitions et du lemme 4.3.13 suivants :

**Définition 4.3.11.** Espace  $\mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d)$

13. Merci à Jean-Marie Lescure pour cette remarque.

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On pose :

$$\mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d) := \text{Hom}_{C^\infty(U)}(\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d), C^\infty(U)) \cong C^\infty(U, \mathcal{S}'_G(\mathbb{R}^d)), \quad (4.3.51)$$

où  $\text{Hom}_{C^\infty(U)}$  dénote la  $C^\infty(U)$ -linéarité et où  $\mathcal{S}'_G(\mathbb{R}^d)$  est le dual de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}_G(\{x_0\} \times \mathbb{R}^d)$  pour  $x_0$  un point fixé.

**Définition 4.3.12.** Espace  $C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On note  $f \in C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$ , pour dire que tout  $K \subset U$  on a :

$$(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^d \mapsto f(x, \xi) \in L^1(K \times \mathbb{R}^d), \quad (4.3.52)$$

avec pour  $\xi$  fixé :

$$x \mapsto f(x, \xi) \in C^\infty(U). \quad (4.3.53)$$

**Lemme 4.3.13.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . Alors :

$$\mathcal{F}^{-1}(v \mapsto u(x, v)) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})) \cap \mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d). \quad (4.3.54)$$

La preuve de ce lemme repose sur les lemmes suivants, dont nous donnons les démonstrations. On rappelle aussi que  $\mathbb{S}^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| = 1\}$ . Notons  $d_H = \sum_{k=1}^d \rho_k$  la dimension homogène, voir définition A.1.11, du groupe abélien homogène  $(\mathbb{R}^d, +)$  muni de la famille de dilatations graduées (1.3.3).

**Lemme 4.3.14.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $u \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  supposée homogène d'ordre  $m$  au sens des dilatations graduées (1.3.3) en dehors d'une boule fermée centrée en 0 au sens des normes quasi-homogènes, alors si  $m < -d_H$ , on a  $u \in C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $R > 0$  telle que pour tout  $s > 0$  pour tout  $|\xi| \geq R$ , pour tout  $x \in U$ , on ait :

$$u(x, \delta_s \xi) = s^m u(x, \xi). \quad (4.3.55)$$

Notons  $K = \overline{B_0(0, R)}$ . On montre que l'application :

$$C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d \setminus K), g \mapsto \left( \tilde{g} : \xi \mapsto |\xi|^m g(\delta_{|\xi|^{-1}} \xi) \right), \quad (4.3.56)$$

est bornée. En effet :

$$\|\tilde{g}\|_{L^1(\mathbb{R}^d \setminus K)} = \int_{|\xi| \geq R} |\xi|^m |g(\delta_{|\xi|^{-1}} \xi)| d\xi \quad (4.3.57)$$

$$\leq \|g\|_{\infty, \mathbb{S}^{d-1}} \underbrace{\int_{|\xi| \geq R} |\xi|^m d\xi}_{< +\infty}, \quad (4.3.58)$$

cette dernière inégalité étant obtenue en passant à l'intégration sur la sphère et l'intégrale converge car on a exigé que  $m < -d_H$ , voir [73, proposition 3.1.42 p 116].

On décompose alors  $u$  de façon adéquate selon :

$$u = \underbrace{\mathbb{1}_K u}_{:=u_0} + \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K} u}_{:=u_1}. \quad (4.3.59)$$

D'une part on constate que  $u_0 \in C^\infty(U, C^\infty(K)) \subset C^\infty(U, L^1(K))$ , puisque  $K$  a mesure finie. De plus, posant :

$$g_x(\xi) = R^{-m} u(x, \delta_R(\xi)), \quad x \in U, \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (4.3.60)$$

alors  $u_1(x, \xi) = \tilde{g}_x(\xi)$ . On a :

$$x \mapsto g_x \in C^\infty(U, C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})). \quad (4.3.61)$$

Puisque la composition d'une application lisse par un opérateur linéaire borné demeure une application lisse, on peut affirmer que :

$$u_1 \in C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d \setminus K)). \quad (4.3.62)$$

De cela, on déduit que  $u \in C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$ . □

**Lemme 4.3.15.** *Transformée de Fourier d'une fonction homogène, [95, proposition 2.4.8 p 141]*

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  une fonction cut-off lisse qui vaut 0 dans un voisinage compact de 0 et 1 aux infinis. Alors  $\mathcal{F}_2^{-1}(v \mapsto \chi(v)u(x, v)) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap \mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* Tout d'abord comme  $u \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , alors il est clair que  $(x, v) \mapsto \chi(v)u(x, v) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  et est de plus une distribution tempérée en  $\xi$  - en vertu<sup>14</sup> du lemme D.2.1 - dont il est licite de faire la transformée de Fourier. De fait  $\mathcal{F}_2^{-1}(v \mapsto \chi(v)u(x, v)) \in \mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

Comme avant on note  $d_H = \sum_{k=1}^d \rho_k$ , où  $\rho_k$  sont les poids intervenant dans les dilatations graduées. Posons  $\Delta_\xi := \sum_{i=1}^d \partial_{\xi_i}^2$ . On fixe  $\beta$  un multi-indice. On constate avec le lemme 2.2.1 point 1) qu'on peut trouver un entier  $k$  suffisamment grand, choisi pour que  $\Delta_\xi^k \xi^\beta (\chi(\xi)u(x, \xi))$  soit homogène de degré  $m + |\beta| - 2k < -d_H$  en dehors d'une boule fermée contenant 0, de sorte que par le lemme 4.3.14 on puisse affirmer que  $\Delta_\xi^k \xi^\beta (\chi(\xi)u(x, \xi)) \in C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$ . On rappelle alors que  $\mathcal{F}_2^{-1} \circ (-\Delta_\xi) \circ \mathcal{F}_2 = M_{\|\xi\|^2}$ , où l'opérateur à droite de l'égalité précédente est l'opérateur de multiplication par la fonction  $\xi \mapsto \|\xi\|^2$ . A fortiori pour tout entier naturel  $k$  il vient :

$$\mathcal{F}_2^{-1} \circ (-\Delta_\xi)^k \circ \mathcal{F}_2 = M_{\|\xi\|^2}^k. \quad (4.3.65)$$

Cela entraîne :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{-1} \left( (-\Delta_\xi)^k [\xi^\beta \chi(\xi)u(x, \xi)] \right) &= M_{\|\xi\|^2}^k \circ \mathcal{F}_2^{-1} \left( \xi^\beta \chi(\xi)u(x, \xi) \right), \\ &= \|\xi\|^{2k} \partial_\xi^\beta \mathcal{F}_2^{-1} \left( \chi(\xi)u(x, \xi) \right). \end{aligned} \quad (4.3.66)$$

L'égalité (4.3.66) montre que  $(x, \xi) \mapsto \|\xi\|^{2k} \partial_\xi^\beta \mathcal{F}_2^{-1} \left( \chi(\xi)u(x, \xi) \right)$  est dans  $C^\infty(U, C^0(\mathbb{R}^d))$  en tant que transformée de Fourier en la variable  $\xi$  d'une fonction  $C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$ . Cela entraîne que  $(x, \xi) \mapsto \partial_\xi^\beta \mathcal{F}_2^{-1} \left( \chi(\xi)u(x, \xi) \right)$  est une fonction lisse en  $x$  et continue en  $\xi \neq 0$ . Puisque  $\beta$  est arbitraire, on en déduit par récurrence que :

$$(x, \xi) \mapsto \mathcal{F}_2^{-1} \left( \chi(\xi)u(x, \xi) \right) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}). \quad (4.3.67)$$

□

On peut maintenant faire la preuve du lemme 4.3.13.

*Preuve du lemme 4.3.13.* D'une part, le théorème 2.2.4 permet de montrer que  $u \in \mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  est une distribution tempérée en  $\xi$  (et lisse en  $x \in U$ ). Il est donc licite de prendre la transformée de Fourier de  $u$  en la variable  $\xi$ .

---

14. Il suffit en effet de montrer que pour  $K \subset U$  un compact fixé, on peut trouver  $R_K > 0$  de sorte que  $|v| \geq R_K$  alors :

$$\|v\|^{-m} \chi(v)u(x, v) = |u(x, \delta_{|v|^{-1}} v)| \quad (4.3.63)$$

$$\leq \sup_{x \in K, \xi \in \mathbb{S}^{d-1}} |u(x, \xi)|, \quad (4.3.64)$$

donc  $(x, v) \mapsto \chi(v)u(x, v)$  est polynomialement bornée. Ainsi  $(x, v) \mapsto \chi(v)u(x, v) \in \mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

Supposons  $u$  est de la forme :

$$u(x, v) = \chi(v)u'(x, v), \quad (4.3.68)$$

où  $u' \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  est une fonction cut-off lisse qui vaut 0 dans un voisinage compact de 0 et 1 aux infinis, alors on a la conclusion par le lemme 4.3.15. De façon plus générale, toujours en vertu du théorème 2.2.4, on peut écrire la décomposition :

$$u := \chi u' + u'', \quad (4.3.69)$$

où,  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  est comme à l'équation (4.3.68),  $u' \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  et  $u'' \in \mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

On rappelle que l'action de Debord-Skandalis sur  $\mathbb{T}_H M$ , est définie par :

$$\begin{cases} \alpha_s(y, x, t) = (y, x, s^{-1}t) & (x, y) \in M \\ \alpha_s(x, \xi, 0) = (x, \delta_s(\xi), 0) & x \in M, \xi \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (4.3.70)$$

où  $(\delta_s)$  sont les dilatations d'Heisenberg (4.3.17). Remémorons nous que  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  signifie le calcul de vEY, voir définition 1.4.16.

**Théorème 4.3.16.** *Soit  $M = \mathbb{R}^{d+1}$  avec la structure modèle d'Heisenberg décrite à l'équation (4.3.10). Alors :*

$$\Psi_{\mathcal{V}}^m(M) = \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}. \quad (4.3.71)$$

*Démonstration.* Commençons par l'inclusion  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(M) \subset \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$ . Soit  $Op(q) \in \Psi_{\mathcal{V}}^m(M)$  un opérateur  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiel dans le calcul de BG, dont le symbole est  $q = \bar{\sigma}^* f$  et ayant pour noyau de Schwartz la distribution  $k$ , tous deux comme dans la définition 4.3.5. Soit  $u \in \mathcal{HS}_G^m(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$  l'extension de  $f$  donnée par le théorème 2.1.11. Posons :

$$\tilde{\mathbf{k}}(y, \xi, t) = \mathcal{F}^{-1}\left(v \mapsto u(y, v, t)\right)(\xi), \text{ et } \mathbf{k} = \mathbb{E}xp_*^{\bar{X}}(\tilde{\mathbf{k}}). \quad (4.3.72)$$

Alors par le lemme 4.3.13, il vient :

$$\tilde{\mathbf{k}} \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathcal{S}'_G(\mathbb{R}^{d+1})). \quad (4.3.73)$$

Posons aussi :

$$\tilde{\mathbf{k}}|_{t=1} = \tilde{k}, \quad (4.3.74)$$

et constatons les égalités :

$$\tilde{k} = \mathcal{F}_2^{-1}(f), \quad (4.3.75)$$

grâce au théorème 4.3.8. Utilisant la carte exponentielle  $\mathbb{E}xp_*^{\bar{X}}$ , cela est équivalent à :

$$\mathbf{k}|_{t=1} = k. \quad (4.3.76)$$

Soit  $\chi \in C_p^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$  une fonction cut-off lisse de support propre valant 1 sur  $M \times \{0\} \times \mathbb{R}$ . Une telle fonction existe. Il suffit de prendre une fonction  $\chi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$  valant 1 sur un voisinage de 0 et de poser :

$$\chi(y, v, t) = \chi_1(v). \quad (4.3.77)$$

On définit ensuite les distributions  $r$ -fibrées suivantes :

$$\tilde{\mathbf{k}}_0 := \chi \tilde{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbb{E}xp_*^{\bar{X}}(\tilde{\mathbf{k}}_0). \quad (4.3.78)$$

Nous allons montrer que pour tout  $s > 0$  :

$$\tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbf{k}}_0 - s^m \tilde{\mathbf{k}}_0 \in C_p^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}, \Omega_r). \quad (4.3.79)$$

Pour parvenir à cela, on effectue le calcul suivant. Pour tout  $s > 0$  :

$$\tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbf{k}}_0 - s^m \tilde{\mathbf{k}}_0 = \underbrace{\tilde{\alpha}_{s*}(\tilde{\mathbf{k}}_0 - \tilde{\mathbf{k}}) - s^m(\tilde{\mathbf{k}}_0 - \tilde{\mathbf{k}})}_{(\spadesuit)} + \underbrace{\tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbf{k}} - s^m \tilde{\mathbf{k}}}_{(\blacksquare)}. \quad (4.3.80)$$

Comme  $u \in \mathcal{HS}_G(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$  alors en vertu du lemme 4.3.13 et du calcul :

$$\tilde{\mathbf{k}}_0 - \tilde{\mathbf{k}} = (\chi - 1)\tilde{\mathbf{k}} \quad (4.3.81)$$

$$= (\chi - 1)\mathcal{F}_2^{-1}(u), \quad (4.3.82)$$

on en déduit que le terme  $(\spadesuit)$  est  $C^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}, \Omega_r)$ .

Reste à étudier le terme (■). On commence par se remémorer l'action  $\beta_s$  définie à l'équation (3.2.2). Nous avons  $\beta_s^* u - s^m u \in \mathcal{S}_G(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$  pour tout  $s > 0$ , par hypothèse sur  $u$ . Utilisant la proposition 3.2.3 cela implique :

$$\tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{k}} - s^m \tilde{\mathbb{k}} \in \mathcal{S}_G(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}) \subset C^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}, \Omega_r). \quad (4.3.83)$$

Cela prouve que le terme (■) à droite de (4.3.80) est lisse et par conséquent il en est de même du terme à gauche de (4.3.80). De plus,  $\tilde{\mathbb{k}}_0$  est proprement supporté puisque  $\text{supp}(\tilde{\mathbb{k}}_0) \subset \text{supp}(\chi)$ . Cela prouve (4.3.79). Finalement,  $(\mathbb{k} - \mathbb{k}_0)|_{t=1} \in \Psi^{-\infty}(M)$  parce que l'opérateur a noyau lisse sur  $M \times M$ . Nous avons :

$$k = \mathbb{k}_0|_{t=1} + (\mathbb{k} - \mathbb{k}_0)|_{t=1}, \quad (4.3.84)$$

conclusion à laquelle nous devons arriver.

Maintenant, on s'enquiert de l'autre inclusion  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1} \subset \Psi_{\mathcal{V}}^m(M)$ . Soit  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  avec noyau de Schwartz  $k$ . Il existe  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$  dont la restriction en  $t = 1$  est  $P$ . Suivant la [223, proposition 42] il est même possible de choisir  $\mathbb{k}$  pour être homogène pile d'ordre  $m$  en dehors de  $[-1, 1]$ . On définit alors  $\tilde{\mathbb{k}} = (\mathbb{E} \exp^{\bar{X}})_*^{-1}(\mathbb{k})$  and  $u = \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{k}})$ . Par définition,  $\tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{k}} - s^m \tilde{\mathbb{k}} \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  et ce co-cycle est nul en dehors de  $[-1, 1]$  pour la variable  $t$ . Cela implique que :

$$\tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{k}} - s^m \tilde{\mathbb{k}} \in C_p^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}, \Omega_r), \text{ en dehors de } [-1, 1]. \quad (4.3.85)$$

Par le lemme 3.2.3 équation (3.2.5), cela conduit à :

$$\beta_s^* u - s^m u \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})), \text{ et est } 0 \text{ en dehors de } [-1, 1]. \quad (4.3.86)$$

Le fait que cette dernière expression est de classe Schwartz en  $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$  et la condition sur  $t$  entraînent ensemble que  $u \in \mathcal{HS}_G^m(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$ . Par conséquent, grâce au théorème 2.1.11,  $u|_{t=1} \in S_{phg,G}^m(M \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Utilisant le diagramme commutatif après le théorème 4.3.8, on récupère :

$$\mathcal{F}_2^{-1}(\bar{\sigma}^* u|_{t=1})(x, y) = (\tau \circ m)_* k(x, y) \quad (4.3.87)$$

$$= k(x, x - y), \quad (4.3.88)$$

donc :

$$\mathcal{F}_2^{-1}(\bar{\sigma}^* u|_{t=1})(x, x - y) = k(x, y). \quad (4.3.89)$$

Il suffit alors de poser  $q(x, \xi) := \bar{\sigma}^* u|_{t=1}(x, \xi)$  par la définition 4.3.5 pour terminer la preuve.  $\square$

### 4.3.5 Équivalence du calcul de BG et vEY pour les variétés de contact et feuilletages de codimension 1

Le théorème 4.3.16 peut être étendu aux variétés de contact et aux feuilletages de codimension 1, deux exemples de variétés d'Heisenberg, grâce aux théorèmes de Darboux et de Frobenius. On invite le lecteur à relire la section 4.1. On rappelle au lecteur qu'un opérateur  $P$  sur  $\mathcal{E}'(M)$  est dit *pseudolocal* si :

$$\text{singsupp}(Pu) \subseteq \text{singsupp}(u), \quad (4.3.90)$$

pour toute  $u \in \mathcal{E}'(M)$ , où *singsupp* dénote le support singulier d'une distribution. Dans ce qui suit  $M_\chi$  dénote l'opérateur de multiplication par  $\chi$ .

Les deux définitions du calcul d'Heisenberg dans BG [13] et vEY [223] sont locales dans le sens suivant : Un opérateur linéaire continu  $P$  sur  $\mathcal{E}'(M)$  est un opérateur pseudo-différentiel d'Heisenberg (au sens des calculs [13] et [223]) si et seulement si cet opérateur est pseudolocal et pour tout ouvert  $U \subset M$  et toute fonction  $\chi$  lisse à support dans  $U$ , l'opérateur  $M_\chi \circ P \circ M_\chi$  est un opérateur pseudo-différentiel d'Heisenberg (au sens de [13] ou [223]).

Soit  $M$  une variété de contact de dimension  $d + 1$ ,  $d = 2n$ . Par le théorème de Darboux 4.1.9, en chaque point  $p \in M$  on peut trouver un ouvert  $U$  et un morphisme de contact  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}_n$ , où  $\mathbb{H}_n$  est le groupe d'Heisenberg usuel muni de sa structure de contact usuelle (4.1.32). Cela signifie qu'autour de chaque point  $p \in M$  et pour tout champ de vecteur  $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$  :

$$\varphi_*(X) = \sum_{i=1}^{2n} f_i X_i, \quad (4.3.91)$$

où  $X_0, \dots, X_{2n}$  sont les champs modèles sur  $\mathbb{H}_d = \mathbb{R}^{2n+1}$  et  $f_i$  sont des fonctions lisses sur  $\mathbb{H}_d$ .

Soit  $P : \mathcal{E}'(M) \rightarrow \mathcal{E}'(M)$  un opérateur pseudolocal. Donnons nous  $\chi$  une fonction  $C_c^\infty(M)$  de support dans un tel ouvert  $U \subset M$  autour de  $p$ . Avec le théorème 4.3.16, le poussé-en-avant par  $\varphi$  de  $M_\chi \circ P \circ M_\chi$  sur  $\mathbb{H}_d$  est dans le calcul de BG si et seulement si il est dans le calcul groupoidal. De fait,  $p$  étant arbitraire, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 4.3.17.** *Soit  $M$  une variété de contact de dimension  $d + 1$ . Alors l'algèbre des opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels sur  $M$  de BG coïncide avec l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels de  $vEY$  définis avec le groupoïde  $H$ -tangent de  $M$ . En d'autres termes :*

$$\Psi_{\mathcal{V}}^m(M) = \Psi^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}. \quad (4.3.92)$$

Le même genre d'arguments s'applique pour les feuilletages de codimension 1 de  $M$ , voir l'exemple 4.1.12 et le théorème de Frobenius 4.1.13. Ainsi, si  $M$  est une variété de dimension  $d + 1$  équipée d'un tel feuilletage, alors en tout point  $p \in M$ , on peut trouver une carte de feuilletage  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  d'un ouvert  $U$  de  $p$  vers le groupe abélien  $(\mathbb{R}^{d+1}, +)$  muni du feuilletage standard soit :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \langle \partial_i, i \in \{1, \dots, d\} \rangle \leq H^2 = TM. \quad (4.3.93)$$

Raisonnant comme ci-dessus, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 4.3.18.** *Soit  $M$  est une variété de dimension  $d + 1$  équipée d'un feuilletage de codimension 1. Alors l'algèbre des opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels sur  $M$  de BG coïncide avec l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels de  $vEY$  définis avec le groupoïde  $H$ -tangent de  $M$ . En d'autres termes :*

$$\Psi_{\mathcal{V}}^m(M) = \Psi^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}. \quad (4.3.94)$$

**Remarque 28.** *On peut imaginer que le précédent résultat demeure vrai pour toute variété d'Heisenberg. Toutefois, la nature des coordonnées privilégiées lorsque les groupes osculants varient en tout point et en partie l'absence d'un théorème de type Darboux compliquent énormément les calculs.*

## 4.4 Application d'un théorème d'hypo-ellipticité de BG au sous-laplacien $\Delta_H$ sur $\mathbb{H}_n$

Nous terminons ce chapitre par une petite discussion autour de la [13, section § 18 p 140] concernant l'hypo-ellipticité des opérateurs modèles :

$$P = - \sum_{k=1}^d X_k^2 - i\lambda X_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^d \gamma_k X_k}_{(\spadesuit)} + c, \quad (4.4.1)$$

pour des fonctions  $\lambda, \gamma_j, c$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^{d+1}$ , voir [13, équation (18.1) p 140]. L'opérateur modèle qui approche  $P$  en un point  $y$  de  $U$  est :

$$P^y = - \sum_{k=1}^d (X_k^y)^2 - i\lambda(y) X_0^y, \quad (4.4.2)$$

où  $(X_j)_{j \in \{0, \dots, d\}}$  sont des champs vectoriels indépendants sur  $U$  et  $(X_1, \dots, X_d)$  génèrent le fibré en hyperplans  $\mathcal{V} \subset TU$  - voir [13, équation (18.2) p 141] - et où  $(X_j^y)$  sont les champs modèles (4.3.7). De plus pour reprendre BG :



" $P^y$  is precisely the  $y$ -invariant operator associated with the principal symbol  $P$  in  $S_{\mathcal{V}}^2(U)$ , since the term  $(\spadesuit)$  has symbol belonging to  $S_{\mathcal{V}}^1(U)$ ."

Le [13, théorème 18.4 p 141] affirme que  $P$  admet une paramétrix  $Q : C_c^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  dont le symbole  $q \in S_{\mathcal{V}}^{-2}(U)$  modulo les opérateurs régularisants si et seulement si pour tout  $y \in U$  :

$$\lambda(y) \notin \Lambda_y, \quad (4.4.3)$$

où  $\Lambda_y$  est défini [13, définition (2.4) p 16]. C'est une partie discrète de  $\mathbb{C}$  déterminée par le spectre d'un certain opérateur de type "*oscillateur harmonique*".

Nous allons manipuler ces objets dans le cas particulier du sous-laplacien  $\Delta_H = -\sum_{k=1}^d X_j^2$  pour le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $d = 2n$ . Ce cadre correspond au cas où les fonctions  $\lambda, \gamma_j, c$  sont nulles sur  $U = \mathbb{R}^{d+1}$  muni de la structure usuelle d'Heisenberg. Nous sommes donc [13, définition (2.4) p 16], dans le cas où pour tout  $y \in U$  :

$$\Lambda_y = \left\{ \pm \sum_{j=1}^n (2\alpha_j + 1)a_j, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}, \quad (4.4.4)$$

où les  $\pm ia_j$ ,  $a_j > 0$  sont les valeurs propres non nulles de la matrice de taille  $d$  antisymétrique  $B - {}^t B = (b_{jk} - b_{kj})$  où l'on rappelle que la matrice  $(b_{jk})$  apparaît dans les champs modèles  $X_j^y = \partial_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d b_{jk} x_k \partial_{x_0}$  définissant l'opérateur modèle  $P^y$ . Dans le cas du sous-laplacien  $\Delta_H$  on a :

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}. \quad (4.4.5)$$

Avec la [13, définition (2.4) p 16], les valeurs propres de la matrice  $B - {}^t B = (b_{jk} - b_{kj})$  sont  $\{\pm 2i\}$  comptées sans multiplicité. Il s'ensuit que  $\Lambda_y$  ne contient pas  $\lambda(y) = 0$  pour tout  $y \in U$ . D'après le [13, théorème 18.4 p 141], il admet une paramétrix dans  $\Psi_{\mathcal{V}}^{-2}(U)$  modulo les opérateurs régularisants. En particulier avec la [13, proposition (10.22) p 92],  $\Psi_{\mathcal{V}}^{-2}(U) \subset \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-1}(U)$ , où le dernier espace correspond aux classes d'Hörmander  $(\rho, \delta)$ . Encore une fois, insistons, cet opérateur n'est pas elliptique dans le calcul d'Hörmander, il n'y admet pas de paramétrix  $\Psi_{1,0}^{-2}(U)$ . BG ont toutefois montré qu'il admettait une paramétrix dans leur calcul. L'opérateur  $\Delta_H$  est *Heisenberg-elliptique*, voir exemple 46.

## Chapitre 5

# Comparaison du calcul pseudo-différentiel d'Hörmander, Kohn et Nirenberg avec celui de Beals et Greiner

Dans le livre de BG [13, p 7], nous avons été interpellé par la phrase :

"The parametrix turns out to be of type  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , so that the pseudodifferential techniques in Hörmander [113] also break down",

que nous nous donnons pour mission d'expliquer.

Dans ce chapitre nous allons mettre en exergue les différences entre le calcul pseudo-différentiel d'Hörmander, Kohn et Nirenberg et celui de BG. Chemin faisant nous distinguerons aussi ce qui différencie les calculs pseudo-différentiels généraux  $(\rho, \delta)$  et  $(1, 0)$  poly-homogènes.

### Classes de symboles et opérateurs pseudo-différentiels de type $(\rho, \delta)$ :

Par convenance pour le lecteur, on rappelle :

**Définition 5.0.1.** Classes de symboles  $S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , [208, définition 1.1]

Soit  $m \in \mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et deux réels  $\rho, \delta$  tels que  $0 \leq \rho \leq \delta \leq 1$ . On désigne par  $S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  l'ensemble des symboles  $\sigma$  d'ordre  $m$ , consistant en les fonctions de classe  $C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$  telles que, pour tout compact  $K \subset U$ , pour tous multi-indices  $(\alpha, \beta)$  il existe une constante  $C_{K, \alpha, \beta} > 0$  pour que soit vraie :

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, |D_x^\beta D_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq C_{K, \alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}. \quad (5.0.1)$$

On note  $S_{\rho, \delta}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . De façon similaire à la formule (1.3.29), on peut définir  $\Psi_{\rho, \delta}^m(U)$  pour  $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels de type  $(\rho, \delta)$ ,  $Op(\sigma)$ , avec  $\sigma \in S_{\rho, \delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ .

**Proposition 5.0.2.** Soit six réels  $\rho, \rho', \delta, \delta', m, m'$  tels que  $0 \leq \rho \leq \delta \leq 1$  et  $0 \leq \rho' \leq \delta' \leq 1$ . Les inclusions suivantes sont vérifiées :

1. Lorsque  $(\rho, \delta)$  sont fixés et  $m \leq m'$  :

$$S_{\rho, \delta}^m \subset S_{\rho, \delta}^{m'}. \quad (5.0.2)$$

2. Lorsque  $(\rho, m)$  sont fixés et  $\delta \leq \delta'$  :

$$S_{\rho, \delta}^m \subset S_{\rho, \delta'}^m. \quad (5.0.3)$$

3. Lorsque  $(\delta, m)$  sont fixés et  $\rho \leq \rho'$  :

$$S_{\rho', \delta}^m \subset S_{\rho, \delta}^m. \quad (5.0.4)$$

---

**Invariance par difféomorphisme des opérateurs  $\Psi_{\rho,\delta}^m$  :**

D'après le [208, théorème 5.1 p 47] de Taylor ou [168, p 165],  $\Psi_{\rho,\delta}^m$  est invariant par difféomorphismes (changement de coordonnées) pour  $1 - \rho \leq \delta < \rho$  et  $\rho > \frac{1}{2}$ . On rappelle que  $S_{\mathcal{V}}^m \subset S_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{m'}$  où  $m' = m$  si  $m \leq 0$  et  $m' = \frac{m}{2}$  si  $m < 0$ . Ainsi BG doivent montrer un théorème d'invariance (et c'est ce qu'ils font [13, théorème 10.67 p 98 (preuve § 16 p 135)] dans le cadre où les difféomorphismes en question préservent la structure du sous-fibré  $\mathcal{V}$ ) car ne peuvent, manipulant des paramètres critiques, utiliser le précédent théorème pour définir leur calcul sur une variété d'Heisenberg générale. Rappelons justement le comportement du symbole d'un opérateur translaté dans une carte vis à vis du symbole de l'opérateur original. Si  $\chi : V \rightarrow U$  désigne un difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$  et  $P \in \Psi_{\rho,\delta}^m(U)$  de symbole  $p$ , alors le symbole  $q$  de l'opérateur translaté dans la carte  $\chi$  à savoir :

$$P^\sharp(u) = P(u \circ \chi^{-1}) \circ \chi, u \in C_c^\infty(V), \quad (5.0.5)$$

est régi par le développement asymptotique [168, théorème 7.2 p 207] à savoir :

$$q(x, \xi) - p(\chi(x), \chi'(x)^{-1}\xi) \in S_{\rho,\delta}^{m+1-2\rho}(V). \quad (5.0.6)$$

Notons que le [168, théorème 7.1 p 206] assure que  $P^\sharp$  est bien un opérateur pseudo-différentiel  $\Psi_{\rho,\delta}^m(V)$ . Dans le cas  $\rho = 1, \delta = 0$  on invite le lecteur à consulter [81, section H p 310] du livre de Folland. Pour les  $(\rho, \delta)$  généraux, on pourra aussi consulter [208, § 5 p 47] du livre de Taylor.

De plus comme le mentionne [208] et [168, corollaire 7.3 p 207 et remarque 7.5 p 208] on peut définir pour  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$  le symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel (non obligatoirement poly-homogène)  $P \in \Psi_{\rho,\delta}^m(U)$  de symbole  $p$  en considérant la classe d'équivalence de  $p$  dans le quotient  $S_{\rho,\delta}^m(U)/S_{\rho,\delta}^{m-1-2\rho}(U)$ . Ainsi, pour  $\rho = 1, \delta = 0$  on retrouve que le symbole principal est bien défini modulo  $S_{1,0}^{m-1}$ .

**Développement asymptotique dans les classes  $(\rho, \delta)$  :**

Rappelons qu'il est possible de définir, [168, p 172], [113, p 146] le développement asymptotique pour les classes de symboles  $S_{\rho,\delta}^m$ .

**Définition 5.0.3.** Développement asymptotique [81, p 279], [113, p 146]

Soit  $0 \leq \delta, \rho \leq 1$ ,  $(m_j)$  une suite de limite  $-\infty$  et  $p_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}$ . On dit que la série formelle  $\sum_{j=0}^{+\infty} p_j$  est un développement asymptotique du symbole  $p \in S_{\rho,\delta}^{m_0}$  lorsque pour tout  $k$  :

$$p - \sum_{j < k} p_j \in S_{\rho,\delta}^{\bar{m}_k}, \quad (5.0.7)$$

où  $\bar{m}_k = \max_{j \geq k} m_j$ . On note cela :

$$p \sim \sum_j p_j. \quad (5.0.8)$$

**Remarque 5.0.4.** 1. **Important :** La somme  $\sum_{j=0}^{+\infty} p_j$  est purement formelle. Elle n'a pas besoin de converger et même si c'était le cas, on ne demande pas que sa limite soit le symbole  $p$ .

2. La suite  $(m_j)$  est souvent donnée par  $m_j = m - j$ , où  $m \in \mathbb{R}$  est fixé.

**Symboles  $(1, 0)$  poly-homogènes :**

Il existe une sous classe des symboles  $S_{1,0}^m$  qui sont les symboles poly-homogènes, dénotés  $S_{phg}^m$ , c'est à dire les symboles admettant un développement asymptotique par des fonctions  $p_{m-j}$  (asymptotiquement) homogènes :

$$p_{m-j}(x, s\xi) = s^{m-j}p_{m-j}(x, \xi), \quad s > 0. \quad (5.0.9)$$

Bien sûr une fonction homogène n'est pas forcément un symbole tout simplement car elle peut posséder une singularité en 0, alors l'équation :

$$p \sim \sum_j p_{m-j}, \quad (5.0.10)$$

signifie qu'on a fixé une fonction cut-off lisse  $\chi$  nulle au voisinage de 0 et valant 1 aux infinis de sorte que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$p - \sum_{j < N} \chi p_{m-j} \in S_{1,0}^{m-N}. \quad (5.0.11)$$

On rappelle que le lemme 2.1.7 montre que  $\chi p_{m-j} \in S_{1,0}^{m-j}$ . De plus, on peut montrer qu'un tel développement est indépendant de la fonction  $\chi$  choisie.

On peut s'interroger (à juste titre d'ailleurs) sur la raison pour laquelle ces développements sont intéressants en comparaison aux développements asymptotiques où  $p_{m-j}$  est un symbole quelconque. Premièrement, les opérateurs différentiels à coefficients lisses ainsi que les paramétrixes des opérateurs différentiels elliptiques sont des exemples d'opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole est poly-homogène, [202, p 197 problème 2.5]). Deuxièmement, grâce à ces développements, il est possible de donner un sens à la notion de symbole principal, qui est central dans l'étude des opérateurs différentiels. Ainsi, si l'on cherche une algèbre qui contient les opérateurs différentiels (à coefficients lisses), leur paramétrixes (lorsqu'elles existent) et sur laquelle on peut définir une notion de symbole principal qui coïncide avec celle qu'on a sur les opérateurs différentiels alors l'ensemble :

$$\Psi_{phg}^m := \{Op(p), p \in S_{phg}^m\}, \quad (5.0.12)$$

est très bien adapté. Comme le lecteur le sait, la notion de symbole principal permet également de définir la notion d'ellipticité. En effet, on rappelle que lorsque le symbole  $p \in S_{1,0}^m$  est poly-homogène, on dit que l'opérateur pseudo-différentiel  $Op(p)$  est elliptique si  $p_m$ , le terme homogène d'ordre  $m$  apparaissant dans le développement asymptotique de  $p$ , est non nul en dehors de 0. Toutefois, insistons sur le fait que tout symbole  $S_{1,0}^m$  n'est pas un symbole poly-homogène (par contre tout symbole  $p \in S_{\rho,\delta}^m$  -  $0 \leq \delta, \rho \leq 1$  - admet un développement asymptotique "trivial" **non poly-homogène** en posant  $p_m = p$  et  $p_{m-j} = 0$ ,  $j > 0$ ). Présentons un contre-exemple de ce phénomène en dimension 1.

**Exemple 42.** Soit  $\chi$  une fonction cut-off lisse sur  $\mathbb{R}$  valant 0 dans un voisinage de l'origine et 1 aux infinis. Alors :

$$p(x, \xi) = \chi(\xi)\sqrt{|\xi|} \ln(|\xi|), \quad (5.0.13)$$

est un symbole  $S_{1,0}^{\frac{1}{2}+1}$  mais pas un symbole classique  $S_{phg}^{\frac{1}{2}+1}$  (et même pour un ordre quelconque comme nous allons le voir). En effet, il existe  $C, \tilde{C}$  tel que pour  $\xi$  grand :

$$|\sqrt{|\xi|} \ln(|\xi|)| \leq C(1 + |\xi|)^{\frac{1}{2}+1}, \quad (5.0.14)$$

aussi :

$$|\partial_\xi \sqrt{|\xi|} \ln(|\xi|)| \leq \tilde{C}(1 + |\xi|)^{\frac{1}{2}+1-1.1}. \quad (5.0.15)$$

et il en est de même si l'on dérive  $\partial_\xi^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Nous allons montrer que  $p$  n'est poly-homogène d'aucun ordre  $m$ . Raisonnons donc par l'absurde et supposons que  $p \sim \sum_j p_{m-j}$  est un symbole poly-homogène pour  $m \in \mathbb{R}$  quelconque. Notons  $p_m$  sa partie principale homogène d'ordre  $m$ . Par définition, elle est non nulle en un élément  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et  $p_m(\xi) \neq 0$ . Il viendrait alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(\xi)}{p_m(t\xi)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t\xi)}{|t|^m p_m(\xi)} \quad (5.0.16)$$

$$= 1, \quad (5.0.17)$$

en vertu du fait que  $p - p_m \in S_{1,0}^{m-1}(\mathbb{R})$ . Cependant cette précédente limite est nulle si  $m > \frac{1}{2}$  et est l'infini si  $m \leq \frac{1}{2}$ , ce qui conduit à une contradiction vis à vis de (5.0.17).

Pour des symboles non-poly-homogènes de classes  $(\rho, \delta)$  générales, alors on doit définir l'ellipticité comme suit :

**Définition 5.0.5.** Ellipticité, [208, définition 1.1 p 60]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert et  $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ . Un opérateur  $P \in \Psi_{\rho,\delta}^m(U)$  de symbole  $\sigma(P)$  est elliptique d'ordre  $m$  lorsque pour tout compact  $K \subset U$ , il existe deux constantes  $C_K, R_K$  de sorte que :

$$|\sigma(P)(x, \xi)| \geq C_K(1 + |\xi|)^m, \quad x \in K, |\xi| \geq R_K. \quad (5.0.18)$$

**Remarque 5.0.6.** Dans le cas où l'on manipule des opérateurs pseudo-différentiels polyhomogènes, l'équation (5.0.18) équivaut à dire que le symbole principal de  $P$  - défini comme le terme  $p_m$  homogène d'ordre  $m$  apparaissant dans le développement asymptotique du symbole  $p$  - ne s'annule pas en dehors de 0.

### Rappels de résultats importants sur les classes $(\rho, \delta)$ :

1. De toutes suites de symboles d'ordre décroissant, on peut construire un symbole dont le développement asymptotique est donné par cette suite :

**Théorème 5.0.7.** [113, théorème 2.7 p 146], [81, théorème (8.16) p 280 (cas  $\rho = 1, \delta = 0$ )], [239, théorème 6.10 p 36 (cas  $\rho = 1, \delta = 0$ )]

Soit  $0 \leq \delta, \rho \leq 1$ ,  $(m_j)$  une suite de limite  $-\infty$  et  $p_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}$ . Alors on peut trouver  $p \in S_{\rho,\delta}^{m_0}$  de sorte que :

$$p \sim \sum_j p_j, \quad (5.0.19)$$

au sens de la définition 5.0.3.

2. On rappelle la propriété de pseudo-localité :

**Théorème 5.0.8.** Pseudo-localité

Soit  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$  et  $p \in S_{\rho,\delta}^m$ , alors  $Op(p)$  est pseudo-local soit pour tout  $u \in \mathcal{E}'(U)$  :

$$\text{suppsing } Op(p)u \subset \text{suppsing } u. \quad (5.0.20)$$

**Remarque 5.0.9.** La raison pour laquelle on impose que  $\delta < 1$  est issue du [113, théorème 2.2 p 140] (voir aussi [208, théorème 1.5 p 38 ]) lorsque nous montrons que tout opérateur pseudo-différentiel  $Op(p) : C_c^\infty \rightarrow C^\infty$ ,  $p \in S_{\rho,\delta}^m$  s'étend sur les espaces distributionnels  $Op(p) : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{D}'$ .

3. Le théorème suivant montre que le symbole résultant de la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels, lorsqu'elle est permise, admet un développement asymptotique selon (5.0.21). Il y a des résultats similaires toujours sensibles aux hypothèses  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$  et concernant les adjoints, transposées formelles mais nous n'en parlerons pas ici. On pourra consulter [208, § 4 p 45], [113, théorème 2.15 p 149], [239, théorème 9.1 p 61 (cas  $\rho = 1, \delta = 0$ )].

**Théorème 5.0.10.** Composition d'opérateurs pseudo-différentiels, [113, théorème 2.10' p 149]

Soit  $Op(p) \in \Psi_{\rho',\delta'}^{m'}$  et  $Op(q) \in \Psi_{\rho'',\delta''}^{m''}$  proprement supporté avec  $0 \leq \delta'' < \rho' \leq 1$ . Alors  $Op(p)Op(q) \in \Psi_{\rho,\delta}^{m'+m''}$ , où  $\rho = \min(\rho', \rho'')$  et  $\delta = \max(\delta', \delta'')$ . De plus le symbole  $r$  de  $Op(p)Op(q)$  est donné par la formule asymptotique :

$$r(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi) D_x^{\alpha} q(x, \xi), \quad (5.0.21)$$

c'est à dire pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$r - \sum_{|\alpha| < N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} p D_x^{\alpha} q \in S_{1,0}^{m'+m''-(\rho-\delta)N}. \quad (5.0.22)$$

Dans le cas de  $\rho', \rho'' = 1$  et  $\delta', \delta'' = 0$  l'équation (5.0.21) se traduit par, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$r - \sum_{|\alpha| < N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha p D_x^\alpha q \in S_{1,0}^{m+m'-N}. \quad (5.0.23)$$

**Important :** Dans les deux derniers points, il y a apparition de paramètres critiques.

**Exemple 43.** 1. Nous avons évoqué à maintes reprises dans ce manuscrit que l'opérateur de la chaleur :

$$P = \partial_t - \Delta \in \Psi_{1,0}^2(\mathbb{R}^{d+1}), \quad (5.0.24)$$

possède une paramétrix à droite  $Q \in \Psi_{\frac{1}{2},0}^{-1}(\mathbb{R}^{d+1}) \subset \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{-1}(\mathbb{R}^{d+1})$  modulo les opérateurs régularisants, voir la proposition 5.0.2 pour justifier l'inclusion précédente. C'est bien le théorème 5.0.10 qui rend licite la composition de  $PQ$  (paramétrix à droite).

2. Pour BG, le travail s'avère plus complexe car le précédent théorème 5.0.10 ne permet pas de composer les opérateurs  $\Psi_{\mathcal{V}}^m \subset \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^m$  (disons  $m \leq 0$  pour simplifier) entre eux car nous sommes dans le cadre des paramètres critiques. Nous perdons aussi la formule asymptotique (5.0.21). Pourtant, il semble toutefois, que la composition des classes  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  soit licite, voir [208, équations (8.23) et (8.24) p 190]. Taylor mentionne d'ailleurs cela dans son autre livre [209, p 10] :

"The result [de composition des opérateurs pseudo-différentiels] is also valid in case  $\rho = \delta < 1$ , but in this case (5.0.21) does not give an asymptotic sum, so we do not have a convenient formula for the principal symbol of a product in this case."

Par contre, l'auteur insiste bien que l'équation (5.0.21) n'est plus valide. Ainsi, BG montrent [13, § 14 p 119, théorème (14.1)] que les  $\mathcal{V}$ -opérateurs pseudo-différentiels se composent entre eux (sous réserve qu'ils soient proprement supportés) et le symbole (principal)<sup>1</sup> de la composée est donnée par une formule ([13, équations (14.2) et (14.8) p 119]) ressemblant à une "convolution tordue". L'équation [13, (9.63) p 89] dont le but est de rendre licite la composition entre un opérateur pseudo-différentiel de symbole  $(1,0)$  avec un de symbole  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  peut aussi se démontrer avec le théorème 5.0.10.

### Développement asymptotique chez BG :

Rappelons que par définition, les  $\mathcal{V}$ -opérateurs pseudo-différentiels de BG sont définis par :

$$Op(q)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int e^{ix \cdot \xi} q(x, \xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi, \quad q(x, \xi) = f(x, \sigma(x, \xi)), \quad (5.0.25)$$

où  $f \in S_{phg,G}^m$  - au sens des dilatations d'Heisenberg - et où  $\sigma(x, \xi)$  est définie aux équations (4.3.28) et (4.3.27) et constitue la collection des symboles des champs modèles générant localement le fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$  (nous avons laissé tomber l'indication de  $U$  qui doit rigoureusement être fixé au début de cette discussion). De fait, si  $f$  admet l'expansion asymptotique :

$$f \sim \sum_j f_{m-j}, \quad f_{m-j} \in \mathcal{H}_G^{m-j}, \quad (5.0.26)$$

alors on pose pour tout  $j$ ,  $q_{m-j} = f_{m-j}(x, \sigma(x, \xi))$  pour signifier :

$$q \sim \sum_j q_{m-j}. \quad (5.0.27)$$

1. Voir discussion la section "Développement asymptotique chez BG" ci-dessous.

BG définissent le symbole principal comme étant le terme  $q_m$  apparaissant dans le développement asymptotique d'un symbole  $q \in S_{\mathcal{V}}^m$ , voir [13, définition (10.42)]. En résumé les opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels  $\Psi_{\mathcal{V}}^m$  considérés par BG sont une sous-classe de  $\Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$  dont les symboles admettent un développement asymptotique en des fonctions  $G$ -homogènes au sens des dilatations d'Heisenberg. Leur calcul admet un calcul asymptotique qui donne l'expansion asymptotique d'un produit d'opérateurs dans  $\Psi_{\mathcal{V}}^m$  ([13, théorème (14.1) p 119]) et de l'adjoint ([13, théorème (17.4) p 139]).

### Ellipticité et construction de paramétrixes dans les classes $(\rho, \delta)$ :

Commençons par un lemme qui nous permettra à terme de définir le symbole "inverse" d'un symbole elliptique :

**Lemme 5.0.11.** [81, lemme (8.41) p 297]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert et un opérateur pseudo-différentiel  $P \in \Psi_{\rho, \delta}^m(U)$  de symbole  $\sigma(P)$  elliptique d'ordre  $m$ . Il existe une fonction  $\chi \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ , avec la propriété suivante : pour tout compact  $K \subset U$ , il existe des constantes positives  $c_K, C_K > 0$  telles que pour tout  $x \in K$  :

1.  $\chi(x, \xi) = 1$  lorsque  $|\xi| \geq C_K$ .
2.  $|\sigma(P)(x, \xi)| \geq c_K |\xi|^m$  lorsque  $\chi(x, \xi) \neq 0$ .

**Remarque 5.0.12.** Lorsque  $P$  est un opérateur différentiel elliptique à coefficients constants alors on sait avec le [218, lemme 1.1 p 3] que l'ensemble de ces zéros est inclus dans un compact et la procédure précédente est globalement simplifiée (aussi car il n'y a plus de dépendance en  $x$ ).

La formule (5.0.21) est une pièce maitresse pour montrer le théorème suivant bien connu :

**Théorème 5.0.13.** [167, corollaire 9.6], [208, théorème 1.3 p 61], [239, théorèmes 10.1 p 69, 10.3 p 71]

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Si  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$  alors  $P \in \Psi_{\rho, \delta}^m(U)$  est elliptique si et seulement si il existe un opérateur proprement supporté  $Q \in \Psi_{\rho, \delta}^{-m}(U)$  de sorte que  $PQ - Id$  et  $QP - Id$  soient des opérateurs pseudo-différentiels régularisants  $\Psi_{\rho, \delta}^{-\infty}(U)$ .

*Démonstration.* 1. Supposons  $P$  elliptique. On se donne avec le lemme 5.0.11 une fonction  $\chi$  qui satisfait les conclusions du lemme. On introduit alors :

$$q_{-m} = \frac{\chi}{\sigma(P)}, \quad (5.0.28)$$

avec  $q_{-m} = 0$  où  $\chi = 0$ . On montre alors que  $q_{-m} \in S_{\rho, \delta}^{-m}(U)$  et que :

$$q_{-m}P - 1 \in S_{\rho, \delta}^{-\infty}(U). \quad (5.0.29)$$

Posons  $Q_{-m} = Op(q_{-m})$ . La formule (5.0.21) nous permet d'écrire que :

$$\sigma(Q_{-m}P) = q_{-m}P \pmod{S_{\rho, \delta}^{-1}(U)} \quad (5.0.30)$$

$$= 1 - r_1, \quad r_1 \in S_{\rho, \delta}^{-1}(U). \quad (5.0.31)$$

On poursuit cette procédure comme elle est décrite clairement dans [81, p 298] et en utilisant toujours la formule (5.0.21), de sorte à avoir construit une suite  $q_{-m-j} \in S_{\rho, \delta}^{-m-j}(U)$  vérifiant pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sigma((Q_{-m} + \dots + Q_{-m-k})P) = 1 - r_{k+1}, \quad r_{k+1} \in S_{\rho, \delta}^{-k-1}(U), \quad (5.0.32)$$

et où on a posé  $Q_{-m-j} = Op(q_{-m-j})$ . Par le théorème 5.0.7, on peut trouver  $q \in S_{\rho, \delta}^{-m}$  de sorte que  $q \sim \sum_{j=0}^{+\infty} q_{-m-j}$ . De plus avec le [81, corollaire (8.32) p 289], il existe un opérateur proprement supporté  $Q \in \Psi_{\rho, \delta}^{-m}(U)$  de sorte que :

$$Q - Op(q) \in \Psi_{\rho, \delta}^{-\infty}(U). \quad (5.0.33)$$

Soit  $\tilde{q} \in S_{\rho,\delta}^{-m}(U)$  de sorte que  $Q = Op(\tilde{q})$ . Il vient que  $\tilde{q} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} q_{-m-j}$ . Ainsi, la composition de  $P$  avec  $Q$  étant rendue licite puisque  $Q$  est proprement supporté, il vient pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sigma(QP) - 1 = \sigma((Q_{-m} + \dots + Q_{-m-k})P) + \sigma((Q - \sum_{j \geq k} Q_{-m-j})P) - 1 \quad (5.0.34)$$

$$= \sigma((Q_{-m} + \dots + Q_{-m-k})P) - 1 \pmod{S_{\rho,\delta}^{-k-1}(U)}, \quad (5.0.35)$$

puisque  $Q - \sum_{j \geq k} Q_{-m-j} \in \Psi_{\rho,\delta}^{-m-k-1}(U)$ . Ainsi il vient par l'équation (5.0.32) :

$$\sigma(QP) - 1 = 0 \pmod{S_{\rho,\delta}^{-k-1}(U)}. \quad (5.0.36)$$

Ceci valant pour tout  $k$  alors on en déduit que  $QP - I \in \Psi_{\rho,\delta}^{-\infty}(U)$ , c'est à dire que  $Q$  est une paramétrix de  $P$  à gauche. On montre ensuite, voir [81, p 299], que  $Q$  est aussi une paramétrix à droite.

2. Réciproquement, supposons qu'il existe  $Q \in \Psi_{\rho,\delta}^{-m}(U)$  comme annoncée. On prend alors  $\sigma(P) \in S_{\rho,\delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$  le symbole de  $P$  et  $\sigma(Q) \in S_{\rho,\delta}^{-m}(U \times \mathbb{R}^d)$  le symbole de  $Q$ . Notons  $\sigma(PQ)$  le symbole du produit  $PQ$ . D'une part, la formule (5.0.21) de composition des symboles offre qu'il existe un symbole  $p$  :

$$p := \sigma(PQ) - \sigma(P)\sigma(Q) \in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}(U \times \mathbb{R}^d). \quad (5.0.37)$$

D'autre part, par hypothèse,  $\sigma(PQ - Id) = \sigma(R) \in S_{\rho,\delta}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ , où  $R \in \Psi_{\rho,\delta}^{-\infty}(U)$ . Soit encore :

$$\sigma(PQ) - 1 = \sigma(R) \quad (5.0.38)$$

Combinant les équations (5.0.37) et (5.0.38) on obtient :

$$p + \sigma(P)\sigma(Q) - 1 = \sigma(R) \in S_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)}(U \times \mathbb{R}^d). \quad (5.0.39)$$

Pour arriver à ses fins, le lecteur peut maintenant reproduire (et adapter au cas général  $(\rho, \delta)$ ) la [239, preuve du théorème 10.3 p 72] du livre de Wong qui fait les détails complètement (dans le cadre des symboles de type  $(1,0)$ ), puisque l'équation (5.0.39) correspond précisément à [239, l'équation (10.12)] de départ de la preuve du livre de Wong. □

### Paramétrixes et hypo-ellipticité chez BG et Hörmander, Kohn et Nirenberg :

BG expliquent les difficultés quant aux classes  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et à la construction de paramétrixes pour des opérateurs hypo-elliptiques non-elliptiques [13, p 89] :

"There are two fundamental difficulties in carrying the parametrix construction for elliptic differential operators over to the  $P$  in (4.0.1) (in the hypo-elliptic case). The first is that  $P$  is not elliptic : the second order part of its symbol,  $p_2$ , vanishes on a line in the cotangent bundle for each fixed  $x \in U$ . Thus we cannot choose  $q_{-2}$  as above (5.0.28). As we shall see later on, the construction in § 4, carried out for each model operator  $P^y$ ,  $y \in U$ , does provide us with the symbol of a partial parametrix : an operator  $Q_{-2}$  such that<sup>2</sup> :

$$R = PQ_{-2} - Id \in \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}, \quad S = Q_{-2}P - Id \in \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.0.40)$$

Next, to carry out the construction of a full parametrix for elliptic operator we used Theorem 5.0.10. A similar result is unavailable for  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -symbols : there is no effective calculus<sup>3</sup> for the composition of general pseudodifferential operators of type  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  [...]. As we shall see [...] the operators  $Q_{-2}$  and the error operators  $R$  and  $S$  belong to a more special class for which a full asymptotic calculus does exist<sup>4</sup>."

2. Encore une fois la formule suivante met en jeu la composition de  $P$  avec  $Q$ . Si on interprète  $P$  dans  $\Psi_{1,0}^2$  et  $Q_{-2} \in \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-2}$ , alors il nous faut encore une fois appliquer le théorème 5.0.10 pour valider cette composition.

3. C'est la formule (5.0.21) concernant le développement asymptotique du symbole du produit d'opérateurs pseudo-différentiels qui est vraiment cruciale aussi dans la preuve du théorème 5.0.13.

4. C'est justement le fameux calcul  $\Psi_V^m$  développé par BG !



Les défauts de ces classes  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  sont aussi mentionnés par Boutet de Monvel [19, page I-II.9] où l'auteur étudie une classe de symboles particuliers contenue précisément dans la classe  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  :

"Ils sont de type  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , avec la notation de Hörmander, donc ne peuvent pas donner lieu à un calcul symbolique comparable à celui des opérateurs pseudo-différentiels habituels."

