



HAL
open science

Limite locale de graphes aléatoires dynamiques et principes de grandes déviations pour les processus de Lévy alpha-stables sans saut négatif

Léo Dort

► **To cite this version:**

Léo Dort. Limite locale de graphes aléatoires dynamiques et principes de grandes déviations pour les processus de Lévy alpha-stables sans saut négatif. Probabilités [math.PR]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2023. Français. NNT : 2023ENSL0048 . tel-04318947

HAL Id: tel-04318947

<https://theses.hal.science/tel-04318947>

Submitted on 2 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivrée par
l'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

École Doctorale N° 512

École Doctorale en Informatique et Mathématiques de Lyon

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 6 septembre 2023, par :

Léo DORT

Limite Locale de Graphes Aléatoires Dynamiques & Principes de Grandes Déviations pour les Processus de Lévy α -Stables sans Saut Négatif

Devant le jury composé de :

LUCAS GERIN,
IGOR KORTCHEMSKI,
NICOLAS BROUTIN,
ALICE GUIONNET,
BÉNÉDICTE HAAS,
EMMANUEL JACOB,
GRÉGORY MIERMONT,

Maître de conférences HDR à l'École Polytechnique,
Chargé de recherche CNRS à l'École Polytechnique,
Professeur à Sorbonne Université,
Directrice de recherche CNRS à l'ÉNS de Lyon,
Professeure à l'Université Sorbonne Paris Nord,
Maître de conférences à l'ÉNS de Lyon,
Professeur à l'ÉNS de Lyon,

Rapporteur,
Rapporteur,
Examinateur,
Examinatrice,
Examinatrice,
Examinateur,
Directeur de thèse.

Dynamical Random Graphs

A Local Convergence Point of View

ℰ

α -Stable Lévy Processes without Negative Jumps

Large Deviations Principles

Léo Dort

Ph.D. Thesis

*To Charline,
To Julie
To me*

Love Betty.

Remerciements *ou le chapitre le plus populaire et lu d'une thèse*

erci!

Remerciements *sincères et un peu plus détaillés*


« Une virgule indique que tu dois ralentir.

Un point, ça veut dire que tu t'arrêtes.


Mais aucun signe n'indique combien de temps tu dois t'arrêter.

À part le point final qui indique que c'est fini. »


Le Chat, Le Chat est parmi nous.


ette thèse représente l'achèvement de quatre années de travail, difficile parfois autant mathématiquement que moralement (la pandémie de COVID n'a certainement pas aidé...). Malgré les cours et les conférences à distance pendant près de deux ans, et la (quasi) non-possibilité de venir travailler au laboratoire pendant plus d'un an, j'ai tout de même eu le plaisir de côtoyer et rencontrer de très belles personnes. Je tiens donc à débiter ce manuscrit par ces quelques lignes¹ remerciant les personnes ayant eu un impact sur ma vie ces quatre dernières années.

n premier lieu, je remercie mes directeurs *Grégory* et *Emmanuel* de m'avoir permis de travailler sur deux thèmes aussi intéressants que challengeants.

e tiens ensuite à remercier *Lucas Gerin* et *Igor Kortchemski* d'avoir accepté de rapporter cette thèse (et d'avoir respecter les courts délais imposés par l'ÉNS). Vos remarques ont grandement amélioré la qualité de ce manuscrit.

Je remercie également *Nicolas Broutin*, *Alice Guionnet* et *Bénédicte Haas*, et encore une fois *Lucas Gerin* et *Igor Kortchemski*, d'avoir accepté d'être membres du jury de cette thèse. Je suis d'autant plus honoré que tous vos travaux ont influencé mon travail de ces quatre dernières années.

'ai passé six longues années à l'ÉNS de Lyon, en tant qu'étudiant de Master, puis en tant que thésard. Je n'aurai jamais pu avoir ce parcours sans les soutiens de mes professeurs de Licence à Dijon. Je remercie grandement *Peggy Cenac-Gue* et *Samuel Herrmann*, grâce à qui je me suis dirigé vers les probabilités, *Olivier Couture* et *Giuse* pour leur attention quant à mes questions concernant l'avenir. Chacun d'entre vous a su rester disponible lors de mes interpellations à la fin d'un cours ou au tournant d'un couloir, et je vous remercie pour m'avoir guidé et encouragé à poursuivre dans cette voie de l'enseignement et de la recherche.

 la seule évocation du mot recherche, mes pensées s'envolent alors naturellement vers le sud

¹Au début, je ne comptais écrire que quelques lignes...

ensoleillé de Nice et Sophia Antipolis. Il est impensable que je ne remercie pas les personnes qui ont encadré mes premiers pas dans le monde de la recherche² : *Patricia Reynaud-Bouret* et *Ingrid Bethus*. Votre accueil chaleureux, votre soucis de mon bien être personnel et scientifique ont créé une incroyable atmosphère de vie et de travail. Vous avez été très patientes avec moi : tu as pris le temps³, *Ingrid*, afin de m'expliquer le problème neuro-biologique sous-jacent⁴, mais aussi toute la partie expérimentale⁵; et tu as su, *Patricia*, trouver les bons mots rassurants, non sans un grain d'optimisme au moment où⁶ nous nous sommes aperçus que le modèle utilisé pour essayer de répondre au problème s'est finalement avéré «ne pas être le meilleur». J'ai été ravi d'apprendre en écoutant ton mini-cours, *Patricia*, en octobre 2022 à Lille que ce beau projet a fini par aboutir.

Vous m'avez toutes les deux montré une très belle vision de la recherche, et je ne sais comment vous manifester toute ma gratitude.



Entre le petit nouveau dans une promotion se connaissant toutes et tous déjà très bien est loin d'être chose aisée. Heureusement j'ai eu la chance d'être catapulté de Dijon vers des camarades plus que sympathiques et soucieux de m'intégrer. Je tenais donc à remercier particulièrement parmi ces derniers, les quatre premiers à m'avoir adresser la parole sur les bancs de l'amphi A et qui sont devenus par la suite de bons amis. Merci *Matthieu, Julien, Vivek* et *Corentin*.



Ils ne sont évidemment pas les seuls camarades avec qui se fut un plaisir de partager ces dernières années : il est temps maintenant de rendre hommage à la bande éclectique de doctorants, post-doctorants et AGPR de l'UMPA⁷. Tout d'abord, merci à mes co-bureaux qui se sont succédés au fabuleux, mythique et Ô combien convoité bureau M7 403 : *Simon B.* pour nos conversations et ta compagnie agréables pendant deux ans⁸ (j'ai beaucoup apprécié nos discussions, bien que difficiles à suivre pour moi⁹, sur tes problèmes de chameau) ; *Héloïse* et *William*, vos conversations trop souvent maritales et matinales vont énormément me manquer!

J'ai également eu le plaisir de préparer le fabuleux TD d'Intégration et de Théorie de la Mesure avec les fantastiques *Antoine* et *Juliana*. Je n'ai pas toujours été facile, je dirai même que j'ai pu être très pénible lors de ces préparations, mais votre self-control a toujours eu raison de mes quelques colères.

Merci à *HUB*, alias *Hughue*. Toujours d'humeur à discuter (de n'importe quel sujet) ou à rigoler, tu régales! Comme tes passes au futsal mec!

Merci à *Swann*. Je n'oublierai pas nos deux folles nuits passées au romantique Château de Goutelas.

Merci à *Charlie*. Partager ta vie pendant un mois à Vancouver a été un réel délice.

Merci à *Ronan*. On a débuté notre thèse ensemble et je suis très heureux qu'on la termine également

²Merci encore une fois *Peggy* de m'avoir orienté vers *Patricia* pour effectuer ce magnifique premier stage de recherche.

³De très nombreuses après-midi!

⁴Étudier la dynamique des neurones du striatum dorso-médian (impliqué dans l'apprentissage) et du striatum dorso-latéral (impliqué dans l'automatisation) dans un paradigme d'apprentissage d'alternance spontanée.

⁵Merci à toute l'équipe de l'Institut de Pharmacologie Moléculaire et Cellulaire de Sophia Antipolis, et en particulier merci à *Fabrizio Capitano*!

⁶C'était le dernier jour du stage...

⁷Okay j'ai triché ... Deux parmi les cités ne sont ni doctorants, ni post-doctorants ou encore AGPR.

⁸Entâchés sur fond de COVID.

⁹J'avoue, je ne suis pas géomètre!

ensemble!

Merci à *Corentin* pour tes intrusions intempestives dans notre bureau. Tu as su donner une deuxième vie à notre «canapé» (je pense que tu as été le seul à l'utiliser).

Merci à *Oymen*, fier compagnon de l'aile M7 avec qui on ne peut que passer de bons moments.

Merci à *Vianney*. Les discussions (mathématiques et non) en salle passerelle ou autour d'une bière ont toujours été très rafraichissantes.

Merci à *Céline* pour ta joie ultra-communicative! (Ça fait du bien dans les durs moments.)

Également pour tes joies et rires communicatifs, merci au beau *Riccardo*.

Merci à *Paul B.* pour les beaux jeux de mots, les sorties au bar et pour tes rillettes.

Merci à *Clément*, *Simon L.* et *Valentine*. Nos conversations et vos encouragements de ces derniers mois ont été d'un immense réconfort.

Merci également à toutes celles et ceux avec qui j'ai pu discuter quelquefois autour d'un café, d'un thé, ou au repas du midi. Merci à *Basile*, *Jeanne*, *Raphaël D.*, *Raphaël R.*, *Robin*, *Thomas B.*, *Thomas Bu.* et *Citouan*.

Bien évidemment, merci à la très souriante *Vane*. J'ai été très heureux de te rencontrer, de constater que nous sommes en phase sur bien des sujets (nos discussions/confessions vont me manquer à bien des égards), d'avoir ton soutien en des temps troublés et de partager avec toi une partie du couloir de l'aile M7.

Un tournant durant ces années de thèse a été l'école d'été se déroulant à Vancouver au mois de juin 2022. J'ai pu faire la belle connaissance d'*Brianna* avec qui j'ai pagayé sur les eaux de l'océan Pacifique et que j'ai dû exaspérer en parlant anglais avec mon bel accent french. *I am very sorry for that!*


Ce fut aussi l'occasion de rencontrer une dream team devenue des amis merveilleux. Merci *Cristam* et *Yoan*. Je me rends compte que vous rencontrer a été l'un des meilleurs instants vécus ces dernières années. Grâce à vous, réfléchir à plusieurs pour travailler et comprendre les cours, résoudre des sudokus, et le plus important s'amuser, a amené un vent de fraîcheur revigorant toute cette année. Vous n'avez pas non plus rechigné, et je dirai même que vous l'avez fait sans hésitation, à venir courir avec (ou enfin pour) moi pour *Odyssea*¹⁰. Le nouveau regard que vous m'avez apporté sur ce que doit être ce métier m'a énormément aidé à appréhender et terminer cette quatrième année. C'est un bonheur de vous retrouver régulièrement.

Vous avez tous les quatre, *Brianna*, *Cristam*, *Vane* et *Yoan*, rendu ce séjour à Vancouver supportable et inoubliable.


Un grand merci aux secrétaires de l'UMPA sans qui le labo ne fonctionnerait plus et ne serait qu'un champ de ruines. *Je*, *Magalie* et *Virginia*, vous êtes toujours souriantes et avez toujours été disponibles pour n'importe lequel de mes problèmes (même lorsque je venais vous déranger pour simplement demander un stylo!). Venir travailler au labo dans ces conditions est une véritable chance.


Parmi les membres de l'UMPA, j'ai une pensée pour *Claude Danthony* avec qui j'ai eu le loisir et le plaisir de travailler.


¹⁰*Yoan*, je te réponds par remerciements de thèse interposés.


a diffusion, souvent méprisée et totalement non-reconnue si l'on désire poursuivre en recherche¹¹, a été une part non négligeable de mon travail en thèse. Merci à *Marie Lhuissier* de m'avoir fait entrer dans ce monde (en particulier dans le dispositif *Regards de Géomètre*¹²) et de m'encourager à poursuivre. Merci à *Ana, Corentin, Filipe, Julien* et *Valentin* avec qui j'ai eu le plaisir d'organiser le *Séminaire de la Détente Mathématique*. À tous les destinataires de la liste de diffusion du *SdM* : vous êtes enfin libres de mon règne par la terreur de l'email!!!
 Merci également à *Vane* et *Thomas B.* pour notre co-encadrement sur deux semaines de trois stagiaires lycéens pour l'association *Un peu de bon science*.

erci aux Bourguignons *Aurore* et *Chibaut*. Votre récente rencontre et celles qui ont suivies ont été parmi les beaux moments de cette année.

l y a quelques mois, j'ai découvert un magnifique lieu calme et reposant dans lequel, entre deux tempêtes de thèse, j'ai passé pas mal de temps : la librairie *Vagalume*¹³. Je remercie *Lucile* et *Marie* pour vos conseils lecture, les incroyables cappuccino, chaï latte et jus de fruits, et l'atmosphère que vous avez créé!

e remercie tous les amis de la très belle Nièvre que j'aurai aimé beaucoup plus voir et revoir ces dernières années. Je pourrai écrire des pages de démonstrations de ce que chacun d'entre vous a pu m'apporter et qui a contribué au fait que j'ai pu parvenir jusqu'ici. Cependant, comme vous connaissez l'affection que je vous porte, je vais me contenter pour cette fois de remerciements succincts. Merci à *Nicolas, Guillian, Victor* et *Com*. Merci à la fine équipe composée de *Thomas B.* et *Lucie, David* et *Bertille* et à la petite *Alba* toute nouvelle membre du groupe, *Paul V.* et *Alix* et la nouvellement arrivée petite *Charlie, Benoit* et *Célia* et la petite *Louise*, ton *Grégoire* et ton *Loïc* et ton *Hévin* et ton *Michaël* et ton *Antoine*, et enfin ton *Jérémie*! Certains se souviendront des fameuses soirées accoudées au bar à shot¹⁴ de Dijon.

es quatre années de thèse ont été très largement perturbées par la pandémie de COVID. Je tiens donc à remercier *Pierre* et *Brigitte*, notamment mais bien sûr pas que pour cela, pour votre hospitalité durant le premier des trois confinements.
 Évidemment, merci *Marion*! Très drôle, intéressante et plaisante. Te découvrir, apprendre à te connaître ont été de belles surprises.


otre déplacement pour assister à cette journée me touche. Merci à vous deux, *Mamie* et *Papy*.

¹¹ Comme l'investissement dans l'enseignement j'ai l'impression... À méditer.

¹² Merci *Howria* pour toutes tes sollicitations pour *Les Maths en Scène*.

¹³ 37 Bis place des Pavillons, Lyon 69007.


¹⁴ Nom du bar modifié pour ne pas choquer les moeurs!

ous avez toujours été présents et à l'écoute des difficultés rencontrées à n'importe quel moment depuis que je suis tout petit (enfin aussi loin que je m'en souviennne!). Marchi *Père* et *Mère*. Nos conversations mathématiques, toujours pleines d'enthousiasmes (au moins au départ), n'ont presque jamais été fructueuses. Cela ne vous empêche pas, *Père* de manière peut-être maladroite à ta façon¹⁵, *Mère* sans doute de façon plus douce, de persévérer à essayer de comprendre ce métier difficilement accessible, à mon plus grand plaisir.

Outre les remerciements, je ne pense pas trahir la pensée d'aucun de nous quatre si j'écris que nous sommes particulièrement fiers de ton courage, *Mère*, dans la bataille entreprise il y a un peu plus de quatre ans.

Merci à¹⁶ mon frère *Julie* et à ma soeur *Chloé*. Je ne m'aventurerai pas à compter les mots dédiés à chacun car il n'a jamais été question de compétition et que je vous aime autant l'un que l'autre. J'opte donc pour ces quelques mots communs car je trouve qu'ils vous correspondent bien. Je suis tantôt admiratif, tantôt exaspéré par chacun de vous¹⁷. Mais vous avez toujours apporté un soupçon de «joute verbale»¹⁸ dont je me rassasie difficilement et l'équilibre dont j'ai toujours eu besoin.

Vous savez combien ça n'a pas toujours été facile et je suis infiniment heureux que vous soyez tous le

nfin, je dois remercier la personne solaire qui partage ma vie depuis six ans et trois jours, qui éblouit mon quotidien, et sans qui mon existence n'en serait que plus terne. J'ai beaucoup d'admiration pour toi, et je pourrai écrire des pages de toutes les choses que tu m'as apporté et que tu m'apportes depuis que je te connais¹⁹. Cependant, tu as déjà dû lire plusieurs pages de remerciements qui ne t'étaient pas concernées, je ne vais donc pas te faire plus attendre *Charline*. Ces six années furent toute une aventure et elles n'ont pas toujours été faciles ; gérer la distance²⁰, les confinements successifs, nos travaux plus que prenant²¹ ... mais tu as su (ou dû) supporter²² mon rythme de travail, mes humeurs (pas toujours appréciables), les incertitudes liées à l'avenir, et bien d'autres choses encore. Tu m'as fait découvrir tout un monde culinaire qui a remplacé, au plus grand bonheur de tous, mes *Lardons sur lit de petits pois*, le premier festin que j'ai pu te concocter²³. Ton sourire chaleureux, ta joie de vivre, *tes p'tits ch'veux* ont su m'adoucir et me conduire, au travers des nombreux doutes et déceptions, vers la fin de cette thèse et cette nouvelle vie qui nous attend !

Un immense merci Charline !

¹⁵Mais aucune de tes maladresses ne sauraient être effacées par une sortie VTT, une partie de scrabble, un bon «à peu près» ou encore une balade devant le roi des artichauts.

¹⁶Ordre d'apparition tiré selon un *Pile ou Face* avec proba $\frac{1}{8} - \frac{7}{8}$, mais je ne dirai jamais en faveur de qui.

¹⁷Peut-être vous aussi ? Peut-être est-ce normal entre frères et soeurs ?

¹⁸*Joute verbale* selon *Le Petit Léo* : Expression non-répertoriée signifiant dans le monde des *Dort* une discussion houleuse ou une surenchère de jeux de mots.

¹⁹Les bancs de l'Amphi Recoura du bâtiment Mirande me semble déjà très loin.

²⁰Merci la SNCF pour *CGV max* : 79€ par mois jusqu'à 28 ans, après c'est plein tarif (sûrement pour compenser) !

²¹Pour nous ils sont prenants. Il est vrai que c'est loin d'être le cas de tout le monde.

²²Et moi aussi parfois :-).

²³Je pensais que c'était une bonne idée. En fait, pas trop.

Merci Beaucoup à toute !

Quel est l'objet de cette thèse ?



Cette thèse est divisée en deux parties indépendantes. D'une part, nous nous intéressons à des aspects géométriques de grands graphes aléatoires évolutifs dans le temps. D'autre part, nous étudions les probabilités d'événements très rares pour certaines classes de processus de Lévy.

Dans une première partie, nous introduisons un cadre de travail théorique unifié permettant de définir une notion de limite locale pour des graphes évolutifs, c'est-à-dire des graphes dans lesquels les arêtes apparaissent et disparaissent au cours du temps. Nous montrons pour deux modèles de graphes dynamiques inhomogènes un résultat de convergence locale vers des arbres de Galton-Watson qui croissent et se segmentent au cours du temps. Cette nouvelle notion nous permet d'étudier des propriétés asymptotiques de processus évoluant sur ces graphes dynamiques. Nous nous intéressons ici au processus de contact pour lequel nous démontrons des résultats de métastabilité, renforçant des résultats obtenus récemment par E. Jacob, A. Linker et P. Mörters.

La seconde partie constitue une contribution à la très riche étude des principes de grandes déviations (PGD) fonctionnelles des processus de Lévy, pour laquelle nous nous focalisons sur le cas des processus de Lévy α -stables sans saut négatif, où $1 < \alpha < 2$. Ce travail est motivé par un résultat récent de C. Profeta qui quantifia la queue de distribution logarithmique asymptotique de l'aire sous l'excursion normalisée d'un processus de Lévy α -stable sans saut négatif. Grâce à une approche dû à A. Puhalskii, similaire à la convergence de processus stochastiques, nous établissons un PGD pour les excursions stables. Ce résultat de grandes déviations, que nous obtenons pour la topologie non usuelle M1 de Skorokhod, nous permet de déterminer des équivalents exacts pour les queues de distribution logarithmique asymptotique de certaines fonctionnelles de l'excursion stable telles que l'aire sous l'excursion et le supremum. Par des raisonnements similaires, nous obtenons un PGD pour les ponts stables.

What is this thesis about?



This thesis is divided in two independent parts. On the one hand, we are interested in geometrical aspects of large random graphs evolving in time. On the other hand, we study the probability of very rare events for some Lévy processes.

In a first part, we introduce a new unified theoretical framework to define a notion of local weak limit of dynamical graphs, that are graphs in which edges may appear and disappear in function of time. We prove for two models of dynamical inhomogeneous random graphs a local convergence to some dynamical Galton-Watson trees which growth and split in function of time. This new notion let us to study asymptotic properties of processes which evolve on these dynamical graphs. We focus our attention on contact process for which we obtain metastability results, strengthen recent results of E. Jacob, A. Linker and P. Mörters.

The second part contributes to the rich study of functional large deviation principles (LDP) for Lévy processes, for which we focus on the case of α -stable Lévy processes without negative jumps, with $1 < \alpha < 2$. This work is motivated by a recent result of C. Profeta who quantified the logarithmic right-tail asymptotic for the area under the normalized excursion of α -stable Lévy process without negative jumps. With an approach due to A. Puhalskii, which is similar to the convergence of stochastic processes, we establish LDP for stable excursions. Thanks to this large deviations results, that we establish for the unusual M1 Skorokhod topology, we may deduce exact equivalent for the logarithmic right-tail asymptotic of some functional of the normalized excursion such as the area or the supremum. With similar arguments, we also get a large deviations principle for the stable Lévy bridge.

Table des matières

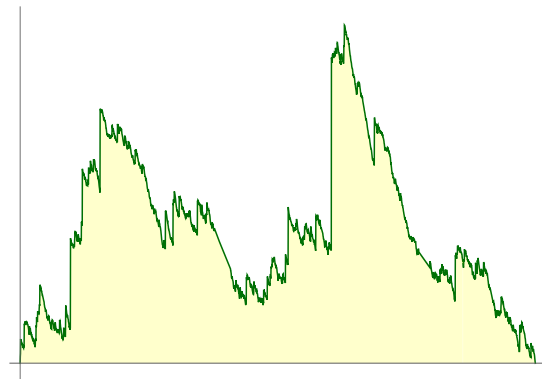
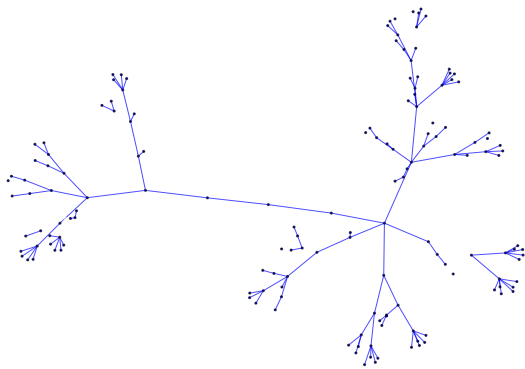
Remerciements	v
Quel est l'Objet de cette Thèse ?	xiii
I <i>Introduction</i>	1
Chapitre 1: Limites Locales de Graphes Aléatoires Dynamiques	3
1.1 Limites Locales Faibles de Graphes	4
1.1.1 Convergence au sens de Benjamini-Schramm	4
1.1.2 Les Exemples Classiques	8
1.1.3 Application de la Limite Locale au Processus de Contact	13
1.2 Le Contexte des Graphes Dynamiques	14
1.2.1 Une Première Approche : la Topologie de Skorokhod pour la Limite Locale	15
1.2.2 L'Espace des Graphes Dynamiques & Convergence Locale Dynamique	17
1.2.3 Deux Modèles de Graphes Aléatoires Inhomogènes Dynamiques	22
1.2.4 Application au Processus de Contact	25
1.3 Perspectives	26
Chapitre 2: Processus de Lévy α-Stables & Principe de Grandes Déviations	29
2.1 Processus de Lévy	30
2.2 Principe de Grandes Déviations pour les Processus	32
2.2.1 Définitions	33
2.2.2 Un Bref Panorama Historique	35
2.2.3 La Topologie M_1 de Skorokhod pour les Processus de Lévy	38
2.3 PGD pour les Processus de Lévy α -Stables Spectralement Positif	40
2.3.1 Principes Obtenus	40
2.3.2 L'Aire sous l'Excursion et le Supremum	44
2.4 Perspectives	45
2.4.1 PGD pour le Processus de Lévy α -stable?	45
2.4.2 Géométrie des Grands Arbres de Galton-Watson	46
2.4.3 Énumération de Graphes	50
II <i>Limite</i>	51
Chapitre 3: Theory of Local Weak Limit for Dynamical Graphs	53
3.1 Dynamical Graphs and Networks	53

3.2	Local Convergence	55
3.3	Local Weak Convergence for Dynamical Graphs	57
3.3.1	The Deterministic Case	57
3.3.2	The Random Case	58
3.4	Completeness of $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$	59
3.5	The Space \mathcal{CDG}_\bullet	64
Chapitre 4: Local Weak Limit of Dynamical Inhomogeneous Random Graphs		67
4.1	Dynamical Inhomogeneous Random Graphs	67
4.2	Growth-and-Segmentation Trees	69
4.2.1	Ordered Multitype Trees and the Multitype Galton-Watson Tree	69
4.2.2	Growing Trees, Segmented Trees and Growth-and-Segmentation Trees	71
4.2.3	Monotone Approximation of GSMPGW	75
4.3	Main Results	75
4.4	Proofs of Main Results	78
4.4.1	From Finite-Type Kernels to General Graphical Kernels	78
4.4.2	Coupling of dynamical balls for finite-type kernels	80
4.5	Vertex Updating Inhomogeneous Random Graph	86
Chapitre 5: Consequences of Local Weak Convergence for Dynamical Graphs		89
5.1	Local Functionals	89
5.2	Beyond Continuous Local Functionals	90
5.2.1	Motivations from “Static” Graphs	90
5.2.2	Metastability of Contact Process on Dynamical Inhomogeneous Random Graphs	92
5.3	Unimodularity	94
Chapitre A: Appendix of Part II: Coupling of Markov Processes		97
A.1	Coupling of Markov Processes	98
 III <i>Principe de Grande</i> <i>α-Stable</i>		
<i>sans Saut Négatif</i> 101		
 Chapitre 6: Large Deviations Principle for α-Stable Lévy Processes without Negative Jumps		103
6.1	Introduction	103
6.1.1	Main Results	104
6.1.2	Large Deviation Principles for Bridges	107
6.1.3	Outline of the Proofs and Organization of the Paper	108
6.2	Preliminaries	108
6.2.1	Excursions and Bridges of Spectrally Positive Stable Lévy Processes	108
6.2.2	Basic Results on the Skorokhod M1 Topology	111
6.3	Large Deviations for the Finite-Dimensional Marginal Distributions	115
6.3.1	Estimates for Transition Densities	115

6.4	Exponential Tightness for the Normalized Excursion	119
6.5	Proof of Theorem 6.1.2	121
6.5.1	Facts about the rate function	121
6.6	Consequences of the LDP for Stable Excursions	126
6.6.1	Proof of Theorem 6.1.4	126
6.6.2	Applications	127
6.6.3	Negative Results for the Skorokhod J1 Topology	128
6.7	LDP for the α -Stable Lévy Bridge	128
6.7.1	Large deviations for the Finite-Dimensional Marginal Distributions	129
6.7.2	Exponential Tightness for the Stable Bridge	129
6.7.3	Proof of Theorem 6.1.7	130
Chapitre B:	Appendix of Part III: First-Passage Lévy Bridge & Simulations	133
B.1	First-Passage Stable Lévy Bridge	133
B.2	Simulations of Bridges and Excursions of α -Stable Lévy Processes without Negative Jumps	134
	<i>Bibliographie</i>	137

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante. Dans une première partie, écrite en français, nous introduisons les domaines de recherche sous-jacents aux travaux effectués. Les deux parties qui suivent présentent respectivement les résultats obtenus dans [DJ23] et [DGM23] et peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre. Pour rendre la lecture la plus agréable possible, les chapitres constituant la Partie II diffèrent de la version [DJ23] soumise à publication.

