



HAL
open science

Contrôle dynamique de modes de Lamb dans des cristaux phononiques piézoélectriques.

Kamel Mekrache

► **To cite this version:**

Kamel Mekrache. Contrôle dynamique de modes de Lamb dans des cristaux phononiques piézoélectriques.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Normandie Université, 2023. Français. NNT : 2023NORMLH12 . tel-04310193

HAL Id: tel-04310193

<https://theses.hal.science/tel-04310193>

Submitted on 27 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Mécanique des Fluides, Énergétique, Thermique, Combustion, Acoustique

Préparée au sein de l'Université Le Havre Normandie

Contrôle dynamique de modes de Lamb dans des cristaux phononiques piézoélectriques

Présentée et soutenue par
Kamel MEKRACHE

Thèse soutenue publiquement le 18/10/2023
devant le jury composé de

M. Emmanuel LE CLEZIO	Professeur des Universités, IES UMR CNRS 5214, Université de Montpellier	Rapporteur
M. Bruno MORVAN	Professeur des Universités, LOMC UMR CNRS 6294, Université Le Havre Normandie	Directeur de thèse
M. Pascal REMBERT	Maître de Conférences des Universités, LOMC UMR CNRS 6294, Université Le Havre Normandie	Encadrant
Mme Rebecca SAINIDOU	Maître de Conférences des Universités HDR, LOMC UMR CNRS 6294, Université Le Havre Normandie	Encadrante
M. Nikolaos STEFANO	Professeur des Universités, Section of Solid State Physics, Université Nationale et Kapodistrienne d'Athènes	Directeur de thèse
M. Jérôme VASSEUR	Professeur des Universités, ISEN, IEMN UMR CNRS 8520, Université de Lille	Rapporteur
M. Nicolas WILKIE-CHANCELLIER	Professeur des Universités, SATIE UMR CNRS 8029, Université de Cergy	Examineur

Thèse dirigée par Bruno MORVAN, laboratoire LOMC UMR CNRS 6294
et co-dirigée par Nikolaos STEFANO, Section of Solid State Physics, Université Nationale et Kapodistrienne d'Athènes

Table des matières

Préface	iv
Introduction	1
1 Cristaux phononiques – non-réciprocité	5
1.1 Introduction	5
1.2 Généralités sur les cristaux phononiques	5
1.2.1 Diffraction et miroir de Bragg	6
1.2.2 Structure de bandes	7
1.3 Modulation spatio-temporelle	8
1.4 Milieu non-réciproque	9
1.4.1 Propagation d’ondes unidirectionnelles	10
1.4.2 Non-réciprocité dans les milieux piézoélectriques	12
1.5 Conclusion	14
2 Plaque phononique piézoélectrique : présentation et caractéristiques	15
2.1 Introduction	15
2.2 Présentation du dispositif expérimental	15
2.3 Plaque piézoélectrique phononique	17
2.3.1 Fabrication et polarisation	17
2.3.2 Paramètres géométriques	18
2.3.3 Paramètres piézoélectriques	19
2.4 Modélisations	20
2.4.1 Modes de Lamb d’une plaque piézocéramique uniforme	21
2.4.2 Cristal phononique	27
2.4.3 Modélisation Éléments Finis	31
2.5 Étude expérimentale	35
2.5.1 Méthodes expérimentales et traitements des signaux	35
2.5.2 Ajustement des paramètres piézoélectriques	40
2.6 Conclusion	41

3	Contrôle de la structure de bandes du CP avec des impédances connectées	43
3.1	Introduction	43
3.2	Contrôle par des circuits inductifs	43
3.3	Circuit électrocinétique équivalent	46
3.4	Mesures d'impédance	48
3.4.1	Influence du dispositif sur l'impédance « apparente »	48
3.4.2	Inductance parasite et linéarité des inductances	49
3.5	Dépolarisation de la plaque – Étude expérimentale	51
3.5.1	Description du processus de dépolarisation	51
3.5.2	Mesures du potentiel électrique : caractérisation du mode électrique	51
3.5.3	Mesures par vibrométrie laser : caractérisation des modes de Lamb	54
3.6	Conclusion	55
4	Bandes multidispersives accordables d'origine inductive	57
4.1	Introduction	57
4.2	Cellule élémentaire diatomique du cristal mise à la masse et chargée par inductance	58
4.2.1	Structure de bandes et analyse	58
4.2.2	Modèle de ligne équivalent	61
4.3	Cellule élémentaire diatomique mise au potentiel flottant et chargée par une inductance	63
4.3.1	Structure de bandes et analyse	63
4.3.2	Modèle de ligne équivalent	67
4.4	Cellules élémentaires adjacentes interconnectées par inductance	69
4.4.1	Structure de bandes et analyse	69
4.4.2	Modèle de ligne équivalent	73
4.5	Conclusion	73
5	Cristaux non-réciproques : modulation spatio-temporelle de modes de Lamb	75
5.1	Introduction	75
5.2	Conception du dispositif expérimental	75
5.3	Système réciproque	79
5.4	Système non-réciproque : réalisation	82
5.4.1	Dispositif expérimental de commande des CLEs	82
5.4.2	Modélisation par éléments finis	85
5.5	Système non-réciproque : résultats	87
5.6	Conclusion	90
	Conclusions et Perspectives	93

Appendices	95
Annexe A Paramètres PZ26	95
Annexe B Courbes de dispersion expérimentales par identification paramétrique (AR2D)	97
B.1 Principe	97
B.2 Estimation des $a_{m,n}$	99
B.3 Calcul opérationnel des $\hat{S}_{p,q}$	102
Bibliographie	104

Préface

Cette thèse est le fruit de plus de trois années de travail acharné en recherche. Elle n'aurait jamais pu voir le jour sans l'apport précieux et l'aide de nombreuses personnes que je souhaite sincèrement remercier.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes directeurs de thèse : M. Bruno MORVAN, Professeur à l'Université Le Havre Normandie, et M. Nikolaos STEFANOU, Professeur de Physique à l'Université Nationale et Kapodistrienne d'Athènes. Leur accompagnement patient et attentif a été essentiel tout au long de ces travaux. Je leur suis infiniment reconnaissant pour la confiance qu'ils m'ont témoignée et pour leur soutien indéfectible.

Mes sincères remerciements vont également à Mme Rebecca SAINIDOU et M. Pascal REMBERT, Maîtres de Conférences à l'Université Le Havre Normandie. Tout au long de mon parcours, leur aide précieuse, leur soutien efficace, et leur confiance ont été essentiels à la réalisation de ce travail.

Je souhaite également remercier chaleureusement les rapporteurs de cette thèse, M. Emmanuel LE CLEZIO et M. Jérôme VASSEUR, pour le temps et l'effort consacrés à l'examen minutieux de mes recherches. Ma gratitude s'étend aussi à M. Nicolas WILKIE-CHANCELLIER pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Je remercie l'équipe *Ondes Acoustiques* du laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC UMR CNRS 6294) de l'Université du Havre, avec qui j'ai eu l'honneur de travailler toutes ces années, pour les nombreuses discussions et l'aide précieuse apportée, avec un remerciement tout particulier à M. François MARIN, Directeur du laboratoire. Je leur suis profondément reconnaissant pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Mes remerciements s'adressent également à tous les doctorants et post-doctorants du laboratoire. Les discussions lors des pauses-café et les moments partagés ont enrichi mon expérience.

Enfin, ma famille mérite une gratitude sans borne pour leur soutien constant. C'est à eux que je dédie cette thèse, avec tout mon amour.

K.M.

Introduction

Les cristaux phononiques (CP) [1, 2] et les métamatériaux [3, 4] sont des structures artificiellement conçues, présentant des propriétés de dispersion remarquables. Ces milieux structurés offrent la possibilité de créer des bandes interdites et plus généralement de contrôler les ondes acoustiques et élastiques. En exploitant ces matériaux innovants, de nombreux effets de propagation d'ondes ont été mis en évidence, tels que la réfraction négative [5], le camouflage [6, 7], le filtrage [8]. Ces dernières décennies, la majeure partie des efforts de recherche s'est concentrée sur des cellules élémentaires passives en régime statique, leur manque d'agilité en fréquence limitant cependant leurs applications. Une avancée prometteuse a été réalisée grâce aux métamatériaux actifs. Ces derniers sont reprogrammables et leurs propriétés modulées en fonction des applications visées. De plus ce type de métamatériaux, lorsque les temps de contrôle sont suffisamment courts, autorise une modulation spatiotemporelle du CP. C'est le cas des milieux piézoélectriques pour lesquels le contrôle électrique, par le biais d'impédances électriques externes connectées est simple.

Cela fait 60 ans que Cassedy *et al.* [9] ont étudié la dispersion des ondes électromagnétiques (EM) dans un milieu soumis à une modulation spatiotemporelle. Depuis, de nombreux travaux ont exploré la propagation des ondes élastiques dans des systèmes soumis à de telles modulations [10–12]. L'un des effets particulièrement recherché est la non-réciprocité du milieu de propagation, créant des bandes interdites directionnelles et donc permettant une propagation unidirectionnelle c'est-à-dire "une diode acoustique" [13].

L'équipe Structures Phononiques du laboratoire LOMC travaille depuis bientôt dix ans sur les cristaux phononiques piézoélectriques. Ces travaux ont été initiés avec la thèse de Sid Ali Mansoura [14] portant sur les cristaux phononiques piézoélectriques unidimensionnels constitués d'une alternance de couches passives et actives. Cette étude s'est concentrée sur la propagation des ondes acoustiques longitudinales de volume et a permis notamment de montrer l'existence d'un gap d'hybridation entre modes électrique et acoustiques lorsque des charges inductives étaient connectées au CP. Les travaux suivants ont étendu cette étude au cas des ondes de Lamb et validé un certain nombre de concepts sur un démonstrateur constitué d'une plaque phononique piézoélectrique avec électrodes conductrices structurées périodiquement selon une direction. Le tra-

vail de thèse de Nesrine Kherraz [15] a donc approfondi la compréhension des phénomènes de couplage électromécanique au sein de CP piézoélectriques et ouvert de nouvelles perspectives applicatives liées à la dispersion inhérente aux ondes guidées de type Lamb. Enfin, des travaux de thèse récents [16] ont complété l'étude en proposant un modèle analytique prenant en compte tous les phénomènes élastodynamiques et piézoélectriques dans une plaque structurée périodiquement à l'aide d'un réseau d'électrodes métalliques à ses interfaces permettant de connecter divers types de circuits électriques externes. Ce modèle est basé sur le formalisme de décomposition en ondes planes (séries de Fourier) du champ de déplacement à l'intérieur de la plaque combinée avec une variété de conditions aux frontières électriques. L'applicabilité de la méthode a pu être démontrée sur plusieurs circuits inductifs et capacitifs connectés aux éléments du CP. Les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse visent à explorer les possibilités de contrôle temporel offertes par l'utilisation de circuits électriques associés à un système de commande programmable.

Dans le chapitre introductif, nous abordons les notions générales sur les cristaux phononiques et la non-réciprocité. Notre objectif est de présenter les outils nécessaires pour la description des travaux de cette thèse, en mettant l'accent sur la physique de la propagation des ondes dans des CP piézoélectriques et la possibilité de contrôler leur dispersion. A partir de travaux de recherches antérieurs, nous explorons la notion de non-réciprocité dans les matériaux actifs piézoélectriques et la possibilité de rompre la symétrie de propagation des ondes élastiques et acoustiques.

Le second chapitre de notre étude est dédié dans un premier temps à l'analyse théorique et numérique des ondes de Lamb dans une plaque piézo-céramique uniforme couverte d'électrodes disposées périodiquement. Dans cette partie, nous rappelons les équations régissant le comportement de ces ondes et examinons leurs caractéristiques de dispersion. Nous présentons également le dispositif expérimental, puis nous procédons à une description approfondie du CP piézoélectrique étudié, mettant en évidence les différents aspects de sa fabrication et polarisation, ainsi que les paramètres géométriques et piézoélectriques. Pour conclure cette partie, nous menons une étude expérimentale dans laquelle sont discutées les méthodes expérimentales employées, les différentes méthodes d'analyse de traitement des signaux utilisés.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'influence de circuits électriques externes connectés sur la structure de bandes d'un cristal phononique piézo-électrique. Plus précisément, nous nous intéressons à l'effet d'une inductance connectée en parallèle à la plaque piézoélectrique, qui induit une résonance électrique. Nous menons des analyses expérimentales et numériques pour évaluer comment les modes électriques induits par la présence de charges inductives modifient la dispersion des modes de Lamb dans le CP. Nous présentons des preuves expérimentales de l'existence d'un mode électrique dans une plaque piézoélectrique dépolarisée. De plus, nous détaillons notre approche pour modéliser ce phénomène à l'aide de circuits électrocinétiques équivalents et présentons des

résultats pour confirmer nos modèles.

Dans le quatrième chapitre, nous examinons le contrôle des caractéristiques de dispersion de bandes accordables à partir de plaques phononiques piézoélectriques connectées à des circuits externes inductifs. Trois configurations avec des circuits à base d'inductances L sont explorées, offrant une diversité de bandes dispersives et accordables d'origine électrique. Les deux premiers cas concernent des cellules élémentaires à deux atomes, le troisième cas implique la connexion d'une charge L aux électrodes adjacentes. Les résultats ouvrent des voies prometteuses pour la manipulation en temps réel des ondes élastiques.

Le cinquième chapitre se concentre sur l'impact d'un certain type de modulation spatio-temporelle sur les cristaux phononiques piézoélectriques étudiés précédemment. Expérimentalement, elle nécessite de vérifier au préalable la réponse des interrupteurs qui servent au contrôle des conditions aux limites électriques (CLEs). Une cellule élémentaire composée de trois paires d'électrodes est choisie afin de pouvoir imposer des directions différentes à "l'onde" de modulation. Pour différentes vitesses de modulation, inférieures à la vitesse du mode de Lamb S_0 , on observe les courbes de dispersion des modes générés ainsi que les ordres de diffraction, ou répliques, décalés en fréquence et nombre d'onde. Ces décalages sont clairement identifiés et quantifiés à la fois expérimentalement et théoriquement par des analyses transitoires en calculs par éléments finis (FEM).

Chapitre 1

Cristaux phononiques – non-réciprocité

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les notions générales sur les cristaux phononiques. L'objectif est d'introduire le formalisme nécessaire pour la description des travaux exposés dans cette thèse, nous insisterons plus particulièrement sur la physique de la propagation des ondes, de volume ou guidées, dans des CP piézoélectriques et la possibilité qu'offrent ces systèmes de contrôler la dispersion des ondes. Nous étudions ensuite plus spécifiquement la notion de non réciprocité dans les matériaux actifs piézoélectriques.

1.2 Généralités sur les cristaux phononiques

Les métamatériaux acoustiques (MMA) [1] sont des matériaux artificiels qui possèdent des propriétés physiques exceptionnelles. Au sein des MMA, les cristaux phononiques [2] sont des structures périodiques pouvant être constituées d'éléments avec des propriétés physiques différentes, organisés dans un arran-

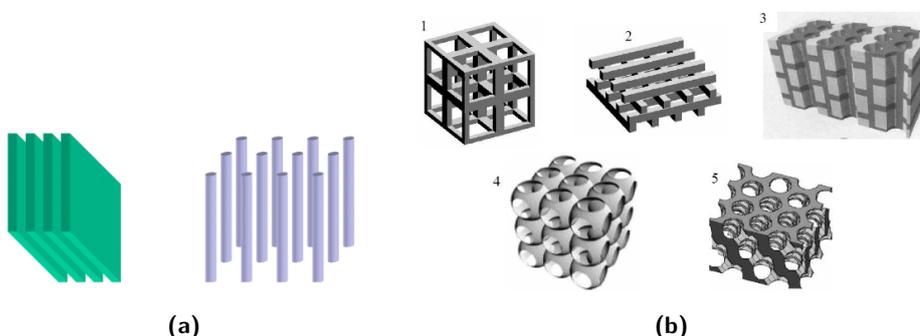


Figure 1.1 – Classification des cristaux phononiques selon leur degré de périodicité : exemples en (a) 1D, 2D et (b) 3D [17].

gement unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel (Figure 1.1). Leur succès réside dans leur capacité à créer des plages de fréquences où aucune onde élastique/acoustique ne peut se propager : les bandes interdites. Mais l'intérêt de ces structures n'est pas uniquement d'agir comme des filtres, ils offrent de nombreuses autres possibilités intéressantes pour contrôler et manipuler les ondes élastiques : réfraction négative [5, 18], guidage topologique [19], effet tunnel [20, 21].

1.2.1 Diffraction et miroir de Bragg

En novembre 1912, William Lawrence Bragg a formulé la deuxième loi fondamentale de la diffraction des rayons X [22]. Lorsque la lumière incidente rencontre les plans cristallins d'un matériau, elle est diffractée de manière constructive si une condition est satisfaite. Cette condition est donnée par l'équation de Bragg : $2d \sin \theta = n\lambda$, où d est la distance entre les plans cristallins, θ est l'angle d'incidence de la lumière, n est un nombre entier (l'ordre de diffraction) et λ est la longueur d'onde de la lumière.

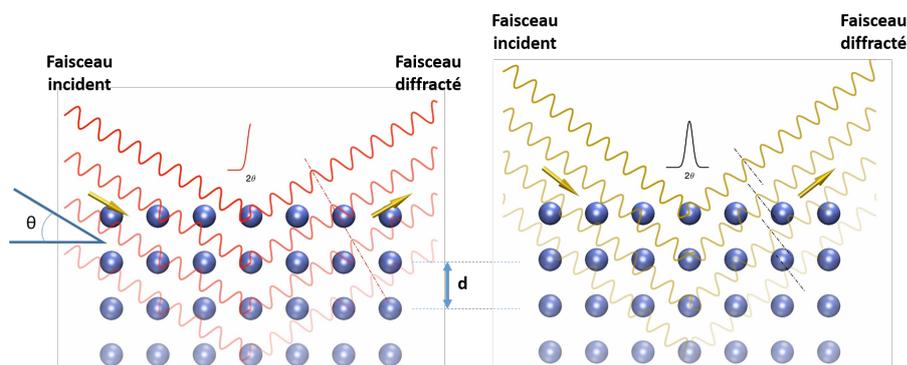


Figure 1.2 – Les conditions de diffraction de Bragg. Adapté de [23].

La diffraction de Bragg se produit donc lorsque la différence de chemin optique entre les rayons réfléchis par des plans cristallins adjacents est un multiple entier de la longueur d'onde. Cela conduit à une interférence constructive entre les rayons réfléchis, amplifiant certains angles de diffraction spécifiques (Figure 1.2). Cette condition de diffraction particulière se généralise à tous types d'ondes, en particulier les ondes acoustiques/élastiques qui nous intéressent ici. On parle donc de miroir de Bragg concernant une configuration qui permet de réfléchir sélectivement certaines longueurs d'onde et entraîne ainsi une réflexion maximale pour les longueurs d'onde qui satisfont à la condition de Bragg (période spatiale dans la direction de propagation équivaut à un multiple entier de la moitié de la longueur d'onde) [24].

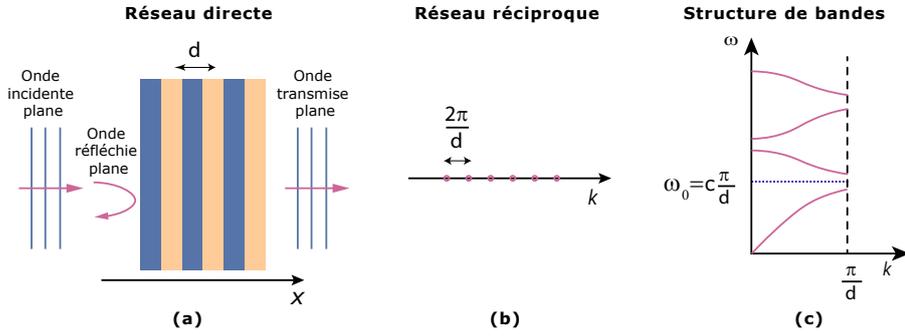


Figure 1.3 – Réseau périodique 1D - Représentation schématique : (a) espace direct, principe du miroir de Bragg, (b) espace réciproque, et, (c) structure de bandes.

1.2.2 Structure de bandes

Le théorème de Bloch-Floquet stipule que les solutions de l'équation de propagation des ondes dans un milieu périodique sont elles aussi périodiques [25]. Ce théorème est appliqué pour déterminer les solutions de l'équation de propagation des ondes élastiques/acoustiques dans des milieux périodiques. Pour un milieu périodique 1D tel que présenté à la Figure 1.3, on aura par exemple pour une onde acoustique plane longitudinale les déplacements dans la direction x qui s'écriront sous la forme

$$u_x(x, t) = F(x)e^{i(\omega t \pm kx)}, \quad (1.2.1)$$

avec k et ω , respectivement, le nombre d'onde dans la direction x et la pulsation et $F(x)$ une fonction de la position x telle que le théorème de Floquet impose $F(x) = F(x + d)$. La fonction F étant périodique, on peut la décomposer en série de Fourier $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\frac{2\pi n}{d}x}$.

On obtient les solutions appelées *ondes de Floquet*, dont le déplacement s'écrit

$$u_x(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-ik_n x} e^{i\omega t}, \quad \text{avec } k_n = k + \frac{2\pi n}{d}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.2)$$

Ce théorème est fondamental, puisque les nombres d'ondes sont périodiques, il permet de réduire la recherche des modes propres à une zone restreinte de l'espace fréquence/nombre d'onde appelée 1^{ère} zone de Brillouin (ZB) [26]. Cette condition sera exploitée dans les chapitres suivants notamment pour le calcul des modes propres d'une structure infinie et obtenir la structure de bandes des différents CP étudiés. La structure de bandes est une représentation essentielle pour l'étude des cristaux phononiques, elle donne les valeurs propres (fréquences propres) en fonction du vecteur d'onde k (Figure 1.3(c)), les pulsations de coupure ω_c qui indiquent les fréquences auxquelles certains modes de vibration du

cristal cessent d'exister. De plus, elle permet de déterminer les vitesses de groupe c_g et de phase c_ϕ des ondes ainsi que les bandes interdites de propagation.

Dans un milieu de propagation linéaire unidimensionnel, la structure de bande est parfaitement symétrique vis-à-vis de l'origine $k = 0$. Ceci signifie que la propagation selon une direction de l'espace dans le milieu considéré est totalement indépendante du sens de propagation. Cette réciprocité spatiale qui se traduit par une réversibilité de l'équation de propagation acoustique est une propriété fondamentale exploitée notamment pour des applications en retournement temporel [27]. Nous allons voir par la suite qu'une modulation spatio-temporelle du milieu de propagation va conduire à une brisure de cette réciprocité.

1.3 Modulation spatio-temporelle

Lorsque l'on parle de modulation spatio-temporelle, cela signifie que les propriétés effectives du milieu de propagation vont varier à la fois dans l'espace, c'est le cas du CP présenté au paragraphe précédent pour lequel l'arrangement de matériaux introduit des variations périodiques de propriétés mécaniques, mais également dans le temps.

La modulation temporelle de propriétés de circuits électriques est un sujet d'étude relativement ancien [28] dont l'objectif était notamment de développer des circuits avec des fonctions particulières telles que l'amplification paramétrique ou la conversion de fréquence. L'amplification du signal électrique est obtenue lorsque la réactance (capacitive ou inductive) est modulée à une fréquence supérieure à celle du signal amplifié.

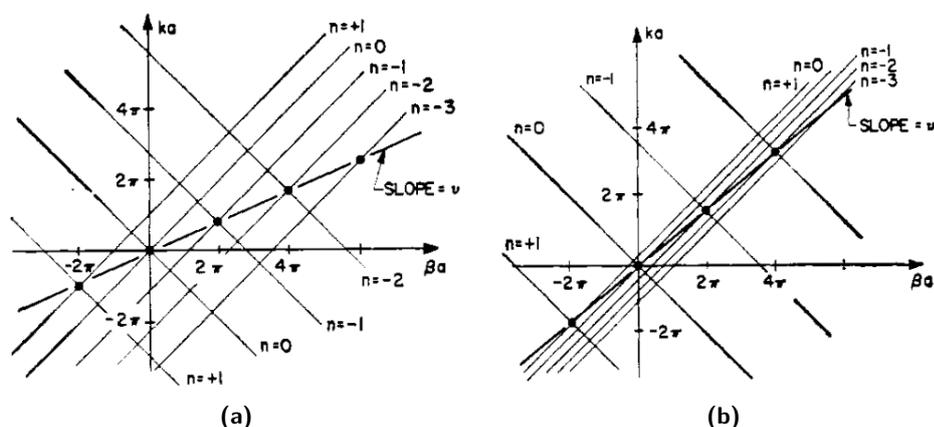


Figure 1.4 – Courbes de dispersion pour un modèle de ligne de transmission avec modulation temporelle de taux nul pour le régime (a) subsonique (vitesse de modulation supérieure à la vitesse du signal non modulé), et (b) sonique (vitesse de modulation proche de la vitesse du signal non modulé) [9].

Ces études ont été étendues à la fin des années 50 aux lignes de transmission électriques [29], il est notamment montré qu'une modulation temporelle dans

une ligne de transmission périodique permet de coupler des ondes à des fréquences différentes et ainsi transférer de l'énergie d'une fréquence à l'autre afin d'obtenir des amplificateurs à ondes progressives. Par la suite, en 1960, J. C. Simon a étudié l'influence de la modulation spatio-temporelle sur les ondes électromagnétiques guidées en utilisant la théorie des perturbations. Il a interprété le phénomène de conversion de fréquence induit [30]. En 1962, E. Cassedy *et al* ont discuté la stabilité du circuit paramétrique à ondes progressives en proposant un modèle de ligne de transmission composée d'un résonateur LC avec des capacités modulées dans le temps [9]. L'évolution des diagrammes de Brillouin (représentation nombre d'onde/fréquence) en fonction de la vitesse du signal modulant est discutée. Ils observent un resserrement des différentes courbes de dispersion associées aux harmoniques (modes de Bloch du milieu spatialement périodique) autour du mode fondamental dans le sens de propagation ($v_g > 0$) et, au contraire, un écartement pour les ondes retro-propagatives ($v_g < 0$) (Figure 1.4). Cette propriété est remarquable, la modulation temporelle du guide d'onde permet donc de dissymétriser la structure de bandes. Nous verrons par la suite que cette modulation dynamique aura pour conséquence principale de rompre la réciprocity spatiale de propagation qui est un principe fondamental dans tous phénomènes de propagation ondulatoire.

1.4 Milieu non-réciproque

Le schéma de la Figure 1.5, illustre de façon simple le principe de réciprocity pour une onde acoustique. Le son voyage symétriquement, lorsqu'il est excité au point A, le flux d'énergie acoustique résultant en point B est le même qu'il serait en A si le son avait été émis depuis B.

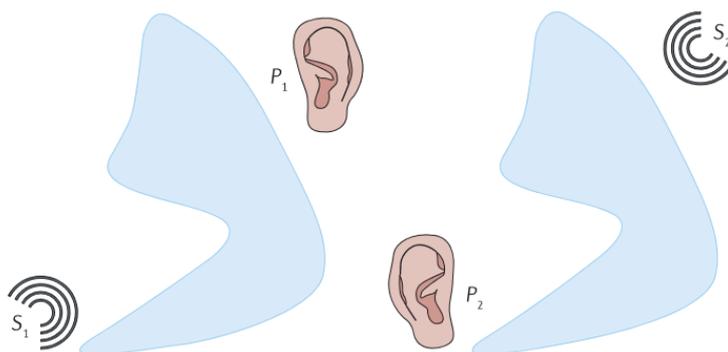


Figure 1.5 – Schéma illustrant l'échange entre une source et un récepteur [31].

Différents milieux permettent d'obtenir cette propagation non-réciproque des ondes acoustiques :

- **Milieux en mouvement** : Ceci implique une propagation de l'onde dans

un milieu en circulation. En contrôlant la cinétique des éléments constitutifs du matériau, il est possible de créer des effets non réciproques, où les ondes se propagent différemment selon la direction [32].

- **Milieux actifs** : Ces milieux possèdent des propriétés modulables par une action extérieure. En manipulant ces propriétés dynamiquement, il est possible d'obtenir des comportements non réciproques pour les ondes [33, 34].
- **Modes de bord unidirectionnels topologiquement protégés** : Ces états se manifestent aux frontières de certains milieux cinétiques ou actifs. Ils permettent de confiner les ondes dans une direction spécifique, créant ainsi un effet de propagation unidirectionnelle [35–38].
- **Milieux non linéaires** : Ces milieux présentent un comportement élastique non linéaire, ce qui signifie que leur réponse aux ondes dépend de l'amplitude de celles-ci. En exploitant cette non-linéarité, il est possible d'obtenir des propriétés non réciproques pour les ondes [39–42].

Le CP étudié dans ce travail de thèse est constitué d'éléments actifs piézoélectriques. Notre objectif est donc d'imposer des modulations spatio-temporelles sur les conditions aux limites électriques afin d'atteindre cette non-réciprocité.

1.4.1 Propagation d'ondes unidirectionnelles

G. Trainiti et M. Ruzzene [43] se sont intéressés à un milieu élastique "fictif" dont le module d'Young $E(x, t)$ et/ou la masse volumique $\rho(x, t)$ varient périodiquement en temps et en espace dans la direction de propagation des ondes élastiques longitudinales ou transversales dans une poutre. De façon identique au § 1.2.2, le module d'Young et la masse volumique peuvent être décomposés en séries de Fourier spatiales et temporelles conduisant à des solutions de type Floquet généralisées de l'équation de propagation. On aura, par exemple, le déplacement dans la direction de propagation x qui s'écrit de la façon suivante :

$$u_x(x, t) = e^{i(\omega t - \kappa x)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_n e^{i(\omega_m t - \kappa_m x)}, \quad (1.4.1)$$

avec $\kappa_m = 2\pi/a_m$ et $\omega_m = 2\pi/T_m$, respectivement, le nombre d'onde et la pulsation associée à l'onde de modulation pour laquelle est définie une vitesse $C_m = \omega_m/\kappa_m$. Dans cette étude, des résultats très similaires à ceux déjà observés par Cossedy *et al* [9] pour des ondes électromagnétiques sont donnés. Notamment, il apparaît une amplification paramétrique de l'onde propagative dans le système associée à des interactions instables avec l'onde de modulation lorsque la vitesse de modulation C_m est supérieure à celle des ondes élastiques se propageant dans la poutre.

En considérant le cas d'une masse volumique constante et d'un module de Young E modulé selon une onde progressive de la forme $E(x, t) = E_0 +$

$E_m \cos(\omega_m t - \kappa_m x)$ et en se limitant à des vitesses de modulation inférieures aux vitesses des ondes élastiques dans le milieu, il est montré l'ouverture de bandes interdites directionnelles et le déplacement des limites de la première zone de Brillouin. Les diagrammes de bandes présentés dans la Figure 1.6 illustrent le comportement des ondes dans le système. C'est une représentation en nombre d'onde réduit μ et fréquence réduite Ω . Lorsqu'aucune modulation n'est appliquée, le système est parfaitement réciproque, ce qui signifie que les ondes se propagent symétriquement dans les directions avant et arrière. L'égalité $\omega(k) = \omega(-k)$ est satisfaite, ce qui se traduit par des diagrammes de dispersion symétriques par rapport à l'origine $k = 0$. En conséquence, le comportement des ondes est le même quelle que soit leur direction de propagation. Cependant, lorsque la modulation spatio-temporelle des propriétés du matériau est introduite, la réciprocité est rompue. Cela se traduit par un resserrement des courbes de dispersion pour les ondes telles que $v_g > 0$ et un écartement dans le cas contraire. En d'autres termes, le comportement des ondes dépend de la direction dans laquelle elles se propagent. Ceci entraîne un décalage asymétrique des bandes interdites qui se déplacent le long des courbes de dispersion. À mesure que la vitesse de modulation augmente, ce décalage peut devenir suffisamment important pour provoquer l'apparition de deux bandes interdites directionnelles. La Figure 1.6 montre une bande interdite centrée autour de la fréquence réduite $\Omega = 0.6$ dans le demi-espace $\mu > 0$ correspondant aux ondes se propageant dans la direction $x > 0$ alors qu'il existe des ondes se propageant dans la direction opposée ($\mu < 0$).

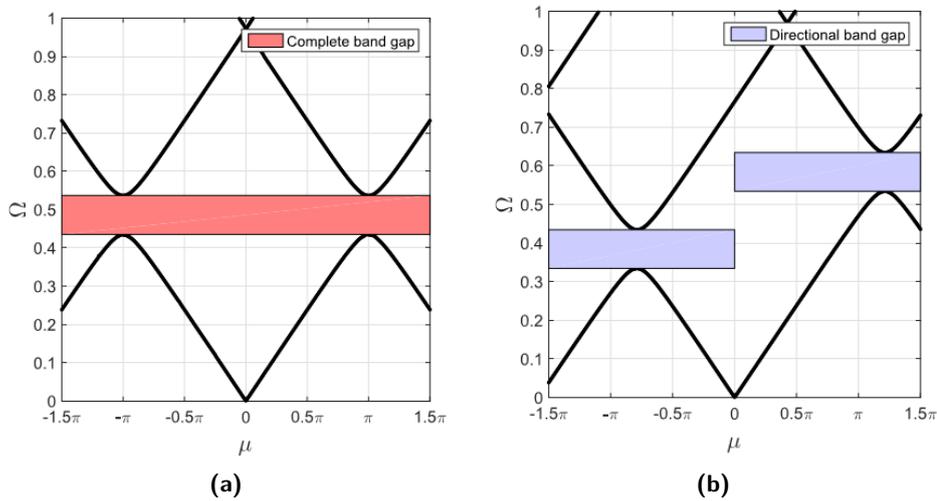


Figure 1.6 – Diagrammes de bandes pour une poutre avec (a) modulation spatiale, et, (b) modulation spatio-temporelle du module d'Young. Représentation en nombre d'onde réduit μ et fréquence réduite Ω [43].

L'obtention de bandes interdites unidirectionnelles nécessite donc de moduler les propriétés mécaniques du milieu de propagation de façon dynamique. Les

matériaux actifs tels que les milieux piézoélectriques offrent cette possibilité. Ces milieux ont été beaucoup étudiés ces dernières années afin de rendre accordables des cristaux phononiques ou métamatériaux [44–46]. Nous décrivons dans le paragraphe suivant quelques résultats récents de modulation dynamique sur des métamatériaux piézoélectriques.

1.4.2 Non-réciprocité dans les milieux piézoélectriques

Des études récentes ont révélé que les métamatériaux piézoélectriques présentent un potentiel prometteur pour la modification des paramètres à l'aide de circuits électriques.

Les travaux de M. Ruzzene et L. Airoldi [47] ont démontré qu'une modulation spatio-temporelle des paramètres des matériaux, réalisée à travers des circuits électriques appropriés, peut rompre la réciprocité des ondes élastiques. En utilisant une plaque d'aluminium sur laquelle des patches piézoélectriques ont été déposés et connectés à des circuits électriques (impédances), il est possible d'obtenir une modulation périodique temporelle des propriétés de la plaque. Ces circuits électriques peuvent être des shunts capacitifs, inductifs ou des capacités négatives.

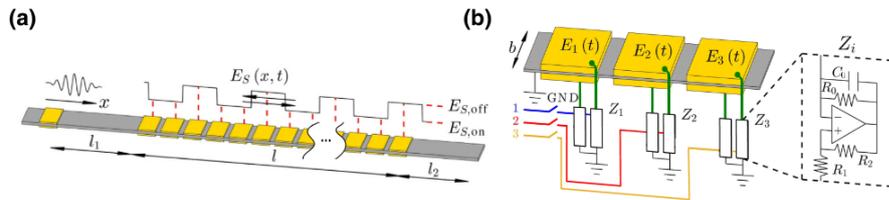


Figure 1.7 – (a) Représentation schématique de la plaque électromécanique d'après [49], et (b) agrandissement de la cellule élémentaire, comprenant le shunt en série avec une capacité négative.

En 2019, Christopher Sugino [48] a réalisé une étude portant sur l'utilisation de la méthode PWE pour analyser les relations de dispersion des plaques de métamatériaux piézoélectriques soumises à une modulation spatio-temporelle à l'aide d'une impédance shunt. Ces travaux de recherche ont démontré que la modulation spatio-temporelle de la capacité ou de l'inductance, qu'elle soit sinusoïdale ou carrée, peut rompre la réciprocité des ondes et induire la formation de bandes interdites unidirectionnelles. En 2020, J. Marconi et E. Riva [49] ont mené une étude expérimentale sur la non-réciprocité dans une plaque phonique. Leur approche consistait à induire des modulations spatio-temporelles équivalentes des propriétés élastiques en utilisant un contrôle électrique. Pour ce faire, des patches piézoélectriques ont été collés sur un substrat passif, ce qui a permis de modifier efficacement le module de Young du guide d'ondes en utilisant des shunts de capacité négative. Ces shunts sont gérés dans le temps à l'aide d'une logique de commutation. Les résultats expérimentaux ont permis

de démontrer la possibilité de réaliser un milieu non réciproque pour les ondes élastiques guidées.

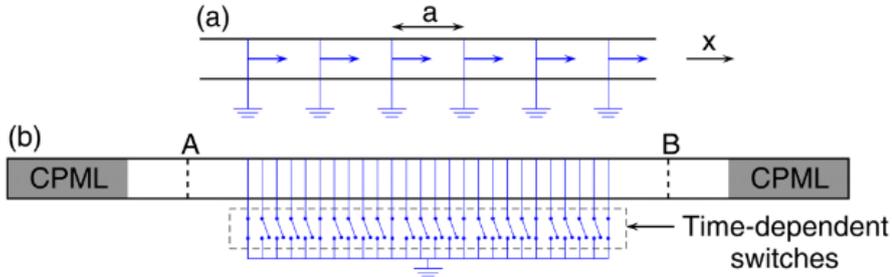


Figure 1.8 – Cristal phononique piézoélectrique constitué d'un empilement de cylindres piézoélectriques séparés par des électrodes pouvant être connectées à la masse [51]. Le schéma (a) représente le modèle analytique, tandis que le schéma (b) illustre le modèle utilisé dans les calculs FDTD.

En 2017, Charles Croënne *et al* [50] ont réalisé une étude théorique portant sur une structure piézoélectrique unidimensionnelle constituée d'un empilement d'anneaux piézoélectriques séparés par des électrodes conductrices (Figure 1.8). Ces électrodes permettent de modifier les conditions aux limites électriques à la fois en espace et en temps. Ils ont développé un modèle analytique permettant de calculer les modes propres en utilisant une modulation spatio-temporelle dans un milieu infini. Deux ans plus tard, en 2019, ils ont effectué des simulations numériques en utilisant la méthode des différences finies (FDTD) dans le domaine temporel pour aborder le même problème [51].

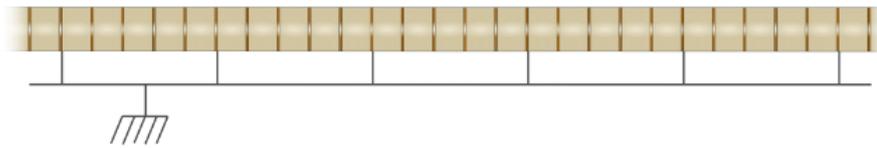


Figure 1.9 – Cas d'un cristal phononique avec une électrode mise à la masse à intervalles réguliers de cinq électrodes [52].