Ainsi l'intérêt du calcul de BG est d'interpréter, dans l'équation (5.0.40),  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^2$  et  $Q_{-2} \in \Psi_{\mathcal{V}}^{-2}$  de sorte que leur composition  $PQ - Id$  et  $QP - Id$  soient dans  $\Psi_{\mathcal{V}}^m$ , avec  $m < 0$ . Cela étant fait et se rappelant que la composition d'opérateurs  $\Psi_{\mathcal{V}}$  est licite, l'astuce de la série de Von Neumann qu'on a utilisé à l'équation (5.0.34) peut alors perdurer de sorte à récupérer une paramétrix modulo les opérateurs régularisants. On peut alors en déduire l'hypo-ellipticité des opérateurs en question.

On rappelle l'astuce usuelle, voir [113, § 4 p 163], [208, Théorème 1.4 p61]. Prenons  $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$   $P$  un opérateur différentiel à coefficients lisses non-elliptiques (vus dans  $\Psi_{1,0}^m(U)$  ou encore  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(U)$ , avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ). Soit  $f \in C^\infty(U)$  de sorte que :

$$Pu = f, u \in \mathcal{E}'(U). \quad (5.0.41)$$

Supposons maintenant que  $P$  admette une paramétrix  $Q$  modulo les opérateurs régularisants. Cette paramétrix  $Q$  ne peut être dans  $\Psi_{1,0}^{-m}$  sinon, par le théorème 5.0.13 l'opérateur serait elliptique, ce qu'on a supposé ne pas être le cas. Ainsi, cette paramétrix peut être vue disons dans  $\Psi_{\rho,\delta}^{m'}$ ,  $m' < 0$  (avec les bons  $(\rho, \delta)$  pour pouvoir effectuer la composition avec  $P$ , voir théorème 5.0.10) ou dans  $\Psi_{\mathcal{V}}^{-m}$  de sorte que  $I - QP$  soit régularisant. Alors :

$$u = (I - QP)u + Qf. \quad (5.0.42)$$

Utilisant la pseudo-localité de  $Q$  (encore une fois, on rappelle que  $\Psi_{\mathcal{V}}^{-m} \subset \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-\frac{m'}{2}}$  et donc la pseudo-localité 5.0.8 est valide) et le fait que  $I - PQ$  soit un opérateur régularisant, alors on en déduit que  $u$  est lisse, c'est à dire  $P$  est hypo-elliptique.

Enfin notons que le [47, théorème A] de Dave et Haller de 2017 affirme que tout opérateur pseudo-différentiel dans le calcul de vEY sur une variété filtrée et qui satisfait la condition de Rockland filtrée admet une paramétrix dans le calcul de vEY modulo les opérateurs régularisants. C'est alors une conséquence de l'article de vEY [224, voir preuve théorème 60] que de montrer que l'opérateur est en fait hypo-elliptique.

Dans le cas classique d'Hörmander, Kohn et Nirenberg l'ellipticité est équivalente à admettre une paramétrix, comme on l'a vu au théorème 5.0.13. Dans le cas filtré, la [224, section 9] de l'article de van Erp et Yuncken permet de définir le caractère  $H$ -elliptique d'un opérateur pseudo-différentiel  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$ , voir [224, définition 54, définition 35]. Tout opérateur  $H$ -elliptique admet une paramétrix modulo les opérateurs régularisants et est alors hypo-elliptique, voir [224, définition 57, théorème 60 et corollaire 61].

## Chapitre 6

# Applications du théorème de Rockland sur les variétés filtrées

Dans ce chapitre, nous portons notre intérêt sur un résultat de type Rockland, du à Dave et Haller [47] en 2017, et qui permet de déduire l'hypo-ellipticité d'opérateurs différentiels sur une variété filtrée. Chemin faisant, nous nous soucierons aussi de rappeler le théorème original de Rockland de 1978, [184] dont celui de Dave et Haller est un prolongement. En quelques mots, le théorème de Rockland exprime le lien qu'il existe entre la théorie des opérateurs différentiels où règne la question de l'hypo-ellipticité et la théorie des représentations (irréductibles unitaires) de groupes. Ce chapitre est l'occasion pour le lecteur de manipuler concrètement les algèbres et groupes osculants, et de comprendre comment associer à un opérateur donné, une filtration. Nous montrerons à l'aide du théorème de Rockland filtré que sont hypo-elliptiques : l'opérateur de la chaleur sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ , l'opérateur de Kolmogorov sur  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur  $\mathcal{L}_\mu = -\Delta_H + i\mu Z$  sur  $\mathbb{H}_1$  où  $\Delta_H$  est le sous-laplacien,  $\mu \in \mathbb{C}$ . Tandis que l'exemple 47 de l'opérateur  $\mathcal{L}_\mu$  est intégré au cours de la seconde section de ce chapitre, les deux autres opérateurs sus-mentionnés se voient réserver chacun une section particulière. Mettons en valeur nos précédents propos par la citation suivante :

"Indeed, in [184], Rockland showed that if  $T$  is a homogeneous left-invariant differential operator on the Heisenberg group, then the hypoellipticity of  $T$  and  ${}^tT$  is equivalent to a condition now called the Rockland condition. He also asked whether this equivalence would be true for more general homogeneous Lie groups. Soon after, Beals showed in [10] that the hypoellipticity of a homogeneous left-invariant differential operator on any homogeneous Lie group implies the Rockland condition. In the same paper he also showed that the converse holds in some step-two cases. Eventually in [105], Helffer and Nourrigat settled what has become known as Rockland's conjecture by proving that the hypoellipticity is equivalent to the Rockland condition. At the same time, it was shown by Miller [152] that in the setting of homogeneous Lie groups, the existence of an operator satisfying the Rockland condition (hence of an invariant hypoelliptic differential operator in view of Helffer and Nourrigat's result), implies that the group is graded. This means, altogether, that the setting of graded Lie groups is the right generality for marrying the harmonic analysis techniques with those coming from the theory of partial differential equations." [73, p 4 ]

### 6.1 Le symbole principal d'un opérateur différentiel sur une variété filtrée

Soit  $M$  une variété filtrée de dimension  $d$ , de dimension homogène  $d_H$  et dont la longueur de la filtration  $(H^i)$  du fibré tangent est  $N$ . Soit  $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  un opérateur différentiel. Dans cette section, nous expliquons comment définir le symbole principal de l'opérateur à coefficients gelés  $P^x$ . Nous nous inspirons des articles de [47, section 2.2 p 11],[240, p 13],[223, 10.2 p 26].

On rappelle que par définition, une section  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  est un champ vectoriel sur  $M$  et est considérée comme un opérateur différentiel d'ordre 1. Les fonctions  $C^\infty(M)$  sont les opérateurs différentiels d'ordre 0. Un champ de vecteur peut être vu, [137, proposition 4.7 p 86], comme une dérivation, soit comme un endomorphisme :

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (6.1.1)$$

qui satisfait la règle de Leibniz. Ainsi, il est licite de composer des champs vectoriels sur  $M$ .

**Définition 6.1.1.** Opérateur différentiel sur une variété filtrée

Soit  $M$  une variété filtrée de pas  $N$ . On note  $DO_H^m(M)$  l'espace des opérateurs différentiels d'ordre au plus  $n$ . Il est défini par :

$$DO_H^m(M) = \text{Vect}_{C^\infty(M)} \left( X_1 \dots X_k, X_i \in \Gamma^\infty(H^{j_i}), j_i \in \{1, \dots, N\}, \sum_{i=1}^k j_i \leq m \right), \quad (6.1.2)$$

où  $\text{Vect}_{C^\infty(M)}$  signifie qu'on permet des combinaisons finies d'éléments  $f X_1 \dots X_k$ , où  $f \in C^\infty(M)$ . L'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre quelconque est :

$$DO_H(M) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} DO_H^m(M). \quad (6.1.3)$$

L'équation (6.1.3) traduit que  $DO_H(M)$  est une algèbre filtrée pour la composition des opérateurs différentiels.

On rappelle que les applications de quotient suivantes, dites *grading maps* chez vEY, sont des morphismes de fibrés vectoriels :

$$\bar{\sigma}^j : H^j \rightarrow H^j / H^{j-1} = \mathfrak{t}_H^j M. \quad (6.1.4)$$

Ainsi, par définition d'un morphisme de fibré, on récupère des applications linéaires entre chaque fibre :

$$\bar{\sigma}_x^j : H_x^j \rightarrow H_x^j / H_x^{j-1} = \mathfrak{t}_H^j M_x. \quad (6.1.5)$$

L'application (6.1.4) donne lieu à une application entre sections, toujours notée  $\bar{\sigma}^j$  :

$$\bar{\sigma}^j : \Gamma^\infty(H^j) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^j M). \quad (6.1.6)$$

On définit :

$$\pi_x^j : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^j M) \rightarrow \mathfrak{t}_H^j M_x, [X] \mapsto [X_x] \quad (6.1.7)$$

où  $[ \cdot ]$  désigne la classe d'équivalence des objets en question. Puis, on définit :

$$\sigma_x^j = \pi_x^j \circ \bar{\sigma}^j : \Gamma^\infty(H^j) \rightarrow \mathfrak{t}_H^j M_x. \quad (6.1.8)$$

Alors par recollement on peut définir :

$$\sigma_x^m : DO_H^m(M) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{t}_H M_x), \quad (6.1.9)$$

dont l'action sur un monôme est donnée par :

$$P = X_1 \dots X_k \mapsto \sigma_x^{j_1}(X_1) \dots \sigma_x^{j_k}(X_k), \quad (6.1.10)$$

où l'on rappelle que par définition  $X_i \in \Gamma^\infty(H^{j_i})$ ,  $j_i \in \{1, \dots, N\}$  et on impose  $\sum_{i=1}^k j_i = m$ .

**Définition 6.1.2.** Partie principale en un point  $x$  d'un opérateur différentiel

Soit  $M$  une variété filtrée et  $P \in DO_H^m(M)$ , un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur  $M$ . Alors pour tout  $x \in M$  on définit  $\sigma_x^m(P) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{t}_H M_x)$  comme étant la partie principale en  $x$  de l'opérateur  $P$ .

**Remarque 29.** L'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}(\mathfrak{t}_H M_x)$  est isomorphe aux opérateurs différentiels invariants à gauche par translation sur le groupe osculant  $\mathcal{T}_H M_x$  en  $x$ . De facto on peut voir :

$$\sigma_x^m(P) : C^\infty(\mathcal{T}_H M_x) \rightarrow C^\infty(\mathcal{T}_H M_x), \quad (6.1.11)$$

comme un tel opérateur.

On rappelle que dans le cadre de  $\mathbb{R}^d$  muni des graduations triviales un opérateur est invariant à gauche par translation si et seulement si il est à coefficients constants. Ainsi, sur  $\mathbb{R}^d$ , étant donné un opérateur différentiel (1.2.5), la partie principale d'ordre  $m$  de l'opérateur à coefficient gelés en  $x$  qui lui est associé est :

$$\sigma_x^m(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (6.1.12)$$

On rappelle en effet que sur une variété non filtrée les groupes osculants en  $x$  sont isomorphes à  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi dans le cadre des variétés filtrées, cet opérateur  $\sigma_x^m(P)$  joue le rôle de la partie principale d'un opérateur différentiel à coefficient gelés. On adoptera parfois la notation  $\sigma_x^m(P) = \sigma^m(P^x)$ .

**Exemple 44.** On prend la variété  $M = \mathbb{R}^3$  qu'on filtre trivialement. On se donne l'opérateur d'ordre 3 :

$$P = X_1^3 + X_1 X_2 X_3 + X_2 X_3^2 + X_1 X_2 + X_1, \quad (6.1.13)$$

où  $(X_1, X_2, X_3) \in \Gamma^\infty(H^1)$  est un repère  $H^1 = TM$ . Sa partie principale en  $x$  au sens de la précédente définition 6.1.2 est :

$$\sigma_x^3(P) = \left(\sigma_x^1(X_1)\right)^3 + \sigma_x^1(X_1)\sigma_x^1(X_2)\sigma_x^1(X_3) + \sigma_x^1(X_2)\left(\sigma_x^1(X_3)\right)^2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{t}_H M_x) \cong \mathfrak{U}(\mathbb{R}^3). \quad (6.1.14)$$

Or  $\mathfrak{U}(\mathbb{R}^3)$  s'identifie aux opérateurs différentiels invariants à gauche par translation sur  $\mathbb{R}^3$ , soit encore aux éléments de  $\mathbb{R}[\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}]$ . Ainsi on peut identifier :

$$\sigma_x^1(X_i) \mapsto \partial_{x_i}. \quad (6.1.15)$$

Ainsi on récupère avec cette identification que la partie principale en  $x$  de  $P$  est :

$$\sigma_x^3(P) = \partial_{x_1}^3 + \partial_{x_1} \partial_{x_2} \partial_{x_3} + \partial_{x_2} \partial_{x_3}^2. \quad (6.1.16)$$

**Exemple 45.** On prend la variété  $M = \mathbb{R}^3$  qu'on munit des champs  $X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z$ ,  $Y = \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z$  et  $Z = \partial_z$ . On filtre alors  $M$  selon :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \mathcal{V} \leq H^2 = TM, \quad (6.1.17)$$

où  $\mathcal{V}$  est le sous-fibré engendré en tout point par  $X, Y$ . Ainsi,  $M$  est une variété d'Heisenberg et les groupes osculants  $\mathcal{T}_H M_x$  en  $x$ , ne sont plus  $(\mathbb{R}^3, +)$  abéliens mais sont isomorphes au groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_1$ . Nous allons considérer l'opérateur sous-laplacien :

$$\Delta_H = X^2 + Y^2. \quad (6.1.18)$$

Alors la partie principale de  $\Delta_H$  en un point  $\underline{x} \in M$  est  $\forall \underline{x} \in M$  :

$$\sigma_{\underline{x}}^2(\Delta_H) = \sigma_{\underline{x}}^1(X)\sigma_{\underline{x}}^1(X) + \sigma_{\underline{x}}^1(Y)\sigma_{\underline{x}}^1(Y) \quad (6.1.19)$$

$$= [X]_{\underline{x}}^2 + [Y]_{\underline{x}}^2, \quad (6.1.20)$$

où  $[X]_{\underline{x}}, [Y]_{\underline{x}}$  signifie l'image de  $X, Y$  dans  $\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}}$ . La famille  $(\sigma_{\underline{x}}^2(\Delta_H))$  sont bien des opérateurs différentiels invariants à gauche par translation sur  $\mathcal{T}_H M_x \cong \mathbb{H}_1$ . Dans ce cas très particulier cette famille d'opérateurs s'identifie en tout point avec l'opérateur original  $\Delta_H$ .

## 6.2 Du théorème Rockland original au théorème de Rockland filtré

Dans cette section nous présentons plusieurs versions du théorème de Rockland avec trois exemples d'applications, nous partons du théorème original de Rockland pour formaliser la condition de Rockland moderne et la notion d'Heisenberg-ellipticité.

Le théorème original [184] de Rockland de 1978, permet de caractériser l'hypo-ellipticité d'un opérateur différentiel invariant à gauche par translation sur  $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^{2n+1}$  et homogène grâce à l'analyse harmonique sur ce groupe nilpotent. Dans tout ce qui suit, on désigne par  $\mathfrak{h}_n$ , l'algèbre de Lie d'Heisenberg. Elle est engendrée par la famille de champs  $(X_i, Y_i, Z)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  satisfaisant :

$$\begin{cases} [X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0 \\ [X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

et munie des dilatations :

$$\begin{cases} \delta_s(X_i) = sX_i \\ \delta_s(Y_i) = sY_i \\ \delta_s(Z) = s^2Z \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Selon Folland [79] ( $\spadesuit$ ) :

"This [next] theorem is the natural analogue for the  $\mathbb{H}_n$  of the fact that a homogeneous constant-coefficient differential operator on  $\mathbb{R}^d$  is hypoelliptic if and only if it is elliptic."

Pour prouver cette précédente assertion<sup>1</sup> le lecteur pourra utiliser le [81, théorème (6.36) p 216] du livre de Folland. Bien sûr l'hypothèse d'homogénéité est essentielle. L'opérateur de la chaleur 1, inhomogène d'ordre 2, est certes bel et bien à coefficients constants hypo-elliptique, mais n'est bien sûr pas elliptique.

**Théorème 6.2.1.** *Rockland  $G = \mathbb{H}_n$ , 1978 [184]*

Soit  $P$  invariant à gauche par translation et homogène de degré  $m$  pour les dilatations (6.2.2). Sont équivalentes :

1. L'opérateur  $P$  et  ${}^tP$  sont hypoelliptiques.
2. Pour toute représentation irréductible non triviale  $\pi$  de  $\mathbb{H}_n$  alors l'opérateur non borné  $d\pi(P)$  avec pour domaine les vecteurs  $C^\infty$  associés à  $\pi$ , possède un inverse à gauche et à droite borné.
3. Pour toute représentation irréductible non triviale  $\pi$  de  $\mathbb{H}_n$ , les opérateurs  $d\pi(P)$  et  $d\pi(P)^*$  sont injectifs sur l'espace des vecteurs  $C^\infty$  associés à  $\pi$ .

**Remarque 30.** La seconde condition du théorème 6.2.1 est habituellement appelée condition de Rockland bilatère. En vérité il suffit que l'opérateur  $P$  soit Rockland à gauche pour obtenir son hypo-ellipticité (i.e. que  $d\pi(P)$  possède un inverse à gauche borné), on parle alors de condition de Rockland à gauche.

Pour la définition de  $d\pi(P)$  on consultera l'article de Rockland, [184, p 4-7] ou encore la section A.2 qui propose entre autres quelques rappels sur l'algèbre enveloppante.

On peut, de façon générale, dans le cadre des variétés filtrées, définir la *condition de Rockland*. On rappelle que pour  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur une variété filtrée  $M$  on a défini 6.1.2 sa partie principale  $\sigma^m(P^x)$  en un point  $x \in M$ . On rappelle qu'il s'agit d'un opérateur différentiel invariant à gauche par translation sur  $\mathcal{T}_H M_x$  et homogène. Ainsi, pour  $\pi$  une représentation irréductible unitaire du groupe osculant en  $x$ , il est licite de définir  $d\pi(\sigma^m(P^x))$ .

**Définition 6.2.2.** Condition de Rockland (ponctuelle à gauche) sur une variété filtrée  $M$ , [47, p 3, définition 2.7 p 16]

Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur une variété filtrée  $M$ . On dit que  $P$  satisfait la condition de Rockland (ponctuelle à gauche) en  $x \in M$  lorsque pour toute représentation irréductible non triviale  $\pi$  du groupe osculant  $\mathcal{T}_H M_x$  en  $x$ , l'opérateur  $d\pi(\sigma^m(P^x))$  est injectif sur  $H_\pi^\infty$ , l'espace des vecteurs  $C^\infty$ . Un opérateur qui satisfait la condition de Rockland pour tout  $x$  de  $M$  est dit opérateur de Rockland sur  $M$ .

**Proposition 6.2.3.** *La condition d'ellipticité ponctuelle vue à la définition 1.3.4 correspond précisément à la condition de Rockland ponctuelle à gauche 6.2.2 sur le groupe  $(\mathbb{R}^d, +)$ , vue comme variété trivialement filtrée.*

*Démonstration.* D'une part rappelons que dans ce cas, les groupes osculants sont tous isomorphes au groupe abélien  $(\mathbb{R}^d, +)$ . D'autre part, la condition de Rockland s'énonce comme suit :

1. Au vu du grand théorème 1.3.29 seul le sens hypo-elliptique  $\Rightarrow$  elliptique demeure à être démontré.

---

"Pour toute représentation  $\pi$  irréductible unitaire de  $(\mathbb{R}^d, +)$  non triviale, alors  $d\pi(\sigma^m(P^x))$  est inversible sur  $H_\pi^\infty$ , l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de  $\pi$ ."

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  et  $P$  un opérateur différentiel comme dans la définition 1.3.4. On sait que les représentations unitaires irréductibles sont les caractères<sup>2</sup> :

$$\pi_\xi : x \mapsto e^{ix \cdot \xi}, \text{ et } H_\pi^\infty = \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (6.2.3)$$

Alors si  $\xi \neq 0$  (pour éviter la représentation triviale) et  $x \in U$  l'opérateur  $d\pi(\sigma^m(P^x)) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est précisément le symbole principal de  $P$  évalué en  $(x, \xi)$ , puisque  $d\pi_\xi(\partial^\alpha) = (i\xi)^\alpha$ . Reste, pour affirmer l'équivalence annoncée, à constater que  $d\pi(\sigma^m(P^x))$  est inversible si et seulement si le symbole principal de l'opérateur à coefficients gelés  $P^x$ , est non nul pour  $\xi \neq 0$ , ce qui est précisément la condition d'ellipticité. Nous laissons cela au lecteur.  $\square$

Utilisant le résultat ( $\spadesuit$ ) mentionné dans la citation de Folland en début de cette section, on peut démontrer :

**Corollaire 6.2.4.** [220, lemme 41 p 34], [184, proposition 5.3 p 36]

*Un opérateur différentiel homogène à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^d$  (trivialement gradué) satisfait la condition de Rockland si et seulement si il est elliptique.*

L'histoire du théorème de Rockland est passionnante et remplie de rebondissements que nous nous efforçons de décrire brièvement. En 1979, Helffer et Nourrigat [105] ont généralisé le théorème 6.2.1 aux groupes de Lie nilpotents gradués quelconques (après avoir obtenu en 1978 des résultats encourageants pour des groupes nilpotents de pas 3, voir les références en bas de leur article). En effet, ils ont montré que la condition de Rockland était suffisante pour l'hypo-ellipticité en utilisant une *estimée a priori*, voir [105, proposition 6.4 p 955]. Dans leur article [105, p 901], Helffer et Nourrigat nous indiquent que c'est Beals [10, théorème 1 p 3] en 1976-1977 qui a montré que la condition de Rockland dans le cas d'un groupe de Lie gradué quelconque était nécessaire pour avoir l'hypo-ellipticité, c'est à dire : hypo-elliptique  $\Rightarrow$  Rockland. Bien que les dates des travaux de Beals sont antérieures à la date à laquelle nous faisons référence pour l'article de Rockland, la version prépubliée de l'article de Rockland était disponible dès 1976 (voir la note de bas de page 1 dans l'article de Rockland [184] ainsi que le point (2) p 50 qui mentionne précisément les travaux de Beals). Le [10, théorème 2 p 3] de Beals offre, dans un cas bien particulier (notamment groupe de Lie gradué de poids  $\{1, 2\}$ ), l'implication Rockland  $\Rightarrow$  hypo-elliptique. Fischer et Ruzhansky [73, p 177] corroborent cela :

"He [Rockland, [184, § 8 p 49] ] also asked whether this equivalence [Condition de Rockland  $\Leftrightarrow$  hypo-ellipticité] would be true for more general homogeneous Lie groups. Just afterwards, Beals showed [10] that the hypoellipticity of a homogeneous left-invariant differential operator on any homogeneous Lie group implies the Rockland condition. At the same time he also showed that the converse holds in some step-two cases. Eventually in [105], Helffer and Nourrigat settled what has become Rockland's conjecture."

Le lecteur l'aura constaté, beaucoup d'articles des années 70 énoncent la condition de Rockland en considérant des opérateurs homogènes. Ce point est soulevé par Rockland [184, p 49] à la fin de son article :

"Another interesting question concerns the case of nonhomogeneous  $P \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$ . Certainly any  $P \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$  can be expressed uniquely as  $P = P_m + P_{m-1} + \dots + P_0$  where  $P_j \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_n)$  is homogeneous of degree  $j$  for each integer  $j$ . The analogue of ellipticity for  $P$  would be the assumption that  $P_m$ , the top-order part, satisfies [the Rockland condition]. Is it true that if  $P$  is "elliptic" in this sense, then  $P$  is hypoelliptic ? [...] Preliminary indications appear to be affirmative [...]."

Récemment, en 2017, Dave et Haller [47, théorème A P4] ont démontré un théorème de type Rockland sous sa forme la plus aboutie et donnent ainsi par ailleurs raison à Rockland puisque leur condition s'exprime sur la partie principale d'un opérateur différentiel (sans le supposer homogène). Dave et Haller affirment aussi, [47, p 4] en préliminaire de ce théorème :

---

2. En raison du lemme de Schur, représentations irréductibles unitaires du groupe **abélien**  $(\mathbb{R}^d, +)$  sont les morphismes  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . On pourra voir le [82, corollaire (3.6)].

---

"Christ, Geller, Glowacki, and Polin constructed a pseudodifferential operator calculus on graded nilpotent Lie groups and established a Rockland type theorem, see <sup>3</sup> [35]. For Heisenberg manifolds with varying osculating algebras such a result has been obtained by Ponge [172]."

Précisément, il existe une condition de Rockland pour les opérateurs non-différentiels de convolution. C'est ce qu'a notamment étudié Glowacki à la fin des années 80, [91],[92], voir aussi [35, théorème 5.11 p 55]. Soit  $G$  un groupe de Lie homogène de dimension homogène  $d_H$ , voir la section A.1. Plus précisément, grâce à la théorie des représentations irréductibles unitaires de  $G$ , Glowacki donne une condition d'inversibilité à gauche pour un opérateur intégral singulier de la forme :

$$Kf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \epsilon} f(yx)k(y)dy, \quad f \in C_c^1(G), \quad (6.2.4)$$

où  $k : G \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{C}$  lisse homogène d'ordre  $-d_H$ , voir [92, p 99].

Enfin, le théorème de Rockland dans sa version la plus aboutie, sur les variétés filtrées générales :

**Théorème 6.2.5.** *Théorème de Rockland sur une variété filtrée, [47, théorème A P4]*

*Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur une variété filtrée  $M$ . Si  $P$  est un opérateur de Rockland au sens de la définition 6.2.2, alors  $P$  est hypo-elliptique.*

C'est l'occasion de souligner la nécessité de connaître les représentations irréductibles d'un groupe, consulter à ce sujet le livre de Folland [82]. Dans le cas filtré, on peut donc espérer retomber sur des cas simples comme lorsque  $\mathcal{T}_H M_x$  isomorphe à  $(\mathbb{R}^d, +)$  abélien, ou à  $\mathbb{H}_n$ . Comme le lecteur le sait, les groupes osculants  $\mathcal{T}_H M_x$  sont des groupes de Lie gradués nilpotents pour lesquels la classification des représentations irréductibles est donc bien connue. En 1962, Kirilov, étudiant de Gelfand, a établi dans sa thèse [125] la correspondance entre le dual d'un groupe nilpotent  $G$  et l'espace des orbites pour l'action co-adjointe de  $G$  vers  $\mathfrak{g}^*$ . En 1973, Brown [24] a établi que cette correspondance était en fait un homéomorphisme <sup>4</sup> lorsqu'on munissait  $\hat{G}$ , l'espace dual, de la topologie de Fell et l'espace des orbites de la topologie quotient. On pourra aussi consulter aussi [60, section 1.1.3]. Dans le cas de  $\mathbb{H}_n$ , le théorème de Stone-von-Neumann (1930, resp. 1931) donne une classification des représentations irréductibles unitaires, consulter [80, section § 5 p 35 dont le théorème (1.59) p 37], [82, théorème 6.50 p 207], [41, théorème 2.2.9 p 51]. La théorie des orbites de Kirillov est décrite notamment par Corwin et Greenleaf [41] de façon détaillée ou encore dans [69, section 4].

Erik van Erp et Ponge appellent "*Heisenberg-ellipticité*" la condition de Rockland ponctuelle à gauche dans le cas des variétés filtrées d'Heisenberg. Plus précisément dans l'article [9] de Baum et van Erp les auteurs précisent :

"We shall refer to hypoelliptic operators with a parametrix in the Heisenberg calculus as Heisenberg-elliptic."

Dans [221] van Erp dit :

"Observe that for the abelian group  $\mathbb{R}^d$  unitary representation theory amounts to Fourier theory, and a Rockland operator on  $\mathbb{R}^d$  is just a homogeneous elliptic constant coefficient operator. In this language, one could define ellipticity by saying that  $P$  is elliptic if each of the model operators  $P^x$  in the highest order part of  $P$  is a Rockland operator on the abelian group  $T_x M$ . This generalizes beautifully to the Heisenberg calculus."

---

3. On invite le lecteur qui consulterait cet article à focaliser son attention sur les théorèmes 2.5 d) page 36 (concernant une condition - type "*condition de Rockland*" - donnée par théorie des représentations de groupe pour obtenir une paramétrix à gauche), théorème 6.2 page 56 (concernant une condition donnée par théorie des représentations de groupe pour l'existence d'un noyau fondamental) et les remarques § 8 page 62 (concernant une condition pour obtenir une paramétrix à droite). Le théorème 5.11 page 55 (concernant une condition donnée par théorie des représentations de groupe pour qu'un endomorphisme de  $L^2$  donné par la convolution avec un noyau de type distribution régulière (en dehors de l'identité du groupe) homogène + polynôme  $\times \log(|x|)$  et d'ordre moins la dimension homogène du groupe soit inversible dans  $L^2$ ) est en fait du à Glowacki dans un article antécédent [92] à celui en question.

4. Selon Ewert, [68, p 23] Kirilov aurait déjà montré que la correspondance était continue et bijective. Brown a montré que l'application inverse était continue.

En comparaison avec la définition d'ellipticité 1.3.4 on peut définir la notion d'Heisenberg-elliptique comme suit, de sorte à s'adapter au contexte créé par la structure Heisenberg sous-jacente.

**Définition 6.2.6.** Heisenberg-elliptique, [221, définition 5]

Un opérateur différentiel  $P$  d'ordre  $m$  sur une variété d'Heisenberg est dit Heisenberg-elliptique lorsque pour tout  $x \in M$  les parties principales des opérateurs modèles  $\sigma^m(P^x)$  satisfont la condition de Rockland ponctuelle à gauche à savoir : pour toute représentation irréductible non triviale  $\pi$  de  $\mathcal{T}_H M_x$  alors  $d\pi(\sigma^m(P^x))$  est un opérateur inversible sur  $H_\pi^\infty$ .

**Remarque 31.** Notons que la définition 6.2.6 requière que  $d\pi(\sigma^m(P^x))$  soit inversible sur  $H_\pi^\infty$  tandis que la définition 6.2.2 requière seulement l'injectivité. En réalité, en utilisant l'indice de Fredholm et les idées de Helffer, Nourrigat et Rockland, le mathématicien Miller a montré en 1982 que les deux conditions sont équivalentes dans le cas des groupes nilpotents de pas 2, [151, théorème 2].

**Exemple 46.** L'opérateur sous laplacien  $\Delta_H$  sur  $\mathbb{H}_1$  est Heisenberg-elliptique. Notons que le sous laplacien est noté  $\mathcal{L}_0$  dans l'ouvrage [210] de Taylor. On trouvera aussi les calculs suivants faits aux [210, équations (6.2), (6.3) p 61])

1. Pour  $\pi_h$  la représentation de Schrödinger pour  $h \neq 0$ , il vient (voir [210, équation (2.33) p 50]) :

$$\begin{cases} d\pi_{\pm h}(X) &= \sqrt{h}\partial_x, \\ d\pi_{\pm h}(Y) &= \pm i\sqrt{h}x, \\ d\pi_{\pm h}(Z) &= \pm ih. \end{cases} \quad (6.2.5)$$

$$d\pi_h(\Delta_H) = -h\partial_x^2 + hx^2 = hH, \quad (6.2.6)$$

où  $H$  est l'oscillateur harmonique sur  $\mathbb{R}$  (ou encore opérateur d'Hermite). De fait :

$$d\pi_h(P) = hH \text{ a un inverse à gauche et à droite pour tout } h \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(H).$$

Avec [210, l'équation (6.30) p 64 et la proposition 6.1 p 65] le spectre de l'oscillateur harmonique est  $\sigma(H) = 1 + 2\mathbb{N}$ . Procédant pour  $h$  positifs et négatifs, on en conclue que l'opérateur  $d\pi_h(\Delta_H)$  est bien inversible pour  $h \neq 0$ .

2. Pour  $\pi_{\xi,\eta}(x, y, z) = e^{i(x\xi + y\eta)}$  une représentation de dimension 1, il vient<sup>5</sup>, voir [184, équation (3.8) p 17] :

$$\begin{cases} d\pi_{\xi,\eta}(X) &= i\xi, \\ d\pi_{\xi,\eta}(Y) &= i\eta, \\ d\pi_{\xi,\eta}(Z) &= 0. \end{cases} \quad (6.2.8)$$

De fait :

$$d\pi_{\xi,\eta}(\Delta_H) = -(\xi^2 + \eta^2), \quad (6.2.9)$$

qui est bien inversible lorsque  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ .

De fait on en déduit que  $\Delta_H$  est bien Heisenberg-elliptique.

**Remarque 6.2.7.** Avec la définition 6.2.6 et le théorème 6.2.5 on sait que sur une variété d'Heisenberg, tout opérateur Heisenberg-elliptique est hypo-elliptique. En particulier  $\Delta_H$  est hypo-elliptique. On le savait déjà grâce au [13, théorème (18.4) p 141] dont on a parlé dans la section 4.4.

---

5. **Attention :** Étant moi même coutumier de cette erreur, je rappelle qu'il ne faut pas oublier les représentations de dimension 1 quand on vérifie la condition de Rockland ! Pour calculer par exemple  $d\pi_{\xi,\eta}(X)$ , il suffit d'appliquer la définition de la dérivée d'une représentation :

$$d\pi_{\xi,\eta}(X) = \partial_t|_{t=0}\pi_{\xi,\eta}(e^{tX}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it\xi} - 1}{t} = i\xi \quad (6.2.7)$$



**Exemple 47.** Généralisant l'exemple 46 à l'opérateur<sup>6</sup> :

$$\mathcal{L}_\mu = -\Delta_H + i\mu Z, \quad (6.2.10)$$

défini sur  $\mathbb{H}_1$ , on montre voir [210, équation (6.36), (6.37), proposition 6.1 p 65] que pour les représentations de Schrödinger  $\pi_h$  avec  $h > 0$  alors :

$$d\pi_h(\mathcal{L}_\mu), \quad (6.2.11)$$

est inversible si et seulement si  $\mu \notin 1 + 2\mathbb{N}$ . Soit  $\pi_{\xi,\eta}$  une représentation irréductible de dimension 1 sur  $\mathbb{H}_1$  comme à l'exemple 46. Comme  $d\pi_{\xi,\eta}(Z) = 0$  alors il est toujours vrai, comme on l'a fait à l'exemple 46 que :

$$d\pi_{\xi,\eta}(\mathcal{L}_\mu) = -(\xi^2 + \eta^2), \quad (6.2.12)$$

est inversible lorsque  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ . Ainsi, procédant de même pour  $h$  négatif dans (6.2.11), on en déduit que lorsque  $\mu \notin \mathbb{C} \setminus 2\mathbb{Z} + 1$ , alors  $\mathcal{L}_\mu$  est Heisenberg-elliptique, voir aussi [66, théorème 7 p 26].

**Remarque 32.** Dans les exemples précédents, il suffirait en vérité de vérifier la condition de Rockland pour les représentations de Schrödinger  $\pi_1$  et  $\pi_{-1}$  en raison de leur homogénéité à savoir précisément que pour  $h > 0$  :

$$d\pi_{\pm h}(P) = \sqrt{h}^m d\pi_{\pm 1}(P), \quad (6.2.13)$$

pour tout  $P \in \mathfrak{A}(\mathfrak{h}_n)$  homogène de degré  $m$ .

### 6.2.1 Application du théorème de Rockland généralisé à l'opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R}^{d+1}$

Dans cette section nous montrons l'assertion suivante :

"L'opérateur de la chaleur  $P = \partial_t - \Delta$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  est hypo-elliptique",

de sorte à illustrer la puissance du théorème de Rockland généralisé 6.2.5. Tout d'abord, l'exemple 1 montre que le symbole principal de l'opérateur de la chaleur ne satisfait pas la condition d'ellipticité de la définition 1.3.4. En effet, soit  $(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Le symbole principal de l'opérateur à coefficients gelés  $\sigma^2(P^{(t,x)})(\tau, \xi) = |\xi|^2$  n'est pas inversible partout sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . De fait,  $P$  n'est donc pas elliptique. Aucune chance, donc, d'utiliser le théorème affirmant :

Elliptique  $\Rightarrow$  Hypo-elliptique.

Deux moyens s'offrent à nous pour montrer qu'il est hypo-elliptique :

1. **Avec les solutions fondamentales :** On peut espérer appliquer le théorème E.1.5 qui consiste à regarder une solution fondamentale de  $P$  et d'en déduire si elle est  $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})$  que  $P$  est bien hypo-elliptique. En effet, l'analyse harmonique nous fournit une telle solution fondamentale, voir [81, section A "The gaussian kernel" p 143 dont théorème (4.6) et corollaire (4.7) p 146].
2. **Avec l'Heisenberg-ellipticité :** On se donne la filtration suivante sur  $M = \mathbb{R}^{d+1}$  :

$$H^0 = \{0\} \leq H^1 = \mathcal{V} \leq H^2 = TM, \quad (6.2.14)$$

où  $\mathcal{V}$  est un fibré en hyperplans engendré en tout point par les champs  $(X_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$  ci dessous :

$$\begin{cases} X_0 = \partial_t \\ X_j = \partial_{x_j}, \quad \forall 1 \leq j \leq d. \end{cases} \quad (6.2.15)$$

<sup>6</sup>. Cet opérateur a été largement étudié par la communauté scientifique et joue un rôle majeur dans l'étude des opérateurs différentiels issus de l'analyse complexe à plusieurs variables [22, section 2.2 p 26 dont théorème 24 p 33].

Cette filtration **s'adapte précisément** à l'opérateur  $P$  et c'est un feuilletage de codimension 1, voir l'exemple 4.1.12. Cela entraîne que les groupes osculants en  $(t, x)$  sont  $\mathcal{T}_H M_{(t,x)} \cong \mathbb{R}^{d+1}$  sont ici abéliens. De plus la filtration nous donne la famille de dilatations :

$$\begin{cases} \delta_\lambda(\partial_t) = \lambda^2 \partial_t \\ \delta_\lambda(\partial_{x_j}) = \lambda \partial_{x_j}, \quad \forall 1 \leq j \leq d. \end{cases} \quad (6.2.16)$$

Soulignons au lecteur que cette filtration entraîne que l'opérateur est homogène d'ordre 2 car en particulier le champ  $\partial_t$  est d'ordre 2 au sens de ces dilatations.

Nous allons montrer que  $P$  est Heisenberg-elliptique. Soit  $(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Les représentations irréductibles de  $(\mathbb{R}^{d+1}, +)$  abélien sont de dimension 1 et sont données par :

$$\pi_{\tau, \xi} : (t, x) \mapsto e^{i(\tau t + \xi \cdot x)} \in \mathbb{C} \quad (6.2.17)$$

Vérifions que si  $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$  alors  $d\pi_{\tau, \xi}(\sigma^2(P_{t,x}))$  est inversible dans  $H_\pi^\infty = \mathbb{C}$ . Calculons d'abord :

$$d\pi_{\tau, \xi}(\partial_t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \pi_{\tau, \xi}(e^{s\partial_t}) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} e^{i\tau s} = i\tau \quad (6.2.18)$$

$$d\pi_{\tau, \xi}(\partial_{x_j}^2) = d\pi_{\tau, \xi}(\partial_{x_j})^2 = (i\xi_j)^2 = -\xi_j^2 \quad (6.2.19)$$

Ainsi  $\pi_{\tau, \xi}(\sigma^2(P_{t,x})) = i\tau + |\xi|^2$  est bien inversible si  $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$ . De fait  $P$  est bien Heisenberg-elliptique. Le théorème 6.2.5 nous permet de conclure quant à l'hypo-ellipticité.

## 6.2.2 Application du théorème de Rockland généralisé à l'opérateur de Kolmogorov

Dans cette section nous montrons l'assertion suivante :

"L'opérateur de Kolmogorov  $P = -\partial_x^2 + \partial_t + x\partial_y$  sur  $\mathbb{R}^3$  est hypo-elliptique".

Deux moyens s'offrent à nous pour montrer qu'il est hypo-elliptique :

1. **Avec les solutions fondamentales** : On a déjà vu cet argument, il s'agissait du noyau fondamental très régulier trouvé par Kolmogorov en 1934, consulter la discussion après l'équation (1.3.89) et plus généralement l'article original [130].
2. **Avec l'Heisenberg-ellipticité** : On définit les champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} X_0 &= \partial_y \\ X_1 &= \partial_x \\ X_2 &= \partial_t + x\partial_y. \end{cases} \quad (6.2.20)$$

Avec ces champs, on définit une filtration de profondeur 3 :

$$\begin{cases} H^0 &= \{0\} \\ H^1 &= \langle X_1 \rangle \\ H^2 &= \langle X_1, X_2 \rangle \\ H^3 &= \langle X_0, X_1, X_2 \rangle. \end{cases} \quad (6.2.21)$$

Tout d'abord puisque  $[X_1, X_2] = X_0$ , il est clair que la filtration est compatible avec les crochets de Lie. L'opérateur  $P$  se réécrit :

$$P = -X_1^2 + X_2. \quad (6.2.22)$$

Pour cette filtration les dilatations opèrent dans l'algèbre osculante en  $\underline{x} = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$  selon :

$$\begin{cases} \delta_s([X_1]_{\underline{x}}) = s^1[X_1]_{\underline{x}} \\ \delta_s([X_2]_{\underline{x}}) = s^2[X_2]_{\underline{x}} \\ \delta_s([X_0]_{\underline{x}}) = s^3[X_0]_{\underline{x}}. \end{cases} \quad (6.2.23)$$

De fait l'opérateur  $P$  est homogène d'ordre 2. Pour vérifier la condition de Rockland il nous faut donc trouver les groupes osculants en  $\underline{x}$ . On sait que :

$$\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}} = \underbrace{\langle [X_1]_{\underline{x}} \rangle}_{\cong \mathfrak{t}_H^1 M_{\underline{x}}} \oplus \underbrace{\langle [X_2]_{\underline{x}} \rangle}_{\cong \mathfrak{t}_H^2 M_{\underline{x}}} \oplus \underbrace{\langle [X_0]_{\underline{x}} \rangle}_{\cong \mathfrak{t}_H^3 M_{\underline{x}}}, \quad (6.2.24)$$

est une algèbre de Lie graduée nilpotente. On rappelle que les groupes osculants  $\mathcal{T}_H M_{\underline{x}} = \mathfrak{t}_H M_{\underline{x}}$  munis de la loi de BCH. Nous allons montrer que les groupes osculants en  $\underline{x}$  sont isomorphes au groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_1$ .

(a) D'une part, constate que le crochet :

$$[\cdot, \cdot]_{\underline{x}} : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^j M_{\underline{x}}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^k M_{\underline{x}}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^{j+k} M_{\underline{x}}), \quad (6.2.25)$$

est nul si  $j = 2, k > 1$  et si  $j = k = 1$ .

(b) D'autre part si  $j = 2, k = 1$  on constate que :

$$[\cdot, \cdot]_{\underline{x}} : \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^2 M_{\underline{x}}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^1 M_{\underline{x}}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{t}_H^3 M_{\underline{x}}), \left( [X_2]_{\underline{x}}, [X_1]_{\underline{x}} \right) \mapsto [[X_1, X_2]_{\underline{x}}] = [X_0]_{\underline{x}}. \quad (6.2.26)$$

Pour finir de déterminer la structure du groupe osculant en  $\underline{x}$ , nous allons appliquer la formule de BCH sur l'algèbre osculante en  $\underline{x}$ . Pour ce faire, on se donne deux éléments  $Z = \alpha[X_1]_{\underline{x}} + \beta[X_2]_{\underline{x}} + \gamma[X_0]_{\underline{x}}$  et  $Z' = \alpha'[X_1]_{\underline{x}} + \beta'[X_2]_{\underline{x}} + \gamma'[X_0]_{\underline{x}}$  identifiés respectivement au triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  et  $(\alpha', \beta', \gamma')$  par l'application exponentielle. Notant  $\star$  la loi sur  $\mathcal{T}_H M_{\underline{x}}$  et au regard de (6.2.25), la formule de BCH donne :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \star (\alpha', \beta', \gamma') = \exp \left( \alpha[X_1]_{\underline{x}} + \beta[X_2]_{\underline{x}} + \gamma[X_0]_{\underline{x}} + \alpha'[X_1]_{\underline{x}} + \beta'[X_2]_{\underline{x}} + \gamma'[X_0]_{\underline{x}} \right) \quad (6.2.27)$$

$$+ \frac{1}{2} [\alpha[X_1]_{\underline{x}} + \beta[X_2]_{\underline{x}} + \gamma[X_0]_{\underline{x}}, \alpha'[X_1]_{\underline{x}} + \beta'[X_2]_{\underline{x}} + \gamma'[X_0]_{\underline{x}}] \quad (6.2.28)$$

$$= \exp \left( (\alpha + \alpha')[X_1]_{\underline{x}} + (\beta + \beta')[X_2]_{\underline{x}} + \left( \gamma + \gamma' + \frac{1}{2}(\alpha\beta' - \beta\alpha') \right) [X_0]_{\underline{x}} \right) \quad (6.2.29)$$

$$= \left( \alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \frac{1}{2}(\alpha\beta' - \beta\alpha') \right). \quad (6.2.30)$$

On en déduit que :

$$\mathcal{T}_H M_{\underline{x}} \cong \mathbb{H}_1. \quad (6.2.31)$$

La partie principale de l'opérateur est :

$$\sigma^2(P^{\underline{x}}) := -[X_1^2]_{\underline{x}} + [X_2]_{\underline{x}} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{t}_H M_{\underline{x}}). \quad (6.2.32)$$

Soit  $h \neq 0$ , on note comme auparavant,  $\pi_h$  une représentation de Schrödinger. Alors il nous faut montrer que l'opérateur :

$$d\pi_h(\sigma^2(P^{\underline{x}})) = -h\partial_x^2 \pm i\sqrt{h}x, \quad (6.2.33)$$

est injectif sur l'espace des représentations  $H_{\pi_h}^\infty = S(\mathbb{R})$ . Soit donc  $v \in S(\mathbb{R})$  dans le noyau de  $d\pi_h(\sigma^2(P^{\underline{x}}))$ . On calcule :

$$\langle v, d\pi_h(\sigma^2(P^{\underline{x}}))v \rangle = 0 \quad (6.2.34)$$

$$= \langle v, d\pi_h([X_1]_{\underline{x}})^2 v + d\pi_h([X_2]_{\underline{x}})v \rangle \quad (6.2.35)$$

$$= - \underbrace{\langle d\pi_h([X_1]_{\underline{x}})v, d\pi_h([X_1]_{\underline{x}})v \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\langle v, d\pi_h([X_2]_{\underline{x}})v \rangle}_{\in i\mathbb{R}}. \quad (6.2.36)$$

où (6.2.36) est vraie car, par le [184, lemme 2.2 p 6],  $d\pi(X)^* = d\pi(-X)$ , et aussi car  $d\pi_h([X_2]_{\underline{x}})$  est anti-autoadjoint. L'équation (6.2.36), nous dit qu'un nombre réel pur est égal à un nombre imaginaire pur, ainsi la seule possibilité est qu'ils soient tous deux nuls c'est à dire :

$$\langle d\pi_h([X_1]_{\underline{x}})v, d\pi_h([X_1]_{\underline{x}})v \rangle = 0, \quad (6.2.37)$$

$$\langle v, d\pi_h([X_2]_{\underline{x}})v \rangle = 0. \quad (6.2.38)$$

Cela implique que  $d\pi_h([X_1]_{\underline{x}})v = 0$  et  $d\pi_h([X_2]_{\underline{x}})v = 0$ . Alors comme  $d\pi_h$  est un morphisme sur l'algèbre enveloppante et que  $[[X_1]_{\underline{x}}, [X_2]_{\underline{x}}] = [X_0]_{\underline{x}}$ , il s'ensuit  $d\pi_h([X_0]_{\underline{x}}) = 0$ . Finalement pour tout  $A \in \mathfrak{h}_1$ , on a :

$$d\pi_h(A)v = 0. \quad (6.2.39)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $v \neq 0$ . Le sous espace  $F := Vect(v)$  est stable par  $\pi_h$  et est de dimension 1. Ceci implique que  $\pi_h$  admet une sous représentation non triviale, ce qui est absurde par irréductibilité de  $\pi_h$ . Donc  $v = 0$  et ainsi  $d\pi_h(\sigma^2(P^{\underline{x}}))$  est injectif. Ainsi, avec le théorème de Rockland 6.2.5 on en déduit que  $P$  est hypo-elliptique.

**Remarque 6.2.8. Attention :** *On vient de voir qu'une même algèbre de Lie pouvait avoir plusieurs dilatations différentes. Avec les précédentes notations et ayant procédé à l'identification :*

$$[X_1]_{\underline{x}} \mapsto X, \quad [X_2]_{\underline{x}} \mapsto Y, \quad [X_0]_{\underline{x}} \mapsto Z, \quad (6.2.40)$$

où  $(X, Y, Z)$  sont les champs usuels de l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$ , alors ces champs sont munis de la dilatations  $s > 0$  :

$$\begin{cases} \delta_s(X) &= sX \\ \delta_s(Y) &= s^2Y \\ \delta_s(Z) &= s^3Z, \end{cases} \quad (6.2.41)$$

ce qui est cohérent avec le fait que  $\delta_s$  est un isomorphisme d'algèbre de Lie :

$$\delta_s([X, Y]) = [\delta_s(X), \delta_s(Y)], \quad s > 0. \quad (6.2.42)$$

Ce n'est pas la dilatation d'Heisenberg usuelle. Ainsi avec cette identification (6.2.40), l'opérateur (6.2.32) se réécrit  $\sigma^2(P) = -X^2 + Y$  est bien invariant à gauche par translation sur  $\mathbb{H}_1$  et homogène d'ordre 2 au sens des dilatations (6.2.41)



# Chapitre 7

## Une approche groupoïdale au résidu de Wodzicki

"Since the sixties, thanks to the work of Dixmier, certain non-normal, abstract traces<sup>1</sup> on the space of operators on a Hilbert space have been known to exist. In the early eighties, Wodzicki uncovered the only extant trace on the algebra of complete symbols of classical pseudodifferential operators ; it also became clear that the residues of the zeta functions associated to those operators had tracial properties. Later on, Connes realized that, for an important class of operators, the Dixmier trace(s) and the Wodzicki (and zeta-theoretic) residues were one and the same thing [...]." [120, p 251]

### 7.1 Définition du résidu de Wodzicki

Dans tout ce chapitre, nous suivrons notre article [43]. On invite aussi le lecteur à consulter les ouvrages [120, chapitre 7 p 251], [39], [139, chapitre IV p 303], [198, section 1.5.4].

Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre  $m \in \mathbb{Z}$  sur une variété  $M$  de dimension  $d$ . En particulier dans chaque carte, le symbole de  $P$  admet un développement asymptotique de la forme :

$$a(x, \xi) \sim \sum_k a_{m-k}(x, \xi). \quad (7.1.1)$$

Dans ce qui suit, on fixe une carte  $(U, \phi)$  et on identifie  $U$  avec son image dans  $\mathbb{R}^d$ .

---

1. Précisons un peu de vocabulaire. Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable. On dénote par  $\mathcal{L}_c(H)$  les opérateurs continus sur  $H$ , par  $\mathcal{K}(H)$  les opérateurs compacts sur  $H$ ,  $\mathcal{R}(H)$  les opérateurs de rang fini et enfin  $\mathcal{L}_c^1(H)$  les opérateurs traçables (la classe 1-Schatten). On rappelle, [39, p 305-306], qu'un opérateur  $T$  est dit traçable lorsque  $T$  est compact et, notant  $s_k(T)$  ses valeurs singulières (les valeurs propres de son module  $|T|$  rangées par ordre décroissant et répétées avec leur multiplicités), alors  $(s_k(T)) \in l^1(\mathbb{N})$ . Pour  $J$  un idéal bilatère de  $\mathcal{K}(H)$ , on note  $com(J) = Vect_{\mathbb{C}}([A, B], A \in J, B \in \mathcal{L}_c(H))$  le commutateur de  $J$  avec  $\mathcal{L}_c(H)$ . Des exemples de commutateurs sont donnés dans le livre [198, § 1.3.1 p 41-42, § 1.3.3 p 47, § 1.3.4 p 49] de Scott.

**Définition 7.0.1.** Trace sur un idéal de  $\mathcal{K}(H)$ , [139, définition 1.2.10 et lemme 1.2.11 p 26, définition 1.3.2 p 33]

Soit  $J$  un idéal bilatère de  $\mathcal{K}(H)$ . Une trace  $\phi : J \rightarrow \mathbb{C}$  est une application linéaire qui satisfait :

$$\phi|_{com(J)} = 0 \quad (7.0.1)$$

Une trace est dite singulière si elle s'annule sur  $\mathcal{R}(H)$ .

Dans son article [57], Dixmier répond par l'affirmative à la question :

Existe-t-il une trace qui soit non triviale et qui ne soit pas une extension de la trace usuelle sur les opérateurs traçables ?

Effectivement la trace de Dixmier, puisqu'elle est singulière, ne peut être une extension de la trace usuelle (cette dernière étant définie par exemple [82, § 2 p 276], [198, section 1.3.5.1 p 50], [159, p 63]). Pour ces raisons la trace de Dixmier est un exemple de ce que l'on appelle une "trace exotique" c'est à dire une trace non triviale singulière sur un idéal  $J$  propre de  $\mathcal{K}(H)$ , [198, § 1.3.6 p 56]. A titre également culturel [198, § 1.6.15 p 147, p 54], c'est un résultat relativement récent [62] datant de 2000 et dû à Dykema, Weiss et Wodzicki qui prouve que la trace usuelle n'admet pas d'extension **continue** au delà des opérateurs traçables.

---

**Définition 7.1.1.** Résidu de Wodzicki (local) [226, p 58] , [123, 1.8 formule locale], [235, § 7]

Soit  $M$  variété riemannienne de dimension  $d$ . On définit le résidu au point  $x \in M$  d'un opérateur pseudo-différentiel classique  $P \in \Psi_{\text{Hör}}^m(M)$  comme :

$$\text{Res}_x^W(P) = \frac{1}{(2\pi)^d} \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} a_{-d}(x, \xi) d\sigma(\xi) \right) dx, \quad (7.1.2)$$

où  $a_{-d}(x, \xi)$  est la partie homogène d'ordre  $-d$  en  $\xi$  provenant du développement (7.1.1) de  $P$  dans une carte, où  $d\sigma$  est la mesure usuelle sur la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  dont l'aire de la surface vaut  $\omega_d$  et où  $dx$  est la mesure lisse provenant de la structure riemannienne<sup>2</sup>. De surcroît, si  $M$  est une variété compacte, on définit le résidu (global) de  $P$  par :

$$\text{Res}^W(P) = \int_M \text{Res}_x^W(P). \quad (7.1.3)$$

**Remarque 7.1.2.** 1. Si  $M$  n'est pas supposée être une variété riemannienne, alors  $dx$  dans (7.1.2) peut être remplacée par une 1-densité positive lisse quelconque.