Bonne lecture !



Introduction

Cette introduction est découpée en deux chapitres indépendants : après avoir contextualisé nos travaux, nous présentons tout d'abord nos contributions [DJ23] concernant les limites locales de graphes aléatoires dynamiques, puis celles [DGM23] établissant des principes de grandes déviations pour certains processus de Lévy. Si les liens entre les limites locales de graphes aléatoires (dynamiques) et les principes de grandes déviations pour les processus de Lévy ne sont pas évidents à première vue, nous verrons que ces derniers sont également connectés à la géométrie de grands graphes aléatoires.

Dans l'introduction, les résultats originaux obtenus sont encadrés. Nous attachons une importance particulière à exposer seulement les détails nécessaires à la compréhension des motivations et des résultats concernant les travaux effectués durant cette thèse. Nous renvoyons donc les lecteurs intéressés aux chapitres ultérieurs pour les détails manquants.

1 | Limites Locales de Graphes Aléatoires Dynamiques

«Nous y voilà !

Une forêt pour comité d'accueil, sympa !

Monkey D. Luffy, One Piece.

Étudier les propriétés typiques de grands objets combinatoires aléatoires est un thème récurrent en théorie des probabilités. Étant donnée une suite d'objets aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ dont la taille croît vers l'infini, la *méthode objective*, s'appuyant sur la théorie de la convergence faible, consiste à introduire un nouvel objet aléatoire infini X_∞ dont les propriétés locales peuvent être perçues comme les propriétés limites observées sur la suite X_n .

Un exemple simple illustrant cette méthode consiste à déterminer le comportement asymptotique lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} S_k]$, où $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} issue de 0. La réponse $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ bien connue peut être trouvée de différentes manières plus ou moins fastidieuses (par un calcul direct ou en utilisant un théorème d'arrêt pour les martingales par exemple). Une approche plus élaborée consiste à invoquer le théorème de Donsker : la marche aléatoire simple vue comme une fonction et correctement mise à l'échelle converge vers le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. La fonctionnelle \max , qui à une fonction continue associe son maximum sur $[0, 1]$, étant continue pour cette topologie et la suite $(\max_{0 \leq k \leq n} S_k / \sqrt{n})_{n \geq 1}$ uniformément intégrable, le problème précédent se ramène ainsi à calculer $\mathbb{E}[\max_{0 \leq t \leq 1} B_t]$ qui est maintenant très facile en vertu des propriétés du mouvement Brownien.

L'intérêt de la méthode objective est donc multiple.

- Elle fournit un cadre de travail unifié pour toute une classe de problèmes.
- L'objet limite est souvent plus facile à étudier que l'objet fini. Elle permet donc d'effectuer des calculs exacts plutôt que des approximations asymptotiques.
- Elle s'applique à toutes les statistiques continues par rapport à la topologie introduite.
- On peut observer des *phénomènes d'universalité* : les résultats peuvent s'étendre immédiatement à toutes suites d'objets finis $(Y_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers le même objet limite X_∞ .

Nous nous intéressons ici au cas des graphes aléatoires où l'objet limite est appelé *limite locale faible*. L'une de nos contributions exposées dans ce manuscrit est d'étendre ce cadre de travail à une nouvelle classe d'objets de plus en plus étudiés : les *graphes aléatoires dynamiques*.

§ 1.1. Limites Locales Faibles de Graphes

La *limite locale faible de graphes* a été introduite formellement pour la première fois par I. Benjamini et O. Schramm dans [BS01] afin d'étudier la propriété de récurrence de marches aléatoires sur certains graphes planaires. Elle a ensuite été étudiée dans un contexte plus général par D. Aldous et M. Steele dans [AS04], et par D. Aldous et R. Lyons dans [AL07]. La limite locale de graphes est un outil important permettant l'étude du comportement asymptotique de graphes aléatoires, et de modèles aléatoires définis sur ces graphes, lorsque ces graphes sont finis, mais que leur taille tend vers l'infini. Cette notion décrit la géométrie interne locale de grands graphes finis, c'est-à-dire le fait qu'un grand graphe fini, quand il est observé depuis un sommet typique, ressemble à un certain graphe limite. Ces limites locales sont souvent plus simples à étudier que la suite de graphes finis elle-même permettent de capturer des propriétés asymptotiques comme le nombre de composantes connexes d'une taille fixée, le nombre d'arbres couvrants d'un graphe (voir [Lyo05, Theorem 3.3]), la distribution spectrale empirique (voir [ATV14, Theorem 4]), etc.

La convergence locale de graphes a déjà été l'objet de nombreux livres, notes de cours ou articles, c'est pourquoi nous préférons ici faire une présentation plus concise de cette notion. Le lecteur intéressé pourra par exemple²⁴ consulter le récent livre de R. van der Hofstad [Hof23], les notes de cours de L. Leskela [Les19] ou encore celles²⁵ de N. Curien [Cur21], pour de plus amples détails concernant la convergence locale de graphes.

§ 1.1.1. Convergence au sens de Benjamini-Schramm

Graphes. Un *graphe* G (simple non-orienté) est un couple $G = (V, E)$ constitué de deux ensembles : un ensemble de *sommets* $V = V(G)$, et $E = E(G)$ un ensemble de paires non-ordonnées $e = \{u, v\}$ avec $u, v \in V$ et $u \neq v$ appelées *arêtes*. Si $e = \{u, v\} \in E$, alors on dit que u et v sont *voisins* ou *adjacents*, et on notera parfois $u \sim v$ ou uv selon le contexte. On appelle *degré* d'un sommet, le nombre de ses voisins. Quand le degré de chaque sommet est fini, on dit que le graphe G est *localement fini*; et quand V est fini on dit que G lui-même est fini. On appelle *chemin* de longueur $d \geq 0$ entre deux sommets u et v une suite de $d + 1$ sommets adjacents consécutifs partant de u et se terminant en v . Quand un tel chemin existe, on dit que les sommets u et v sont *connectés*, et on peut dans ce cas définir la longueur minimale parmi les chemins de u à v . On définit la *distance de graphe* sur V par

$$d_G(u, v) := \inf \{d \geq 0 : \text{il existe un chemin de longueur } d \text{ de } u \text{ à } v\}.$$

Si u et v ne sont pas connectés, on pose $d_G(u, v) = +\infty$ par convention. Les classes d'équivalence de la relation u connecté à $v \iff d_G(u, v) < +\infty$ forment les *composantes connexes* de G . Le graphe G est dit *connecté* si $d_G(u, v) < +\infty$ pour tous $u, v \in V$, ou autrement dit si G ne possède qu'une seule composante connexe.

Graphes Enracinés & Distance Locale. Un *graphe enraciné* est un couple (G, o) où $G = (V, E)$ est un graphe et $o \in V$ est un sommet distingué appelé *racine* du graphe G .

Étant donné $d \geq 0$ et un graphe enraciné (G, o) , on appelle *boule de rayon d centrée en o* , et on note

²⁴Liste non-exhaustive.

²⁵Dans lesquelles l'auteur présente une méthode générale pour introduire une topologie locale dans un espace polonais.

$(G^{[d]}, o)$, ou plus simplement $G^{[d]}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le sous-graphe enraciné de (G, o) constitué de tous les sommets à distance au plus d de la racine o , c'est-à-dire le graphe enraciné en o où les ensembles de sommets et d'arêtes sont définis respectivement par

$$V(G^{[d]}) = \{u \in V : d_G(o, u) \leq d\} \quad \text{et} \quad E(G^{[d]}) = \{\{u, v\} \in E : u, v \in V(G^{[d]})\}.$$

On suppose dans la suite que les graphes (G, o) considérés sont connectés (quitte à se restreindre à la composante connexe de la racine o), localement finis et que l'ensemble de sommets V est dénombrable.

On dit que deux graphes enracinés (G_1, o_1) et (G_2, o_2) sont *isomorphes*, et on note $(G_1, o_1) \equiv (G_2, o_2)$ s'il existe une application bijective $\gamma : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ qui préserve :

- la racine, *i.e.* $\gamma(o_1) = o_2$, et
- les arêtes, *i.e.* $\{u, v\} \in E(G_1)$ si et seulement si $\{\gamma(u), \gamma(v)\} \in E(G_2)$.

La relation \equiv est une relation d'équivalence, et on note \mathcal{G}_{loc} l'ensemble des classes d'équivalences de \equiv des graphes enracinés localement finis et connectés. Dans la suite de cette section, on ne différencie pas un graphe enraciné de sa classe d'équivalence, ainsi on utilise les mêmes terminologies par un abus de notation.

On peut munir \mathcal{G}_{loc} d'une métrique, appelée *distance locale*, définie par

$$d_{\text{loc}}((G_1, o_1), (G_2, o_2)) = \left(1 + \sup \{d \geq 0 : (G_1^{[d]}, o_1) \equiv (G_2^{[d]}, o_2)\}\right)^{-1}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que d_{loc} est bien une distance sur \mathcal{G}_{loc} , et que de plus elle rend l'espace métrique $(\mathcal{G}_{\text{loc}}, d_{\text{loc}})$ polonais.

On dit alors qu'une suite $\{(G_n, o_n), n \geq 0\}$ de \mathcal{G}_{loc} *converge localement* vers (G, o) si elle converge par rapport à la distance locale d_{loc} . C'est par ailleurs, un exercice basique de montrer qu'une suite $\{(G_n, o_n), n \geq 0\}$ converge localement vers $(G, o) \in \mathcal{G}_{\text{loc}}$ si et seulement si pour tout rayon $d \geq 0$, il existe $N_d \geq 0$ tel que

$$(G_n^{[d]}, o_n) \equiv (G^{[d]}, o) \quad \text{pour tout } n \geq N_d.$$

Enracinement Uniforme & Convergence Locale Faible. Lorsqu'un graphe fini n'est pas enraciné, il n'y a pas (*a priori*) de choix d'enracinement préférentiel pour capturer les propriétés locales typiques du graphe. C'est pourquoi, on s'intéresse à la distribution empirique de tous les enracinements possibles, autrement dit si G est un graphe fini, on choisit une racine o uniformément au hasard parmi l'ensemble de sommets V .

Puisque \mathcal{G}_{loc} est un espace polonais, l'espace $\mathcal{P}(\mathcal{G}_{\text{loc}})$ des mesures de probabilités sur \mathcal{G}_{loc} équipée de la topologie de la convergence faible est également un espace polonais (voir par exemple [Bil68]).

Notation. Dans le but d'éviter toute confusion, nous notons par des **caractères gras** les variables aléatoires pour les distinguer des variables déterministes. De plus, si μ est une mesure de probabilité, on note \mathbb{E}_μ l'espérance par rapport à μ , *i.e.* pour toute fonction mesurable f , $\mathbb{E}_\mu[f] = \int f d\mu$. Si μ est une mesure aléatoire, alors on note \mathbb{E}_μ l'intensité de μ , *i.e.* l'espérance définie par

$$\mathbb{E}_\mu[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mu(A)] \quad \text{pour tout ensemble mesurable } A.$$

Définition

Une suite $(G_n)_{n \geq 0}$ de graphes déterministes finis **converge localement faiblement** vers un graphe (possiblement aléatoire) (G, \mathbf{o}) de loi ν si la suite de variables aléatoires $\{(G_n, \mathbf{o}_n), n \geq 0\}$, où \mathbf{o}_n est un sommet choisi uniformément au hasard parmi l'ensemble de sommets $V(G_n)$, converge en loi vers (G, \mathbf{o}) dans $(\mathcal{G}_{\text{loc}}, d_{\text{loc}})$.

Notons qu'enraciner un graphe fini G uniformément au hasard conduit à identifier une mesure de probabilité ν_G sur \mathcal{G}_{loc} , définie par

$$\nu_G(A) := \mathbb{P}((G, \mathbf{o}) \in A) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \delta_{(G, v)}(A) \quad \text{pour tout ensemble mesurable } A \subset \mathcal{G}_{\text{loc}}.$$

On peut ainsi reformuler de manière équivalente la définition précédente de convergence locale : une suite $(G_n)_{n \geq 0}$ de graphes déterministes finis converge localement faiblement vers un graphe (possiblement aléatoire) (G, \mathbf{o}) de loi ν , si la suite de mesures $(\nu_{G_n})_{n \geq 0}$ converge vers ν par rapport à la topologie faible induite par la distance locale d_{loc} .

Lorsque les graphes sont aléatoires, la présence de deux sources d'aléatoires, l'une provenant du graphe, l'autre de l'enracinement, font émerger deux notions de convergence locale non-équivalentes : une version dite *annealed* et une version dite *quenched*.

Définition

On dit qu'une suite $(G_n)_{n \geq 0}$ de graphes aléatoires à n sommets converge localement faiblement :

- (a) **dans le sens annealed** vers (G, \mathbf{o}) un graphe aléatoire de loi ν , si la suite de variables aléatoires $\{(G_n, \mathbf{o}_n), n \geq 0\}$, où \mathbf{o}_n est un sommet choisi uniformément au hasard parmi l'ensemble de sommets $V(G_n)$, converge en loi vers (G, \mathbf{o}) dans $(\mathcal{G}_{\text{loc}}, d_{\text{loc}})$.
- (b) **dans le sens quenched** vers une mesure aléatoire ν sur \mathcal{G}_{loc} , si la suite de mesures aléatoires $(\nu_{G_n})_{n \geq 0}$ converge en loi vers ν pour la topologie faible induite par la distance locale d_{loc} .

Remarquons que contrairement à la version annealed de la convergence locale où la mesure limite ν est déterministe, dans la version quenched la mesure limite ν est une mesure *aléatoire* sur \mathcal{G}_{loc} , c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans l'espace (polonais) $\mathcal{P}(\mathcal{G}_{\text{loc}})$. On peut de plus noter qu'étant donné un graphe aléatoire fini G , la mesure aléatoire ν_G correspondante n'est autre que la loi de $((G, \mathbf{o}) | G)$ c'est-à-dire la variable aléatoire (G, \mathbf{o}) conditionnelle à la réalisation du graphe G , et où \mathbf{o} est un sommet choisi uniformément au hasard. Par conséquent, intuitivement, dans la seconde définition le graphe aléatoire est comme gelé, tandis que dans la première définition le graphe aléatoire et le choix de la racine sont traités à un même niveau d'aléatoire.

La Définition (b) précédente peut donc se reformuler de manière équivalente comme

$$\mathbb{E} [h(G_n, \mathbf{o}_n) | G_n] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{E}_\nu [h(G, \mathbf{o})],$$

pour toute fonction continue bornée $h : \mathcal{G}_{\text{loc}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarquons que ces deux types de convergences sont naturellement liées. En effet, par un argument de convergence dominée, on peut constater que si $(G_n)_{n \geq 0}$ converge localement faiblement dans le sens quenched vers une mesure aléatoire ν , alors $(G_n)_{n \geq 0}$ converge localement faiblement dans le sens annealed vers un certain graphe aléatoire (G, \mathbf{o}) de loi $\bar{\nu}$ définie pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{G}_{\text{loc}}$ par $\bar{\nu}(A) :=$

$\mathbb{E}[\mathbf{v}(A)]$ ou de manière équivalente pour toute fonction continue bornée $h : \mathcal{G}_{loc} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{v}}[h(\mathbf{G}, \mathbf{o})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_{\mathbf{v}}[h(\mathbf{G}, \mathbf{o})]].$$

Dans les exemples ci-dessous et nos travaux, nous nous intéressons à une convergence locale dite en probabilité. Contrairement à ce que son nom peut suggérer, il ne s'agit pas de la convergence en probabilité de la suite $(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n)_{n \geq 1}$ vers un certain graphe limite (\mathbf{G}, \mathbf{o}) . Dans notre contexte, cette dernière est un mode de convergence assez difficile à vérifier, en particulier du fait de l'enracinement aléatoire. En effet, lorsque n varie, la racine \mathbf{o}_n doit être rééchantillonnée menant à beaucoup de variabilité dans $(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n)$ qui semble difficile à capturer par le graphe limite (\mathbf{G}, \mathbf{o}) . C'est ce qui motive les définitions suivantes.

Définition

On dit qu'une suite $(\mathbf{G}_n)_{n \geq 0}$ de graphes aléatoires à n sommets converge localement faiblement :

- (c) **en probabilité** vers (\mathbf{G}, \mathbf{o}) un graphe aléatoire de loi \mathbf{v} (possiblement aléatoire), si pour toute fonction continue bornée $h : \mathcal{G}_{loc} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[h(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n) \mid \mathbf{G}_n] \xrightarrow{(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbf{v}}[h(\mathbf{G}, \mathbf{o})],$$

où \mathbf{o}_n est un sommet choisi uniformément au hasard parmi l'ensemble de sommets $V(\mathbf{G}_n)$.

- (d) **presque sûrement** vers (\mathbf{G}, \mathbf{o}) un graphe aléatoire de loi \mathbf{v} (possiblement aléatoire), si pour toute fonction continue bornée $h : \mathcal{G}_{loc} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[h(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n) \mid \mathbf{G}_n] \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}_{\mathbf{v}}[h(\mathbf{G}, \mathbf{o})],$$

où \mathbf{o}_n est un sommet choisi uniformément au hasard parmi l'ensemble de sommets $V(\mathbf{G}_n)$.

Comme précédemment, ces deux modes de convergences peuvent être interprétés comme des convergences locales au sens *quenched* en probabilité ou presque sûrement des mesures empiriques $\mathbf{v}_{\mathbf{G}_n}$ vers une certaine mesure aléatoire \mathbf{v} .

Dans la suite, par souci de concision nous noterons *convergence locale en probabilité* en lieu et place de convergence locale *faible* en probabilité.

Dans la plus grande partie des convergences locales qui nous intéressent ici, la mesure limite est déterministe. Dans ce cas, il existe une méthode simple pour démontrer la convergence locale en probabilité en termes de convergence locale.

Proposition (Stufler [Stu23, Proposition 2.2])

Soit $(\mathbf{G}_n)_{n \geq 1}$ une suite de graphes aléatoires finis. Soient $\mathbf{o}_n, \mathbf{o}_n^{(1)}, \mathbf{o}_n^{(2)}$ des sommets de \mathbf{G}_n choisis *i.i.d.* uniformément au hasard, et soient $\mathbf{G}, \mathbf{G}^{(1)}, \mathbf{G}^{(2)}$ des graphes aléatoires *i.i.d.* de \mathcal{G}_{loc} , et notons $\mathbf{v}_{\mathbf{G}}$ la loi (déterministe) de \mathbf{G} . Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

(i) $\mathbf{v}_{\mathbf{G}_n} \xrightarrow{(\mathbb{P})} \mathbf{v}_{\mathbf{G}}$.

(ii) $((\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n^{(1)}), (\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n^{(2)})) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{G}^{(1)}, \mathbf{G}^{(2)})$.

Remarque. Le résultat précédent n'est plus vrai si la mesure limite \mathbf{v} est aléatoire. En effet, pour tout $n \geq 1$, considérons H_n^1 un graphe cyclique à n sommets et H_n^2 une grille $n \times n$ à n^2 sommets. Il n'est pas difficile de montrer que $H_n^1 \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$ et $H_n^2 \rightarrow (\mathbb{Z}^2, 0)$ convergent localement en probabilité. Soit $(\mathbf{G}_n)_{n \geq 1}$ un mélange des suites $(H_n^1)_{n \geq 1}$ et $(H_n^2)_{n \geq 1}$ construite de la manière suivante. Considérons X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p , et posons

$$(\mathbf{G}_n)_{n \geq 1} = (H_n^1)_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X=0\}} + (H_n^2)_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X=1\}}.$$

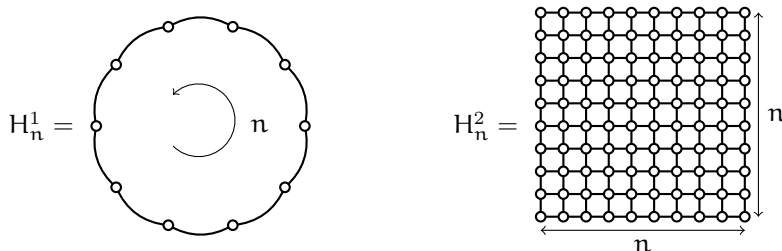


Figure 1.1 – Illustration des graphes H_n^1 et H_n^2 .

Il est alors évident que \mathbf{G}_n converge localement en probabilité vers la mesure aléatoire $\mathbf{v} = p\delta_{(\mathbb{Z},0)} + (1-p)\delta_{(\mathbb{Z}^2,0)}$, mais $((\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n), (\mathbf{G}_n, \mathbf{o}'_n))$ converge en loi vers

$$p \delta_{(\mathbb{Z},0)} \otimes \delta_{(\mathbb{Z},0)} + (1-p) \delta_{(\mathbb{Z}^2,0)} \otimes \delta_{(\mathbb{Z}^2,0)}$$

qui est différente de $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ si $p \notin \{0, 1\}$. ◇

Dans le cas des graphes évolutifs en temps, que nous définissons dans la Section 1.2, nous adaptons les définitions précédentes, et nous montrons que dans ce contexte l'implication (ii) \implies (i) reste vraie, ce qui nous permet de montrer que certaines classes de graphes dynamiques convergent localement en probabilité.

§ 1.1.2. Les Exemples Classiques

L'un des premiers résultats de convergence locale, non-énoncé en ces termes, remonte aux débuts des années 1980 et concerne les arbres aléatoires, c'est-à-dire des graphes sans cycle. Voir [Gri81]²⁶. Dans cette partie, nous donnons trois exemples classiques de convergence locale de graphes aléatoires. Pour chacun d'eux, on peut démontrer la convergence locale en utilisant une *méthode de couplage* et un *processus d'exploration*. Informellement, le processus d'exploration est un algorithme permettant de dévoiler la composante de la racine. À chaque étape, l'algorithme révèle le voisinage d'un sommet précédemment dévoilé par l'algorithme. Le graphe résultant est la boule d'un certain rayon centré en un sommet, ou sa composante connexe par exemple. Voir Figure 1.2 pour une illustration. La méthode de couplage consiste alors à montrer que lorsque le nombre de sommets est suffisamment grand, la boule de rayon $d \geq 1$ dévoilée par le processus d'exploration dans le graphe fini «est la même» que celle du graphe limite avec une grande probabilité. Nous donnons un aperçu de cette technique, que nous réutilisons dans le cadre dynamique, dans le cas du graphe aléatoire de Erdős-Rényi.

²⁶G. Grimmett démontra que si \mathbf{T}_n est un arbre choisi uniformément au hasard parmi tous les arbres définis sur l'ensemble de sommets $\{1, \dots, n\}$, alors \mathbf{T}_n converge (presque sûrement) localement faiblement vers la loi de l'*Arbre Squelettique Infini*.

