



HAL
open science

Trajectographie passive en champ proche par antenne linéaire remorquée et trois antennes de flanc d'un sous-marin, avec prise en compte de la propagation

Antoine Lebon

► To cite this version:

Antoine Lebon. Trajectographie passive en champ proche par antenne linéaire remorquée et trois antennes de flanc d'un sous-marin, avec prise en compte de la propagation. Autre. Université de Toulon, 2022. Français. NNT : 2022TOUL0005 . tel-04303457

HAL Id: tel-04303457

<https://theses.hal.science/tel-04303457>

Submitted on 23 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE 548 – MER ET SCIENCES.
IM2NP, UMR CNRS 7334, équipe signal & tracking.

THÈSE

présentée par :
Antoine LEBON

soutenue le : **8 Juillet 2022**

pour obtenir le grade de Docteur en Automatique, Signal, Productique, Robotique.

Trajectographie passive en champ proche par antenne linéaire remorquée et trois antennes de flanc d'un sous-marin, avec prise en compte de la propagation

THÈSE dirigée par :

JAUFFRET Claude, Professeur à l'université de Toulon

PEREZ Annie-Claude, Maître de conférences HDR à l'université de Toulon

Jury :

M. Guillaume GINOLHAC (rapporteur)	Professeur, Université Savoie Mont Blanc
M. Alain KIBANGOU (rapporteur)	MCF-HDR Université Grenoble Alpes
M. Cédric RICHARD (examinateur)	Professeur, Université Côte d'Azur
M. Dann LANEUVILLE (examinateur)	Ingénieur expert, Naval Group
M. Claude JAUFFRET (examinateur)	Professeur, UTLN, directeur
Mme. Annie-Claude PEREZ (examinatrice)	MCF-HDR, UTLN, codirectrice

Remerciements

J'aimerais remercier toutes les personnes qui m'ont aidé durant ces trois dernières années et ont grandement contribué à la réussite de cette thèse.

En premier lieu, je souhaite exprimer mes sincères remerciements à mes deux directeurs de thèse : M Claude Jauffret et Mme Annie-Claude Perez pour le temps conséquent qu'ils m'ont accordé, leurs qualités pédagogiques et scientifiques, et leur sympathie. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je leur adresse ma gratitude pour tout cela.

Je tiens également à remercier les membres de la société Naval Group, tout particulièrement M. Dann Laneuville pour son encadrement expert, pour ses conseils avisés et pour sa bonne humeur. M. Laurent Pelissero, sans qui cette thèse aurait été amputée d'une grande partie de ces résultats, je le remercie pour le temps qu'il m'a consacré lors d'entretien durant lesquels j'ai beaucoup appris. Plus précisément, je remercie l'ensemble des membres du département AHS, dirigé par M. Grégory Bartoli, pour leurs bienveillances et leurs bonnes ambiances à chacun de mes déplacements à Naval Group.

Je souhaiterais remercier M. Guillaume Ginolhac et M. Alain Kibangou pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Vos remarques constructives ont permis d'améliorer ce manuscrit. Je remercie également M. Cédric Richard d'avoir accepté d'examiner cette thèse et également d'avoir présidé le jury.

J'ai reçu au sein de l'équipe Signal & Tracking de l'IM2NP un accueil très chaleureux et y passé trois très bonnes années, pour tout cela je souhaite remercier ses membres : Bernard Xerri, Bruno Borloz, Gilles Chabriel, Jean Barrère, Annie-Claude Perez, Claude Jauffret.

Je remercie également Jérémy Payan pour les trois bonnes années que j'ai passé au sein du laboratoire.

Je remercie Romain Besseau pour le logiciel Antidote.

Enfin, je voudrais remercier ma famille et mes amis pour leurs soutiens et les bons moments que j'ai passés avec vous.

Table des matières

Table des figures	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des symboles	xiii
1 Préambule	1
2 Introduction : mise en contexte	7
2.1 La trajectographie	7
2.2 Capteurs et mesures	9
2.2.1 Mesures délivrées par l’antenne linéaire remorquée	14
2.2.1.1 Définition des angles	14
2.2.1.2 Effet de site	18
2.2.2 Mesures délivrées par les antennes de flanc	19
2.2.3 Bruit de mesures et mesures bruitées	21
2.3 Modélisation et caractérisation du milieu sous-marin	23
2.3.1 Trajet de l’onde en rayon droit	25
2.3.2 Comparaison du modèle de propagation en lignes droites avec une modélisation plus réaliste	27
2.4 Grand fond et classes de trajets pour l’antenne linéaire remorquée	33
2.4.1 Grand fond	33
2.4.2 Classes de trajets	42
2.5 Notre démarche	47
2.5.1 Analyse de l’observabilité	47
2.5.2 Choix de l’estimateur et l’algorithme d’estimation	48
2.5.3 Analyse des performances asymptotiques	49
2.5.4 Analyse des performances empiriques	51
2.6 Bilan du chapitre	53

3	Trajectographie passive à partir une antenne linéaire remorquée	55
3.1	Cas d'un seul trajet : l'antenne est en MRU	56
3.1.1	Analyse de l'observabilité	56
3.1.2	Estimation de la trajectoire	60
3.2	Cas d'un seul trajet : l'antenne manœuvre	62
3.2.1	Analyse de l'observabilité	62
3.2.2	Estimation lorsque l'onde se propage suivant le trajet réfléchi-fond	63
3.2.2.1	Estimation du vecteur d'état complet	63
3.2.2.2	Estimation du vecteur d'état réduit lorsque la profondeur de la source est fixée	65
3.2.2.3	Estimation du vecteur d'état réduit avec la méthode conventionnelle du <i>BOTMA</i>	66
3.2.3	Estimation du vecteur d'état réduit lorsque le trajet est inconnu	66
3.3	Cas de deux trajets : l'antenne est en MRU	67
3.3.1	Observabilité	67
3.3.2	Estimation de la trajectoire	73
3.3.2.1	Estimabilité	74
3.3.2.2	Simulations de Monte-Carlo	75
3.3.3	Estimation lorsque le trajet est inconnu	77
3.4	Bilan du chapitre	78
4	Trajectographie passive à partir d'antennes de flanc	81
4.1	Les antennes délivrent uniquement des mesures de cosinus d'élévation	81
4.1.1	L'onde se propage suivant un unique trajet	82
4.1.1.1	Analyse de l'observabilité	82
4.1.1.2	Évaluation des performances asymptotiques	85
4.1.2	L'onde se propage suivant deux trajets	85
4.1.2.1	Analyse de l'observabilité	86
4.1.2.2	Évaluation des performances asymptotiques	89
4.2	Les antennes délivrent des mesures de TDOA et des mesures de cosinus d'élévation	90
4.2.1	L'onde se propage suivant un unique trajet	90
4.2.1.1	Analyse de l'observabilité	91
4.2.1.2	Évaluation des performances asymptotiques	96
4.2.1.3	Estimation du vecteur d'état réduit lorsque le trajet est connu	96
4.2.1.4	Estimation du vecteur d'état réduit lorsque le trajet est inconnu	98
4.2.2	L'onde se propage suivant deux trajets	99
4.2.2.1	Analyse de l'observabilité	100
4.2.2.2	Évaluation des performances asymptotiques	101
4.2.2.3	Estimation du vecteur d'état complet lorsque le trajet est connu	101
4.2.2.4	Estimation du vecteur d'état complet lorsque le trajet est inconnu	103
4.3	Bilan du chapitre	103
5	Trajectographie passive à partir d'une antenne linéaire remorquée et de trois antennes de flanc	105
5.1	Un seul trajet de type connu	105

5.1.1	Analyse de l'observabilité	106
5.1.2	Évaluation des performances asymptotiques	107
5.1.3	Estimation	108
5.2	Un seul trajet de type inconnu	111
5.3	Deux trajets de types inconnus	111
5.4	Bilan du chapitre	113
6	Conclusion	115
A	Annexe du chapitre 2 : expression de la profondeur relative entre la source et l'observateur	119
B	Annexe du chapitre 2 : initialisation et test d'arrêt de l'algorithme d'estimation.	129
C	Annexe du chapitre 3 : démonstration du théorème 2	131
D	Lemme pour la démonstration du théorème 5	141
E	Annexe du chapitre 5 : test d'association des mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée avec les mesures delivrées par les antennes de flanc	147
	Bibliographie	149

Table des figures

1.1	Peinture islamique du 16 ^{ème} siècle montrant Alexandre Le Grand descendant dans un sous-marin de verre (extrait de [Worthington, 2014]).	1
1.2	Dispositif permettant de mesurer la vitesse du son dans les eaux du lac Léman (extrait de [Lasky, 1977]).	2
1.3	Image d'archive d'un <i>U-boot</i> (extrait de [Williamson, 2012]).	2
1.4	Antenne de l'avant d'un sous-marin classique russe au chantier (extrait de [Pillon, 2016]).	3
2.1	Géométrie d'un problème classique de BOTMA.	8
2.2	Géométrie d'un problème de trajectographie par mesure d'angle dans un environnement en trois dimensions.	9
2.3	Différentes antennes pouvant équiper un sous-marin (illustration inspirée de la figure 11 de [Pillon, 2016]).	10
2.4	Chaîne de traitement sonar.	12
2.5	Illustration des mesures angulaires délivrées par les deux types d'antennes et illustration des cônes d'ambiguïtés.	13
2.6	Cônes d'ambiguïtés pour l'antenne linéaire remorquée.	15
2.7	Représentation des angles dans le plan vertical contenant l'antenne et la source et représentation des angles dans le plan horizontal.	16
2.8	Représentation des angles de site pour l'antenne linéaire remorquée.	17
2.9	Pistes de pseudo-azimut et d'azimut.	19
2.10	Construction des angles d'élévation pour deux trajets.	20
2.11	Exemple de mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée.	24
2.12	Exemple de mesures délivrées par les antennes de flanc.	24
2.13	Trajet (1,0,1).	26
2.14	Trajet (1,2,2).	26
2.15	Exemple de profil bathycélérimétrique (extrait de [Le Gall, 2015]).	27
2.16	Comparaison entre un trajet réfléchit-fond « réaliste » et un trajet réfléchit-fond modélisé en lignes droites.	28
2.17	Exemple de deux trajets réfractés portant le même nom.	29
2.18	Comparaison entre la modélisation dite réaliste et la modélisation en lignes droites. . .	30

2.19	Carte des deux trajets les plus énergétiques lorsque le fond marin se situe à 4830m.	32
2.20	Carte des deux trajets les plus énergétiques lorsque le fond marin se situe à 200m.	32
2.21	Variation de la différence des cosinus de pseudo-gisement d'un trajet direct et d'un trajet réfléchi-fond en fonction de la profondeur du fond marin.	34
2.22	Exemple de carte en trois dimensions en fonction de P , ρ_{OT} et h_O	35
2.23	Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec $\Delta h_O = \frac{\pi}{10}$, $\Delta P = 460\text{m}$ et $\Delta \rho = 4\text{km}$	36
2.24	Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec $\Delta h_O = \frac{\pi}{180}$, $\Delta P = 1\text{m}$ et $\Delta \rho = 40\text{m}$	37
2.25	Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec la droite d'équation $P = 0.2052 \times \rho_{OT} + 400$	38
2.26	Abaque du grand fond et du petit fond.	39
2.27	Abaque dans le cas où $z_T \neq z_O$	40
2.28	Dualité entre les notions de grand fond et de champ proche.	41
2.29	Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec $\Delta P = 1\text{m}$ et $\Delta \rho = 40\text{m}$; et avec les droites d'équations $P = 0.2052 \times \rho_{OT} + 400$ (en rouge) et $P = 0.017 \times \rho_{OT} + 400$ (en jaune).	42
2.30	Calcul des valeurs de cosinus de pseudo-gisement pour différents trajets sur un scénario.	43
2.31	Valeur absolue du cosinus de pseudo-gisement calculée pour le scénario de la figure 2.30a et pour différents trajets.	46
2.32	Valeur absolue du cosinus d'élévation calculée pour le scénario de la figure 2.30a et pour différents trajets.	47
2.33	Trajectoire de source inobservable et solutions homothétiques.	48
3.1	Répartition des estimés pour $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$	61
3.2	Répartition des estimés pour $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-4}$	62
3.3	Répartition des 500 estimés de la position initiale et ellipse de confiance à 90% (en bleu la trajectoire de l'observateur et en rouge la trajectoire de la source).	64
3.4	Répartition des 500 estimés du vecteur d'état réduit et ellipse de confiance.	65
3.5	Répartition des 500 estimés donnée par une méthode classique de <i>BOTMA</i> et ellipse de confiance.	67
3.6	Trajectoires de la source et de ses trois sources fantômes.	74
3.7	Répartition des 500 estimés et ellipse de confiance.	75
3.8	Trajectoires de la source et de la source fantôme G_2 avec ellipse de confiance.	76
3.9	Répartition des 500 estimés et ellipse de confiance.	77
3.10	Trajets suivis par les ondes.	78
4.1	Intersection des trois cônes : en rouge, en bleu et vert les positions respectivement des centres des antennes ainsi que leurs cônes d'ambiguïtés; en noir et en magenta les intersections des trois cônes (dont l'une est la position de la source).	83
4.2	Exemples de trajets suivis par l'onde acoustique émise par une source.	86
4.3	Intersection des trois cercles sur lesquels se trouve la source.	89
4.4	Le sous-marin, ses antennes de flanc et la source émettant une onde empruntant le trajet direct.	90
4.5	Répartition des 500 estimés du vecteur d'état réduit et ellipse de confiance pour le premier scénario.	98
4.6	Répartition des 500 estimés du vecteur d'état réduit et ellipse de confiance pour le premier scénario.	99

4.7	Répartition des 500 estimés du vecteur d'état complet et ellipse de confiance pour le premier scénario.	102
4.8	Répartition des 500 estimés du vecteur d'état complet et ellipse de confiance pour le premier scénario.	103
5.1	Variation des écarts types asymptotiques des composantes du vecteur d'état en fonction de la profondeur supposée de la source.	108
5.2	Estimation de la trajectoire de la source.	109
5.3	Variation de l'erreur d'estimation en distance et en azimuth en fonction de l'immersion supposée de la source.	110
5.4	Représentants choisis pour les classes 1, 2 et 3 en fonction du signe de la moyenne des cosinus de d'élévation.	111
A.1	L'onde suit un trajet direct (ou trajet $(\pm 1, 0, 0)$).	119
A.2	L'onde subit une réflexion à la surface (ou trajet $(-1, 1, 0)$).	120
A.3	L'onde subit une réflexion sur le fond (ou trajet $(1, 0, 1)$).	121
A.4	L'onde subit une réflexion sur la surface et une sur le fond (ou trajet $(-1, 1, 1)$).	121
A.5	L'onde subit une réflexion sur le fond et une sur la surface (ou trajet $(1, 1, 1)$).	122
A.6	L'onde subit deux réflexions sur la surface et une sur le fond (ou trajet $(-1, 2, 1)$).	123
A.7	L'onde subit deux réflexions sur le fond et une sur la surface (ou trajet $(1, 1, 2)$).	123
A.8	L'onde subit deux réflexions sur la surface et deux sur le fond (ou trajet $(-1, 2, 2)$).	124
A.9	L'onde subit deux réflexions sur le fond et une sur la surface (ou trajet $(1, 2, 2)$).	125
A.10	L'onde subit trois réflexions sur la surface et deux sur le fond (ou trajet $(-1, 3, 2)$).	125
D.1	Exemple de trajets où $\delta = 1$ et $\tilde{\delta} = -1$	142
D.2	Exemple de trajets où $\delta = -1$ et $\tilde{\delta} = 1$	142
D.3	Exemple de trajets où $\delta = 1$ et $\tilde{\delta} = 1$	143
D.4	Angles ψ , $\phi_{O_i T}$ et $\tilde{\phi}_{O_i T}$	143
D.5	Trajet $(1, 0, 1)$ et trajet $(1, 1, 1)$	145
E.1	Étape du test d'association.	148

Liste des tableaux

2.1	Liste des trajets retournés par l'algorithme de lancer de rayons, rangés du plus énergétique au moins énergétique.	30
2.2	Tableau de variation de $f(x)$	45
3.1	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit quand $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$, au sens du biais et de l'écart type empirique (que nous comparons à la racine carrée des éléments diagonaux de la borne de Cramér-Rao.	61
3.2	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit avec $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-4}$	61
3.3	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état complet.	64
3.4	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit.	66
3.5	Performances empiriques du test de décision.	67
3.6	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit.	75
3.7	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit.	76
3.8	Performances empiriques du test de décision sur la nature des trajets.	77
3.9	Performances empiriques du test de décision sur la nature des trajets.	78
4.1	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit sur le premier scénario pour un trajet réfléchi-fond.	97
4.2	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit sur le second scénario pour un trajet direct.	98
4.3	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état complet sur le premier scénario pour le trajet réfléchi-fond et le trajet $(-1, 3, 2)$	102
4.4	Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état complet sur le second scénario pour le trajet direct et le trajet réfléchi-fond.	103
5.1	Résultat d'estimation de 500 simulations de Monte-Carlo sur le second scénario et pour des ondes acoustiques s'étant propagées suivant des trajets directs ou réfléchi-fond.	109
5.2	Performances empiriques de la méthode calculées sur le premier cas pour différentes durées de scénario.	112
5.3	Performances empiriques de la méthode calculées sur le second cas pour différentes durées de scénario.	113

A.1	Résumé des expressions de ζ_{OT} en fonction du trajet suivi par l'onde acoustique. . . .	126
-----	---	-----

Opérateurs mathématiques

$\bar{\cdot}$	Moyenne
\cdot^{-1}	Inverse d'une matrice
\cdot^T	Transposée d'une matrice
$\hat{\cdot}$	Estimé/estimateur
$\mathbb{1}$	Vecteur colonne unité
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{P}(a)$	Probabilité d'un événement a
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs
Φ	Matrice de transition
\mathbf{I}_n	Matrice identité de dimension n
\mathbf{M}	Matrice
\mathbf{S}	Matrice de symétrie orthogonale dans l'espace par rapport à un plan
$ \cdot $	Valeur absolue
$\nabla_{X_T} \cdot$	Gradient de \cdot par rapport aux composantes de X_T
$\ \cdot\ $	Norme
$\ \cdot\ _{\mathbf{A}}$	Norme pondérée par \mathbf{A}
$\widehat{\cdot, \cdot}$	Angle formé entre deux points
$\det(\cdot)$	Déterminant d'une matrice
$sign \cdot$	Signe de \cdot

Notations relatives à l'observateur

h_O	Cap suivi par l'observateur
\dot{x}_O	Abscisse du vecteur vitesse de l'observateur
\dot{y}_O	Ordonnée du vecteur vitesse de l'observateur

d	Distance séparant deux antennes de flanc
O	Observateur
P_O	Vecteur position de l'observateur
x_O	Abscisse de P_O
y_O	Ordonnée de P_O
z_O	Profondeur (côte) de P_O

Notations relatives à la source

h_T	Cap suivi par la source
\dot{x}_T	Abscisse du vecteur vitesse de la source
\dot{y}_T	Ordonnée du vecteur vitesse de la source
P_T	Vecteur position de la source
T	Source
X_T	Vecteur d'état décrivant la trajectoire de la source
x_T	Abscisse de P_T
y_T	Ordonnée de P_T
z_T	Côte de P_T

Notations relatives à la source et à l'observateur

θ_{OT}^+ et θ_{OT}^-	Pseudo-azimut de la source vu par l'observateur
$\theta_{OT}^{Extract}$	Piste d'azimut retournée par l'extracteur
θ_{OT}	Angle d'azimut de la source vu par l'observateur
ϕ_{OT}	Angle d'élévation de la source vu par l'observateur

g_{OT}	Angle de gisement de la source vu par l'observateur
\mathcal{P}_{OT}	Vecteur de la position relative de l'image de la source par rapport à l'observateur
α_{OT}	Angle de pseudo-gisement de la source vu par l'observateur
ρ_{OT}	Distance séparant l'observateur de la source dans le plan
φ_{OT}	Angle de site de la source vu par l'observateur
ζ_{OT}	Profondeur relative entre la source (ou son image) et l'observateur
P_{OT}	Vecteur de la position relative de la source par rapport à l'observateur
R_{OT}	Distance séparant l'observateur de la source dans l'espace
z_{\max}	Profondeur maximale possible pour un observateur ou une source

Autres notations

Δt	Pas d'échantillonnage
δ	Variable décrivant si l'onde est émise vers le haut ou le bas
B	Borne de Cramér-Rao
R	Matrice de variance-covariance du bruit des mesures de TDOA
$\sigma_{\cos(\alpha)}$	Écart-type du bruit de mesures de cosinus de pseudo-gisement
$\sigma_{\cos(\phi)}$	Écart-type du bruit de mesures de cosinus d'élévation
σ_{τ}	Écart-type du bruit de mesures de TDOA

σ_{BCR}	Écart-types asymptotiques
σ_{emp}	Écart-types empiriques
τ_{ij}	Différence de temps d'arrivée d'une onde acoustique entre l'antenne $n^{\circ}j$ et l'antenne $n^{\circ}i$
$\varepsilon_k, \vartheta_k, \varsigma_k$	Bruit de mesure à un instant k
c	Célérité du son dans l'eau
$C(X_T)$	Critère des moindres carrés
m_i	Mesure bruitée $n^{\circ}i$
n_b	Nombre de réflexions sur le fond d'une onde acoustique
n_s	Nombre de réflexions sur la surface d'une onde acoustique
P	Profondeur du fond marin
s_i	Mesure non-bruitée $n^{\circ}i$
t ou t_k	Instant t (continu) ou instant t_k (échantillonné)

FIM ou **F** Matrice d'information de Fisher

Abréviations

AIS	<i>Automatic Identification System</i>
BCR	Borne De Cramér-Rao
BOTMA	<i>Bearing Only Target Motion Analysis</i>
FA	<i>Flank Array</i>
MRU	Mouvement Rectiligne Uniforme
NEES	<i>Normalized Estimation Error Squared</i>
TA	<i>Towed Array</i> (Antenne Linéaire Remorquée)
TDOA	<i>Time Differences Of Arrival</i>

CHAPITRE 1

Préambule

Le problème de l'exploration sous-marine est un problème qui a fait naître des réflexions philosophiques dès l'Antiquité. On peut retrouver des traces de ces réflexions au travers de récits apocryphes de discussions entre Alexandre Le Grand et Aristote au sujet de pêcheurs d'éponges utilisant des cloches de plongée afin de descendre sous l'eau [Colin, 1994].



FIGURE 1.1 – Peinture islamique du 16^{ème} siècle montrant Alexandre Le Grand descendant dans un sous-marin de verre (extrait de [Worthington, 2014]).

De l'Antiquité à nos jours, ces réflexions n'ont eu de cesse d'évoluer au gré des penseurs de leur époque, passant de réflexions d'ordres philosophiques à des réflexions scientifiques. Il est maintenant impossible de citer l'intégralité des travaux réalisés dans l'espoir de concevoir un véhicule sous-marin opérationnel (nous aurions pu citer les croquis de Léonard de Vinci [Kuethe, 1941] ou bien les travaux de David Bushnell sur la « tortue » [Roland, 1977]). Faisons toutefois une avancée rapide dans le temps jusqu'en

1826. A cette date, le physicien suisse Jean-Daniel Colladon réalise la première mesure de la vitesse du son dans l'eau au lac Léman à l'aide d'une cloche positionnée sous l'eau [Lasky, 1977].

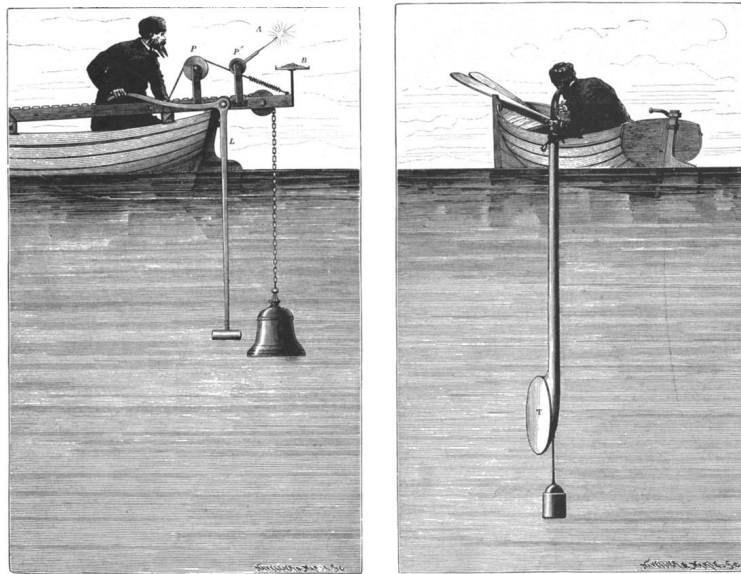


FIGURE 1.2 – Dispositif permettant de mesurer la vitesse du son dans les eaux du lac Léman (extrait de [Lasky, 1977]).

En 1915, à la suite de la découverte de l'effet piézoélectrique par Jacques et Pierre Curie, le scientifique Paul Langevin met au point un dispositif permettant d'émettre une onde acoustique sous l'eau [Klein, 1968]. Ce dispositif est nommé « hydrophone ». Durant la première moitié du 20^{ème} siècle, deux événements majeurs vont précipiter le développement des sous-marins : les deux guerres mondiales. Durant ces deux conflits, ces véhicules ont exercé une pression importante sur le trafic maritime de l'époque en effectuant des frappes sur des navires ou en permettant de passer les blocus. Si l'on devait ne citer qu'un seul modèle de sous-marin, il serait impossible de passer à côté des célèbres *U-boot* allemands [Williamson, 2012].

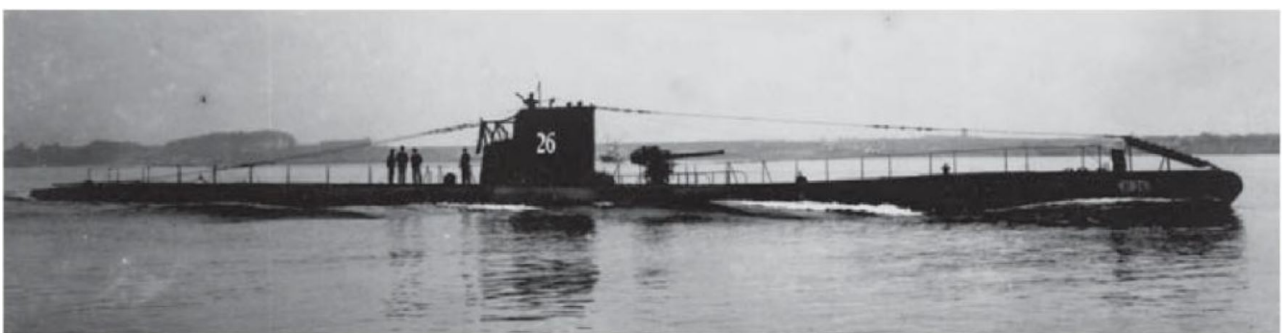


FIGURE 1.3 – Image d'archive d'un *U-boot* (extrait de [Williamson, 2012]).

C'est d'ailleurs l'omniprésence de ce dernier type de sous-marin qui a poussé les pays alliés à développer des systèmes permettant la détection et la localisation de ces véhicules [Pillon, 2016]. Les premiers essais de systèmes capables d'émettre une onde sonore sous l'eau et de détecter l'écho de cette onde sur un objet sous-marin [D'amico et Pittenger, 2009] ont été réalisés au tout début de la Première Guerre mondiale (entre autre dans la rade de Toulon). Ces systèmes, nommés sonar (acronyme de *SOund Navigation And Ranging*) sont classés dans la catégorie des systèmes actifs. La Seconde Guerre

mondiale voit quant à elle le développement (notamment par les allemands) de nouveaux systèmes sonars passifs qui n'émettent plus aucun signal mais se contentent d'écouter l'environnement sous-marin. Ce dernier type de sonar est plus en adéquation avec l'aspect discret qui est associé aux sous-marins.



FIGURE 1.4 – Antenne de l'avant d'un sous-marin classique russe au chantier (extrait de [Pillon, 2016]).

Il existe donc des moyens pour se déplacer sous l'eau, les sous-marins, ainsi que des moyens permettant de détecter des signaux acoustiques marins, les sonars. Néanmoins, détecter des sources de bruit n'est pas suffisant si l'on ne connaît pas leurs localisations. Il est tout à fait pertinent de connaître la localisation de ces objets. On peut trouver une réponse à cette problématique parmi les travaux de deux scientifiques (de la fin du 18^{ème} siècle au début du 19^{ème} siècle) dans un tout autre domaine et bien avant l'invention des sous-marins modernes et du sonar : dans l'introduction de sa thèse [Clavard, 2012], l'auteur rappelle que Gauss et Laplace sont les premiers à proposer une estimation des trajectoires des astres du système solaire à partir de relevés angulaires bruités. C'est par ailleurs au cours de ses travaux que Gauss a développé la méthode des moindres carrés, outil permettant d'estimer les paramètres cinématiques de la trajectoire d'un astre (ou de tout autre mobile) à partir d'observations bruitées relatives à sa position au cours du temps et d'un modèle de sa trajectoire. A cette occasion, il a défini la notion d'observabilité. Dans la littérature récente, l'article fondateur de la trajectographie passive « moderne » sous-marine est sans équivoque celui de Steven Nardone, Allen Lindgren et Kai Gong [Nardone *et al.*, 1984] qui posent et résolvent le problème de base de la trajectographie passive à partir de mesures d'azimut, à savoir

- les conditions d'observabilité d'une source en mouvement rectiligne uniforme,
- la recherche de bonne manœuvre de la part de l'observateur,
- l'estimation de la trajectoire par la méthode du maximum de vraisemblance.

Cette thèse s'inscrit en grande partie dans le domaine de la trajectographie passive par mesures d'angle : le BOTMA (acronyme de *Bearings-Only Target Motion Analysis*), qui est un pan très large de la trajectographie et qui est toujours grandement étudié dans la littérature scientifique. Citer l'intégralité des travaux réalisés dans ce domaine est une tâche sisyphéenne. Néanmoins, nous pouvons

citer quelques exemples parmi les solutions qui ont été proposées dans la littérature : soit à partir de lots de données [Nardone *et al.*, 1984, Song et Um, 1996, Clavard *et al.*, 2013, Farina, 1999, Jauffret *et al.*, 2010], soit à partir des méthodes temps réel (tel que le filtre de Kalman étendu [Zhang *et al.*, 2020, Aidala et Hammel, 1983, Arulampalam *et al.*, 2007], l'*unscented Kalman filter* [Laneuville et Jauffret, 2008], le filtre particulière [Arulampalam *et al.*, 2004], la variable instrumentale modifiée [Chan et Rea, 2000, Zhang et Xu, 2010, Doğançay, 2005]), soit à partir d'une combinaison de méthodes temps réel et lot de données [Kirubarajan *et al.*, 2001]. Parmi l'abondance de la littérature, la grande majorité des articles partagent les mêmes hypothèses : la source se déplace en ligne droite à vitesse constante pendant le temps d'observation, tandis que l'observateur effectue une manœuvre adéquate afin d'assurer l'observabilité de la trajectoire de la source [Jauffret et Pillon, 1996, Le Cadre et Jauffret, 1997, Nardone et Aidala, 1981].

Une question peut alors légitimement être posée. Pourquoi s'intéresser encore aujourd'hui à la trajectographie passive sous-marine si celle-ci a reçu des solutions satisfaisantes ?

De la même manière que l'étude des mouvements des astres a évolué avec la théorie de la relativité générale, la trajectographie sous-marine a évolué grâce à l'amélioration des connaissances du milieu marin et du développement des sous-marins. Le passage d'engins relativement bruyants à des engins de plus en plus silencieux, a réduit la taille du théâtre opérationnel : la menace s'est rapprochée.

En effet, l'hypothèse majoritairement employée dans la littérature est celle du champ lointain ([Vacaro, 1998] page 44). Cette hypothèse repose sur deux considérations. Tout d'abord, la profondeur du fond marin est négligeable devant la distance séparant l'observateur de la source. Ensuite, les ondes acoustiques parvenant à l'observateur lui arrivent avec une incidence très faible. Le problème de la trajectographie se traduit donc classiquement par un problème plan où l'onde acoustique émise par la source se propage uniquement suivant un trajet direct. Toutefois, la trajectographie dans un plan n'est plus valable pour une source se trouvant en champ proche. Dans cette hypothèse, la profondeur du fond marin est du même ordre de grandeur que la distance observateur/source et les ondes acoustiques sont détectées avec un angle d'incidence bien plus important. De plus, les ondes peuvent suivre des trajets bien plus variés que le simple trajet direct. Par exemple, l'onde acoustique peut subir une ou plusieurs réflexions sur la surface ou le fond de l'océan avant d'être détectée par l'observateur [Gong, 1982, Blanc-Benon et Jauffret, 1997, Oh *et al.*, 2020]. Lorsque l'hypothèse de champ lointain n'est pas utilisée dans une situation adéquate et que l'on considère un trajet direct de l'onde à la place d'un tout autre trajet, une erreur importante peut être commise sur l'estimation de la trajectoire de la source. Ce problème, rencontré par les sous-marinières, conduit à une estimation de la position de la source plus éloignée que la réalité. Enfin, l'observateur peut détecter plusieurs trajets empruntés par une même onde. Prendre en compte un seul trajet de l'onde reviendrait à perdre une quantité non négligeable d'information sur la position de la source.

Les travaux présentés dans ce manuscrit relèvent du domaine de la trajectographie sous-marine en champ proche. La littérature scientifique portant sur ce domaine est bien moins importante que celle relative au champ lointain (que ce soit à partir de mesures d'angles ou de toutes autres mesures). Contrairement à Gong [Gong, 1982] et à Blanc-Benon [Blanc-Benon et Jauffret, 1997], qui ont réalisé l'étude de la trajectoire d'une source évoluant dans un environnement en trois dimensions à partir de deux mesures de différences de temps d'arrivée et d'une mesure d'azimut, nous supposons dans cette thèse que les mesures disponibles sont des angles d'ouverture de cônes sur lesquels se trouve la source. Ces mesures d'angles sont obtenues à partir de deux types de sonars : un sonar constitué d'une

antenne linéaire remorquée (dont l’axe est horizontal), et des sonars constitués d’antennes de flanc (dont les axes sont verticaux). Dans [Oh *et al.*, 2020], un problème similaire a été étudié, mais l’étude de l’observabilité n’a pas été réalisée.

Structure de la thèse

Notre manuscrit de thèse est articulé selon quatre chapitres (numérotés de 2 à 5) :

- Introduction : mise en contexte ;
- Trajectographie passive à partir une antenne linéaire remorquée ;
- Trajectographie passive à partir de trois antennes de flanc ;
- Trajectographie passive à partir d’une antenne linéaire remorquée et de trois antennes de flanc.

Le **deuxième chapitre** présente le problème traité dans son ensemble. Nous débutons par une courte introduction aux problèmes de trajectographie, suivie d’une description sommaire d’un système sonar. Nous poursuivons par la présentation de la géométrie du problème et des notations qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. Les mesures bruitées sont également précisées dans cette section. Ce premier chapitre nous permet également de décrire le modèle de propagation que nous avons choisi dans cette thèse. Nous le comparons à un modèle plus réaliste fourni par Naval Group (mais inutilisable dans une fonction de trajectographie) afin de nous assurer de la validité de l’approximation qu’il induit. Nous définissons ensuite deux notions importantes à cette thèse : la notion de « grand fond / champ proche » et la notion de « classe de trajets ». Enfin, nous donnons la démarche que nous suivrons tout au long du manuscrit.

Le **troisième chapitre** porte sur l’étude du problème de la trajectographie passive à partir de l’antenne linéaire remorquée. Tout d’abord, nous nous intéressons à la situation où l’observateur sous-marin détecte le signal émis par une source alors qu’il se déplace en ligne droite à vitesse constante. Ensuite, nous considérons le cas où l’observateur effectue une manœuvre. Enfin, nous étudions la situation particulière où il détecte deux signaux émis par une même source. Pour chacune de ces situations, nous donnons les théorèmes statuant sur l’observabilité de la trajectoire de la source. Nous réalisons plusieurs séries de simulations qui nous permettent d’évaluer les performances empiriques de l’estimation que nous comparons à celles fournies par la borne de Cramér-Rao.

Le **quatrième chapitre** concerne l’étude d’un problème de trajectographie passive où l’observateur est cette fois-ci équipé de trois antennes de flanc. Ces antennes ont la particularité de pouvoir fournir deux types de mesures. Nous présentons l’étude de deux situations. Dans la première, les antennes délivrent uniquement des mesures angulaires sous la forme de cosinus d’angle. Dans la seconde, les antennes délivrent deux mesures temporelles (des différences de temps d’arrivée entre les centres acoustiques des antennes verticales) et les mesures angulaires utilisées dans la première situation. L’observabilité de la trajectoire de la source est analysée pour chacune des situations. Enfin, des simulations de Monte-Carlo permettent d’évaluer les performances empiriques de l’estimateur.

Le **cinquième chapitre** propose une synthèse des deux chapitres précédents en s’intéressant au problème de trajectographie quand les deux types d’antennes sont fusionnées.

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit s’inscrivent dans le cadre du laboratoire commun **LTISM** (Laboratoire de Traitement de l’Information Sous-Marine). Ce laboratoire est le fruit d’une collaboration entre l’**IM2NP** et l’entreprise **Naval Group**. Les travaux réalisés durant cette thèse ont notamment abouti à la publication deux articles : [Lebon *et al.*, 2021] et [Payan *et al.*, 2021]. Ce

dernier est le fruit d'un travail conjoint avec un autre doctorant du LTISM dont le sujet de thèse porte sur la trajectographie passive par réseaux de bouées. Nos échanges quotidiens nous ont amenés à proposer à nos directeurs de thèse l'écriture de cet article qui, de fait, « déborde » du cadre strict de ma thèse.

2.1 La trajectographie

La trajectographie a pour but d'estimer la trajectoire¹ d'une source en mouvement à partir des mesures issues de capteurs à la disposition d'un observateur. La trajectographie n'est pas à confondre avec la localisation, qui consiste à estimer la position d'une source immobile à partir des observations de ces mêmes capteurs. Suivant la nature des capteurs de l'observateur, la trajectographie peut être qualifiée d'active [Pillon, 2017], dans le cas où l'observateur émet un signal qui va interagir avec la source avant de revenir aux capteurs, ou de passive [Pillon, 2016], dans le cas où les capteurs ne détectent que des phénomènes physiques provoqués par la source. C'est sur cette dernière que porteront les études présentées dans cette thèse. Une autre distinction entre différents types de trajectographie, concerne la modélisation de la trajectoire de la source. De nouveau, nous pouvons discerner deux cas. La trajectographie de source à trajectoire déterministe et la trajectographie de source à trajectoire aléatoire [Tharmarasa *et al.*, 2007, Hue *et al.*, 2006], où l'état décrivant la trajectoire de la source à un instant donné est la réalisation d'un vecteur aléatoire. Dans cette thèse, la trajectoire de la source sera considérée déterministe.

Un autre point important pour qualifier la trajectographie est de s'intéresser aux types de mesures dont dispose l'observateur. En effet, suivant la nature du milieu, différents types de capteurs ou de traitements seront préconisés. Dans le cadre de cette thèse, nous cherchons à « trajectographier » une source évoluant dans un environnement maritime et plus particulièrement dans un environnement sous-marin. L'environnement sous-marin est relativement restreignant concernant les phénomènes physiques pouvant être captés par l'observateur. Les ondes électromagnétiques sont très fortement atténuées sur des distances très faibles [Lucas et Yip, 2007, Singh et Kumar, 2020, Lurton, 1998] (relativement à la distance de la source), ce qui interdit toutes les techniques de type radar ou de façon générale toute technique exploitant des ondes électromagnétiques. Seules les ondes acoustiques se propagent sans subir une atténuation trop importante dans le milieu sous-marin. C'est donc sur la captation de ce

1. C'est-à-dire les positions successives datées.

type de signaux que la majorité des efforts de recherche ont été concentrés. Nous n'innoverons pas sur ce point-ci, nous considérerons que l'observateur dispose de capteurs capables de capter des ondes acoustiques. Une fois que nous avons défini le type de signal que l'observateur mesure, nous devons nous intéresser aux traitements appliqués à ce signal (dont les sorties sont appelées mesures brutes). Nous évoquons ici des traitements permettant d'obtenir des mesures angulaires et des mesures de différences de temps d'arrivée, soit respectivement, la formation de voies et l'intercorrélation entre des signaux bruts captés par plusieurs capteurs. C'est sur le traitement de ces mesures que nous proposons des innovations. Afin d'introduire ces innovations, commençons par présenter le problème classique de trajectographie passive par mesure d'angle.

Le problème de trajectographie passive le plus étudié dans la littérature est très probablement le problème du BOTMA (pour *Bearings Only Target Motion Analysis*). La formulation classique de ce problème est la suivante. Une source bruyante et un observateur se déplacent tous deux dans un même plan. La source se déplace en mouvement rectiligne uniforme (MRU, donc à vitesse et cap constants) et émet une onde acoustique se propageant dans le plan jusqu'à un observateur. Un capteur (une antenne) équipant l'observateur détecte cette onde et après traitement d'antenne, fournit régulièrement à l'observateur une mesure de l'angle d'azimut dans lequel il « entend » la source. Après une manœuvre lui assurant l'observabilité de la trajectoire de la source, l'observateur tente de reconstruire cette trajectoire. Le problème s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- la source est en MRU durant la durée d'observation,
- l'observateur connaît à chaque instant sa position avec précision,
- la source et l'observateur sont contenus dans un même plan,
- l'onde acoustique émise par la source se propage dans ce plan et le temps de propagation est considéré négligeable,
- le bruit de mesure est supposé Gaussien centré.

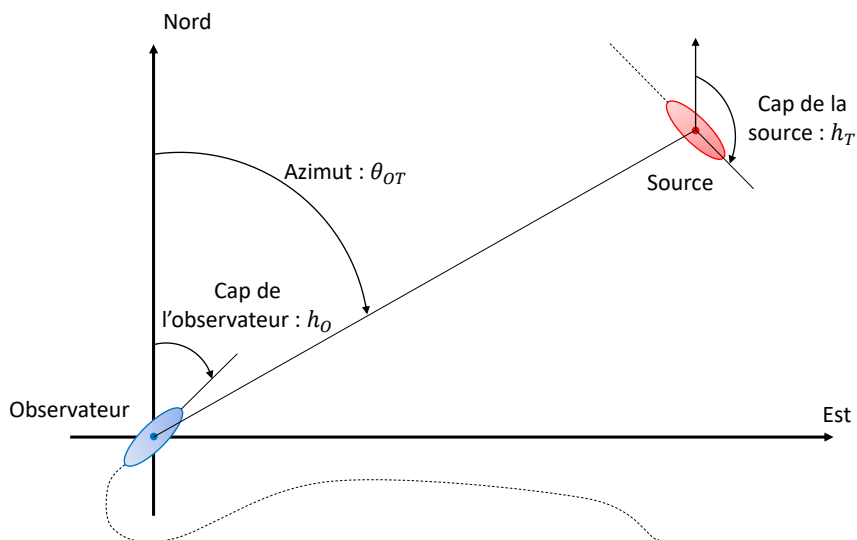


FIGURE 2.1 – Géométrie d'un problème classique de BOTMA.

Toutefois, ces hypothèses sont limitatrices. L'hypothèse selon laquelle l'observateur, la source ainsi

que les ondes acoustiques se déplacent dans un même plan est difficilement justifiable si l'on considère que le problème de trajectographie s'inscrit dans un environnement maritime. En effet, les mers et les océans ne sont pas réductibles à des plans. Il est plus juste de les considérer localement comme des volumes bornés suivant la direction verticale (par le fond et la surface). Dans un tel environnement, la source et l'observateur ne sont pas forcément à la même immersion et les ondes acoustiques peuvent suivre un grand nombre de trajets avant d'être perçues par l'observateur. En outre, si l'on considère que les ondes acoustiques ne se propagent que dans un plan, alors les résultats de la trajectographie risquent d'être très fortement biaisés.

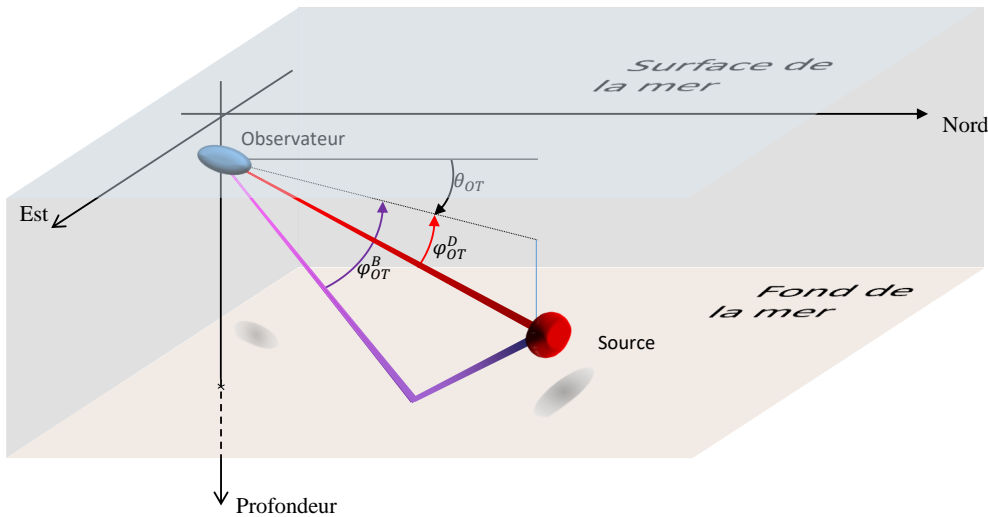


FIGURE 2.2 – Géométrie d'un problème de trajectographie par mesure d'angle dans un environnement en trois dimensions.

Nous voyons donc qu'« élargir » le domaine dans lequel l'observateur et la source se déplacent va présenter de toutes nouvelles problématiques par rapport à un problème de BOTMA classique. Sans en faire une liste exhaustive, nous pouvons en citer quelques-unes.

- Quel trajet l'onde acoustique émise par la source a-t-elle suivi avant de parvenir à l'observateur ?
- Si l'on connaît la nature du trajet, comment le modéliser ?
- Quel est l'impact du temps de vol de l'onde acoustique sur le résultat de la trajectographie ?

2.2 Capteurs et mesures

Dans le problème de trajectographie que nous proposons d'étudier, l'observateur cherche à estimer la trajectoire d'une source se déplaçant selon un mouvement rectiligne uniforme à profondeur constante. L'espace étant muni d'un repère orthonormé (en fait une base indirecte), les paramètres à estimer sont les coordonnées (x_T, y_T) de positions de la source dans le plan à un instant de référence t_{ref} (par convention, l'instant de référence est soit l'instant initial d'acquisition soit l'instant final), l'immersion de la source z_T (qui est constante) et les coordonnées (\dot{x}_T, \dot{y}_T) du vecteur vitesse de la source dans le plan horizontal. Ces paramètres définissent les coordonnées du vecteur d'état X_T

$$X_T = (x_T, y_T, z_T, \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T \quad (2.1)$$

Dans cette thèse, nous considérons que l'observateur et la source sont des sous-marins. Un sous-marin

est « aveugle » en plongée. Les instruments traditionnellement employés sur la terre ferme (radar, caméra, AIS...) ne sont plus utilisables une fois le sous-marin immergé. Seul lui restent ses sonars et également des instruments de bord (tels que des centrales inertielles ou gravimètre [Jacoby et Smilde, 2009]) pour se repérer et « visualiser » son environnement : le sous-marin « voit » son environnement au moyen des différentes antennes dont il dispose [Pillon, 2016]. Nous présentons à la figure 2.3 (figure issue de [Pillon, 2016]), un exemple des différentes antennes pouvant équiper un sous-marin, chaque antenne travaillant dans des bandes de fréquences qui lui sont propres. Ces antennes sont constituées de plusieurs hydrophones [Sherman et Butler, 2007] transformant, lorsqu'ils sont intégrés dans une chaîne de sonar passif, une onde de pression en un signal électrique (les hydrophones peuvent également transformer un signal électrique en une onde de pression afin d'être intégrés dans une chaîne de sonar actif). Le nombre ainsi que la répartition des hydrophones varient d'un type d'antenne à un autre. Si l'on prend l'exemple de l'antenne linéaire remorquée et des antennes de flanc, la première est constituée d'une série d'hydrophones répartis en ligne pouvant dépasser la centaine de mètres alors que la seconde est constituée de panneaux d'hydrophones (jointifs ou non) dont les dimensions sont limitées par les dimensions du sous-marin.

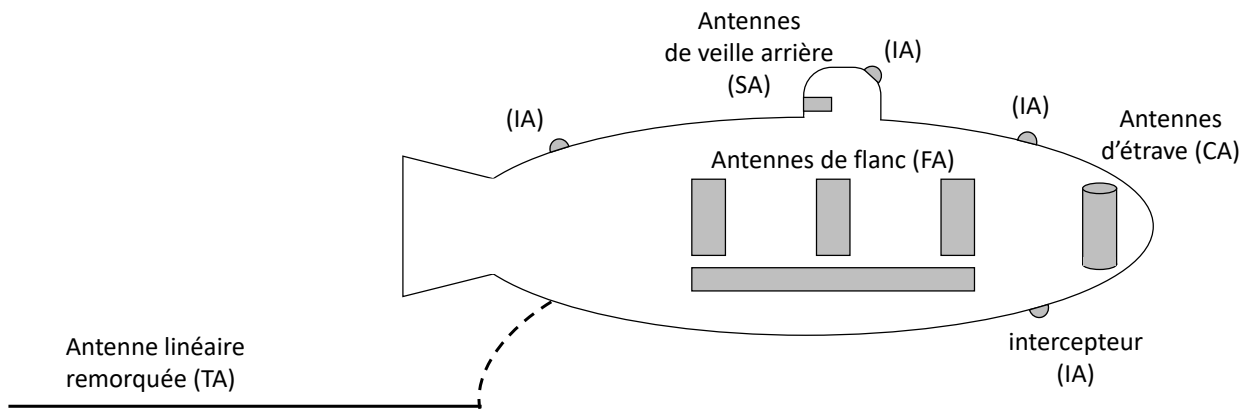


FIGURE 2.3 – Différentes antennes pouvant équiper un sous-marin (illustration inspirée de la figure 11 de [Pillon, 2016]).

Les antennes ne constituent pas à elles seules un système sonar à part entière. Le système sonar comprend aussi l'ensemble des traitements de l'information qui lui est associé. Cet ensemble est communément appelé la chaîne de traitement sonar (voir figure 2.4). Cette chaîne débute par la partie capteur, où détectant un signal. Ce signal passe ensuite dans la partie de traitement du signal, où différentes méthodes (formation de voies spatiale ou temporelle, intercorrélation...) permettent d'extraire des informations exploitables du signal brut. À cette étape, le signal peut être redirigé vers une chaîne de traitement sonore afin d'être interprété par un opérateur que l'on appelle une « oreille d'or ». De plus, des traitements de l'information peuvent directement être appliqués dès cette étape à partir de méthodes dites de *Track Before Detect* [Lepoutre, 2016, Davey et Gaetjens, 2018].

Une fois l'étape du traitement du signal réalisée, une étape de détection est nécessaire. Cette étape consiste, dans les grandes lignes, à choisir un seuil qui est appliqué à l'amplitude des mesures afin de sélectionner le maximum de vraies détections (c'est-à-dire celles manifestant la présence de sources). Le but est bien évidemment de maximiser le nombre de vraies détections par rapport au nombre de fausses alarmes. Une étape de binarisation peut également être appliquée au jeu de mesures seuillées. À ce niveau, des techniques dites de *Track After Detect* peuvent être employées afin d'estimer les paramètres

cinématiques décrivant la trajectoire de la source [Bar-Shalom et Tse, 1975, Jauffret, 1993, Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Payan *et al.*, 2021].

À ce stade, les mesures sont composées de vraies détections et d'un certain nombre de fausses alarmes ayant été conservées lors de l'étape de seuillage et binarisation. Afin d'éliminer le maximum de fausses alarmes, une dernière étape, appelée extraction, peut être appliquée. Du fait de son importance stratégique, cette étape est très peu documentée dans la littérature ouverte [Paris, 2000, Paris et Jauffret, 2003, Di Martino, 1995]. Dans le cas où plusieurs sources se trouvent dans l'espace des mesures, une association « plot à piste »² doit être effectuée après l'extraction afin d'attribuer une source à chaque détection. Dans le cadre de cette thèse, nous choisissons de nous placer à la sortie de cette étape, plus précisément, à l'étape de *tracking*. Il est à noter que la classification des sources (c'est à dire « trouver l'identité » de chaque source) peut également être réalisée en sortie de l'étape d'extraction, mais nous ne nous y intéressons pas dans ce document.

Nous travaillons donc à partir de pistes dites « extraites³ », c'est-à-dire une série chronologique de mesures censées manifester la présence d'une même source. Selon la nature des mesures, différents traitements peuvent être réalisés, tous plus ou moins étudiés dans la littérature. Si l'observateur dispose d'un sonar permettant de délivrer uniquement des mesures angulaires, nous nous trouvons dans le cadre du BOTMA, dont la littérature est abondante [Nardone *et al.*, 1984, Song et Um, 1996, Farina, 1999, Jauffret *et al.*, 2010]. D'autres types de mesures peuvent être disponibles, sans en faire une liste exhaustive de l'ensemble des types de mesures, nous pouvons citer :

- pour des mesures de Doppler, le Doppler *Only Target Motion Analysis* [Jauffret *et al.*, 2016],
- pour des mesures de différence de temps d'arrivée, le TDOA [Pérez et Jauffret, 2020] (*Time Differences Of Arrival*),
- etc.

Parmi l'ensemble des antennes à la disposition du sous-marin (voir figure 2.3), nous choisissons de nous consacrer à l'étude des problèmes de trajectographie à partir d'antennes de flanc (nous considérons ici que le sous-marin est gréé de trois antennes sur chacun de ses flancs) et d'une antenne linéaire remorquée. Les deux types d'antennes sont assimilables à des antennes linéaires (verticales pour les antennes de flanc et horizontale pour l'antenne remorquée). Une formation de voies dans la direction de l'axe de l'antenne permet de fournir à l'observateur des mesures de cosinus d'angles (les pseudogisements pour l'antenne linéaire remorquée et les élévations pour les antennes de flanc). Toutefois, comme le traitement d'antenne délivre des mesures de cosinus d'angle, nous voyons apparaître une ambiguïté conique sur la direction de la source. Chaque antenne voit la source sur un cône dont le sommet est le centre acoustique de l'antenne et dont l'axe est celui de l'antenne (voir figure 2.5). Enfin, après extraction des mesures délivrées après formation de voies, l'antenne linéaire remorquée délivre des mesures d'azimut et les antennes de flanc délivrent des mesures de cosinus d'élévation. De plus, nous considérons qu'une intercorrélation est effectuée sur les signaux bruts des antennes de flanc permettant d'obtenir deux mesures de TDOA.

Intéressons-nous maintenant aux mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée et par les antennes de flanc. Afin de simplifier les notations, nous choisissons de nous placer à un instant quelconque, nous ne ferons donc pas apparaître le paramètre du temps dans les équations à partir de maintenant, et ce pour les deux sections suivantes également.

2. C'est-à-dire associer une piste à chaque détection.

3. Se disent des mesures issues de l'étape d'extraction.

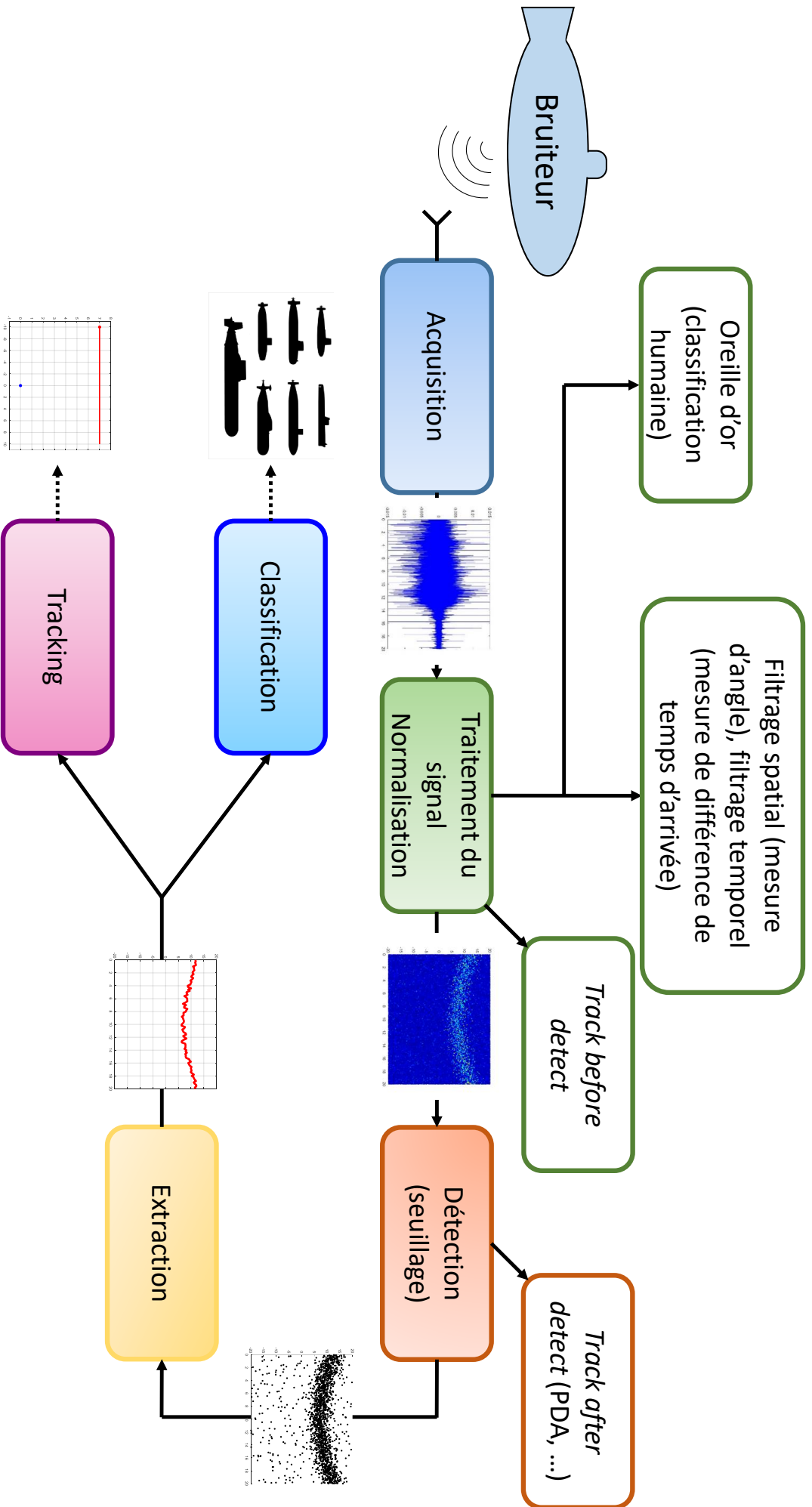


FIGURE 2.4 – Chaîne de traitement sonar.

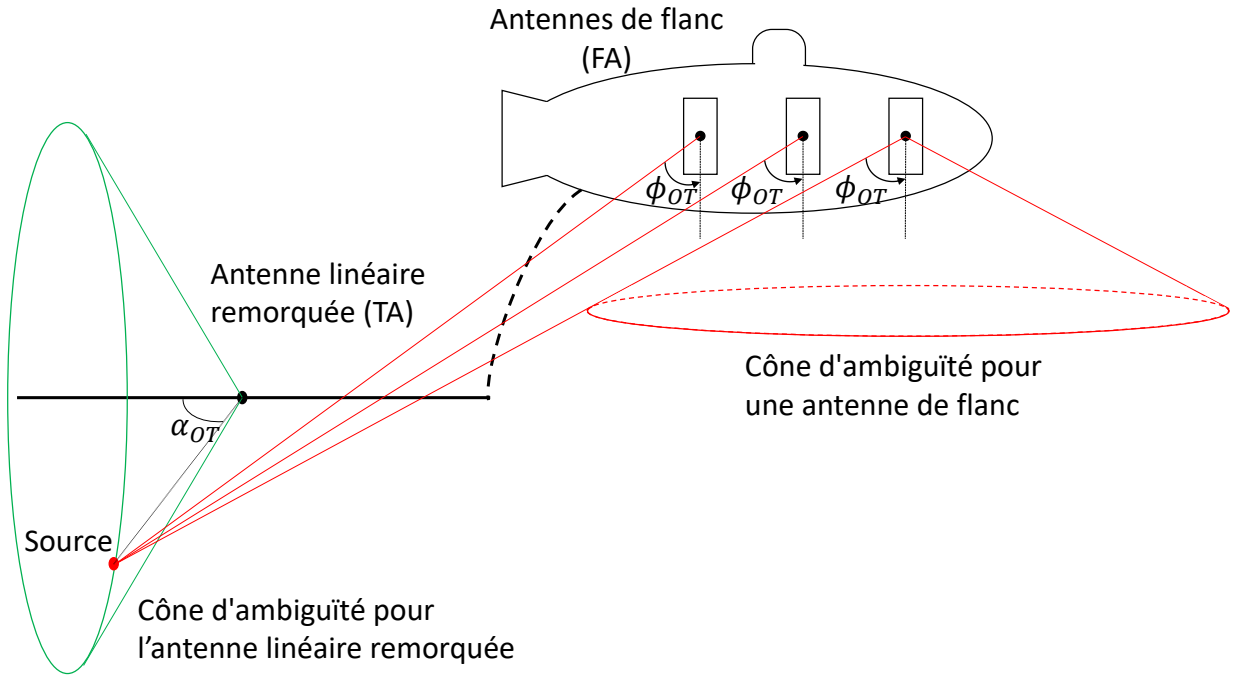


FIGURE 2.5 – Illustration des mesures angulaires délivrées par les deux types d’antennes et illustration des cônes d’ambiguïtés.