2. Constatons immédiatement que si  $m < -d$  alors  $\text{Res}_x^W(P) = 0$  car  $a_{-d} = 0$ . De même, si  $P$  est un opérateur différentiel (d'ordre  $m \in \mathbb{N}$ ) alors  $\text{Res}_x^W(P) = 0$  car  $a_{-d} = 0$ .

## 7.2 Définition du résidu groupoïdal.

Nous rappelons que  $m \in \mathbb{Z}$  dans tout ce qui suit sauf mention contraire. Lorsque  $M$  désigne une variété filtrée, nous dénotons  $d_H$  sa dimension homogène. Remarquons de plus que si l'on fixe une mesure lisse  $dx$  sur  $M$  alors on obtient une famille canonique de 1-densités lisses  $d\lambda_x$  sur chaque fibre  $T_x M$ . En effet, on rappelle, voir théorème 3.4.5, qu'une mesure lisse  $dx$  sur  $M$  s'identifie à une section lisse  $\omega \in \Gamma^\infty(|\Omega|^1(M))$  du fibré des densités. Nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 7.2.1.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Il y a une bijection canonique entre  $|\Omega|^1(V)$  et l'espace des mesures de Haar sur le groupe  $(V, +)$ .

**Remarque 7.2.2.** Remarquons que l'espace des mesures de Haar sur le groupe  $(V, +)$  est un espace vectoriel de dimension 1 en raison de l'unicité à constante près de la mesure de Haar, voir [82, théorème 2.20 p 43]. Quitte à fixer une base sur  $V$ , on aura donc que  $\lambda$  est la mesure de Lebesgues à constante près.

*Preuve du lemme 7.2.1.* Soit  $\omega \in |\Omega|^1(V)$ . On définit une section lisse  $\tilde{\omega} \in \Gamma^\infty(|\Omega|^1(V))$  en posant :

$$\tilde{\omega}_x = \omega, \quad (7.2.1)$$

constante en  $x$ . Toujours par le théorème 3.4.5 - en considérant  $M = V$  comme une variété lisse - alors on sait que  $\tilde{\omega}$  correspond à une mesure lisse sur  $V$  qui a fortiori est invariante par translation (car constante).  $\square$

Reprenons notre élément  $\omega \in \Gamma^\infty(|\Omega|^1(M))$  ci-dessus. Comme pour chaque  $x$ ,  $\omega_x \in |\Omega|^1(T_x M)$ , le lemme 7.2.1 nous donne que  $\omega_x$  est identifiable à une mesure  $d\lambda_x$  invariante à gauche sur  $T_x M$ . Nous voilà donc avec une famille lisse de mesures de Haar sur les espaces tangents. Par suite, cela nous donne une famille lisse de mesures de Haar sur les groupes osculants  $\mathcal{T}_H M_x$ . Pour le constater, on utilise encore un lemme :

**Lemme 7.2.3.** Soit  $\lambda$  une mesure de Haar sur un espace vectoriel de dimension finie, filtré par une famille de sous-espaces  $(V^i)_i$ . Alors  $\lambda$  induit une mesure de Haar canonique  $\bar{\lambda}$  sur  $\text{Grad}(V) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V^i/V^{i-1}$ .

*Démonstration.* On note  $\pi_i : V^i \rightarrow V^i/V^{i-1}$  l'application quotient et on fixe<sup>3</sup> une application linéaire  $\phi_i : V^i/V^{i-1} \rightarrow V^i$  de sorte que  $\pi_i \circ \phi_i = \text{id}$ . Alors l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\phi : \text{Grad}(V) \rightarrow V, \sum_i v_i \mapsto \sum_i \phi_i(v_i), v_i \in V^i/V^{i-1}, \forall i. \quad (7.2.2)$$

---

2. Nous ne servirons jamais dans ce manuscrit de la structure riemannienne et l'hypothèse sera mise de côté dans la suite du manuscrit, voir aussi la remarque 7.1.2. En conséquence nous renvoyons le lecteur au livre [137] de Lee.

3. Une telle application existe toujours par un résultat classique d'algèbre linéaire affirmant que toute application linéaire surjective possède un inverse à droite dit "section".

On pose alors :

$$\bar{\lambda} := (\phi^{-1})_*\lambda. \quad (7.2.3)$$

Il reste à voir que  $\bar{\lambda}$  est bien indépendante du choix de  $(\phi_i)$ . La raison principale à cela est que pour d'autres sections  $(\psi_i)$  formant une application  $\psi : \text{Grad}(V) \rightarrow V$  comme à l'équation (7.2.2), la composée  $\psi^{-1} \circ \phi : \text{Grad}(V) \rightarrow \text{Grad}(V)$  sera une application linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure unipotente. D'après la remarque 7.2.2 on peut supposer que  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue à constante près. Or, d'après la [56, proposition 14.11 p 270], le poussé en avant de la mesure de Lebesgue par un difféomorphisme se comporte selon :

$$(\psi^{-1} \circ \phi)_*\lambda = |\det(\text{Jac}(\phi^{-1} \circ \psi))|\lambda. \quad (7.2.4)$$

De facto, comme le déterminant du jacobien ci-dessus est toujours un, les deux mesures  $(\phi^{-1})_*\lambda, (\psi^{-1})_*\lambda$  sont égales.  $\square$

Or souvenons nous que  $T_xM$  est filtré pour la famille de sous-espaces  $(H_x^i)_i$  correspondants aux fibres en  $x$  des fibrés  $H^i$  de la filtration sur  $TM$ . De fait, appliquant le lemme 7.2.3 à la mesure  $d\lambda_x$  sur  $T_xM$ , il existe une mesure de Haar  $\bar{d}\lambda_x$  sur  $\text{Grad}(T_xM) := \mathfrak{t}_H M_x = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_x^i / H_x^{i-1}$ . Cette mesure sera toujours notée  $d\lambda_x$  et finalement, puisque  $\mathfrak{t}_H M_x \cong \mathcal{T}_H M_x$  via la loi de BCH, alors on récupère bien, comme annoncé, une famille lisse de mesures de Haar sur les groupes osculants.

A maintes reprises nous utiliserons la remarque 33 suivante, sur laquelle nous conseillons au lecteur de bien s'attarder.

### Important :

**Remarque 33.** 1. Le second 0 dans les évaluations dans  $(x, 0, 0)$  dans le groupoïde  $\mathbb{T}_H M$  correspond à identifier l'élément neutre du groupe osculant  $\mathcal{T}_H M_x$  avec le 0 dans l'algèbre osculante  $\mathfrak{t}_H M_x$  via l'application exponentielle.

2. Sauf mention contraire, nous prendrons  $m \in \mathbb{Z}$ .

3. On rappelle que  $C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  désigne les sections lisses propres du fibré des 1-densités tangentes aux  $r$ -fibres  $|\Omega_r|$  du groupoïde tangent  $H$ -filtré, voir remarque 24.

4. Soit  $M$  une variété filtrée,  $F \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  et  $x \in M$ . Alors on peut écrire que :

$$F|_{(x, \cdot, 0)} = f_x d\lambda_x, \quad (7.2.5)$$

pour  $f_x \in C_c^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$  et  $d\lambda_x$  une mesure de Haar à gauche sur le groupe nilpotent gradué  $\mathcal{T}_H M_x$  (qu'on obtient selon la discussion juste avant cette remarque). En effet par définition  $f_x$  devrait être dans l'espace  $C_p^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$  mais le fait que nous restreignons une 1-densité (soit une section lisse) propre sur la fibre  $(x, \cdot, 0)$ , force la fonction  $f_x$  à être à support compact. Il suffit de constater que  $s^{-1}(\{x, 0\}) \cap \text{supp}(F) = \text{supp}(f_x)$  est compact.

5. Bien que nous précisions que la mesure de Haar  $d\lambda_x$  qui apparaît dans (7.2.5) soit invariant à gauche, c'est une hypothèse redondante puisque le groupe osculant en  $x$  est nilpotent donc unimodulaire : la mesure de Haar à droite et à gauche coïncident.

Pour définir proprement le résidu groupoidal, il nous faut d'abord commencer par établir quelques résultats préliminaires que voici.

**Lemme 7.2.4.** Soit  $M$  une variété filtrée et  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$ . Pour tout  $x \in M$ , l'application :

$$s \mapsto \left( s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x, 0, 0)}, \quad (7.2.6)$$

est un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  vers  $(\mathbb{C}, +)$ . Plus précisément, il existe une constante  $r_x \in \mathbb{C}$  telle que pour tout  $s > 0$  :

$$\left( s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x, 0, 0)} = r_x \log(s) d\lambda_x. \quad (7.2.7)$$



*Démonstration.* Posons :

$$F : s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto F_s := \left( s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r). \quad (7.2.8)$$

Nous allons donc montrer que cette application est bien un morphisme de groupes lorsqu'on la restreint en  $(x, 0, 0)$ . Tout d'abord, utilisant que  $\alpha_s$  est un automorphisme de groupoïdes, on montre que :

$$F_{st} = s^{d_H} \alpha_{s*} F_t + F_s, \quad s, t > 0. \quad (7.2.9)$$

Cela étant fait, il reste à montrer que :

$$s^{d_H} \alpha_{s*} F_t|_{(x,0,0)} = F_t|_{(x,0,0)}, \quad (7.2.10)$$

pour affirmer que  $F|_{(x,0,0)}$  est bien un morphisme de groupes. Montrons donc maintenant (7.2.10). Dans la fibre  $(x, \cdot, 0)$ , on peut écrire :

$$F_t|_{(x,\cdot,0)} = f_x d\lambda_x, \quad (7.2.11)$$

où  $f_x \in C_c^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$  et où  $d\lambda_x$  est une mesure de Haar à gauche sur le groupe nilpotent gradué  $\mathcal{T}_H M_x$  satisfaisant  $\delta_{s*}(d\lambda_x) = s^{-d_H} d\lambda_x$ . On rappelle maintenant que l'action de Debord-Skandalis 3.2.1 restreinte en  $t = 0$  agit par les dilatations  $\delta_s$ . Ainsi dans la fibre en  $(x, \cdot, 0)$  on peut écrire :

$$\alpha_{s*}(F_t)|_{(x,\cdot,0)} = \delta_{s*}(F_t|_{(x,\cdot,0)}) \quad (7.2.12)$$

$$\stackrel{(7.2.11)}{=} \underbrace{\left( (\delta_s^{-1})^* f_x \right)}_{(7.2.11)} \delta_{s*}(d\lambda_x) \quad (7.2.13)$$

$$= s^{-d_H} \left( (\delta_s^{-1})^* f_x \right) d\lambda_x. \quad (7.2.14)$$

Puisque l'action de Debord-Skandalis  $\alpha_s$  fixe les points  $(x, 0, 0)$ , il vient :

$$s^{d_H} \alpha_{s*} F_t|_{(x,0,0)} = F_t|_{(x,0,0)}, \quad (7.2.15)$$

comme désiré. Par conséquent, l'application  $s \mapsto F_s|_{(x,0,0)}$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  vers  $(\mathbb{C}, +)$ . L'application (7.2.8) est continue et même lisse en vertu du [223, lemme 21]. De cela découle l'existence de la constante  $r_x \in \mathbb{C}$  de sorte que l'on ait (7.2.7).  $\square$

On veut définir la quantité  $r_x dx$  comme étant le résidu groupoïdal des opérateurs pseudo-différentiels dont le noyau de Schwartz est  $\mathbb{k}|_{t=1}$ . Le lemme 7.2.5 suivant montre que la quantité  $r_x dx$  ne dépend pas de la distribution  $r$ -fibrée  $\mathbb{k}$  représentant l'opérateur  $P$  en  $t = 1$ .

**Lemme 7.2.5.** *Soit  $M$  une variété filtrée et  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$ , avec  $m \leq -d_H$ . Soit  $\mathbb{k}, \mathbb{k}' \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  de sorte que :*

$$\mathbb{k}|_{t=1} = P, \quad \mathbb{k}'|_{t=1} = P. \quad (7.2.16)$$

*Il existe un unique  $r_x \in \mathbb{C}$  de sorte que pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :*

$$\left( s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right)|_{(x,0,0)} = \left( s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{k}' - \mathbb{k}' \right)|_{(x,0,0)} = r_x \log(s) d\lambda_x \quad (7.2.17)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbb{k}, \mathbb{k}'$  comme annoncées dans l'énoncé. Fixons  $x \in M$ . Grâce à [223, corollaire 33], on a :

$$\mathbb{k}|_{t=0} - \mathbb{k}'|_{t=0} \in C_p^\infty(\mathcal{T}_H M, \Omega_r). \quad (7.2.18)$$

Utilisant (7.2.18), il existe  $f_x \in C_c^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$  telle que :

$$(\mathbb{k} - \mathbb{k}')|_{(x,\cdot,0)} = f_x d\lambda_x, \quad (7.2.19)$$

où  $d\lambda_x$  est une mesure de Haar à gauche sur le groupe de Lie nilpotent gradué  $\mathcal{T}_H M_x$ . Pour conclure, souvenons nous que l'action de Debord-Skandalis fixe les points  $(x, 0, 0)$ . En effet, on calcule :

$$\left( s^{d_H} \alpha_{s*} (\mathbb{k} - \mathbb{k}') - (\mathbb{k} - \mathbb{k}') \right)|_{(x,0,0)} = s^{d_H} \alpha_{s*} (\mathbb{k} - \mathbb{k}')|_{(x,0,0)} - (\mathbb{k} - \mathbb{k}')|_{(x,0,0)} \quad (7.2.20)$$

$$= s^{d_H} \delta_{s*}(f_x d\lambda_x) - f_x d\lambda_x \quad (7.2.21)$$

$$= 0, \quad (7.2.22)$$

où on utilise les mêmes arguments que dans la précédente preuve. Avec le lemme 7.2.4, il existe  $r_x, r'_x \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\begin{cases} \left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)} &= r_x \log(s) d\lambda_x \\ \left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k}' - \mathbb{k}' \right) |_{(x,0,0)} &= r'_x \log(s) d\lambda_x. \end{cases} \quad (7.2.23)$$

De fait grâce à (7.2.22), il vient  $r_x = r'_x$ . □

Il est donc maintenant licite de définir :

**Définition 7.2.6.** Soit  $M$  une variété filtrée et  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  avec  $m \leq -d_H$ . Soit  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  un élément dans le calcul groupoïdal de  $vEY$  de sorte que  $\mathbb{k}|_{t=1}$  est le noyau de Schwartz de l'opérateur  $P$ . On définit maintenant le résidu groupoïdal (local) de  $P$  en  $x \in M$ , noté  $Res_x(P)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  par :

$$Res_x(P) := \frac{1}{\log(s)} \left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)}. \quad (7.2.24)$$

**Remarque 34.** 1. Nous venons de définir le résidu de Wodzicki pour des opérateurs  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  d'ordre  $m \leq -d_H$  dans le calcul de  $vEY$ . On rappelle qu'un tel opérateur est la restriction en  $t = 1$  d'une distribution  $r$ -fibrée proprement supportée essentiellement homogène d'ordre  $m$  pour l'action de Debord-Skandalis. Toutefois la distribution  $r$ -fibrée qui représente l'opérateur  $P$  dans la définition du résidu groupoïdal devra être prise dans l'espace  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  et non dans l'espace  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$ ,  $m < -d_H$ . La raison pour cela se trouve dans la preuve du lemme 7.2.4. Comme nous utilisons que les mesures de Haar sur les groupes osculants en  $x$  sont homogènes d'ordre  $-d_H$ , il faut que  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  pour obtenir que l'application (7.2.8) est bien un morphisme de groupes lorsque restreinte en  $(x, 0, 0)$ .

2. La définition 7.2.6 est faite dans le cadre des opérateurs à valeurs scalaires. Pour des opérateurs définis entre des fibrés vectoriels lisses, nous devrions modifier légèrement notre définition et prendre, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :

$$Res_x(P) := \frac{1}{\log(s)} \text{Tr} \left( s^{d_H} \alpha_{s^*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)}. \quad (7.2.25)$$

Pour plus de détails sur le calcul groupoïdal sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients dans les fibrés vectoriels, le lecteur pourra consulter [49]. Dans la suite nous nous concentrons uniquement sur des opérateurs à valeurs scalaires.

3. Consulter la remarque 11 pour une autre définition à paraître de résidu groupoïdal due à Higson, Sukochev et Zanin [107]. On pourra aussi consulter les travaux de Dave et Haller [48] qui mettent en place une définition du résidu non-commutatif pour les opérateurs dans le calcul de  $vEY$  à l'aide de fonction zêta.

### 7.3 Le résidu groupoïdal est une trace

Commençons par rappeler quelques propriétés de la convolution sur les groupes de Lie. Les commutateurs dans le prochain lemme sont à comprendre au sens de la convolution. Rappelons également que tout groupe de Lie nilpotent connexe est unimodulaire, voir [82, proposition 2.30] ou [70, proposition 5.5.4 et corollaire 5.5.5].

**Lemme 7.3.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe  $G$ . Étant données  $f \in C_c^\infty(G)$  et  $g \in \mathcal{E}'(G)$  alors  $[f, g](e) = 0$ .

*Démonstration.* Rappelons d'abord que la convolution dans un groupe de Lie est donnée par :

$$\underbrace{u \star v}_{\in \mathcal{E}'(G)} = \underbrace{(u \otimes v)}_{\in \mathcal{E}'(G \times G)} \circ m^*, \quad (7.3.1)$$

où  $u \in \mathcal{E}'(G)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(G)$ ,  $(m^* f)(x, y) = f(xy)$ . On peut aussi prendre  $v \in \mathcal{D}'(G)$  auquel cas  $u \star v \in \mathcal{D}'(G)$ , voir [85, théorème 5.1.1 p 51 sur  $\mathbb{R}^d$ ]. Le commutateur est bien défini car l'espace  $C_c^\infty(G)$  est un idéal bilatère

dans  $\mathcal{E}'(G)$ . Toujours inspiré par le [85, théorème 5.2.1 p 53 sur  $\mathbb{R}^d$ ], on peut prouver que pour  $f \in C_c^\infty(G)$  et  $g \in \mathcal{E}'(G)$  :

$$f \star g(x) = \langle g(y), f(xy^{-1}) \rangle, \quad (7.3.2)$$

et :

$$g \star f(x) = \langle g(y), f(y^{-1}x) \rangle. \quad (7.3.3)$$

Remarquer que c'est bien dans les deux précédentes équations que nous avons utilisé l'unimodularité de  $G$ <sup>4</sup>. De fait nous avons prouvé que  $f \star g(e) = g \star f(e)$ , soit  $[f, g](e) = 0$ .  $\square$

Avant de démontrer le théorème, rappelons que :

**Remarque 35.** Si  $F \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  alors  $F|_{(x, \cdot, 0)}$  s'identifie à une fonction à support compact sur  $\mathcal{T}_H M_x$  (on peut oublier la mesure sur le groupe osculant en  $x$ ), en vertu de la remarque 33. Plus précisément, il existe une fonction  $f_x \in C_c^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$  telle que :

$$F|_{(x, \cdot, 0)} = f_x d\lambda_x \quad (7.3.4)$$

avec  $d\lambda_x$  une mesure de Haar à gauche sur  $\mathcal{T}_H M_x$ .

**Théorème 7.3.2.** Soit  $M$  une variété filtrée de dimension homogène  $d_H$ ,  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  et  $Q \in \Psi_H^{m'}(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  avec<sup>5</sup>  $m + m' \leq -d_H$ . Alors le résidu groupoïdal 7.2.6 en  $x \in M$  vérifie :

$$Res_x([P, Q]) = 0, \quad (7.3.5)$$

où  $[P, Q] = PQ - QP$ .

*Démonstration.* On dénote par  $\mathbb{k}_P$  et  $\mathbb{k}_Q$  les deux distributions  $r$ -fibrées essentiellement homogènes d'ordre  $m$  et  $m'$  respectivement. Par définition de telles distributions  $r$ -fibrées, on sait qu'il existe  $F, G \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$  de sorte que :

$$\begin{cases} \alpha_{s\star} \mathbb{k}_P - s^m \mathbb{k}_P & = F \\ \alpha_{s\star} \mathbb{k}_Q - s^{m'} \mathbb{k}_Q & = G. \end{cases} \quad (7.3.6)$$

1. Dans le cas où  $m + m' \leq -d_H - 1$ ,  $Res_x(PQ) = Res_x(QP) = 0$ . En effet, dans ce cas, nous aurions  $PQ$  et  $QP$  dans l'espace  $\Psi_{vEY}^{-d_H-1}(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$ . Par conséquent, les deux distributions  $r$ -fibrées  $\mathbb{k}_P \star \mathbb{k}_Q$ ,  $\mathbb{k}_Q \star \mathbb{k}_P$  seraient deux fonctions continues en vertu du [223, théorème 52] et leur co-cycles respectifs pourraient être individuellement évalués en  $(x, 0, 0)$ . De fait les deux co-cycles dans l'équation (7.3.8) ci-dessous seraient 0, puisqu'encore l'action de Debord-Skandalis fixe les points  $(x, 0, 0)$ . On pourra aussi lire la remarque 7.4.3 aux sujets de la continuité des co-cycles de tels ordres. Ainsi, il s'agit bel et bien du cas critique  $m + m' = -d_H$  dont il faut nous occuper. La conclusion s'ensuit alors immédiatement.

4. Voir l'équation [82, (2.36) p 51].

5. Merci à Sylvie Paycha pour nous avoir indiqué que notre théorème, énoncé d'abord pour  $Q \in \Psi_H^0(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  se prolongeait avec la version plus forte énoncée dorénavant.

2. On investigate maintenant le cas où  $m + m' = -d_H$ . On calcule alors pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :

$$Res_x([P, Q]) = Res_x(PQ) - Res_x(QP) \quad (7.3.7)$$

$$= \frac{s^{d_H}}{\log(s)} \left( (\alpha_{s*}(\mathbb{k}_P \star \mathbb{k}_Q) - s^{-d_H} \mathbb{k}_P \star \mathbb{k}_Q)|_{(x,0,0)} \right. \\ \left. - (\alpha_{s*}(\mathbb{k}_Q \star \mathbb{k}_P) - s^{-d_H} \mathbb{k}_Q \star \mathbb{k}_P)|_{(x,0,0)} \right) \quad (7.3.8)$$

$$= \frac{s^{d_H}}{\log(s)} \left( ((s^m \mathbb{k}_P + F) \star (s^{m'} \mathbb{k}_Q + G) - s^{-d_H} \mathbb{k}_P \star \mathbb{k}_Q)|_{(x,0,0)} \right. \\ \left. - ((s^{m'} \mathbb{k}_Q + G) \star (s^m \mathbb{k}_P + F) - s^{-d_H} \mathbb{k}_Q \star \mathbb{k}_P)|_{(x,0,0)} \right) \quad (7.3.9)$$

$$= \frac{s^{d_H}}{\log(s)} \left( s^m \mathbb{k}_P \star G + s^{m'} F \star \mathbb{k}_Q - s^{m'} \mathbb{k}_Q \star F - s^m G \star \mathbb{k}_P + F \star G - G \star F \right)|_{(x,0,0)} \quad (7.3.10)$$

$$= \frac{s^{d_H}}{\log(s)} \left( s^m [\mathbb{k}_P, G] + s^{m'} [\mathbb{k}_Q, F] + [F, G] \right)|_{(x,0,0)} \quad (7.3.11)$$

$$= 0. \quad (7.3.12)$$

L'égalité dans l'équation (7.3.9) est vraie en vertu :

- (a) Du fait que  $\alpha_{s*} : \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M) \rightarrow \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$  définit un automorphisme d'algèbres comme annoncé à la proposition 3.3.21.
- (b) De l'équation (7.3.6).

La dernière égalité est vraie en vertu du lemme 7.3.1 appliqué fibre par fibre aux groupes osculants qui sont par définition des groupes de Lie nilpotents gradués connexes simplement connexes. En effet, la convolution dans les crochets  $[F, G]$ ,  $[\mathbb{k}_P, G]$  et  $[\mathbb{k}_Q, F]$  est faite fibre par fibre, voir la section 3.3.4. Cela veut dire qu'on peut écrire par exemple :

$$[\mathbb{k}_P, G]|_{(x,.,0)} = [\mathbb{k}_P|_{(x,.,0)}, G|_{(x,.,0)}]. \quad (7.3.13)$$

Dans la fibre  $(x, ., 0)$  la convolution est donc faite entre une distribution à support compact et une fonction à support compact sur  $\mathcal{T}_H M_x$ , voir la remarque 35. □

## 7.4 Le résidu de Wodzicki coïncide avec le résidu groupoïdal

Dans cette section, nous allons prouver que le résidu groupoïdal  $Res_x(P)$  et le résidu de Wodzicki  $Res_x^W(P)$  coïncident quand  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel dans le calcul classique d'ordre  $\leq -d$  sur une variété trivialement filtrée de dimension  $d$ , voir le théorème 7.4.2. On invite le lecteur à relire la section 1.3.4 sur les noyaux pseudo-homogènes et le lemme 3.1.3.

**Lemme 7.4.1.** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Si  $k_0 \in \Psi\text{hf}_G^0(U \times \mathbb{R}^d)$  alors l'égalité :*

$$Res_x(P) = Res_x^W(P), \quad (7.4.1)$$

*est vérifiée pour l'opérateur pseudo-différentiel  $P \in \Psi_{H\partial r}^{-d}(U)$  dont le noyau de Schwartz est  $\chi(x-y)k_0(x, x-y)$  avec  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  valant 1 dans un voisinage de 0 et 0 aux infinis.*

*Démonstration.* Par définition de  $\Psi\text{hf}_G^0(U \times \mathbb{R}^d)$ , on peut écrire :

$$k_0(x, z) = f_0(x, z) + \log(|z|)p_0(x), \quad (7.4.2)$$

où  $p_0$  est une fonction lisse sur  $U$  et  $f_0$  est une fonction homogène d'ordre 0 vis à vis de la variable  $z$ . Soit  $\chi$  comme dans l'énoncé. Alors on pose :

1.  $l(x, y) = \chi(x - y) \ln(|x - y|) p_0(x) dy$  le noyau de l'opérateur  $P = Op(l)$  dont le développement asymptotique du noyau est donné par  $l_0(x, z) = \ln(|z|) p_0(x) dz$  et  $l_j(x, z) = 0$  si  $j > 0$ .
2.  $r(x, y) = \chi(x - y) f_0(x, x - y) dy$  le noyau de l'opérateur  $P = Op(r)$  dont le développement asymptotique du noyau est donné par  $r_0(x, z) = f_0(x, z) dz$  et  $r_j(x, z) = 0$  si  $j > 0$ .

On calcule le résidu de Wodzicki en  $x \in U$  respectivement pour ces deux opérateurs en utilisant la définition 7.1.1. Dans les deux cas, rappelons que l'équation (1.3.106) fournit le lien entre le développement asymptotique du symbole et celui du noyau.

1. On obtient, dénotant par  $\mathcal{F}_2$  la transformée de Fourier vis à vis de la seconde variable :

$$a_{-d}(x, \xi) \underbrace{=}_{(1.3.106)} \mathcal{F}_2\left(p_0(x) \log(|\cdot|)\right)(\xi) \quad (7.4.3)$$

$$= p_0(x) \mathcal{F}_2(\log(|\cdot|))(\xi), \quad (7.4.4)$$

où  $\mathcal{F}_2(\log(|\cdot|))$  est interprétée comme la transformée de Fourier de la distribution tempérée  $z \mapsto \log(|z|)$ , voir l'appendice D.1. Plus précisément pour obtenir ces précédentes équations, il faut dire que la limite dans  $S'(\mathbb{R}^d)$  de la distribution tempérée  $\log(|z|) \Psi(\frac{z}{t})$  quand  $t \rightarrow +\infty$  est  $\log(|z|)$ , où  $\Psi$  est comme à l'équation (1.3.105), puis utiliser la continuité de la transformée de Fourier sur  $S'(\mathbb{R}^d)$ . En particulier c'est bien le résultat de Hsiao et Wendland [117] qui permet de dire que la distribution tempérée  $\mathcal{F}_2(\log(|\cdot|))$  coïncide en  $\xi \neq 0$  avec la fonction  $a_{-d}$  lisse homogène d'ordre  $-d$  en  $\xi$ . Maintenant, la transformée de Fourier du logarithme sur  $\mathbb{R}^d$  est donnée pour  $\xi \neq 0$  par la proposition D.1.1 :

$$\mathcal{F}_2(\log(|\cdot|))(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^d} \frac{(2\pi)^d}{\omega_d}, \quad (7.4.5)$$

où  $\omega_d = \frac{2\sqrt{\pi}^d}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  dénote l'aire de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| = 1\} \subset \mathbb{R}^d$ , voir [81, proposition 0.7 p 8]. Ainsi l'équation (7.4.4) se réécrit selon :

$$a_{-d}(x, \xi) \underbrace{=}_{(7.4.5)} -\frac{p_0(x)}{|\xi|^d} \frac{(2\pi)^d}{\omega_d}. \quad (7.4.6)$$

Par conséquent, de l'équation (7.1.2) on tire :

$$Res_x^W(Op(l)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} -\frac{p_0(x)}{|\xi|^d} \frac{(2\pi)^d}{\omega_d} d\sigma(\xi) dx = -p_0(x) dx, \quad (7.4.7)$$

où  $d\sigma$  dénote la mesure usuelle sur la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

2. Comme  $f_0 \in \mathcal{H}^0(U \times \mathbb{R}^d)$ , on peut étendre  $f_0 \in C^\infty(U) \otimes L^\infty(\mathbb{R}^d)$  en attribuant une valeur arbitraire en  $\xi = 0$  et ce pour tout  $x \in U$ . Cette extension, toujours notée  $f_0$ , est, pour chaque  $x \in U$ , une distribution tempérée puisque  $L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$  et est de plus homogène de degré 0. En effet, pour  $x \in U$  fixé et pour  $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$  on a :

$$\langle f_0(x, \cdot)_s, \phi \rangle \underbrace{=}_{(D.0.9)} s^{-d} \langle f_0(x, \cdot), \phi(\frac{\cdot}{s}) \rangle \quad (7.4.8)$$

$$= s^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x, \xi) \phi(\frac{\xi}{s}) d\xi \quad (7.4.9)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x, sz) \phi(z) dz \quad (7.4.10)$$

$$= \langle f_0(x, \cdot), \phi \rangle, \quad (7.4.11)$$

où nous avons procédé au changement de variable  $z = \frac{\xi}{s}$  dans (7.4.9) et utilisé l'homogénéité de  $f_0$  dans l'équation (7.4.11).

On procède à  $x \in U$  fixé. En vertu de la [95, proposition 2.4.7 p 140], ou [36, p 86], il existe  $b_x \in \mathbb{C}$  et  $\Omega_x$  une fonction lisse sur la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  d'intégrale nulle sur cette sphère telle que :

$$\mathcal{F}_2(f_0(x, \cdot))(\xi) = b_x \delta_0 + W_{\Omega_x}(\xi), \quad (7.4.12)$$

où  $W_{\Omega_x}$  est la distribution tempérée valeur principale dont la restriction en  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  est :

$$\Omega_x \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) \frac{1}{|\xi|^d}, \quad (7.4.13)$$

voir [95, l'équation (2.4.12)]. Lorsque  $\xi \neq 0$ , on a que :

$$a_{-d}(x, \xi) \underbrace{=}_{(1.3.106)} \mathcal{F}_2(f_0(x, \cdot))(\xi) \quad (7.4.14)$$

$$\underbrace{=}_{(7.4.12)} W_{\Omega_x}(\xi), \quad (7.4.15)$$

est lisse  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Il s'ensuit que :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} a_{-d}(x, \xi) d\sigma(\xi) \underbrace{=}_{(7.4.15)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} W_{\Omega_x}(\xi) d\sigma(\xi) \quad (7.4.16)$$

$$\underbrace{=}_{(7.4.13)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega_x(\xi) d\sigma(\xi) \quad (7.4.17)$$

$$= 0, \quad (7.4.18)$$

où la dernière égalité est vraie par hypothèse sur  $\Omega_x$ . En conséquence il vient :

$$Res_x^W(Op(r)) = 0. \quad (7.4.19)$$

Maintenant on s'enquiert du calcul des co-cycles en  $x$  des distributions  $r$ -fibrées essentiellement homogènes associées aux opérateurs  $Op(l)$ ,  $Op(r)$  et on prouve qu'en  $(x, 0, 0)$  on retrouve les valeurs (7.4.7) et (7.4.19) des résidus au sens de Wodzicki. Premièrement, on définit respectivement deux distributions  $r$ -fibrées dans  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$  de sorte que leur restriction en  $t = 1$  donnent les noyaux  $l$  et  $r$ .

1. Posons

$$\begin{cases} \mathbb{I}(x, y, t) = \frac{1}{t^d} \chi\left(\frac{x-y}{t}\right) \log\left(\frac{|x-y|}{t}\right) p_0(x) dy & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbb{I}(x, v, 0) = \chi(v) \log(|v|) p_0(x) d\lambda_x(v) & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (7.4.20)$$

où  $d\lambda_x$  dénote la mesure de Haar à gauche sur les espaces tangents  $T_x M$  en  $x$ . Écrivant ces précédentes distributions dans les coordonnées exponentielles pour le repère standard  $\bar{X}$  sur  $\mathbb{R}^d$ , voir lemme 3.1.3, on obtient :

$$\tilde{\mathbb{I}}(x, v, t) = \left( \mathbb{E}xp^{\bar{X}} \right)_*^{-1} \mathbb{I}(x, v, t) = \chi(v) \log(|v|) p_0(x) d\lambda_x(v). \quad (7.4.21)$$

On rappelle que  $\tilde{\alpha}_s$  est défini au lemme 3.2.3. Utilisant le fait que  $\delta_{s*}(d\lambda_x) = s^{-d} d\lambda_x$ , il s'ensuit :

$$s^d \tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{I}}(x, v, t) - \tilde{\mathbb{I}}(x, v, t) = s^d \tilde{\mathbb{I}}\left(x, \delta_{s^{-1}}(v), st\right) \delta_{s*}(d\lambda_x(v)) - \tilde{\mathbb{I}}(x, v, t) \quad (7.4.22)$$

$$\begin{aligned} &= -\log(s) \chi(\delta_{s^{-1}}(v)) p_0(x) d\lambda_x(v) \\ &+ \left( \chi(\delta_{s^{-1}}(v)) - \chi(v) \right) \log(|v|) p_0(x) d\lambda_x(v). \end{aligned} \quad (7.4.23)$$

On en conclue que :

$$s^d \tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{I}} - \tilde{\mathbb{I}} \in C_p^\infty(\mathbb{U}, \Omega_r). \quad (7.4.24)$$

2. Posons :

$$\begin{cases} \mathfrak{r}(x, y, t) = \chi\left(\frac{x-y}{t}\right)f_0\left(x, \frac{x-y}{t}\right)dy & \text{si } t \neq 0 \\ \mathfrak{r}(x, v, 0) = \chi(v)f_0(x, v)d\lambda_x(v) & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (7.4.25)$$

Comme précédemment, dans les coordonnées exponentielles on peut écrire :

$$\tilde{\mathfrak{r}}(x, v, t) = \left(\mathbb{E}xp^{\bar{X}}\right)_*^{-1} \mathfrak{r}(x, v, t) = \chi(v)f_0(x, v)d\lambda_x(v), \quad (7.4.26)$$

et l'homogénéité de  $f_0$  donne :

$$s^{-d}\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathfrak{r}}(x, v, t) - \tilde{\mathfrak{r}}(x, v, t) = s^d\chi(\delta_{s^{-1}}(v))f_0(x, \delta_{s^{-1}}(v))\delta_{s*}(d\lambda_x(v)) - \chi(v)f_0(x, v)d\lambda_x(v) \quad (7.4.27)$$

$$= \left(\chi(\delta_{s^{-1}}(v)) - \chi(v)\right)f_0(x, v)d\lambda_x(v). \quad (7.4.28)$$

On en conclue que :

$$s^{-d}\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathfrak{r}} - \tilde{\mathfrak{r}} \in C_p^\infty(\tilde{\mathbb{U}}, \Omega_r). \quad (7.4.29)$$

On passe maintenant aux calculs des co-cycles restreints en  $(x, 0, 0)$ .

1. Utilisant (7.4.23) on obtient, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :

$$\left(\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}} - s^{-d}\tilde{\mathbb{I}}\right)|_{(x,0,0)} = -\frac{1}{s^d}\log(s)p_0(x)d\lambda_x \quad (7.4.30)$$

$$= \frac{1}{s^d}\log(s)Res_x^W(Op(l)), \quad (7.4.31)$$

où nous utilisons l'identification canonique entre la famille lisse de 1-densité  $d\lambda_x$  et la mesure lisse  $dx$  sur  $M$ . Alors :

$$\frac{1}{\log(s)}\left(s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}} - \tilde{\mathbb{I}}\right)|_{(x,0,0)} = Res_x^W(Op(l)). \quad (7.4.32)$$

2. Utilisant (7.4.26) on obtient, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :

$$\left(\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathfrak{r}} - s^{-d}\tilde{\mathfrak{r}}\right)|_{(x,0,0)} = \left(f_0(x, v)[\chi(\delta_{s^{-1}}(v)) - \chi(v)]d\lambda_x(v)\right)|_{(x,0,0)} \quad (7.4.33)$$

$$= 0 \quad (7.4.34)$$

$$= \frac{1}{s^d}\log(s)Res_x^W(Op(r)). \quad (7.4.35)$$

Alors :

$$\frac{1}{\log(s)}\left(s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathfrak{r}} - \tilde{\mathfrak{r}}\right)|_{(x,0,0)} = Res_x^W(Op(r)). \quad (7.4.36)$$

D'où la conclusion.  $\square$

Nous avons maintenant tous les outils en main pour montrer que le résidu groupoidal coïncide au résidu de Wodzicki dans le cadre d'une variété trivialement filtrée.

**Théorème 7.4.2.** *Soit  $M$  une variété trivialement filtrée de dimension  $d$  et  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre  $m$  sur  $M$ , avec  $m \leq -d$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\mathbb{k}$  une distribution  $r$ -fibrée essentiellement homogène d'ordre  $-d$  qui étend  $P$  en  $t = 1$ . Alors  $\forall s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ,  $\forall x \in M$  :*

$$Res_x^W(P) = \frac{1}{\log(s)}\left(s^d\alpha_{s*}\mathbb{k} - \mathbb{k}\right)|_{(x,0,0)}. \quad (7.4.37)$$

*Démonstration.* On considère d'abord le cas où  $m \leq -d - 1$ . En vertu du [223, théorème 52] on sait d'ores et déjà que :

$$\mathbb{k} \in C^0(\mathbb{T}M, \Omega_r). \quad (7.4.38)$$

Cela entraîne :

$$\mathbb{k}(x, v, 0) = \mathbb{I}_0(x, v)d\lambda_x, \quad (7.4.39)$$

pour une fonction  $\mathbb{1}_0 \in C^0(TM)$  et où  $d\lambda_x$  désigne une mesure de Haar à gauche sur  $T_xM$ .

On peut maintenant évaluer le co-cycle terme à terme. On rappelle encore une fois que l'action de Debord-Skandalis fixe les points  $(x, 0, 0)$  et que  $\delta_{s*}d\lambda_x = s^{-d}d\lambda_x$ . Par conséquent on tire :

$$\frac{1}{\log(s)} \left( s^d \tilde{\alpha}_{s*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)} = \frac{1}{\log(s)} \left( \mathbb{1}_0(x,0)d\lambda_x - \mathbb{1}_0(x,0)d\lambda_x \right) = 0. \quad (7.4.40)$$

Cela coïncide avec le résidu de Wodzicki dans ce cas. En effet, pour un opérateur d'ordre  $m \leq -d-1$ , le terme  $a_{-d}$  apparaissant dans le développement asymptotique du symbole est toujours nul et donc  $Res_x^W(P) = 0$ .

Si  $m = -d$  et  $(U_0, \phi)$  est une carte en  $x \in M$ , alors le noyau  $k \in \Psi\text{hk}_G^0(U_0)$  de l'opérateur admet un développement asymptotique  $k \sim \sum_{j=0}^{+\infty} k_j$  dans  $U_0$ , par le théorème de Seeley 1.3.35. De fait, nous pouvons écrire :

$$k(x, x-y) - \chi(x-y)k_0(x, x-y) \sim \sum_{j \geq 1} k_j(x, x-y), \quad (7.4.41)$$

avec  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  de sorte que  $\chi$  est 1 au voisinage de 0 et 0 aux infinis. On dénote le côté gauche de (7.4.41) par  $\bar{k}(x, x-y)$ . Alors  $\bar{P} = Op(\bar{k}) \in \Psi_{\text{Hör}}^{m-1}(M)$  et par ce que l'on a fait précédemment,  $Res_x^W(\bar{P}) = Res_x(\bar{P})$  pour tout  $x \in M$ . Il suffit d'appliquer le lemme 7.4.1 à la fonction  $k_0 \in \Psi\text{hf}_G^0$  pour conclure, étant donné que l'on peut écrire  $k(x, z) = \bar{k}(x, z) + \chi(z)k_0(x, z)$ .  $\square$

**Remarque 7.4.3.** La preuve du théorème 7.4.2 montre en particulier - en adaptant les arguments dans le cas filtré - que le résidu groupoïdal est nul pour les opérateurs  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  pour  $m < -d_H$ , ce qui est un phénomène bien connu et précédemment évoqué pour le résidu de Wodzicki, voir remarque 7.1.2.

Le lemme suivant sera utilisé dans la remarque 36 qui le suit.

**Lemme 7.4.4.** En conservant les notations du lemme 3.1.3.

1. Il existe  $\chi_{\mathbb{U}} \in C_c^\infty(\mathbb{T}M)$  invariant pour l'action de Debord-Skandalis  $\alpha_s$  telle que :

$$\chi_{\mathbb{U}} = \begin{cases} 1 & \text{dans un voisinage de } \{(x_0, x_0)\} \times \mathbb{R}, \\ 0 & \text{en dehors de } \mathbb{U}. \end{cases} \quad (7.4.42)$$

2.  $\mathbb{k}\chi_{\mathbb{U}} \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$  a un support dans  $\mathbb{U}$ . De plus,  $\tilde{\mathbb{k}} = (\mathbb{E}\text{xp}^{\bar{X}})_*^{-1}(\mathbb{k}\chi_{\mathbb{U}})$  a un support dans  $\tilde{\mathbb{U}}$  et est essentiellement homogène pour l'action de  $\tilde{\alpha}_s$ .

**Remarque 36.** Dans la preuve du théorème 7.4.2, nous avons utilisé de la technologie provenant des travaux de vEY. Toujours en ce basant sur leurs travaux, nous proposons cette fois-ci une preuve légèrement plus "à la main" du fait que :

$$\mathbb{k}(x, v, 0) = \mathbb{1}_0(x, v)d\lambda_x, \quad (7.4.43)$$

pour une fonction  $\mathbb{1}_0 \in C^0(TM)$  et où  $d\lambda_x$  désigne une mesure de Haar à gauche sur  $T_xM$ .

On sait d'après [223, proposition 42], que l'on peut supposer  $\mathbb{k}$  homogène pile d'ordre  $m$  en dehors de  $[-1, 1]$ . On fixe un  $x \in M$ . Alors avec le lemme 7.4.4 pour lequel on gardera les mêmes notations,  $\tilde{\mathbb{k}} = (\mathbb{E}\text{xp}^{\bar{X}})_*^{-1}(\mathbb{k}\chi_{\mathbb{U}})$  est à support dans  $\tilde{\mathbb{U}}$ , prolongée par 0 ailleurs et est essentiellement homogène pour l'action  $\tilde{\alpha}_s$ . Reprenant la preuve du [42, théorème 5.17] il vient que  $u = \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{k}}) \in \mathcal{HS}^m(U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ . Alors avec le [42, théorème 2.1], il existe  $u' \in \mathcal{H}^m(U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  et  $u'' \in S_G(U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  tel qu'en dehors d'un compact  $K \subset \mathbb{R}^d$  contenant 0 on ait :

$$u = \chi_K u' + u'', \quad (7.4.44)$$

où  $\chi_K$  est une fonction cut-off qui vaut 0 sur  $K$  et 1 en l'infini. Alors il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{k}} &= \mathcal{F}_2^{-1}(u) = \mathcal{F}_2^{-1}(\chi_K u') + \underbrace{\mathcal{F}_2^{-1}(u'')} \\ &\in S_G(U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \subset C^0(U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (7.4.45)$$

On constate que  $v \mapsto \chi_K(v)u'(x, v, t)$  est intégrable ponctuellement vis à vis de  $(x, t)$ . En effet, avec la preuve du [42, lemme 3.1 p 6], on peut dominer la précédente fonction par  $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^m$ , laquelle, de



façon générale, est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  si et seulement si  $m < -d$ . Ceci étant le cas ici puisqu'on a supposé  $m \leq -d - 1$ , alors  $\chi_{\mathcal{V}u'}(x, \cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . D'une part, la transformée de Fourier  $\mathcal{F}_2 : L^1(U \times \mathbb{R}^d) \rightarrow C_0^0(U \times \mathbb{R}^d)$  et d'autre part  $\tilde{\mathbb{k}}$  est une distribution  $r$ -fibrée (car  $\mathbb{k}$  l'est par hypothèse) donc, de l'équation (7.4.45) on peut affirmer en fait que :

$$\tilde{\mathbb{k}} \in C^\infty(U_0 \times \mathbb{R}, C_c^0(\mathbb{R}^d, |\Omega^1|)). \quad (7.4.46)$$

En utilisant les cartes exponentielles, on en déduit la formule (7.4.43) espérée.

## 7.5 Le résidu non commutatif de Ponge sur une variété d'Heisenberg coïncide avec le résidu groupoïdal

Dans son article [174] de 2007, Ponge définit le résidu non commutatif dans le contexte des variétés d'Heisenberg. Dans cette section, nous montrons que le résidu non commutatif de Ponge et le résidu groupoïdal 7.2.6 coïncident pour un opérateur  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiel d'ordre  $\leq -d_H$  dans le calcul de BG pour les variétés d'Heisenberg que sont les variétés de contact, les feuilletages de codimension 1 et les variétés modèles  $\mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$ .

Soit  $M$  une variété d'Heisenberg de dimension  $d + 1$  dont le fibré en hyperplans est noté  $\mathcal{V} \leq TM$ . On rappelle que l'on note  $\Psi_{\mathcal{V}}^\bullet(M)$ , l'algèbre des  $\mathcal{V}$ -opérateurs pseudo-différentiels de BG [13]. On rappelle aussi, voir le chapitre 4 ou [42, théorème 5.16] que le calcul groupoïdal et le calcul de BG coïncident pour les trois types de variétés sus-mentionnées. Ou encore avec les symboles :

$$\Psi_{\mathcal{V}}^m(M) = \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}, m \in \mathbb{Z}. \quad (7.5.1)$$

Le résidu non commutatif de Ponge se définit comme suit. Soit  $x \in M$  et soit  $(X_j)_{j \in \{0, \dots, d\}}$  un repère local de champs vectoriels définis sur un ouvert  $U \subset M$  adaptés à la structure d'Heisenberg sur  $M$  et  $\Psi_x : U \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  une carte privilégiée centrée en  $x$ , voir [174, p 415 et définitions 2.3, 2.4]. Cette précédente assertion signifie que si  $(X_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$  est un repère local de champs vectoriels générant le sous fibré en hyperplans  $\mathcal{V}$  de  $M$ , alors on a  $\Psi_x(x) = 0$  et  $(\Psi_x)_* X_j(x) = \partial_j|_x$ . Dans ce contexte, le résidu non commutatif de Ponge d'un opérateur  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiel  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^{-d_H}(U)$  de degré  $-d_H$  sur  $U$ , est défini comme suit.

Soit  $p_{-d-2}$  le terme de degré  $-d_H = -(d + 2)$  dans le développement asymptotique du symbole de  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^{-d_H}(U)$ , voir [174, 2.7 p 409]. Alors Ponge définit le résidu de  $P$  en  $x$  comme :

$$c_P(x) = \frac{|d\Psi_x|}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} p_{-(d+2)}(x, \xi) d\xi, \quad (7.5.2)$$

où  $|d\Psi_x|$  est le jacobien de  $\Psi_x$ , voir [174, Lemma 3.9]. Le lecteur pourra comparer cette définition et la mettre en contraste avec la définition "non-graduée" du résidu non commutatif de Wodzicki (7.1.2).

Comme à notre habitude, on commence par étudier ce qu'il se passe pour les variétés modèles  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{d+1}$ , où  $d = 2n + m$ . Lorsque  $n = 0$  on pose  $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}$  par convention. On munit  $M$  des champs vectoriels usuels  $\bar{X} = (X_0, X_1, \dots, X_d)$ , voir l'équation (4.3.10), de sorte que  $(X_0, \dots, X_{2n})$  génèrent  $\mathbb{H}_n$ ,  $X_0$  est central et  $(X_{2n+1}, \dots, X_d)$  sont les champs de vecteurs usuels sur  $\mathbb{R}^m$ . On rappelle aussi que  $\mathcal{E}'_r(M \times M)$  dénote l'ensemble des distributions  $r$ -fibrées à support  $r$ -propre sur le groupoïde des paires  $M \times M$ .

**Théorème 7.5.1.** *C.-Yuncken 2023 [43]*

Soit  $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  une variété modèle de dimension homogène  $d_H = d + 2$ ,  $2n + m = d$ , avec la structure standard (4.3.10) et  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^m(M)$ , avec  $m \leq -d_H$ . Alors le résidu de Ponge en  $x$  coïncide avec le résidu groupoïdal 7.2.6 :

$$\text{Res}_x(P) = c_P(x). \quad (7.5.3)$$

*Démonstration.* Nous nous reposons majoritairement sur [13] et [42]. On note  $k \in \mathcal{E}'_r(M \times M)$  le noyau de Schwartz de  $P$ . Puisque le calcul de BG coïncident avec le calcul groupoïdal de vEY selon le [42, théorème 5.16], il existe  $\mathbb{k} \in \Psi_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$  tel que  $\mathbb{k}|_{t=1} = k$ . De plus grâce à la [223, proposition 42] on peut même supposer que  $\mathbb{k}$  est homogène pile de degré  $-d_H$  en dehors de  $t \in [-1, 1]$ . On rappelle en vertu de la proposition 4.3.4 que les cartes exponentielles pour les variétés modèles sont globalement définies. Ainsi, grâce au tiré en arrière par les cartes exponentielles comme dans [42, section 5], on obtient  $\tilde{\mathbb{k}} \in \mathcal{E}'_r(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$  avec l'égalité  $\mathbb{k} = \mathbb{E}xp_*^{\bar{X}}(\tilde{\mathbb{k}})$ .

Nous devons ensuite considérer le symbole de  $P$ . Par définition du calcul d'Heisenberg, voir la définition 4.3.5, on rappelle que  $P$  est défini à partir d'une fonction poly-homogène graduée au sens des dilatations d'Heisenberg  $f \in S_{phg,G}^{-d_H}(M \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Soit  $\bar{\sigma}(x, \xi) = (x, \sigma_0(x, \xi), \dots, \sigma_d(x, \xi))$  la collection des symboles des champs modèles  $(X_0, \dots, X_d)$ , comme à l'équation (4.3.29). Beals et Greiner définissent le  $\mathcal{V}$ -symbole associé à  $f$  par :

$$q(x, \xi) = \bar{\sigma}^* f(x, \xi). \quad (7.5.4)$$

Le symbole et le noyau sont reliés par la transformée de Fourier fibrée, après un changement par les coordonnées  $\bar{\sigma}$  sus-mentionnées. De façon explicite on a :

$$f = \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{k}})|_{t=1}, \quad (7.5.5)$$

où  $\mathcal{F}_2$  est la transformée de Fourier fibrée sur la seconde variable, voir le théorème 4.3.8. En étendant cette transformée de Fourier fibrée pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , posons :

$$u = \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{k}}) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}). \quad (7.5.6)$$

On rappelle que la transformée de Fourier entrelace l'action de Debord-Skandalis en coordonnées exponentielles  $\tilde{\alpha}_s$  et les dilatations  $\beta_s$ , voir le lemme 3.2.3. L'homogénéité essentielle de  $\mathbb{k}$  et en conséquence celle de  $\tilde{\mathbb{k}} = (\mathbb{E}xp_*^{\bar{X}})^{-1}(\mathbb{k})$ , entraîne que  $u \in \mathcal{H}S_G^{-d_H}(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$ , où l'homogénéité modulo Schwartz est vis à vis des dilatations<sup>6</sup>  $\beta_s(x, v, t) = (x, \tilde{\delta}_s(v, t))$ , voir le [42, théorème 5.16].

Soit  $u_0 = u|_{t=0}$ . Avec la [42, proposition 3.2] nous avons  $u_0 \in \mathcal{H}S_G^{-d_H}(M \times \mathbb{R}^{d+1})$ . Par le théorème 2.2.4, en dehors d'un compact au voisinage de 0 en  $\xi$  on peut écrire que :

$$u_0 = u'_0 + u''_0, \quad (7.5.7)$$

où  $u'_0 \in \mathcal{H}G^{-d_H}(M \times \mathbb{R}^{d+1})$  et  $u''_0 \in S_G(M \times \mathbb{R}^{d+1})$ .