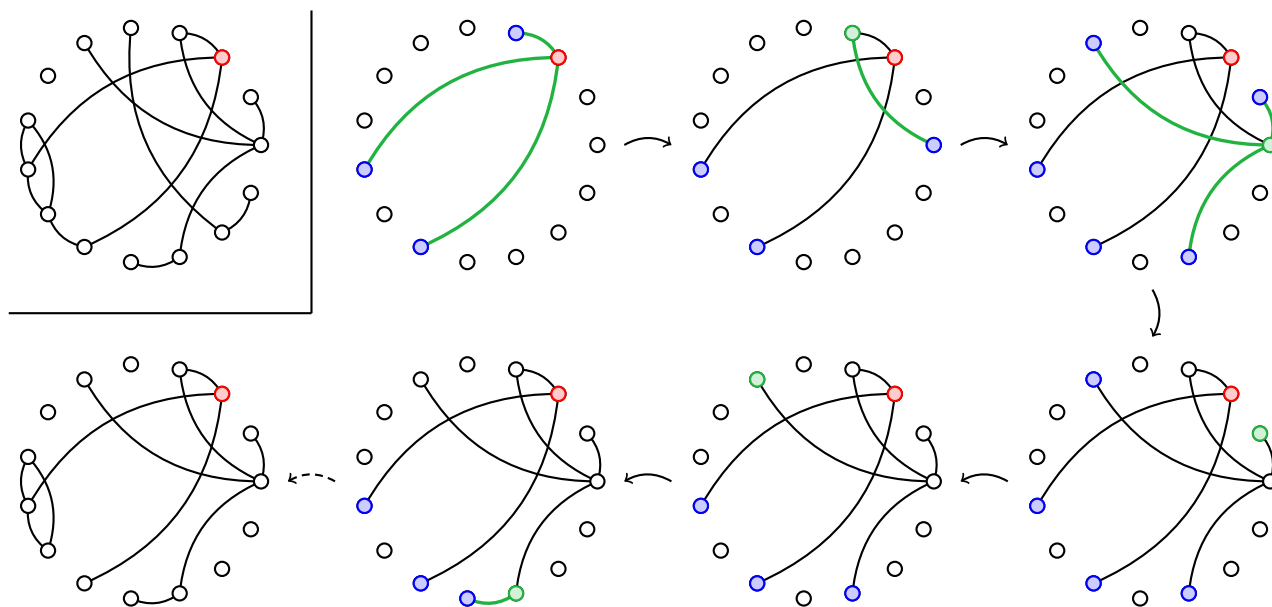


Figure 1.2 – Illustration d'un processus d'exploration de la composante d'un sommet. À chaque étape, un sommet est sélectionné (sommet vert) parmi les sommets dévoilés mais non explorés (sommets bleus), et son voisinage est alors révélé (arêtes vertes).

Graphe Aléatoire de Erdős-Rényi. L'un des modèles de graphes les plus simples et les plus étudiés est le modèle introduit en 1959 par E. Gilbert [Gil59] : le *graphe aléatoire de Erdős-Rényi*. Sur un ensemble à n sommets, parmi les $\binom{n}{2}$ arêtes possibles, chacune est gardée indépendamment des autres avec la même probabilité $p \in [0, 1]$. Le nom de ce modèle est dû à A. Rényi et P. Erdős pour leur grande contribution à l'étude de ce modèle. Voir par exemple [ER59, ER60, ER61b, ER61a]²⁷.

Dans le régime dilué où la probabilité de présence $p = p(n)$ se comporte comme κ/n lorsque $n \rightarrow \infty$ pour une certaine constante $\kappa > 0$, la suite de graphes aléatoires de Erdős-Rényi converge localement faiblement (presque sûrement) lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers la loi PGW(κ) d'un *arbre de Poisson-Galton-Watson* de paramètre κ . Initialement étudiée pour des questions de généalogies, cette loi se concentre sur les arbres enracinés et peut être décrite de la manière suivante : la racine donne naissance à un nombre aléatoire Z d'enfants distribué selon une loi de Poisson de paramètre κ . Puis, chacun de ces enfants (s'il y en a) indépendamment de son parent et des autres enfants, donne naissance à un nombre aléatoire d'enfants distribué encore selon une loi de Poisson de paramètre κ ; et ainsi de suite. Voir Figure 1.3 pour une simulation.

Donnons un court aperçu de ce résultat de convergence, et nous renvoyons à [DM10, Proposition 2.6] pour une démonstration complète. Fixons un sommet o dans un graphe de Erdős-Rényi avec un «grand» nombre de sommets, et explorons sa composante. Tout d'abord, le nombre de sommets adjacents de o est donné par une variable binomiale $\text{Bin}(n-1, \kappa/n)$ qui est approximativement égale à une loi de Poisson $\text{Poi}(\kappa)$. Ainsi la boule de rayon 1 centrée en o est approximativement égale à la boule de rayon 1 d'un arbre de Poisson-Galton-Watson. Intéressons-nous maintenant aux voisins de o . Chacun d'entre eux est lié

²⁷Dans leurs travaux, les auteurs s'intéressent à un modèle plus général dans lequel m arêtes sont choisies uniformément au hasard parmi les $\binom{n}{2}$ arêtes possibles.

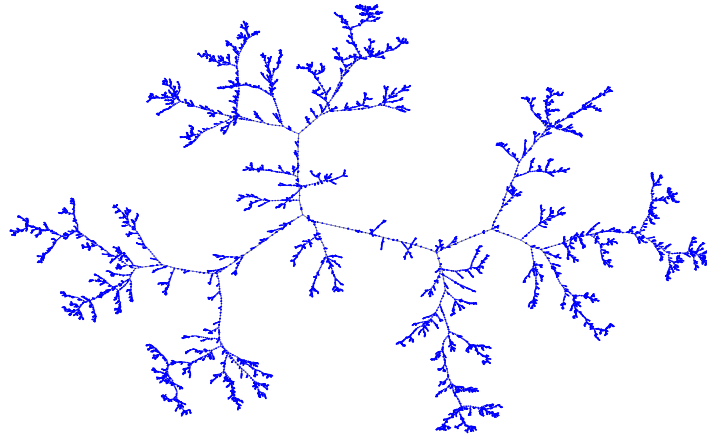


Figure 1.3 – Simulation d'un arbre de Poisson-Galton-Watson critique à 20000 sommets.

à o et à d'autres sommets du graphe dont le nombre est donné par une variable binomiale $\text{Bin}(n-2, \kappa/n)$ qui, encore une fois, est approximativement égale à une loi de Poisson $\text{Poi}(\kappa)$. Et ainsi de suite. Les deux points importants sont que lorsqu'on *explore* le voisinage d'un sommet :

- il est très peu probable qu'il soit un voisin d'un sommet déjà exploré, ou autrement dit, la boule centrée en o possède (avec une grande probabilité) une structure d'arbre (voir Figure 1.4) ; et
- les nombres de *nouveaux* sommets dévoilés sont (à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$) indépendants.

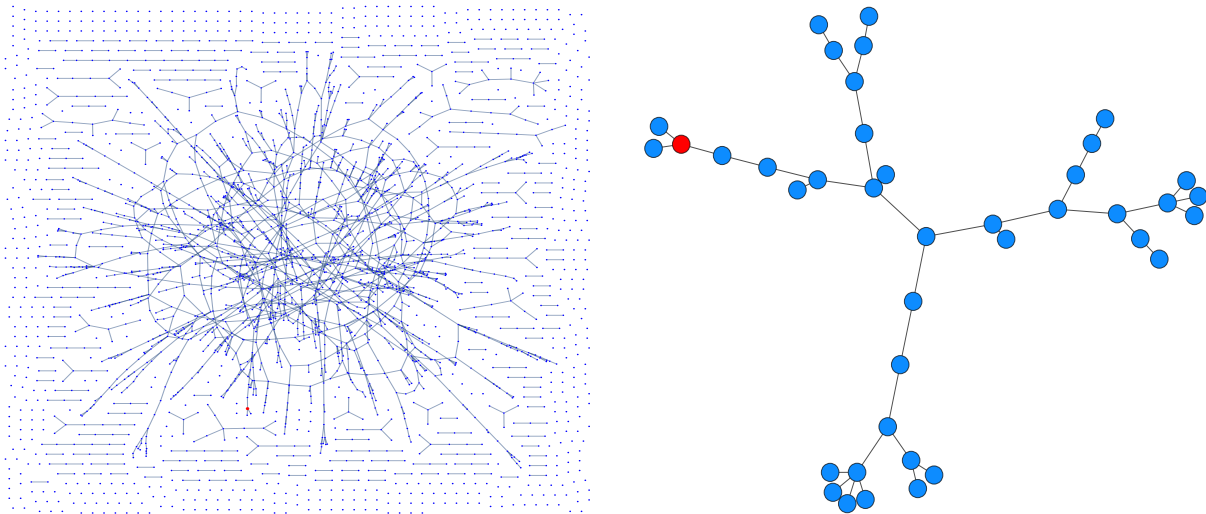


Figure 1.4 – Simulation d'un graphe de Erdős-Rényi avec $n = 3000$ sommets et $\kappa = 1.5$ (à gauche) et la boule centrée en un sommet uniforme o_n (en rouge) de rayon $10 \simeq \ln(3000)$ (à droite). Rappelons qu'il est possible de coupler un graphe enraciné de Erdős-Rényi $\text{ER}(n, \kappa)$ avec un arbre de Poisson-Galton-Watson $\text{PGW}(\kappa)$ tel qu'avec une grande probabilité leur boule coïncide (au moins) jusqu'à distance $\ln n$.

Grphe Aléatoire Inhomogène. Le modèle de graphe aléatoire que nous étudions principalement dans cette thèse, et dont le modèle de Erdős-Rényi est un cas particulier, est celui du *graphe aléatoire inhomogène*. Dans un graphe aléatoire inhomogène, chacun des sommets u possède un *type* x_u à valeurs dans un espace de Borel (S, μ) . Le graphe est alors construit en gardant chaque arête indépendamment les unes des autres, mais cette fois-ci avec des probabilités différentes qui dépendent des types des sommets $p_{u,v}(n) = 1 \wedge \kappa(x_u, x_v)/n$, où κ est une certaine fonction convenable appelée *noyau*. Le formalisme général de tels graphes a été décrit dans [BJR07] par B. Bollobás, S. Janson et O. Riordan. Le terme *inhomogène* est en contraste avec le modèle de Erdős-Rényi qui est dit *homogène* dans le sens où tous les sommets sont exactement équivalents dans la définition du modèle.

Sous certaines conditions dites diluées, le graphe aléatoire inhomogène converge localement faiblement vers un arbre de Poisson-Galton-Watson multitype de noyau κ , dont la loi est notée $\text{MPGW}(\kappa)$, c'est-à-dire un arbre dans lequel un individu de type x est remplacé à la génération suivante par un processus de Poisson sur S d'intensité $\kappa(x, y)\mu(dy)$. Nous renvoyons à [Hof23, Theorem 3.14] pour une démonstration.

Modèle de Configuration. Le terme *configuration* a été introduit par B. Bollobás dans [Bol80] pour décrire une représentation d'un graphe dans lequel les degrés sont prescrits. Cette description lui permet de généraliser et retrouver une formule d'énumération asymptotique du nombre de graphes (et d'hypergraphes) à n sommets à degrés prescrits donnée par E. Bender et E. Canfield dans [BC78]. M. Molloy et B. Reed ont ensuite étudié l'existence et la taille de la composante géante, ou encore le nombre chromatique pour un modèle de configuration plus général. Voir [MR95, MR98]. Dans le modèle de configuration sur un ensemble de sommets V , le degré de chacun des sommets v est donné par un nombre (possiblement aléatoire) $d_v \geq 0$ correspondant à des *demi-arêtes*. Ces demi-arêtes sont alors appariées uniformément au hasard pour former le (multi)-graphe. Voir Figure 1.5 pour une illustration de cette construction. Le multi-graphe aléatoire résultant peut comporter des boucles et des multi-arêtes, mais ces dernières peuvent être respectivement effacées et fusionnées pour obtenir un graphe simple.

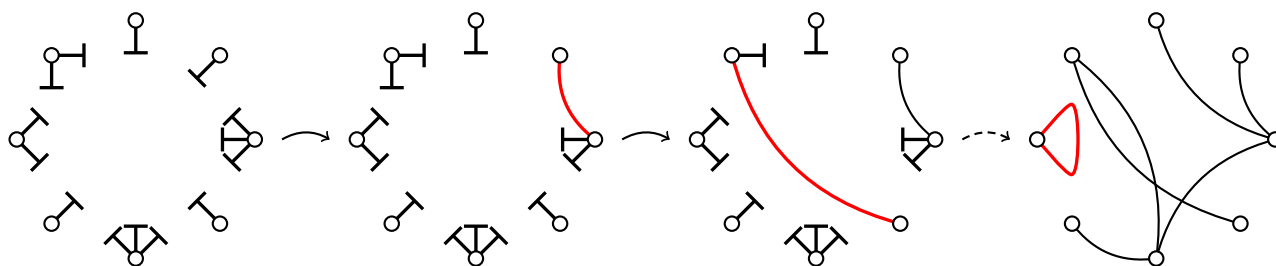


Figure 1.5 – Procédure «graphique» pour construire un modèle de configuration avec degrés prescrits : à chaque étape, on choisit deux demi-arêtes parmi celles restantes pour former une arête du (possiblement multi)-graphe.

Lorsque ces degrés d_v sont *i.i.d.* selon une loi μ vérifiant deux hypothèses faibles de régularité²⁸, alors le modèle de configuration converge localement faiblement (presque sûrement) vers l'*arbre de Poisson-Galton-Watson unimodulaire* (voir par exemple [DM10, Proposition 2.5] ou [Hof23, Theorem 4.1] pour une démonstration basée sur une méthode de couplage). La loi de cet arbre aléatoire enraciné est obtenue à

²⁸Si d_n désigne le degré du sommet o dans le modèle de configuration sur un ensemble à n sommets, alors on suppose que $d_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} d$ et $\mathbb{E}[d_n] \rightarrow \mathbb{E}[d] < +\infty$ où d est une variable aléatoire sur \mathbb{N} d'espérance finie telle que $\mathbb{P}(d \geq 1) = 1$.

partir d'un processus de Galton-Watson dans lequel la racine a comme loi de descendance μ , et tous ses descendants possèdent la loi μ biaisée par la taille comme loi de descendance $\hat{\mu}$ définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\hat{\mu}(n) = \frac{(n+1)\mu(n)}{\sum_{k \geq 1} k\mu(k)}.$$



Figure 1.6 – Plus grande composante connexe d'un modèle de configuration à 100 000 sommets simulés avec des degrés *i.i.d.* de loi Binomiale de paramètre $\kappa = 1.033$. Remarquons que cette composante possède une structure d'arbre.

Remarquons que l'arbre de Poisson-Galton-Watson défini précédemment est un arbre de Galton-Watson *unimodulaire*. Cette notion d'unimodularité décrit le fait qu'un graphe (aléatoire) satisfait un certain *principe de transport de masse*. De la même manière que précédemment, on peut considérer et définir $\mathcal{G}_{\text{loc}}^{\bullet\bullet}$ l'espace des classes d'isomorphismes des graphes localement finis enracinés deux fois, et sa topologie naturelle. Alors une mesure de probabilité μ sur \mathcal{G}_{loc} obéit à un *principe de transport de masse* si pour toute fonction mesurable $f : \mathcal{G}_{\text{loc}}^{\bullet\bullet} \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int \sum_{x \in V(G)} f(G, o, x) \, d\mu([G, o]) = \int \sum_{x \in V(G)} f(G, x, o) \, d\mu([G, o]).$$

De manière imprécise, si on considère $f(G, o, x)$ comme la masse envoyée de o vers x , alors l'égalité précédente affirme qu'en moyenne sous μ , aucun sommet ne joue un rôle plus important que les autres.

Dans le contexte des limites locales, cette notion d'unimodularité apparaît comme centrale. On peut montrer que si $(\mathbf{G}_n)_{n \geq 1}$ converge localement faiblement vers un certain graphe aléatoire (\mathbf{G}, o) , alors ce dernier est unimodulaire. Cependant, l'une des questions les plus intéressantes de ce domaine concerne la réciproque.

Problème ouvert (Aldous & Lyons [AL07, Question 10.1])

Montrer que tous les graphes aléatoires unimodulaires apparaissent comme la limite locale faible d'une suite de graphes aléatoires uniformément enracinés.

Ce problème a été résolu dans quelques cas spéciaux²⁹, mais il demeure ouvert en général. Sa résolution

²⁹Voir par exemple [BLS15] dans le cas des arbres aléatoires unimodulaires.

aurait d'importants impacts en théorie des groupes³⁰ puisqu'elle entraînerait par exemple que tous les groupes sont sofiques.

§ 1.1.3. Application de la Limite Locale au Processus de Contact

Nous décrivons ici une application de la théorie de la convergence locale des graphes à l'étude du processus de contact. Introduit par T. Harris dans [Har74], le *processus de contact* est un modèle populaire de propagation d'épidémie dans une population. Étant donné un graphe fini $G = (V, E)$, chaque sommet est soit *infecté*, soit *sain*. Le processus de contact de taux d'infection λ est un système de particules en interaction évoluant en temps continu, où chaque sommet infecté infecte chacun de ses voisins à taux λ et devient sain à taux 1. Notons que la configuration dans laquelle tous les sommets sont sains est un état absorbant. On appelle *temps d'extinction* le temps auquel la dynamique rejoint cet état absorbant. Puisqu'on considère un graphe fini, d'après la théorie générale des processus de Markov, ce temps d'extinction est presque sûrement fini. Nous sommes cependant intéressés par l'identification d'un régime dans lequel on a une *extinction lente*, c'est-à-dire un régime dans lequel pour tout taux d'infection $\lambda > 0$, avec une grande probabilité le temps d'extinction est au moins exponentiel en la taille du graphe. Un temps d'extinction lent est un régime particulièrement intéressant puisqu'il correspond à un phénomène de *métastabilité* : un système physique rejoignant son état d'équilibre très lentement parce qu'il passe beaucoup de temps dans des états qui sont des minima locaux d'énergie qu'on appelle *états métastables*³¹. Un exemple bien connu de phénomène de métastabilité est celui de la condensation : quand la vapeur d'eau refroidit lentement, elle persiste un long moment dans un état de vapeur (métastable) avant de transiter vers un état liquide (stable) sous l'influence d'une fluctuation aléatoire. Dans notre modèle, la métastabilité suggère, informellement, que partant initialement de tous les sommets infectés, la densité de sommets infectés décroît rapidement vers une *densité métastable*, et reste proche de celle-ci jusqu'à un temps de survie exponentiel de l'infection. Déterminer la densité métastable a été l'objet de nombreux travaux sur divers modèles de graphes comme le modèle de configuration dans [MVY13] et [CS15] ou encore les graphes aléatoires hyperboliques dans [LMSV21].

Le travail effectué dans [MVY13] par T. Mountford, D. Valesin et Q. Yao est particulièrement intéressant dans notre contexte. En effet, pour comprendre et étudier asymptotiquement la densité métastable de l'infection sur le modèle de configuration où les degrés suivent une loi puissance, les auteurs ont recours à la limite locale du modèle de configuration. Par ailleurs, la limite locale n'est pas le seul outil de leur arsenal. Grâce à un couplage explicite précis du graphe fini et de sa limite locale, ils montrent que, informellement, comprendre l'évolution du processus de contact sur le graphe fini revient à comprendre l'évolution de ce dernier sur la limite locale qui, pour le modèle de configuration, est un arbre (aléatoire). La belle idée se cachant derrière le couplage précédent est la suivante : si dans le graphe fini (ayant un grand nombre de sommets) le processus de contact reste confiné dans une (grande) boule dans un intervalle de temps suffisamment long, alors ce dernier sur ce même intervalle de temps peut-être comparé (de manière sensible) à un processus de contact évoluant dans une grande boule du graphe limite.

³⁰Le terme *unimodularité* provient de la théorie des groupes. Si G est un graphe, alors on peut considérer son groupe d'automorphismes. On dit que G est *unimodulaire* si son groupe d'automorphismes possède une mesure non-nulle invariante à gauche et à droite par la multiplication d'un élément du groupe.

³¹Le lecteur intéressé pourra consulter le livre d'A. Bovier et F. den Hollander [BdH15] pour un traitement en profondeur de la métastabilité concernant différents modèles de particules en interaction.

§ 1.2. Le Contexte des Graphes Dynamiques

À notre connaissance, l'étude de graphes dynamiques, *i.e.* lorsque les arêtes sont autorisées à apparaître et disparaître au cours du temps, a été initiée au début des années 1970. Le premier exemple de *réseaux changeant en temps*³² a été donné dans le domaine de la sociologie par P. Holland et S. Leinhardt dans [HL78] dans le but d'étudier et comprendre l'évolution des réseaux sociaux. De nombreux travaux sur ces réseaux changeant en temps ont été ensuite accomplis en physique ou en épidémiologie, pour modéliser la diffusion d'information ou de contamination sur des réseaux sociaux. Cependant, la littérature mathématique concernant ces graphes dynamiques, qui a débuté à la fin des années 1990 dans le domaine de la percolation, ne s'est accentuée que ces dernières années. Dans [HPS97], O. Häggström, Y. Peres et J. Steif introduisent un modèle de percolation évoluant dans le temps selon une dynamique markovienne pour lequel ils démontrent qu'en-dessous (resp. au-dessus) du paramètre de percolation critique du graphe sous-jacent, il n'existe jamais (resp. toujours avec une probabilité positive) une composante infinie. L'étude de ces graphes dynamiques suscite bon nombre d'intérêts et semblent s'être accélérée ces dernières années, en particulier en ce qui concerne l'étude du comportement de la marche aléatoire (nous renvoyons par exemple aux travaux récents [PSS18, AGvdHdH18, AGHdH19, PSS20, HS20, ST20]), du processus de contact (voir [JM17, JLM19, LR20, HUVV22, JLM22] pour des résultats récents), etc.

De plus, dans ce contexte dynamique, l'étude d'objets limites a débuté depuis quelques années dans deux contextes différents :

- celui des *graphons*, introduit dans [LS06], qui s'intéresse à la densité limite des homomorphismes de graphes finis. Des travaux tentant d'introduire des *graphons aléatoires dynamiques* ont été réalisés par exemple dans [Rát12, Cra16, Cra17]. Dans [Cra16], D. Crane construit à partir d'un graphe aléatoire dynamique un processus limite qui est donné par le graphon obtenu à chaque instant. Dans ce cadre, il montre que certaines propriétés du graphe survivent à la limite comme par exemple la propriété de Markov.
- celui des *limites d'échelles*, qui s'intéresse à la convergence de graphes aléatoires d'un point de vue global. Nous renvoyons le lecteur à [BBI01] pour plus de détails concernant ce mode de convergence. Dans [GPS18], C. Garban, G. Pete et O. Schramm identifient la limite d'échelle de la percolation dynamique pour la percolation critique sur le réseau triangulaire comme un processus limite pouvant être interprété comme une percolation dynamique sur un «graphe convenable». R. Rossignol, quant à lui, démontre une convergence en limite d'échelle pour la percolation dynamique sur un graphe de Erdős-Rényi critique dans [Ros21]. Cette fois-ci la limite d'échelle est un processus de croissance-fragmentation «explicite» sur des graphes continus.

Cependant, l'étude de la limite locale faible pour des graphes dynamiques ne semble pas avoir été initiée. Le but principal de ce travail est de répondre à la question suivante :

À quoi ressemble la structure dynamique locale d'une boule centrée en un sommet choisi uniformément au hasard $\mathbf{o}_n \in \mathcal{V}_n$ lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini ?

À ce stade, la question demeure encore imprécise. Dans la partie 1.2.1, nous donnons une première approche à cette question en s'intéressant à un exemple simple qui est celui de la percolation dynamique sur le graphe

³²Traduction française de *Time-changing networks*. On peut aussi trouver la dénomination *temporal networks* ou encore *time-varying networks* dans la littérature physique.

complet. Puis dans la partie 1.2.2, nous introduisons (informellement) l'espace des graphes dynamiques enracinés et le concept de convergence locale étudié et développé dans [DJ23]. Enfin dans les parties 1.2.3 et 1.2.4, nous énonçons les résultats obtenus dans [DJ23] concernant respectivement la convergence locale pour le graphe aléatoire inhomogène dynamique et son application à l'étude du processus de contact.

§ 1.2.1. Une Première Approche : la Topologie de Skorokhod pour la Limite Locale

Les graphes dynamiques que nous considérons dans ce manuscrit et dans [DJ23] sont des graphes dont la dynamique est donnée par une **percolation dynamique** introduite par O. Häggström, Y. Peres et J. Steif dans [HPS97]. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, la dynamique est définie comme suit : les arêtes sont rafraichies à taux 1 ; à un instant de rafraichissement l'arête est déclarée *ouverte* avec probabilité p et *fermée* avec probabilité $1 - p$. La configuration du graphe G à un instant t peut être interprétée comme un élément G_t de $\{0, 1\}^{|E|}$ où 0 correspond à une arête fermée, et 1 à une arête ouverte. L'évolution du graphe $(G_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov stationnaire avec comme mesure invariante la mesure de percolation \mathcal{P}_p sur $\{0, 1\}^{|E|}$, et peut être vue comme un système de particules particulièrement simple : chaque arête $\{u, v\}$ change d'état à taux

$$\begin{cases} p & \text{si } G_t(\{u, v\}) = 0 \\ 1 - p & \text{si } G_t(\{u, v\}) = 1 \end{cases}$$

et la probabilité que deux arêtes changent d'états simultanément est nulle.

Nous considérons dans cette partie le graphe complet $K_n = (V_n, E_n)$ avec

$$V_n = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E_n = \{\{u, v\} : u, v \in V_n \text{ et } u \neq v\}$$

comme graphe sous-jacent où $p = \kappa/n$ avec $\kappa > 0$. La percolation sur le graphe complet est exactement le graphe de Erdős-Rényi, d'où le nom de **graphe aléatoire de Erdős-Rényi dynamique** donné à la percolation dynamique évoluant sur le graphe complet. Voir Figure 1.7.