Considérons le repère orthonormé (\mathbb{O}, x, y, z) dont L’axe $\mathbb{O}x$ est pointé dans la direction de l’est, l’axe $\mathbb{O}y$ dans la direction du nord et l’axe $\mathbb{O}z$ dans la direction de la profondeur. Notons que ce repère forme une base indirecte. L’axe de l’antenne linéaire remorquée est orienté vers le sous-marin, donc dans la direction donnée par le cap h_O de l’observateur. L’axe des antennes de flanc est orienté dans la direction $\mathbb{O}z$. Les coordonnées cartésiennes de l’observateur et de la source sont respectivement

$$P_O = \begin{pmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{pmatrix} ; P_T = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} .$$

Nous définissons le vecteur des positions relatives de la source par rapport à l’observateur par $P_{OT} = P_T - P_O$, dont les coordonnées sphériques sont $(R_{OT}, \theta_{OT}, \varphi_{OT})^T$:

- R_{OT} est la distance entre le centre acoustique de l’antenne considérée et la source (voir figure 2.7a),
- θ_{OT} est l’azimut de la source, il est l’angle formé entre le nord et la projection dans le plan horizontal du segment $[OT]$,
- φ_{OT} est le site de la source, il est l’angle aigu formé entre le segment $[OT]$ et le plan horizontal contenant le centre acoustique de l’antenne.

Lorsque l’antenne considérée est une antenne de flanc, nous devons introduire un nouvel angle. Cet angle, noté ϕ_{OT} , est l’angle d’élévation de la source (voir figure 2.5). Il est l’angle entre le segment $[OT]$ et l’axe de l’antenne.

Nous appelons T_{plan} , la projection orthogonale du point T dans le plan (\mathbb{O}, x, y) . Les coordonnées cartésiennes et sphériques (relatives) de T_{plan} sont respectivement $(x_T, y_T, 0)^T$ et $(\rho_{OT}, \theta_{OT}, 0)^T$. La grandeur ρ_{OT} est la distance entre le centre acoustique de l’antenne considérée et T_{plan} . Nous

appelons également T_{image} ⁴ l'image de la source par rapport à un plan de symétrie horizontale. Les coordonnées cartésiennes et sphériques (relatives) de ce point sont

$$\left(x_T, y_T, z_{T_{image}} \right)^T$$

et

$$\left(R_{OT_{image}}, \theta_{OT}, \varphi_{OT_{image}} \right)^T,$$

respectivement. Il est à noter que la projection du point T_{image} sur le plan (\mathbb{O}, x, y) est également T_{plan} .

2.2.1 Mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée

2.2.1.1 Définition des angles

Soit une source T détectée par l'antenne linéaire remorquée. Le traitement d'antenne estime le cosinus de l'angle entre \overrightarrow{OT} et l'axe de l'antenne. Cet angle, appelé pseudo-gisement de la source et noté α_{OT} , est l'angle au sommet d'un cône droit d'axe celui de l'antenne. Toute source se trouvant sur la surface de ce cône serait détectée dans la direction donnée par α_{OT} . C'est la raison pour laquelle ce cône est appelé cône d'ambiguïté [Abraham, 2019] page 39 (voir figure 2.6b).

L'intersection de ce cône avec le plan horizontal contenant l'antenne est un secteur angulaire défini par deux angles $\tilde{\theta}_{OT}^+$ et $\tilde{\theta}_{OT}^-$ donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{OT}^- = h_O - \alpha_{OT}; \\ \tilde{\theta}_{OT}^+ = h_O + \alpha_{OT}. \end{cases} \quad (2.2)$$

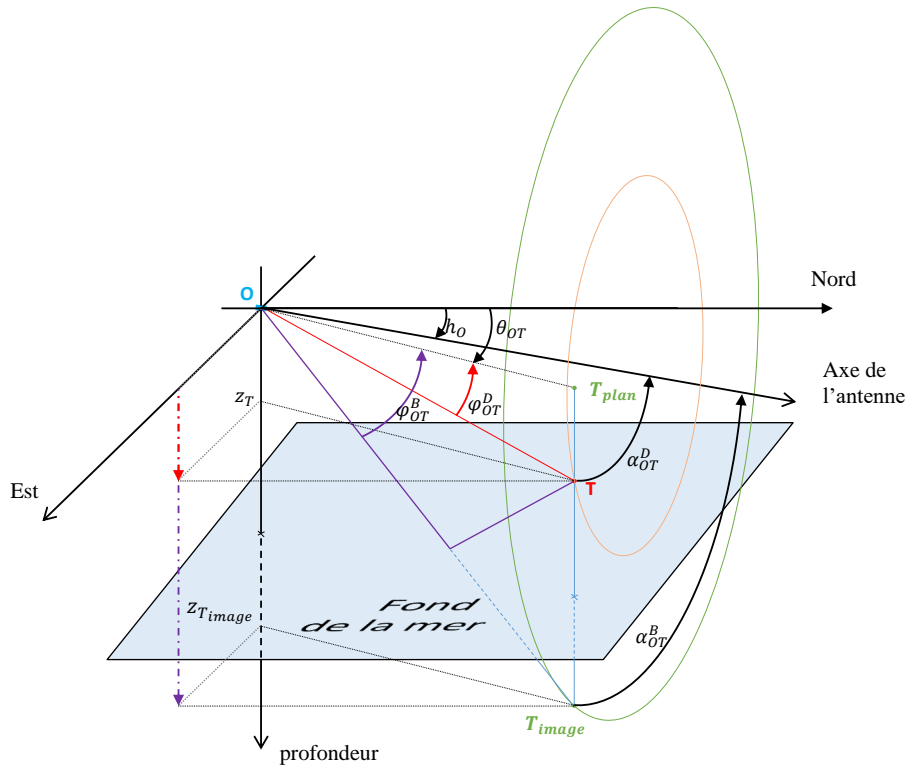
Ces angles sont appelés pseudo-azimuts. Sur la figure 2.7b, ce sont les azimuts des points $T_{cône}^-$ et $T_{cône}^+$. L'un de ces deux points est du même côté de l'axe de l'antenne que T .

Nous posons g_{OT} l'angle de gisement de la source (angle formé entre l'axe de l'antenne et la droite OT_{plan}). Cet angle est égal à la différence entre l'azimut de la source et le cap de l'observateur : $g_{OT} = \theta_{OT} - h_O$. Les cosinus des angles de pseudo-gisement, de gisement et de site (nous posons ici r' la distance entre l'observateur et la projection de la source sur la direction de l'axe de l'antenne), sont donnés par

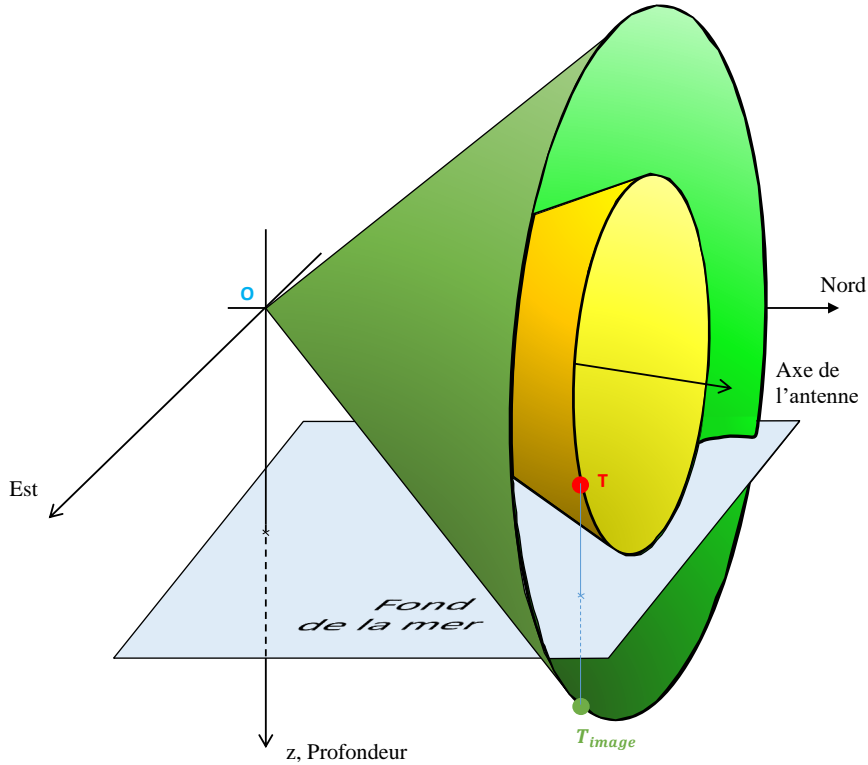
$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{OT}) &= \frac{r'}{R_{OT}}; \\ \cos(g_{OT}) &= \cos(\theta_{OT} - h_O) = \frac{r'}{\rho_{OT}}; \\ \cos(\varphi_{OT}) &= \frac{\rho_{OT}}{R_{OT}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les différentes expressions de cosinus présentées en (2.3) peuvent être réarrangées afin d'obtenir une expression du cosinus de pseudo-gisement ne dépendant plus que de θ_{OT} , h_O et de φ_{OT} .

4. Ce point est important pour la construction des différents trajets pouvant être suivis par une onde acoustique, sa construction sera abordée dans la section suivante.

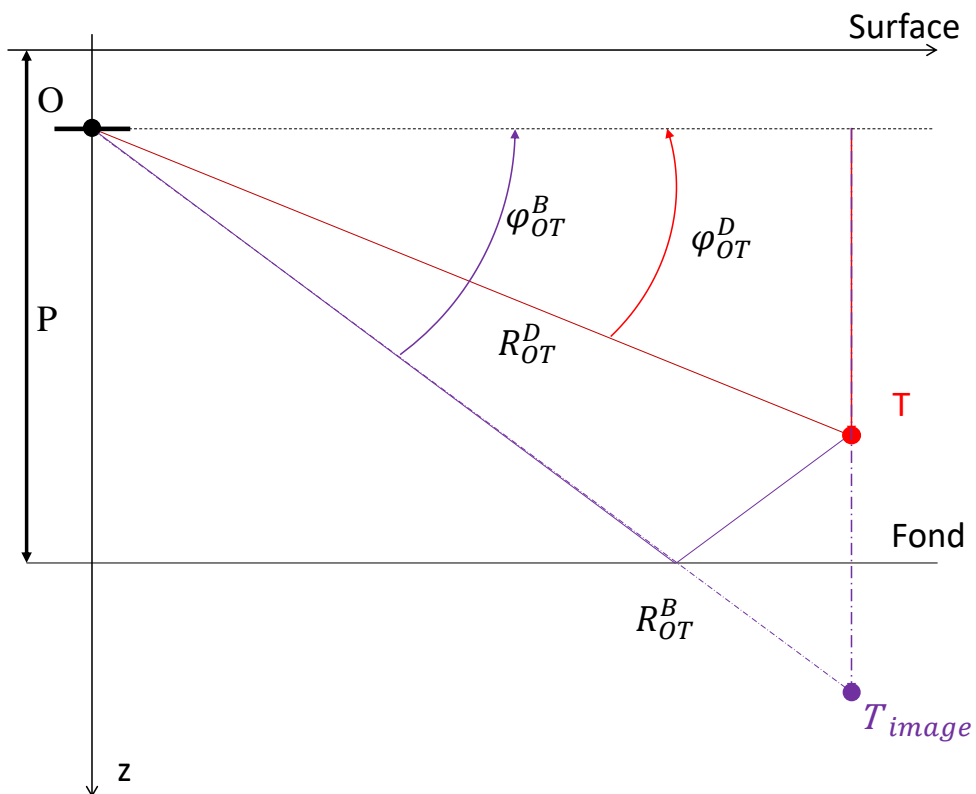


(a) L'onde suit un trajet direct et un trajet réfléchi-fond.

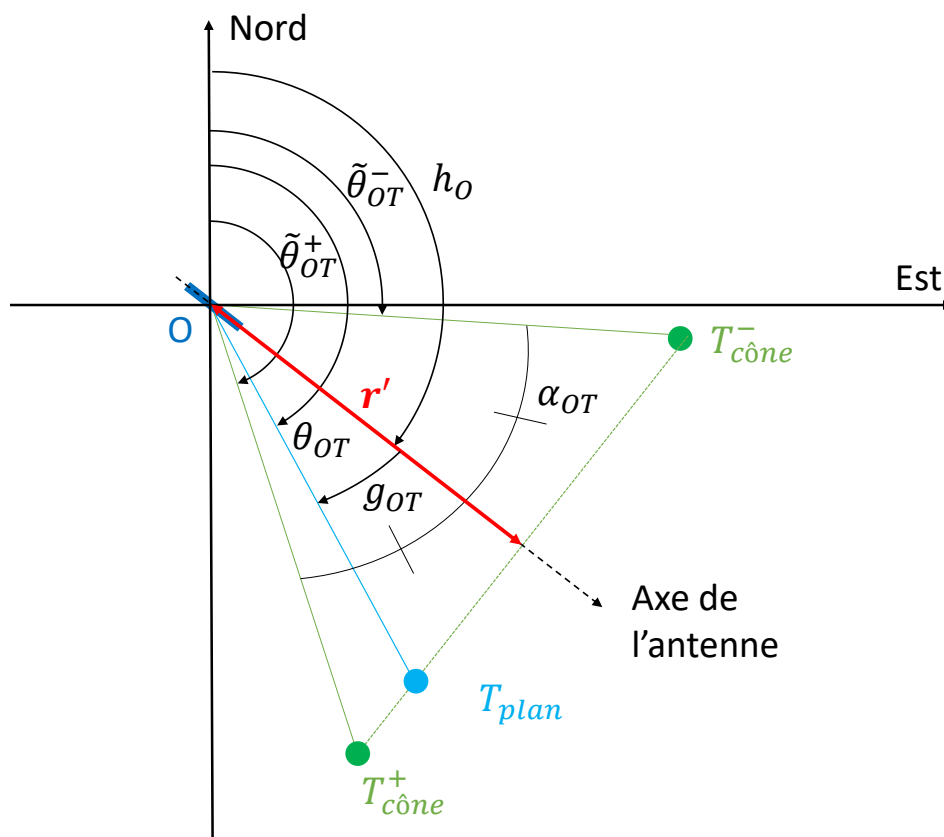


(b) Représentation des cônes d'ambiguïtés pour les deux trajets de l'onde.

FIGURE 2.6 – Cônes d'ambiguïtés pour l'antenne linéaire remorquée. (a) Exemple de construction d'angle de pseudo-gisement pour une onde empruntant un trajet direct (en rouge) et pour une onde empruntant un trajet qui se réfléchit sur le fond (en violet), les angles φ_{OT}^D et φ_{OT}^B sont respectivement les angles de site pour le trajet direct et le trajet réfléchi sur le fond. (b) Cônes sur lesquels se trouvent la source et l'image de la source.



(a) Représentation des angles dans le plan vertical contenant l'antenne et la source.



(b) Représentation des angles dans le plan horizontal.

FIGURE 2.7 – Représentation des angles dans le plan vertical contenant l'antenne et la source et représentation des angles dans le plan horizontal.

$$\cos(\alpha_{OT}) = \cos(g_{OT}) \cos(\varphi_{OT}) = \cos(\theta_{OT} - h_O) \cos(\varphi_{OT}). \quad (2.4)$$

Le cosinus de pseudo-gisement délivré après formation de voies est signé. Afin de respecter cette particularité, l'angle de site doit être contraint à ne prendre que des valeurs dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ce qui est le cas par la construction de l'angle φ_{OT} (l'angle de site est l'angle aigu formé entre le plan horizontal contenant le centre acoustique de l'antenne, voir figure 2.8). Le cosinus de site est donc toujours positif.

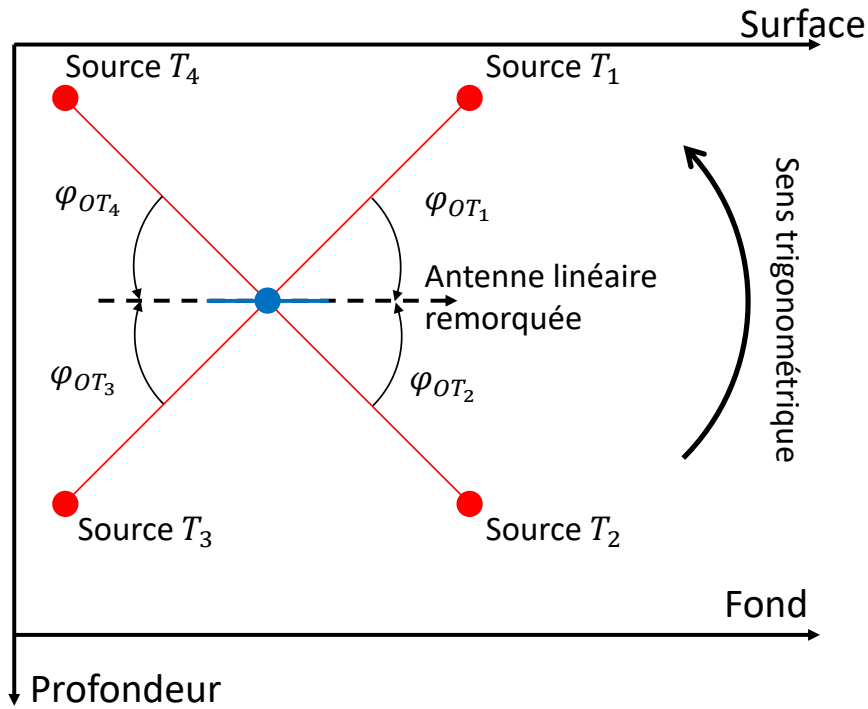


FIGURE 2.8 – Représentation des angles de site pour l'antenne linéaire remorquée.

L'équation (2.4) nous fournit deux informations :

- le cosinus de pseudo-gisement est de même signe que le cosinus de gisement,
- la valeur absolue du cosinus de pseudo-gisement est inférieure à la valeur absolue du cosinus de gisement. Ceci traduit le fait que l'antenne « voit » la source dans une ouverture plus importante que celle où se trouve cette dernière (voir figure 2.7b).

Nous remarquons également que nous avons ici l'égalité $\cos(\tilde{\theta}_{OT}^- - h_O) = \cos(\tilde{\theta}_{OT}^+ - h_O)$. Des équations (2.2) nous pouvons donc en déduire que

$$\cos(\alpha_{OT}) = \cos(\tilde{\theta}_{OT}^- - h_O) = \cos(\theta_{OT} - h_O) \cos(\varphi_{OT}), \text{ avec } \tilde{\theta}_{OT} \in \{\tilde{\theta}_{OT}^-, \tilde{\theta}_{OT}^+\}. \quad (2.5)$$

Cette dernière équation établit le lien entre azimut, pseudo-azimut, cap et gisement.

Remarque 1.

Considérons le cas où $\tilde{\theta}_{OT}^- = \tilde{\theta}_{OT}^+, (\text{mod } 2\pi)$, c'est-à-dire $h_O - \alpha_{OT} = h_O + \alpha_{OT}, (\text{mod } 2\pi)$

$$\begin{aligned} i.e(\text{mod } 2\pi) h_O - \alpha_{OT} &= h_O + \alpha_{OT}, (\text{mod } 2\pi) \\ \Leftrightarrow 2\alpha_{OT} &= 0, (\text{mod } 2\pi) \\ \Leftrightarrow \alpha_{OT} &= k\pi, k = 0 \text{ ou } 1 \\ \Leftrightarrow \cos(\alpha_{OT}) &\pm 1 \\ \Leftrightarrow \cos(g_{OT}) \cos(\varphi_{OT}) &= \pm 1 \end{aligned}$$

Nous avons vu que le cosinus du site est toujours positif. Par conséquent, l'équation

$$\cos(g_{OT}) \cos(\varphi_{OT}) = \pm 1$$

n'a qu'une solution : $\varphi_{OT} = 0$ et $g_{OT} = k\pi$. Cela signifie que l'antenne et la source sont à la même profondeur, que l'onde acoustique suit un trajet direct et que la source se trouve sur la droite portant l'axe de l'antenne. Dans ce cas-là, l'azimut et le pseudo-azimut se confondent.

L'extracteur travaillant sur des mesures de pseudo-gisement, il fournit à chaque instant un azimut extrait (en fait un pseudo-azimut) $\theta_{OT}^{\text{Extract}}$ qui peut être $\tilde{\theta}_{OT}^+$ ou $\tilde{\theta}_{OT}^-$ (en supposant l'absence de bruit de mesure).

La double égalité 2.5 nous garantit que

$$\cos(\alpha_{OT}) = \cos(\tilde{\theta}_{OT} - h_O) = \cos(\theta_{OT}^{\text{Extract}} - h_O). \quad (2.6)$$

Remarque 2.

Il est important de noter que l'extracteur fournit à la fonction trajectographie des pistes de pseudo-azimut (et non des pistes d'azimut au sens strict).

2.2.1.2 Effet de site

Le site du trajet de l'onde capté par l'antenne linéaire remorquée intervient directement dans l'expression du cosinus de pseudo-gisement (fourni par le traitement d'antenne) et ne permet pas de calculer l'azimut dans lequel se trouve la source (voir eq. (2.4)). Si dans le problème classique de BOTMA (champ lointain donc dans le plan), le site peut être négligé, il ne peut plus être ignoré dans le problème de BOTMA en champ proche.

Afin d'illustrer nos propos, considérons le scénario suivant.

- Un observateur initialement positionné en $x_O = 0\text{m}$ et $y_O = 0\text{m}$ à une immersion de 100m acquiert durant 20 minutes les cosinus de pseudo-gisement issus d'une onde acoustique. Pendant les dix premières minutes du scénario, l'observateur est en MRU suivant le cap 135° à la vitesse de 5m/s. Après dix minutes, l'observateur effectue une manœuvre suivant un mouvement circulaire uniforme l'amenant du cap 135° au cap 45° au tau de giration $20^\circ/\text{min}$, la manœuvre dure 4 minutes et 28 secondes. Enfin, l'observateur termine son mouvement en MRU suivant le cap 45° toujours à la vitesse de 5m/s. L'observateur est équipé d'un extracteur convertissant les pistes de cosinus de pseudo-gisement en pistes de pseudo-azimut.
- Une source initialement positionnée en $x_T = 15000\text{m}$ et $y_T = 0\text{m}$ à une immersion de 200m se

déplace en MRU suivant le cap 90° à la vitesse de 4m/s durant toute la durée du scénario. Elle émet une onde acoustique qui se propage suivant un trajet se réfléchissant sur le fond de la mer situé à 4000 mètres de profondeur.

Nous présentons à la figure 2.9 la piste de pseudo-azimut (en rouge) fournie par l'extracteur en comparaison avec la vraie piste d'azimut (en bleue), nous considérons ici que les mesures sont exemptes de bruit.

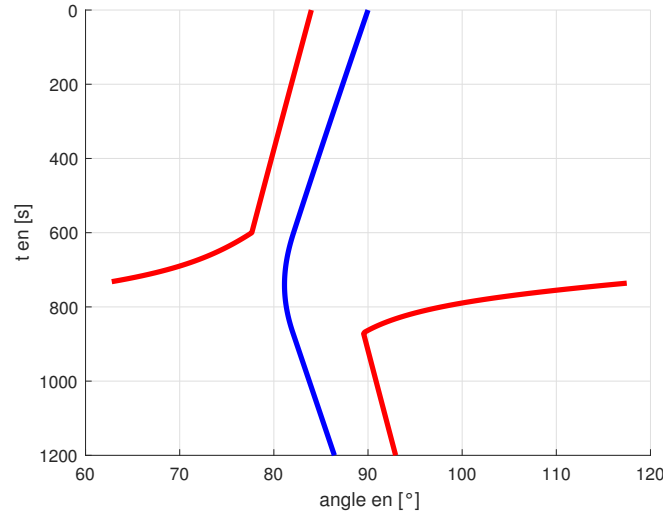


FIGURE 2.9 – Pistes de pseudo-azimut (en rouge) et d'azimut (en bleue) obtenues sur un scénario où un observateur effectuant une manœuvre acquiert les angles d'arrivée d'une onde acoustique émise par une source en MRU et s'étant propagée suivant un trajet réfléchi sur le fond.

Nous constatons que la piste de pseudo-azimut est biaisée sur l'intégralité de l'acquisition de l'observateur, ceci est dû à la présence d'un cosinus de site différent de 1 dans les mesures de cosinus de pseudo-gisement. Nous constatons également que la piste de pseudo-azimut s'écarte fortement de la vraie piste d'azimut durant la manœuvre de l'antenne. Nous appelons ce phénomène des « virgules » dans les pistes d'azimut extraites. Ce phénomène n'existe pas si l'on revient aux mesures issues du traitement d'antenne, c'est-à-dire le cosinus de pseudo-gisement. L'équation (2.6) nous permet de retrouver ces mesures natives à partir des pistes fournies par l'extracteur.

2.2.2 Mesures délivrées par les antennes de flanc

De façon similaire à l'antenne linéaire remorquée, une antenne de flanc verrait sous un même angle toutes les sources qui se trouveraient sur la surface du cône droit défini par l'angle d'élévation $\phi_{O_i T}$ (pour l'antenne de flanc $n^\circ i$, l'angle $\widehat{Oz, \vec{O_i T}}$). Comme pour l'antenne linéaire remorquée, nous voyons apparaître une ambiguïté conique. Cependant, ces antennes étant bafflées il ne s'agit pas à proprement parler d'un cône d'ambiguïté, mais d'un demi cône d'ambiguïté (une antenne verticale d'un bord ne peut pas détecter une source qui serait dans l'autre bord du sous-marin).

Nous présentons à la figure 2.10, pour une seule antenne, la construction de l'angle d'élévation pour une source émettant une onde acoustique se propageant suivant un trajet direct et un trajet se réfléchissant sur le fond de la mer (la construction de ce dernier trajet fait également intervenir l'image de la source).

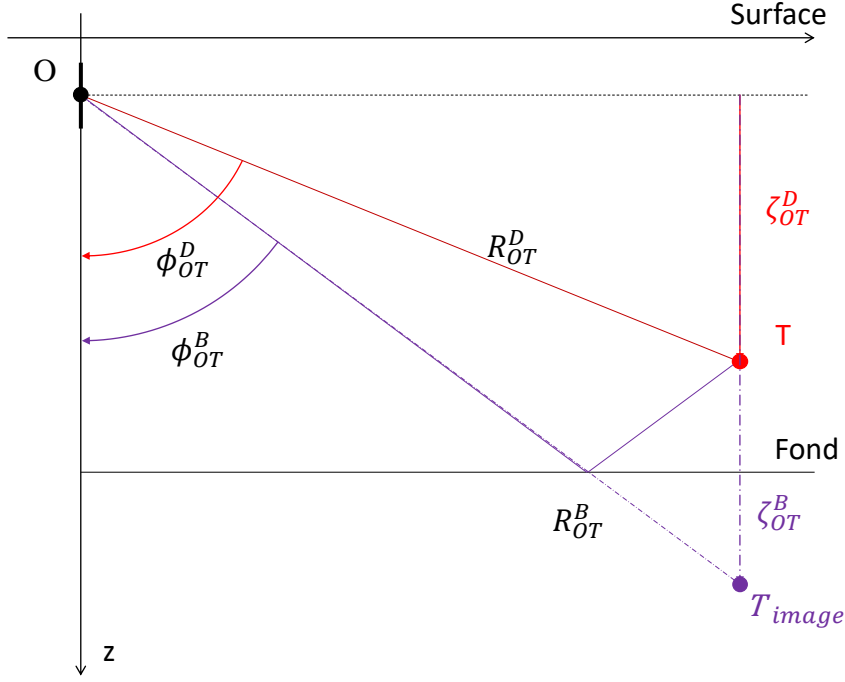


FIGURE 2.10 – Construction des angles d’élévation pour deux trajets (en rouge, le trajet direct et en violet, le trajet subissant une réflexion sur le fond). Les exposants D et B sont utilisés pour différencier le trajet direct du trajet réfléchi sur le fond

À partir de la géométrie du problème nous obtenons l’expression du cosinus d’élévation

$$\cos(\phi_{O_i T}) = \frac{\zeta_{O_i T}}{R_{O_i T}}. \quad (2.7)$$

Le terme $\zeta_{O_i T}$ est la profondeur relative entre la source (ou son image) et l’observateur ; son expression sera développée dans la section suivante. Ce terme étant signé, le cosinus prend ses valeurs dans l’intervalle $[-1, 1]$ et l’élévation dans l’intervalle $[0, \pi]$.

Enfin, le sous-marin étant équipé de trois antennes de flanc (cf. figure 2.5), une intercorrélacion sur les signaux bruts collectés par celles-ci est possible pour obtenir deux mesures de différence de temps d’arrivée (ou mesures de TDOA). Les deux mesures de TDOA que nous avons choisies sont

- τ_{12} la différence de temps d’arrivée entre la seconde et la première antenne,
- τ_{23} la différence de temps d’arrivée entre la troisième et la seconde antenne.

Les algorithmes que nous employons dans cette thèse nécessitent une expression analytique des différences de temps d’arrivée. Pour trois antennes de flanc (dont les centres acoustiques sont nommés O_1 , O_2 et O_3), les différences de temps d’arrivée ont pour expressions

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \frac{1}{c}(R_{O_2 T} - R_{O_1 T}), \\ \tau_{23} &= \frac{1}{c}(R_{O_3 T} - R_{O_2 T}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec c la célérité du son dans l’eau (supposé constante et égal dans cette thèse à 1500m/s).

Contrairement à l’antenne linéaire remorquée, nous supposons que l’extracteur ne fait aucune modification sur les mesures délivrées par les antennes de flanc.

2.2.3 Bruit de mesures et mesures bruitées

Les mesures présentées aux deux sections précédentes pour les deux types d'antennes ont été exprimées sans tenir compte d'aucun défaut. Dans la réalité, elles sont corrompues par du bruit. Ce bruit étant la résultante des différentes sources pouvant venir parasiter le signal émis par la source d'intérêt sur son trajet, mais également des différents traitements qui lui sont appliqués dans la chaîne de traitement sonar. Ces bruits sont bien souvent additifs bien qu'ils puissent être dans de rares cas multiplicatifs. Toutefois, dans cette thèse nous considérerons uniquement des bruits additifs. Du fait de la multiplicité de ces sources de bruit et du fait qu'elles sont toutes indépendantes les unes des autres, il est classique d'invoquer le théorème « central limite » et de considérer que ce bruit est la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance σ^2 . C'est à partir de ces mesures bruitées que l'estimation de la trajectoire de la source devra être réalisée. Nous présenterons notre démarche à la fin de ce chapitre.

Les mesures bruitées associées à un instant $t_k = (k - 1)\Delta t$ (Δt ⁵ étant le pas d'échantillonnage) obtenues à partir des équations (2.4), (2.7) et (2.8) ont pour expressions

$$\begin{cases} m_1(t_k) = \cos(\alpha_{OT}(t_k)) + \varepsilon_k, \\ m_2(t_k) = \cos(\phi_{OT}(t_k)) + \vartheta_k, \\ m_3(t_k) = \tau_{12}(t_k) + \varsigma_{1,k}, \\ m_4(t_k) = \tau_{23}(t_k) + \varsigma_{2,k}, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec :

- ε_k suivant une loi gaussienne centrée et d'écart type $\sigma_{\cos(\alpha)}$,
- ϑ_k suivant une loi gaussienne centrée et d'écart type $\sigma_{\cos(\phi)}$,
- et $\varsigma_{i,k}$ ($i = 1$ ou 2) suivant une loi gaussienne centrée et d'écart type σ_τ .

Nous prendrons dans cette thèse $\sigma_{\cos(\alpha)} = \sigma_{\cos(\phi)} = 1.7 \times 10^{-2}$ et $\sigma_\tau = \sqrt{2.36} \times 10^{-5}$.

Les mesures $m_3(t_k)$ et $m_4(t_k)$ sont corrélées entre elles. Ceci est dû au fait que ces deux mesures sont obtenues par l'intercorrélation de deux signaux différents (le signal capté par la première antenne pour $m_3(t_k)$ et celui capté par la troisième antenne pour $m_4(t_k)$) par le signal capté par la seconde antenne de flanc.

Le calcul de la matrice de variance-covariance des deux mesures de TDOA a été développé dans [Hahn et Tretter, 1973] lorsque les mesures sont du type $\tau_{i1}(t_k) + \varsigma_{i,k}$ pour $i \geq 2$. L'équation (12) de l'article cité précédemment donne l'expression de la matrice d'information de Fisher dont l'inverse est utilisé comme matrice de variance-covariance des mesures de TDOA. En reprenant les notations de l'article, la matrice d'information de Fisher (noté **FIM**) a pour expression

$$\mathbf{FIM} = \frac{T}{2\pi} \int_B \omega^2 \frac{S^2}{1 + \sum_i \frac{S}{N_i}} \left[\text{tr}(\mathbf{N}^{-1})\mathbf{N}_p^{-1} - \mathbf{N}_p^{-1} \mathbb{1} \mathbb{1}^T \mathbf{N}_p^{-1} \right] d\omega. \quad (2.10)$$

Avec :

- T est le temps d'intégration des mesures ;
- B est la largeur de la bande fréquentielle (en pulsation) de travail des capteurs ;
- ω est la pulsation ;

5. Dans cette thèse nous avons choisi $\Delta t = 4s$.

- S la densité spectrale de puissance du signal détecté par chaque antenne ;
- N_i la densité spectrale de puissance du bruit corrompant le signal détecté par l'antenne de flanc $n^{\circ}i$;
- \mathbf{N} est une matrice diagonale dont les composantes (i, i) sont les N_i ;
- \mathbf{N}_p est la matrice \mathbf{N} réduite de sa première ligne et de sa première colonne ;
- $\mathbb{1}$ est un vecteur colonne de 1 et de dimension le nombre d'antennes diminué de un.

Nous disposons de trois antennes flanc ici. Si l'on fait l'hypothèse que le signal et les bruits sont blancs dans la bande B , alors l'expression de la **FIM** devient

$$\mathbf{FIM} = \frac{B^3 T}{6\pi} \frac{S^2}{1 + \frac{S}{N_1} + \frac{S}{N_2} + \frac{S}{N_3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1 N_2} + \frac{1}{N_2 N_3} & -\frac{1}{N_2 N_3} \\ -\frac{1}{N_2 N_3} & \frac{1}{N_1 N_3} + \frac{1}{N_2 N_3} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Sous l'hypothèse que les densités spectrales de puissance des différents bruits sont toutes égales ($N_1 = N_2 = N_3 = N$), la matrice **FIM** peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{FIM} = \frac{B^3 T}{6\pi} \frac{S^2}{1 + 3\frac{S}{N}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Nos mesures étant $\tau_{12}(t_k) + \varsigma_{1,k}$ et $\tau_{23}(t_k) + \varsigma_{2,k}$, la **FIM** est égale à

$$\mathbf{FIM} = \frac{B^3 T}{6\pi} \frac{S^2}{1 + 3\frac{S}{N}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Finalement si nous prenons par exemple une largeur de bande fréquentielle égale à 930.243Hz pour un temps d'intégration T de 4s et que nous supposons que le rapport signal à bruit est égal à -3dB , nous trouvons alors que le rapport $\frac{B^3 T}{6\pi} \frac{S^2}{1 + 3\frac{S}{N}}$ est égal à $\frac{1}{\sigma_\tau^2}$. La matrice d'information de Fisher devient alors

$$\mathbf{FIM} = \frac{1}{\sigma_\tau^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Nous pouvons maintenant prendre l'inverse de la matrice **FIM** afin d'obtenir la matrice de variance-covariance des mesures de différence de temps d'arrivée

$$\mathbf{FIM}^{-1} = \frac{\sigma_\tau^2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

L'équation 2.15 nous permet donc de calculer la matrice de variance-covariance des mesures dans le cas où nous disposons de connaissances *a priori* sur le signal, le bruit de mesure et les caractéristiques des capteurs employés. Néanmoins, dans le cadre de cette thèse nous ne disposons aucunement de toutes ces informations. C'est pour cela que nous choisissons d'utiliser une matrice de variance-covariance que nous qualifions de « pessimiste » dans cette thèse. Cette matrice de variance-covariance est obtenue en faisant l'hypothèse (non réaliste) suivante : nous considérons que chaque antenne mesure directement le temps de propagation de l'onde acoustique qu'elle détecte. Nous considérons donc que les mesures

bruitées de $\tau_{12}(t_k)$ et de $\tau_{23}(t_k)$ ont pour expressions

$$\begin{aligned}\tau_{12}(t_k) &= \tau_2(t_k) - \tau_1(t_k) + \varepsilon_{2,k} - \varepsilon_{1,k}; \\ \tau_{23}(t_k) &= \tau_3(t_k) - \tau_2(t_k) + \varepsilon_{3,k} - \varepsilon_{2,k}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Avec :

- $\tau_i(t_k)$ une mesure fictive du temps de propagation d'une onde acoustique détectée par l'antenne de flanc $n^\circ i$ (ici $i \in 1, 2, 3$);
- $\varepsilon_{i,k}$ le bruit de mesure fictif du temps de propagation d'une onde acoustique détectée par l'antenne de flanc $n^\circ i$. Nous considérons ici que $\varepsilon_{i,k}$ suit une loi gaussienne centrée et d'écart type σ_τ .

L'équation (2.16) peut être mise sous la forme

$$\begin{bmatrix} \tau_{12}(t_k) \\ \tau_{23}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_2(t_k) - \tau_1(t_k) \\ \tau_3(t_k) - \tau_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{2,k} - \varepsilon_{1,k} \\ \varepsilon_{3,k} - \varepsilon_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_2(t_k) - \tau_1(t_k) \\ \tau_3(t_k) - \tau_2(t_k) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,k} \\ \varepsilon_{2,k} \\ \varepsilon_{3,k} \end{bmatrix}.\tag{2.17}$$

Nous pouvons maintenant calculer la matrice de variance-covariance de (2.17).

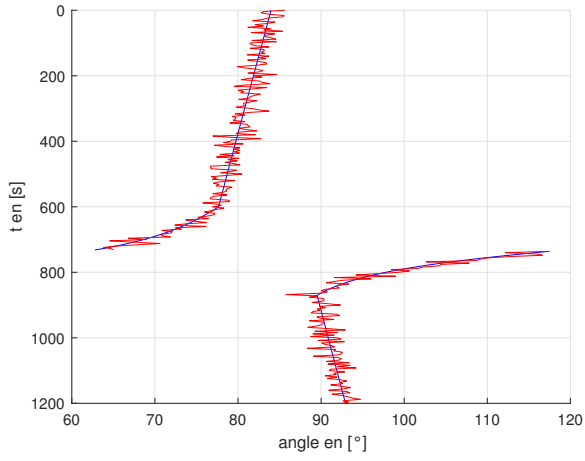
$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \text{var} \left(\begin{bmatrix} \tau_{12}(t_k) \\ \tau_{23}(t_k) \end{bmatrix} \right) = \text{var} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\tau_1,k} \\ \varepsilon_{\tau_2,k} \\ \varepsilon_{\tau_3,k} \end{bmatrix} \right); \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{var} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{\tau_1,k} \\ \varepsilon_{\tau_2,k} \\ \varepsilon_{\tau_3,k} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ &= \sigma_\tau^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \times \mathbf{FIM}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

C'est cette matrice \mathbf{R} que nous utiliserons comme matrice de variance-covariance dans cette thèse.

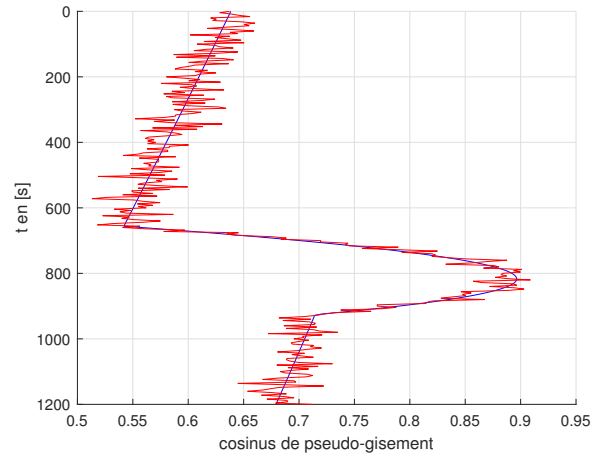
Finalement, nous présentons aux figures 2.11a (mesures de pseudo-azimut), 2.11b (mesures de cosinus de pseudo-gisement), 2.12a (mesures de cosinus d'élévation) et 2.12b (mesures de TDOA) un exemple de mesures.

2.3 Modélisation et caractérisation du milieu sous-marin

Les méthodes de trajectographie peuvent nécessiter l'emploi d'une modélisation du milieu dans lequel se trouve la source d'intérêt. Suivant les phénomènes que l'on souhaite prendre en compte, cette modélisation varie de la plus simple à la plus compliquée [Le Gall, 2015]. Dans cette thèse, nous nous plaçons dans un environnement sous-marin en trois dimensions, les ondes acoustiques émises par les sources ne se propagent donc pas forcément en lignes droites. Il existe de nombreux modèles de propagation des ondes acoustiques dans la mer [Urick, 1975], nous présentons dans cette section la modélisation que nous avons choisie. Nous comparons ensuite la modélisation choisie avec une autre plus réaliste. Nous précisons également les notations employées dans le reste de cette thèse.

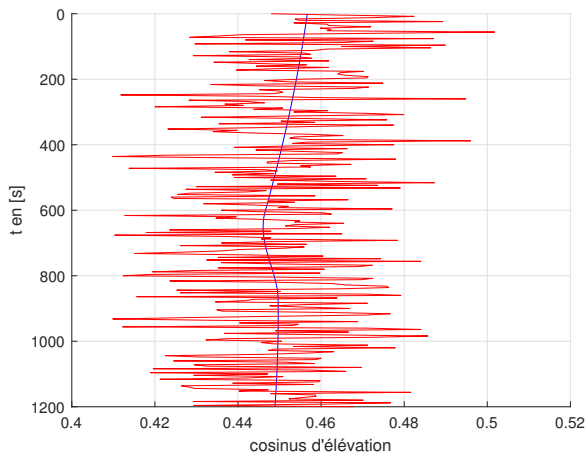


(a) Mesures bruitées de pseudo-azimut ($\sigma_{\tilde{\theta}} \approx 1^\circ$).

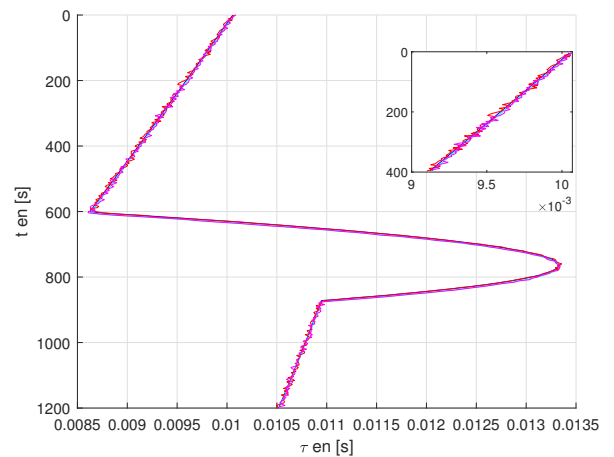


(b) Mesures bruitées de cosinus de pseudo-gisement ($\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$).

FIGURE 2.11 – Exemple de mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée.



(a) Mesures bruitées de cosinus d'élévation ($\sigma_{\cos(\phi)} = 1.7 \times 10^{-2}$).



(b) Mesures bruitées de TDOA ($\sigma_{\tau} = \sqrt{2.36} \times 10^{-5}$).

FIGURE 2.12 – Exemple de mesures délivrées par les antennes de flanc.

2.3.1 Trajet de l'onde en rayon droit

La modélisation la plus simple de la propagation des ondes acoustiques [Gong, 1982, Blanc-Benon et Jauffret, 1997] consiste à considérer que les ondes se propagent en lignes droites. Cette modélisation fait l'hypothèse implicite que le milieu est homogène et isotrope, la célérité du son dans la mer est donc la même, quelle que soit la direction considérée. C'est cette modélisation que nous avons implicitement utilisée dans les sections précédentes pour présenter la géométrie du problème. De plus, cette modélisation fait également l'hypothèse, beaucoup moins implicite, que la surface et le fond de la mer se comportent comme des surfaces réfléchissantes parfaites. Dans ces conditions, nous pouvons utiliser les lois de Snell-Descartes pour la réflexion afin de calculer les angles d'arrivée à l'observateur de l'onde acoustique émise par une source.

Nous définissons tout d'abord les termes suivants :

- δ , un terme prenant la valeur $+1$ si le trajet suivi par l'onde acoustique est dirigé à l'origine vers le fond et -1 s'il est dirigé à l'origine vers la surface ;
- n_s , le nombre de réflexions à la surface que subit l'onde acoustique sur son trajet ;
- n_b , le nombre de réflexions sur le fond que subit l'onde acoustique sur son trajet ;
- P , la profondeur du fond marin.

Par la suite, nous utiliserons ces trois paramètres dans l'ordre (δ, n_s, n_b) afin de désigner les trajets pouvant être suivis par l'onde acoustique. Par exemple, le trajet d'une onde émise en direction du fond et comprenant deux réflexions à la surface ainsi que deux sur le fond portera le nom $(1, 2, 2)$ (voir figure 2.14).

Pour les deux types d'antennes, le calcul du cosinus d'angle nécessite l'introduction d'un nouveau terme. Ce terme, noté ζ_{OT} , représente la distance algébrique entre la source (ou son image) et l'observateur (ou son image). Nous donnons les détails de l'expression de ζ_{OT} dans l'annexe A.

$$\zeta_{OT} = -\delta(-1)^{n_s-n_b}(2n_bP + \delta((-1)^{n_s-n_b}z_O - z_T)). \quad (2.19)$$

Nous illustrons l'équation (2.19) sur deux cas particuliers. Dans le premier cas, l'onde acoustique est émise vers le bas par la source et l'onde subit une réflexion sur le fond durant son trajet (voir figure 2.13). Ce trajet a pour nom $(1, 0, 1)$, nous utilisons également le nom « trajet réfléchi-fond » afin de nommer ce type de trajet. Dans le second cas, l'onde est toujours émise vers le bas, mais subit deux réflexions sur le fond ainsi que deux réflexions sur la surface avant d'atteindre l'observateur (voir figure 2.14). Ce trajet porte le nom $(1, 2, 2)$. Pour les deux trajets, nous trouvons les expressions de ζ_{OT} :

$$\begin{aligned} \text{Trajet } (1, 0, 1) : \zeta_{OT} &= 2P - z_O - z_T. \\ \text{Trajet } (1, 2, 2) : \zeta_{OT} &= -(4P + z_O - z_T). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous pouvons maintenant donner les expressions des cosinus de site et d'élévation pour l'antenne linéaire remorquée et les antennes de flanc, respectivement.

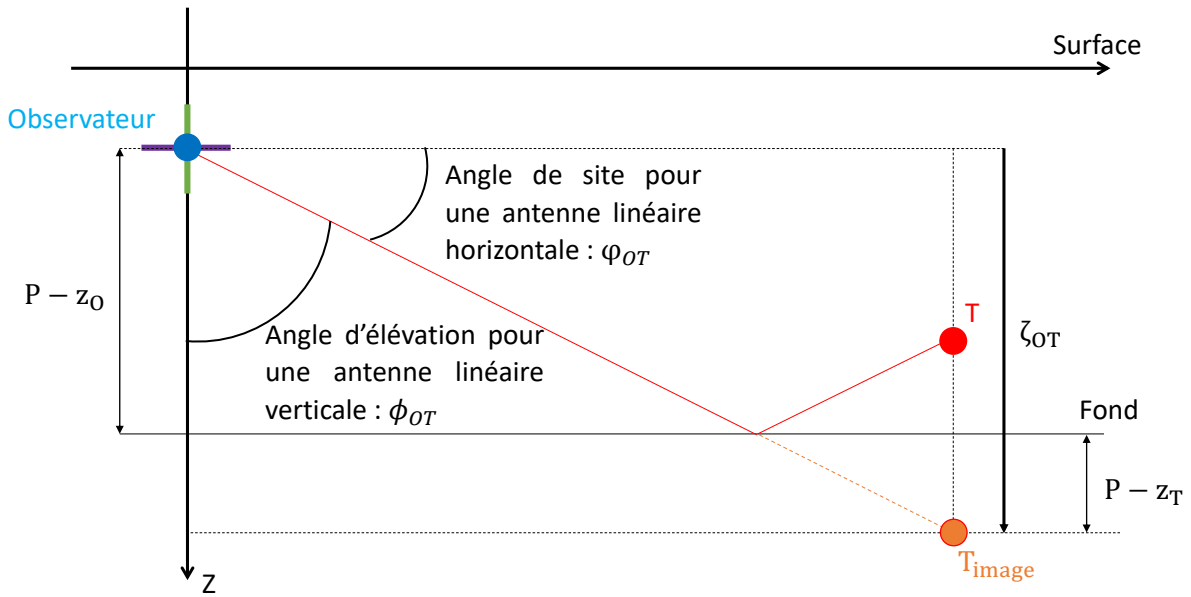


FIGURE 2.13 – Trajet réfléchi sur le fond (ou trajet (1,0,1)) suivi par l'onde acoustique entre son émission par la source et sa réception par l'observateur.

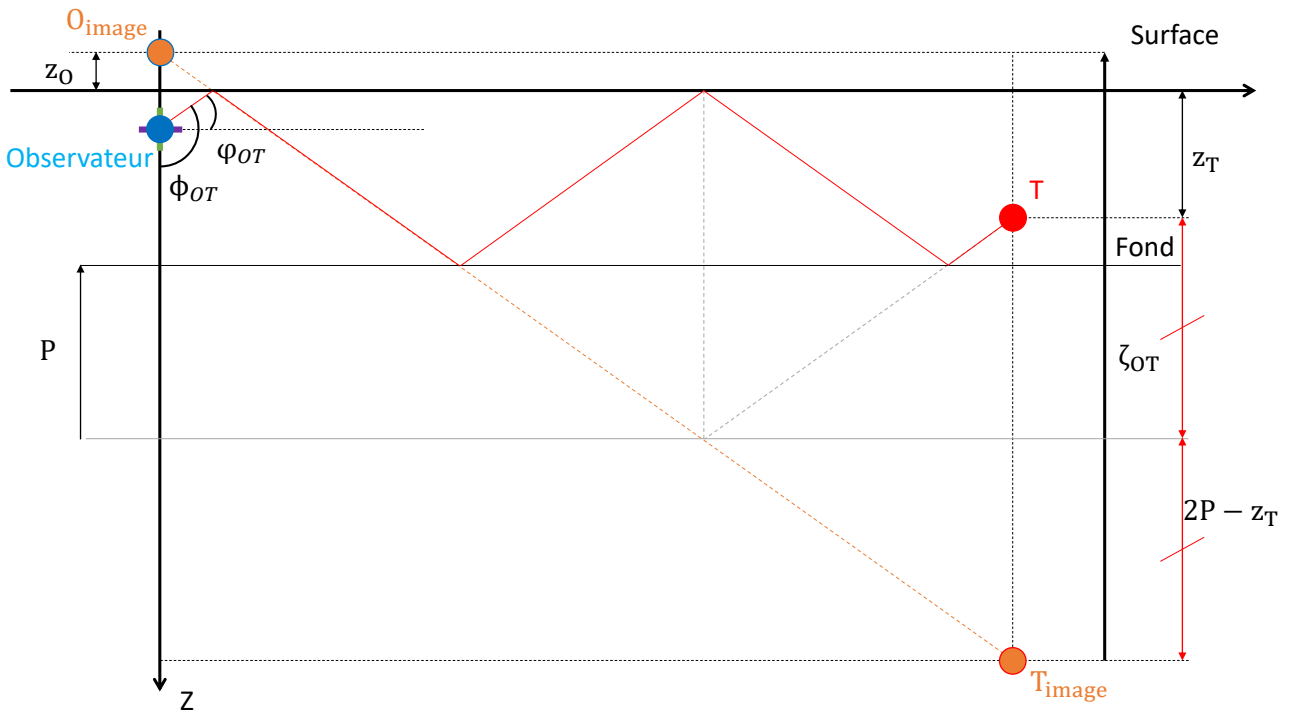


FIGURE 2.14 – Trajet réfléchi deux fois sur le fond et deux fois sur la surface (ou trajet (1,2,2)) suivi par l'onde acoustique entre son émission par la source et sa réception par l'observateur.

$$\begin{cases} \cos(\varphi_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{R_{OT}} = \frac{\sqrt{(x_T-x_O)^2+(y_T-y_O)^2}}{\sqrt{(x_T-x_O)^2+(y_T-y_O)^2+\zeta_{OT}^2}} \\ \cos(\phi_{OT}) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{OT}} = \frac{\zeta_{OT}}{\sqrt{(x_T-x_O)^2+(y_T-y_O)^2+\zeta_{OT}^2}} \end{cases} \quad (2.21)$$

Par la suite, nous parlerons de « trajets droits » pour désigner les trajets modélisés en rayons droits.

2.3.2 Comparaison du modèle de propagation en lignes droites avec une modélisation plus réaliste

Nous venons de donner une modélisation très simple de la propagation des ondes acoustiques qui est généralisable pour tous types de trajets et qui nous permet d'obtenir une expression du cosinus de site ou d'élévation facilement exploitable pour le calcul. Il est néanmoins important de nous assurer que la valeur du cosinus est proche de celle fournie par un modèle de propagation plus réaliste. En effet, l'une des hypothèses faites dans le modèle de propagation en lignes droites consiste à supposer que la célérité du son dans l'eau est la même, quelle que soit la direction, alors qu'elle est fonction de plusieurs paramètres (la salinité, la pression et la température étant les principaux [Dushaw *et al.*, 1993], voir profil bathycélérimétrique figure 2.15).

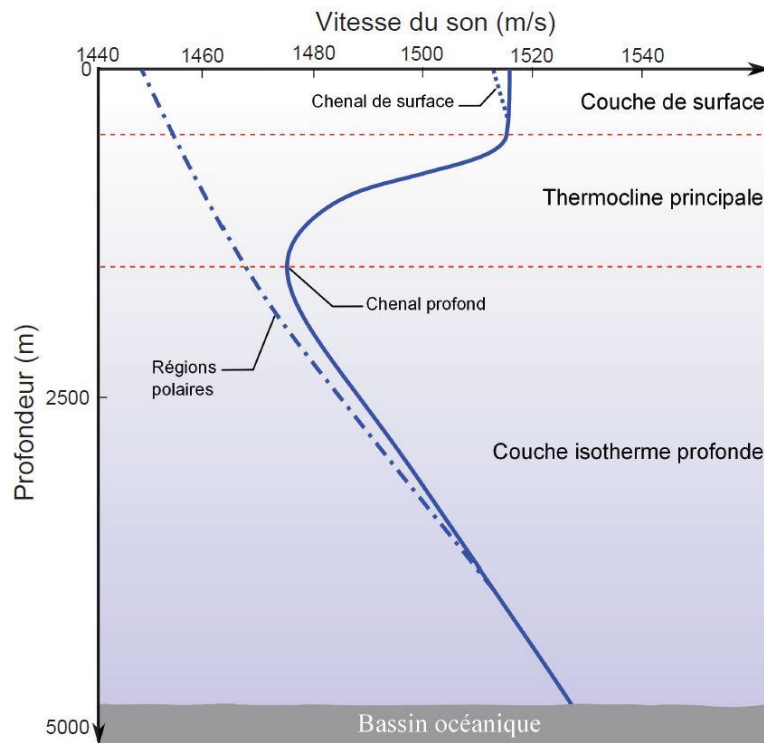


FIGURE 2.15 – Exemple de profil bathycélérimétrique (extrait de [Le Gall, 2015]).

Bien qu'elle reste faible, la variation en célérité fait que l'onde ne se propage pas en lignes droites. Les trajets de l'onde acoustique sont courbés comme représentés sur la figure 2.16.

Le développement d'un logiciel calculant des propagations dites « réalistes » n'entre pas dans les objectifs de cette thèse. Nous avons donc employé un logiciel développé par l'entreprise Naval Group dans le but de réaliser la comparaison entre les différentes modélisations.

Nous décrivons tout d'abord succinctement, et sans rentrer dans les détails, le fonctionnement du logiciel avant de donner la comparaison entre les deux modélisations. Ce logiciel dit de « lancer de

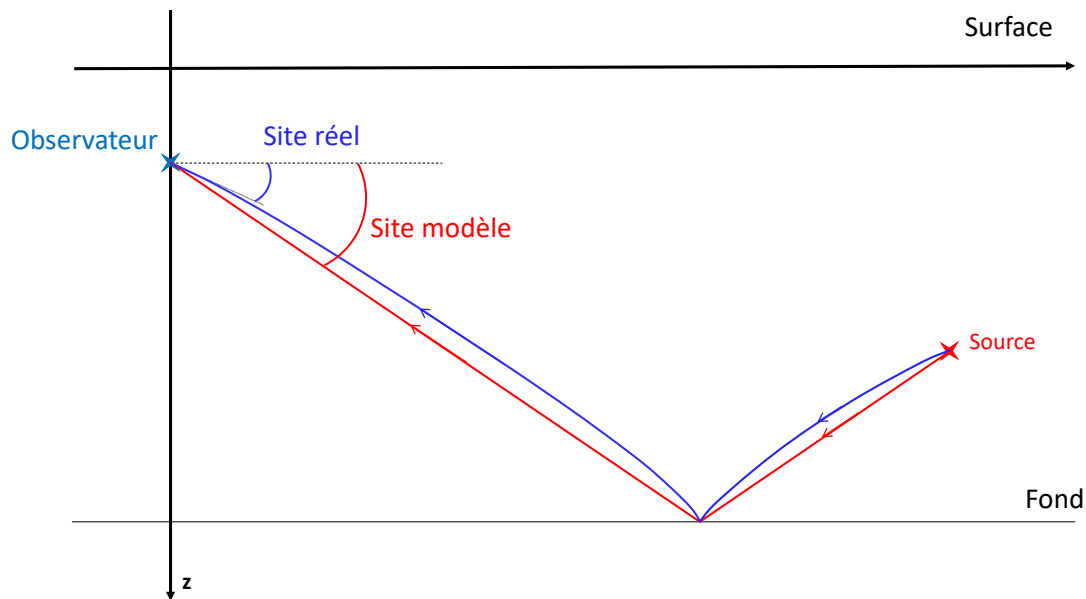


FIGURE 2.16 – Comparaison entre un trajet réfléchi-fond « réaliste » et un trajet réfléchi-fond modélisé en lignes droites.

rayons » calcule par dichotomie les trajets des ondes acoustiques émises par la source et passant exactement par l'observateur.

Le logiciel considère que la source est une source isotrope. Il fixe un pas angulaire d'angle d'émission d'ondes acoustiques et pour chaque angle, le logiciel construit la trajectoire de l'onde à partir des équations de propagation et d'un profil bathycélérimétrique (par exemple celui présenté à la figure 2.15). Ensuite pour chaque trajet de l'onde ainsi calculé, il vérifie si l'observateur se trouve entre deux trajets de pas angulaires successifs. Si l'observateur se trouve bien entre deux trajets, alors le logiciel réduit le pas angulaire jusqu'à converger vers un trajet passant exactement par l'observateur. Ce trajet est appelé « rayon propre ». Par définition, tous les trajets suivis par une onde acoustique passant à la fois par la source et par l'observateur sont appelés rayons propres. Il n'existe donc pas un rayon propre, mais potentiellement une infinité de rayons propres. Afin de limiter le nombre de trajets à calculer, le logiciel associe à chaque trajet une valeur de perte énergétique. Les pertes prises en compte par le logiciel sont les pertes géométriques, d'absorptions et aux interfaces. La prise en compte des pertes acoustiques permet de ne sélectionner qu'un nombre limité de trajets en fonction de l'énergie de l'onde qui arrive à l'observateur. Le nombre maximal de rayons propres conservé est dix.

Dans le cadre de l'étude menée ici, l'algorithme de lancer de rayons nous permet tout d'abord, pour tout scénario, de comparer les valeurs de cosinus de site et d'élévation calculées avec le modèle en lignes droites avec celles calculées avec un modèle plus réaliste, et également de dresser une carte des trajets les plus probables que l'observateur peut rencontrer. Nous nous intéressons tout d'abord à la comparaison entre les deux modélisations. Pour cela, nous créons deux scénarios particuliers d'une durée de 680s dans lesquels l'observateur acquiert des mesures toutes les deux secondes et est immobile au centre du repère à une immersion de 200m. Dans les deux scénarios, la source est en MRU suivant un cap de 0° à la vitesse de 5m/s, son immersion est de 300m. Les paramètres de la source dans les

deux scénarios sont :

- dans le premier scénario, la source se trouve initialement en $x_T = 0\text{m}$, $y_T = 1000\text{m}$,
- dans le second scénario, la source se trouve initialement en $x_T = 0\text{m}$, $y_T = 8000\text{m}$,

Le profil bathycélérimétrique (fourni par le logiciel) utilisé est un profil de grand fond (4830m).

Nous donnons dans la table 2.1 la liste des trajets retournés par l’algorithme de lancer de rayons. Nous devons introduire une nouvelle notation ici. En effet, lorsque l’on considère que la célérité du son n’est pas constante, l’onde acoustique peut subir des réfractions (en plus des réflexions sur la surface et sur le fond). Lorsque la courbure du trajet devient trop importante, soit lorsqu’il est orienté vers le haut soit vers le bas, la direction du trajet va s’inverser et l’on dit alors que l’onde subit une réfraction soit vers le haut soit vers le bas. Pour différencier les réfractions des réflexions dans les noms des trajets, nous utilisons le symbole « astérisque » :

- le nombre réfractions vers le bas est noté \check{n}_s ,
- le nombre réfractions vers le haut est noté \check{n}_b ,

ainsi un trajet réfracté sera désigné par l’un des trois triplets suivants : $(\delta, n_s, \check{n}_b)$, $(\delta, \check{n}_s, n_b)$ ou $(\delta, \check{n}_s, \check{n}_b)$.