La validation expérimentale de ces travaux a été menée par Sarah Tessier Brothelande [52] sur un système piézoélectrique comprenant des anneaux piézoélectriques reliés par des électrodes (Figure 1.9). Elle a examiné expérimentalement et numériquement les effets de modulation spatiotemporelle des CLEs appliquées aux électrodes séparant deux barreaux piézoélectriques consécutifs du CP. Différents régimes de modulation sont considérés en fonction de la vitesse de modulation vis-à-vis de celle des ondes longitudinales dans le CP. En régime *subsonique*, il est mis en évidence un décalage de bandes interdites le long de la courbe de dispersion du mode longitudinal vers les hautes fréquences pour les ondes dont le nombre d'onde est positif et un décalage vers les

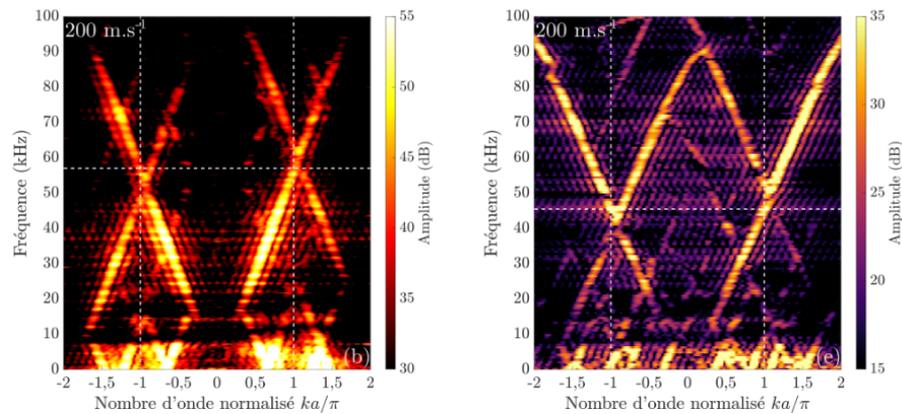


Figure 1.10 – Comparaison des courbes de dispersion (a) expérimentales et (b) simulées pour une vitesse de modulation de 200 m/s [52].

basses fréquences pour un nombre d'onde négatif (Figure 1.10). Ce phénomène aboutit à l'observation de bandes interdites directionnelles, à l'origine de la non réciprocity de propagation dans le CP. En régime *sonique* et *supersonique*, il est observé des hybridations entre les différents ordres de diffraction des modes issus de la modulation spatio-temporelle.

1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de définir quelques généralités sur les cristaux phononiques. L'insertion de milieux actifs permet un contrôle externe des propriétés du CP, ceci a été largement étudié au cours de la dernière décennie afin d'obtenir des systèmes reconfigurables et agiles. La modulation spatio-temporelle d'une onde élastique/acoustique est, quant à elle, un objet d'étude relativement récent. Cependant, nous avons pu voir que les principaux concepts associés à une modulation dynamique ont été développés il y a plus de 50 ans pour traiter des problèmes de propagation électromagnétique sur des lignes de transmission périodiques. Notre objectif est d'appliquer dans le cas d'une plaque phononique piézoélectrique ces concepts au cas particulier des ondes ultrasonores guidées de type Lamb.

Chapitre 2

Plaque phononique piézoélectrique : présentation et caractéristiques

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils expérimentaux et théoriques utilisés pour caractériser le comportement mécanique et électrique d'une plaque piézoélectrique sur laquelle sont structurées des électrodes métalliques. Ce système constitue un cas simple mais très prometteur d'un cristal phononique à une dimension. Des travaux antérieurs [46,53] ont montré que les modes guidés de type Lamb dans ces plaques céramiques piézoélectriques structurées périodiquement présentent une dispersion en fréquence accordable que l'on peut contrôler par des circuits électriques externes connectés aux électrodes. Ces circuits externes modifient les conditions aux limites électriques (CLE) du cristal et introduisent par le biais de couplages électromécaniques des modifications de propriétés mécaniques effectives qui induisent à leur tour des variations dans la dispersion des modes guidés.

D'un point de vue expérimental, le dispositif de contrôle des CLE pose cependant des problèmes de mise en œuvre. Un grand nombre de circuits doivent être connectés et, en pratique, il est difficile de reconfigurer le dispositif afin de passer d'une configuration de CLE à une autre, en particulier pour explorer des phénomènes associés au contrôle temporel des conditions aux limites électriques.

Nous proposons ici une amélioration importante du dispositif expérimental et notamment sa partie électronique afin d'obtenir une plate-forme flexible pour étudier différentes configurations de contrôle électrique statiques ou dynamiques.

2.2 Présentation du dispositif expérimental

Le cristal piézoélectrique étudié est constitué d'une plaque piézoélectrique homogène d'épaisseur h sur les surfaces de laquelle sont disposées périodique-

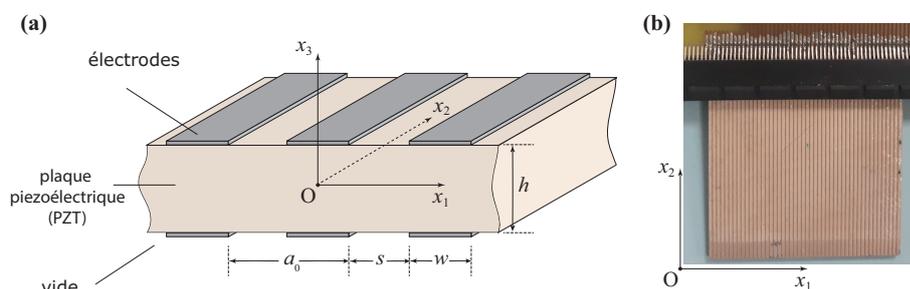


Figure 2.1 – (a) Représentation schématique du cristal piézoélectrique. (b) Photographie du cristal phononique piézoélectrique étudié, inséré dans le connecteur de carte PCI.

ment des électrodes conductrices, de largeur w , espacés de s (la période spatiale est $a_0 = w + s$), comme illustré Figure 2.1.

Sur chacune des électrodes un contact électrique existe permettant de connecter des montages simples (capacitifs, inductifs, résistifs) mais également de mesurer le potentiel électrique de l'électrode. Sur les montages utilisés précédemment, le contact électrique était réalisé à l'aide d'un fil soudé, ceci introduisait donc une surépaisseur liée à la présence de la soudure, mais surtout la présence des nombreux fils soudés sur chacune des surfaces générait des signaux parasites.

Nous faisons le choix ici d'utiliser des lecteurs de carte PCI Express® pour simplifier à la fois la gestion des conditions aux limites électriques et aussi la mesure (Figure 2.1). Le lecteur PCI est conçu pour des cartes de 1.6 mm d'épaisseur, il possède 2×98 contacts répartis selon un pas de 1 mm. Ces caractéristiques nous imposent donc de travailler avec une plaque phononique piézoélectrique de $h = 1.6$ mm et avec une périodicité de $a_0 = 1$ mm pour les électrodes. Le connecteur PCI est ensuite connecté à des impédances via des interrupteurs commandés par un module Teensy 3.6 basé sur un microprocesseur ARM Cortex M4 cadencé à 180 MHz [54]. Ce microprocesseur permet un contrôle en temps réel des interrupteurs (FST3125) [55] afin de changer les conditions limites imposées au cristal (Figure 2.2). L'interrupteur FST3125 est un commutateur quadruple hautes performances, il présente une résistance faible ($R_{ON} < 4$ Ohm) et possède un délai de réponse extrêmement court. La gestion de l'ouverture et fermeture des interrupteurs se fait donc en programmant le microprocesseur à l'aide du langage C++ ou directement en Assembleur afin de réduire les temps de commutation. Ces interrupteurs seront caractérisés plus précisément dans le chapitre 5 lors de l'étude en régime dynamique.

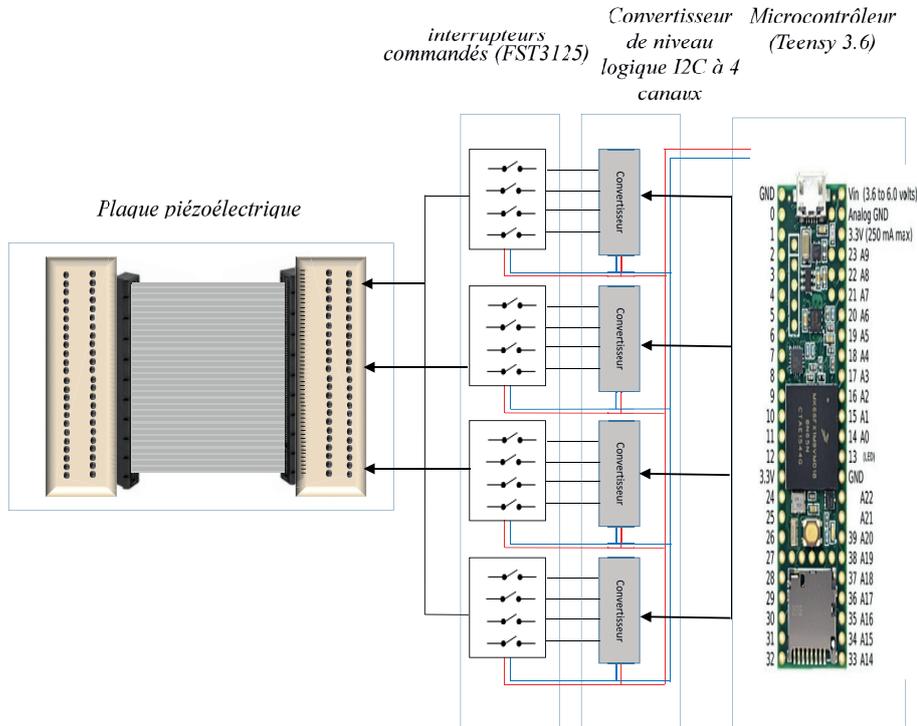


Figure 2.2 – Montage expérimental utilisé pour contrôler les conditions aux limites électriques du cristal.

2.3 Plaque piézoélectrique phononique

2.3.1 Fabrication et polarisation

Parmi les plaques piézoélectriques proposées par la société APC International, Ltd [56], notre choix s'est porté sur une céramique PZT de type Navy VI possédant un coefficient de couplage électromécanique k_p élevé ($k_p = 0.68$). Elles sont de forme carrée, de côté 48 mm et d'épaisseur $h = 1.6$ mm, sur chacune des faces sont initialement déposées des électrodes conductrices (argent) qui couvrent la totalité de la surface (Figure 2.3). La polarisation des plaques ayant été réalisée à l'aide de ces électrodes, celle-ci est donc homogène (Figure 2.4). Le matériau piézoélectrique de la plaque obtenue est de symétrie $6mm$, l'axe Ox_3 coïncidant avec la direction de polarisation du matériau. Les caractéristiques piézoélectriques, élastiques et électriques des céramiques (Annexe A) peuvent varier d'un échantillon à l'autre et sont données par le constructeur avec une incertitude de $\pm 10\%$, il conviendra donc par la suite de déterminer avec précision les propriétés des céramiques afin d'avoir des calculs théoriques en accord avec l'expérience.

Après polarisation, les électrodes sont entièrement retirées par dissolution chimique. Sur les plaques de céramiques polarisées sont ensuite déposés les

réseaux d'électrodes d'argent de périodicité 1 mm.



Figure 2.3 – Photographies des deux plaques analysées, sans électrodes (à gauche) et avec électrodes (à droite).

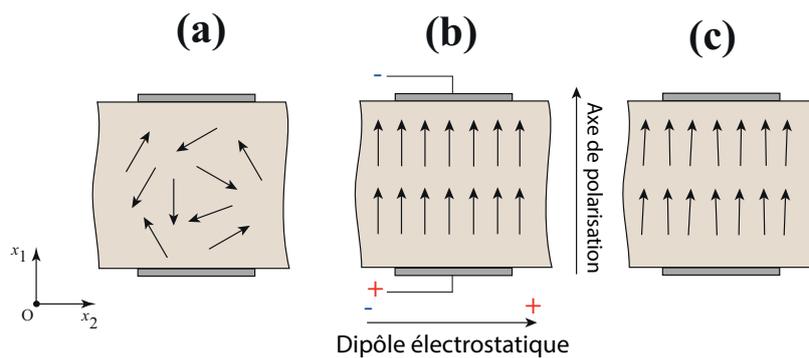


Figure 2.4 – Processus de polarisation : (a) avant la polarisation, les domaines polaires sont orientés de manière aléatoire ; (b) un très grand champ électrique continu est utilisé pour la polarisation ; (c) une fois le champ électrique supprimé, la polarisation résiduelle demeure [57].

2.3.2 Paramètres géométriques

On s'intéresse donc dans cette étude à des plaques piézoélectriques homogènes minces dont les deux faces sont couvertes de réseaux périodiques 1D d'électrodes sous forme de bandes métalliques parallèles. Une représentation schématique de la structure est donnée sur la Figure 2.1(a). Afin de déterminer précisément les paramètres géométriques du réseau d'électrodes du cristal, un profil de surface est réalisé à l'aide d'un rugosimètre *Mitutoyo*[®] *SV-1200* (Figure 2.5(a)). Ce rugosimètre à stylet permet d'obtenir un profil de surface le

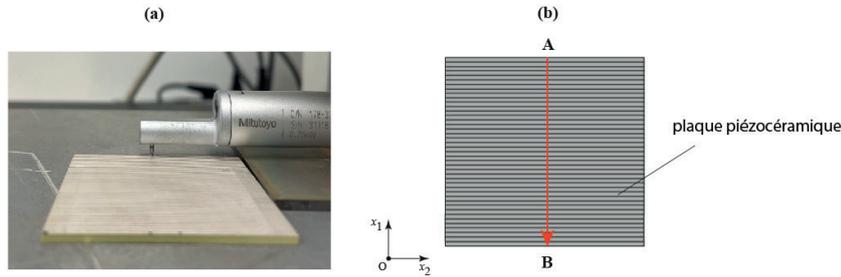


Figure 2.5 – (a) Instrument de mesure de rugosité de surface *Mitutoyo*[®] SV-1200. (b) Ligne d'analyse selon Ox_1 située au centre de la direction Ox_2 de la plaque.

long d'une trajectoire rectiligne avec un stylet de rayon $2 \mu\text{m}$ (Figure 2.5(b)). Sur la Figure 2.6(a) sont donnés les profils mesurés sur chacune des faces selon la direction Ox_1 , au centre de la plaque (Figure 2.6(b)). Le pas spatial choisi est de $\Delta x_1 = 0.8 \mu\text{m}$.

Nous pouvons observer sur la Figure 2.6(a)), que les électrodes n'ont pas un profil rectangulaire mais trapézoïdal. Ceci est lié à la forme conique (angle 60° , rayon $2 \mu\text{m}$) du stylet qui ne permet pas de mesurer des variations verticales de profil. A partir du relevé effectué à l'aide du rugosimètre, nous pouvons estimer la largeur de chaque électrode à mi-hauteur $w = 0.75 \pm 0.02 \text{ mm}$, celles-ci sont espacées d'une distance $s = 0.25 \pm 0.02 \text{ mm}$ de telle sorte que la périodicité du réseau d'électrodes est donc $a_0 = s + w \approx 1 \text{ mm}$.

Cette périodicité correspond bien au pas du connecteur de carte PCI avec lequel nous allons contrôler les conditions aux limites électriques. L'épaisseur de la plaque ($h = 1.6 \text{ mm}$) est très supérieure à l'épaisseur des électrodes, de l'ordre de $15 \mu\text{m}$. Par la suite, nous négligerons donc cette épaisseur dans les études théoriques ou numériques. L'influence de ces électrodes sur la propagation des ondes élastiques dans la plaque piézoélectrique sera donc uniquement électrique.

On remarque sur la Figure 2.6(a) un défaut de planéité de la plaque de l'ordre de $20 \mu\text{m}$. Ce défaut est présent sur les deux surfaces, les profils moyens sont en effet parfaitement parallèles. Ce défaut de planéité traduit une courbure générale de la plaque piézoélectrique et non pas une variation d'épaisseur. Ceci n'aura donc pas d'incidence sur notre étude.

À partir des mesures d'épaisseur, de longueurs de la plaque piézoélectrique sans électrode et de sa masse $m = 27.54 \pm 0.01\text{g}$, nous déduisons la valeur de la masse volumique $\rho = 7510 \pm 50 \text{ kg m}^{-3}$. Cette valeur est inférieure à celle donnée par le fabricant $\rho = 7780 \text{ kg m}^{-3}$ (Annexe A).

2.3.3 Paramètres piézoélectriques

Les paramètres géométriques (périodicité, épaisseur) de la plaque sont maintenant parfaitement connus. Il nous faut également déterminer les constantes

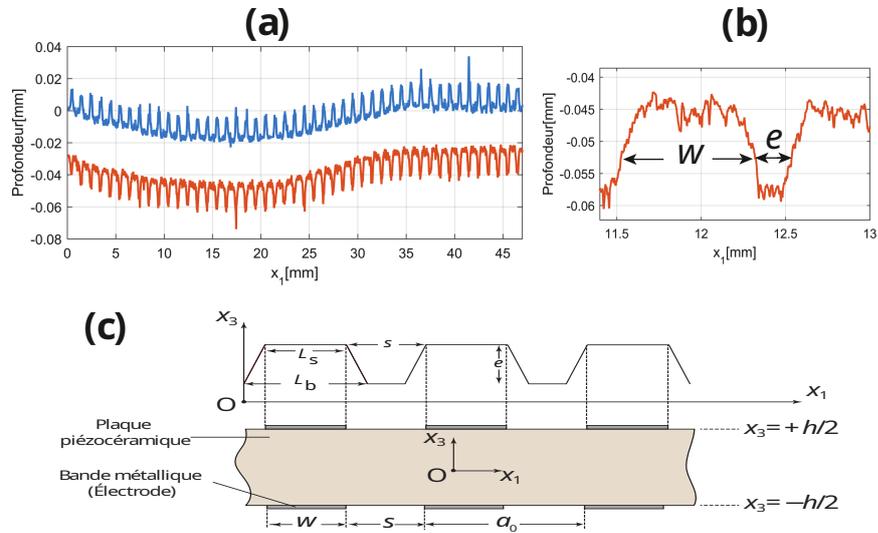


Figure 2.6 – (a) Profil des surfaces des deux côtés de la plaque. (b) Un détail de (a) relevant le profil conique des électrodes. (c) Schéma explicatif de la plaque piézoélectrique.

élastiques, piézoélectriques et électriques de la plaque qui seront utiles dans nos modèles. Ces données sont fournies par le constructeur (Annexe A) avec, on le rappelle, une incertitude importante de ($\pm 10\%$). La détermination expérimentale de ces nombreux paramètres n'est pas un problème simple, et pour ce faire nous avons choisi d'exploiter la dispersion des ondes guidées (ondes de Lamb) afin de les déterminer par ajustement. Nous allons dans un premier temps décrire théoriquement les modes de propagation dans la plaque piézoélectrique puis nous verrons comment, à partir de relevés expérimentaux, nous pouvons ajuster les valeurs initiales données par le fabricant [56].

2.4 Modélisations

On évoque en première partie de cette section, le calcul analytique des modes propres de Lamb d'une plaque piézoélectrique uniforme PZT Navy VI de symétrie $6mm$, dans le cas de conditions de frontière que l'on prendra comme référence lors de l'estimation des paramètres de la plaque réelle. Dans un second temps, on rappelle brièvement le développement du modèle analytique concernant la plaque phononique constituée du même PZT, mais dont les faces sont périodiquement texturées par des électrodes rectangulaires espacées sur lesquelles on connecte des circuits qui seront représentés par leur impédance équivalente. Un troisième volet concerne la mise en oeuvre de calcul par éléments finis.

2.4.1 Modes de Lamb d'une plaque piézocéramique uniforme

Equations constitutives dans le volume

Les équations utilisées tout au long de cette section ne tiennent pas compte des effets magnétiques dont la contribution est considérée comme négligeable dans l'écriture des champs de nature électromagnétique présents dans le problème. On rappelle préalablement l'expression des équations constitutives en régime linéaire couplant champs mécaniques et électriques dans un volume élémentaire de matériau

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (2.4.1)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k, \quad (2.4.2)$$

reliant respectivement les éléments T_{ij} du tenseur des contraintes \mathbf{T} et celles notées D_i du vecteur déplacement électrique \mathbf{D} , aux composantes du tenseur de déformations $S_{kl} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et du champ électrique $E_k = -\varphi_{,k}$, avec $i, j, k, l = 1, 2, 3$, reliés aux composantes du vecteur déplacement généralisé \mathbf{u} à partir du vecteur déplacement élastique étendu à quatre dimensions, ayant pour quatrième composante le potentiel électrique, i.e. $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4 \equiv \varphi]^t$. Ce matériau possédant une masse volumique ρ , ayant pour coefficients élastiques c_{ijkl}^E , pour permittivités ϵ_{ik}^S , et pour constantes de couplage piézoélectriques e_{ikl} qui caractérisent les piézocéramiques PZT, les tenseurs associés sont de la forme

$$\bar{\mathbf{c}}^E = \{c_{pq}^E\} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad (2.4.3)$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \{e_{ip}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.4)$$

$$\bar{\mathbf{e}}^S = \{\epsilon_{ij}^S\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix}, \quad (2.4.5)$$

avec $c_{66}^E = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2}$ (on a adopté ici pour les paramètres du matériau la notation compacte pour les indices, i.e. $p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ correspondent respectivement à $ij, kl = 11, 22, 33, 23$ (ou 32), 31 (ou 13), 12 (ou 21) et la notation $(\cdot)_{,j} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$ représente les dérivées partielles par rapport aux coordonnées cartésiennes x_j , $j = 1, 2, 3$). Dans ce cas, à l'aide des Eqs. (2.4.1), (2.4.2) avec \mathbf{T} vérifiant l'équation fondamentale de la dynamique

$$T_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j, \quad (2.4.6)$$

et \mathbf{D} satisfaisant l'équation de conservation de la charge

$$D_{i,i} = 0, \quad (2.4.7)$$

les composantes d'une onde de déplacement s'écrivent comme la superposition de fonctions des couples $(s_3^{(p)}, \mathbf{B}^{\pm(p)})$ d'indice de polarisation $p = 1, 2, 3$, solutions de l'équation (2.4.9)

$$u_i = e^{-i\omega s_1 x_1} \sum_p \left(C^{+(p)} B_i^{+(p)} e^{-i\omega s_3^{(p)} x_3} + C^{-(p)} B_i^{-(p)} e^{+i\omega s_3^{(p)} x_3} \right), \quad (2.4.8)$$

les $B_i^{\pm(p)}$ ($i = 1, 3, 4$) étant les composantes non nulles du vecteur propre $\mathbf{B}^{\pm(p)}$ associé à $s_3^{(p)}$, solution à partie réelle positive. La recherche d'ondes de Lamb, c'est à dire purement polarisées dans le plan $x_1 O x_3$, nécessite alors de restreindre le set des équations (2.4.6) et (2.4.7) au sous-système 3×3 [58]

$$\mathbf{M}(s_3^{(p)}) \mathbf{B}^{(p)} = \mathbf{0}, \quad (2.4.9)$$

où $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, 3$, avec $m_{11} = c_{11}^E s_1^2 + c_{44}^E s_3^2 - \rho$, $m_{12} = (c_{13}^E + c_{44}^E) s_1 s_3$, $m_{13} = (e_{31} + e_{15}) s_1 s_3$, $m_{22} = c_{44}^E s_1^2 + c_{33}^E s_3^2 - \rho$, $m_{23} = e_{15} s_1^2 + e_{33} s_3^2$, $m_{33} = -(e_{11}^S s_1^2 + e_{33}^S s_3^2)$, et $\mathbf{B}^{(p)} = [B_1^{(p)}, B_3^{(p)}, B_4^{(p)}]^t$. Ce système constitue un problème aux valeurs propres non-linéaire polynomial, notées $s_3^{(p)}$, dont les vecteurs propres correspondants sont $\mathbf{B}^{(p)}$, où l'indice $p = 1, 2, 3$ représente la $p^{\text{ième}}$ valeur propre. Pour une valeur fixée de s_1 , un couple $(s_3^{(p)}, \mathbf{B}^{(p)})$ est déterminé en résolvant le polynôme de degré 3 de variable s_3^2 suivant

$$\alpha s_3^6 + \beta s_3^4 + \gamma s_3^2 + \delta = 0 \quad (2.4.10)$$

issu de l'équation $\det \mathbf{M} = 0$ dont les trois solutions (ainsi que leur opposée) sont [53]

$$\begin{aligned} s_3^{(1)} &= \sqrt{\left(\Delta - \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{\Delta} - \beta \right) \frac{1}{3\alpha}}, \\ s_3^{(2)} &= \sqrt{\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}} \Delta + e^{+i\frac{\pi}{3}} \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{\Delta} - \beta \right) \frac{1}{3\alpha}}, \\ s_3^{(3)} &= \sqrt{\left(-e^{+i\frac{\pi}{3}} \Delta + e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{\Delta} - \beta \right) \frac{1}{3\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{ \left[\left(-\frac{27}{2} \alpha^2 \delta + \frac{9}{2} \alpha \beta \gamma - \beta^3 \right)^2 + (3\alpha\gamma - \beta^2)^3 \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{27}{2} \alpha^2 \delta + \frac{9}{2} \alpha \beta \gamma - \beta^3 \right\}^{1/3}, \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

et où les expressions des coefficients présents dans l'Eq. (2.4.10) sont

$$\begin{aligned}
\alpha &= \rho^{-2} c_{44}^E \left(c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right), \\
\beta &= \rho^{-2} \left[-c_{13}^E \left(c_{13}^E + 2c_{44}^E + 2 \frac{e_{33}(e_{31} + e_{15})}{\epsilon_{33}^S} \right) \right. \\
&\quad + c_{33}^E \frac{(e_{31} + e_{15})^2}{\epsilon_{33}^S} + c_{44}^E \left(\frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_{33}^S} c_{33}^E - \frac{2e_{31}e_{33}}{\epsilon_{33}^S} \right) \\
&\quad \left. + c_{11}^E \left(c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right) \right] s_1^2 - \rho^{-1} \left(c_{44}^E + c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right), \\
\gamma &= \rho^{-2} \left[c_{11}^E \frac{2e_{15}e_{33}}{\epsilon_{33}^S} + \frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_{33}^S} \left(c_{11}^E c_{33}^E - c_{13}^E (c_{13}^E + 2c_{44}^E) \right) \right. \\
&\quad - c_{13}^E \frac{2e_{15}(e_{31} + e_{15})}{\epsilon_{33}^S} + c_{44}^E \left(c_{11}^E + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}^S} \right) \left. \right] s_1^4 \\
&\quad - \rho^{-1} \left[c_{11}^E + c_{44}^E + \frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_{33}^S} \left(c_{33}^E + c_{44}^E \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2e_{15}e_{33} + (e_{31} + e_{15})^2}{\epsilon_{33}^S} \right] s_1^2 + 1, \\
\delta &= \frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_{33}^S} \left[\rho^{-2} c_{11}^E \left(c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \right) s_1^6 \right. \\
&\quad \left. - \rho^{-1} \left(c_{11}^E + c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S} \right) s_1^4 + s_1^2 \right]. \tag{2.4.13}
\end{aligned}$$

Il est maintenant nécessaire d'adjoindre à ce set, les équations de passage (qui diffèrent selon l'état des interfaces).

Plaque nue sans électrodes

Dans ce cas le plus simple (Figure 2.7), imposant en l'absence de milieu extérieur des conditions d'interfaces libres d'un point de vue mécanique, et, en l'absence de charge à l'interface, la continuité des composantes tangentielle du champ électrique et normale du déplacement électrique, le set des équations de passage aux interfaces inférieure ($x_3 = -h/2$) et supérieure ($x_3 = +h/2$) de la plaque sont

$$\begin{aligned}
T_{33}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\
T_{31}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\
E_1^\nu - E_1|_{x_3 = \pm h/2} &= 0, \\
D_3^\nu - D_3|_{x_3 = \pm h/2} &= 0, \tag{2.4.14}
\end{aligned}$$

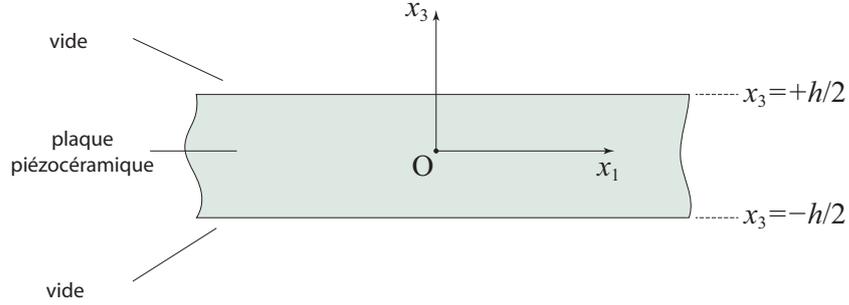


Figure 2.7 – Plaque piézocéramique d’extension infinie dans le plan x_1Ox_2 qui coïncide avec le plan d’isotropie transverse du matériau polarisé selon l’axe Ox_3 de haute symétrie.

où \mathbf{E}^ν , \mathbf{D}^ν sont les champs électriques et champs de déplacement électrique dans le vide ($\nu = u, d$ représente les demi-espaces $x_3 > \frac{h}{2}$ et $x_3 < -\frac{h}{2}$), et T_{33}, T_{31} sont les composantes des contraintes normale et tangentielle respectivement en $x_3 = \pm h/2$. Les deux équations de passage de E_1 permettent d’exprimer les champs électriques externes en fonction des paramètres du champ électrique interne

$$E_1^\nu = -\varphi_{,1}^\nu = i\omega s_1 C^\nu e^{-i\omega(s_1 x_1 + s_3^\nu |x_3|)}, \quad (2.4.15)$$

et

$$D_3^\nu = -\epsilon_0 \varphi_{,3}^\nu = \epsilon_0 i\omega \kappa^\nu s_3^\nu C^\nu e^{-i\omega(s_1 x_1 + s_3^\nu |x_3|)}. \quad (2.4.16)$$

où $\kappa^\nu = +1(-1)$ pour $\nu = u(d)$, en notant $(s_3^\nu)^2 = \frac{1}{c_0^2} - s_1^2$, et où, en utilisant la condition de passage de E_1

$$C^\nu = \sum_{p=1}^3 B_4^{+(p)} \left(C^{+(p)} e^{-i\omega \kappa^\nu s_3^{(p)} h/2} - C^{-(p)} e^{+i\omega \kappa^\nu s_3^{(p)} h/2} \right) e^{i\omega s_3^\nu h/2}. \quad (2.4.17)$$

Les 6 autres équations de passage permettent de former le système matriciel 6×6

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\omega, k_1) \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (2.4.18)$$

où \mathbf{C} est le vecteur-colonne dont les coordonnées sont les amplitudes $C^{\pm(p)}$. La solution non-triviale du système (2.4.18) est déterminée par la condition $\det \widetilde{\mathbf{M}}(\omega, k_1) = 0$; après quelques manipulations algébriques, la matrice $\widetilde{\mathbf{M}}$ peut être mise sous forme bloc-diagonale si bien que l’annulation du déterminant global aboutit à deux équations séparées, $\det \widetilde{\mathbf{M}}^S(\omega, k_1) = 0$ et $\det \widetilde{\mathbf{M}}^A(\omega, k_1) =$

0, avec

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{M}}^S &= \begin{bmatrix} U^{(1)} & U^{(2)} & U^{(3)} \\ V^{(1)} \tan \phi^{(1)} & V^{(2)} \tan \phi^{(2)} & V^{(3)} \tan \phi^{(3)} \\ X^{(1)} & X^{(2)} & X^{(3)} \end{bmatrix}, \\ \widetilde{\mathbf{M}}^A &= \begin{bmatrix} U^{(1)} & U^{(2)} & U^{(3)} \\ V^{(1)} \cot \phi^{(1)} & V^{(2)} \cot \phi^{(2)} & V^{(3)} \cot \phi^{(3)} \\ X^{(1)} & X^{(2)} & X^{(3)} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.4.19)$$

où $\phi^{(p)} = \omega s_3^{(p)} \frac{h}{2}$, $p = 1, 2, 3$, et

$$\begin{aligned}U^{(p)} &= -i\omega \left(c_{13}^E B_1^{+(p)} s_1 + c_{33}^E B_3^{+(p)} s_3^{(p)} + e_{33} B_4^{+(p)} s_3^{(p)} \right), \\ V^{(p)} &= -i\omega \left(c_{44}^E B_1^{+(p)} s_3^{(p)} + c_{44}^E B_3^{+(p)} s_1 + e_{15} B_4^{+(p)} s_1 \right), \\ X^{(p)} &= -i\omega \left(e_{31} B_1^{+(p)} s_1 + e_{33} B_3^{+(p)} s_3^{(p)} - \epsilon_{33}^S B_4^{+(p)} s_3^{(p)} \right).\end{aligned}\quad (2.4.20)$$

Les sous-déterminants une fois développés fournissent les équations [58]

$$\begin{aligned}& V^{(1)} \tan \phi^{(1)} \left[U^{(2)} X^{(3)} - U^{(3)} X^{(2)} \right] \\ & + V^{(2)} \tan \phi^{(2)} \left[U^{(3)} X^{(1)} - U^{(1)} X^{(3)} \right] \\ & + V^{(3)} \tan \phi^{(3)} \left[U^{(1)} X^{(2)} - U^{(2)} X^{(1)} \right] = 0, \\ & V^{(1)} \cot \phi^{(1)} \left[U^{(2)} X^{(3)} - U^{(3)} X^{(2)} \right] \\ & + V^{(2)} \cot \phi^{(2)} \left[U^{(3)} X^{(1)} - U^{(1)} X^{(3)} \right] \\ & + V^{(3)} \cot \phi^{(3)} \left[U^{(1)} X^{(2)} - U^{(2)} X^{(1)} \right] = 0.\end{aligned}\quad (2.4.21)$$

La première permet d'obtenir la courbe de dispersion $\omega(k_1)$ pour les modes de Lamb *symétriques*, la deuxième celle des modes correspondants de Lamb *antisymétriques*.

Plaque avec électrodes

La faible épaisseur (quelques dizaines de μm d'argent) de l'électrode déposée sur chaque face de la plaque (Figure 2.8) permet de supposer qu'elle ne joue pas de rôle mécanique, si bien qu'on va d'une part négliger son épaisseur mais également que les conditions de passage d'interfaces libres précédentes (2.4.14) sont de nouveau utilisées. Les conditions de passage électriques doivent par contre être considérées avec soin. Des charges pouvant maintenant être apportées et évacuées, ce qui suppose une connexion indirecte ou directe des électrodes avec une référence de masse, elles doivent être prises en compte dans l'équation de

passage de la composante normale du déplacement électrique

$$\begin{aligned} T_{33}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\ T_{31}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\ E_1^\nu - E_1|_{x_3=\pm h/2} &= 0, \\ D_3^\nu - D_3|_{x_3=\pm h/2} &= \sigma^\nu, \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

σ^ν étant la densité surfacique de charge instantanée. L'équation de passage du champ électrique tangentiel ayant la même utilité que dans la section précédente, l'intérêt et la différence de problème physique avec le cas de la plaque nue réside uniquement dans cette équation concernant le déplacement électrique normal. Si on suppose que $\sigma^\nu = 0$, on ne peut distinguer ce cas de celui de la plaque sans électrode. Le cas de référence le plus simple à traiter dans ce cas est celui où une tension uniforme est imposée sur chaque électrode, par exemple

$$\begin{aligned} T_{33}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\ T_{31}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\ \varphi|_{x_3=\pm h/2} = \varphi^\nu|_{x_3=\pm h/2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

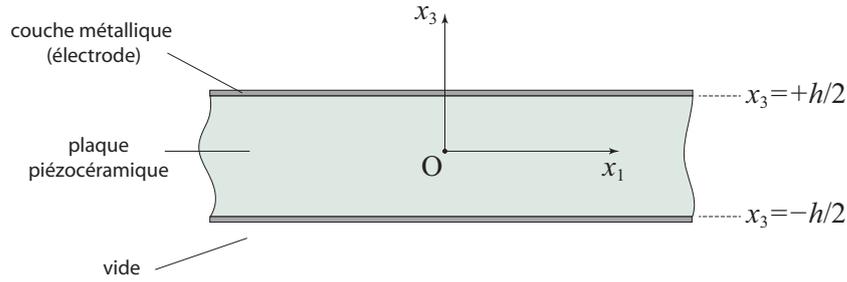


Figure 2.8 – Plaque piézocéramique, comme celle décrite dans la figure 2.7, mais cette fois-ci avec ses deux interfaces recouvertes entièrement avec une fine couche métallique.

Dans ce cas, le système matriciel qui en résulte produit deux équations découplées $\det \tilde{\mathbf{M}}^S(\omega, k_1) = 0$ et $\det \tilde{\mathbf{M}}^A(\omega, k_1) = 0$, avec maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}^S &= \begin{bmatrix} U^{(1)} \cot \phi^{(1)} & U^{(2)} \cot \phi^{(2)} & U^{(3)} \cot \phi^{(3)} \\ V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} \\ B_4^{(1)} & B_4^{(2)} & B_4^{(3)} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^A &= \begin{bmatrix} U^{(1)} \tan \phi^{(1)} & U^{(2)} \tan \phi^{(2)} & U^{(3)} \tan \phi^{(3)} \\ V^{(1)} & V^{(2)} & V^{(3)} \\ B_4^{(1)} & B_4^{(2)} & B_4^{(3)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Bien entendu il faut conjointement à ce système, résoudre les équations aux modes propres dans le volume (2.4.9) comme dans le cas de la plaque nue.

L'annulation de ces deux déterminants conduit à

$$\begin{aligned}
& U^{(1)} \cot \phi^{(1)} \left[V^{(2)} B_4^{+(3)} - V^{(3)} B_4^{+(2)} \right] \\
& + U^{(2)} \cot \phi^{(2)} \left[V^{(3)} B_4^{+(1)} - V^{(1)} B_4^{+(3)} \right] \\
& + U^{(3)} \cot \phi^{(3)} \left[V^{(1)} B_4^{+(2)} - V^{(2)} B_4^{+(1)} \right] = 0, \\
& U^{(1)} \tan \phi^{(1)} \left[V^{(2)} B_4^{+(3)} - V^{(3)} B_4^{+(2)} \right] \\
& + U^{(2)} \tan \phi^{(2)} \left[V^{(3)} B_4^{+(1)} - V^{(1)} B_4^{+(3)} \right] \\
& + U^{(3)} \tan \phi^{(3)} \left[V^{(1)} B_4^{+(2)} - V^{(2)} B_4^{+(1)} \right] = 0. \quad (2.4.25)
\end{aligned}$$

Tout comme dans le cas de la plaque nue, la première permet d'obtenir la dispersion $\omega(k_1)$ des modes de Lamb symétriques, alors que la seconde fournit les modes de Lamb antisymétriques. Tous les calculs qui viennent d'être présentés serviront à valider les résultats numériques issus de calculs par éléments finis.