On peut étendre la fonction  $u'_0$  comme une distribution tempérée (non nécessairement homogène), toujours dénotée  $u'_0$ . En effet, comme  $-d_H \leq -(d+1)$  on peut étendre  $u'_0$  en une distribution tempérée comme cela est fait dans [13, section § 15], [174, lemme 3.1], [115, théorème 3.2.4], ou à la proposition 1.3.36 de ce manuscrit. De fait, on peut définir  $u'''_0 \in C^\infty(M, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{d+1})) = C^\infty(M) \otimes \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{d+1})$  de sorte que l'égalité suivante est vraie partout :

$$u_0 = u'_0 + u''_0 + u'''_0. \quad (7.5.8)$$

On calcule alors pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :

$$Res_x(P) = \frac{1}{\log(s)} \left( s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{k} - \mathbb{k} \right) |_{(x,0,0)} \quad (7.5.9)$$

$$= \frac{1}{\log(s)} \left( s^{d_H} \alpha_{s*} (\mathbb{E}xp_*^{\bar{X}})_* (\tilde{\mathbb{k}}) - (\mathbb{E}xp_*^{\bar{X}})_* (\tilde{\mathbb{k}}) \right) |_{(x,0,0)} \quad (7.5.10)$$

$$= \frac{1}{\log(s)} \left( s^{d_H} \tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{k}} - \tilde{\mathbb{k}} \right) \circ (\mathbb{E}xp_*^{\bar{X}})^{-1} |_{(x,0,0)}, \quad (7.5.11)$$

6. Cela vient de l'hypothèse que  $\mathbb{k}$  est choisi en particulier comme étant homogène pile d'ordre  $-d_H$  en dehors de  $t \in [-1, 1]$ , comme nous l'évoquions en début de cette preuve.

où on utilise dans (7.5.10) l'égalité  $\tilde{\alpha}_s = \left(\mathbb{E}xp^{\bar{X}}\right)^{-1} \circ \alpha_s \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}$ . On rappelle aussi que  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}}|_{M \times \{0\} \times \{0\}} = id_{M \times \{0\} \times \{0\}}$ . Se rappelant (7.5.5), on continue ensuite de calculer dans (7.5.11) :

$$Res_x(P) = \frac{1}{\log(s)} \left( s^{d_H} \tilde{\alpha}_{s^*} \mathcal{F}_2^{-1}(u) - \mathcal{F}_2^{-1}(u) \right) |_{(x,0,0)} \quad (7.5.12)$$

$$= \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left( s^{d_H} \beta_s^* u - u \right) |_{(x,0,0)}, \quad (7.5.13)$$

où on a utilisé  $\mathcal{F}_2 \circ \tilde{\alpha}_{s^*} \mathcal{F}_2^{-1} = \beta_s^*$ . Maintenant on utilise (7.5.8) et on calcule :

$$Res_x(P) = \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left( s^{d_H} \beta_s^* (u'_0 + u''_0 + u'''_0) - (u'_0 + u''_0 + u'''_0) \right) |_{(x,0,0)} \quad (7.5.14)$$

$$= \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left( s^{d_H} \beta_s^* u'_0 - u'_0 + s^{d_H} \beta_s^* (u''_0 + u'''_0) - (u''_0 + u'''_0) \right) |_{(x,0,0)}. \quad (7.5.15)$$

Puisque  $u''_0$  est de classe Schwartz en  $\xi$  et  $u'''_0$  est une distribution à support compact en  $\xi$ , leur transformée de Fourier est lisse en  $\xi$ . Par ailleurs  $\mathcal{F}_2^{-1}(u''_0)$  et  $\mathcal{F}_2^{-1}(u'''_0)$ , peuvent être évaluées en  $(x, 0, 0)$  et comme dans la preuve du théorème 7.4.2, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , on a :

$$\frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left( s^{d_H} \beta_s^* (u''_0 + u'''_0) - (u''_0 + u'''_0) \right) |_{(x,0,0)} = 0. \quad (7.5.16)$$

D'où :

$$Res_x(P) = \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left( s^{d_H} \beta_s^* u'_0 - u'_0 \right) |_{(x,0,0)}. \quad (7.5.17)$$

Finalement, on utilise le [174, lemme 3.1 p 414 et équation (3.2)] (qui moralement correspond à la proposition 1.3.36 dans la situation où  $\mathbb{R}^{d+1}$  est muni des dilatations d'Heisenberg) qui permettent d'affirmer que pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  :

$$\beta_s^* u'_0 = s^{-d_H} u'_0 + s^{-d_H} \log(s) c_0(u'_0) \delta_0, \quad (7.5.18)$$

où :

$$c_0(u'_0) = \int_{|\xi|=1} u'_0(x, \xi) d\sigma(\xi). \quad (7.5.19)$$

De fait l'équation (7.5.17) devient :

$$Res_x(P) = \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left( \log(s) c_0(u'_0) \delta_0 \right) |_{(x,0,0)} \quad (7.5.20)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{|\xi|=1} u'_0(x, \xi) d\sigma(\xi), \quad (7.5.21)$$

où la constante  $\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}$  apparaît dans la transformée de Fourier inverse. Maintenant, grâce à [13, l'équation (3.25) p 27] on observe que :

$${}^t(d\Psi_x)\xi = \sigma(x, \xi), \quad (7.5.22)$$

où  $\sigma$  est défini à [42, l'équation (5.12)] ou encore à l'équation (4.3.28) de ce manuscrit. BG utilisent  $\Psi_x$  comme étant la translation à gauche qui est aussi une application affine, donc coïncide avec le  $\Psi_x$  de Ponge. On a vu que la jacobienne de  $\Psi_x$  est triangulaire supérieure unipotente et a déterminant un, voir l'équation (4.3.39).

Grâce à la preuve du [42, théorème 1.12], la composante purement homogène  $u'_0$  de  $u_0$  est le premier terme dans le développement asymptotique de la fonction poly-homogène  $f = u|_{t=1}$ , voir [42, l'équation (3.16)] et les remarques qui précèdent. En conséquence :

$$u'_0(x, \xi) = p_{-(d+2)}(x, \xi), \quad (7.5.23)$$

où  $p_{-(d+2)}$  est le terme de degré  $-(d+2)$  dans le développement asymptotique de  $f = u|_{t=1}$ . Nous avons donc montré :

$$Res_x(P) = \frac{|d\Psi_x|}{(2\pi)^{d+1}} \int_{|\xi|=1} p_{-(d+2)}(x, \xi) d\sigma(\xi). \quad (7.5.24)$$

□

---

**Corollaire 7.5.2.** *C.-Yuncken 2023 [43]*

*Si  $M$  est une variété d'Heisenberg de dimension  $d+1$  de type contact ou feuilletage de codimension un, alors le résidu groupoïdal de la définition 7.2.6 coïncide avec le résidu non commutatif de Ponge pour les opérateurs  $P \in \Psi_{\mathcal{V}}^{-d_H}(M)$ , signifiant que (7.5.3) tient.*

*Démonstration.* Le théorème de Darboux pour une variété de contact ou le théorème de Frobenius pour un feuilletage de codimension un implique qu'autour de  $x \in M$ , il y a un système de coordonnées locales qui permet d'identifier  $M$  avec la variété modèle  $\mathbb{H}_n$ ,  $d = 2n$ , ou  $\mathbb{H}_0 \times \mathbb{R}^d$ . Puisque le résidu de Ponge [174, proposition 3.11, point 2) et équation (3.21) p 418] et le résidu groupoïdal sont indépendants de la notion de cartes (privilegiées) respectant la structure d'Heisenberg en les voyant comme des densités, le résultat s'ensuit.  $\square$



# Annexe A

## Group(oïd)e et algèbr(oïd)e de Lie

### A.1 Algèbres filtrées, gradués et groupes de Lie gradués

Pour les rappels qui suivent, on pourra lire [68, chapitre 3], [84, p 4-5], [73], [78], [75], [127, section 4 "filtrations and gradings" p 501], [127, Appendice A4 "filtrations and gradings"].

**Définition A.1.1.** Algèbre de Lie filtrée

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. On dit que  $\mathfrak{g}$  est  $\mathbb{N}$ -filtrée lorsqu'il existe une suite croissante  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sous-espaces vectoriels de  $\mathfrak{g}$  de sorte que :

1.  $\mathfrak{g}_i$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}_{i+1}$ .
2. Il y a un nombre fini de  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de qui est non nul. L'entier  $N$  défini par  $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$ ,  $i \geq N$  et  $\mathfrak{g}_{N-1} \neq \mathfrak{g}$  est dit *pas* ou *longueur* de la filtration.
3. Pour tout couple d'entiers  $(i, j) \in \mathbb{N}$ , on impose que le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  soit compatible avec la filtration au sens où :

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}. \quad (\text{A.1.1})$$

**Définition A.1.2.** Algèbre de Lie graduée, [73, définition 3.1.1 p 92]

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. On dit que  $\mathfrak{g}$  est  $\mathbb{N}$ -graduée lorsqu'il existe une suite  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sous-espaces vectoriels de  $\mathfrak{g}$  de sorte que :

1. Il y a un nombre fini de  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de qui est non nul.
2.  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_i$ .
3. Pour tout couple d'entiers  $(i, j) \in \mathbb{N}$ , on impose que le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  soit compatible avec la filtration au sens où :

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}. \quad (\text{A.1.2})$$

Dans ce qui suit, ne considérant que des objets  $\mathbb{N}$ -gradués,  $\mathbb{N}$ -filtrés, on omettra le  $\mathbb{N}$ .

**Définition A.1.3.** Famille de dilatations d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , [73, définition 3.1.7 p 94]

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Une famille de dilatations sur  $\mathfrak{g}$  est une famille d'applications linéaires  $\{\delta_s : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, s > 0\}$  de sorte que :

1. Pour chaque  $s > 0$ , les applications  $\delta_s$  sont données par :

$$\delta_s = \exp(A \ln(s)), \quad (\text{A.1.3})$$

où  $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est une application linéaire diagonalisable dont les valeurs propres sont strictement positives et où  $\exp$  désigne l'exponentielle de matrices (définie via la série exponentielle infinie).

2. Pour chaque  $s > 0$ , les applications  $\delta_s$  sont des morphismes d'algèbre de Lie, ce qui veut dire :

$$\delta_s([X, Y]) = [\delta_s(X), \delta_s(Y)], X, Y \in \mathfrak{g} \quad (\text{A.1.4})$$

Les valeurs propres de  $A$  sont dits les poids de la dilatation.

**Exemple 48.** On prend l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^d$  abélienne qu'on munit de la famille  $(\delta_s)$  de dilatations (1.3.3). La matrice  $A$  associée à cette famille au sens de la définition A.1.3 est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho_d \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

**Remarque A.1.4.** En particulier, remarquons que pour une telle famille de dilatations (A.1.3) sur une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , les propriétés de l'exponentielle de matrices et du logarithme nous donnent :

$$\delta_s \delta_t = \delta_{st}, \quad s, t > 0. \quad (\text{A.1.6})$$

**Lemme A.1.5.** [73, p95-96]

Toute algèbre de Lie graduée est filtrée et est munie d'une famille de dilatations  $\delta_s$  à poids entiers au sens de A.1.3 qui agit sur chaque composante par :

$$\delta_s(v) = s^j v, \quad v \in \mathfrak{g}_j. \quad (\text{A.1.7})$$

Cette famille définit une  $\mathbb{R}_+^*$ -action par automorphisme d'algèbre de Lie :

$$\mathbb{R}_+^* \times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), (s, v) \mapsto \delta_s(v). \quad (\text{A.1.8})$$

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre graduée par  $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . On pose :

$$\mathfrak{h}_k = \bigoplus_{j=1}^k \mathfrak{g}_j, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.1.9})$$

Par définition de la graduation, il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $k > N$ ,  $\mathfrak{g}_k = \{0\}$ . On remarque que  $\mathfrak{h}_k$  est un sev de  $\mathfrak{h}_{k+1}$  et que pour tout  $k > N$ ,  $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{g}$  mais  $\mathfrak{h}_{N-1} \neq \mathfrak{g}$ . De plus :

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{k=1}^N \mathfrak{h}_k. \quad (\text{A.1.10})$$

Soit  $(k, l) \in \mathbb{N}$ , et soit  $x \in \mathfrak{h}_k$ ,  $y \in \mathfrak{h}_l$  alors il existe  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_k$  et  $(y_1, \dots, y_l) \in \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_l$  de sorte que :

$$x = \sum_{i=1}^k x_i, \quad y = \sum_{j=1}^l y_j. \quad (\text{A.1.11})$$

Alors il vient :

$$[x, y] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l [x_i, y_j] \in \mathfrak{h}_{k+l}. \quad (\text{A.1.12})$$

La famille (A.1.7) de dilatations  $s > 0$ -paramétrée  $(\delta_s)$  s'étend naturellement à la graduation sur  $\mathfrak{g}$ . Il est clair que chaque  $\delta_s$  est un isomorphisme d'espace vectoriel sur chaque composante  $\mathfrak{g}_i$ . Reste à voir que  $\delta_s$  est compatible avec la structure du crochet. Soit  $(x, y) \in \mathfrak{g}$ . Il existe  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_N$  et  $(y_1, \dots, y_N) \in \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_N$  de sorte que :

$$x = \sum_{i=1}^N x_i, \quad y = \sum_{j=1}^N y_j. \quad (\text{A.1.13})$$

Alors :

$$[\delta_s(x), \delta_s(y)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [s^i x_i, s^j y_j] \quad (\text{A.1.14})$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N s^{i+j} [x_i, y_j] \quad (\text{A.1.15})$$

$$= \delta_s \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [x_i, y_j] \right) \quad (\text{A.1.16})$$

$$= \delta_s([x, y]). \quad (\text{A.1.17})$$

□

Vis à vis de la définition A.1.3 l'opérateur  $A$  qui définit la famille  $(\delta_s)$  est donné par :

$$Av = jv, \quad v \in \mathfrak{g}_j, \quad (\text{A.1.18})$$

et donc on constate que l'on retrouve pour  $v \in \mathfrak{g}_j$  :

$$\delta_s(v) = \exp(A \ln(s))v \quad (\text{A.1.19})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} (A \ln(s))^k v \right) \quad (\text{A.1.20})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(\ln(s))^k}{k!} A^k v \right) \quad (\text{A.1.21})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(\ln(s)j)^k}{k!} \right) v \quad (\text{A.1.22})$$

$$= s^j v. \quad (\text{A.1.23})$$

**Remarque 37.** Comme on le verra concrètement au détour d'un exemple, voir la section 6.2.2 et la remarque 6.2.8, une même algèbre de Lie peut admettre plusieurs familles de dilatations différentes.

**Exemple 49.** Algèbre de Lie graduée d'Heisenberg

L'algèbre de Lie d'Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  engendré par les champs de vecteurs  $(X, Y, Z)$  où  $[X, Y] = Z$  est graduée de pas 2 pour la décomposition  $\mathfrak{g}_1 = \text{Vect}(X, Y)$  et  $\mathfrak{g}_2 = \text{Vect}(Z)$ . On retrouve la dilatation d'Heisenberg usuelle qu'on aura déjà rencontré dans ce manuscrit, car interprétant (A.1.7), on a :

$$\delta_s(X) = sX, \quad \delta_s(Y) = sY, \quad \delta_s(Z) = s^2Z. \quad (\text{A.1.24})$$

**Proposition A.1.6.** [73, lemme 3.1.9 p95]

Toute algèbre de Lie de dimension finie possédant une famille de dilatations à poids rationnels admet une graduation naturelle.

Toute algèbre de Lie filtrée n'est pas graduée, voir exemple 51. Pour pallier ce problème, on définit le gradué associé : toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  filtrée possède un gradué associé  $\text{Grad}(\mathfrak{g})$ , offert par le lemme suivant.

**Lemme A.1.7.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie filtrée de pas  $N$ . Posons  $\tilde{\mathfrak{g}}_i = \mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i-1}$ . Alors :

$$\text{Grad}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\mathfrak{g}}_i, \quad (\text{A.1.25})$$

peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie induite par le crochet sur  $\mathfrak{g}$ .



*Démonstration.* La structure d'espace vectoriel est claire. Montrons qu'il est possible de définir un crochet de Lie sur  $\text{Grad}(\mathfrak{g})$ , induit par le crochet  $[\ , \ ]_{\mathfrak{g}}$  sur  $\mathfrak{g}$ . A cause de la filtration de pas  $N$ , constatons que si  $i > N$  alors  $\tilde{\mathfrak{g}}_i = 0$ . On pose pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, N\}$  :

$$[\ , \ ] : \tilde{\mathfrak{g}}_i \times \tilde{\mathfrak{g}}_j \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_{i+j}, (\overline{X_i}, \overline{Y_j}) \mapsto \overline{[X_i, Y_j]_{\mathfrak{g}}}, \quad (\text{A.1.26})$$

où l'opération  $\overline{X_i}$  désigne la classe d'équivalence de l'élément  $X_i \in \mathfrak{g}_i$  dans  $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ . Montrons que ce crochet est bien défini. On se donne deux couples de vecteurs égaux dans le produit  $\tilde{\mathfrak{g}}_i \times \tilde{\mathfrak{g}}_j$  :

$$(\overline{X_{i,1}}, \overline{Y_{j,1}}) = (\overline{X_{i,2}}, \overline{Y_{j,2}}), \quad (\text{A.1.27})$$

de sorte que :

$$X_{i,1} - X_{i,2} \in \mathfrak{g}_{i-1}, \quad Y_{j,1} - Y_{j,2} \in \mathfrak{g}_{j-1}. \quad (\text{A.1.28})$$

Or à cause de la filtration on peut affirmer :

$$[X_{i,1}, Y_{j,1}]_{\mathfrak{g}} - [X_{i,2}, Y_{j,2}]_{\mathfrak{g}} = [X_{i,1} - X_{i,2}, Y_{j,1}]_{\mathfrak{g}} + [X_{i,2}, Y_{j,1} - Y_{j,2}]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}_{i+j-1}. \quad (\text{A.1.29})$$

La conclusion découle en passant à la classe d'équivalence. On étend ce crochet sur  $\text{Grad}(\mathfrak{g})$ . On laisse le soin au lecteur de montrer qu'il s'agit d'un crochet de Lie, cela découlant bien évidemment du crochet  $[\ , \ ]_{\mathfrak{g}}$ .  $\square$

**Définition A.1.8.** Groupe de Lie gradué, [73, définition 3.1.1 p 92], [68, définition 3.1]

Un groupe de Lie gradué est un groupe de Lie connexe simplement connexe dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est graduée.

**Exemple 50.** La variété modèle  $G = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$  qu'on rencontre dans les travaux de BG, est un groupe de Lie gradué. Rappelons que l'algèbre de Lie d'un produit direct de groupes de Lie est isomorphe à la somme directe de chacune des algèbres de Lie. De fait,  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , est isomorphe à  $\mathfrak{h}_n \times \mathbb{R}^m$ . On rappelle qu'un si  $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$  sont deux algèbres de Lie, on peut définir le crochet sur  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$  comme étant donné par :

$$[(X, Y); (X', Y')] = ([X, X']_{\mathfrak{h}}, [Y, Y']_{\mathfrak{g}}). \quad (\text{A.1.30})$$

On rappelle que  $\mathfrak{h}_n$  est graduée de pas 2 et  $\mathbb{R}^m$  est graduée de pas 1. On pose alors :

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 &= \langle X_i, Y_i, e_1, \dots, e_m \rangle \\ \mathfrak{g}_2 &= \langle Z \rangle, \end{cases} \quad (\text{A.1.31})$$

où  $(X_i, Z_i, Z)$  constituent les éléments de la base standard de  $\mathfrak{h}_n$  et où  $(e_1, \dots, e_m)$  est la base canonique standard de  $\mathbb{R}^m$ . On vérifie que  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  forment une graduation de pas 2 pour  $G$ .

La condition (A.1.2) sur les crochets impliquent qu'une algèbre de Lie graduée est nilpotente et donc il en est de même pour le groupe. A fortiori, on peut montrer que dès qu'une algèbre de Lie est munie d'une famille de dilatations, alors elle est automatiquement nilpotente. Cela fait l'objet du résultat suivant :

**Proposition A.1.9.** [84, proposition 1.3 p5]

Si une algèbre de Lie de dimension finie est munie d'une famille de dilatations - au sens de la définition A.1.3 - alors elle est nilpotente. En particulier toute algèbre de Lie graduée est nilpotente.

**Remarque 38. Attention :** Toute algèbre de Lie nilpotente n'admet pas obligatoirement de famille de dilatations : En 1970, Dyer [61] a montré l'existence d'une telle algèbre de Lie de dimension 9. Voir aussi [73, Remarque 3.1.6, 2) p 93].

**Exemple 51.** Nous allons donner l'exemple d'une algèbre de Lie filtrée non graduée. Avec la proposition A.1.9 il suffit de trouver une algèbre de Lie non nilpotente. Par exemple, l'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad (\text{A.1.32})$$

du groupe  $ax + b$ . Pour la filtration il suffit de se donner :

$$\mathfrak{g}_1 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \mathfrak{g}_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.1.33})$$

Encore on pourrait considérer l'algèbre de Lie du groupe  $SU(2)$ .

On vient de le voir, certaines algèbres de Lie ne peuvent pas être munies d'une graduation. Dans ce cas, il n'y a aucune raison d'utiliser le lemme A.1.5 pour affirmer l'existence d'une famille de dilatations. Pourtant l'usage de ce genre de famille est très précieux. Ainsi, il peut être intéressant de considérer une notion plus générale de groupe de Lie : les groupes de Lie homogènes. De plus pour reprendre les mots de Fischer et Ruzhansky [73, p91] :

"Indeed these groups appear naturally in the geometry of certain symmetric domains and in some subelliptic partial differential equations. Moreover, they serve as local models for contact manifolds and CR manifolds, or for more general Heisenberg manifolds."

On gardera bien en tête qu'il existe aussi des algèbres nilpotentes qui ne peuvent être munies d'une famille de dilatations, c'est ce que nous soulignons à la remarque 38.

**Définition A.1.10.** Groupe de Lie homogène, [73, chapitre 3, définition 3.1.7 p 94]

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, simplement connexe. Si  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$  admet une famille de dilatations  $(\delta_s)_{s \in \mathbb{R}_+^*}$  - au sens de la définition A.1.3 - compatibles avec la structure d'algèbre de Lie<sup>1</sup> alors on dit que  $G$  est un groupe de Lie homogène.

**Définition A.1.11.** Dimension homogène d'un groupe de Lie homogène, [78, section 1 p 164].

Soit  $G$  un groupe de Lie homogène dont la famille de dilatations est donnée par une application linéaire  $A$  comme dans la définition A.1.3. Alors on définit la dimension homogène de  $G$  comme étant la trace de la matrice  $A$ .

**Proposition A.1.12.** [68, remarque 3.8 p16]

*Tout groupe de Lie gradué est homogène. Réciproquement, tout groupe de Lie homogène dont la famille de dilatations est à poids rationnels est un groupe de Lie gradué.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe de Lie gradué. Par définition,  $G$  est connexe et simplement connexe. De plus par le lemme A.1.5 alors on sait  $\mathfrak{g}$  admet une famille de dilatations  $(\delta_s)$ . Donc par définition  $G$  est homogène. Réciproquement, soit  $G$  un tel groupe de Lie homogène. En vertu de la proposition A.1.6, alors  $\mathfrak{g}$  admet une famille de dilatations. Donc  $G$  est un groupe de Lie gradué.  $\square$

**Exemple 52.** *Le groupe de Lie d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n$  est gradué de pas 2, la famille de dilatations à poids entiers est à de poids 1 sur les  $2n$  champs de vecteurs  $(X_i, Y_i)$  et de poids 2 sur le champ  $Z$ . Donc la dimension homogène de  $\mathbb{H}_n$  est  $2n + 2$ .*

**Remarque 39. Attention :** *Tout groupe de Lie homogène n'est pas gradué au sens où la famille de dilatations d'un groupe de Lie homogène ne provient pas forcément d'une graduation au sens de la proposition A.1.12. En effet, comme le suggère la réciproque de la proposition A.1.12, on peut construire un contre exemple dans lequel la famille de dilatation agissant sur  $G$  a au moins qu'un poids non rationnel, voir [73, exemple 3.1.11 p 97]. Par exemple on pourrait poser  $G = (\mathbb{R}^2, +)$  avec la famille de dilatation :*

$$\delta_s(x, y) = (sx, s^\pi y), \tag{A.1.35}$$

sur  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ . Comme tous les poids ne sont pas entiers, alors  $G$  ne peut être gradué de sorte à retrouver les dilatations d'origine, par contraposée du lemme A.1.5.

Un fait remarquable est que si un groupe de Lie homogène admet un opérateur de type Rockland, alors il est gradué, voir [73, proposition 4.1.3 p 172]. Pour reprendre les mots de Fischer et Ruzhansky :

"This property was shown by Miller in [152] (1980), with a small gap in the proof later corrected by ter Elst and Robinson [212] (1997)."

1. Ce qui est équivalent, avec l'application exponentielle  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  qui est bien un difféomorphisme global à cause des hypothèses de nilpotence sur  $G$ , à dire que pour tout  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $s > 0$  alors :

$$[\delta_s(X), \delta_s(Y)] = \delta_s([X, Y]). \tag{A.1.34}$$

Réciproquement, tout groupe de Lie gradué admet un opérateur de type Rockland. Soit  $G$  un tel groupe dont une base de l'algèbre de Lie est donnée par  $X_1, \dots, X_n$ . Il faudra considérer un opérateur de type laplacien :

$$\sum_{k=1}^n c_k X_j^{2\alpha_k}, \quad (\text{A.1.36})$$

où  $\alpha_k$  sont des constantes dépendant de la famille de dilatations sur  $\mathfrak{g}$ , et où  $c_k \in \mathbb{R}$  sont des constantes arbitraires. Disons un peu plus sur les  $\alpha_k$ . Notons  $\rho_1, \dots, \rho_n$  les poids entiers issus de la graduation. On introduit :

$$\rho_0 = \text{ppcm}(\rho_j), \quad (\text{A.1.37})$$

et on définit alors :

$$\alpha_j = \frac{\rho_0}{\rho_j}. \quad (\text{A.1.38})$$

L'opérateur (A.1.36) est un opérateur de Rockland homogène d'ordre  $2\rho_0$ . Le lecteur trouvera cela à la [73, proposition 4.1.8 p 175].

## A.2 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie et opérateurs différentiels invariants par translation

Pour rédiger cette section, nous nous sommes inspirés des ouvrages [127, chapitre 3, Appendice A p 487], [126, chapitre 3] de Knapp et sur [41, l'appendice A1] de Corwin et Greenleaf.

Il est clair que si  $(A, +, \cdot, \times)$  est une algèbre unitale associative alors posant le crochet :

$$[x, y] = xy - yx, \quad (\text{A.2.1})$$

on définit sur  $(A, +, \cdot)$  une structure d'algèbre de Lie. Étant maintenant donné une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  on cherche à construire à partir de  $\mathfrak{g}$  une algèbre unitale associative, dans laquelle on puisse identifier  $\mathfrak{g}$  (par une application injective). Cette algèbre est l'algèbre enveloppante. Rappelons sa construction.

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire,  $G$  désigne un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Tout d'abord nous construisons l'algèbre tensorielle  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ .

On définit  $\mathcal{T}^m(\mathfrak{g}) = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g}}_{m \text{ fois}}$ . Par convention  $\mathcal{T}^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{k}$ , si  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel. Pour fixer les idées disons que  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ . On définit une application bilinéaire (un produit) qui agit sur les tenseurs purs selon :

$$\mu_{m,n} : \mathcal{T}^m(\mathfrak{g}) \times \mathcal{T}^n(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}^{m+n}(\mathfrak{g}), (v_1 \otimes \dots \otimes v_m, w_1 \otimes \dots \otimes w_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_n. \quad (\text{A.2.2})$$

De même on introduit la somme :

$$+_{m,n} : \mathcal{T}^m(\mathfrak{g}) \times \mathcal{T}^n(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}^m(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{T}^n(\mathfrak{g}), x, y \mapsto x + y. \quad (\text{A.2.3})$$

On introduit alors l'espace vectoriel<sup>2</sup> :

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^n(\mathfrak{g}), \quad (\text{A.2.4})$$

dont la loi interne, notée  $+$ , est le prolongement direct de (A.2.3). On prolonge le produit (A.2.2) sur  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  par :

$$\mu : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g}), (v = \sum_{n \geq 0} v_n, w = \sum_{n \geq 0} w_n) \mapsto \sum_{n, m \geq 0} \mu_{m,n}(v_m, w_n), \quad (\text{A.2.5})$$

où il est sous entendu que les vecteurs  $v_n, w_n \in \mathcal{T}^n(\mathfrak{g})$  sont nuls pour  $n$  grand.

2. Il s'agit d'une *somme directe externe*. Plus précisément, c'est l'espace vectoriel formé par une famille  $(E_i)_{i \in I}$  d'espaces vectoriels (qui ne sont pas obligatoirement des sous-espaces d'un même espace vectoriel).

---

**Proposition A.2.1.** Algèbre tensorielle [126, p 46]

L'espace vectoriel  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ , (A.2.4) muni de l'application  $\mu$  est une algèbre associative unitale dite algèbre tensorielle. Le neutre pour le produit est  $1 \in \mathbb{R} = \mathcal{T}^0(\mathfrak{g})$ . De plus on peut identifier  $\mathfrak{g}$  avec  $\mathcal{T}^1(\mathfrak{g})$  dans  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ .

**Convention d'écriture :** Dans la suite on note plus simplement  $\cdot$  pour  $\mu$ .

Constatons que  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  est beaucoup trop "grosse" et qu'actuellement, on ne peut pas identifier  $x.y - y.x$  avec  $[x, y]$ . En effet, pour  $x, y \in \mathfrak{g}$  libres alors :

$$x.y - y.x \stackrel{\text{définition (A.2.5)}}{=} x \otimes y - y \otimes x \in \mathcal{T}^2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \quad (\text{A.2.6})$$

$$\neq [x, y] \in \mathcal{T}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}. \quad (\text{A.2.7})$$

Ce sont donc les éléments  $x.y - y.x - [x, y]$  qui posent soucis, et nous allons avoir recours à une relation d'équivalence (a fortiori un passage au quotient) pour se débarrasser de ces intrus. On considère l'idéal bilatère  $\mathcal{I}$  engendré dans  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  par  $\left\{ x.y - y.x - [x, y], x, y \in \mathfrak{g} \right\}$ . Il s'agit de l'espace vectoriel :

$$\mathcal{I} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ a(x.y - y.x - [x, y])b, x, y \in \mathfrak{g}, a, b \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \right\}. \quad (\text{A.2.8})$$

**Définition A.2.2.** L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, [127, section 1 chapitre 3 p 164]

L'algèbre unitale associative<sup>3</sup> :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}, \quad (\text{A.2.9})$$

est dite algèbre enveloppante. Il y a bien entendu une application surjective :

$$\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \quad (\text{A.2.10})$$

qui envoie chaque élément de  $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$  sur sa classe d'équivalence dans  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ .

**Exemple 53.** 1. Soit  $\mathfrak{g}$  un espace vectoriel muni du crochet de Lie nul. Soit  $(x_j)$  une base de  $\mathfrak{g}$  et  $a, b \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ . Constatons que, puisque  $a(x_i.x_j - x_j.x_i)b \in \mathcal{I}$ , alors dans  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  il est vrai que :

$$ax_i.x_jb = ax_j.x_ib, \quad (\text{A.2.11})$$

et en particulier :

$$x_{k_1} \dots x_{k_n} . x_i . x_j . x_{l_1} \dots x_{l_m} = x_{k_1} \dots x_{k_n} . x_j . x_i . x_{l_1} \dots x_{l_m}, \quad (\text{A.2.12})$$

ce qui permet de dire que  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  s'identifie aux polynômes commutatifs en  $(x_j)$ .

2. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie (sous entendu avec crochet non tout le temps nul). Alors dans  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  il est vrai que :

$$ax_i.x_jb = ax_j.x_ib + a[x_i, x_j]b. \quad (\text{A.2.13})$$

**Théorème A.2.3.** Injection de  $\mathfrak{g}$  dans son algèbre enveloppante

L'application linéaire :

$$i : \mathfrak{g} = \mathcal{T}^1(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \quad (\text{A.2.14})$$

est un morphisme d'algèbre de Lie injectif.

**Remarque 40. Attention :** Il n'est pas clair que  $i$  est injective, cela requiert du travail. En fait il s'agit d'un corollaire du théorème A.2.6 de Birkhoff-Poincaré-Witt.

**Théorème A.2.4.** Propriété universelle de l'algèbre enveloppante

---

3. Comme quotient d'une algèbre unitale associative par un idéal bilatère.

Soit  $A$  une algèbre associative unitale et  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow A$  un morphisme d'algèbre de Lie ( $A$  est considérée comme algèbre de Lie avec le crochet de Lie égal au commutateur), alors on peut factoriser  $\phi$  via  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  dans le sens suivant : il existe  $\bar{\phi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  un morphisme d'algèbre unitale de sorte que, notant :

$$i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \quad (\text{A.2.15})$$

l'injection, alors  $\phi = \bar{\phi} \circ i$ .

**Théorème A.2.5.** *Birkhoff-Poincaré-Witt*, [127, théorème 3.8 p 168], [126, théorème 3.2 p 47]

Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Une base canonique de  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  est donnée par les monômes (possiblement non commutatifs) :

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad (\text{A.2.16})$$

où  $(X_i)$  désigne une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Exemple 54.** Pour  $G = (\mathbb{R}^d, +)$  abélien d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^d$  avec crochet nul, on a :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_d], \quad (\text{A.2.17})$$

ce dernier ensemble désignant les polynômes commutatifs à  $d$  variables.

Tout d'abord rappelons, [184, p 4] que tout élément de l'algèbre de Lie  $X \in \mathfrak{g}$  est identifié au champ vectoriel invariant à gauche par translation :

$$\tilde{X}f(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x \exp(tX)), \quad f \in C^\infty(G), \quad (\text{A.2.18})$$

que l'on notera toujours  $X : x \mapsto Xf(x)$ . Tout tel champ vectoriel est lui même identifié (en tant que dérivation) à un opérateur différentiel d'ordre 1 invariant à gauche par translation i.e. :

$$X : f \in C^\infty(G) \rightarrow Xf \in C^\infty(G), \quad (\text{A.2.19})$$

définie par (A.2.18). Par suite on peut définir la composition de tels opérateurs en disant que :

$$X^n f(x) = \left( \frac{d}{dt} \right)^n \Big|_{t=0} f(x \exp(tX)). \quad (\text{A.2.20})$$

Cela est expliqué [106, section 4 chp 2 p104-105].

**Théorème A.2.6.** *Identification  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  et opérateurs différentiels*, [126, chapitre 3 p 48-50], [106, proposition 1.9 p 108], [127, problems 10-12 p180], [41, lemme 3.3.1]

Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il y a une bijection entre :

1.  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ .
2. Les opérateurs différentiels invariants à gauche par translation sur  $G$ . On note  $DO(G)_{\text{inv}}$  l'algèbre unitale associative de ces opérateurs (le produit étant la composition).
3. Les distributions à support compact sur  $G$  dont le support est inclus dans  $\{e_G\}$ , l'élément neutre du groupe. On note  $\mathcal{E}(G)^{(0)}$  l'algèbre unitale associative de ces distributions (le produit étant la convolution).

*Démonstration.* Tout d'abord on commence par identifier  $DO(G)_{\text{inv}}$  aux éléments de  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ . Pour ce faire, on considère l'application :

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \tilde{X} \in DO(G)_{\text{inv}}, \quad (\text{A.2.21})$$

où  $\tilde{X}$  est défini à l'équation (A.2.18) et identifié à un opérateur différentiel invariant à gauche par translation d'ordre 1. Cette application est un morphisme d'algèbre de Lie :

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}], \quad (\text{A.2.22})$$

on en trouvera la preuve de cela dans [70, section 8.2 (c) p 161]. Avec la propriété universelle de l'algèbre enveloppante on en déduit que cette application (A.2.21) se prolonge sur  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  en un morphisme :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow DO(G)_{\text{inv}}, \quad (\text{A.2.23})$$

envoyant 1 sur 1. Cette application admet pour inverse l'application :

$$DO(G)_{\text{inv}} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \quad (\text{A.2.24})$$

donnée par la restriction en  $e$ , le neutre de  $G$ . Enfin, pour le troisième point, on remarque que l'application :

$$\mathcal{E}(G)^{(0)} \rightarrow DO(G)_{\text{inv}}, u := \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_e \mapsto \left( f \in C^\infty(G) \mapsto u \star f \right), \quad (\text{A.2.25})$$

où  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  est bien définie et a pour réciproque :

$$DO(G)_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{E}(G)^{(0)}, X \mapsto {}^t X \delta_e, \quad (\text{A.2.26})$$

étendue naturellement à  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cong DO(G)_{\text{inv}}$ . □

Dans ce qui suit, toutes les représentations unitaires sont considérées fortement continues ce qui veut dire que pour  $\pi$  une représentation unitaire d'un groupe de Lie  $G$  sur un espace de Hilbert  $H$  alors l'application suivante est continue pour tout  $v \in H$  dans la topologie de  $H$  :

$$x \in G \mapsto \pi(x)v \in H. \quad (\text{A.2.27})$$

**Définition A.2.7.** Espace des vecteurs  $C^\infty$ , [184, p 5], [41, appendice A1], [126, chapitre 3 § 3 p 51]

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$  opérant sur un espace de Hilbert  $H$ . Un vecteur  $v \in H$  est dit lisse ou  $C^\infty$  si la fonction :

$$x \in G \mapsto \pi(x)v \in H, \quad (\text{A.2.28})$$

est lisse. On dénote  $H_\pi^\infty$  l'ensemble de tels vecteurs.

**Proposition A.2.8.** [126, proposition 3.9 p 43],[69, proposition 7.2], [70, p 53 *G* groupe de Lie linéaire]

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. On se donne  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$  sur  $H$  un espace de Hilbert. Pour  $X \in \mathfrak{g}$  et  $v \in H_\pi^\infty$ , la limite du taux d'accroissement de  $t \mapsto \pi(\exp(tX))v$  en  $t = 0$  existe dans la topologie de  $H$  et est notée :

$$d\pi(X)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\exp(tX))v. \quad (\text{A.2.29})$$

De plus  $H_\pi^\infty$  est stable par chaque  $d\pi(X)$ , de sorte que  $d\pi$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  vers  $H_\pi^\infty$  qui est de surcroît un morphisme d'algèbre de Lie au sens où pour tout  $X, Y \in \mathfrak{g}$  :

$$d\pi([X, Y]) = [d\pi(X), d\pi(Y)]. \quad (\text{A.2.30})$$

Pour la preuve de la proposition qui suit, on pourra consulter la section [126, section 4 p 55]. La démonstration utilise un sous espace des vecteurs  $C^\infty$  dense dans l'espace de Hilbert  $H$  sous jacent à la représentation  $\pi : G \rightarrow \mathcal{L}_c(H)$ , à savoir l'espace de Gårding.

**Théorème A.2.9.** Densité des vecteurs  $C^\infty$ , [126, théorème 3.15 p 56]

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$  opérant sur un espace de Hilbert  $H$ . L'espace vectoriel  $H_\pi^\infty$  est dense dans  $H$ .

Soit  $P$  un opérateur différentiel invariant à gauche par translation sur un groupe de Lie  $G$  et  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$ . Nous allons rappeler comment définir  $d\pi(P)$  qui intervient dans le théorème de Rockland 6.2.1. On commence par définir  $d\pi(X)$ . Par la propriété universelle de l'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  on en déduit de la proposition A.2.8 :

**Proposition A.2.10.** Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. On se donne  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$  sur  $H$  un espace de Hilbert, et  $P \in DO(G)_{inv}$ . On peut définir  $d\pi(P)$  par extension de (A.2.29) vérifiant  $d\pi(0) = 0$  et  $d\pi(1) = 1$ . Plus précisément pour :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad (\text{A.2.31})$$

on définit :

$$d\pi(P) = \sum_{|\alpha| \leq m} d\pi(X_1)^{\alpha_1} \dots d\pi(X_n)^{\alpha_n}, \quad (\text{A.2.32})$$

où l'on comprend pour  $j$  :

$$d\pi(X_j)^{\alpha_j} v = \left( \frac{d}{dt} \right)^{\alpha_j} \Big|_{t=0} \pi(\exp(tX)) v, \quad v \in H_\pi^\infty. \quad (\text{A.2.33})$$

**Définition A.2.11.** Opérateur différentiel homogène d'ordre  $m$

Soit  $P$  un opérateur différentiel sur un groupe de Lie homogène  $G$ . Il est dit homogène d'ordre  $m$  si pour tout  $f \in C^\infty(G)$ , pour tout  $s > 0$  :

$$P(\delta_s^* f) = s^m P f \circ \delta_s, \quad (\text{A.2.34})$$

où  $(\delta_s)$  représente la famille de dilatation de la définition A.1.3.

Grâce aux dilatations  $(\delta_s)$  et au théorème de Birkhoff-Poincaré-Witt A.2.6, il est possible de définir :

**Définition A.2.12.** Partie principale d'un opérateur différentiel

Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  invariant à gauche par translation sur un groupe de Lie gradué  $G$  de dimension  $n$  muni des dilatations  $(\delta_s)$  à poids entiers  $(\rho_j)$ . On écrit :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad (\text{A.2.35})$$

et on définit la partie principale de  $P$  comme étant l'opérateur homogène d'ordre  $m$  :

$$\sigma^m(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad (\text{A.2.36})$$

où  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \rho_j \alpha_j$ .

**Exemple 55.** Reprenons l'exemple 49 du groupe de Lie gradué de pas 2 d'Heisenberg  $\mathbb{H}_1$ . On constate que le champ  $Z$  se voit affecter l'ordre 2. Ces dilatations se prolongent sur l'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}(\mathfrak{h}_1)$  de  $\mathfrak{h}_1$  dont une base, en vertu du théorème de Birkhoff-Poincaré-Witt A.2.6, est donnée par les monômes  $(X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} Z^{\alpha_3})$ . Par conséquent, l'opérateur :

$$\mathcal{L}_\mu = -\frac{1}{2} \Delta_H + i\mu Z \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_1), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.2.37})$$

où  $\Delta_H = X^2 + Y^2$  est le sous-laplacien, est homogène d'ordre 2 pour ces dilatations car  $\sigma^2(P) = P$  (sa partie principale est l'opérateur lui-même). Dans le calcul d'Hörmander<sup>4</sup>, l'opérateur  $P$  est inhomogène ! Ainsi, le fait de tenir compte de la structure graduée de  $\mathbb{H}_1$  modifie la partie principale de  $P$ . On montre, voir exemple 46 et remarque 6.2.7, que  $\Delta_H$  est Heisenberg-elliptique donc hypo-elliptique. De même pour les bonnes valeurs de  $\mu$ , on montre que l'opérateur (A.2.37) est Heisenberg-elliptique, voir l'exemple 47.

4. Le lecteur pourra prendre les champs  $X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z$ ,  $Y = \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z$  et  $Z = \partial_z$ , où  $\mathbb{H}_1 = \mathbb{R}^3$  est muni de sa structure non commutative habituelle.

## A.3 Les groupoïdes algébriques

La notion de groupoïde a été introduite par le mathématicien Brandt en 1927 dans son article [23]. Pour reprendre les mots dans l'introduction de l'article de Cartier [169] :

"Pourquoi des groupoïdes et des algébroïdes, aux noms si laids ? La première apparition des groupoïdes est due à Brandt [23], et se rapporte à des problèmes d'arithmétique non-commutative. [...] Cette structure exotique ne reçut guère d'attention jusque vers 1950".

Elle généralise la notion de groupe, qui a émergé à la fin du 19ième siècle notamment grâce aux travaux du français Galois (groupe de permutation des racines d'un polynôme) et du mathématicien Abel sur la non-résolubilité par radicaux des équations de degré 5. Un groupe est un ensemble muni d'une loi interne où tout élément  $g$  admet un unique inverse  $g^{-1}$  et le produit de ces deux éléments donne un élément neutre indépendant de  $g$ . A contrario, dans un groupoïde, il existe potentiellement une infinité d'éléments neutres et deux éléments d'un groupoïde ne sont pas toujours composables. Pour reprendre les mots de Paterson [165, p 6] :

"The main intuition here is that a groupoid is a set with a partially defined multiplication for which the usual properties of a group hold whenever they make sense".

Avant d'introduire le formalisme, donnons un exemple fondamental : le groupoïde des paires d'un ensemble  $X$ , voir exemple 57. On peut penser le groupoïde des paires comme l'ensemble des chemins (des flèches !) d'un point  $y$  vers un autre  $x$ . Ce chemin, noté  $(x, y)$ , signifie qu'on se déplace de la source  $y$  au but  $x$ . Il paraît raisonnable d'espérer que si l'on se déplace de  $z$  pour aller vers  $y$  et puis de  $y$  pour aller à  $x$  alors on sera allés de  $z$  à  $x$ . On traduit cela mathématiquement par le produit de deux éléments :

$$(x, y)(y, z) = (x, z). \quad (\text{A.3.1})$$

En revanche, constatons qu'il n'y aurait pas de sens à se déplacer "continûment" de  $z$  vers  $y$ , puis de  $w$  à  $x$ ... sauf si  $y = w$  : deux éléments du groupoïde ne sont pas toujours composables... sauf si la source de la flèche  $(x, y)$  est le même endroit que le but de notre flèche  $(y, z)$ . Il nous faudra donc définir deux applications qui, étant donnée une flèche, nous indiquent sa source et son but : ce sont les applications source  $s$  et but  $r$ . De même si l'on fait le chemin inverse de  $x$  vers  $y$ , cela correspond à s'être déplacé de  $y$  vers  $x$ . On traduit cela mathématiquement par l'inverse :

$$(x, y)^{-1} = (y, x). \quad (\text{A.3.2})$$

Constatons que le fait de se déplacer de  $x$  à  $y$  et de faire le chemin inverse, revient au final à ne pas avoir bougé. On traduit cela mathématiquement par :

$$(x, y)(x, y)^{-1} = (x, y)(y, x) = (x, x). \quad (\text{A.3.3})$$

C'est précisément ici qu'on constate qu'un groupoïde possède potentiellement<sup>5</sup> une infinité d'éléments neutres. L'ensemble des éléments neutres s'appellent l'espace des unités.

Cette première section met l'accent sur des exemples de groupoïdes algébriques. Les groupoïdes les plus importants pour appréhender ce manuscrit sont le groupoïde des paires et le groupoïde tangent de Connes. Beaucoup d'auteurs ayant écrit sur le sujet, la définition A.3.1 de groupoïde est une synthèse exhaustive de nombreuses lectures ( [165, p 6] , [25, p 775] , [182], [103], [141, définition 1.1.1 p 4] , [39, p 104]). On notera que la définition de [155] de Moerdijk et Mrcun s'ancre dans la philosophie des catégories.

Donnons au lecteur quelques références qui ont été particulièrement utiles pour rédiger cette appendice :

1. Paterson [165].
2. Renault [182].
3. Mackenzie [141].
4. Connes [39].

---

5. Du même cardinal que  $X$  !



**Définition A.3.1.** Groupoïde, [155] et [142, définition 1.1.1 p 4].

Un groupoïde  $G$  est la donnée de deux ensembles et de plusieurs applications. Un ensemble  $G^{(0)}$ , parfois appelé base, qui contient les éléments unités aussi appelés objets, un ensemble  $G^{(1)}$  qui contient l'ensemble des flèches ou des morphismes. Généralement on note qu'une flèche  $g$  va entre deux objets  $g : x \rightarrow y$ . On doit aussi trouver trois applications :

1. L'application surjective but  $r : G \rightarrow G^{(0)}$ , qui à la flèche  $g : x \rightarrow y$  associe l'élément  $y$ .
2. L'application surjective source  $s : G \rightarrow G^{(0)}$ , qui à la flèche  $g : x \rightarrow y$  associe l'élément  $x$ .
3. Application unité (object inclusion map, unit map)  $u : G^{(0)} \rightarrow G$ .

Ces deux applications permettent de donner sens à la composition au sein du groupoïde, puisqu'on pose  $G^{(2)} := \{(h, g) \in G \mid s(h) = r(g)\}$  dit ensemble des paires composables pour les lois mentionnées après. En effet, le groupoïde doit aussi être muni des deux applications suivantes :

1. Une application de composition associative  $\star : G^{(2)} \rightarrow G, (h, g) \mapsto h \star g$
2. Une application inverse  $i : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  qui est involutive.

Ces lois doivent satisfaire les axiomes suivants :

1.  $r(1_x) = s(1_x) = x$  pour tous  $x \in G^{(0)}$ .
2.  $1_{r(g)}g = g1_{s(g)} = g$ .
3.  $s(g^{-1}) = r(g)$  et  $r(g^{-1}) = s(g)$ .
4.  $gg^{-1} = 1_{r(g)}$  et  $g^{-1}g = 1_{s(g)}$ .

Pour  $x \in G^{(0)}$ , on note  $G^x = r^{-1}(x)$  la  $r$ -fibre du groupoïde en  $x$  et  $G_x = s^{-1}(x)$  la  $s$ -fibre du groupoïde en  $x$ .

On propose maintenant quelques exemples pour se familiariser avec la notion :

**Exemple 56.** Groupe vu comme groupoïde, [39] p 105

On commence par montrer que tout groupe  $G$  est bien entendu un groupoïde. Les applications de composition et d'inverse sont bien entendues celles associées au groupe lui même. On pose l'ensemble  $G^{(0)} := \{e\}$  et les applications but et source sont triviales i.e.  $r = s : G \rightarrow G^{(0)}, x \mapsto e$ . On prend  $u : G^{(0)} \rightarrow G, e \mapsto e$ . L'ensemble  $G^{(2)}$  se retrouve être égal à  $G \times G$  : tous les éléments sont composables et il n'y a qu'un seul élément unité.

**Exemple 57.** Groupoïde des paires [68, exemple 5.2 p 35] , [165, p 34], [39, p 105]

Considérons un ensemble  $X$  et posons  $G = X \times X$ . Alors  $G$  est un groupoïde pour  $G^{(0)} := X$  et les applications suivantes :

1.  $r : (x, y) \in G \mapsto x \in G^{(0)}$
2.  $s : (x, y) \in G \mapsto y \in G^{(0)}$

Ainsi  $G^{(2)} := \{((x, y); (x', y')) \in G^2, s(x, y) = r(x', y') \Leftrightarrow y = x'\}$ . La composition et l'inverse sont donc données par :

1.  $(x, y)(y, z) = (x, z)$ .
2.  $(x, y)^{-1} = (y, x)$ .

L'application unité est donnée par  $u(x) = (x, x)$ .

Dans certains ouvrages le groupoïde des paires est nommé "groupoïde trivial", il porte aussi d'autres terminologies comme le mentionne la note de bas de page de [165, p 35].

**Exemple 58.** Produit semi-direct [39, p 105]

On se donne une action à droite de groupe  $X \curvearrowright H$ , où  $X$  est un ensemble et  $H$  un groupe. On munit l'ensemble  $G = X \times H$  d'une structure de groupoïde avec pour base  $G^{(0)} = X \times \{e\} \cong X$  et les applications :

1.  $r : (x, g) \in G \mapsto x \in G^{(0)}$
2.  $s : (x, g) \in G \mapsto x.g \in G^{(0)}$

Ainsi  $G^{(2)} = \{((x, g); (x', g')) \in G^2, s(x, g) = r(x', g') \Leftrightarrow x.g = x'\}$ . La composition et l'inverse sont donc données par :

1.  $(x, g_1)(y, g_2) = (x, g_1g_2)$ , si  $x.g_1 = y$ .
2.  $(x, g)^{-1} = (g.x, g^{-1})$ ,  $\forall (g, x) \in G$ .

L'application unité est donnée par  $u(x, e) = (x, e)$ . Ce groupoïde est noté  $G = X \rtimes H$  et est dit produit semi-direct de  $X$  par  $H$ .

### Exemple 59. Groupoïde $GL(E)$

On se donne  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse de base  $M$ . Alors on définit le groupoïde  $G := GL(E)$  grâce aux fibres issues de la projection surjective lisse  $\pi : E \rightarrow M$ . On pose donc  $G = GL(E)$  l'ensemble des isomorphismes linéaires entre fibres disons  $E_x$  et  $E_y$  (les fibres ont toute la même dimension donc sont isomorphes). Pour un  $\phi : E_x \rightarrow E_y$  un isomorphisme, on pose les applications :

1.  $r : G \rightarrow G^{(0)}, \phi \mapsto E_y$
2.  $s : G \rightarrow G^{(0)}, \phi \mapsto E_x$ ,

où  $G^{(0)}$  est l'ensemble des fibres de  $E$  donc  $G^{(0)} \cong M$ .

Ainsi,  $G^{(2)} := \{\phi : E_x \rightarrow E_y \text{ et } \psi : E_{x'} \rightarrow E_{y'} \mid E_y = E_{x'}\}$ . La composition est celle des applications linéaires lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont égaux. L'application inverse est celle des applications linéaires bijectives au sens de la composition. L'application unité est donnée par  $u : E_x \in G^{(0)} \mapsto Id_{E_x} \in G$ .

### Exemple 60. Fibré vectoriel vu comme groupoïde

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel. On munit l'ensemble  $E$  d'une structure de groupoïde avec pour base  $M$  et les applications :

1.  $\pi = r = s$

Ainsi les éléments composables  $G^{(2)}$  sont ceux qui sont dans la même fibre. Les opérations dans la fibre  $E_x$  sont bien sûres celles issues de la loi de groupe additive de l'espace vectoriel  $(E_x, +, \cdot)$ . L'application unité est donnée par  $u(x) = 0_{E_x}$ .

### Exemple 61. Fibré tangent vu comme groupoïde

Soit  $M$  une variété lisse. Alors, comme cas particulier de l'exemple 60, le fibré tangent  $TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$  peut être muni d'une structure de groupoïde.

## A.4 Les groupoïdes de Lie

Selon Alain Connes dans [39, p 106] et Pierre Cartier [169, p 166], le français André Charles Ehresmann a été le pionnier, dans les années 50, à enrichir les groupoïdes algébriques de structures topologiques et différentielles. Pour reprendre [169, p 166] :

"Le premier mathématicien à suivre cette direction [d'enrichir les structures algébriques] fut Charles Ehresmann (vers 1950) suivi de ses élèves Haefliger et Jean Pradines. Ehresmann était un géomètre et il voulait construire des groupoïdes géométriques pour étudier les espaces fibrés, les revêtements et les feuilletages. Un peu plus tard, Alain Connes [38] (1982) introduisit l'algèbre non-commutative de convolution d'un groupoïde, et ceci conduisit à considérer l'espace des feuilles d'un feuilletage comme un espace non-commutatif."

Dans certains ouvrages, la terminologie "groupoïde différentiable" est utilisée.

De bonnes références pour lire sur les groupoïdes de Lie sont le chapitre 5 du livre [155] ou la section 2.3 du livre [165]. Il est bon d'avertir le lecteur que les définitions de groupoïdes de Lie, localement compacts peuvent très cruellement varier d'un auteur à l'autre, notamment concernant l'hypothèse Hausdorff sur le groupoïde, sa base ou ses fibres. De plus certains axiomes sont redondants dans les définitions, ayant pour conséquence d'entraîner certains auteurs à les enlever. Nous en discuterons de cela rapidement, mais sans rentrer dans les technicités.

**Définition A.4.1.** Groupoïde topologique, [182, définition 2.1 p 16]

Un groupoïde topologique consiste en un groupoïde algébrique  $G$  et d'une topologie Hausdorff compatible avec la structure du groupoïde de sorte que les applications inverse et composition sont continues. L'ensemble des paires composables  $G^{(2)}$  est muni de la topologie induite par  $G \times G$ .