Il est intéressant de noter que si l’onde subit une réfraction, quelle que soit sa direction, il pourra exister une infinité de trajets portant le même nom (cf. figure 2.17). Il est donc beaucoup plus difficile d’identifier le trajet exact de l’onde acoustique.

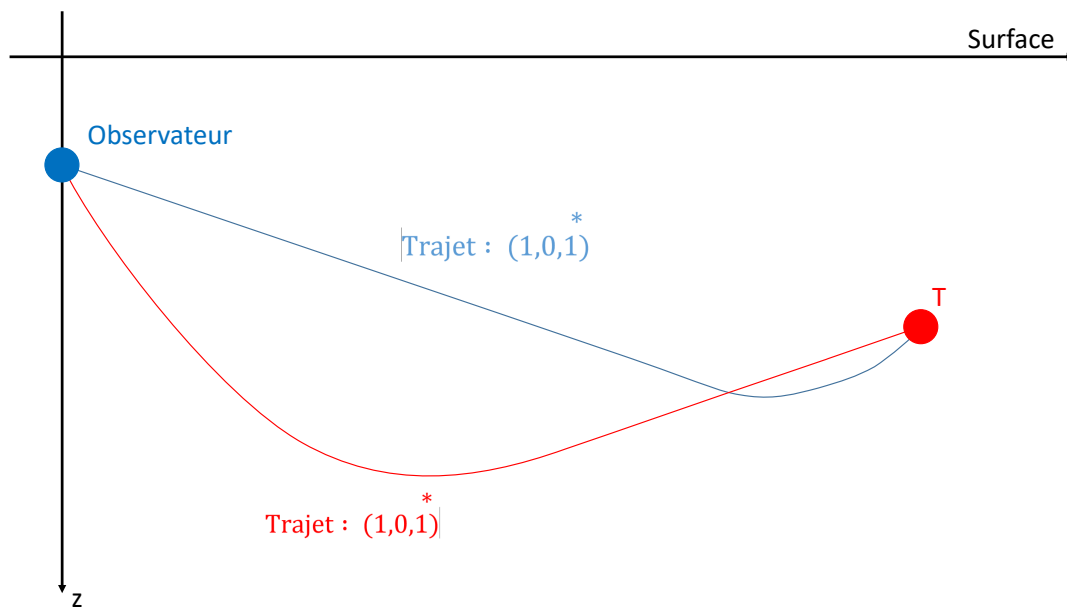


FIGURE 2.17 – Exemple de deux trajets réfractés portant le même nom.

Pour le premier scénario, nous voyons à la table 2.1 que la liste des trajets parvenant à l’observateur est uniquement composée de trajets réfléchis. Dans cette même table, nous voyons pour le second scénario que la liste des rayons est plus courte (seuls huit trajets sont présents du début à la fin du scénario) et que deux trajets sont des trajets réfractés. Afin de rendre possible la comparaison avec la modélisation en lignes droites, nous choisissons de comparer les trajets réfractés avec des trajets directs. La comparaison entre les deux modélisations est réalisée de la manière suivante :

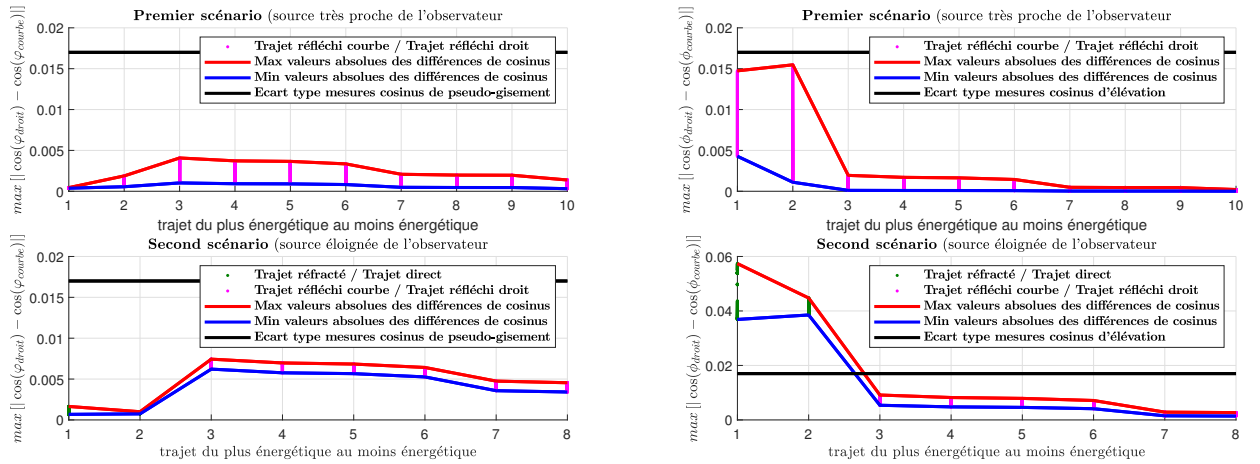
- nous calculons tout d’abord le cosinus de site et d’élévation sur toute la durée des deux scénarios et sous les deux modélisations pour chaque trajet présenté à la table 2.1,

TABLE 2.1 – Liste des trajets retournés par l’algorithme de lancer de rayons, rangés du plus énergétique au moins énergétique.

	Trajet de l’onde pour le premier scénario :	Trajet de l’onde pour le second scénario :
1	$(-1, 0, 0)$	$(-1, \hat{1}, 0)$
2	$(-1, 1, 0)$	$(1, 0, \hat{1})$
3	$(1, 0, 1)$	$(1, 0, 1)$
4	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$
5	$(-1, 1, 1)$	$(-1, 1, 1)$
6	$(-1, 2, 1)$	$(-1, 2, 1)$
7	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 2)$
8	$(1, 2, 2)$	$(-1, 2, 2)$
9	$(-1, 2, 2)$	
10	$(1, 2, 3)$	

- pour chaque trajet, nous calculons les valeurs absolues des différences entre les cosinus calculés avec la modélisation en lignes droites et ceux calculés avec la modélisation dite réaliste.

Les résultats pour chaque trajet, pour chaque antenne et pour chaque scénario sont présentés aux figures 2.18a et 2.18b. Les valeurs maximales et minimales des valeurs absolues des différences entre les cosinus ainsi que l’écart type des bruits des mesures sont représentées en rouge, en bleu et en noir sur ces figures, respectivement.



(a) Valeurs absolues des différences des cosinus de site pour les deux scénarios pour la TA. (b) Valeurs absolues des différences des cosinus d’élévation pour les deux scénarios pour une FA.

FIGURE 2.18 – Comparaison entre la modélisation dite réaliste et la modélisation en lignes droites.

Les résultats présentés aux figures 2.18a et 2.18b montrent que :

- pour des trajets ne comportant que des réflexions, l’écart de modèle sur les valeurs des cosinus de site et d’élévation est faible devant les écarts types des bruits de mesures (de cosinus de pseudo-gisement pour la figure 2.18a et de cosinus d’élévation pour la figure 2.18b),
- pour le second scénario et pour l’antenne linéaire remorquée, les trajets réfractés obtenus par le logiciel de lancé de rayons sont proches des trajets directs obtenus par la modélisation en ligne droite.
- pour le second scénario et pour une antenne de flanc, les trajets réfractés obtenus par le logiciel de lancé de rayons sont éloignés des trajets directs obtenus par la modélisation en ligne droite.

Remarque 3.

Pour une antenne de flanc, l'écart de modèle entre des trajets réfractés (obtenus par le logiciel de lancer de rayons) et des trajets directs (obtenus avec la modélisation en lignes droite) est plus grand que l'écart type du bruit de mesures des cosinus d'élévation. Nous pouvons donc nous attendre à rencontrer des difficultés lors d'estimation quand nous générerons des mesures de cosinus d'élévation de trajets réfractés à partir du logiciel de lancer de rayons.

Par abus de langage, les trajets d'ondes acoustiques générés avec le logiciel de lancer de rayons seront appelés « trajets courbes ».

Le logiciel de lancer de rayons nous permet également de dresser des cartes des rayons atteignant l'observateur en fonction de la distance le séparant de la source dans le plan horizontal. Ces cartes, présentées sous forme de disque, nous seront utiles lors de la génération de scénarios . En effet, l'analyse de ces cartes nous permet de limiter le nombre trajets de l'onde acoustique que nous avons à considérer dans nos études.

Afin de construire ces cartes sur deux cas types (le premier étant une situation de grand fond et le second étant une situation de petit fond ⁶), nous suivons les étapes suivantes :

- le grand fond est fixé à 4830m et le petit fond est fixé à 200m ;
- nous considérons un observateur fixe au centre du repère à une immersion de 100m pour le grand fond et de 20m pour le petit fond ;
- nous considérons ensuite une source à une immersion de 200m pour le grand fond et de 120m pour le petit fond, se déplaçant à la vitesse de 0.1m/s sur l'axe des abscisses. Sa course débute à 500m de l'observateur et se termine à 30km. La source est isotrope (l'onde acoustique émise se propage dans toutes les directions),
- le logiciel de lancer de rayons calcule ensuite les trajets des ondes acoustiques pour deux types de profils bathycélémétriques. L'observateur acquiert toutes les secondes les noms des trajets des ondes qu'il détecte ;

Pour chaque distance (observateur, source) donnée, on retient le type de trajet des deux ondes les plus énergétiques. Les différents types de trajets sont identifiés par un jeu de couleurs en fonction de leurs nombres de réflexions sur le fond. Les résultats obtenus pour ces scénarios sont affichés sur les figures [2.19](#) et [2.20](#) :

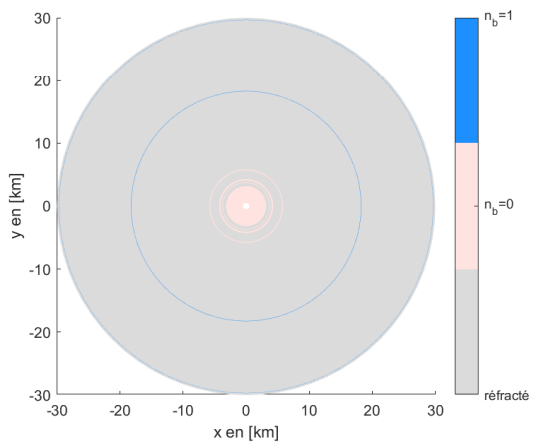
Les figures [2.19a](#) et [2.19b](#) montrent qu'en situation de grand fond, trois types de trajets parmi les deux trajets les plus énergétiques sont présents :

- des trajets réfractés,
- des trajets ne comportant aucune réflexion sur le fond (donc des trajets direct et réfléchi-surface),
- des trajets comportant une seule réflexion sur le fond.

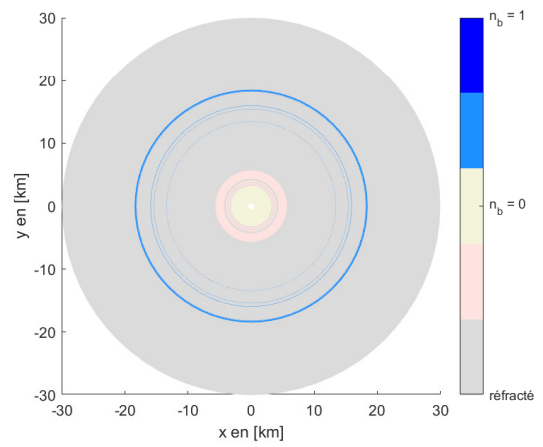
Dans les simulations que nous réaliserons avec la modélisation de propagation en lignes droites, se seront donc ces types de trajets que nous considérerons. Les trajets réfractés seront assimilés à des trajets directs (cf. [2.18a](#) et [2.18b](#)). En plus des types de trajets présents dans les cartes [2.19a](#) et [2.19b](#), nous prendrons en compte des trajets comportant deux réflexions sur le fond afin de n'omettre aucune possibilité.

Les figures [2.20a](#) et [2.20b](#) montrent qu'en situation de petit fond, l'observateur peut capter une grande

6. Grand fond et petit fond donnés par le logiciel de lancer de rayons.

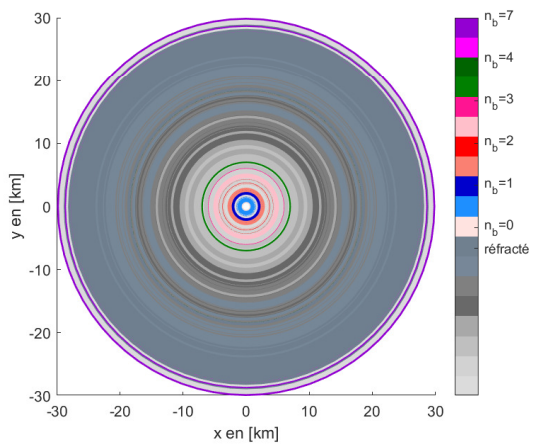


(a) Carte des trajets les plus énergétiques.

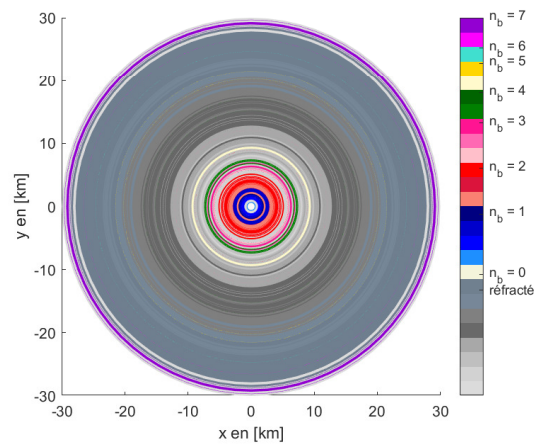


(b) Carte des seconds trajets les plus énergétiques.

FIGURE 2.19 – Carte des deux trajets les plus énergétiques lorsque le fond marin se situe à 4830m.



(a) Carte des trajets les plus énergétiques.



(b) Carte des seconds trajets les plus énergétiques.

FIGURE 2.20 – Carte des deux trajets les plus énergétiques lorsque le fond marin se situe à 200m.

variété de trajets. Il est donc difficile de définir à l'avance quel sera le trajet le plus probable d'être capté par l'observateur. Toute étude se plaçant dans cette situation devra donc prendre cela en considération.

Dans cette thèse, nous avons choisi de nous placer dans une situation de grand fond. Nous devons donc donner une définition non ambiguë de la notion de grand fond afin de nous assurer que les scénarios que nous choisissons correspondent bien à cette situation.

Étant horizontale, l'antenne linéaire remorquée a une mauvaise résolution des angles de site. A l'extrême, elle n'est pas capable de distinguer deux trajets différents d'une source en *broadside*⁷. La distinguabilité des deux trajets les plus probables (le direct et le réfléchi-fond) d'une source est statistiquement assurée si la distance dans le plan horizontal entre le centre acoustique de l'antenne et la source n'est pas trop importante relativement à la hauteur d'eau, ou encore si la hauteur d'eau est suffisante pour pouvoir séparer ces deux trajets. Nous développons la notion de grand fond et de classes de trajets pour l'antenne linéaire remorquée dans la section suivante.

2.4 Grand fond et classes de trajets pour l'antenne linéaire remorquée

2.4.1 Grand fond

Nous avons vu dans la partie précédente que la notion de « grand fond » est importante afin de déterminer les trajets pouvant être captés par l'observateur. Cette notion intervient lorsque la profondeur du fond marin est grande devant celles de la source et de l'observateur. Néanmoins, cette condition n'est pas suffisante pour notre étude. Nous proposons la définition suivante :

Définition 1.

Soit un observateur gréé d'une antenne linéaire remorquée.

Une source est dite en situation de grand fond lorsque les mesures de cosinus de pseudo-gisement issues d'un trajet direct sont distinguables⁸ des mesures de cosinus de pseudo-gisement issues d'un trajet réfléchi-fond.

En nous intéressant à la différence des cosinus de pseudo-gisement des trajets direct et réfléchi-fond, nous constatons que ces deux trajets donnent des valeurs de cosinus de pseudo-gisement de plus en plus éloignées lorsque la profondeur du fond marin augmente. Considérons par exemple un scénario où un observateur fixe au centre du repère à la profondeur $z_O = 200\text{m}$ acquiert les cosinus de pseudo-gisement des trajets direct et réfléchi-fond d'une onde acoustique émise par une source fixe se trouvant à 10km de lui à une profondeur $z_T = 100\text{m}$. La figure 2.21 présente l'évolution de la différence des cosinus de pseudo-gisement des deux trajets lorsque nous faisons varier la profondeur du fond marin de $P = 201\text{m}$ à $P = 5000\text{m}$ par pas de 1m . Nous voyons bien que la différence des cosinus de pseudo-gisement croît avec la profondeur du fond marin.

Afin de déterminer les zones de petit fond et de grand fond, nous devons donc répondre à la question suivante. À partir de quelle profondeur du fond marin deux trajets (direct et réfléchi-fond) sont-ils distinguables dans l'espace des mesures ?

7. Une source est dite en *broadside* si elle est dans le plan (vertical pour la TA) orthogonal à l'antenne et contenant son centre acoustique.

8. L'adjectif distinguable sera précisé par la suite.

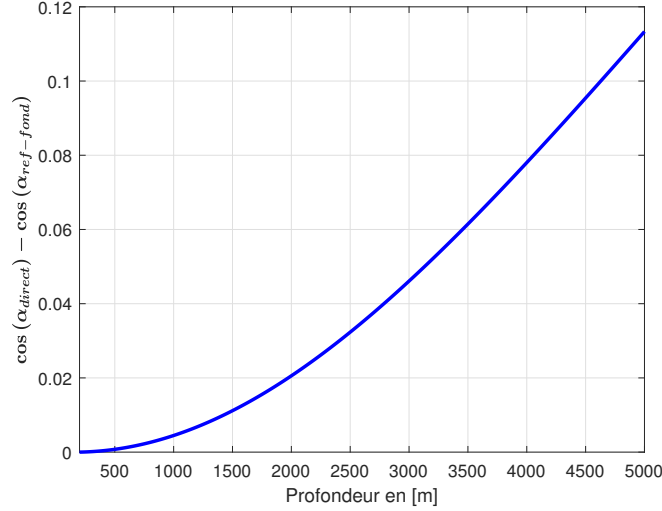


FIGURE 2.21 – Variation de la différence des cosinus de pseudo-gisement d’un trajet direct et d’un trajet réfléchi-fond en fonction de la profondeur du fond marin.

Commençons par écrire l’expression des deux mesures de cosinus de pseudo-gisement. Soient une mesure de cosinus de pseudo-gisement $s_1(t_k)$ relative au trajet direct et une mesure de cosinus de pseudo-gisement $s_2(t_k)$ relative au trajet réfléchi-fond qui sont délivrées à chaque instant par l’antenne linéaire horizontale. Les expressions des mesures $s_1(t_k)$ et $s_2(t_k)$ sont

$$\begin{cases} s_1(t_k) = \cos(\theta_{OT}(t_k) - h_O(t_k)) \frac{\rho_{OT}(t_k)}{\sqrt{\rho_{OT}^2(t_k) + (z_T - z_O)^2}}; \\ s_2(t_k) = \cos(\theta_{OT}(t_k) - h_O(t_k)) \frac{\rho_{OT}(t_k)}{\sqrt{\rho_{OT}^2(t_k) + (2P - z_O - z_T)^2}}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous posons maintenant $\Delta s(t_k)$ la valeur absolue de la différence entre $s_1(t_k)$ et $s_2(t_k)$:

$$\begin{aligned} \Delta s(t_k) &\triangleq |s_1(t_k) - s_2(t_k)| \\ &= \left| \rho_{OT}(t_k) \cos(\theta_{OT}(t_k) - h_O(t_k)) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{OT}^2(t_k) + (z_T - z_O)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{OT}^2(t_k) + (2P - z_O - z_T)^2}} \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Puisque $z_T - z_O < 2P - z_O - z_T$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta s(t_k) &= |\cos(\theta_{OT}(t_k) - h_O(t_k))| \\ &\quad \times \rho_{OT}(t_k) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{OT}^2(t_k) + (z_T - z_O)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{OT}^2(t_k) + (2P - z_O - z_T)^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les mesures de cosinus de pseudo-gisement délivrées par l’antenne étant corrompues par du bruit, nous déclarons que les deux mesures $s_1(t_k)$ et $s_2(t_k)$ sont distinguables si $\Delta s(t_k)$ est au moins deux fois

supérieures ou égale à l'écart type de l'erreur de mesure (ce qui équivaut à un intervalle à plus de 99% autour de chacune des mesures). Le critère de distinguabilité est donc le suivant : $\Delta s(t_k) \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)}$ ⁹.

Il est maintenant intéressant de dresser la carte des zones où la condition $\Delta s(t_k) \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)}$ est vérifiée en fonction du cap de l'observateur, de la distance $\rho_{OT}(t_k)$ et de la profondeur du fond marin. Cette carte peut être construite de la manière qui suit.

Considérons un observateur et une source à un instant donné. L'observateur est assimilé au centre acoustique de l'antenne et il se trouve au centre d'un repère orthonormé à la profondeur z_O , l'axe de l'antenne est dirigé suivant le cap h_O . La source se trouve à la profondeur z_T à la distance ρ_{OT} de l'observateur. Sans perte de généralité, nous considérons que la source se trouve sur l'axe des abscisses. L'onde acoustique émise par la source suit un trajet direct (donc associé à la mesure s_1 ¹⁰) et un trajet réfléchi-fond (donc associé à la mesure s_2). Nous calculons ensuite la valeur de Δs en faisant varier la valeur du fond marin P , la distance ρ_{OT} ainsi que le cap h_O de l'observateur. Nous obtenons ainsi une valeur de Δs pour chaque valeur de P , ρ_{OT} et h_O . Nous définissons enfin le terme $\Lambda(P, \rho_{OT}, h_O)$, ce terme prenant la valeur 1 si $\Delta s \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)}$ et la valeur 0 si $\Delta s < 2\sigma_{\cos(\alpha)}$. Nous obtenons finalement une carte en trois dimensions des zones où $\Lambda(P, \rho_{OT}, h_O) = 0$ ou 1. La figure 2.22 présente un exemple de carte obtenu pour des valeurs de P et ρ_{OT} fixées et pour h_O variant sur l'intervalle $\left[0; \frac{9\pi}{5}\right]$ par pas $\Delta h_O = \frac{\pi}{5}$.

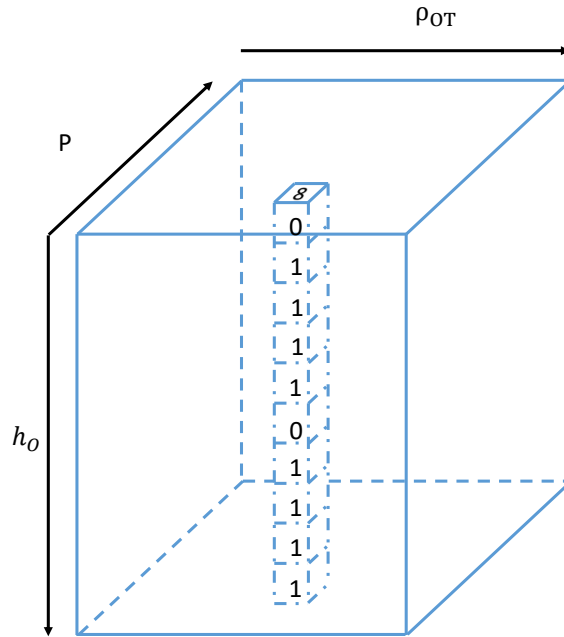


FIGURE 2.22 – Exemple de carte en trois dimensions en fonction de P , ρ_{OT} et h_O .

Nous calculons la moyenne des $\Lambda(P, \rho_{OT}, h_O)$ sur h_O :

$$\Lambda(P, \rho_{OT}) = \frac{1}{n_{h_O}} \sum_{h_O} \Lambda(P, \rho_{OT}, h_O), \text{ avec } n_{h_O} \text{ le nombre total de caps testés.} \quad (2.25)$$

En calculant $\Lambda(P, \rho_{OT})$ pour chaque valeur de P et de ρ_{OT} , nous pouvons ainsi dresser la carte des

9. Pour rappel, $\sigma_{\cos(\alpha)}$ est égal à 1.7×10^{-2} . Cette définition demeure valable pour toute autre valeur d'écart type.
10. Nous ne faisons pas apparaître le temps.

zones où la condition $\Delta s \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)}$ est vérifiée. La carte est présentée comme suit. Nous plaçons sur l'axe des abscisses la distance ρ_{OT} et sur l'axe des ordonnées la profondeur du fond marin P . Nous associons à chaque ρ_{OT} et P la valeur de $\Lambda(P, \rho_{OT})$. Enfin, nous associons une couleur à la valeur de $\Lambda(P, \rho_{OT})$. Cette couleur varie du bleu (pour $\Lambda(P, \rho_{OT})$ grand) au blanc (pour $\Lambda(P, \rho_{OT})$ petit). Nous présentons sur la figure 2.23 un exemple de carte obtenue pour P variant sur l'intervalle [400m; 5000m] par pas $\Delta P = 460\text{m}$ et pour ρ_{OT} variant sur l'intervalle [0km; 40km] par pas $\Delta \rho = 4\text{km}$. Le cap de l'observateur varie de la même façon que dans l'exemple présenté à la figure 2.22. Cette carte est obtenue dans le cas particulier où $z_T = z_O = 400\text{m}$.

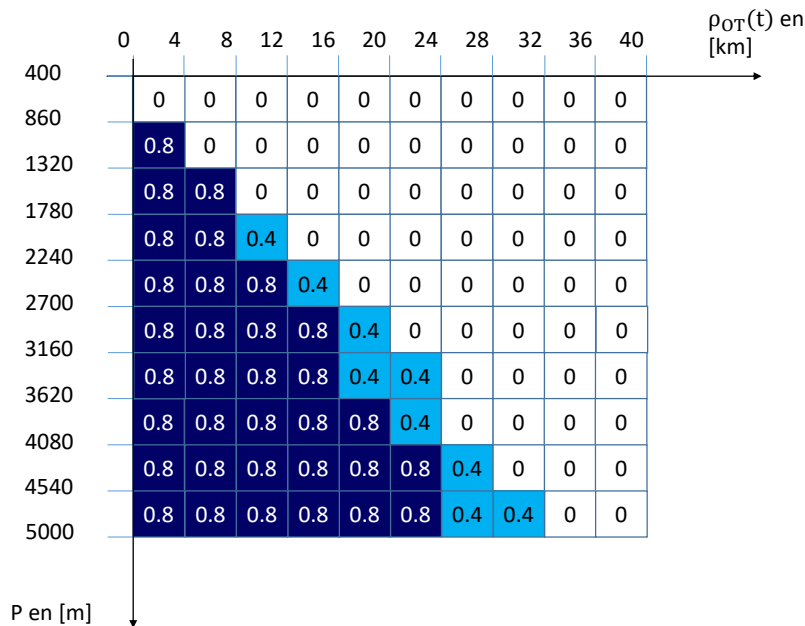


FIGURE 2.23 – Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec $\Delta h_O = \frac{\pi}{10}$, $\Delta P = 460\text{m}$ et $\Delta \rho = 4\text{km}$.

Nous constatons sur la figure 2.23 la présence d'une limite franche entre les zones où $\Lambda(P, \rho_{OT}) \neq 0$ des zones où $\Lambda(P, \rho_{OT}) = 0$. Cette limite devient plus nette lorsque nous traçons cette carte en prenant un pas plus fin pour P , ρ_{OT} et h_O . La carte présentée en figure 2.24 est obtenue pour les paramètres suivants. P varie sur l'intervalle [400m; 5000m] par pas de $\Delta P = 1\text{m}$, ρ_{OT} varie sur l'intervalle [0km; 40km] par pas $\Delta \rho = 40\text{m}$ et h_O varie sur l'intervalle $[0; \frac{359\pi}{180}]$ par pas $\Delta h_O = \frac{\pi}{180}$. Nous sommes toujours dans le cas particulier où $z_T = z_O = 400\text{m}$.

En plus d'une limite franche entre les cas $\Lambda(P, \rho_{OT}) \neq 0$ et $\Lambda(P, \rho_{OT}) = 0$, nous constatons sur la figure 2.24 qu'il y a une limite nette entre tous les cas $\Lambda(P, \rho_{OT}) = \frac{n}{n_{h_O}}$ et $\Lambda(P, \rho_{OT}) = \frac{n-1}{n_{h_O}}$ ($n \in \{0, \dots, n_{h_O}\}$). Cette limite semble être régie par la fonction affine

$$P = a\rho_{OT} + b. \quad (2.26)$$

Afin d'identifier a et b , nous adoptons une approche probabiliste. Pour ce faire, nous assimilons le cap h_O de l'observateur à une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. Soit q une probabilité. Nous cherchons la droite $P = a\rho_{OT} + b$ telle que $\mathbb{P}(h_O \text{ tq } \Delta s \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)}) = q$.

En nous plaçant dans le cas particulier $z_T = z_O$, l'expression de la valeur absolue de la différence des

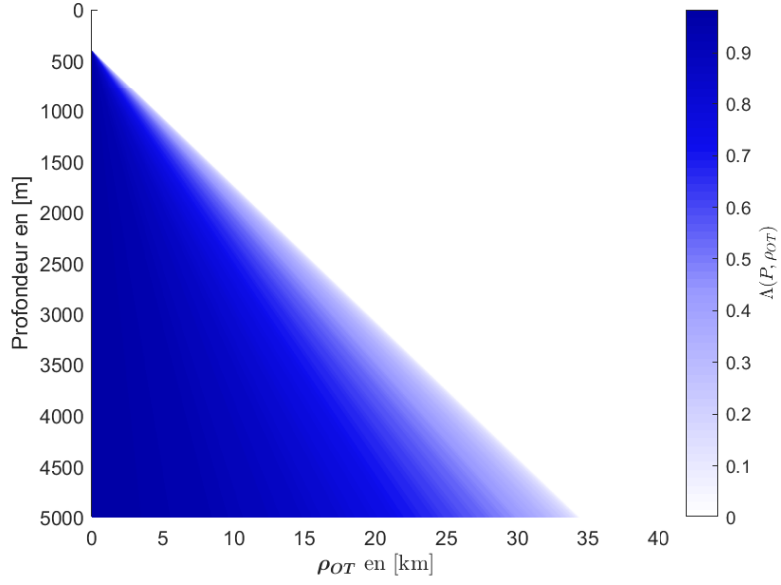


FIGURE 2.24 – Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec $\Delta h_O = \frac{\pi}{180}$, $\Delta P = 1\text{m}$ et $\Delta \rho = 40\text{m}$.

mesures devient :

$$\Delta s = |\cos(\theta_{OT} - h_O)| \rho_{OT} \left(\frac{1}{\rho_{OT}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_{OT}^2 + 4(P - z_T)^2}} \right). \quad (2.27)$$

Nous posons $b = z_T$, puis en remplaçant P par $a\rho_{OT} + b$, nous obtenons

$$\Delta s = |\cos(\theta_{OT} - h_O)| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2}} \right). \quad (2.28)$$

Nous pouvons donc écrire que :

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{P} \left(h_O \text{ tq } |\cos(\theta_{OT} - h_O)| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2}} \right) \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(h_O \text{ tq } |\cos(\theta_{OT} - h_O)| \geq \frac{2\sigma_{\cos(\alpha)}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2}}} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous posons $\lambda = \frac{2\sigma_{\cos(\alpha)}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2}}}$ et $\gamma = \cos^{-1}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
q &= \mathbb{P}(h_O \text{ tq } |\cos(h_O - \theta_{OT})| \geq \lambda) \\
&= \mathbb{P}((h_O - \theta_{OT}) \in [-\gamma, \gamma] \cup [\pi - \gamma, \pi + \gamma]) \\
&= \mathbb{P}(h_O \in [\theta_{OT} - \gamma, \theta_{OT} + \gamma] \cup [\theta_{OT} + \pi - \gamma, \theta_{OT} + \pi + \gamma]) \\
&= \mathbb{P}(h_O \in [\theta_{OT} - \gamma, \theta_{OT} + \gamma]) + \mathbb{P}(h_O \in [\theta_{OT} + \pi - \gamma, \theta_{OT} + \pi + \gamma]) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\theta_{OT} - \gamma}^{\theta_{OT} + \gamma} dh_O + \int_{\theta_{OT} + \pi - \gamma}^{\theta_{OT} + \pi + \gamma} dh_O \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \gamma \\
&= \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{2\sigma_{\cos(\alpha)}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}} \right).
\end{aligned}$$

Nous pouvons finalement trouver l'expression de a à partir du résultat précédent.

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{2\sigma_{\cos(\alpha)}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}q\right)}\right)^2} - 1} \quad (2.30)$$

Nous traçons en rouge sur la figure 2.25 (en surimpression sur la figure 2.24) la droite permettant d'obtenir $\mathbb{P}(h_O \text{ tq } \Delta s \geq 2\sigma_{\cos(\alpha)}) = 0.7$ d'équation $P = a\rho_{OT} + b$, avec a donné par (2.30), $b = z_T$ et pour $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$.

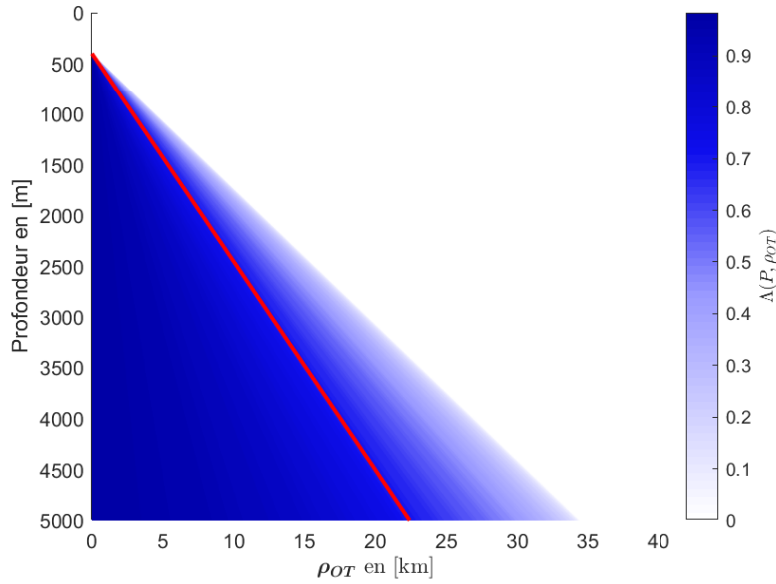


FIGURE 2.25 – Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec la droite d'équation $P = 0.2052 \times \rho_{OT} + 400$.

La carte présentée à la figure 2.25 s'interprète de la manière suivante : une source est en situation de grand fond si $P \geq 0.2052\rho_{OT} + 400$.

La carte de la figure 2.25 peut donc se lire comme un abaque qui, pour un couple P et ρ_{OT} , permet de décider si la source se trouve en situation de grand fond et en situation de petit fond (l'abaque est présenté à la figure 2.26).

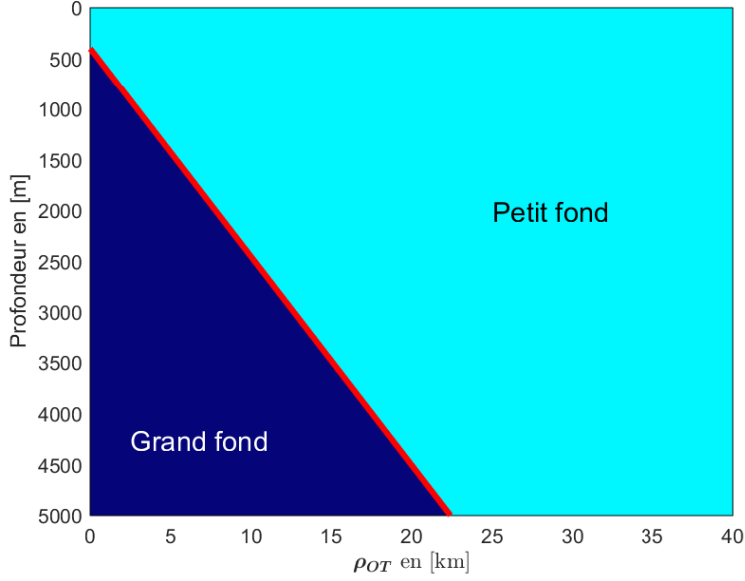


FIGURE 2.26 – Abaque du grand fond et du petit fond.

Finalement, nous pouvons donner la proposition suivante :

Proposition 1.

Soit z_{max} la profondeur au-delà de laquelle une source ou un observateur équipé d'une antenne linéaire remorquée ne peut descendre.

Une source se trouvera en situation de grand fond si et seulement si la profondeur du fond marin est supérieure ou égale à la profondeur maximale admissible pour un sous-marin augmentée de 0.2052 multiplié par la distance horizontale séparant la source de l'observateur (ou encore $0.2052 \times \rho_{OT} + z_{max}$).

Dorénavant, nous utiliserons cette définition afin de déterminer si les sources que nous considérons se trouvent bien dans une situation de grand fond. Nous prendrons $z_{max} = 400\text{m}$.

Remarque 4.

La définition du grand fond ainsi que les cartes permettant de le déterminer ont été obtenues en se plaçant dans le cas particulier où la profondeur de l'observateur était égale à la profondeur de la source.

Dans le cas général où les deux profondeurs ne sont pas égales, des calculs similaires peuvent être menés : nous reprenons les équations 2.27 à 2.29 et nous aboutissons à :

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{z_T - z_O}{\rho_{OT}}\right)^2} - \frac{2\sigma_{\cos(\alpha)}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}q\right)}\right)^2} - 1}, \text{ après avoir posé } b = \frac{(z_T + z_O)}{2} \quad (2.31)$$

Par construction, le terme sous la racine carrée dans 2.31 est toujours strictement positif.

Le terme a dépend maintenant de la distance ρ_{OT} et des profondeurs z_O et z_T . L'équation 2.26 ne décrit plus une droite. Toutefois, lorsque ρ_{OT} est grand devant $|z_T - z_O|$, l'expression de a

donnée par 2.30 est une approximation au 1^{er} ordre de l'expression de a donnée par 2.31, puisque $\left(\frac{z_T - z_O}{\rho_{OT}}\right)^2$ est petit.

Suivant ces considérations, nous obtenons l'abaque d'un cas général obtenu en choisissant $z_T = 100\text{m}$ et $z_O = 200\text{m}$ présenté à la figure 2.27. Nous représentons en rouge la droite d'équation $P = 0.2052 \times \rho_{OT} + 400$ (400m étant la profondeur maximale). Nous représentons également en jaune la courbe d'équation

$$P = \frac{\rho_{OT}}{2} \sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{z_T - z_O}{\rho_{OT}}\right)^2} - \frac{2\sigma_{\cos(\alpha)}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}q\right)}\right)^2 - 1} + \frac{(z_T + z_O)}{2}}, \quad (2.32)$$

pour $z_T = 100\text{m}$, $z_O = 200\text{m}$ et $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$.

Nous constatons sur cette figure que l'approximation au 1^{er} ordre pour le calcul de a est tout à fait acceptable (les deux droites ont manifestement la même pente). Seules changent les ordonnées à l'origine $b = 400$ et $b = 150$.

Dans le reste du document, compte tenu de la proximité des droites, nous utiliserons la droite de coefficient directeur a défini par 2.30 et d'ordonnée à l'origine $b = 400$, quitte à classer dans le petit fond une source qui serait dans le grand fond (cela concerne les sources qui se trouveront entre la droite rouge et la droite jaune).

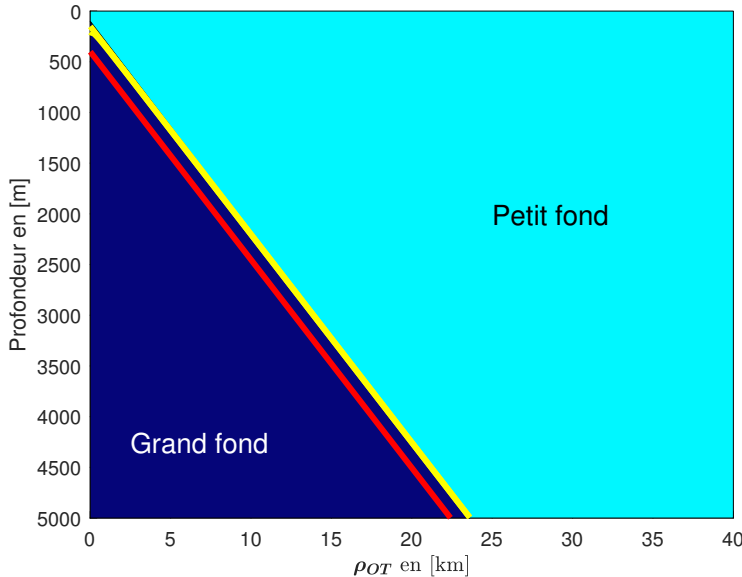


FIGURE 2.27 – Abaque dans le cas où $z_T \neq z_O$.

Remarque 5.

Les notions de « grand fond » et de « petit fond » définies dans ce manuscrit ne sont pas uniquement relatives à la hauteur d'eau, elles sont également duales aux notions de champ proche et de champ lointain (donc relatives à la distance séparant l'observateur et la source). Pour une hauteur d'eau donnée, une source s'éloignant de l'observateur passera d'une situation de champ proche (d'une situation de grand fond) à une situation de champ lointain (d'une situation de

petit fond). Cette notion de champ lointain est propre à la trajectographie par mesure de cosinus d'angle.

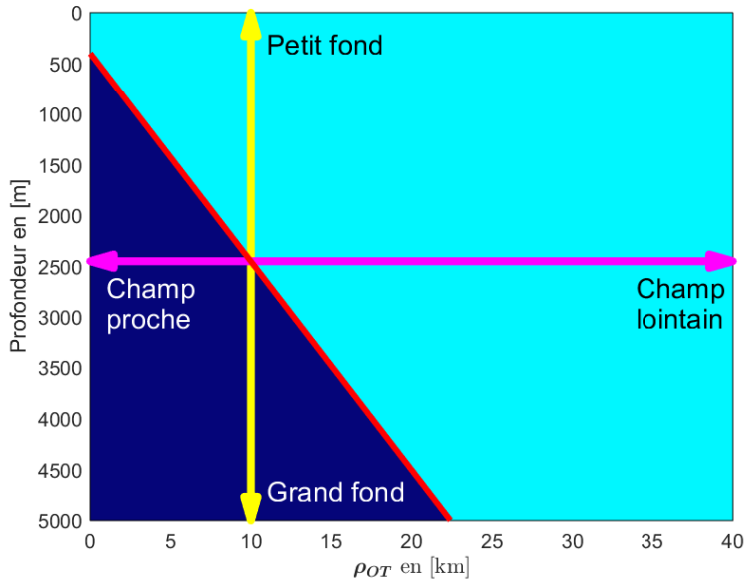


FIGURE 2.28 – Dualité entre les notions de grand fond et de champ proche.

Remarque 6.

Pour une antenne de flanc, nous pouvons également dresser la carte des régions où les trajets direct et réfléchi-fond sont distinguables.

Pour cela, nous notons Δs la valeur absolue de la différence entre le cosinus d'élévation du trajet direct et le cosinus d'élévation du trajet réfléchi-fond.

Nous calculons ensuite $\Lambda(P, \rho_{OT})$ ¹¹ qui prend la valeur 1 si $\Delta s \geq 2\sigma_{\cos(\phi)}$ et la valeur 0 si $\Delta s < 2\sigma_{\cos(\phi)}$, pour chaque valeur de P et de ρ_{OT} .

Nous traçons à la figure 2.29 la carte des zones où la condition $\Delta s \geq 2\sigma_{\cos(\phi)}$ est vérifiée dans le cas où $z_T = z_O = 400\text{m}$ (les pas ΔP et $\Delta \rho$ sont les mêmes que ceux nous ayant permis d'obtenir la carte 2.24). La droite d'équation $P = 0.2052 \times \rho_{OT} + 400$ est également tracée en rouge sur cette carte.

Nous voyons sur la carte 2.29 que pour une antenne de flanc, la région où les cosinus d'élévation (des trajets direct et réfléchi-fond) sont distinguables est plus étendue que celle où les cosinus de pseudo-gisement (des deux mêmes trajets) sont distinguables. La notion de grand fond attachée aux antennes de flanc est donc plus « grande » que celle attachée à l'antenne linéaire remorquée (une source se trouvant en petit fond pour la TA pourra se trouver en grand fond pour une FA).

L'expression de la frontière entre les situations où les deux trajets ne sont pas distinguables des situations où ils sont distinguables peut être obtenue de façon similaire que ce que nous avons réalisé pour la TA :

- Nous supposons que cette limite est régie par la fonction affine $P = a\rho_{OT} + b$ avec $b = z_T = 400\text{m}$.

11. (nous n'avons pas à calculer $\Lambda(P, \rho_{OT}, h_O)$, car les cosinus d'élévation ne dépendent pas du cap de l'observateur)

- En nous plaçant dans le cas particulier $z_T = z_O$ et en prenant $P = a\rho_{OT} + z_T$, nous trouvons que Δs est égal à $\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}}$.
- La frontière entre les situations où les trajets sont distinguables et les situations où ils ne le sont pas est le lieu où

$$\Delta s = 2\sigma_{\cos(\phi)}.$$

en développant le calcul, nous aboutissons à l'expression de a :

$$\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}} = 2\sigma_{\cos(\phi)},$$

$$a = \frac{\sigma_{\cos(\phi)}}{\sqrt{1-4\sigma_{\cos(\phi)}^2}}.$$

- En prenant $\sigma_{\cos(\phi)} = 0.017$ nous trouvons finalement que $a = 0.017$ et que la droite a pour équation $P = 0.017\rho_{OT} + 400$ (cette droite est tracée en jaune sur la figure 2.29).

Nous pouvons énoncer une proposition pour les antennes de flanc, analogue à la proposition 1 :

Proposition 2.

Soit z_{max} la profondeur au-delà de laquelle une source ou un observateur équipé d'antennes de flanc ne peut descendre.

Une source se trouvera en situation de grand fond si et seulement si la profondeur du fond marin est supérieure ou égale à $0.017 \times \rho_{OT} + z_{max}$.

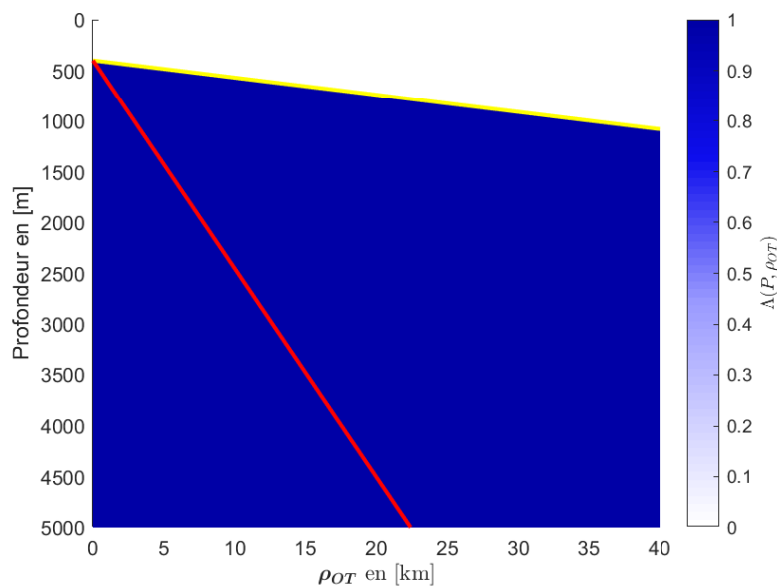


FIGURE 2.29 – Carte des $\Lambda(P, \rho_{OT})$ avec $\Delta P = 1\text{m}$ et $\Delta \rho = 40\text{m}$; et avec les droites d'équations $P = 0.2052 \times \rho_{OT} + 400$ (en rouge) et $P = 0.017 \times \rho_{OT} + 400$ (en jaune).

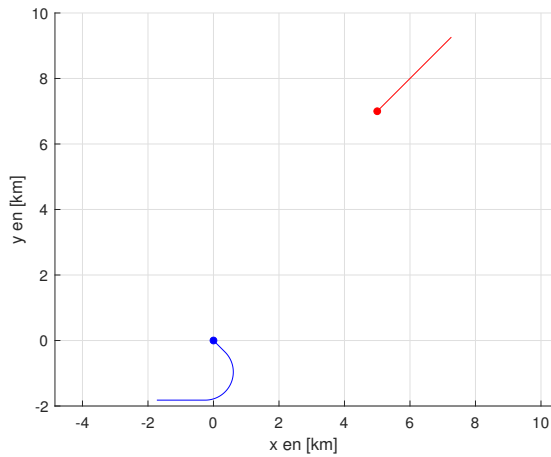
2.4.2 Classes de trajets

Même si la source se trouve en situation de grand fond, la différence des cosinus de pseudo-gisement de certains couples de trajets (autre que le couple trajet direct - trajet réfléchi-fond) est petite. Si nous considérons par exemple un scénario (voir figure 2.30a, les positions initiales de l'observateur et de la source sont symbolisées par des points sur cette figure) où un observateur équipé d'une antenne

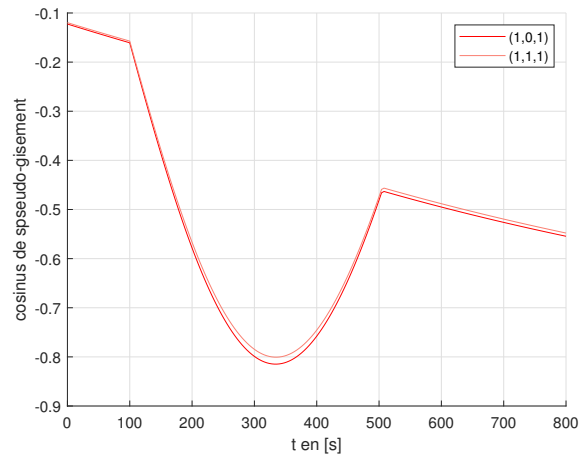
linéaire remorquée détecte une source émettant une onde acoustique se propageant suivant le trajet réfléchi-fond et le trajet $(1, 1, 1)$ ¹², nous voyons que les cosinus de pseudo-gisement des deux trajets prennent des valeurs très proches (voir figure 2.30b). Les paramètres du scénario sur lequel nous avons obtenu ce résultat sont les suivants.

- Le centre acoustique de l’antenne de l’observateur se trouve initialement en $(0, 0, 200)^T$. Il suit initialement un cap de 135° à la vitesse de 5m/s durant $1\text{min } 40\text{s}$. L’observateur effectue ensuite un virage vers la droite avec un taux de giration égal à $20^\circ/\text{min}$ afin d’atteindre le cap de 270° . La manœuvre dure ainsi $6\text{min } 44\text{s}$. Enfin, l’observateur maintient son cap durant 5 minutes, le scénario dure donc 13 minutes et 24 secondes. La norme de la vitesse de l’antenne est constante durant toute la durée du scénario.
- Le centre acoustique de la source se trouve initialement en $(5000, 7000, 100)^T$, elle se déplace suivant un cap de 45° à la vitesse de 4m/s .
- Le fond marin se situe à $P = 4000\text{m}$.

Un début d’explication de ce phénomène peut être obtenu en s’intéressant à l’expression du cosinus de pseudo-gisement. En effet, d’après (2.4) seule la valeur du cosinus de site impacte les valeurs des cosinus de pseudo-gisement des trajets suivis par une même onde. Plus précisément, c’est la valeur de ζ_{OT} qui influe sur la valeur du cosinus de pseudo-gisement. En effet, nous voyons que le terme prépondérant de l’équation (2.19) est $2n_b P$ dans le cas où la profondeur du fond marin P est grande devant celles de l’observateur z_O et de la source z_T . Par conséquent, le nombre de réflexions sur le fond influe fortement sur la valeur de ζ_{OT} et donc sur la valeur du cosinus de pseudo-gisement. Nous en déduisons donc que des trajets ayant un même nombre de réflexions sur le fond seront détectés dans des directions où les cosinus de pseudo-gisement seront proches.



(a) Scénario.



(b) Cosinus de pseudo-gisement.

FIGURE 2.30 – Calcul des valeurs de cosinus de pseudo-gisement pour différents trajets sur un scénario.

Montrons maintenant par le calcul que deux trajets ayant un même nombre de réflexions sur le fond présentent des valeurs de cosinus de pseudo-gisement proches. Pour cela, nous devons nous assurer que la différence des cosinus de site de deux trajets possédant un même nombre de réflexion sur le fond est faible. En effet comme nous l’avons précédemment précisé, c’est la valeur du cosinus de cet angle qui est importante pour savoir si deux cosinus de pseudo-gisement ont des valeurs proches.

Nous considérons donc une onde acoustique qui s’est propagée suivant deux trajets possédant un

12. voir figure A.6 de l’annexe A

nombre n_b de réflexions sur le fond. Le cosinus de site du premier trajet est noté $\cos(\varphi_{OT})$ et le cosinus de site du second trajet est noté $\cos(\tilde{\varphi}_{OT})$. Pour rappel, les cosinus de site ont pour expression :

$$\begin{cases} \cos(\varphi_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{\sqrt{\rho_{OT}^2 + \zeta_{OT}^2}} \\ \cos(\tilde{\varphi}_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{\sqrt{\rho_{OT}^2 + \tilde{\zeta}_{OT}^2}} \end{cases}. \quad (2.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \zeta_{OT} &= -\delta(-1)^{n_s - n_b} (2n_b P - \delta((-1)^{n_s - n_b} z_O - z_T)), \\ \text{et} \\ \tilde{\zeta}_{OT} &= -\tilde{\delta}(-1)^{\tilde{n}_s - n_b} (2n_b P - \tilde{\delta}((-1)^{\tilde{n}_s - n_b} z_O - z_T)). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nous considérons ici que P est grand devant l'immersion de l'observateur z_O et l'immersion de la source z_T . Afin de simplifier l'écriture des équations, nous posons $\Delta z = \delta((-1)^{n_s - n_b} z_O - z_T)$ et $\Delta \tilde{z} = \tilde{\delta}((-1)^{\tilde{n}_s - n_b} z_O - z_T)$. L'équation (2.33) devient

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \cos(\varphi_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{\sqrt{\rho_{OT}^2 + (2n_b P + \Delta z)^2}} \\ \cos(\tilde{\varphi}_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{\sqrt{\rho_{OT}^2 + (2n_b P + \Delta \tilde{z})^2}} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \cos(\varphi_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{P \sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b + \frac{\Delta z}{P})^2}} \\ \cos(\tilde{\varphi}_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{P \sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b + \frac{\Delta \tilde{z}}{P})^2}} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Prenons maintenant la différence des cosinus de site des deux trajets

$$\cos(\varphi_{OT}) - \cos(\tilde{\varphi}_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{P} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b + \frac{\Delta z}{P})^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b + \frac{\Delta \tilde{z}}{P})^2}} \right]. \quad (2.36)$$

On pose $\varepsilon = \frac{\Delta z}{P}$ et $\tilde{\varepsilon} = \frac{\Delta \tilde{z}}{P}$. Comme P est grand devant z_O et z_T , P est grand devant $|\Delta z|$ et $|\Delta \tilde{z}|$, nous avons $|\varepsilon| \ll 1$ et $|\tilde{\varepsilon}| \ll 1$. Nous pouvons donc faire le développement limité à l'ordre 1 des cosinus de site.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b + \varepsilon)^2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b)^2}} - \varepsilon \frac{2n_b}{\left(\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b)^2}\right)^3} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b + \tilde{\varepsilon})^2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b)^2}} - \tilde{\varepsilon} \frac{2n_b}{\left(\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b)^2}\right)^3} \end{aligned}. \quad (2.37)$$

L'équation (2.36) devient

$$\cos(\varphi_{OT}) - \cos(\tilde{\varphi}_{OT}) \approx \frac{\rho_{OT}}{P} (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \frac{2n_b}{\left(\sqrt{\frac{\rho_{OT}^2}{P^2} + (2n_b)^2}\right)^3}. \quad (2.38)$$

Posons $x = \frac{\rho_{OT}}{P}$ et $f(x) = x \frac{2n_b}{(\sqrt{x^2 + (2n_b)^2})^3}$. Pour un ε et un $\tilde{\varepsilon}$ fixés, nous cherchons l'écart maximal de $\cos(\varphi_{OT}) - \cos(\tilde{\varphi}_{OT})$. Nous cherchons donc la valeur maximale prise par $f(x)$. Dérivons tout d'abord $f(x)$ par rapport à x

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2n_b \left[x^2 + (2n_b)^2 \right]^{-3/2} \left\{ 1 - 3x^2 \left[x^2 + (2n_b)^2 \right]^{-1} \right\}; \\ &= 2n_b \left[x^2 + (2n_b)^2 \right]^{-3/2} \frac{(2n_b)^2 - 2x^2}{x^2 + (2n_b)^2}; \\ &= 2n_b \left[x^2 + (2n_b)^2 \right]^{-3/2} \frac{(2n_b + \sqrt{2}x)(2n_b - \sqrt{2}x)}{x^2 + (2n_b)^2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

x et n_b sont tous les deux strictement positifs, donc $f'(x)$ est du signe de $2n_b - \sqrt{2}x$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2n_b > \sqrt{2}x; \\ &\Leftrightarrow x < n_b\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Le tableau de variation de $f(x)$ est donné à la table 2.2.

TABLE 2.2 – Tableau de variation de $f(x)$

x	0	$n_b\sqrt{2}$	+ inf
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{3n_b\sqrt{6}}$	0

La valeur maximale prise par la différence des cosinus de site de deux trajets comportant un même nombre de réflexions sur le fond est donc

$$\cos(\varphi_{OT}) - \cos(\tilde{\varphi}_{OT}) \approx \frac{0.1925}{n_b} \times (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \quad (2.41)$$

Comme $|\tilde{\varepsilon}|$ et $|\varepsilon|$ sont très petits devant 1, nous avons également $|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon| \ll 1$. L'équation (2.41) montre donc que la différence des cosinus de site de deux trajets ayant le même nombre de réflexions sur le fond sera faible et donc, par extension, que la différence des cosinus de pseudo-gisement le sera également. De plus, l'équation (2.41) nous permet d'affirmer que plus des trajets comporteront des réflexions sur le fond, plus les cosinus de pseudo-gisement auront des valeurs proches.

Le constat réalisé en début de section ainsi que les calculs que nous avons menés nous permettent de

définir ici une nouvelle notion. En effet, nous venons de montrer que si la source se trouve en situation de grand fond, alors des trajets ayant un même nombre de réflexions sur le fond auront des valeurs de cosinus de pseudo-gisement très proches et donc seront regroupés dans l'espace des mesures. Nous introduisons donc ici la notion de « classe de trajets ». Les classes de trajets ont pour définition

Définition 2.

Deux trajets appartiennent à une même classe si et seulement si leurs nombres de réflexions-fond sont égaux.

Les trajets regroupés dans une même classe ont des valeurs de cosinus de pseudo-gisement quasi égales si la source se trouve en situation de grand fond. Chaque classe de trajets est numérotée par le nombre de réflexions sur le fond que comportent les trajets qui la composent augmenté de un : par exemple, les trajets ne comportant pas de réflexion sur le fond sont regroupés dans la classe 1, les trajets comportant une seule réflexion sont regroupés dans la classe 2, etc.

Nous traçons à la figure 2.31 les cosinus de pseudo-gisement calculés sur le scénario décrit en début de section pour tous les trajets des classes 1, 2 et 3. Nous constatons bien que les trajets comportant un même nombre de réflexions sur le fond se regroupent dans l'espace des mesures. Nous remarquons également que les trajets se regroupent en classe pour les antennes de flanc (voir figure 2.32). Toutefois, pour ce type d'antenne il faut cette fois-ci prendre la valeur absolue du cosinus d'élévation (le cosinus d'élévation pouvant prendre des valeurs positives et négatives) ¹³.

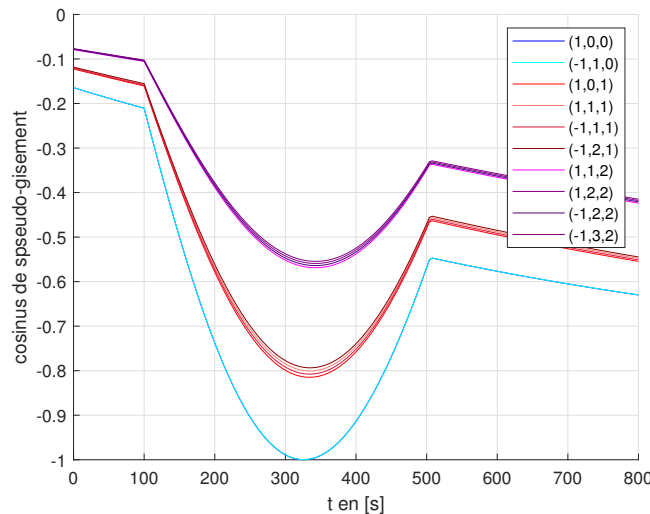


FIGURE 2.31 – Valeur absolue du cosinus de pseudo-gisement calculée pour le scénario de la figure 2.30a et pour différents trajets.

Enfin lorsque la source se trouve en champ lointain ou lorsque la source se trouve en situation de petit fond, la notion de classe disparaît. En effet, dans ce cas quel que soit le trajet de l'onde acoustique, le cosinus de site tend vers ± 1 pour l'antenne linéaire remorquée et le cosinus d'élévation tend vers 0 pour les antennes de flanc. Il n'existe donc plus de classe et le site ou l'élévation n'ont plus d'influence sur les mesures des différentes antennes. Des méthodes de trajectographie ne prenant pas en compte le site, telle que le *BOTMA* « classique », peuvent donc être appliquées [Nardone *et al.*, 1984].

Nous avons choisi initialement de nous placer en situation de grand fond. Les classes de trajets nous

¹³. Nous devons donc pour ce type d'antenne distinguer pour une même classe, les trajets permettant de calculer un cosinus d'élévation positif de ceux permettant de calculer un cosinus d'élévation négatif.