2.4.2 Cristal phononique

Dans la précédente section, la mise en équation analytique des ondes de Lamb ainsi que la solution de ce problème dans le cas d'une plaque piézo-céramique uniforme est fournie dans deux cas remarquables et contrastés de conditions de frontière électriques : plaque nue, puis plaque recouverte d'électrode à potentiel nul, servant de référence pour l'étude qui vient. Dans le cas plus complexe d'une plaque périodiquement structurée avec des électrodes connectées à des circuits électriques, on peut conserver la progression de mise en équation, mais dans ce cas, la portion de plaque concernée est la cellule élémentaire périodisée selon Ox_1 impliquant des modes de type Lamb et de type électromagnétique développés sur la base de solutions élémentaires de volume, caractérisées par une composante de vecteur d'onde $\mathbf{k}_{1n} = +\omega s_{1n} \hat{\mathbf{x}}_1 = k_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{g}_n$, où $k_1 \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ est la composante de vecteur d'onde réduite dans la 1^{ère} Zone de Brillouin (ZB), et $\mathbf{g}_n = \frac{2\pi}{a} n \hat{\mathbf{x}}_1 \equiv g_n \hat{\mathbf{x}}_1$, avec $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, étant les vecteurs du réseau réciproque, générateurs des différents faisceaux diffractés de composante de lenteur $s_{3n}^{(p)}$ selon Ox_3 . Par analogie à l'expression (2.4.8), on écrit [53] le champ de déplacement généralisé dans le cristal ($|x_3| \leq \frac{h}{2}$)

$$\begin{aligned}
u_i = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega s_{1n} x_1} \sum_p \left(C_n^{+(p)} B_{in}^{+(p)} e^{-i\omega s_{3n}^{(p)} x_3} \right. \\
& \left. + C_n^{-(p)} B_{in}^{-(p)} e^{+i\omega s_{3n}^{(p)} x_3} \right), \quad i = 1, 3, 4, \quad (2.4.26)
\end{aligned}$$

qui satisfait par construction le théorème de Bloch-Floquet, et pour tout champ satisfaisant ce théorème, l'étude en x_1 sera à présent limitée à la cellule élémentaire ($|x_1| \leq \frac{a}{2}$), sans perte de généralité. Dans la pratique la somme précédente

est tronquée à $|n| \leq n_{\max}$. Les quantités $s_{3n}^{(p)}$ et $B_{in}^{+(p)}$ sont déterminées pour chaque s_{1n} fixé, comme décrit dans § 2.4.1. Les coefficients inconnus $C_n^{\pm(p)}$ sont comme dans le cas d'une plaque uniforme, solutions du système des équations de frontières appropriées, appliquées aux deux interfaces de la cellule élémentaire du cristal situées en $x_3 = \pm \frac{h}{2}$

$$\begin{aligned} T_{33}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\ T_{31}(x_3 = \pm h/2) &= 0, \\ E_1 - E_1^\nu &= 0, \\ D_3^\nu - D_3 &= \sigma(x_1), \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

où la densité de charge surfacique $\sigma(x_1)$ est supposée uniforme sur l'électrode en raison de l'hypothèse de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), et nulle en dehors, soit

$$\sigma(x_1) = \begin{cases} \sigma^\nu, & |x_1| \leq \frac{w}{2}, \\ 0, & \frac{w}{2} < |x_1| \leq \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (2.4.28)$$

Dans les régions extérieures à la plaque ($|x_3| \geq \frac{h}{2}$) on écrit les champs de nature électromagnétique de manière analogue encore une fois à ce qui a été effectué dans le cas de la plaque uniforme, à savoir

$$u_4^\nu = \varphi^\nu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^\nu e^{-i\omega(s_{1n}x_1 + s_{3n}^\nu|x_3|)}, \quad (2.4.29)$$

pour lesquels les équations de continuité de E_1 , invariantes par translation le long de x_1 permettent d'écrire les grandeurs inconnues de ces champs externes en fonction de celles du champ interne

$$C_n^\nu = \sum_{p=1}^3 B_{4n}^{+(p)} \left(C_n^{+(p)} e^{-i\omega\kappa^\nu s_{3n}^{(p)} h/2} - C_n^{-(p)} e^{+i\omega\kappa^\nu s_{3n}^{(p)} h/2} \right) e^{i\omega s_{3n}^\nu h/2}, \quad (2.4.30)$$

avec $(s_{3n}^\nu)^2 = \frac{1}{c_0^2} - s_{1n}^2$, s_{1n} se conservant à la traversée de l'interface du cristal. Afin d'obtenir de chaque côté de la plaque selon Ox_3 un comportement évanescents des champs d'origine électrique, et comme $c_0 \gg 1$ on peut écrire $(s_{3n}^\nu)^2 \approx -s_{1n}^2$. Il en résulte alors que $s_{3n}^\nu \approx -i\xi_n s_{1n}$, où $\xi_n = +1$ si $\text{Re}\{s_{1n}\} > 0$ et $\xi_n = -1$ partout ailleurs. Toute cette discussion met, bien entendu, à part le cas $k_1 \rightarrow 0$.

Les équations de passages mécaniques se déclinent pour chaque harmonique

par projection des

$$\begin{aligned}
T_{33} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s_{1n} x_1} \sum_{p=1}^3 U_n^{(p)} \left(C_n^{+(p)} e^{-i\omega s_{3n}^{(p)} x_3} \right. \\
&\quad \left. + C_n^{-(p)} e^{+i\omega s_{3n}^{(p)} x_3} \right), \\
T_{31} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s_{1n} x_1} \sum_{p=1}^3 V_n^{(p)} \left(C_n^{+(p)} e^{-i\omega s_{3n}^{(p)} x_3} \right. \\
&\quad \left. - C_n^{-(p)} e^{+i\omega s_{3n}^{(p)} x_3} \right), \tag{2.4.31}
\end{aligned}$$

sur la base des fonctions $e_n(x_1) \equiv e^{-i\omega s_{1n} x_1}$ orthogonales sur $[x_1, x_1 + a]$

$$\langle e_m, e_n \rangle \equiv \int_{-a/2}^{+a/2} e_m^* e_n dx_1 = a \delta_{nm}, \tag{2.4.32}$$

en $4 \times (2n_{\max} + 1)$ équations associées à des blocs diagonaux en n dans la matrice principale. Dans les expressions précédentes des contraintes aux interfaces,

$$\begin{aligned}
U_n^{(p)} &= -i\omega \left[c_{13}^E B_{1n}^{+(p)} s_{1n} + c_{33}^E B_{3n}^{+(p)} s_{3n}^{(p)} + e_{33} B_{4n}^{+(p)} s_{3n}^{(p)} \right], \\
V_n^{(p)} &= -i\omega \left[c_{44}^E B_{1n}^{+(p)} s_{3n}^{(p)} + c_{44}^E B_{3n}^{+(p)} s_{1n} + e_{15} B_{4n}^{+(p)} s_{1n} \right]. \tag{2.4.33}
\end{aligned}$$

Lorsqu'on connecte des circuits aux électrodes $\nu = u, d$, l'équation de saut de D_3 n'est pas simple à utiliser. Mieux vaut faire intervenir à la place une équation de frontière équivalente concernant le potentiel scalaire que l'on identifiera sur l'électrode à la tension Φ_e^ν aux bornes de l'impédance équivalente du circuit Z^ν . En notant que la charge totale Q^ν portée par l'électrode résulte de l'intégration de la densité de charge sur sa surface $\mathcal{A} = wl$ (l longueur de l'électrode selon Ox_2), $Q^\nu = \iint dx_1 dx_2 (D_3^\nu - D_3)|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}$, et en choisissant d'y remplacer $D_3^\nu|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}$ par $+\epsilon_0 (k_1 \varphi - \varphi_{,3}^\nu - k_1 \varphi)|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}$, la tension sur l'électrode s'exprime

$$\begin{aligned}
\varphi|_{x_3=\pm\frac{h}{2}} &= \Phi_e^\nu = \left(1 + \frac{1}{i\omega Z^\nu \mathcal{A} \epsilon_0 k_1} \right)^{-1} \\
&\quad \times \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} dx_1 \left(\frac{1}{\epsilon_0 k_1} D_3 + \frac{1}{k_1} \varphi_{,3}^\nu + \varphi \right) \Big|_{x_3=\pm\frac{h}{2}} \tag{2.4.34}
\end{aligned}$$

pour $|x_1| \leq \frac{w}{2}$. En dehors de l'électrode ($\frac{w}{2} < |x_1| \leq \frac{a}{2}$), le potentiel à l'interface peut s'écrire

$$\varphi|_{x_3=\pm\frac{h}{2}} = \left(\frac{1}{\epsilon_0 k_1} D_3 + \frac{1}{k_1} \varphi_{,3}^\nu + \varphi \right) \Big|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}. \tag{2.4.35}$$

La quantité commune $\left(\frac{1}{\epsilon_0 k_1} D_3 + \frac{1}{k_1} \varphi_{,3}^\nu + \varphi\right)\Big|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}$ se développe sur la base des fonctions $e_n(x_1) \equiv e^{-i\omega s_{1n} x_1}$ avec les coefficients d'amplitude appropriés

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\epsilon_0 k_1} D_3 + \frac{1}{k_1} \varphi_{,3}^\nu + \varphi\right)\Big|_{x_3=\pm\frac{h}{2}} = \frac{1}{\epsilon_0 k_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s_{1n} x_1} \\ & \times \sum_{p=1}^3 \left(C_n^{+(p)} \mathcal{F}_n^{+(p)\nu} e^{-i\omega \kappa^\nu s_{3n}^{(p)} h/2} + C_n^{-(p)} \mathcal{F}_n^{-(p)\nu} e^{+i\omega \kappa^\nu s_{3n}^{(p)} h/2} \right), \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

où

$$\mathcal{F}_n^{\pm(p)\nu} = X_n^{(p)} \mp B_{4n}^{+(p)} \epsilon_0 [(\kappa^\nu \xi_n - 1)k_1 + \kappa^\nu \xi_n g_n], \quad (2.4.37)$$

avec

$$X_n^{(p)} = -i\omega \left[e_{31} B_{1n}^{+(p)} s_{1n} + e_{33} B_{3n}^{+(p)} s_{3n}^{(p)} - \epsilon_{33}^S B_{4n}^{+(p)} s_{3n}^{(p)} \right], \quad (2.4.38)$$

intervenant dans le développement modal de D_3 . La forme finale de $\varphi|_{x_3=\pm\frac{h}{2}}$, après projection sur la base des $e_n(x_1)$ conduit à $2 \times (2n_{\max} + 1)$ équations

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_{p=1}^3 \left\{ C_n^{+(p)} \left[\gamma_{nm}^\nu \mathcal{F}_n^{+(p)\nu} - a \delta_{nm} B_{4n}^{+(p)} \right] e^{-i\omega \kappa^\nu s_{3n}^{(p)} h/2} \right. \\ & \left. + C_n^{-(p)} \left[\gamma_{nm}^\nu \mathcal{F}_n^{-(p)\nu} + a \delta_{nm} B_{4n}^{+(p)} \right] e^{+i\omega \kappa^\nu s_{3n}^{(p)} h/2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker et les coefficients γ_{nm}^ν résultent de l'intégration sur x_1 et embarquent toute l'information liée aux impédances du circuit Z^ν . Leur expression est

$$\gamma_{nm}^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 k_1} \left[\left(1 + \frac{1}{i\omega Z^\nu \mathcal{A} \epsilon_0 k_1} \right)^{-1} \alpha_{nm} + \beta_{nm} \right], \quad (2.4.40)$$

où

$$\alpha_{nm} = w \mathcal{P}_n(k_1) \mathcal{P}_m(k_1), \quad (2.4.41)$$

$$\begin{aligned} \beta_{nm} & \equiv \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{w}{2}} + \int_{\frac{w}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) dx_1 e^{-i\omega(s_{1n} - s_{1m})x_1} \\ & = a \delta_{nm} - w \mathcal{P}_{n-m}(k_1 = 0), \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

et

$$\mathcal{P}_n(k_1) \equiv \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} dx_1 e^{-i\omega s_{1n} x_1} = \frac{\sin(\omega s_{1n} \frac{w}{2})}{\omega s_{1n} \frac{w}{2}}, \quad (2.4.43)$$

avec $\omega s_{1n} = k_1 + g_n = k_1 + \frac{2\pi}{a} n$. Les équations de passages mécaniques et électriques sont regroupées en un système matriciel de $6 \times (2n_{\max} + 1)$ équations à $6 \times (2n_{\max} + 1)$ inconnues $C_n^{\pm(p)}$, composantes du vecteur \mathbf{C}

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\omega, k_1) \mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (2.4.44)$$

Les solutions non-triviales de l'Eq. (2.4.44) sont déterminées à partir de la condition $\det \widetilde{\mathbf{M}}(\omega, k_1) = 0$ produisant la relation de dispersion $\omega(k_1)$ des modes de type Lamb se propageant selon Ox_1 pour la plaque phononique considérée.

2.4.3 Modélisation Éléments Finis

Cette partie présente la modélisation de la plaque phononique à l'aide de la méthode des éléments finis (FEM). Par la suite deux types d'étude seront effectuées à l'aide du logiciel commercial COMSOL Multiphysics® [59] :

- L'analyse modale, qui permet d'obtenir la structure de bandes du milieu périodique supposé infini.
- L'analyse transitoire ou temporelle, qui permet de modéliser une structure de dimension finie et d'observer les modes propagatifs ou évanescents présents pour différents types de sources.

Analyse modale – Structure de bandes

Pour une analyse modale, seule la cellule élémentaire est considérée. On s'intéresse donc à un motif élémentaire de la plaque phononique piézoélectrique constitué d'une longueur $a_0 = 1$ mm, sur laquelle sont déposées deux électrodes de largeur $w = 0.7$ mm sur chacune des faces (Figure 2.1(a)). C'est une étude 2D, les différentes grandeurs physiques (déformations, contraintes, champ électriques, ...) ne dépendent que des directions Ox_1 et Ox_3 . La largeur de la plaque (selon la direction Ox_2) est égale à 48 mm. Même si le problème est idéalisé comme bidimensionnel dans le plan x_1Ox_3 , il est important de définir cette dimension suivant Ox_2 pour normaliser les résultats. Pour chaque nombre d'onde dans la plaque les fréquences propres sont déterminées. La structure est supposée périodique donc infinie dans la direction Ox_1 ; cela revient à appliquer des conditions aux limites de type Bloch-Floquet sur le déplacement et le potentiel électrique sur les frontières en $x_1 = 0$ et $x_1 = a_0$:

$$u(x_1 = a_0, k_1) = u(x_1 = 0, k_1)e^{-ik_1a_0}, \quad (2.4.45)$$

$$V(x_1 = a_0, k_1) = V(x_1 = 0, k_1)e^{-ik_1a_0}. \quad (2.4.46)$$

On choisit un maillage triangulaire afin de discrétiser la cellule élémentaire. Une condition minimale de 10 nœuds par longueur d'onde est respectée pour ce maillage. Le calcul est effectué sur la demi-zone de Brillouin (ZB) $k_1 \in [0, \pi/a_0]$ avec un pas de $0.02 \frac{\pi}{a_0} \text{ m}^{-1}$. Les paramètres du matériau sont ceux donnés par le fabricant (Tableau A.1 en Annexe). Les électrodes sont sans épaisseur et considérées comme parfaitement conductrices, comme dans le modèle analytique de la section précédente.

Sur la Figure 2.9 sont données les solutions $f(k_1)$ de l'analyse modale. On observe une structure de bandes classique composée de branches repliées à l'extrémité de la ZB sur une plage fréquentielle $[0 - 2 \text{ MHz}]$. A l'extrémité de la zone de Brillouin en $k_1 = \pi/a_0$ et au croisement de certaines branches on observe l'ouverture de bandes interdites. Par souci de simplicité, nous appelons modes de Lamb les modes présents sur la plaque et utilisons les dénominations classiques $\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$ pour les modes symétriques et $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ pour

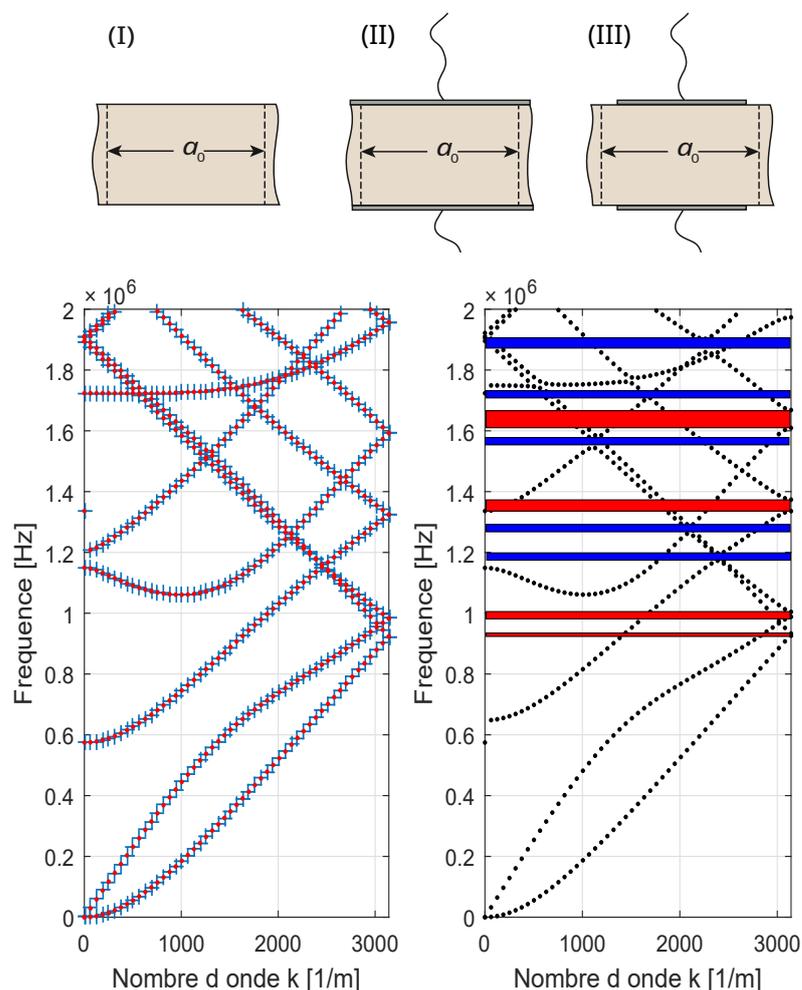


Figure 2.9 – Les courbes de dispersion pour une plaque infinie suivant la direction Ox_1 : à gauche sans électrodes (points en rouge, configuration (I)) ou avec électrodes couvrant toute la cellule (points en bleu, configuration (II)) ; à droite, configuration (III) avec des électrodes de largeur inférieure à la largeur de la cellule.

les modes antisymétriques. Les bandes interdites présentes à la limite de la ZB font intervenir un seul mode (zones rouges sur la Figure 2.9) et les bandes interdites à l'intérieur de la ZB font intervenir deux modes différents (zones bleues).

Nous pouvons comparer cette structure de bandes aux courbes de dispersion des modes présents sur une plaque piézoélectrique entièrement couverte d'électrodes conductrices sur ses deux faces. Pour simplifier la comparaison, l'analyse modale de cette plaque est effectuée sur une longueur a_0 identique à la cellule élémentaire du cristal. Dans ce cas la notion de périodicité est purement arti-

ficielle et les repliements observés en limite de ZB sont liés à la méthode de calcul FEM et n'entraînent pas d'ouverture de bandes interdites. On retrouve bien l'ensemble des modes guidés de type Lamb, les fréquences de coupures des différents modes vérifient les relations suivantes :

— Modes **symétriques** :

- pairs : $S_{2n} \rightarrow f_c = n \frac{c_T}{h}$,
- impairs : $S_{2n+1} \rightarrow f_c = (2n + 1) \frac{c_L}{2h}$,

— Modes **antisymétriques** :

- pairs : $A_{2n} \rightarrow f_c = n \frac{c_L}{h}$,
- impairs : $A_{2n+1} \rightarrow f_c = (2n + 1) \frac{c_T}{2h}$,

avec $n \in \mathbb{N}$ et $c_T = \sqrt{\frac{c_{44}^E}{\rho}}$, $c_L = \sqrt{\frac{c_{33}^E + c_{33}^2 / \epsilon_{33}^S}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$.

A noter que la structure de bandes de la plaque dont les deux surfaces sont recouvertes totalement d'une électrode conductrice isolée est identique au cas de la plaque sans électrode. Ceci est lié au fait que d'un point de vue électrique ces deux cas sont similaires : l'électrode étant isolée elle ne peut accueillir de charges.

Sur la Figure 2.9, on constate des modifications de valeurs de fréquences de coupures avec ou sans électrodes périodiques. La périodicité entraîne des décalages plus ou moins importants suivant le type de modes, ceci est particulièrement marqué pour le mode S_2 dont la fréquence de coupure de l'ordre de 1.2 MHz se décale vers les fréquences hautes pour atteindre 1.34 MHz.

Analyse transitoire ou temporelle

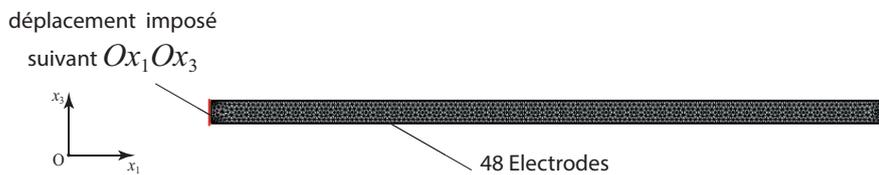


Figure 2.10 – Représentation schématique de la plaque simulée dans l'étude temporelle.

L'analyse transitoire permet de traiter le cas d'un cristal de taille finie et donc de se rapprocher de la configuration expérimentale. Un modèle 2D a été réalisé, la structure finie étudiée est représentée sur la Figure 2.10, elle se compose d'un

réseau de 48 cellules élémentaires similaires à celle utilisée précédemment dans l'analyse modale. On suppose toujours une invariance selon la direction Ox_2 , le problème se réduit donc à une étude bidimensionnelle dans le plan (x_1Ox_3) .

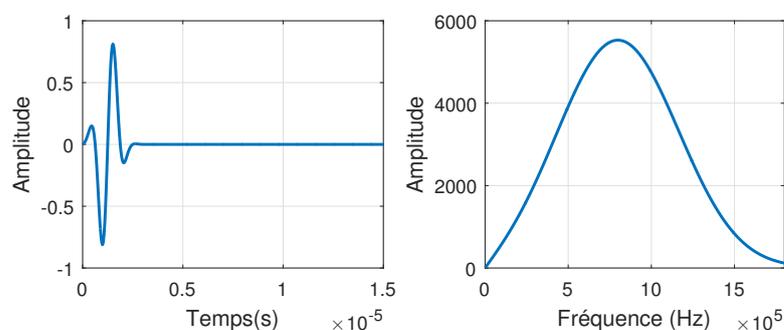


Figure 2.11 – Signal exciteur utilisé. Représentation dans le domaine temporel (gauche) et fréquentiel (droite).

Le domaine temporel étudié s'étend de 0 à $30 \mu\text{s}$ par pas de 62.5 ns . Un déplacement dans les directions Ox_1 et Ox_3 est imposé à l'extrémité de la plaque en $x_1 = 0$. Le signal d'excitation est de type sinus fenêtré par une fonction Gaussienne centrée ici sur la fréquence 800 kHz (Figure 2.11).

Les déplacements suivant Ox_3 en surface ($x_3 = h/2$) de la plaque le long de la direction Ox_1 sont donnés sur la représentation spatio-temporelle Figure 2.12 par pas de 0.1 mm . Par la suite, en plus de déplacements suivant Ox_3 on s'intéresse au potentiel électrique au long de la direction de propagation Ox_1 .

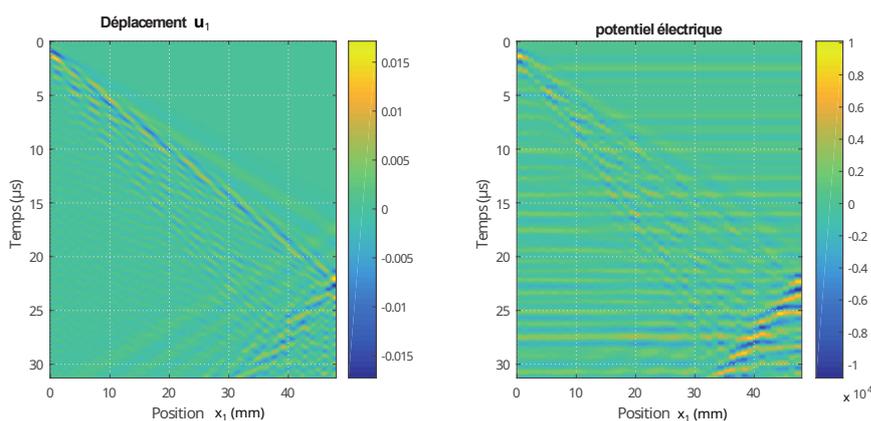


Figure 2.12 – Evaluation spatio-temporelle de champ mesuré à la surface de la plaque piézoélectrique : les déplacements suivant Ox_3 (gauche) et le potentiel électrique (droite).

2.5 Étude expérimentale

2.5.1 Méthodes expérimentales et traitements des signaux

Deux types d'études expérimentales sont réalisées. La première méthode consiste à utiliser les électrodes du cristal afin de relever les potentiels électriques le long de la plaque en fonction du temps. La deuxième méthode est une méthode optique sans contact, un vibromètre laser est utilisé en réception afin de mesurer les déplacements normaux de la surface associés à la présence d'ondes guidées dans le cristal [60].

Mesures du potentiel électrique

Le cristal piézoélectrique est inséré dans deux connecteurs de carte PCI (Figure 2.13). Sur le premier connecteur, la première paire d'électrodes est utilisée pour générer des ondes dans la plaque en imposant un signal électrique sous forme de train d'ondes ou impulsionsnel; les 47 paires d'électrodes restantes sont utilisées pour charger la plaque avec des circuits électriques externes ou bien laissées au potentiel flottant. Un second lecteur de carte est branché à l'extrémité droite de la plaque pour assurer la mesure des potentiels à l'aide d'un oscilloscope Lecroy WaveRunner HRO 66 Zi.

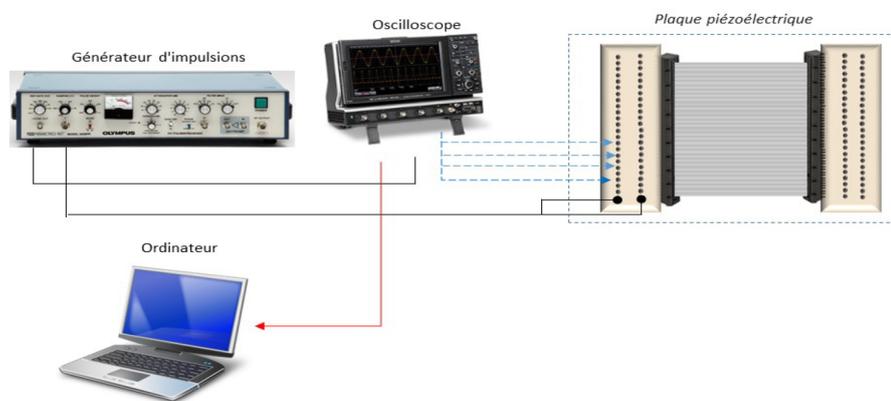


Figure 2.13 – Banc de mesure pour le potentiel électrique.

Un signal électrique impulsionnel d'amplitude 200 V et de largeur $0.1 \mu\text{s}$ est appliqué à la première paire d'électrodes aux bornes de la plaque piézoélectrique, à l'aide d'un générateur Panametrics 5058 PR. Le couplage électro-mécanique au sein de la plaque piézoélectrique permet de générer des ondes guidées à l'intérieur de la plaque. La propagation d'ondes au sein de la plaque piézoélectrique s'accompagne, grâce au couplage électromécanique qui s'opère au sein du matériau piézoélectrique, de déformations produisant des variations d'épaisseur non négligeables qui se traduisent par l'apparition de charges et des variations de

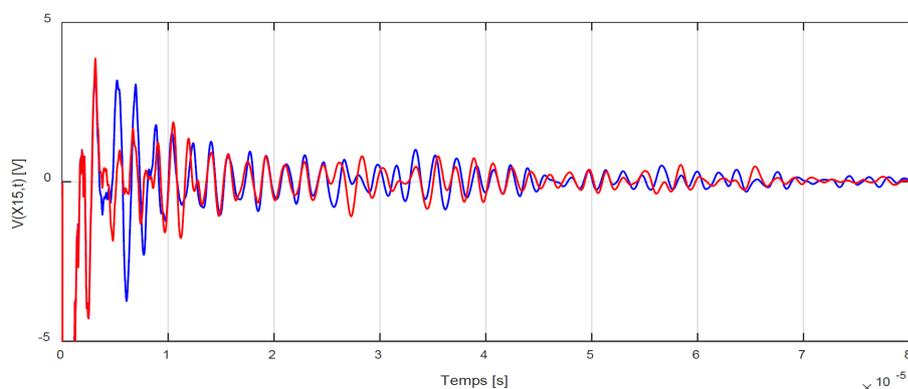


Figure 2.14 – Le potentiel électrique mesuré en face supérieure $V^u(x_{15}, t)$ en bleu et en face inférieure $V^d(x_{15}, t)$ en rouge, sur l'électrode $n = 15$.

potentiel électrique sur les électrodes. Nous mesurons ces potentiels électriques sur chaque électrode de la face supérieure ou inférieure de la plaque. Le potentiel électrique est enregistré avec une quantification de 12 bits verticale à l'aide d'un oscilloscope numérique, la masse du générateur d'impulsions étant prise comme référence. La fenêtre temporelle choisie est fixée à $250 \mu s$, avec une période d'échantillonnage égale à $5 ns$, qui permet d'observer quelques aller et retour (réflexions sur les bords de la plaque) d'ondes progressives. Chaque signal mesuré est ensuite moyenné 30 fois pour améliorer le rapport signal/bruit. La Figure 2.14 donne les signaux relevés sur la 15^{ème} cellule élémentaire ($n = 15$) respectivement sur les surfaces supérieure $V^u(x_{15}, t)$ et inférieure $V^d(x_{15}, t)$. Bien que similaires en termes d'amplitude et de fréquences, on peut observer sur ces oscillogrammes des déphasages entre les signaux relevés sur chacune des surfaces, les déformations créées par la propagation d'ondes de Lamb symétriques se traduisent en effet par l'apparition de charges de signes opposés sur les électrodes.

L'ensemble des oscillogrammes relevés sur les électrodes de la surface supérieure de la plaque est rassemblé sur la Figure 2.15. On observe principalement trois trajets entre les deux extrémités de la plaque d'une onde guidée à une vitesse de l'ordre de $3000 m/s$. Des fronts d'ondes quasi-horizontaux sont également visibles traduisant la présence d'ondes ayant une vitesse de phase très élevée s'établissant quasi instantanément sur la plaque.

Séparation des modes symétriques et antisymétriques

Des travaux antérieurs [61] ont montré que les différences $V^u \pm V^d$ appliquées aux potentiels mesurés sur les surfaces supérieures et inférieures permettent la séparation des modes. Les modes symétriques S_n se manifestent par un champ de potentiel électrique antisymétrique vis-à-vis du plan médian de la plaque (les potentiels sur les électrodes en vis à vis sont de signes opposés) alors

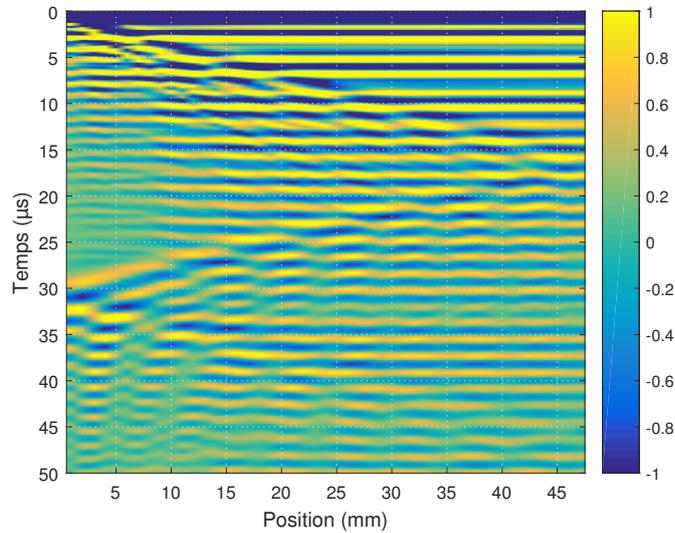
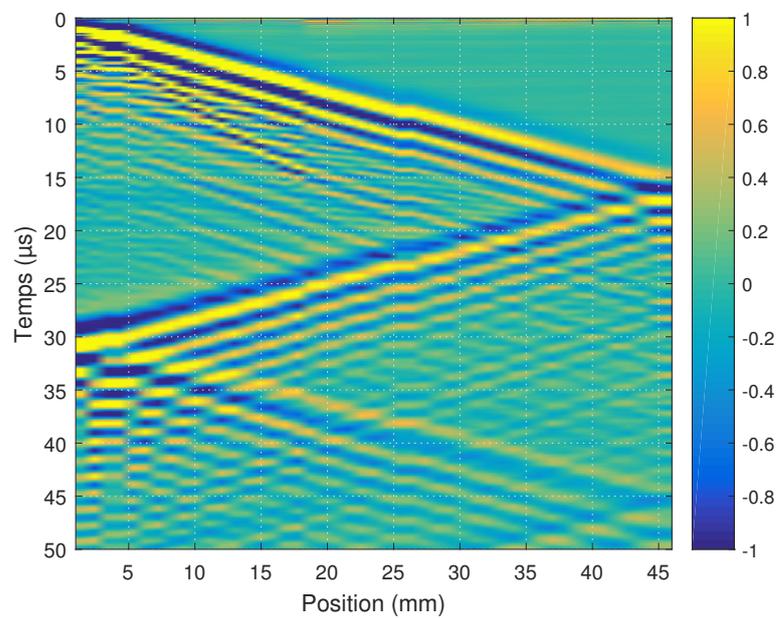


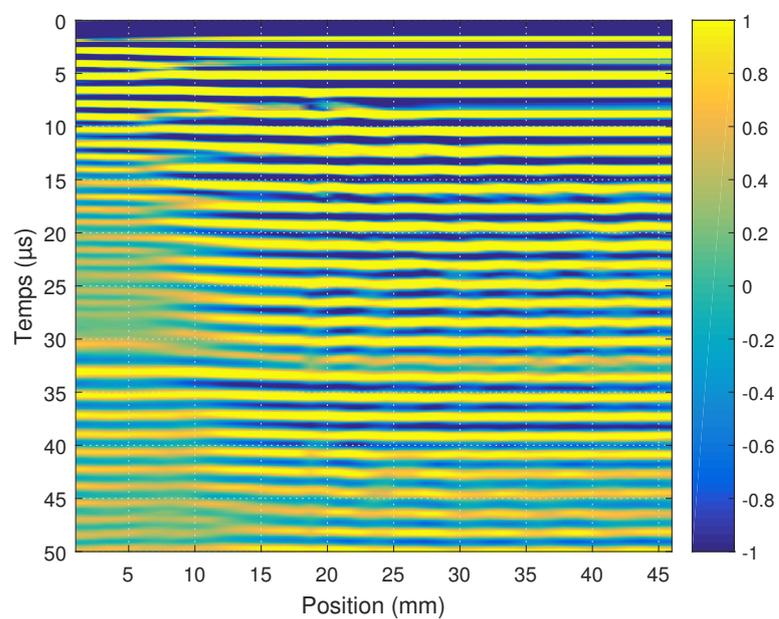
Figure 2.15 – Image spatio-temporelle du potentiel électrique mesuré $V^u(x_n, t)$.

que pour les modes antisymétriques A_n le champ de potentiel est symétrique.

La Figure 2.16 donne les images spatio-temporelles obtenues par addition ou soustraction des potentiels relevés sur chacune des faces de la plaque. Lorsqu'une double transformée de Fourier en espace et en temps (FFT 2D) est appliquée à ces signaux expérimentaux (Figure 2.17), on observe le mode symétrique fondamental S_0 sur une large plage de fréquences s'étendant de 0 à 1.2 MHz environ. Le mode S_2 est également visible à partir de sa fréquence de coupure $f_{c,S_2} \approx 1.3$ MHz. L'identification des modes est possible grâce à la superposition de la structure de bande calculée par éléments finis. Des décalages entre courbes de dispersion expérimentales et numériques sont constatés, ceux-ci s'expliquent par une incertitude dans les constantes caractéristiques de la plaque piézoélectrique fournies par le fabricant [56]. Dans la section suivante une détermination expérimentale des constantes élastiques et piézoélectriques sera effectuée. Concernant le traitement FFT 2D sur la somme des signaux, on peut voir qu'un signal intense est présent sur l'ensemble des fréquences centré sur $k = 0 \text{ m}^{-1}$. Ce signal ne correspond pas à une propagation ultrasonore sur la plaque mais à la présence d'un signal électromagnétique parasite qui s'établit instantanément sur toutes les électrodes lors de l'excitation impulsionnelle de la plaque.



(a)



(b)

Figure 2.16 – Représentation spatio-temporelle : (a) la différence des signaux $V^u(x_{15}, t) - V^d(x_{15}, t)$ et (b) la somme des signaux $V^u(x_{15}, t) + V^d(x_{15}, t)$.

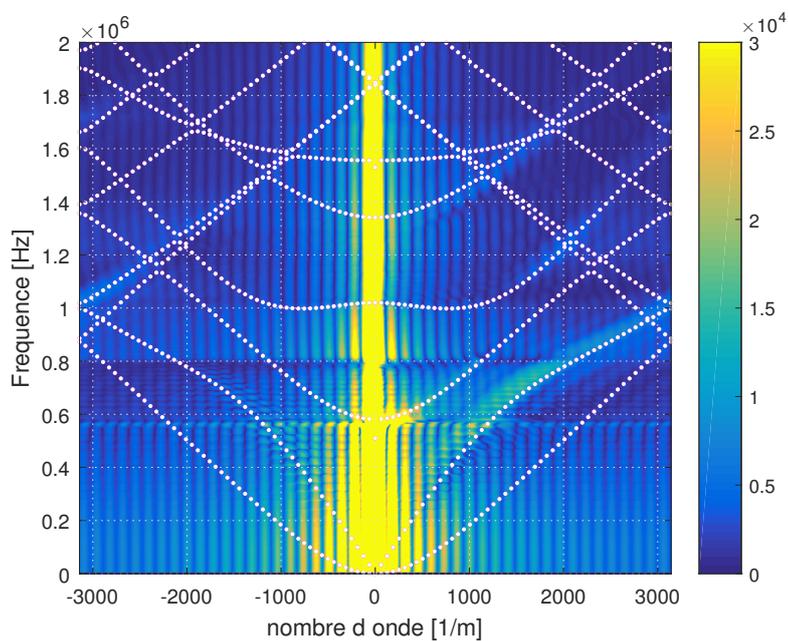
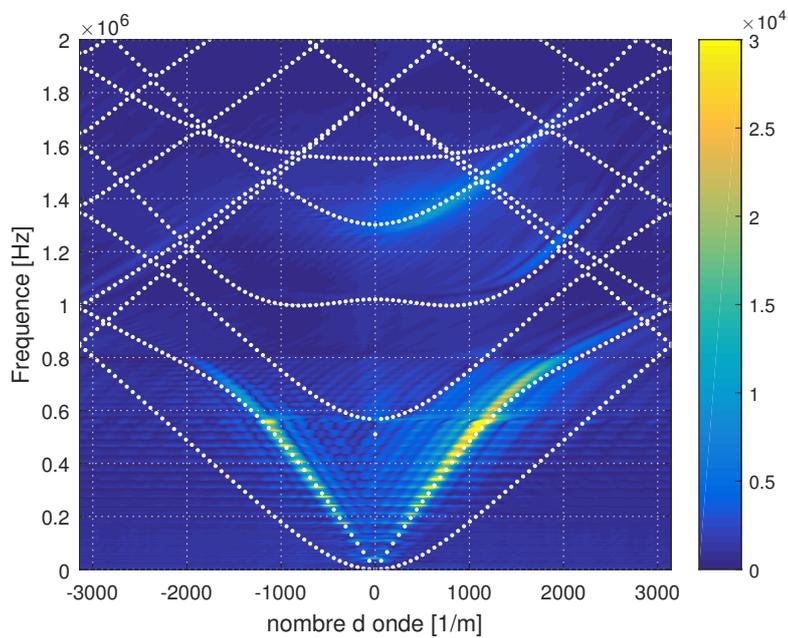


Figure 2.17 – Double transformée de Fourier des signaux spatio-temporels de la Figure 2.16. La structure de bandes théorique calculée par la méthode des éléments finis (FEM) est superposée en blanc.