Notons pour la suite $(G_t^{n, \kappa})_{t \geq 0}$ ce graphe évolutif, et $DER(n, \kappa)$ ³³ sa loi.

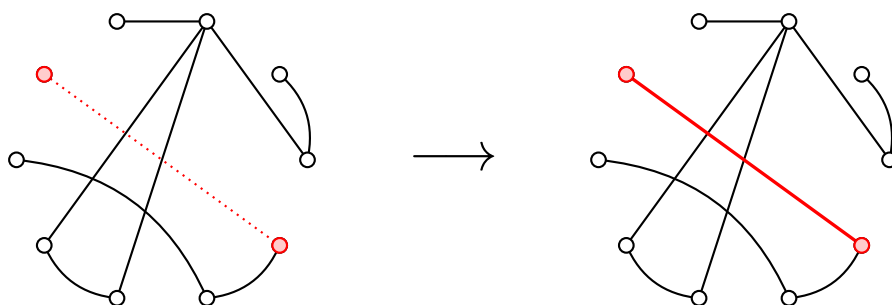


Figure 1.7 – Une transition pour la percolation dynamique sur le graphe complet. L'arête en pointillées rouges, absente du graphe à gauche, est celle mise-à-jour.

Remarquons que puisque la dynamique est stationnaire, à chaque instant $t \geq 0$, $G_t^{n, \kappa}$ est un graphe de Erdős-Rényi qui converge localement faiblement vers un arbre de Poisson-Galton-Watson de loi $PGW(\kappa)$. Il est alors naturel de se demander :

³³*Dynamical Erdős-Rényi random graph* est la correspondance anglaise de *graphe aléatoire de Erdős-Rényi dynamique*.

La percolation dynamique sur le graphe complet, dans le régime dilué, converge-t-elle localement faiblement vers une version dynamique de l'arbre de Poisson-Galton-Watson ?

Les graphes dynamiques que nous considérons dans ce manuscrit sont des processus càdlàg³⁴ à valeurs dans l'espace polonais $(\mathcal{G}_{\text{loc}}, \mathbf{d}_{\text{loc}})$. Si nous notons $\mathbb{C}\text{àdlàg}_{\text{loc}}$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0, \infty[$ dans $(\mathcal{G}_{\text{loc}}, \mathbf{d}_{\text{loc}})$, alors c'est un fait classique qu'on peut munir $\mathbb{C}\text{àdlàg}_{\text{loc}}$ d'une distance \mathbf{d}_{Sk} pour laquelle $(\mathbb{C}\text{àdlàg}_{\text{loc}}, \mathbf{d}_{\text{Sk}})$ est maintenant un espace polonais. Voir par exemple [EK86, Chapitre 3] pour une définition de cette topologie appelée *topologie J1 de Skorokhod*. Il est donc naturel de s'intéresser à la convergence de la percolation dynamique dans l'espace de Skorokhod $(\mathbb{C}\text{àdlàg}_{\text{loc}}, \mathbf{d}_{\text{Sk}})$.

Dans ce contexte, le processus apparaissant comme limite naturelle de la percolation dynamique sur le graphe complet est un arbre de Poisson-Galton-Watson *dynamique*, noté $(G_t^{\infty, \kappa})_{t \geq 0}$ ou DPGW(κ), qui peut être décrit comme suit : au temps 0, $G_0^{\infty, \kappa}$ est un arbre de Poisson-Galton-Watson PGW(κ). Puis la dynamique est la suivante :

- chaque arête est *coupée* à taux 1. À un instant de coupure, $G_t^{\infty, \kappa}$ n'est autre que l'arbre contenant la racine.
- chaque sommet, à taux κ , gagne un nouvel enfant qui est la racine d'un nouvel arbre PGW(κ) indépendant de l'évolution passée.

Heuristiquement, la première transition provient simplement du fait que dans le graphe fini, chaque arête a une probabilité κ/n de rester présente à un instant de mise-à-jour, qui tend vers 0 lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini. Autrement dit, informellement si une arête disparaît dans la boule centrée, alors elle ne réapparaît pas. La seconde transition provient du fait que la dynamique peut révéler une nouvelle arête incidente à n'importe quel sommet de la boule qui est typiquement relié à une toute nouvelle partie du graphe encore non-observée, et qui a une structure locale décrite approximativement par un arbre PGW(κ).

Cependant, si nous sommes intéressés par l'étude de processus évoluant simultanément sur ces graphes dynamiques plusieurs problèmes se posent.

- D'une part, puisqu'on considère les classes d'isomorphismes la dynamique du graphe peut «disparaître». Voir la Figure 1.8 pour une illustration.

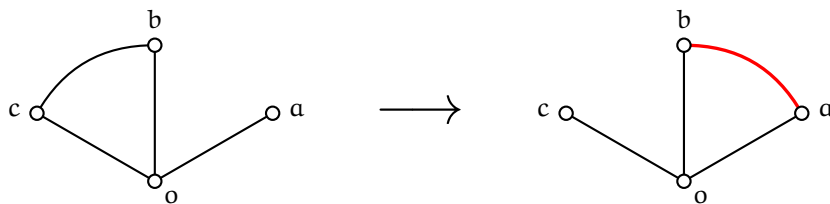


Figure 1.8 – Exemple d'une transition qui n'apparaît pas pour les processus à valeurs dans \mathcal{G}_{loc} : les graphes à gauche et à droite (enracinés en o) sont isomorphes.

- D'autre part, on peut immédiatement se questionner sur le choix fait plus haut «de ne garder que la partie de l'arbre contenant la racine» après avoir coupé une arête. Il s'agit de l'approche naturelle

³⁴Continue à droite et possédant une limite à gauche.

lorsque l'on s'intéresse seulement à la structure locale du graphe autour de la racine à tout instant, mais qui ne semble pas suffisante pour comprendre l'évolution du processus de contact.

Il est ainsi plus naturel de considérer l'espace des *classes d'isomorphismes de processus de graphes*. C'est dans cette optique que nous introduisons et développons une nouvelle théorie encodant cette dynamique locale autour d'un sommet à la fois en espace et en temps, et que nous décrivons brièvement dans la partie suivante.

§ 1.2.2. L'Espace des Graphes Dynamiques & Convergence Locale Dynamique

L'espace des graphes dynamiques et la convergence locale sont les objets du Chapitre 3. Nous ne donnons donc ici qu'un bref aperçu de cette nouvelle notion, qui s'apparente à celle exposée plus tôt concernant les graphes statiques³⁵, et nous renvoyons le lecteur aux chapitres suivants pour plus de détails.

Commençons par définir les graphes dynamiques que nous considérons. Un *graphe dynamique enraciné* est un processus de graphes enracinés $(G_t, o)_{t \geq 0} = ((V_t, E_t), o)_{t \geq 0}$ indexé par le temps $t \geq 0$, où l'ensemble des sommets V_t contient toujours le sommet distingué o , appelé la *racine*, et est inclus dans une «réserve» de sommets V . On suppose de plus que les graphes dynamiques :

- ont un ensemble de sommets V_t croissant, *i.e.* $V_s \subset V_t \subset V$ pour tous $s \leq t$. Cette hypothèse peut être interprétée comme une propriété de continuité à droite des graphes dynamiques. On note alors $V_\infty = \bigcup_{t \geq 0} V_t$, et
- sont *localement finis* dans le sens où à chaque instant $t \geq 0$, le graphe des arêtes accumulées jusqu'au temps t , *i.e.* lorsqu'on ignore les disparitions des arêtes, est localement fini. On dira de plus que le graphe dynamique est *fini* si $|V_\infty| < \infty$.

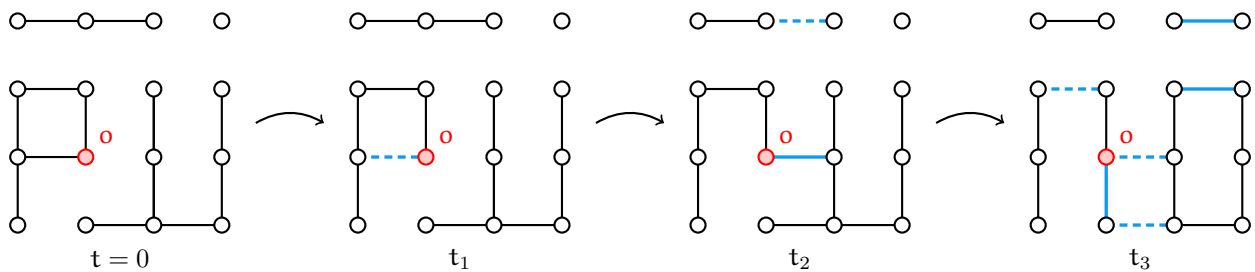


Figure 1.9 – Illustration des premières transitions d'un graphe dynamique enraciné. À un instant de transition, les arêtes disparaissant du graphe sont en pointillées bleues, et celles apparaissant sont pleines bleues.

Comme dans le cadre statique, on peut introduire une notion d'isomorphisme entre deux graphes dynamiques enracinés. On dit que deux graphes dynamiques enracinés $(G_t^1, o_1)_{t \geq 0}$ et $(G_t^2, o_2)_{t \geq 0}$ sont *isomorphes*, et on note $(G_t^1, o_1)_{t \geq 0} \equiv (G_t^2, o_2)_{t \geq 0}$, s'il existe une application bijective $\gamma : V_\infty(G^1) \rightarrow V_\infty(G^2)$ qui préserve la racine et la dynamique des arêtes, c'est-à-dire :

³⁵C'est-à-dire sans dynamique.

- $\gamma(o_1) = o_2$, et
- $\gamma((G_t^1, o_1)_{t \geq 0}) = (G_t^2, o_2)_{t \geq 0}$, *i.e.* pour tout temps $t \geq 0$, $\gamma(V_t(G^1)) = V_t(G^2)$ et $\{u, v\} \in E_t(G^1)$ si et seulement si $\{\gamma(u), \gamma(v)\} \in E_t(G^2)$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'application γ ne dépend pas du temps $t \geq 0$.

La relation d'isomorphisme de graphes dynamiques est une relation d'équivalence, et on note alors \mathcal{DG}_\bullet l'ensemble des classes d'équivalences de \equiv des graphes dynamiques enracinés localement finis³⁶.

Pour comprendre l'évolution du voisinage d'un sommet typique dans un graphe dynamique, nous introduisons une notion de boules dynamiques gardant en mémoire l'évolution en espace et en temps de tous les sommets qui dans le passé ont été dans le voisinage de ce sommet typique. Étant donné un graphe dynamique enraciné $(G_t, o)_{t \geq 0} = ((V_t, E_t), o)_{t \geq 0}$ sur un ensemble de sommets V fixé, où E_t constitue l'ensemble des arêtes présentes au temps t , et o est un sommet de V fixé, on définit $(G_t^{[d]}, o)_{t \geq 0}$ la *boule dynamique* de rayon $d \geq 0$ centrée en o comme le graphe dynamique enraciné où à chaque instant $t \geq 0$, l'ensemble des sommets est donné par

$$V_t^{[d]}(G) = \left\{ u \in V : \exists k < d, \exists 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k \leq s_{k+1} \leq t, \right. \\ \left. \exists u_1, \dots, u_k \in V, o \stackrel{s_1}{\sim} u_1 \stackrel{s_2}{\sim} \dots \stackrel{s_k}{\sim} u_k \stackrel{s_{k+1}}{\sim} u \right\},$$

et l'ensemble des arêtes présentes est donné par

$$E_t^{[d]}(G) = \left\{ u \sim v \in E_t : u, v \in V_t^{[d]}(G) \right\},$$

où la notation $u \stackrel{s}{\sim} v$ signifie que les sommets u et v sont voisins au temps s .

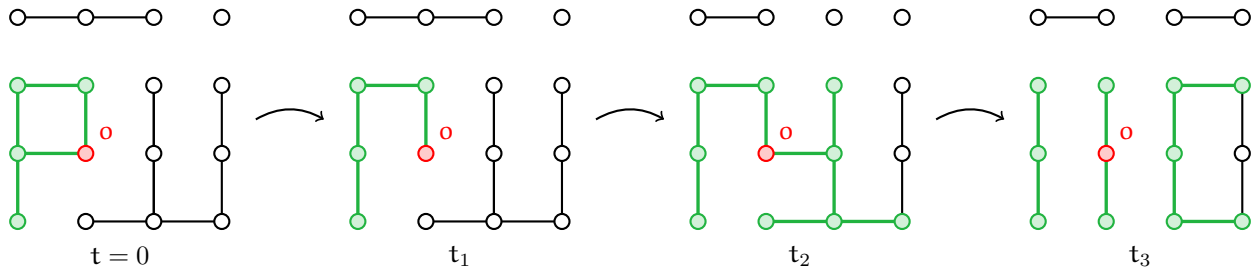


Figure 1.10 – Illustration de l'évolution de la boule dynamique de rayon 3 centrée en o .

Définition

On dit alors qu'une suite $\{(G_t^n, o_n)_{t \geq 0}, n \geq 0\}$ de \mathcal{DG}_\bullet **converge localement** vers un graphe dynamique $(G_t, o)_{t \geq 0}$ si pour tout temps $T \geq 0$ et tout rayon $d \geq 0$, il existe $N_{T,d} \geq 0$ tel que

$$(G_t^{n,[d]}, o_n)_{0 \leq t \leq T} \equiv (G_t^{[d]}, o)_{0 \leq t \leq T} \quad \text{pour tout } n \geq N_{T,d}.$$

On appelle **topologie de la convergence locale dynamique** la topologie induite par la notion de convergence précédente.

³⁶Nous insistons sur la différence significative entre \mathcal{DG}_\bullet et $\mathbb{C}\text{àdlàg}_{\text{loc}}$: $\mathbb{C}\text{àdlàg}_{\text{loc}}$ est l'ensemble des fonctions à valeurs dans les classes d'équivalences \mathcal{G}_{loc} , et \mathcal{DG}_\bullet est l'ensemble des classes d'équivalences d'un certain ensemble de fonctions à valeurs dans l'ensemble des graphes.

Proposition 1 (Avec E. Jacob)

La topologie de la convergence locale dynamique est métrisable, et l'espace métrique résultant est complet.

Remarquons que la topologie introduite s'apparente à celle de la convergence uniforme sur les compacts pour les fonctions càdlàg. Ainsi pour la même raison, la topologie de la convergence locale dynamique échoue à rendre l'espace \mathcal{DG}_\bullet polonais (contrairement à l'espace \mathcal{G}_{loc}). Cependant si on considère $\mathcal{CDG}_\bullet \subset \mathcal{DG}_\bullet$, le sous-ensemble des graphes enracinés *càdlàg*, dans le sens où pour tout temps fini $t \geq 0$ et toute distance $d \geq 1$, le processus $(G_s^{[d]}, \mathbf{o})_{0 \leq s \leq t}$ a un nombre fini ou dénombrable de sauts et est continu à droite. À l'image de l'espace $\mathcal{C}\text{àdlàg}_{loc}$, on peut munir \mathcal{CDG}_\bullet d'une topologie, qu'on appelle *topologie locale dynamique de Skorokhod* rendant cet espace polonais. Cet espace fournit un autre cadre de travail naturel, mais nous obtenons des résultats pour la topologie locale dynamique plus fine. Pour cette raison, nous ne travaillons pas avec la topologie locale dynamique de Skorokhod.

On peut de plus introduire de la même manière les notions de convergence locale dynamique faible (resp. dans les sens annealed, quenched, en probabilité et presque sûrement) pour des graphes finis dynamiques déterministes (resp. aléatoires) non-enracinés, en choisissant uniformément au hasard la racine parmi l'ensemble de sommets V_∞ (quitte à l'ajouter à V_0 s'il n'est pas présent au temps initial). Donnons uniquement la définition de convergence locale en probabilité qui est la notion de convergence qui nous intéresse par la suite.

Définition

Étant donnée une suite $\{(G_t^n)_{t \geq 0}, n \geq 1\}$ de graphes aléatoires dynamiques sur V_n , on dit que $\{(G_t^n)_{t \geq 0}, n \geq 1\}$ **converge localement en probabilité** vers $(G_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}$ de loi (possiblement aléatoire) \mathbf{v} si pour toute fonction continue bornée $h : \mathcal{DG}_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$, on a la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires

$$\mathbb{E} [h((G_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}) \mid (G_t^n)_{t \geq 0}] = \frac{1}{n} \sum_{v \in V_n} h((G_t^n, v)_{t \geq 0})$$

vers la variable aléatoire $\mathbb{E}_{\mathbf{v}} [h((G_t^\infty, \mathbf{o})_{t \geq 0})]$.

Dans ce contexte, le graphe aléatoire de Erdős-Rényi dynamique converge localement faiblement en probabilité vers un processus limite $(\mathcal{T}_t^\kappa)_{t \geq 0}$, appelé *arbre à croissance-segmentation* de Poisson-Galton-Watson, dont la loi est notée $\text{GSPGW}(\kappa)$. Ce processus limite n'est pas à valeurs dans l'espace des arbres, mais possède la propriété d'être (dynamiquement) sans cycle. Un graphe dynamique est *sans cycle* si pour tout instant $t \geq 0$, il n'existe pas de chemin-espace partant et arrivant à un même sommet. Voir Figure 1.11.

Un *arbre à croissance-segmentation* $(T_t)_{t \geq 0}$ est un graphe dynamique sans cycle tel qu'à chaque instant $t \geq 0$, le graphe des arêtes accumulées est un arbre. Ainsi, à chaque instant, T_t est donc une forêt dans laquelle une arête accumulée est soit présente au temps t , soit absente. On dit dans le second cas que l'arête est *segmentée*. On note alors \mathcal{ST} l'ensemble de tels arbres, qu'on appelle *arbres segmentés*. Informellement, un arbre segmenté (ordonné) est un arbre plan (ordonné) dans lequel certaines arêtes sont absentes. Voir

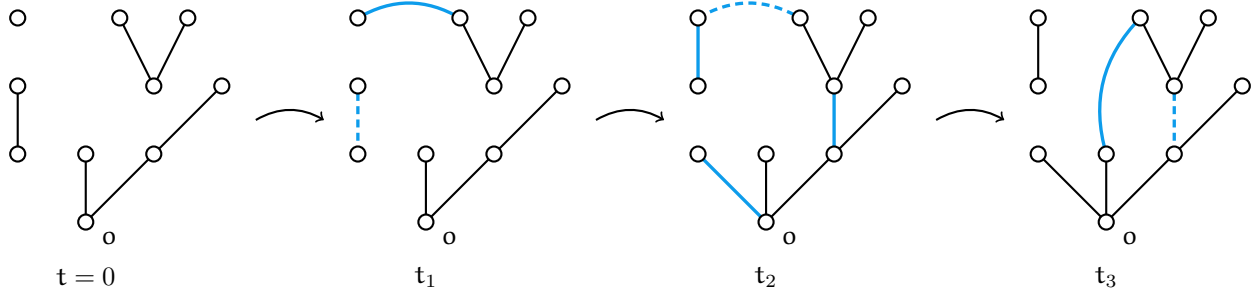


Figure 1.11 – Illustration de la notion de cycle. Un cycle dynamique issu de o apparaît au temps t_3 .

Figure 1.12. Plus formellement, l'ensemble \mathcal{ST} est constitué des triplets $\tau = (V, \tilde{E}, E)$ où (V, \tilde{E}) est un arbre enraciné (ordonné), et $E \subset \tilde{E}$ est l'ensemble des arêtes de l'«arbre» τ .

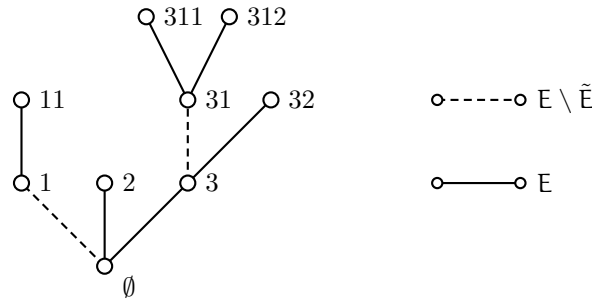


Figure 1.12 – Un arbre segmenté (ordonné). Les arêtes segmentées sont en pointillées.

Pour de tels processus deux transitions naturelles peuvent se produire : une transition dite de *segmentation* durant laquelle une (ou plusieurs) arête(s) peuvent disparaître ; et une transition dite de *croissance* durant laquelle un (ou plusieurs) nouveau(x) arbre(s) segmenté(s) peuvent être attaché(s) à un (ou plusieurs) sommet(s) existant(s). Voir Figure 1.13.

Grâce aux définitions précédentes, le graphe dynamique limite $\text{GSPGW}(\kappa)$ peut être décrit de la manière suivante. À l'instant initial $t = 0$, \mathcal{T}_0^κ est un arbre de loi $\text{PGW}(\kappa)$, puis la dynamique est définie comme suit :

- chaque arête est *segmentée* à taux 1. À un instant de segmentation, l'arête disparaît du graphe, mais le sous-arbre descendant est conservé.
- chaque sommet, à taux κ , gagne un nouvel enfant qui est la racine d'un nouvel arbre $\text{PGW}(\kappa)$ indépendant de l'évolution passée.

Proposition 2 (Avec E. Jacob)

La percolation dynamique $(G_t^{\kappa, \kappa})_{t \geq 0}$ converge localement faiblement en probabilité vers $\text{GSPGW}(\kappa)$ dans \mathcal{DG}_\bullet .

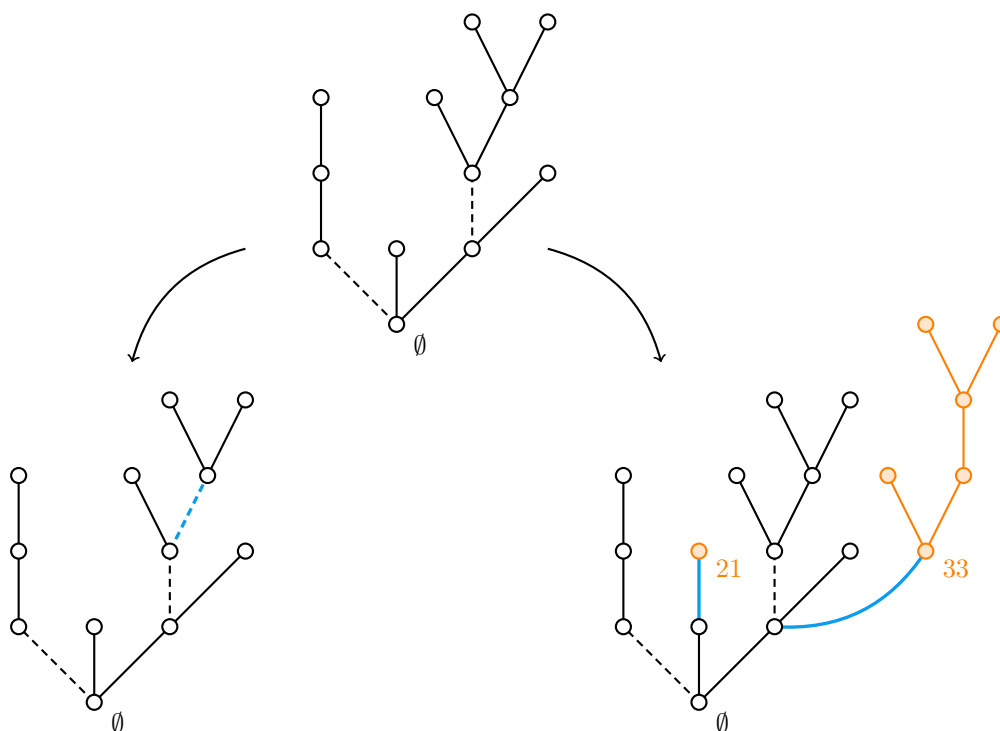


Figure 1.13 – Illustration des transitions d'un arbre à croissance-segmentation. À gauche : Segmentation d'une arête. À droite : Croissance en deux sommets.

Bien que défini informellement via ses taux de transitions sur l'espace non dénombrable \mathcal{ST} , le processus limite $\text{GSPGW}(\kappa)$ est bien défini et possède la propriété de Markov forte.

Proposition 3 (Avec E. Jacob)

Le processus $\text{GSPGW}(\kappa)$ est un processus de Markov fort sur \mathcal{ST} .

Plus qu'un résultat de convergence locale, notre méthode de démonstration permet de construire un couplage explicite entre la boule dynamique centrée en un sommet choisi uniformément au hasard dans $G^{n,\kappa}$, jusqu'à un temps et une distance arbitraires, et celle dans le graphe limite GSPGW^κ , telles qu'elles coïncident avec une grande probabilité lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini.

Proposition 4 (Avec E. Jacob)

On peut coupler les boules dynamiques dans $G^{n,\kappa}$ et GSPGW^κ jusqu'aux temps t et distance d telles qu'elles coïncident avec probabilité au moins

$$1 - 34 \frac{(1 + \kappa + \kappa t)^{2d+1}}{n}.$$

On peut de plus choisir le temps t et la distance d dépendants de n , et dans ce cas le précédent couplage réussit avec une probabilité tendant vers 1 lorsque n tend vers l'infini, si par exemple d est fixé et $t = t(n) = o(n^{1/(2d+1)})$.