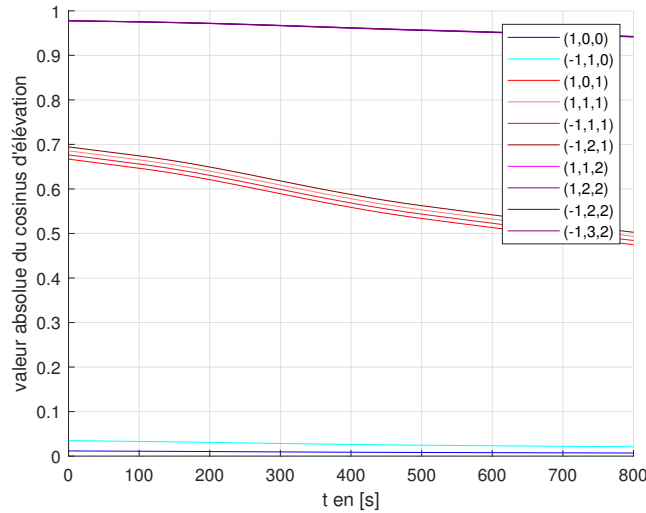


FIGURE 2.32 – Valeur absolue du cosinus d’élévation calculée pour le scénario de la figure 2.30a et pour différents trajets.

permettent de limiter le nombre de trajets que nous aurons à considérer dans la suite de cette thèse. En effet, plutôt que de considérer l’ensemble des trajets, nous n’aurons qu’à considérer un représentant par classe (qui sera précisé lorsque l’on utilisera la notion de classe de trajets).

2.5 Notre démarche

Dans les chapitres suivants, nous étudions divers problèmes de trajectographie à partir des mesures collectées par une antenne linéaire remorquée, par des antennes de flanc ou par les deux types d’antennes. Nous présentons ici la démarche que nous appliquerons tout au long de ce manuscrit. Notre démarche est articulée en deux parties.

Première partie : pour des mesures générées selon des trajets en lignes droites, les étapes sont

- Analyse l’observabilité.
- Calcul des performances asymptotiques au moyen de la borne de Cramér-Rao. Si les performances asymptotiques sont jugées convenables, nous passons à l’étape suivante.
- Choix d’un estimateur.
- Évaluation sur des scénarios-types des performances empiriques de l’estimateur par Monte-Carlo que nous comparons aux performances asymptotiques.

Seconde partie : confrontation de l’estimateur à des mesures « plus réalistes » générées par le logiciel de lancer de rayons.

Nous détaillons maintenant les étapes de la première partie.

2.5.1 Analyse de l’observabilité

L’analyse de l’observabilité est essentielle à toute étude de trajectographie. Elle consiste à recenser pour un jeu de mesures non bruitées, toutes les trajectoires se manifestant auprès de l’observateur par ce jeu de mesures. Si cet ensemble ne contient qu’un élément (donc la trajectoire de la source d’intérêt), alors la trajectoire est dite observable. Si cet ensemble n’est pas un singleton (il contient la trajectoire de la source d’intérêt et celles de sources fantômes) alors la trajectoire est dite inobservable.

Lorsque plusieurs solutions existent, les solutions fantômes doivent être présentées à l'opérateur [Pérez *et al.*, 2017].

Nous rappelons, dans les grandes lignes, une analyse d'observabilité appliquée à un problème de trajectographie en BOTMA [Jauffret et Pillon, 1996, Nardone et Aidala, 1981, Payne, 1989]. Nous avons vu en début de ce chapitre, que dans un problème de BOTMA classique tout se déroule dans un plan. L'observateur acquiert à chaque instant les azimuts d'une source supposée se déplacer en MRU. Si l'observateur suit un mouvement rectiligne uniforme (ou est immobile), alors la trajectoire de la source est inobservable. Il existe une famille de sources donnant les mêmes mesures d'azimut (nous donnons un exemple d'une telle famille à la figure 2.33). On parle de solutions homothétiques, car les solutions sont obtenues en prenant l'homothétie de la trajectoire de la source relativement aux positions de l'observateur.

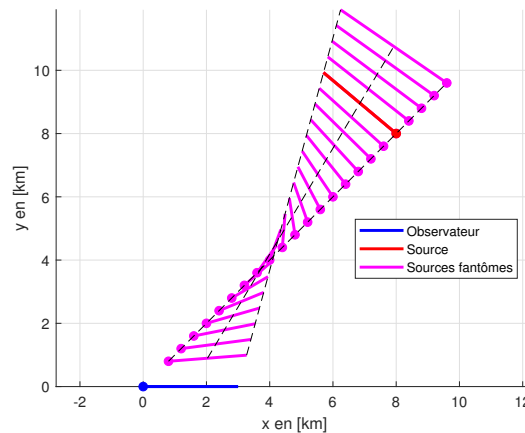


FIGURE 2.33 – Trajectoire de source inobservable et solutions homothétiques.

Pour rendre la trajectoire de la source observable, l'observateur doit « bien » manœuvrer (ou disposer d'autres mesures, comme des fréquences). Cependant, toutes les manœuvres ne permettent pas de rendre le problème observable [Pillon et Jauffret, 1991].

2.5.2 Choix de l'estimateur et l'algorithme d'estimation

Dans les chapitres suivants dédiés à l'estimation de la trajectoire de source, nous ferons systématiquement le choix de prendre l'estimateur du maximum de vraisemblance¹⁴ (abrégé MLE pour *Maximum Likelihood Estimation*). Nous faisons le choix de travailler sur des lots de mesures, autrement dit, nous utilisons une méthode *batch*. À la section 2.2.3 nous avons fait l'hypothèse selon laquelle le bruit de mesure suit une loi gaussienne. L'estimateur du MLE est identique à l'estimateur des moindres carrés pondérés.

Nous notons $s(t_k, X_T)$ et $m(t_k)$ les mesures non bruitées et bruitées, respectivement acquises à l'instant $t_k = (k - 1)\Delta t$. Nous définissons ensuite les trois vecteurs suivants

14. L'estimateur du maximum de vraisemblance est l'estimateur couramment employé dans les solutions *batch* de trajectographie passive. Nous avons donc choisi cet estimateur pour rester dans la continuité de la littérature ouverte.

$$m \triangleq \begin{pmatrix} m(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m(t_K) \end{pmatrix} ; s(X_T) \triangleq \begin{pmatrix} s(t_1, X_T) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s(t_K, X_T) \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon \triangleq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_K \end{pmatrix}.$$

$$m = s(X_T) + \varepsilon.$$

L'expression du critère des moindres carrés pondérés est alors

$$C(X_T) = \|m - s(X_T)\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \quad (2.42)$$

où \mathbf{R} est la matrice de variance-covariance de ε .

Nous choisissons dans cette thèse d'utiliser l'algorithme de minimisation de Gauss-Newton (la procédure d'initialisation de l'algorithme est détaillée dans l'annexe B).

Enfin, nous mettons en place un test d'acceptation des estimés retournés par l'algorithme de minimisation. Ce test, appelé test sur les critères, nous permet de rejeter les estimés qui ont été « mal » calculés par l'algorithme d'estimation. Sa formulation est la suivante :

Si les mesures m sont de dimension d , le critère suit approximativement la loi du khi-2 à dK degrés de liberté.

Si l'on remplace X_T par \hat{X}_T (estimé du maximum de vraisemblance) alors $C(\hat{X}_T)$ suit approximativement la loi $\chi_{dK-n_X}^2$ (n_X étant la dimension du vecteur d'état X_T).

Le test consiste donc à comparer la statistique $\frac{C(\hat{X}_T) - (dK - n_X)}{\sqrt{2(dK - n_X)}}$ à un seuil. Ce seuil est choisi à 2, car la statistique $\frac{C(\hat{X}_T) - (dK - n_X)}{\sqrt{2(dK - n_X)}}$ suit approximativement la loi gaussienne centrée réduite. L'estimé \hat{X}_T est accepté si $C(\hat{X}_T) \leq (dK - n_X) + 2\sqrt{2(dK - n_X)}$.

Remarque 7.

Dans le cas de mesures décorréélées, le critère devient $C(X_T) = \sum_{k=1}^K \|m_k - s_k(X_T)\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2$

où \mathbf{R}_k^{-1} est la matrice de covariance de ε_k .

Si de plus, les mesures sont monodimensionnelles, alors $C(X_T) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{m_k - s_k(X_T)}{\sigma_k} \right)^2$.

2.5.3 Analyse des performances asymptotiques

Le calcul de la borne de Cramér-Rao (**BCR**) de tout estimateur sans biais du vecteur d'état X_T est effectué directement à la suite de l'analyse de l'observabilité. La borne de Cramér-Rao est une matrice symétrique définie positive qui est la borne inférieure de la matrice de variance-covariance de tout estimateur [Kay, 1993, Van Trees, 2004]. Cette borne est l'inverse de la matrice d'information de Fisher \mathbf{F} , lorsque l'estimateur est non biaisé. Cette dernière matrice est obtenue à partir du gradient des mesures non bruitées. Si l'on pose $s(t_k, X_T)$ le vecteur des mesures non bruitées à un instant t_k , K le nombre total de mesures acquises et \mathbf{R}_k la matrice de variance-covariance du bruit additif

centré gaussien polluant la k -ème mesure, alors l'équation (2.43) donne l'expression de la matrice d'information de Fisher.

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^K \nabla_{X_T} s(t_k, X_T) \mathbf{R}_k^{-1} \nabla_{X_T}^T s(t_k, X_T) \quad (2.43)$$

Si les mesures sont monodimensionnelles : $\mathbf{R}_k^{-1} = \frac{1}{\sigma_k^2}$.

La **BCR** nous permet de savoir *a priori* si l'estimation a un sens. En effet, si la racine carrée d'un élément de sa diagonale est au-delà d'une valeur réaliste, alors la composante correspondante de X_T sera déclarée non estimable. Par exemple, si nous cherchons à estimer la trajectoire d'une source se trouvant à une immersion de 200 mètres alors que l'écart type (asymptotique) donné par la **BCR** relatif à l'immersion est supérieur à 200 mètres, la source pourrait alors être estimée au-dessus de l'eau! Cette composante (au moins) devra donc être déclarée comme non estimable et nous devons prendre en compte des *a priori* (s'ils existent) ou d'autres mesures (si disponibles) afin d'estimer correctement la trajectoire de la source.

Les écarts types asymptotiques donnés par la **BCR** sont regroupés dans le vecteur $\underline{\sigma}_{\mathbf{BCR}}$. Par abus de langage, nous appelons « écart type asymptotique » le vecteur $\underline{\sigma}_{\mathbf{BCR}}$.

Cette étape nous est doublement utile. Tout d'abord, elle nous permet de nous assurer *a priori* que l'estimation de la trajectoire de la source a un sens. Et ensuite, elle nous permet de connaître les performances asymptotiques de notre estimateur. Les performances asymptotiques sont données par la borne de Cramér-Rao **BCR**.

Soient, à l'instant t_k , les observateurs O_1 ¹⁵, O_2 ¹⁶, O_3 ¹⁷ et une source T positionnés respectivement en

$$\begin{aligned} & (x_{O_1}(t_k), y_{O_1}(t_k), z_{O_1}(t_k))^T, \\ & (x_{O_2}(t_k), y_{O_2}(t_k), z_{O_2}(t_k))^T, \\ & (x_{O_3}(t_k), y_{O_3}(t_k), z_{O_3}(t_k))^T, \\ & \text{et } (x_T(t_k), y_T(t_k), z_T(t_k))^T. \end{aligned}$$

Les expressions des gradients sont données par (2.44) à (2.46) pour des mesures de TDOA, de cosinus d'élévation et de cosinus de pseudo-gisement, respectivement.

— Gradient des mesures de TDOA pour deux antennes de flanc :

$$\nabla_{X_T} s(t_k, X_T) = \Phi^T(t_k) \frac{1}{c} \left(\begin{pmatrix} \frac{x_T(t_k) - x_{O_3}(t_k)}{R_{O_3 T}(t_k, X_T)} \\ \frac{y_T(t_k) - y_{O_3}(t_k)}{R_{O_3 T}(t_k, X_T)} \\ \frac{\zeta_{O_3 T}(-1)^{n_s - n_b}}{R_{O_3 T}(t_k, X_T)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_T(t_k) - x_{O_2}(t_k)}{R_{O_2 T}(t_k, X_T)} \\ \frac{y_T(t_k) - y_{O_2}(t_k)}{R_{O_2 T}(t_k, X_T)} \\ \frac{\zeta_{O_2 T}(-1)^{n_s - n_b}}{R_{O_2 T}(t_k, X_T)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (2.44)$$

— Gradient des mesures de cosinus d'élévation pour une antenne de flanc :

15. O_1 étant le centre acoustique d'une antenne linéaire remorquée

16. O_2 étant le centre acoustique d'une antenne de flanc

17. O_3 étant le centre acoustique d'une autre antenne de flanc

$$\nabla_{X_T} s(t_k, X_T) = \Phi^T(t_k) \begin{pmatrix} \frac{(x_T(t_k) - x_{O_2}(t_k)) \zeta_{O_2 T}}{R_{O_2 T}^3(t_k)} \\ \frac{(y_T(t_k) - y_{O_2}(t_k)) \zeta_{O_2 T}}{R_{O_2 T}^3(t_k)} \\ \frac{\rho_{O_2 T}^2(t_k) (-1)^{n_s - n_b}}{R_{O_2 T}^3(t_k)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

— Gradient des mesures de cosinus de pseudo-gisement pour l'antenne linéaire remorquée :

$$\begin{aligned} \nabla_{X_T} s(t_k, X_T) = & -\cos(\alpha_{O_1 T}(t_k)) \sin(\theta_{O_1 T}(t_k) - h_{O_1}(t_k)) \Phi^T(t_k) \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta_{O_1 T}(t_k))}{\rho_{O_1 T}(t_k)} \\ \frac{\sin(\theta_{O_1 T}(t_k))}{\rho_{O_1 T}(t_k)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \cos(\theta_{O_1 T}(t_k) - h_{O_1}(t_k)) \Phi^T(t_k) \begin{pmatrix} \frac{(x_T(t_k) - x_{O_1}(t_k)) \zeta_{O_1 T}^2}{\rho_{O_1 T}(t_k) R_{O_1 T}^3(t_k)} \\ \frac{(y_T(t_k) - y_{O_1}(t_k)) \zeta_{O_1 T}^2}{\rho_{O_1 T}(t_k) R_{O_1 T}^3(t_k)} \\ \frac{\rho_{O_1 T}(t_k) \zeta_{O_1 T} (-1)^{n_s - n_b}}{R_{O_1 T}^3(t_k)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec $\Phi(t_k)$ la matrice de transition à l'instant t_k :

$$\Phi(t_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_k - t_{ref} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t_k - t_{ref} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La borne de Cramér-Rao permet de construire une région de confiance de niveau α sous la forme d'un ellipsoïde dans lequel se répartissent les $\alpha\%$ des résultats de l'estimation. Dans un souci de lisibilité, nous ne présenterons dans les figures que des résultats d'estimation dans le plan, cette région de confiance se présentera donc sous la forme d'une ellipse (dite ellipse de confiance). La taille de l'ellipse dépend du niveau de confiance. Nous choisissons ici $\alpha 90\%$.

2.5.4 Analyse des performances empiriques

Les performances empiriques de l'estimateur sont évaluées par Monte-Carlo. Cela consiste à répéter plusieurs fois la même simulation en ne changeant que le tirage du bruit de mesures à chaque simulation. Une fois les résultats d'estimation de chacune des simulations obtenus, nous calculons les performances empiriques de notre estimateur. L'évaluation de ses performances se fait sur ses deux premiers moments :

- son espérance mathématique, estimée elle-même par la moyenne empirique des estimés,
- sa matrice de variance-covariance, estimée par la matrice de variance-covariance empirique des

estimés.

Si la moyenne empirique est « proche » de X_T et si la matrice de variance-covariance empirique est « proche » de la **BCR**, alors l'estimateur est déclaré efficace. Pour conclure de l'efficacité de l'estimateur, Bar-Shalom propose le *NEES*¹⁸ [Bar-Shalom et Fortmann, 1988] :

Sous des hypothèses assez larges, l'estimateur du maximum de vraisemblance suit asymptotiquement la loi normale centrée sur le paramètre à estimer et de matrice de variance-covariance la borne de Cramér-Rao. Nous employons ici l'adverbe « asymptotiquement », lorsque le nombre de mesures est très grand devant la dimension du paramètre à estimer. C'est le cas en traitement du signal en général, et c'est également le cas en trajectographie.

Si nous posons $\hat{X}_{T,n}$ l'estimé de vecteur d'état à $n^{\text{ième}}$ simulation de Monte-Carlo, alors le *NEES* est par définition la variable

$$NEES_n \triangleq \left(\hat{X}_{T,n} - X_T \right)^T \mathbf{BCR}^{-1} \left(\hat{X}_{T,n} - X_T \right) = \left\| \mathbf{BCR}^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{X}_{T,n} - X_T \right) \right\|^2.$$

Si $\hat{X}_{T,n} \sim G(X_T, \mathbf{BCR})$, alors $\mathbf{BCR}^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{X}_{T,n} - X_T \right) \sim G(0, \mathbf{I}_{n_X})$. Dans ce cas, $NEES_n \sim \chi_{n_X}^2$.

Le *NEES* moyen étant égal par définition à $\overline{NEES} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N NEES_n$, si sa valeur est dans l'intervalle de confiance théorique à 2σ donné par $n_X \pm 2\sqrt{\frac{2n_X}{N}}$, alors l'estimateur sera déclaré efficace.

Dans cette thèse, nous prenons $N = 500$ et n_X prend soit la valeur 4 soit la valeur 5. l'intervalle de confiance théorique à 2σ est donc :

- pour $n_X = 4$, $\overline{NEES} \in [3.747; 4.253]$,
- pour $n_X = 5$, $\overline{NEES} \in [4.717; 5.283]$.

Pour résumer, les différents éléments calculés pour évaluer les performances empiriques sont :

- Moyenne et biais des estimés.

$$\begin{aligned} \bar{X}_T &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{X}_{T,n} \text{ et,} \\ \text{biais} &= \bar{X}_T - X_T. \end{aligned} \tag{2.47}$$

- Matrice de variance-covariance empirique et écart type empirique.

$$\mathbf{Cov}_{emp} = \sqrt{\frac{1}{N - n_X}} \sum_{n=1}^N \left(\hat{X}_{T,n} - \bar{X}_T \right) \left(\hat{X}_{T,n} - \bar{X}_T \right)^T. \tag{2.48}$$

$$\sigma_{emp} = \left(\text{diag}(\mathbf{Cov}_{emp}) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.49}$$

Par abus de langage, le vecteur σ_{emp} est appelé « écart type empirique ».

- *NEES* moyen.

$$\overline{NEES} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\| \hat{X}_{T,n} - X_T \right\|_{\mathbf{F}}^2. \tag{2.50}$$

18. *Normalized Estimation Error Squared.*

2.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté la situation générale dans laquelle s'inscrit notre étude. Cette situation est la trajectographie de source dans un milieu sous-marin. Nous avons énoncé les problématiques que nous allons rencontrer, soit comment tenir compte des phénomènes de propagation inhérents au milieu sous-marin. Nous avons ensuite donné les moyens à notre disposition afin de réaliser la trajectographie, dans notre cas un sous-marin équipé d'une antenne linéaire remorquée et trois antennes de flanc. Nous avons également donné les expressions des mesures que nous allons devoir traiter et nous avons succinctement expliqué comment nous les obtenons au travers de la présentation de la chaîne de traitement sonar. Nous avons donné par la suite le modèle de propagation que nous avons retenu : le modèle de propagation en lignes droites (dont nous avons donné la caractérisation). Dans un même temps, nous avons introduit la notion de classe de trajets et nous avons donné une définition à la notion de grand fond. Enfin, nous avons donné la démarche que nous suivrons dans la suite des chapitres de cette thèse, chapitres qui seront dédiés à l'estimation de la trajectoire de source à partir :

- tout d'abord, des mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée,
- ensuite, des mesures délivrées par les antennes de flanc,
- et enfin, par les deux types d'antennes.

Trajectographie passive à partir une antenne linéaire remorquée

L'objectif de ce chapitre¹ est d'étudier le problème de trajectographie passive à partir des mesures collectées par l'antenne linéaire remorquée. Dans ce problème, la source émet une onde acoustique suivant un ou plusieurs trajets. L'observateur collecte des mesures de cosinus de pseudo-gisement.

- Dans la première section, nous considérons que l'observateur est en MRU et que l'onde acoustique suit un seul trajet connu. Nous montrons que la trajectoire de la source n'est pas estimable bien qu'elle soit observable.
- Dans la seconde section, l'onde acoustique suit toujours un seul trajet mais l'observateur effectue une manœuvre. L'analyse de l'observabilité est réalisée dans le cas où l'observateur connaît le trajet de l'onde, et nous estimons la trajectoire de la source dans un scénario type. Enfin, nous nous plaçons dans le cas où l'observateur ne connaît pas le type du trajet ; nous mettons en place une méthode pour décider de la classe du trajet suivi par l'onde.
- Dans la dernière section, nous considérons que l'onde acoustique suit deux trajets et que l'observateur est en MRU. L'analyse de l'observabilité est réalisée dans le cas où l'observateur sait que la source émet une onde empruntant un trajet direct et un trajet réfléchi-fond. L'estimation de la trajectoire de la source est ensuite réalisée. Finalement, nous considérons le cas où l'observateur ne connaît pas les trajets de l'onde. Dans ce cas, nous adaptons la méthode développée dans la seconde section pour tenir compte de la présence de deux trajets et nous évaluons ses performances empiriques.

Tout au long de ce chapitre l'instant de référence est l'instant initial. Nous utilisons les notions de « *broadside* » et de « *endfire* », dont nous donnons les définitions ci-après.

Définition 3.

Une source est dite en endfire d'une antenne linéaire si elle se trouve sur l'axe de cette antenne.

Remarque 8.

Si l'antenne et la source sont en MRU, la source est en endfire de l'antenne ssi $P_{OT}(t)$ et V_O

1. Le contenu de ce chapitre a donné lieu à la publication [Lebon *et al.*, 2021]

sont colinéaires pour tout t . Ceci implique que V_T est colinéaire à V_O (la réciproque n'étant pas vraie).

Définition 4.

Une source est dite en broadside d'une antenne linéaire si elle se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe de l'antenne, passant par son centre acoustique.

Remarque 9.

Soient t_1 et t_2 deux instants différents. Si l'antenne est en MRU, alors une source est en broadside de l'antenne ssi $(P_O(t_1), P_O(t_2), P_{OT}(t_2))$ est un triangle rectangle en $P_O(t_2)$. Si de plus la source est en MRU, alors $P_{OT}(t)$ est orthogonal à V_O (la réciproque est fausse).

3.1 Cas d'un seul trajet : l'antenne est en MRU

Nous considérons dans cette partie que l'antenne collecte des mesures de cosinus de pseudo-gisement issues d'un trajet unique suivi par l'onde acoustique. Rappelons que les mesures non bruitées ont pour expression

$$\cos(\alpha_{OT}) = \cos(\theta_{OT} - h_O) \cos(\varphi_{OT}), \tag{3.1}$$

avec :

L'azimut : $\theta_{OT} = \tan^{-1}\left(\frac{x_{OT}}{y_{OT}}\right)$;
 Le cosinus de site $\cos(\varphi_{OT}) = \frac{\rho_{OT}}{R_{OT}} = \frac{\sqrt{(x_T-x_O)^2+(y_T-y_O)^2}}{\sqrt{(x_T-x_O)^2+(y_T-y_O)^2+\zeta_{OT}^2}}$;
 La profondeur relative entre l'observateur et la source
 $\zeta_{OT} = -\delta(-1)^{n_s-n_b}(2n_bP + \delta((-1)^{n_s-n_b}z_O - z_T))^2$.

L'étude de ce cas se fait en deux étapes. Tout d'abord nous étudions l'observabilité de la trajectoire de la source d'intérêt lorsque le trajet suivi par l'onde est connu. Nous étudions ensuite la faisabilité de l'estimation de la trajectoire d'une source à partir de l'étude des performances asymptotiques de l'estimateur.

On définit aussi la position relative de la source image à l'instant t par $\mathcal{P}_{OT}(t) \triangleq \begin{pmatrix} x_{OT}(t) \\ y_{OT}(t) \\ \zeta_{OT} \end{pmatrix}$.

Remarque 10.

Lorsque le trajet emprunté par l'onde est connu, on peut déterminer z_{OT} à partir de ζ_{OT} et réciproquement. Autrement dit, la donnée $\mathcal{P}_{OT}(t)$ est équivalente à la donnée de $P_{OT}(t)$. Dans le théorème qui suit, $\mathcal{P}_{OG}(t)$ est le vecteur position à l'instant t de la source-fantôme image.

Dans le cas particulier où il s'agit du trajet direct, $\mathcal{P}_{OT}(t) = P_{OT}(t)$.

3.1.1 Analyse de l'observabilité

Théorème 1.

Considérons une antenne linéaire horizontale et une source, toutes deux en mouvement rectiligne uniforme. La source émet à chaque instant une onde acoustique se propageant suivant un trajet

2. P : profondeur du fond marin ; n_s : nombre de réflexions sur la surface ; n_b : nombre de réflexions sur le fond.

unique jusqu'à l'antenne qui collecte les cosinus de pseudo-gisement de ce trajet. Le trajet et la profondeur du fond marin sont connus.

1. Si la source se trouve dans le broadside de l'antenne, alors l'ensemble des sources fantômes est composé de toutes les sources virtuelles se trouvant dans le broadside de l'antenne.
2. Si la source se trouve dans l'endfire de l'antenne, alors l'ensemble des sources fantômes est composé de toutes les sources virtuelles se trouvant dans l'endfire de l'antenne.
3. Si la source suit le même cap que l'antenne (mais ne se trouve pas dans son endfire), alors l'ensemble des sources fantômes est composé de toutes sources virtuelles suivant le même cap que l'antenne. Plus précisément, l'image de chaque source fantôme se déplace sur un cylindre d'axe celui de l'antenne et dont le rayon est égal à $\beta \sqrt{R_{OT}^2(0) + \left(\frac{\zeta_{OG}}{\beta}\right)^2}$, où β est un scalaire positif. La vitesse relative des sources fantômes est égale à β fois la vitesse de la source. La distance à l'instant initial séparant la source fantôme du centre acoustique de l'antenne est égale à β fois la distance à l'instant initial séparant l'image de la source du centre acoustique de l'antenne.
4. Dans tous les autres cas, pour une immersion image relative ζ_{OG} , l'ensemble des sources fantômes est composé de toutes les sources virtuelles, dont le mouvement relatif par rapport à l'antenne est défini par $\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta \mathcal{P}_{OT}(t)$ ou $\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta \mathbf{S} \mathcal{P}_{OT}(t)$, où \mathbf{S} est la symétrie orthogonale par rapport au plan vertical contenant l'antenne et β est un scalaire positif. Le scalaire β est égal à $\left| \frac{\zeta_{OG}}{\zeta_{OT}} \right|$ si $\zeta_{OT} \neq 0$. Si $\zeta_{OT} = 0$ (ce qui ne se produit que si l'onde suit un trajet direct), β peut prendre n'importe quelle valeur sur \mathbb{R}^+ .

Préambule à la démonstration : plutôt que de travailler avec le vecteur d'état

$$X_T = (x_T(0), y_T(0), z_T, \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T,$$

nous utilisons le vecteur d'état relatif, qui est

$$\mathbb{X}_T = (x_{OT}(0), y_{OT}(0), \zeta_{OT}, \dot{x}_{OT}, \dot{y}_{OT})^T.$$

Nous pouvons en effet retrouver le vecteur d'état X_T à partir de \mathbb{X}_T sans ambiguïté.

La démonstration du théorème est faite dans le cas particulier où le cap de l'antenne est égal à 0° . Ceci est obtenu par une rotation *ad hoc* de l'ensemble du scénario. Cette considération simplifie grandement l'expression des mesures, sans perte de généralité. Dans cette situation particulière l'expression du cosinus de pseudo-gisement peut en effet être simplifiée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha_{OT}(t_k)) &= \cos(\theta_{OT}(t_k)) \cos(\varphi_{OT}(t_k)) \\
&= \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{x_{OT}(t_k)}{y_{OT}(t_k)}\right)\right) \frac{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k)}}{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k) + \zeta_{OT}^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_{OT}(t_k)}{y_{OT}(t_k)}\right)^2 + 1}} \frac{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k)}}{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k) + \zeta_{OT}^2}} \\
&= \frac{y_{OT}(t_k)}{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k) + \zeta_{OT}^2}}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La démonstration de l'observabilité est réalisée à temps continu. Nous remplaçons donc le terme t_k par le terme t .

Démonstration. Nous cherchons la source fantôme positionnée à l'instant $t : (x_G(t) \ y_G(t))^T$, et détectée avec le même cosinus de pseudo-gisement que la source :

$$\frac{y_{OT}(t)}{\sqrt{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2}} = \frac{y_{OG}(t)}{\sqrt{x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + \zeta_{OG}^2}} \tag{3.3}$$

avec $x_{OG}(t) = x_G(t) - x_O(t)$, $y_{OG}(t) = y_G(t) - y_O(t)$ et ζ_{OG} l'immersion relative de la source fantôme.

L'égalité 3.3 est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{y_{OT}^2(t)}{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2} = \frac{y_{OG}^2(t)}{x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + \zeta_{OG}^2} \\ \text{et } \text{sign}(y_{OT}(t)) = \text{sign}(y_{OG}(t)). \end{cases} \tag{3.4}$$

Puisque la source est en MRU (tout comme la source fantôme), les dénominateurs du terme de gauche et de droite de (3.4) sont deux fonctions polynomiales de degrés 2.

— Premier cas : $y_{OT}(t)$ est une fonction nulle, c.-à-d., $y_{OT}(t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

La source se trouve dans le *broadside* de l'antenne : $\mathbb{X}_T = (x_{OT}(0), 0, \zeta_{OT}, \dot{x}_{OT}, 0)^T$.

De ce fait, l'ensemble des sources fantômes est composé de toutes les sources virtuelles se trouvant dans le *broadside* de l'antenne : $\mathbb{X}_G = (x_{OG}(0), 0, \zeta_{OG}, \dot{x}_{OG}, 0)^T$.

— Second cas : $y_{OT}(t)$ n'est pas une fonction nulle.

Si $\dot{y}_{OT} = 0$, alors $y_{OT}(t)$ est une constante. Afin de respecter les degrés des termes de l'équation (3.4), $y_{OG}(t)$ est une constante également.

Si $\dot{y}_{OT} \neq 0$, alors il existe un instant, que nous appelons \tilde{t} , tel que $y_{OT}(\tilde{t}) = 0$, comme $y_{OT}(t)$ est un polynôme de degré 1. Par conséquent, $y_{OG}(\tilde{t}) = 0$, et $\forall t \neq \tilde{t}, y_{OG}(t) \neq 0$.

Nous en déduisons de ces deux cas ($\dot{y}_{OT} = 0$ et $\dot{y}_{OT} \neq 0$), qu'il existe un scalaire positif β tel que $y_{OG}(t) = \beta y_{OT}(t)$.

$$\begin{aligned}
(3.4) &\Leftrightarrow \left\{ \left[x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + \zeta_{OG}^2 \right] - \beta^2 \left[x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2 \right] \right\} y_{OT}^2(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_{OG}^2(t) + \zeta_{OG}^2 = \beta^2 \left[x_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

La quantité $x_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2$ peut être nulle à tout instant, à un seul instant ou jamais.

— Premier sous-cas : $\forall t, x_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2 = 0$.

Nous avons alors $x_{OT}(t) = 0 \forall t$ et $\zeta_{OT} = 0$. Ce cas est celui d'une source se déplaçant dans l'*endfire* de l'antenne ; l'onde émise emprunte le trajet direct. Pour les mêmes raisons, $x_{OG}(t) = 0 \forall t$ et $\zeta_{OG} = 0$. L'ensemble des sources fantômes est par conséquent composé de toutes les sources virtuelles se déplaçant dans l'*endfire* de l'antenne.

— Second sous-cas : $\exists \check{t}$ tel que $x_{OT}^2(\check{t}) + \zeta_{OT}^2 \neq 0$ ³.

L'équation (3.5) est équivalente au système

$$\begin{cases} x_{OG}^2(0) = \beta^2 x_{OT}^2(0) + \beta^2 \zeta_{OT}^2 - \zeta_{OG}^2. & (3.6a) \\ x_{OG}(0) \dot{x}_{OG} = \beta^2 x_{OT}(0) \dot{x}_{OT}. & (3.6b) \\ \dot{x}_{OG}^2 = \beta^2 \dot{x}_{OT}^2 & (3.6c) \end{cases}$$

Si $\dot{x}_{OT} = 0$ alors $\mathbb{X}_G = \left(\pm \sqrt{\beta^2 x_{OT}^2(0) + \beta^2 \zeta_{OT}^2 - \zeta_{OG}^2}, \beta y_{OT}(0), \zeta_{OG}, 0, \beta \dot{y}_{OT} \right)^T$, pour toute constante β et pour toute constante positive ζ_{OG} inférieure à $\sqrt{\beta^2 x_{OT}^2(0) + \beta^2 \zeta_{OT}^2}$. Notons que si $\dot{y}_{OT} = 0$, la source est immobile relativement au centre acoustique de l'antenne (elles ont toutes les deux la même vitesse). Si $\dot{y}_{OT} \neq 0$, la source suit le même cap que l'antenne.

Si $\dot{x}_{OT} \neq 0$, alors en élevant au carré les éléments de (3.6b), et en utilisant (3.6c), nous obtenons de (3.6a) que $\beta^2 \zeta_{OT}^2 = \zeta_{OG}^2$. Si $\zeta_{OT} = 0$, alors $\zeta_{OG} = 0$ et le scalaire β peut prendre n'importe quelle valeur positive ; sinon $\beta = \frac{|\zeta_{OG}|}{|\zeta_{OT}|}$. Dans les deux cas, la trajectoire de la source fantôme est définie par le vecteur d'état $\mathbb{X}_G = (\pm \beta x_{OT}(0), \beta y_{OT}(0), \beta \zeta_{OT}, \pm \beta \dot{x}_{OT}, \beta \dot{y}_{OT})^T$.

□

Remarque 11.

1. Quand la source et l'observateur se trouvent à la même profondeur et que l'onde suit le trajet direct, le théorème 1 est équivalent aux conclusions de [Pignol *et al.*, 2010].
2. Les points (1), (2) et (3) du théorème 1 sont des « événements rares » : la probabilité que la source ait le même cap que l'antenne ou qu'elle soit dans son *broadside* ou dans son *endfire* est nulle. Lorsque la source suit une trajectoire proche de ces cas spécifiques, l'estimation risque de fournir des résultats non exploitables.
3. Pour le quatrième point, si l'onde captée ne s'est pas propagée suivant un trajet direct, par exemple si elle suit le trajet réfléchi-fond, une hypothèse sur la source est suffisante pour avoir

3. NB : si $\zeta_{OT} \neq 0$ alors $x_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2 \neq 0 \forall t$.

une solution unique correspondant à la source fantôme. Si l'immersion supposée de la source est z_{as} (alors que la véritable valeur est z_T), alors $\beta = \frac{2P-(z_{as}+z_O)}{2P-(z_T+z_O)}$. Sa plus grande valeur est $\beta_{max} = \frac{2P-z_O}{2P-(z_T+z_O)}$ et sa plus petite $\beta_{min} = \frac{2P-(z_{max}+z_O)}{2P-(z_T+z_O)}$, où z_{max} est la plus grande immersion possible d'un sous-marin. Typiquement, en situation de grand fond, un choix raisonnable de z_{max} peut être 400m. Nous obtenons alors un encadrement pour la valeur de β (nous prenons ici $P = 4830\text{m}$) : $[\beta_{min}, \beta_{max}] = \left[\frac{9260-z_O}{9660-(z_T+z_O)}, \frac{9660-z_O}{9660-(z_T+z_O)} \right]$. Par exemple, lorsque l'immersion de l'antenne et de la source sont de 200m et de 100m, respectivement, nous avons $[\beta_{min}, \beta_{max}] = [0.968, 1.011]$. Nous bornons ainsi l'ensemble des sources fantômes et nous pouvons nous attendre à un très faible biais induit par un mauvais choix de z_{as} .

4. De nouveau pour le quatrième point, si le trajet suivi par l'onde est direct et si la source ne se trouve pas à la même profondeur que l'observateur, $\beta = \frac{z_{as}-z_O}{z_T-z_O}$. Parce que β est un scalaire positif, $z_{as} - z_O$ prend le même signe que $z_T - z_O$. Si $z_T > z_O$, alors $z_O < z_{as} \leq z_{max}$ et $[\beta_{min}, \beta_{max}] = \left[0, \frac{z_{max}-z_O}{z_T-z_O} \right]$; si $z_T < z_O$, alors $0 \leq z_{as} < z_O$ et $[\beta_{min}, \beta_{max}] = \left[0, \frac{z_O}{z_T-z_O} \right]$. Dans les deux cas, l'encadrement de $[\beta_{min}, \beta_{max}]$ est trop grand pour être utile. Si la source et l'antenne sont à la même immersion, β peut prendre n'importe quelle valeur positive.

3.1.2 Estimation de la trajectoire

Nous réalisons 500 simulations de Monte-Carlo pour un scénario classique décrit comme suit. L'observateur débute sa course en $(0, 0)^T$ à l'immersion $z_O = 200\text{m}$. Sa vitesse et son cap sont, respectivement, 5m/s et 0° . La source se trouve initialement en $(5000\text{m}, 7000\text{m})^T$ à la profondeur $z_T = 100\text{m}$. Elle suit un cap de 45° à la vitesse de 4m/s.

- Les mesures sont collectées toutes les quatre secondes ($\Delta t = 4\text{s}$). Le scénario dure vingt minutes.
- Le fond de la mer se trouve à 4830m. L'onde émise par la source suit un trajet réfléchi-fond.
- L'immersion supposée de la source est $z_{as} = 200\text{m}$ (alors que la véritable est 100m).
- Les mesures sont corrompues par un bruit additif gaussien dont l'écart type est $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$.

Nous faisons l'hypothèse que l'observateur possède une connaissance *a priori* de l'immersion de la source. Nous estimons donc ici un vecteur d'état ne comportant plus la composante z_T . Nous nommons ce vecteur d'état « vecteur d'état réduit » et nous le notons Y_T .

$$Y_T = (x_T(0), y_T(0), \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T,$$

Les résultats de l'estimation sont présentés dans la table 3.1 et illustrés à la figure 3.1. Nous constatons que la trajectoire de la source n'est pas estimable malgré l'hypothèse faite sur son immersion qui rend la trajectoire observable. En effet, les valeurs très importantes des éléments diagonaux de la borne de Cramér-Rao ne permettent pas d'employer ce type de TMA.

Remarque 12.

Nous notons sur la figure 3.1 que la répartition des estimés dans le plan horizontal suit une hyperbole. L'équation de cette hyperbole à l'instant $t = 0$ est obtenue à partir de l'équation (3.4). Nous posons tout d'abord $m(t) = \frac{y_{OT}^2(t)}{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + \zeta_{OT}^2}$.

$$\begin{aligned}
(3.4) &\Leftrightarrow y_{OG}^2(0) = m(0) \left(x_{OG}^2(0) + y_{OG}^2(0) + \zeta_{as}^2 \right); \\
&\Leftrightarrow x_{OG}^2(0) + \left(1 - \frac{1}{m(0)} \right) y_{OG}^2(0) + \zeta_{as}^2 = 0; \\
&\Leftrightarrow \frac{y_{OG}^2(0)}{\frac{\zeta_{as}^2}{\frac{1}{m(0)} - 1}} - \frac{x_{OG}^2(0)}{\zeta_{as}^2} = 1.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

TABLE 3.1 – Performances empiriques de l’estimateur du vecteur d’état réduit quand $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$, au sens du biais et de l’écart type empirique (que nous comparons à la racine carrée des éléments diagonaux de la borne de Cramér-Rao).

Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
$\begin{pmatrix} 5000\text{m} \\ 7000\text{m} \\ 2.83\text{m/s} \\ 2.83\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3525\text{m} \\ -2367\text{m} \\ -1.37\text{m/s} \\ 0.53\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13356\text{m} \\ 5599\text{m} \\ 4.35\text{m/s} \\ 2.75\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6962\text{m} \\ 4052\text{m} \\ 1.81\text{m/s} \\ 1.62\text{m/s} \end{pmatrix}$

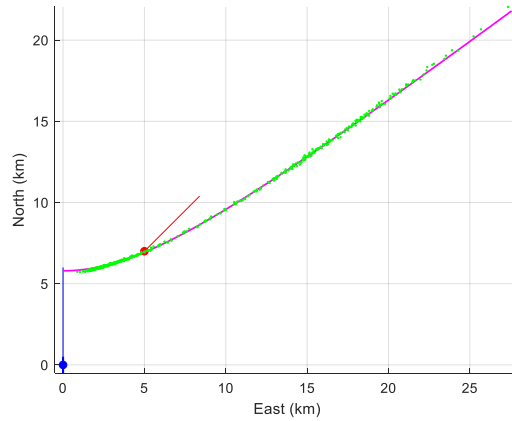


FIGURE 3.1 – Répartition des estimés (en vert) dans le plan horizontal et une partie de l’hyperbole (en magenta, intersection du cône d’ambiguïté et du plan $z = z_{as} = 200\text{m}$), pour $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$ (en bleu la trajectoire de l’observateur et en rouge la trajectoire de la source).

Nous réduisons maintenant l’écart type du bruit à $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-4}$ afin de mieux apprécier le comportement de l’estimateur mis en place. Avec cette valeur (non réaliste) d’écart type, l’estimateur est efficace comme nous pouvons le constater à la table 3.2 et sur la figure 3.2 (ce qui valide notre analyse de l’observabilité).

TABLE 3.2 – Performances empiriques de l’estimateur du vecteur d’état réduit avec $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-4}$.

Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
$\begin{pmatrix} 5000\text{m} \\ 7000\text{m} \\ 2.83\text{m/s} \\ 2.83\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60.4\text{m} \\ 88.2\text{m} \\ 0.043\text{m/s} \\ 0.037\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 133.56\text{m} \\ 55.99\text{m} \\ 0.044\text{m/s} \\ 0.028\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 138.67\text{m} \\ 58.42\text{m} \\ 0.044\text{m/s} \\ 0.028\text{m/s} \end{pmatrix}$

Nous en concluons que le vecteur d’état n’est pas estimable, bien qu’il soit observable (si l’immersion de la source est connue). Il n’est donc pas utile de confronter notre estimateur aux mesures générées

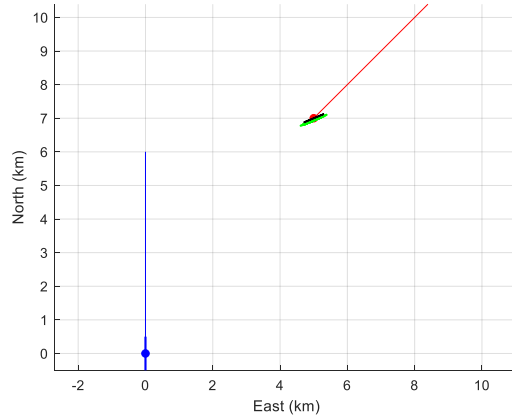


FIGURE 3.2 – Répartition des estimés (en vert) pour $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-4}$ (en bleu la trajectoire de l’observateur et en rouge la trajectoire de la source). Les estimés ne sont plus répartis suivant une hyperbole. Le petit segment noir est l’ellipse de confiance à 90%.

par le logiciel de lancer de rayons.

Dans la section suivante nous étudions le cas où l’antenne effectue une manœuvre.

3.2 Cas d’un seul trajet : l’antenne manœuvre

Dans cette section, l’antenne change subitement de cap à un instant $t = \tau$ ⁴. Son vecteur vitesse est noté V_1 pour $t \in [0, \tau]$ et V_2 pour $t \in]\tau, T]$, avec $\|V_1\| = \|V_2\| = v$. La trajectoire de l’antenne est donc constituée de deux segments parcourus en MRU par l’antenne. Nous emploierons le terme anglais *leg* pour les désigner. Nous imposons que $V_2 \neq -V_1$ (*i.e* le demi-tour est exclu de notre analyse). Nous montrons tout d’abord que le vecteur d’état est observable (sans aucune hypothèse sur l’immersion de la source). Puis, nous réalisons une série de simulations de Monte-Carlo afin d’évaluer les performances empiriques de l’estimateur du maximum de vraisemblance.

3.2.1 Analyse de l’observabilité

Théorème 2.

Soient une antenne linéaire horizontale dont la trajectoire est composée de deux segments parcourus à vitesse constante et une source en MRU. Le trajet suivi par l’onde acoustique émise par la source et la profondeur du fond marin sont connus. L’antenne mesure le cosinus de pseudo-gisement du trajet lui parvenant.

Si la source se trouve dans le broadside de l’antenne durant un leg et si elle suit le même cap que l’antenne durant l’autre leg, alors il existe au plus une source fantôme. Dans tous les autres cas, la trajectoire de la source est observable.

La démonstration de l’observabilité (réalisée à temps continu) est donnée en annexe C.

4. Ce type caricatural de manœuvre est souvent utilisé dans la littérature traitant de la trajectographie passive, lors de l’étude de l’observabilité (voir par exemple [Le Cadre et Jauffret, 1997]).

3.2.2 Estimation lorsque l'onde se propage suivant le trajet réfléchi-fond

Dans cette sous-partie, nous présentons les résultats de 500 simulations de Monte-Carlo pour évaluer les performances empiriques de l'estimateur choisi. Nous donnons tout d'abord les paramètres du scénario.

La position initiale du centre acoustique de l'antenne et celle de la source se trouvent, respectivement, en $(0, 0, 200)^T$ et en $(5000, 7000, 100)^T$. La trajectoire de l'antenne est composée de deux *legs* reliés par un arc de cercle parcourus à la vitesse de 5m/s. Le premier *leg* dure 1min 40s, durant lequel le cap de l'antenne est de 135° . L'antenne effectue ensuite un virage vers la droite avec un taux de giration égal à $20^\circ/\text{min}$ afin d'atteindre le cap de 270° . La manœuvre dure ainsi 6min 44s. Le second *leg* dure lui 5min, ce qui amène la durée du scénario à un total de 13 minutes et 24 secondes. La source quant à elle se déplace suivant un cap de 45° à la vitesse de 4m/s. Le fond marin se situe à $P = 4830\text{m}$ de profondeur.

Le vecteur d'état que nous cherchons à estimer est donc $X_T = (5000, 7000, 100, 2.83, 2.83)^T$. L'antenne mesure aux instants t_k les cosinus de pseudo-gisement (c.f. équation (3.8)) d'une onde se propageant suivant le trajet réfléchi-fond.

$$m(t_k) = \cos(\theta_{OT}(t_k) - h_O(t_k)) \cos(\varphi_{OT}(t_k)) + \varepsilon_k; \quad (3.8)$$

où :

- $\theta_{OT}(t_k) = \tan^{-1} \left(\frac{x_{OT}(t_k)}{y_{OT}(t_k)} \right);$
- $\cos(\varphi_{OT}(t_k)) = \frac{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k)}}{\sqrt{x_{OT}^2(t_k) + y_{OT}^2(t_k) + [2P - (z_T + z_O)]^2}};$
- $x_{OT}(t_k) = x_T(0) + (t_k - t_{ref})\dot{x}_T - x_O(t_k);$
- $y_{OT}(t_k) = y_T(0) + (t_k - t_{ref})\dot{y}_T - y_O(t_k).$

Les mesures sont acquises toutes les $\Delta t = 4\text{s}$, et $t_k = (k - 1)\Delta t$. Le bruit ε_k est supposé gaussien, centré et d'écart type égal à $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$. Les bruits ε_k sont également supposés temporellement indépendants.

Nous choisissons de nouveau l'estimateur du MLE.

3.2.2.1 Estimation du vecteur d'état complet

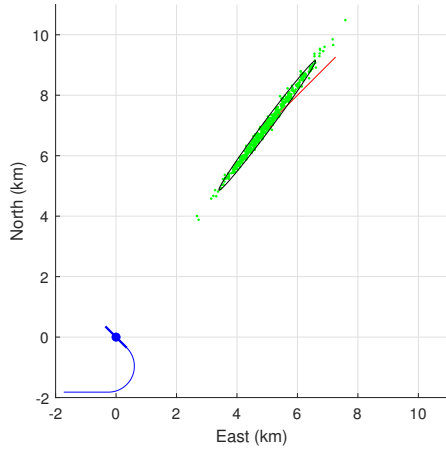
Les 500 estimés de la position initiale de la source sont représentés sur la figure 3.3, avec la trajectoire de la source, l'ellipse de confiance à 90% et la trajectoire de l'antenne. Nous présentons les résultats dans le plan horizontal.

Les performances empiriques de l'estimateur (en termes de biais et d'écart type sur chacune des composantes) sont présentées à la table 3.3.

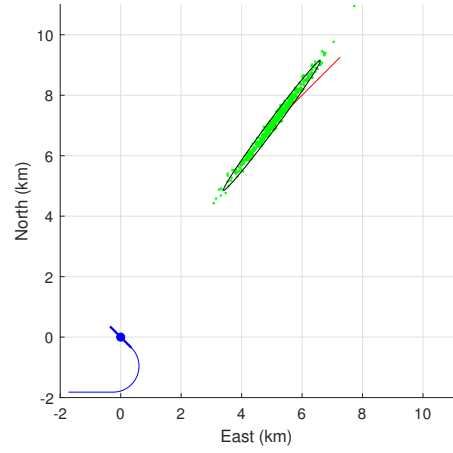
Pour ces simulations, nous obtenons $\overline{NEES} = 5.19$ lorsque les mesures sont générées avec des trajets droits et $\overline{NEES} = 21.6$ lorsqu'elles sont générées avec le logiciel de lancer de rayons.

En conclusion,

- l'estimateur est déclaré efficace pour des trajets droits.



(a) Trajets droits.



(b) Trajets courbes.

FIGURE 3.3 – Répartition des 500 estimés de la position initiale et ellipse de confiance à 90% (en bleu la trajectoire de l’observateur et en rouge la trajectoire de la source).

TABLE 3.3 – Performances empiriques de l’estimateur du vecteur d’état complet.

trajet	\bar{X}_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} 5000\text{m} \\ 7000\text{m} \\ 100\text{m} \\ 2.83\text{m/s} \\ 2.83\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6.78\text{m} \\ -18.87\text{m} \\ 19.48\text{m} \\ -0.02\text{m/s} \\ 0.003\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 744.9\text{m} \\ 998.6\text{m} \\ 676.3\text{m} \\ 1.39\text{m/s} \\ 2.36\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 760.3\text{m} \\ 1023\text{m} \\ 688.7\text{m} \\ 1.38\text{m/s} \\ 2.36\text{m/s} \end{pmatrix}$
Courbe		$\begin{pmatrix} -101.1\text{m} \\ -144.5\text{m} \\ 270\text{m} \\ 0.16\text{m/s} \\ 0.26\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 752.3\text{m} \\ 1011\text{m} \\ 737.3\text{m} \\ 1.40\text{m/s} \\ 2.39\text{m/s} \end{pmatrix}$

- Pour des trajets courbes, l'estimateur présente un biais d'estimation alors que ses écarts types empiriques sont très peu affectés par le changement de modèle de propagation.
- Les performances asymptotiques sur l'immersion de la source ne sont pas compatibles avec les contraintes physiques. Avec les écarts types asymptotiques présentés dans la table 3.3, la source peut être estimée au-dessus de la surface de la mer !

Pour ce dernier point, un palliatif peut être proposé en fixant l'immersion de la source à une valeur supposée. Cependant, il faut s'attendre à ce qu'un biais apparaisse sur les autres composantes du vecteur d'état.

3.2.2.2 Estimation du vecteur d'état réduit lorsque la profondeur de la source est fixée

La troisième composante du vecteur d'état n'est maintenant plus estimée. Nous utilisons la notation $Y_T = (x_T(0), y_T(0), \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$ afin de nommer le vecteur d'état réduit. Nous imposons l'immersion de la source à $z_{as} = 200m$ (alors que la véritable profondeur est $z_T = 100m$).

De la même manière que la figure 3.3, la figure 3.4 présente les estimés dans le plan horizontal.

Pour les deux modèles de propagation (droit ou courbe), les écarts types empiriques des composantes du vecteur d'état sont du même ordre de grandeur que les écarts types asymptotiques donnés par la **BCR**. Toutefois, pour les mesures générées par le logiciel de lancer de rayons, les écarts types empiriques sont inférieurs aux écarts types asymptotiques.

Comme attendu, la table 3.4 révèle un biais (non visible à la figure 3.4). Ce biais est deux fois plus important pour les coordonnées de positions et dix fois plus important pour les coordonnées de vitesses. Cela se traduit par la dégradation du NEES moyen ($\overline{NEES} = 7.31$ pour des trajets droits et $\overline{NEES} = 35.5$ pour des trajets courbes)

Remarque 13.

Nous sommes en présence du compromis bien connu biais/variance.

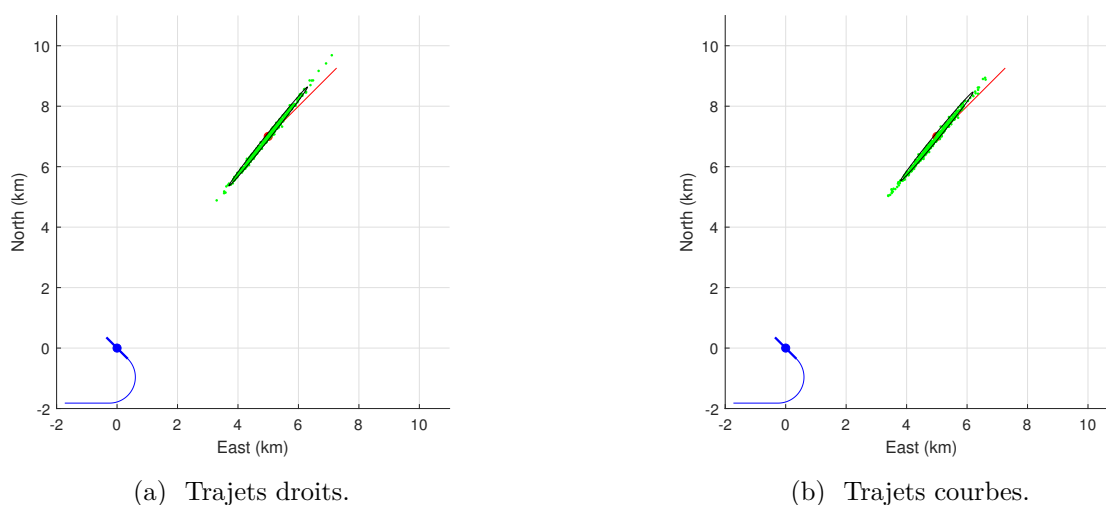


FIGURE 3.4 – Répartition des 500 estimés de la position initiale pour l'estimation du vecteur d'état réduit et ellipse de confiance à 90% (en bleu la trajectoire de l'observateur et en rouge la trajectoire de la source).

En conclusion, fixer la profondeur de la source réduit les écarts types sans toutefois générer un biais

TABLE 3.4 – Performances empiriques de l’estimateur du vecteur d’état réduit.

trajet	Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} 5000\text{m} \\ 7000\text{m} \\ 2.83\text{m/s} \\ 2.83\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 74.47\text{m} \\ 108.7\text{m} \\ 0.013\text{m/s} \\ 0.012\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 606.4\text{m} \\ 762.7\text{m} \\ 1.58\text{m/s} \\ 2.52\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 649.6\text{m} \\ 815.5\text{m} \\ 1.69\text{m/s} \\ 2.69\text{m/s} \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 150.7\text{m} \\ 233.3\text{m} \\ 0.14\text{m/s} \\ 0.12\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 584.2\text{m} \\ 718.1\text{m} \\ 1.44\text{m/s} \\ 2.45\text{m/s} \end{pmatrix}$
Courbe				

d’estimation rédhibitoire (en particulier pour les mesures générées par le logiciel de lancer de rayons).

3.2.2.3 Estimation du vecteur d’état réduit avec la méthode conventionnelle du *BOTMA*

Dans une telle situation, un algorithme de *BOTMA* « classique » peut être employé en négligeant les effets de site, donc en imposant que $\cos(\varphi_{OT}(t_k)) = 1, \forall t_k$. L’expression (incorrecte) du modèle des mesures non bruitées est alors

$$\cos(\alpha_{OT}(t_k)) = \cos(\theta_{OT}(t_k) - h_O(t_k)). \quad (3.9)$$

Les résultats de l’estimation sont représentés à la figure 3.5.

Pour les trajets droits, un biais important apparaît, amenant une valeur de NEES moyen de 1960. Plus précisément, le biais sur les composantes du vecteur d’état réduit est ici égal à

$$(-3062.8\text{m}, -2319.9\text{m}, 14.4\text{m/s}, 15.8\text{m/s},)^T$$

Pour les trajets courbes, le constat est plus sévère : le comportement de l’estimateur est imprévisible.

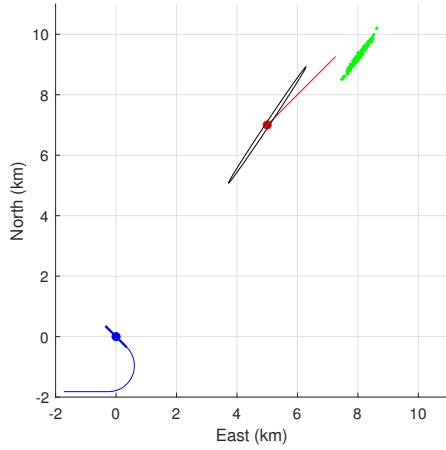
En conclusion, la méthode du *BOTMA* « classique » n’est donc clairement pas recommandable dans une situation de grand fond (telle que définie dans ce manuscrit) et pour le trajet réfléchi-fond. Cela justifie, *a posteriori*, l’intérêt de prendre en considération les effets du site ainsi que la nature des trajets suivis par l’onde acoustique, comme ce qui a été précédemment pointé dans l’introduction de [Oh *et al.*, 2020].

Remarque 14.

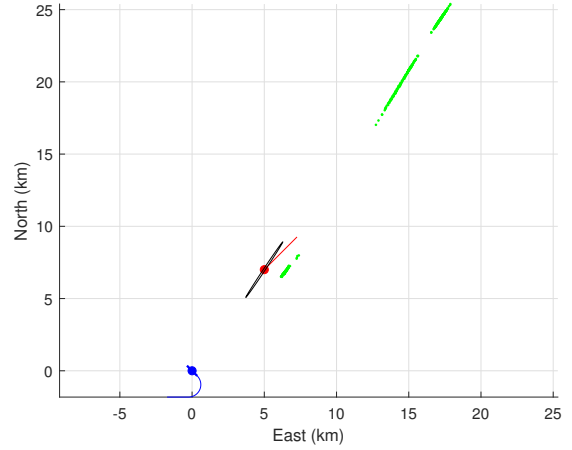
Cette conclusion ne condamne pas le BOTMA « classique » lorsque l’onde emprunte le trajet direct ou des trajets réfractés.

3.2.3 Estimation du vecteur d’état réduit lorsque le trajet est inconnu

Lorsque l’observateur ne connaît pas la nature du trajet suivi par l’onde acoustique, l’estimation peut être réalisée en mettant en place une méthode de décision de la nature du trajet. Cette méthode consiste à réaliser plusieurs estimations du vecteur d’état réduit pour différents types de trajets suivis par l’onde acoustique. Afin de limiter le nombre d’estimations à réaliser, nous utilisons la notion de classe développée en 2.4.2. Pour chaque classe, nous choisissons un seul représentant : le trajet direct,



(a) Trajets droits.



(b) Trajets courbes.

FIGURE 3.5 – Répartition des 500 estimés (en vert) de la position initiale donnée par une méthode classique de *BOTMA* et ellipse de confiance à 90% (en bleu la trajectoire de l’observateur et en rouge la trajectoire de la source).

le trajet réfléchi-fond et le trajet $(1, 1, 2)$ pour les classes 1, 2 et 3⁵, respectivement. Ainsi pour chaque représentant, nous obtenons un estimé et calculons le critère des moindres carrés pondéré. Enfin, nous sélectionnons l’estimé du plus petit critère et retenons le trajet associé.

Nous nous intéressons aux performances empiriques de notre test de décision. Nous réalisons l’estimation suivant les mêmes paramètres (pour l’observateur et la source) qu’à la section 3.2.2.2 et des trajets générés avec le logiciel de lancer de rayons. Nous considérons ici trois types de trajets : un trajet réfracté vers le haut, le trajet réfléchi-fond et le trajet $(1, 2, 2)$. La table 3.5 résume les résultats obtenus par le test sur 500 simulations de Monte-Carlo. Nous constatons que quel que soit le trajet suivi par l’onde acoustique, le test de décision du trajet fait le bon choix dans 100% des simulations, et cela pour les trajets droits et pour les trajets courbes.

TABLE 3.5 – Performances empiriques du test de décision.

	le test choisi le bon trajet	le test choisi le mauvais trajet
Décision premier scénario :	100%	0%
Décision second scénario :	100%	0%
Décision troisième scénario :	100%	0%

3.3 Cas de deux trajets : l’antenne est en MRU

L’onde acoustique émise par la source se déplace suivant un trajet direct et suivant un trajet réfléchi-fond.

3.3.1 Observabilité

Théorème 3.

Soient une antenne et une source en mouvement rectiligne uniforme. L’antenne mesure les co-

⁵. Nous nous limitons ici aux trois premières classes. Nous l’avons vu en 2.3.2, dans une situation de grand fond, les trajets au-delà de la classe 3 sont très peu probables.

sinus de pseudo-gisement issus du trajet direct et du trajet réfléchi-fond suivis par l'onde acoustique.