2.5.2 Ajustement des paramètres piézoélectriques

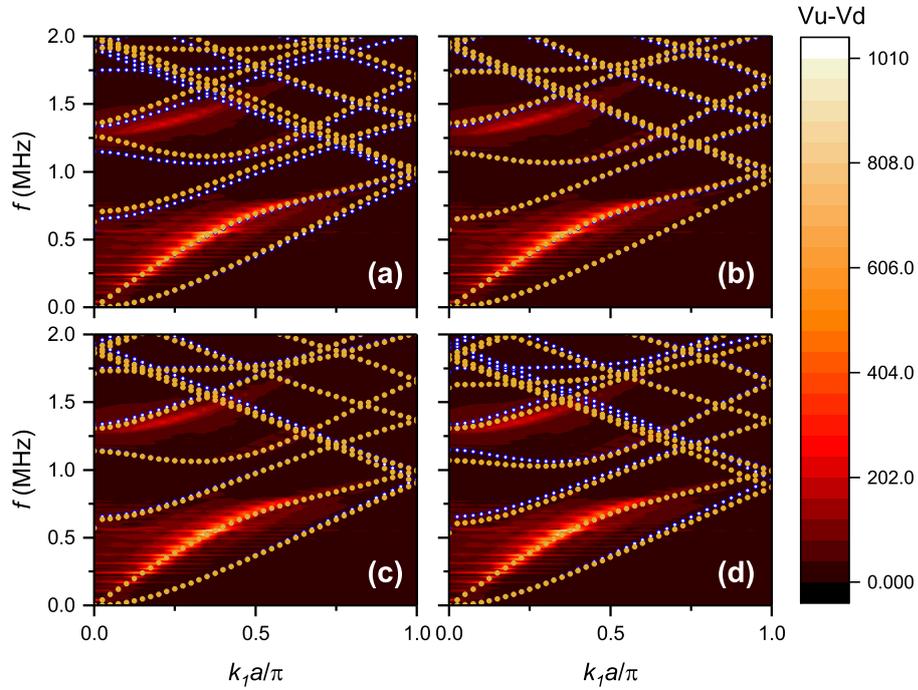


Figure 2.18 – Comparaison de la structure de bandes expérimentale obtenue par double transformée de Fourier des signaux spatio-temporels d'un cristal ($a_0 = 1$ mm) sous des CLEs à potentiel flottant, avec les structures de bandes calculées par la méthode des éléments finis après variation de certains paramètres (points en jaune) : (a) $c_{44}^E = 30.5$ GPa, (b) $c_{44}^E = 25.0$ GPa, (c) $c_{44}^E = 25.0$ GPa, $e_{33} = 20.3$ C m⁻², $\epsilon_{33}^S = 2300$, $e_{15} = 14.1$ C m⁻², (d) $c_{44}^E = 22.0$ GPa, $e_{33} = 20.3$ C m⁻², $\epsilon_{33}^S = 2300$, $e_{15} = 14.1$ C m⁻², par rapport à la structure de bandes de référence (points en bleu) qui correspond aux paramètres du fabricant à l'exception de la masse volumique qui est figée à la valeur $\rho = 7510$ kg m⁻³ déterminée expérimentalement.

L'ajustement des paramètres piézoélectriques d'une plaque phononique à partir d'une structure de bandes expérimentale n'est pas du tout une affaire simple et triviale. Les points de fréquence de coupure sont les premiers candidats pour démarrer cette procédure, car les équations se simplifient naturellement et le nombre des paramètres qui influencent l'allure des bandes semble diminuer à proximité de ces points. Nous avons utilisé une procédure empirique pour déterminer le set des paramètres piézoélectriques qui minimisent l'écart entre les courbes théoriques et les résultats obtenus expérimentalement. Trois branches sont utilisées pour cet ajustement : S_0 , S_1 et S_2 qui sont les plus proéminents sur la cartographie FFT 2D des signaux $V_u - V_d$. Ainsi, après avoir fixé la masse volumique ρ à la valeur déterminée expérimentalement, nous avons initialement déterminé c_{44}^E et e_{33} dont la diminution garantit une légère baisse de fréquence

de coupure S_2 calculée et améliore nettement la comparaison entre théorie et expérience. Ensuite, une diminution des paramètres e_{15} et c_{33}^E conduit à une correction supplémentaire pour la branche S_2 mais provoque une déviation sur la S_0 vers des plus faibles fréquences. Cette erreur est de nouveau corrigée par une diminution de c_{13}^E qui rétablit la position initiale de la branche S_0 . La déviation la plus importante étant celle de la branche S_2 est dorénavant minimisée par les paramètres ainsi déterminés qui figurent dans l'Annexe A, comparés à ceux du fabricant. La Figure 2.18 illustre certaines comparaisons pour quelques uns des paramètres ajustés.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé le dispositif expérimental au centre de notre étude. La partie contrôle, piloté par une carte Teensy[®], sera exploitée par la suite pour imposer des conditions aux limites électriques statiques ou dynamiques. Le cristal phononique piézoélectrique, constitué d'une plaque piézoélectrique homogène sur laquelle sont déposées des électrodes a été caractérisé. Les constantes piézoélectriques ont été estimées empiriquement en ajustant les courbes de dispersion théoriques aux structures de bandes expérimentales. Cette méthode, bien qu'imparfaite, a permis d'affiner les valeurs des constantes piézoélectriques données par le fabricant. D'un point de vue théorique, les interprétations physiques des mesures effectuées dans les chapitres suivant s'appuieront sur un modèle analytique basé sur le formalisme de décomposition en ondes planes (séries de Fourier) du champ de déplacement à l'intérieur de la plaque combinée avec une variété de conditions aux frontières électriques. Les grandes lignes de ce modèle ont été rappelées ici. Enfin, nous avons également présenté les outils numériques (simulations FEM à l'aide du logiciel COMSOL) essentiels à la compréhension physique des phénomènes observés, en particulier au chapitre 5 consacré à la modulation dynamique pour laquelle aucun modèle analytique n'existe actuellement.

Chapitre 3

Contrôle de la structure de bandes du cristal avec des impédances connectées

3.1 Introduction

Ce chapitre se concentre sur la connexion d'une inductance L en parallèle à la plaque piézoélectrique qui produira une résonance électrique. Des études expérimentales et numériques sont menées sur un CP avec les électrodes connectées à des inductances pour évaluer l'effet de celle-ci sur la dispersion des modes de Lamb. Nous fournissons des preuves expérimentales de l'existence du mode électrique dans une plaque piézoélectrique dépolarisée.

3.2 Contrôle par des circuits inductifs

La plaque piézoélectrique peut être modulée avec des circuits électriques plus ou moins complexes. Le cas le plus remarquable et simple est de connecter un dipôle constitué d'une bobine branchée sur chaque électrode d'une face tandis que les électrodes de l'autre face sont mises à la masse (Figure 3.1). On constate l'apparition d'une nouvelle bande d'origine électromagnétique, le mode électrique interagit avec les modes associés aux ondes de Lamb induisant l'ouverture de bandes interdites d'hybridation ; sur la Figure 3.2 les structures de bandes d'un tel cristal de piézocéramique PZ26 sont obtenues par une analyse modale FEM pour trois valeurs d'inductances différentes (a) $L = 1 \mu\text{H}$, (b) $L = 10 \mu\text{H}$, et (c) $L = 30 \mu\text{H}$. La valeur d'inductance est choisie pour gérer la résonance électrique qui génère l'interaction dominante avec le mode S_0 aux basses fréquences $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Nous modélisons la même plaque en annulant les coefficients de couplage piézoélectriques ($e_{ij} = 0$) ; le diagramme de bandes calculé, correspondant à cette hypothèse, est représenté sur la Figure 3.3. En l'absence de couplage piézoélectrique, les modes propres du cristal (les modes

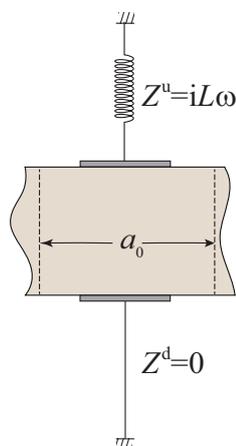


Figure 3.1 – Cellule élémentaire du cristal phononique piézoélectrique pour le cas d'une inductance L connectée en parallèle.

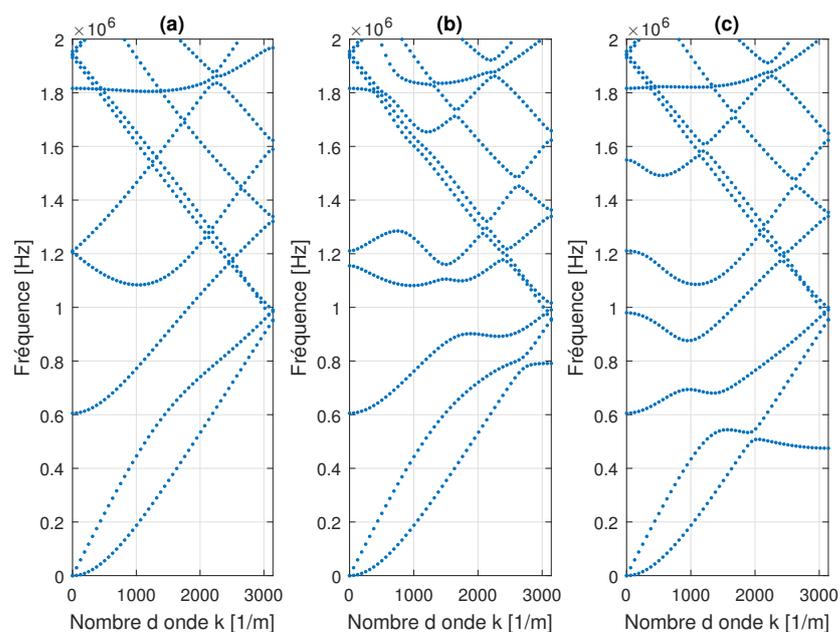


Figure 3.2 – Structure de bandes calculée pour un CP formé d'une plaque piézocéramique (épaisseur 1.6 mm) structurée par des électrodes espacées périodiquement de 1 mm sur lesquelles sont connectées des bobines d'inductance (a) $L = 1 \mu\text{H}$, (b) $L = 10 \mu\text{H}$, et (c) $L = 30 \mu\text{H}$.

guidés de Lamb et le mode électromagnétique qui provient d'un circuit équivalent LC) sont découplés. Le mode de résonance électrique résultant de l'interaction électrique des résonateurs se manifestera sous une forme non hybride, illustré en rouge dans la Figure 3.3(a). Son étendue fréquentielle est caractérisée

par les deux valeurs au centre et aux bords de la ZB, notées f_0 et f_π , respectivement. L'activation du couplage électromécanique provoquera l'interaction de ce mode avec les modes de Lamb de la plaque; ceci se manifestera par la répulsion de courbes de dispersion des modes avant hybridation (anti-croisement) et l'ouverture de bandes interdites. Une comparaison avec le diagramme de dispersion avec couplage électromécanique activé de la Figure 3.2(c) reproduit en Figure 3.3(b) révèle une forte interaction avec les modes S_0 , A_1 , S_1 , A_2 , et à moindre degré avec A_0 . Un déplacement de différents modes vers les plus hautes fréquences est aussi observé. Pour faciliter la lecture graphique des interactions, nous traçons de façon schématique le mode électrique pour le cas du couplage activé, cette allure correspond qualitativement à l'allure que ce mode devrait avoir si on devait l'imaginer avant son hybridation avec les modes de Lamb. Pour le tracé de ce mode (courbe rouge, Figure 3.3(b)), nous avons estimé par lecture graphique les deux fréquences, f_0 et f_π .

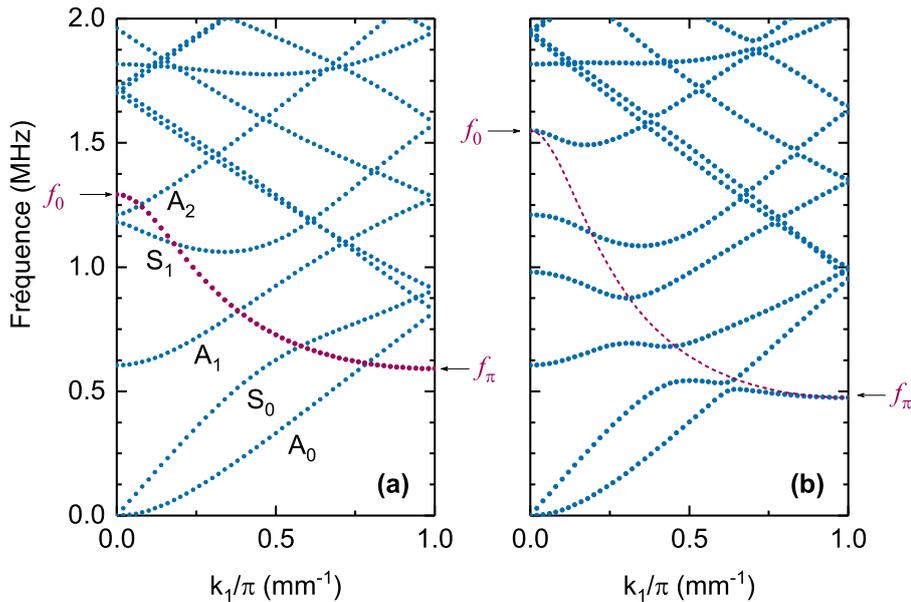


Figure 3.3 – Structure de bandes calculée par éléments finis pour le cristal phononique piézoélectrique dont les CLEs sont décrites Figure 3.1 pour $L = 30 \mu\text{H}$ (a) en l'absence de couplage électromécanique, et (b) avec l'effet électromécanique activé, reproduite de la Figure 3.2(c) à titre de comparaison. En (a) le mode électrique découplé est représenté en rouge; en (b) la ligne rouge représente de façon schématique ce mode inductif résonnant avant son hybridation avec les modes de Lamb, suivant le modèle simplifié d'Eq. (3.3.4) ($C_s = 0.849 \text{ nF}$, $C = 0.352 \text{ nF}$).

3.3 Circuit électrocinétique équivalent

Une plaque piézocéramique avec des surfaces métallisées peut être efficacement décrite par un condensateur équivalent. Lorsque des bandes métalliques sont structurées périodiquement sur ces deux faces, on peut utiliser une image équivalente d'une ligne de transmission périodique. Pour confirmer l'origine électrique nous donnons dans ce qui suit un modèle équivalent de circuits électriques qui correspondent à une telle description pour le cas étudié.

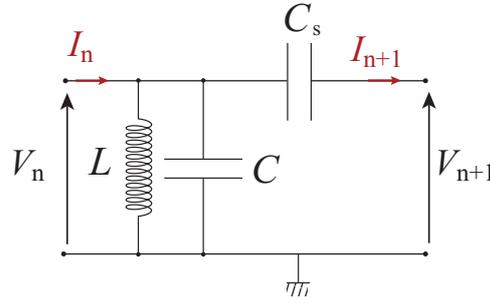


Figure 3.4 – Circuit électrocinétique, équivalent à la cellule élémentaire de la Figure 3.1.

Les électrodes supérieure et inférieure qui construisent la cellule élémentaire se modélisent par un condensateur de couplage de capacité C . La successivité de ces lignes (séries d'électrodes supérieures et inférieures de la plaque) sera modélisée par des condensateurs plans de capacité C_s orientés selon Ox_1 . Les condensateurs de capacité C_s et C représentent le comportement de la plaque piézocéramique et dépendent à la fois des paramètres physiques volumiques (mécaniques, électromécaniques, électromagnétiques) et des paramètres géométriques. Le circuit équivalent pour une cellule élémentaire du cristal phononique est représenté Figure 3.4. On suppose que les tensions et les intensités de courant d'entrées et de sorties d'une cellule numérotée n sont liées par la relation de Bloch-Floquet, $V_{n+1} = V_n \mathcal{P}$, $I_{n+1} = I_n \mathcal{P}$, avec $\mathcal{P} \equiv e^{-ik_1 a_0}$ la phase de Bloch et le nombre d'onde de Bloch $k_1 \in [-\frac{\pi}{a_0}, +\frac{\pi}{a_0}]$. Nous pouvons écrire

$$V_n - V_{n+1} = V_n(1 - \mathcal{P}) = \frac{1}{iC_s \omega} I_{n+1}. \quad (3.3.1)$$

La loi des nœuds impose :

$$I_n - I_{n+1} = I_{n+1}(\mathcal{P}^{-1} - 1) = \frac{V_n}{Z_{\text{eq}}}, \quad (3.3.2)$$

avec Z_{eq} définie par

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = iC\omega + \frac{1}{iL\omega}. \quad (3.3.3)$$

La combinaison des équations (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) permet d'écrire l'équation de dispersion de la bande de résonance électrique :

$$\omega(k_1) = \omega_0 \left(1 + 4 \frac{C_s}{C} \sin^2 \frac{k_1 a_0}{2} \right)^{-1/2}, \quad (3.3.4)$$

avec $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_r$. Dans cette expression, les paramètres C_s et C peuvent être déterminés par une identification avec la bande électrique calculée par éléments finis. Notons, les valeurs remarquables au centre et aux bords de la ZB :

- Lorsque $k_1 = 0 \rightarrow f_0 = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.
- Lorsque $k_1 = \pi/a_0 \rightarrow f_\pi = f_0 \left(1 + 4 \frac{C_s}{C} \right)^{-1/2}$.

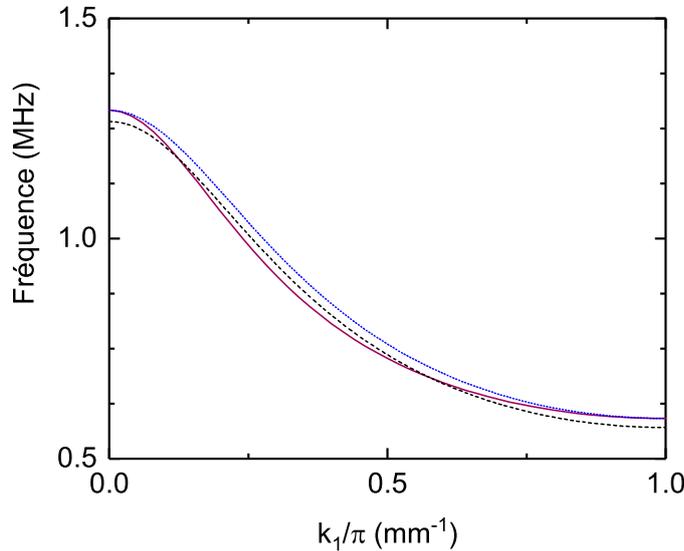


Figure 3.5 – Comparaison du mode électrique découplé calculé par éléments finis (courbe rouge) reproduit de la Figure 3.3(a) avec celui obtenu via le modèle analytique simplifié de l'Eq.(3.3.4) soit par optimisation d'ajustement (best fit, courbe noire : $C_s = 0.516$ nF, $C = 0.527$ nF), soit en imposant les valeurs f_0, f_π déterminés par le calcul FEM (courbe bleue interrompue : $C_s = 0.478$ nF, $C = 0.507$ nF).

En imposant dans l'équation (3.3.4) les valeurs $f_0 = 1.29$ MHz et $f_\pi = 0.591$ MHz obtenues par le calcul FEM dans le cas d'un CP sans effet piézoélectrique avec des électrodes connectées à des inductances $L = 30 \mu\text{H}$ (Figure 3.3(a)), nous pouvons déterminer : $C = 0.507$ nF et $C_s = 0.478$ nF. La courbe obtenue avec ces valeurs est tracée Figure 3.5 (courbe bleue pointillée), superposée avec le mode électrique calculé par élément finis (courbe rouge continue). Une identification par ajustement optimisé minimisant les erreurs (best fit), sans avoir imposé les valeurs f_0 et f_π à priori, est aussi réalisée, toujours à l'aide du même modèle analytique (3.3.4). Dans ce cas là, on obtient

$C_s = 0.516$ nF, $C = 0.527$ nF et $f_0 = 1.26$ nF, $f_\pi = 0.57$ nF. Le résultat est également représenté sur la Figure 3.5 (courbe noire interrompue).

3.4 Mesures d'impédance

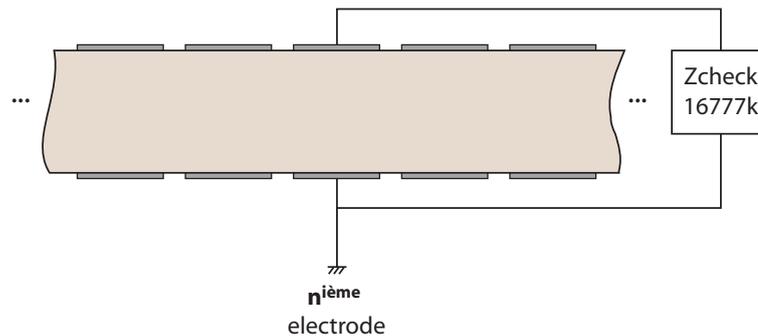


Figure 3.6 – Dispositif expérimental utilisant un analyseur d'impédance à différentes positions x_n et correspondant à la $n^{\text{ième}}$ paire d'électrodes.

Les mesures d'impédance électrique sont effectuées avec un analyseur d'impédance de marque Z-Check 16777K. Il mesure l'intensité du courant en appliquant une tension variable au dispositif à tester sous la forme d'un train d'onde sur une plage de fréquences allant de 10 Hz à 16 MHz.

3.4.1 Influence du dispositif sur l'impédance « apparente »

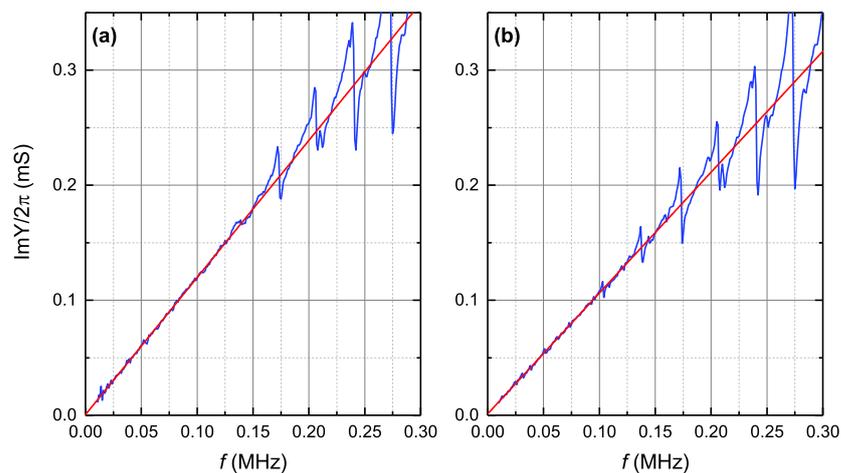


Figure 3.7 – Partie imaginaire de l'admittance mesurée sur la deuxième paire d'électrodes du cristal (a) avec, et, (b) sans les deux lecteurs PCI connectés à la plaque. Les droites en rouge représentent les ajustements linéaires effectués sur les données dans la gamme fréquentielle de [10, 130] kHz.

Les deux cartes PCI branchées aux extrémités de la plaque, utilisées pour la mesure de potentiel ou la connexion des circuits, permettent de connecter l'analyseur d'impédance au cristal. Nous souhaitons évaluer l'influence du branchement des deux cartes PCI sur l'impédance effective de la plaque piézoélectrique, plus particulièrement si ces connecteurs n'introduisent pas d'inductance ou capacité parasite. La Figure 3.6 montre le dispositif expérimental utilisant un analyseur d'impédance. Les admittances Y_n sont mesurées pour la deuxième paire d'électrodes sur une plage fréquentielle [10 Hz à 1.5 MHz] et un pas de 50 Hz. La Figure 3.7 compare les résultats de la partie imaginaire de l'admittance mesurée sur la deuxième paire d'électrodes ($n = 2$) dans le cas de la plaque insérée dans les deux lecteurs. Le deuxième cas correspond à la plaque seule (sans la connexion des lecteurs PCI). On constate que la croissance de cette partie imaginaire est linéaire avec la fréquence liée au comportement capacitif de la plaque ($Y = iC\omega$). En outre, des résonances associées à des ondes de Lamb stationnaires sur la longueur de la plaque sont visibles. En basses fréquences et en l'absence de charge d'impédance, le cristal est équivalent à un condensateur plan de capacité bloquée C_b . A l'aide d'un ajustement linéaire dans la fenêtre fréquentielle [10, 130] kHz appliqué sur les mesures effectuées à la deuxième paire d'électrodes ($n = 2$), on obtient $\text{Im}Y = 0.00749f + 3.578 \times 10^{-6}$ et $\text{Im}Y = 0.00660f + 7.662 \times 10^{-6}$ (avec Y en S et f en MHz) pour les résultats présentés en Figure 3.7(a) et (b), respectivement. On déduit ainsi expérimentalement deux valeurs de capacité équivalente dans le cas de la plaque avec et sans les deux lecteurs PCI connectés, respectivement égales à $C_{(b,2)} = 1.19$ nF et $C_{(b,2)} = 1.05$ nF. L'ajout des deux connecteurs de cartes PCI contribue donc à augmenter la capacité effective du CP piézoélectrique.

3.4.2 Inductance parasite et linéarité des inductances

La charge d'impédance externe est supposée être une inductance idéale, connectée aux bandes métalliques, comme détaillé sur la Figure 3.1. Cependant, en pratique, le composant réel, utilisé dans nos expériences, n'a pas un comportement purement inductif; d'autres contributions liées à plusieurs parties de circuits internes de type résistif ou capacitif de ce composant sont à prendre en compte. L'impédance mesurée Z_e du composant L est tracée Figure 3.8 en fonction de la fréquence f , et ses parties réelles et imaginaires, tracés (a) et (b), respectivement, montrent un comportement résonant à environ 1.71 MHz. Dans la gamme de fréquence qui nous intéresse ici jusqu'à 2 MHz cette fonction peut être dans une très bonne approximation décrite par l'expression rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} Z_e &= \frac{\alpha_4 f^4 + \alpha_3 f^3 + \alpha_2 f^2 + \alpha_1 f + \alpha_0}{f^2 + \beta_1 f + \beta_0} & (3.4.1) \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 f + \gamma_2 f^2 + \frac{\delta_+}{f - f_+} + \frac{\delta_-}{f - f_-} \end{aligned}$$

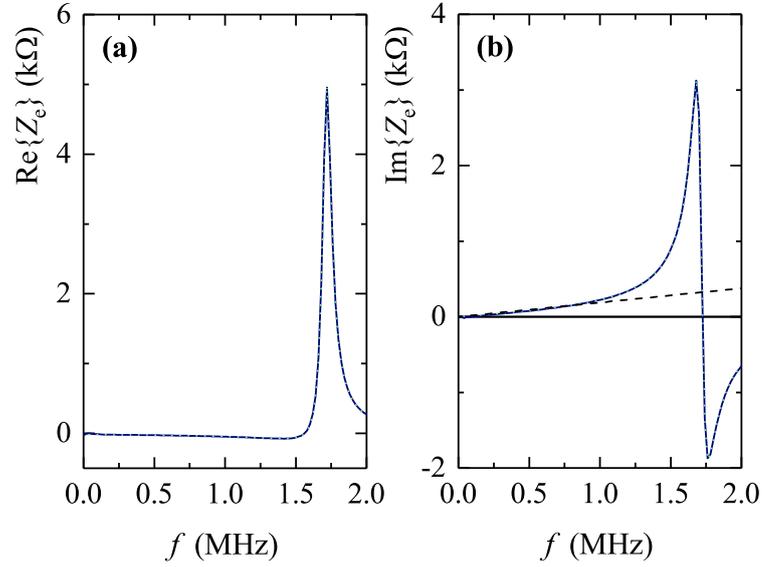


Figure 3.8 – Partie réelle (a) et imaginaire (b) de la charge d'impédance Z_e utilisée dans les circuits externes de la Figure 3.1. Les lignes pleines et pointillées représentent la valeur réelle (mesurée) et modélisée à l'aide de l'Eq. 3.4.1, respectivement ; en (b) l'impédance d'une inductance pure $L = 30 \mu\text{H}$ est également représentée (ligne discontinue) à titre de comparaison.

où f est exprimé en MHz dans les expressions ci-dessus, et α_n et β_n sont des coefficients complexes appropriés obtenus par une procédure d'ajustement :

$$\begin{aligned}
 \alpha_4 &= -5.15566 - i 5.18013 \times 10^{-14}, \\
 \alpha_3 &= -6.96706 \times 10^{-14} + i 22.0970, \\
 \alpha_2 &= 52.4644 + i 4.78721 \times 10^{-13}, \\
 \alpha_1 &= 4.56112 \times 10^{-13} - i 452.779, \\
 \alpha_0 &= 56.4767 - i 7.41831 \times 10^{-13}, \\
 \beta_1 &= -7.61040 \times 10^{-17} - i 0.0790166, \\
 \beta_0 &= -2.94215 + i 8.96296 \times 10^{-18},
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

et

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \alpha_2 - \alpha_3 \beta_1 + \alpha_4 (\beta_1^2 - \beta_0) = 35.5818 + i 3.22798 \times 10^{-13}, \\
 \gamma_1 &= \alpha_3 - \alpha_4 \beta_1 = -6.59699 \times 10^{-14} + i 21.6896, \\
 \gamma_2 &= \alpha_4, \\
 \delta_{\pm} &= \pm 51.4400 - i 193.077, \\
 f_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0} \right) = \pm 1.71481 + i 0.0395083.
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

3.5 Dépolarisation de la plaque – Étude expérimentale

3.5.1 Description du processus de dépolarisation



Figure 3.9 – Four de cuisson utilisé pour la dépolarisation de la plaque phonique.

La plaque piézoélectrique est caractérisée par une température de Curie T_c , au-dessus de laquelle la polarisation disparaît sous l'action de l'augmentation de l'agitation thermique. Nous souhaitons désactiver le couplage entre les propriétés mécaniques et les propriétés électriques. Pour ce faire la plaque sera chauffée à 220°C (proche de la température de Curie $T_c = 218^\circ\text{C}$) pendant 20 minutes dans un four Heraeus Figure 3.9. Une série de mesures expérimentales (mesures de potentiel et mesures laser) a été menée afin de vérifier le comportement de la plaque piézoélectrique et observer la suppression du couplage piézoélectrique au cours de cette phase de chauffage.

3.5.2 Mesures du potentiel électrique : caractérisation du mode électrique

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étude des propriétés du mode électrique dans la plaque. Une bobine est maintenant placée aux bornes de chaque cellule élémentaire tel que décrit sur la Figure 3.1. Nous utilisons la même méthodologie de mesure expérimentale que celle décrite au chapitre 2 pour le cas du cristal phononique en potentiel flottant. Le couplage piézoélectrique ayant été supprimé, seule l'onde électrique sera générée, l'objectif étant d'observer ce mode sans couplage avec les ondes de Lamb.

La Figure 3.10 représente les signaux temporels de potentiels électriques relevés sur toutes les électrodes de la face supérieure de la plaque piézoélectrique. On distingue clairement deux types de signaux. Le premier signal qui s'établit instantanément sur toutes les électrodes au temps $t = 0$ ne correspond pas à de la propagation mais à du bruit électromagnétique généré lors de l'envoi du

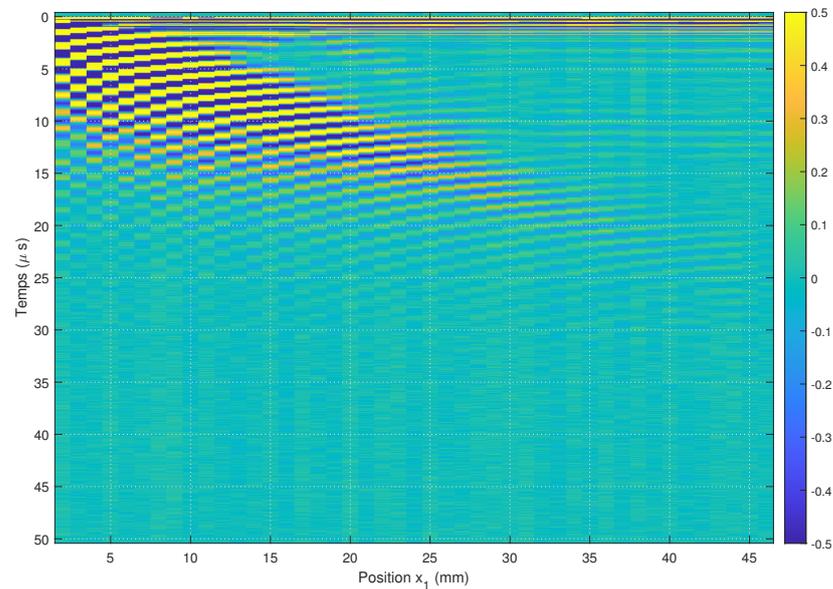


Figure 3.10 – Représentation spatio-temporelle du potentiel électrique du cristal phononique piézoélectrique dont la cellule élémentaire est illustrée Figure 3.1 avec $L = 30 \mu\text{H}$, pour une plaque dépolarisée.

signal électrique par le générateur d'impulsion. Les électrodes à la surface de la plaque piézoélectrique se comportent alors comme des antennes et reçoivent simultanément le signal parasite. Le second signal nous intéressant principalement est visiblement très dispersif et s'atténue assez rapidement au cours de la propagation de l'onde associée, suivant la direction Ox_1 . Aucun signal réfléchi n'est d'ailleurs visible à l'extrémité de la plaque. Afin de caractériser cette onde électrique, nous représentons le signal associé dans l'espace fréquence-nombre d'onde (Figure 3.11). On retrouve une trajectoire similaire à celle obtenue pour le mode électrique par les calculs FEM pour une plaque dont les constantes piézoélectriques sont nulles. Les différences observées entre l'expérience et la modélisation FEM dans la dispersion de ce mode sont liées avec certitude aux changements qui se sont opérés dans le milieu piézoélectrique lors du chauffage pour supprimer le couplage piézoélectrique. On observe clairement une hybridation du mode électrique et d'une bande quasi verticale dont l'origine est attribuée à un mode EM se propageant à l'interface du dispositif. L'existence est confirmée par le tracé de la structure de bandes expérimentale (Figure 3.12), après suppression des bobines de la partie supérieure du cristal, les électrodes étant ainsi laissées en potentiel flottant. La bande EM est maintenant parfaitement verticale, ce qui traduit une très grande vitesse incommensurable dans les conditions de précision expérimentale à l'échelle de travail.

Le mode électrique a été parfaitement identifié par des mesures de potentiel

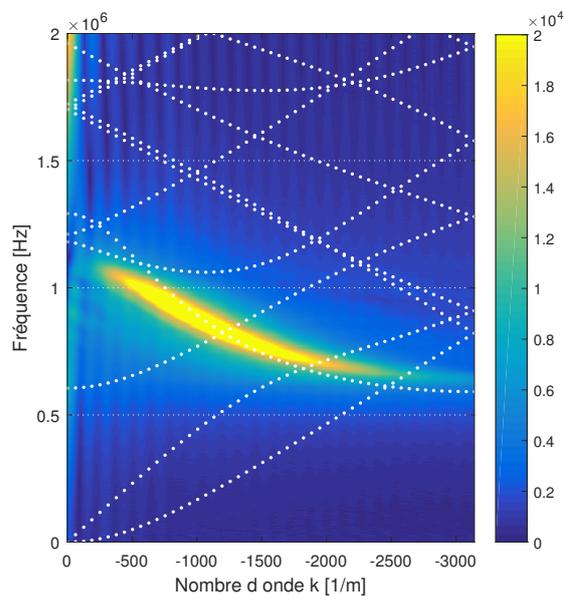


Figure 3.11 – Structure de bandes expérimentale du cristal phononique piézo-électrique dépolarisé dont les CLEs sont décrites Figure 3.1, superposée avec les structures de bandes obtenues via simulation par élément finis.

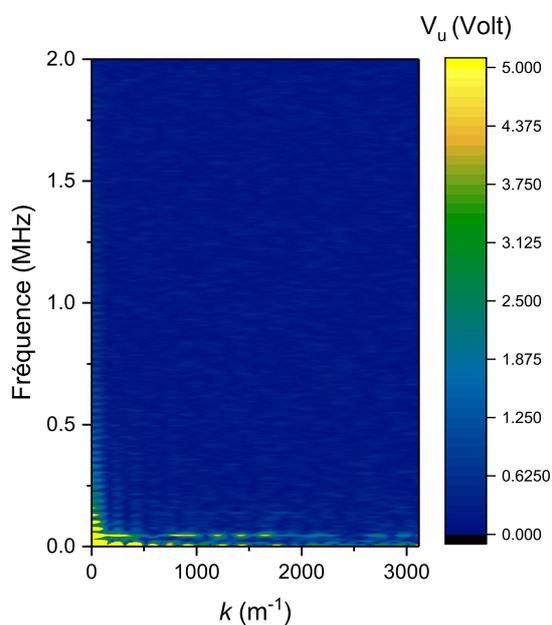


Figure 3.12 – Structure de bandes expérimentale du cristal phononique piézo-électrique dépolarisé dont les électrodes supérieures sont à potentiel flottant et inférieures sont mises à la masse.

sur une plaque dépolarisée, nous allons maintenant observer et caractériser les ondes de Lamb dans cette même plaque.

3.5.3 Mesures par vibrométrie laser : caractérisation des modes de Lamb



Figure 3.13 – Photographie illustrant le montage du transducteur accolé en bout de plaque.

La suppression du couplage électromécanique au sein du milieu piézoélectrique ne permet plus de détecter des modes guidés ultrasonores par une mesure de potentiel. De même, il n'est plus possible non plus de générer des ondes guidées en imposant une différence de potentiel sur les électrodes disposées sur les faces de la plaque. L'excitation des ondes guidées se fera donc en plaçant un transducteur piézoélectrique sur la tranche à l'extrémité de notre plaque phononique piézoélectrique dépolarisée (Figure 3.13). Le transducteur utilisé est de marque Panametrics, large-bande, de fréquence centrale 1 MHz. Il est placé à l'extrémité de la plaque et couplé à celle-ci à l'aide d'un gel visqueux à ondes transverses. Aucune impédance finie n'est appliquée sur les électrodes, celles-ci sont donc au potentiel flottant. Les mesures des déplacements de surface associés à la propagation des modes de Lamb sont effectuées par vibrométrie laser. Un vibromètre Polytec monopoint OFV505 est utilisé permettant de mesurer des vitesses de déplacement de la surface avec une résolution de 20 nm/s/V.