**Remarque 41.** [182, p 16]

*Il n'y a pas besoin de supposer que  $r, s$  sont continues dans la définition A.5.1 précédente. Supposé continue, l'application  $i$  est même un homéomorphisme. On en déduit ensuite que  $r, s$  sont des applications continues. En effet, comme  $i^{-1} = i$  est continu, alors  $i$  est un homéomorphisme. Montrons maintenant par exemple que  $r, s$  sont continues. Il suffit pour cela de constater que  $r(x) = m(x, i(x))$  et  $s(x) = m(i(x), x)$ . La conclusion s'ensuit puisque  $m$  est supposée continue.*

**Définition A.4.2.** Groupoïde lisse selon Moerdijk/Mrcun [155]

Un groupoïde de Lie est un groupoïde algébrique avec une structure lisse Hausdorff de variété sur la base  $G^{(0)}$  et une structure de variété lisse sur  $G$  (possiblement non Hausdorff et non à base dénombrable) de sorte que l'application source de  $G$  soit une submersion lisse avec des fibres  $G_x = s^{-1}(x)$  Hausdorff et applications produit et d'inverse sont lisses.

**Remarque 42.** *Faisons quelques commentaires sur la définition A.4.2 précédente. D'une part le fait que  $s$  soit une submersion lisse et que  $i$  soit un difféomorphisme entraîne que  $r = s \circ i$  est aussi une submersion lisse. D'autre part, dans [155], on apprend que  $G^{(2)} = \{(h, g) \in G, s(h) = r(g)\}$  a une structure naturelle de variété lisse, cela découlant du fait que  $r$  et  $s$  sont toutes deux des submersions lisses. Pour s'en convaincre on pourra lire la remarque 43. Ainsi, il n'est pas nécessaire de supposer que  $r$  et  $s$  sont des submersions. Cela est aussi mentionné dans l'article de Claire Debord [50, section 2.1].*

**Définition A.4.3.** Groupoïde lisse selon Patterson/Mackenzie [165, définition 2.3.1 p 55], [141, définition 1.1.3 p 5]

Un groupoïde de Lie est un groupoïde algébrique  $G$  avec une structure lisse (possiblement non-Hausdorff) de variété de sorte que la base  $G^{(0)}$  soit une sous variété plongée Hausdorff de  $G$  (voir [137, chapitre 8]). Toutes les  $r$ -fibres sont Hausdorff dans la topologie relative de  $G$ , les applications produit, inversion sont lisses et les applications but et source sont des submersions.

**Remarque 43.** 1. Dans [165, p 56], l'auteur montre que  $G^{(2)}$  est une sous variété de  $G \times G$ . L'application :

$$s \times r : G \times G \rightarrow G^{(0)} \times G^{(0)}, (x, y) \mapsto (s(x), r(y)). \quad (\text{A.4.1})$$

est une submersion surjective, puisque  $r, s$  le sont. Posons  $\text{Diag}(G^{(0)}) := \{(u, u), u \in G^{(0)}\}$  qui est une sous-variété de  $G^{(0)} \times G^{(0)}$  et constatons que :

$$G^{(2)} = (s \times r)^{-1}(\text{Diag}(G^{(0)})). \quad (\text{A.4.2})$$

D'où la conclusion par [165, Appendice F p 236].

2. Comme le mentionne Patterson [165, p 55], il y a redondance dans la définition A.4.3. On peut montrer que les axiomes :

- (a)  $r, s$  sont des submersions,
- (b) la multiplication est une application lisse,

sont suffisants pour montrer que  $i$  l'application d'inversion, est lisse et même un difféomorphisme. La preuve est faite à la [141, proposition 1.1.5] mais nous en tirons l'essence dans ces quelques lignes, en réadaptant avec nos conventions. Remarquons que l'application inverse  $i$  est la composée des trois applications lisses  $\pi_2, \theta^{-1}, \psi$  suivantes. On définit :

$$\pi_2 : G^{(2)} \rightarrow G, (h, g) \mapsto g, \quad (\text{A.4.3})$$

qui est lisse, puis :

$$\theta^{-1} : G \times_r G \rightarrow G^{(2)}, (h, g) \mapsto (h, h^{-1}g), \quad (\text{A.4.4})$$

où l'on a posé  $G \times_r G := \{(h, g) \in G \times G, r(h) = r(g)\}$ . Cette application fait sens car  $s(h^{-1}) = r(h) = r(g)$ , ce qui signifie que la composition de  $g$  par  $h^{-1}$  est licite vis à vis des conventions que l'on a prises, voir définition A.3.1. L'application  $\theta^{-1}$  est l'inverse de :

$$\theta : G^{(2)} \rightarrow G \times_r G, (h, g) \mapsto (h, hg), \quad (\text{A.4.5})$$

qui est lisse car en particulier l'application de multiplication sur  $G^{(2)}$  l'est. Avec [141, p6] on montre que  $\theta$  est un difféomorphisme (c'est le cœur de la preuve !). On définit ensuite :

$$\psi : G \rightarrow G \times_r G, h \mapsto (h, 1_{r(h)}). \quad (\text{A.4.6})$$

Il vient alors :

$$\pi_2 \circ \theta^{-1} \circ \psi(h) = \pi_2 \circ \theta^{-1}(h, 1_{r(h)}) \quad (\text{A.4.7})$$

$$= \pi_2(h, h^{-1}1_{r(h)}) \quad (\text{A.4.8})$$

$$= i(h), \quad (\text{A.4.9})$$

l'avant dernière égalité étant vraie par définition d'un groupoïde algébrique  $h^{-1}1_{r(h)} = h^{-1}1_{s(h^{-1})} = h^{-1}$ , voir définition A.3.1.

**Exemple 62.** Les exemples vus à la section A.3 sont des groupoïdes de Lie lorsque les espaces sont munis des bonnes structures (structure de variété, fibré lisse etc...).

Les fibres d'un groupoïde sont munies de structure intéressante. Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Tout d'abord rappelons qu'une sous variété plongée  $S$  de dimension  $k$  d'une variété lisse  $M$  (*embedded submanifold* en anglais), lorsque  $S \subset M$  de sorte pour tout point  $p \in S$ , il existe une carte  $(U, \phi)$  autour de  $p$  dans  $M$  de sorte que  $\phi(U \cap S)$  est un ensemble donné par l'intersection d'un plan de dimension  $k$  avec  $\phi(U)$ . Plus précisément notons :

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (x^1(x), \dots, x^n(x)), \quad (\text{A.4.10})$$

les coordonnées identifiant  $U \subset M$  à  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . On demande que :

$$\phi(U \cap S) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \phi(U), y_{k+1} = 0, \dots, y_n = 0\}. \quad (\text{A.4.11})$$

La terminologie *hypersurface plongée* désigne une variété plongée de dimension  $n - 1$  dans une variété de dimension  $n$ . Ceci est plus amplement détaillée dans le livre de Lee [137, p 174-180].

**Théorème A.4.4.** *Cas particulier des variétés vues comme ensemble de niveaux*

Soit  $N, M$  deux variétés lisses et  $s : N \rightarrow M$  une submersion alors :

1.  $s^{-1}(x)$  est une sous variété fermée plongée de dimension  $\dim(N) - \dim(M)$ .
2. On a l'identification suivante :  $T_x s^{-1}(x) = \ker(d_x s)$ .

*Démonstration.* 1. Ce résultat est le [137, corollaire 8.9 p 182] : une submersion est une application de rang constant et  $s^{-1}(x)$  est un ensemble de niveau.

- 
2. On se donne  $X_x \in T_x s^{-1}(x)$  et on représente ce vecteur tangent par une courbe  $\gamma$  dont l'image est dans  $s^{-1}(x)$ . Alors  $d_x(X_x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(s \circ \gamma)(t) = 0$  car  $s \circ \gamma$  est la fonction constante. D'où  $T_x s^{-1}(x) \subset \ker(d_x s)$ . Réciproquement, comme  $s$  est une submersion alors  $d_x s$  est surjective, par le théorème du rang cela entraîne que  $\dim(\ker(d_x s)) = \dim(T_x N) - \dim(T_{s(x)} M) = \dim(N) - \dim(M) = \dim(T_x s^{-1}(x))$ . La dernière égalité est vraie encore par le point 1). D'où cela prouve que  $T_x s^{-1}(x) = \ker(d_x s)$ .  $\square$

Alors on montre :

**Proposition A.4.5.** [141, p 6] , [165, p 55]

Soit  $G$  un groupoïde de Lie. Les fibres  $G^x = r^{-1}(x)$  et  $G_x = s^{-1}(x)$  pour un  $x \in G^{(0)}$  sont des sous variétés fermées plongées de  $G^{(0)}$ .

On termine par une généralisation de la notion de morphisme de groupes.

**Définition A.4.6.** (Iso)morphismes de groupoïdes (de Lie), [155, p 112] , [141, définition 1.2.1 p 12]

Soient  $G$  et  $H$  deux groupoïdes de base respectives  $G^{(0)}$  et  $H^{(0)}$ . Un homomorphisme de groupoïdes  $G \rightarrow H$  est la donnée d'une paire d'applications  $F : G \rightarrow H$  et  $f : G^{(0)} \rightarrow H^{(0)}$  de sorte que :

1.  $r_H \circ F = f \circ r_G$ .
2.  $s_H \circ F = f \circ s_G$ .
3.  $F(hg) = F(h)F(g)$ ,  $(h, g) \in G^{(2)}$ .

Si  $G, H$  sont des groupoïdes de Lie et  $(F, f)$  sont lisses, on dit que la paire  $(F, f)$  est un morphisme de groupoïdes de Lie. La paire  $(F, f)$  est dite un isomorphisme de groupoïdes de Lie si de surcroît les applications  $(F, f)$  sont des difféomorphismes.

**Proposition A.4.7.** Soit  $F : G \rightarrow H$  un morphisme de groupoïdes alors :

1.  $F(1_g) = 1_{f(g)}$ ,  $g \in G^{(0)}$ .
2.  $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}$ ,  $g \in G$ .

**Exemple 63.** Pour tout  $s > 0$ , les automorphismes  $\alpha_s$  issus de l'action de Debord Skandalis 3.2.1 sont en particuliers des morphismes de groupoïdes pour  $H = G = \mathbb{T}_H M$ .

## A.5 Système de Haar

Westman, Seda dans les années 60-70 ont investigué la notion de groupoïde localement compact, respectivement voir [230], [199], qui vient généraliser la notion de groupe localement compact.

**Définition A.5.1.** Groupoïde localement compact, [182, p 16],

Un groupoïde localement compact  $G$  est un groupoïde topologique A.5.1 dont la topologie est localement compacte Hausdorff.

**Remarque A.5.2.** La définition [165, définition 2.2.1 p31] requière des hypothèses plus faibles : notamment l'espace des unités  $G^{(0)}$  et les fibres doivent être localement Hausdorff dans la topologie relative héritées de  $G$ . Elles sont acquises, grâce au raisonnement [182, p 16], si l'on suppose bien que  $G$  est lui même localement compact Hausdorff. En effet pour cette précédente hypothèse,  $G^{(0)}$  est fermé et Hausdorff. De fait  $G^{(0)}$  est localement compact Hausdorff (dans la topologie relative de  $G$ ) et comme  $r, s$  sont continues alors les fibres  $G^x, G_x$  sont des fermés donc sont localement compactes Hausdorff (dans la topologie relative de  $G$ ).

Dans son livre [182, chapitre 2] en 1980, le français Jean Renault <sup>6</sup> s'est intéressé aux  $C^*$ -algèbres de groupoïdes comme par exemple  $C^*(G), C_r^*(G)$  où  $G$  est un groupoïde localement compact, et qui viennent généraliser ces mêmes  $C^*$ -algèbres pour des groupes localement compacts.

---

6. Avec qui j'ai eu la chance de discuter dans le tram qui nous menait à la fac de Caen pour le GDR GNC de juin 2022!

Pour cela, nous avons besoin d'une généralisation de la notion de mesure de Haar invariante à gauche (voir [82, section 2.2 p 36]) : le système de Haar lisse à gauche (resp. continu à gauche), voir [165, définition 2.3.2] (resp. [165, définition 2.2.2], [182, définition 2.2 p16], [124, p50] ). Moralement il s'agit de munir chaque fibre  $G^u$  du groupoïde d'une mesure  $\lambda^u$ .

**Définition A.5.3.** Système de Haar lisse à gauche

Soit  $G$  un groupoïde de Lie. Un système de Haar à gauche pour  $G$  consiste en une famille de mesures de Borel régulières positives  $(\lambda^u)_{u \in G^{(0)}}$  sur  $G$  de sorte que :

1. le support  $\text{supp}(\lambda^u) \subset G^u$ .
2. pour toute fonction  $f \in C_c^\infty(G)$ , l'application :

$$u \in G^{(0)} \mapsto \lambda(f)(u) := \int_{G^u} f(x) d\lambda^u(x), \quad (\text{A.5.1})$$

est lisse.

3. Pour tout  $x \in G$ , pour tout  $f \in C_c^\infty(G)$  on a la propriété d'invariance à gauche suivante :

$$\int_{G^{s(x)}} f(xy) d\lambda^{s(x)}(y) = \int_{G^{r(x)}} f(y) d\lambda^{r(x)}(y). \quad (\text{A.5.2})$$

Dans le cas d'un système de Haar à gauche continu, l'hypothèse (A.5.1) s'exprime pour des fonctions  $C_c^0(G)$ . Des exemples de systèmes de Haar sont donnés dans l'ouvrage de Renault, voir [182, exemple 2.5 p 17-18].

L'Histoire autour de la notion de système de Haar est particulièrement intéressante. Commençons par une définition :

**Définition A.5.4.** groupoïde transitif, [26], [234, section 3.2 p 6]

Un groupoïde  $G$  est dit transitif lorsque pour tout  $u, v \in G^{(0)}$  il existe  $x \in G$  de sorte que  $s(x) = u$  et  $r(x) = v$ .

En 1976, Anthony Seda a montré :

**Théorème A.5.5.** *Existence de la mesure de Haar (Seda), [199]*

*Soit  $G$  un groupoïde topologique localement compact Hausdorff transitif à base dénombrable de dont les applications source et but sont ouvertes, alors  $G$  admet un système de Haar.*

Toutefois comme le montre le théorème A.5.5, l'existence d'une mesure de Haar sur un groupoïde topologique localement compact requière des conditions particulières. C'est une raison qui pousse Paterson à ajouter l'existence d'un système de Haar à gauche dans sa [165, définition 2.2.1 p31] de groupoïde localement compact. Dans un récent article [234] de 2015, Williams écrit au sujet des groupoïdes localement compacts :

"An annoying gap in the theory is that there is no theorem guaranteeing Haar systems exist. The only significant positive existence result I am aware of is that if  $G^{(0)}$  is open in  $G$  and the range map is open (and hence the source map as well), then the family consisting of counting measures is always a Haar system. [...] It is also well known that if  $G$  is any locally compact groupoid with a Haar system, then its range and source maps must be open ( $\spadesuit$ ). [...] Thus if a locally compact groupoid has a range map which is not open, then it can't possess a Haar system."

On pourra consulter l'article [200] de Seda datant de 1986 dans lequel, au corollaire après le lemme 2, il montre l'affirmation ( $\spadesuit$ ) précédente. Enfin la [54, proposition 2.2 p 6] montre qu'il existe des groupoïdes localement compacts, même compacts, dont l'application but est ouverte mais qui n'admettent pas de système de Haar. Fort heureusement, le cadre dans lequel nous travaillons, soit celui des groupoïdes de Lie, nous assure l'existence d'un système de Haar :

**Théorème A.5.6.** [165, théorème 2.3.1 p63]

*Tout groupoïde de Lie admet un système de Haar à gauche.*

Plus précisément, [165, p 52] la preuve du précédent théorème repose sur le fait qu'on peut identifier les systèmes de Haar à gauche lisses et les sections positives lisses du fibré des 1-densités  $\Omega_r := \bigsqcup_{p \in G} |\Omega|^1(T_p G^{r(p)})$  associé à  $G$ . C'est en fait ce que nous dit le théorème 3.4.14 de la section 3.4 qui concerne les 1-densités et le lien étroit qu'elles entretiennent avec les mesures lisses.

Le système de Haar nous permet de parler du produit de convolution des fonctions continues, voir [165, équation (2.20) p38],[182, chapitre 2, section 1]. Ainsi, lorsque  $G$  est un groupoïde de Lie localement compact, le [165, théorème 2.2.1] montre que  $C_c^0(G)$  est une  $*$ -algèbre séparable pour la convolution ([165, équation (2.20) p38]) et l'involution ([165, équation (2.22) p38]).

Puisque nous mentionnons les travaux de Renault sur les  $C^*$ -algèbres de groupoïde, terminons par un joli théorème :

**Théorème A.5.7.** *Muhly-Williams (1992) [158], [165, théorème 3.1.2 p102]*

Soit  $X$  un espace localement compact Hausdorff et  $G = X \times X$  le groupoïde des paires de  $X$ . On suppose que ce groupoïde est équipé d'un système de Haar à gauche défini à partir d'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $X$ . Alors :

$$C^*(G) \cong \mathcal{K}(L^2(X, \mu)), \quad (\text{A.5.3})$$

où  $\mathcal{K}$  symbolise les opérateurs compacts sur  $L^2(X, \mu)$  et où  $C^*(G)$  est la  $C^*$ -algèbre du groupoïde  $G$ <sup>7</sup>.

## A.6 Les algèbroïdes de Lie

Jean Pradines introduit les algèbroïdes de Lie en 1967 dans son article [179], comme ceci est mentionné dans l'introduction de l'article [50] de Debord.

**Définition A.6.1.** Algèbroïde de Lie au dessus d'une variété lisse, [169, p 176].

Le triplet  $(E, \pi, M)$  est dit algèbroïde de Lie lorsque :

1. On se donne un fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow M$ .
2. On se donne également un crochet de Lie sur les sections  $\Gamma^\infty(E)$ .
3. On se donne un morphisme de fibré, appelé ancre  $\rho : E \rightarrow TM$  et qui induit - voir théorème B.0.25 - un morphisme d'algèbres de Lie, toujours noté  $\rho$ , de sorte  $\rho : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(TM)$  vérifie :

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)], \quad \forall X, Y \in \Gamma^\infty(E). \quad (\text{A.6.1})$$

4. L'application ancre souscrit également à la règle de Leibniz au sens où :

$$[X, fY] = (\rho(X)f)Y + f[X, Y], \quad \forall X, Y \in \Gamma^\infty(E), \quad \forall f \in C^\infty(M). \quad (\text{A.6.2})$$

**Remarque A.6.2.** L'équation (A.6.2) peut se comprendre comme :

$$[X, fY] = \underbrace{(\rho(X)f) Y}_{\text{Partie Leibniz}} + \underbrace{f[X, Y]}_{\text{Partie } C^\infty(M)\text{-linéaire}}. \quad (\text{A.6.3})$$

Rappelons que  $\rho(X)f : p \mapsto \rho(X)_p f$ , représente l'action du champ de vecteur  $\rho(X)$  sur une fonction lisse  $f$ , voir [137] p 85, c'est une fonction. Ainsi  $\left((\rho(X)f)Y\right)_p = (\rho(X)_p f)Y_p$ , c'est à dire on fait le produit du champ  $Y$  évalué en  $p$  par la fonction  $\rho(X)f$  évaluée en  $p$ .

**Définition A.6.3.** Morphisme d'algèbroïdes de Lie,[155, définition 3.3.1 p 100], [142, p 153]

Soit  $\pi_E : E \rightarrow M$  et  $\pi_F : F \rightarrow M$  deux algèbroïdes de Lie au dessus de la base commune  $M$ . On dit que le morphisme de fibré vectoriel lisse - voir définition B.0.18 -  $f : E \rightarrow F$  est un morphisme d'algèbroïdes de Lie lorsque  $f$  commute avec l'ancre et préserve la structure d'algèbre de Lie sur les sections respectives de  $E$  et  $F$ . Cela veut dire précisément que :

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)], \quad \forall X, Y \in \Gamma^\infty(E), \quad (\text{A.6.4})$$

$$\rho_F \circ f = \rho_E, \quad (\text{A.6.5})$$

où  $\rho_F, \rho_E$  sont les ancres respectives de  $F$  et  $E$ . Cet morphisme est dit un isomorphisme lorsque  $f$  est un isomorphisme de fibré vectoriel lisse. Il est dit un automorphisme lorsque de surcroît  $E = F$ .

7. Pour une définition, consulter [165, p 101] ou l'ouvrage original de Renault [182, définition 1.12 p 58]. Disons rapidement que  $C^*(G)$  est la complétion de l' $*$ -algèbre  $C_c^0(G)$  vis à vis d'une norme  $\| \cdot \|$  définie à partir de la théorie des représentations de  $C_c(G)$ , voir [165, théorème 3.1.1 p 98].

**Exemple 64.** Toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est une algèbroïde de Lie. Il faut prendre le fibré au dessus d'un point  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \{x_0\}$ .

**Exemple 65.** [155, p 155]

Tout fibré vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$  peut être vu comme une algèbroïde au dessus de  $M$  pour l'ancre, et le crochet de Lie sur  $\Gamma^\infty(E)$  tous deux nuls. Plus généralement, rappelons qu'un fibré (non localement trivial) lisse en algèbre de Lie est défini comme étant un fibré vectoriel lisse dans lequel<sup>8</sup> :

1. Chaque fibre de  $E$  est une algèbre de Lie ,
2. Pour tout ouvert  $U \subset M$  trivialisant auquel on associe - voir [137, exemple 5.9 p 111] - un repère local lisse de sections de  $E$ , disons  $\sigma_j : U \rightarrow E$ , on demande pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  l'existence d'une famille  $\left(x \in U \mapsto c_{ij}^k(x)\right)_{k \in \{1, \dots, n\}}$  de fonctions lisses à valeurs matricielles de sorte que :

$$[\sigma_i(x), \sigma_j(x)]_{E_x} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k(x) \sigma_k(x), \quad (\text{A.6.6})$$

où  $[\ , \ ]_{E_x}$  est le crochet sur la fibre  $E_x$  qui est une algèbre de Lie par hypothèse.

Comme la structure de crochet de Lie varie de façon lisse, la proposition A.6.4 montre que tout tel fibré peut être vu comme une algèbroïde de Lie à ancre nulle. En fait la condition (A.6.6) est équivalente à dire que la formule :

$$[\tau_1, \tau_2](x) = [\tau_1(x), \tau_2(x)]_{E_x}, \quad (\text{A.6.7})$$

définit bien<sup>9</sup> un crochet  $C^\infty(M)$ -bilinéaire :

$$[\ , \ ] : \Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E). \quad (\text{A.6.8})$$

Le fibré tangent peut être, lui, muni d'une structure d'algèbroïde moins "triviale".

**Exemple 66.** [223, exemple 4 section 2]

Le fibré tangent  $\pi : TM \rightarrow M$  est une algèbroïde de Lie au dessus de  $M$  avec pour crochet de Lie sur les sections  $\Gamma^\infty(TM)$  le crochet usuel des champs de vecteurs et pour ancre, l'application identité. On retrouve la relation bien connue, voir [137, équation (4.7) p 92] :

$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]. \quad (\text{A.6.9})$$

De sorte à rebondir sur l'exemple 65, on donne maintenant un dernier résultat autour des algèbroïdes d'ancre nulle.

**Proposition A.6.4.** Algèbroïde à ancre nulle

Soit  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow M$  une algèbroïde de Lie. Alors sont équivalentes :

1. L'ancre  $\rho$  est nulle.
2.  $\mathfrak{g}$  est un fibré muni d'une famille  $C^\infty$  de crochets de Lie  $x \mapsto [\ , \ ]_x$  sur les fibres, i.e. chaque fibre est une algèbre de Lie dont la structure de crochet varie de façon lisse.

*Démonstration.* 1. Prouvons 1)  $\Rightarrow$  2). Comme on l'a vu dans le second point du lemme B.0.24,  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})/I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Lie dont le crochet  $[\ , \ ]_x$  provient du passage au quotient par l'idéal  $I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$  du crochet de Lie sur les sections de  $\mathfrak{g}$  :

$$[\ , \ ] : \Gamma^\infty(\mathfrak{g}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{g}). \quad (\text{A.6.10})$$

De plus toujours avec ce lemme,  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})/I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}_x$  et donc chaque fibre est munie d'une structure d'algèbre de Lie dont le crochet est toujours noté  $[\ , \ ]_x$ .

8. **Attention :** Il ne s'agit pas d'un fibré lisse d'algèbres de Lie au sens usuel - c'est à dire localement trivial - comme par exemple à la [142, définition 3.3.8 p 104]. En particulier les fibres peuvent être non isomorphes en tant qu'algèbre de Lie. On peut utiliser la terminologie d'un fibré en algèbre de Lie "non localement trivial". Un exemple important dans ce manuscrit d'une telle structure est l'algèbroïde osculante qui est donc un fibré d'algèbres de Lie nilpotentes graduées non localement trivial. Ce phénomène est illustré à l'exemple 35 : au voisinage d'un point  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , selon que  $y$  est nul ou non, nous passons d'une structure commutative à une structure non commutative, qui ne peuvent donc être isomorphes en tant qu'algèbres de Lie.

9. En particulier le crochet de Lie de deux sections de  $\Gamma^\infty(E)$  est bien un élément de  $\Gamma^\infty(E)$  i.e. une section lisse.



Nous allons maintenant montrer que l'application  $x \mapsto [\cdot, \cdot]_x$  est lisse. D'une part toujours en vertu de la preuve du point 1) du lemme B.0.24 on sait que le crochet (A.6.10) est  $C^\infty(M)$ -bilinéaire, comme conséquence directe du fait que l'ancre est supposée nulle. D'autre part, avec le théorème B.0.25 3), il existe un morphisme de fibré  $f : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui induit  $[\cdot, \cdot]$  soit :

$$[\sigma_1, \sigma_2] = f \circ i(\sigma_1 \otimes \sigma_2), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(\mathfrak{g}), \quad (\text{A.6.11})$$

où  $i$  est l'application donnée dans le théorème B.0.25. Soit  $(\sigma_k)$  un repère local pour les fibres de  $\mathfrak{g}$ . Alors comme un morphisme de fibré vectoriel lisse envoie un repère local dans une combinaison linéaire lisse (pondérée par des fonctions  $C^\infty(M)$ ) de ce même repère, on peut écrire que pour tout  $(i, j)$  :

$$[\sigma_i(x), \sigma_j(x)]_x = f \circ i(\sigma_i, \sigma_j)(x) \quad (\text{A.6.12})$$

$$= f_x(\sigma_i(x) \otimes \sigma_j(x)) \quad (\text{A.6.13})$$

$$= \sum_k c_{ij}^k \sigma_k(x), \quad (\text{A.6.14})$$

où  $c_{ij}^k, k \in \{1, \dots, n\}$  est une famille d'applications lisses à valeurs matricielles lisses ( $x \in U \mapsto c_{ij}^k(x)$ ) de sorte que l'équation (A.6.6) est vraie. On en déduit alors que l'application :

$$x \in M \mapsto ([\cdot, \cdot]_x : \mathfrak{g}_x \times \mathfrak{g}_x \rightarrow \mathfrak{g}_x), \quad (\text{A.6.15})$$

est lisse.

2. Prouvons 2)  $\Rightarrow$  1). On pose l'ancre  $\rho = 0$ . Montrons qu'on peut relever les crochets des fibres au sections  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ . Pour ce faire, on pose :

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma^\infty(\mathfrak{g}) \times \Gamma^\infty(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma^\infty(\mathfrak{g}), (X, Y) \mapsto (x \mapsto [X_x, Y_x]_x). \quad (\text{A.6.16})$$

Cette application est bien définie puisqu'on a supposé que l'application (A.6.15),  $x \mapsto [\cdot, \cdot]_x$  était lisse, ce qui veut dire que  $x \mapsto [X_x, Y_x]_x \in \Gamma^\infty(\mathfrak{g})$  comme composée d'applications lisses. Comme chaque  $[\cdot, \cdot]_x$  est un crochet de Lie, alors l'identité de Jacobi sera vérifiée sur  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ . Reste alors à vérifier la compatibilité avec l'ancre. Soit  $x \in M$  et  $f \in C^\infty(M)$ , on calcule :

$$[X, fY]_x = [X_x, \underbrace{(fY)_x}_=f(x)Y_x]_x \quad (\text{A.6.17})$$

$$= f(x)[X_x, Y_x]_x \quad (\text{A.6.18})$$

$$= f[X, Y]_x. \quad (\text{A.6.19})$$

Ceci valant pour tout  $x$  alors on a bien montré  $[X, fY] = (\rho(X)f) + f[X, Y]$ . D'où  $\mathfrak{g}$  est bien une algèbroïde à ancre nulle. □

On trouvera d'autres exemples dans [169, p 177], et chez [155, p 155].

Il y a une analogie très forte entre algèbre de Lie-groupe de Lie et algèbroïde de Lie-groupeïde de Lie. Pour reprendre les mots de Cartier [169, p166] :

"La théorie est assez parallèle à celle des groupes et algèbres de Lie, mais une difficulté majeure se présente : démontrer l'analogue du troisième théorème de Lie qui construit un groupe de Lie d'algèbre de Lie donnée. L'histoire mouvementée sera détaillée plus loin ; la solution définitive est très récente et due à M. Crainic et R.L. Fernandes [45] (2003)."

Commençons par le sens "*facile*". Nous allons expliquer brièvement comment définir l'algèbroïde de Lie associée à un groupeïde de Lie  $G$ , cela ayant été constaté par Pradines en 1967-1968, [177], [178]. On s'appuie sur [169, section 4.1 p 187], [155, section 6.1 p 150], [141, section 3.5 p 119], [220, § 5.3 p 67]. Ceci est l'analogue du fait que pour tout groupe de Lie  $G$  on peut définir son algèbre de Lie. Pour ce faire, on a deux options :

1. On peut définir  $\mathfrak{g} = T_e G$ , l'espace tangent en l'élément neutre  $e$  de  $G$ .
2. On peut définir  $\mathfrak{g}$  comme l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche par translation, espace noté  $\Gamma_{inv}^\infty(TG)$ , voir [137, équation (4.8) p 93, exemple 4.19 (b)]. La précédente relation rappelant que, par définition, ces champs de vecteurs sont des sections lisses du fibré tangent  $TG$ .

La seconde option permet d'obtenir naturellement la structure d'algèbre de Lie attendue. La multiplication à gauche :

$$L_g : G \rightarrow G, h \mapsto L_g(h) = gh, \quad (\text{A.6.20})$$

dont l'application dérivée est :

$$d_h(L_g) = (L_g)_{*,h} : T_h G \rightarrow T_{gh} G, X_h \mapsto (L_g)_* X_h, \quad (\text{A.6.21})$$

permettent de définir plus précisément les champs de vecteurs invariants à gauche par translation comme :

$$\Gamma_{inv}^\infty(TG) := \{X \in \Gamma^\infty(TG) \mid \forall (g, h) \in G^2 \ (L_g)_* X_h = X_{L_g(h)}\}. \quad (\text{A.6.22})$$

Nous procédons alors dans le même esprit pour  $G$  un groupoïde de Lie. Toutefois, signalons que comme la multiplication n'est plus définie partout dans  $G$  mais seulement dans les bonnes fibres, il faut prendre quelques précautions supplémentaires. On rappelle que pour tout point  $y \in G^{(0)}$ , on note  $s^{-1}(y) = G_y$ . Pour  $h : x \rightarrow y$ , en particulier  $s(h) = x$  et  $r(h) = y$ , on considère l'application de multiplication à droite :

$$R_h : G_{r(h)} \rightarrow G_{s(h)}, g \mapsto gh, \quad (\text{A.6.23})$$

qui est bien définie entre les  $s$ -fibres car  $s(g) = y = r(h)$ . La dérivée de cette application est :

$$d_g(R_h) = (R_h)_{*,g} : T_g G_{r(h)} \rightarrow T_{gh} G_{s(h)}. \quad (\text{A.6.24})$$

On pose  $\ker(ds) = \bigsqcup_{p \in G} T_p G_{s(p)} \subset TG$ , [155, p 150], le fibré tangent aux  $s$ -fibres du groupoïde  $G$ . Dans certain ouvrages on trouve aussi la notation  $T^s G = \ker(ds)$ . On pose alors :

$$\Gamma_{inv}^{\infty,s}(TG) := \{X \in \Gamma^\infty(\ker(ds)), \forall g \in G, X_g \in T_g G_{s(g)}, \forall (g, h) \in G^{(2)} \ d_g(R_h)(X_g) = X_{R_h(g)}\}, \quad (\text{A.6.25})$$

l'ensemble des sections lisses du fibré  $\ker(ds)$  invariante à droite par translation. Constatons que l'expression  $d_g(R_h)(X_g)$  a bien un sens car  $X_g \in T_g G_{s(g)} = T_g G_{r(h)}$  et puisque  $d_g(R_h)$  - (A.6.24) - *mange* des éléments de ce précédent espace.

**Proposition A.6.5.** [155, proposition 6.1 p 150]

Soit  $G$  un groupoïde. Alors  $\Gamma_{inv}^{\infty,s}(TG)$  est sous algèbre de Lie de  $\Gamma^\infty(TG)$ .

La structure de l'algèbroïde  $A(G)$  associée à  $G$  est en partie définie comme suit, consulter [155, section 6.1, proposition 6.1 p 150],[50, section 2.2] ou encore [142, définition 3.5.8 p 123] :

1.  $A(G) := \bigsqcup_{p \in G^{(0)}} T_p G_p \subset \ker(ds) \subset TG$  est le fibré vectoriel lisse au dessus de  $G^{(0)}$ . C'est l'union des espaces tangents aux  $s$ -fibres en les point de l'ensemble des unités ou encore la restriction  $\ker(ds)|_{G^{(0)}}$ .
2. L'ancre de  $\rho : A(G) \rightarrow TG^{(0)}$  est définie comme la restriction  $dr|_{A(G)}$ .
3. La structure de crochet de Lie sur  $\Gamma^\infty(A(G))$  est donnée par [50, p 4], [53, p 6]. Détaillons la.

Soit  $Y : G^{(0)} \rightarrow A(G)$ , une section lisse de  $A(G)$ , on définit un champ vectoriel invariant à droite associé à  $Y$ , noté  $Z_Y$  par :

$$(Z_Y)_g = d_{r(g)}(R_g)(Y_{r(g)}), \quad g \in G. \quad (\text{A.6.26})$$

De fait  $Z_Y \in \Gamma_{inv}^{\infty,s}(G)$ <sup>10</sup>. Le crochet de Lie sur  $\Gamma^\infty(A(G))$  est défini comme :

$$[\ , \ ] : \Gamma^\infty(A(G)) \times \Gamma^\infty(A(G)) \rightarrow \Gamma^\infty(A(G)), (Y_1, Y_2) \mapsto [Z_{Y_1}, Z_{Y_2}]|_{G^{(0)}}, \quad (\text{A.6.27})$$

où  $[Z_{Y_1}, Z_{Y_2}]|_{G^{(0)}}$  représente la restriction à  $G^{(0)}$  du crochet de Lie usuel  $[Z_{Y_1}, Z_{Y_2}]$ , ceci étant licite par la proposition A.6.5.

---

10. Pour reprendre l'analogie avec l'association groupe de Lie  $G$  versus algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , Debord adopte le point de vue "définir l'algèbre de Lie comme l'espace tangent en l'identité  $T_e G$ , puis s'aider de la dérivée de la multiplication à gauche pour pousser en avant un élément  $X_e \in T_e G$  et en faire une section lisse du fibré tangent  $TG$ " tandis que Moerdijk et Mrcun adoptent le point de vue "définir l'algèbre de Lie comme les sections invariante par translation à gauche du fibré tangent".

Donnons quelques exemples explicites de cette construction. L'algébroïde de Lie associée au groupoïde des paires sur une variété  $M$  est le fibré tangent  $TM$ , voir [169, p 187] ou [142, p 126]. Pour une variété filtrée  $M$ , l'algébroïde de Lie associée au groupoïde osculant  $\mathcal{T}_H M$  est l'algébroïde osculante  $\mathfrak{t}_H M$  et ainsi, l'algébroïde de Lie associée au groupoïde  $H$ -tangent  $\mathbb{T}_H M$  est :

$$A(\mathbb{T}_H M) = TM \times \mathbb{R}^* \bigcup \mathfrak{t}_H M \times \{0\}. \quad (\text{A.6.28})$$

L'algébroïde de Lie associé à un groupe de Lie  $G$  vu comme groupoïde est son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Dans ce précédent exemple, l'ancre est nulle, ainsi on peut imaginer que l'intérêt de l'ancre est de *mesurer la distance* d'un groupoïde d'être un groupe. On pourra aussi consulter [53, exemple 2.5 p 6] pour d'autres exemples.

Détaillons maintenant la réciproque du précédent procédé. Il faut le préciser au lecteur, ces questions d'intégration d'algébroïde sont extrêmement complexes et ont demandé un travail très conséquent : nous effleurons simplement le sujet, par soucis culturel, historique et pour donner des pistes de réflexion. Rappelons le troisième théorème de Sophus Lie, démontré dans les années 30 par Elie Cartan [31], [32] :

**Théorème A.6.6.** *Théorème de correspondance Lie groupe et algèbre de Lie, [137, théorème 20.20]*

*Il y a une correspondance bijective entre les algèbres de Lie réelles de dimension finie et les groupes de Lie simplement connexes de sorte qu'à tout tel groupe on associe son algèbre de Lie.*

En 1968 dans [179], Jean Pradines affirme que toute algébroïde de Lie est intégrable - généralisant le troisième théorème de Lie A.6.6 aux groupoïdes - au sens où pour toute algébroïde de Lie  $\mathfrak{g}$ , il existe un groupoïde  $G$  dont l'algébroïde est  $A(G) \cong \mathfrak{g}$ , voir aussi la définition de Nistor [162]. Pourtant, deux décennies plus tard, cette assertion de Pradines a été mise à défaut : toute algébroïde de Lie n'est pas intégrable, voir [7]. D'autres contre-exemples voient alors le jour. Pour reprendre les mots de Victor Nistor dans [162] :

"Lie algebroids do not always correspond to differential groupoids, that is, they are not always integrable. Actually, for a transitive groupoid, one can define an obstruction to integrability."

Le lecteur intéressé pourra consulter :

1. L'article de 1987 de Mackenzie [141].
2. le document [71] de Crainic et Fernandes : la section 3.1 traite de l'intégrabilité des algébroïdes de Lie et l'exemple 3.1 est un exemple d'algébroïde de Lie non intégrable. Le [71, théorème 4.1 p 55] donne un critère d'intégrabilité en utilisant les groupes de monodromie.

En particulier dans l'article [224], vEY ont utilisé l'intégration des algébroïdes pour définir le groupoïde tangent généralisé d'Alain Connes  $\mathbb{T}_H M$ . Nous proposerons une approche légèrement différente, en utilisant les cartes exponentielles.

Cette question naturelle d'intégration des algébroïdes de Lie en les groupoïdes de Lie constitue un grand problème du XXième siècle. Elle s'était déjà posée dans les années 60, dans le cadre de fibré en algèbre de Lie, comme en témoignent les mots des français Douady et Lazard dans leur article [59] de 1966 :

"Nous montrons ici que la réponse à cette question - *celle de la généralisation du troisième théorème de Lie aux fibrés en groupe de Lie*<sup>11</sup> - est : oui, si l'on n'exige pas que le groupe de Lie au dessus de la base  $M$  soit séparé. On peut par contre exiger que ses fibres soient simplement connexes, et on a alors unicité de la solution à isomorphisme près."

Plus précisément Douady et Lazard ont montré en 1966 que tout fibré en algèbre de Lie (non localement trivial) - au sens de l'exemple 65 et la note de base de page - est intégrable par un fibré en groupe pouvant n'être ni localement trivial, ni Hausdorff, voir [155, p 155]. En vertu de la proposition A.6.4 à venir, cela revient à dire, comme le fait Nistor dans [162, p 848], que toute algébroïde de Lie  $E$  à ancre nulle, est intégrable par un fibre en groupe de Lie pouvant n'être ni localement trivial, ni Hausdorff.

11. Le résultat de Douady et Lazard concernent des fibrés non localement triviaux en groupe de Lie. On rappelle par souci de complétude, la définition d'un fibré localement trivial en groupe de Lie :

**Définition A.6.7.** Fibré (localement trivial) en groupe de Lie, [142, définition 1.1.19 p 11]

Un fibré en groupe de Lie de groupe structural  $G$ , est un fibré lisse  $(E, \pi, M)$  dans lequel chaque fibre  $E_x = \pi^{-1}(x)$ , et la fibre type  $G$  ont une structure de groupe de Lie. De plus il existe des trivialisations  $\{\psi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i), U_i \subset M\}$  pour lesquelles, pour chaque point  $x \in U_i$ ,  $\psi_{i,x} : G \rightarrow E_x$  est un isomorphisme de groupe de Lie.

---

Nous avons pu constater aux cours de nos lectures l'existence deux classes importantes d'algébroïdes : les algébroïdes de Lie transitives, et les algébroïdes de Lie régulières. Les premières sont celles pour lesquelles l'ancre est surjective (fibre par fibre) tandis que les secondes sont celles pour lesquelles l'ancre est une application de rang localement constant ou encore, plus précisément  $p \in M \mapsto \dim\left(\text{Im}(\rho|_{E_p})\right)$  est constante, où  $E_p$  désigne la fibre en  $p$  de l'algébroïde  $\pi : E \rightarrow M$ . Les algébroïdes de Lie transitives sont des cas particuliers d'algébroïdes de Lie régulières. On trouvera ces informations et définitions dans les ouvrages [162, p 848, p 849] [155, p 156], [142, définition 3.3.1 p 100]. Pour de telles algébroïdes, le noyau  $\ker(\rho)$  du morphisme de fibré qu'est l'ancre - voir la définition B.0.27 - est bien défini en tant que fibré vectoriel. En effet, la proposition B.0.29 permet d'affirmer que  $\ker(\rho)$  est même un sous-fibré de l'algébroïde. Nistor a montré dans [162, proposition 4 p 862] en 2000 qu'une algébroïde de Lie régulière était intégrable si le noyau de son ancre  $\ker(\rho)$  était un fibré d'algèbres de Lie semi-simples<sup>12</sup>.

Enfin, on trouvera dans l'article de Nistor de 1999 [163], une généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt dans le cadre des algébroïdes de Lie.

---

12. Voir [70, section 4.3] pour une définition d'algèbre de Lie semi-simple.



# Annexe B

## Les fibrés vectoriels lisses

Le but de cette annexe est de donner quelques références et guide pour lire plus en détail sur les fibrés vectoriels lisses. Les résultats sont, dans leur écrasante majorité, tirés des livres de Lee [137] et de Nestruev [160, chapitre 10, 11]. Le lecteur pourra consulter le [121, chapitre 12] pour connaître l'Histoire et les motivations des fibrés vectoriels.

**Définition B.0.1.** fibré vectoriel lisse [137, chapitre 5]

Soit  $E$  et  $M$  deux variétés lisses. Un fibré vectoriel lisse de taille <sup>1</sup>  $k$  est la donnée de :

1. Une application surjective lisse, dite projection,  $\pi : E \rightarrow M$ .
2.  $\forall p \in M$ , la fibre  $E_p := \pi^{-1}(p) \subset E$  est munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension  $k$ .
3.  $\forall p \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et un difféomorphisme  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  (dit trivialisatation locale de  $E$  sur  $U$ ) et vérifie :
  - (a) Notant  $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$  la projection, on a  $\pi_U \circ \Phi = \pi$ .
  - (b)  $\forall q \in U$ , l'application,  $\Phi : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$  est un isomorphisme d'espace vectoriel.

La variété  $M$  est dite base du fibré et  $E$  l'espace total du fibré. Un fibré lisse  $E$  est dit trivial lorsqu'il existe une trivialisatation globale de  $E$ , c'est à dire, s'il existe une trivialisatation  $\Phi : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ . Auquel cas,  $E$  est difféomorphe à  $M \times \mathbb{R}^k$ .

**Exemple 67.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ , le fibré tangent  $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$  est un fibré lisse vectoriel de taille  $n$ .

**Définition B.0.2.** Sections lisses globales/locales d'un fibré lisse, champ vectoriel, [137, chapitre 5 p 109]

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse.

1. Une application lisse  $\sigma : M \rightarrow E$  est une section globale de  $E$  lorsque  $\pi \circ \sigma = Id_M$ . En particulier  $\sigma(p) \in E_p$  pour tout  $p$ .
2. Soit  $U \subset M$  un ouvert, on dit que  $\sigma : U \rightarrow E$  est une section locale de  $E$  lorsque que  $\pi \circ \sigma = Id_U$ .
3. La section nulle est la section  $0_\pi : M \rightarrow E, p \mapsto 0_{E_p} \in E_p$ .
4. L'ensemble des sections globales de  $E$  est notée  $\Gamma^\infty(E)$ , mais on fera souvent la confusion  $\Gamma^\infty(E)$  pour désigner les sections locales.
5. Soit le fibré tangent  $\pi : TM \rightarrow M$ . Les sections globales de  $TM$  sont dites des champs vectoriels ou champs de vecteurs de  $M$ . Ce sont bien des applications lisses  $X : x \in M \rightarrow X_x \in T_x M$ .

**Exemple 68.** Prenons la variété  $M = \mathbb{R}^2$ . L'application :

$$X : (x_0, y_0) \in M \mapsto x_0 \partial_x|_{(x_0, y_0)} - 7 \partial_y|_{(x_0, y_0)}, \tag{B.0.1}$$

définit un champ vectoriel de  $M$ .

**Proposition B.0.3.** [137, p 110]

---

1. On dira de façon équivalente "de rang", "de taille", "de dimension".

---

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse. L'espace  $\Gamma^\infty(E)$  des sections globales est un espace vectoriel et même un  $C^\infty(M)$ -module.

**Définition B.0.4.** Repère local/global, [137, chapitre 5 p 109]

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse de dimension  $k$ . On se donne  $U$  un ouvert de  $M$ . Un repère local lisse de  $E$  au dessus de  $U$  est la donnée d'un  $k$ -uplet de sections locales lisses  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ , voir définition B.0.2, indépendantes - i.e. linéairement indépendantes en chaque point de  $U$  dans l'ev  $E_p$  - de sorte que  $\forall p \in U$  on ait  $\text{Vect}(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)) = E_p$ . Si  $U = M$  ce  $k$ -uplet est dit repère global lisse.

**Exemple 69.** Prenons la variété  $M = \mathbb{R}^2$ . Les champs vectoriels :

$$X : (x_0, y_0) \in M \mapsto \partial_x|_{(x_0, y_0)}, \quad Y : (x_0, y_0) \in M \mapsto \partial_y|_{(x_0, y_0)}, \quad (\text{B.0.2})$$

forment un repère global lisse de  $TM$ .

**Lemme B.0.5.** Caractérisation des fibrés triviaux via un repère, [137, corollaire 10.20]

Un fibré vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$  est trivial si et seulement si il existe une section globale lisse  $\sigma$  qui ne s'annule en aucun point de la base  $M$ .

**Définition B.0.6.** Variété parallélisable, [137, p 114-115]

Une variété lisse  $M$  est dite parallélisable si son fibré tangent admet un repère global lisse.

**Remarque 44.** La définition B.0.6 est équivalente à dire que  $TM$  est un fibré trivial en vertu du lemme B.0.5.

**Théorème B.0.7.** [137, proposition 5.15 p 115]

Tout groupe de Lie  $G$  est parallélisable.

**Exemple 70.** On invite le lecteur à lire la discussion orchestrée par Lee [137, p 115] et dans laquelle il donne, pour des bonnes valeurs de  $n$ , des exemples et contre-exemples via les sphères  $\mathbb{S}^n$  de variétés parallélisables (étant ou pas des groupes de Lie), non-parallélisables.

Le lemme suivant nous permet de construire une structure de fibré vectoriel lisse lorsqu'on nous donne une collection d'espaces vectoriels (les futures fibres) ayant tous la même dimension. Notons  $Gl_k(\mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles de taille  $k$ .

**Lemme B.0.8.** Lemme de construction d'un fibré vectoriel.

Soit  $M$  une variété lisse et supposons que pour tout  $p \in M$  nous soit donné un espace vectoriel  $E_p$  de dimension  $k$ . On pose  $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$  et  $\pi : E \rightarrow M, E_x \mapsto x$ . On suppose aussi qu'on a :

1. Un recouvrement par des ouverts  $\{U_\alpha\}$  de  $M$ .
2. Pour chaque  $\alpha$ , il existe une application bijective  $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$  dont la restriction à la fibre  $E_p$  est un isomorphisme de  $E_p$  vers  $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ .
3. Soit  $\alpha, \beta$  de sorte que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , il existe une application lisse  $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl_k(\mathbb{R})$  de sorte que les applications composées  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k$  soient de la forme :

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v)$$

Alors  $E$  possède une unique structure de variété le transformant en fibré vectoriel lisse de rang  $k$  au dessus de  $M$ , avec  $\pi$  pour la projection et les applications  $\Phi_\alpha$  comme trivialisations locales.

*Démonstration.* Voir [137, lemme 5.5 p 108 ] □

**Remarque B.0.9. Attention :** En lisant [137, exemple 10.18, proposition 10.19 (seconde édition)], on apprend que toute trivialisat on d'un fibr e vectoriel lisse  $E$  donne lieu à un repère local et inversement. Pour montrer qu'un espace est un fibr e  $\pi : E \rightarrow M$ , il est toutefois faux de dire qu'il suffit de préciser en tout voisinage  $U$  d'un point  $p$  quelconque de la base  $M$  une famille d'applications lisses  $\sigma_j : U \rightarrow E$  qui génère chaque fibre  $E_x$ ,  $x \in U$ . Donnons un contre exemple pour  $E = \mathbb{R}^2$ . On regarde la projection :

$$\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \tag{B.0.3}$$

sur le premier facteur. Pour  $p \neq 0$  on munit la fibre  $E_p = \pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  de la structure héritée de  $\mathbb{R}^2$ . Pour la fibre  $E_0 = \pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{R}$  on choisit la structure d'espace vectoriel suivante. Posons  $0_{E_0} = (0, 1)$  l'élément neutre dans la fibre. La loi de composition interne sur  $E_0$  est donnée par :

$$(0, a) + (0, b) = a + b - 1, \tag{B.0.4}$$

et celle de composition externe par :

$$\lambda.(0, a) = (0, 1 + \lambda(a - 1)). \tag{B.0.5}$$

On identifie  $a \in \mathbb{R}$  avec  $(0, a)$  dans  $E_0$ . On pose  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, p \mapsto (p, 2)$  une section de  $E$ . On vérifie en particulier que  $\pi \circ \sigma = id$ , et  $\sigma$  constitue bien un repère local (même global). Pourtant,  $E$  n'est pas un fibr e vectoriel lisse (même continu) car la section nulle :

$$0_\pi : \mathbb{R} \rightarrow E, p \mapsto \begin{cases} (0, p) & \text{si } p \neq 0 \\ (0, 1) & \text{si } p = 0 \end{cases} \tag{B.0.6}$$

est discontinue ce qui n'est pas possible en vertu de [137, exemple 5.1 p 110] : la section nulle de tout fibr e vectoriel lisse est lisse.

On invite le lecteur à relire nos explications sur la notion de variété plongée ("embedded submanifold" en anglais), en dessous de l'exemple 62.

**Définition B.0.10.** Sous-fibr e vectoriel lisse, [137, p 199], [185, p 23], [160, section 11.17 p 174]

Soit un fibr e vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$ . Un sous-fibr e (vectoriel lisse) de  $E$  est un sous ensemble  $D$  de  $E$  tel que :

1.  $D$  est une variété plongée de  $E$ .
2. Pour chaque  $p$  de  $M$  on impose que  $D_p := D \cap \pi^{-1}(p)$  est un sous-espace vectoriel de  $E_p := \pi^{-1}(p)$ .
3. Avec la structure d'espace vectoriel que  $D_p$  hérite de  $E_p$  et la projection  $\pi|_D$  alors  $D$  est un fibr e vectoriel lisse.

Le résultat suivant donne un critère pour caractériser les sous-fibr es à partir de sections locales lorsqu'on nous donne une collection  $\{D_p, p \in M\}$  de sous espace vectoriel des fibres d'un fibr e vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$ . Plus précisément :

**Théorème B.0.11.** Caractérisation des sous-fibr es, [137, lemme 10.32 p 265 (seconde édition)] ou [137, lemme 8.41 p 200]

Soit un fibr e vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$ . On suppose que pour tout  $p \in M$  nous soit donn e  $D_p \subset E_p$  un sous espace vectoriel de  $E_p$  de dimension  $m$ . Alors  $D = \bigsqcup_{p \in M} D_p \subset E$  est un sous-fibr e vectoriel lisse de  $E$  si et seulement si pour chaque point  $p \in M$ , on peut trouver un voisinage  $U$  de  $p$  et des sections locales  $\sigma_1, \dots, \sigma_m : U \rightarrow E$  de sorte que pour tout  $q \in U$ ,  $D_q = Vect(\sigma_1(q), \dots, \sigma_m(q))$ .

**Proposition B.0.12.** Fibr e quotient lisse, [185, p 25]

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibr e vectoriel lisse et  $D$  un sous-fibr e de  $E$ . L'ensemble  $E/D := \bigsqcup_{x \in M} E_x/D_x$  muni de la projection  $\pi : E/D \rightarrow M, \xi \in E_x/D_x \mapsto x$  peut être muni d'une structure de fibr e vectoriel lisse auquel cas  $E/D$  est dit fibr e vectoriel quotient.

*Démonstration.* Pour en déduire que  $E/D$  admet une structure de fibr e, on applique le lemme de construction des fibr es B.0.8. □

**Lemme B.0.13.** Relèvement d'une section d'un fibr e quotient



Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse et  $D$  un sous-fibré de  $E$ . Soit  $\sigma : U \rightarrow E/D, x \mapsto [\sigma(x)] \in E_x/D_x$  une section lisse locale de  $\Gamma^\infty(E/D)$ . Pour tout  $q \in U$ , il existe une section locale  $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow E$  définie sur un voisinage  $\tilde{U} \subset U$  de  $q$ , telle que pour tout  $x \in \tilde{U}$  alors  $[\tilde{\sigma}(x)]_{D_x} = \sigma(x)$ .

*Démonstration.* Posons  $\dim(D) = m$  et  $\dim(E) = n$ . Soit  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq m}$  un repère local lisse de  $D$  sur un ouvert  $V \subset U$ , qui existe par le [137, lemme 10.32 (seconde édition)]. En particulier ce sont des sections lisses de  $E$  qui génèrent chaque fibre  $D_q, q \in V$ . Soit  $q \in V$ . Avec la [137, proposition 10.15 (seconde édition)], il existe  $(\sigma_j : W \rightarrow E)_{m+1 \leq j \leq n} \in \Gamma^\infty(E)$ , où  $W$  est un voisinage de  $q$  de sorte que  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$  est un repère local de  $E$ . Soit  $x \in V \cap W$ , il existe des scalaires  $\lambda_j(x) \in \mathbb{R}$  tels que :

$$[\sigma(x)] = \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \sigma_j(x) \right]. \quad (\text{B.0.7})$$

Avec la [137, proposition 10.22 (seconde édition)], on sait que  $x \mapsto \lambda_j(x) \in C^\infty(V \cap W)$ . On en déduit que :

$$\tilde{\sigma} : V \cap W \rightarrow E, x \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \sigma_j(x), \quad (\text{B.0.8})$$

est la section lisse sur  $E$  recherchée en posant  $\tilde{U} = V \cap W$ . □

On demande au lecteur de se remémorer la proposition B.0.3. Regardons maintenant les liens algébriques entre les sections lisses d'un sous fibré  $D$  d'un fibré vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$  et les sections lisses de ce fibré  $E$ .