- Lorsque la source se trouve dans le broadside de l'antenne, l'ensemble des sources fantômes est indénombrable : il est composé de toutes les sources virtuelles se trouvant dans le broadside de l'antenne.
- Lorsque la source se trouve dans l'endfire de l'antenne, l'ensemble des sources fantôme est indénombrable : il est composé des sources virtuelles se trouvant dans l'endfire de l'antenne.
- Lorsque les trajectoires de l'antenne et de la source sont parallèles
 - ▶ à toute profondeur $z_G \neq z_T$, il existe deux sources fantômes se déplaçant sur un cylindre dont l'axe est celui de l'antenne et dont le rayon est le scalaire positif $\beta \triangleq \sqrt{\frac{P-z_G}{P-z_T}}$. La vitesse relative de la source fantôme est égale à β fois la vitesse relative de la source. La distance initiale entre l'image de la source fantôme et le centre acoustique de l'antenne est égale à β fois la distance initiale entre l'image de la source et le centre acoustique de l'antenne.
 - ▶ Il n'existe qu'une source fantôme à la profondeur $z_G = z_T$ dont la trajectoire est définie par $P_{OG}(t) = \mathbf{S}_1 P_{OT}(t)$, où \mathbf{S}_1 est la symétrie orthogonale par rapport au plan vertical contenant l'axe de l'antenne ;
- Lorsque les trajectoires de la source et de l'antenne ne sont pas parallèles,
 - ▶ si $z_T \neq z_O$, il existe trois sources fantômes dont les trajectoires relatives par rapport à l'antenne sont
 - $P_{OG}(t) = \mathbf{S}_1 P_{OT}(t)$,
 - $P_{OG}(t) = \beta \mathbf{S}_2 P_{OT}(t)$, où \mathbf{S}_2 est la symétrie orthogonale par rapport au plan horizontal contenant l'axe de l'antenne. Dans ce cas $\beta \triangleq \frac{P-z_O}{P-z_T}$,
 - $P_{OG}(t) = \beta \mathbf{S}_3 P_{OT}(t)$, où \mathbf{S}_3 est la symétrie axiale par rapport à l'axe de l'antenne.
 - ▶ si $z_T = z_O$, alors il existe une unique source fantôme donnée par $P_{OG}(t) = \mathbf{S}_1 P_{OT}(t)$.

De nouveau, la démonstration de l'observabilité est réalisée à temps continu.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous considérons de nouveau que l'axe de l'antenne est dirigé vers le nord. Une rotation appropriée nous permettant de nous amener à ce cas. Nous obtenons donc les expressions 3.10 et 3.11 pour les mesures exemptes de bruit issues du trajet direct et du trajet réfléchi-fond.

$$m_1(t) = \frac{y_{OT}(t)}{\sqrt{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + (z_T - z_O)^2}}. \quad (3.10)$$

$$m_2(t) = \frac{y_{OT}(t)}{\sqrt{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + (2P - (z_T + z_O))^2}}. \quad (3.11)$$

Nous devons chercher le vecteur d'état de dimension cinq $X_G = (x_G(0), y_G(0), z_G, \dot{x}_G, \dot{y}_G)^T$ définissant la trajectoire de la source fantôme, c.-à-d., produisant les mesures exemptes de bruit que le vecteur d'état X , tels que

$$m_1(t) = \frac{y_{OG}(t)}{\sqrt{x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + (z_G - z_O)^2}}$$

et

$$m_2(t) = \frac{y_{OG}(t)}{\sqrt{x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + (2P - (z_G + z_O))^2}}.$$

Par conséquent, satisfaisant donc les deux équations suivantes (en temps) :

$$\frac{y_{OG}(t)}{\sqrt{x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + (z_G - z_O)^2}} = \frac{y_{OT}(t)}{\sqrt{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + (z_T - z_O)^2}}. \quad (3.12)$$

$$\frac{y_{OG}(t)}{\sqrt{x_{OG}^2(t) + y_{OG}^2(t) + (2P - (z_G + z_O))^2}} = \frac{y_{OT}(t)}{\sqrt{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + (2P - (z_T + z_O))^2}}. \quad (3.13)$$

Sous la contrainte que z_G se trouve dans l'intervalle $[0, P]$. Notons que $y_{OG}(t)$ et $y_{OT}(t)$ sont de même signe.

Premier cas : $y_{OT}(t)$ est une fonction nulle, c.-à-d., $\forall t \ y_{OT}(t) = 0$.

La source se trouve dans le *broadside* de l'antenne, donc n'importe quelle source fantôme s'y trouvera aussi.

Deuxième cas : $y_{OT}(t)$ n'est pas une fonction nulle.

L'équation 3.12 étant un cas particulier de l'équation 3.4, nous nous retrouvons dans le deuxième cas de la démonstration du théorème 1.

Il existe donc un scalaire positif β tel que $y_{OG}(t) = \beta y_{OT}(t)$.

Remplaçons $y_{OG}(t)$ par $\beta y_{OT}(t)$: dans 3.12, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sqrt{x_{OG}^2(t) + \beta^2 y_{OT}^2(t) + (z_G - z_O)^2} &= \beta \sqrt{x_{OT}^2(t) + y_{OT}^2(t) + (z_T - z_O)^2} \\ \Leftrightarrow [x_{OG}^2(t) + (z_G - z_O)^2] &= \beta^2 [x_{OT}^2(t) + (z_T - z_O)^2]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De même, l'équation 3.13 après avoir élevé au carré ses termes conduit à

$$[x_{OG}^2(t) + (2P - (z_G + z_O))^2] = \beta^2 [x_{OT}^2(t) + (2P - (z_T + z_O))^2]. \quad (3.15)$$

En soustrayant (3.15) à (3.14), nous obtenons

$$(z_G - z_O)^2 - (2P - (z_G + z_O))^2 = \beta^2 [(z_T - z_O)^2 - (2P - (z_T + z_O))^2].$$

Maintenant, simplifions l'expression de ces deux termes (chacun est la différence de deux carrés) :

$$\begin{aligned} (z_G - z_O)^2 - (2P - (z_G + z_O))^2 &= -4(P - z_G)(P - z_O). \\ (z_T - z_O)^2 - (2P - (z_T + z_O))^2 &= -4(P - z_T)(P - z_O). \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$\beta = \sqrt{\frac{P - z_G}{P - z_T}}. \quad (3.16)$$

Notons que $\beta = 1$ si et seulement si $z_G = z_T$.

Exploitions maintenant l'équation 3.14.

$$(3.14) \Leftrightarrow x_{OG}^2(t) - \beta^2 x_{OT}^2(t) = \beta^2 (z_T - z_O)^2 - (z_G - z_O)^2. \quad (3.17)$$

Comme $x_{OG}^2(t) + \beta^2 x_{OT}^2(t)$ est un polynôme de degré 2, l'équation (3.17) est équivalente à

$$x_{OG}^2(0) = \beta^2 x_{OT}^2(0) + \beta^2 z_{OT}^2 - z_{OG}^2. \quad (3.18)$$

$$x_{OG}(0)\dot{x}_{OG} = \beta^2 x_{OT}(0)\dot{x}_{OT}. \quad (3.19)$$

$$\dot{x}_{OG}^2 = \beta^2 \dot{x}_{OT}^2. \quad (3.20)$$

Premier sous-cas : $\dot{x}_{OT} = 0$.

L'équation (3.20) implique que $\dot{x}_{OG} = 0$. Par conséquent, pour tout z_G compris dans l'intervalle $[0, P]$ le vecteur d'état

$$X_{OG} = \left(\pm \sqrt{\beta^2 x_{OT}^2(0) + \beta^2 z_{OT}^2 - z_{OG}^2}, \beta y_{OT}(0), z_{OG}, 0, \beta y_{OT} \right)^T,$$

avec $\beta = \sqrt{\frac{P - z_G}{P - z_T}}$, définit la trajectoire des sources fantômes.

Second sous-cas : $\dot{x}_{OT} \neq 0$.

En utilisant l'équation (3.20) et en élevant au carré les termes de (3.19), nous obtenons $x_{OG}^2(0) = \beta^2 x_{OT}^2(0)$. En reportant ce résultat dans (3.18), nous obtenons finalement $\beta^2 (z_T - z_O)^2 = (z_G - z_O)^2$.

Si $z_T = z_O$, alors $z_G = z_O$. Par conséquent, d'après 3.16, $\beta = 1$. Par conséquent $y_{OG}(t) = y_{OT}(t)$; et à partir de l'équation (3.17) : $x_{OG}^2(t) = x_{OT}^2(t)$. La trajectoire de la source est observable à la symétrie axiale autour de l'axe Oy près.

Sinon

$$\beta^2 = \left(\frac{z_G - z_O}{z_T - z_O} \right)^2. \quad (3.21)$$

Les équations (3.16) et (3.21) conduisent à l'équation du second degré en z_T :

$$\frac{P - z_G}{P - z_T} = \left(\frac{z_G - z_O}{z_T - z_O} \right)^2,$$

dont l'inconnue est z_G

Cette équation est mise sous la forme

$$(z_G - z_O)^2 - \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} (P - z_G) = 0,$$

ou encore

$$z_G^2 + z_G \left[-2z_O + \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} \right] - \frac{P(z_T - z_O)^2}{P - z_T} + z_O^2 = 0. \quad (3.22)$$

Bien entendu, z_T est une racine de cette équation. Dans ce cas $\beta = 1$.

Par conséquent, la seconde racine est $2z_O - z_T - \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} \triangleq z_G$. Nous pouvons rapidement nous assurer que $z_G - z_O = z_O - z_T - \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} = \frac{(z_O - z_T)(P - z_T) - (z_T - z_O)^2}{P - z_T}$, et par la suite que $\frac{z_G - z_O}{z_T - z_O} = \frac{z_O - P}{P - z_T}$ (qui prend une valeur négative). Dans ce cas $\beta = \frac{P - z_O}{P - z_T}$.

Il est à noter que $z_G = f(z_T)$, avec

$$f : u \mapsto 2z_O - u - \frac{(u - z_O)^2}{P - u} \quad (3.23)$$

Or f est une involution, c'est-à-dire que $f(f(u)) = u$.

Donc $z_T = f(z_G)$, i.e les deux racines de l'équation 3.22 sont liées par cette involution.

Nous déduisons de cela que :

1. lorsque l'immersion de la source est plus grande que celle de l'antenne, il y a une source fantôme dont l'immersion est plus petite que celle de l'antenne, et *vice versa*.
2. β , qui est un coefficient positif, est égal à $\frac{P - z_O}{P - z_T}$ ou à 1.

En conclusion, nous avons identifié trois sources fantômes :

- la première est définie par $X_{G_1} = (-x_T(0), y_T(0), z_T, -\dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$,
- la deuxième par $X_{G_2} = (\beta x_T(0), \beta y_T(0), f(z_T), \beta \dot{x}_T, \beta \dot{y}_T)^T$,
- et enfin la troisième par $X_{G_3} = (-\beta x_T(0), \beta y_T(0), f(z_T), -\beta \dot{x}_T, \beta \dot{y}_T)^T$.

□

A z_T fixé nous bénéficions d'une condition nécessaire et suffisante de l'existence de trois sources fantômes :

Corollaire 1.

La double inégalité $0 \leq f(z_T) \leq z_{max}$ est vérifiée si et seulement si

$$P - \sqrt{P(P - z_T)} \leq z_O \leq P - \sqrt{(P - z_{max})(P - z_T)}.$$

Si ce n'est pas le cas, il n'y a qu'une source fantôme, celle donnée par X_{G_1} .

Démonstration. Reprenons l'expression de l'immersion z_G d'une source fantôme donnée en 3.23 :

$$z_G = 2z_O - z_T - \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T}.$$

Nous cherchons à savoir qu'elles sont les valeurs de z_O pour lesquelles la double inégalité $0 \leq f(z_T) \leq z_{max}$ est vérifiée. Pour cela, séparons l'étude en deux cas.

1^{er} cas : $z_G \geq 0$.

$$\begin{aligned}
2z_O - z_T - \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} &\geq 0; \\
\Leftrightarrow \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} - 2z_O + z_T &\leq 0; \\
\Leftrightarrow (z_T - z_O)^2 - 2z_O(P - z_T) + z_T(P - z_T) &\leq 0; \\
\Leftrightarrow z_O^2 - 2z_OP + z_TP &\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Calculons le discriminant de 3.24 : $\Delta = 4P(P - z_T)$. Le terme $P - z_T$ est strictement positif, donc $\Delta > 0$. L'inégalité 3.24 admet donc les deux solutions

$$3.24 \Leftrightarrow \begin{cases} z_O \leq P + \sqrt{P(P - z_T)} \\ z_O \geq P - \sqrt{P(P - z_T)} \end{cases}. \tag{3.25}$$

2^d cas : $z_G \leq z_{max}$.

$$\begin{aligned}
2z_O - z_T - \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} &\leq z_{max}; \\
\Leftrightarrow \frac{(z_T - z_O)^2}{P - z_T} - 2z_O + z_T &\geq -z_{max}; \\
\Leftrightarrow (z_T - z_O)^2 - 2z_O(P - z_T) + z_T(P - z_T) &\geq -z_{max}(P - z_T); \\
\Leftrightarrow z_O^2 - 2z_OP + P(z_{max} + z_T) - z_Tz_{max} &\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Le discriminant de 3.26 est :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4P^2 - 4P(z_{max} + z_T) + 4z_Tz_{max}; \\
&= 4(P - z_{max})(P - z_T).
\end{aligned}$$

Les termes $(P - z_{max})$ et $(P - z_T)$ sont strictement positifs, donc $\Delta > 0$. L'inégalité 3.26 est donc équivalente à

$$3.26 \Leftrightarrow \begin{cases} z_O \geq P + \sqrt{(P - z_{max})(P - z_T)} \\ z_O \leq P - \sqrt{(P - z_{max})(P - z_T)} \end{cases}. \tag{3.27}$$

Prenons maintenant l'intersection des solutions données en 3.25 et en 3.27. Cette intersection donne

$$3.25 \cap 3.27 \Leftrightarrow \begin{cases} P - \sqrt{P(P - z_T)} \leq z_O \leq P - \sqrt{(P - z_{max})(P - z_T)}. & (3.28a) \\ P + \sqrt{(P - z_{max})(P - z_T)} \leq z_O \leq P + \sqrt{P(P - z_T)}. & (3.28b) \end{cases}$$

Les termes à gauche et à droite de la double inégalité 3.28b sont tous les deux supérieurs à P . La profondeur de l'observateur z_O ne pouvant être supérieure à celle du fond marin, la double inégalité 3.28b peut donc être rejetée. Finalement, il nous reste seulement la double inégalité 3.28a de possible.

□

Remarque 15.

L'immersion du sous-marin se trouve limitée par des contraintes physiques : la valeur de z_T est comprise entre $[0, z_{max}]$ et $z_{max} \ll P$. Par exemple $z_{max} = 400\text{m}$ et $P = 4830\text{m}$. Lorsque $\beta \neq 1$, l'existence (ou le réalisme) d'une source fantôme se pose : z_G doit satisfaire la contrainte $z_G \leq z_{max}$.

Remarque 16.

La fonction f , comme toute involution différente de l'identité, est une fonction décroissante. La plus grande valeur de z_G est donc $f(0) = 2z_O - \frac{z_O^2}{P}$.

La plus grande valeur de z_O garantissant la contrainte $2z_O - \frac{z_O^2}{P} \leq z_{max}$ est $P - P\sqrt{1 - \frac{z_{max}}{P}}$ (qui est plus petite que z_{max}).

On peut en tirer une condition suffisante d'existence de trois sources fantômes pour toute valeur de z_T :

Si $z_O \leq P - P\sqrt{1 - \frac{z_{max}}{P}}$, alors $z_G \leq z_{max}$. Dans ce cas, il y a trois sources fantômes dont les trajectoires sont définies par X_{G_1} , X_{G_2} et X_{G_3} .

Remarque 17.

Nous bénéficions d'un encadrement de β : $\frac{P - z_{max}}{P} \leq \beta \leq \frac{P}{P - z_{max}}$. Par exemple pour $z_{max} = \frac{P}{10}$, nous avons $0.9 \leq \beta \leq 1.11$, la source fantôme dont la trajectoire est définie par X_{G_2} est donc très proche de la véritable source.

3.3.2 Estimation de la trajectoire

Cette section est dédiée à l'estimation de la trajectoire de la source, en d'autres termes, à l'estimation du vecteur d'état X_T quand $t_{ref} = 0$ (l'instant initial).

Nous considérons deux scénarios classiques. Dans les deux, le fond marin est à $P = 4830\text{m}$. L'antenne est immobile (ou plus généralement, tous les mobiles sont référencés par rapport à son centre acoustique). Le vecteur d'état définissant la trajectoire de la source est

$$X_T = (5000\text{m} , 7000\text{m} , 100\text{m} , 2.83\text{m/s} , 2.83\text{m/s})^T .$$

Nous avons $P - \sqrt{P(P - z_T)} = 50.26$ et $P - \sqrt{(P - z_{max})(P - z_T)} = 252.45$ (avec $z_{max} = 400\text{m}$).

Dans le premier scénario, l'immersion de l'antenne est à $z_O = 270\text{m}$, et pour le second, $z_O = 200\text{m}$. D'après la remarque 1, il n'y a qu'une source fantôme pour le premier scénario et trois sources fantômes

pour le second (avec $\beta = 0.98$). Sur la figure 3.6, les trajectoires de la source et de ses sources fantômes sont tracées dans le plan horizontal.

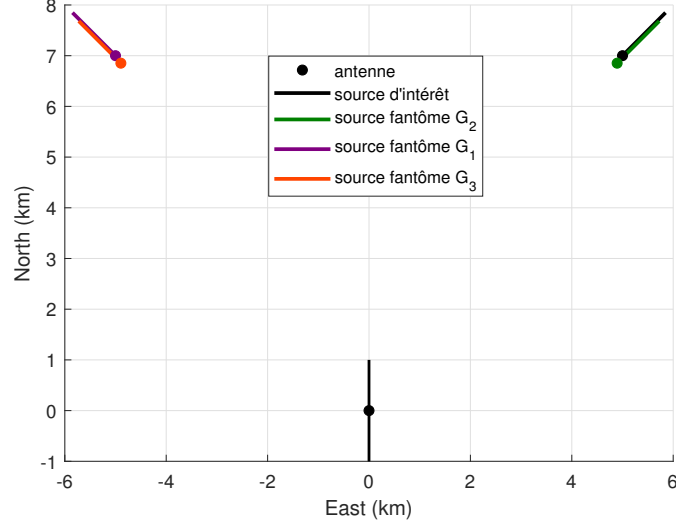


FIGURE 3.6 – Trajectoires de la source et de ses trois sources fantômes.

Nous calculons la borne de Cramér-Rao afin d'évaluer les performances asymptotiques de l'estimateur non biaisé.

L'écart type des mesures bruitées est égal à $\sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$. La durée totale du scénario est de 5 minutes et la période d'échantillonnage est de $\Delta t = 4s$; par conséquent nous avons $N = 75$ couples de mesures bruitées.

3.3.2.1 Estimabilité

Comme indiqué à la section 2.5.3, le vecteur d'état est qualifié d'« estimable » si les performances asymptotiques données par la borne de Cramér-Rao sont compatibles avec les contraintes physiques.

Pour le premier scénario, les racines carrées des éléments diagonaux de la borne sont égales à

$$\sigma_{\mathbf{BCR}} = (3.03 \times 10^5, 4.53 \times 10^5, 6.12 \times 10^5, 192.8, 182.9)^T,$$

et pour le second scénario, elles sont égales à

$$\sigma_{\mathbf{BCR}} = (5.26 \times 10^5, 7.64 \times 10^5, 1.03 \times 10^6, 318.8, 308.9)^T.$$

Dans les deux cas, l'écart type minimal de chaque composante est énorme. Nous en concluons que le vecteur d'état n'est pas estimable⁶.

Une fois de plus, nous fixons l'immersion de la source à une valeur arbitraire et réaliste z_{as} . Le vecteur d'état se réduit à $Y_T \triangleq (x_T(0), y_T(0), \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$.

Nous choisissons $z_{as} = 300m (\neq z_T)$; l'écart type minimal devient :

$$\sigma_{\mathbf{BCR}} = (117.3, 100.1, 0.71, 0.61)^T \text{ pour le premier scénario, et}$$

$$\sigma_{\mathbf{BCR}} = (116.8, 99.7, 0.71, 0.61)^T \text{ pour le second scénario.}$$

6. Le calcul de l'écart type minimal a été réalisé pour de nombreux autres scénarios : dans tous, le vecteur d'état n'était pas estimable.

La prochaine sous-section donne les résultats pour 500 simulations de Monte-Carlo.

Remarque 18.

Le fait que $z_{as} \neq z_T$ entraîne un biais d'estimation.

3.3.2.2 Simulations de Monte-Carlo

Le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) est réalisée avec l'algorithme de Gauss-Newton.

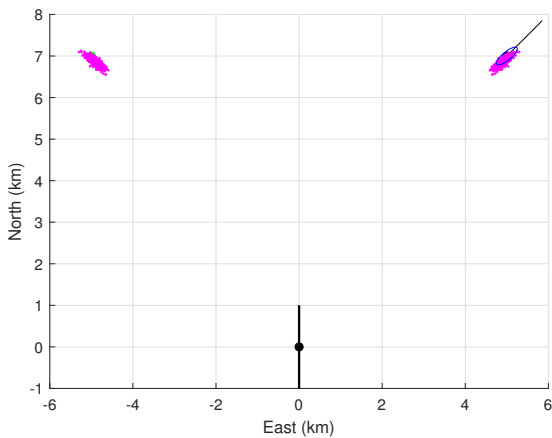
Premier scénario : $z_O = 270\text{m}$.

Dans ce cas il n'y a qu'une source fantôme dont la trajectoire est le symétrique de la trajectoire de la source définie par $Y_G \triangleq (-x_T(0), y_T(0), -\dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$.

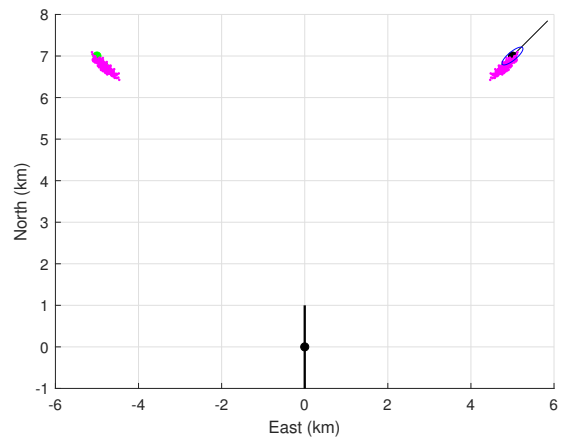
Seules les performances empiriques du MLE de Y_T sont présentées à la table 3.6. Nous avons calculé le biais et l'écart type empirique (donnés respectivement dans la deuxième et la dernière colonne). Nous constatons que les écarts types empiriques sont très proches des performances asymptotiques données par la borne de Cramér-Rao. Cependant, comme nous nous y attendions, le MLE est biaisé (le biais aurait été moindre si nous avions choisi $z_{as} = z_T$). Sur la figure 3.7, l'ellipse de confiance à 90% est tracée en plus de l'ensemble des 500 estimés dans le plan horizontal (en magenta).

TABLE 3.6 – Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit.

trajet	Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} 5000\text{m} \\ 7000\text{m} \\ 2.83\text{m/s} \\ 2.83\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 106.2\text{m} \\ 153.3\text{m} \\ 0.07\text{m/s} \\ 0.05\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 117.3\text{m} \\ 100.1\text{m} \\ 0.71\text{m/s} \\ 0.61\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 118.2\text{m} \\ 99.1\text{m} \\ 0.71\text{m/s} \\ 0.59\text{m/s} \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 194.2\text{m} \\ 270.9\text{m} \\ 0.09\text{m/s} \\ 0.09\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 114.5\text{m} \\ 101.6\text{m} \\ 0.68\text{m/s} \\ 0.61\text{m/s} \end{pmatrix}$



(a) Trajets droits.



(b) Trajets courbes.

FIGURE 3.7 – Position de l'antenne (en noir), répartition des 500 estimés et ellipse de confiance à 90% lorsque $P = 1991\text{m}$, $z_{as} = 300\text{m}$ et $z_T = 100\text{m}$. La symétrie des estimés est également représentée.

Second scénario : $z_O = 200\text{m}$.

Les trajectoires des sources fantômes sont définies par :

- $Y_{G_1} \triangleq (-x_T(0), y_T(0), -\dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$,
- $Y_{G_2} \triangleq \beta Y_T$,
- $Y_{G_3} \triangleq \beta Y_{G_1}$,

Comme vu à la figure 3.6, la trajectoire de la source fantôme G_2 est très proche de la trajectoire de la source. De plus, la position initiale de G_2 est dans l'ellipse de confiance à 90% (voir figure 3.8). Il est donc impossible de distinguer les estimés de Y_{G_2} de ceux de Y_T . Les performances empiriques sont calculées sur les estimés retournés par l'algorithme sans distinction entre ceux de Y_T et ceux de Y_{G_2} (voir table 3.7). Cela ne se ressent toutefois pas sur le biais empirique. Les performances empiriques de l'estimateur (biais et écarts types) sont similaires à celles obtenues pour le premier scénario. Les figures 3.9 et 3.7 en rendent compte.

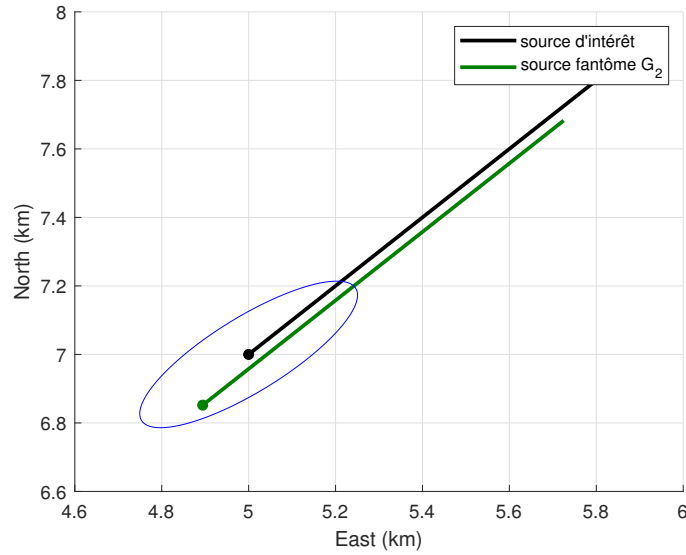
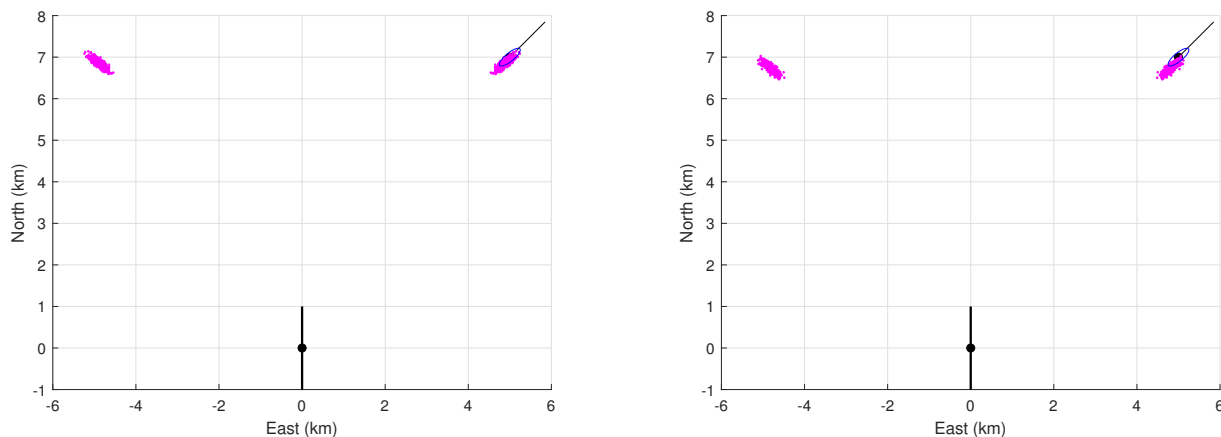


FIGURE 3.8 – Trajectoires de la source et de la source fantôme G_2 avec ellipse de confiance à 90%.

TABLE 3.7 – Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit.

trajet	Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} 5000\text{m} \\ 7000\text{m} \\ 2.83\text{m/s} \\ 2.83\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 111.9\text{m} \\ 152.1\text{m} \\ 0.006\text{m/s} \\ 0.04\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 116.8\text{m} \\ 99.7\text{m} \\ 0.71\text{m/s} \\ 0.61\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 115.7\text{m} \\ 98.9\text{m} \\ 0.7\text{m/s} \\ 0.61\text{m/s} \end{pmatrix}$
		$\begin{pmatrix} 188.4\text{m} \\ 263.5\text{m} \\ 0.12\text{m/s} \\ 0.16\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 101.2\text{m} \\ 92.5\text{m} \\ 0.62\text{m/s} \\ 0.57\text{m/s} \end{pmatrix}$

Il est remarquable que malgré la courte durée du scénario, les performances empiriques de l'estimation (en termes de précision) soient très bonnes que les trajets soient générés avec la modélisation en lignes droites ou avec le logiciel de lancer de rayons. De nombreuses simulations (non présentées ici) ont été réalisées, toutes ont confirmé les bonnes performances de l'estimateur du MLE. La courte durée du scénario est primordiale, car tout ce que nous avons proposé fonctionne sous la condition que le fond reste plat durant un scénario. Pour un scénario court, cette condition a de grande chance d'être



(a) Trajets droits.

(b) Trajets courbes.

FIGURE 3.9 – Position de l’antenne (en noir), répartition des 500 estimés et ellipse de confiance à 90% lorsque $P = 4000\text{m}$, $z_{as} = 300\text{m}$ et $z_T = 100\text{m}$. La symétrie des estimés est également représentée.

vérifiée.

3.3.3 Estimation lorsque le trajet est inconnu

Comme dans le cas où un seul trajet est détecté par l’antenne linéaire remorquée, l’observateur ne connaît pas *a priori* la nature (ou la classe) des trajets suivis par l’onde acoustique. Afin d’identifier les classes des trajets, nous reprenons le méthode de décision proposée en 3.2.3. Nous devons réaliser une estimation pour chaque couple de trajets possible (si l’on prend un représentant pour les classes 1 à 3, nous devons donc réaliser 6 estimations).

Nous présentons les performances empiriques de la méthode de décision sur le scénario présenté en 3.3.2 pour le fond marin situé en $P = 4830\text{m}$ et pour trois configurations acoustiques dans lesquelles les trajets sont générés avec le logiciel de lancer de rayons. Dans la première configuration, la source émet une onde se propageant suivant un trajet réfracté vers le haut et le trajet réfléchi-fond. Dans la deuxième configuration, l’onde suit le trajet réfléchi-fond et le trajet (1, 2, 2) (voir figure 3.10). Enfin, dans la troisième, l’onde suit le trajet (1, 2, 2) et un trajet réfracté vers le bas puis vers le haut (voir figure 3.10). La table 3.8 résume les résultats du test de décision pour 500 simulations de Monte-Carlo. Nous constatons que le taux de succès de la méthode ne dépasse pas 51.4%, ce qui signifie que pour ce type de scénario la méthode proposée n’est pas fiable.

TABLE 3.8 – Performances empiriques du test de décision sur la nature des trajets.

	le test choisi le bon trajet	le test choisi le mauvais trajet
Décision première configuration :	5.8%	94.2%
Décision deuxième configuration :	50.8%	49.2%
Décision troisième configuration :	51.4%	48.6%

Compte tenu de ces mauvais résultats, nous proposons de faire manœuvrer l’antenne pour vérifier si les performances empiriques de la méthode de décision s’améliorent ou pas. La manœuvre de l’antenne est celle présentée à la section 3.2.2.2, les trois configurations acoustiques restent inchangées. La table 3.9 résume les résultats du test de décision pour 500 simulations de Monte-Carlo : cette fois la méthode permet de décider avec 100% de succès la classe des trajets suivis par l’onde acoustique (selon les

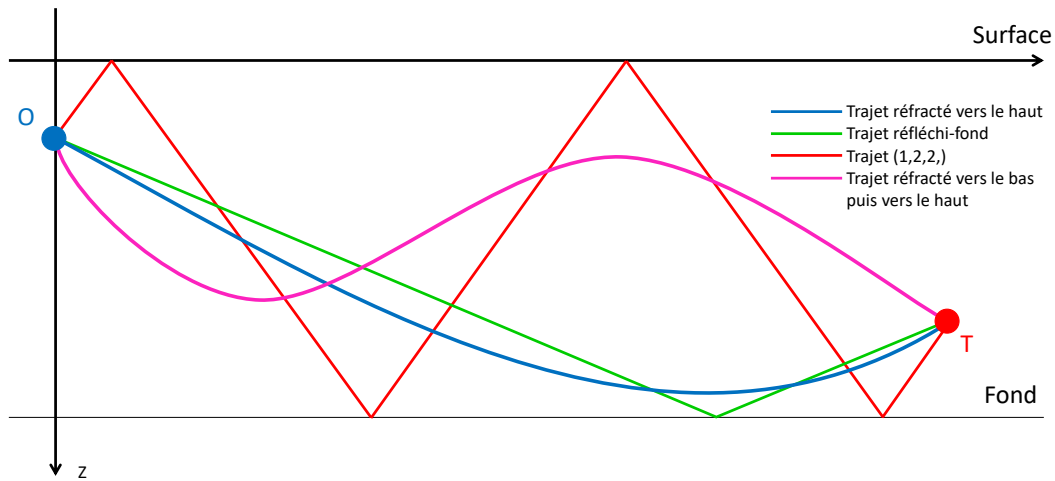


FIGURE 3.10 – Trajets suivis par les ondes.

trajets droits⁷ et les trajets courbes).

TABLE 3.9 – Performances empiriques du test de décision sur la nature des trajets.

	le test choisi le bon trajet	le test choisi le mauvais trajet
Décision première configuration :	100%	0%
Décision deuxième configuration :	100%	0%
Décision troisième configuration :	100%	0%

En conclusion, dans nos exemples, la manœuvre de l’observateur semble améliorer les performances de la méthode de décision.

3.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux cas de trajectographie passive à partir d’une antenne linéaire remorquée. Dans le 1^{er} cas, l’onde acoustique suit un seul trajet avant d’être captée par l’antenne et dans le 2nd, l’onde suit deux trajets (un direct et un réfléchi-fond). Dans les deux cas, nous avons réalisé l’étude de l’observabilité et nous avons conclu que la trajectoire de la source en MRU est observable sous certaines conditions. Nous avons également décrit les trajectoires des sources fantômes lorsqu’il y en a.

Nous avons ensuite étudié l’estimabilité de la trajectoire d’une source. Nous avons conclu que dans le cas particulier où l’onde suit un seul trajet, une manœuvre de l’observateur ainsi qu’une hypothèse sur la profondeur de la source sont nécessaires à l’estimabilité de sa trajectoire. Dans le cas où l’onde acoustique suit deux trajets, pour que la trajectoire de la source soit estimable, seule une hypothèse sur la profondeur de la source est suffisante.

Nous avons ensuite évalué les performances empiriques de l’estimateur choisi et nous avons conclu qu’il est efficace lorsque les trajets sont générés avec la modélisation en lignes droites. Lorsque les trajets sont générés avec le logiciel de lancer de rayons, l’estimateur n’est pas efficace mais ses performances en terme de biais sont opérationnellement acceptables. Nous avons enfin proposé une méthode permettant de déterminer la nature du trajet (ou des trajets) suivi par l’onde acoustique dans le cas où l’observateur

7. Non présentés dans ce manuscrit.

n'a pas de connaissance *a priori* sur celle-ci.

Dans le chapitre suivant, nous étudions le problème de la trajectographie passive par des antennes de flanc.

Trajectographie passive à partir d'antennes de flanc

Ce chapitre est dédié à la trajectographie à partir de mesures collectées par les antennes de flanc. Ces antennes délivrent deux types de mesures : les différences de temps d'arrivée et le cosinus d'élévation.

L'observateur est un sous-marin uniquement équipé de trois antennes de flanc sur chacun de ses bords. Les antennes d'un même bord sont « bafflées » de sorte qu'elles ne peuvent pas détecter une source se trouvant dans l'autre bord. Pour un bord donné, le centre acoustique de l'antenne la plus en avant du sous-marin est nommé O_1 , celui de l'antenne centrale O_2 et celui de l'antenne la plus en arrière O_3 . Tous les centres acoustiques se trouvent à la même immersion ($z_{O_1} = z_{O_2} = z_{O_3} = z_O$) et sont espacés deux à deux d'une distance d . Nous supposons que chaque antenne capte des ondes acoustiques s'étant propagées suivant un même trajet ($\zeta_{O_1T} = \zeta_{O_2T} = \zeta_{O_3T} = \zeta_{OT}$).

Ce chapitre est découpé en deux sections.

- Tout d'abord, nous considérons que les antennes de flanc délivrent chacune une ou deux mesures de cosinus d'élévation, selon deux cas. Dans le premier cas, l'onde émise par la source suit un seul trajet et dans le second, elle suit deux trajets.
- Ensuite, nous considérons que les antennes de flanc délivrent pour un trajet détecté deux mesures de différence de temps d'arrivée et une mesure de cosinus d'élévation. Les deux cas de la section précédente sont visités : d'abord l'onde se propage suivant un seul trajet, puis elle se propage suivant deux trajets.

4.1 Les antennes délivrent uniquement des mesures de cosinus d'élévation

Après formation de voies et extraction une ou deux pistes de cosinus d'élévation sont disponibles pour chaque antenne.

4.1.1 L'onde se propage suivant un unique trajet

Nous considérons qu'une source émet une onde acoustique qui se propage en ne suivant qu'un unique trajet. Les antennes de flanc détectent cette onde et délivrent chacune une mesure de cosinus d'élévation bruitée. Les mesures non bruitées à l'instant t sont

$$\begin{cases} s_1(t) = \cos(\phi_{O_1T}(t)) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{O_1T}(t)} \\ s_2(t) = \cos(\phi_{O_2T}(t)) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{O_2T}(t)} \\ s_3(t) = \cos(\phi_{O_3T}(t)) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{O_3T}(t)} \end{cases} \quad (4.1)$$

avec :

$$\zeta_{OT} = -\delta(-1)^{n_s - n_b} (2n_b P + \delta((-1)^{n_s - n_b} z_O - z_T));$$

et (4.2)

$$R_{O_iT}(t) = \sqrt{(x_T(t) - x_{O_i}(t))^2 + (y_T(t) - y_{O_i}(t))^2 + \zeta_{OT}^2}$$

Les expressions des mesures bruitées sont à l'instant $t_k = (k - 1)\Delta t$

$$\begin{cases} m_1(t_k) = s_1(t_k) + \varepsilon_{\cos_\phi,1}(t_k); \\ m_2(t_k) = s_2(t_k) + \varepsilon_{\cos_\phi,2}(t_k); \\ m_3(t_k) = s_3(t_k) + \varepsilon_{\cos_\phi,3}(t_k). \end{cases} \quad (4.3)$$

où $\varepsilon_{\cos_\phi,i}$ est un bruit blanc d'écart type $\sigma_{\cos(\phi)} = 1.7 \times 10^{-2}$.

Nous montrons tout d'abord que la trajectoire de la source est observable dans presque¹ toutes les situations uniquement à partir de trois mesures de cosinus d'élévation. Nous donnons l'énoncé du théorème décrivant l'observabilité ainsi que sa démonstration. Nous nous intéressons ensuite aux performances asymptotiques afin de nous assurer que la trajectoire de la source est estimable.

4.1.1.1 Analyse de l'observabilité

Théorème 4.

Soient trois antennes linéaires verticales appartenant à un même plan vertical et dont les centres acoustiques sont alignés et contenus dans un même plan horizontal de profondeur connue. Soit une source ponctuelle se déplaçant en MRU dans un plan horizontal de profondeur inconnue, émettant une onde acoustique empruntant un trajet connu. La trajectoire de la source est observable, à partir du continuum des cosinus d'élévation si la source ne se déplace pas dans le plan horizontal contenant les centres acoustiques des antennes.

Préambule : dans la démonstration qui va suivre, nous nous plaçons dans le cas particulier où le cap de l'observateur est égal à 90° . Ceci est obtenu par une rotation *ad hoc* de l'ensemble du scénario. Cette considération simplifie grandement les calculs, sans perte de généralité.

1. Nous précisons le sens de « presque » dans le théorème 4.

Démonstration. Nous montrons que la position de la source à n'importe quel instant est observable. Comme nous nous intéressons seulement à la position de la source à un instant quelconque, nous ne faisons donc pas apparaître le paramètre temporel.

Une source, non colocalisée avec les antennes, émet en continu une onde acoustique se propageant jusqu'aux antennes suivant un trajet unique et connu.

Chaque antenne mesure le cosinus d'élévation de l'onde acoustique lui parvenant. La source se trouve donc à l'intersection de trois cônes (cf. figure 4.1). Ces cônes sont tous orientés suivant la direction z , leurs sommets respectifs sont les centres acoustiques des antennes. Les angles d'ouverture de chaque cône sont les angles d'élévation.

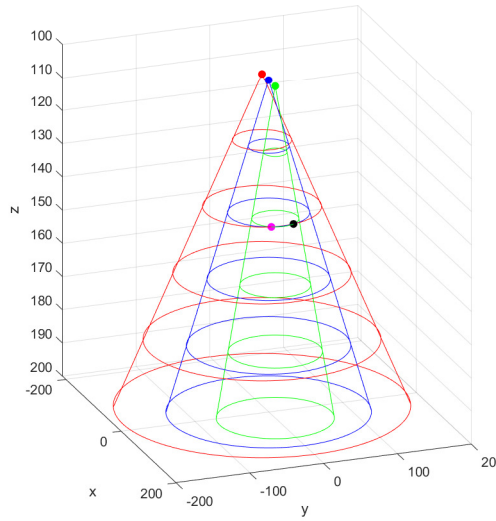


FIGURE 4.1 – Intersection des trois cônes : en rouge, en bleu et vert les positions respectivement des centres des antennes ainsi que leurs cônes d'ambiguïtés; en noir et en magenta les intersections des trois cônes (dont l'une est la position de la source).

Soit (x, y, z) les coordonnées d'un point dans l'intersection des trois cônes. Ces coordonnées sont solutions des équations (4.4), (4.5) et (4.6).

$$(x - d)^2 + y^2 - z^2 \tan^2(\phi_{O_1T}) = 0; \quad (4.4)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2(\phi_{O_2T}) = 0; \quad (4.5)$$

$$(x + d)^2 + y^2 - z^2 \tan^2(\phi_{O_3T}) = 0. \quad (4.6)$$

Notons que $(x_{OT}, y_{OT}, \zeta_{OT})$ est aussi solution de ce système.

Intéressons-nous tout d'abord au cas où la source se trouve dans le même plan que le centre acoustique des antennes et que l'onde émise se propage suivant un trajet direct. Dans ce cas, les cônes sont des plans horizontaux de même profondeur et leur intersection est le plan d'équation $z = 0$. La trajectoire de la source n'est donc pas observable.

Plaçons-nous maintenant dans les autres cas.

Retranchons (4.5) à (4.6) et retranchons (4.5) à (4.4).

$$2dx + d^2 - z^2[\tan^2(\phi_{O_3T}) - \tan^2(\phi_{O_2T})] = 0; \quad (4.7)$$

$$-2dx + d^2 - z^2[\tan^2(\phi_{O_1T}) - \tan^2(\phi_{O_2T})] = 0. \quad (4.8)$$

Puis sommons (4.7) et (4.8).

$$2d^2 - z^2[\tan^2(\phi_{O_1T}) + \tan^2(\phi_{O_3T}) - 2\tan^2(\phi_{O_2T})] = 0. \quad (4.9)$$

Puisque la source est à l'intersection de ces trois cônes, le triplet $(x_{OT}, y_{OT}, \zeta_{OT})$ vérifie 4.9. Par conséquent, $\tan^2(\phi_{O_1T}) + \tan^2(\phi_{O_3T}) - 2\tan^2(\phi_{O_2T})$ est une quantité positive.

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{\frac{2d^2}{\tan^2(\phi_{O_1T}) + \tan^2(\phi_{O_3T}) - 2\tan^2(\phi_{O_2T})}} \\ &= \pm \zeta_{OT}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dans le cas où le trajet de l'onde est direct, l'ambiguïté sur le signe de z est levée par l'étude du signe des cosinus d'élévation (si $\cos(\phi) > 0$ alors $z = \zeta_{OT}$ et si $\cos(\phi) < 0$ alors $z = -\zeta_{OT}$). Dans les autres cas, la connaissance de la nature du trajet de l'onde acoustique nous permet de lever l'ambiguïté.

Remplaçons z^2 par ζ_{OT}^2 dans (4.9).

$$-2dx + a^2 - \zeta_{OT}^2(\tan^2(\phi_{O_1T}) - \tan^2(\phi_{O_2T})) = 0. \quad (4.11)$$

Cette équation du 1^{er} degré (dont x_{OT} est solution) nous permet de conclure que $x = x_{OT}$

Enfin par (4.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} y^2 &= y_{OT}^2; \\ \Leftrightarrow y &= \pm y_{OT}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'écran acoustique entre les antennes de flanc bâbord et tribord lève l'ambiguïté sur le signe de y : selon que la source se trouve à bâbord ou à tribord, ce seront les antennes placées sur le côté correspondant qui capteront les ondes acoustiques.

Nous venons donc de montrer que la source se trouve à l'intersection de trois cônes et que cette intersection est réduite à deux points (si la source ne se trouve pas dans le plan horizontal contenant le centre acoustique des antennes et que l'onde ne se propage pas suivant un trajet direct). Parmi ces solutions, une est rejetée, car n'étant pas du côté où les ondes acoustiques sont captées. La position de la source, à chaque instant, est donc observable. Les vitesses \dot{x}_T et \dot{y}_T sont aussi observables, puisque la source se déplace en MRU.

□

4.1.1.2 Évaluation des performances asymptotiques

Nous nous intéressons aux performances asymptotiques de l'estimateur sur deux scénarios. Dans les deux scénarios, les trois antennes de flanc se déplacent en MRU à la vitesse de 6m/s suivant un cap de 45°. Les antennes sont toutes à la même immersion $z_O = 200\text{m}$ et sont espacées deux à deux de $d = 24\text{m}$. La seconde antenne de flanc débute sa course en $x_{O_2} = 0\text{m}$ et en $y_{O_2} = 0\text{m}$. Les mesures des antennes de flanc sont collectées toutes les 4s pendant 200s. Les paramètres des sources sont les suivants :

- Dans le premier scénario, la source émet une onde se propageant suivant des trajets réfléchis sur le fond puis sur la surface (trajet (1, 1, 1)). Elle se trouve initialement en $x_T = -4200\text{m}$ et en $y_T = -6500\text{m}$ à l'immersion $z_T = 50\text{m}$. Elle se déplace en MRU à la vitesse de 3m/s suivant le cap -30° .
- Dans le second scénario la source émet une onde se propageant suivant des trajets directs. Elle se trouve initialement en $x_T = 3400\text{m}$ et en $y_T = 7300\text{m}$ à l'immersion $z_T = 300\text{m}$. Elle se déplace en MRU à la vitesse de 3m/s suivant le cap -123° .

Le fond marin se situe à 4830m de profondeur.

Pour le premier scénario les performances asymptotiques sont :

$$\underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (1.27 \times 10^5 \text{m}, 1.48 \times 10^5 \text{m}, 2.56 \times 10^5 \text{m}, 168 \text{m/s}, 166 \text{m/s})^T,$$

Pour le second scénario les performances asymptotiques sont :

$$\underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (1.32 \times 10^6 \text{m}, 6.84 \times 10^6 \text{m}, 7.79 \times 10^4 \text{m}, 6.24 \times 10^3 \text{m/s}, 557 \text{m/s})^T.$$

Le calcul des performances asymptotiques de l'estimateur sur ces scénarios nous permet de faire la remarque suivante : lorsque les antennes de flanc délivrent des mesures de cosinus d'élévation, la trajectoire de la source n'est pas estimable bien qu'elle soit observable.

Une moyen pour rendre la trajectoire de la source estimable serait la prise en compte de nouvelles mesures ; c'est ce que nous allons étudier dans la section suivante.

4.1.2 L'onde se propage suivant deux trajets

L'onde acoustique émise par la source se propage suivant deux trajets distincts et connus. Les antennes de flanc délivrent chacune deux mesures de cosinus d'élévation. Nous utilisons ici le symbole tilde afin de différencier les termes relatifs au premier trajet de ceux relatifs au second. Si l'on pose i le numéro d'une antenne flanc (i pouvant prendre les valeurs 1, 2 et 3), les expressions des mesures non bruitées délivrées par cette antenne sont

$$\begin{cases} s_i(t) = \cos(\phi_{O_i T}(t)) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{O_i T}(t)} \\ \tilde{s}_i(t) = \cos(\tilde{\phi}_{O_i T}(t)) = \frac{\tilde{\zeta}_{OT}}{\tilde{R}_{O_i T}(t)} \end{cases} ; \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3. \quad (4.13)$$

avec :

$$\zeta_{OT} = -\delta(-1)^{n_s - n_b} (2n_b P + \delta((-1)^{n_s - n_b} z_O - z_T));$$

et

$$\tilde{\zeta}_{OT} = -\tilde{\delta}(-1)^{\tilde{n}_s - \tilde{n}_b} (2\tilde{n}_b P + \tilde{\delta}((-1)^{\tilde{n}_s - \tilde{n}_b} z_O - z_T)).$$
(4.14)

Chaque mesure collectée par les antennes sont corrompues par un bruit blanc gaussien d'écart type $\sigma_{\cos(\phi)} = 0.1$, quel que soit le trajet suivi par l'onde acoustique. Les expressions des mesures bruitées sont

$$\begin{cases} m_i(t_k) = s_i(t_k) + \varepsilon_{\cos\phi, i}(t_k); \\ \tilde{m}_i(t_k) = \tilde{s}_i(t_k) + \tilde{\varepsilon}_{\cos\phi, i}(t_k). \end{cases} ; \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3.$$
(4.15)

Nous énonçons tout d'abord le théorème de l'observabilité, puis nous nous intéressons aux performances asymptotiques de l'estimation.

4.1.2.1 Analyse de l'observabilité

Théorème 5.

Soient trois antennes linéaires verticales appartenant au même plan vertical et dont les centres acoustiques sont alignés et contenus dans un même plan horizontal de profondeur connue. Soit une source ponctuelle se déplaçant en MRU dans un plan horizontal de profondeur inconnue, émettant une onde acoustique empruntant deux trajets distincts et connus. Alors la trajectoire de la source est observable, à partir du continuum de cosinus d'élévation des deux trajets.

Dans la démonstration du théorème 5 qui suit, nous avons besoin du lemme présenté en annexe D placé à la fin de ce chapitre.

Démonstration. Considérons tout d'abord une seule antenne linéaire verticale dont l'immersion du centre acoustique est connue. Une source, non colocalisée avec l'antenne, émet en continu une onde acoustique se propageant suivant deux trajets distincts et connus jusqu'aux antennes (cf. figure 4.2).

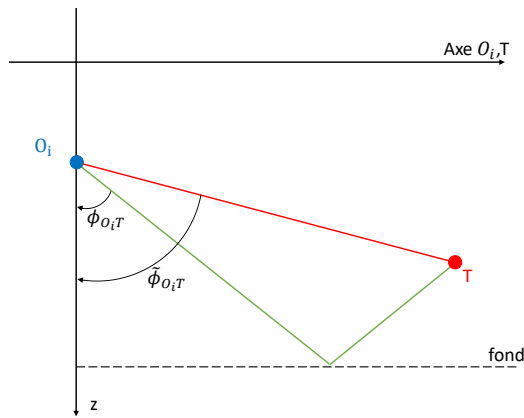


FIGURE 4.2 – Exemples de trajets suivis par l'onde acoustique émise par une source.

L'antenne de flanc i mesure le cosinus d'élévation des deux trajets suivis par l'onde acoustique lui parvenant. Prenons tout d'abord la tangente des angles d'élévation des deux trajets

$$\begin{aligned}\tan(\phi_{O_iT}) &= \frac{\sin(\phi_{O_iT})}{\cos(\phi_{O_iT})} = \frac{\rho_{O_iT}}{\zeta_{OT}}; \\ \tan(\tilde{\phi}_{O_iT}) &= \frac{\sin(\tilde{\phi}_{O_iT})}{\cos(\tilde{\phi}_{O_iT})} = \frac{\rho_{O_iT}}{\tilde{\zeta}_{OT}}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Nous pouvons écrire les équations (4.14) sous la forme $\zeta_{OT} = az_T + b$ et $\tilde{\zeta}_{OT} = \tilde{a}z_T + \tilde{b}$, avec :

$$\begin{cases} a = (-1)^{n_s - n_b} \\ \tilde{a} = (-1)^{\tilde{n}_s - \tilde{n}_b} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b = -2a\delta n_b P - z_O \\ \tilde{b} = -2\tilde{a}\tilde{\delta}\tilde{n}_b P - z_O \end{cases}.\tag{4.17}$$

L'équation (4.16) devient

$$\begin{aligned}(4.16) &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{O_iT} \cos(\phi_{O_iT}) = a \sin(\phi_{O_iT}) z_T + b \sin(\phi_{O_iT}); \\ \rho_{O_iT} \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) = \tilde{a} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) z_T + \tilde{b} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos(\phi_{O_iT}) & -a \sin(\phi_{O_iT}) \\ \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) & -\tilde{a} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{O_iT} \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \sin(\phi_{O_iT}) \\ \tilde{b} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Posons $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_{O_iT}) & -a \sin(\phi_{O_iT}) \\ \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) & -\tilde{a} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \end{bmatrix}$. Si \mathbf{M} est inversible, les paramètres ρ_{O_iT} et z_T sont obtenus par

$$\begin{pmatrix} \rho_{O_iT} \\ z_T \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} b \sin(\phi_{O_iT}) \\ \tilde{b} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \end{pmatrix}.\tag{4.19}$$

Vérifions maintenant que \mathbf{M} est inversible. Pour cela, calculons son déterminant

$$\det(\mathbf{M}) = a \sin(\phi_{O_iT}) \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) - \tilde{a} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \cos(\phi_{O_iT}).\tag{4.20}$$

Les termes a et \tilde{a} sont tous deux égaux à ± 1 quel que soit le trajet suivi par l'onde acoustique. Nous devons donc tester seulement les quatre cas suivants

$$\begin{cases} a = 1 \text{ et } \tilde{a} = 1 : \det(\mathbf{M}) = \sin(\phi_{O_iT}) \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) - \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \cos(\phi_{O_iT}) = \sin(\phi_{O_iT} - \tilde{\phi}_{O_iT}); \\ a = -1 \text{ et } \tilde{a} = 1 : \det(\mathbf{M}) = -\sin(\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT}); \\ a = 1 \text{ et } \tilde{a} = -1 : \det(\mathbf{M}) = \sin(\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT}); \\ a = -1 \text{ et } \tilde{a} = -1 : \det(\mathbf{M}) = -\sin(\phi_{O_iT} - \tilde{\phi}_{O_iT}); \end{cases}\tag{4.21}$$

L'étude des quatre cas présentés en 4.21 se ramène à l'étude des cas $\det(\mathbf{M}) = \sin(\phi_{O_iT} - \tilde{\phi}_{O_iT})$ et $\det(\mathbf{M}) = \sin(\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT})$. Rappelons tout d'abord que les angles ϕ_{O_iT} et $\tilde{\phi}_{O_iT}$ appartiennent tous deux à l'intervalle $[0; \pi]$. De plus, les trajets suivis par l'onde acoustique étant distincts, nous avons $\phi_{O_iT} \neq \tilde{\phi}_{O_iT}$.

- Cas $\det(\mathbf{M}) = \sin(\phi_{O_iT} - \tilde{\phi}_{O_iT})$:

Nous rencontrons ce cas lorsque les sommes du nombre de réflexions (surface et fond) pour les deux trajets suivis par l'onde sont toutes les deux paires ou toutes les deux impaires.

Nous devons vérifier si l'égalité suivante peut être satisfaite dans un scénario.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) = 0 &\Leftrightarrow \sin(\phi_{O_iT} - \tilde{\phi}_{O_iT}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi_{O_iT} - \tilde{\phi}_{O_iT} = k\pi; k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.22)$$

— Lorsque la source ne se trouve pas à la verticale de l'antenne, nous avons $0 < \phi_{O_iT} < \pi$ et $0 < \tilde{\phi}_{O_iT} < \pi$. Comme $\phi_{O_iT} \neq \tilde{\phi}_{O_iT}$, l'égalité (4.22) n'est donc jamais vérifiée.

— Lorsque la source se trouve à la verticale de l'antenne, si l'un des trajets arrive par le bas de l'antenne et que l'autre arrive par le haut, alors l'égalité (4.22) est vérifiée. Cette situation est irréaliste, nous l'écartons.

- Cas $\det(\mathbf{M}) = \sin(\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT})$:

Nous rencontrons ce cas lorsque la somme du nombre de réflexions (surface et fond) de l'un des trajets suivis par l'onde est paire et que la somme du nombre de réflexions de l'autre trajet est impaire (et inversement).

Nous devons vérifier si l'égalité suivante peut être satisfaite dans un scénario.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) = 0 &\Leftrightarrow \sin(\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} = k\pi; k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.23)$$

— Lorsque la source se trouve à la verticale de l'antenne, nous retrouvons la situation dégénérée du précédent cas. Nous pouvons donc l'écarter d'office.

— Lorsque la source ne se trouve pas à la verticale de l'antenne, nous avons $0 < \phi_{O_iT} < \pi$ et $0 < \tilde{\phi}_{O_iT} < \pi$ et donc $0 < \phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} < 2\pi$. Le lemme 1 (voir annexe D) nous garantit que $\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} = \pi$. L'égalité 4.23 n'est donc jamais vérifiée.

Le déterminant de la matrice \mathbf{M} n'est jamais nul (hormis dans des situations dégénérées). Nous obtenons donc de l'équation (4.19) l'expression de l'immersion de la source ainsi que l'expression de la distance dans le plan horizontal entre la source et l'antenne.

$$\begin{cases} \rho_{O_iT} = \frac{\sin(\phi_{O_iT}) \sin(\tilde{\phi}_{O_iT})(a\tilde{b} - a\tilde{b})}{a \sin(\phi_{O_iT}) \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) - \tilde{a} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \cos(\phi_{O_iT})} \\ z_T = \frac{\tilde{b} \sin(\phi_{O_iT}) \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) - b \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \cos(\phi_{O_iT})}{a \sin(\phi_{O_iT}) \cos(\tilde{\phi}_{O_iT}) - \tilde{a} \sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \cos(\phi_{O_iT})} \end{cases} \quad (4.24)$$

Les paramètres ρ_{O_iT} et z_T sont donc observables uniquement à partir des deux mesures de cosinus d'élévation délivrées par une antenne de flanc.

Considérons maintenant trois antennes linéaires verticales contenues dans un même plan vertical et dont les centres acoustiques sont alignés et contenus dans un même plan horizontal. Le problème de l'observabilité de la position de la source se ramène à un problème d'intersection de trois cercles. En effet les distances ρ_{O_iT} ($i \in 1; 2; 3$) étant maintenant connues par 4.24, la source se trouve donc à l'intersection de trois cercles dont les centres respectifs sont les centres acoustiques des antennes et les

rayons sont les distances $\rho_{O_i T}$.

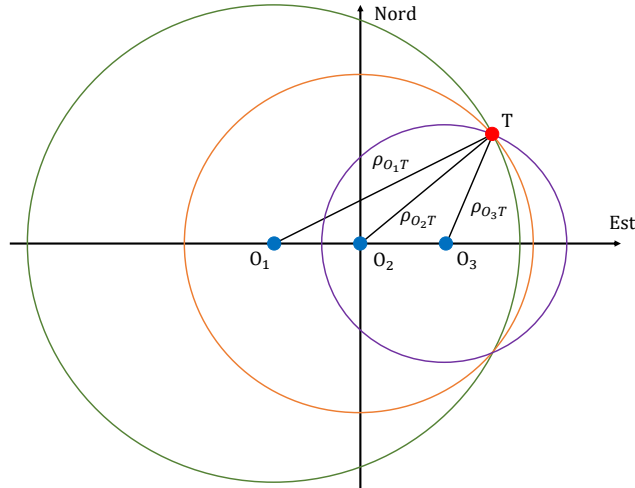


FIGURE 4.3 – Intersection des trois cercles sur lesquels se trouve la source.

D'après les propositions III et X données dans [Peyrard, 1804], trois cercles possédant une intersection commune et dont les centres sont alignés se coupent en deux points, au plus. L'intersection commune des cercles est la position horizontale de la source d'intérêt à l'instant considéré et l'autre est son symétrique par rapport à la droite passant par les centres acoustiques des antennes. Le second point d'intersection (lorsqu'il existe) ne se trouve pas du côté où sont captées les ondes acoustiques, il peut donc être rejeté.

Les positions x_T , y_T et z_T de la source sont observables à chaque instant, les composantes \dot{x}_T et \dot{y}_T du vecteur vitesse de la source le sont donc également.

□

Remarque 19.

Compte tenu de la distance au centre acoustique de O_2 à laquelle une source se trouve (supposée largement supérieure à la largeur du sous-marin), nous avons assimilé le sous-marin à un objet sans épaisseur. Une source se déplaçant dans le plan vertical contenant le sous-marin est supposée détectée par le triplet d'antennes des deux bords.

4.1.2.2 Évaluation des performances asymptotiques

Nous reprenons les scénarios présentés en 4.1.1.2. Nous considérons ici, en plus des trajets donnés à la section 4.1.1.2, que les ondes se propagent suivant les trajets :

- $(-1, 3, 2)^2$ dans le premier scénario,
- et réfléchi-fond dans le second scénario.