La Figure 3.14 regroupe l'ensemble des signaux temporels mesurés par pas de 0.1 mm le long d'une ligne centrée sur la surface de la plaque. Sur cette image, nous distinguons nettement les aller-retours des différents modes de Lamb générés sur la première extrémité de la plaque. Le signal d'excitation du transducteur émetteur étant impulsionnel, nous observons de nombreux modes dans une large bande fréquentielle. Ces modes sont identifiés dans l'espace (f, k) (Figure 3.15). Les modes A_0 , S_0 et S_2 sont dominants. A noter, la présence

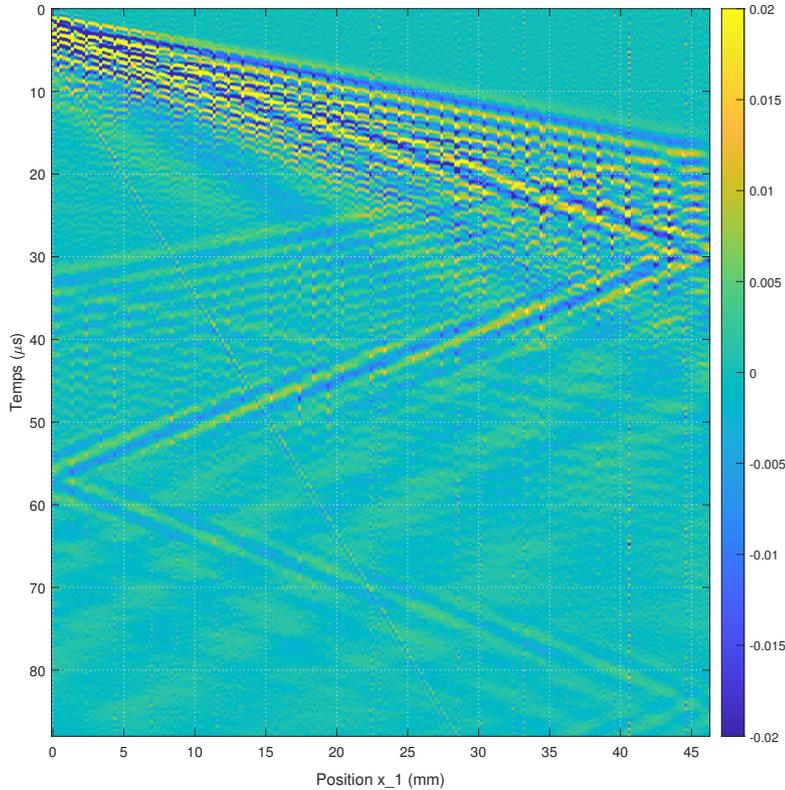


Figure 3.14 – Représentation spatio-temporelle de la composante du déplacement u_3 mesurée par vibrométrie laser à la surface de la plaque dépolarisée, correspondant à une configuration donnée Figure 3.1 avec inductances $L = 30 \mu\text{H}$.

ici du mode A_0 qui n'était pas visible sur les résultats de mesure de potentiel au chapitre 2. En effet, ce mode est associé à des déformations transversales de la plaque sans variation d'épaisseur, le couplage électromécanique est donc faible dans la plaque piézoélectrique dont la direction de polarisation principale est Ox_3 .

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet de la connexion d'un circuit inductif sur la structure de bande d'un cristal phononique piézoélectrique. Un modèle équivalent de ligne de transmission électrique a été proposé pour calculer la dispersion du mode électrique induit par le branchement d'un circuit inductif. Enfin, nous avons observé et caractérisé expérimentalement le mode électrique et les ondes de Lamb découplés dans une plaque piézoélectrique dépolarisée.

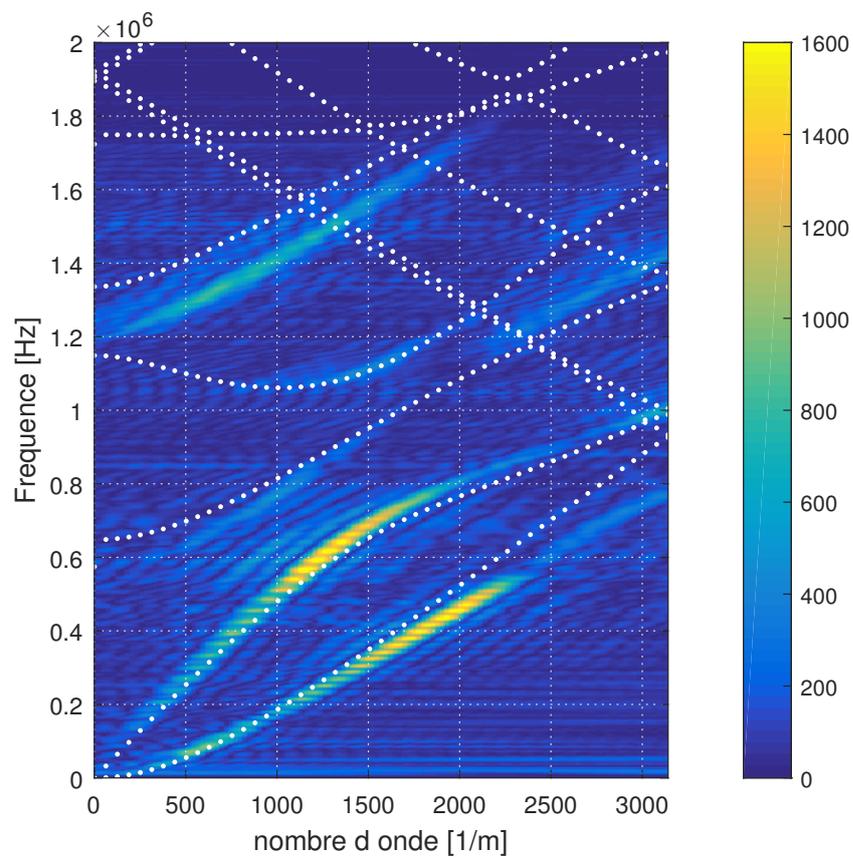


Figure 3.15 – Structure de bandes expérimentale issue d'une FFT 2D des signaux spatio-temporels des déplacements hors plan u_3 mesurés par vibrométrie laser à la surface de la plaque. La structure de bandes calculée par FEM pour le même système, est superposée (pointillés blancs).

Chapitre 4

Bandes multidispersives accordables d'origine inductive

4.1 Introduction

A l'aide des outils méthodologiques et d'analyse présentés dans les chapitres précédents, on étudie dans ce chapitre les possibilités de contrôle des caractéristiques de dispersion de bandes accordables provenant d'un comportement équivalent de circuit LC associé à des plaques phononiques piézoélectriques lorsqu'elles sont connectées à des circuits externes inductifs [62]. On se restreindra ici à trois cas représentatifs comprenant des circuits externes à base d'inductances L , générant différentes de bandes accordables d'origine électrique facilement contrôlées via les paramètres de ces circuits.

L'intérêt des configurations étudiées dans ce chapitre et représentées dans la Figure 4.1, réside comme on le verra plus loin dans la variété des formes dispersives inhabituelles de bandes d'origine inductive que peuvent offrir ces types de circuits. Plus précisément, les deux premiers cas correspondent à des cellules élémentaires à deux atomes ($a = 2a_0$) construites par combinaison de deux blocs élémentaires antiparallèles (de largeur a_0), chacun d'eux connecté à un dipôle L d'un côté de la plaque, l'électrode de l'autre côté étant soit mise à la masse (Figure 4.1(a)) ou bien laissée en potentiel flottant (Figure 4.1(b)). Une troisième configuration (Figure 4.1(c)) consiste à connecter une charge L aux électrodes adjacentes, les conditions aux limites électriques CLEs conservent dans ce cas la périodicité spatiale du réseau métallique ($a = a_0$).

Tous les calculs de structure de bandes présentés dans ce chapitre ont été obtenus à l'aide de COMSOL (sauf indication contraire). Notons au passage que seule la partie positive de la zone de Brillouin (ZB) sera représentée, la partie associée aux nombres d'onde négatifs étant symétrique par rapport à l'axe des fréquences, dans tous les cas abordés ici.

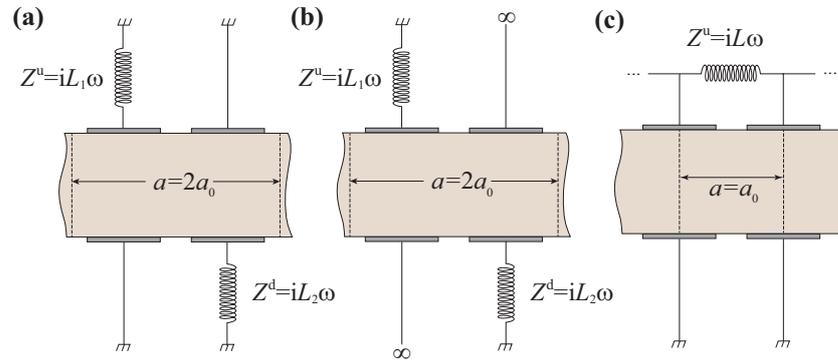


Figure 4.1 – Cellule élémentaire du cristal diatomique phononique piézoélectrique avec différentes conditions aux limites électriques appliquées aux électrodes pour les trois configurations étudiées : (a) inductance et électrode mise à la masse, (b) inductance et électrode mise à potentiel flottant et (c) connexion adjacente intercellulaire par inductance.

4.2 Cellule élémentaire diatomique du cristal mise à la masse et chargée par inductance

4.2.1 Structure de bandes et analyse

Avant d'analyser théoriquement et expérimentalement les structure de bandes pour ces systèmes, il est intéressant de se limiter d'abord à la réponse du cristal monoatomique de paramètre de maille $a = a_0$ (en considérant seulement la moitié gauche de la maille élémentaire de la Figure 4.1(a)).

En absence de couplage piézoélectrique ($e_{ij} = 0$), les modes propres du cristal sont séparés en deux sous-espaces indépendants et sans interaction : les modes guidés de Lamb associés à des déformations élastiques de la plaque se repliant en bord de ZB ($k_1 a_0 / \pi = 1$) et les modes électromagnétiques provenant d'un comportement résonant du circuit équivalent LC de la cellule élémentaire. Les résonances électriques de ces atomes LC individuels interagissent les unes avec les autres et forment une bande de résonance de profil en cosinus. Dans la Figure 4.2, la structure de bandes d'un tel cristal calculée par éléments finis est représentée : le premier groupe de bandes tracé en traits gris est relatif aux modes de Lamb, alors que le second en traits pointillés bleus est associé aux modes d'origine électrique, s'étendant de 1.294 MHz ($k_1 = 0$) à 0.597 MHz ($k_1 = \pi/a_0$).

Notons au passage que cette analyse à couplage nul, déjà présentée au chapitre 3, peut être employée pour visualiser les bandes d'origine électromagnétique (EM) avant hybridation.

On examine d'abord le cas d'inductances alternées mises à la masse (configuration Figure 4.3(a)). La cellule élémentaire est formée de deux atomes, soit avec symétrie d'inversion $L_1 = L_2$, ou au contraire $L_1 \neq L_2$.

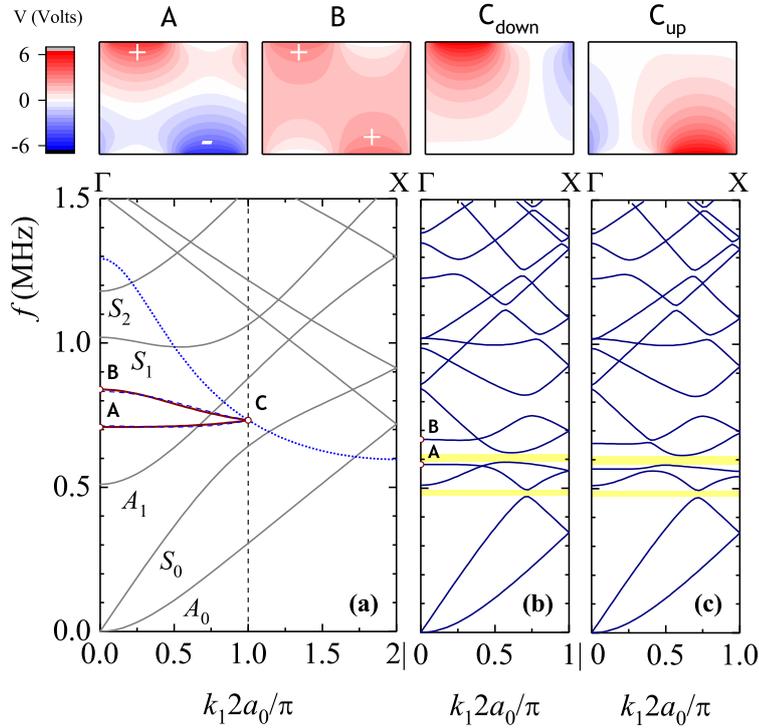


Figure 4.2 – Structure de bandes calculée pour (a) un cristal monoatomique de constante de réseau $a = a_0$ prenant seulement en compte la moitié gauche de la cellule élémentaire du schéma de la Figure 4.1(a), pour $L_1 = 30 \mu\text{H}$, lorsque le couplage piézoélectrique est désactivé. La courbe en pointillés bleus qui s’étend sur toute la ZB représente la bande de résonance EM, tandis que la ligne rouge désigne la même bande pour le cristal diatomique ($a = 2a_0$, cellule élémentaire en Figure 4.1(a) pour $L_1 = L_2 = 30 \mu\text{H}$); les lignes en gris correspondent aux modes propres de Lamb de la plaque phononique, nommés en utilisant la nomenclature habituelle. Le calcul complet de structure de bandes du cristal diatomique de la Figure 4.1(a) lorsque le couplage piézoélectrique est activé, est illustré en (b) pour $L_1 = L_2 = 30 \mu\text{H}$ et en (c) pour $L_1 = 30 \mu\text{H}$ et $L_2 = 33 \mu\text{H}$. Les régions en jaune indiquent les bandes interdites absolues. Panneau supérieur : Champs de potentiel scalaire dans la cellule élémentaire pour les points A, B, C, spécifiés en (a).

Lorsque deux atomes antiparallèles sont réunis pour former la cellule du cristal (Figure 4.3(a)), la ZB devient plus courte ($a = 2a_0$). Un repliement supplémentaire à $k_1 a_0/\pi = 0.5$ du diagramme de dispersion apparaît, et en conséquence la bande de résonance EM est divisée en deux mini-bandes plates (Figure 4.3(b)),

- une plus dispersive $\omega^+(k_1)$ s’étendant de 0.839 MHz ($k_1 = 0$) à 0.732 MHz ($k_1 = \pi/a$), et
- une moins dispersive $\omega^-(k_1)$ s’étendant de 0.708 MHz ($k_1 = 0$) à 0.732 MHz ($k_1 = \pi/a$), et

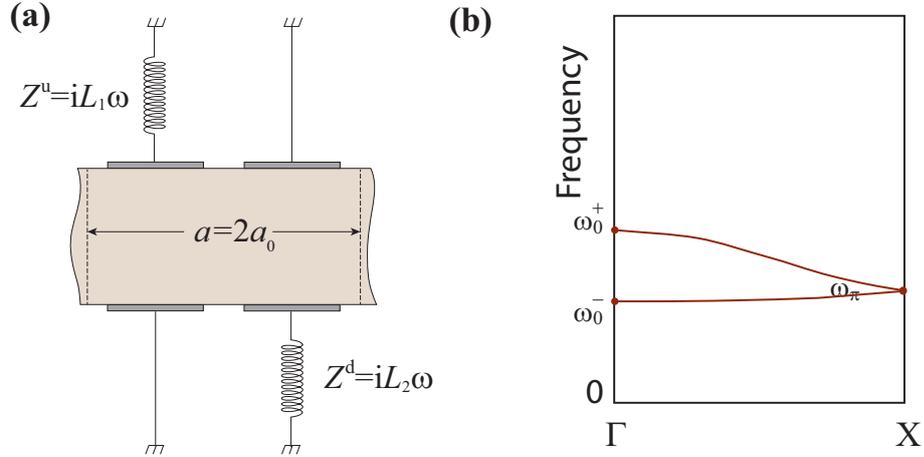


Figure 4.3 – (a) Cellule élémentaire du cristal phononique piézoélectrique diatomique (constante de réseau $a = 2a_0$) pour le cas des CLEs alternées : masse et inductance mise à la masse. (b) Représentation schématique de la relation de dispersion des bandes d'origine EM.

MHz ($k_1 = \pi/a$).

Ces bandes se comparent avec une erreur relative inférieure à $\pm 0.9\%$ à celles obtenues via une description de type "tight-binding" [63] mettant en jeu les interactions de premiers voisins entre atomes (lignes pointillées bleues, Figure 4.2(a)) et conduisant à $\omega^\pm(k_1) = [\omega_{\text{at}}^2 + 2\gamma_1 \cos k_1 a \pm 2\gamma_2 \cos(k_1 a/2)]^{1/2}$, où $\gamma_1 = \gamma(a)$, $\gamma_2 = \gamma(R)$ sont les intégrales de recouvrement γ dépendant des distances $a = 2a_0$ et $R = \sqrt{a_0^2 + h^2} = 1.89a_0$ entre les centres des fonctions de potentiel atomique, et ω_{at} la fréquence propre d'un atome isolé. Par une procédure d'ajustement de type moindres-carrés, nous déterminons $\omega_{\text{at}}/(2\pi) = 0.753$ MHz, $\sqrt{\gamma_1}/(2\pi) = 0.128$ MHz, et $\sqrt{\gamma_2}/(2\pi) = 0.214$ MHz. Les bandes $\omega^\pm(k_1)$ sont reproduites indépendamment par le modèle de ligne de transmission (Eq. (4.2.1) présenté dans la section suivante.

Un examen plus attentif des champs potentiels au point Γ tracés dans la cellule élémentaire (voir le panneau supérieur de la Figure 4.2) révèle une liaison ($\Phi_+ = \mathcal{C}_+(\phi_1 + \phi_2)$) et une anti-liaison ($\Phi_- = \mathcal{C}_-(\phi_1 - \phi_2)$) par analogie avec une description de type molécule diatomique en physique quantique, ϕ_1 et ϕ_2 étant les deux fonctions de potentiel atomique et \mathcal{C}_\pm des coefficients appropriés.

Le long de la direction ΓX , les images de champs de potentiel évoluent progressivement vers une image plus proche de celle d'un atome, présentant un état dégénéré double au point X (voir les deux tracés de droite du panneau supérieur de la Figure 4.2), cette dégénérescence étant levée lorsque la symétrie d'inversion disparaît ($L_1 \neq L_2$).

Cette image est à nouveau modifiée lorsque le couplage piézoélectrique est pris en compte ($e_{ij} \neq 0$), comme c'est le cas dans un système réel. Le résultat de notre calcul est illustré Figure 4.2(b). Comme première remarque, on observe

un décalage vers les hautes fréquences pour les modes guidés de Lamb et un décalage vers les basses fréquences pour les bandes de résonance d'origine EM. Les deux sous-espaces de modes propres interagissent entre eux, on s'attend donc à la formation de bandes interdites quand des modes de même symétrie se croisent. La bande de résonance EM la plus basse en fréquence $\omega^-(k_1)$ interagit à la fois avec la branche S_0 et la première branche repliée A_0 , et de même la bande EM la plus élevée en fréquence $\omega^+(k_1)$ interagit à la fois avec la branche A_1 et la première branche S_0 repliée, conduisant ainsi à la formation de bandes interdites absolues (régions marquées en jaune). Un léger désaccord entre L_1 et L_2 abaisse d'avantage la symétrie du système et entraîne de très faibles interactions entre toutes les bandes (voir Figure 4.2(c)).

Nous confirmons les résultats théoriques, par leur vérification expérimentale. Nous appliquons ici la méthode expérimentale décrite au chapitre 2. Nous avons mesuré le signal de potentiel $V(x_{1,n}, t)$ sur chacune des électrodes situées sur la face supérieure de la plaque (positions d'électrodes $n = 2, 3, \dots, 48$). Après application du modèle AR2D (Annexe B), nous obtenons la représentation dans l'espace (ω, k_1) du potentiel expérimental dont l'amplitude est représentée sur la Figure 4.4(a); en Figure 4.4(b) on reproduit les courbes de dispersion obtenues par FEM (Figure 4.2(b)). Les valeurs des amplitudes du potentiel (moyenné sur la surface de l'électrode supérieure) le long des trajectoires des modes, sont représentées par une palette de couleur : plus la couleur sur la trajectoire est sombre, plus le couplage électromécanique dans la plaque est faible.

Le diagramme de dispersion expérimental révèle principalement les branches de pente positive du mode S_0 dans la partie positive de la 1^{ère} et la partie négative de la 2^{ème} ZB, qui se comparent bien à la courbe théorique correspondante avec une pente moyenne effective de 3013 m s^{-1} dans la limite des grandes longueurs d'onde. De plus, on observe des points lumineux couvrant la gamme de fréquences entre 0.6 et 0.7 MHz, pouvant correspondre aux modes localisés d'origine EM sur la Figure 4.4(b) à environ 0.58 MHz pour $\omega^-(k_1)$ et à environ 0.67 MHz pour $\omega^+(k_1)$. A des fréquences plus élevées, mais inférieures à 1 MHz, deux trajectoires supplémentaires sont observées expérimentalement, appartenant probablement aux branches A_1 et S_0 , visibles respectivement dans la partie positive de la 1^{ère} et 2^{ème} ZB (mais aussi dans la partie négative de la 2^{ème} et 1^{ère} ZB). La comparaison entre théorie et expérience n'est cependant pas simple, notamment parce que les simulations réalisées par éléments finis prédisent beaucoup plus de modes activables/détectables que ceux observés expérimentalement.

4.2.2 Modèle de ligne équivalent

Le circuit équivalent qui modélise les deux résonateurs électriques représentés sur la Figure 4.3(a), lorsque le couplage piézoélectrique est désactivé, est représenté sur la Figure 4.5. Nous définissons toutes les tensions à l'entrée, V_{A_j} , et à la sortie, $V_{B_j} = \mathcal{P}V_{A_j}$, $j = 1, 2$, de la cellule élémentaire par rapport à une

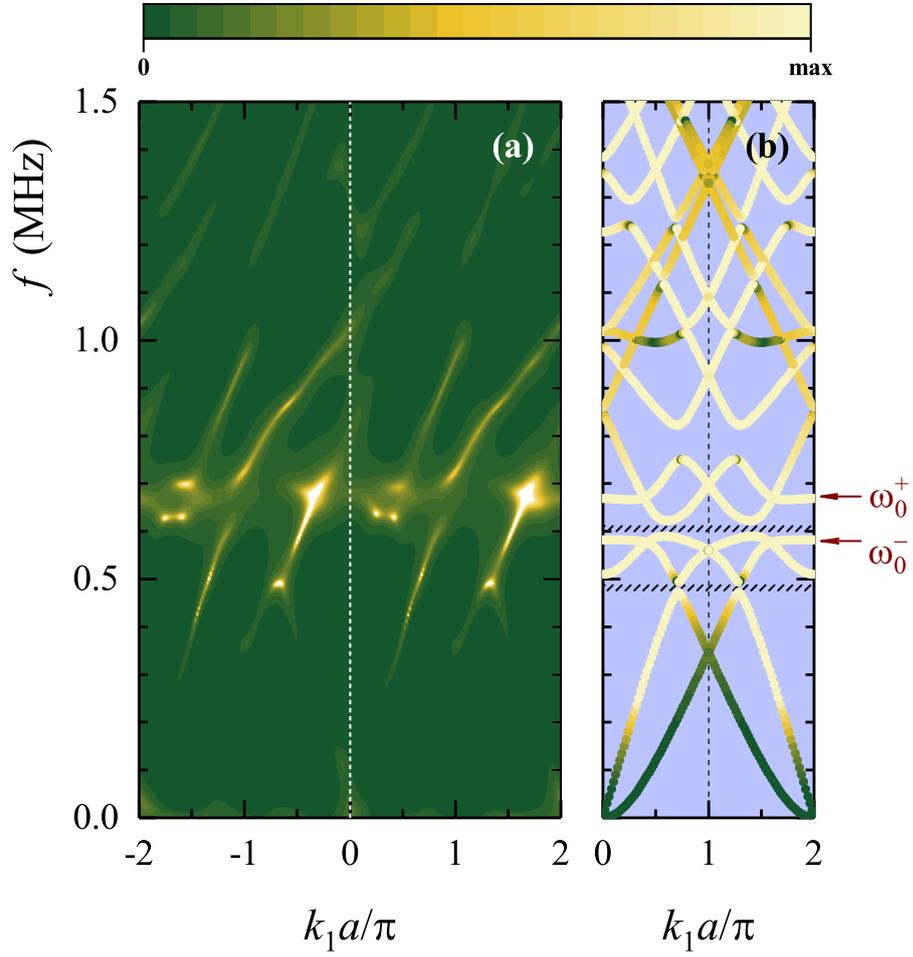


Figure 4.4 – (a) Structure de bandes expérimentale du cristal diatomique piézoélectrique dont les CLEs sont décrites Figure 4.3, obtenue par l'application du modèle AR2D sur les signaux de potentiel électrique enregistrés sur les électrodes supérieures, pour une bobine d'inductance $L = 30 \mu\text{H}$. (b) Diagramme de dispersion calculé par éléments finis pour le cristal infini. Les régions hachurées représentent des bandes interdites absolues.

référence de masse commune, et $\mathcal{P} = e^{-ik_1 a}$ est le facteur de phase de Bloch (on suppose une dépendance temporelle $e^{+i\omega t}$ dans tous les champs). Les courants électriques entrant et sortant sont respectivement I_j et $\mathcal{P}I_j$. L'application des lois de Kirchhoff permet d'obtenir l'équation de dispersion suivante pour les deux bandes de résonance électriques

$$\omega^\pm(k_1) = \left[LC \left(1 + 2 \frac{C_s + C_1 + C_2}{C} - 2 \frac{C_1}{C} \cos k_1 a \mp 2 \frac{C_2}{C} \cos \frac{k_1 a}{2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (4.2.1)$$

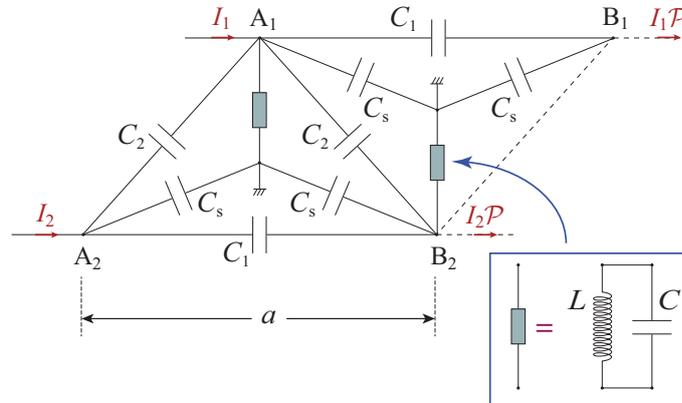


Figure 4.5 – Cellule élémentaire d'une ligne de transmission périodique décrivant de manière équivalente la Figure 4.3 lorsque le couplage électromécanique est désactivé.

avec les valeurs $C = 0.103$ nF, $C_s = 0.552$ nF, $C_1 = 0.0348$ nF, et $C_2 = 0.116$ nF obtenues par ajustement ; le mode résonnant décrit ici est en très bon accord avec celui obtenu via le modèle de tight-binding.

4.3 Cellule élémentaire diatomique mise au potentiel flottant et chargée par une inductance

4.3.1 Structure de bandes et analyse

En remplaçant les deux extrémités mises à la masse de la structure précédente par des extrémités à potentiel flottant (PF), nous obtenons la cellule élémentaire représentée sur la Figure 4.6(a). Une méthodologie similaire à celle donnée en section précédente est développée afin de comprendre la formation des bandes résonnantes. La principale différence réside dans la forme spécifique de cette bande avant hybridation. Comme on peut le montrer facilement, cette branche est hyperbolique pour le cristal monoatomique (considérer seulement la moitié gauche de la cellule élémentaire de la Figure 4.6(a)) et lors de la construction de la cellule élémentaire diatomique, le repliement se traduit par deux branches, une en forme d'hyperbole $\omega^+(k_1)$ étendue en fréquence, l'autre $\omega^-(k_1)$ relativement plate (Figure 4.6(b)). Lorsque $L_1 = L_2$ ces deux bandes distinctes dégèrent en une fréquence commune ω_π au point X, cette dégénérescence provenant de la symétrie d'inversion de la cellule élémentaire, et elle sera levée si $L_1 \neq L_2$. Le point de fréquence finie $\omega_0^- = \omega^-(k_1 = 0)$ peut être réglé par le choix de L .

La structure de bandes expérimentale du cristal de taille finie est obtenue en suivant la même procédure que dans le cas précédent (cristal mis à la masse). Les résultats sont montrés Figure 4.7(a), et à côté (Figure 4.7(b)) la structure

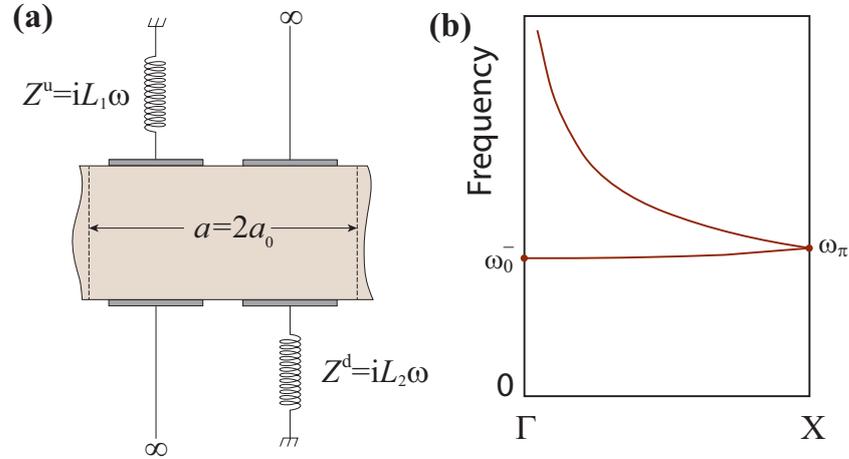


Figure 4.6 – (a) Cellule élémentaire du cristal phononique piézoélectrique diatomique (constante de réseau $a = 2a_0$) pour le cas des CLEs alternées : potentiel flottant et inductance mise à la masse. (b) Représentation schématique de la relation de dispersion des bandes d’origine EM.

de bandes calculée pour le cristal infini en supposant une bobine d’inductance pure ($L = 30 \mu\text{H}$). Dans la structure de bandes expérimentale, trois régions de fréquence sont discernables : en dessous de 0.6 MHz les branches S_0 et A_0 sont clairement identifiées, ils sont en bon accord avec la théorie comme c’était également le cas pour le cristal mis à la masse (Figure 4.4). Pour les fréquences supérieures à 0.6 MHz et inférieures à 1.0 MHz, des points lumineux sont observés, mais une comparaison rigoureuse avec la structure de bandes théorique semble délicate. Enfin, au-dessus de 1.0 MHz, les deux branches hyperboliques étendues deviennent dominantes et sont clairement observées dans la partie positive et négative de la 1^{ère} ZB.

Dans les deux cas examinés jusqu’à présent, on remarque que les courbes de dispersion expérimentales Figure 4.4(a) et la Figure 4.7(a) ne révèlent pas tous les modes théoriquement observés, et les opérations de symétrie telles que la symétrie de translation par un vecteur de réseau réciproque $\omega(k_1) = \omega(k_1 + \frac{2\pi}{a})$, et la symétrie miroir $\omega(k_1) = \omega(-k_1)$, ne sont pas observées pour toutes les trajectoires. Cela pourrait être expliqué par les effets de taille finie et l’excitation qui favorise certaines branches par rapport à d’autres.

Pour faciliter la comparaison avec la courbe théorique, on corrige artificiellement la perte de symétrie évoquée ci-dessus, en effectuant la moyenne entre les plages positive et négative en k_1 après (i) retournement horizontal et (ii) translation horizontale de 2 en unités réduites de k_1 . Ces deux opérations conduisent à une image possédant une symétrie miroir par rapport à l’axe des fréquences aux points Γ et X , la direction ΓX étant donc suffisante pour toute l’analyse. Les résultats sont présentés : pour le cristal mis à la masse Figure 4.8(a) et pour le cristal à potentiel flottant Figure 4.8(c).

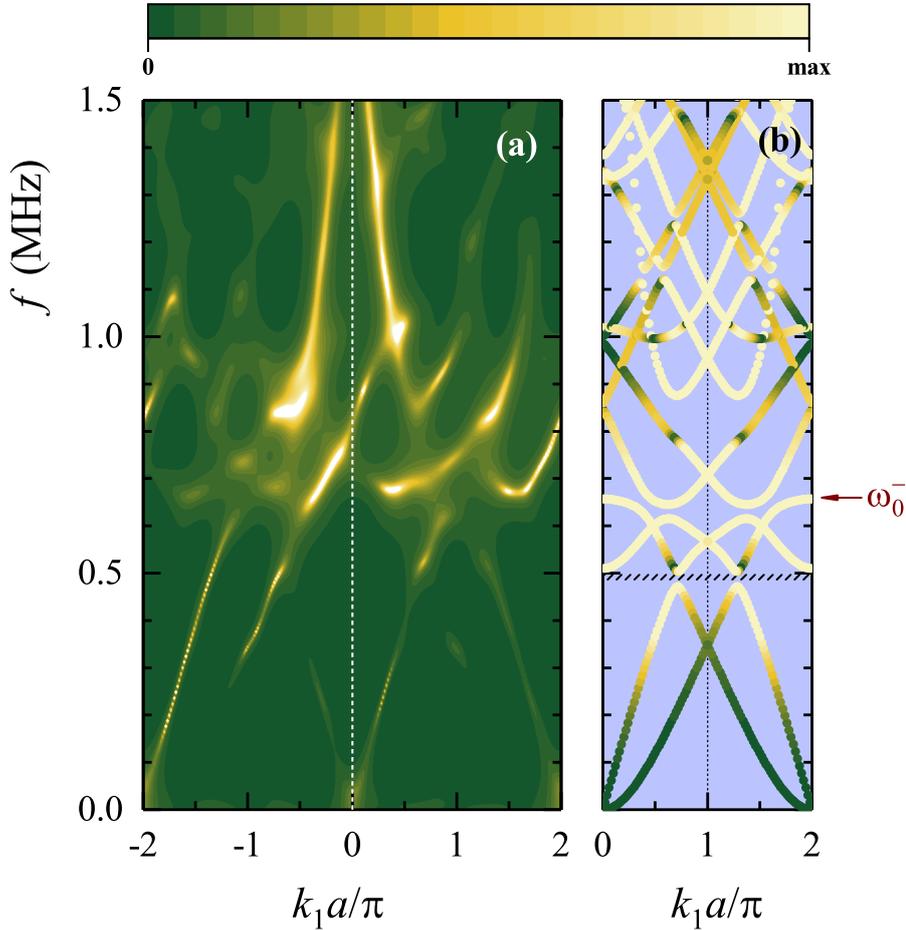


Figure 4.7 – (a) Structure de bandes expérimentale du cristal diatomique piézoélectrique dont les CLEs sont décrites Figure 4.6, obtenue par l'application du modèle AR2D sur les signaux de potentiel électrique enregistré sur les électrodes supérieures, pour une bobine d'inductance $L = 30 \mu\text{H}$. (b) Diagramme de dispersion calculé par éléments finis pour le cristal infini. Les régions hachurées représentent des bandes interdites absolues.

Leur comparaison avec les résultats théoriques Figure 4.8(b) et (d) montre un décalage vers les basses fréquences des modes EM simulés, pouvant être attribué aux simplifications imposées lors des simulations en ayant ignoré dans l'analyse précédente la taille finie du cristal, les conditions aux limites élastiques différentes aux bords de la plaque dues à l'utilisation des cartes PCI et des effets d'électronique réelle présents dans les circuits.

D'ailleurs, une charge d'impédance Z_e (voir chapitre 3) sera considérée dans la suite à la place de $Z^u = Z^d = Z_L = iL\omega$. Les structures de bandes calculées correspondant à celles des Figure 4.4(b) et Figure 4.7(b), sont tracées Figure 4.8(b) et (d), l'impédance Z_e , Eq. (3.4.1), y remplaçant la charge in-

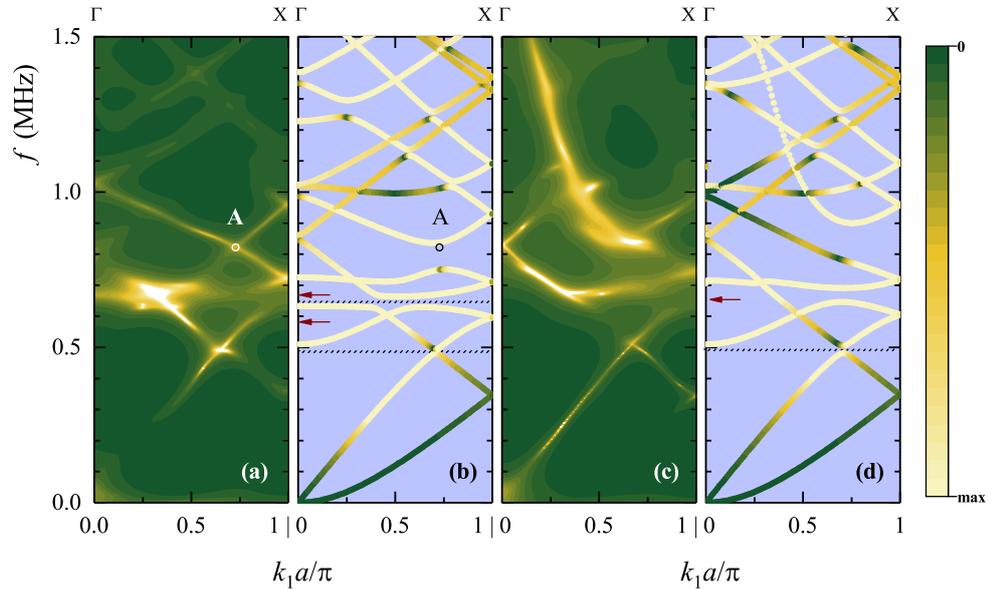


Figure 4.8 – Structure de bandes expérimentale du cristal phononique piézo-électrique diatomique contenant une inductance L et (a) une mise à la masse, ou, (c) une mise à potentiel flottant. En (b) et (d), les diagrammes de dispersion calculés par FEM pour un cristal infini, en supposant des charges réelles Z_e au lieu des charges inductives pures Z_L . Les régions hachurées représentent des bandes interdites absolues.

ductive pure $L = 30 \mu\text{H}$. L'utilisation de Z_e décale les modes EM (indiqués ici par des flèches rouges) vers les hautes fréquences d'environ $\sim 10\%$ pour ω_0^\pm par rapport aux Figures 4.4(b) et 4.7(b), améliorant ainsi la comparaison entre les données expérimentales et les résultats de simulations.

Les modes EM se manifestent sous la forme de deux bandes plates situées dans la gamme de fréquences de 0.6 à 0.75 MHz pour le cristal avec mise à la masse (Figure 4.8(b)). Un bon accord avec les courbes expérimentales (points lumineux s'étendant de 0.63 to 0.71 MHz sur la Figure 4.8(a)) est observé.

Pour le cristal à potentiel flottant (Figure 4.8(d)), les modes EM se manifestent, d'une part par une bande plate centrée à 0.7 MHz et d'autre part par une branche hyperbolique qui interagit fortement avec le mode A_1 et s'étend sur l'ensemble de la gamme des fréquences supérieures à 0.9 MHz. Ils se comparent bien à la courbe expérimentale Figure 4.8(c) : on observe respectivement un segment brillant plat de 0.66 to 0.75 MHz et une branche hyperbolique au-dessus de 0.82 MHz.