Donnons un court aperçu intuitif du lien entre les deux boules dynamiques du graphe fini et du graphe limite. Fixons un rayon $d \geq 1$, une racine $o \in V_n$ dans le graphe fini, et explorons sa composante dynamique. À l'instant initial, la boule dynamique n'est autre que la boule statique dans un graphe $ER(n, \kappa)$. Ainsi lorsque n est suffisamment grand, avec une grande probabilité il s'agit de la boule de rayon d d'un arbre $PGW(\kappa)$. Puis dans cet arbre fini, trois transitions peuvent se produire :

- une arête disparaît de la boule, on parle alors de *segmentation*. Une arête présente se segmente à taux $1 - \kappa/n$ qui tend vers 1, soit le taux de segmentation d'une arête dans le graphe limite ; ou
- une arête au sein de la boule apparaît, ce qui se produit à taux κ/n pour chacune d'elles. Si le nombre de sommets présents dans la boule à l'instant initial est un $o(n)$ ³⁷, alors le taux total de ces transitions tend vers 0. En d'autres termes, cette apparition ne se produit pas dans la limite. Remarquons que ces deux heuristiques indiquent que si la boule dynamique dans le graphe fini a une structure d'arbre (ou de forêt) et qu'une arête disparaît, alors elle ne réapparaît pas (avant un temps suffisamment long) ; ou
- une arête entre un sommet de la boule u et un sommet v *non-observé*, c'est-à-dire extérieur à la boule, apparaît. Pour ce sommet u , cela se produit à taux $\#\{\text{sommets non-observés à } t = 0\} \times \kappa/n$ qui tend bien vers κ si, encore une fois, le nombre de sommets présents dans la boule à l'instant initial est un $o(n)$. De plus, ce nouveau sommet v n'apparaît pas tout seul dans la boule, il entraîne avec lui sa propre composante connexe³⁸ qui est presque un graphe $ER(n, \kappa)$, dû à la dynamique stationnaire et markovienne. Ainsi v «est» la racine d'un nouvel arbre $PGW(\kappa)$. On parle ici de *croissance*.

En conséquence, on en déduit que la boule dynamique centrée en o dans $ER(n, \kappa)$ et celle dans $GSPGW(\kappa)$ sautent vers (presque) les mêmes états avec (presque) les mêmes taux de transitions. Il suffit donc maintenant de coupler les temps de sauts de ces processus pour établir la Proposition 4. C'est l'objet du Lemme Lemma A.1.2 que l'on peut résumer comme suit : *Si deux processus de Markov ont des taux de transitions «proches», alors on peut les coupler tels qu'avec une grande probabilité, ils coïncident jusqu'à un temps aléatoire donné par une variable exponentielle.*

Remarquons toutefois qu'il est clair qu'il ne peut exister un couplage qui tienne sur l'intervalle de temps $[0, +\infty[$ tout entier, mais au travers du lemme précédent on en construit un qui tienne au moins jusqu'à un temps (aléatoire) T_n qui tend vers $+\infty$ avec n .

§ 1.2.3. Deux Modèles de Graphes Aléatoires Inhomogènes Dynamiques

Dans ce manuscrit, nous ne considérons pas seulement la percolation dynamique sur le graphe complet, mais un modèle de graphe dynamique plus général nous autorisant des inhomogénéités aussi bien dans les probabilités de connexions, encodées par un *noyau de connexion* κ (comme pour les modèles de graphes aléatoires inhomogènes), que dans les vitesses auxquelles chacune des arêtes se met à jour, encodées par

³⁷Ce qui est bien le cas !

³⁸Au sens classique, c'est-à-dire une composante statique.

un *noyau de mise-à-jour* β .

Le graphe dynamique décrit ci-dessous est un graphe dynamique sur lequel on a ajouté une structure additionnelle de *marques* ou de *types*³⁹ à chacun des sommets, appartenant à un *espace de marques* (S, d) supposé métrique (compact et ordonné) munie d'une mesure de probabilité μ . Les noyaux κ et β sont alors des fonctions définies sur $S \times S$. Très souvent, nous noterons dans la suite, $x_u \in S$ le type du sommet $u \in V_\infty(G)$.

Un *réseau dynamique* ou *graphe dynamique marqué* est alors un couple (G, m) , où G est un graphe dynamique et m une fonction de marques appartenant à $S^{V_\infty(G)}$. Deux réseaux dynamiques enracinés (G^1, o_1, m_1) et (G^2, o_2, m_2) sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme γ entre les graphes dynamiques enracinés (G^1, o_1) et (G^2, o_2) telle que γ préserve les marques des sommets.

On peut de la même manière que précédemment définir une topologie de la convergence locale sur \mathcal{DN}_\bullet , l'espace des classes d'isomorphismes des graphes marqués enracinés, qui est métrisable par une métrique rendant \mathcal{DG}_\bullet complet. Les notions de convergences locales pour de tels réseaux sont similaires à celle des graphes.

Similairement au cas homogène, le processus limite est un «arbre» qu'on appelle *arbre à croissance-segmentation de Poisson-Galton-Watson multitype* de noyaux κ et β , que l'on note $(\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ ou $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, dont la dynamique, markovienne, est décrite comme suit :

- au temps $t = 0$, la loi de $\mathcal{T}_0^{\kappa, \beta}$ est distribuée comme $\text{MPGW}(\kappa)$;
- chaque arête présente $u \sim v$ dans $\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta}$ est segmentée à taux $\beta(x_u, x_v)$; et
- chacun des sommets $u \in \mathcal{T}_t^{\kappa, \beta}$, donne naissance à taux $\kappa(x_u, y)\beta(x_u, y)\mu(dy)$ à un arbre de loi $\text{MPGW}(\kappa, y)$, c'est-à-dire un arbre $\text{MPGW}(\kappa)$ conditionné à avoir une racine de type y .

Comme dans le cas homogène, le processus $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$ est un processus de Markov à valeurs dans l'espace des arbres segmentés *multitype*, noté \mathbb{ST}_S .

Théorème 5 (Avec E. Jacob)

Le processus $(\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ est un processus de Markov fort sur \mathbb{ST}_S .

Nous pouvons à présent énoncer l'un des résultats principaux de ce manuscrit.

Théorème 6 (Avec E. Jacob)

La percolation dynamique inhomogène $(G_t^{n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ converge localement faiblement en probabilité vers $(\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ dans \mathcal{DN}_\bullet .

³⁹Dans le cadre général des réseaux dynamiques, nous utiliserons le terme marques.

La démonstration de ce résultat repose sur deux ingrédients. Tout d'abord, nous nous intéressons au cas où l'espace des marques S est fini. Brièvement dans ce cas, on peut remarquer que l'heuristique présentée dans le cas ERD reste vraie si on ajoute des marques sur les sommets. Cet argument repose sur une *méthode de couplage* pour les processus de Markov décrits par des processus de Poisson, et entre des lois binomiales et de Poisson. Le fait que S soit fini nous permet de réaliser un couplage exact, c'est-à-dire un couplage tel que les boules dans le graphe fini et dans le graphe limite coïncident (au moins jusqu'à une certaine distance et jusqu'à un certains temps). Il s'agit du contenu du résultat suivant.

Théorème 7 (Avec E. Jacob)

Supposons que $S = \{1, \dots, r\}$ est fini, et soit $k \in \mathbb{N}$, et conditionnons à une réalisation des types des sommets. Alors il existe une constante finie $c = c(\kappa, \beta)$ qui dépend seulement des noyaux κ et β , telle que pour tout $n \geq 0$ et tous choix t_n et d_n , on peut coupler k boules dynamiques uniformément enracinées d'un graphe aléatoire inhomogène dynamique

$$\left((G_t^{n, \kappa, \beta, [d_n]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq t_n}, \dots, (G_t^{n, \kappa, \beta, [d_n]}, \mathbf{o}_k)_{0 \leq t \leq t_n} \right)$$

avec k copies indépendantes de $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, tronquées à distance d_n et à l'intervalle de temps $[0, t_n]$, telles qu'elles coïncident avec probabilité au moins

$$1 - \frac{(c(1 + t_n))^{2d_n + 1}}{n} - (c(1 + t_n))^{d_n + 1} \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right|.$$

D'autre part, pour étendre le Théorème 6 aux noyaux généraux, nous utilisons une *méthode d'approximation* des noyaux généraux par des noyaux dits de *type-finis*, c'est-à-dire des noyaux ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Cet argument d'approximation est très similaire à celui utilisé et développé dans [BJR07, Section 7], et doit être adapté à notre cadre dynamique. Informellement, cette méthode suggère qu'on peut approcher le modèle fini et le modèle limite par des graphes dynamiques qui coïncident (au moins jusqu'à un certains temps et une certaine distance avec une grande probabilité) dans lesquels les noyaux de connexion et de mise-à-jour sont à valeurs dans un espace fini.

Dans le modèle précédent, nous considérons un modèle de percolation dynamique dans lequel les arêtes sont mises à jour indépendamment les unes des autres. Il aurait été également naturel de considérer un modèle dans lequel cette fois-ci les sommets sont mis à jour. Dans un tel modèle, des horloges exponentielles sont placées sur chacun des sommets. Lorsque l'une de ces horloges sonne, les arêtes du sommet en question disparaissent et de nouvelles sont tirées indépendamment les unes des autres, des autres arêtes de la configuration et du passé.

Tous les résultats énoncés précédemment pour la percolation dynamique inhomogène restent vrais pour le *graphe aléatoire dynamique par sommets inhomogène*. Cependant, nous n'énonçons ici que le résultat principal de convergence locale.

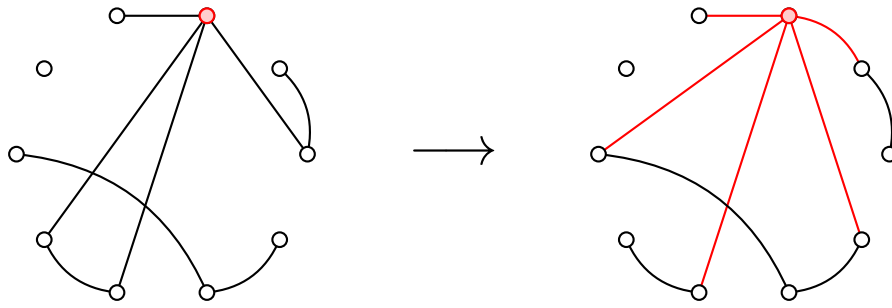


Figure 1.14 – Illustration d'une transition du graphe aléatoire inhomogène dynamique avec mise-à-jour par sommets. Le sommet rouge à gauche est celui choisi pour être mis à jour. Les arêtes rouges à droite sont les nouvelles arêtes formées.

Théorème 8 (Avec E. Jacob)

Le graphe aléatoire dynamique par sommets inhomogène $(H_t^{n,\kappa,\beta})_{t \geq 0}$ converge localement faiblement en probabilité dans \mathcal{DN}_\bullet .

Bien que nous ne l'ayons pas défini, on peut à ce stade aisément deviner quelle peut être la limite de ce modèle. Notons seulement que dans ce cas, à la différence de $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, dans cet arbre à croissance-segmentation limite, lorsqu'un sommet est mis à jour, toutes ces connexions disparaissent de l'arbre et il donne naissance à nombre aléatoire (suivant une loi de Poisson) de nouveaux arbres PGW.

§ 1.2.4. Application au Processus de Contact

Dans [JLM19] et [JLM22], E. Jacob, A. Linker et P. Mörters étudient le processus de contact évoluant sur un graphe aléatoire inhomogène dynamique (resp. dynamique par sommets et dynamique par arêtes) pour lesquels ils obtiennent le résultat de métastabilité suivant. En notant $I_n(t)$ l'espérance du nombre de sommets infectés au temps t pour le processus de contact partant initialement de tous les sommets infectés, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

1. pour toute suite $(t_n)_{n \geq 0}$ qui tend vers $+\infty$ plus lentement que $e^{\varepsilon n}$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_n(t_n) > 0,$$

2. pour toutes suites $(s_n)_{n \geq 0}$ et $(t_n)_{n \geq 0}$ qui tendent vers $+\infty$ plus lentement que $e^{\varepsilon n}$, on a

$$I_n(s_n) - I_n(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

La fonction I_n est en fait décroissante, ainsi quelques soient $1 \ll s_n \ll t_n \leq e^{\varepsilon n}$, la fonction I_n est approximativement constante sur tout l'intervalle de temps $[s_n, t_n]$ et prend une valeur loin de 0. Cependant, ils ne démontrent pas comment cette valeur dépend de n , et en particulier si les *densité métastable inférieure* et *densité métastable supérieure*, définies respectivement par $\rho^-(\lambda) = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n(t_n)$ et $\rho^+(\lambda) = \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n(t_n)$, coïncident. Cette question apparaît comme une conséquence simple de notre résultat de convergence locale.

Proposition 9 (Avec E. Jacob)

Notons $\theta(\lambda)$ la probabilité que le processus de contact de taux d'infection λ survive sur $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, partant initialement de seulement la racine infectée. Alors, dans le régime d'extinction lente, on a

$$\rho^+(\lambda) = \rho^-(\lambda) = \theta(\lambda) > 0.$$

Par ailleurs, le régime d'extinction lente est le régime où [JLM22] montre qu'il y a extinction lente pour toute valeur de $\lambda > 0$, ce qui implique en particulier que $\rho^-(\lambda) > 0$. Il est alors raisonnable de conjecturer que le lien entre métastabilité et $\theta(\lambda) > 0$ est vrai en général.

Problème ouvert

Montrer que $\theta(\lambda) > 0$ précisément lorsqu'il y a extinction lente du processus de contact, et de plus dans ce cas il y a métastabilité avec densité métastable $\theta(\lambda)$.

§ 1.3. Perspectives

Les résultats de convergences locales des Chapitres 4 et 5 amènent naturellement à quelques perspectives de recherche.

Une Multitude de Questions. Nous démontrons ici un résultat de convergence locale pour une classe de graphes dynamiques, et il est tout à fait raisonnable de penser que d'autres modèles de graphes dynamiques convergent localement. Très récemment, dans [AGvdHdH18] L. Avena, H. Güldas, F. den Hollander et R. van der Hofstad ont introduit un modèle de configuration dynamique (en temps discret) sur lequel ils étudient le temps de mélange d'une marche aléatoire. Il serait intéressant de déterminer si ce modèle converge localement.

Question Ouverte

Le modèle de configuration dynamique converge-t-il localement faiblement ?

Pour ce modèle on peut imaginer, comme dans le présent travail, un raisonnement utilisant un argument de couplage avec le processus limite qui, devrait être similaire à la limite locale du graphe aléatoire dynamique par sommets inhomogène, à la différence (des taux de transitions et) qu'à l'instant initial et lorsque de nouveaux enfants sont ajoutés à un sommet de l'«arbre» limite, les arbres $\text{PGW}(\kappa)$ sont remplacés par des arbres $\text{PGW}(\kappa)$ unimodulaires, c'est-à-dire la limite locale du modèle de configuration dans le cadre statique. Ceci ne représente qu'un exemple parmi d'autres, ce qui fournit ainsi tout un panorama de questions ouvertes.

Une seconde question, qui était le point de départ de ce travail de thèse, serait d'utiliser ces limites locales pour étudier les processus évoluant sur ces derniers. Par exemple, si le modèle de configuration dynamique admettait une limite locale, on pourrait s'attendre à un résultat de métastabilité du processus de contact évoluant sur ce dernier, à l'image de T. Mountford, D. Valesin et Q. Yao dans [MVY13].

La Notion pour elle-même. Une dernière question serait d'étudier cette nouvelle notion de convergence locale pour elle-même. Rappelons que dans le cas statique, I. Benjamini et O. Schramm (voir [BS01]) ont montré que si un graphe est la limite locale d'une suite de graphes localement finis, alors ce graphe limite est *unimodulaire*. La question de déterminer si à l'inverse tous les graphes unimodulaires sont des limites locales demeure encore ouverte aujourd'hui, et est connectée (entre autre) au domaine de la théorie des groupes. Nous renvoyons à [AL07] pour plus de détails sur cette question. Dans notre cadre de travail dynamique, on peut alors se poser la question de savoir si une notion d'unimodularité similaire existe et si on obtient le même type de propriétés et de questions que dans le cadre statique. Cette question sort du cadre de cette thèse, mais nous proposons dans la Section 5.3, comme ouverture, une définition d'unimodularité qu'il serait intéressant d'étudier.

* * *

2 | Processus de Lévy α -Stables & Principe de Grandes Déviations

“ It is an old maxime of mine that when you have excluded the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth. ”

Sherlock Holmes, *The Sign of Four*.

Très récemment, C. Profeta a estimé la queue de distribution logarithmique asymptotique de l'aire sous l'*excursion normalisée d'un processus de Lévy α -stable sans saut négatif*, avec $1 < \alpha < 2$. Ces excursions, que nous noterons $(e_t)_{t \in [0,1]}$ ⁴⁰ dans la suite, sont, informellement, des processus dont les incréments sont stationnaires et indépendants, satisfaisant un principe d'invariance par changement d'échelle de paramètre α , conditionnés à rester positif et à revenir en 0 au temps 1. Si nous notons $a_p \asymp b_p$ lorsque $p \rightarrow \infty$, s'il existe deux constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ telles que pour tout $p \geq 1$ suffisamment grand, on a $c_1 a_p \leq b_p \leq c_2 a_p$, alors C. Profeta a démontré le résultat suivant :

Théorème (Profeta [Pro21])

$$-\log \mathbb{P} \left(\int_0^1 e_t dt > x \right) \asymp x^{\alpha/(\alpha-1)} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

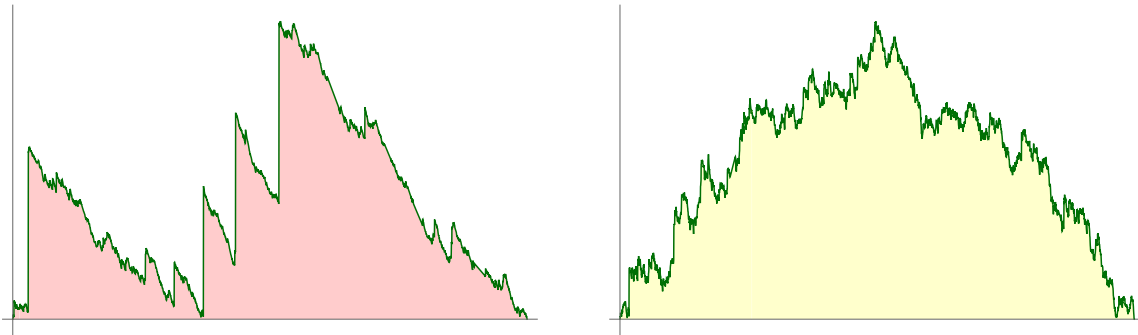


Figure 2.1 – Simulations de l'aire sous une excursion normalisée $4/3$ -stable (à gauche) et $7/4$ -stable (à droite).

Il obtient ce résultat asymptotique par des méthodes combinatoires. En calculant tout d'abord la transformée de Laplace double, qui peut être exprimée comme un analogue des fonctions de Airy, appelée *fonction de M-Wright*, il peut déduire une relation de récurrence pour les moments de $\int_0^1 e_t dt$, de laquelle découle l'asymptotique ci-dessus.

⁴⁰ e pour excursion.

La question naturelle qui nous concerne ici est donc la suivante :

Peut-on obtenir un équivalent exact pour la queue de distribution logarithmique asymptotique de $\int_0^1 e_t dt$?

Grâce à la théorie des *principes de grandes déviations*, dont la définition formelle est donnée plus bas, nous répondons positivement à cette question.

Théorème 10 (Avec C. Goldschmidt & G. Miermont)

$$-\log \mathbb{P} \left(\int_0^1 e_t dt > x \right) \sim (\alpha - 1) \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha^\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} x^{\alpha/(\alpha-1)} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Le travail présenté ici constitue une contribution à la très riche étude des principes de grandes déviations fonctionnelles des processus de Lévy, pour lesquels nous établissons des principes de grandes déviations pour les ponts et excursions normalisées de processus de Lévy α -stables sans saut négatif.

§ 2.1. Processus de Lévy

Processus de Lévy. Un *processus de Lévy* $L = (L_t)_{t \geq 0}$ est un processus réel càdlàg issu de 0 ayant des accroissements stationnaires et indépendants. Il est bien connu que la loi d'un processus de Lévy L est caractérisée par une fonction $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ appelée *exposant caractéristique* de L et donnée par la formule de Lévy-Khintchine :

$$\Psi(\lambda) = i\lambda a + \frac{Q\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx),$$

où $a \in \mathbb{R}$, $Q \geq 0$ est la *composante gaussienne* de L , et ν est une mesure sur \mathbb{R}^* , appelée *mesure de Lévy*, telle que $\int (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty$. En particulier, Ψ est continue à droite et pour tout $t \geq 0$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] = e^{-t\Psi(\lambda)}$. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons particulièrement à une classe de processus de Lévy : les processus de Lévy dit *spectralement positifs*, c'est-à-dire sans saut négatif. Dans ce cas, la mesure de Lévy ν est nulle sur $[0, +\infty[$.

Le lecteur est encouragé à consulter [Ber96, Cha97] pour plus de détails concernant les processus de Lévy.

Processus de Lévy α -Stables. Un cas particulier de processus de Lévy auquel nous nous intéressons est celui du processus *stable* d'indice $\alpha \in]1, 2[$. Dans ce cas, la mesure de Lévy $\nu(dx)$ est un multiple de la mesure $x^{-1-\alpha} dx$. La transformée de Laplace de L_t est alors de la forme $\mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] = e^{c t \lambda^\alpha}$ pour un certains $c > 0$, ce qui nous permet de déduire que L satisfait la propriété d'invariance par changement d'échelle :

$$(L_t)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\lambda^{-1/\alpha} L_{\lambda t})_{t \geq 0}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Dans la suite, on considère des processus de Lévy stables normalisés, c'est-à-dire pour lesquels $c = 1$. On note de plus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle associée à L , et $(p_t)_{t \geq 0}$ la densité de son semi-groupe de

transition. Remarquons que puisque L possède la propriété d'invariance par changement d'échelle, il en est de même pour p_t , c'est-à-dire que pour tout temps $t > 0$,

$$p_t(x) = t^{-1/\alpha} p_1(xt^{-1/\alpha}).$$

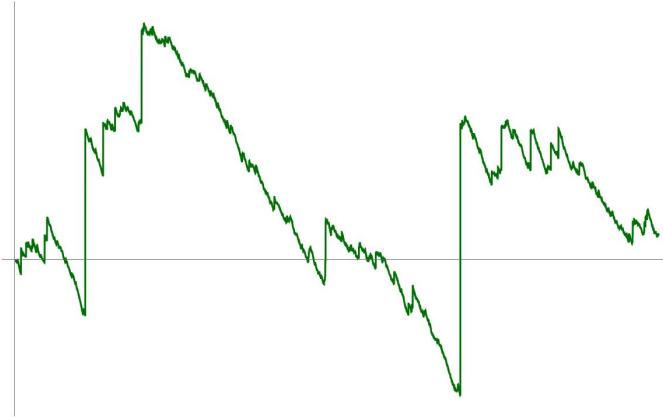


Figure 2.2 – Simulation d'un processus de Lévy $4/3$ -stable spectralement positif.

Ponts & Excursions. Dans cette thèse nous étudions particulièrement les ponts et les excursions des processus de Lévy. Soit L un processus de Lévy α -stable sans saut négatif. Informellement, pour $a \in \mathbb{R}$, le processus $b^{(a)}$, appelé *pont de Lévy* $(0, 0) \rightarrow (1, a)$, est obtenu en conditionnant L à être égal à a au temps 1. Il s'agit évidemment d'un conditionnement dégénéré, cependant il peut être obtenu grâce à une h -transformée inhomogène par rapport à la fonction $\frac{p_{1-t}(a-L_t)}{p_1(a)}$ (voir par exemple [Lig68]). Ceci signifie que la loi de $b^{(a)}$ peut être définie par

$$\mathbb{P}^{\text{br}}(\Lambda) := \mathbb{E} \left[\frac{p_{1-t}(a-L_t)}{p_1(a)} \mathbb{1}_\Lambda \right], \quad \forall \Lambda \in \mathcal{F}_t.$$

La loi de l'excursion stable de longueur 1, notée \mathbb{P}^{ex} , peut être définie par la *théorie des excursions de Itô*. Notons $I_t = \inf\{L_s : 0 \leq s \leq t\}$ l'infimum de L jusqu'au temps t . Le processus $L - I$, appelé *excursion de L au-dessus de son infimum*, est un processus de Markov fort. Lorsque le processus L est stable, 0 est toujours régulier pour lui-même pour $L - I$. Soit \mathcal{E} l'espace des excursions :

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \text{Càdlàg}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) : f(0) = 0 \text{ et } \zeta(f) = \sup\{t \geq 0, f(t) > 0\} \in]0, \infty[\right\}$$

et soit N la mesure ponctuelle

$$N(\text{dtdf}) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \delta_{(-I_{g_i}, f^i)},$$

où on a noté $]g_i, d_i[$, $i \in \mathcal{J}$ les excursions de $L - I$ au-dessus de 0, et

$$\forall i \in \mathcal{J}, \forall s \geq 0, \quad f_s^i = L_{(g_i+s) \wedge d_i} - L_{g_i} \in \mathcal{E}.$$

D'après la théorie des excursions de Itô, il existe alors une mesure σ -finie \underline{n} , appelée *mesure de Itô* définie sur \mathcal{E} telle que N est une mesure de Poisson d'intensité $\text{dt} \underline{n}(\text{df})$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{E}$. La loi de l'excursion stable

normalisée e est alors donnée par la mesure de Itô conditionnée à un temps de vie de l'excursion $\zeta = \zeta(e)$ égal à 1. Comme précédemment, ce conditionnement est encore dégénéré. Cependant, si on considère l'opérateur de changement d'échelle $\mathcal{S}^{(\lambda)}$ défini pour tout $\lambda > 0$, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(\mathcal{S}^{(\lambda)}f)(t) = \lambda^{-1/\alpha}f(\lambda t), \quad \forall t \geq 0,$$

alors puisque L satisfait la propriété d'invariance par changement d'échelle, on peut en déduire que la mesure image $\underline{n}(\cdot \mid \zeta > t)$ par l'opérateur $\mathcal{S}^{(\zeta)}$ ne dépend pas de $t > 0$. Cette loi à support dans l'ensemble des excursions de durée de vie 1 coïncide avec celle définie plus haut :

$$\mathbb{P}^{\text{ex}} = \underline{n}(\cdot \mid \zeta = 1).$$

Remarque. Il existe d'autres définitions de la loi \mathbb{P}^{ex} . D'après [Cha97, Remarque 1], puisque L n'a pas de saut négatif, la loi de l'excursion stable de longueur 1 est égale à celle du pont stable de L conditionné à rester positif, partant et se terminant en 0 et de longueur 1. Elle peut par exemple être définie, d'après [Cha97, Lemme 4], par

$$\mathbb{P}^{\text{ex}}(\Lambda) = \lim_{x \downarrow 0} \mathbb{P}_x(\Lambda \mid T_0 = 1), \quad \forall t < 1, \forall \Lambda \in \mathcal{F}_t,$$

où $T_0 = \inf\{t \geq 0, L_t = 0\}$ est le premier temps de retour à 0. ◇

Nous renvoyons⁴¹ à [Cha97] ou [Ber96, Chapitres IV et VIII] pour des constructions rigoureuses de ces deux processus. Voir Figure 2.3 pour des simulations de ces deux objets.