Les performances asymptotiques calculées sont :

- pour le premier scénario $\underline{\sigma}_{\mathbf{BCR}} = (8616\text{m}, 8973\text{m}, 80.4\text{m}, 13.4\text{m/s}, 11.2\text{m/s})^T$.
- pour le second scénario $\underline{\sigma}_{\mathbf{BCR}} = (1.49 \times 10^4\text{m}, 3.92 \times 10^3\text{m}, 10.95\text{m}, 12.44\text{m/s}, 13.52\text{m/s})^T$

Nous voyons ici que seule l'immersion de la source est estimable pour les deux scénarios. La trajectoire de la source n'est donc pas estimable. Nous en concluons que bénéficier d'une seconde mesure de

2. Trajet initialement orienté vers la surface et qui subit trois réflexions sur la surface et deux réflexions sur le fond.

cosinus d'élévation pour chaque antenne permet de rendre estimable l'immersion de la source, mais n'est pas suffisant pour rendre les autres composantes du vecteur d'état estimables.

Dans la section suivante, nous exploitons conjointement les trois antennes verticales lorsqu'elles détectent un ou deux trajets d'une onde émanant de la source : les différences des temps d'arrivée entre antennes (TDOA) sont supposées disponibles ainsi que les cosinus d'élévation.

4.2 Les antennes délivrent des mesures de TDOA et des mesures de cosinus d'élévation

Deux intercorrélations sont réalisées sur les signaux bruts délivrés par chacune des antennes de flanc. Les intercorrélations sont prises entre la première et la seconde antenne et entre la seconde et la troisième antenne; elles permettent d'obtenir deux mesures de différences de temps d'arrivée. La seconde antenne de flanc fournit une mesure de cosinus d'élévation³ (voir figure 4.4).

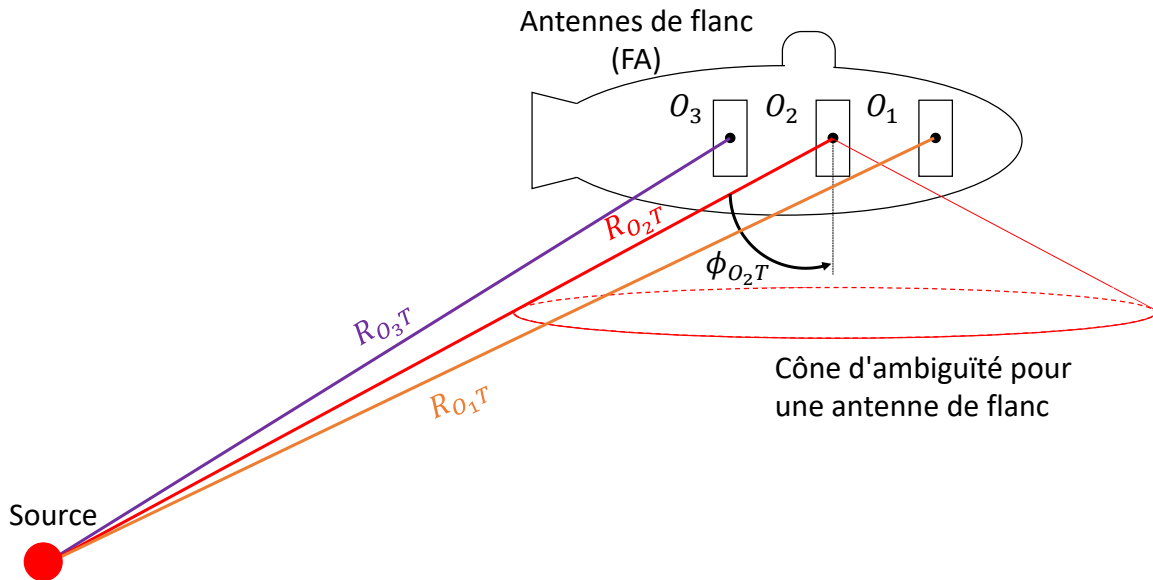


FIGURE 4.4 – Le sous-marin, ses antennes de flanc et la source émettant une onde empruntant le trajet direct.

4.2.1 L'onde se propage suivant un unique trajet

Les antennes de flanc délivrent trois mesures à chaque instant t_k , deux mesures de différences de temps d'arrivée et une mesure de cosinus d'élévation. Les mesures non bruitées ont pour expressions⁴

$$\begin{cases} s_1(t) = \tau_{12}(t) = \frac{1}{c}(R_{O_2T}(t) - R_{O_1T}(t)); & (4.25a) \\ s_2(t) = \tau_{23}(t) = \frac{1}{c}(R_{O_3T}(t) - R_{O_2T}(t)); & (4.25b) \\ s_3(t) = \cos(\phi_{O_2T}(t)) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{O_2T}(t)}. & (4.25c) \end{cases}$$

3. Une autre configuration est la suivante : chaque antenne délivre une mesure de cosinus d'élévation, puis ces trois mesures sont moyennées pour n'en fournir qu'une seule plus précise.

4. Nous reprenons ici la modélisation simpliste des différences de temps d'arrivée proposée en 2.2.2.

Les mesures (4.25a) à (4.25c) sont corrompues par un bruit blanc gaussien d'écart type $\sigma_{\cos(\phi)} = 0.017$ pour la mesure de cosinus d'élévation et $\sigma_\tau = \sqrt{2.36} \times 10^{-5}$ s pour les mesures de TDOA. Les expressions des mesures bruitées sont

$$\begin{cases} m_1(t_k) = s_1(t_k) + \varsigma_{\tau_1,k}; & (4.26a) \\ m_2(t_k) = s_2(t_k) + \varsigma_{\tau_2,k}; & (4.26b) \\ m_3(t_k) = s_3(t_k) + \varepsilon_k. & (4.26c) \end{cases}$$

Les deux mesures de TDOA ne sont pas indépendantes (voir 2.2.3). Nous utilisons donc la matrice de variance-covariance « pessimiste » des mesures de TDOA donnée par

$$\mathbf{R} = \sigma_\tau^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

L'analyse de l'observabilité est tout d'abord réalisée, suivie de celle des performances asymptotiques.

4.2.1.1 Analyse de l'observabilité

Proposition 3.

Une source en MRU se déplace sur la droite (O_1, O_3) privée du segment $[O_1, O_3]$ si et seulement si $\tau_{12}(t) = \tau_{23}(t)$. Le trajet parcouru par l'onde est le trajet direct.

Démonstration. Soit une source S (S pouvant tout aussi bien être la source T que son image) se déplaçant en MRU et dont les coordonnées cartésiennes de son centre acoustique sont à tout instant t

$$P_S(t) = \begin{pmatrix} x_S(t) = x_S(0) + t\dot{x}_S \\ y_S(t) = y_S(0) + t\dot{y}_S \\ z_S \end{pmatrix}.$$

Soient trois antennes de flanc immobiles O_1, O_2 et O_3 dont les centres acoustiques respectifs ont pour coordonnées cartésiennes

$$P_{O_1} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix}, P_{O_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix} \text{ et } P_{O_3} = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix}.$$

Les différences de temps d'arrivée $\tau_{12}(t)$ et $\tau_{23}(t)$ sont égales à

$$\begin{cases} \tau_{12}(t) = \frac{1}{c} (R_2(t) - R_1(t)) \\ \tau_{23}(t) = \frac{1}{c} (R_3(t) - R_2(t)) \end{cases}.$$

avec :

$$\begin{aligned} - R_1(t) &= \sqrt{(x_S(t) - d)^2 + \lambda(t)}, \\ - R_2(t) &= \sqrt{x_S^2(t) + \lambda(t)}, \\ - R_3(t) &= \sqrt{(x_S(t) + d)^2 + \lambda(t)}, \end{aligned}$$

— et $\lambda(t) = y_S^2(t) + (z_S - z_O)^2$.

Si la source S ne se trouve pas sur le segment $[O_1, O_3]$, alors le triplet (O_1, S, O_3) forme un triangle dont la droite (S, O_2) et la médiane du côté (O_1, O_3) . D'après le théorème de la médiane, nous avons l'égalité suivante qui est vérifiée quel que soit t

$$2R_2^2(t) = R_3^2(t) + R_1^2(t) - 2d^2. \quad (4.28)$$

Si $\tau_{12}(t) = \tau_{23}(t)$, qui est équivalent à

$$2R_2(t) = R_3(t) + R_1(t), \quad (4.29)$$

alors

$$4R_2^2(t) = (R_3(t) + R_1(t))^2. \quad (4.30)$$

Nous reportons l'expression $R_2^2(t)$ donnée par 4.28 dans 4.30 :

$$\begin{aligned} 4.30 &\Leftrightarrow 2R_3^2(t) + 2R_1^2(t) - 4d^2 = (R_3(t) + R_1(t))^2, \\ &\Leftrightarrow R_3^2(t) + R_1^2(t) - 4d^2 = 2R_3(t)R_1(t), \\ &\Leftrightarrow R_2^2(t) - d^2 = R_3(t)R_1(t), \\ &\Leftrightarrow x_S^2(t) + \lambda(t) - d^2 = \sqrt{[(x_S(t) - d)^2 + \lambda(t)][(x_S(t) + d)^2 + \lambda(t)]}, \\ &\Rightarrow (x_S^2(t) + \lambda(t) - d^2)^2 = [(x_S(t) - d)^2 + \lambda(t)][(x_S(t) + d)^2 + \lambda(t)], \\ &\Leftrightarrow \lambda(t)d^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

L'espacement entre centre acoustique d étant différent de zéro, l'équation 4.31 implique que $\lambda(t) = 0 \forall t$ et donc que $y_S(t) = 0 \forall t$ et $z_S = z_O$. La position de la source à tout instant t est donc

$$P_S(t) = \begin{pmatrix} x_S(0) + t\dot{x}_S \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix}.$$

La source S n'est donc pas l'image de T , mais T elle-même. Par conséquent, le trajet de l'onde est direct.

Réciproquement, si $P_T(t) = (x_T(0) + t\dot{x}_T \quad 0 \quad z_O)^T$, assurons nous que l'égalité $2R_2(t) = R_3(t) + R_1(t)$ est vérifiée pour tout t , *i.e.*

$$2|x_T(0) + t\dot{x}_T| = |x_T(0) - d + t\dot{x}_T| + |x_T(0) + d + t\dot{x}_T| \quad (4.32)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- $\forall t \in [0; T], x_T(0) + t\dot{x}_T \notin]-d; d[$,
- si $x_T(0) < 0$, alors $x_T(0) + d + t\dot{x}_T < 0$,
- si $x_T(0) > 0$, alors $x_T(0) - d + t\dot{x}_T > 0$.

Premier cas : $x_T(0) < 0$

$$\begin{aligned}
4.32 &\Leftrightarrow -2(x_T(0) + t\dot{x}_T) = -x_T(0) + d - t\dot{x}_T - x_T(0) - d - t\dot{x}_T, \\
&\Leftrightarrow x_T(0) + t\dot{x}_T = x_T(0) + t\dot{x}_T.
\end{aligned}$$

L'égalité 4.29 est vérifiée pour $x_T(0) < 0$.

Premier cas : $x_T(0) > 0$

$$\begin{aligned}
4.32 &\Leftrightarrow 2(x_T(0) + t\dot{x}_T) = x_T(0) - d + t\dot{x}_T + x_T(0) + d + t\dot{x}_T, \\
&\Leftrightarrow x_T(0) + t\dot{x}_T = x_T(0) + t\dot{x}_T.
\end{aligned}$$

L'égalité 4.29 est vérifiée pour $x_T(0) > 0$.

□

Théorème 6.

Soient trois antennes linéaires verticales appartenant au même plan vertical et dont les centres acoustiques sont alignés et contenus dans un même plan horizontal de profondeur connue. Soit une source ponctuelle se déplaçant en MRU dans un plan horizontal de profondeur inconnue, émettant une onde acoustique empruntant un trajet connu. La trajectoire de la source est observable, à partir du continuum des cosinus d'élévation et des deux mesures de TDOA si et seulement si la source ne se déplace pas sur la droite contenant les centres acoustiques des antennes et l'onde acoustique émise ne suit pas un trajet direct.

Dans la démonstration du théorème qui suit, nous nous intéressons à la position de la source à un instant quelconque. Nous ne faisons donc pas apparaître le paramètre du temps dans les équations. Nous nous plaçons dans la même situation particulière que celle du théorème 4 (le cap de l'observateur est égal à 90°).

Démonstration. Une source, non colocalisée avec les antennes, émet en continu une onde acoustique se propageant jusqu'aux antennes suivant un trajet unique et connu.

La démonstration est réalisée en deux temps. Tout d'abord, nous montrons que la distance R_{O_2T} est observable dans presque toutes les situations uniquement à partir des mesures de différences de temps d'arrivée. Nous montrons ensuite que les composantes de la position de la source sont observables grâce aux mesures de cosinus d'élévation.

Commençons par calculer $c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2)$ et $c^2(\tau_{12}^2 - \tau_{23}^2)$.

$$\begin{aligned}
c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2) &= (R_{O_2T} - R_{O_1T})^2 + (R_{O_3T} - R_{O_2T})^2; \\
&= 2R_{O_2T}^2 + R_{O_1T}^2 + R_{O_3T}^2 - 2R_{O_2T}(R_{O_1T} + R_{O_3T}); \\
&= 2[2R_{O_2T}^2 + d^2 - R_{O_2T}(R_{O_1T} + R_{O_3T})].
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
c^2(\tau_{12}^2 - \tau_{23}^2) &= c^2(\tau_{12} - \tau_{23})(\tau_{12} + \tau_{23}); \\
&= c(2R_{O_2T} - R_{O_1T} - R_{O_3T})(\tau_{12} + \tau_{23}).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

La quantité $\tau_{12} + \tau_{23}$ peut être nulle.

Premier cas : $\tau_{12} + \tau_{23} = 0$.

Si $\tau_{12} + \tau_{23} = 0$, alors la source se trouve dans le plan vertical contenant la seconde antenne de flanc et perpendiculaire à la droite passant par les centres acoustiques des antennes. Dans ce cas, nous avons $R_{O_3T} = R_{O_1T}$ et $R_{O_1T}^2 = R_{O_2T}^2 + d^2$ (notons également que $\tau_{12} \neq 0$). L'équation 4.33 devient alors

$$\begin{aligned} 4.33 \Leftrightarrow c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2) &= 2(R_{O_2T} - R_{O_1T})^2; \\ &= 4[R_{O_2T}(R_{O_2T} - R_{O_1T})] + 2d^2; \\ &= 4c\tau_{12}R_{O_2T} + 2d^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Finalement, nous obtenons que

$$R_{O_2T} = \frac{c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2) - 2d^2}{4c\tau_{12}}. \quad (4.36)$$

Second cas : $\tau_{12} + \tau_{23} \neq 0$.

dans ce cas, l'équation (4.34) peut être mise sous la forme

$$R_{O_1T} + R_{O_3T} = 2R_{O_2T} - \frac{c(\tau_{12}^2 - \tau_{23}^2)}{(\tau_{12} + \tau_{23})}. \quad (4.37)$$

En remplaçant $R_{O_1T} + R_{O_3T}$ par le résultat de 4.37 dans l'équation 4.33, nous aboutissons à

$$\begin{aligned} (4.33) \Leftrightarrow c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2) &= 2(d^2 + R_{O_2T} \frac{c(\tau_{12}^2 - \tau_{23}^2)}{\tau_{12} + \tau_{23}}); \\ \Leftrightarrow c(\tau_{12} - \tau_{23})R_{O_2T} &= \frac{c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2) - 2d^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nous avons deux nouveaux sous-cas à traiter : le sous-cas $\tau_{12} - \tau_{23} = 0$ et le sous-cas $\tau_{12} - \tau_{23} \neq 0$.

Premier sous-cas : $\tau_{12} - \tau_{23} = 0$.

D'après la proposition 3, la source se trouve sur la droite passant par les centres acoustiques des antennes et l'onde acoustique se propage suivant un trajet direct. Dans cette configuration, nous avons $\tau_{12} = \tau_{23}$ et cette égalité prend la valeur :

- $-\frac{d}{c}$ si la source se trouve dans le demi-espace avant,
- $\frac{d}{c}$ si la source se trouve dans le demi-espace arrière.

La source se trouve donc soit sur la demi-droite $(O_3, O_2]$ privée de $[O_3, O_2]$ quand $\tau_{12} = \tau_{23} = \frac{d}{c}$, soit sur la demi-droite $[O_2, O_3)$ privée de $[O_2, O_1]$ quand $\tau_{12} = \tau_{23} = -\frac{d}{c}$ ⁵ (l'immersion de la source est donc observable).

Toutefois, toute autre source se trouvant sur la même demi-droite que la vraie source donne les mêmes mesures. La trajectoire de la source n'est donc pas observable.

5. Nous écartons d'office le cas irréaliste où la source se trouve entre les antennes de flanc.

Second sous-cas : $\tau_{12} - \tau_{23} \neq 0$.

Dans ce sous-cas l'équation 4.38 est équivalente à

$$(4.38) \Leftrightarrow R_{O_2T} = \frac{c^2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2) - 2d^2}{2c(\tau_{12} - \tau_{23})}. \quad (4.39)$$

En conclusion, la distance R_{O_2T} est observable dans presque toutes les situations (voir eq. 4.39 et eq. 4.36). Par l'équation 4.25c nous obtenons l'expression de ζ_{OT} .

$$(4.25c) \Leftrightarrow \zeta_{OT} = \cos(\phi_{O_2T})R_{O_2T}. \quad (4.40)$$

Lorsque la distance R_{O_2T} est observable, l'immersion relative ζ_{OT} est donc également observable. Le trajet suivi par l'onde acoustique étant connu, la profondeur z_T de la source est obtenue à partir de ζ_{OT} . Nous trouvons maintenant les expressions des distances ρ_{O_1T} et ρ_{O_3T} à partir des equations (4.25a) et (4.25c).

$$\begin{aligned} (4.25a) \Leftrightarrow R_{O_1T} &= R_{O_2T} - c\tau_{12}; \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\rho_{O_1T}^2 + \zeta_{OT}^2} = R_{O_2T} - c\tau_{12}; \\ &\Leftrightarrow \rho_{O_1T} = \sqrt{(R_{O_2T} - c\tau_{12})^2 - \zeta_{OT}^2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} (4.25c) \Leftrightarrow R_{O_3T} &= R_{O_2T} + c\tau_{23}; \\ &\Leftrightarrow \rho_{O_3T} = \sqrt{(R_{O_2T} + c\tau_{23})^2 - \zeta_{OT}^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Enfin, la distance ρ_{O_2T} est obtenue à partir du sinus de l'angle ϕ_{O_2T} .

$$\begin{aligned} \sin(\phi_{O_2T}) &= \frac{\rho_{O_2T}}{R_{O_2T}}; \\ &\Leftrightarrow \rho_{O_2T} = R_{O_2T} \sqrt{1 - \cos^2(\phi_{O_2T})}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La source se trouve donc à l'intersection de trois cercles qui ont pour rayons respectifs ρ_{O_1T} , ρ_{O_2T} et ρ_{O_3T} et qui sont respectivement centrés sur les centres acoustiques des antennes de flanc O_1 , O_2 et O_3 . Nous avons montré en 4.1.2.1 que l'intersection de trois cercles dont les centres sont alignés est composée de deux points correspondant à deux positions potentielles de la source, dont une est rejetée, car ne se trouvant pas du bord où les ondes sont captées.

□

4.2.1.2 Évaluation des performances asymptotiques

L'instant de référence choisi est t_K (t_K instant final), par conséquent le vecteur est

$$X_T = (x_T(t_K), y_T(t_K), z_T, \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T.$$

Les performances asymptotiques sont évaluées sur les scénarios présentés à la section 4.1.1.2 pour une onde acoustique se propageant suivant un trajet réfléchi-fond pour le premier scénario et suivant un trajet direct pour le second.

Pour le premier scénario (l'onde suit le trajet réfléchi-fond) :

$$— \underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (891.3\text{m}, 855.4\text{m}, 1566\text{m}, 1.04\text{m/s}, 1.23\text{m/s})^T,$$

Pour le second scénario (l'onde suit le trajet direct) :

$$— \underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (276.6\text{m}, 1056\text{m}, 23.38\text{m}, 0.92\text{m/s}, 0.45\text{m/s}).$$

Nous constatons ici que l'estimabilité de l'immersion de la source n'est pas garantie pour ce type de mesures (l'immersion est estimable pour le second scénario mais ne l'est pas pour le premier). Afin de la garantir quel que soit le scénario, nous choisissons de nous inspirer de ce que nous avons fait en 3.1. Nous fixons donc l'immersion de la source à une valeur z_{as} . Nous n'estimons plus le vecteur d'état complet, mais un vecteur d'état réduit $Y_T = (x_T(t_K), y_T(t_K), \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$.

Lorsque $z_{as} = 200\text{m}$, les performances asymptotiques deviennent :

Pour le premier scénario :

$$— \underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (60.4\text{m}, 61.3\text{m}, 0.43\text{m/s}, 0.46\text{m/s}).$$

Pour le second scénario :

$$— \underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (226.3\text{m}, 863.7\text{m}, 0.75\text{m/s}, 0.41\text{m/s}).$$

La trajectoire de la source est estimable lorsque nous supposons que son immersion est connue. Cependant, cela se fait au prix d'un biais sur les résultats d'estimation.

4.2.1.3 Estimation du vecteur d'état réduit lorsque le trajet est connu

Pour chaque scénario considéré, nous évaluons les performances empiriques du MLE de Y_T sur 500 simulations de Monte-Carlo. Le critère des moindres carrés pondérés est donné par (4.44).

$$C(Y_T) = \sum_{k=1}^K \left(\begin{bmatrix} m_1(t_k) \\ m_2(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1(t_k) \\ s_2(t_k) \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{R}^{-1} \left(\begin{bmatrix} m_1(t_k) \\ m_2(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1(t_k) \\ s_2(t_k) \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{\sigma_{\cos(\phi)}^2} \sum_{k=1}^K (m_3(t_k) - s_3(t_k))^2 \quad (4.44)$$

avec :

- $m_1(t_k)$, $m_2(t_k)$ et $m_3(t_k)$ les mesures corrompues par un bruit blanc gaussien (d'écart type σ_τ pour $m_1(t_k)$ et $m_2(t_k)$ et $\sigma_{\cos(\phi)}$ pour $m_3(t_k)$) de $s_1(t_k)$, $s_2(t_k)$ et $s_3(t_k)$, respectivement.
- \mathbf{R}^{-1} l'inverse de la matrice variance-covariance du bruit sur les mesures de TDOA.

L'estimation est réalisée sur les deux scénarios présentés à la section 4.1.1.2 pour des trajets droits et des trajets courbes. Pour le premier scénario, les trajets courbes sont des trajets réfléchi-fond et pour le second, ce sont des trajets réfractés vers le haut.

Premier scénario :

Les figures 4.5a et 4.5b présentent dans le plan horizontal les résultats d'estimation obtenus pour des trajets droits et courbes, respectivement. Sur ces figures sont représentés les estimés en rouge, la trajectoire de la source en noir (sa position initiale est symbolisée par un point), la trajectoire des antennes de flanc en magenta et bleu (leurs positions initiales sont symbolisées par des points) et l'ellipse de confiance à 90% en noir. Dans la suite de ce chapitre, ce sont ces codes de couleurs qui seront utilisés pour toutes les figures présentant des résultats d'estimation.

Concernant les écarts types empiriques des composantes du vecteur d'état, nous tirons la même conclusion sur l'estimation du vecteur d'état réduit que celle à laquelle nous avons abouti pour les mesures de la TA et pour une onde suivant le trajet réfléchi-fond (voir sous-section 3.2.2.2 du chapitre 3) :

- pour les deux modèles de propagation (droit ou courbe), les écarts types empiriques des composantes du vecteur d'état sont très proches des écarts types asymptotiques donnés par la **BCR**,
- pour les mesures générées par le logiciel de lancer de rayons, les écarts types empiriques sont inférieurs aux écarts types asymptotiques.

Comme attendu, la table 4.1 révèle un biais, biais qui est visible sur les figures 4.5. Cela se manifeste par les valeurs de NEES moyen qui sont en dehors de son intervalle de confiance (pour le trajet droit $\overline{NEES} = 111$ et pour le trajet courbe $\overline{NEES} = 289$).

TABLE 4.1 – Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état réduit sur le premier scénario pour un trajet réfléchi-fond.

trajet	Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} -4500\text{m} \\ -5980\text{m} \\ -1.5\text{m/s} \\ 2.5981\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -114.6\text{m} \\ -110.2\text{m} \\ -0.12\text{m/s} \\ 0.14\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60.4\text{m} \\ 61.3\text{m} \\ 0.43\text{m/s} \\ 0.46\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60.6\text{m} \\ 61.3\text{m} \\ 0.43\text{m/s} \\ 0.47\text{m/s} \end{pmatrix}$
Courbe		$\begin{pmatrix} -185.2\text{m} \\ -176.5\text{m} \\ -0.17\text{m/s} \\ 0.27\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 57.6\text{m} \\ 58.4\text{m} \\ 0.42\text{m/s} \\ 0.45\text{m/s} \end{pmatrix}$

Second scénario :

La figure 4.6 présente les estimés dans le plan horizontal.

Pour des trajets droits, la table 4.2 montre que l'estimateur est biaisé. Toutefois malgré ce biais, les écarts types empiriques des composantes du vecteur d'état sont très proches de ceux donnés par la **BCR**. Celui-ci se traduit par un NEES moyen très proche de son intervalle de confiance théorique mais en dehors de celui-ci ($\overline{NEES} = 4.42$ n'appartient pas à l'intervalle $[3.747; 4.253]$).

Il est à noter que pour des trajets courbes (donc des trajets réfractés), aucun estimé ne passe le test sur le critère. Ce résultat était prévisible. En effet, à la section 2.3.2 du chapitre 2, nous avons constaté un écart important entre le trajet direct et le trajet réfracté. Afin de pouvoir analyser le comportement de notre estimateur, nous évaluons les performances empiriques sur tous les estimés

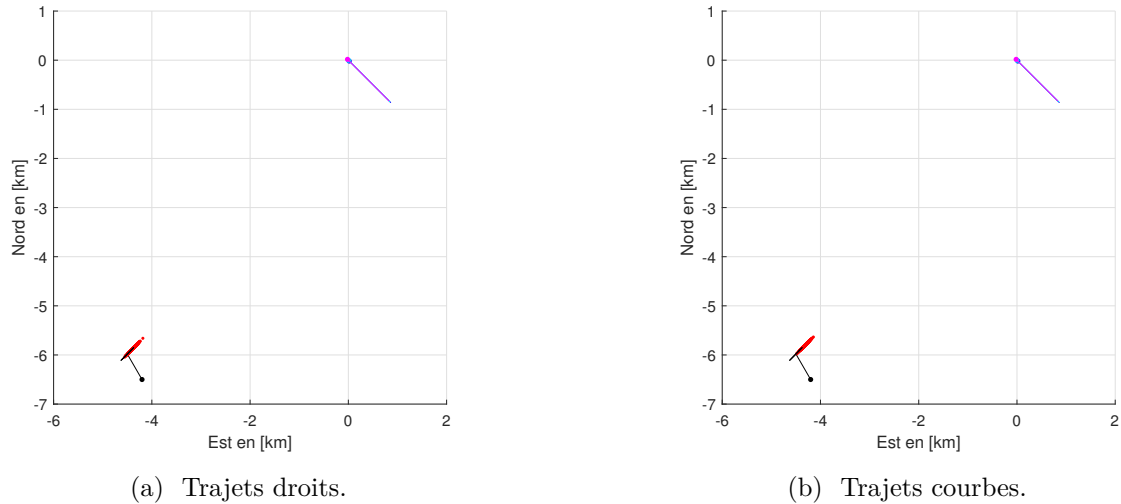


FIGURE 4.5 – Répartition des 500 estimés de la position initiale pour l’estimation du vecteur d’état réduit et ellipse de confiance à 90% pour le premier scénario (en magenta la trajectoire de l’observateur et en noir la trajectoire de la source).

calculés par l’algorithme. Les résultats sont résumés à la table 4.2 et présentés à la figure 4.6b. La table 4.2 révèle que l’estimateur est fortement biaisé et que les écarts types empiriques sont bien en dessous des écarts types asymptotiques (ce qui se traduit par un NEES moyen prenant une valeur éloignée de son intervalle de confiance théorique $\overline{NEES} = 13$). Nous en concluons que pour ce type de scénario, l’estimateur du MLE n’est pas fiable.

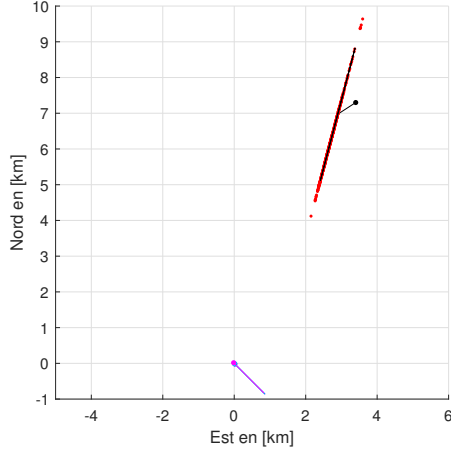
TABLE 4.2 – Performances empiriques de l’estimateur du vecteur d’état réduit sur le second scénario pour un trajet direct.

trajet	Y_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} 2896\text{m} \\ 6973\text{m} \\ -2.52\text{m/s} \\ -1.63\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 175.2\text{m} \\ 670.6\text{m} \\ -0.58\text{m/s} \\ 0.22\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 226.3\text{m} \\ 863.7\text{m} \\ 0.75\text{m/s} \\ 0.41\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 226.3\text{m} \\ 863.7\text{m} \\ 0.75\text{m/s} \\ 0.41\text{m/s} \end{pmatrix}$
Courbe		$\begin{pmatrix} 759\text{m} \\ 2898\text{m} \\ -2.55\text{m/s} \\ 0.85\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 102.7\text{m} \\ 392\text{m} \\ 0.34\text{m/s} \\ 0.23\text{m/s} \end{pmatrix}$

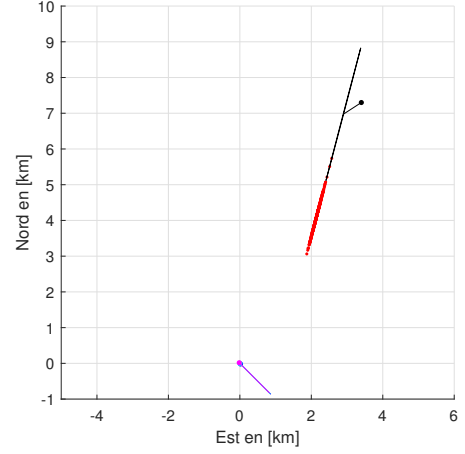
4.2.1.4 Estimation du vecteur d’état réduit lorsque le trajet est inconnu

Nous mettons en place une méthode permettant de décider de la classe du trajet suivi par les ondes acoustiques. Comme dans la méthode de décision décrite à la section 3.2.3 du chapitre 3, nous prenons un représentant parmi les trois premières classes de trajets. Néanmoins, contrairement à la méthode du précédent chapitre, le modèle sélectionné varie suivant que le signe de la moyenne des mesures de cosinus d’élévation est positif ou négatif :

- si la moyenne est positive les trajets choisis sont des trajets qui arrivent par le bas (trajet direct, $(-1, 1, 1)$ et $(-1, 2, 2)$ pour les classes 1,2 et 3 respectivement),
- si la moyenne est négative les trajets choisis sont des trajets qui arrivent par le haut (trajet direct, $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 2)$ pour les classes 1,2 et 3 respectivement).



(a) Trajets droits.



(b) Trajets courbes.

FIGURE 4.6 – Répartition des 500 estimés de la position initiale pour l’estimation du vecteur d’état réduit et ellipse de confiance à 90% pour le second scénario (en magenta la trajectoire de l’observateur et en noir la trajectoire de la source).

De plus, la profondeur supposée de la source est également choisie en fonction du signe de la moyenne des mesures de la manière suivante : $z_{as} = z_O + 50 \times \text{sign}(\overline{\cos(\phi_{O_2T}(t_k))})$.

Pour résumer, les étapes suivies par la méthode de décision sont :

- Calcul du signe de la moyenne des mesures de cosinus d’élévation.
- Estimation de la trajectoire de la source pour chaque représentant de classe de trajets.
- Sélection de l’estimé donnant le plus petit critère des moindres carrés pondérés ainsi que le représentant de la classe associée.

Puisque l’estimateur n’est pas fiable sur le second scénario (pour des trajets réfractés), nous avons testé notre méthode sur le premier scénario. Pour 500 simulations de Monte-Carlo, la méthode ne se trompe jamais.

4.2.2 L’onde se propage suivant deux trajets

Dans cette dernière section, nous nous plaçons dans le cas où les antennes de flanc captent chacune deux ondes acoustiques. Les antennes de flanc délivrent donc quatre mesures de TDOA ainsi que deux mesures de cosinus d’élévation. Les mesures de TDOA sont relatives à un même trajet. Nous faisons l’hypothèse⁶ que les mesures (TDOA et cosinus) de chaque trajet ont été associées par l’extracteur. Les mesures non bruitées délivrées par les antennes de flanc sont (nous utilisons le symbole tilde afin de différencier les mesures issues du second trajet)

6. Cette hypothèse réaliste permet de limiter le nombre cas à tester lorsque nous mettrons en place le méthode de choix de la classe des trajets.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = \tau_{12}(t) = \frac{1}{c}(R_{O_2T}(t) - R_{O_1T}(t)); \\ s_2(t) = \tau_{23}(t) = \frac{1}{c}(R_{O_3T}(t) - R_{O_2T}(t)); \\ s_3(t) = \cos(\phi_{O_2T}(t)) = \frac{\zeta_{OT}}{R_{O_2T}(t)}. \\ \tilde{s}_1(t) = \tilde{\tau}_{12}(t) = \frac{1}{c}(\tilde{R}_{O_2T}(t) - \tilde{R}_{O_1T}(t)); \\ \tilde{s}_2(t) = \tilde{\tau}_{23}(t) = \frac{1}{c}(\tilde{R}_{O_3T}(t) - \tilde{R}_{O_2T}(t)); \\ \tilde{s}_3(t) = \cos(\tilde{\phi}_{O_2T}(t)) = \frac{\tilde{\zeta}_{OT}}{\tilde{R}_{O_2T}(t)}; \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Les mesures sont corrompues par un bruit blanc gaussien d'écart type $\sigma_{\cos(\phi)} = 1.7 \times 10^{-2}$ pour les mesures de cosinus d'élévation et $\sigma_\tau = \sqrt{2.36} \times 10^{-5}$ s pour les mesures de TDOA. Les expressions des mesures bruitées sont

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(t_k) = s_1(t_k) + \varsigma_{1,k}; \\ m_2(t_k) = s_2(t_k) + \varsigma_{2,k}; \\ m_3(t_k) = s_3(t_k) + \varepsilon_k; \\ \tilde{m}_1(t_k) = \tilde{s}_1(t_k) + \tilde{\varsigma}_{1,k}; \\ \tilde{m}_2(t_k) = \tilde{s}_2(t_k) + \tilde{\varsigma}_{2,k}; \\ \tilde{m}_3(t_k) = \tilde{s}_3(t_k) + \tilde{\varepsilon}_k. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Nous nous intéressons à l'observabilité ainsi qu'aux performances asymptotiques de l'estimateur. Nous présentons ensuite les résultats d'estimation de la trajectoire de la sources sur les deux scénarios de la section 4.1.1.2.

4.2.2.1 Analyse de l'observabilité

Nous avons montré au théorème 6 que si la source ne se trouve pas sur la droite passant par les centres acoustiques des antennes et que l'onde ne suit pas un trajet direct, alors la trajectoire de la source est observable.

La question de l'observabilité se réduit au cas où la source se déplace sur la droite (O_1, O_3) émettant une onde se propageant selon le trajet direct. Or, l'hypothèse faite dans cette section suppose l'existence d'un autre trajet.

En conclusion, la trajectoire d'une source en MRU est toujours observable.

Théorème 7.

Soient trois antennes linéaires verticales appartenant au même plan vertical et dont les centres acoustiques sont alignés et contenus dans un même plan horizontal de profondeur connue. Soit une source ponctuelle se déplaçant en MRU dans un plan horizontal de profondeur inconnue, émettant une onde acoustique empruntant deux trajets connus et distincts. Alors la trajectoire de la source est observable, à partir du continuum des mesures de cosinus d'élévation et de TDOA.

4.2.2.2 Évaluation des performances asymptotiques

Nous reprenons les deux scénarios présentés à la section 4.1.1.2. Pour chacun des scénarios, nous considérons que l'onde acoustique émise par la source suit les trajets suivants :

- pour le premier scénario, l'onde suit le trajet réfléchi-fond et le trajet $(-1, 3, 2)$ (trajet initialement dirigé vers la surface et subissant trois réflexions sur la surface et deux sur le fond) ;
- pour le second scénario, l'onde suit le trajet direct et le trajet réfléchi-fond. Le trajet courbe correspondant au trajet direct est un trajet réfracté vers le haut.

Les performances asymptotiques calculées sur le vecteur d'état complet pour les deux scénarios sont :

- pour le premier scénario : $\underline{\sigma}_{\mathbf{BCR}} = (56.43\text{m}, 57.36\text{m}, 25.33\text{m}, 0.41\text{m/s}, 0.43\text{m/s})^T$,
- pour le second scénario : $\underline{\sigma}_{\mathbf{BCR}} = (6.07\text{m}, 18.97\text{m}, 18.89\text{m}, 0.04\text{m/s}, 0.09\text{m/s})^T$.

La trajectoire de la source est estimable dans les deux scénarios. Nous voyons ici que l'écart type asymptotique relatif à l'immersion de la source est très petit.

4.2.2.3 Estimation du vecteur d'état complet lorsque le trajet est connu

L'expression du critère à minimiser est

$$\begin{aligned}
C(X_T) = & \sum_{k=1}^K \left(\begin{bmatrix} m_1(t_k) \\ m_2(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1(t_k) \\ s_2(t_k) \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{R}^{-1} \left(\begin{bmatrix} m_1(t_k) \\ m_2(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1(t_k) \\ s_2(t_k) \end{bmatrix} \right) \\
& + \sum_{k=1}^K \left(\begin{bmatrix} \tilde{m}_1(t_k) \\ \tilde{m}_2(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{s}_1(t_k) \\ \tilde{s}_2(t_k) \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{R}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \tilde{m}_1(t_k) \\ \tilde{m}_2(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{s}_1(t_k) \\ \tilde{s}_2(t_k) \end{bmatrix} \right) \\
& + \frac{1}{\sigma_{\cos(\phi)}^2} \sum_{k=1}^K (m_3(t_k) - s_3(t_k))^2 + \frac{1}{\sigma_{\cos(\phi)}^2} \sum_{k=1}^K (\tilde{m}_3(t_k) - \tilde{s}_3(t_k))^2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Premier scénario :

Les figures 4.7a et 4.7b présentent les estimés dans le plan horizontal pour les trajets droits et les trajets courbes, respectivement.

Les écarts types empiriques du MLE sur les composantes du vecteur d'état complet pour les deux types de trajet (droit et courbe) sont quasi égaux à ceux donnés par la **BCR**. Pour les trajets droits, l'estimateur n'est que très peu biaisé alors que pour les trajets courbes, un biais d'estimation apparaît. Cela se traduit par une valeur de NEES moyen dans son intervalle de confiance pour le trajet droit ($\overline{NEES} = 5.2$) et en dehors pour les trajets courbes ($\overline{NEES} = 62.7$).

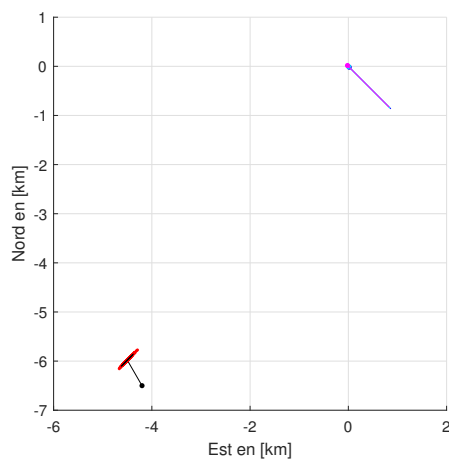
Second scénario :

Les conclusions que nous tirons sur ce scénario sont les mêmes que celles auxquelles nous avons abouti sur le premier scénario :

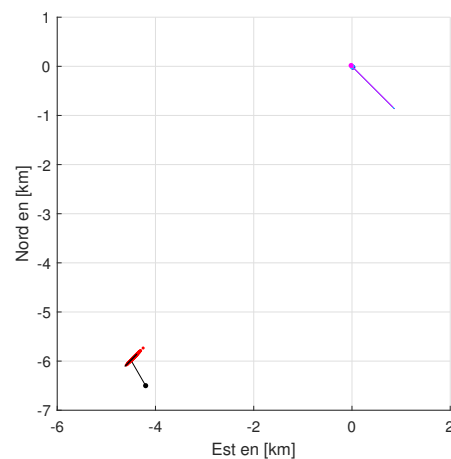
- Les écarts types empiriques du MLE sur les composantes du vecteur d'état complet pour les deux types de trajets (droit et courbe) sont quasi égaux à ceux donnés par la **BCR**.
- Pour les trajets droits, l'estimateur est très peu biaisé et le NEES moyen est dans son intervalle de confiance ($\overline{NEES} = 4.83$).

TABLE 4.3 – Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état complet sur le premier scénario pour le trajet réfléchi-fond et le trajet $(-1, 3, 2)$.

trajet	X_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} -4500\text{m} \\ -5980\text{m} \\ 50\text{m} \\ -1.5\text{m/s} \\ 2.6\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.82\text{m} \\ 0.91\text{m} \\ 2.02\text{m} \\ 0.02\text{m/s} \\ 0.02\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 56.43\text{m} \\ 57.36\text{m} \\ 25.33\text{m} \\ 0.41\text{m/s} \\ 0.43\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 56.67\text{m} \\ 57.7\text{m} \\ 25.14\text{m} \\ 0.41\text{m/s} \\ 0.43\text{m/s} \end{pmatrix}$
Courbe		$\begin{pmatrix} -63.01\text{m} \\ -59.61\text{m} \\ 29.98\text{m} \\ -0.07\text{m/s} \\ 0.08\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 55.2\text{m} \\ 56.08\text{m} \\ 26.2\text{m} \\ 0.42\text{m/s} \\ 0.44\text{m/s} \end{pmatrix}$



(a) Trajets droits.



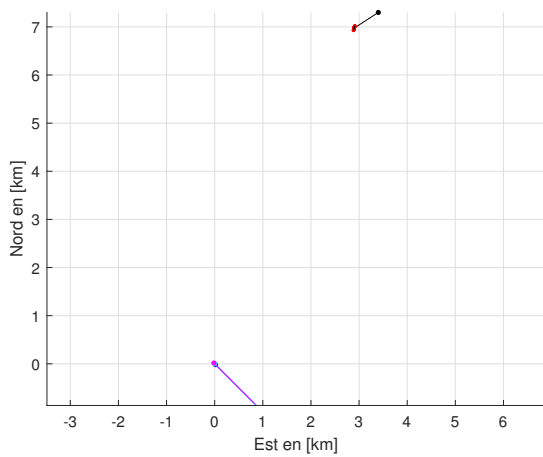
(b) Trajets courbes.

FIGURE 4.7 – Répartition des 500 estimés de la position initiale pour l'estimation du vecteur d'état complet et ellipse de confiance à 90% pour le premier scénario et pour deux trajets détectés (en magenta la trajectoire de l'observateur et en noir la trajectoire de la source).

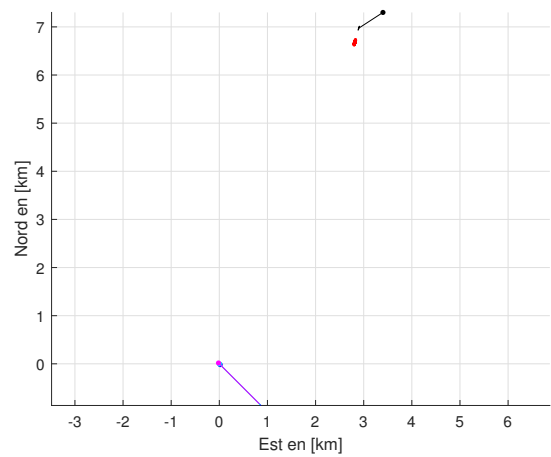
- Pour les trajets courbes, l'estimateur est biaisé et le NEES moyen est en dehors dans son intervalle de confiance ($\overline{NEES} = 729$).

TABLE 4.4 – Performances empiriques de l'estimateur du vecteur d'état complet sur le second scénario pour le trajet direct et le trajet réfléchi-fond.

trajet	X_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
Droit	$\begin{pmatrix} 2896\text{m} \\ 6973\text{m} \\ 300\text{m} \\ -2.52\text{m/s} \\ -1.63\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.25\text{m} \\ 0.62\text{m} \\ -0.06\text{m} \\ 0.001\text{m/s} \\ 0.003\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.07\text{m} \\ 18.97\text{m} \\ 18.89\text{m} \\ 0.04\text{m/s} \\ 0.09\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.35\text{m} \\ 19.42\text{m} \\ 19.06\text{m} \\ 0.05\text{m/s} \\ 0.09\text{m/s} \end{pmatrix}$
Courbe		$\begin{pmatrix} 80.8\text{m} \\ 292.4\text{m} \\ -196.3\text{m} \\ -0.25\text{m/s} \\ 0.09\text{m/s} \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 6.07\text{m} \\ 18.58\text{m} \\ 18.76\text{m} \\ 0.04\text{m/s} \\ 0.08\text{m/s} \end{pmatrix}$



(a) Trajets droits.



(b) Trajets courbes.

FIGURE 4.8 – Répartition des 500 estimés de la position initiale pour l'estimation du vecteur d'état complet et ellipse de confiance à 90% pour le second scénario et pour deux trajets détectés (en magenta la trajectoire de l'observateur et en noir la trajectoire de la source).

4.2.2.4 Estimation du vecteur d'état complet lorsque le trajet est inconnu

Nous reprenons et adaptons (pour tenir compte du nombre de mesures) la méthode de décision décrite en 4.2.1.3. Pour 500 simulations de Monte-Carlo réalisées sur les deux scénarios et pour les trajets droits ou courbes, la méthode ne se trompe jamais.

4.3 Bilan du chapitre

Tout au long de ce chapitre, la faisabilité de la trajectographie passive à partir d'antennes de flanc a été étudiée.

Le cas où les antennes délivrent uniquement des mesures de cosinus d'élévation a tout d'abord été envisagé pour un ou deux trajets détectés (et connus). Dans ce cas, nous avons montré que la trajectoire de la source est observable (dans presque toutes les situations), mais qu'elle n'est pas estimable.

Nous avons étudié ensuite le cas où les antennes délivrent des mesures de TDOA et des mesures de cosinus d'élévation pour un puis deux trajets détectés (et connus). Lorsqu'un seul trajet est détecté, la trajectoire de la source est observable (dans presque toutes les situations) et estimable si l'on fixe la profondeur de la source à une valeur arbitraire. Les simulations ont révélé que lorsque les trajets courbes sont des réfractés, les estimés calculés ne passent pas le test sur le critère. Pour tous les autres types de trajets, le MLE est biaisé. Lorsque deux trajets sont détectés, la trajectoire de la source est observable et estimable. Cependant, le MLE est biaisé pour des trajets courbes.

En situation réelle, le type de trajet n'est pas connu. Nous avons donc mis en place des méthodes de choix du type de trajets dont les performances empiriques atteignent 100% de réussite.

Le chapitre suivant est dédié à l'association des antennes de flanc avec une antenne linéaire remorquée.

Trajectographie passive à partir d'une antenne linéaire remorquée et de trois
antennes de flanc

Ce dernier chapitre est la clef de voûte de notre contribution à la trajectographie passive par un sous-marin gréé d'une antenne linéaire remorquée et de trois antennes de flanc : la fusion des antennes y est réalisée. Nous faisons l'hypothèse que les ondes acoustiques détectées par l'antenne linéaire remorquée et celles détectées par les antennes de flanc suivent les mêmes types de trajets.

Trois sections composent ce chapitre :

- Tout d'abord, les antennes détectent une onde acoustique qui se propage selon un trajet connu. Les performances asymptotiques et empiriques de l'estimateur sont évaluées.
- Nous nous plaçons ensuite dans le cas où l'observateur ne connaît pas le type du trajet suivi par l'onde acoustique. Nous proposons une méthode pour choisir un type de trajet.
- Finalement, nous considérons le cas où chaque antenne détecte deux ondes acoustiques empruntant des trajets inconnus. Nous mettons alors en place une batterie de tests pour décider du type de trajet emprunté par les deux ondes.

5.1 Un seul trajet de type connu

L'antenne linéaire remorquée et les trois antennes linéaires verticales délivrent des mesures de cosinus de pseudo-gisement, des mesures de cosinus d'élévation et des mesures de différences de temps d'arrivées. Soient O_1 , O_2 , O_3 et O_4 les centres acoustiques respectifs des antennes de flanc et de l'antenne linéaire remorquée. Les mesures non bruitées ont pour expressions (voir chapitre 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = \tau_{12}(t) = \frac{1}{c}(R_{O_2T}(t) - R_{O_1T}(t)); \\ s_2(t) = \tau_{23}(t) = \frac{1}{c}(R_{O_3T}(t) - R_{O_2T}(t)); \\ s_3(t) = \cos(\phi_{O_2T}(t)) = \frac{\zeta_{O_2T}}{R_{O_2T}(t)}; \\ s_4(t) = \cos(\alpha_{O_4T}(t)) = \cos(\theta_{O_4T}(t) - h_{O_4}(t)) \cos(\varphi_{O_4T}(t)). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Les mesures (5.1) étant corrompues par un bruit blanc gaussien, les expressions des mesures bruitées sont

$$\begin{cases} m_1(t_k) = \tau_{12}(t_k) + \varsigma_{1,k}; \\ m_2(t_k) = \tau_{23}(t_k) + \varsigma_{2,k}; \\ m_3(t_k) = \cos(\phi_{O_2T}(t_k)) + \vartheta_k; \\ m_4(t_k) = \cos(\alpha_{O_4T}(t_k)) + \varepsilon_k, \end{cases} \quad (5.2)$$

avec :

- ϑ_k et ε_k suivent la loi gaussienne centrée et d'écart type $\sigma_{\cos(\phi)} = \sigma_{\cos(\alpha)} = 1.7 \times 10^{-2}$,
- $\varsigma_{i,k}$ ($i = 1$ ou 2) suit la loi gaussienne centrée et d'écart type $\sigma_\tau = \sqrt{2.36} \times 10^{-5}$ secondes,
- et $k = 1, \dots, K$.

Les deux mesures de TDOA étant corrélées, nous faisons l'approximation de la matrice de variance-covariance que nous avons donné au chapitre 2. Pour rappel, la matrice de variance-covariance a pour expression

$$\mathbf{R} = \sigma_\tau^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

L'instant de référence que nous choisissons est l'instant initial.

5.1.1 Analyse de l'observabilité

Les théorèmes statuant sur l'observabilité de la trajectoire d'une source pour l'antenne linéaire remorquée et les antennes de flanc ont été donnés dans les chapitres 3 et 4 :

- Dans le cas où l'observateur n'effectue pas de manœuvre, le théorème 1¹ et le théorème 6² nous assurent de l'observabilité à la condition que l'antenne linéaire remorquée ne se trouve pas à la même immersion que les antennes de flanc.
- Dans le cas où l'observateur effectue une manœuvre, ce sont les théorèmes 2 et 6 qui permettent de conclure que l'observabilité est assurée.

Les combinaisons des théorèmes pour l'antenne linéaire remorquée et des théorèmes pour les antennes de flanc nous permettent d'énoncer le théorème statuant de l'observabilité de la trajectoire d'une source à partir des mesures délivrées par une antenne linéaire remorquée et trois antennes de flanc.

Théorème 8.

Soient trois antennes linéaires verticales appartenant au même plan vertical et dont les centres acoustiques sont alignés et contenus dans un même plan horizontal de profondeur connue.

Soit une antenne linéaire horizontale appartenant au même plan vertical que les antennes linéaires verticales et dont le centre acoustique est de profondeur connue mais n'est pas contenu dans le même plan horizontal que les antennes linéaires verticales.

Soit une source ponctuelle se déplaçant en MRU dans un plan horizontal de profondeur inconnue, émettant une onde acoustique empruntant un trajet connu.

1. Relatif à l'antenne linéaire remorquée.
2. Relatif aux antennes de flanc.

Alors la trajectoire de la source est observable, à partir du continuum des mesures délivrées par les deux types d'antennes.

5.1.2 Évaluation des performances asymptotiques

L'espace dans lequel évoluent les deux protagonistes est muni d'un repère orthonormé (base indirecte). La source est initialement positionnée en $x_T = -4200\text{m}$ et $y_T = -6500\text{m}$ à la profondeur $z_T = 100\text{m}$. Elle se déplace en MRU suivant le cap -30° à la vitesse de 3m/s . L'observateur se déplace en MRU suivant un cap de 135° à la vitesse de 6m/s durant 200s . Les centres acoustiques de toutes les antennes sont alignés dans le plan horizontal. La seconde antenne de flanc est initialement positionnée en $x_{O_2} = 0\text{m}$ et en $y_{O_2} = 0\text{m}$. Les antennes de flanc sont espacées de 24m à une immersion $z_{O_2} = 200\text{m}$ et l'antenne linéaire remorquée se trouve 240m derrière la troisième antenne de flanc à l'immersion $z_{O_4} = 250\text{m}$. La profondeur du fond marin est fixée à 4830m .

Nous considérons deux cas : le cas où les ondes acoustiques émises par la source se propagent suivant un trajet direct et le cas où les ondes acoustiques se propagent selon un trajet réfléchi-fond.

Nous nous assurons maintenant que la trajectoire de la source est estimable en calculant les performances asymptotiques de l'estimateur pour chaque cas. Les racines carrées des éléments diagonaux de la borne de Cramér-Rao sont

- trajet direct : $\underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (440.63\text{m}, 681.84\text{m}, 20.8\text{m}, 0.62\text{m/s}, 0.73\text{m/s})^T$
- trajet réfléchi-fond : $\underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (697.51\text{m}, 1078\text{m}, 1552\text{m}, 1.04\text{m/s}, 1.22\text{m/s})^T$

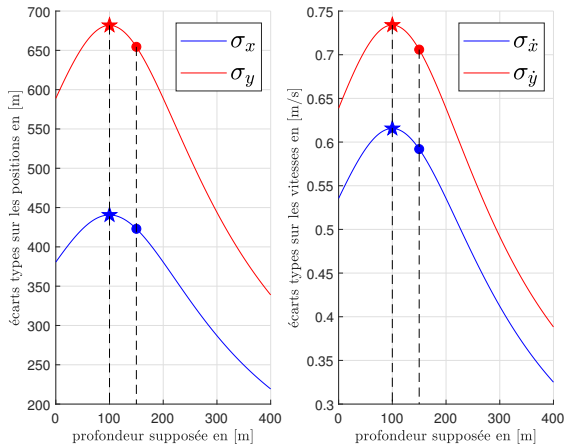
La trajectoire de la source est estimable pour des trajets directs mais ne l'est pas pour des ondes se propageant suivant le trajet réfléchi-fond. En effet : l'écart type asymptotique de la profondeur de la source est incompatible avec le contexte opérationnel. Afin d'assurer l'estimabilité de la trajectoire de la source dans ce cas, nous réitérons le procédé utilisé aux chapitres 3 et 4. Nous fixons la profondeur de la source à une valeur arbitraire ($z_{as} = 300\text{m}$) au prix de l'apparition d'un biais. Les performances asymptotiques de l'estimateur deviennent

- $\underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (55.07\text{m}, 63.41\text{m}, 0.41\text{m/s}, 0.45\text{m/s})^T$.

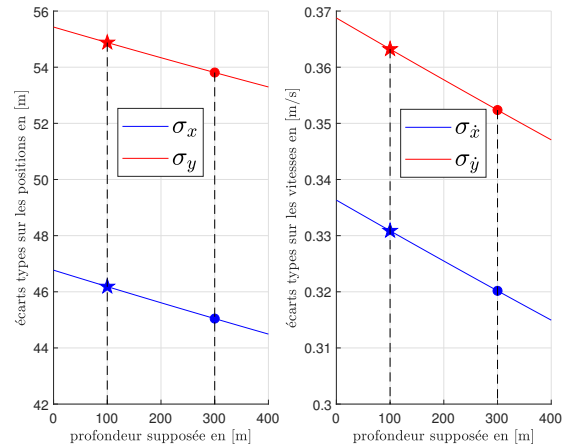
Remarque 20.

En prévision de la section 5.2, où le type de trajet n'est pas connu, nous avons évalué l'impact d'une valeur d'immersion arbitraire pour le trajet direct. Par exemple pour $z_{as} = 150\text{m}$ nous obtenons $\underline{\sigma}_{\text{BCR}} = (422.96\text{m}, 654.49\text{m}, 0.59\text{m/s}, 0.71\text{m/s})^T$.

Il est intéressant de noter que suivant la valeur de l'immersion choisie, les valeurs des performances asymptotiques de l'estimateur vont beaucoup varier si les ondes suivent des trajets directs et peu varier si elles suivent des trajets réfléchi-fond (voir les figures 5.1a et 5.1b). Ce constat est à rapprocher des points 3 et 4 de la remarque 11 faite en 3.1.1 du chapitre 3. Pour rappel, nous avons remarqué au point 3 que si l'onde suit des trajets réfléchis, alors l'écart entre la source fantôme (induite par l'hypothèse sur la profondeur) et la vraie source est faible. Au point 4, nous avons fait la remarque que si l'onde suit un trajet direct, alors l'écart entre la source fantôme et la vraie source est grand.



(a) Trajet direct.



(b) Trajet réfléchi-fond

FIGURE 5.1 – Variation des écarts types asymptotiques des composantes du vecteur d'état en fonction de la profondeur supposée de la source. Les écarts types calculés pour la vraie immersion de la source sont représentés par une étoile et ceux calculés pour z_{as} sont représentés par un point.

5.1.3 Estimation

Nous réalisons ici l'estimation du vecteur d'état réduit $Y_T = (x_T(0), y_T(0), \dot{x}_T, \dot{y}_T)^T$. Nous fixons une valeur z_{as} d'immersion de la source de la même manière que dans la section 4.2.1.4 du chapitre 4 : la valeur de z_{as} est fixée en fonction du signe de la moyenne des mesures de cosinus d'élévation collectées par la seconde antenne de flanc. Nous avons fixé en 4.2.1.4 (chapitre 4) la valeur de z_{as} à 50m au-dessus ou au-dessous des antennes de flanc suivant que le signe de la moyenne des cosinus d'élévation est positif ou négatif, respectivement. Nous faisons toutefois une légère modification à cette méthode. Lorsque la moyenne est négative, nous fixons z_{as} à 50m au-dessus de l'immersion des antennes de flanc et lorsque la moyenne est positive, nous fixons z_{as} à 50m au-dessous de l'antenne linéaire remorquée.

Nous résumons à la table 5.1 les performances empiriques de l'estimateur calculées pour les deux types de trajets. Les figures 5.2 présentent les estimés retournés par l'algorithme d'estimation lorsque les ondes suivent des trajets directs droits (5.2a), des trajets directs courbes (5.2b), des trajets réfléchi-fond droits (5.2c) et des trajets réfléchi-fond courbes (5.2d). Pour les quatre sous-figures, nous représentons les différents éléments de la manière suivante.

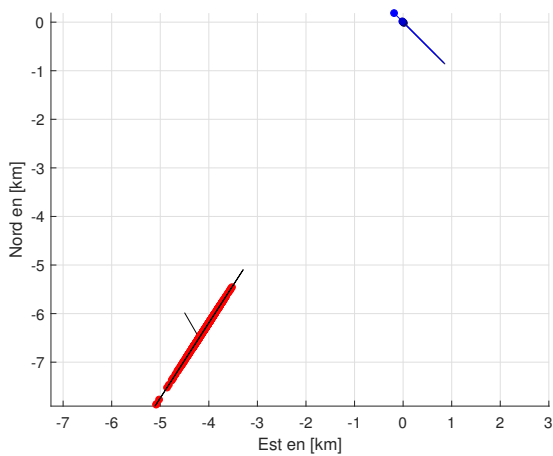
- Les estimés sont représentés en rouge.
- La trajectoire de la source ainsi que l'ellipse de confiance à 90% sont représentées en noir. La position initiale de la source est symbolisée par un point de la même couleur que sa trajectoire.
- Les trajectoires des antennes sont représentées en nuances de bleu (plus foncée pour les antennes de flanc et plus claire pour l'antenne linéaire remorquée). Tout comme pour la source, les positions initiales des antennes sont symbolisées par des points de la même couleur que la trajectoire de l'antenne associée.

Lorsque les ondes acoustiques suivent des trajets réfléchi-fond, les performances empiriques de l'estimateur atteignent ses performances asymptotiques. À l'inverse, lorsque les ondes suivent des trajets directs, les écarts types empiriques de l'estimateur sont plus faibles que les écarts types asymptotiques.

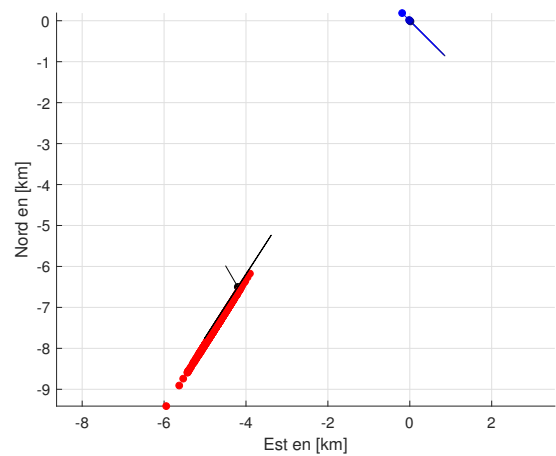
Toutefois, quel que soit le trajet suivi par les ondes acoustiques, l'estimateur est biaisé car nous avons

TABLE 5.1 – Résultat d'estimation de 500 simulations de Monte-Carlo sur le second scénario et pour des ondes acoustiques s'étant propagées suivant des trajets directs ou réfléchi-fond.