On peut noter au passage l'apparition, pour les deux systèmes, de bandes interdites absolues étroites donc sélectives (régions hachurées sur les Figures 4.8(b), (d)) résultant d'une répulsion entre bandes de même symétrie. Par conséquent, on s'attend à ce que ce type de bandes interdites soient présentes même dans

le cas de structures à faible nombre de cellules élémentaires [64]. Leur position en fréquence est contrôlée indirectement par les valeurs $\omega_0 \sim L^{-1/2}$ (voir § 4.3.2). Leur largeur bien qu'étroite, peut devenir plus importante à l'aide de composantes électroniques permettant d'augmenter le degré d'interaction (par exemple, des capacités négatives [53]).

Une comparaison plus attentive des résultats obtenus par les deux modèles utilisés pour les simulations (Z_L et Z_e), dans les deux cas de cristaux étudiés, montre qu'aucun d'entre eux ne peut décrire parfaitement la courbe expérimentale en termes de position en fréquence des modes EM (ils sont en général légèrement décalés, la branche hyperbolique étant clairement plus décalée vers les hautes fréquences dans les simulations) et en termes de degré d'interaction intervenant dans les régions de bandes interdites, lorsque modes EM et modes de Lamb se croisent. En effet, une faible interaction est observée expérimentalement, tandis qu'un fort couplage est attendu théoriquement.

Des écarts sont également observés entre des segments sombres de certaines branches, par exemple, la branche de type A_1 , théoriquement prédite à une fréquence de coupure proche de 0.5 MHz, n'est pas détectée expérimentalement. On en déduit que si une impédance d'inductance L pure est trop simple pour reproduire exactement les courbes de dispersion expérimentales de ces cristaux, l'utilisation de l'impédance Z_e n'est pas non plus suffisante.

Une raison pourrait en être la modification de cette impédance Z_e individuelle (en rappelant que son identification a été réalisée de façon isolée en dehors du cristal) lorsqu'elle est introduite dans le dispositif incluant la plaque et les deux cartes PCI.

D'autre part, les simulations négligent les effets de taille finie et les fuites de modes élastiques et EM dans le milieu environnant (air). Pour ces raisons, la comparaison entre théorie et expériences reste cependant très satisfaisante et permet de bien vérifier les principales caractéristiques des propriétés de dispersion de ces cristaux.

4.3.2 Modèle de ligne équivalent

Dans le cas du cristal à deux atomes avec des CLEs alternées à potentiel flottant et une charge d'inductance (cellule élémentaire Figure 4.6(a)), nous procédons de la même manière que dans la § 4.2.2 pour construire son circuit équivalent modélisant les deux résonateurs électriques. On obtient, après quelques manipulations algébriques relativement longues, l'équation de dispersion suivante pour les deux bandes électriques :

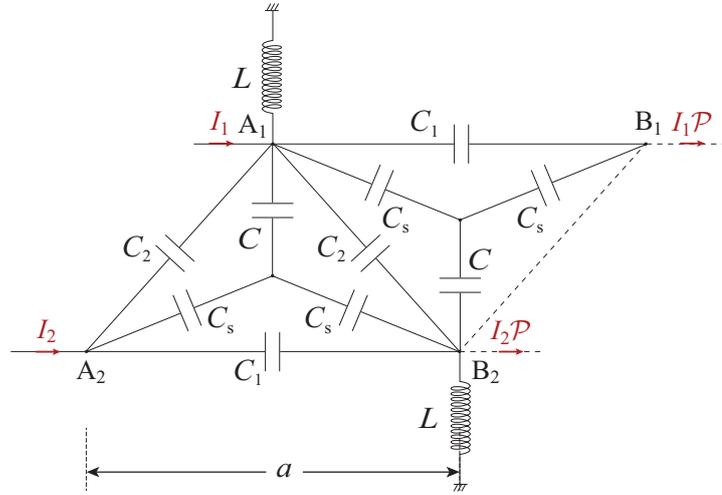


Figure 4.9 – Cellule élémentaire d'une ligne de transmission périodique décrivant de manière équivalente la Figure 4.6 lorsque le couplage électromécanique est désactivé.

$$\begin{aligned} \omega^\pm(k_1) &= \left\{ 2LC \left[\frac{C_1 + 2C_2}{C} + \frac{C_s}{C} \frac{2C + C_s}{C + 2C_s} \right. \right. & (4.3.1) \\ &\quad - \left(\frac{C_1}{C} + \frac{C_s}{C} \frac{C_s}{C + 2C_s} \right) \cos k_1 a \\ &\quad \left. \mp 2 \left(\frac{C_2}{C} + \frac{C_s}{C + 2C_s} \right) \cos \frac{k_1 a}{2} \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

A partir de cette expression, on détermine deux solutions propres au point Γ , $\omega_0^- = \left[8LC_2 \left(1 + \frac{C}{C_2} \frac{C_s}{2C_s + C} \right) \right]^{-1/2}$ et $\omega_0^+ \sim \left[LC_1 \left(1 + \frac{C_s}{C_1} \frac{C_s}{2C_s + C} \right) \right]^{-1/2} \frac{1}{k_1 a}$.

La branche de fréquence supérieure $\omega^+(k_1)$ se comporte comme une fonction hyperbolique pour $k_1 a \ll 1$, tandis que la branche de fréquence inférieure $\omega^-(k_1)$ correspond à une bande de résonance de profil en cosinus de largeur finie $\Delta\omega^- = |\omega_0^- - \omega_\pi|$, où ω_π est la fréquence propre commune au point X : $\omega_\pi = \left[4L \left(C_1 + C_2 + C_s \frac{C + C_s}{C + 2C_s} \right) \right]^{-1/2}$. La forme de ces deux modes dispersifs est toujours contrôlée par L et les paramètres effectifs internes du modèle C , C_s , C_1 et C_2 .

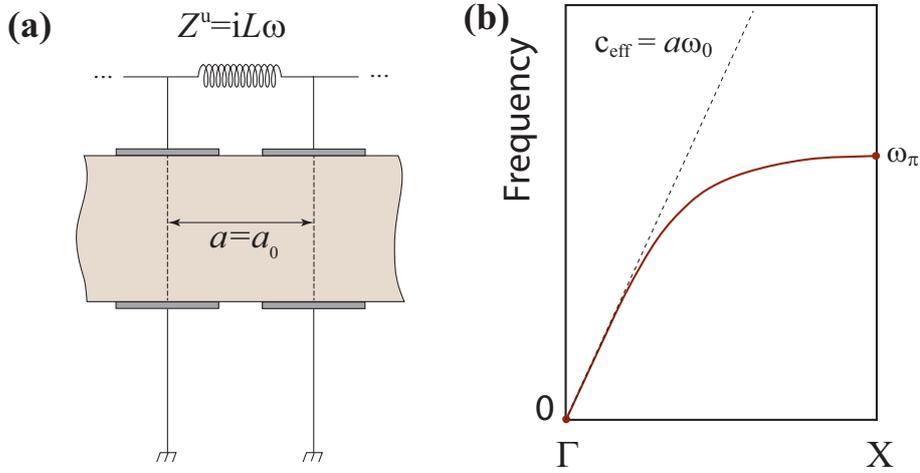


Figure 4.10 – (a) Cellule élémentaire du cristal phononique piézoélectrique de constante de réseau $a = a_0$ pour des CLEs avec connexion intercellulaire des électrodes adjacents par inductance. (b) Représentation schématique de la relation de dispersion des bandes d’origine EM.

4.4 Cellules élémentaires adjacentes interconnectées par inductance

4.4.1 Structure de bandes et analyse

Dans ce dernier cas, nous étudions le cristal avec connexion intercellulaire des électrodes adjacentes situées du même côté de la plaque par des inductances L , les électrodes de l’autre face étant mises à la masse, comme illustré Figure 4.10(a). Ces CLEs conservent la périodicité du réseau métallique d’origine ($a = a_0$). Le mode électrique résultant de ce branchement de L possède une allure typique de branche acoustique dans les systèmes périodiques 1D, avec en basses fréquences une pente $c_{\text{eff}} = a\omega_0$ (Figure 4.10(b)).

La structure de bandes calculée numériquement pour ce cristal est illustrée Figure 4.11 pour deux valeurs d’inductance $L = 150 \mu\text{H}$ (tracé (a)) et $L = 30 \mu\text{H}$ (tracé (b)). Comme évoqué ci-dessus, la caractéristique la plus intéressante de ces diagrammes de dispersion est l’apparition d’une branche de dispersion linéaire en limite des grandes longueurs d’onde, en plus des modes S_0 et A_0 traditionnellement attendus dans la même gamme de fréquences. La forme générale de cette branche EM, induite par L , lorsque le couplage piézoélectrique est désactivé ($e_{ij} = 0$) est donnée Figure 4.10(b), dont l’expression (Eqs. (4.4.1), (4.4.2)) sera établie dans la section suivante à l’aide d’un circuit équivalent.

La pente c_{eff} de cette branche EM est contrôlée par le choix de L , permettant de couvrir une large plage de vitesses du milieu effectif peu courantes dans des

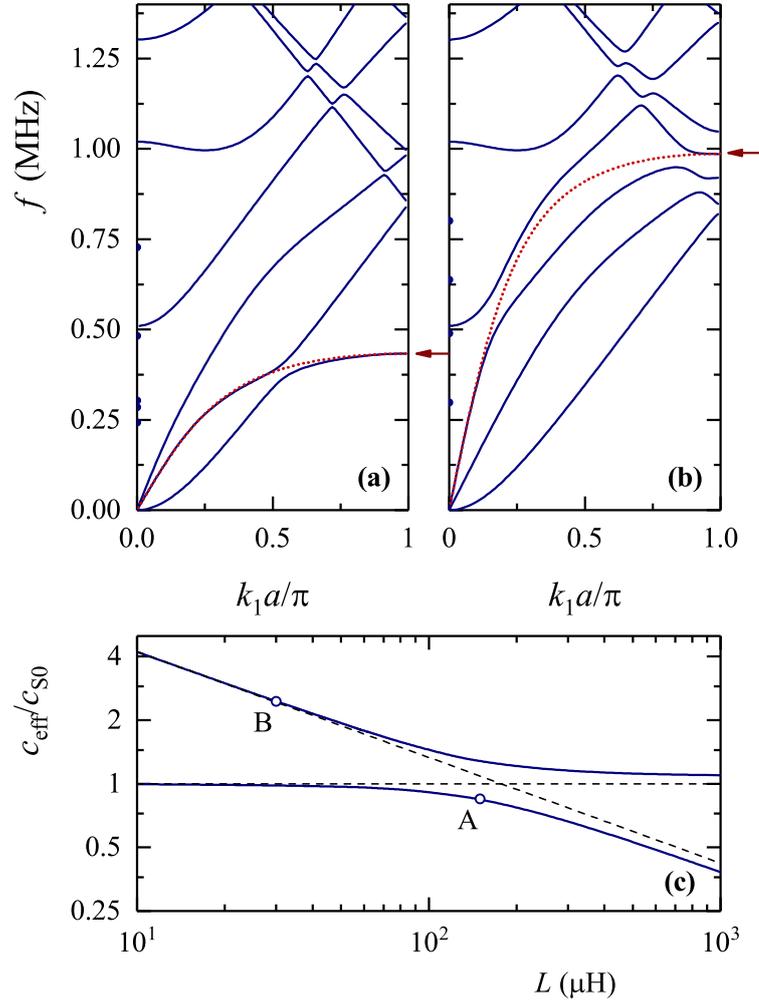


Figure 4.11 – Structure de bandes calculée du cristal monoatomique piézoélectrique ($a = a_0$) dont les CLEs sont décrites Figure 4.10 pour (a) $L = 150 \mu\text{H}$ et (b) $L = 30 \mu\text{H}$. Les courbes en pointillés rouges représentent le tracé de la bande d’origine électrique avant hybridation obtenue à partir des Eqs. (4.4.1), (4.4.2) en utilisant les valeurs appropriés des paramètres C , C_s (voir le texte), en imposant $\omega_\pi/(2\pi)$ (indiquée par la flèche rouge) et la pente du milieu effectif à grandes longueurs d’onde, c_{eff} , de cette branche. (c) Évolution de la pente des deux branches linéaires à $\omega \rightarrow 0$ en fonction de la valeur de L . Les lignes interrompues horizontale et oblique représentent respectivement la pente de milieu effectif associé à S_0 pour le cristal mis à la masse et au mode électrique (Eqs. (4.4.1), (4.4.2)) calculé pour C , C_s déterminés pour $L = 10 \mu\text{H}$. Les points A et B correspondent aux bandes représentées en pointillés rouges sur (a) et (b) respectivement.

matériaux ordinaires. Le modèle équivalent de ligne de transmission présenté dans la section suivante prévoit une dépendance en $\sim L^{-1/2}$ à valeurs C et

C_s fixées indépendamment (on trouve $C = 0.645$ nF et $C_s = 0.593$ nF, pour le cristal examiné). Quand le couplage est activé ($e_{ij} \neq 0$), afin de décrire le système réel, la bande L interagit avec les bandes de même symétrie associées aux modes de Lamb et provoque des effets d'hybridation. Afin de faciliter sa visualisation avant hybridation, on applique la même expression (Eqs. (4.4.1) et (4.4.2)), cette fois avec des valeurs de C , C_s reflétant tous les effets de couplage pour modéliser sa forme avant hybridation représentée Figure 4.11(a) et (b) en courbes rouges pointillées. Après examen attentif de ces diagrammes de dispersion, on identifie les deux paramètres ω_π (indiqué par une flèche rouge) et la vitesse du milieu effectif, c_{eff} , utilisées pour en déduire les paramètres internes au modèle ($C = 0.737$ nF et $C_s = 0.868$ nF, pour $L = 30$ μH ; $C = 1.413$ nF et $C_s = 0.900$ nF, pour $L = 150$ μH).

Dans le cas $L = 150$ μH (Figure 4.11(a)), la bande L de pente $c_{\text{eff}} = 2560$ m s^{-1} interagit faiblement avec le mode A_0 et une bande interdite étroite s'ouvre aux alentours de 0.375 MHz; l'autre branche linéaire attribuée au mode S_0 possède une pente $c_{\text{eff}} = 3850$ m s^{-1} , valeur plus importante que celle correspondant au cristal mis à la masse, $c_{S_0} = 3020$ m s^{-1} . Dans le cas $L = 30$ μH (Figure 4.11(b)), la bande L de pente $c_{\text{eff}} = 7400$ m s^{-1} interagit faiblement avec le mode A_1 mais également avec le premier repliement de la branche A_0 , donnant naissance à de plus larges bandes interdites situées à environ 0.50 MHz et 0.95 MHz; l'autre branche linéaire attribuée au mode S_0 possède une pente $c_{\text{eff}} = 2970$ m s^{-1} , valeur plus faible que c_{S_0} . Toutes ces constatations suggèrent une possible interaction avec S_0 , lorsque les deux modes sont suffisamment proches.

Sur la Figure 4.11(c), on trace l'évolution de la pente en limite de grandes longueurs d'onde en fonction de l'inductance couvrant une large plage de plus de deux ordres de grandeur pour les deux branches linéaires de même types que celles montrées Figure 4.11(a) et (b). On observe clairement une hybridation entre deux modes distincts : le mode S_0 représenté par la ligne pointillée horizontale, et le mode L représenté par la ligne pointillée oblique qui correspond à une variation $\sim L^{-1/2}$ calculé pour $L = 10$ μH (avec $C/[1 + C/(4C_s)] = 0.618$ nF), loin du point de croisement qui se produit au voisinage de $L = 150$ μH . Pour cette dernière valeur de L , une hybridation de haute intensité a lieu, les deux modes de dispersion linéaire portent à la fois le caractère S_0 et L , le point A correspondant à la bande L . Au contraire, pour $L = 30$ μH au point B, correspondant à la bande L , le mode conserve principalement son caractère L .

Intéressons-nous maintenant à la comparaison avec les résultats expérimentaux. Comme précédemment, l'impédance Z_e sera utilisée à la place du Z_L dans les calculs. Nous avons mesuré le signal de potentiel sur chacune des électrodes situées sur la face supérieure de la plaque ($n = 2, 3, \dots, 48$), et après application du modèle AR2D, nous obtenons le $V(\omega, k_1)$ expérimental dont l'amplitude est représentée sur la Figure 4.12(a) en bon accord avec la structure de bandes calculée par FEM (Figure 4.12(b)). La partie linéaire caractéristique d'un milieu

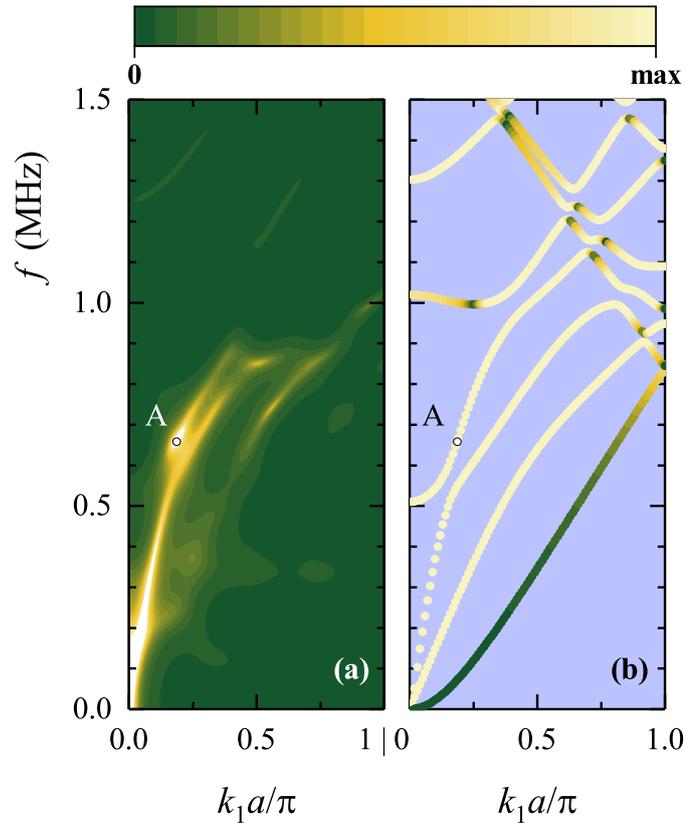


Figure 4.12 – (a) Structure de bandes expérimentale du cristal diatomique piézoélectrique dont les CLEs sont décrites Figure 4.10, obtenue par l'application du modèle AR2D sur les signaux de potentiel électrique enregistrés sur les électrodes supérieures. (b) Diagramme de dispersion calculé par éléments finis pour le cristal infini pour $L = 30 \mu\text{H}$.

effectif attribuée au mode d'origine EM, clairement observée dans les expériences, est parfaitement superposée avec les résultats de calculs FEM.

La même chose est observée concernant le segment activé de la branche A_1 (voir point A sur la Figure 4.12(a)), bien que cette dernière ne soit pas observée expérimentalement au voisinage de sa fréquence de coupure à ~ 0.5 MHz (ce qui était déjà le cas dans les cas des cristaux précédemment étudiés, § 4.2 et § 4.3). La branche S_0 est également observée expérimentalement, mais avec une amplitude inférieure à celle prédite par le calcul numérique. On note que ce dernier ne réussit pas à reproduire l'intensité d'évitement des trajectoires au voisinage du point A et pour les fréquences au dessus (cette répulsion est surestimée dans les calculs par rapport à l'expérience). De façon générale pour les trois cristaux étudiés, le mode A_0 n'est pas observé (à part quelques segments quasi-invisibles au voisinage du point X), le potentiel prenant des valeurs très faibles le long de sa trajectoire, en parfait accord avec les prédictions de calcul.

4.4.2 Modèle de ligne équivalent

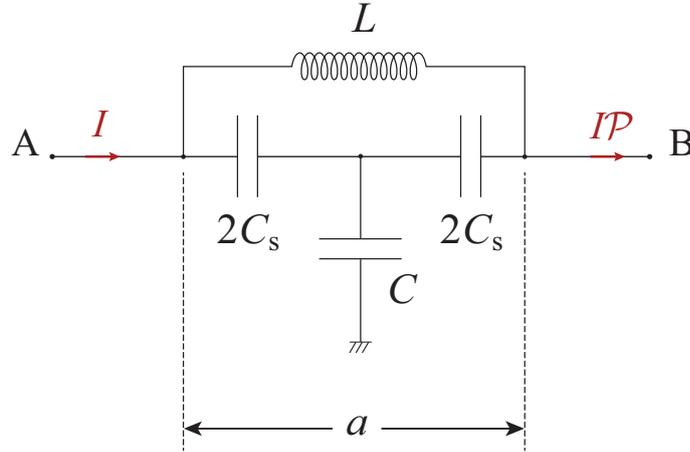


Figure 4.13 – Cellule élémentaire d'une ligne de transmission périodique décrivant de manière équivalente à la Figure 4.10 lorsque le couplage électromécanique est désactivé.

La cellule élémentaire de la Figure 4.10 est modélisée par la ligne de transmission périodique dont la cellule élémentaire est représentée sur la Figure 4.13. On obtient la relation de dispersion suivante

$$\omega(k_1) = \omega_0 \left[\frac{C}{4C_s} + \left(2 \sin \frac{k_1 a}{2} \right)^{-2} \right]^{-1/2}, \quad (4.4.1)$$

où

$$\omega_0 = \left[\frac{1}{LC} \left(1 + \frac{C}{4C_s} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.4.2)$$

avec $\omega_\pi = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$. On déduit la vitesse de milieu effectif $c_{\text{eff}} = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{\omega}{k_1} = a\omega_0$. Dans ce modèle simplifié mais très fidèle, la connaissance à priori de deux paramètres externes, e.g. ω_π et ω_0 (ou, de manière équivalente, c_{eff}), est suffisante pour déterminer les paramètres internes du modèle, C et C_s .

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse approfondie des propriétés de dispersion des plaques phononiques piézoélectriques structurées avec des réseaux métalliques sur leurs surfaces et chargées avec des circuits inductifs. Ces structures, étudiées expérimentalement et théoriquement, présentent une variété de modes soit localisés, soit étendus en fréquence provenant d'un comportement de circuits électriques résonants à base de charges inductives et couvrant à volonté les domaines basses, intermédiaires, autant que hautes fréquences. Nous

avons démontré l'apparition des modes de vitesse de groupe inhabituelle, prenant des valeurs divergentes, positives ou négatives, facilement réglables via ces charges inductives externes. Ces comportements passe-bas, passe-bande, ou passe-haut se manifestant par des variations de potentiel significatives le long des trajectoires des bandes L , associés au caractère contrôlable et automatisé de notre dispositif expérimental constituent un outil puissant pour les applications ciblant la manipulation en temps réel des ondes élastiques via les ondes EM et vice-versa. Nos résultats expérimentaux, enrichis par des techniques de traitement du signal sont conformes aux calculs théoriques confirmant, malgré quelques écarts, les mécanismes fondamentaux analysés et les principaux aspects phénoménologiques, intéressants pour des applications. Notre objectif étant entre autres la réalisation de dispositifs viables, simples pouvant fonctionner dans des conditions réelles et produire les effets souhaités sur les propriétés de dispersion de ces cristaux. Néanmoins, malgré son aspect très applicatif à première vue, cette étude porte en soi un contenu physique d'aspect fondamental important.

Chapitre 5

Cristaux non-réciproques : modulation spatio-temporelle de modes de Lamb

5.1 Introduction

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de la modulation dynamique des propriétés de la plaque piézoélectrique phononique. Nous avons vu au cours des chapitres précédents que nous pouvions aisément modifier la dispersion des modes de Lamb se propageant sur la plaque en changeant les conditions aux limites électriques imposées aux électrodes. Le dispositif permet de passer d'une condition à l'autre en commutant des interrupteurs via un micro-contrôleur. Cette agilité du dispositif peut être exploitée pour effectuer un contrôle dynamique des propriétés du cristal. A notre connaissance, c'est la première étude consacrée à la modulation dynamique d'ondes guidées de type Lamb. Ces ondes sont constituées d'une combinaison d'ondes longitudinales et transversales offrant une grande diversité de polarisation et de dispersion et donc de nombreuses possibilités de couplages associées à la modulation spatio-temporelle. La modulation se réalisant au niveau des CLEs (circuits), le phénomène reste surfacique dans le sens que la modulation n'agit qu'indirectement dans le volume (à distinguer par exemple avec le système d'une plaque homogène où l'on module ces paramètres élastiques...).

5.2 Conception du dispositif expérimental

En théorie, on peut moduler temporellement un cristal en modifiant ses propriétés élastiques, électriques, géométriques... Mais il est évident que pour des raisons pratiques les propriétés du matériau constituant la plaque doivent être modifiées de façon non-destructive. La modification des conditions aux limites électriques via les circuits électriques externes nous offre une souplesse

extraordinaire, pour les systèmes de plaques que nous étudions, ainsi notre choix portera sur la modulation spatio-temporelle du cristal via la variation des CLEs appliquées aux électrodes au fil du temps.

Cette section est dévolue à la présentation et la conception d'un point de vue électronique de la modulation et du système associé pour sa réalisation expérimentale. On réalise ici la propagation de successions périodiques d'ouverture et de fermeture d'interrupteurs branchés sur les électrodes situées sur la face supérieure du cristal.

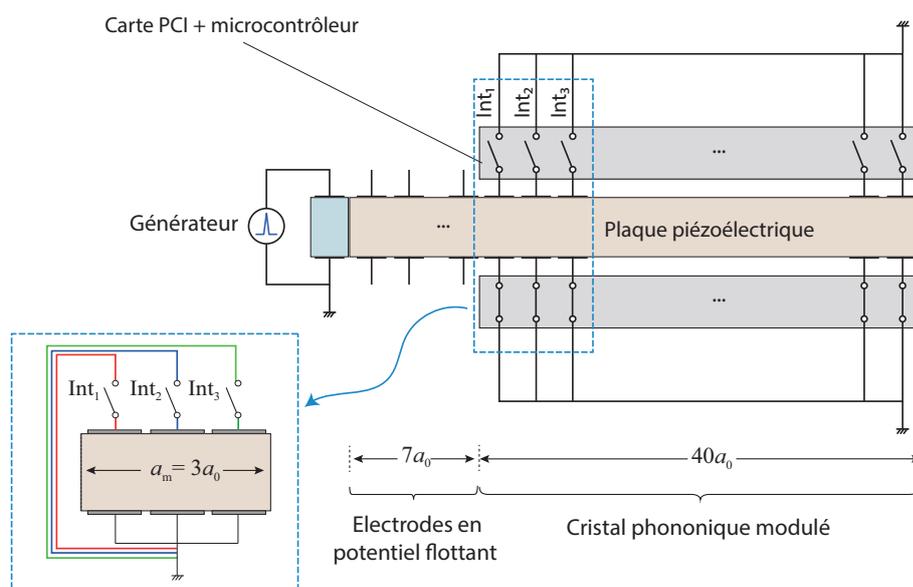


Figure 5.1 – Représentation schématique du dispositif expérimental, comprenant la plaque structurée, excitée à son extrémité gauche par une impulsion. Une région de 7 électrodes par face, mises à des conditions de potentiel flottant, précède la partie du cristal (40 électrodes par face) qui recevra des circuits modulés. La cellule élémentaire de modulation, de longueur $a_m = 3a_0$ est illustrée dans le cadre pointillé en bas à gauche.

Nous examinons le cristal illustré Figure 5.1, constitué de 48 blocs de largeur $a_0 = 1$ mm chacun, contenant deux électrodes disposées en vis à vis sur chacune des faces. Rappelons ici que la périodicité naturelle de la plaque piézoélectrique, associée à la structuration périodique des électrodes est $a_0 = 1$ mm, mais les CLEs permettent de modifier cette périodicité spatiale en fonction du temps. Si l'on considère une cellule au potentiel flottant et la suivante en court circuit, nous doublons la période spatiale $a = 2a_0$. On peut ainsi augmenter la période spatiale à volonté en choisissant une séquence de CLEs sur κ cellules élémentaires consécutives via des circuits électriques externes connectés, le nouveau paramètre de maille sera $a = \kappa a_0$, avec κ un entier.

Dans ce travail, nous ne souhaitons pas simplement changer les CLEs en fonction du temps, mais créer une "onde" de modulation de propriétés du milieu,

à laquelle nous pouvons associer une vitesse et dont le sens de propagation peut être choisi. D'un point de vue effectif, cela revient à simuler un milieu en mouvement. Des travaux antérieurs ont souligné que pour engendrer un comportement non-réciproque [65] il était nécessaire de considérer au minimum une cellule élémentaire constituée de trois blocs $a \geq 3a_0$ afin de définir un sens de propagation à l'onde de modulation ($x_1 > 0$ ou $x_1 < 0$). Dans la suite de ce chapitre, un groupe de trois paires d'électrodes définira une cellule spatio-temporelle élémentaire. On notera $a_m = 3a_0$ la période spatiale de cette modulation. Cette cellule élémentaire spatiotemporelle sera reproduite sur toute la longueur de la plaque. Cependant afin d'identifier clairement les effets de la modulation spatio-temporelle sur les ondes de Lamb, une zone sans modulation constituée de 7 électrodes laissées au potentiel flottant est définie. En effet, l'excitation se fait sur la première paire d'électrodes à l'extrémité de la plaque, les modes de Lamb générés se propagent dans la direction $x_1 > 0$ mais d'autres type de modes existent, ces modes dont le nombre d'onde est complexe ne se propagent pas et restent localisés sur l'extrémité de la plaque. Une modulation de la plaque au voisinage de ces modes peut introduire de fortes perturbations et le maintien d'une zone sans modulation nous permet d'assurer une génération propre des modes de Lamb. La plaque compte 48 paires d'électrodes, la première, connectée au générateur, sert à l'excitation des ondes, les 7 suivantes sont laissées au potentiel flottant et les 40 dernières paires servent à imposer des CLEs variables. Les électrodes inférieures sont connectées à la masse tandis que les électrodes localisées du n°9 au 48 seront soit laissées à un potentiel flottant ou connectées à la masse électrique ou une impédance électrique quelconque (inductive, capacitive ou résistive) via un interrupteur commandé.

Dans le cas présent, la loi de comportement de l'onde est principalement déterminée par les CLEs des électrodes. En alternant périodiquement les interrupteurs entre les états OUVERT et FERME, le potentiel sur l'électrode sera respectivement imposé par les déformations de la plaque et donc par les différents modes élastiques ou bien celui-ci sera nul. Ce changement d'état électrique de l'électrode modifie à son tour le comportement des ondes dans le cristal, nous avons ici un système couplé.

La fonction de commande des interrupteurs de chaque cellule spatio-temporelle est modulée selon la loi suivante :

$$\text{Int}_i(t) = \text{Rect}(t - \delta_i), \quad (5.2.1)$$

avec $i = 1, 2, 3$ indiquant le numéro de sous-cellule (bloc), δ_i étant le décalage temporel entre les trois éléments actifs consécutifs. On note $f_m = 1/T_m$ la fréquence de modulation, T_m étant la période de modulation ; ainsi, la vitesse de modulation est définie par l'expression $C_m = a_m/T_m = 3a_0/T_m$. L'état des interrupteurs d'une cellule du cristal modulé (composée de trois paires d'électrodes) en fonction du temps est représenté dans la Figure 5.2(a) lorsque la vitesse de modulation C_m est supérieure à zéro, avec 1 représentant l'état FERME

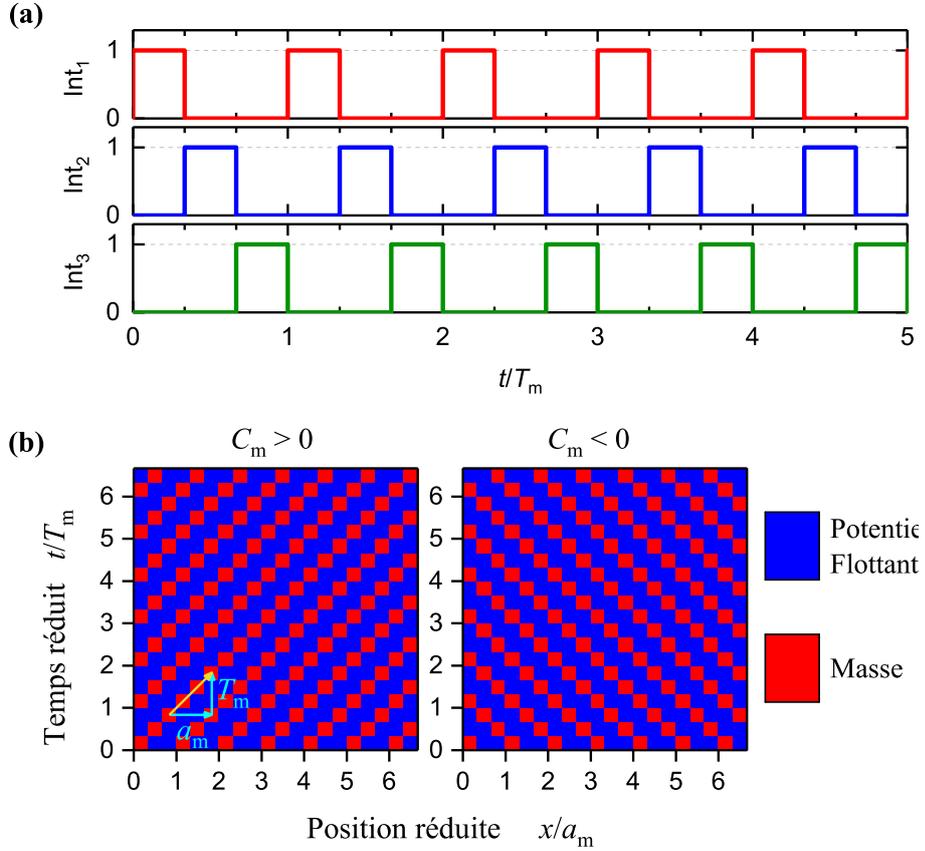


Figure 5.2 – (a) Séquence des états des trois interrupteurs. (b) Profils de modulation spatio-temporelle des conditions aux limites, pour une vitesse de modulation positive, $C_m > 0$, à gauche, ou négative, $C_m < 0$, à droite.

(électrode mise à la masse) et 0 représentant l'état OUVERT et (électrode au potentiel flottant). Dans les explications qui suivent, pour simplifier la lecture nous avons renuméroté les électrodes, en désignant en position 1 la première électrode de la partie modulée du cristal ; mais pour être en cohérence avec la numérotation globale adoptée dans la Figure 5.1, il suffit d'ajouter 8 au n° des électrodes, dans la description suivante :

- A l'état initial, $t \in [0, T_m/3]$ et une électrode sur trois est connectée à la masse (électrodes P_1 avec n° $1 + 3j$), tandis que les deux autres sont laissées en potentiel flottant (électrodes P_2 avec n° $2 + 3j$ et $3 + 3j$), où $j = 0, 1, \dots, 12$ ou 13 , pour que le nombre total des électrodes modulées ne dépasse 40.
- Pour $t \in [T_m/3, 2T_m/3]$, la masse avance d'un pas d'électrode, ce qui signifie que les électrodes P_3 (n° $2 + 3j$) sont reliées à la masse, tandis que les autres électrodes P_4 (n° $1 + 3j$ et $3 + 3j$) sont laissées en potentiel

flottant.

- Pour $t \in [2T_m/3, T_m]$, la masse avance encore d'un pas d'électrode, donc les électrodes P_5 (n° $3+3j$) seront connectées à la masse, et les électrodes P_6 (n° $1+3j$ et $2+3j$) seront laissés au potentiel flottant. Ce cycle se répète pour une durée de temps souhaitée.

La Figure 5.2(b) représente le profil de modulation spatio-temporelle des conditions aux limites des électrodes dans un système pour les deux cas de figure : modulation se propageant vers l'avant ($C_m > 0$, diagramme (b) à gauche) et vers l'arrière ($C_m < 0$, diagramme (b) à droite). Les électrodes reliées à la masse sont symbolisées par la couleur rouge, tandis que les électrodes en potentiel flottant sont en bleu. Il est important de noter que, dans le cadre de cette étude, l'excitation est toujours sur la première électrode de gauche. Par conséquent, pour tester la non-réciprocité, il suffit de changer le signe de la vitesse de modulation.

5.3 Système réciproque

De principe, on attend que le comportement non-réciproque d'un cristal se manifeste par une asymétrie des courbes de dispersion par rapport à la transformation $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ du vecteur d'onde de Bloch, cette asymétrie étant absente pour le système réciproque correspondant dont les propriétés ne subissent pas de variation temporelle. Par conséquent, pour l'étude du système modulé, il est d'abord nécessaire d'analyser le comportement dispersif du système non-modulé qui sera notre point de référence.

Le système réciproque de référence consiste en un cristal dont la cellule élémentaire de largeur a contient plusieurs blocs de largeur $a_0 = 1$ mm chacun comprenant une électrode par face. Notre choix porte sur une configuration combinant les deux circuits non-résonnants extrêmes en termes d'impédance réelle, i.e., les CLEs à potentiel flottant ($Z^u \rightarrow \infty$) et celles de mise à la masse ($Z^u = 0$), les électrodes de face inférieure étant mises à la masse ($Z^d = 0$). La Figure 5.2(a) illustre la structure de bandes pour ces deux systèmes pour les CLEs de mise à la masse (courbes pointillées en rouge) et à potentiel flottant (courbes interrompues en orange) dans la fenêtre fréquentielle $[0, 0.90]$ MHz qui nous intéressera dans la suite pour l'étude du système non-réciproque correspondant. Enfin, le système hybride combinant les deux situations, i.e. potentiel flottant sur la face supérieure et mise à la masse sur la face inférieure, est également considéré (courbe continue en bleu). Suivant la nomenclature d'application des différents modes par analogie aux modes de Lamb des plaques homogènes pour faciliter la lecture, on remarque la présence dans cette fenêtre d'étude du mode A_0 , jusqu'à son premier repliement aux bords de la ZB (gap de Bragg) aux alentours de $\simeq 0.80$ MHz, du mode S_0 , un peu avant son premier repliement, et du mode A_1 . Le mode A_0 reste pratiquement identique pour les trois systèmes. Le mode S_0 est légèrement différent ; on relève une vitesse effective

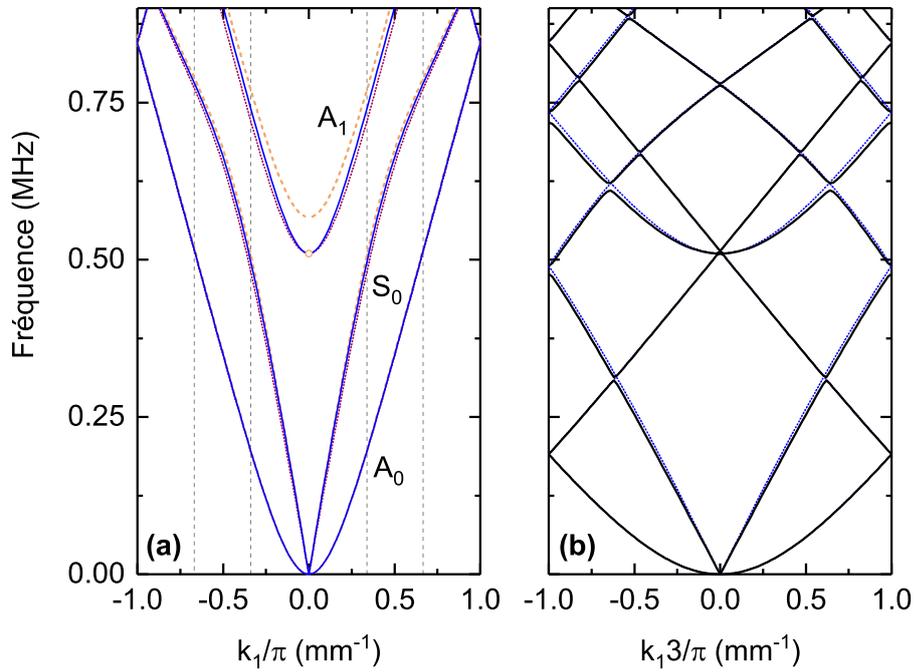


Figure 5.3 – Structure de bandes calculée par éléments finis, pour un cristal composé d'une cellule contenant : (a) une électrode par face (paramètre de maille $a = a_0 = 1$ mm) avec des conditions électriques de potentiel flottant (traits interrompus en orange), de mise à la masse (traits pointillés en rouge), appliquées sur les deux faces, et hybrides avec potentiel flottant sur la face supérieure et mise à la terre sur la face inférieure (traits continus en bleu) ; (b) trois électrodes par face (paramètre de maille $a = 3a_0 = 3$ mm) avec des conditions électriques de potentiel flottant pour les deux premières électrodes et mise à la masse pour la troisième électrode de la face supérieure, les électrodes de la face inférieure étant mises à la masse (courbe continue). La courbe de dispersion pour le cristal à CLEs hybrides (potentiel flottant et masse, courbe bleu en (a)) est également illustrée (courbe pointillée en bleu), pour des raisons de comparaison, après repliement des différentes modes aux limites de la zone de Brillouin du cristal à trois électrodes par cellule (indiquées par les lignes verticales pointillées en (a)).