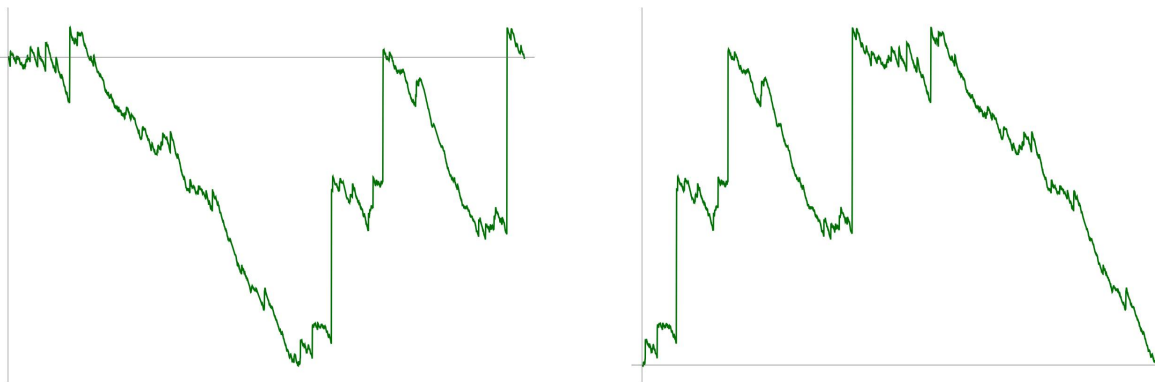


Figure 2.3 – Simulations d'un pont de Lévy 4/3-stable sans saut négatif (à gauche) et d'une excursion normalisée d'un processus de Lévy 4/3-stable sans saut négatif (à droite).

§ 2.2. Principe de Grandes Déviations pour les Processus

La théorie des *principes de grandes déviations* (PGD) s'intéresse au calcul asymptotique de probabilités d'événements très rares n'apparaissant que dans une échelle logarithmique. Nous portons ici une attention

⁴¹Encore une fois!

particulière aux trajectoires de *processus de Lévy*, dont nous rappelons que ce sont des processus stochastiques $(X(t))_{t \geq 0}$ à valeurs dans un certain espace de fonctions et dont les incréments sont stationnaires et indépendants. Pour ces processus, nous étudions la probabilité asymptotique lorsque $\varepsilon \downarrow 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left(\frac{1}{r(\varepsilon)} X(t/\varepsilon) \right)_{t \in [0,1]} \in \mathcal{A} \right),$$

où \mathcal{A} est un ensemble mesurable quelconque et $r(\varepsilon)$ une certaine fonction de renormalisation.

Il est évident qu'il ne sera pas possible de décrire le comportement asymptotique de la probabilité précédente pour un ensemble \mathcal{A} arbitraire. Cependant si $X(1)$ satisfait la *condition de Cramér*, c'est-à-dire $\mathbb{E}[e^{\theta X(1)}] < \infty$ tout $\theta \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de 0, alors la loi de $X(1)$ est à décroissance exponentielle à l'infini. Ainsi en considérant la probabilité ci-dessus dans une échelle logarithmique, on peut toutefois espérer capturer et obtenir des résultats asymptotiques.

Il s'agit d'un problème dont la réponse est très connue pour les marches aléatoires (en temps discret). Lorsque les pas d'un marcheur $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ sont *i.i.d.* et satisfont la *condition de Cramér*, H. Cramér [Cra38] ou encore H. Chernoff [Che52] ont montré que, informellement, pour tout ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ ouvert ou fermé, lorsque n est suffisamment grand on a

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \in \mathcal{A} \right) \approx e^{-n \inf_{a \in \mathcal{A}} J(a)},$$

où $J(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (at - \log \mathbb{E}[e^{tY_1}])$ est la *transformée de Fenchel-Legendre* de $\log \mathbb{E}[e^{tY_1}]$.

Dans le cas des processus à accroissements stationnaires et indépendants et satisfaisant l'hypothèse de Cramér, A. Mogul'skiĭ établit dans [Mog93] un résultat analogue. Sous certaines conditions sur la fonction de renormalisation $r(\varepsilon)$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon r^2(\varepsilon)} \log \mathbb{P} \left(\left(\frac{1}{r(\varepsilon)} X(t/\varepsilon) \right)_{t \in [0,1]} \in \mathcal{A} \right) \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\sim} - \inf_{f \in \mathcal{A}} I(f), \quad (\spadesuit)$$

où la fonction $I(f)$ est définie par rapport à la transformée de Fenchel-Legendre J de $\log \mathbb{E}[e^{tX(1)}]$,

$$I(f) = \int_0^1 J(f(t)) dt,$$

si $f(0) = 0$ et f est absolument continue, et $I(f) = +\infty$ sinon.

Cependant, du fait de la nature asymétrique de la queue de distribution de L_1 , la condition de Cramér n'est plus satisfaite et le cas des processus de Lévy α -stable sans saut négatif sort ainsi du cadre d'étude précédent.

§ 2.2.1. Définitions

Dans ce qui suit, S est un espace métrique. Commençons par rappeler la définition de fonction de taux, qui est informellement une fonction décrivant le comportement des probabilités des événements très rares.

Définition

Une **fonction de taux** est une fonction $I : S \rightarrow [0, \infty]$ semicontinue inférieurement, c'est-à-dire une fonction telle que les ensembles de niveaux $\mathcal{L}_I(c) = \{x \in S : I(x) \leq c\}$ sont fermés pour tout $c \geq 0$.

Une fonction de taux est dite **bonne** si $\mathcal{L}_I(c)$ sont de plus compacts pour tout $c \geq 0$.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'un principe de grandes déviations.

Définition

Soit $\beta > 0$ fixé. Une famille $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ d'éléments aléatoires dans l'espace S satisfait un **principe de grandes déviations** avec vitesse $\varepsilon^{-\beta}$, et fonction de taux I , si pour tout ensemble borélien $A \subset S$, on a

$$-\inf_{x \in \overset{\circ}{A}} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A) \leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x). \quad (\blacktriangledown)$$

Les inégalités (\blacktriangledown) sont équivalentes aux deux bornes suivantes :

(a) pour tout ensemble ouvert $O \subset S$,

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in O) \geq -\inf_{x \in O} I(x),$$

(b) pour tout ensemble fermé $F \subset S$,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in F) \leq -\inf_{x \in F} I(x). \quad (\dagger)$$

Une approche naturelle pour montrer un PGD est de montrer la borne supérieure (\dagger) en premier lieu pour les ensembles compacts, ce qui conduit à une notion de grandes déviations plus faible.

Définition

Soit $\beta > 0$ fixé. Une famille $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ d'éléments aléatoires dans l'espace S satisfait un **PGD Faible** (PGDF) avec vitesse $\varepsilon^{-\beta}$, et fonction de taux I , si les conditions (a) avec (\ddagger) ci-dessous sont vérifiées :

$$\text{pour tout ensemble compact } K \subset S, \quad \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in K) \leq -\inf_{x \in K} I(x). \quad (\ddagger)$$

Remarquons que ces deux principes ne sont pas équivalents. En effet, si X_ε est une variable aléatoire sur \mathbb{R} de loi dégénérée au point $1/\varepsilon$, alors il n'est pas très difficile de montrer que la famille $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait un PGDF de bonne fonction de taux $I(x) = +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais elle ne satisfait un PGD pour aucune fonction de taux.

Cependant, J. Lynch et J. Sethuraman ont remarqué qu'un PGDF peut être étendu à un PGD si les variables X_ε sont concentrées dans une échelle exponentielle sur les compacts.

Définition

Soit $\beta > 0$ fixé. Une famille $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ d'éléments aléatoires dans l'espace S est **exponentiellement tendue** avec vitesse $\varepsilon^{-\beta}$, si pour tout $0 < \delta < \infty$, il existe un ensemble compact K_δ tel que :

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in K_\delta^c) \leq -\delta.$$

J. Lynch et J. Sethuraman ont alors montré que dans un espace polonais une suite de variables aléatoires $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait un PGD avec une bonne fonction de taux si, et seulement si, elle satisfait un PGDF et

qu'elle est exponentiellement tendue. Voir [LS87, Lemmes 2.5 et 2.6]. Ceci leur permet d'obtenir des PGD pour des processus de Poisson, gamma ou de Dirichlet.

Remarque. Le résultat précédent n'est en général pas vrai si la fonction de taux n'est pas bonne. Voir [EG99] pour un exemple de PGD qui n'entraîne pas la tension exponentielle. \diamond

Cependant, il n'est pas toujours évident de travailler directement avec les probabilités $\mathbb{P}(X_\varepsilon \in B)$ lorsque X_ε est un processus stochastique et B un ensemble mesurable quelconque d'un certain espace de fonctions. Pour pallier cette difficulté, une nouvelle méthode a été introduite au début des années 1990 par A. Puhalskii. Cette approche est similaire à celle permettant de démontrer qu'une suite de processus càdlàg converge faiblement dans l'espace de Skorokhod : si les marginales de dimensions finies satisfont un PGD et que la suite de processus est exponentiellement tendue, alors cette dernière satisfait un PGD avec une bonne fonction de taux. Voir [Puh91]. Cette approche, que nous employons dans le cadre des ponts et excursions normalisées, a été également utilisée par L. Serlet dans [Ser97] pour établir un PGD pour le serpent Brownien (et par la même occasion pour l'excursion Brownienne B^{ex}).

Théorème (Serlet [Ser97])

Le processus $(\varepsilon B_t^{\text{ex}})_{t \geq 0}$ satisfait un PGD de bonne fonction de taux I définie sur l'ensemble des fonctions continues positives $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $f(0) = f(1) = 0$ par

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt,$$

si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue de dérivée de carrée intégrable et $I(f) = +\infty$ sinon.

§ 2.2.2. Un Bref Panorama Historique

Pour un processus de Lévy $(X(t))_{t \geq 0}$, il est naturel de considérer la famille des processus renormalisés $X_\varepsilon = (\varepsilon X(t/\varepsilon))_{0 \leq t \leq 1}$. Le cas où X est un mouvement Brownien est traité par un célèbre théorème de M. Schilder qui montra un PGD avec vitesse $1/\varepsilon$ dans l'espace des fonctions continues pour lequel la fonction de taux possède une forme explicite et particulièrement simple puisqu'il s'agit (et sans surprise!) de l'énergie de Dirichlet.

Théorème (Schilder [Sch66])

Soit B un mouvement Brownien. Le processus $(\varepsilon B_t)_{t \geq 0}$ satisfait un PGD de bonne fonction de taux

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \quad (\clubsuit)$$

si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive avec $f(0) = 0$, absolument continue de dérivée de carrée intégrable, et $I(f) = +\infty$ sinon.

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat. Puisque le mouvement Brownien possède un semi-groupe de transition pour lequel nous avons une formule explicite⁴², on peut calculer directement les probabilités de la définition donnée dans la partie précédente. Une autre approche, appelée *équivalence*

⁴²Il s'agit du noyau gaussien.

exponentielle et différente de celle de A. Puhalskii, consiste à établir un PGD, non pas directement pour B, mais pour un processus proche (toujours dans une échelle exponentielle) de ce dernier. Dans le cas du mouvement Brownien, le processus auxiliaire tout indiqué et naturel est la marche aléatoire (correctement mise à l'échelle) vue maintenant comme une fonction continue aléatoire de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ définie par la courbe polygonale reliant les points $(k/n, S_n/n)$, où on a noté $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et où les pas du marcheurs X_k sont des variables aléatoires *i.i.d.*. A. Borovkov établi dans [Bor67] un PGD pour $(S_n(t))_{0 \leq t \leq 1}$ de bonne fonction de taux

$$I(f) = \int_0^1 J(f'(t)) dt$$

si f est absolument continue avec $f(0) = 0$, et $I(f) = +\infty$ sinon, et où $J(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (at - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}])$. Dans le cas particulier où les X_k sont remplacés par $\tilde{B}_t^\varepsilon = \varepsilon B_{\lfloor t/\varepsilon \rfloor}$ des points du mouvement Brownien, le précédent résultat montre que $(\tilde{B}^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ satisfait un PGD de bonne fonction de taux I donnée ci-dessus. De plus, puisque les processus εB et \tilde{B}^ε sont exponentiellement équivalents dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup, c'est-à-dire

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P} (\|\varepsilon B - \tilde{B}^\varepsilon\|_\infty > \delta) = -\infty,$$

un résultat général montre que εB satisfait le même PGD. Voir [DZ98, Théorème 4.2.13]. Le lecteur peut consulter [DZ98, Chapitres 4 et 5] pour plus de détails concernant la démonstration et l'équivalence exponentielle. Un raisonnement analogue permet d'obtenir le même résultat dans le cas d' un mouvement Brownien d -dimensionnel à partir du PGD obtenu par A. Mogul'skiï dans [Mog76] pour les marches aléatoires en dimension d .

En 1987, J. Lynch et J. Sethuraman [LS87] établirent un PGD dans l'espace $BV[0, 1]$ des fonctions càdlàg à variations bornées sur $[0, 1]$ muni de la topologie faible- \star pour certains processus stochastiques $(X_t)_{t \geq 0}$ possédant des incréments indépendants.

Si $f \in BV[0, 1]$ est une fonction càdlàg à variations bornées, alors f peut être écrite comme la différence $g - h$ de deux fonctions croissantes $g, h \in BV[0, 1]$. Cette décomposition n'est pas unique, mais elle peut le devenir si on demande de plus que $g(0) = 0$ et que les mesures de Stieltjes associées dg et dh soient mutuellement singulières. Cette décomposition «minimale» est appelée *décomposition de Jordan* de f , et on écrit $g = f_{\uparrow \text{sing}}$, $h = f_{\downarrow}$. Dans les cas où X est à accroissements positifs ou sans composante gaussienne, comme par exemple les processus de Poisson, gamma ou de Dirichlet, le PGD est satisfait par la suite des processus renormalisés X_ε définie plus haut avec la bonne fonction de taux définie par

$$I(f) := \int_0^1 J(f'_{\downarrow})(t) dt \quad (\blacksquare)$$

si f'_{\downarrow} est absolument continue avec $J(f'_{\downarrow})$ intégrable, et $+\infty$ sinon, et où J est la transformée de Fenchel-Legendre associée à $X(1)$.

Leur approche consiste à approcher l'intégrale (■) par une «intégrale discrète» définie sur les partitions $\sigma = [0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1]$ de $[0, 1]$ qui s'écrit comme

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n+1} J\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right) \times (t_i - t_{i-1}),$$

puis de montrer que cette dernière converge pour la topologie faible- \star vers $I(f)$. Ils démontrent par ailleurs que $I(f)$ n'est autre que le supremum des $I_\sigma(f)$ pris sur les partitions finies σ de $[0, 1]$. Cette approxi-

mation leur permet d'établir tout d'abord des PGDF. Puis ils montrent que les lois des processus sont exponentiellement tendues, ce qui est équivalent à un PGD.

Quelques années plus tard, A. Mogul'skiĭ obtient des résultats de grandes déviations pour des processus à accroissements stationnaires et indépendants, mais cette fois-ci pour les topologies J1 de Skorokhod⁴³ et de la norme uniforme sur l'espace des fonctions de l'espace $\mathbb{C}\text{àdlàg}([0, 1], \mathbb{R})$. Voir [Mog93]. Ces derniers généralisent les résultats J. Lynch et J. Sethuraman qui considèrent des processus qui sont presque sûrement dans l'espace des fonctions à variations bornées.

Cependant, la grande majorité des travaux précédents (et les références contenues dans ces derniers) suppose que les processus de Lévy sont sans partie gaussienne et satisfont la condition de Cramér, qui est pour rappel $\mathbb{E}[e^{\lambda X(1)}] < \infty$ pour tout λ dans un voisinage non-vide de 0. Cette dernière condition entraîne notamment que la loi de $X(1)$ a une queue qui décroît exponentiellement. Plusieurs situations peuvent survenir lorsque la condition de Cramér n'est pas satisfaite. Dans le cas de la marche aléatoire (en temps discret) ne satisfaisant pas cette condition, *i.e.* lorsque $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] = +\infty$ pour tout $\lambda > 0$, la probabilité $\mathbb{P}(S_n/n \geq x)$ décroît plus lentement qu'exponentiellement. Par exemple, dans la série de travaux [Nag69a, Nag69b, Nag69c], A. Nagaev considère des lois à queues dites *exponentielles étendues*⁴⁴, *i.e.* pour lesquelles il existe $\delta \in]0, 1[$ et $c > 0$ tels que pour tout x suffisamment grand, $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = c \exp(-x^\delta)$. Dans ce cas, on peut montrer que pour tout $x > \mathbb{E}[X_1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\delta} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) = -(n - \mathbb{E}[X_1])^\delta.$$

Voir [Nag69a, Théorème 3]. Plus récemment, dans [GRR14] N. Gantert, K. Ramanan et F. Rembart considèrent le cas plus général des marches aléatoires de pas de loi ayant toujours une queue exponentielle étendue, mais qui cette fois-ci sont pondérés.

C.-H. Rhee, J. Blanchet et B. Zwart considèrent un autre régime dans lequel le processus de Lévy étudié est centré et dont la mesure de Lévy est à *variation régulière*, *i.e.* il existe deux indices $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x > 0$ suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(X(1) > x) = L_+(x)x^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X(1) < -x) = L_-(x)x^{-\beta},$$

où L_+ et L_- sont deux fonctions à *variations lentes*⁴⁵. Voir [RBZ19]. Ils s'intéressent en particulier à l'apparition (à vitesse logarithmique) d'événements rares provoqués par plusieurs grands sauts du processus.

Le cas des processus de Lévy α -stables sans saut négatif, avec $1 < \alpha < 2$, apparaît en un sens comme un cas à la frontière des deux travaux présentés ci-dessus, à cause de la nature asymétrique de la queue de distribution de L_1 :

$$\mathbb{P}(L_1 > x) \asymp C_\alpha x^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(L_1 < -x) \asymp \exp(-c_\alpha x^{\alpha'}) \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty,$$

où on a noté $\alpha' = \alpha/(\alpha-1) \in]2, \infty[$ est l'exposant conjugué de α , $C_\alpha = -1/\Gamma(1-\alpha)$ et $c_\alpha = (\alpha-1)/\alpha^{\alpha'}$. En d'autres termes, il est «facile» pour le processus de monter, et il est très «coûteux» pour lui de descendre, et ainsi les probabilités de grandes déviations peuvent avoir différentes vitesses qui dépendent du comportement des événements qui autorisent le processus à descendre ou non.

⁴³On attire l'attention du lecteur sur le fait que l'auteur ne considère pas la topologie usuelle de Skorokhod, qui est donnée par une métrique qui n'est pas complète, mais sa complétion.

⁴⁴Traduction française de *stretched exponential tails distribution*.

⁴⁵Une fonction $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^*$ est à variation lente si pour tout $t > 0$, $L(tx)/L(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

§ 2.2.3. La Topologie M1 de Skorokhod pour les Processus de Lévy

Comme on peut le remarquer dans la partie précédente, un point essentiel de la théorie des grandes déviations pour les processus est le choix approprié de la topologie de l'espace de fonctions considéré. Par exemple, dans [LS87] les auteurs établissent un PGD avec une bonne fonction de taux pour la topologie faible- \star sur $BV[0, 1]$, mais remarquent que la fonction de taux ne peut être bonne pour la topologie J1 de Skorokhod usuellement utilisée pour étudier les processus càdlàg (les ensembles de niveaux de I n'étant pas compacts pour cette topologie). Des questions semblables apparaissent dans notre contexte. En effet, puisqu'il est moins coûteux pour le processus L de monter que de descendre, c'est également le cas pour les ponts et les excursions, ce qui implique par conséquent que dans le régime de grandes déviations considéré ici, nous ne pouvons pas faire la différence entre les situations où le processus fait un seul grand saut, ou deux sauts de tailles moyennes localisés dans un intervalle de temps très restreint, empêchant la tension exponentielle pour la topologie J1 de Skorokhod.

Proposition 11 (Avec C. Goldschmidt et G. Miermont)

- (i) Les lois de $(\varepsilon e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ne sont pas exponentiellement tendues pour la topologie J1 de Skorokhod.
- (ii) De plus, si $(\varepsilon e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ satisfait un PGD pour la topologie J1 de Skorokhod, alors la fonction de taux associée ne peut être bonne pour cette topologie.

Cependant, dans ce travail nous montrons que les lois de $(\varepsilon e_t)_{t \in [0, 1]}$ sont exponentiellement tendues pour la topologie plus faible M1 de Skorokhod. En 1956, A. Skorokhod a introduit quatre topologies, nommées J1, M1, M2 et J2, dans le but d'étudier les limites de processus càdlàg aléatoires. Voir [Sko56]. Ces dernières diffèrent dans la manière dont les suites de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ convergent aux points de discontinuité de la fonction limite f . Les topologies J1 et M1 peuvent être décrites comme suit. Dans le cas de la topologie J1, la fonction f_n doit avoir un unique saut autour d'un saut de la fonction f qui doit être «proche» en temps et en espace. Dans le cas de la topologie M1, plusieurs sauts sont autorisés pour f_n , mais le graphe de f_n , doit être un «escalier monotone» de hauteur au plus $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, qui est «compressé» en un unique saut de f lorsque $n \rightarrow +\infty$ ⁴⁶. Voir Figure 2.4.

Pour ces topologies, l'espace des fonctions càdlàg est un espace polonais, *i.e.* métrisable comme espace métrique complet. Brièvement, deux fonctions sont proches au sens de la topologie M1 si leur graphe augmenté, c'est-à-dire les graphes auxquels on ajoute les segments aux points de discontinuité (voir Figure 2.5) sont proches au sens de la topologie uniforme vus comme des courbes à valeurs dans $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Cependant, puisqu'elle n'est pas nécessaire pour la compréhension de ce qui suit, nous renvoyons au Chapitre 6 pour la définition de la topologie M1, ou à [Whi02] pour plus de détails.

Dans des travaux précédents, G. O'Brien a utilisé la topologie M1 pour également établir des PGD dans lesquels il s'intéresse à l'amplitude totale des sauts effectués par le processus. Voir [O'B99]. Une autre différence notable est que cette fois-ci la fonction de taux obtenue se concentre sur les fonctions càdlàg

⁴⁶Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'il ne s'agit ici que d'une description informelle afin de mettre en lumière les principales différences entre les deux topologies J1 et M1. Mentionnons toutefois qu'une fonction ayant un saut peut évidemment être approchée par une suite de fonctions continues pour chacune de ces topologies.

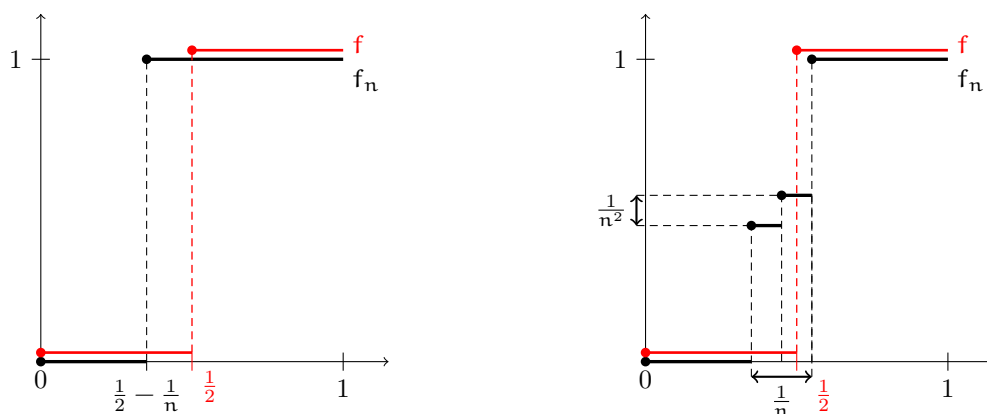


Figure 2.4 – Illustration des approximations «graphiques» autorisées de $f = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ pour les topologies J1 (à gauche) et M1 (à droite) de Skorokhod.