**Corollaire B.0.14.** *Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse et  $D$  un sous-fibré de  $E$ .*

1.  $\Gamma^\infty(D)$  est un sous- $C^\infty(M)$ -module de  $\Gamma^\infty(E)$ .
2. Les espaces vectoriels  $\Gamma^\infty(E/D)$  et  $\Gamma^\infty(E)/\Gamma^\infty(D)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* 1. Laisée au lecteur.

2. Avec les notations du lemme B.0.13 posons l'application linéaire :

$$\Lambda : \Gamma^\infty(E)/\Gamma^\infty(D) \rightarrow \Gamma^\infty(E/D), [\sigma]_{\Gamma^\infty(D)} \mapsto \left( \Lambda([\sigma]_{\Gamma^\infty(D)}) : x \mapsto [\sigma(x)]_{D_x} \right). \quad (\text{B.0.9})$$

- (a) Montrons que l'application (B.0.9) est bien définie. Si  $[\sigma]_{\Gamma^\infty(D)} = [\sigma']_{\Gamma^\infty(D)}$  alors  $\sigma - \sigma' \in \Gamma^\infty(D)$ . On en tire  $\sigma(x) - \sigma'(x) \in D_x$  pour tout  $x$ . Donc  $\Lambda([\sigma]_{\Gamma^\infty(D)}) = \Lambda([\sigma']_{\Gamma^\infty(D)})$ .
- (b) Montrons que l'application (B.0.9) est bien surjective. Supposons que  $\tau \in \Gamma^\infty(E/D)$ . D'après le lemme précédent B.0.13 pour tout  $q \in M$  il existe un voisinage  $\tilde{U}_q$  de  $q$  et une section locale lisse  $\tilde{\sigma}_q : \tilde{U}_q \rightarrow E$  telle que pour tout  $x \in \tilde{U}_q$  on ait :

$$[\tilde{\sigma}_q(x)]_{D_x} = \tau(x). \quad (\text{B.0.10})$$

On pose  $\sigma = \sum_q \chi_q \tilde{\sigma}_q \in \Gamma^\infty(E)$  où  $(\chi_q)$  est une partition de l'unité (localement finie) sous-jacente au recouvrement par les  $(\tilde{U}_q)_{q \in M}$ , voir [137, théorème 2.25 p 54]. Alors  $\Lambda([\sigma]_{\Gamma^\infty(D)}) = \tau$ .

- (c) Montrons que l'application (B.0.9) est injective. Soit  $[\sigma]_{\Gamma^\infty(D)} \in \Gamma^\infty(E)/\Gamma^\infty(D)$  telle que :

$$\Lambda([\sigma]_{\Gamma^\infty(D)}) = 0. \quad (\text{B.0.11})$$

Donc pour tout  $x, [\sigma(x)]_{D_x} = 0$ , soit  $\sigma(x) \in D_x$  soit encore  $\sigma \in \Gamma^\infty(D)$ . □

Toute section locale lisse peut être considérée comme une section globale lisse i.e. un élément de  $\Gamma^\infty(E)$ . En effet, on peut énoncer :

**Proposition B.0.15.** *Structure de  $\Gamma^\infty(E)$  et prolongement, [137, p 110], [137, lemme 5.6 p 110, "Extension Lemma for Vector Bundles" ], ou [137, lemme 10.12 p 257 (seconde édition)].*

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse.

1.  $\Gamma^\infty(E)$  est un espace vectoriel pour l'addition point par point et pour la multiplication par un scalaire. C'est aussi un  $C^\infty(M)$ -module ce qui veut dire entre autre que  $\forall f \in C^\infty(M), \forall \sigma \in \Gamma^\infty(E)$ , alors l'application  $p \rightarrow (f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p) \in \Gamma^\infty(E)$ .
2. Soit  $A$  un sous ensemble fermé de  $M$  et  $\sigma : A \rightarrow E$  une section lisse au sens où pour chaque point de  $A$ ,  $\sigma$  s'étend en une section locale lisse au voisinage de ce point. Alors pour chaque ouvert  $U \subset M$  contenant  $A$ , il existe une section globale  $\tilde{\sigma} \in \Gamma^\infty(E)$  de sorte que  $\tilde{\sigma}|_A = \sigma$  et  $\text{supp}(\tilde{\sigma}) \subset U$ .

**Proposition B.0.16.** *Topologie sur  $\Gamma^\infty(E)$*

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse de dimension  $k$ , on peut munir  $\Gamma^\infty(E)$  d'une topologie d'espace de Fréchet.

*Démonstration.* Supposons que  $E = U \times \mathbb{R}^k$  soit trivial une section est simplement une application lisse  $\sigma : p \in U \mapsto \sigma(p) \in \mathbb{R}^k$ , alors  $\Gamma^\infty(U \times \mathbb{R}^k) = C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$  qui est bien entendu munit de la topologie de Fréchet avec les semi normes sup des dérivées sur une suite exhaustive de compacts couvrant  $U$ . De façon plus général, comme  $M$  est supposée à base voisinages dénombrables, on choisit une famille  $\{U_j\}$  d'ouverts dénombrables qui recouvrent  $M$  et sur lesquels on trouve des trivialisations :

$$\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^k$$

On dit que  $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\Gamma^\infty(E)} \sigma$  si et seulement si pour tout ouvert  $U_j$  on a :  $p_2 \circ (\Phi_j \circ \sigma_n) : U_j \rightarrow \mathbb{R}^k$  converge dans le Fréchet  $C^\infty(U_j, \mathbb{R}^k)$  vers  $p_2 \circ (\Phi_j \circ \sigma)$ . □

**Remarque B.0.17.** *En particulier, pour  $E = M \times \mathbb{R}$  un fibré trivial de rang 1, alors  $\Gamma^\infty(E) = C^\infty(M)$  est un espace de Fréchet. On retrouve la remarque 3.3.6.*

**Définition B.0.18.** Morphisme de fibrés vectoriels lisses, [137, bundles maps p 115]

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M'$  deux fibrés vectoriels lisses. Un morphisme de fibrés lisses est la donnée de deux applications lisses  $F : E \rightarrow E'$  et  $f : M \rightarrow M'$  de sorte que  $\pi' \circ F = f \circ \pi$ . De plus  $\forall p \in M$  on a que  $F|_p : E_p \rightarrow E'_{f(p)}$  est linéaire. On dit que  $F$  est un isomorphisme de fibré (ou morphisme de fibré bijectif) si les restrictions de  $F$  à ces fibres sont des isomorphismes et si  $F^{-1}$  est aussi un morphisme de fibré. On dit que  $F$  est un isomorphisme de fibré lisse si  $F$  est un difféomorphisme.

**Exemple 71.** [137, exemple 5.7 p 116]

Soit  $F : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés lisses. Alors l'application dérivée  $F_* : TM \rightarrow TN$ , est un morphisme de fibrés lisses. Sa restriction en chaque fibre est donnée par :

$$F_*|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, X_p \mapsto \left( F_*|_p(X_p) : f \mapsto X_p(f \circ F) \right), p \in M, \quad (\text{B.0.12})$$

voir [137, p 66], où les espaces tangents sont interprétés comme des espaces de dérivation en un point, [137, p 65].

**Remarque B.0.19.** 1. Dans le livre [160] de Nestruev duquel nous nous sommes beaucoup inspirés, l'ensemble des morphismes de fibrés vectoriels lisses entre deux fibrés  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M'$  sont notés  $\text{Mor}(\pi, \pi')$ .

2. Dans le cas où  $M = M'$  comme cela arrivera lorsqu'on considèrera l'ancre  $\rho : E \rightarrow TM$  d'une algébroïde  $E$ , on pourra prendre  $f = \text{id}$ .

Tout morphisme de fibré bijectif (définition B.0.18) est en fait un isomorphisme de fibrés vectoriels lisses.

**Proposition B.0.20.** [160, lemme 11.30 p 181] , [137, exercice 5.9 p 122]

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M$  deux fibrés vectoriels lisses au dessus de la même base. Soit  $F : E \rightarrow E'$  un morphisme de fibrés vectoriels lisses de sorte que  $F|_z : E_z \rightarrow E'_z$  est un isomorphisme pour tout  $z \in M$ . Alors  $F$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels lisses c'est à dire  $F$  est un difféomorphisme.

**Proposition B.0.21.** *Fibré tensoriel, [185, p 22], [160, théorème 11.39 p 186]*

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M$  deux fibrés vectoriels lisses au dessus de la même base, de dimension respective  $n$  et  $m$ . On peut donner un sens au fibré  $E \otimes E' := \bigsqcup_{x \in M} E_x \otimes E'_x$  de dimension  $nm$ . De plus :

$$\Gamma^\infty(E \otimes E') \cong \Gamma^\infty(E) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma^\infty(E'). \quad (\text{B.0.13})$$

*Démonstration.* Pour en déduire que  $E \otimes E'$  admet une structure de fibré, on applique le lemme de construction des fibrés B.0.8. La preuve de (B.0.13) est donnée dans le livre [160, théorème 11.39 p 186] de Nestruev.  $\square$

Le lemme suivant fait écho au résultat de [14, l'exercice 1.3 p 33] qui est une conséquence du lemme d'Hadamard, voir [14, application 1.61 p 25]. On rappelle ce précédent résultat :

**Lemme B.0.22.** *Hadamard, [137, théorème A.58 p 587]*

Soit  $f \in C^\infty(U)$ , où  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert convexe. Soit  $a \in U$  fixé. Il existe  $g_i \in C^\infty(U)$  telles que :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n g_i(x) \pi_i(x - a), \quad (\text{B.0.14})$$

où  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est la projection sur la  $i$ -ième coordonnée.

Les idéaux  $I_x$  suivants sont des objets clés dans la suite de cet appendice.

**Lemme B.0.23.** *Idéal  $I_x$ , [160, lemme 11.8 p 166], [160, corollaire 11.9]*

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel lisse au dessus d'une variété lisse  $M$ . Soit  $x \in M$ . On pose  $I_x := \{f \in C^\infty(M), f(x) = 0\}$  et on définit le  $C^\infty(M)$ -sous-module engendré par  $I_x$  :

$$I_x \Gamma^\infty(E) := \text{Vect} \left( f_i \sigma_i, f_i \in I_x, \sigma_i \in \Gamma^\infty(E) \right). \quad (\text{B.0.15})$$

Alors :

$$I_x \Gamma^\infty(E) = \{\sigma \in \Gamma^\infty(E), \sigma(x) = 0\}. \quad (\text{B.0.16})$$

Ce dernier espace est sous-espace vectoriel de  $\Gamma^\infty(E)$  qui satisfait l'isomorphisme (en tant qu'espace vectoriel) :

$$\Gamma^\infty(E) / I_x \Gamma^\infty(E) \cong E_x. \quad (\text{B.0.17})$$

*Démonstration.* 1. (a) L'inclusion  $I_x \Gamma^\infty(E) \subset \{\sigma \in \Gamma^\infty(E), \sigma(x) = 0\}$  est claire.

- (b) Réciproquement, soit  $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$  de sorte que  $\sigma(x) = 0$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert convexe trivialisant contenant  $x$ . Alors on peut identifier  $\sigma : U \rightarrow E$  avec une fonction  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , où  $n$  est la dimension du fibré. Soit  $(e_j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , il vient qu'il existe  $\sigma_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  lisse avec  $\sigma_j(x) = 0$  telle que :

$$\sigma(y) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(y) e_j. \quad (\text{B.0.18})$$

Quitte à identifier  $U$  avec un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , éventuellement après avoir réduit  $U$ , on peut dire, avec le lemme d'Hadamard B.0.22 ci-dessus qu'il existe des fonctions lisses  $(g_{i,j} : U \rightarrow \mathbb{R})$  telles que pour tout  $y \in U$  :

$$\sigma_j(y) = \sum_{i=1}^n g_{i,j}(y) \pi_i(y - x). \quad (\text{B.0.19})$$

En particulier  $y \mapsto \pi_i(y - x)$  s'annule en  $x$ . Soit maintenant  $\phi \in C_c^\infty(M)$  de sorte que  $\phi = 1$  sur  $U$  et 0 aux infinis. On écrit pour tout  $y \in M$  :

$$\sigma(y) = \sum_{j=1}^n \phi(y) \sigma_j(y) e_j + (1 - \phi(y)) \sigma(y). \quad (\text{B.0.20})$$

Ainsi  $\sigma \in I_x \Gamma^\infty(E)$ .

2. La structure de sous-espace vectoriel de  $I_x\Gamma^\infty(E)$  est laissée au lecteur.
3. Nous allons maintenant montrer l'équation (B.0.17). Pour fixer les choses on suppose que  $E$  est un fibré de dimension  $k$ . On se donne un repère local pour la fibre  $E_x$  i.e.une famille  $(\sigma_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$  de sections lisses de  $E$  sur un voisinage  $V$  de  $x$  de sorte que pour tout  $y \in V$ , la famille  $(\sigma_i(y))_{i \in \{1, \dots, k\}}$  soit une base de  $E_y$ . Quitte à réduire le voisinage, on peut supposer que ce repère se prolonge à  $\bar{V}$ . On utilise la proposition B.0.15 qui nous permet de prolonger ces sections locales en des sections globales dont la restriction sont les premières sections. On note cette famille  $(\tilde{\sigma}_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ . On pose l'application :

$$\Omega : E_x \rightarrow \Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E), \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(x) \mapsto [\sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{\sigma}_i]. \quad (\text{B.0.21})$$

Cette application est linéaire et bien définie. En effet, supposons que  $(\bar{\sigma}_i)$  est une autre famille de sections qui prolonge  $(\sigma_i)$ . Alors on a en particulier  $\bar{\sigma}_i(x) = \sigma_i(x) = \tilde{\sigma}_i(x)$  ce qui entraîne  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{\sigma}_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{\sigma}_i$  s'annule en  $x$ . De fait  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{\sigma}_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{\sigma}_i \in I_x\Gamma^\infty(E)$  grâce au lemme B.0.23. Et donc  $[\sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{\sigma}_i] = [\sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{\sigma}_i]$ . L'application  $\Omega$  est bien définie et nous laissons la linéarité au lecteur.

Montrons maintenant que  $\Omega$  est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- (a) L'application  $\Omega$  est injective. En effet, supposons que  $\Omega(\sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(x)) = [\sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{\sigma}_i] = 0$ . Puisque les sections  $(\tilde{\sigma}_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$  prolongent les sections  $(\sigma_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ , il vient :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{\sigma}_i(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(x) \quad (\text{B.0.22})$$

$$= 0. \quad (\text{B.0.23})$$

Utilisant le fait que la famille  $(\sigma_i(x))_{i \in \{1, \dots, k\}}$  est une base de la fibre  $E_x$  on a que  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i$ . Ceci prouve l'injectivité.

- (b) L'application  $\Omega$  est surjectivité. Soit  $[\sigma] \in \Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E)$ . Comme  $(\sigma_i)$  est une base locale en  $x$  de la fibre  $E_x$  alors il existe des constantes  $\lambda_i(x)$  de sorte que  $\sigma(x) := \sum_{i=1}^k \lambda_i(x) \sigma_i(x)$ . On pose alors  $\bar{\sigma} := \sum_{i=1}^k \lambda_i(x) \tilde{\sigma}_i - \sigma$ . On constate que  $\bar{\sigma}(x) = 0$  d'où  $\bar{\sigma} \in I_x\Gamma^\infty(E)$ . Ceci prouve la surjectivité.

D'où  $\Omega$  a la propriété d'isomorphie annoncée. □

Dans le cas particulier où  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow M$  est une algébroïde de Lie on conserve les notations du lemme B.0.23 précédent et il vient :

**Lemme B.0.24.** *Algébroïde à ancre nulle et idéal  $I_x$*

Soit  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow M$  une algébroïde de Lie à ancre nulle. Alors :

1.  $I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$  est un idéal de  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ .
2.  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})/I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$  est une algèbre de Lie isomorphe à la fibre  $\mathfrak{g}_x$  en tant qu'espace vectoriel.
3. La fibre  $\mathfrak{g}_x$  hérite d'une structure d'algèbre de Lie issue de celle sur  $(\Gamma^\infty(\mathfrak{g}), [ , ])$ . De plus, la proposition A.6.4, conséquence du théorème B.0.25 ci-après, offre de plus que  $x \in M \mapsto [ , ]_x$  est une application lisse.

*Démonstration.* 1. La stabilité vectorielle est laissée au lecteur. Passons à la stabilité par le crochet de Lie sur  $(\Gamma^\infty(\mathfrak{g}), [ , ])$ . Soit  $\sigma_1 \in I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ ,  $\sigma_2 \in \Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ . Par définition de  $I_x\Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ , on peut écrire :

$$\sigma_1 = \sum_i f_i \bar{\sigma}_i, \quad f_i \in I_x. \quad (\text{B.0.24})$$

Remarquons la  $C^\infty(M)$ -bilinearité du crochet. En effet, comme l'ancre est supposée nulle, pour  $f \in C^\infty(M)$  on calcule :

$$[X, fY] = f[X, Y] + (\rho(X)f)Y = f[X, Y]. \quad (\text{B.0.25})$$

De même  $[fX, Y] = f[X, Y]$ . Cela entraîne a fortiori :

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sum_i f_i[\bar{\sigma}_i, \sigma_2]. \quad (\text{B.0.26})$$

De là, on en déduit que  $[\sigma_1, \sigma_2] \in I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{g})$ . D'où la conclusion.

2. Comme  $(\Gamma^\infty(\mathfrak{g}), [, ])$  est une algèbre de Lie alors un résultat classique d'algèbre montre que  $\Gamma^\infty(\mathfrak{g})/I_x \Gamma^\infty(\mathfrak{g})$  est bien une algèbre de Lie et le lemme B.0.23 précédent nous offre l'isomorphisme.
3. Voir la preuve de la proposition A.6.4.

□

**Remarque 45.** Bien sûr dans le cas où  $E = TM$  le fibré tangent d'une variété lisse  $M$  alors on a bel et bien les crochets de Lie pour les champs de vecteurs. Néanmoins, pour un fibré vectoriel lisse quelconque  $\pi : E \rightarrow M$ , il n'y a pas forcément de crochets de Lie sur son espace de sections lisses  $\Gamma^\infty(E)$ . Ainsi, dans le cas où ce précédent fibré est une algébroïde de Lie munie de l'ancre nulle, le sous-espace vectoriel  $I_x \Gamma^\infty(E)$  de  $\Gamma^\infty(E)$  hérite d'une structure supplémentaire : celle d'idéal de l'algèbre de Lie  $\Gamma^\infty(E)$  sur laquelle il y a maintenant, par définition, un crochet de Lie.

On demande au lecteur de se remémorer les définitions de morphisme de fibrés vectoriels B.0.18 et de produit tensoriel de fibrés vectoriels B.0.21.

**Théorème B.0.25.** Lien morphisme de fibrés/application entre sections, [137, proposition 5.16 p 116, p 262 lemme 10.29 (seconde édition)], [160, théorème 11.29 p 180]

1. Soit  $f : E \rightarrow F$  un morphisme de fibrés vectoriels lisses, alors il existe une application naturelle  $\Lambda : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F), \sigma \mapsto f \circ \sigma$ .
2. Soit  $E, F$  deux fibrés lisses au-dessus d'une même base  $M$ . Une application linéaire  $\Lambda : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$  est induite comme ci-dessus par un morphisme de fibré  $f : E \rightarrow F$  au sens où  $\Lambda(\sigma) = f \circ \sigma, \sigma \in \Gamma^\infty(E)$  si et seulement si  $\Lambda$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire au sens où :

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(E), \forall \phi \in C^\infty(M), \Lambda(\phi\sigma_1 + \sigma_2) = \phi\Lambda(\sigma_1) + \Lambda(\sigma_2). \quad (\text{B.0.27})$$

On peut résumer ce résultat en disant comme dans [160, théorème 11.29 p 180] :

$$\text{Mor}(\pi, \pi') \cong \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E')). \quad (\text{B.0.28})$$

3. Soit  $E, E', F$  trois fibrés au-dessus de la même base  $M$ . Posons l'application :

$$i : \Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E') \rightarrow \Gamma^\infty(E) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma^\infty(E') \underset{(\text{B.0.13})}{\cong} \Gamma^\infty(E \otimes E'), (\sigma, \tau) \mapsto p \mapsto \sigma(p) \otimes \tau(p). \quad (\text{B.0.29})$$

Une application  $\Lambda : \Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E') \rightarrow \Gamma^\infty(F)$  bilinéaire est induite par un morphisme de fibré  $f : E \otimes E' \rightarrow F$  au sens où  $\Lambda(\sigma_1, \sigma_2) = f \circ i(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(E)$  si et seulement si  $\Lambda$  est  $C^\infty(M)$ -bilinéaire.

*Démonstration.* 1. Il faut vérifier que  $f \circ \sigma$  est bien une section lisse de  $F$ . Par définition B.0.18, l'application  $f$  est lisse ainsi,  $p \mapsto f \circ \sigma(p)$  est bien lisse, comme compositions d'applications lisses. De plus on vérifie que cette application a valeur dans les fibres de  $F$ . Soit  $p \in M$ . Puisque  $\sigma(p) \in E_p$  et  $f$  est linéaire entre les fibres  $E_p$  et  $E_{f(p)}$  par définition B.0.18 d'un morphisme de fibré, alors on en déduit que  $f \circ \sigma(p) \in F_p$ .

2. (a) On commence par le sens direct. Supposons que l'application  $\Lambda$  soit issue d'un morphisme de fibré au sens où  $\Lambda(\sigma) = f \circ \sigma$ . Soit  $\phi \in C^\infty(M)$ . Alors :

$$\Lambda(\phi\sigma)(p) = f(\phi(p)\sigma(p)) \quad (\text{B.0.30})$$

$$= \phi(p)f(\sigma(p)) \quad (\text{B.0.31})$$

$$= \phi(p)\Lambda(\sigma)(p), \quad (\text{B.0.32})$$

l'égalité (B.0.31) étant vraie puisque  $f$  est linéaire entre  $E_p$  et  $E_{f(p)}$  par définition B.0.18 d'un morphisme de fibré.

- (b) Pour la réciproque on suppose que  $\Lambda : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire. D'après le lemme B.0.24, on sait que  $E_x \cong \Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E)$ , où  $I_x$  est défini au lemme B.0.23. Nous allons maintenant définir le morphisme de fibré  $f : E \rightarrow F$  qui induira  $\Lambda$ . Pour définir  $f$  on doit en particulier donner sa valeur  $f(\xi) \in F$  pour tout  $\xi \in E$  et ceci en précisant la valeur de l'application  $f_x$  sur chaque fibre  $E_x$ . En effet, pour  $\xi \in E$ , il existe  $x \in M$  tel que  $\xi \in E_x$  donc  $f(\xi) = f_x(\xi)$ . L'application entre les bases pour définir ce morphisme de fibrés - voir la définition B.0.18 - est l'identité.

On considère, pour tout  $x \in M$ , l'application linéaire :

$$f_x : E_x \rightarrow F_x, [\sigma] \mapsto [\Lambda(\sigma)], \quad (\text{B.0.33})$$

où les espaces  $E_x, F_x$  sont interprétés via l'isomorphisme  $\Omega$  de (B.0.21).

Montrons que l'application  $f_x$  est bien définie. Soit  $[\sigma_1] = [\sigma_2]$  alors  $\sigma_1 - \sigma_2 \in I_x\Gamma^\infty(E)$ . Par définition il existe  $g_i \in I_x$  et  $\bar{\sigma}_i \in \Gamma^\infty(E)$  de sorte que :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sum_i g_i \bar{\sigma}_i. \quad (\text{B.0.34})$$

La  $C^\infty(M)$ -linéarité de  $\Lambda$  entraîne que  $\Lambda(\sigma_1 - \sigma_2) \in I_x\Gamma^\infty(F)$  soit :

$$f_x([\sigma_1]) = f_x([\sigma_2]). \quad (\text{B.0.35})$$

On laisse le soin au lecteur de se convaincre que  $f_x$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire, cela découlant moralement du fait que  $\Lambda$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire et a fortiori  $\mathbb{C}$ -linéaire.

On montre que  $f$  induit  $\Lambda$ . Soit  $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$  et  $x \in M$ . Avec l'isomorphisme  $\Omega$ , on rappelle que  $\sigma(x) \in E_x$  est identifié à  $[\sigma]$  et que  $[\Lambda(\sigma)]$  est identifié à  $\Lambda(\sigma)(x) \in F_x$ . Ainsi :

$$f \circ \sigma(x) = f_x([\sigma]) \quad (\text{B.0.36})$$

$$\underbrace{=} [\Lambda(\sigma)] \quad (\text{B.0.37})$$

$$= \Lambda(\sigma)(x). \quad (\text{B.0.38})$$

Il resterait ensuite à vérifier que l'application  $f : E \rightarrow F$  est lisse. Nous laissons le lecteur se référer au [160, théorème 11.29 p 180].

3. On s'attèle à mimer ce qui a été fait avant.

- (a) Pour le sens direct supposons qu'il existe un morphisme de fibrés vectoriels lisses  $f : E \otimes E' \rightarrow F$  tel que  $f$  induit  $\Lambda$  soit :

$$\Lambda(\sigma_1, \sigma_2) = f \circ i(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(E). \quad (\text{B.0.39})$$

Vérifions que  $\Lambda$  est  $C^\infty(M)$ -bilinéaire. Soit  $(g, g') \in C^\infty(M)$  et on calcule pour  $p \in M$  :

$$\Lambda(g\sigma_1, g'\sigma_2)(p) = f_p(g(p)g'(p)\sigma_1(p) \otimes \sigma_2(p)) \quad (\text{B.0.40})$$

$$= g(p)g'(p)\Lambda(\sigma_1, \sigma_2)(p), \quad (\text{B.0.41})$$

car  $f_p$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire sur la fibre  $E_p \otimes E'_p$ . D'où la conclusion.

- (b) Pour la réciproque, supposons que  $\Lambda : \Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E') \rightarrow \Gamma^\infty(F)$  soit  $C^\infty(M)$ -bilinéaire. On montre que l'application suivante est bien définie en chaque  $x$  de  $M$  et bilinéaire :

$$\tilde{f}_x : \Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E')/I_x\Gamma^\infty(E') \rightarrow \Gamma^\infty(F)/I_x\Gamma^\infty(F), ([X], [Y]) \mapsto [\Lambda(X, Y)]. \quad (\text{B.0.42})$$

Soit donc  $[X] = [X']$  et  $[Y] = [Y']$  deux paires de classe d'équivalence dans les quotients respectifs  $\Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E)$  et  $\Gamma^\infty(E')/I_x\Gamma^\infty(E')$ . D'une part, les applications  $\Omega_1, \Omega_2$  suivantes, définies

comme restriction de  $\Lambda$  aux sous-espaces vectoriels  $I_x\Gamma^\infty(E)$  et  $I_x\Gamma^\infty(F)$  sur l'une ou l'autre des variables :

$$\begin{cases} \Omega_1 & : I_x\Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E') \rightarrow I_x\Gamma^\infty(F) \\ \Omega_2 & : \Gamma^\infty(E) \times I_x\Gamma^\infty(E') \rightarrow I_x\Gamma^\infty(F), \end{cases} \quad (\text{B.0.43})$$

sont bien définies et  $C^\infty(M)$ -linéaires en chacune de ses variables. En effet, pour  $\sum_i g_i \sigma_i \in I_x\Gamma^\infty(E)$ , il vient :

$$\Omega_1(\sum_i g_i \sigma_i, \tau) = \sum_i g_i \Lambda(\sigma_i, \tau) \in I_x\Gamma^\infty(F), \quad (\text{B.0.44})$$

par  $C^\infty(M)$ -bilinéarité de  $\Lambda$ . Il en est de même sur l'autre variable de  $\Omega_1$  et bien entendu, de même sur  $\Omega_2$ . D'autre part, avec ce que l'on vient de dire sur la linéarité de  $\Omega_1, \Omega_2$ , on peut calculer avec  $X - X' \in I_x\Gamma^\infty(E)$  et  $Y - Y' \in I_x\Gamma^\infty(E')$  que :

$$\Lambda(X, Y) - \Lambda(X', Y') = \Omega_1(X - X', Y) + \Omega_2(X', Y - Y'). \quad (\text{B.0.45})$$

Les applications  $\Omega_1, \Omega_2$  ayant image dans  $I_x\Gamma^\infty(F)$ , on en conclue que :

$$\Lambda(X, Y) - \Lambda(X', Y') \in I_x\Gamma^\infty(F), \quad (\text{B.0.46})$$

soit :

$$\tilde{f}_x([X], [Y]) = \tilde{f}_x([X'], [Y']). \quad (\text{B.0.47})$$

Ainsi l'application  $\tilde{f}_x$  ci-dessus est donc bien définie. Elle est bilinéaire en raison du fait que  $\Lambda$  est  $C^\infty(M)$ -bilinéaire donc a fortiori  $\mathbb{C}$ -linéaire. Ainsi, par la propriété universelle du produit tensoriel il existe une unique application  $\mathbb{C}$ -linéaire :

$$f_x : \Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E) \otimes \Gamma^\infty(E')/I_x\Gamma^\infty(E') \rightarrow \Gamma^\infty(F)/I_x\Gamma^\infty(F), \quad (\text{B.0.48})$$

qui factorise  $\tilde{f}_x$ .

Enfin, on rappelle, en vertu de l'équation (B.0.17), que l'on peut écrire les isomorphismes suivants :

$$\begin{cases} \Gamma^\infty(E)/I_x\Gamma^\infty(E) \otimes \Gamma^\infty(E')/I_x\Gamma^\infty(E) & \cong E_x \otimes E'_x \\ \Gamma^\infty(F)/I_x\Gamma^\infty(F) & \cong F_x. \end{cases} \quad (\text{B.0.49})$$

On rappelle aussi proposition B.0.21 que  $(E \otimes E')_x \cong E_x \otimes E'_x$ . On montre alors qu'on a un morphisme de fibrés vectoriels lisses  $f : E \otimes E' \rightarrow F$  dont l'action sur chaque fibre est prescrit par l'application (B.0.48) linéaire  $f_x : E_x \otimes E'_x \rightarrow F_x$ . On laisse au lecteur le soin de montrer que  $f$  est lisse et induit  $\Lambda$ . □

**Définition B.0.26.** Sommes de Whitney (somme directe externe), [137, exemple 10.7 p 254 (seconde édition)], [160, section 11.21 p 176 et proposition 11.23 p 177]

On se donne deux fibrés vectoriels lisses  $\pi_E : E \rightarrow M$  et  $\pi_F : F \rightarrow M$  au dessus d'une même variété lisse  $M$ . On peut définir la somme directe de ces fibrés, dite somme de Whitney ou somme directe externe de  $E$  et  $F$ , notée  $E \oplus F$ . L'espace total de ce fibré vectoriel est donné par :

$$E \oplus F = \{(v, w) \in E \times F, \pi_E(v) = \pi_F(w)\} \subset E \times F, \quad (\text{B.0.50})$$

et l'application de projection est :

$$\pi : E \oplus F \rightarrow M, (v, w) \mapsto \pi_E(v) = \pi_F(w). \quad (\text{B.0.51})$$

Les fibres sont données par la somme directe vectorielle de chacune des fibres soit  $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$ . Dans ce cas  $E \oplus F$  peut être muni d'une structure de fibré vectoriel lisse au dessus de  $M$ . De plus :

$$\Gamma^\infty(E \oplus F) = \Gamma^\infty(E) \oplus \Gamma^\infty(F). \quad (\text{B.0.52})$$

**Définition B.0.27.** Noyau et image d'un morphisme de fibrés vectoriels, [137, théorème 10.34 p 266 (second édition)], [160, p 175]

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M'$  deux fibrés vectoriels lisses et  $f : E \rightarrow E'$  un morphisme de ces fibrés. On pose le noyau de  $f$  comme étant :

$$\text{Ker}(f) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Ker}(f|_{E_x}) \subset E \quad (\text{B.0.53})$$

et l'image de  $f$  comme étant :

$$\text{Im}(f) = \bigsqcup_{x \in M} \text{Im}(f|_{E_x}) \subset E'. \quad (\text{B.0.54})$$

**Remarque B.0.28. *Attention* :**  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  ne sont pas toujours des sous-fibrés vectoriels lisses. On a cependant le résultat suivant :

**Proposition B.0.29.** *Condition suffisante pour que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  soient des sous-fibrés [137, théorème 10.34 p 266 (second édition)], [185, p 24], [160, proposition 11.20 p 175]*

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M'$  deux fibrés vectoriels lisses et  $f : E \rightarrow E'$  un morphisme de ces fibrés. Si de plus  $f$  a rang constant i.e.  $x \in M \rightarrow \dim(\text{Im}(f|_{E_x})) \in \mathbb{N}$  est constante, alors  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des sous-fibrés vectoriels lisses de  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\pi' : E' \rightarrow M'$  respectivement.

**Remarque 46.** On reprend les notations de la proposition B.0.29 précédente. Comme énoncé dans [185, p 25] il y a un analogue du théorème du rang pour les fibrés vectoriels. Plus précisément, dans le cas où  $\text{Ker}(f)$  est bien un sous-fibré lisse de  $\pi : E \rightarrow M$ , alors on peut considérer le fibré quotient  $E/\text{Ker}(f)$ , voir définition B.0.12. De plus la [160, proposition 11.20 p 175] affirme que  $\text{Im}(f) = \bigsqcup_{x \in M} \text{Im}(f|_{E_x}) \subset E'$  doit aussi être un sous-fibré de  $E'$ . On montre alors que les fibrés vectoriels  $E/\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont isomorphes.





## Annexe C

# Étude de deux groupoïdes tangents

### C.1 Structure du groupoïde tangent sur $M = \mathbb{R}^n$

Nous allons donner en exemple le groupoïde tangent sur  $\mathbb{R}^n$  avec sa structure algébrique et analytique. On se donne  $\bar{X} := (\partial_1, \dots, \partial_n)$  le repère global canonique de sections du fibré tangent  $T\mathbb{R}^n$ . On rappelle que comme la variété  $\mathbb{R}^n$  est a fortiori un groupe de Lie, alors elle est parallélisable ce qui correspond précisément à dire que son fibré tangent admet un repère global, voir l'appendice B ou plus directement [137, définition p 115, corollaire 5.11 p 113, proposition 5.15 p 115].

**Structure algébrique :** On redonne seulement les applications d'inverse et de composition, les autres applications étant les mêmes que celle de la définition 3.1.1.

$$(x, y, t)(y, z, t) = (x, z, t), \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad (x, v, 0)(x, v', 0) = (x, v + v', 0), \quad (\text{C.1.1})$$

$$i(x, y, t) = (x, y, t)^{-1} = (y, x, t), \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad i(x, v, 0) = (x, v, 0)^{-1} = (x, -v, 0). \quad (\text{C.1.2})$$

**Structure analytique :** On rappelle que dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , on peut calculer le flot suivant :

$$\exp(v.\bar{X}).x = x + v. \quad (\text{C.1.3})$$

On rappelle aussi que dans le cas trivialement filtré,  $\delta_t(v) = tv$ . Ainsi, les cartes exponentielles du lemme 3.1.3, sont explicitement calculables et sont données par :

$$\mathbb{E}xp^{\bar{X}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}^n, (x, v, t) \mapsto \begin{cases} \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, t) = (x, x - tv, t) & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, 0) = (x, v.\bar{X}|_x, 0) & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (\text{C.1.4})$$

$$\mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}} : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (x, v, t) \mapsto \begin{cases} \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}(x, v, t) = (x, \frac{x-v}{t}, t) & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}(x, v.\bar{X}|_x, 0) = (x, v, 0) & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (\text{C.1.5})$$

Remarquons que dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , l'application  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}$  définie à l'équation (C.1.5) correspond à l'application  $\psi$  défini à la [165, page 80] du livre de Paterson. L'auteur montre d'ailleurs :

**Proposition C.1.1.** *Groupoïde (algébrique) tangent transporté sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , [165, proposition 2.3.3 p 80]*

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On construit le groupoïde (algébrique) tangent de  $U$  en posant :

$$TU = U \times U \times \mathbb{R}^* \cup TU \times \{0\}. \quad (\text{C.1.6})$$

Alors l'ensemble  $V_U = \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}(TU)$  est muni d'une structure de groupoïde algébrique en transportant les lois du groupoïde  $TU$  via la bijection  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}$ . Ce groupoïde algébrique est l'ensemble  $\{(x, v, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}, x \in U, x - tv \in U\}$ . La multiplication et l'inverse sont données par :

$$(x, v, t)(x - tv, v', t) = (x, v + v', t) \quad (\text{C.1.7})$$

$$\tilde{i}(x, v, t) = (x, v, t)^{-1} = (x - tv, -v, t). \quad (\text{C.1.8})$$

Les applications source et but sont :

$$\tilde{r}(x, v, t) = (x, 0, t) \quad (\text{C.1.9})$$

$$\tilde{s}(x, v, t) = (x - tv, 0, t). \quad (\text{C.1.10})$$

L'espace des unités est  $V_U^{(0)} = \{(x, 0, t), x \in U, t \in \mathbb{R}\}$ .

*Démonstration.* Par exemple, pour la loi  $\tilde{r} = r \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}} : V_U \rightarrow V_U^{(0)}$  on calcule :

$$\tilde{r}(x, v, t) = r(x, x - tv, t) = (x, t) \hookrightarrow (x, 0, t). \quad (\text{C.1.11})$$

Pour la loi  $\tilde{s} = s \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}} : V_U \rightarrow V_U^{(0)}$  on calcule :

$$\tilde{s}(x, v, t) = s(x, x - tv, t) = (x - tv, t) \hookrightarrow (x - tv, 0, t), \quad (\text{C.1.12})$$

et on remarque que par définition que si  $(x, v, t) \in V_U$ ,  $x - tv \in U$ .

Pour la loi  $\tilde{i} = \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}} \circ i \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}} : V_U \rightarrow V_U$  on calcule :

$$\tilde{i}(x, v, t) = \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}} \circ i(x, x - tv, t) \quad (\text{C.1.13})$$

$$= \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}(x - tv, x, t) \quad (\text{C.1.14})$$

$$= (x - tv, \frac{x - tv - x}{t}, t) \quad (\text{C.1.15})$$

$$= (x - tv, -v, t). \quad (\text{C.1.16})$$

□

On obtient ainsi la structure de groupoïde de Lie :

**Proposition C.1.2.** *Groupoïde tangent transporté sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , [165, proposition 2.3.4 p 81]*

*Avec les notations de la proposition C.1.1, il vient que  $V_U = \mathbb{E}xp^{\bar{X}^{-1}}(\mathbb{T}U)$  est un groupoïde de Lie.*

Grâce à ce groupoïde  $\mathbb{T}U$ , on peut construire une structure lisse de groupoïde sur  $\mathbb{T}M$ , voir [165, p 82, théorème 2.3.4 p 83]. Enfin, à la [165, proposition 2.3.6] propose de calculer un système de Haar à gauche lisse sur  $\mathbb{T}U$ .

Dans l'exemple 15, on avait affirmé certaines propriétés de la distribution  $r$ -fibrée prolongeant l'opérateur  $P = \partial_x^2 + x\partial_x$  sans démonstration. Avec les outils explicites de cette section en main, voici donc les arguments.

**Exemple 72.** 1. *Soit  $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , il vient pour  $t \neq 0$  :*

$$\langle (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})_*^{-1}\mathbb{P}, f \rangle(x, t) = \langle \mathbb{P}, f \circ (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})^{-1} \rangle(x, t) \quad (\text{C.1.17})$$

$$= \langle t^2(\delta_x''(v) + x\delta_x'(v)), f(x, \frac{x-v}{t}, t) \rangle \quad (\text{C.1.18})$$

$$= t^2 \left( \frac{1}{t^2} \partial_2 f(x, 0, t) + \frac{x}{t} \partial_2 f(x, 0, t) \right) \quad (\text{C.1.19})$$

$$= \partial_2 f(x, 0, t) + tx \partial_2 f(x, 0, t). \quad (\text{C.1.20})$$

*Le lecteur pourra alors montrer que :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})_*^{-1}\mathbb{P}, f \rangle(x, t) = \langle \delta_0''(v), f \rangle(x, 0) \quad (\text{C.1.21})$$

$$= \langle (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})_*^{-1}\mathbb{P}, f \rangle(x, 0). \quad (\text{C.1.22})$$

*Ainsi on vient de vérifier que l'application  $\tilde{\mathbb{P}} := (\mathbb{E}xp^{\bar{X}})_*^{-1}\mathbb{P}$  était bien continue en  $t = 0$  et donc  $\mathbb{P}$  aussi. Comme nous sommes dans le cas de  $\mathbb{R}$  avec les  $r$ -fibres du groupoïde tangent toutes identifiées à  $\mathbb{R}$ , montrer le caractère lisse de l'application :*

$$\mathbb{P} : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{E}'(\mathbb{R}), \quad (\text{C.1.23})$$

*revient à utiliser la caractérisation du lemme 3.3.5 puisque  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  est le dual de l'espace de Fréchet  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Nous laissons cela au lecteur.*

2. Soit  $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , il vient pour  $t \neq 0$  :

$$\langle \alpha_{s^*} \mathbb{P}, f \rangle(x, t) \stackrel{\text{équation (3.3.98)}}{=} \langle \mathbb{P}, \alpha_s^* f \rangle(x, st) \quad (\text{C.1.24})$$

$$= \langle (st)^2 k(x, v), f(x, v, t) \rangle \quad (\text{C.1.25})$$

$$= \langle s^2 \mathbb{P}, f \rangle(x, t). \quad (\text{C.1.26})$$

Par la continuité précédemment évoquée, le résultat est vrai aussi pour  $t = 0$ . Ainsi  $\mathbb{P}$  est une distribution  $r$ -fibrée homogène d'ordre 2.

## C.2 Structure du groupoïde tangent sur $G$ un groupe de Lie gradué

Dans cette section on propose d'étudier le groupoïde tangent filtré  $\mathbb{T}_H G$  d'un groupe de Lie gradué  $G$ , voir la définition A.1.8. Dans son ouvrage [222, § 3.2 p 1663] van Erp étudie le groupoïde  $H$ -tangent ("parabolique", dans sa terminologie) du groupe d'Heisenberg. On rappelle aussi, voir exemple 20, que tout groupe de Lie gradué peut être vu comme une variété filtrée. On montre à la proposition C.2.2 que  $\mathbb{T}_H G$  est isomorphe en tant que groupoïde de Lie, au groupoïde de Lie semi-direct défini par l'action à droite de  $G$  par les dilatations à poids entiers issus de la graduation sur l'ensemble  $G \times \mathbb{R}$ .

**Définition C.2.1.** Groupoïde semi-direct  $(G \times \mathbb{R}) \curvearrowright G$  via l'action à droite d'un groupe de Lie gradué

Soit  $G$  un groupe de Lie gradué. On peut munir  $(G \times \mathbb{R}) \rtimes G = (G \times \mathbb{R}) \times G$  de la structure algébrique de groupoïde produit semi-direct vue à l'exemple 58 où l'action à droite est donnée par :

$$G \times \mathbb{R} \times G \rightarrow G \times \mathbb{R}, ((x, t), v) \mapsto (x, t).v = (\delta_t(v^{-1}).x, t), \quad (\text{C.2.1})$$

où les dilatations  $\delta_t$  sont celles données sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  par le lemme A.1.5 et qu'on a transporté sur  $G$  par l'application exponentielle.

La structure algébrique sur  $(G \times \mathbb{R}) \rtimes G$  peut être complétée par une structure analytique qui provient de celles déjà présentes sur  $G$  et  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $(G \times \mathbb{R}) \rtimes G$  est un groupoïde de Lie.

Constatons que pour  $G = (\mathbb{R}^n, +)$  muni des dilatations triviales et l'action (C.2.1) alors l'application  $\mathbb{Exp}^{\bar{X}}$  - voir (C.1.4) - se réécrit :

$$\mathbb{Exp}^{\bar{X}}(x, v, t) = (x, \delta_t(-v).x, t), \quad t \neq 0. \quad (\text{C.2.2})$$

Cela nous laisse suggérer un lien entre le groupoïde semi-direct et le groupoïde tangent d'un groupe de Lie gradué. L'application  $F$  de l'équation (C.2.4) qu'on va définir ci-dessous correspond précisément à l'application  $(\mathbb{Exp}^{\bar{X}})^{-1}$  de l'équation (C.1.5). Plus précisément on réécrit :

$$(\mathbb{Exp}^{\bar{X}})^{-1}(x, y, t) = (x, \frac{x-y}{t}, t) = (x, \delta_{t^{-1}}(y^{-1}x), t) = F(x, y, t), \quad t \neq 0. \quad (\text{C.2.3})$$

**Proposition C.2.2.** [68, exemple 5.4 p 36] Groupoïde tangent filtré d'un groupe de Lie gradué

Soit  $G$  un groupe de Lie gradué alors  $\mathbb{T}_H G \cong (G \times \mathbb{R}) \rtimes G$  en tant que groupoïde de Lie.

*Démonstration.* Nous allons définir un isomorphisme de groupoïde de Lie. On rappelle que cela correspond à se donner un couple  $(F, f)$  de difféomorphismes  $F : \mathbb{T}_H G \rightarrow (G \times \mathbb{R}) \rtimes G$  et  $f : \mathbb{T}_H G^{(0)} \rightarrow G \times \mathbb{R}$ . Pour rester le plus cohérent possible avec les notations de la section précédente (carte  $\mathbb{Exp}^{\bar{X}}$  sur  $\mathbb{T}\mathbb{R}^n$ ), on va écrire les coordonnées de  $(G \times \mathbb{R}) \rtimes G$  dans l'ordre  $(x, y, t) \in G \times G \times \mathbb{R}$  au lieu de  $((x, t); y)$ , avec  $(x, t) \in G \times \mathbb{R}, y \in G$ . On pose :

$$F : \mathbb{T}_H G \rightarrow (G \times \mathbb{R}) \rtimes G, \quad (\text{C.2.4})$$

où :

$$\begin{cases} F(x, y, t) = (x, \delta_{t^{-1}}(y^{-1}x), t), & \text{si } t \neq 0 \\ F(x, v, 0) = (x, v, 0), & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (\text{C.2.5})$$

où on identifie le groupe osculant en  $x$  avec  $G$  via l'application exponentielle sur le groupe, voir l'exemple 22. En effet, comme  $G$  est nilpotent connexe, simplement connexe par définition alors l'exponentielle est un difféomorphisme qui permet d'identifier  $\mathfrak{g}$  et  $G$  muni de la loi de BCH, voir [41, théorème 1.2.1]. Puis on pose :

$$f : \mathbb{T}G^{(0)} \rightarrow \left( (G \times \mathbb{R}) \rtimes G \right)^{(0)}, \quad (\text{C.2.6})$$

l'application l'identité. En effet, on rappelle que les bases des deux groupoïdes mis en jeu sont :

$$\begin{cases} \mathbb{T}G^{(0)} & = G \times \mathbb{R} \\ \left( (G \times \mathbb{R}) \rtimes G \right)^{(0)} & = G \times \mathbb{R} \times \{e\} \cong G \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{C.2.7})$$

Montrons maintenant que l'application  $F$  est lisse. Pour cela, il faut calculer la composée de l'application  $F$  avec la carte  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}}$ . Avant de mener ce calcul, on observe que pour  $Y = \delta_t(-v).\bar{X}$  l'égalité suivante est vraie :

$$\exp(Y).x = xe^Y, \quad (\text{C.2.8})$$

où  $e^Y$  représente l'application exponentielle sur le groupe  $G$  et où nous faisons l'identification usuelle entre un élément de l'algèbre de Lie  $Y \in \mathfrak{g}$  et son champ de vecteur associé  $\tilde{Y} : x \mapsto L_{x*}Y$ , où  $L_x$  est la multiplication à gauche par  $x$  sur  $G$ . Pour obtenir (C.2.8), il s'agit de montrer que le flot  $\gamma(s)$  d'un champ de vecteur  $\tilde{Y}$  passant en  $s = 0$  en  $x$  coïncide en  $s = 1$  avec la multiplication à gauche par  $x$  de l'exponentielle de l'élément  $Y \in \mathfrak{g}$ . Posons :

$$\gamma(s) = xe^{sY}. \quad (\text{C.2.9})$$

Il est clair que  $\gamma(0) = x$ . Reste à voir que pour tout  $s \in \mathbb{R}$  :

$$\gamma'(s) = L_{\gamma(s)*}Y = \tilde{Y}_{\gamma(s)}. \quad (\text{C.2.10})$$

Appliquant premièrement le [137, point (c) de la proposition 20.8 p 523] puis deuxièmement la [137, proposition 3.24 p 70 (seconde édition)] il vient en effet pour tout  $s \in \mathbb{R}$  :

$$\gamma'(s) = \partial_t|_{t=0} \left( L_x \circ \underbrace{e^{(s+t)Y}}_{=L_{e^{sY}}(e^tY)} \right) \quad (\text{C.2.11})$$

$$= (d_{e^{sY}}L_x) \circ d_e L_{e^{sY}}(Y) \quad (\text{C.2.12})$$

$$= (L_{xe^{sY}})_*(Y) \quad (\text{C.2.13})$$

$$= L_{\gamma(s)*}(Y). \quad (\text{C.2.14})$$

D'où la propriété (C.2.8) comme annoncée. Retournons maintenant au cœur de la preuve.

Comme  $G$  est un groupe de Lie, il est parallélisable donc on peut se donner un repère global  $\bar{X}$  du fibré tangent (adapté à la graduation de  $\mathfrak{g}$ ). Pour  $t \neq 0$ , il vient :

$$F \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, t) = F(x, \exp(\delta_t(-v).\bar{X}).x, t) \quad (\text{C.2.15})$$

$$= (x, \delta_{t-1}([\exp(\delta_t(-v).\bar{X}).x]^{-1}x), t) \quad (\text{C.2.16})$$

$$= (x, \delta_{t-1}([xe^{\delta_t(-v).\bar{X}}]^{-1}x), t) \quad (\text{C.2.17})$$

$$= (x, \delta_{t-1}(e^{\delta_t(v).\bar{X}}), t) \quad (\text{C.2.18})$$

$$= (x, e^{v.\bar{X}}, t), \quad (\text{C.2.19})$$

où dans l'équation (C.2.17) nous avons utilisé la précédente discussion. Puisque le groupe  $G$  s'identifie avec  $\mathfrak{g}$  via la loi de BCH, on obtient :

$$F \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, t) = (x, v.\bar{X}, t). \quad (\text{C.2.20})$$

En  $t = 0$  on a :

$$F \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, 0) = F(x, [v.\bar{X}]|_x, 0) \quad (\text{C.2.21})$$

$$= (x, [v.\bar{X}]|_x, 0), \quad (\text{C.2.22})$$

qui s'identifie de la même manière qu'auparavant selon :

$$F \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}}(x, v, 0) = (x, v.\bar{X}, 0). \quad (\text{C.2.23})$$

On voit avec (C.2.20) et (C.2.23) que l'application :

$$F \circ \mathbb{E}xp^{\bar{X}} : G \times G \times \mathbb{R} \mapsto (G \times \mathbb{R}) \rtimes G, \quad (\text{C.2.24})$$

est un difféomorphisme.

Reste à voir que les trois conditions de la définition A.4.6 sont satisfaites, c'est à dire que les applications  $(F, f)$  commutent aux applications source et but. Montrons par exemple la première, soit  $r_{(G \times \mathbb{R}) \rtimes G} \circ F = f \circ r_{\mathbb{T}G}$ . En effet :

$$r_{(G \times \mathbb{R}) \rtimes G} \circ F(x, y, t) = r_{(G \times \mathbb{R}) \rtimes G}(x, \delta_{t^{-1}}(y^{-1}x), t) = (x, t), \quad (\text{C.2.25})$$

et

$$f \circ r_{\mathbb{T}G}(x, y, t) = (x, t). \quad (\text{C.2.26})$$

Ainsi :

$$r_{(G \times \mathbb{R}) \rtimes G} \circ F(x, y, t) = f \circ r_{\mathbb{T}G}(x, y, t). \quad (\text{C.2.27})$$

De même avec les deux autres. De fait la paire  $(F, f)$  est un isomorphisme de groupoïdes de Lie.  $\square$

**Remarque C.2.3.** *Ce résultat peut s'appliquer pour trouver la  $C^*$ -algèbre du groupoïde  $\mathbb{T}_H G$ , pour  $G$  un groupe de Lie gradué (nilpotent donc moyennable). Rappelons que le produit croisé est formé à partir d'une action de groupe sur une  $C^*$ -algèbre, voir [233, lemme 2.27 p 52 (version préliminaire 31 janvier 2006)], et que les  $C^*$  algèbres de groupoïdes sont abordées dans les livres [182] de Renault et [165] Paterson. Avec ces notions en main, on montre que la  $C^*$ -algèbre d'un groupoïde produit semi-direct  $X \rtimes G$ , voir exemple 58, est isomorphe au produit croisé  $C^0(X) \rtimes G$ . Ainsi :*

$$C^*(\mathbb{T}_H G) \cong C^0(G \times \mathbb{R}) \rtimes G. \quad (\text{C.2.28})$$



# Annexe D

## Les distributions homogènes

Pour différentes raisons, le travail que nous avons mené a de temps à autre conduit à des questionnements sur les distributions homogènes, leurs transformées de Fourier, les notions de valeur principale et de partie finie. Nous en proposons ici un bref aperçu. On pourra consulter le livre de Donoghue [58, chapitre II section 23 et 32], l'article [44] de Courrège et la section 2.4.3 du livre [95] de Grafakos. La raison importante pour laquelle on étudie ces distributions est qu'elles arrivent naturellement en EDP. En effet, les solutions fondamentales du laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  sont des fonctions localement intégrables sur  $\mathbb{R}^n$  homogènes de degré  $2 - n$  pour  $n \geq 3$ . Une autre raison réside dans le passage entre le développement asymptotique du symbole d'un opérateur pseudo-différentiel à celui de son noyau : on est conduit à étudier les fonctions, noyaux pseudo-homogènes, voir la section 1.3.4. Pendant que nous sommes à parler de distributions, profitons en pour conseiller aussi au lecteur le livre [140] de Lutzen qui revient sur l'Histoire de la théorie des distributions.