$c_{\text{eff}} = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{\omega}{k_1} = 2997$ m/s et 3242 m/s, pour le cristal avec mise à la masse et celui à potentiel flottant, respectivement, avec une augmentation de $\sim 8\%$, et 3204 m/s, pour le cristal à CLEs hybrides (potentiel flottant et masse, sur les deux faces). Cette dernière configuration a un comportement dispersif très proche à celui du cristal mis à la masse ; on attend qu'une combinaison de ces deux motifs dans un cristal à trois blocs va induire quasi exclusivement un repliement des courbes de dispersion, sans variations significatives de la position des bandes dans l'espace (f, k) .

Effectivement, le calcul de la structure de bandes pour le cristal avec une

cellule composée de trois blocs, deux hybrides (potentiel flottant en face supérieure et masse en face inférieure) et le troisième mis à la masse de deux côtés, est illustré Figure 5.3(b) en courbe continue et confirme cette hypothèse. La ZB étant raccourcie d'un facteur de 3 (le paramètre de maille devient $a = 3a_0$), des repliements des structures initiales sont attendus aux positions $1/3$ et $2/3$ de la demi-zone de Brillouin ($k_1 > 0$ ou $k_1 < 0$), indiquées par les lignes verticales pointillées en Figure 5.3(a). En effectuant cette opération sur la courbe de dispersion du cristal monobloc hybride (courbe bleue de la partie (a) de la Figure), on obtient la courbe pointillée en bleu tracée dans la partie (b) qui se compare très bien au diagramme de dispersion de cristal à trois blocs. Évidemment, des interactions sont reproduites entre les bandes aux points de croisement entre elles en ouvrant des gaps d'hybridation étroits. Ceci est normal, car le cristal à trois blocs a une symétrie basse et favorise les évitements (pour rappel, les bandes de même symétrie qui se croisent doivent se répulser). La vitesse effective pour ce cristal $c_{\text{eff}} = 3085$ m/s, est encadrée par celles des cristaux monoblocs contenant des CLEs à potentiel flottant (une ou deux faces) ou masse, présentées dans la partie (a) de la Figure.

Le diagramme de dispersion du cristal à trois blocs, illustré Figure 5.3(b), sera notre point de référence pour l'analyse des propriétés dispersives sous le phénomène de non-réciprocité, activé par la modulation des CLEs appliquées. Une analyse rapide à ce point permet de classifier l'origine des bandes observées dans cette fenêtre fréquentielle d'étude. Le mode A_0 est replié aux alentours de 0.19 MHz et 0.85 MHz. Ensuite, le mode S_0 se replie vers 0.48 MHz induisant un gap de Bragg étroit. Enfin le mode A_1 dont la fréquence de coupure est aux alentours de 0.51 MHz induit un gap de Bragg vers 0.73 MHz suivant son repliement aux bords de la ZB.

L'image décrite auparavant concerne les cristaux infinis, mais lors d'une situation expérimentale, nous sommes confrontés à des échantillons de taille finie, comme par exemple la configuration présentée Figure 5.1. Dans ce cas-là le cristal n'est plus infini : un nombre fini des périodes est présent et, strictement parlant, la structure de bandes (voir Figure 5.3(b)) n'est plus représentative des modes propres du système. Une alternative consiste à appliquer une FFT2D sur les signaux spatio-temporels mesurés expérimentalement ou alors calculés par éléments finis pour le cristal fini constitué de 40 blocs sur lesquels des CLEs périodiques sont appliquées. Le cristal est soumis à une excitation à son extrémité (électrode n°1, côté gauche, Figure 5.1) de type impulsionnel et la FFT2D appliquée aux signaux $V(x_n, t)$ produit une image dans l'espace $V(f, k_1)$, dont les valeurs maximales devraient approcher la position des différentes modes propres du cristal infini. Évidemment dans la représentation $V(f, k_1)$ du cristal fini, certains branches restent inactives et/ou d'autres sont déplacées par rapport à la structure de bandes du cristal fini, ceci est dû au fait que de principe tous les modes ne sont pas excités par un certain type d'excitation, et d'autre part les effets de taille finie sont susceptibles de provoquer —entre autres— des déviations. La représentation $V(f, k_1)$ obtenue par FFT2D à partir des signaux

expérimentaux $V(x_n, t)$ avec un seul point de mesure de potentiel par électrode est affichée sur la Figure 5.4(a).

La fenêtre d'étude s'étend à la 2^{ème} ZB, $k_1 \in [-\frac{2\pi}{a}, -\frac{\pi}{a}] \cup [\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}]$; on observe deux branches S_0 ayant une vitesse de groupe positive, d'ordre de diffraction $m = -1$ (centre $k_1 = -\frac{2\pi}{a}$) et $m = 0$ (centre $k_1 = 0$), bien visibles, et deux branches S_0 ayant une vitesse de groupe négative, d'ordre de diffraction $m = +1$ (centre $k_1 = \frac{2\pi}{a}$) et $m = 0$ (centre $k_1 = 0$), un peu moins prononcées. On remarque que les modes S_0 sont généralement plus redressés par rapport à ceux obtenus par simulation FEM (courbes en pointillés bleus) d'un facteur d'étirement fréquentiel de 1.068; la courbe rouge représente la branche S_0 simulée d'ordre $m = 0$ et de vitesse de groupe positive après application de ce facteur d'étirement. La branche A_1 est aussi observée, mais avec des amplitudes plus faibles, conservant le même décalage (facteur 1.068) par rapport aux simulations.

Pour reproduire plus fidèlement les conditions expérimentales dans les simulations FEM, on procède à une simulation qui applique la même procédure : FFT2D sur les signaux $V(x_n, t)$ obtenus numériquement après excitation mécanique sur l'électrode $n = 1$ de la plaque de taille finie possédant 48 électrodes (Figure 5.1), participant toutes au cristal, contrairement au dispositif expérimental. Le résultat $V(f, k_1)$ est illustré Figure 5.4(b) et comparé avec les courbes de dispersion du cristal infini (courbes bleues). Un très bon accord entre les deux représentations numériques, concernant la position des différents modes, confirme l'hypothèse que l'on peut dorénavant utiliser cette procédure de calcul pour obtenir des cartographies $V(f, k_1)$ théoriques pour des cristaux de taille finie. Par contre, par rapport à une structure de bandes classique, la représentation $V(f, k_1)$ numérique a l'avantage d'illustrer l'allumage des différents modes, se rapprochant ainsi de l'image expérimentale; d'ailleurs, elle présente plus ou moins les mêmes caractéristiques sur l'allumage des branches, comme le résultat expérimental (Figure 5.4(a)). Par conséquent on adoptera dorénavant cette procédure de traitement sur les signaux numériques pour l'étude des systèmes modulés.

5.4 Système non-réciproque : réalisation

5.4.1 Dispositif expérimental de commande des CLEs

Le dispositif expérimental utilisé pour réaliser un contrôle dynamique des propriétés du CP a été présenté au chapitre 2. Le micro-contrôleur Teensy 3.6 nous permet de commander en temps réel l'état des interrupteurs (Figure 5.5). Ces derniers, suivant leur état ouvert ou fermé, relie chacune des électrodes à une masse au travers d'une impédance. Le micro-contrôleur est programmé en langage C++, il nous faut dans un premier temps vérifier que la réponse des interrupteurs est bien conforme au contrôle dynamique souhaité.

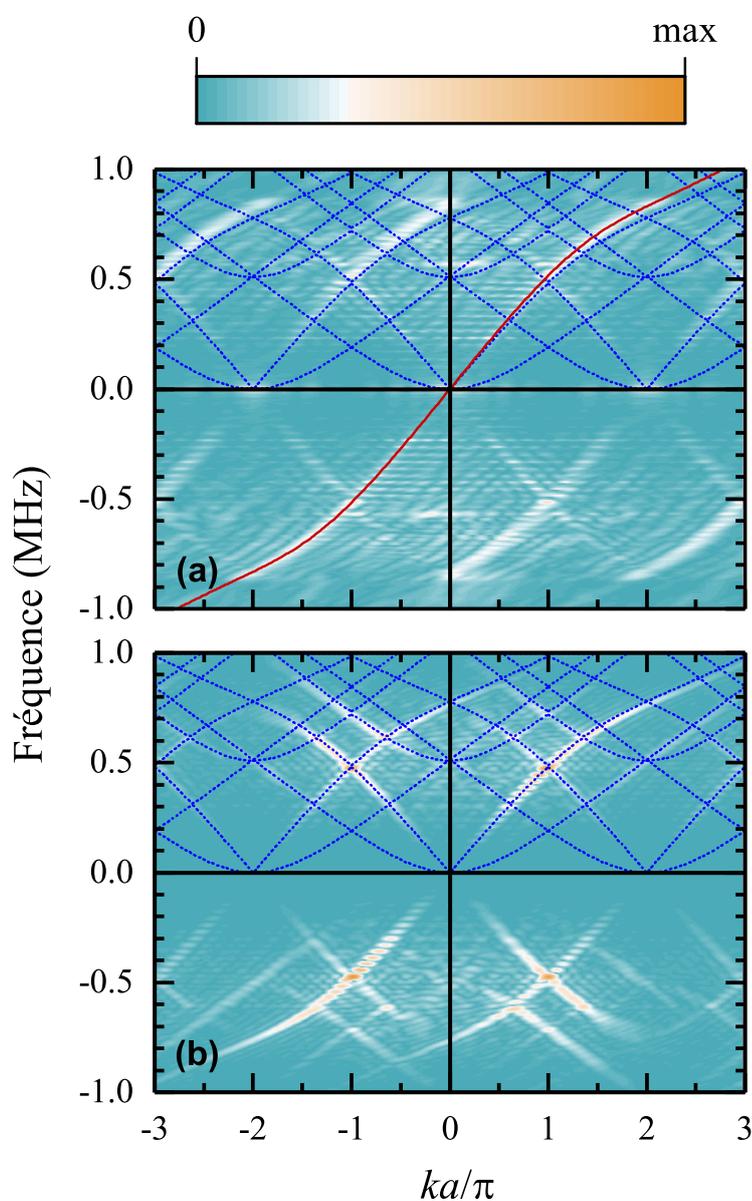


Figure 5.4 – (a) Diagramme de dispersion expérimental du cristal fini représenté en Figure 5.1 (les 40 électrodes n° 9 à 48 de face supérieure sont soumis à des CLEs d’une période de 3 mm dont 2 blocs en potentiel flottant et 1 mis à la masse) obtenu par FFT2D des signaux spatio-temporels. (b) Diagramme de dispersion calculé par éléments finis (les 48 électrodes de la face supérieure sont soumis aux CLEs d’une période de 3 mm dont 2 blocs en potentiel flottant et 1 mis à la masse). Les courbes en pointillés bleus reproduisent la structure des bandes du cristal infini à trois cellules, illustrée Figure 5.3(b) et la courbe en rouge la correction fréquentielle effectuée d’un facteur de 1.068 (voir texte).

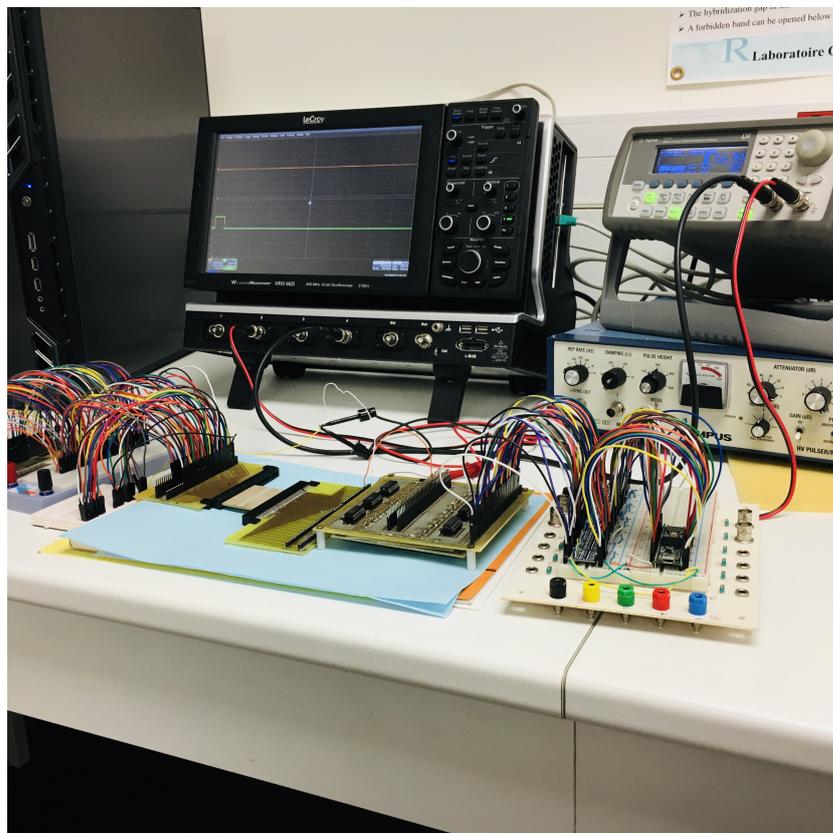


Figure 5.5 – Photographie d'ensemble du dispositif expérimental utilisé pour le contrôle dynamique du CP piézoélectrique. Différentes cartes sont connectées entre elles afin de contrôler les conditions aux limites électriques sur les électrodes du CP inséré dans les connecteurs PCI.

Temps de commutation des interrupteurs

Dans cette section, nous souhaitons évaluer le comportement dynamique des interrupteurs. L'objectif est d'obtenir une propagation des CLEs le long de la plaque piézo-phononique à des vitesses de modulation C_m fixées. Pour vérifier les durées d'ouverture et de fermeture des interrupteurs conformément aux séquences programmées sur le micro-contrôleur, nous utilisons un montage pont diviseur de tension présenté Figure 5.6. L'interrupteur est placé en parallèle d'une résistance, la mesure de tension donnera une image de l'état de l'interrupteur. La carte Teensy 3.6 est équipée d'un microprocesseur ARM Cortex M4 cadencé à 180 MHz. La vitesse d'horloge est un point clef pour le traitement des instructions, nous verrons par la suite que le langage utilisé, langage interprété (C++) ou langage machine, est aussi déterminant.

Le pont diviseur mis en place permet de mesurer la tension à l'entrée des interrupteurs et de donner une image de la commande logique (état bas ou haut)

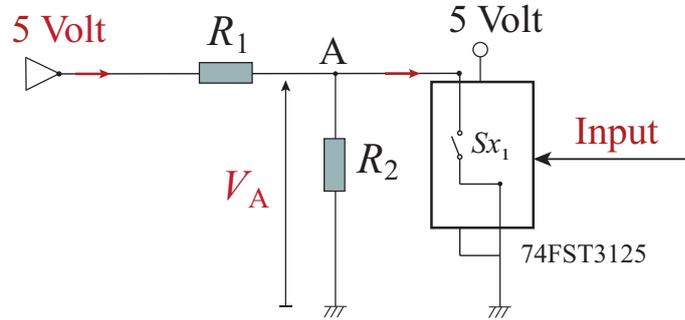


Figure 5.6 – Schéma du pont diviseur utilisé pour la mesure des tensions sur l'interrupteur.

envoyée par la carte Teensy. Il est composé de deux résistances connectées en série de valeur $R_1 = R_2 = 540 \Omega$. Une tension d'entrée $V = 5 \text{ Volt}$ est appliquée aux bornes du pont diviseur et nous mesurons à l'oscilloscope la tension V_A . Les tensions mesurées sont représentées sur la Figure 5.7. Lorsque la commande logique envoyée à l'interrupteur par la carte Teensy est à l'état bas $V_{input} = 0$, l'interrupteur se ferme et la tension mesurée V_A est nulle. Inversement un état haut en entrée $V_{input} = 3.2 \text{ V}$ entraîne l'ouverture de l'interrupteur (la tension $V_A = 2.5 \text{ V}$), l'électrode est isolée au potentiel flottant. A chaque changement d'état de l'interrupteur, nous pouvons observer un signal oscillant amorti qui se superpose à la tension rectangulaire. Ce signal parasite est associé à une résonance électrique de type LC , associée à une capacité et inductance parasites du montage (couplages capacitifs entre pistes, inductance propre des fils reliant les cartes, etc....).

5.4.2 Modélisation par éléments finis

Au chapitre 2, nous avons présenté les deux types d'études par éléments finis utilisés au cours de ce travail de thèse. La première est l'analyse modale, qui nous permet d'obtenir les modes propres d'une structure infinie et dans le cas d'un milieu périodique d'en déduire la structure de bandes. La seconde est l'analyse transitoire ou temporelle, qui se rapproche plus de l'expérience, elle nous permet de suivre l'évolution en fonction du temps de n'importe quelle grandeur physique, mécanique ou électrique, sur le CP piézo-électrique soumis à une source d'excitation pouvant être une contrainte ou un potentiel électrique.

Dans le cas d'une modulation spatio-temporelle des propriétés du CP, il n'est pas possible d'envisager une analyse modale. Dans ce chapitre, nous limiterons donc l'étude numérique par éléments finis à une analyse temporelle telle que décrite au chapitre 2. Il nous faut cependant préciser la procédure utilisée pour simuler les impédances variables connectées aux électrodes du CP.

Les interrupteurs connectés aux électrodes permettent expérimentalement de court-circuiter les électrodes à la masse ou d'isoler ces électrodes en les lais-

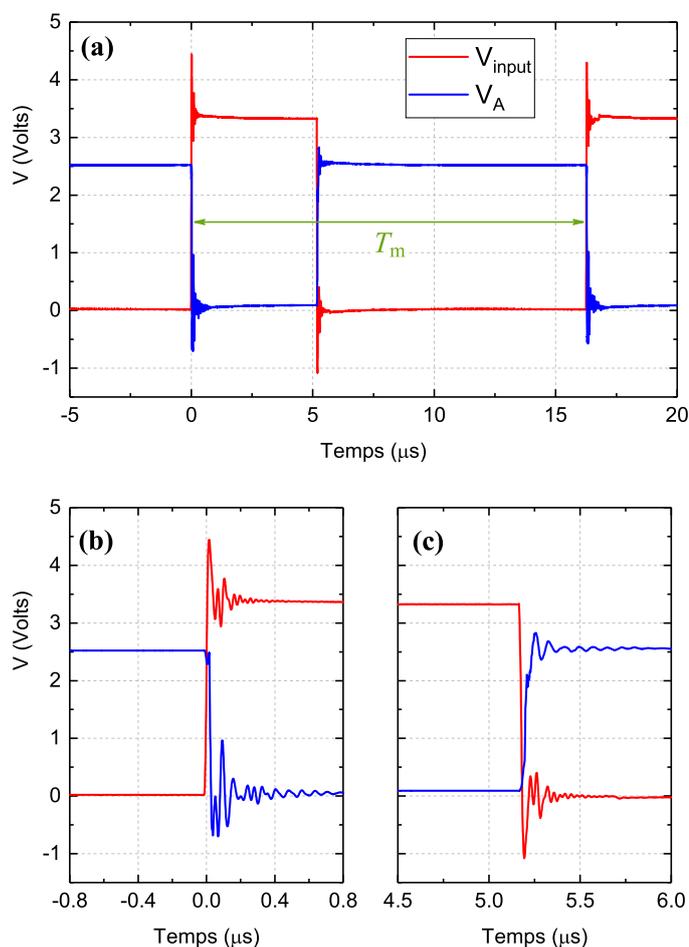


Figure 5.7 – (a) La séquence des états expérimentaux des trois électrodes représentant la variation temporelle des tensions mesurées sur l'interrupteur. (b) Un détail de (a) pour la phase transitoire de passage d'un état à l'autre pour le premier interrupteur, à titre d'exemple.

sant au potentiel flottant. Dans les simulations FEM, nous remplaçons les interrupteurs par des résistances variables qui commuteront d'une valeur $R_{\text{min}} = 1 \Omega$ à une valeur $R_{\text{max}} = 10 \text{ G}\Omega$ pour simuler respectivement l'interrupteur ouvert ou fermé (Figure 5.8). Afin d'éviter d'introduire des discontinuités, sources d'instabilités numériques dans le calcul, une variation continue de R sera considérée comme indiqué Figure 5.9. Cette fonction de lissage `f1c2hs()`, prédéfinie dans Comsol, produit un Heaviside dont les première et seconde dérivées sont continues.

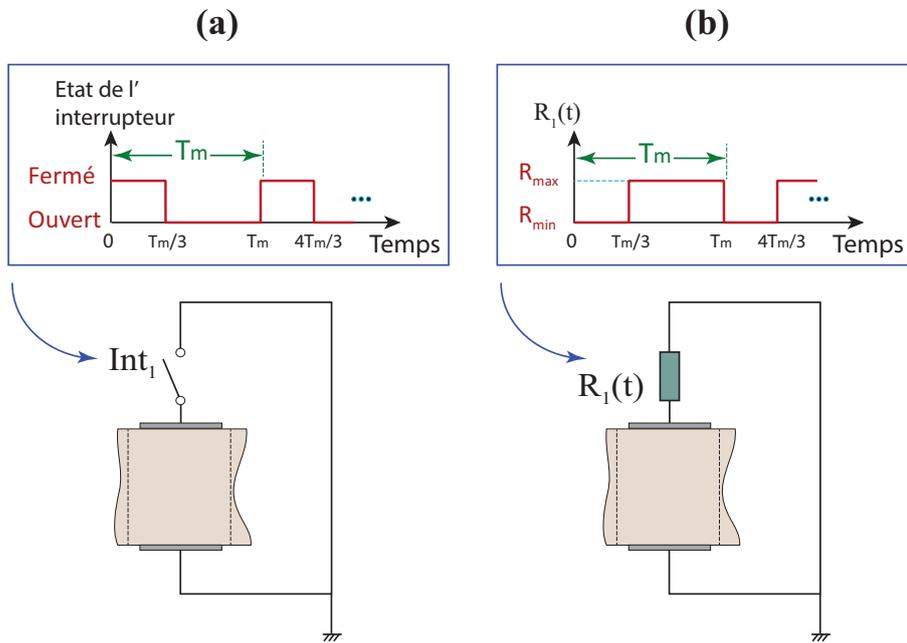


Figure 5.8 – (a) Schéma d'une cellule élémentaire modulée et (b) sa représentation équivalente avec une seule résistance variant dans le temps. L'interrupteur est périodiquement ouvert et fermé.

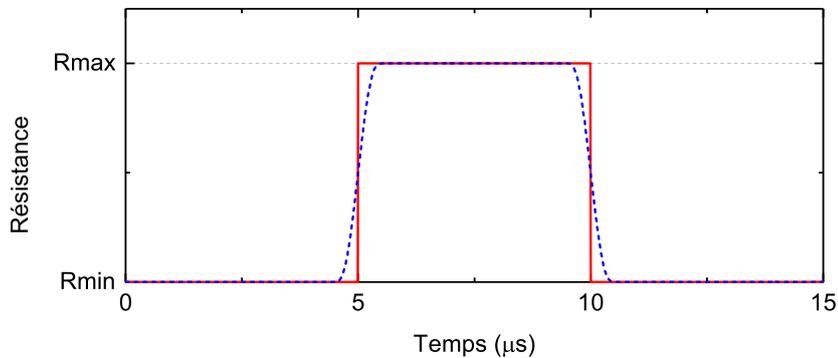


Figure 5.9 – La fonction de commutation lissée pour obtenir des transitions plus douces entre deux états.

5.5 Système non-réciproque : résultats

En appliquant la procédure de modulation présentée auparavant sur le cristal à trois cellules dont les courbes de dispersion sans modulation (statiques) sont illustrées Figure 5.4, on obtient des réponses assez complexes, dépendant clairement de la vitesse de modulation C_m , comme en atteste la Figure 5.10. En colonne de gauche sont représentés les FFT2D expérimentales des $V(x_n, t)$ et en colonne de droite celles calculées par éléments finis, pour trois vitesses de

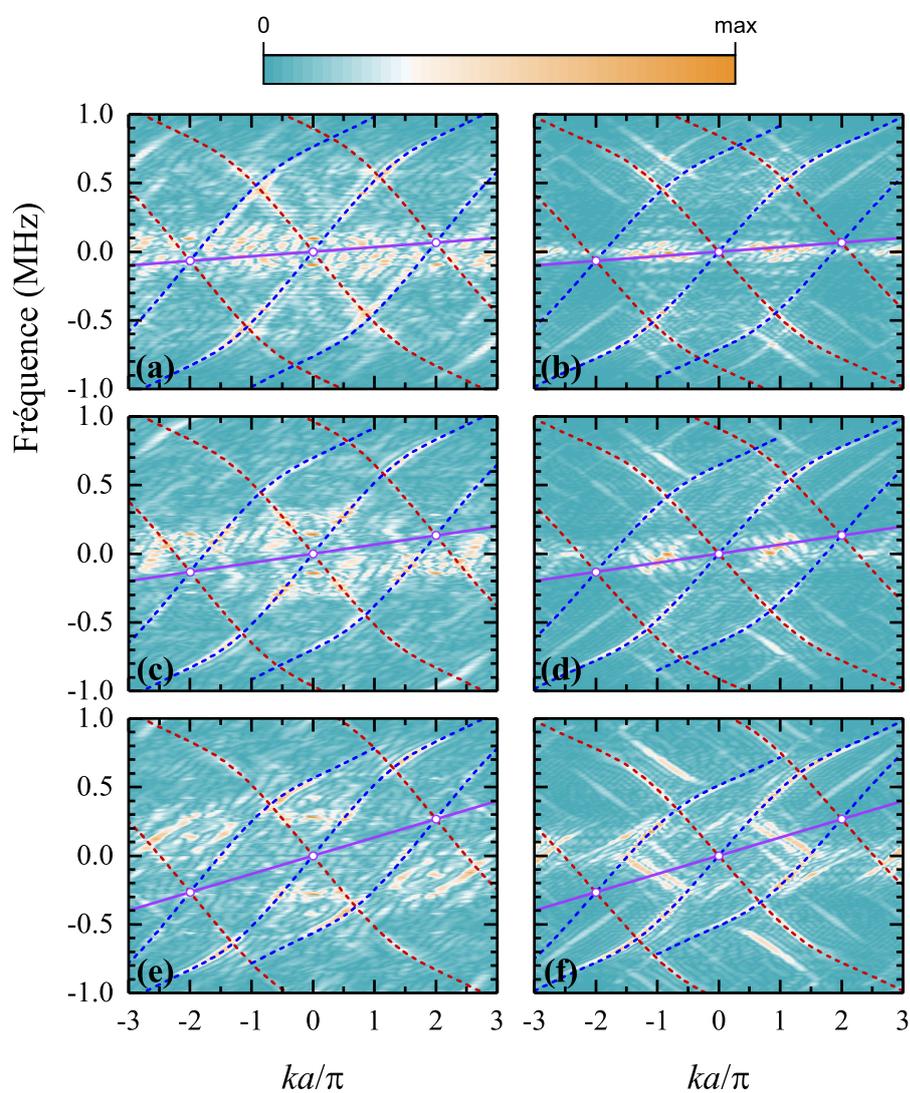


Figure 5.10 – Diagramme de dispersion du cristal, illustré Figure 5.4, mais avec modulation des CLEs. Colonne de gauche : expérience ; colonne de droite : simulations correspondantes. Trois vitesses de modulation sont illustrées : (a),(b) $C_m = 200$ m/s ; (c),(d) $C_m = 400$ m/s ; (e),(f) $C_m = 800$ m/s. Les lignes pontillées représentent les ordres de modulation $n = -1, 0, 1$ de la branche S_0 de vitesse de groupe positive (en bleu) ou négative (en rouge). La ligne en violet relie les images du point $(0, 0)$ de la courbe $n = 0$.

modulation différentes $C_m = 200, 400, 800$ m/s. On se focalise, exclusivement pour l'analyse de ces tracés sur le mode S_0 . De façon générale, on observe la présence

- d'une bande basse fréquence dense pour les faibles vitesses C_m , s'étalant

dans l'espace (f, k) lorsque C_m augmente, due principalement à l'interférence des signaux de modulation directs et réfléchis.

- d'un ensemble de bandes attribuées sans équivoque au mode S_0 et à ses diverses répliques obéissant à un déplacement $(\delta f_n, \delta \kappa_n)$ avec $\delta \kappa_n = ng$, $\delta f_n = nf_m = C_m \delta \kappa_n$, où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $g = \frac{2\pi}{a_m}$ étant le vecteur d'onde réciproque élémentaire et $f_m = \frac{C_m}{a_m}$, $a_m = 3a_0$ (voir schéma explicatif en Figure 5.11).

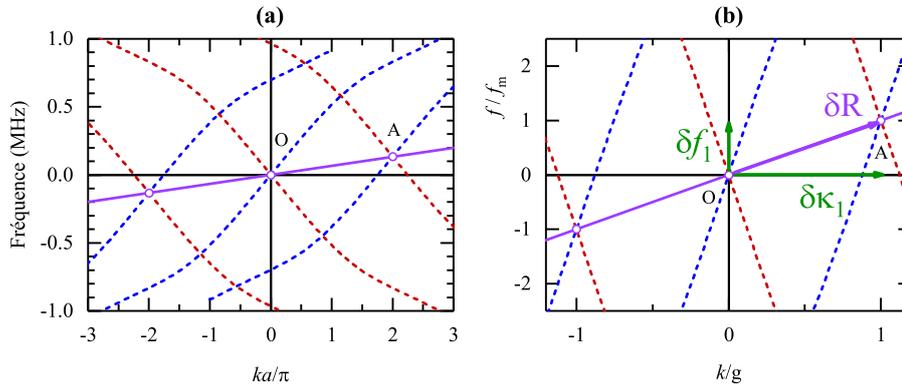


Figure 5.11 – Schéma explicatif pour la réplification Figure 5.10 de la trajectoire de S_0 statique : (a) les ordres $0, \pm 1$ répliquées pour le cas de $C_m = 400$ m/s; (b) un détail de (a) en unités réduites illustrant le déplacement élémentaire de S_0 d'un vecteur $\delta R = (\delta f_1 = f_m, \delta \kappa_1 = g)$.

En répliquant la trajectoire S_0 statique traduite de $(\delta f_n, \delta \kappa_n)$ pour $n = \pm 1$ on obtient une excellente coïncidence avec les trajectoires expérimentales ou simulées, répliques du fondamental de la S_0 . La ligne en violet relie les images du point $(0, 0)$ de la courbe fondamentale ($n = 0$) et est indicative de la valeur algébrique de la vitesse de la modulation. On peut imaginer tracer d'autres lignes parallèles à celle-ci comme guides pour la translation d'autres ordres. On peut noter que —contrairement à l'expérience— les simulations révèlent l'existence d'excitation de la branche A_1 et de ses répliques modulées qui seront analysées plus loin.

L'image décrite précédemment est également confirmée dans le cas de vitesses de modulation négatives. Un exemple comparant les vitesses $C_m = -400$ m/s et $C_m = 400$ m/s est donné Figure 5.12.

Lorsqu'on contraint une excitation antisymétrique de la plaque lors des simulations par éléments finis, on obtient une image des courbes de dispersions pour le cristal modulé restreinte aux modes A_0 (très faiblement) et A_1 (principalement), illustrés en Figure 5.13 pour les vitesses de modulation $C_m = -400$ m/s, $C_m = 0$ m/s, et $C_m = 400$ m/s. En suivant la même méthode de réplification que pour le mode S_0 (Figure 5.10), les ordres de modulation $n = 0, \pm 1$ du mode A_1 statique (dessiné en pointillés bleus en Figure 5.13(b)) sont clairement identifiés.

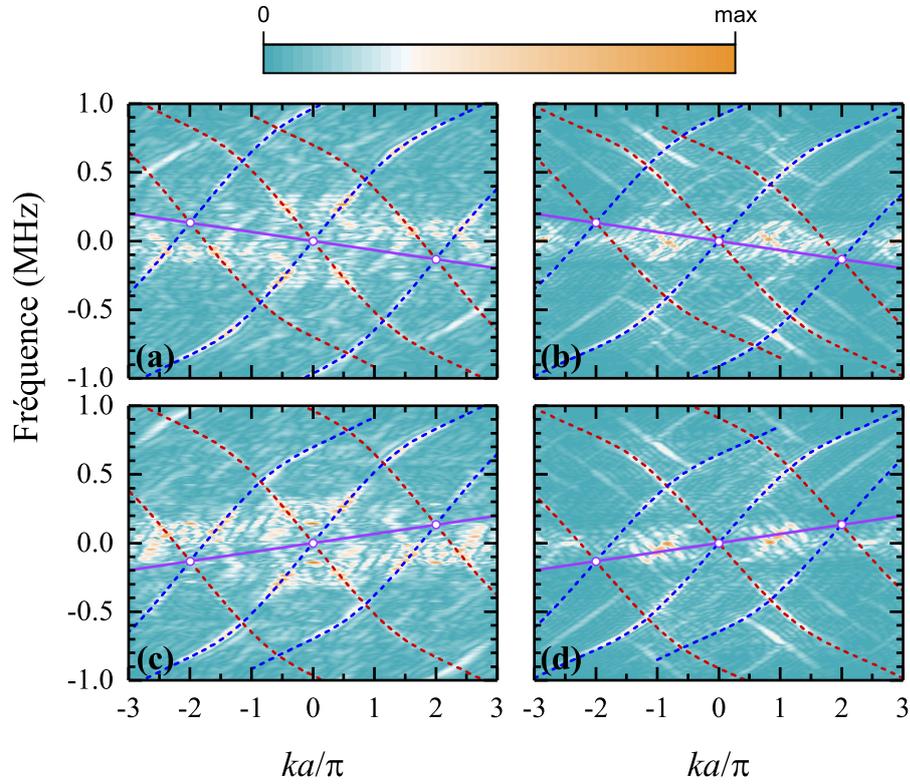


Figure 5.12 – Figure analogue à la Figure 5.10 : pour (a),(b) $C_m = -400$ m/s et (c),(d) $C_m = 400$ m/s reproduits de cette Figure à titre de référence.

On peut déceler par ailleurs la présence de l'ordre de modulation correspondant à une vitesse apparente $-2C_m$, voir courbe en rouge sur le tracé Figure 5.13(a). Par cohérence avec l'expression du vecteur $(\delta f_n, \delta \kappa_n)$ ce motif de modulation doit être issu du déplacement du mode statique d'ordre -3 de $(-2f_m, +2g)$.

Quelle que soit la vitesse de modulation, on remarque de nouveau l'apparition d'une zone basse fréquence très riche en information, dont l'analyse se révèle compliquée sans outils efficaces de séparation des différentes contributions. Le choix de la forme rectangulaire de modulation, imposé par la commutation, contribue sans aucun doute à cette difficulté.

5.6 Conclusion

Ce dernier chapitre a été consacré à la conception et réalisation d'un système de modulation des CLEs d'une plaque phononique piézoélectrique qui a permis d'observer le déplacement large-bande de certaines branches de modes de Lamb en dépendance de la vitesse algébrique de modulation : expérimentalement, la translation du mode S_0 est détectée, mais on a pu également montrer qu'il

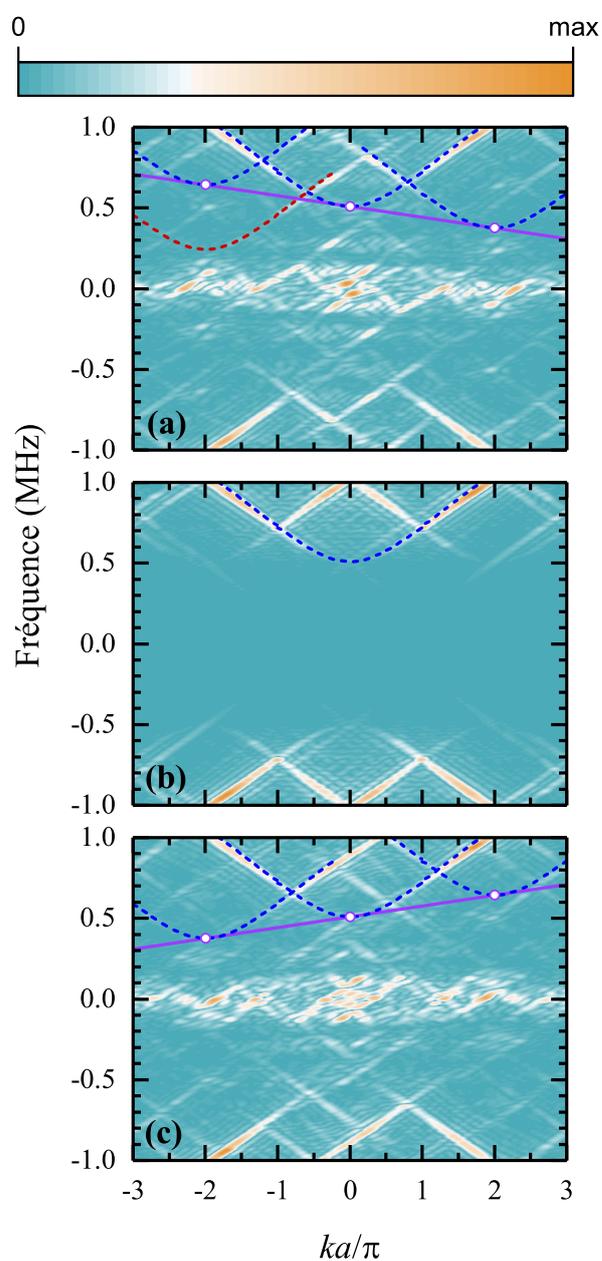


Figure 5.13 – Diagramme de dispersion par FFT2D des simulations par éléments finis du cristal fini pour (a) $C_m = -400$ m/s, (b) $C_m = 0$ m/s, et (c) $C_m = 400$ m/s, après application d'une excitation antisymétrique. Les lignes pointillées bleues représentent les ordres de modulation $n = -1, 0, 1$ de la branche A_1 du cristal non modulé, déplacées selon la ligne en violet; la ligne pointillée rouge décrit le résultat de translation d'ordre 2 du mode A_1 statique d'ordre -3 .

est possible de translater un mode antisymétrique, tel que le mode A_1 , lorsque une excitation appropriée est choisie. La relation existant entre position des bandes statiques et celle de bandes déplacées après modulation obéit à une règle vectorielle très simple dans l'espace (f, k) incorporant la vitesse de modulation.