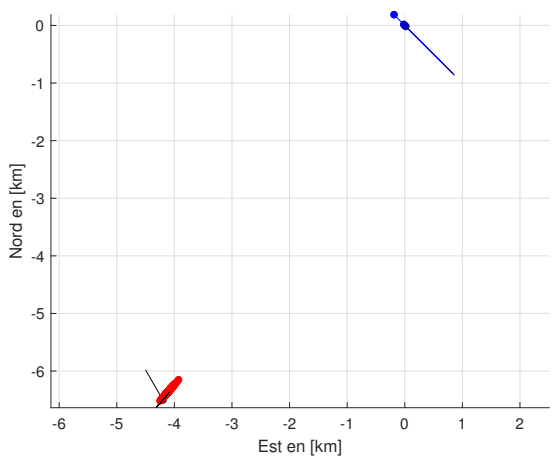
trajet	\bar{Y}_T	Biais	σ_{BCR}	σ_{emp}
direct droit	$\begin{pmatrix} -4200\text{m} \\ -6500\text{m} \\ -1.5\text{m/s} \\ 2.6\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -79.77\text{m} \\ -123.74\text{m} \\ -0.12\text{m/s} \\ 0.13\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 422.96\text{m} \\ 654.59\text{m} \\ 0.59\text{m/s} \\ 0.71\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 248.08\text{m} \\ 383.76\text{m} \\ 0.36\text{m/s} \\ 0.47\text{m/s} \end{pmatrix}$
direct courbe		$\begin{pmatrix} 496.22\text{m} \\ 927.98\text{m} \\ 0.002\text{m/s} \\ -2.36\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 298.48\text{m} \\ 472.01\text{m} \\ 0.39\text{m/s} \\ 0.60\text{m/s} \end{pmatrix}$	
réfléchi-fond droit		$\begin{pmatrix} -91.06\text{m} \\ -140.58\text{m} \\ -0.12\text{m/s} \\ 0.15\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 55.07\text{m} \\ 63.41\text{m} \\ 0.41\text{m/s} \\ 0.45\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50.21\text{m} \\ 57.89\text{m} \\ 0.39\text{m/s} \\ 0.42\text{m/s} \end{pmatrix}$
réfléchi-fond courbe		$\begin{pmatrix} -145.84\text{m} \\ -227.03\text{m} \\ 0.27\text{m/s} \\ 0.17\text{m/s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 57.31\text{m} \\ 65.42\text{m} \\ 0.42\text{m/s} \\ 0.45\text{m/s} \end{pmatrix}$	



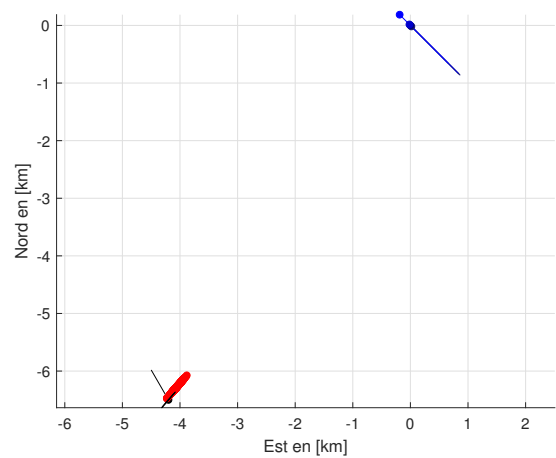
(a) trajet direct droit.



(b) trajet direct droit courbe.



(c) trajet réfléchi-fond droit.



(d) trajet réfléchi-fond courbe.

FIGURE 5.2 – Estimation de la trajectoire de la source pour deux trajets suivis par les ondes acoustiques.

fixé l’immersion de la source à une valeur arbitraire (ce biais étant bien plus grand lorsque les trajets sont courbes). Ce biais se ressent sur les valeurs du NEES moyen qui sont en dehors de son intervalle de confiance théorique :

- lorsque les ondes suivent des trajets directs droits, $\overline{NEES} = 3.29$ et courbes, $\overline{NEES} = 6143$,
- lorsque les ondes suivent des trajets réfléchi-fond droits, $\overline{NEES} = 113.6$ et courbes, $\overline{NEES} = 3030$.

Il est à noter que lorsque les trajets sont des directs courbes, bien que l’estimateur soit biaisé, une grande majorité des estimés sont acceptés par le test sur le critère ($\approx 95\%$). Cela n’avait pas été le cas lorsque l’observateur disposait uniquement des antennes de flanc (voir section 4.2.1.3 du chapitre 4).

En faisant varier la profondeur supposée, nous vérifions par simulations de Monte Carlo que le biais d’estimation est moindre lorsque z_{as} est proche de la vraie profondeur de la source. Les résultats de ces simulations sont présentés aux figures 5.3a et 5.3b pour des trajets directs droits et réfléchi-fond droits. Nous y présentons l’erreur d’estimation en distance de l’estimateur ainsi que son biais en azimuth en fonction de la profondeur supposée. Nous constatons que le biais en distance est minimal lorsque $z_{as} \approx z_T$. Nous voyons à la figure 5.3a que l’erreur en distance pour un trajet direct peut devenir d’autant plus importante que l’hypothèse sur l’immersion de la source sera éloignée de la réalité. Toutefois cette erreur n’excède pas 20% de la distance séparant l’observateur de la source dans le plan horizontal. Pour le trajet réfléchi-fond, l’erreur en distance est faible, quelle que soit l’hypothèse faite sur la profondeur. Enfin, le biais en azimuth pour les deux trajets est très faible, quelle que soit l’hypothèse faite sur la profondeur.

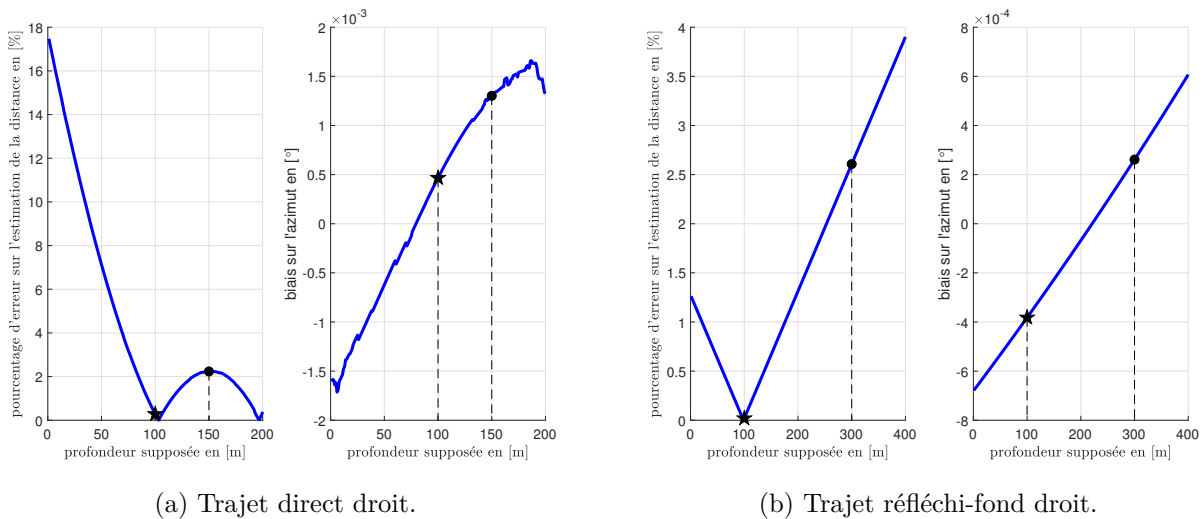


FIGURE 5.3 – Variation du biais en distance et en azimuth en fonction de l’immersion supposée de la source pour le trajet direct 5.3a et le trajet réfléchi-fond 5.3b. Les biais calculés pour la vraie immersion de la source sont représentés par une étoile et ceux calculés pour z_{as} sont représentés par un point.

La fusion des deux types d’antennes améliore sensiblement les performances de l’estimation, bien que la profondeur de la source ne soit pas estimable lorsque l’observateur ne manœuvre pas. Une hypothèse sur celle-ci est suffisante pour obtenir un résultat opérationnellement exploitable au prix d’un biais sur l’estimation de la distance (dans le plan horizontal) entre la source et l’observateur. Toutefois ce biais reste acceptable.

Dans la prochaine section, nous nous intéressons au cas où le type de trajet n’est pas connu.

5.2 Un seul trajet de type inconnu

Nous proposons d'utiliser la méthode de décision présentée aux chapitres précédents (voir 3.2.3 et 4.2.1.4) permettant de choisir la classe des trajets. Les représentants des classes des trajets choisis dans ce chapitre sont les suivants :

Lorsque la moyenne des cosinus d'élévation est positive nous choisissons

- Le trajet direct pour la classe 1,
- Le trajet $(-1, 1, 1)$ pour la classe 2,
- Le trajet $(-1, 2, 2)$ pour la classe 3.

Lorsque la moyenne des cosinus d'élévation est négative nous choisissons

- Le trajet réfléchi-surface pour la classe 1,
- Le trajet $(-1, 2, 1)$ pour la classe 2,
- Le trajet $(-1, 3, 2)$ pour la classe 3.

Tous les représentants des classes sont tracés aux figures 5.4 (5.4a lorsque la moyenne des cosinus est positive et 5.4b lorsqu'elle est négative).

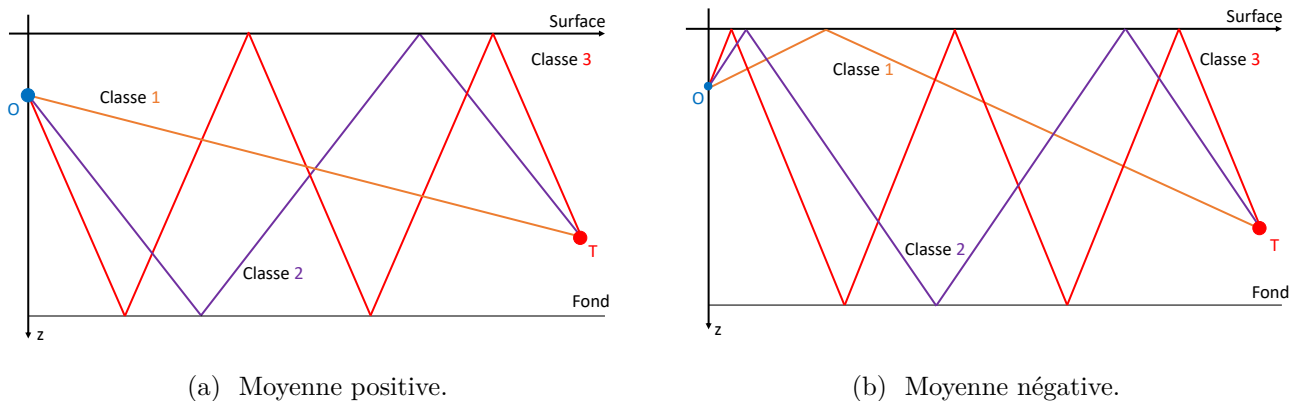


FIGURE 5.4 – Représentants choisis pour les classes 1, 2 et 3 en fonction du signe de la moyenne des cosinus d'élévation.

Le test multi-hypothèses a obtenu un taux de succès de 100% dans les deux cas présentés en 5.1. Nous pouvons donc maintenant nous intéresser au cas où les antennes détectent deux ondes acoustiques.

5.3 Deux trajets de types inconnus

Les antennes détectent chacune deux ondes acoustiques dont les trajets empruntés sont inconnus. L'hypothèse de travail est la suivante :

- A_1 : Les trois antennes de flanc collectent quatre mesures de TDOA (deux par trajet) et deux mesures de cosinus d'élévation (un par trajet). L'association TDOA et cosinus d'élévation par trajet a été effectuée. Ainsi les trois antennes de flanc constituent une méta-antenne qui délivre à chaque récurrence, deux ensembles de mesures (un par trajet), chacun constitué de deux mesures de TDOA et d'une mesure de cosinus d'élévation.
- A_2 : L'antenne linéaire remorquée fournit deux mesures de cosinus de pseudo-gisement.
- A_3 : L'association temporelle des mesures pour un trajet donné a été réalisée : l'antenne linéaire remorquée délivre deux pistes de cosinus de pseudo-gisement pendant que la méta-antenne

fournit quatre pistes de TDOA et deux pistes de cosinus d'élévation.

– A_4 : L'association des mesures issues de la TA et de la méta-antenne n'a pas été faite.

Nous proposons une méthode permettant de réaliser cette association. Elle consiste à énumérer toutes les associations possibles, puis pour chaque association et pour chaque type de trajet (ou son représentant) à estimer le vecteur d'état Y_T . L'association et le type de trajet retenus sont ceux correspondant au plus petit critère des moindres carrés.

Remarque 21.

Le problème de l'association piste à piste a été partiellement traité dans la littérature. Il s'agit d'un problème difficile de dénombrement [Pillon et al., 2002, Blanc-Benon et Pillon, 1989]. Pour mesurer l'ampleur de la difficulté, nous proposons de compter le nombre d'estimations à réaliser lorsque le nombre de pistes à associer est n_p (ici $n_p = 2$) et que le nombre de type de trajets envisagés est n_t ³ (ici $n_t = 3$). Le nombre d'associations (TA, FA) est $n_p!$. Pour une association donnée, le nombre de choix de type de trajet est $\frac{n_t!}{(n_t - n_p)!}$. Ainsi, nous devons calculer $n_p! \times \frac{n_t!}{(n_t - n_p)!}$ estimés, ce qui donne ici $2 \times 6 = 12$ estimations à réaliser.

Les étapes de la méthode de choix sont données en annexe E.

Pour évaluer ses performances empiriques, nous considérons deux nouveaux cas (le scénario reste le même) :

- dans le premier cas, les ondes suivent des trajets directs et des trajets réfléchi-fond (donc classe 1 et 2, respectivement),
- dans le second cas, les ondes suivent des trajets réfléchi-fond et des trajets (1, 2, 2) (donc classe 2 et 3, respectivement).

Ses performances empiriques de notre méthode sont résumées dans les tables 5.2 et 5.3 pour les deux cas et pour différentes durées de scénario. Dans la première, la deuxième et la troisième lignes des tables, sont donnés les taux (en pourcentage) d'estimés acceptés, les taux de bonnes associations calculés sur le nombre d'estimés acceptés et les taux de bon choix de type de rayons calculés sur les bonnes associations, respectivement. La quatrième ligne indique le taux de succès global de la méthode.

TABLE 5.2 – Performances empiriques de la méthode calculées sur le premier cas pour différentes durées de scénario.

Durée \ Décision	8s ($K = 3$)	60s ($K = 16$)	140s ($K = 36$)	200s ($K = 51$)
Taux d'estimés retenus	94.4%	92.8%	91.4%	92.6%
Taux d'associations correctes	100%	100%	100%	100%
Taux de choix de classes corrects	71.8%	98.1%	100%	100%
Taux de succès de la méthode	71.8%	98.1%	100%	100%

L'étape d'association ne commet aucune erreur sur les cas traités, quelle que soit la durée des scénarios. Seule l'étape de choix du type de rayon est impactée par cette dernière, dans le premier cas. La méthode semble donc être très fiable. Cependant, son principal défaut est son exhaustivité. Comme annoncé dans la remarque 21, elle peut devenir inopérante si le nombre de pistes et le nombre de classes de rayons dépassent 3.

3. n_t est évidemment supérieur à n_p .

TABLE 5.3 – Performances empiriques de la méthode calculées sur le second cas pour différentes durées de scénario.

Durée	8s ($K = 3$)	60s ($K = 16$)	140s ($K = 36$)	200s ($K = 51$)
Décision				
Taux d'estimés retenus	93.2%	93.6%	95.1%	91.8%
Taux d'associations correctes	100%	100%	100%	100%
Taux de choix de classes corrects	100%	100%	100%	100%
Taux de succès de la méthode	100%	100%	100%	100%

Remarque 22.

Les performances données dans les tables 5.2 et 5.3 ont été établies pour des trajets courbes.

Remarque 23.

Si l'hypothèse A_1 n'est pas vérifiée, le nombre d'associations à tester explose.

Remarque 24.

Le but de cette section était de proposer une méthodologie ; les conclusions données ici méritent d'être confirmées par d'autres simulations. En outre, ce cas s'ouvre sur le problème du multi-source : dès l'instant où une antenne reçoit plusieurs ondes, il est légitime de se poser la question du nombre de sources. Dans notre étude, nous avons supposé qu'un classifieur (basé sur l'analyse harmonique) avait préalablement décidé que les deux trajets reçus étaient issus de la même source.

5.4 Bilan du chapitre

Nous avons vu dans ce chapitre que la fusion de l'antenne linéaire remorquée et des trois antennes de flanc améliore les performances de l'estimation. Lorsque la trajectoire de la source n'est pas estimable, fixer sa profondeur permet d'obtenir une estimation certes biaisée mais opérationnellement acceptable. De manière générale, les méthodes de choix de la nature des trajets des ondes acoustiques que nous avons proposées prennent la bonne décision dans toutes nos simulations.

L'objectif de cette thèse était de proposer des solutions aux problèmes de la trajectographie passive d'une source en mouvement rectiligne uniforme (MRU) **en champ proche**. L'observateur est un sous-marin tractant une antenne linéaire (TA) et portant des antennes verticales sur ses flancs (FA). Nous avons considéré que l'observateur et la source évoluaient dans un milieu à trois dimensions et que l'onde acoustique émise par la source pouvait suivre plusieurs trajets.

Dans le **chapitre 1**, nous avons introduit le cadre général de notre démarche.

Le **chapitre 2** a été dédié à la présentation du contexte dans lequel s'inscrit cette thèse. Nous avons rappelé la notion de trajectographie passive et présenté (au travers de la chaîne de traitement sonar) les moyens à notre disposition pour la réaliser.

La TA et les FA ont été présentées dans ce chapitre. Nous avons défini les différents angles intervenant dans les mesures délivrées par ces deux types d'antennes. Pour l'antenne linéaire remorquée, nous avons décrit les différentes mesures fournies par cette antenne : pseudo-azimut ou cosinus de pseudo-gisement ; et nous avons donné le lien permettant de passer de l'une à l'autre. Pour les antennes de flanc, nous avons présenté les mesures de cosinus d'élévation ainsi que les mesures de différence de temps d'arrivée.

Nous avons introduit le modèle de propagation des ondes acoustiques que nous avons choisi : le modèle propagation en lignes droites. À partir de cette modélisation, nous avons défini deux notions : la notion de grand fond et la notion de classe de trajets.

- La notion de grand fond a été définie de la façon suivante : si les trajets direct et réfléchi-fond empruntés par une onde acoustique sont distinguables, alors la source est dite en situation de grand fond sinon, la source est déclarée se trouver en situation de petit fond. La notion de champ proche est la notion duale de celle de grand fond.
- Pour une source se trouvant en situation de grand fond, la notion de classe de trajets permet de réduire le nombre de cas à traiter lors de l'estimation.

En fin de chapitre, nous avons décrit la démarche que nous avons appliquée dans la suite de cette thèse : (i) débiter toute étude de trajectographie par l'analyse de l'observabilité de la trajectoire d'une source, (ii) évaluer les performances asymptotiques afin de nous assurer que l'étude a bien un sens, (iii) enfin, après avoir choisi un estimateur, évaluer ses performances empiriques par des simulations de Monte-Carlo.

Dans le **chapitre 3**, nous nous sommes intéressés au problème de la trajectographie passive à partir des mesures délivrées par une antenne linéaire remorquée.

L'antenne détecte des ondes acoustiques émises par un bruiteur et fournit des mesures de cosinus de pseudo-gisement. Nous avons proposé l'étude de plusieurs cas :

- l'observateur est lui même en MRU. La source émet une onde acoustique qui se propage suivant un unique trajet connu par l'observateur.
- l'observateur effectue une manœuvre lui faisant changer de cap à vitesse constante. Avant et après manœuvre, l'observateur se déplace en MRU. La source émet toujours une onde acoustique se propageant suivant un unique trajet connu, puis inconnu.
- l'observateur se déplace de nouveau en MRU, mais où l'onde émise par la source suit deux trajets distincts connus, puis inconnus.

Dans chacun des cas, nous avons donné les théorèmes statuant sur l'observabilité de la source. Ces théorèmes donnent les conditions d'apparition de sources fantômes ainsi que leurs trajectoires en fonction de la position de la source par rapport à l'antenne. Cela nous a permis d'identifier les scénarios pour lesquels des sources fantômes existent. Néanmoins, la probabilité de rencontrer ces scénarios en situation réelle est nulle.

L'estimation de la trajectoire de la source a ensuite été réalisée dans les trois cas. Dans le premier, l'estimateur du maximum de vraisemblance ne s'est pas révélé efficace, sauf pour des bruits de très faible écart type (donc peu réalistes). Dans le second, l'estimateur est efficace, mais les performances asymptotiques relatives à l'immersion de la source sont trop importantes pour être exploitables. Une hypothèse sur l'immersion a donc été faite, entraînant un biais. En conséquence, l'estimateur n'est plus efficace. Cependant, cet estimateur (biaisé) fournit des résultats opérationnellement exploitables. Enfin dans le dernier cas, l'estimation n'est pas envisageable compte tenu de l'ordre de grandeur de la **BCR**. Nous avons alors vérifié qu'une hypothèse sur la profondeur de la source est suffisante pour obtenir des résultats exploitables.

Lorsque les trajets suivis par l'onde sont inconnus, une méthode de choix de leurs classes a été mise en place. Cette méthode a obtenu d'excellents taux de réussite dans nos simulations.

Le **chapitre 4** a été consacré au problème de la trajectographie passive par les antennes de flanc lorsque que l'observateur est en MRU.

Nous avons considéré les deux cas suivants, correspondant à un ou deux trajets détectés par les FA :

- Un trajet détecté : dans une première configuration, chaque antenne délivre une mesure de cosinus d'élévation. Dans une autre, elles fournissent deux mesures de différence de temps d'arrivée (TDOA) et une mesure de cosinus d'élévation.
- Deux trajets sont détectés : dans chaque configuration, le nombre de mesures est doublé (un par trajet détecté).

Dans un premier temps nous avons donné les théorèmes statuant sur l’observabilité de la trajectoire de la source. Lorsque l’observateur détecte un seul trajet, la trajectoire de la source est observable dans presque toutes les situations. S’il détecte deux trajets, alors la trajectoire de la source est observable dans toutes les situations.

L’évaluation des performances asymptotiques a été réalisée ensuite. Elle a conduit aux conclusions suivantes :

- lorsque les antennes de flanc ne délivrent que des mesures de cosinus d’élévation, la trajectoire de la source n’est pas estimable, que l’on détecte un ou deux trajets ;
- lorsque chaque antenne détecte un trajet et que les FA délivrent deux mesures de différence de temps d’arrivée et une mesure de cosinus d’élévation, la trajectoire de la source n’est pas estimable. Une hypothèse sur l’immersion de la source est suffisante pour obtenir des résultats opérationnellement exploitables ;
- lorsque chaque antenne détecte deux trajets et que les FA délivrent quatre mesures de différence de temps d’arrivée et deux mesures de cosinus d’élévation, la trajectoire de la source est estimable.

Nous avons finalement réalisé l’estimation de la trajectoire de la source quand les FA délivrent des cosinus d’élévation et des TDOA. L’estimateur du maximum de vraisemblance se révèle alors efficace lorsque deux trajets sont détectés par l’observateur. Lorsqu’un seul trajet est détecté, l’estimateur présente un biais dû à l’hypothèse faite sur l’immersion de la source.

Dans le **dernier chapitre**, nous nous sommes intéressés au problème de trajectographie lorsque la TA et les FA sont utilisées conjointement.

L’étude de l’observabilité s’appuie sur les théorèmes que nous avons énoncés dans les deux chapitres précédents. L’estimation de la trajectoire de la source a été étudiée lorsque l’observateur ne manœuvre pas. L’étude a été menée en trois temps.

- Dans un premier temps, nous avons considéré que l’onde émise par la source se propage selon un seul trajet connu par l’observateur. Lorsque l’observateur ne manœuvre pas, une hypothèse sur la profondeur de la source est suffisante pour que sa trajectoire soit estimable. L’estimateur est dans ce cas-là biaisé, mais ce biais est acceptable d’un point de vue opérationnel.
- Nous avons ensuite considéré que l’observateur ne connaît pas le trajet emprunté par l’onde. Nous avons alors proposé une méthode de choix du type de trajet, dont les performances empiriques ont été évaluées sur des scénarios types : la méthode a pris la bonne décision dans nos simulations.
- Finalement, nous avons considéré le cas où deux trajets sont détectés par l’observateur. Nous avons proposé une troisième méthode de décision (exhaustive) permettant d’associer les pistes de l’antenne linéaire remorquée et celles fournies par les antennes de flanc ainsi que les types de trajets suivis. Cette méthode s’est avérée très performante dans nos simulations.

A l’issue des travaux réalisés au cours de cette thèse, plusieurs axes de recherche peuvent être proposés.

- Un premier axe de travail consisterait à prendre en compte le « temps de vol » de l’onde acoustique. Ignorer ce temps de propagation introduit un biais sur l’estimation de la trajectoire de la source.
- Un deuxième axe de recherche serait d’aborder l’étude du problème de la trajectographie multi-sources. Ce sujet est dans la continuité du chapitre 5.

- Il serait également intéressant d'étudier la faisabilité d'une approche temps réel à partir d'un filtre récursif. En outre, le caractère récursif est adapté aux sources « manœuvrantes ».
- Et surtout, la suite naturelle de cette thèse serait de confronter nos algorithmes à des données réelles.
- Enfin il serait intéressant d'étendre l'étude menée dans cette thèse à d'autres modèles de mesures. En effet dans nos travaux, nous avons fait implicitement l'hypothèse de la « pureté » des pistes. Or, l'extracteur laisse passer quelquefois des fausses alarmes. L'utilisation du théorème des probabilités totales nous permettrait de proposer un modèle de mesures plus réaliste à l'instar de [Jauffret et Bar-Shalom, 1993].

Annexe du chapitre 2 : expression de la profondeur relative entre la source et l'observateur

Nous présentons dans cette annexe le cheminement permettant d'obtenir l'expression de la profondeur relative ζ_{OT} séparant la source (ou de son image) de l'observateur (ou de son image). Nous donnons tout d'abord l'expression de ζ_{OT} sur quelques cas particuliers (tout en présentant la construction des trajets), puis nous donnons l'expression générale de ζ_{OT} .

L'onde acoustique suit un trajet direct. (figure A.1)

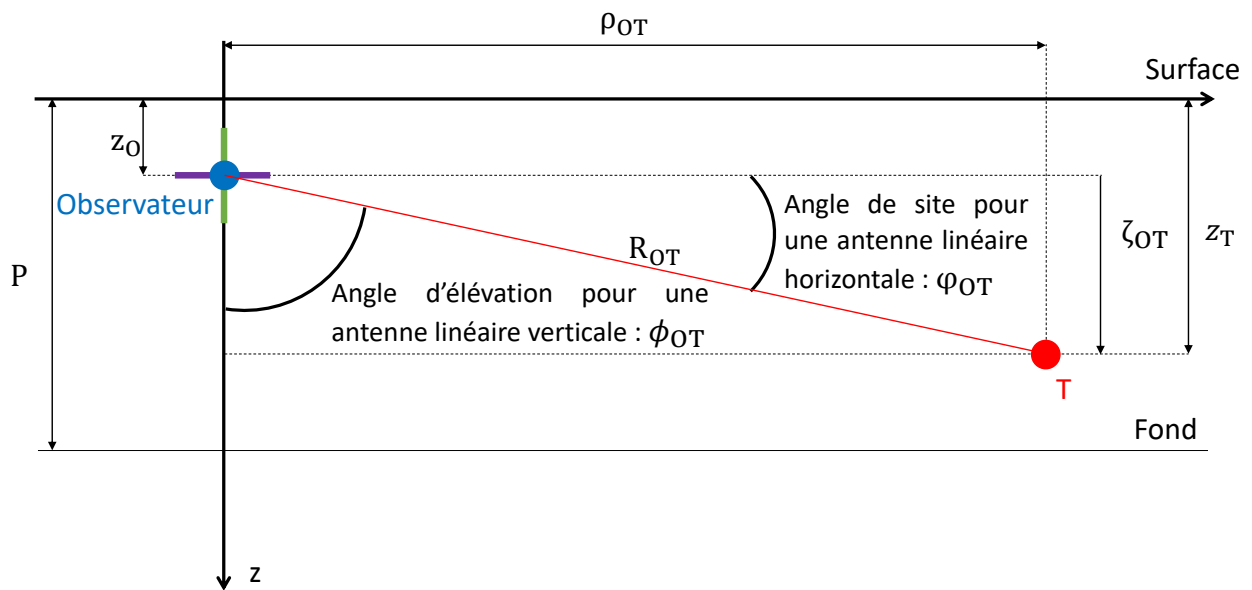


FIGURE A.1 – L'onde suit un trajet direct (ou trajet $(\pm 1, 0, 0)$).

Lorsque l'onde acoustique emprunte le trajet direct,

$$\zeta_{OT} = z_T - z_0. \tag{A.1}$$

L'onde acoustique suit un trajet réfléchi-surface. (figure A.2)

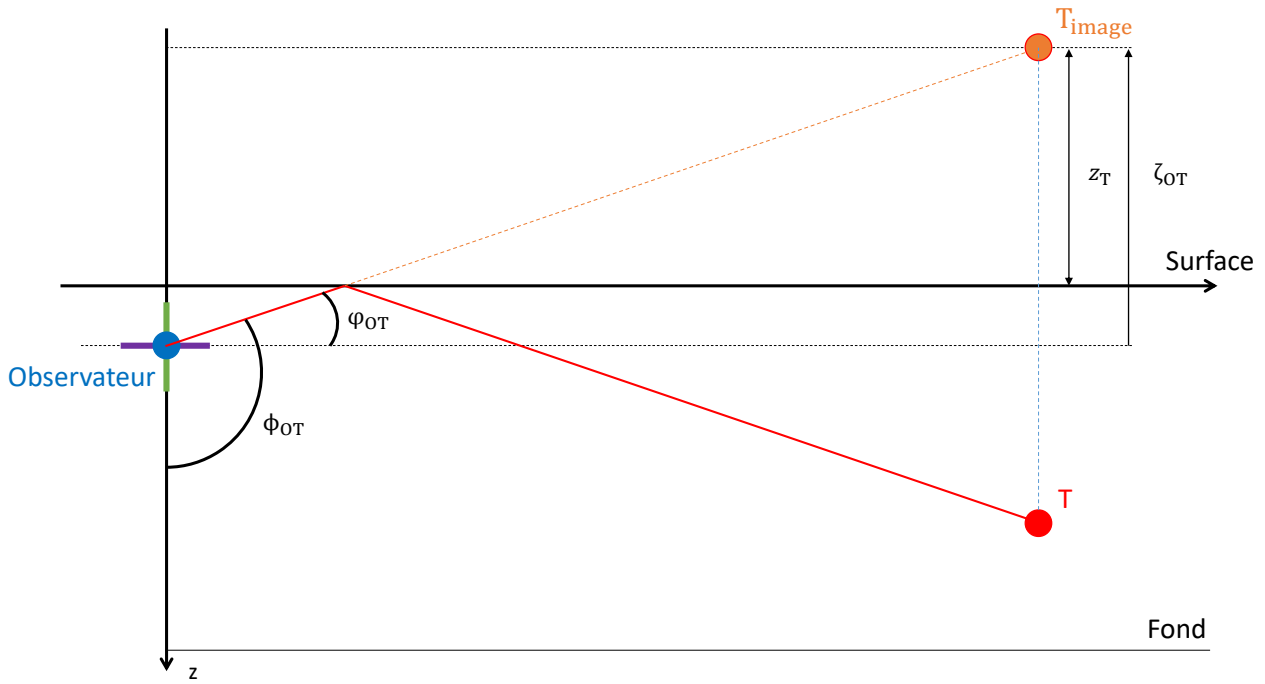


FIGURE A.2 – L'onde subit une réflexion à la surface (ou trajet $(-1, 1, 0)$).

La construction du trajet réfléchi-surface fait intervenir une source image. Cette source image est obtenue en faisant la symétrie de la source par rapport à la surface. Dans ce cas,

$$\zeta_{OT} = -(z_O + z_T). \quad (\text{A.2})$$

L'onde suit un trajet réfléchi-fond. (figure A.3)

La construction du trajet réfléchi-fond implique également la création d'une source image. L'image de la source est cette fois-ci obtenue en faisant la symétrie de la source par rapport au fond.

$$\zeta_{OT} = 2P - z_O - z_T. \quad (\text{A.3})$$

L'onde suit le trajet $(-1, 1, 1)$. (figure A.4)

La construction de ce trajet impose, comme pour tous les trajets incluant au moins une réflexion, la création d'une source image. Mais dans ce cas, elle impose également la création d'un observateur image. La source image est obtenue en prenant la symétrie de la source par rapport à la surface et l'observateur image est obtenu en prenant la symétrie de l'observateur par rapport au fond.

$$\zeta_{OT} = 2P - z_O + z_T. \quad (\text{A.4})$$

L'onde suit le trajet $(1, 1, 1)$. (figure A.5)

Comme pour le trajet précédent, la construction du trajet $(1, 1, 1)$ impose la construction d'une source image et d'un observateur image. L'image de la source est obtenue en prenant le symétrique de la source

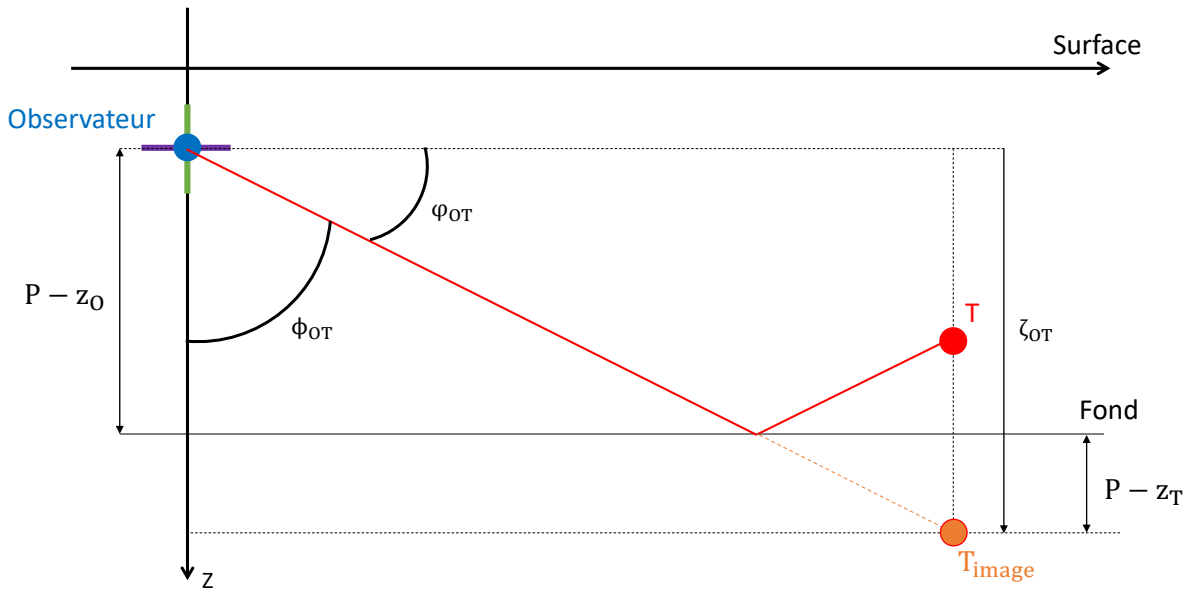


FIGURE A.3 – L'onde subit une réflexion sur le fond (ou trajet $(1, 0, 1)$).

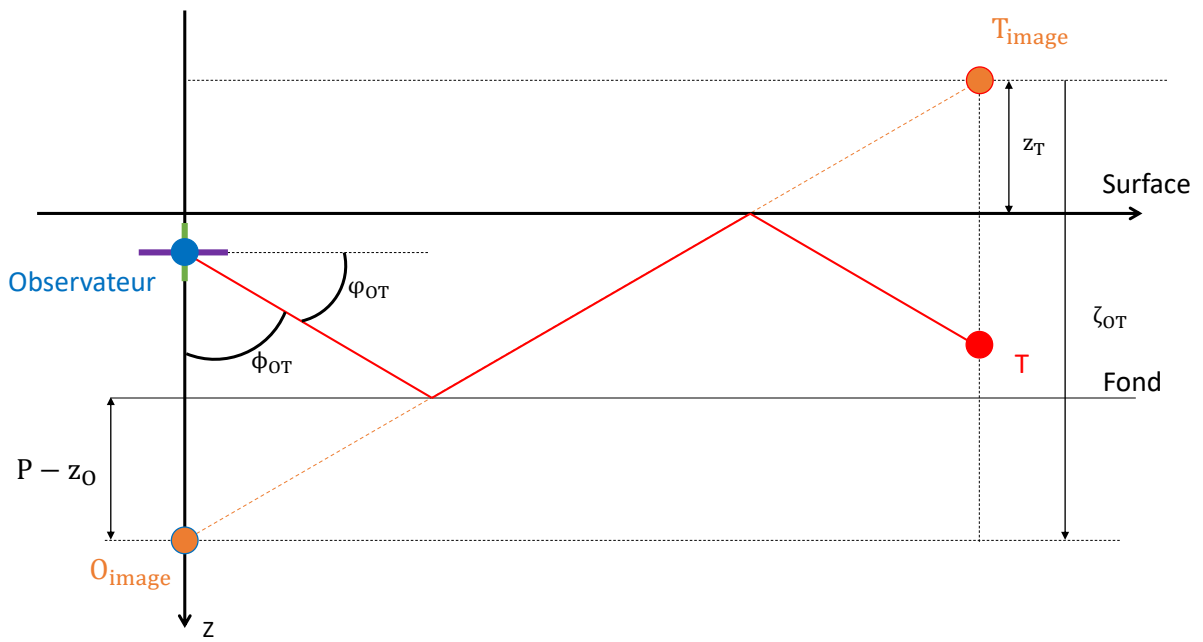


FIGURE A.4 – L'onde subit une réflexion sur la surface et une sur le fond (ou trajet $(-1, 1, 1)$).

(ou trajet (1, 1, 1))

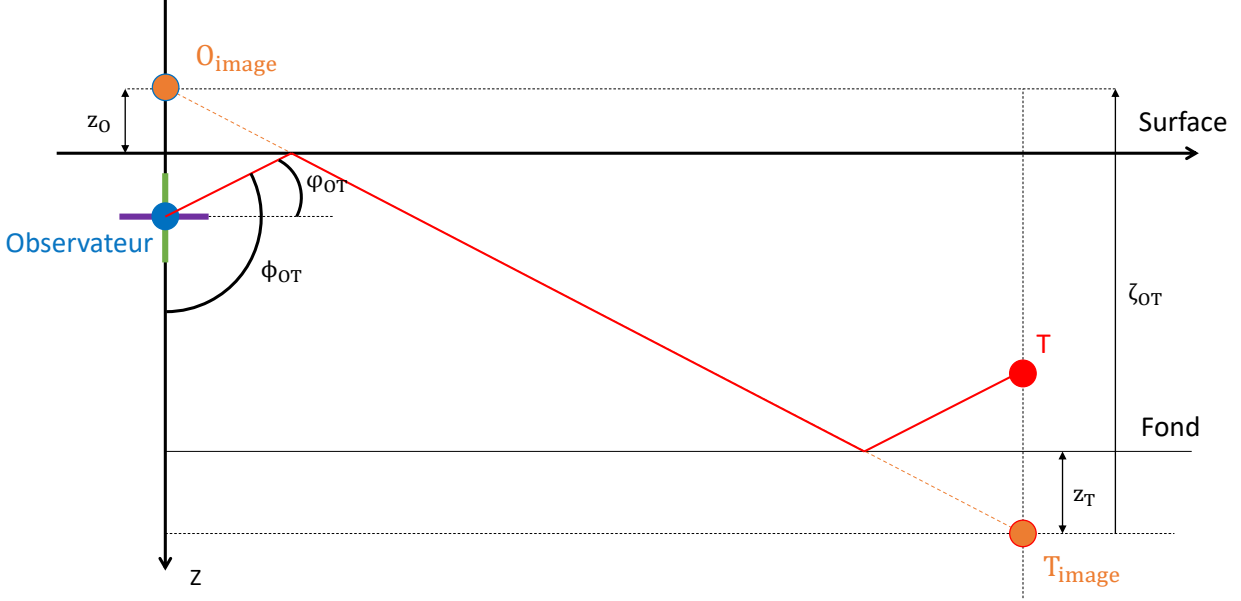


FIGURE A.5 – L’onde subit une réflexion sur le fond et une sur la surface (ou trajet (1, 1, 1)).

par rapport au fond et l’image de l’observateur est obtenue en prenant le symétrique de l’observateur par rapport à la surface.

$$\zeta_{OT} = -(2P + z_O - z_T). \quad (\text{A.5})$$

L’onde suit le trajet (-1, 2, 1). (figure A.6)

La construction de ce trajet fait également intervenir une source image. Cette image est obtenue en faisant la symétrie de la source par rapport au « fond image », lui même obtenu par la symétrie du fond par rapport à la surface.

$$\zeta_{OT} = -(2P + z_O + z_T). \quad (\text{A.6})$$

Nous notons ici que pour les trajets ne comportant qu’une seule réflexion sur le fond, les expressions de ζ_{OT} présentent toutes une similarité. Elles font en effet toutes intervenir le terme $2P$. Nous cherchons donc maintenant à vérifier si cette similarité se retrouve pour des trajets comportant au moins deux réflexions sur le fond. Dorénavant, nous ne rappelons plus que la construction du trajet fait intervenir une source image ou un observateur image.

L’onde suit le trajet (1, 1, 2). (figure A.7)

$$\zeta_{OT} = 4P - z_O - z_T. \quad (\text{A.7})$$

Nous remarquons que l’expression (A.3) est très proche de l’expression (A.7). Seul le terme multiplicatif de P change (ici $4P$). Par la construction de l’ensemble des trajets comportant une réflexion sur le

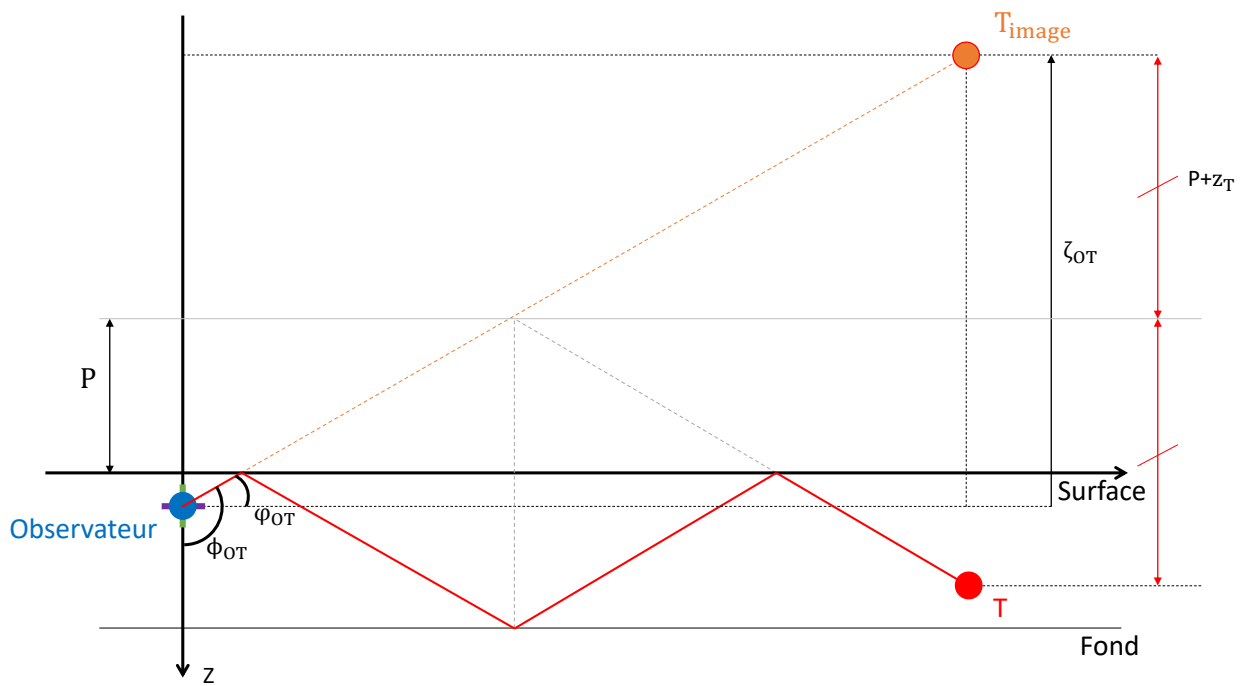


FIGURE A.6 – L'onde subit deux réflexions sur la surface et une sur le fond (ou trajet $(-1, 2, 1)$).

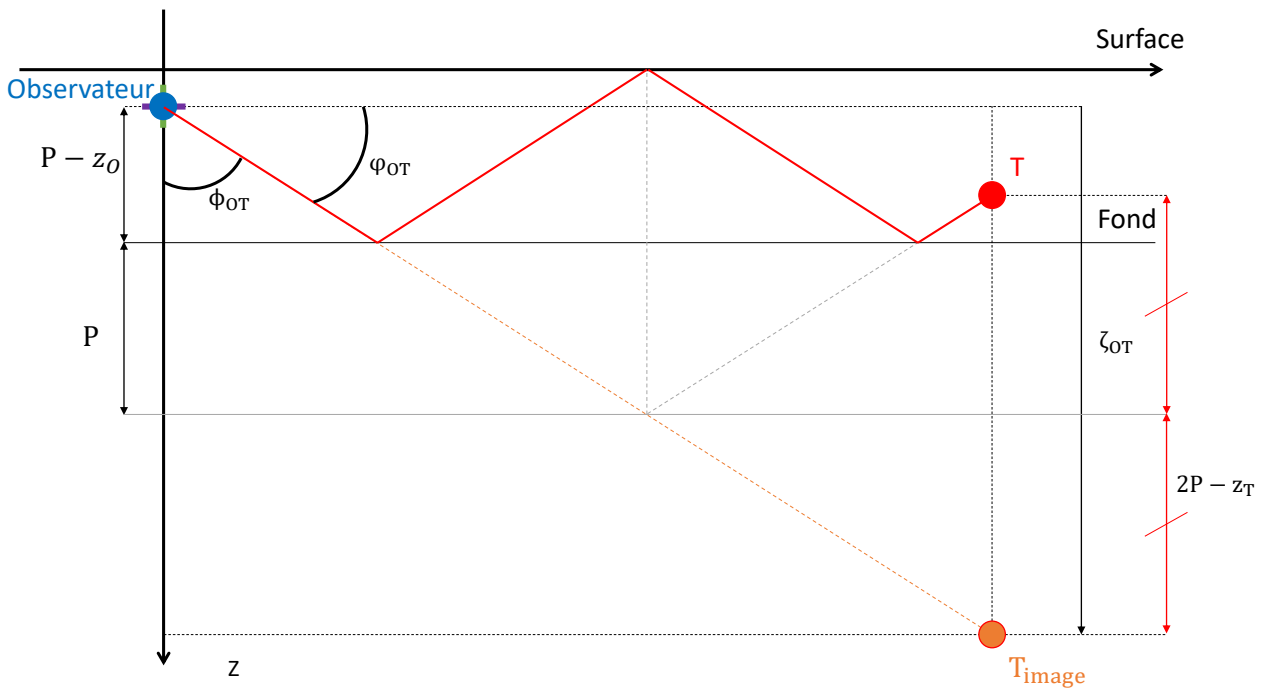


FIGURE A.7 – L'onde subit deux réflexions sur le fond et une sur la surface (ou trajet $(1, 1, 2)$).

fond de plus que le nombre de réflexions à la surface (non présentée dans cette thèse), nous vérifions que ce terme multiplicatif correspond au nombre de réflexions sur le fond. L'expression de ζ_{OT} pour ces trajets est

$$\zeta_{OT} = 2n_b P - z_O - z_T. \quad (\text{A.8})$$

L'onde suit le trajet $(-1, 2, 2)$. (figure A.8)

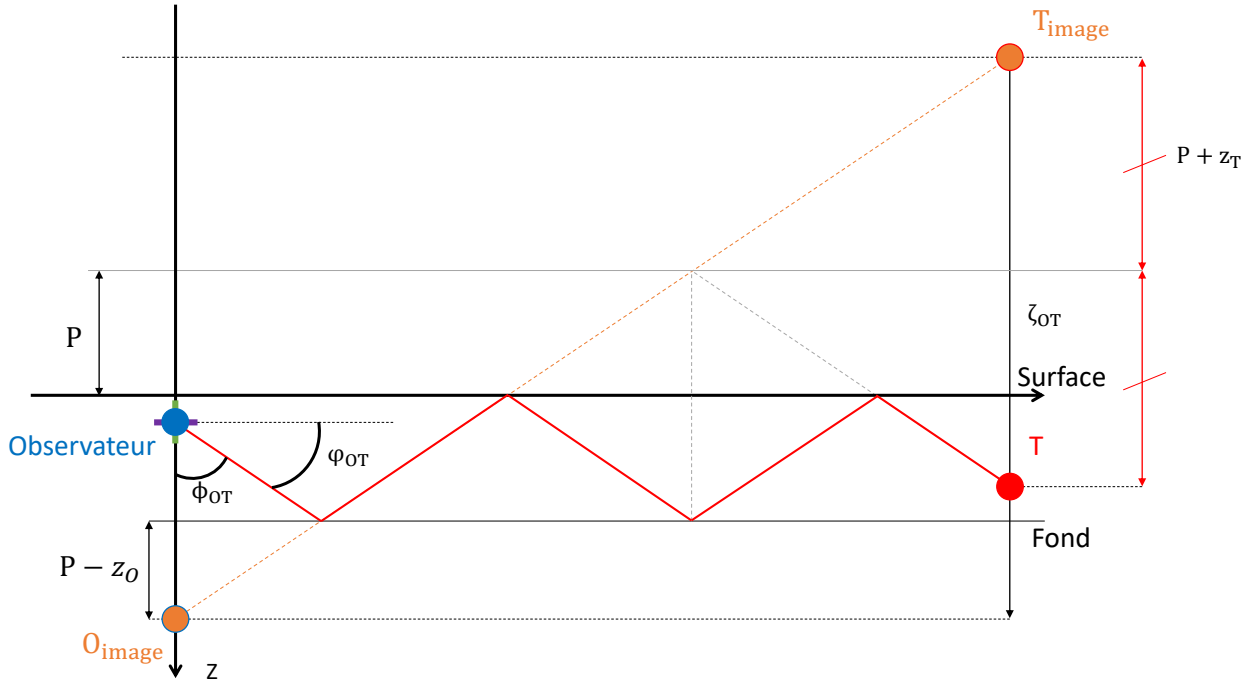


FIGURE A.8 – L'onde subit deux réflexions sur la surface et deux sur le fond (ou trajet $(-1, 2, 2)$).

$$\zeta_{OT} = 4P - z_O + z_T. \quad (\text{A.9})$$

Comme pour le trajet précédent, nous remarquons que l'expression (A.9) est très proche de l'expression (A.4). Nous en déduisons que le terme multiplicatif devant $2P$ est n_b . Nous pouvons écrire l'expression de ζ_{OT} pour les trajets d'une onde émise vers le haut et comportant un même nombre de réflexions sur la surface que de réflexions sur le fond.

$$\zeta_{OT} = 2n_b P - z_O + z_T. \quad (\text{A.10})$$

L'onde suit le trajet $(1, 2, 2)$. (figure A.9)

$$\zeta_{OT} = -(4P + z_O - z_T). \quad (\text{A.11})$$

De nouveau, la même remarque faite pour les trajets $(1, 1, 2)$ et $(-1, 2, 2)$ peut être faite ici. Nous trouvons l'expression de ζ_{OT} en ajoutant le terme n_b devant P pour les trajets d'une onde émise vers le haut et comportant un même nombre de réflexions sur la surface que de réflexions sur le fond.

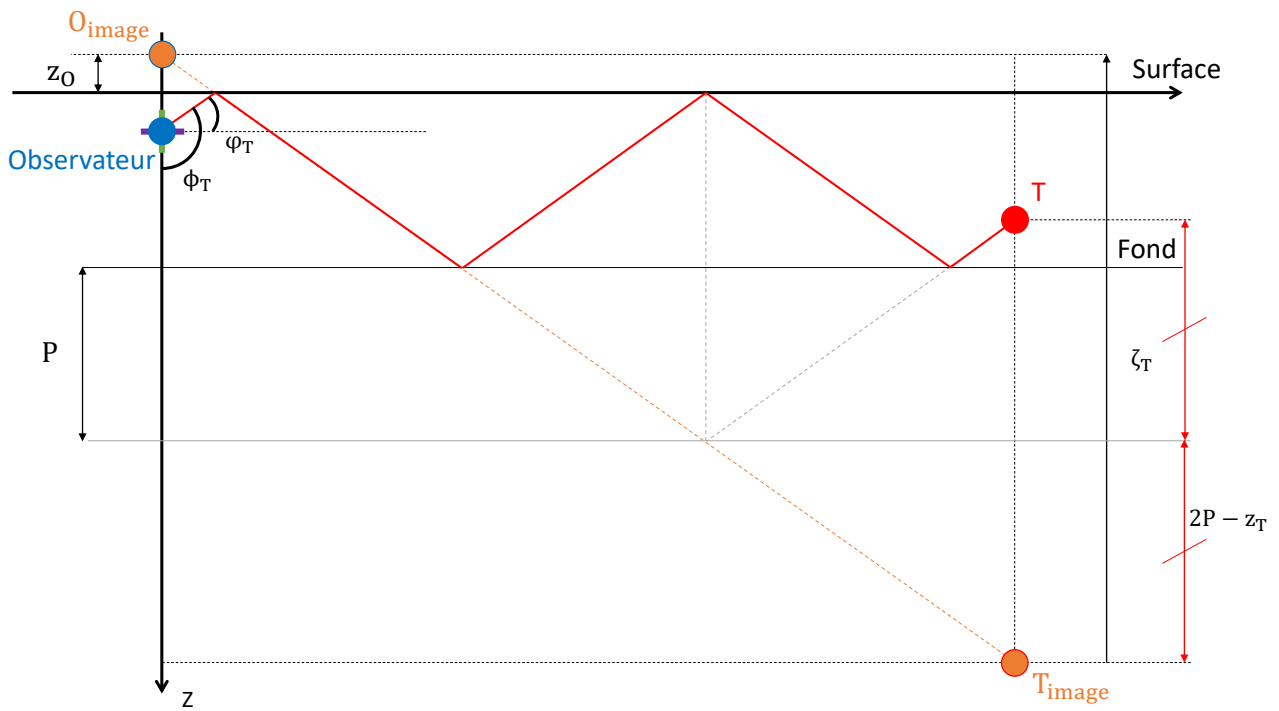


FIGURE A.9 – L’onde subit deux réflexions sur le fond et une sur la surface (ou trajet (1, 2, 2)).

$$\zeta_{OT} = -(2n_b P + z_O - z_T). \quad (\text{A.12})$$

L’onde suit le trajet (-1, 3, 2). (figure A.10)

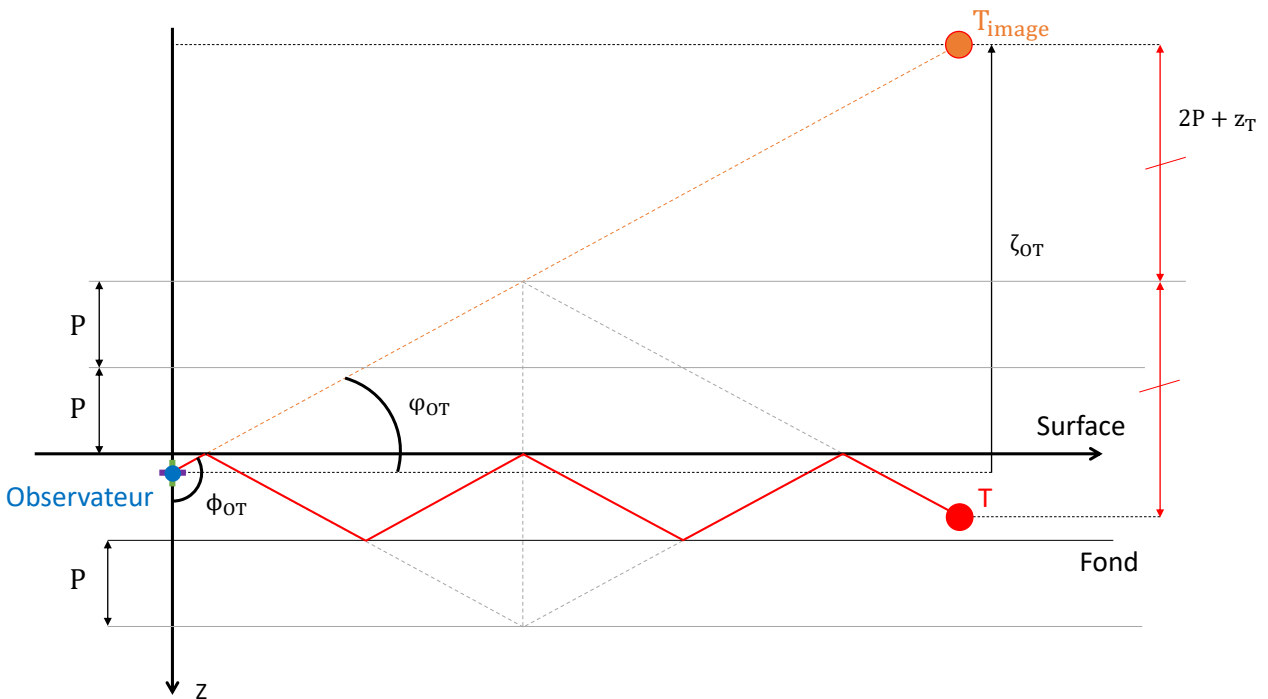


FIGURE A.10 – L’onde subit trois réflexions sur la surface et deux sur le fond (ou trajet (-1, 3, 2)).

$$\zeta_{OT} = -(4P + z_O + z_T). \quad (\text{A.13})$$

De nouveau, nous trouvons l'expression de ζ_{OT} en ajoutant le terme n_b devant P pour les trajets d'une onde émise vers le haut et comportant une réflexion sur la surface de plus que de réflexions sur le fond.

$$\zeta_{OT} = -(2n_b P + z_O + z_T). \quad (\text{A.14})$$

Nous rappelons dans la table A.1 l'expression de ζ_{OT} pour les différents trajets pouvant être suivis par une onde acoustique.

TABLE A.1 – Résumé des expressions de ζ_{OT} en fonction du trajet suivi par l'onde acoustique.