Commençons par faire quelques rappels autour de la distribution valeur principale  $vp(\frac{1}{x})$  dont on se servira comme exemple à de nombreuses reprises pour appréhender les résultats présentés. La plupart de ces rappels se trouvent dans le livre [227] de Vladimirov. C'est la distribution donnée par :

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (D.0.1)$$

Cette définition est d'ailleurs similaire à ce que l'on fait pour définir les opérateurs de Calderon-Zygmund et les intégrales à noyaux singuliers<sup>1</sup> : On définit un opérateur comme une limite d'intégrale qui contourne la singularité. L'idée fondamentale pour montrer que l'intégrale (D.0.1) est bien définie est de faire un développement limité de  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  en 0 de la forme :

$$\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x), \quad (D.0.2)$$

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ . C'est une astuce de calcul qu'on retrouve énormément en théorie des distributions. On peut maintenant énoncer :

**Proposition D.0.1.** *La distribution valeur principale  $vp(\frac{1}{x})$  est d'ordre 1 exactement et est une distribution tempérée.*

*Démonstration.* Pour ce qui concerne l'ordre on pourra consulter la section 4.2.6 p 33 du document <https://www.math.univ-paris13.fr/~boumaza/cours/2015-2016-MACS2-Distributions.pdf> de Boumaza. Pour montrer que la distribution est tempérée on pourra utiliser le [44, théorème 2] de l'article de Courrège de 1967. En effet il est clair que la condition (2.6) :

$$\int_{\mathbb{S}^0} \frac{1}{\theta} d\sigma(\theta) = 0, \quad (D.0.3)$$

où  $\mathbb{S}^0$  représente la sphère de  $\mathbb{R}$ , est vérifiée puisque cette dernière se constitue du couple de points  $\{\pm 1\}$ . Bien sûr il est tout à fait possible de faire une preuve "à la main", sans utiliser le théorème sus-mentionné.  $\square$

1. A ce sujet on pourra consulter : le livre [27, section 1.4 p 11, p 15] en l'honneur de Calderon, les notes du séminaire d'Orsay de 64-65 par Zygmund [242], l'article original de Calderon-Zygmund [28] de 1952, le livre [95, chapitre 5 et notes historiques p 416-417] de Grafakos, l'article [243] de Zygmund de 1971 et son livre [244].



De façon plus générale on peut définir la distribution :

$$\langle vp\left(\frac{1}{x-a}\right), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-a| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x-a} dx, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{D.0.4})$$

On peut généraliser cela à  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ . En effet, on définit la distribution dite "partie finie" de  $\frac{1}{x^2}$  :

$$\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} dx \quad (\text{D.0.5})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi(0)}{\epsilon} \right). \quad (\text{D.0.6})$$

De même on pourrait définir la "partie finie" de  $\frac{1}{x^3}$  :

$$\langle Pf\left(\frac{1}{x^3}\right), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^3} dx - \frac{2\phi'(0)}{\epsilon} \right). \quad (\text{D.0.7})$$

De fait la valeur principale de  $\frac{1}{x}$ ,  $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ , est en fait la partie finie de  $\frac{1}{x}$  par définition, voir [227, p75]. On rappelle qu'on définit la distribution signe comme étant la distribution donnée par la fonction :

$$\begin{cases} \text{sign}(x) &= 1 \text{ si } x > 0 \\ \text{sign}(0) &= 0 \\ \text{sign}(x) &= -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{D.0.8})$$

Alors on a :

**Théorème D.0.2.** [85, équation (8.3.19)], [115, équation (3.2.13)], [227, exemples (a) p 78, exercices 4 p 86]

1.  $\mathcal{F}(vp\left(\frac{1}{x}\right)) = -i\pi \text{sign}$ .
2.  $\partial_x \ln(|x|) = vp\left(\frac{1}{x}\right)$ .
3.  $xvp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ .
4.  $\partial_x vp\left(\frac{1}{x}\right) = -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .
5.  $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a} \left( vp\left(\frac{1}{x-a}\right) - vp\left(\frac{1}{x+a}\right) \right)$ , où la précédente limite est au sens des distributions.

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  à partir de laquelle on définit, voir équation (4.2.10) [85], la famille de distributions  $t > 0$ -paramétrée :

$$\langle u_t, \phi \rangle = t^{-n} \langle u(x), \phi\left(\frac{x}{t}\right) \rangle. \quad (\text{D.0.9})$$

**Remarque 47.** L'équation (D.0.9) qui apparaît dans de nombreux ouvrages n'est autre que l'application du [85, théorème 7.1.1 p 80] aux difféomorphismes  $\delta_t$ . En fait  $u_t$  représente le tiré en arrière de  $u$  par  $\delta_t$  soit  $u_t = \delta_t^* u$ . En effet avec le théorème sus-mentionné on aurait :

$$\langle \delta_t^* u, \phi \rangle = \langle u, \left(\delta_t^{-1}\right)^* \phi |\det(\delta_t^{-1})| \rangle. \quad (\text{D.0.10})$$

On rappelle, [85, proposition 11.3.3 p 156] que Friedlander définit le poussé en avant d'une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  par une application  $\alpha$  lisse comme étant donnée par :

$$\langle \alpha_* u, \phi \rangle = \langle u, \alpha^* \phi \rangle. \quad (\text{D.0.11})$$

Toutefois il faut garder en tête que les distributions se tirent mal en arrière, mais elles se poussent bien en avant. Les fonctions vérifient l'assertion renversée : elles se tirent bien en arrière mais se poussent mal en avant. Dans des ouvrages traitant des distributions on identifie une fonction lisse avec une distribution. Mais dans ce manuscrit il faut en fait utiliser l'application suivante :

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \mapsto u d\lambda, \quad (\text{D.0.12})$$

où  $d\lambda$  représente la mesure de Lebesgue. Grâce à cette identification comparons, pour  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  :

$$(\delta_t^* u) dx, \tag{D.0.13}$$

le tiré en arrière de la fonction  $u$  identifié à une distribution via (D.0.12) et :

$$\delta_{t*}(u dx), \tag{D.0.14}$$

le poussé en avant de la distribution  $u dx$  via l'identification (D.0.12). Un calcul montre en effet que pour tout  $t > 0$  :

$$\left(\delta_{t^{-1}}\right)_*(u dx) = t^n (\delta_t^* u) dx. \tag{D.0.15}$$

Cette formule (D.0.15) est un point de détail important qui apparaît massivement dans les calculs menés sur le résidu de Wodzicki, voir 7, où nous travaillons sur des groupes nilpotents gradués (les groupes osculants) issus d'une variété filtrée  $M$  et dont la structure varie de façon lisse sur  $M$ . Ces groupes sont munis d'une famille lisse de mesures de Haar à gauche et en deux points distincts on peut trouver deux mesures différentes.

**Définition D.0.3.** [85, équation (4.2.11)]

Une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est dite (positivement) homogène d'ordre  $\lambda \in \mathbb{C}$  lorsque pour tout  $t > 0$  :

$$u_t = t^\lambda u, \tag{D.0.16}$$

où  $u_t$  est définie à l'équation (D.0.9).

**Exemple 73.** [58, p 109]

1. La distribution de Dirac  $\delta_0$  sur  $\mathbb{R}^n$  est homogène de degré  $-n$ .
2. La distribution tempérée  $vp(\frac{1}{x})$  est homogène d'ordre  $-1$ . En effet pour tout  $s > 0$  et tout  $\phi \in S(\mathbb{R})$  :

$$\langle vp(\frac{1}{x})_s, \phi \rangle = s^{-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x} \phi(\frac{x}{s}) dx \tag{D.0.17}$$

$$\underbrace{=}_{w=\frac{x}{s}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|ws| \geq \epsilon} \frac{1}{ws} \phi(w) dw \tag{D.0.18}$$

$$= \langle s^{-1} vp(\frac{1}{w}), \phi \rangle. \tag{D.0.19}$$

Le lecteur pourra se souvenir la définition d'une distribution invariante par le groupe orthogonal  $O(n)$  en consultant la définition E.2.1.

**Théorème D.0.4.** [58, théorème p 113]

Une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ , invariante par transformation matricielle du groupe orthogonal  $O(n)$  et homogène de degré  $\lambda$  est, en dehors de l'origine, de la forme  $c|x|^\lambda$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 48.** Le qualificatif "en dehors de l'origine" a son importance. En effet,  $\delta_0$  est homogène d'ordre  $-n$ , invariante par  $O(n)$  et n'est bien sûr pas de la forme  $c|x|^{-n}$  sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Mais en dehors de 0 elle est de la forme  $c|x|^{-n}$  pour  $c = 0$ .

**Théorème D.0.5.** [58, théorème p 111]

Une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est homogène de degré  $\lambda$  si et seulement si  $u$  satisfait l'identité d'Euler à savoir :

$$\lambda u = \sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j} u. \tag{D.0.20}$$

Reprenons les précédents exemples et appliquons le précédent théorème.

**Exemple 74.** 1. Montrons que le Dirac satisfait l'équation d'Euler. Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  il vient :

$$\left\langle \sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j} \delta_0, \phi \right\rangle = \sum_{j=1}^n -\langle \delta_0, \partial_{x_j} (x_j \phi) \rangle \quad (\text{D.0.21})$$

$$= -\sum_{j=1}^n \langle \delta_0, \phi \rangle - \sum_{j=1}^n \langle \delta_0, x_j \partial_{x_j} \phi \rangle \quad (\text{D.0.22})$$

$$= \langle -n\delta_0, \phi \rangle. \quad (\text{D.0.23})$$

Avec le théorème D.0.5, on conclut que le Dirac est homogène d'ordre  $-n$ .

2. Montrons que la distribution valeur principale satisfait l'équation d'Euler. On rappelle que l'on a défini la distribution  $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$  à l'équation (D.0.5). Soit  $\phi \in S(\mathbb{R})$  il vient :

$$\left\langle x \partial_x \left( vp\left(\frac{1}{x}\right) \right), \phi \right\rangle \stackrel{\text{théorème D.0.2}}{=} \left\langle -x Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \phi \right\rangle \quad (\text{D.0.24})$$

$$= -\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), x\phi \right\rangle \quad (\text{D.0.25})$$

$$= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \quad (\text{D.0.26})$$

$$= \left\langle -vp\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle. \quad (\text{D.0.27})$$

Avec le théorème D.0.5, on conclut que la distribution valeur principale est homogène d'ordre  $-1$ .

Nous allons énoncer ensuite que toute distribution homogène est tempérée.

**Théorème D.0.6.** [168, théorème 10.7 p 121], [58, p 154]

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  (positivement) homogène d'ordre  $\lambda \in \mathbb{C}$  alors  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme D.0.7.** [58, p 154]

Soit  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  positivement homogène d'ordre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $\mathcal{F}(u)$  est positivement homogène d'ordre  $-n - \lambda$ .

*Démonstration.* Avec [85, équation (8.3.13)] on sait que pour tout  $s > 0$  :

$$s^n \mathcal{F}(u_s) = \mathcal{F}(u)_{\frac{1}{s}}. \quad (\text{D.0.28})$$

Remplaçant alors  $s$  par  $\frac{1}{t}$  il vient :

$$\mathcal{F}(u)_t \stackrel{\text{(D.0.28)}}{=} \frac{1}{t^n} \mathcal{F}(u_{\frac{1}{t}}) \quad (\text{D.0.29})$$

$$\stackrel{\text{(D.0.16)}}{=} \frac{1}{t^n} \mathcal{F}\left(\frac{1}{t^\lambda} u\right) \quad (\text{D.0.30})$$

$$= \frac{1}{t^{n+\lambda}} \mathcal{F}(u). \quad (\text{D.0.31})$$

D'où la conclusion. □

Enfin, concernant les fonctions homogènes on peut également jouir des deux résultats suivants :

**Proposition D.0.8.** [95, proposition 2.4.8]

Soit  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  homogène de degré  $m \in \mathbb{R}$ . Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  une fonction cut-off nulle dans un voisinage de 0 et 1 aux infinis. Alors  $\mathcal{F}(\chi u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

**Remarque 49.** Nous avons fait la preuve de ce résultat pour  $u \in \mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$  avec  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, voir le lemme 4.3.15. On pourra aussi lire l'énoncé du lemme 4.3.13, lequel affirme que le résultat tient toujours si l'on remplace le précédent espace par  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ . La proposition D.0.8 ci-dessus n'est donc que le cas où  $U$  est identifié à un point. Le problème est toujours de donner un sens à la transformée de Fourier de cette fonction homogène. Si  $m > -d$  alors  $u$  est localement intégrable donc tempérée, voir la proposition D.0.9 ci-dessous. Dans le cas où  $m \leq -d$  on utilise une fonction cut-off comme au lemme D.0.8 de sorte à effacer la singularité potentielle de  $u$  en 0.

Le résultat suivant, déjà mentionné à la proposition 1.3.36, a été d'une grande importance dans ce manuscrit tant dans la compréhension en profondeur du développement asymptotique du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel classique que dans son utilisation dans les énoncés mentionnés dans la remarque 49. Nous le redonnons donc ici. On réfère aussi le lecteur à la remarque 8.

**Proposition D.0.9.** *Extension d'une fonction homogène [174, lemme 3.1, appendice A p 459], [13, proposition 15.8], [40, lemme I.4 p 200], [175, p 33], [226, lemme 2.3.4 p60]*

Soit  $f \in \mathcal{H}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ , où  $U$  est identifié à un point.

1. Si  $m > -d$  alors  $f$  définit une distribution tempérée, unique prolongement homogène de  $f$ .
2. Si  $m \in \mathbb{Z}$  où  $m \leq -d$ , alors  $f$  se prolonge en une distribution  $\tau \in S'(\mathbb{R}^d)$  dont la dilatée est :

$$\tau_s = s^m \tau + s^m \log(s) \sum_{|\alpha| = -(m+d)} c_\alpha(f) \delta_0^{(\alpha)}, \quad s > 0, \quad (\text{D.0.32})$$

où  $c_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} w^\alpha f(w) d\sigma(w)$ , avec  $d\sigma$  dénotant la mesure sur la sphère sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ . En particulier,  $f$  admet une extension homogène si et seulement si tous les  $c_\alpha(f)$  s'annulent.

*Démonstration.* Voir la proposition 1.3.36. □

Nous allons donner maintenant un exemple clé qui est celui des distributions homogènes  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  de la forme  $x \mapsto \frac{1}{|x|^{n-\lambda}}$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Exemple 75.** [58, p 156]

1. Lorsque  $\text{Re}(\lambda) > 0$ ,  $x \mapsto \frac{1}{|x|^{n-\lambda}}$  est localement intégrable et homogène de degré  $\lambda - n$ .
2. Lorsque  $0 < \text{Re}(\lambda) < \frac{n}{2}$ , en partie à cause du théorème D.0.4, on montre qu'il existe  $C(n, \lambda) \in \mathbb{C}$  de sorte que :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|^{n-\lambda}}\right)(\xi) = C(n, \lambda) \frac{1}{|\xi|^\lambda}. \quad (\text{D.0.33})$$

A la [58, page 157], Donoghue montre que :

$$C(n, \lambda) = 2^{\lambda - \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})}. \quad (\text{D.0.34})$$

3. En application, [58, p 158], Donoghue calcule la transformée de Fourier des solutions fondamentales du laplacien pour la dimension  $n > 2$ .
4. A la [58, page 160], Donoghue regarde le cas limite  $x \mapsto \frac{1}{|x|^n}$ . D'une part pour tout  $s > 0$  on définit la distribution :

$$\langle S_s, \phi \rangle = \int_{|x| \leq s} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{|x|^n} dx + \int_{|x| > s} \frac{\phi(x)}{|x|^n} dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (\text{D.0.35})$$

On montre alors que pour tout  $s, t > 0$  :

$$S_s - S_t = \omega_n \log\left(\frac{t}{s}\right) \delta_0, \quad (\text{D.0.36})$$

où  $\omega_n$  est l'aire de la sphère dans  $\mathbb{R}^n$ . On pose :

$$T = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \omega_n \log(|\xi|), \quad (\text{D.0.37})$$

et il vient, [58, p 161] pour tout  $s > 0$ , il existe  $c(s) \in \mathbb{C}$  telle que :

$$\mathcal{F}_D(S_s) = T - c(s)1, \quad (\text{D.0.38})$$

où Donoghue utilise la convention suivante pour la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_D(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathcal{F}(f)(\xi), \quad (\text{D.0.39})$$

où  $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$  est la transformée de Fourier que nous avons utilisée dans ce manuscrit.

Pour ce qui suit le lecteur pourra aussi relire la [115, section 3.2] du livre d'Hörmander sur les distributions homogènes. Terminons par le théorème suivant :

**Théorème D.0.10.** [115, théorème 3.2.4]

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  une distribution homogène de degré entier  $-n - k \leq -n$ . Alors  $u$  admet une extension  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . De plus  $\tilde{u}$  est une extension homogène si et seulement si la condition :

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} w^\alpha u(w) d\sigma(w) = 0, \quad (\text{D.0.40})$$

pour  $\alpha$  vérifiant la condition  $|\alpha| - n - k = -n$  - soit  $|\alpha| = k$  - est acquise.

**Exemple 76.** On regarde la distribution  $x \mapsto \frac{1}{x} \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . C'est une distribution homogène d'ordre  $-1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Donc par le théorème précédent elle admet une extension  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  qui est de plus homogène car (D.0.40) est vraie.

Toujours dans le cadre des distributions construites à partir d'objets homogènes, il est possible de définir voir [95, section 5.2.1 p 333], [85, exercice 2.5 p 30], pour  $k \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  homogène d'ordre  $-n$ , une distribution de type valeur principale en associant :

$$\langle k, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} k(x) \phi(x) dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (\text{D.0.41})$$

lorsque la condition :

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} k(w) d\sigma(w) = 0, \quad (\text{D.0.42})$$

est satisfaite.

**Exemple 77.** La distribution valeur principale (D.0.1) est construite exactement sur ce précédent modèle (D.0.41). Glowacki, dans son article [92] de 1991, étudie précisément ce genre d'objets (D.0.41) sur des groupes de Lie homogènes dans son article concernant une condition de Rockland sur les opérateurs non différentiels de convolution.

## D.1 Transformée de Fourier du logarithme

Dans cette section nous calculons la transformée de Fourier du logarithme en dimension  $n$ . On désigne par  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier. Tout d'abord rappelons que  $z \mapsto \log(|z|) \in S'(\mathbb{R}^n)$ . En effet, il suffit de montrer que  $z \mapsto \log(|z|)$  est à croissance polynomiale aux infinis, et de se souvenir qu'elle est intégrable au voisinage de 0.

**Proposition D.1.1.** Transformée de Fourier du log

Est vraie pour  $\xi \neq 0$  :

$$\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right)(\xi) = -\frac{(2\pi)^n}{\omega_n} \frac{1}{|\xi|^n}, \quad (\text{D.1.1})$$

où  $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  dénote l'aire de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1\}$ <sup>2</sup>.

2. La formule de  $\omega_n$  est donnée à la [81, proposition (0.7) p8].

Ce précédent énoncé nous a demandé de la réflexion et pas mal de recherche bibliographique. Afin de conserver une trace de nos recherches, nous commençons par présenter les cas  $n = 1$ ,  $n = 2$  avec des démonstrations "alternatives", celles auxquelles nous avons pensé lors de ces recherches. L'astuce de passer par les solutions fondamentales ne fonctionnait pas pour  $n \neq 2$ . C'est bien grâce à l'ouvrage de Donoghue [58] que nous avons pu obtenir une démonstration claire et précise.

*preuve de la proposition D.1.1.* 1. Pour  $n = 1$ . Dans le livre [227, chapitre 2 section 9 p 186 (e)], on a la formule :

$$\mathcal{F}\left(vp\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = -2C - 2\log(|\xi|), \quad (\text{D.1.2})$$

où  $C$  est donnée explicitement. Prenant la transformée de Fourier inverse on obtient :

$$\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right)(\xi) = -2\pi C\delta_0(\xi) - \frac{\pi}{|\xi|}. \quad (\text{D.1.3})$$

Pour  $\xi \neq 0$  on a :

$$\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right)(\xi) = -\frac{\pi}{|\xi|}, \quad (\text{D.1.4})$$

ce qui est cohérent avec (D.1.1), puisque  $w_1 = 2$ .

2. Pour  $n = 2$ . On sait que  $\frac{1}{2\pi}\log(|z|)$  est une solution fondamentale du laplacien dans  $\mathbb{R}^2$ , en vertu du théorème E.1.3. Cela veut dire :

$$\Delta\left(\frac{1}{2\pi}\log(|z|)\right) = \delta_0, \quad (\text{D.1.5})$$

Prenant la transformée de Fourier de la précédente équation il vient :

$$-|\xi|^2\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right) = 2\pi, \quad (\text{D.1.6})$$

soit pour  $\xi \neq 0$  :

$$\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right)(\xi) = -\frac{2\pi}{|\xi|^2}, \quad (\text{D.1.7})$$

ce qui est cohérent avec (D.1.1), puisque  $w_2 = 2\pi$ .

3. Pour  $n$  quelconque. Attention nous suivons l'ouvrage de Donoghue [58] qui prend la convention (D.0.39) pour transformée de Fourier. Reprenons donc l'équation (D.0.38) dans laquelle nous prenons la transformée de Fourier. On tire :

$$\mathcal{F}_D^2(S_s) = \mathcal{F}_D(T) - c(s)\mathcal{F}_D(1). \quad (\text{D.1.8})$$

Or avec [58, théorème p 140], on sait que  $\mathcal{F}_D^2(f) = f(-x) = \check{f}(x)$ , pour  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  et cette formule se prolonge aux distributions tempérées, [58, théorème p 144 point (6)]. De fait il vient de (D.1.8) et de la définition (D.0.37) de  $T$  :

$$\check{S}_s = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right) - c(s)(2\pi)^n\delta_0. \quad (\text{D.1.9})$$

Mais pour  $\xi \neq 0$ , on récupère :

$$\mathcal{F}\left(\log(|z|)\right)(\xi) = -\frac{(2\pi)^n}{\omega_n}\frac{1}{|\xi|^n}. \quad (\text{D.1.10})$$

En effet pour  $\xi \neq 0$ , la distribution  $S_s$  définie à l'équation (D.0.35) s'identifie avec la fonction lisse  $\xi \mapsto \frac{1}{|\xi|^n}$ .

□

## D.2 Fonctions à croissance polynômiale et distributions tempérées

**Lemme D.2.1.** [241, remarques et exemples 3.2 p 113 (vi)]

On se donne  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Sont vraies :

1. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable. Si il existe un polynôme  $p$  sur  $\mathbb{R}^d$  de sorte que  $\exists C > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^d$  on puisse écrire  $|f(\xi)| \leq C|p(\xi)|$  -  $f$  est dite à croissance polynômiale - alors  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .
2. Soit  $f : U \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable. Si il existe un multinôme  $p(x, \xi)$  sur  $U \times \mathbb{R}^d$ , multinômial pour la variable  $\xi$  et à coefficients lisses sur  $U$ , de sorte que, pour tout  $K \subset U$  compact,  $\exists C_K > 0$  tel que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in K$  on puisse écrire  $|f(x, \xi)| \leq C_K|p(x, \xi)|$ , alors  $f \in \mathcal{S}'_G(U \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* On ne traite que le premier point, la preuve du second étant similaire, modulo rajout de la norme quasi-homogène sur  $\mathbb{R}^d$ . Notons qu'il est licite de définir l'intégrale suivante pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  :

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (\text{D.2.1})$$

car,

$$|f\phi| \leq C|p\phi| \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad (\text{D.2.2})$$

puisque  $p\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ . On dénote  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^d$ . Comme  $p$  est un polynômial, alors il existe  $C > 0, r > 0$  de sorte que :

$$|p(\xi)| \leq C(1 + \|\xi\|)^r. \quad (\text{D.2.3})$$

Grâce à cela il vient :

$$|\langle f, \phi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|\xi\|)^{d+r}} (1 + \|\xi\|)^{d+r} p(\xi)\phi(\xi)d\xi \right| \quad (\text{D.2.4})$$

$$\leq \|\phi\|_{d+r,0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|\xi\|)^{d+r}} d\xi < +\infty, \quad (\text{D.2.5})$$

où  $\|\phi\|_{d+r,0}$  désigne l'une des semi-normes Schwartz. Ceci prouve qu'on peut assimiler  $f$  à une distribution tempérée.  $\square$

# Annexe E

## Les solutions fondamentales d'un opérateur différentiel

### E.1 Laplace et Poisson, deux précurseurs de la notion de solution fondamentale

Dès le 18<sup>ième</sup> siècle la notion de solution fondamentale (abrévée "SF") commence à émerger dans des travaux des physiciens et mathématiciens comme d'Alembert, Euler, Laplace, Poisson. La notion de SF - "*solution élémentaire*" dans le vocabulaire de Schwartz (le mot semblerait avoir été introduit par Hadamard [140, note 7 p 193]) - n'est formalisée que dans les travaux de Schwartz et son ouvrage "*Théorie des distributions*" de 1950, qui lui ont valu d'être le premier français médaillé Fields. En effet, la notion de solution fondamentale d'un opérateur différentiel  $P$  requière de parler de la distribution Dirac  $\delta_0$  et a fortiori de distribution. Au sujet de l'apparition de la fonction Dirac on pourra consulter la [140, note 18. p 112 et note 21. p 115]. Pour l'Histoire de la théorie des distributions nous nous sommes appuyés sur le livre [140] de Lutzen.

**Définition E.1.1.** Solution fondamentale, [197, p 210 édition de décembre 1978], [22, p 2]

Soit  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients constants, une solution fondamentale est la donnée d'une distribution  $E$  de sorte que :

$$PE = \delta_0. \tag{E.1.1}$$

Lorsque l'opérateur différentiel est à coefficients variables, alors on définit une solution fondamentale (ou plutôt un noyau fondamental) comme suit.

**Définition E.1.2.** Noyau fondamental [216, définition 52.1 p 535]

Soit  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients lisses sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$ . On dit que  $k(x, y) \in \mathcal{D}'(U \times U)$  est un noyau fondamental pour l'opérateur  $P$  lorsque :

$$P_x k(x, y) = \delta_0(x - y), \tag{E.1.2}$$

et où  $P_x$  indique que l'opérateur agit sur la variable  $x$ .

Mentionnons au lecteur quelques grandes équations de la physique qui naissent entre le 18<sup>ième</sup> et le 20<sup>ième</sup> siècle :

1. L'équation des ondes de D'Alembert de 1747 :

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \Delta_x\right)u = 0, \tag{E.1.3}$$

dont on trouvera une motivation dans [140, part 1 p 15] et qui fait suite aux travaux de D'Alembert dans son article [46]. Intitulé "*Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*". Il faut tout de même prendre quelques précautions quant à l'inventeur de l'équation (E.1.3). En effet selon Lutzen [140, part 1 p16] :



---

"Jean Le Rond de D'Alembert showed in 1747 "*Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*" [46], that the displacement of the points on a vibrating string fixed at the endpoints can be described by the expression :

$$y = f(x, t) = \psi(x + t) + \phi(x - t), \quad (\text{E.1.4})$$

where the arbitrary functions  $\phi$  et  $\psi$  can be determined from the initial state of the string. He did not explicitly set down the wave equation (E.1.3), which governs the movement, but that was done by Leonard Euler in his second paper [67] on the subject. In his first paper [67], on the vibrating string, which he wrote immediately after the publication of d'Alembert's article, Euler derived expression (E.1.4) along the same lines as d'Alembert, i.e. by setting down equations in differentials equivalent to the wave equation (E.1.3)."

2. L'équation de Poisson :

$$\Delta u = f, \quad (\text{E.1.5})$$

dont on trouvera une motivation dans [140, part 5 p 35] et l'équation homogène associée, l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0, \quad (\text{E.1.6})$$

qui sont d'une grande importance en électromagnétique comme en témoigne la remarque 50.

3. L'équation de la chaleur de Joseph Fourier :

$$\left(\partial_t - \Delta_x\right)u = 0, \quad (\text{E.1.7})$$

apparue en 1822 dans son traité "*Théorie analytique de la chaleur*" et en réponse à ces travaux de 1811 intitulés "*Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*".

4. L'équation acoustique d'Helmholtz sur un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.1.8})$$

qui est l'équation aux valeurs propres du laplacien. Cette équation permet d'étudier les phénomènes vibratoires stationnaires, comme les ondes acoustiques se formant sur une corde de guitare, ou sur une plaque métallique. Dans son expérience de 1787, Chladni met en vibration des plaques de métal de différentes formes en les excitant en leur bord avec un archet et sur lesquelles sont disposées des grains de sable. Selon les différentes fréquences à laquelle est excitée une plaque le sable bouge pour former différents "*dessins*" dits *figures acoustiques de Chladni*. Certaines fréquences très particulières permettent d'obtenir ces figures, ce sont les "*fréquences propres*". Les figures de Chladni sont constituées de lignes nodales (l'accumulation continue des grains de sable). Ces lignes nodales sont mathématiquement les points de  $\mathbb{R}^2$  qui annulent le vecteur propre  $u$  pour la *fréquence propre*  $\lambda$  vis à vis de l'équation (E.1.8). Faisons quelques commentaires sur l'équation (E.1.8).

- (a) Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine borné fixé. En 1911, Weyl [231] a montré<sup>1</sup> pour la dimension  $d = 2, 3$  que l'évolution du nombre de valeurs propres du laplacien était directement liée à la géométrie du domaine  $\Omega$ .
- (b) "Réciproquement", l'équation acoustique d'Helmholtz est liée à la question de Mark Kac [122] de 1966 :

"can you hear the shape of a drum?"

---

1. Pour reprendre les mots de Kac [122, p 4] :

"There is an apocryphal report that Hilbert predicted that the theorem would not be proved in his life time. Well, he was wrong by many, many years. For less than two years later Hermann Weyl, who was present at the Lorentz' lecture and whose interest was aroused by the problem, proved the problem in question."

La conférence mentionnée et intitulée "*Old and new problems of physics*" est celle d'octobre 1910 où Lorentz a donné des cours à l'université de Göttingen. La formule de Weyl semblerait avoir été conjecturée par le physicien Debye, voir [134, article de Lablée, p 37].

qui revient à se demander si, en connaissance des valeurs propres du laplacien sur un domaine  $\Omega$  borné, alors on peut dire des choses sur la géométrie, la topologie du domaine. En 1980, le mathématicien Ivrii [119] a apporté une amélioration asymptotique à la formule de Weyl.

Toutefois, il est essentiel de noter que la géométrie du domaine n'est en général pas complètement déterminée par le spectre du laplacien comme le montrent les articles [93],[94] de Gordon, Webb, Wolpert en 1992 où les auteurs apportent une réponse négative<sup>2</sup> en dimension 2 à la fameuse question de Kac. Toutes ces questions forment une branche des mathématiques qui est la "géométrie spectrale". Un des points culminants de cette histoire est la formule de Minakshisundaram – Pleijel [154] de 1949 : une fonction de type zêta qui code les valeurs propres de l'opérateur de Laplace Beltrami sur une variété Riemannienne compacte et qui permet de raffiner la loi de Weyl sus-mentionnée, voir aussi [134, article de Lablée p 38-40]. Plus généralement on pourra aussi consulter [135], [134, article de Lablée p 19].

Revenons maintenant sur la notion de SF. Selon [229], d'Alembert peut être considéré comme le précurseur de la notion de solution fondamentale. Pour Lutzen [140, chapitre 4 part 1] :

"The modern theory of fundamental solutions is thus so dependent of the notion of a  $\delta$ -distribution that it may be astonishing to realize that its roots extend as far back as 1828. At that time George Green introduced the so-called Green's function<sup>3</sup> as a means for studying boundary value problems in electrostatics. [...] Prior to 1950, however, the fundamental solution  $E$  was not given by an equation similar to (E.1.1) but was defined as a solution with certain singularities. Why then is the development of fundamental solutions of interest in the prehistory of the theory of distributions? There are two reasons for this. First, the  $\delta$ -function still played various roles in connection with the fundamental solution; it was actually as part of the definition of the fundamental solution of the wave equation that the  $\delta$ -function was introduced for the first time. Secondly, Hadamard's "partie finie"<sup>4</sup> - another essential notion in the theory of distributions - was invented to avoid certain divergent integrals which appeared when the fundamental solutions were used."

Notant  $H$  la fonction Heaviside, on peut montrer que la solution de l'équation des ondes (E.1.3) est donnée par

$$u(t, x) = f \star E = \frac{1}{2c} \int \int_{|x-\xi| < c(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (\text{E.1.9})$$

où  $E(t, x) = \frac{1}{2c} H(t - \frac{|x|}{c})$ , voir [229, p 405]. On reconnaît un opérateur de convolution. En 1809, dans son article [136] "*Mémoire sur divers points d'analyse*", Laplace calcule la solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur (E.1.7) en dimension  $d = 1$ , [229, p 405], [81, équation (4.2) p 143] :

$$K(x, t) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad (\text{E.1.10})$$

où, dans un cadre général,  $d$  est la dimension de l'espace sur lequel agit le laplacien. Une généralisation de cela, [229, p 405] est trouvée par Poisson en 1818 dans son article [171] intitulé "*Sur l'intégrale de l'équation relative aux vibrations des surfaces élastiques et au mouvement des ondes*". L'objet dans l'équation (E.1.10) porte le nom de noyau de la chaleur dit aussi noyau de Gauss-Weierstrass. D'après [81, p 147] et [166] où ces derniers auteurs font une review des différents théorèmes d'approximation de Weierstrass datant de 1885, on apprend que la preuve originale de Weierstrass pour son théorème d'approximation des fonction continues sur un compact de  $\mathbb{R}^d$  par les polynômes se fait en utilisant un argument de convolution par le noyau (E.1.10), voir [81, théorème (4.9)] et [132, section 7.2 p 222-223]. Pour corroborer cette information, [132] affirment pour  $f$  une fonction définie et bornée sur  $\mathbb{R}$  :

2. En fait Milnor avait déjà trouvé un contre-exemple en 1964 à cette question, mais pour des tores de dimension 16, voir [153]. Pour reprendre Kac [122, p 3] :

"It should also be pointed out, however, that quite recently John Milnor constructed two noncongruent sixteen dimensional tori whose Laplace-Beltrami operators have exactly the same eigenvalues."

3. Dans l'article [96] intitulé "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism".

4. Consulter l'article de 1932 [102]

"The integrals :

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{\mathbb{R}} f(u) \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du, \quad \omega = \int_{\mathbb{R}} \psi(u) du \quad (\text{E.1.11})$$

are "singular" in the sense that their integrands more and more (as  $k \rightarrow 0$ ) reproduce the ordinate  $f(x)$  while less and less taking into account the values of  $f$  around  $x$ , a procedure which foreshadows the use of delta functions in modern analysis. [...] [Weierstrass] gives as an example  $\psi(u) = e^{-u^2}$  and says : "There are infinitely many such functions," thus implying that the representation of  $f(x)$  as a limit of polynomials certainly cannot be expected to be unique."

La recherche de SF pour le laplacien  $\Delta$  occupe les mathématiciens entre la fin du 18ième et la première moitié du 19ième siècle. Toujours selon [229] en 1789 dans son ouvrage intitulé "*Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne*", Laplace aurait montré en dimension 3, posant  $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$ , qu'en dehors du support d'une fonction  $f$ , était vrai :

$$\Delta(E \star f) = 0. \quad (\text{E.1.12})$$

C'est Poisson en 1813 qui montra l'équation très intéressante :

$$\Delta(E \star f) = f, \quad (\text{E.1.13})$$

dans son ouvrage intitulé "*Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes*". Dans la littérature classique on peut maintenant trouver la forme générale de ces solutions :

**Théorème E.1.3.** *Solution fondamentale du laplacien, [81, théorème (2.17) p 75]*

*Les solutions fondamentales du laplacien sur  $\mathbb{R}^d$  sont données par :*

1. Pour  $d = 1$   $E = \frac{1}{2}|x|$
2. Pour  $d = 2$   $E = \frac{1}{2\pi} \log(|x|)$
3. Pour  $d \geq 3$   $E = \frac{1}{(2-d)\omega_d|x|^{d-2}}$ , où  $\omega_d$  représente l'aire de la sphère dans  $\mathbb{R}^d$  ([81, proposition (0.7)]).

Le lecteur trouvera chez [81], [63, exemple 2.118 p 234] et [85, § 5.4 p 59] le calcul des solutions fondamentales de certains opérateurs différentiels d'usage courant. Quant à nous, nous proposons à la section E.2, le calcul explicite d'une solution fondamentale de l'opérateur  $P = -\Delta + c^2$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , en utilisant les travaux de Schwartz sur les fonctions, distributions invariantes par rotation.

La solution fondamentale d'un opérateur différentiel  $P$  est d'une grande importance dans la résolution d'EDP comme illustrée par l'équation (E.1.9) ou plus tard à l'équation (E.1.19). En effet, donnons nous une EDP de la forme :

$$Pu = f, \quad (\text{E.1.14})$$

où l'on cherche  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  et  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est donnée. On remarque, notant  $E$  une solution fondamentale de  $P$  que :

$$u = E \star f, \quad (\text{E.1.15})$$

convient comme solution de (E.1.14).

Remarquons que nous avons dit "une solution fondamentale" et pas "la solution fondamentale". En général, il n'y a pas unicité d'une solution fondamentale d'un opérateur différentiel, consulter [164, après définition 1.1] et [195, p 35]. C'est d'ailleurs cette non unicité couplée à l'absence de formalisme concernant les SF qui provoquaient des confusions dans l'esprit des mathématiciens de l'époque car on pouvait trouver  $\frac{1}{|x|}$  ou  $-\frac{1}{4\pi|x|}$  comme solution fondamentale du laplacien en dimension 3, voir [164, introduction p 101]. Dans ce précédent article, Ortner et Wagner citent Malgrange qui revient sur les travaux de Schwartz :

"Schwartz clarifie la notion de solution élémentaire en la définissant comme une solution d'une équation ayant la mesure de Dirac  $\delta_0$  pour second membre".

En particulier  $\frac{1}{|x|}$  est exclue comme solution fondamentale du laplacien en dimension 3, car ne satisfait pas l'équation (E.1.1). Insistons bien sur le fait que même avec les clarifications apportées par Schwartz, il n'y a pas unicité d'une SF car l'opérateur différentiel possède un noyau non trivial.

Les solutions fondamentales rencontrées précédemment partagent le point commun d'avoir une singularité en 0, c'est encore en ce sens qu'on constate que ce sont des "solutions généralisées" des EDP et pas des solutions lisses (même continues) usuelles. L'existence d'une solution fondamentale est très intimement liée à l'hypo-ellipticité d'un opérateur différentiel à coefficients constants. Pour la convenance du lecteur, on rappelle :

**Définition E.1.4.** Hypo-ellipticité

Soit  $P$  un opérateur différentiel à coefficients lisses intervenant dans l'équation (E.1.14). L'opérateur est dit hypo-elliptique si pour tout ouvert  $V \subset U$  et toute distribution  $u \in \mathcal{E}'(V)$  :

$$Pu \in C^\infty(V) \Rightarrow u \in C^\infty(V). \tag{E.1.16}$$

Un opérateur hypo-elliptique régularise une solution potentielle de (E.1.14). Ce phénomène a été par exemple constaté par H. Weyl en 1940 dans son article [232]. En effet, on dit qu'une fonction  $u \in C^2(U)$ , est harmonique sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$  lorsque :

$$\Delta u = 0. \tag{E.1.17}$$

Weyl a montré qu'en réalité  $u$  ne peut être autre que  $C^\infty(U)$ . Ce résultat, qui s'étend au cas où  $u$  est une distribution ([81, corollaire (2.20) et section B "Basic properties of harmonic function"]) porte parfois la terminologie (peu usitée de nos jours) de "*Lemme de Weyl*". On peut montrer le théorème suivant :

**Théorème E.1.5.** *Hypo-ellipticité et solution fondamentale, [81, théorème (1.58) p 63], [22, section "1.3.1 Hypoelliptic Operators with Constant Coefficients" ], [215, théorème 2.1 chapitre 2]*

Soit  $P$  un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants.

1. Si  $P$  est hypo-elliptique alors une solution fondamentale (en fait toute) est lisse sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .
2. Réciproquement, si  $P$  admet une solution fondamentale lisse sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , alors  $P$  est hypo-elliptique.

Ainsi le fait de "simplement regarder" notre solution fondamentale nous permet de dire si un opérateur est hypoelliptique ou non et a fortiori d'en déduire des propriétés de régularité sur une potentielle solution de (E.1.14). Grâce au théorème E.1.5 et à l'équation (E.1.10), on en déduit que l'opérateur de la chaleur est hypoelliptique. De plus si l'on désire résoudre l'équation avec  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  :

$$\left(\partial_t - \Delta\right)u = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, u(x, 0) = f(x), \tag{E.1.18}$$

il suffit de poser, voir [81, théorème (4.3)] :

$$u(x, t) = f \star K_t(x), \tag{E.1.19}$$

où  $K_t(x) = K(x, t)$ , définie (E.1.10).

De surcroît, calculer les solutions fondamentales des opérateurs différentiels peut se révéler très difficiles et le théorème E.1.5 devient infructueux. Par exemple dans l'ouvrage de Marco Bramanti [22, section 1.3.3]<sup>5</sup> on apprend qu'en 1934, Kolmogorov [130] a calculé une solution fondamentale pour l'opérateur (parabolique dégénéré) :

$$L = \partial_t + x\partial_y - \partial_x^2. \tag{E.1.20}$$

Pour illustrer encore cela avec les mots [22, p 6 et section 1.3.3] de Bramanti :

"No characterization of hypoelliptic operators with variable coefficients exists so far. The book [114] by Hörmander, 1963, contains a plenty of results giving sufficient conditions in order for an operator to be hypoelliptic. [...] Nevertheless, all the results proved through the years up to 1967 did not enlighten some specific examples of known hypoelliptic operators which showed a degenerate behavior. [...] Until 1964, more general classes of degenerate parabolic operators with a fundamental solution smooth outside the pole were exhibited. [...] Summarizing : using the existing theories of the early sixties there was no way to decide the hypoellipticity of an operator just looking at the coefficients ; it was sometimes necessary to compute the fundamental solution, a harder task."

5. Dont nous recommandons au lecteur d'y jeter un œil car se veut très pédagogique et illuminant sur les questions autour des opérateurs elliptiques, hypo-elliptiques, solvables.

La date 1967 fait référence à l'année du célèbre théorème des carrés d'Hörmander de l'article [112] dont nous avons discuté en introduction de ce manuscrit, voir théorème 1.3.30 :

"The first result which explained the above phenomena in the framework of a general theory, allowing to predict hypoellipticity of an operator just looking at its coefficients was Hörmander's Theorem of 1967."

On parle déjà depuis un moment de SF mais une question a peut-être émergé dans la tête du lecteur :

"Est-ce que les solutions fondamentales existent toujours?"

Un grand théorème affirme que tout opérateur différentiel à coefficients constants admet toujours une solution fondamentale : il s'agit du théorème de Malgrange-Ehrenpreis, établi par ces deux mathématiciens respectivement en 1956 [144] et 1954 [64]. Pour reprendre les mots d'Horváth dans son livre [116, p 395] :

"This theorem is one of the great triumphs of the theory of distributions."

Il existe plusieurs preuves possibles pour démontrer le théorème de Malgrange-Ehrenpreis dont un inventaire est mené dans [118] et aussi dans [164, section 2 p 105]. Soit  $P$  un opérateur différentiel à coefficients constants sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour reprendre les mots d'Ortner et Wagner [164, section 2 p 105] :

"The original proofs of the Malgrange-Ehrenpreis theorem are based on a functional analytic duality method : it consists in the extension of the linear functional :

$$P(C_c^\infty(\mathbb{R}^d)) \rightarrow \mathbb{C}, P\phi \mapsto \phi(0), \quad (\text{E.1.21})$$

from the subspace  $P(C_c^\infty(\mathbb{R}^d))$  of  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  to the whole  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  by applying the theorem of Hahn-Banach. The key step consists in proving continuity on this subspace by means of an "*a priori inequality*".

De fait, les preuves de Malgrange et Ehrenpreis utilisant le théorème de Hahn-Banach, ne donnent en pratique aucune information sur une méthode concrète pour calculer une SF. Il existe pourtant une méthode pour calculer des SF qui s'appelle "*Hörmander staircase's method*", voir [118] et la thèse d'Hörmander [109, p 223], mais qui demeure difficile à mettre en pratique. Wagner [229, p 408] donne en 2004 une preuve constructive qui repose sur le papier [131] de König de 1994. L'[164, exemple 2.4 p 109] nous permet de calculer la solution fondamentale du laplacien en dimension  $d$  via la "*Hörmander staircase's method*". On constate que la solution obtenue ainsi ne correspond pas à la solution fondamentale exhibée dans le théorème (E.1.3). C'est l'occasion de ré-insister sur le fait qu'il n'y pas unicité dans la recherche de solutions fondamentales d'un opérateur différentiel.

Pour d'autres références sur une preuve du théorème de Malgrange-Ehrenpreis, on consultera [81, théorème (1.56) p 62], et l'article [187] de Rosay qui présente une preuve de ce théorème sans la théorie des distributions.

Pour conclure sur ce grand théorème, François Trèves dit en 1966 dans [214, p 261, voir aussi section 3 "fundamental solution"] :

"Finally, I should mention that nobody has yet succeeded in constructing a tempered fundamental solution for general differential polynomials. In a way, this is the last "big" problem which is still unsolved about general fundamental solutions."

Cependant on peut, comme on l'a vu avec l'exemple de Kolmogorov, calculer parfois explicitement le noyau fondamental d'un opérateur différentiel à coefficients lisses. Pour d'autres exemples explicites et multiples références, on conseille au lecteur l'article [11] de Beals de 1998.

On verra que pour savoir qu'un opérateur est hypo-elliptique on peut recourir à l'ellipticité (bien les opérateurs différentiels issus des EDP de la physique ne sont souvent pas elliptiques), ou encore à des théorèmes plus élaborés de Lars Hörmander, voir la section 1.3.3. La recherche de SF, se ramène à l'étude du "*division problem*", terme qu'on trouve dans la littérature anglophone comme [229, p 408-409], [218, p 2] et qui provient des travaux de 1958 par Hörmander [110]. On en explique le principe avec l'exemple de l'équation de Poisson pour  $f = \delta_0$ . Prenant la transformée de Fourier de l'équation (E.1.5) il s'ensuit l'équation :

$$-|\xi|^2 \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(f) = 1, \quad (\text{E.1.22})$$

ainsi au moins heuristiquement,

$$E = \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{|\xi|^2}\right), \quad (\text{E.1.23})$$

devrait être une solution fondamentale de  $\Delta$ . Remarquons que cette approche est cohérente, car en vertu de la proposition D.1.1, on trouve que la solution fondamentale  $E$  (E.1.23) du laplacien dans  $\mathbb{R}^2$  est donnée par :

$$E = \frac{1}{2\pi} \log(|x|), \quad (\text{E.1.24})$$

comme on l'a annoncé au théorème E.1.3. De même pour  $n \geq 5$ , et  $\lambda = 2$  de sorte à respecter la condition  $0 < \lambda < \frac{n}{2}$  alors la formule (D.0.33) établie par Donoghue nous permet de retrouver encore une fois les résultats annoncés par le théorème E.1.3.

De là on peut naturellement se questionner sur le sens de (E.1.23) et plus généralement sur la transformée de Fourier des fonctions homogènes  $\xi \mapsto |\xi|^m$  pour  $m \in \mathbb{Z}_-$ . Il s'avère que ces fonctions peuvent être vues comme des distributions tempérées avec un résultat d'Hörmander [115, théorème 3.2.4], voir aussi la section 1.3.4 dont la proposition 1.3.36. On peut aussi utiliser les "parties finies d'Hadamard" pour les définir.

Terminons par deux exemples et une proposition.

**Exemple 78.** 1. Une solution fondamentale de l'opérateur différentiel  $P = \partial_x$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par la fonction Heaviside  $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ .

2. Le lecteur aura peut être remarqué que, de façon surprenante, les exemples de solutions fondamentales explicites que nous avons donné concernent des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à 2. En 2000, Wagner propose une formule explicite pour la solution fondamentale de l'opérateur de Zeilon (1913) :

$$P = \partial_{x_1}^3 + \partial_{x_2}^3 + \partial_{x_3}^3, \quad (\text{E.1.25})$$

voir le [228, théorème p 274].

Nous avons rencontré la convolution dans les équations (E.1.19),(E.1.9). Derrière la notion de SF cache la notion d'opérateur à noyau.

**Proposition E.1.6.** Tout opérateur différentiel  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$  à coefficients constants est un opérateur de convolution :

$$Pf = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right) \star f, \quad (\text{E.1.26})$$

où le noyau  $k$  est donné par :

$$k(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha [\delta_x(y)] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d). \quad (\text{E.1.27})$$

*Démonstration.* Consulter la proposition 4.2.2, le théorème 4.2.1 et la remarque 4.2.3. Il est clair vis à vis des notations du théorème 4.2.1 que  $u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$  et que  $k$  défini ci-dessus est un élément de  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d))$ .  $\square$

C'est peut être l'occasion de souligner à quel point l'outil "transformée de Fourier" est important en EDP.

1. La transformée de Fourier entrelace l'opérateur de multiplication et de dérivation :

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = (i\xi_j) \mathcal{F}(f)(\xi), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \quad (\text{E.1.28})$$

2. La transformée de Fourier convertit un produit de convolution en un produit.

## E.2 Fonctions, distributions invariantes par rotation, solution fondamentale de $-\Delta + c^2$

Pour donner un exemple classique, on propose de rédiger [81, l'exercice 6 p 83] du livre de Folland qui consiste à montrer que :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{-c|x|}, \quad (\text{E.2.1})$$

est une solution fondamentale de l'opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$-\Delta + c^2, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (\text{E.2.2})$$

Chemin faisant, nous en sommes venus à découvrir l'exposé [193] numéro 7 donné par Schwartz en 54-55 dans lequel il étudie les fonctions, distributions invariantes par rotation. L'exposé [194] numéro 8 s'intéresse aux solutions fondamentales des opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta + \lambda$ . Nous conserverons les notations de Schwartz. Les outils développés par Schwartz se sont révélés fort utiles pour arriver à nos fins et calculer la solution de l'opérateur (E.2.2).

On rappelle que  $\omega_d$  désigne l'aire de la surface de la sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1}$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On note  $O(d)$  le groupe de Lie compact des rotations dans  $\mathbb{R}^d$  et  $SO(d)$  le sous groupe fermé de ces éléments dont le déterminant est 1.

**Définition E.2.1.** Fonctions, distributions invariantes par  $O(d)$  et moyenne de  $f$  sur  $O(d)$

1. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^d$ . On note :

$$f^\natural(x) = \frac{1}{|x|^{d-1}\omega_d} \int_{|\xi|=|x|} f(\xi) d\sigma_{|x|}(\xi), \quad (\text{E.2.3})$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{1}{\omega_d} f(|x|\xi) d\sigma_1(\xi), \quad (\text{E.2.4})$$

où  $d\sigma_{|x|}(\xi)$  désigne la mesure de surface sur la sphère dans  $\mathbb{R}^d$  de centre 0 et de rayon  $|x|$  et  $d\sigma_1(\xi)$  désigne la mesure de surface sur la sphère dans  $\mathbb{R}^d$  de centre 0 et de rayon 1.

2. Soit  $g \in O(d)$  et  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On note  $g.f$  la fonction  $x \mapsto f(g^{-1}.x)$ .
3. Une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est dite radiale lorsque pour tout  $g \in SO(d)$  :

$$g.f = f. \quad (\text{E.2.5})$$

4. Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . On définit une distribution  $u^\natural$  en posant pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  :

$$\langle u^\natural, \phi \rangle = \langle u, \phi^\natural \rangle. \quad (\text{E.2.6})$$

5. Soit  $g \in O(d)$  et  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . On définit une distribution  $g.u$  en posant pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  :

$$\langle g.u, \phi \rangle = \langle u, g^{-1}.\phi \rangle. \quad (\text{E.2.7})$$

6. Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . La distribution  $u$  est dite invariante par rotation lorsque  $g.u = u$ .
7. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On note  $dg$  la mesure de Haar à gauche normalisée sur le groupe compact  $O(d)$ . On définit la moyenne de  $f$  sur  $O(d)$ , invariante par rotation :

$$f_{\natural}(x) = \int_{g \in O(d)} g.f(x) dg. \quad (\text{E.2.8})$$

Voici les propriétés élémentaires des objets précédemment définis :

**Proposition E.2.2.** [193]

1. Une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est radiale si et seulement il existe une fonction  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  on ait :

$$f(x) = F(\|x\|). \quad (\text{E.2.9})$$

2. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. La fonction  $f^\natural$  est invariante par rotation, en particulier radiale. De plus si  $f$  est invariante par rotation alors  $f = f^\natural$ , [193, p 3].

3. Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  une distribution. La distribution  $u^\natural$  est invariante par rotation. De plus si  $u$  est invariante par rotation alors  $u = u^\natural$ , [193, p 4].

4. Soit  $g \in O(d)$  et  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  alors :

$$\Delta(g.f) = g.\Delta(f). \quad (\text{E.2.10})$$

5. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, alors [193, p2] :

$$\begin{cases} (f^\natural)^\natural &= f^\natural \\ (f^\natural)^\natural &= f^\natural. \end{cases} \quad (\text{E.2.11})$$

6. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, alors [193, p2-3]  $f^\natural(x) = f_\natural(x)$  c'est à dire :

$$f^\natural(x) = \int_{g \in O(d)} g.f(x) dg. \quad (\text{E.2.12})$$

7. Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , alors :

$$\Delta(f^\natural) = (\Delta f)^\natural. \quad (\text{E.2.13})$$

8. Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , alors :

$$\Delta(u^\natural) = (\Delta u)^\natural. \quad (\text{E.2.14})$$

9. On a  $\delta_0^\natural = \delta_0$ .

Nous ne donnons que les démonstrations que nous n'avons pas trouvé dans l'article [193] de Schwartz.