Conclusions et Perspectives

Dans ce travail de thèse nous avons cherché à obtenir une modulation temporelle des propriétés d'un cristal phononique piézoélectrique afin de contrôler la propagation de modes guidés de type Lamb. Ceci nécessitait dans un premier temps de développer un dispositif expérimental permettant une agilité dans la gestion des conditions aux limites électriques (CLEs) utilisées pour modifier les propriétés effectives de la plaque piézoélectrique, siège de la propagation ultrasonore. Ce dispositif basé sur l'utilisation d'un microcontrôleur a été caractérisé et nous l'avons testé sur quelques configurations statiques. Il a notamment été montré que l'ensemble du dispositif de contrôle (connecteurs, interrupteurs, etc...) introduisait peu de signaux parasites dans le cristal étudié. D'un point de vue électrique, l'effet le plus notable est l'ajout d'une capacité parasite associée aux connecteurs utilisés pour imposer ou relever les potentiels électriques, la résistance électrique des interrupteurs étant ici négligeable. La première configuration traitée dans les chapitres 2 et 3 est la mise à la masse des électrodes présentes sur les surfaces du CP. Nous avons exposé les différents modèles numérique et analytique utiles à la compréhension des phénomènes physiques observés expérimentalement. Une grande partie de ce travail préliminaire avait pour but d'identifier les différents paramètres électriques, mécaniques et piézoélectriques du CP. La complexité des couplages et le grand nombre de paramètres mis en jeu sur ce type de CP, rend extrêmement difficile cette détermination. Une approche empirique avec ajustement des courbes de dispersions théoriques sur les courbes expérimentales a été retenue. Dans le futur, il serait souhaitable d'optimiser cet ajustement en prenant en compte un plus grand nombre de modes sur une gamme de fréquences plus étendue. L'utilisation d'algorithmes d'optimisation performants, exploitant le problème direct décrit dans le chapitre 2, devrait également améliorer le processus de détermination des constantes physiques associées au CP. Dans le chapitre 3, nous avons caractérisé le mode purement électrique propagatif présent sur notre CP lorsque des inductances sont connectées aux électrodes. Ce mode électrique a déjà été observé indirectement dans des études précédentes du fait des couplages et de la présence de bandes interdites d'hybridation résultant de ce couplage. Pour la première fois, nous avons parfaitement isolé et caractérisé expérimentalement ce mode en dépolarisant le cristal phononique piézoélectrique. Dans le chapitre 4, plusieurs

résultats originaux ont été produits montrant la richesse de modulation possible en utilisant des charges d'impédances inductives connectées au CP. Dans le cas d'inductances connectées alternativement sur chacune des faces du CP, la présence d'un mode électrique se manifeste par la présence d'une courbe de dispersion hyperbolique dans la structure de bandes. Ce mode clairement mis en évidence théoriquement et expérimentalement se couple fortement au mode de Lamb fondamental S_0 . Ce chapitre se termine par le cas de charges d'impédance reliant des électrodes juxtaposées. Ce cas remarquable fait apparaître un nouveau mode sans fréquence de coupure. Ce mode peut être utilisé efficacement pour moduler les vitesses des modes de Lamb fondamentaux S_0 et A_0 à basses fréquences. L'ensemble des branches électriques supplémentaires liées à la présence des inductances connectées a été modélisé par des schémas équivalents électriques en parfait accord avec les observations expérimentales. Le cinquième et dernier chapitre de cette thèse traite de la modulation spatio-temporelle du CP. La modulation choisie a un motif élémentaire construit sur trois cellules du CP et nous donnons ici les résultats pour des vitesses de modulation inférieures à celles des modes dominants dans la gamme de fréquences étudiée : le mode symétrique fondamental S_0 et le mode antisymétrique A_1 . Une translation vectorielle des courbes de dispersion dans l'espace (f, k) est mise en évidence et observée à la fois expérimentalement et sur les simulations FEM, dissymétrisant la structure de bandes. Ceci offre la possibilité d'obtention de bandes interdites directionnelles même si nous ne l'avons pas clairement mis en évidence ici.

Au cours de ces travaux de thèse, nous avons donc mis en place un dispositif de commande permettant de moduler en espace et en temps les propriétés d'un CP piézoélectrique sur lequel se propagent des ondes de Lamb. La complexité des phénomènes en jeu dans le système étudié, nous a amené à nous intéresser à de nombreuses configurations statiques avant d'aborder le régime dynamique. Les premiers résultats obtenus en dynamique sont encourageants et soulèvent de nombreuses questions. Une des problématiques fondamentales est de renforcer la sensibilité des ondes de Lamb aux modulations électriques de surface afin de transférer suffisamment d'énergie dans les ordres supérieurs de diffraction qui seront modulés efficacement. Nous avons vu que l'introduction d'inductances en régime statique permettait d'observer des couplages importants et d'hybrider les modes de Lamb fondamentaux aux modes électriques présents sur le CP. En régime dynamique, l'introduction d'inductance variable semble être une piste prometteuse. Les régimes de modulations soniques et supersoniques sont également à explorer. Concernant les ondes de Lamb, il est évident qu'il existe une telle richesse en termes de dispersion qu'il est difficile de connaître avec certitude le régime de modulation effectif. Enfin, le développement d'outils théoriques permettrait d'interpréter les observations expérimentales et numériques, afin d'être plus à même de maîtriser les non-linéarités et d'anticiper les instabilités du dispositif liées au couplages spatio-temporels.

Annexe A

Paramètres PZ26

Table A.1 – Paramètres caractéristiques pour une piézocéramique de symétrie $6mm$ PZ26 (Navy VI) utilisée dans cette étude. Les valeurs de référence selon le fabricant [56] (colonne de gauche) sont comparées à celles obtenues après caractérisation expérimentale (colonne de droite), ces dernières étant notées seulement en cas de différence.

Paramètre	Symbole	Valeur	
Coefficients élastiques c_{pq}^E [GPa]	c_{11}^E	114.0	
	c_{12}^E	75.7	
	c_{13}^E	72.4	70.0
	c_{33}^E	111.0	107.0
	c_{44}^E	26.3	20.0
	c_{66}^E ¹	19.2	
Coefficients piézoélectriques e_{ip} [C m ⁻²]	e_{15}	16.2	14.2
	e_{31}	-2.92	
	e_{33}	23.4	20.3
Coefficients de permittivité relative ϵ_{pq}^S	ϵ_{11}^S	2120.	
	ϵ_{33}^S	1980.	
Masse volumique [kg m ⁻³]	ρ	7780.	7510.

¹ $c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)$.

Annexe B

Courbes de dispersion expérimentales par identification paramétrique (AR2D)

B.1 Principe

Les signaux acquis, numérisés, puis traités par transformée de Fourier discrète/rapide (tFd/FFT) peuvent être sévèrement affectés par le phénomène de Gibbs dès lors qu'ils sont fenêtrés. Puisque ces signaux, dépendants des positions $x_l = l\delta x$ ($0 \leq l \leq L - 1$) et des instants $t_k = k\delta t$ d'acquisition ($0 \leq k \leq K - 1$), sont des réponses libres, et par conséquent infinies, d'un système excité en régime impulsionnel et admettant des modes propres de propagation qu'on peut représenter par des collections de couples fréquence-nombre d'onde notés (ν_m, k_n) , tous deux complexes, valeurs échantillonnées associés aux modes propres de Lamb/électromagnétiques prédits et continus le long des trajectoires des courbes de dispersion théoriques. Un des représentants de ces multiples modes propres (ν_m, k_n) échantillonnés doit revêtir une forme de signal sinusoidal amorti au point (t_k, x_l)

$$s_{m,n,k,l} = S_{m,n} e^{i(2\pi\nu_m t_k - k_n x_l)}, \quad (\text{B.1.1})$$

de double indice m, n , si bien que le signal global au même point (t_k, x_l) est

$$s_{k,l} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N s_{m,n,k,l}. \quad (\text{B.1.2})$$

Un tel signal obéit naturellement à une équation de récurrence à deux indices de la forme

$$s_{k,l} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} s_{k-m,l+n-N/2}, \quad (\text{B.1.3})$$

correspondant à la réponse d'un système autorégressif à deux dimensions [66], que l'on désignera dans la suite par le terme "AR-2D", de coefficients inconnus

$a_{m,n}$, $((m, n) \in \llbracket 1, M \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket)$. Le terme autorégressif signifie que le signal échantillonné dépend en une position donnée des M collections d'échantillons immédiatement précédents, en nombre $N + 1$ le long des abscisses spatiales, équirépartis à raison de $N/2$ à gauche et à droite de l'échantillon considéré. A partir de cette hypothèse, le but recherché est l'obtention d'un spectre de Fourier discret. Dans les équations précédentes, $s_{k,l}$ représentait jusqu'à présent la solution mathématique idéale (B.1.2) de l'équation (B.1.3). A partir de maintenant, supposons que les $s_{k,l}$ sont les échantillons expérimentaux. L'équation (B.1.3) est alors modifiée de la façon suivante

$$s_{k,l} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} s_{k-m, l+n-N/2} + e_{k,l}, \quad (\text{B.1.4})$$

où, au début de la démarche, les coefficients $a_{m,n}$ sont inconnus, et $e_{k,l}$ est le biais entre le membre de gauche et de droite de cette équation lors de l'estimation des coefficients $a_{m,n}$. Afin d'obtenir la transformée de Fourier discrète $\hat{S}_{p,q}$ de $s_{k,l}$ à la fréquence temporelle $p\delta\nu$ et pour le nombre d'onde $q\delta\kappa$, on calcule la transformée de Fourier discrète spatio-temporelle formelle du membre de droite et du membre de gauche de (B.1.4).

$$\begin{aligned} \hat{S}_{p,q} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} s_{k-m, l+n-N/2} e^{-i2\pi p\delta\nu k\delta t} e^{+iq\delta\kappa l\delta x} \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e_{k,l} e^{-i2\pi p\delta\nu k\delta t} e^{+iq\delta\kappa l\delta x} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} s_{k-m, l+n-N/2} e^{-i2\pi p\delta\nu k\delta t} e^{+iq\delta\kappa l\delta x} + \hat{E}_{p,q} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} e^{-i2\pi p\delta\nu m\delta t} e^{+iq\delta\kappa(-n+N/2)\delta x} \\ &\quad \times \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} s_{k',l'} e^{-i2\pi p\delta\nu k'\delta t} e^{+iq\delta\kappa l'\delta x} + \hat{E}_{p,q} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} e^{-i2\pi p\delta\nu m\delta t} e^{+iq\delta\kappa(-n+N/2)\delta x} \hat{S}_{p,q} + \hat{E}_{p,q} \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

avec

$$\hat{S}_{p,q} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} s_{k,l} e^{-i2\pi p\delta\nu k\delta t} e^{+iq\delta\kappa l\delta x}, \quad (\text{B.1.6})$$

ainsi que la transformée de Fourier discrète du biais

$$\hat{E}_{p,q} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e_{k,l} e^{-i2\pi p\delta\nu k\delta t} e^{+iq\delta\kappa l\delta x}. \quad (\text{B.1.7})$$

A partir de l'équation (B.1.5) on aboutit à la forme finale de la transformée $\hat{S}_{p,q}$ de $s_{k,l}$,

$$\hat{S}_{p,q} = \frac{\hat{E}_{p,q}}{1 - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} e^{-i2\pi p \delta \nu m \delta t} e^{+iq \delta \kappa (-n+N/2) \delta x}}. \quad (\text{B.1.8})$$

Elle dépend uniquement de la connaissance des paramètres $a_{m,n}$ et des coefficients d'amplitude $\hat{E}_{p,q}$. Il faut donc essentiellement déterminer ces grandeurs pour obtenir le spectre de $s_{k,l}$.

B.2 Estimation des $a_{m,n}$

La recherche des valeurs des coefficients $a_{m,n}$ est un problème classique d'estimation au sens des moindres carrés pour une équation linéaire vis-à-vis de ces paramètres. Il suffit de disposer d'un nombre total de points expérimentaux produisant au moins autant d'équations que d'inconnues, soit en introduisant les vecteurs suivants

$$|s_k\rangle = [s_{k,1} \ \cdots \ s_{k,l} \ \cdots \ s_{k,L}]^t, \quad (\text{B.2.1a})$$

$$|e_k\rangle = [e_{k,1} \ \cdots \ e_{k,l} \ \cdots \ e_{k,L}]^t, \quad (\text{B.2.1b})$$

$$|a_m\rangle = [a_{m,0} \ \cdots \ a_{m,n} \ \cdots \ a_{m,N}]^t, \quad (\text{B.2.1c})$$

$$|A\rangle = \begin{bmatrix} |a_1\rangle \\ \vdots \\ |a_m\rangle \\ \vdots \\ |a_M\rangle \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2.1d})$$

ainsi que la matrice

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix}
 s_{k-1,1-N/2} & \cdots & s_{k-1,1+n-N/2} & \cdots & s_{k-1,1+N/2} & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s_{k-1,l-N/2} & \cdots & s_{k-1,l+n-N/2} & \cdots & s_{k-1,l+N/2} & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s_{k-1,L-N/2} & \cdots & s_{k-1,L+n-N/2} & \cdots & s_{k-1,L+N/2} & \cdots \\
 \\
 s_{k-m,1-N/2} & \cdots & s_{k-m,1+n-N/2} & \cdots & s_{k-m,1+N/2} & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s_{k-m,l-N/2} & \cdots & s_{k-m,l+n-N/2} & \cdots & s_{k-m,l+N/2} & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s_{k-m,L-N/2} & \cdots & s_{k-m,L+n-N/2} & \cdots & s_{k-m,L+N/2} & \cdots \\
 \\
 s_{k-M,1-N/2} & \cdots & s_{k-M,1+n-N/2} & \cdots & s_{k-M,1+N/2} & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s_{k-M,l-N/2} & \cdots & s_{k-M,l+n-N/2} & \cdots & s_{k-M,l+N/2} & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 s_{k-M,L-N/2} & \cdots & s_{k-M,L+n-N/2} & \cdots & s_{k-M,L+N/2} &
 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.2.2})$$

L'équation (B.1.4) déclinée pour un indice k quelconque et pour tous les $l \in \llbracket 1, L \rrbracket$ s'écrit

$$|s_k\rangle = \mathbf{M}_k |A\rangle + |e_k\rangle . \quad (\text{B.2.3})$$

En posant

$$|s\rangle = \begin{bmatrix} |s_1\rangle \\ \vdots \\ |s_k\rangle \\ \vdots \\ |s_{K-1}\rangle \end{bmatrix} , \quad (\text{B.2.4a})$$

$$|e\rangle = \begin{bmatrix} |e_1\rangle \\ \vdots \\ |e_k\rangle \\ \vdots \\ |e_{K-1}\rangle \end{bmatrix} , \quad (\text{B.2.4b})$$

et

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_k \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{K-1} \end{bmatrix} , \quad (\text{B.2.4c})$$

on obtient le système d'équations global

$$|s\rangle = \mathbf{M}|A\rangle + |e\rangle \quad (\text{B.2.5})$$

à résoudre en $|A\rangle$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire en minimisant la fonctionnelle

$$J_{MN} = \langle e|e\rangle = \left| \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1}^L \left(s_{k,l} - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} s_{k-m,l+n-N/2} \right) \right|^2 \quad (\text{B.2.6})$$

vis-à-vis de chacune des composantes $a_{m,n}$ de $|A\rangle$, soit, $\forall (m,n) \in \llbracket 1, M \rrbracket \times \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\frac{\partial J}{\partial a_{m,n}} = 0. \quad (\text{B.2.7})$$

Il en résulte la solution classique qui nécessite une pseudo-inversion de \mathbf{M}

$$|A\rangle = (\mathbf{M}^t \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^t |s\rangle. \quad (\text{B.2.8})$$

La seule difficulté réelle mais également l'inconvénient majeur de cette méthode est de déterminer les ordres M et $N+1$ également inconnus. Ceci nécessite, en principe, de passer en revue toutes les valeurs théoriquement possibles de $M \in \llbracket 1, K \rrbracket$ et de $N \in \llbracket 1, L \rrbracket$. Pour cela on doit déterminer le couple (M, N) optimum qui minimise J_{MN} . On peut cependant réduire drastiquement la recherche des valeurs de (M, N) en utilisant des hypothèses physiques simples ou encore liées au traitement de signal. Tout d'abord en effet, ces valeurs sont directement liées,

- Pour M , au nombre maximum maximorum M_0 de bandes attendu, croisées par toute ligne verticale tracée dans le plan de dispersion (ω, k) (qui en principe est infini mais est pratiquement limité par la bande passante en fréquence du dispositif de génération —en régime impulsionnel— et de capture du signal)
- Pour N , au nombre maximum maximorum N_0 de bandes croisées par toute ligne horizontale tracée dans ce même plan, en pratique, de l'ordre de quelques unités.

Une fois ce décompte (M_0, N_0) effectué, on peut tenter une estimation J_{MN} sur un domaine $(M, N) \in \llbracket M_0 - \delta M, M_0 + \delta M \rrbracket \times \llbracket N_0 - \delta N, N_0 + \delta N \rrbracket$ où δM et δN sont de l'ordre de quelques unités (par exemple $\delta M, \delta N \approx 5$). A partir de ce point, en supposant que les ordres optimaux du système sont déterminés et les coefficients connus, deux possibilités s'offrent,

1. soit calculer directement les amplitudes $\hat{S}_{p,q}$ de transformée en utilisant la relation (B.3.5),
2. soit rechercher d'abord les pôles de $\hat{S}_{p,q}$, autrement dit les solutions de

$$1 - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} e^{-i2\pi p \delta \nu m \delta t} e^{+iq \delta \kappa (-n+N/2) \delta x} = 0. \quad (\text{B.2.9})$$

La deuxième démarche possède beaucoup plus d'inconvénients que la première, si au final, seule l'obtention de courbes de dispersion importe. Le tracé des trajectoires de dispersion à partir des couples (ν_m, k_n) déterminés via (B.2.9) peut être numériquement instable dû à l'incertitude sur l'exactitude des ordres optimaux, à la valeur élevée du produit $M \times N$, à la présence de bruit de mesure, si bien que même de très légères erreurs d'estimation des $a_{m,n}$ à un ordre faible peut provoquer des erreurs à ordre bien plus élevé sur les racines de (B.2.9). De plus, si jamais on surestime légèrement les valeurs des ordres optimaux (M, N) , le tracé résultant du module de $\hat{S}_{p,q}$ sera très peu affecté.

B.3 Calcul opérationnel des $\hat{S}_{p,q}$

Cette façon de procéder pour l'obtention du spectre $\hat{S}_{p,q}$ possède un avantage par rapport à la double tFd. En effet, les pas fréquentiels $\delta\nu$ et en fréquence spatiale δk du spectre résultant seront fixés dans ce cas définitivement par les largeurs de fenêtre d'acquisition $\delta\nu = 1/T$ et $\delta k = 1/X$. L'expression (B.2.9) ne souffre pas du tout de cette inconvénient et on peut choisir les valeurs de $\delta\nu$ et δk aussi faibles que voulues. La raison en est claire : la fenêtre d'acquisition du signal fixe ici uniquement la précision de l'estimation des coefficients du système AR2D qui est un système à réponse impulsionnelle infinie (ou IIR) par nature, contrairement à la TFD qui ignore cette nature infinie de l'extension spatiotemporelle du signal (Gibbs).

Pour optimiser le calcul des $\hat{S}_{p,q}$ sous un logiciel de type Matlab, en supposant le tracé dans le domaine de fréquences temporelles $\llbracket 0, (P-1) \rrbracket \delta\nu$ et spatiales $\llbracket 0, (Q-1) \rrbracket \delta k$, on déclarera les matrices

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} e^{-i2\pi 0\delta\nu 1\delta t} & \dots & e^{-i2\pi 0\delta\nu m\delta t} & \dots & e^{-i2\pi 0\delta\nu M\delta t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{-i2\pi p\delta\nu 1\delta t} & \dots & e^{-i2\pi p\delta\nu m\delta t} & \dots & e^{-i2\pi p\delta\nu M\delta t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{-i2\pi P\delta\nu 1\delta t} & \dots & e^{-i2\pi P\delta\nu m\delta t} & \dots & e^{-i2\pi P\delta\nu M\delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1})$$

pour les termes de phase temporelle intervenant dans (B.3.5),

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} e^{+i0\delta\kappa(-0+N/2)\delta x} & \dots & e^{+iq\delta\kappa(-0+N/2)\delta x} & \dots & e^{+i(Q-1)\delta\kappa(-0+N/2)\delta x} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{+i0\delta\kappa(-n+N/2)\delta x} & \dots & e^{+iq\delta\kappa(-n+N/2)\delta x} & \dots & e^{+i(Q-1)\delta\kappa(-n+N/2)\delta x} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{+i0\delta\kappa(-N+N/2)\delta x} & \dots & e^{+iq\delta\kappa(-N+N/2)\delta x} & \dots & e^{+i(Q-1)\delta\kappa(-N+N/2)\delta x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.2})$$

pour tous les termes de phase spatiale, et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle a_1 | \\ \vdots \\ \langle a_m | \\ \vdots \\ \langle a_M | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,0} & \cdots & & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & a_{m,n} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{M,0} & \cdots & & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3.3})$$

chaque composante du produit matriciel $\mathbf{W} \times \mathbf{A} \times \mathbf{K}$ fournira directement la valeur de la double somme $\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} e^{-i2\pi p \delta \nu m \delta t} e^{+iq \delta \kappa (-n+N/2) \delta x}$ en chaque point $(p, q) \in \llbracket 0, P-1 \rrbracket \times \llbracket 0, Q-1 \rrbracket$ du plan de dispersion.

Enfin, la détermination des $\hat{E}_{p,q}$ doit en principe résulter du calcul

$$|e\rangle = |s\rangle - \mathbf{M} |A\rangle. \quad (\text{B.3.4})$$

qui peut s'effectuer par double transformée de Fourier. En pratique dans ce problème particulier, les pôles (ν_m, k_n) possédant une partie imaginaire très faible devant leur partie réelle, et si on n'a pas utilité de connaître les amplitudes des modes trajectoire par trajectoire, on peut se contenter d'une constante arbitraire universelle en remplacement des $\hat{E}_{p,q}$. On tracera finalement

$$\hat{S}_{p,q} = \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{m,n} e^{-i2\pi p \delta \nu m \delta t} e^{+iq \delta \kappa (-n+N/2) \delta x}}. \quad (\text{B.3.5})$$

Bibliographie

- [1] *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*, edited by P.A. Deymier, Springer Series in Solid-State Sciences Vol. 173 (Springer, Berlin, 2013).
- [2] *Phononic Crystals : Fundamentals and Applications*, edited by A. Khelif and A. Adibi (Springer, New York, 2016).
- [3] *Metamaterials : Theory, Design, and Applications*, edited by T.J. Cui, D.R. Smith, and R.P. Liu (Springer, New York, 2010).
- [4] *Tutorials in Metamaterials*, edited by M.A. Noginov and V.A. Podolskiy (CRC Press, 2011).
- [5] C. Croënne, E.D. Manga, B. Morvan, A. Tinel, B. Dubus, J.O. Vasseur, and A.-C. Hladky-Hennion, *Negative refraction of longitudinal waves in a two-dimensional solid-solid phononic crystal*, Phys. Rev. B **83**, 054301 (2011).
- [6] S.A. Cummer, B.I. Popa, D. Schurig, D.R. Smith, J. Pendry, M. Rahm, and A. Starr, *Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell*, Phys. Rev. Lett. **100**, 024301 (2008).
- [7] L.W. Cai, and J. Sanchez-Dehesa, *Analysis of Cummer-Schurig acoustic cloaking*, New J. Phys. **9**, 450 (2007).
- [8] Z.G. Chen, J. Zhao, J. Mei, and Y. Wu, *Acoustic frequency filter based on anisotropic topological phononic crystals*, Sci. Rep. **7**, 15005 (2017).
- [9] E.S. Cassedy and A.A. Oliner, *Dispersion relations in time-space periodic media : Part I—Stable interactions*, Proc. IEEE **51**, 1342–1359 (1963).
- [10] D. L.Sounas, and A. Alù, *Non-reciprocal photonics based on time modulation*, Nat. Photonics **11**, 774–783 (2017).
- [11] H. Nassar, B.Yousefzadeh, R.Fleury, M.Ruzzene, A. Alù, C. Daraio, A.N. Norris, G. Huang, and M.R. Haberman, *Nonreciprocity in acoustic and elastic materials*, Nat. Rev. Mater.**5**, 667–685 (2020).
- [12] X. Guo, Y. Ding, Y. Duan, and X. Ni, *Nonreciprocal metasurface with space-time phase modulation*, Light Sci. Appl. **8**, 123 (2019).
- [13] A.A. Maznev, A.G. Every, and O.B. Wright, *Reciprocity in reflection and transmission : What is a 'phonon diode'?*, Wave Motion **50**, 776-784 (2013).

- [14] S.-A. Mansoura, *Contrôle de la propagation des ondes ultrasonores dans des cristaux phononiques piézoélectriques*, Thèse, Université du Havre, 2015.
- [15] N. Kherraz, *Contrôle de la propagation d'ondes guidées dans une plaque piézoélectrique par application de conditions aux limites électriques périodiques*, Thèse, Université François – Rabelais de Tours, 2017.
- [16] F.H. Chikh-Bled, *Metamatériaux acoustiques piézoélectriques pour le contrôle d'ondes guidées*, Thèse, Université du Havre, 2020.
- [17] J. Drouet, *Méthodes d'analyse électromagnétique spécifiques à la conception des antennes à résonateur BIE multi sources*, Thèse, Université de Limoges, 2007.
- [18] M. Ke, Z.Y. Liu, C.Y. Qiu, W. Wang, J. Shi, W. Wen, P. Sheng, *Negative-refraction imaging with two-dimensional phononic crystals*, Phys. Rev. B **72**, 064306 (2005).
- [19] N. Laforge, *Guides d'onde phononiques topologiques*, Thèse, Université Bourgogne Franche-Comté, 2021.
- [20] S. Yang, J.H. Page, Z.Y. Liu, M.L. Cowan, C.T. Chan, and P. Sheng, *Focusing of Sound in a 3D Phononic Crystal*, Phys. Rev. Lett. **93**, 024301 (2004).
- [21] H. Sanchis-Alepuz, Y.A. Kosevich, and J. Sánchez-Dehesa, *Acoustic analogue of electronic Bloch oscillations and resonant Zener tunneling in ultrasonic superlattices*, Phys. Rev. Lett. **98**, 134301 (2007).
- [22] W.L. Bragg, *The Specular Reflection of X-rays*, Nature **90**, 2250 (1912).
- [23] Animations éducatives Philip Willmott (Paul Scherrer Institute, Switzerland), <https://www.psi.ch/de/lsc/people/philip-willmott>.
- [24] M.S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, *Acoustic band structure of periodic elastic composites*, Phys. Rev. Lett. **71**, 2022 (1993).
- [25] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, **12**, 47–88 (1883).
- [26] L. Brillouin, *Wave propagation in periodic structures* (McGraw-Hill, New York, 1946).
- [27] M. Fink, *Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles*, IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control **39**, 555-566 (1992).
- [28] E.S. Cassedy, *Waves guided by a boundary with time-space periodic modulation*, Proc. IEE **112**, 269–279 (1965).
- [29] P.K. Tien, *Parametric Amplification and Frequency Mixing in Propagating Circuits*, J. Appl. Phys. **29**, 1347–1357 (1958).
- [30] J.C. Simon, *Action of a progressive disturbance on a guided electromagnetic wave*, IEEE Trans. Microw. Theory **8** 18–29 (1960).

- [31] S.A. Cummer, J. Christensen, and A. Alù, *Controlling sound with acoustic metamaterials*, Nat. Rev. Mater. **1**, 1–13 (2016).
- [32] R. Fleury, D.L. Sounas, C.F. Sieck, M.R. Haberman, and A. Alù, *Sound isolation and giant linear nonreciprocity in a compact acoustic circulator*, Science **343**, 516–519 (2014).
- [33] H. Nassar, H. Chen, A.N. Norris, and G.L. Huang, *Non-reciprocal flexural wave propagation in a modulated metabeam*, Extreme Mech. Lett. **15**, 97–102 (2017).
- [34] H. Nassar, X.C. Xu, A.N. Norris, and G.L. Huang, *Modulated phononic crystals : Non-reciprocal wave propagation and Willis materials*, J. Mech. Phys. Solids **101**, 10–29 (2017).
- [35] H. Nassar, H. Chen, A.N. Norris, and G.L. Huang, *Quantization of band tilting in modulated phononic crystals*, Phys. Rev. B **97**, 014305 (2018).
- [36] N. Swinteck, S. Matsuo, K. Runge, J.O. Vasseur, P. Lucas, and P.A. Deymier, *Bulk elastic waves with unidirectional backscattering-immune topological states in a time-dependent superlattice*, J. Appl. Phys. **118**, 063103 (2015).
- [37] B.M. Goldsberry, S.P. Wallen, and M.R. Haberman, *Non-reciprocal wave propagation in mechanically-modulated continuous elastic metamaterials*, J. Acous. Soc. Am. **146**, 782–788 (2019).
- [38] H. Chen, L.Y. Yao, H. Nassar, and G.L. Huang, *Mechanical quantum Hall effect in time-modulated elastic materials*, Phys. Rev. Appl. **11**, 044029 (2019).
- [39] C. Coullais, D. Sounas, and A. Alù, *Static non-reciprocity in mechanical metamaterials*, Nature **542**, 461–464 (2017).
- [40] J.G. Cui, T. Yang, and L.Q. Chen, *Frequency-preserved non-reciprocal acoustic propagation in a granular chain*, Appl. Phys. Lett. **112**, 181904 (2018).
- [41] B. Yousefzadeh, B. Ramirez, and C. Daraio, *Non-reciprocal dynamic response of a bilinear lattice*, APS March Meeting Abstracts, pp. Y57–001 (2019).
- [42] D.L. Sounas and A. Alù, *Nonreciprocity based on nonlinear resonances*, IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett. **17**, 1958–1962 (2018).
- [43] G. Trainiti and M. Ruzzene, *Non-reciprocal elastic wave propagation in spatiotemporal periodic structures*, New J. Phys. **18**, 083047 (2016).
- [44] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J.O. Vasseur, M. Pham Thi, and A.-C. Hladky-Hennion, *Tunability of Bragg band gaps in one-dimensional piezoelectric phononic crystals using external capacitances*, Smart Mater. Struct. **24**, 085013 (2015).

- [45] C. Sugino, M. Ruzzene, and A. Erturk, *Design and analysis of piezoelectric metamaterial beams with synthetic impedance shunt circuits*, IEEE/ASME Trans. Mechatronics **23**, 2144–2155 (2018).
- [46] N. Kherraz, L. Haumesser, F. Levassort, P. Benard, and B. Morvan, *Controlling Bragg gaps induced by electric boundary conditions in phononic piezoelectric plates*, Appl. Phys. Lett. **108**, 093503 (2016).
- [47] L. Airoldi and M. Ruzzene, *Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos*, New J. Phys. **13**, 113010 (2011).
- [48] C. Sugino, M. Ruzzene, and A. Erturk, *An analytical framework for locally resonant piezoelectric metamaterial plates*, Int. J. Solids Struct. **182–183**, 281–294 (2020).
- [49] J. Marconi, E. Riva, M. Di Ronco, G. Cazzulani, F. Braghin, and M. Ruzzene, *Experimental Observation of Nonreciprocal Band Gaps in a Space-Time-Modulated Beam Using a Shunted Piezoelectric Array*, Phys. Rev. Applied **13**, 031001 (2020).
- [50] C. Croenne, J.O. Vasseur, O. Bou Matar, M.F. Ponge, P.A. Deymier, A.C. Hladky-Hennion, and B. Dubus, *Brillouin scattering-like effect and non-reciprocal propagation of elastic waves due to spatio-temporal modulation of electrical boundary conditions in piezoelectric media*, Appl. Phys. Lett. **110**, 061901 (2017).
- [51] C. Croënne, J.O. Vasseur, O. Bou Matar, A.-C. Hladky-Hennion, B. Dubus, *Non-reciprocal behavior of one-dimensional piezoelectric structures with space-time modulated electrical boundary conditions*, J. Appl. Phys. **126**, 145108 (2019).
- [52] S. Tessier Brothelande, *Modulation spatio-temporelle d'un cristal phononique piézoélectronique : expériences et simulations en régime subsonique, sonique et supersonique*, Thèse, Université de Lille, 2023.
- [53] N. Kherraz, F.H. Chikh-Bled, R. Sainidou, B. Morvan, and P. Rembert, *Tunable phononic structures using Lamb waves in a piezoceramic plate*, Phys. Rev. B **99**, 094302 (2019).
- [54] <https://www.pjrc.com/store/teensy36.html>
- [55] Pour plus de détails, voir <https://www.mouser.com/datasheet/2/149/FST3125-54424.pdf>
- [56] APC International, Ltd. <https://www.americanpiezo.com/>.
- [57] S.R. Moheimani and A.J. Fleming, *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*, Vol. 1 (Springer, London, 2006).
- [58] H.F. Tiersten, *Wave propagation in an infinite piezoelectric plate*, J. Acoust. Soc. Am. **35**, 234–239 (1963).
- [59] Pour effectuer ces calculs COMSOL Multiphysics ® v.5.5 a été utilisé (www.comsol.com. COMSOL AB, Stockholm, Sweden).

-
- [60] B. Bonello, C. Charles, and F. Ganot, *Lamb waves in plates covered by a two-dimensional phononic film*, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 021909 (2007).
- [61] F.H. Chikh-Bled, N. Kherraz, R. Sainidou, P. Rembert, B. Morvan, *Piezoelectric phononic plates : retrieving the frequency band structure via all-electric experiments*, *Smart Mater. Struct.* **28**, 115046 (2019).
- [62] K. Mekrache, R. Sainidou, P. Rembert, N. Stefanou, and B. Morvan, *Tunable multidispersive bands of inductive origin in piezoelectric phononic plates*, *J. Appl. Phys.* **130**, 195106 (2021).
- [63] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (New York : Saunders College Publishing, 1976).
- [64] R. Sainidou, N. Stefanou, I.E. Psarobas, and A. Modinos, *Scattering of elastic waves by a periodic monolayer of spheres*, *Phys. Rev. B* **66**, 024303 (2002).
- [65] E. Riva, J. Marconi, G. Cazzulani, and F. Braghin, *Generalized plane wave expansion method for non-reciprocal discretely modulated waveguides*, *J. Sound Vib.* **449**, 172–181 (2019).
- [66] M. Tummala, *New algorithm for solving block matrix equations with applications in 2-D AR spectral estimation*, *IEEE Trans. Signal Processing* **39**, 759–764 (1991).

Résumé et mots-clés en français

Title : Contrôle dynamique de modes de Lamb dans des cristaux phononiques piézoélectriques.

Résumé : L'objectif de ce travail de thèse est d'obtenir une modulation temporelle des propriétés d'un cristal phononique (CP) piézoélectrique afin de contrôler la propagation de modes guidés de type Lamb. Ceci nécessite dans un premier temps de développer un dispositif expérimental permettant une agilité dans la gestion des conditions aux limites électriques (CLEs) utilisées pour modifier les propriétés effectives de la plaque piézoélectrique, siège de la propagation ultrasonore. Ce dispositif basé sur l'utilisation d'un microcontrôleur a été caractérisé et nous l'avons testé sur quelques configurations statiques. Il a notamment été montré que l'ensemble du dispositif de contrôle (connecteurs, interrupteurs, etc...) introduisait peu de signaux parasites dans le cristal étudié. La complexité des phénomènes en jeu dans le système nous a amené à nous intéresser à de nombreuses configurations statiques avant d'aborder le régime dynamique. La première configuration traitée est la mise à la masse des électrodes présentes sur les surfaces du CP. Nous avons exposé les différents modèles numérique et analytique utiles à la compréhension des phénomènes physiques observés expérimentalement. Une grande partie de ce travail préliminaire avait pour but d'identifier les différents paramètres électriques, mécaniques et piézoélectriques du CP. De plus, nous avons caractérisé le mode propagatif électrique présent sur le CP lorsque des inductances sont connectées aux électrodes. Pour la première fois, nous avons parfaitement isolé et caractérisé expérimentalement ce mode en dépolarisant le cristal phononique piézoélectrique. Une variété de configurations statiques mettant en jeu des inductances et produisant, selon leur branchement, des bandes localisées ou larges bandes en fréquences, a été analysée tant théoriquement qu'expérimentalement. Plusieurs résultats originaux ont été produits montrant la richesse de modulation possible en utilisant des charges d'impédances inductives connectées au CP. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la modulation spatio-temporelle du CP. La modulation choisie est basée sur un motif élémentaire construit sur trois cellules du CP et nous donnons ici les résultats pour des vitesses de modulation inférieures aux vitesses de propagation des modes dominants dans la gamme de fréquences étudiée : le mode symétrique fondamental S_0 et le mode antisymétrique A_1 . Une translation vectorielle des courbes de dispersion est observée à la fois expérimentalement et sur les simulations FEM, dissymétrisant la structure de bandes. Ceci offre la possibilité d'obtention de bandes interdites unidirectionnelles pour des ondes de Lamb.

Mots-clés : Cristaux phononiques, Piézoélectricité, Métamatériaux, Résonances locales, Contrôle actif, Non réciprocity, Modulation spatio-temporelle.

Résumé et mots-clés en anglais

Title : Dynamic control of Lamb modes in piezoelectric phononic crystals.

Abstract : This PhD thesis aims to control the propagation of guided Lamb waves within a piezoelectric phononic crystal plate (PPCP) through time-modulation of its properties. For this purpose, an appropriate experimental setup has been developed that allows us to easily handle the applied electric boundary conditions, used to modify the effective properties of the crystal, in which the ultrasonic guided waves propagate. More precisely, this setup, integrating a microcontroller, has been experimentally characterized and its performance has been verified in several cases including static (i.e. no time-modulated) configurations. Our results confirm that the control unit of the system (including connectors, switches, etc.) introduces negligible or little signal noise within the crystal. The complexity of the physical phenomena taking place within the crystal has been shown to be of interest, thus triggering a detailed study of several static configurations at a first stage, before the dynamical regime is considered at a second stage. The first static case consists of floating-potential electric boundary conditions at the metallic strips, on both sides of the plate. Through this preliminary study the different parameters (electrical, mechanical, and piezoelectric) governing the response of the crystal have been identified and the several theoretical and numerical modeling tools used to analyze the underlying mechanisms have been presented. In addition, the electric propagating mode guided within the plate when inductive charges are loaded on the metallic strips, has been analyzed and for the first time has been perfectly decoupled experimentally after depolarization of the piezoelectric plate. Second, a variety of static configurations including inductive loads that produce multidispersive, localized or extended in frequency, unusual bands of inductive origin have been analyzed both theoretically and experimentally. These original results, reveal the rich potential with respect to modulation that the above inductive structures connected to PPCP may offer. At a second stage, the spatiotemporal modulation of the crystal is considered. We use a cell composed by three metallic strips and consider modulation speeds lower than the speeds of propagation of the guided modes entering in the dispersion plot for the frequency region under study : the symmetric S_0 -like mode and the antisymmetric A_1 -like mode. A vector translation of the dispersion curves is observed in both experimental and numerical (via finite-element simulations) band structures, thus offering the possibility of obtaining asymmetric band diagrams and unidirectional band gaps for Lamb modes in these crystals.

Keywords : Phononic crystals, Piezoelectricity, Metamaterials, Local resonances, Active control, Non-reciprocity, Spatio-temporal modulation.