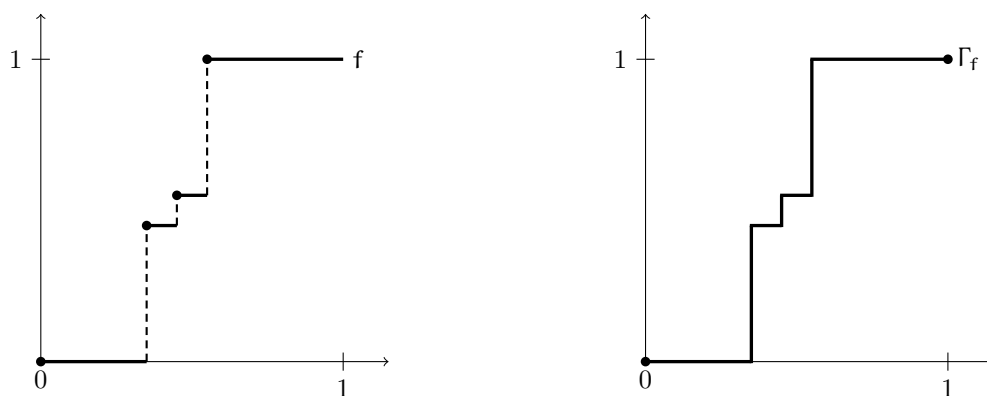


Figure 2.5 – Une fonction càdlàg à gauche et son graphe augmenté à droite.

croissantes. Plus précisément, dans le cas particulier des processus de Lévy α -stables spectralement positifs avec $1 < \alpha < 2$, G. O'Brien démontra que pour cette topologie et une fonction de vitesse $\varepsilon : [1, \infty[\rightarrow]0, 1]$ qui tend vers 0 lorsque $\gamma \rightarrow \infty$ bien choisie,

$$\limsup_{\gamma \uparrow \infty} \left(\mathbb{P} \left((L \vee 1)^{\varepsilon(\gamma)} \in F \right) \right)^{\varepsilon(\gamma)} \leq e^{-R(F)} \quad \text{pour tout ensemble fermé } F,$$

et

$$\liminf_{\gamma \uparrow \infty} \left(\mathbb{P} \left((L \vee 1)^{\varepsilon(\gamma)} \in F \right) \right)^{\varepsilon(\gamma)} \geq e^{-R(O)} \quad \text{pour tout ensemble ouvert } O,$$

où $R : \text{Càdlàg}(\mathbb{R}_+, [1, +\infty]) \rightarrow [0, \infty]$ est une fonction semicontinue inférieurement définie par

$$R(f) = \alpha \sum_{y \in \text{Im}(f)} \log y$$

si f est croissante, et $R(f) = +\infty$ sinon, et où e^{-R} est la fonction d'ensemble définie pour tout ensemble mesurable B par $e^{-R(B)} := \sup \{e^{-R(f)}, f \in B\}$. Cette fonction de taux R capture l'amplitude des sauts effectués par le processus $L \vee 1$.

Ce même principe est encore vrai pour la topologie plus forte J_1 de Skorokhod avec la seule différence que puisque l'ensemble des fonctions càdlàg croissantes n'est plus⁴⁷ J_1 -compact, la fonction de taux R n'est plus bonne pour cette topologie.

Bien que G. O'Brien utilise la représentation intégrale de Lévy-Itô du processus de Lévy α -stable spectralement positif, remarquons que les méthodes sont sensiblement analogues à celles de J. Lynch et J. Sethuraman : il établit tout d'abord un PGDF qu'il étend à un PGD grâce à un argument de tension exponentielle.

§ 2.3. Principes de Grandes Déviations pour les Processus de Lévy α -Stables Spectralement Positif

§ 2.3.1. Principes Obtenus

Espaces de Fonctions. Notons $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[0, 1]$, qui sont continues à droite en chacun des points de $]0, 1[$ et possédant une limite à gauche $f(t-)$ en tout point t de $]0, 1]$, où par convention, on pose $f(0-) = 0$, qui est une manière d'«enraciner» la fonction f en 0. Cet enracinement en 0 induit quelques modifications légères de la topologie M_1 qui sont discutées au Chapitre 6. Elle autorise en particulier les fonctions «qui sautent juste après le temps 0» à possiblement converger pour cette topologie M_1 modifiée. Par exemple, la suite $\mathbb{1}_{[1/n, 1]}$ converge vers $\mathbb{1}_{[0, 1]}$ pour notre topologie M_1 , mais pas pour la topologie M_1 classique. On note ici dist une distance métrisant la topologie M_1 et rendant l'espace $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ polonais. Cette distance dist est définie précisément au Chapitre 6. On garde les notations de la partie précédente, *i.e.* si $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ on écrit $f = f_{\uparrow} - f_{\downarrow}$ la décomposition de Jordan de f . On note $H^{(\alpha)}$ le sous-espace de $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ des fonctions f à variations bornées telles que f_{\downarrow} est une fonction absolument continue de dérivée $f'_{\downarrow} \in \mathbb{L}^{\alpha'}[0, 1]$, où $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1) \in]2, \infty[$ est l'exposant conjugué de α . Posons

$$D_{\text{ex}}[0, 1] := \left\{ f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : f(1) = 0, f \geq 0 \right\} \quad \text{et} \quad H_{\text{ex}} = H^{(\alpha)} \cap D_{\text{ex}}[0, 1].$$

Rappelons que $c_{\alpha} = (\alpha - 1)/\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}$.

Principe de Grandes Déviations pour les Excursions Stables. Le premier principe que nous énonçons est un PGD pour l'excursion stable, pour lequel on attire une nouvelle fois l'attention sur la similarité de la fonction de taux avec (■) obtenue dans [LS87].

Théorème 12 (Avec C. Goldschmidt & G. Miermont)

Les lois de $(\varepsilon e_t)_{t \in [0, 1]}$ satisfont un PGD dans $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ avec vitesse $\varepsilon^{-\alpha'}$ et bonne fonction de taux

$$I_e(f) = \begin{cases} c_{\alpha} \int_0^1 |f'_{\downarrow}(s)|^{\alpha'} ds & \text{si } f \in H_{\text{ex}} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\star)$$

⁴⁷Il l'est pour la topologie M_1 .

Les étapes de démonstration suivent celles de A. Puhalskii [Puh91] et L. Serlet [Ser97] : nous démontrons tout d'abord que les lois des marginales finies dimensionnelles de $(\varepsilon e_{t_1}, \dots, \varepsilon e_{t_n})$ satisfont un PGD, puis que les lois de l'excursion normalisée sont exponentiellement tendues dans $(D_{\text{ex}}[0, 1], \text{dist})$.

Étape 1 : PGD pour les marginales fini-dimensionnelles. Rappelons que l'excursion stable e s'obtient en conditionnant L à rester strictement positif et à revenir en 0 au temps 1. On peut ainsi montrer que la loi du n -uplets $(e_{t_1}, \dots, e_{t_n})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et s'exprime pour toute fonction mesurable $f : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ par la formule suivante :

$$\mathbb{E}\left[f(e_{t_1}, \dots, e_{t_n})\right] = C'_\alpha \int_{(\mathbb{R}_+)^n} dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots, x_n) j_{t_1}(x_1) \prod_{i=1}^n p_{t_{i+1}-t_i}^{(0,\infty)}(x_i, x_{i+1}) q_{x_n}(1-t_n),$$

où j_t est la densité de la loi d'entrée de l'excursion, $p_t^{(0,\infty)}$ correspond à la densité du semi-groupe de transition du processus L conditionné à rester strictement positif, et q_x est la densité du premier instant de retour en 0 pour le processus L partant de x et conditionné à rester strictement positif. Ainsi pour tout ensemble $B \subset (\mathbb{R}_+)^n$ mesurable, on peut écrire

$$\mathbb{P}\left((\varepsilon e_{t_1}, \dots, \varepsilon e_{t_n}) \in B\right) = C'_\alpha \int_B dx_1 \dots dx_n j_{t_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \prod_{i=1}^n p_{t_{i+1}-t_i}^{(0,\infty)}\left(\frac{x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}}{\varepsilon}\right) q_{x_n/\varepsilon}(1-t_n).$$

Imaginons maintenant qu'on puisse remplacer $p_t^{(0,\infty)}$ par p_t et $q_x(t)$ par $p_t(-x)$, on aurait alors

$$\mathbb{P}\left((\varepsilon e_{t_1}, \dots, \varepsilon e_{t_n}) \in B\right) \approx C''_\alpha \int_B dx_1 \dots dx_n \prod_{i=1}^n p_{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right) p_{1-t_n}\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Il suffit alors d'estimer cette dernière intégrale pour conclure. Rappelons cependant que, contrairement au mouvement Brownien, il n'existe pas de formule explicite pour le semi-groupe de transition p_t , seulement des formules asymptotiques : pour $x > 0$, on a lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{cases} p_1(x) & \sim d_\alpha x^{-\alpha-1} \\ p_1(-x) & \sim d'_\alpha x^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}} \exp\left(-(\alpha-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}\right). \end{cases}$$

On remarque donc que les contributions sont très différentes en fonction de la valeur de $x_{i+1} - x_i$:

- si $x_i < x_{i+1}$, alors $p_{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)$ contribue dans la dernière intégrale comme une puissance de ε , qui dans la limite logarithmique n'apparaît pas ; et
- si $x_i > x_{i+1}$, alors $p_{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)$ contribue comme

$$\exp\left(-\frac{\alpha-1}{(\varepsilon\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}} \left(\frac{(x_i - x_{i+1})^\alpha}{t_{i+1} - t_i}\right)^{1/(\alpha-1)}\right)$$

qui fait apparaître un terme proportionnel à $\left(\frac{(x_i - x_{i+1})^\alpha}{t_{i+1} - t_i}\right)^{1/(\alpha-1)}$ dans la limite logarithmique.

Ainsi (modulo les approximations précédentes qui sont justifiées au Chapitre 6), on obtient alors

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha/(\alpha-1)} \log \mathbb{P}(\varepsilon(e_{t_1}, \dots, e_{t_n}) \in B) = -\inf_B I_\sigma,$$

où $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_n < 1]$, et I_σ est la bonne fonction de taux définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ par :

$$I_\sigma(x_1, \dots, x_n) = c_\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - x_{i+1})^\alpha}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{x_{i+1} - x_i < 0\}}.$$

Cette dernière expression traduit bien l'asymétrie de \mathfrak{e} décrite plus haut : il est très facile pour l'excursion de «monter», mais à cause de ce «coût exponentiel», il est très difficile de «descendre». Autrement dit, seules les descentes de l'excursion apparaissent dans l'échelle logarithmique.

Étape 2 : Tension exponentielle. Pour montrer que les lois $(\varepsilon e_t)_{t \in [0,1]}$ sont exponentiellement tendues pour la topologie M1 de Skorokhod, nous nous intéressons aux *M-oscillations* du processus. Si f est une fonction càdlàg, et $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ sont des temps croissants, alors on définit $M(f(t_1), f(t_2), f(t_3))$ comme la distance de $f(t_2)$ au segment $[f(t_1), f(t_3)]$. Nous montrons ici que lorsqu'on peut borner de «manière uniforme» les moments exponentiels des *M-oscillations* d'un processus, alors la probabilité que ce dernier ait de grands incréments est exponentiellement petite. Plus précisément, nous montrons que si une famille $(X_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de processus stochastiques de $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ satisfait les deux conditions suivantes :

- (i) Pour tout $q \in \mathcal{D}$ dans un ensemble dénombrable dense de $[0, 1]$ contenant 1, la famille de variables aléatoires $(X_\varepsilon(q))_{\varepsilon > 0}$ est exponentiellement tendue avec vitesse $\varepsilon^{-\alpha'}$; et
- (ii) Il existe deux constantes finies $c, C > 0$, telles que pour tout $\lambda > 0$ et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq 1$, on a :

$$\mathbb{E} \left[e^{M(X_\varepsilon(t_1), X_\varepsilon(t_2), X_\varepsilon(t_3))} \right] \leq c e^{C(\lambda \varepsilon)^\alpha |t_3 - t_1|},$$

alors $(X_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est exponentiellement tendue dans $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ avec vitesse $\varepsilon^{-\alpha'}$.

La condition (i) est trivialement satisfaite dans le cas de l'excursion d'après le PGD établi pour les marginales de dimensions finies. Cependant, la condition (ii) n'est satisfaite seulement que sur tout intervalle $[0, 1 - \delta]$, et non pour l'intervalle entier $[0, 1]$. Pour contourner cette difficulté, nous montrons qu'à cause du conditionnement de retour en 0 au temps 1, l'excursion normalisée ne peut prendre de grandes valeurs proches de 1. Ce qui suffit à montrer la tension exponentielle de $(\varepsilon e_t)_{t \in [0,1]}$.

Étape 3 : Conclusion. Ceci nous permet de déduire, en suivant les raisonnements de J. Lynch et J. Sethuraman dans [LS87], que $(\varepsilon e_t)_{t \in [0,1]}$ satisfait un PGD pour la topologie faible \mathcal{W} sur $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$ (voir la partie 6.5 pour une définition de cette topologie) de bonne fonction de taux qui peut être interprétée comme l'«intégrale discrète» de $|f'_\downarrow|^{\alpha'}$:

$$I_X(f) := \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} I_\sigma(f(t_1), \dots, f(t_n)) = c_\alpha \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(f(t_i) - f(t_{i+1}))^\alpha}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{f(t_{i+1}) < f(t_i)\}},$$

où le supremum est pris sur l'ensemble \mathfrak{S} de toutes les partitions finies $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_n < 1]$, $n \geq 1$ de $[0, 1]$. Nous montrons finalement que cette «intégrale discrète» correspond exactement à la formule (★). Pour ce faire, nous donnons un critère sur les fonctions pour être dans H_{ex} similaire à [RY99, Chapitre VIII. Lemme 2.6] dans le cas du mouvement Brownien. Puisque la topologie faible \mathcal{W} est plus faible que la topologie M1, on en déduit le Théorème 12.

Par ailleurs, le «*continuous mapping theorem*» possède son équivalent dans la théorie des grandes déviations : il s'agit du *principe de contraction*. Ce dernier a été utilisé par exemple par A. Puhalskii et W. Whitt dans [PW97] alors que les auteurs s'intéressaient au processus inverse, ou encore par A. Fill et S. Janson dans le cadre de l'excursion Brownienne, voir [FJ09]. Nous faisons de même dans le cas de l'excursion normalisée. Nous donnons des résultats asymptotiques aussi bien concernant la distribution de $X = \Phi(\mathfrak{e})$ elle-même, que pour la fonction génératrice des moments, que pour les moments de X . Pour ce faire, définissons les ensembles

$$\mathcal{K}^{(\alpha)} = \left\{ f \in H^{(\alpha)} : \|f'_\downarrow\|_{\alpha'} \leq 1 \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{\text{ex}} = \mathcal{K}^{(\alpha)} \cap D_{\text{ex}}[0, 1].$$

Remarquons que d'après l'inégalité de Hölder, \mathcal{K}_{ex} est un sous-ensemble compact de $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$.

Théorème 13 (Avec C. Goldschmidt & G. Miermont)

Soit $X = \Phi(\mathfrak{e})$, où $\Phi : D_{\text{ex}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonctionnelle continue positive, homogène-positive, c'est-à-dire telle que $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ pour toute fonction $f \in D_{\text{ex}}[0, 1]$ et tout réel $\lambda \geq 0$, et non identiquement nulle. Posons

$$\gamma_\Phi := \max \{ \Phi(f) : f \in \mathcal{K}_{\text{ex}} \}.$$

Alors εX satisfait un PGD lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ avec vitesse $\varepsilon^{-\alpha'}$ et bonne fonction de taux

$$J_\Phi^\mathfrak{e}(x) = c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'}.$$

En particulier,

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

En particulier, en utilisant [JC04, Théorème 4.5], on en déduit les asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} \log \mathbb{E} [e^{tX}] &\sim (\gamma_\Phi t)^\alpha && \text{lorsque } t \rightarrow +\infty, \\ \mathbb{E} [X^n]^{1/n} &\sim \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_\Phi \left(\frac{n}{e} \right)^{1/\alpha'} && \text{lorsque } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Principe de Grandes Déviations pour les Ponts Stables. Les Théorèmes 12 et 13 admettent leurs analogues pour les ponts d'un processus de Lévy L . Pour $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, on pose

$$D_{\text{br}}^{(\mathfrak{a})}[0, 1] := \{ f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : f(1) \leq \mathfrak{a} \} \quad \text{et} \quad H_{\text{br}}^{(\mathfrak{a})} := H^{(\alpha)} \cap D_{\text{br}}^{(\mathfrak{a})}[0, 1].$$

On peut maintenant énoncer les résultats pour les ponts d'un processus de Lévy stable. Dans le reste de cette introduction, pour $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$, on pose $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{a} \vee 0$ et $\mathfrak{a}_- = (-\mathfrak{a})_+$ les parties positive et négative de \mathfrak{a} respectivement.

Théorème 14 (Avec C. Goldschmidt & G. Miermont)

Soit $(a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $\varepsilon a_\varepsilon \rightarrow a$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Alors les lois de $(\varepsilon \mathbb{b}_t^{(a_\varepsilon)})_{t \in [0,1]}$ satisfont un PGD dans $(\text{Càdlàg}[0,1], \text{dist})$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ de vitesse $\varepsilon^{-\alpha'}$ et bonne fonction de taux $I_{b,a}$ définie par

$$I_{b,a}(f) = c_\alpha \left(\int_0^1 |f'_\downarrow(s)|^{\alpha'} ds - (a^-)^{\alpha'} \right) \quad (2.3.1)$$

si $f \in H_{\text{br}}^{(\alpha)}$, et $I_{b,a}(f) = +\infty$ sinon.

Soit maintenant

$$K_{\text{br}} := K^{(\alpha)} \cap D_{\text{br}}^{(0)}[0,1].$$

Nous montrons que K_{br} est un sous-ensemble compact de $(\text{Càdlàg}[0,1], \text{dist})$, ce qui implique, encore une fois d'après le principe de contraction, un PGD pour les fonctionnelles des ponts $\Phi : D_{\text{br}}^{(0)}[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Théorème 15 (Avec C. Goldschmidt & G. Miermont)

Soit $X = \Phi(\mathbb{b})$, où $\Phi : D_{\text{br}}^{(0)}[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonctionnelle continue positive, homogène-positive et non identiquement nulle. Soit

$$\gamma_\Phi := \max\{\Phi(f) : f \in K_{\text{br}}\}.$$

Alors εX satisfait PGD lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ avec vitesses $\varepsilon^{-\alpha'}$ et bonne fonction de taux

$$J_\Phi^{\mathbb{b}}(x) = c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'}.$$

En particulier,

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Comme précédemment, on obtient des équivalents exacts pour la fonction génératrice des moments, ainsi que pour les moments de X en utilisant [JC04, Théorème 4.5].

§ 2.3.2. L'Aire sous l'Excursion et le Supremum

Dans le cas particulier de la fonctionnelle $\Phi(f) = \int_0^1 f(s) ds$, la constante γ_Φ peut être déterminée comme une application particulièrement simple d'une intégration par parties et de l'inégalité de Hölder. En effet, remarquons tout d'abord que la décomposition de Jordan de toute fonction $f = f_\uparrow - f_\downarrow \in K_{\text{ex}}$ satisfait $f_\uparrow \leq f_\downarrow(1)$. En utilisant cette propriété, une intégration par parties, puis l'inégalité de Hölder, on obtient

alors pour toute fonction $f \in \mathbf{K}_{\text{ex}}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(s) ds &= \int_0^1 f_{\uparrow}(s) ds - \int_0^1 f_{\downarrow}(s) ds \\ &= \int_0^1 (f_{\uparrow}(s) - f_{\downarrow}(1)) ds + \int_0^1 s f'_{\downarrow}(s) ds \\ &\leq \left(\int_0^1 |f'_{\downarrow}(s)|^{\alpha'} ds \right)^{1/\alpha'} \left(\int_0^1 s^{\alpha} ds \right)^{1/\alpha} \leq (\alpha + 1)^{-1/\alpha}, \end{aligned}$$

Ce qui donne la borne supérieure $\gamma_{\Phi} \leq (\alpha + 1)^{-1/\alpha}$. Puis la borne inférieure est obtenue en remarquant que $\Phi(f) = (\alpha + 1)^{-1/\alpha}$ pour la fonction $f(s) = \frac{(\alpha+1)^{1/\alpha'}}{\alpha} (1 - s^{\alpha})$ qui est bien une fonction de \mathbf{K}_{ex} . On en déduit ainsi le Théorème 10.

De la même manière, si nous considérons maintenant $\Phi(f) = \sup_{s \in [0,1]} f(s)$, alors on obtient des résultats asymptotiques répondant à la question de I. Kortchemski [Kor17, p. 12] dans le cadre de l'excursion \mathfrak{e} , et redémontrant l'équivalent asymptotique obtenu dans [Kor17, Corollary 13] dans le cas du pont stable \mathfrak{b} .

Corollaire 16 (Avec C. Goldschmidt & G. Miermont)

$$\begin{aligned} -\log \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathfrak{e}_t > x \right) &\sim c_{\alpha} x^{\alpha'} && \text{lorsque } x \rightarrow +\infty, \\ -\log \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathfrak{b}_t > x \right) &\sim c_{\alpha} x^{\alpha'} && \text{lorsque } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

§ 2.4. Perspectives

§ 2.4.1. PGD pour le Processus de Lévy α -stable ?

Nous obtenons des PGD pour la topologie M1 de Skorokhod et nous montrons que les lois de l'excursion normalisée stable ne sont pas exponentiellement tendues pour la topologie J1. Comme nous l'avons mentionné plus haut, ceci n'implique pas que l'excursion normalisée stable ne satisfait pas de PGD, mais seulement que dans ce cas la fonction de taux n'est pas bonne. Ceci nous amène naturellement à la question suivante :

Question

L'excursion stable normalisée (resp. le pont stable) satisfait-elle (resp. il) un PGD pour la topologie J1 de Skorokhod ?

Rappelons que G. O'Brien [O'B99] montra que les processus de Lévy considérés satisfont un PGD pour la topologie M1, mais également pour la topologie J1 avec la même fonction de taux qui n'est plus bonne pour cette topologie.

De plus, nous nous sommes intéressés à deux processus obtenus (par absolue continuité) à partir de processus de Lévy stables. La question se pose alors naturellement pour le processus de Lévy stable lui-même.

Conjecture

Le processus de Lévy α -stable sans saut négatif satisfait un PGD (faible) pour la topologie M1 de Skorokhod.

Remarquons que le cas du processus de Lévy stable L diffère du pont et de l'excursion. En effet, puisque pour tout temps $t \geq 0$, les lois $(\varepsilon L_t)_{\varepsilon > 0}$ ne sont pas exponentiellement tendues, le critère de tension exponentielle ne s'applique plus. Par conséquent, établir un PGD (faible) pour le processus L présente de nouveaux défis.

§ 2.4.2. Géométrie des Grands Arbres de Galton-Watson

Tout comme l'excursion Brownienne, les processus de Lévy α -stables ont des liens étroits avec la géométrie de grands graphes aléatoires. Il n'est donc pas déraisonnable de penser que les résultats obtenus dans cette thèse peuvent permettre de capturer certaines propriétés de ces derniers. Rappelons que la méthode objective a pour but d'introduire un objet limite afin d'étudier des propriétés asymptotiques d'une certaine classe d'objets. Si nous nous intéressions dans le chapitre précédent aux graphes du point de vue de la convergence locale, il est également possible de les étudier dans leur globalité. Dans le cas des arbres (plans ordonnés), nous sommes intéressés au problème suivant :

À quoi ressemble un très grand arbre de Galton-Watson, «quand il est vu de loin» ?

Propriétés Asymptotiques de Grands Arbres. La première réponse que nous donnons ici repose sur la belle idée, bien connue, qu'un arbre peut être encodé par certaines fonctions qui ont des liens avec l'excursion Brownienne. Étant donné un arbre plan ordonné τ à $n+1$ sommets, listés dans l'ordre lexicographique $\emptyset = v_0 < v_1 < \dots < v_n$, on définit :

- la *marche de Lukasiewicz* $(W_k(\tau), 0 \leq k \leq n+1)$ par $W_0(\tau) = 0$ et pour tout $0 \leq k \leq n$, $W_{k+1}(\tau) = W_k(\tau) + c_{v_k} - 1$, où c_{v_k} est le nombre d'enfants du sommet v_k ;
- la *fonction de hauteur* $(H_k(\tau), 0 \leq k \leq n)$ pour tout $0 \leq k \leq n$ par $H_k(\tau) = |v_k|$ la hauteur du sommet v_k ; et
- la *fonction de contour* $(C_k(\tau), 0 \leq k \leq 2n)$ construite à partir de l'exploration de l'arbre «dans le sens des aiguilles d'une montre», et en enregistrant la hauteur de chacun des sommets rencontrés.

Voir Figure 2.6 pour une illustration de ces différents encodages.

Si τ_n est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir n sommets de loi de descendance μ , alors correctement mise à l'échelle, chacune des fonctions définie ci-dessus converge en loi vers l'excursion Brownienne (à une constante multiplicative près).