Nom du trajet :	Expression de ζ_{OT} :
$(\pm 1, 0, 0)$	$\zeta_{OT} = z_T - z_O$
$(-1, 1, 0)$	$\zeta_{OT} = -(z_T + z_O)$
$(1, 0, 1)$	$\zeta_{OT} = 2P - z_O - z_T$
$(-1, 1, 1)$	$\zeta_{OT} = 2P - z_O + z_T$
$(1, 1, 1)$	$\zeta_{OT} = -(2P + z_O - z_T)$
$(-1, 2, 1)$	$\zeta_{OT} = -(2P + z_O + z_T)$
$(1, n_b - 1, n_b)$	$\zeta_{OT} = 2n_b P - z_O - z_T$
$(-1, n_b, n_b)$	$\zeta_{OT} = 2n_b P - z_O + z_T$
$(1, n_b, n_b)$	$\zeta_{OT} = -(2n_b P + z_O - z_T)$
$(1, n_b + 1, n_b)$	$\zeta_{OT} = -(2n_b P + z_O + z_T)$

Nous cherchons maintenant une expression généralisée de ζ_{OT} en fonction des paramètres δ , n_s , n_b , P , z_O et z_T . Commençons par le plus évident, nous voyons dans la table A.1 que le terme $2n_b P$ intervient dans toutes les expressions de ζ_{OT} (pour les trajets $(\pm 1, 0, 0)$ et $(-1, 1, 0)$, $n_b = 0$ ce constat est donc également vérifié pour ces trajets). L'expression généralisée de ζ_{OT} est donc de la forme décrite à l'équation (A.15). Il nous reste à identifier les expressions « cachées » derrière les trois signes \pm .

$$\zeta_{OT} = \pm(2n_b P \pm z_O \pm z_T). \quad (\text{A.15})$$

Mettons tout d'abord le cas du trajet direct de côté, nous pouvons facilement identifier le terme \pm se trouvant devant z_T . En effet, nous voyons encore une fois dans la table A.1 que, lorsque $\delta = 1$ nous retrouvons $-z_T$ et lorsque $\delta = -1$ nous retrouvons $+z_T$. Le terme \pm peut donc être remplacé par $-\delta$ dans l'équation (A.15). La nouvelle forme de l'expression de ζ_{OT} est donc l'équation (A.16).

$$\zeta_{OT} = \pm(2n_b P \pm z_O - \delta z_T). \quad (\text{A.16})$$

Toujours en laissant de côté le cas du trajet direct, nous nous intéressons maintenant au terme \pm devant z_O . L'identification de ce terme est un peu plus complexe que le précédent. En effet, nous ne pouvons pas directement l'associer à δ . Multiplions tout d'abord le terme z_O par δ . Pour les trajets $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(-1, 2, 1)$ nous écrivons à l'équation (A.17) l'expression de $|\zeta_{OT}|$ en multipliant z_O par δ .

$$\left\{ \begin{array}{l} |\zeta_{OT}| = 2P - \delta z_O - \delta z_T \\ |\zeta_{OT}| = 2P + \delta z_O - \delta z_T \\ |\zeta_{OT}| = 2P + \delta z_O - \delta z_T \\ |\zeta_{OT}| = 2P - \delta z_O - \delta z_T \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

Nous voyons à l'équation (A.17) que le coefficient δ devant z_O ne permet pas de régler le problème du signe devant ce dernier. Toutefois, cet ajout permet de redistribuer les signes $+$ et $-$ de manière plus pratique. En effet, nous constatons à l'équation (A.17) que nous avons le terme $-\delta z_O$ lorsque le trajet comporte un nombre différent de réflexions fond et surface et le terme $+\delta z_O$ lorsque le trajet comporte un même nombre de réflexions fond et surface. Nous cherchons donc un terme qui prend la valeur -1 lorsque $n_s \neq n_b$ et 1 lorsque $n_s = n_b$. Une possibilité d'expression de ce terme est : $(-1)^{n_s - n_b}$. Nous vérifions à l'équation (A.18) que $(-1)^{n_s - n_b}$ prend bien les valeurs désirées (nous rappelons préalablement que pour les trajets choisis, n_s ne peut être supérieur à $n_b + 1$ et inférieur à $n_b - 1$).

$$\left\{ \begin{array}{l} n_s = n_b : (-1)^{n_s - n_b} = 1 \\ n_s \neq n_b : (-1)^{n_s - n_b} = -1 \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

Le terme $(-1)^{n_s - n_b}$ prend bien les valeurs désirées. Nous pouvons donc écrire l'équation (A.16) en remplaçant les termes $+$ ou $-$ devant z_O par $(-1)^{n_s - n_b}$:

$$\zeta_{OT} = \pm(2n_b P + \delta(-1)^{n_s - n_b} z_O - \delta z_T). \quad (\text{A.19})$$

Finalement, nous remarquons que le dernier terme \pm donnant le signe de l'expression de ζ_{OT} suit la même logique que celui qui été placé devant z_O . Nous en déduisons de nouveau que $\delta(-1)^{n_s - n_b}$ se « cache » derrière ce terme \pm . Nous trouvons finalement l'expression généralisée de ζ_{OT} à l'équation (A.20).

$$\zeta_{OT} = -\delta(-1)^{n_s - n_b}(2n_b P + \delta((-1)^{n_s - n_b} z_O - z_T)). \quad (\text{A.20})$$

Nous venons donc de trouver l'expression généralisée de ζ_{OT} pour tous les trajets, à l'exception les trajets direct est réfléchi-surface. Néanmoins, en appliquant les paramètres (δ, n_s, n_b) de ce trajet à l'équation (A.20) nous montrons (cf. équation (A.21)) que nous retrouvons bien l'équation de ζ_{OT} pour un trajet direct. Finalement, nous avons trouvé l'expression généralisée de ζ_{OT} pour tous les trajets pouvant être suivis par une onde acoustique lorsque l'on considère qu'elle se propage en lignes droites. Nous pouvons donc utiliser l'équation (A.20) dans nos équations de mesures.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trajet } (-1, 0, 0) : \zeta_{OT} = z_T - z_O; \\ \text{Trajet } (1, 0, 0) : \zeta_{OT} = z_T - z_O. \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

Annexe du chapitre 2 : initialisation et test d'arrêt de l'algorithme d'estimation.

L'algorithme de minimisation est initialisé de la manière suivante :

Nous tirons 20000 vecteurs d'état candidats à l'initialisation

$$X_{n,init} = (x_{n,init}, y_{n,init}, z_{n,init}, \dot{x}_{n,init}, \dot{y}_{n,init})^T,$$

pour $n = 1, \dots, 20000$.

- les deux premières coordonnées $x_{n,init}$ et $y_{n,init}$ sont tirées aléatoirement sur l'intervalle $[-30\text{km}; 30\text{km}]$ ¹,
- la troisième coordonnée $z_{n,init}$ est tirée aléatoirement sur l'intervalle $[0\text{m}; 400\text{m}]$ ²,
- les coordonnées de vitesses $\dot{x}_{n,init}$ et $\dot{y}_{n,init}$ sont tirées aléatoirement sur l'intervalle $[-20\text{m/s}; 20\text{m/s}]$.

Pour chaque vecteur $X_{n,init}$ nous calculons le critère de moindres carrés pondérés. Le vecteur donnant le plus petit critère sera choisi comme vecteur d'initialisation de l'algorithme.

Nous imposons deux conditions d'arrêt de l'algorithme : (i) nous fixons un nombre maximal de 60 itérations; (ii) nous fixons un critère d'arrêt fonction de la distance entre deux estimés obtenus à deux itérations successives (si l'algorithme ne converge plus ou très lentement, alors nous le forçons à s'arrêter).

1. Dans le cas où l'observateur sait *a priori* de quel côté se trouve la cible (i.e. lorsqu'il dispose d'antennes de flanc), le tirage des positions $x_{n,init}$ et $y_{n,init}$ se fait dans le demi-espace où se trouve la cible.

2. un sous-marin classique ne descendant généralement pas en dessous d'une certaine profondeur

Annexe du chapitre 3 : démonstration du théorème 2

La démonstration est faite dans le cas où le premier *leg* de la trajectoire est orienté vers le Nord (comme dans la démonstration du théorème 1). Par conséquent, le vecteur-vitesse de l'antenne durant le 1^{er} *leg* est

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } v > 0.$$

Son vecteur-vitesse durant le second *leg* est

$$V_2 = \begin{pmatrix} v \sin(\omega) \\ v \cos(\omega) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \omega \neq k\pi \text{ (le demi-tour est exclu).}$$

Nous aurons besoin au cours de la démonstration des matrices

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} -\cos(2\omega) & \sin(2\omega) & 0 \\ \sin(2\omega) & \cos(2\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui sont respectivement les matrices de symétrie orthogonale par rapport au plan vertical contenant le premier *leg* et par rapport au plan vertical contenant le second *leg*.

Nous allons nous appuyer sur le théorème 1 pour cette démonstration. Aussi, devons-nous considérer pour chacun des deux *legs* les quatre situations suivantes :

- la source est dans le *broadside* de l'antenne,
- la source est dans l'*endfire* de l'antenne,
- la source a une trajectoire parallèle à celle de l'antenne, mais n'est pas en *endfire*,
- tous les autres cas.

Remarque 25.

Si la source se trouve dans une situation « A » durant le 1^{er} leg et puis dans une situation « B » durant le second (en supposant que « A » et « B » soient compatibles), alors les conclusions sur l'observabilité sont les mêmes que si la source se trouve dans la situation « B » durant le 1^{er} leg puis dans la situation « A » durant le second. Pour se convaincre de cela, il suffit de renverser le temps dans les équations. Cette remarque permet de réduire la démonstration.

Remarque 26.

Si la source est en endfire (respectivement en broadside ou suivant le même cap) de l'antenne durant le 1^{er} leg, elle ne peut être en endfire (respectivement en broadside ou suivant le même cap) durant le 2nd leg.

Remarque 27.

Dans la majorité des cas que nous allons traiter, les vecteurs-vitesses seront à la base des calculs. Nous nous limiterons aux deux premières coordonnées lorsque cela sera suffisant.

Démonstration.

Première situation : la source est en *broadside* de l'antenne durant le 1^{er} leg.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} P_{OT}(t) &\perp P_O(t) \quad \forall t \leq \tau \\ \Leftrightarrow P_{OT}^T(t) \cdot P_O(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow tP_{OT}^T(0)V_1 - t^2V_{OT}^TV_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à dire que $P_{OT}(0)$ est aussi orthogonal à V_1 et que V_{OT} est orthogonal à V_1 . On en déduit que V_{OT} est de la forme

$$\begin{aligned} V_{OT} &= \begin{pmatrix} c_T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e } V_T - V_1 = \begin{pmatrix} c_T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que

$$V_T = \begin{pmatrix} c_T \\ v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

D'après le théorème 1, une source-fantôme G est aussi en *broadside* de l'antenne durant le 1^{er} leg. Le même raisonnement que ci-dessus nous amène à conclure que

$$V_G = \begin{pmatrix} c_G \\ v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

a) La (vraie) source peut-elle être *endfire* de l'antenne durant le second *leg*?

Si tel est le cas, $P_{OT}(t)$ est colinéaire à V_2 pour $t \geq \tau$, et par voie de conséquence V_T est aussi colinéaire à V_2 . En particulier $P_{OT}(\tau)$ est colinéaire à V_2 et il est aussi orthogonal à V_1 . Nous avons donc que V_1 et V_2 sont orthogonaux. Puisque V_T est colinéaire à V_2 , V_T est orthogonal à V_1 , ce qui est contradictoire avec (C.1). Nous pouvons donc rejeter ces cas.

Enfin, la source ne peut donc pas être en *endfire* de l'antenne durant le second *leg*.

b) Nous traitons le cas où la source suit le même cap que l'antenne durant le 2nd *leg* sans être en *endfire* plus tard.

c) Nous considérons alors tous les autres cas (la source n'est ni en *broadside*, ni en *endfire* ni en route parallèle durant le second *leg*). D'après le théorème 1, une source-fantôme a sa trajectoire définie par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \geq \tau. \quad (\text{C.3})$$

ou par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \geq \tau. \quad (\text{C.4})$$

Exploitions d'abord (C.3) et dérivons ses termes par rapport à t :

$$\begin{aligned} V_G - V_2 &= \beta(V_T - V_2); \\ \Leftrightarrow V_G &= \beta V_T + (1 - \beta)V_2; \\ \text{i.e } \begin{pmatrix} c_G \\ v \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta c_T \\ \beta v \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \beta) \begin{pmatrix} v \sin(\omega) \\ v \cos(\omega) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On déduit de l'équation des secondes coordonnées que $\beta = 1$. Il n'y a donc pas de source-fantôme dont la trajectoire est définie par (C.3)

Exploitions maintenant (C.4) et dérivons ses termes par rapport au temps.

$$\begin{aligned} V_{OG} &= \beta \mathbf{S}_2 V_{OT}; \\ \Leftrightarrow V_G - V_2 &= \beta \mathbf{S}_2 V_T - \beta \mathbf{S}_2 V_2. \end{aligned}$$

Puisque \mathbf{S}_2 est la matrice de symétrie axiale autour de l'axe porté par V_2 , nous avons $\mathbf{S}_2 V_2 = V_2$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} V_G - V_2 &= \beta \mathbf{S}_2 V_T - \beta V_2; \\ \Leftrightarrow V_G &= \beta \mathbf{S}_2 V_T + (1 - \beta)V_2. \end{aligned}$$

Ce qui donne en termes de coordonnées (les deux premières)

$$\begin{pmatrix} c_G \\ v \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -c_T \cos(2\omega) + v \sin(2\omega) \\ c_T \sin(2\omega) + v \cos(2\omega) \end{pmatrix} + (1 - \beta)v \begin{pmatrix} \sin(\omega) \\ \cos(\omega) \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons que si $c_T \sin(2\omega) + v \cos(2\omega) - v \cos(\omega) \neq 0$, alors

$$\beta = \frac{v(1 - \cos(\omega))}{c_T \sin(2\omega) + v \cos(2\omega) - v \cos(\omega)}.$$

Dans ce cas-là, nous pouvons calculer c_G . En conclusion, il y a donc au plus une source-fantôme

et sa trajectoire est définie par (C.4).

Deuxième situation : la source se trouve en *endfire* de l'antenne durant le 1^{er} *leg*.

Nous avons donc $z_T = z_O$ et que $P_{OT}(t)$ est colinéaire à V_1 pour $t \leq \tau$. D'après le théorème 1, toute source-fantôme est aussi en *endfire*. Ceci entraîne

- 1) $z_G = z_O = z_T$,
- 2) il existe un scalaire α positif tel que $P_{OG}(t) = \alpha P_{OT}(t)$ pour $t \leq \tau$,
- 3) V_{OT} , V_{OG} et V_1 sont colinéaires.

$$\text{On pose } V_{OT} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ c_T \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_{OG} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha c_T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } V_T = \begin{pmatrix} 0 \\ c_T + v \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha c_T + v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Examinons le cas où la source durant le second *leg* n'est ni en *broadside*, ni en *endfire*, ni en route parallèle avec celle de l'antenne.

D'après le théorème 1, la trajectoire de la source fantôme est définie par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \geq \tau. \quad (\text{C.5})$$

ou par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \geq \tau. \quad (\text{C.6})$$

Exploitions d'abord l'équation (C.5). Dérivons les membres de cette équation par rapport au temps ; nous obtenons

$$\begin{aligned} V_{OG} &= \beta V_{OT}; \\ \Leftrightarrow V_G - V_2 &= \beta(V_T - V_2); \\ \Leftrightarrow V_G &= \beta V_T + (1 - \beta)V_2. \end{aligned}$$

Les deux premières coordonnées vérifient donc l'égalité

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha c_T + v \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ c_T + v \end{pmatrix} + (1 - \beta) \begin{pmatrix} v \sin(\omega) \\ v \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

Nous tirons de cette égalité que $\beta = 1$ (car $\omega \in]0, \pi[$) Il n'y a donc pas de source-fantôme dont la trajectoire est définie par (C.5).

Exploitions maintenant l'équation (C.6), en $t = \tau$:

$$\mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(\tau).$$

Considérons les deux premières composantes :

$$\begin{pmatrix} x_{OG}(\tau) \\ y_{OG}(\tau) \end{pmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -\cos(2\omega) & \sin(2\omega) \\ \sin(2\omega) & \cos(2\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{OT}(\tau) \\ y_{OT}(\tau) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} x_{OG}(\tau) \\ y_{OG}(\tau) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_{OT}(\tau) \\ y_{OT}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur bi-dimensionnel de coordonnées $\begin{pmatrix} x_{OT}(\tau) \\ y_{OT}(\tau) \end{pmatrix}$ est donc vecteur propre de la matrice

$$\begin{bmatrix} -\cos(2\omega) & \sin(2\omega) \\ \sin(2\omega) & \cos(2\omega) \end{bmatrix}.$$

Or, le vecteur $\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de la matrice $\begin{bmatrix} -\cos(2\omega) & \sin(2\omega) \\ \sin(2\omega) & \cos(2\omega) \end{bmatrix}$. Comme α et β sont deux scalaires positifs, le vecteur $\begin{pmatrix} x_{OT}(\tau) \\ y_{OT}(\tau) \end{pmatrix}$ est donc colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$.

Ceci est incompatible avec le fait que $P_{OT}(t)$ est colinéaire avec V_1 pour $t \leq \tau$. Il n'y a donc pas de source-fantôme dont la trajectoire est définie par (C.6).

Troisième situation : la source a une route parallèle à celle de l'antenne sans être en *endfire* durant le 1^{er} *leg*.

$$\text{Nous avons donc } V_T = \begin{pmatrix} 0 \\ c_T + v \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V_{OT} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 1, toute source-fantôme suit le même cap (mais ne se trouve pas en *endfire*) durant ce 1^{er} *leg*.

$$\text{i.e } V_G = \begin{pmatrix} 0 \\ c_G + v \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V_{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_G \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) La source peut-elle être en *broadside* durant le 2nd *leg* ?

Si oui, alors $\mathcal{P}_{OT}(t) \perp V_2 \forall t \geq \tau$ i.e $V_2^T \mathcal{P}_{OT}(t) = 0 \forall t \geq \tau$. Ce qui entraîne en dérivant par rapport au temps,

$$\begin{aligned} V_2^T V_T - \|V_2\|^2 &= 0; \\ \Leftrightarrow (c_T + v)v \cos(\omega) &= v^2; \\ \Leftrightarrow c_T \cos(\omega) &= v(1 - \cos(\omega)). \end{aligned}$$

Deux cas sont à discerner.

- $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$: la dernière équation conduit à $v = 0$. Ce cas est à rejeter.
- $\omega \neq \pm \frac{\pi}{2}$: alors nous avons $c_T = v \frac{1 - \cos(\omega)}{\cos(\omega)}$ et donc $V_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\cos(\omega)} \\ 0 \end{pmatrix}$.

En $t = \tau$, nous avons toujours l'égalité $V_2^T \mathcal{P}_{OT}(\tau) = 0$. Cette égalité est équivalente à

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x_T(0)v \sin(\omega) + v \cos(\omega) \left[y_T(0) + \tau v \left(\frac{1}{\cos(\omega)} - 1 \right) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow y_T(0) = -x_T(0) \tan(\omega) + \tau v \left(1 - \frac{1}{\cos(\omega)} \right). \end{aligned}$$

Les deux conditions : $V_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\cos(\omega)} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y_T(0) = -x_T(0) \tan(\omega) + \tau v \left(1 - \frac{1}{\cos(\omega)} \right)$, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une source suivant la même route que l'antenne durant le 1^{er} *leg* se retrouve en *broadside* durant le 2nd *leg*.

D'après le théorème 1, la trajectoire d'une source-fantôme durant le 1^{er} *leg* est décrite par le vecteur d'état

$$\mathbb{X}_G = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\beta^2 x_{OT}^2(0) + \beta^2 \zeta_{OT}^2 - \zeta_{OG}^2} \\ \beta y_{OT}(0) \\ \zeta_{OG} \\ 0 \\ \beta \dot{y}_{OT} \end{pmatrix}; \quad (\text{C.7})$$

et durant le 2nd *leg*, la trajectoire d'une source-fantôme est décrite par le vecteur d'état

$$\mathbb{X}_G = \begin{pmatrix} x_{OG}(0) \\ -x_G(0) \tan(\omega) + \tau v \left(1 - \frac{1}{\cos(\omega)} \right) - y_{OG}(0) \\ \zeta_{OG} \\ 0 \\ \dot{y}_{OT} \end{pmatrix}; \quad (\text{C.8})$$

En exploitant la cinquième composante de (C.7) et (C.8), nous trouvons que $\beta = 1$. Maintenant, en utilisant la deuxième composante de (C.7) et (C.8) nous trouvons que $x_G(0) = x_T(0)$. Enfin, la première composante de (C.7) et (C.8) nous permet de trouver que $\zeta_{OG} = \pm \zeta_{OT}$. Deux cas sont de nouveaux à discerner.

- Si l'onde ne suit pas un trajet direct, alors le signe de ζ_{OG} est imposé par la nature du trajet. Nous avons donc $\zeta_{OG} = \zeta_{OT}$. Il n'y a pas de source-fantôme dans ce cas.
- Si l'onde suit un trajet direct, alors l'ambiguïté sur le signe de ζ_{OG} subsiste. Il existe donc une source-fantôme situé à la verticale de la vraie source à l'immersion $z_G = 2z_O - z_T$.

En conclusion, si la source suit la même route que l'antenne durant le premier *leg* et se retrouve en *broadside* durant le second, alors il existe au plus une source-fantôme.

b) La source peut-elle se trouver en *endfire* durant le second *leg*?

Dans ce cas, V_2 est colinéaire à V_{OT} . Or, V_{OT} est colinéaire à V_1 par hypothèse. Ce cas est à rejeter.

c) Enfin, la source n'est ni en *broadside*, ni en *endfire* durant le second *leg*.

Ce cas se traite et se conclut de la même façon que dans la seconde situation. Il n'y a pas de source-fantôme.

Quatrième situation : la source n'est ni en *broadside*, ni en *endfire* ni en route parallèle durant le premier et le second *leg*.

D'après le théorème 1, la trajectoire d'une source-fantôme est définie durant le 1^{er} *leg* par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta_1 \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \leq \tau, \quad (\text{C.9a})$$

ou par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta_1 \mathbf{S}_1 \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \leq \tau, \quad (\text{C.9b})$$

et durant le second par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta_2 \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \geq \tau, \quad (\text{C.10a})$$

ou par

$$\mathcal{P}_{OG}(t) = \beta_2 \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(t) \quad \forall t \geq \tau. \quad (\text{C.10b})$$

Examinons les positions $\mathcal{P}_{OG}(\tau)$ données par

a) (C.9a) et (C.10a) :

$$\mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta_1 \mathcal{P}_{OT}(\tau) = \beta_2 \mathcal{P}_{OT}(\tau)$$

On a donc $\beta_1 = \beta_2$.

Les dérivées temporelles des membres de (C.9a) et de (C.10a) sont

$$V_G - V_1 = \beta(V_T - V_1), \quad (\text{C.11a})$$

$$\text{et } V_G - V_2 = \beta(V_T - V_2). \quad (\text{C.11b})$$

Par différence de (C.11a) et (C.11b), nous obtenons

$$V_1 - V_2 = \beta(V_1 - V_2).$$

Donc $\beta = 1$. Il n'y a pas de source-fantôme.

b) (C.9a) et (C.10b) :

$$\mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta_1 \mathcal{P}_{OT}(\tau) = \beta_2 \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(\tau)$$

$$\text{Soit } \frac{\beta_1}{\beta_2} \mathcal{P}_{OT}(\tau) = \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(\tau)$$

$\mathcal{P}_{OT}(\tau)$ est donc vecteur propre de \mathbf{S}_2 associé à la valeur propre $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ (toujours positive d'après le théorème 1). Nous en déduisons que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ (\mathbf{S}_2 est une matrice de symétrie orthogonale, ses valeurs propres sont -1 et 1).

Nous avons donc

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta \mathcal{P}_{OT}(\tau) \\ \mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(\tau) \end{cases} \quad (\text{C.12a})$$

$$\mathcal{P}_{OT}(\tau) = \mathbf{S}_2 \mathcal{P}_{OT}(\tau) \quad (\text{C.12b})$$

En exploitant les dérivées temporelles des éléments des équations de [C.12a](#) nous obtenons :

$$\begin{cases}
V_G - V_1 = \beta(V_T - V_1) \\
V_G - V_2 = \beta\mathbf{S}_2(V_T - V_2)
\end{cases}
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta(V_T - V_1) + V_1 = \beta\mathbf{S}_2(V_T - V_2) + V_2 \\
&\Leftrightarrow \beta[(\mathbb{I} - \mathbf{S}_2)V_T + (V_2 - V_1)] = V_2 - V_1
\end{aligned}
\tag{C.13}$$

Avec \mathbb{I} la matrice identité de dimension (3×3) .

Maintenant, en exploitant les dérivées temporelles des éléments de [C.12b](#) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
V_T - V_1 &= \mathbf{S}_2(V_T - V_1) \\
&\Leftrightarrow V_T - V_1 = \mathbf{S}_2V_T - V_1 \\
&\Leftrightarrow V_1 - V_2 = (\mathbb{I} - \mathbf{S}_2)V_T
\end{aligned}
\tag{C.14}$$

Finalement, en utilisant le résultats de [C.14](#) dans [C.13](#), nous aboutissons à $V_1 = V_2$. Ce qui est incompatible avec l'hypothèse de départ (l'antenne effectue une manœuvre). Il n'y a pas de source-fantôme.

c) [\(C.9b\)](#) et [\(C.10a\)](#) :

Ce cas se traite et se conclut comme le cas précédent. Il n'y pas de source-fantôme.

c) [\(C.9b\)](#) et [\(C.10b\)](#) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{OG}(\tau) &= \beta_1\mathbf{S}_1\mathcal{P}_{OT}(\tau) = \beta_2\mathbf{S}_2\mathcal{P}_{OT}(\tau); \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2}\mathcal{P}_{OT}(\tau) = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathcal{P}_{OT}(\tau).
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{OT}(\tau)$ est donc vecteur propre de $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ associé à la valeur propre $\frac{\beta_1}{\beta_2}$. Or, la matrice $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ est une rotation d'axe vertical dans \mathbb{R}^3 . Nous en déduisons donc que $\frac{\beta_1}{\beta_2} = 1$ et donc que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Nous avons par conséquent

$$\begin{cases}
\mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta\mathbf{S}_2\mathcal{P}_{OT}(\tau) \\
\mathcal{P}_{OG}(\tau) = \beta\mathbf{S}_1\mathcal{P}_{OT}(\tau)
\end{cases}
\tag{C.15a}$$

$$\mathcal{P}_{OT}(\tau) = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathcal{P}_{OT}(\tau)
\tag{C.15b}$$

En exploitant les dérivées temporelles des éléments des équations de [C.15a](#) nous obtenons :

$$\begin{cases}
V_G - V_1 = \beta\mathbf{S}_1(V_T - V_1) \\
V_G - V_2 = \beta\mathbf{S}_2(V_T - V_2)
\end{cases}
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta\mathbf{S}_1(V_T - V_1) + V_1 = \beta\mathbf{S}_2(V_T - V_2) + V_2 \\
&\Leftrightarrow \beta[(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2)V_T + (V_2 - V_1)] = V_2 - V_1
\end{aligned}
\tag{C.16}$$

Maintenant, exploitant les dérivées temporelles des éléments des équations de [C.15b](#) nous ob-

tenons :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1(V_T - V_1) &= \mathbf{S}_2(V_T - V_2) \\ \Leftrightarrow \mathbf{S}_1 V_T - V_1 &= \mathbf{S}_2 V_T - V_2 \\ \Leftrightarrow V_1 - V_2 &= (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2)V_T\end{aligned}\tag{C.17}$$

Finalement, en utilisant le résultats de [C.17](#) dans [C.16](#), nous aboutissons à $V_1 = V_2$. Ce qui est incompatible avec l'hypothèse de départ (l'antenne effectue une manœuvre). Il n'y a pas de source-fantôme.

□

Lemme pour la démonstration du théorème 5

Lemme 1.

Soit un observateur ponctuel muni d'une antenne linéaire verticale et une source ponctuelle ne se trouvant pas à la verticale de l'observateur. La source émet une onde acoustique se propageant suivant deux trajets différents et connus de l'observateur. Si l'un des trajets empruntés par l'onde comporte un nombre pair de réflexions (surface plus fond) et que l'autre trajet comporte un nombre impair de réflexions, alors la somme des angles d'élévations des deux trajets est différente de π .

Démonstration. Considérons une source et un observateur ponctuels. La source ne se trouve pas à la verticale de l'observateur et elle émet une onde acoustique se propageant selon deux trajets différents. Nous nous plaçons dans le cas particulier où la somme de toutes les réflexions du premier trajet est paire ($n_s + n_b$ paire) et la somme de toutes les réflexions du second trajet est impaire ($\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ impaire).

L'observateur est équipé d'une antenne linéaire verticale et il détecte à chaque instant les deux trajets de l'onde acoustique. Nous voulons nous assurer que l'inégalité $\phi_{O_i T} + \tilde{\phi}_{O_i T} \neq \pi$ est vérifiée quels que soient les trajets (qui vérifient les conditions $n_s + n_b$ paire et $\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ impaire) suivis par l'onde. Pour cela, nous divisons l'étude en quatre cas.

1^{er} cas : le premier trajet est initialement dirigé vers le fond ($\delta = 1$) et le second trajet est initialement dirigé vers la surface ($\tilde{\delta} = -1$).

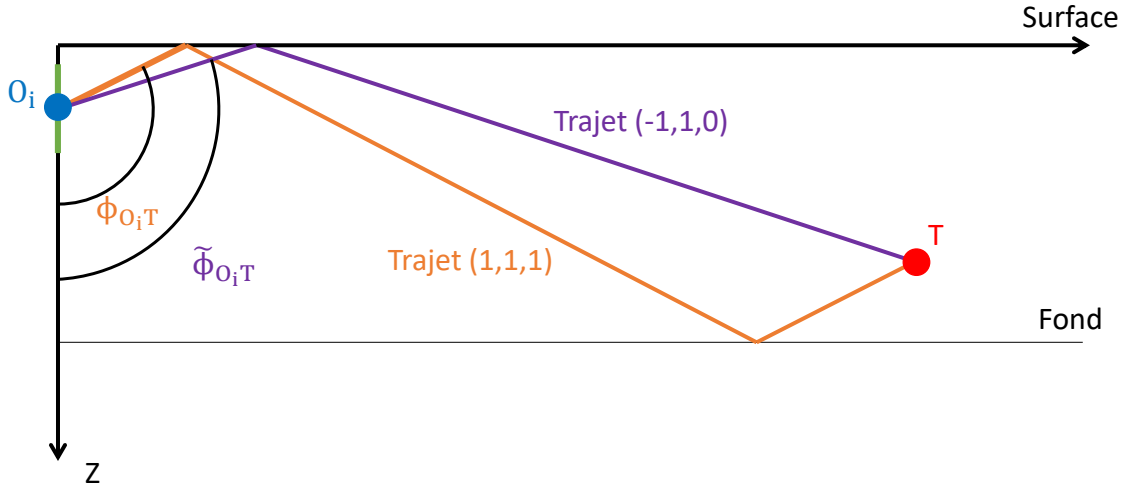


FIGURE D.1 – Exemple de trajets où $\delta = 1$ et $\tilde{\delta} = -1$.

Si $\delta = 1$ et $n_s + n_b$ est paire, alors le premier trajet arrive à l'observateur depuis la surface (voir figure D.1 pour le trajet $(1, 1, 1)$). L'angle $\phi_{O_i T}$ prend donc ses valeurs dans l'intervalle¹ $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Si $\tilde{\delta} = -1$ et $\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ est impaire, alors le second trajet arrive donc à l'observateur depuis la surface (voir figure D.1 pour le trajet $(-1, 1, 0)$). L'angle $\tilde{\phi}_{O_i T}$ prend donc ses valeurs dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Comme l'angle $\tilde{\phi}_{O_i T}$ est strictement supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la somme des deux angles est donc strictement supérieure à π .

Dans ce cas, l'inégalité $\phi_{O_i T} + \tilde{\phi}_{O_i T} \neq \pi$ est vérifiée.

2^{ème} cas : le premier trajet est initialement dirigé vers la surface ($\delta = -1$) et le second trajet est initialement dirigé vers le fond ($\tilde{\delta} = 1$).

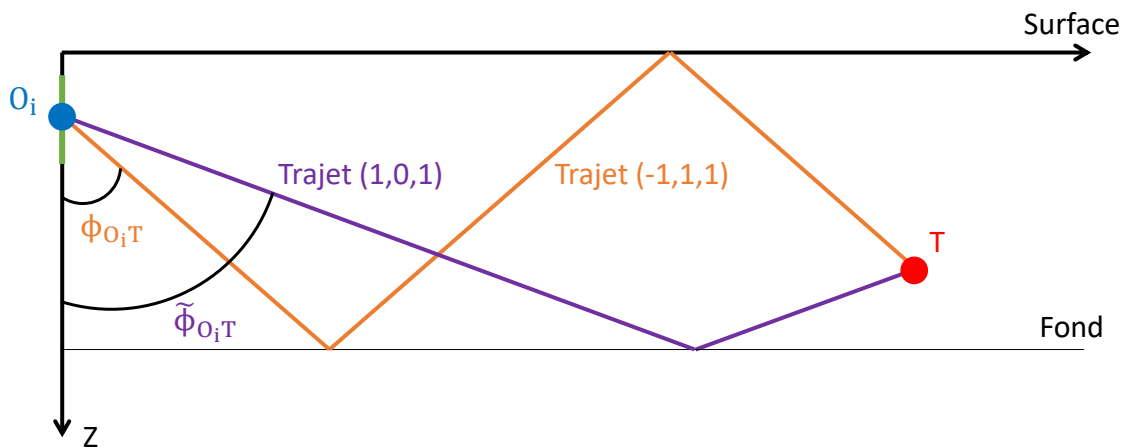


FIGURE D.2 – Exemple de trajets où $\delta = -1$ et $\tilde{\delta} = 1$.

Si $\delta = -1$ et $n_s + n_b$ est paire, alors le premier trajet arrive donc à l'observateur depuis le fond (voir figure D.2 pour le trajet $(-1, 1, 1)$). L'angle $\phi_{O_i T}$ prend donc ses valeurs dans

1. L'intervalle des valeurs de l'angle $\phi_{O_i T}$ est ici fermé en $\frac{\pi}{2}$ car lorsque $n_s + n_b$ est paire, le trajet peut être direct. Dans ce cas si la source et l'observateur sont à la même immersion nous avons $\phi_{O_i T} = \frac{\pi}{2}$

l'intervalle¹ $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Si $\tilde{\delta} = 1$ et $\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ est impaire, alors le second trajet arrive donc à l'observateur depuis le fond (voir figure D.2 pour le trajet $(1, 0, 1)$). L'angle $\tilde{\phi}_{O_i T}$ prend donc ses valeurs dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Comme l'angle $\tilde{\phi}_{O_i T}$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, la somme des deux angles est donc strictement inférieure à π .

Dans ce cas, l'inégalité $\phi_{O_i T} + \tilde{\phi}_{O_i T} \neq \pi$ est vérifiée.

3^{ème} cas : le premier trajet est initialement dirigé vers le fond ($\delta = 1$) et le second trajet est initialement dirigé vers le fond ($\tilde{\delta} = 1$).

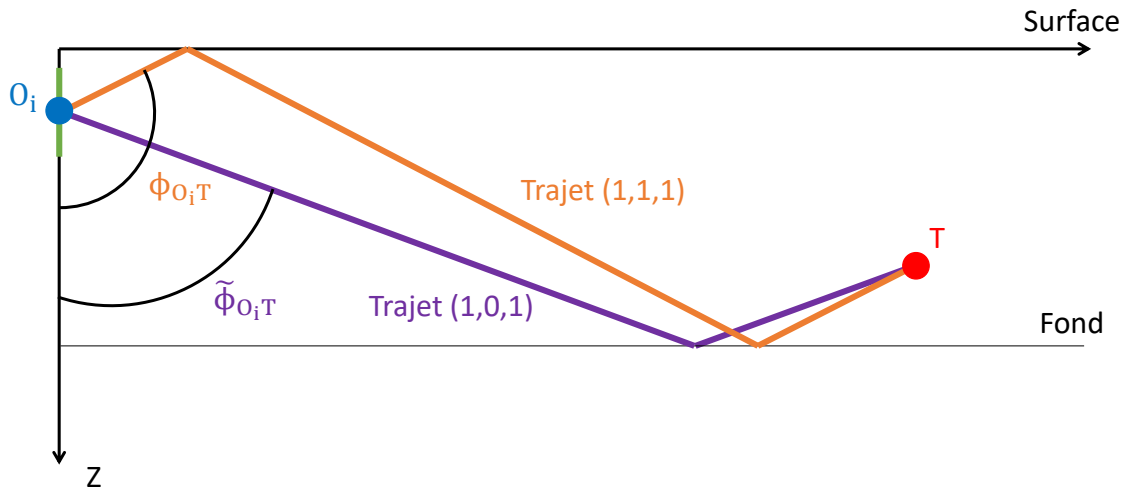


FIGURE D.3 – Exemple de trajets où $\delta = 1$ et $\tilde{\delta} = 1$.

Nous avons $\delta = 1$ et $n_s + n_b$ est paire, l'angle $\phi_{O_i T}$ prend donc ses valeurs dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Nous avons $\tilde{\delta} = 1$ et $\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ est impaire, l'angle $\tilde{\phi}_{O_i T}$ prend donc ses valeurs dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Nous introduisons un nouvel angle : l'angle ψ qui est l'angle supplémentaire de $\phi_{O_i T}$. Nous représentons à la figure D.4, du point de vue de l'observateur, les angles ψ , $\phi_{O_i T}$ et $\tilde{\phi}_{O_i T}$.

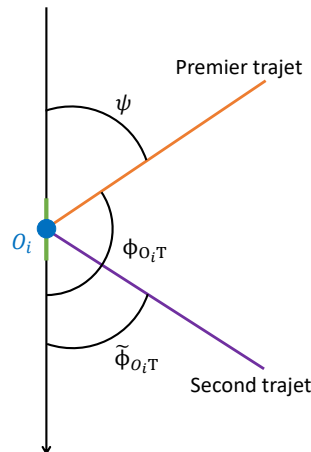


FIGURE D.4 – Angles ψ , $\phi_{O_i T}$ et $\tilde{\phi}_{O_i T}$.

Nous avons l'égalité $\psi + \phi_{O_iT} = \pi$, en ajoutant l'angle $\tilde{\phi}_{O_iT}$ aux deux membres de cette égalité nous obtenons l'égalité suivante (après avoir réarrangé les terme) :

$$\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} = \pi + \tilde{\phi}_{O_iT} - \psi. \quad (\text{D.1})$$

Cette dernière égalité implique que si $\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} = \pi$, alors $\tilde{\phi}_{O_iT} = \psi$.

L'angle ψ étant l'angle supplémentaire de ϕ_{O_iT} , il prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$. L'angle $\tilde{\phi}_{O_iT}$ prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, l'égalité $\tilde{\phi}_{O_iT} = \psi$ est donc équivalente à l'égalité

$$\sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) = \sin(\psi). \quad (\text{D.2})$$

Cette dernière égalité est également équivalente à ²

$$\begin{aligned} \text{D.2} &\Leftrightarrow \frac{\rho_{O_iT}}{\tilde{R}_{O_iT}} = \frac{\rho_{O_iT}}{R_{O_iT}}; \\ &\Leftrightarrow \tilde{R}_{O_iT} = R_{O_iT}; \\ &\tilde{\zeta}_{O_iT}^2 = \zeta_{O_iT}^2. \end{aligned}$$

Afin de vérifier si l'égalité $\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} = \pi$ est possible, nous devons nous assurer que l'égalité $\tilde{\zeta}_{O_iT}^2 = \zeta_{O_iT}^2$ est possible ou encore si $(\tilde{\zeta}_{O_iT} - \zeta_{O_iT})(\tilde{\zeta}_{O_iT} + \zeta_{O_iT}) = 0$. Pour cela reprenons l'expression de ζ_{O_iT} donnée au chapitre 2 en (2.19) et appliquons les contraintes $\delta = 1$, $\tilde{\delta} = 1$, $n_s + n_b$ paire et $\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ impaire :

$$\begin{cases} \zeta_{O_iT} = -(2n_b P + z_O - z_T), \\ \tilde{\zeta}_{O_iT} = -(2\tilde{n}_b P + z_O + z_T). \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}_{O_iT} - \zeta_{O_iT} = 2(\tilde{n}_b + n_b)P - 2z_T, & (\text{D.3a}) \\ \text{et} \\ \tilde{\zeta}_{O_iT} + \zeta_{O_iT} = 2(\tilde{n}_b - n_b)P - 2z_O. & (\text{D.3b}) \end{cases}$$

Dans le cas où $\tilde{n}_b = n_b$ le second membre des équations (D.3a) et (D.3b) est différent de zéro car z_O ainsi que z_T sont différents de 0. Si $\tilde{n}_b \neq n_b$, alors le second membre des équations (D.3a) et (D.3b) est différent de zéro car la profondeur P du fond est grande devant celle de la source et l'observateur. Nous pouvons donc dire que que $\tilde{\zeta}_{O_iT}^2 \neq \zeta_{O_iT}^2$.

Nous en concluons que $\sin(\tilde{\phi}_{O_iT}) \neq \sin(\psi)$ et que $\tilde{\phi}_{O_iT} \neq \psi$. Finalement nous trouvons que l'inégalité $\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} \neq \pi$ est vérifiée dans ce cas également.

4^{ème} cas : le premier trajet est initialement dirigé vers la surface ($\delta = -1$) et le second trajet est initialement dirigé vers la surface ($\tilde{\delta} = -1$).

Ce dernier cas est similaire au 3^{ème} cas, les directions des deux trajets sont inversées. En suivant le raisonnement développé au 3^{ème} cas (en inversant les termes avec des tildes avec les termes qui n'en ont pas), nous montrons que l'inégalité $\phi_{O_iT} + \tilde{\phi}_{O_iT} \neq \pi$ est vérifiée.

2. Voir figure D.5 pour un exemple de trajet où $\delta = \tilde{\delta} = 1$ et où $\tilde{n}_s + \tilde{n}_b$ est paire et $n_s + n_b$ est impaire.

Nous venons de montrer que si l'observateur détecte un trajet ayant subi un nombre pair de réflexions et un trajet ayant subi un nombre impair de réflexions, alors la somme des angles d'élévation des deux trajets est toujours différente de π .

□

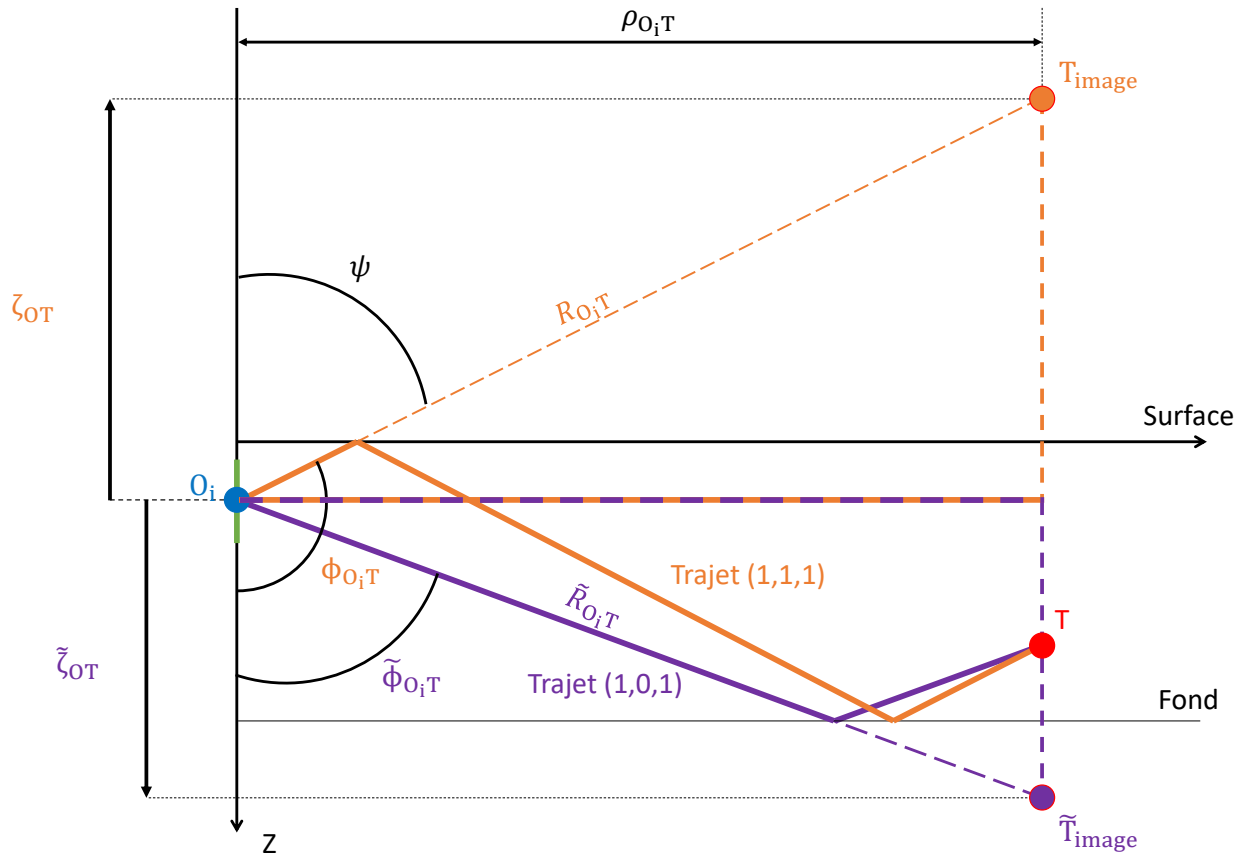


FIGURE D.5 – Trajet (1,0,1) et trajet (1,1,1).

ANNEXE E

Annexe du chapitre 5 : test d'association des mesures délivrées par l'antenne linéaire remorquée avec les mesures delivrées par les antennes de flanc

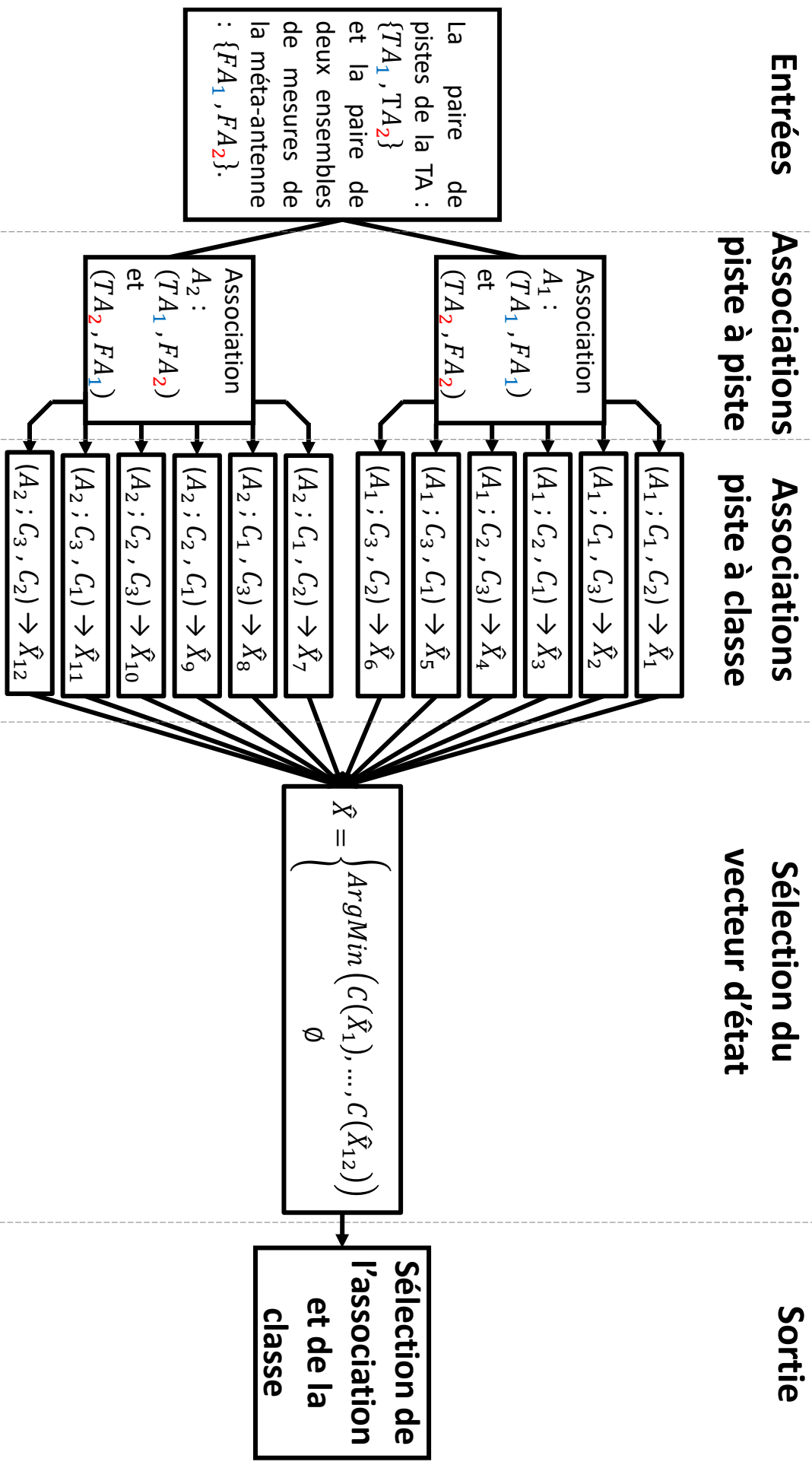


FIGURE E.1 – Étape du test d'association.

- [Abraham, 2019] ABRAHAM, D. A. (2019). *Underwater Acoustic Signal Processing : Modeling, Detection, and Estimation*. Springer.
- [Aidala et Hammel, 1983] AIDALA, V. et HAMMEL, S. (1983). Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking. *IEEE Transactions on automatic control*, 28(3):283–294.
- [Arulampalam *et al.*, 2004] ARULAMPALAM, M. S., RISTIC, B., GORDON, N. et MANSELL, T. (2004). Bearings-only tracking of manoeuvring targets using particle filters. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2004(15):1–15.
- [Arulampalam *et al.*, 2007] ARULAMPALAM, S., CLARK, M. et VINTER, R. (2007). Performance of the shifted rayleigh filter in single-sensor bearings-only tracking. *In 2007 10th International Conference on Information Fusion*, pages 1–6. IEEE.
- [Bar-Shalom et Fortmann, 1988] BAR-SHALOM, Y. et FORTMANN, T. (1988). *Tracking and Data Association*. Academic Press.
- [Bar-Shalom et Tse, 1975] BAR-SHALOM, Y. et TSE, E. (1975). Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association. *Automatica*, 11(5):451–460.
- [Blanc-Benon et Jauffret, 1997] BLANC-BENON, P. et JAUFFRET, C. (1997). TMA from bearings and multipath time delays. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(3):813–824.
- [Blanc-Benon et Pillon, 1989] BLANC-BENON, P. et PILLON, D. (1989). Multi-tracks association for underwater passive listening. *In Underwater Acoustic Data Processing*, pages 473–477. Springer.
- [Chan et Rea, 2000] CHAN, Y. et REA, T. (2000). Bearings-only tracking using data fusion and instrumental variables. *In Proceedings of the Third International Conference on Information Fusion*, volume 1, pages TUB2–3. IEEE.
- [Clavard, 2012] CLAVARD, J. (2012). *Trajectographie Passive sans manœuvre de l'observateur*. Thèse de doctorat, Université de Toulon.
- [Clavard *et al.*, 2013] CLAVARD, J., PILLON, D., PIGNOL, A.-C. et JAUFFRET, C. (2013). Target motion analysis of a source in a constant turn from a nonmaneuvering observer. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 49(3):1760–1780.
- [Colin, 1994] COLIN, B. (1991-1994). *Pierre Louis (Ed.), Aristote. Problèmes*. Persée-Portail des revues scientifiques en SHS.

- [D'amico et Pittenger, 2009] D'AMICO, A. et PITTENGER, R. (2009). A brief history of active sonar. Rapport technique, SPACE AND NAVAL WARFARE SYSTEMS CENTER SAN DIEGO CA.
- [Davey et Gaetjens, 2018] DAVEY, S. J. et GAETJENS, H. X. (2018). *Track-Before-Detect Using Expectation Maximisation : The Histogram Probabilistic Multi-hypothesis Tracker : Theory and Applications*. Springer.
- [Di Martino, 1995] DI MARTINO, J. C. (1995). *Intégration de connaissances dans des systèmes distribués pour l'extraction de raies spectrales dans des images sonar*. Thèse de doctorat, Nancy 1.
- [Doğançay, 2005] DOĞANÇAY, K. (2005). On the efficiency of a bearings-only instrumental variable estimator for target motion analysis. *Signal processing*, 85(3):481–490.
- [Dushaw et al., 1993] DUSHAW, B. D., WORCESTER, P. F., CORNUELLE, B. D. et HOWE, B. M. (1993). On equations for the speed of sound in seawater. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(1):255–275.
- [Farina, 1999] FARINA, A. (1999). Target tracking with bearings-only measurements. *Signal processing*, 78(1):61–78.
- [Gong, 1982] GONG, K. F. (1982). Multipath target motion analysis : Properties and implication of the multipath process. Rapport technique, 6687, NUSC, Newport, RI.
- [Hahn et Tretter, 1973] HAHN, W. et TRETTER, S. (1973). Optimum processing for delay-vector estimation in passive signal arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*, 19(5):608–614.
- [Hue et al., 2006] HUE, C., LE CADRE, J.-P. et PEREZ, P. (2006). Posterior cramer-rao bounds for multi-target tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 42(1):37–49.
- [Jacoby et Smilde, 2009] JACOBY, W. et SMILDE, P. L. (2009). *Gravity interpretation : Fundamentals and application of gravity inversion and geological interpretation*. Springer Science & Business Media.
- [Jauffret, 1993] JAUFFRET, C. (1993). *Trajectographie passive, observabilité et prise en compte des fausses alarmes*. Thèse de doctorat, Toulon.
- [Jauffret et Bar-Shalom, 1990] JAUFFRET, C. et BAR-SHALOM, Y. (1990). Track formation with bearing and frequency measurements in clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 26(6):999–1010.
- [Jauffret et Bar-Shalom, 1993] JAUFFRET, C. et BAR-SHALOM, Y. (1993). Target motion analysis in the presence of false alarms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94(3):1372–1375.
- [Jauffret et al., 2016] JAUFFRET, C., PÉREZ, A.-C., BLANC-BENON, P. et TANGUY, H. (2016). Doppler-only target motion analysis in a high duty cycle sonar system. In *2016 19th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 2163–2170. IEEE.
- [Jauffret et Pillon, 1996] JAUFFRET, C. et PILLON, D. (1996). Observability in passive target motion analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(4):1290–1300.
- [Jauffret et al., 2010] JAUFFRET, C., PILLON, D. et PIGNOL, A.-C. (2010). Bearings-only maneuvering target motion analysis from a nonmaneuvering platform. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 46(4):1934–1949.
- [Kay, 1993] KAY, S. M. (1993). *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice-Hall.

- [Kirubarajan *et al.*, 2001] KIRUBARAJAN, T., BAR-SHALOM, Y. et LERRO, D. (2001). Bearings-only tracking of maneuvering targets using a batch-recursive estimator. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 37(3):770–780.
- [Klein, 1968] KLEIN, E. (1968). Underwater sound and naval acoustical research and applications before 1939. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 43(5):931–947.
- [Kuethe, 1941] KUETHE, J. L. (1941). Mechanical features of a seventeenth century submarine. *Modern Language Notes*, 56(3):202–204.
- [Laneuville et Jauffret, 2008] LANEUVILLE, D. et JAUFFRET, C. (2008). Recursive bearings-only tma via unscented kalman filter : Cartesian vs. modified polar coordinates. In *2008 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–11. IEEE.
- [Lasky, 1977] LASKY, M. (1977). Review of undersea acoustics to 1950. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2):283–297.
- [Le Cadre et Jauffret, 1997] LE CADRE, J. et JAUFFRET, C. (1997). Discrete-time observability and estimability analysis for bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(1):178–201.
- [Le Gall, 2015] LE GALL, Y. (2015). *Problèmes inverses en acoustique sous-marine : prédiction de performances et localisation de source en environnement incertain*. Thèse de doctorat, Télécom Bretagne ; Université de Bretagne Occidentale.
- [Lebon *et al.*, 2021] LEBON, A., PEREZ, A.-C., JAUFFRET, C. et LANEUVILLE, D. (2021). Tma from cosines of conical angles acquired by a towed array. *Sensors*, 21(14):4797.
- [Lepoutre, 2016] LEPOUTRE, A. (2016). *Detection and tracking in Track-Before-Detect context with particle filter*. Thèse de doctorat, Université Rennes 1.
- [Lucas et Yip, 2007] LUCAS, J. et YIP, C. (2007). A determination of the propagation of electromagnetic waves through seawater. *Underwater Technology*, 27(1):1–9.
- [Lurton, 1998] LURTON, X. (1998). *Acoustique sous-marine : présentation et applications*. Editions Quae.
- [Nardone *et al.*, 1984] NARDONE, S., LINDGREN, A. et GONG, K. (1984). Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on automatic control*, 29(9):775–787.
- [Nardone et Aidala, 1981] NARDONE, S. C. et AIDALA, V. J. (1981). Observability criteria for bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, (2):162–166.
- [Oh *et al.*, 2020] OH, R., SONG, T. L. et CHOI, J. W. (2020). Batch processing through particle swarm optimization for target motion analysis with bottom bounce underwater acoustic signals. *Sensors*, 20(4):1234.
- [Paris, 2000] PARIS, S. (2000). *Extraction automatique de pistes fréquentielles en sonar passif par chaînes de Markov cachées*. Thèse de doctorat, Toulon.
- [Paris et Jauffret, 2003] PARIS, S. et JAUFFRET, C. (2003). Frequency line tracking using hmm-based schemes [passive sonar]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(2):439–449.
- [Payan *et al.*, 2021] PAYAN, J., LEBON, A., PEREZ, A.-C., JAUFFRE, C. et LANEUVILLE, D. (2021). Passive target motion analysis by fusion of linear arrays and sonobuoys in a cluttered environment. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 57(6):3941–3951.

- [Payne, 1989] PAYNE, A. N. (1989). Observability problem for bearings-only tracking. *International Journal of Control*, 49(3):761–768.
- [Pérez et Jauffret, 2020] PÉREZ, A.-C. et JAUFFRET, C. (2020). Observability in target motion analysis from the sum or the difference of ranges with two stationary sensors. In *2020 IEEE 23rd International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1–8. IEEE.
- [Pérez et al., 2017] PÉREZ, A.-C., JAUFFRET, C. et PILLON, D. (2017). Performance of range-only tma. In *2017 IEEE 7th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, pages 1–4. IEEE.
- [Peyrard, 1804] PEYRARD, F. (1804). *Les éléments de Géométrie D’Euclide*. F. Louis (Paris).
- [Pignol et al., 2010] PIGNOL, A.-C., JAUFFRET, C. et PILLON, D. (2010). A statistical fusion for a leg-by-leg bearings-only tma without observer maneuver. pages 1–8.
- [Pillon, 2016] PILLON, D. (2016). Introduction à la détection sous-marine passive. *Techniques de l’ingénieur Bruit et vibrations*, base documentaire : TIP680WEB.(ref. article : rad6712).
- [Pillon, 2017] PILLON, D. (2017). Introduction à la détection en sonar actif notions de base. *Techniques de l’ingénieur Technologies radars et applications*, base documentaire : TIP385WEB.(ref. article : rad6714).
- [Pillon et al., 2002] PILLON, D., GIORDANA, N., BLANC-BENON, P. et SITBON, S. (2002). Association of narrow band sources in passive sonar. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion. FUSION 2002.(IEEE Cat. No. 02EX5997)*, volume 2, pages 1141–1146. IEEE.
- [Pillon et Jauffret, 1991] PILLON, D. et JAUFFRET, C. (1991). Nouveaux resultats concernant l’observabilite en trajectographie par mesure d’angle.
- [Roland, 1977] ROLAND, A. (1977). Bushnell’s submarine : American original or european import ? *Technology and culture*, 18(2):157–174.
- [Sherman et Butler, 2007] SHERMAN, C. H. et BUTLER, J. L. (2007). *Transducers and arrays for underwater sound*, volume 4. Springer.
- [Singh et Kumar, 2020] SINGH, G. et KUMAR, M. (2020). Performance analysis of electromagnetic (em) wave in sea water medium. *Wireless Networks*, 26(3):2125–2135.
- [Song et Um, 1996] SONG, T. L. et UM, T. Y. (1996). Practical guidance for homing missiles with bearings-only measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(1):434–443.
- [Tharmarasa et al., 2007] THARMARASA, R., KIRUBARAJAN, T., HERNANDEZ, M. L. et SINHA, A. (2007). Pcr1b-based multisensor array management for multitarget tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 43(2):539–555.
- [Urlick, 1975] URICK, R. J. (1975). *Principles of Underwater Sound*. McGraw-Hill, New York.
- [Vaccaro, 1998] VACCARO, R. J. (1998). The past, present, and the future of underwater acoustic signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 15(4):21–51.
- [Van Trees, 2004] VAN TREES, H. L. (2004). *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*. Wiley.
- [Williamson, 2012] WILLIAMSON, G. (2012). *Wolf Pack : The Story of the U-Boat in World War II*. Bloomsbury Publishing.
- [Worthington, 2014] WORTHINGTON, I. (2014). *Alexander the Great : man and god*. Routledge.

- [Zhang *et al.*, 2020] ZHANG, Y., LAN, J., MALLICK, M. et LI, X. R. (2020). Bearings-only filtering using uncorrelated conversion based filters. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 57(2):882–896.
- [Zhang et Xu, 2010] ZHANG, Y. J. et XU, G. Z. (2010). Bearings-only target motion analysis via instrumental variable estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(11):5523–5533.

Antoine, LEBON

IM2NP, UMR CNRS 7334, Université de Toulon

Trajectographie passive en champ proche par antenne linéaire remorquée et trois antennes de flanc d'un sous-marin, avec prise en compte de la propagation

Un sous-marin dispose d'une antenne linéaire remorquée et éventuellement d'antennes montées sur ses flancs pour détecter et localiser les sources d'intérêt. Pour les sources en mouvement, il dispose d'une fonction trajectographie en aval de son système sonar. L'antenne linéaire remorquée délivre des mesures de cosinus de pseudo-gisements fournies par le traitement d'antenne. Pour les antennes de flanc, les mesures sont des différences de temps d'arrivée et éventuellement le cosinus d'élévation de l'onde incidente. Lorsque les sources sont en mouvement rectiligne uniforme (MRU), les méthodes conventionnelles de trajectographie passive par mesures d'angle les supposent évoluant en champ lointain. Dans cette thèse, nous proposons des solutions au problème de la trajectographie passive d'une source se déplaçant en MRU en champ proche. Contrairement au champ lointain, la propagation de l'onde acoustique ne peut plus être cantonnée au trajet direct seul. L'observabilité de la trajectoire de la source est étudiée pour chaque type d'antenne (donc de mesure). Nous évaluons ensuite les performances de l'estimateur du maximum de vraisemblance que nous avons proposé. Nous montrons que la profondeur de la source est faiblement estimable dans la plupart des cas et qu'une hypothèse sur celle-ci est suffisante pour obtenir des résultats opérationnellement viables.

Mot clés : Sonar, Trajectographie, Observabilité, Estimation, Borne de Cramér-Rao, Détection, Propagation.

Multipath target motion analysis in the near-field from a towed array and three flank arrays mounted on a submarine

A submarine detects and localizes sources of interest using a towed array, and possibly arrays mounted on its flanks. For moving sources, a tracking function downstream of its sonar system is available. The towed array, by the use of a suitable spatial filtering method, detects the cosine of the conical angle. For the flank arrays, the measurements are the time differences of arrival and possibly, the cosine of the elevation angle of the incident ray. When the sources are in constant velocity (CV) motion, the conventional methods of passive target motion analysis (TMA) with angle measurements assume them in the far-field. In this thesis, we propose solutions to the problem of passive TMA of a source moving in CV motion in the near-field. Unlike the far-field, the propagation of the acoustic waves can no longer be restricted to the direct path. Observability of the source trajectory is studied for each type of array (therefore measurement). We then evaluate the performance of the maximum likelihood estimator that we have proposed. We show that the depth of the source is weakly estimable in most cases and that an assumption on it is necessary to obtain operationally viable results.

Keywords : Sonar, Target Motion analysis, Observability, Estimation, Cramer-Rao bound, Detection, Propagation.