*Démonstration.* 1. Nous allons montrer que pour  $g = (a_{ij}) \in O(d)$  et  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  alors  $\Delta(g.f) = g.\Delta(f)$ .  
Tout d'abord on rappelle que pour une telle matrice :

$${}^t g g = I_d \Leftrightarrow \forall (i, j), \sum_{k=1}^d a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}. \quad (\text{E.2.15})$$

Posons :

$$\phi(x) = g.x = \left( \sum_{j=1}^d a_{j1} x_j, \dots, \sum_{j=1}^d a_{jd} x_j \right). \quad (\text{E.2.16})$$

Par les règles du calcul différentiel sur la composée d'applications différentiables, on montre que :

$$\partial_{x_k} [f \circ \phi(x)] = \sum_{p=1}^d a_{kp} (\partial_{x_p} f)(\phi(x)), \quad (\text{E.2.17})$$

et de même :

$$\partial_{x_k} [\partial_{x_p} f \circ \phi(x)] = \sum_{l=1}^d a_{kl} \partial_{x_l} (\partial_{x_p} f)(\phi(x)). \quad (\text{E.2.18})$$



Il vient alors :

$$\Delta(g.f)(x) = \Delta(f(g.x)) \quad (\text{E.2.19})$$

$$= \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^2 f(\phi(x)) \quad (\text{E.2.20})$$

$$= \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} \sum_{p=1}^d a_{kp} \partial_{x_p} f(\phi(x)) \quad (\text{E.2.21})$$

$$\stackrel{\text{(E.2.17)}}{=} \sum_{1 \leq k, p \leq d} a_{kp} \partial_{x_k} [\partial_{x_p} f(\phi(x))] \quad (\text{E.2.22})$$

$$\stackrel{\text{(E.2.18)}}{=} \sum_{1 \leq k, p \leq d} \sum_{l=1}^d a_{kp} a_{kl} \partial_{x_l} \partial_{x_k} f(\phi(x)) \quad (\text{E.2.23})$$

$$\stackrel{\text{(E.2.15)}}{=} \sum_{1 \leq k, p \leq d} \delta_{kl} \partial_{x_l} \partial_{x_k} f(\phi(x)) \quad (\text{E.2.24})$$

$$= \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^2 f(\phi(x)) \quad (\text{E.2.25})$$

$$= g.(\Delta f)(x). \quad (\text{E.2.26})$$

2. Nous allons montrer que pour  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\Delta(f^\natural) = (\Delta f)^\natural$ . Tout d'abord on utilise la propriété 6. (démontrée dans l'article de Schwartz) à savoir que :

$$f^\natural(x) = \int_{g \in O(d)} g.f(x) dg. \quad (\text{E.2.27})$$

Alors on calcule :

$$\Delta(f^\natural)(x) = \Delta\left(\int_{g \in O(d)} g.f(x) dg\right) \quad (\text{E.2.28})$$

$$= \int_{g \in O(d)} \Delta(g.f)(x) dg \quad (\text{E.2.29})$$

$$\stackrel{\text{(E.2.10)}}{=} \int_{g \in O(d)} g.\Delta(f) dg \quad (\text{E.2.30})$$

$$= \Delta(f)^\natural(x). \quad (\text{E.2.31})$$

3. Nous allons montrer que pour  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\Delta(u^\natural) = (\Delta u)^\natural$ . Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  calculons :

$$\langle \Delta(u^\natural), \phi \rangle = \langle u^\natural, \Delta \phi \rangle \quad (\text{E.2.32})$$

$$= \langle u, (\Delta \phi)^\natural \rangle \quad (\text{E.2.33})$$

$$\stackrel{\text{(E.2.13)}}{=} \langle u, \Delta(\phi^\natural) \rangle \quad (\text{E.2.34})$$

$$= \langle \Delta u, \phi^\natural \rangle \quad (\text{E.2.35})$$

$$= \langle (\Delta u)^\natural, \phi \rangle. \quad (\text{E.2.36})$$

□

**Remarque 50.** *L'importance du laplacien en physique*

*De part son invariance vis à vis des rotations, et aussi des translations en tant qu'opérateur différentiel à coefficients constants, le laplacien est très prisé par les physiciens lors de l'étude de problèmes mettant*

en jeu des structures géométriques invariantes par rotation ou translation<sup>6</sup>. On considère dans l'espace un volume infinitésimal constitué de particules chargées. Ce volume infinitésimal chargé (distribution de charges continue) crée un champ électrique élémentaire  $d\vec{E}$ . La donnée du champ en un point  $M$  est donc la somme (au sens des intégrales) de ces champs électriques élémentaires. Le champ électrique  $\vec{E}(M)$  au point  $M$  s'exprime alors dans différents systèmes de coordonnées (cartésiens, cylindriques, sphériques). Par exemple imaginons un cylindre. Si la distribution de charge est invariante par translation (ce qui veut dire que sur un axe  $Oz$ , un point  $M$  et son translaté selon cet axe ont même distribution de charge) ou encore par rotation (à la hauteur  $z$  fixée, un point  $M$  et  $gM$ ,  $g \in O(3)$  ont même distribution de charge) alors<sup>7</sup> le champ électrique est lui aussi invariant par translation et rotation et s'exprime, en coordonnées cylindriques, avec des composantes ne dépendant que du rayon duquel un point  $M$  est éloigné de ce cylindre :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r + E_\theta(r)\vec{u}_\theta + E_z(r)\vec{u}_z. \quad (\text{E.2.37})$$

Le fil infini (fil rectiligne infini uniformément chargé) est la distribution de charge continue qui possède ces deux invariances et en conséquence le champ électrique est de cette précédente (E.2.37) forme. De plus comme le fil admet deux plans de symétrie<sup>8</sup> alors on peut énoncer :

"Tout plan contenant le fil est un plan de symétrie de sorte que pour tout point  $M$  de ce plan, le champ est dans ce plan. Mais le plan perpendiculaire au fil qui passe par  $M$  est aussi un plan de symétrie puisque le fil est infini. Il en découle que le champ électrique est radial :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r, \quad (\text{E.2.38})$$

en coordonnées cylindriques."

Nous invitons aussi le lecteur à lire l'introduction du [81, chapitre 2 p 66] de Folland. Un résultat important, voir [81, théorème 2.1 p 67] affirme que si un opérateur différentiel est invariant par rotation et translation alors il est un polynôme en le laplacien. Enfin le laplacien intervient en électromagnétisme dans les équations de Laplace :

$$\Delta u = 0, \quad (\text{E.2.39})$$

et de Poisson :

$$\Delta u = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{E.2.40})$$

où  $u$  est le potentiel électrique dont dérive<sup>9</sup> le champ électrique  $\vec{E} - \vec{E} = -\vec{\nabla}u$  - associé à une densité volumique de charge  $\rho$  et où  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide.

**Proposition E.2.3.** Soit  $c \in \mathbb{C}$ . La solution fondamentale de l'opérateur  $P = -\Delta + c^2$  sur  $\mathbb{R}^3$  est la distribution :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{-c|x|}. \quad (\text{E.2.42})$$

6. On pourra regarder par exemple <https://youtu.be/JaBMURmxuIE> et <https://www.youtube.com/watch?v=gdHb5GX53v8>.

7. Nous avons résumé rapidement les notes de <https://www.physagreg.fr/electromagnetisme-11-champ-electrostatique.php>.

8. Nous nous sommes servis des notes de <https://femto-physique.fr/electromagnetisme/proprietes-locales-E.php>.

9. Sans rentrer dans les détails physiques qui dépassent de loin les connaissances de l'auteur de ces lignes, expliquons quelques éléments. Au milieu du 19ième siècle le physicien Maxwell unifie les travaux antérieurs sur l'électricité et le magnétisme que l'on doit principalement à Gauss, Faraday et Ampère. Tout d'abord dans un ouvrage [147] paru en 1865 contenant vingt équations mathématiques formulant le lien entre le champ électrique et magnétique, Maxwell reformule [148] en 1873 sa théorie de sorte à obtenir huit équations. Finalement, avec le couronnement de l'analyse vectorielle et la théorie des opérateurs divergence, rotationnel au début du 20ième siècle, la théorie de Maxwell se réduit désormais à quatre équations. La loi de Maxwell-Faraday relie le champ magnétique  $\vec{E}$  et électrique  $\vec{B}$  selon la relation :

$$\text{rot}\vec{E} = -\partial_t\vec{B}. \quad (\text{E.2.41})$$

En régime stationnaire,  $\partial_t\vec{B} = 0$ , cela entraîne précisément que  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel  $u$  et de sorte que  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . En réintroduisant  $\vec{E} = -\vec{\nabla}u$  dans la précédente équation, alors on trouve précisément l'équation de Poisson (E.2.40).

*Démonstration.* D'une part, remarquons que  $E$  est une distribution invariante par rotation. Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ . On calcule, en utilisant la proposition E.2.2 aux endroits marqués par ( $\clubsuit$ ) :

$$\langle (c^2 - \Delta)E, \phi \rangle \underset{(\clubsuit)}{=} \langle (c^2 - \Delta)(E^\natural), \phi \rangle \quad (\text{E.2.43})$$

$$\underset{(\clubsuit)}{=} \langle \left( (c^2 - \Delta)E \right)^\natural, \phi \rangle \quad (\text{E.2.44})$$

$$= \langle (c^2 - \Delta)E, \phi^\natural \rangle. \quad (\text{E.2.45})$$

Or  $\phi^\natural$  est radiale. Il convient donc de montrer que pour toute fonction radiale  $\psi$  :

$$\langle (c^2 - \Delta)E, \psi \rangle = \langle \delta_0, \psi \rangle. \quad (\text{E.2.46})$$

Une fois cela fait il suffit de reprendre (E.2.45) et alors il vient :

$$\langle (c^2 - \Delta)E, \phi \rangle = \langle \delta_0, \phi^\natural \rangle \quad (\text{E.2.47})$$

$$= \langle \delta_0^\natural, \phi \rangle \quad (\text{E.2.48})$$

$$\underset{(\clubsuit)}{=} \langle \delta_0, \phi \rangle. \quad (\text{E.2.49})$$

Il convient donc de montrer (E.2.46). Pour ce faire, souvenons nous que le laplacien d'une fonction radiale est donné par :

$$\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r, \quad (\text{E.2.50})$$

voir par exemple [81, proposition (2.2) p 68]. Pour  $\psi$  radiale il vient :

$$\langle (c^2 - \Delta)E, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} r^2 \frac{1}{4\pi r} e^{-cr} \left( \partial_r^2 \psi(r) + \frac{2}{r} \partial_r \psi(r) + c^2 \psi(r) \right) \omega_3 dr \quad (\text{E.2.51})$$

$$\underset{IPP}{=} \frac{\omega_3}{4\pi} \left( [re^{-rc} \partial_r \psi(r)]_0^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}_+} \partial_r \psi(r) (e^{-cr} - cre^{-cr}) dr \right) \quad (\text{E.2.52})$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+} 2e^{-cr} \partial_r \psi(r) dr + \int_{\mathbb{R}_+} c^2 r e^{-cr} \psi(r) dr \quad (\text{E.2.53})$$

$$= \frac{\omega_3}{4\pi} \left( \int_{\mathbb{R}_+} \partial_r \psi(r) e^{-cr} (1 + cr) dr + \int_{\mathbb{R}_+} c^2 r e^{-cr} \psi(r) dr \right) \quad (\text{E.2.54})$$

$$\underset{IPP}{=} \frac{\omega_3}{4\pi} \psi(0) \quad (\text{E.2.55})$$

$$= \langle \delta_0, \psi \rangle, \quad (\text{E.2.56})$$

cela étant vraie car par [81, proposition (0.7)] et puisque par les propriétés de la fonction Gamma,  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , ce qui nous permet de calculer :  $\frac{\omega_3}{4\pi} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})4\pi} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\frac{1}{2})} = 1$ .  $\square$

# Annexe F

## Glossaire des symboles

1.  $A(G)$ ... algèbre de Lie associée à un groupoïde de Lie  $G$ , voir après proposition [A.6.5](#).
2.  $\alpha_s$ ... action de Debord-Skandalis, définition [3.2.1](#)
3.  $\tilde{\alpha}_s$ ... action de Debord-Skandalis tirée par les cartes  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}}$ , équation [\(3.2.3\)](#).
4.  $\beta_s$ ... action sur  $U \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , [\(3.2.2\)](#).
5. BG... désigne les auteurs Beals et Greiner
6.  $C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ ... fonction lisse sur  $U \times \mathbb{R}^d$ .
7.  $C^\infty(U, L^1(\mathbb{R}^d))$ ... espace des fonctions lisses en  $x$  et intégrable en  $\xi$ , définition [4.3.12](#).
8.  $C_p^\infty(M, \Omega_\pi)$ ... sections propres du fibré des densités tangentes aux  $\pi$ -fibres d'une submersion  $\pi : M \rightarrow B_M$ , remarque [24](#).
9.  $C_p^\infty(G, \Omega_r)$ ... sections propres du fibré des densités tangentes aux  $r$ -fibres dans un groupoïde de Lie  $G$ .
10.  $\Delta$ ... laplacien standard sur  $\mathbb{R}^n$ .
11.  $\Delta_H$ ... sous-laplacien sur le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^{2n+1}$ , i.e.  $\mathbb{R}^{2n+1}$  avec sa structure non commutative.
12.  $\delta_s$ ... dilatation sur  $\mathbb{R}^d$ , [\(2.1.1\)](#).
13.  $\tilde{\delta}_s$ ... dilatation sur  $\mathbb{R}^{d+1}$ , [\(2.1.2\)](#).
14.  $d_H$  dimension homogène d'une variété filtrée, définition [1.4.14](#).
15.  $\mathcal{D}'(U)$ ... distribution sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ .
16.  $\mathcal{E}'(U)$ ... distribution à support compact sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ .
17.  $\mathcal{E}'_\pi(M)$  distribution  $\pi$ -fibrée pour une submersion  $\pi : M \rightarrow N$ , définition [3.3.9](#).
18.  $\mathcal{E}'_r(G), \mathcal{E}'_s(G)$ ... distributions respectivement  $r$ -fibrées,  $s$ -fibrées sur le groupoïde de Lie  $G$ , pour les submersions  $r, s : G \rightarrow G^{(0)}$ , définition [3.3.9](#).
19.  $\exp(Y).y$ ... flot local pour le champ de vecteur  $Y$  en  $t = 1$  et passant par  $y$  en  $t = 0$ .
20.  $\mathbb{E}xp^{\bar{X}}$ ... carte exponentielle pour le repère local  $\bar{X}$ , équation [\(3.1.14\)](#).
21.  $\mathcal{F}$ ... transformée de Fourier usuelle.
22.  $\mathcal{F}_2$ ... transformée de Fourier sur la deuxième variable.
23.  $G^x = r^{-1}(x)$ ...  $r$ -fibre d'un groupoïde  $G$  en  $x \in G^{(0)}$ , définition [A.3.1](#).
24.  $G_x = s^{-1}(x)$ ...  $s$ -fibre d'un groupoïde  $G$  en  $x \in G^{(0)}$ , définition [A.3.1](#).
25.  $G^{(0)}$ ... éléments unités d'un groupoïde  $G$ , définition [A.3.1](#).
26.  $G^{(2)}$ ... éléments composables d'un groupoïde  $G$ , définition [A.3.1](#).
27.  $\mathcal{H}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ... fonction  $G$ -homogène d'ordre  $m$ , définition [2.1.2](#).
28.  $\Gamma^\infty(E)$ ... ensemble des sections lisses d'un fibré vectoriel lisse  $\pi : E \rightarrow M$ .
29.  $\Gamma_{inv}^\infty(TG)$ ... ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche par translation sur un groupoïde de Lie  $G$ , équation [\(A.6.22\)](#).

- 
30.  $\Gamma_{inv}^{\infty,s}(G)$ ... ensemble des sections lisses du fibré  $ker(ds)$  invariantes à droite par translation, équation (A.6.25).
  31.  $\mathcal{HS}_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ... fonction  $G$ -homogène modulo Schwartz d'ordre  $m$ , définition 2.1.4.
  32.  $\mathbb{H}_n$ ... groupe d'Heisenberg d'ordre  $n$  i.e.  $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}^{2n+1}$  avec sa structure non commutative.
  33.  $\mathfrak{h}_n$ ... algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}_n$ .
  34. LMV... désigne les auteurs Lescure, Manchon et Vassout.
  35.  $\mathcal{M}^\infty(M)$ ... mesure lisse sur une variété lisse  $M$ , définition 3.4.3.
  36.  $\mathcal{M}_\pi(M)$ ... famille de mesures fibrées, définition 3.4.11.
  37.  $\mathcal{M}_\pi^\infty(M)$ ... famille lisse de mesures lisses fibrées, définition 3.4.13.
  38.  $|\cdot|$ ... norme quasi-homogène (nqh), définition 2.1.1.
  39.  $O(d)$ ... groupe orthogonal des matrices de taille  $d$ .
  40.  $\omega_d$ ... aire de la surface de la sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1}$  dans  $\mathbb{R}^d$ .
  41.  $\Omega^1(M)$ ... 1-forme sur la variété  $M$  (soit une section lisse du fibré  $\Lambda^1(M)$  des tenseurs 1-covariants alternés sur  $M$ ).
  42.  $|\Omega|^1(M) = \bigsqcup_{p \in M} |\Omega|^1(T_p M)$ ... fibré des 1-densités, équation (3.4.2).
  43.  $|\Omega_\pi|$ ... fibré des densités tangentes aux  $\pi$ -fibres d'une submersion  $\pi : M \rightarrow B_M$ , théorème 3.4.14.
  44.  $|\Omega_r|$ ... fibré des densités tangentes aux  $r$ -fibres d'un groupoïde de Lie  $G$ , équation (3.4.33).
  45.  $\Psi_{1,0}^m(U)$ ... opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m$  dont les symboles sont dans la classe  $S_{1,0}^m(U)$ , définition 1.3.5.
  46.  $\Psi_{1,0}^{-\infty}(U)$ ... opérateurs pseudo-différentiels régularisants, définition 1.3.5.
  47.  $\Psi_{\rho,\delta}^m(U)$ ... opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m$  dont les symboles sont dans la classe  $S_{\rho,\delta}^m(U)$ , définition 1.3.12.
  48.  $\Psi_{phg}^m(U)$ ... opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m$  dont les symboles sont dans la classe  $S_{phg}^m(U)$ , définition 1.3.14.
  49.  $\Psi_{phg}^{-\infty}(U)$ ... opérateurs pseudo-différentiels classiques régularisants, définition 1.3.14. Ils coïncident avec  $\Psi_{1,0}^{-\infty}(U)$ .
  50.  $\Psi^{-\infty}(M)$ ... opérateurs régularisants sur  $M$ .
  51.  $\Psi_{Hör}^m(M)$ ... opérateurs pseudo-différentiels classique d'ordre  $m$  dans le calcul d'Hörmander, définition 1.4.17.
  52.  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$ ... noyaux  $H$ -pseudo-différentiel sur  $M \times M$  (confondus aux opérateurs  $H$ -pseudo-différentiel d'ordre  $m$  sur  $M$ ) pour le calcul pseudo-différentiel groupoïdal de vEY, définition 1.4.4.
  53.  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)$ ... distributions  $r$ -fibrées sur le groupoïde  $H$ -tangent  $\mathbb{T}_H M$  essentiellement homogènes d'ordre  $m$  pour l'action de Debord-Skandalis, définition 1.4.15.
  54.  $\Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}M)$ ... distributions  $r$ -fibrées sur le groupoïde tangent  $\mathbb{T}M$  essentiellement homogènes d'ordre  $m$  pour l'action de Debord-Skandalis, définition 1.4.3.
  55.  $\Psi_{\mathcal{V}}^m(U)$ ... opérateurs  $\mathcal{V}$ -pseudo-différentiels d'ordre  $m$  de BG sur  $U$  ouvert d'une variété d'Heisenberg  $M$ , définition 4.3.5.
  56.  $\mathbb{S}^{d-1}$ ... sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| = 1\}$  dans  $\mathbb{R}^d$ .
  57.  $\star$ ... désigne la convolution de fonctions, de distributions, de distributions  $\pi$ -fibrées.
  58.  $\sigma(x, \xi)$ ... collection  $G$ -symboles des champs modèles de BG, équation (4.3.28).
  59.  $\bar{\sigma}(x, \xi) = (x, \sigma(x, \xi))$ ... équation (4.3.29).
  60.  $\tilde{\sigma}(x, \eta)$ , inverse de  $\sigma(x, \xi)$  i.e.  $\sigma(x, \tilde{\sigma}(x, \eta)) = \eta$ , voir en dessous de l'équation (4.3.29).
  61.  $Res_x(P)$ ... résidu groupoïdal local d'un opérateur pseudo-différentiel  $P \in \Psi_{vEY}^m(\mathbb{T}_H M)|_{t=1}$  dans le calcul de vEY,  $m \leq -d_H$ , définition 7.2.6.
  62.  $Res_x^W(P)$ ... résidu de Wodzicki local en un point  $x$  d'une variété lisse  $M$  (trivialement filtrée) d'un opérateur pseudo-différentiel classique  $P \in \Psi_{Hör}^m(M)$ , définition 7.1.1.

- 
- 63.  $Res^W(P)$ ... résidu de Wodzicki global, définition 7.1.1.
  - 64.  $S_{\rho,\delta}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ... classe de symbole d'Hörmander de type  $(\rho, \delta)$  d'ordre  $m$ , définition 1.3.12.
  - 65.  $S_{1,0}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ... classe de symbole de type  $(1, 0)$  d'ordre  $m$ , définition 1.3.5.
  - 66.  $S_{1,0}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ ... classe de symbole de type  $(1, 0)$  d'ordre  $-\infty$ , définition 1.3.5.
  - 67.  $S_{phg}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ... sous-classe des symboles de type  $(1, 0)$  d'ordre  $m$  qui admettent un développement asymptotique, définition 1.3.14.
  - 68.  $S_{phg}^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ ... sous-classe des symboles de type  $(1, 0)$  d'ordre  $-\infty$  qui admettent un développement asymptotique, définition 1.3.14.
  - 69.  $S'_G(U \times \mathbb{R}^d) \cong C^\infty(U, S'(\mathbb{R}^d))$ ... application lisse en  $x$  et tempérée en  $\xi$ , voir définition 4.3.11
  - 70.  $\mathcal{S}_G(U \times \mathbb{R}^d)$ ... fonction  $G$ -Schwartz, définition 2.1.3.
  - 71.  $S_G^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ...  $G$ -symbole d'ordre  $m$ , définition 2.1.8.
  - 72.  $S_G^{-\infty}(U \times \mathbb{R}^d)$ ...  $G$ -symbole d'ordre  $-\infty$ , définition 2.1.8.
  - 73.  $S_{phg,G}^m(U \times \mathbb{R}^d)$ ...  $G$ -symbole d'ordre  $m$  poly-homogène/classique, définition 2.1.10.
  - 74.  $S_V^m(U \times \mathbb{R}^{d+1})$ ...  $\mathcal{V}$ -symbole de BG d'ordre  $m$  sur  $U$  ouvert d'une variété d'Heisenberg  $M$ , définition 4.3.5.
  - 75.  ${}^t$ ... opération de transposition.
  - 76.  $\mathbb{T}M$ ... groupoïde tangent d'A. Connes, équation (3.1.1).
  - 77.  $\mathbb{T}_H M$ ... groupoïde  $H$ -tangent généralisé d'A. Connes (sur une variété filtrée  $M$ ), définition 3.1.1
  - 78.  $\mathcal{T}_H M$ ... groupoïde osculant, définition 1.4.10.
  - 79.  $\mathfrak{t}_H M$ ... algébroïde osculante, définition 1.4.8.
  - 80.  $\nu EY$ ... désigne les auteurs van Erp et Yuncken.
  - 81.  $vp(\frac{1}{x})$ ... distribution tempérée valeur principale, équation (D.0.1).



# Bibliographie

- [1] Helmut Abels. *Pseudodifferential and singular integral operators*. De Gruyter, 2011.
- [2] Yuri A Abramovich and Charalambos D Aliprantis. *An invitation to operator theory*, volume 50. American Mathematical Society Providence, RI, 2002.
- [3] Thomas Ackermann. A note on the wodzicki residue. *Journal of Geometry and Physics*, 20(4) :404–406, 1996.
- [4] Mark Adler. On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the korteweg-devries type equations. *Inventiones mathematicae*, 50 :219–248, 1978.
- [5] S Alinhac and P Gérard. Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser (interéditations, 1991). *MR1172111 (93g : 35001)*.
- [6] Serge Alinhac. *Opérateurs pseudo-différentiels et théoreme de Nash-Moser*. EDP Sciences, 2012.
- [7] Rui Almeida. Suites d’Atiyah et feuilletages transversalement complets. *CR Acad. Sci. Paris*, 300 :13–15, 1985.
- [8] Vladimir Igorevich Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 1989. Second Edition.
- [9] Paul F Baum and Erik Erp. K-homology and index theory on contact manifolds. *Acta Mathematica*, 213(1) :1–48, 2014.
- [10] Richard Beals. Opérateurs invariants hypoelliptiques sur un groupe de Lie nilpotent. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi " Séminaire Goulaouic-Schwartz "*, pages 1–8.
- [11] Richard Beals. Solutions fondamentales exactes. *Journées Équations aux dérivées partielles*, pages 1–9, 1998.
- [12] Richard Beals and Peter Charles Greiner. Pseudodifferential operators associated to hyperplane bundles. *Rend. Sem. Mat. Torino*, 41 :3–40, 1983.
- [13] Richard Beals and Peter Charles Greiner. *Calculus on Heisenberg Manifolds.(AM-119), Volume 119*. Princeton University Press, 1988.
- [14] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*, volume 8. H&K, 2005.
- [15] Moulay-Tahar Benameur and Victor Nistor. Homology of algebras of families of pseudodifferential operators. *Journal of Functional Analysis*, 205(1) :1–36, 2003.
- [16] Alba Susana Core Bianchi. *Analogues of the usual pseudodifferential calculus on the Heisenberg group*. State University of New York at Stony Brook, 2005.
- [17] Al Boggess. *CR Manifolds and the Tangential Cauchy Riemann Complex*, volume 1. CRC Press, 1991.
- [18] Juliane Bokobza-Haggiag. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété différentiable. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 19, pages 125–177, 1969.
- [19] Louis Boutet de Monvel. Opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques doubles. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi " Séminaire Goulaouic-Schwartz "*, pages 1–16, 1973.
- [20] Louis Boutet de Monvel and Paul Krée. Pseudo-differential operators and Gevrey classes. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 17, pages 295–323, 1967.
- [21] Philip L Bowers. *Lectures on Quantum Mechanics : A Primer for Mathematicians*. Cambridge University Press, 2020.



- 
- [22] Marco Bramanti. *An invitation to hypoelliptic operators and Hörmander's vector fields*, volume 1298. Springer, 2014.
- [23] Heinrich Brandt. Über eine verallgemeinerung des gruppenbegriffes. *Mathematische Annalen*, 96(1) :360–366, 1927.
- [24] Ian D Brown. Dual topology of a nilpotent Lie group. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 6, pages 407–411, 1973.
- [25] Mădălina Buneci. Haar systems and topologies on groupoids. In *Proceedings of the 28th Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA)*, volume 2, pages 775–778. Citeseer, 2003.
- [26] Mădălina Buneci. A second countable locally compact transitive groupoid without open range map. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 147(8) :3603–3610, 2019.
- [27] Alberto Pedro Calderón. *Harmonic analysis and partial differential equations : essays in honor of Alberto P. Calderón*. University of Chicago Press, 1999. Edited by Christ, Kenig, Sadosky.
- [28] Alberto Pedro Calderón and Antoni Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math*, 88 :85–139, 1952.
- [29] John Wilson Calkin. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in hilbert space. *Annals of Mathematics*, pages 839–873, 1941.
- [30] Duván Cardona, César del Corral, and Vishvesh Kumar. Dixmier traces for discrete pseudo-differential operators. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 11(2) :647–656, 2020.
- [31] Elie Cartan. Le troisième théorème fondamental de Lie. *CR Math. Acad. Sci. Paris*, 190 :1005–1007, 1930.
- [32] Elie Cartan. La topologie des groupes de Lie. *La topologie des groupes de Lie*, 1936.
- [33] So-Chin Chen and Mei-Chi Shaw. *Partial differential equations in several complex variables*, volume 19. American Mathematical Soc., 2001.
- [34] Woocheol Choi and Raphaël Ponge. Tangent maps and tangent groupoid for carnot manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 62 :136–183, 2019.
- [35] Michael Christ, Daryl Geller, Paweł Głowacki, and Larry Polin. Pseudodifferential operators on groups with dilations. *Duke Mathematical Journal*, 68(1) :31–65, 1992.
- [36] Ronald R Coifman and Yves Meyer. Au dela des opérateurs pseudo-différentiels. 1978.
- [37] Alain Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. *Algèbres d'opérateurs LNM*, 725 :19–143, 1979.
- [38] Alain Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 38, pages 521–628. Citeseer, 1982.
- [39] Alain Connes. *Noncommutative Geometry*. Gulf Professional Publishing, 1994.
- [40] Alain Connes and Henri Moscovici. The local index formula in noncommutative geometry. *Geometries in Interaction : GAFA special issue in honor of Mikhail Gromov*, pages 174–243, 1995.
- [41] Laurence Corwin and Frederick P Greenleaf. *Representations of nilpotent Lie groups and their applications : Volume 1, Part 1, Basic theory and examples*, volume 18. Cambridge University Press, 1990.
- [42] Nathan Couchet and Robert Yuncken. On polyhomogeneous symbols and Heisenberg pseudodifferential calculus. 2022. <https://arxiv.org/abs/2210.15391>.
- [43] Nathan Couchet and Robert Yuncken. A groupoid approach to the Wodzicki residue. 2023. <https://arxiv.org/abs/2303.15787>.
- [44] Philippe Courrège. Transformation de Fourier pour les fonctions homogènes de degré  $-n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . *Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, 7(1) :A1–A15.
- [45] Marius Crainic and Rui Loja Fernandes. Integrability of Lie brackets. *Annals of Mathematics*, pages 575–620, 2003.

- 
- [46] Jean le Rond d'Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. 1747.
- [47] Shantanu Dave and Stefan Haller. Graded hypoellipticity of bgg sequences. *arXiv preprint arXiv :1705.01659*, 2017.
- [48] Shantanu Dave and Stefan Haller. The heat asymptotics on filtered manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 30(1) :337–389, 2020.
- [49] Shantanu Dave and Stefan Haller. Graded hypoellipticity of bgg sequences. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 62(4) :721–789, 2022.
- [50] Claire Debord. Local integration of Lie algebroids. *Banach Center Publications*, 54 :21–33, 2000.
- [51] Claire Debord. Holonomy groupoids of singular foliations. *Journal of Differential Geometry*, 58(3) :467–500, 2001.
- [52] Claire Debord and Georges Skandalis. Adiabatic groupoid, crossed product by  $\mathbb{R}_+^*$  and pseudodifferential calculus. *Advances in Mathematics*, 257 :66–91, 2014.
- [53] Claire Debord and Georges Skandalis. Lie groupoids, pseudodifferential calculus, and index theory. In *Advances in Noncommutative Geometry*, pages 245–289. Springer, 2019.
- [54] Anton Deitmar. On Haar systems for groupoids. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 37(3) :269–275, 2018.
- [55] Jean Dieudonné and Laurent Schwartz. La dualité dans les espaces (F) et (LF). In *Annales de l'institut Fourier*, volume 1, pages 61–101, 1949.
- [56] Benjamin Collas Stéphane Collion Direction : Jean-Pierre Marco, Hakim Boumaza et al. *Mathématiques Analyse L3 : Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés*. Pearson Education France, 2009.
- [57] Jacques Dixmier. Existence de traces non normales. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des Sciences Série A*, 262(20) :1107, 1966.
- [58] William F Donoghue. *Distributions and Fourier transforms*. Academic Press, 1969.
- [59] Adrien Douady and Michel Lazard. Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes. *Inventiones mathematicae*, 1(2) :133–151, 1966.
- [60] Pierre Driutti. *Représentations unitaires des réseaux dans les groupes de Lie Nilpotents*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 1999.
- [61] Joan L Dyer. A nilpotent Lie algebra with nilpotent automorphism group. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76(1) :52–56, 1970.
- [62] K Dykema, G Weiss, and Mariusz Wodzicki. Unitarily invariant trace extensions beyond the trace class. *Complex Analysis and Related Topics*, pages 59–65, 2000.
- [63] Yu V Egorov and Mikhail Aleksandrovich Shubin. *Foundations of the classical theory of partial differential equations*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1998.
- [64] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division : Part i. division by a polynomial of derivation. *American Journal of Mathematics*, 76(4) :883–903, 1954.
- [65] Heath Emerson. *An introduction to  $C^*$ -algebras and non comutative geometry*. [https://www.math.uvic.ca/~hemerson/NCG\\_2.0.pdf](https://www.math.uvic.ca/~hemerson/NCG_2.0.pdf).
- [66] Charles L Epstein. Lectures on indices and relative indices on contact and cr-manifolds. In *Woods Hole Mathematics : Perspectives in Mathematics and Physics*, pages 27–93. World Scientific, 2004.
- [67] Leonhard Euler. Sur la vibration des cordes. 1748. <https://edoc.bbaw.de/opus4-bbaw/files/665/2501i92Wug.pdf>.
- [68] Eske Ellen Ewert. *Index theory and groupoids for filtered manifolds*. PhD thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 2020.
- [69] Eske Ellen Ewert, ZC Han, T Höpfner, D Kern, and ZP Yang. Seminar on nilpotent Lie groups. 2020.
- [70] Jacques Faraut. *Analysis on Lie groups, volume 110 of*. 2008.
- [71] Rui Loja Fernandes and Marius Crainic. Lectures on integrability of Lie brackets. *arXiv preprint math/0611259*, 2006.

- 
- [72] Gaetano Fichera. Solomon G. Mikhlin (1908-1990). *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni, Serie XI, Supplemento*, 5 :49–61, 1994.
- [73] Veronique Fischer and Michael Ruzhansky. *Quantization on nilpotent Lie groups*. Springer Nature, 2016.
- [74] Veronique Fischer and Michael Ruzhansky. *Quantization on nilpotent Lie groups*. Springer Nature, 2016.
- [75] Veronique Fischer and Michael Ruzhansky. Sobolev spaces on graded Lie groups. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 67, pages 1671–1723, 2017.
- [76] Gerald B Folland. The tangential Cauchy-Riemann complex on spheres. *Transactions of the American Mathematical Society*, 171 :83–133, 1972. <https://doi.org/10.2307/1996376>.
- [77] Gerald B Folland. A fundamental solution for a subelliptic operator. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 79(2) :373–376, 1973.
- [78] Gerald B Folland. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. *Arkiv för matematik*, 13(1) :161–207, 1975.
- [79] Gerald B Folland. Applications of analysis on nilpotent groups to partial differential equations. 1977.
- [80] Gerald B Folland. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Number 122. Princeton University Press, 1989.
- [81] Gerald B Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton Academic Press, 1995.
- [82] Gerald B Folland. *A course in abstract harmonic analysis*, volume 29. CRC press, 2016.
- [83] Gerald B Folland and Elias Menachem Stein. Estimates for the  $\bar{\partial}_b$  complex and analysis on the Heisenberg group. *Communication on pure and applied mathematics Princeton University*, 27 :429–522, 1974.
- [84] Gerald B Folland and Elias Menachem Stein. *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*, volume 28. Princeton University Press, 1982.
- [85] Friedrich Gerard Friedlander and Mark Suresh Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge University Press, 1998.
- [86] Isabelle Gallagher. Analyse fonctionnelle. Version du 22 mai 2019. <https://www.math.ens.psl.eu/shared-files/9329/?Analyse%20Fonctionnelle%20Poly%202018-2019.pdf>.
- [87] Israel M Gel'fand. On elliptic equations. *Russian Mathematical Surveys*, 15(3) :113, 1960.
- [88] Daryl Geller. Liouville theorem for homogeneous groups. *Communications in Partial Differential Equations*, 8(15) :1665–1677, 1983.
- [89] Maurice Gevrey. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. premier mémoire. In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 35, pages 129–190, 1918.
- [90] Georges Giraud. Équations à intégrales principales; étude suivie d'une application. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 51, pages 251–372, 1934.
- [91] Paweł Głowacki. The Rockland condition for nondifferential convolution operators. *Duke Math. J*, 58(2) :371–395, 1989.
- [92] Paweł Głowacki. The Rockland condition for nondifferential convolution operators ii. *Studia Mathematica*, 98(2) :99–114, 1991.
- [93] Carolyn Gordon, David L Webb, and Scott Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Inventiones mathematicae*, 110(1) :1–22, 1992.
- [94] Carolyn Gordon, David L Webb, and Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1) :134–138, 1992.
- [95] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.
- [96] George Green. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. 1852.
- [97] Hilbrand Johannes Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. In *On the principles of elementary quantum mechanics*, pages 1–56. Springer, 1946.

- 
- [98] Alex Grossmann, Guy Loupias, and Elias Menachem Stein. An algebra of pseudo-differential operators and quantum mechanics in phase space. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 18, pages 343–368, 1968.
- [99] Alexandre Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, volume 16. American Mathematical Society Providence, 1955.
- [100] Alain Guichardet. La trace de Dixmier et autres traces. *L'Enseignement Mathématique*, 61(3) :461–481, 2016.
- [101] Victor Guillemin. A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenvalues. *Advances in Mathematics*, 55(2) :131–160, 1985.
- [102] Jacques Hadamard. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. *Paris*, 11 :243–264, 1932.
- [103] Peter Hahn. Haar measure for measure groupoids. *Transactions of the American Mathematical Society*, 242 :1–33, 1978.
- [104] Brian C Hall. *Quantum theory for mathematicians*, volume 267. Springer, 2013.
- [105] Bernard Helffer and Jean Nourrigat. Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes. *Communications in Partial Differential Equations*, 4(8) :899–958, 1979.
- [106] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic press, 1978.
- [107] Nigel Higson, Fedor Sukochev, and Dmitriy Zanin. In preparation.
- [108] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, volume x of proc. In *Symp. in Pure Math.—Singular Integrals*, pages 138–183. [https://lucris.lub.lu.se/ws/portalfiles/portal/42232915/Lars\\_Hormander\\_Seminar\\_Notes\\_IAS\\_1965\\_66.pdf](https://lucris.lub.lu.se/ws/portalfiles/portal/42232915/Lars_Hormander_Seminar_Notes_IAS_1965_66.pdf).
- [109] Lars Hörmander. On the theory of general partial differential operators. *Acta mathematica*, 94 :161–248, 1955.
- [110] Lars Hörmander. On the division of distributions by polynomials. *Arkiv för matematik*, 3(6) :555–568, 1958.
- [111] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18(3) :501–517, 1965.
- [112] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Mathematica*, 119 :147–171, 1967.
- [113] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, volume x of proc. In *Symp. in Pure Math.—Singular Integrals*, pages 138–183, 1967.
- [114] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*, volume 116. Springer Berlin, 1976, Fourth Printing.
- [115] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators I: Distribution theory and Fourier analysis*, volume 256. Springer, 1983.
- [116] John Horváth. *Topological vector spaces and distributions*. Courier Corporation, 2012.
- [117] George C Hsiao and Wolfgang L Wendland. *Boundary integral equations*. Springer, 2008.
- [118] Olga Iacovlenco. A survey on the methods of proofs of the Malgrange-Ehrenpreis theorem. 2011.
- [119] Victor Yakovlevich Ivrii. Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. *Functional Analysis and Its Applications*, 14(2) :98–106, 1980.
- [120] H. Figueroa J. Varilly, J. Gracia Bondia. *Elements of noncommutative geometry*. Springer, chap 7 :251-318, 2001.
- [121] Ioan Mackenzie James. *History of topology*. Elsevier, 1999.
- [122] Mark Kac. Can one hear the shape of a drum? *The american mathematical monthly*, 73(4P2) :1–23, 1966.
- [123] Christian Kassel. Le résidu non commutatif. *Séminaire Bourbaki*, 708 :199–229, 1989.
- [124] Mahmood Khoshkam and Georges Skandalis. Regular representation of groupoid  $c^*$ -algebras and applications to inverse semigroups. 2002.

- 
- [125] Alexander A Kirillov. Unitary representations of nilpotent Lie groups. *Russian mathematical surveys*, 17(4) :53–104, 1962.
- [126] Anthony William Knap. Representation theory of semisimple groups : an overview based on examples. 1986.
- [127] Anthony William Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer, 1996.
- [128] Joseph J Kohn and Louis Nirenberg. An algebra of pseudo-differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18(1-2) :269–305, 1965.
- [129] Joseph J Kohn and Hugo Rossi. On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. *Annals of Mathematics*, pages 451–472, 1965.
- [130] Kolmogorov. Zufällige bewegungen. *Ann. of Math (2)*, 35, pages 116–117, 1934.
- [131] Heinz König. An explicit formula for fundamental solutions of linear partial differential equations with constant coefficients. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(4) :1315–1318, 1994.
- [132] Wolfgang König and Jürgen Sprekels. *Karl Weierstraß (1815-1897) : Aspekte seines Lebens und Werkes ; aspects of his life and work*. Springer, 2016.
- [133] Maxim Kontsevich and Simeon Vishik. Determinants of elliptic pseudo-differential operators. *arXiv preprint hep-th/9404046*, 1994.
- [134] Olivier Lablée. Dans les pas de Joseph Fourier, quelques mots sur son oeuvre et son héritage en géométrie spectrale. 2018. numéro 262, Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques.
- [135] Olivier Lablée. Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique. *Gazette des mathématiciens*, (116) :11–27, 2008.
- [136] Pierre Simon de Laplace. Mémoire sur divers points d'analyse. *J. École Polytech., Cahier*, 15(8) :229–265, 1809.
- [137] John M Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2003.
- [138] Jean-Marie Lescure, Dominique Manchon, and Stéphane Vassout. About the convolution of distributions on groupoids. *Journal of Noncommutative Geometry*, 11(2) :757–789, 2017.
- [139] Steven Lord, Fedor Sukochev, and Dmitriy Zanin. Singular traces. In *Singular Traces*. de Gruyter, 2012.
- [140] Jesper Lützen. *The prehistory of the theory of distributions*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2012.
- [141] Kirill Mackenzie. *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124. Cambridge University Press, 1987.
- [142] Kirill Mackenzie. *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*. Number 213. Cambridge University Press, 2005.
- [143] Ib Henning Madsen, Jürgen Tornehave, et al. *From calculus to cohomology : de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1997.
- [144] Bernard Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. 6 :271–355, 1956.
- [145] Yuri Ivanovich Manin. Algebraic aspects of nonlinear differential equations. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya " Sovremennye Problemy Matematiki. Noveishie Dostizheniya "*, 11 :5–152, 1978.
- [146] Tadato Matsuzawa. Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–6, 1982.
- [147] James Clerk Maxwell. VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (155) :459–512, 1865.
- [148] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Oxford : Clarendon Press, 1873.
- [149] Anders Melin. Lie filtrations and pseudo-differential operators. *preprint*, 1982.
- [150] Solomon Grigorevich Mikhlin. *Multidimensional singular integrals and integral equations*. Elsevier, 2014.

- [151] Kenneth Miller. An index theorem and hypoellipticity on nilpotent Lie groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 99(2) :419–426, 1982.
- [152] Kenneth G Miller. Parametrices for hypoelliptic operators on step to nilpotent Lie groups. *Communications in Partial Differential Equations*, 5(11) :1153–1184, 1980.
- [153] John Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 51(4) :542–542, 1964.
- [154] Subbaramiah Minakshisundaram and Åke Pleijel. Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds. *Canadian Journal of Mathematics*, 1(3) :242–256, 1949.
- [155] Ieke Moerdijk and Janez Mrcun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91. Cambridge University Press, 2003.
- [156] Bertrand Monthubert and François Pierrot. Indice analytique et groupoïdes de Lie. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(2) :193–198, 1997.
- [157] José Enrique Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 45, pages 99–124. Cambridge University Press, 1949.
- [158] Paul S Muhly and Dana P Williams. Continuous trace groupoid  $C^*$ -algebras, ii. *Mathematica Scandinavica*, pages 127–145, 1992.
- [159] Gerald J Murphy.  *$C^*$ -algebras and operator theory*. Academic press, 2014.
- [160] Jet Nestruev. Smooth manifolds (algebraic definition). *Smooth Manifolds and Observables*, 2003.
- [161] Nirenberg, Calderon Bokobza-Haggiag, Kohn, Seeley, and Singer. Pseudo-differential operators. Springer, 2010.
- [162] Victor Nistor. Groupoids and the integration of Lie algebroids. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 52(4) :847–868, 2000.
- [163] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific journal of mathematics*, 189(1) :117–152, 1999.
- [164] Norbert Ortner and Peter Wagner. A survey on explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators. *Acta Applicandae Mathematica*, 47(1) :101–124, 1997.
- [165] Alan Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*, volume 170. Springer Science & Business Media, 1999.
- [166] Dilcia Pérez and Yamilet Quintana. A survey on the Weierstrass approximation theorem. *arXiv preprint math/0611038*, 2006.
- [167] Bent E Petersen. *Introduction to the Fourier transform & pseudo-differential operators*. Pitman Advanced Publishing Program, 1983.
- [168] Bent E Petersen. Introduction to the Fourier transform & pseudo-differential operators, pitman publ. Inc., Boston, New York, Boston, 1983.
- [169] Cartier Pierre. Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes. astérisque,(326) : Exp. no. 987, viii, 165–196 (2010), 2009. *Séminaire Bourbaki*, 2007, 2008.
- [170] Pjateckii-Sapiro. Geometry of classical domains and theory of automorphic functions, sovremennye problemy matematiki, gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1961.
- [171] Siméon Denis Poisson. Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes. *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, 3 :388–392, 1813.
- [172] Raphaël Ponge. Heisenberg calculus and spectral theory of hypoelliptic operators on Heisenberg manifolds. *arXiv preprint math/0509300*, 2005.
- [173] Raphaël Ponge. The tangent groupoid of a Heisenberg manifold. *Pacific journal of mathematics*, 227(1) :151–175, 2006.
- [174] Raphaël Ponge. Noncommutative residue for Heisenberg manifolds. applications in CR and contact geometry. *Journal of Functional Analysis*, 252(2) :399–463, 2007.
- [175] Raphaël Ponge. *Heisenberg calculus and spectral theory of hypoelliptic operators on Heisenberg manifolds*. American Mathematical Soc., 2008.

- 
- [176] Raphaël Ponge. Connes' integration and Weyl's laws. *arXiv preprint arXiv :2107.01242*, 2021.
- [177] Jean Pradines. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiable. *CR Acad. Sci. Paris*, 263 :907–910, 1966.
- [178] Jean Pradines. Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde. *CR Acad. Sci. Paris Sér. AB*, 266 :A1194–A1196, 1968.
- [179] Jean Pradines. Troisième théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables. *CR Acad. Sci. Paris, Série A*, 267 :21–23, 1968.
- [180] Abraham Ralph and E. Marsden Jerrold. *Foundations of mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1980. Second Edition.
- [181] Michael Reed, Barry Simon, et al. *I : Functional analysis*, volume 1. Gulf Professional Publishing, 1980.
- [182] Jean Renault. *A groupoid approach to  $C^*$ -algebras*, volume 793. Springer, 1980.
- [183] HP Robertson. *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, 1949. translated from the second (revised) german edition, original article "Quantenmechanik und gruppentheorie" 1927 by Hermann Weyl.
- [184] Charles Rockland. Hypoellipticity on the Heisenberg group-representation-theoretic criteria. *Transactions of the American Mathematical Society*, 240 :1–52, 1978.
- [185] A Martins Rodrigues. Chapitre ii fibrés vectoriels. jets. *Cours de l'institut Fourier*, 2 :19–37, 1969.
- [186] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation-Algèbre et géométrie : Éléments de cours avec près de 300 exercices corrigés*. De Boeck Supérieur, 2021.
- [187] Jean-Pierre Rosay. A very elementary proof of the Malgrange-Ehrenpreis theorem. *The American mathematical monthly*, 98(6) :518–523, 1991.
- [188] Linda Preiss Rothschild and Elias Menachem Stein. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. 1976.
- [189] Paulo Carrillo Rouse. A schwartz type algebra for the tangent groupoid. *K-theory and noncommutative geometry, EMS Ser. Congr. Rep*, pages 181–199, 2008.
- [190] Raymond A Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces*, volume 73. Springer, 2002.
- [191] Mikio Sato. Theory of hyperfunctions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I*, 8 :139–193, 1959.
- [192] Laurent Schwartz. Les opérateurs de convolution. le théorème des noyaux. *Séminaire Schwartz*, 1 :1–7, 1953.
- [193] Laurent Schwartz. Les opérateurs invariants par rotation, l'opérateur  $\delta$ . *Séminaire Schwartz*, 2, 1954-1955. talk :7.
- [194] Laurent Schwartz. Solutions élémentaires des opérateurs  $\delta$  et  $\delta + \lambda$ . *Séminaire Schwartz*, 2, 1954-1955. talk :8.
- [195] Laurent Schwartz. Some applications of the theory of distributions. *Lectures on modern mathematics*, 1 :23–58, 1963.
- [196] Laurent Schwartz. Les travaux de bernard malgrange (premiere partie). In *Annales de l'institut Fourier*, volume 43, pages 1199–1209, 1993.
- [197] Laurent Schwartz. *Théorie des Distributions, reprint*. 1998.
- [198] Simon Scott. *Traces and determinants of pseudodifferential operators*. Oxford University Press, 2010.
- [199] Anthony Karel Seda. Haar measures for groupoids. In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences*, pages 25–36. JSTOR, 1976.
- [200] Anthony Karel Seda. On the continuity of Haar measure on topological groupoids. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 96(1) :115–120, 1986.
- [201] Robert T Seeley. Singular integrals on compact manifolds. *American Journal of Mathematics*, 81(3) :658–690, 1959.
- [202] Mikhail Aleksandrovich Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*, volume 57. Springer, 1987.

- 
- [203] Barry Simon. *Trace ideals and their applications*. Number 120. American Mathematical Soc., 2005.
- [204] Jacques Simon. *Banach, Fréchet, Hilbert and Neumann Spaces, volume 1*. ISTE Wiley, 2017.
- [205] Elias Menachem Stein. Some problems in harmonic analysis suggested by symmetric spaces and semi-simple groups. In *Proc. Int. Congr. Math., Nice I*, pages 173–179, 1970.
- [206] Elias Menachem Stein. Singular integrals and estimates for the Cauchy-Riemann equations. 1973.
- [207] Noboru Tanaka. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 10(1) :1–82, 1970.
- [208] Michael Eugene Taylor. Pseudodifferential operators. 1982.
- [209] Michael Eugene Taylor. *Noncommutative microlocal analysis*. Number 313. American Mathematical Soc., 1984.
- [210] Michael Eugene Taylor. *Noncommutative harmonic analysis*. Number 22. American Mathematical Soc., 1986.
- [211] Michael Eugene Taylor. *Partial differential equations II : Qualitative studies of linear equations*, volume 116. Springer Science & Business Media, 1996.
- [212] AFM ter Elst and Derek W Robinson. Spectral estimates for positive Rockland operators. *Australian Mathematical Society Lecture Series*, 9, 1997.
- [213] Sundaram Thangavelu. *Harmonic Analysis on the Heisenberg Group*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2012.
- [214] François Trèves. *Linear partial differential equations with constant coefficients : existence, approximation, and regularity of solutions*, volume 6. Gordon and Breach, 1966, New York.
- [215] François Trèves. *Basic linear partial differential equations*, volume 62. Academic press, 1975.
- [216] François Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press New York, 1967.
- [217] François Trèves. “introduction to pseudo-differential and fourier integral operators,”vol. 2, the university series in math, 1980.
- [218] François Trèves. Standard pseudodifferential operators. In *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators*, pages 1–81. Springer, 1980.
- [219] André Unterberger and Juliane Bokobza. Sur une généralisation des opérateurs de Calderon-Zygmund et des espaces hs. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’académie des Sciences*, 260(12) :3265–+, 1965.
- [220] Erik Van Erp. The Atiyah-Singer index formula for subelliptic operators on contact manifolds. 2005. Ph.D. thesis, [https://etda.libraries.psu.edu/files/final\\_submissions/2719](https://etda.libraries.psu.edu/files/final_submissions/2719).
- [221] Erik Van Erp. Noncommutative topology and the world’s simplest index theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(19) :8549–8556, 2010.
- [222] Erik Van Erp. The Atiyah-Singer index formula for subelliptic operators on contact manifolds. part i. 171 :1647–1681, May 2010. <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v171-n3-p05-s.pdf>.
- [223] Erik Van Erp and Robert Yuncken. A groupoid approach to pseudodifferential calculi. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(756) :151–182, 2017.
- [224] Erik Van Erp and Robert Yuncken. On the tangent groupoid of a filtered manifold. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 49(6) :1000–1012, 2017.
- [225] Léon Charles Prudent Van Hove. *Sur certaines représentations unitaires d’un groupe infini de transformations*. PhD thesis, Bruxelles U., 1951.
- [226] Stéphane Vassout. *Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal*. PhD thesis, Paris 6, 2001.
- [227] Vasilii Vladimirov. *Equations of mathematical physics*.
- [228] Peter Wagner. A fundamental solution of N. Zeilon’s operator. *Mathematica Scandinavica*, pages 273–287, 2000.



- 
- [229] Peter Wagner. On the explicit calculation of fundamental solutions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 297(2) :404–418, 2004.
- [230] Joel Westman. Nontransitive groupoid algebras. *Univ. of California at Irvine*, 1967.
- [231] Hermann Weyl. Über die asymptotische verteilung der eigenwerte. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911 :110–117, 1911.
- [232] Hermann Weyl. The method of orthogonal projection in potential theory. *Duke Mathematical Journal*, 7(1) :411–444, 1940.
- [233] Dana P Williams. *Crossed Products of  $C^*$ -Algebras*. Number 134. American Mathematical Soc., 2007.
- [234] Dana P Williams. Haar systems on equivalent groupoids. *arXiv preprint arXiv :1501.04077*, 2015.
- [235] Mariusz Wodzicki. Local invariants of spectral asymmetry. *Inventiones mathematicae*, 75(1) :143–177, 1984.
- [236] Mariusz Wodzicki. *Spectral asymmetry and noncommutative residue*. PhD thesis, Thesis, Stekhlov Institute of Mathematics, Moscow, 1984.
- [237] Mariusz Wodzicki. Noncommutative residue chapter i. fundamentals. *K-theory, arithmetic and geometry*, pages 320–399, 1987.
- [238] Man Wah Wong. *The Weyl Transform*. Springer, 1998.
- [239] Man Wah Wong. *Introduction to pseudodifferential operators, An*, volume 6. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [240] Robert Yuncken. On pseudodifferential operators on filtered and multifiltered manifolds. *arXiv preprint arXiv :1810.10272*, 2018.
- [241] Claude Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*, volume 130. Dunod, 2002.
- [242] Antoni Zygmund. Intégrales singulières. 1964-1965. Publications du séminaire d'Orday 4ième année : 1964/65. Cours rédigé par Mme Fiolet Michel, Harzallah Khélifa.
- [243] Antoni Zygmund. Transformée de Hilbert dans le cas d'une variable. *Intégrales Singulières*, pages 7–25, 1971. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BFb0070447.pdf>.
- [244] Antoni Zygmund. *Intégrales singulières*, volume 204. Springer, 2006.