Théorème (Aldous [Ald93])

Supposons que μ est critique avec une variance finie σ^2 non-nulle. Alors

$$\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} C_{2nt}(\tau_n) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_t^{\text{ex}})_{0 \leq t \leq 1}$$

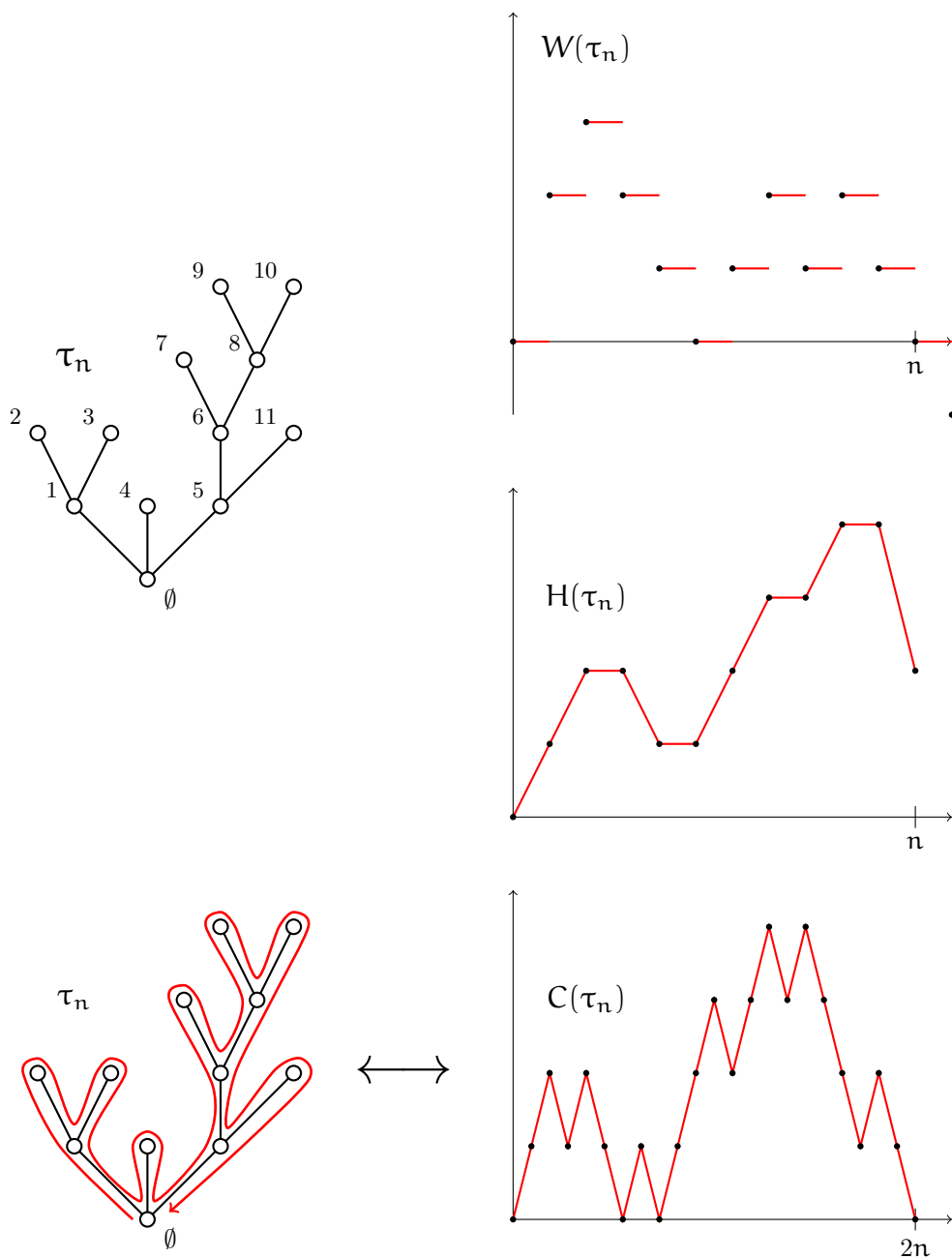


Figure 2.6 – À gauche : un arbre fini avec l'ordre lexicographique sur les sommets (resp. «exploré dans le sens des aiguilles d'une montre» en dessous). À droite de haut en bas : sa marche de Lukasiewicz, sa fonction de hauteur et sa fonction de contour.

dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+)$.

Ce résultat de convergence dû à D. Aldous permet d'étudier des statistiques (continues) asymptotiques des arbres de Galton-Watson, comme par exemple sa hauteur.

Corollaire (Aldous [Ald93])

Supposons que μ est critique avec une variance finie σ^2 non-nulle. Alors pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\text{Hauteur}(\tau_n) > x\sqrt{n}\right) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} B_t^{\text{ex}} > x\right).$$

Ainsi connaître des estimées pour la probabilité limite permet d'obtenir des estimées pour les quantités asymptotiques «analogues» définies sur les arbres finis. Voir [FJ09] pour d'autres exemples comme la largeur ou l'indice de Wiener qui peuvent être également représentés (à la limite lorsque le nombre de sommets de τ_n tend vers $+\infty$) comme une fonctionnelle de l'excursion Brownienne. Mais ...

Quel est le lien avec les processus de Lévy ?

Supposons maintenant que la loi μ est critique, de variance infinie et appartienne au domaine d'attraction d'une loi α -stable avec $1 < \alpha < 2$, c'est-à-dire $\mu([n, \infty]) = L(n)n^{-\alpha}$ avec L une fonction à variation lente. Alors T. Duquesne a démontré un résultat similaire à la convergence d'Aldous précédente.

Théorème (Duquesne [Duq03])

Il existe une suite d'entiers $B_n \rightarrow +\infty$ telle que

$$\left(\frac{1}{B_n}W_n(\lfloor nt \rfloor), \frac{B_n}{n}H_n(nt), \frac{B_n}{n}C_{2nt}(\tau_n)\right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathfrak{e}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_t)_{0 \leq t \leq 1}$$

dans $\mathbb{C}\text{àdlàg}([0, 1], \mathbb{R}^3)$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod.

Le processus $(\mathcal{H}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est appelé *fonction de hauteur* de l'excursion normalisée⁴⁸, et nous renvoyons à [Duq03] pour une définition.

Ce qui précède nous conduit naturellement à la question suivante :

Question

Quelles informations peut-on (ré)-obtenir sur les arbres finis en étudiant l'excursion stable normalisée ?

Les Arbres de Lévy Stables. Au début des années 1990, D. Aldous introduit un nouvel objet aléatoire, appelé *Continuum Random Tree* (CRT), qui n'est autre que la limite d'échelle d'un arbre de Galton-Watson τ_n conditionné à avoir n sommets de loi de reproduction une loi de Poisson de paramètre 1 : comme un espace métrique (compact) l'espace métrique $(\tau_n, c_n d_{\text{gr}})$, où d_{gr} est la distance de graphe correctement mise à l'échelle, converge en distribution (pour la distance de Gromov-Hausdorff) vers le CRT qui est un espace métrique compact. Voir [Ald91a] pour plus de détails, et [Ald93] pour une construction du CRT en utilisant l'excursion Brownienne. Cette dernière construction permet en outre de construire le CRT

⁴⁸Dans le cas Brownien $\mathcal{H} = 2B^{\text{ex}}$.

à partir d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction critique et de variance finie (qui ne sont pas nécessairement des loi de Poisson). C'est pourquoi le CRT est généralement appelé *arbre Brownien* et apparaît ainsi comme un objet universel.

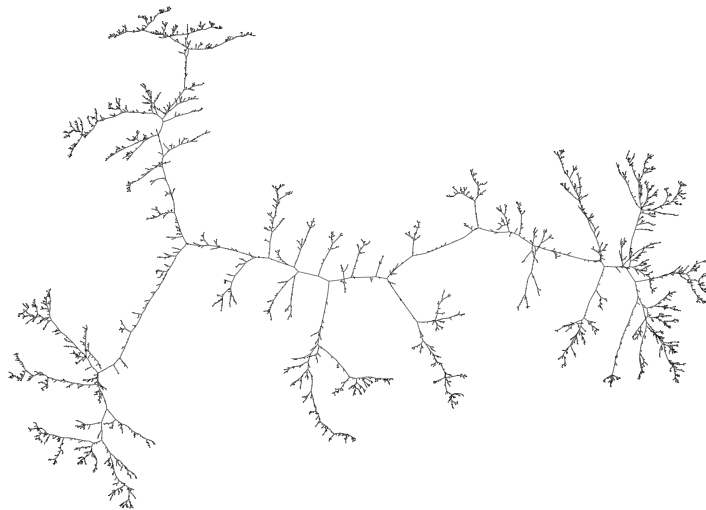


Figure 2.7 – Approximation de l'arbre Brownien par un arbre binaire uniforme à 30000 sommets.

J.-F. Le Gall et Y. Le Jan ont généralisé cette construction à partir de l'excursion normalisée stable. Voir [LGLJ98]. Rappelons que \mathcal{H} est la fonction de hauteur associée à e . Bien que nous n'ayons pas besoin d'une définition précise \mathcal{H} , nous mentionnons toutefois qu'il s'agit d'un processus à valeurs positives avec $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = 0$ dont il existe une modification continue. Pour $s, t \in [0, 1]$, on pose

$$d_{\mathcal{H}}(s, t) = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_t - 2 \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} \mathcal{H}_r.$$

La fonction $d_{\mathcal{H}}$ étant une pseudo-métrie sur $[0, 1]$, on peut définir une relation d'équivalence sur $[0, 1]$ par $s \sim_{\mathcal{H}} t \iff d_{\mathcal{H}}(s, t) = 0$. L'espace quotient résultant $T_{\alpha} := [0, 1] / \sim_{\mathcal{H}}$ est appelé *arbre de Lévy α -stable*. Dans le cas de l'arbre Brownien, où $\alpha = 2$, D. Aldous [Ald91b] montra que le chemin partant de la racine jusqu'à une feuille choisie uniformément au hasard est distribuée selon une loi de Rayleigh, qui est également la distribution du temps local en 0 d'un pont Brownien. En particulier, ce chemin peut être relié à l'excursion Brownienne grâce à une correspondance entre les ponts reflétés en 0, son temps local en 0 et les excursions Browniennes obtenue par J. Bertoin et J. Pitman. Voir [BP94, Section 3]. Le cas de l'arbre stable est de nature différente puisque les processus e et \mathcal{H} ne sont plus égaux (à une constante multiplicative près). Ainsi afin d'étudier des questions similaires pour les arbres stables, comme la hauteur et le diamètre étudiés par T. Duquesne et M. Wang et pour lesquelles des équivalents asymptotiques ont été déterminés dans [DW17], on peut s'intéresser à établir un PGD pour le processus de hauteur \mathcal{H} .

Question

Le processus de hauteur $(\mathcal{H}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ associé à e satisfait-il un PGD ?

De plus, de la même manière que pour l'arbre Brownien, T. Duquesne a montré que si τ_n est un arbre de Galton-Watson conditionné à être de taille n de loi de reproduction critique μ appartenant au domaine

d'attraction d'une loi stable, alors en renormalisant la distance de graphe par $L(n)n^{1-1/\alpha}$, où $L(n)$ est une certaine fonction à variation lente, τ_n converge vers l'espace métrique compact \mathcal{T}_α pour la distance de Gromov-Hausdorff. Voir [Duq03]. Par conséquent, établir des résultats asymptotiques pour l'un de ces deux objets peut induire des résultats asymptotiques similaires pour le second.

§ 2.4.3. Énumération de Graphes

Notons $C(n, q)$ le nombre de graphes avec n sommets (numérotés) et q arêtes, sans arête multiple ni boucle. Le problème d'énumération de graphes consiste à déterminer $C(n, q)$. Dans le cas des arbres à n sommets, il est bien connu⁴⁹ que $C(n, n-1) = n^{n-2}$. En 1977, E. M. Wright [Wri77] montra que pour tout $k \geq -1$, on a la formule asymptotique suivante :

$$C(n, n+k) \sim \rho_k n^{n+\frac{3k-1}{2}} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où ρ_k est une certaine constante définie par une formule de récursion quadratique. De nombreux travaux ont eu pour but de déterminer une expression exacte simple de ρ_k . La connexion entre l'excursion Brownienne et l'énumération de graphes a été trouvée par J. Spencer en 1997 [Spe97] qui a montré que pour tout $k \geq 0$,

$$\rho_{k-1} = \frac{1}{k!} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 B_t^{\text{ex}} dt \right)^k \right].$$

La question se pose naturellement pour les moments d'une excursion de Lévy α -stable sans saut négatif.

Question

Peut-on relier les moments de \mathcal{A}_{ex} au problème d'énumération de graphes ?

* * *

⁴⁹De nombreuses démonstrations existent, mais la première a été donné par A. Cayley en 1889 [Cay89].

Limite
Aléatoire

Cette partie est divisée en quatre chapitres. Nous introduisons tout d'abord un cadre de travail unifié et naturel pour l'étude de la limite locale de graphes aléatoires dynamiques. Puis nous déterminons la limite locale pour une vaste classe de graphes aléatoires dynamiques. Enfin nous discutons de quelques conséquences de la notion de convergence locale dans ce contexte.

3 | Theory of Local Weak Limit for Dynamical Graphs

... in which we introduce the space of (possibly marked) dynamical graphs that we consider, and the associated notions of local convergence and local weak convergence. These are similar to the notions of local convergence and Benjamini-Schramm local weak convergence for static graphs, of course adapted to our dynamical settings. Local weak limit of dynamical graphs has been introduced by the author of this manuscript and E. Jacob in [DJ23]. This chapter has to be thought of as a preparatory for the consecutive chapters.

§ 3.1. Dynamical Graphs and Networks

A **dynamical rooted graph** is a process of rooted graphs $(G_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0} = ((V_t, E_t), \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ depending on time $t \geq 0$, where the set of vertices V_t always contains a specific vertex, called the **root** \mathfrak{o} , and is included in a vertex set V . We sometimes simply write G or (G, \mathfrak{o}) for the dynamical graph $(G_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$. We further always assume that our dynamical graph:

- has **nondecreasing vertex set** V_t . Each vertex $v \in V_t$ then has a **birth-time** $b(v)$ equal to the infimum value of $\{s : v \in V_s\}$, and is smaller than or equal to t . We always assume that v belongs to $V_{b(v)}$, which can be seen as a right-continuity property.

We also write $(V_t, E_{\leq t}) := (V_t, \bigcup_{s \leq t} E_s)$ the **accumulated graph** at time t , and $(V_\infty, E_{< \infty}) := (\bigcup_{t \geq 0} V_t, \bigcup_{t \geq 0} E_t)$ the total accumulated graph. We say we have a **growing graph** if the graph and the accumulated graph coincide for all finite t .

- is **locally finite**, in the sense that for any finite $t \geq 0$, the accumulated graph $(V_t, E_{\leq t})$ is locally finite.

When looking at navigability along a dynamical graph, or in the study of processes living on this graph, we have a natural notion of space-time paths along the graph, as well as space-time “distances” from the root.

Definition 3.1.1. A dynamical rooted graph $(G_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ is called **connected** if for all $t \geq 0$ and v in V_t , there exists $k \geq 0$, a path $\mathfrak{o} = v_0, \dots, v_k = v$ in the graph $(V_t, E_{\leq t})$ and times $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t$ such that for all $i = 1, \dots, k$, we have $v_{i-1}v_i \in E_{t_i}$.

We write $\vec{d}_t(v)$ for the smallest possible value for k above (which can be infinite if the dynamical graph is not connected). ◆

Note that a dynamically connected graph $(G_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ can fail to be a connected graph for fixed $t > 0$. Note also that the function $t \mapsto \vec{d}_t(v)$, defined on $[b(v), +\infty)$, is nonincreasing, and takes finite values if the dynamical graph is connected. We further define the dynamical component of the root, as well as the dynamical balls centered at the root.

Definition 3.1.2. Let $(G_t, o)_{t \geq 0}$ be a dynamical rooted graph on a vertex set V .

- (a) The **dynamical component** of the root o in $(G_t)_{t \geq 0}$ is the largest connected dynamical subgraph $(G_t^{[\infty]}, o)_{t \geq 0} = ((V_t^{[\infty]}(G), E_t^{[\infty]}(G)), o)_{t \geq 0}$, characterized for $t \geq 0$ by

$$V_t^{[\infty]}(G) = \left\{ v \in V_t : \vec{d}_t(v) < +\infty \right\}$$

and

$$E_t^{[\infty]}(G) = \left\{ u \sim v \in E_t : u, v \in V_t^{[\infty]}(G) \right\}.$$

- (b) The **dynamical ball of radius d** centered in the root o in $(G_t)_{t \geq 0}$ is the dynamical rooted graph $(G_t^{[d]}, o)_{t \geq 0} = ((V_t^{[d]}(G), E_t^{[d]}(G)), o)_{t \geq 0}$, where for all $t \geq 0$,

$$V_t^{[d]}(G) = \left\{ u \in V_t : \vec{d}_t(u) \leq d \right\}$$

and

$$E_t^{[d]}(G) = \left\{ u \sim v \in E_t : u, v \in V_t^{[d]}(G) \right\}.$$

◆

Let us stress again that in the dynamical notion of connectivity that we have introduced, the graphs $G_t^{[\infty]}$ and $G_t^{[d]}$ can fail to be connected at a fixed time t .

Notation. When there is no confusion and implicit from the context, we write in the following (G, o) for the dynamical graph $(G_t, o)_{t \geq 0}$. ×

It is common to identify two graphs that are isomorphic. In our dynamical settings, we say two dynamical rooted graphs (G^1, o_1) and (G^2, o_2) are **isomorphic**, and we also write $(G^1, o_1) \equiv (G^2, o_2)$, if there exists a bijective map $\gamma : V_\infty(G^1) \rightarrow V_\infty(G^2)$ such that $\gamma((G^1, o_1)) = (G^2, o_2)$, where $\gamma((G^1, o_1))$ is by definition the dynamical rooted graph

$$\gamma((G^1, o_1)) := ((\gamma(V_t^1), \gamma(E_t^1)), \gamma(o_1))_{t \geq 0}.$$

In other words the bijective map γ preserves:

- the root, that is $\gamma(o_1) = o_2$; and
- the dynamic of edges, that is for all time $t \geq 0$, $\gamma(V_t^1) = V_t^2$ and $\{u, v\} \in E_t(G^1)$ precisely when $\{\gamma(u), \gamma(v)\} \in E_t(G^2)$.

It is not difficult to show that \equiv is an equivalence relation on the set of connected dynamical rooted locally finite graphs with nondecreasing vertex set.

Definition 3.1.3. We write \mathcal{DG}_\bullet for the space of isomorphism classes of connected dynamical rooted locally finite graphs, with nondecreasing vertex set. ◆

Remark 3.1.4. Note that the map γ is not allowed to depend on t , and as such, an element of \mathcal{DG}_\bullet cannot be identified with a function on the space of isomorphic classes of connected (*static*) rooted locally finite graphs. A way to by pass through this difficulty would be:

- to consider the edges in

$$\left(\bigcup_{s \leq t} E_s^{[\infty]}\right) \setminus E_t$$

as “segmented edges”, so that for fixed t , the graph $\left(V_t^{[\infty]}, \bigcup_{s \leq t} E_s^{[\infty]}\right)$ containing also the segmented edges is now connected.

- and then to identify unambiguously every single edge by defining a cyclic ordering of the neighbours of any given vertex, which would further respect the order of appearance of the edges in the graph (given that the edges incident to a given vertex in the dynamical component is now a growing set when we also consider the segmented edges).

We refrain ourselves to do so at this point, for the two reasons that this construction is not that natural for a given dynamical graph (in particular the requested ordering of the edges incident to each vertex), and that the space \mathcal{DG}_\bullet is actually a perfectly nice working space to define a local topology, as we do in next section.

However, our main theorem involves the Growth-and-Segmentation Multitype Poisson-Galton-Watson tree, which is best constructed as a Markov process on the space of ordered segmented trees. Of course, this process can then also be seen as a random element of \mathcal{DG}_\bullet . \diamond

We will also consider dynamical graphs with the additional structure of a mark associated to each vertex, living in a **mark space** S , which we recall is assumed to be compact and ordered⁵⁰.

A **dynamical marked graph**, or **dynamical network**, is then (G, m) , where G is a dynamical graph and m the mark function which belongs to $S^{V_\infty(G)}$. Two rooted dynamical networks (G^1, o_1, m_1) and (G^2, o_2, m_2) are called isomorphic if there is a bijective map $\gamma : V_\infty^1 \rightarrow V_\infty^2$ such that $\gamma(G^1, o_1, m_1) = (G^2, o_2, m_2)$, where now

$$\gamma(G^1, o_1, m_1) = (\gamma(G^1), \gamma(o_1), m_1 \circ \gamma^{-1}).$$

In other words, two dynamical networks are isomorphic if the dynamical graphs are isomorphic, with associated map γ preserving the marks of the vertices.

Definition 3.1.5. We write \mathcal{DN}_\bullet^S for the space of isomorphism classes of connected dynamical rooted locally finite networks, with nondecreasing vertex set and marks in space S . We also write \mathcal{DN}_\bullet when the mark space is implicit. \blacklozenge

§ 3.2. Local Convergence

We now endow the spaces \mathcal{DG}_\bullet and \mathcal{DN}_\bullet^S with the topology of **local convergence**. We should again note the similarity with the usual notion of local convergence for rooted (static) graph. We should also note that we take into account the time dynamics in a way which is similar to the notion of uniform convergence on compact sets, but with the added subtlety we already mentioned that an element of \mathcal{DG}_\bullet cannot be assimilated to a function on the space of rooted graphs.

⁵⁰In this section, it would actually suffice to suppose S is a Polish space. The order on S will be important when defining the growth-and-segmentation Poisson-Galton-Watson tree in next section, while the compactness of S will be used in the approximation argument of general kernels by regular finitary kernels in Section 4.4.

Definition 3.2.1. We say a sequence of dynamical rooted graphs $\{(G_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}, n \geq 1\}$ **converges locally to** $(G_t^\infty, \mathbf{o}_\infty)_{t \geq 0}$ **in** \mathcal{DG}_\bullet **if** for all $d \geq 1$ and $T < +\infty$, for all n large enough,

$$(G_t^{n,[d]}, \mathbf{o}_n)_{t \leq T} \equiv (G_t^{\infty,[d]}, \mathbf{o}_\infty)_{t \leq T}.$$

We say a sequence of dynamical networks (G^n, \mathbf{m}_n) **converges locally to** $(G^\infty, \mathbf{m}_\infty)$ **in** \mathcal{DN}_\bullet^S **if** for all $d \geq 1$, for all $T < +\infty$ and $\delta > 0$, for all n large enough, there is a bijective map $\gamma_n : V_T^{n,[d]} \rightarrow V_T^{\infty,[d]}$ such that

$$\begin{cases} \gamma_n \left((G_t^{n,[d]}, \mathbf{o}_n)_{t \leq T} \right) = (G_t^{\infty,[d]}, \mathbf{o}_\infty)_{t \leq T}, \\ \forall v \in V_T^{n,[d]}, d_S(\mathbf{m}_\infty(\gamma_n(v)), \mathbf{m}_n(v)) \leq \delta. \end{cases}$$

In words, we ask the dynamical graphs to be isomorphic when restricted to graph distance d and time T , and in the case of dynamical networks we further request the associated map to leave the marks at distance less than δ from each other. \blacklozenge

Proposition 3.2.2. *The topology of local convergence on \mathcal{DG}_\bullet is metrizable by the distance D_\bullet defined as*

$$D_\bullet((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} D_k((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2)),$$

where

$$D_k((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2)) = \left(1 + \sup \left\{ d \geq 1, (G_t^{1,[d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq k} \equiv (G_t^{2,[d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq k} \right\} \right)^{-1}.$$

Moreover, $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$ is a complete ultrametric space.

The topology of local convergence on \mathcal{DN}_\bullet^S can be defined by the distance D_\bullet^S defined as

$$D_\bullet^S((G^1, \mathbf{o}_1, \mathbf{m}_1), (G^2, \mathbf{o}_2, \mathbf{m}_2)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} D_k^S((G^1, \mathbf{o}_1, \mathbf{m}_1), (G^2, \mathbf{o}_2, \mathbf{m}_2)),$$

where D_k^S is defined by

$$D_k^S((G^1, \mathbf{o}_1, \mathbf{m}_1), (G^2, \mathbf{o}_2, \mathbf{m}_2)) = \frac{1}{1 + R_k^S},$$

and R_k^S by

$$R_k^S = \sup \left\{ d \geq 1 : \exists \gamma : \begin{cases} \gamma \left((G_t^{1,[d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq k} \right) = (G_t^{2,[d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq k}, \\ \forall v \in V_k^{1,[d]}, d_S(\mathbf{m}_2(\gamma(v)), \mathbf{m}_1(v)) \leq 1/d. \end{cases} \right\}.$$

Since the proof of this proposition is careful rereading of [Hof23, Appendix A], we postpone it to the Section 3.4. Note that the metric spaces $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$ and $(\mathcal{DN}_\bullet^S, D_\bullet)$ fail to be separable, for the same reason that the space of real-valued functions endowed with the topology of uniform convergence on compact sets fails to be separable, and still fails to be separable when restricted to continuous or càdlàg functions. To see that, consider the following simple example. For all $0 < \varepsilon < 1$, define the dynamical rooted graph $(G_t^\varepsilon, \mathbf{o})_{t \geq 0}$ as follows: if $t < 1 + \varepsilon$, then $(G_t^\varepsilon, \mathbf{o})$ is formed only by the root \mathbf{o} ; and if $t \geq 1 + \varepsilon$, then $(G_t^\varepsilon, \mathbf{o})$ is constant equal to the root linked to one other vertex. All these dynamical rooted graphs are at distance $1/2$ from each other. Thus the uncountable family of balls of radius $1/3$, $\{(G^\varepsilon, [1/3], \mathbf{o}), \varepsilon > 0\}$ is disjoint.

It is then natural to ask whether we also have a notion of local Skorokhod topology, which would be similar to the J1-Skorokhod topology and define a Polish space. It is indeed the case, as we explain in Section 3.5 in the context of unmarked graphs. However we obtain our results of local convergence of Chapter 4 directly for the finer local topology, and for this reason we do not work further with the local Skorokhod topology.

§ 3.3. Local Weak Convergence for Dynamical Graphs

In this section, we define an analog of Benjamini-Schramm convergence, or local weak convergence, in the context of dynamical graphs. We could define local weak convergence on either spaces \mathcal{DG}_\bullet for unmarked graphs, or \mathcal{DN}_\bullet^S for marked graphs, but we work here directly with marked graphs. Consider a sequence of dynamical graphs $\{G^n, n \geq 1\}$ with marks in S and defined on a finite vertex set⁵¹ V_n , with size n tending to infinity.

§ 3.3.1. The Deterministic Case

We first consider the case of a **deterministic** such sequence. For each n , we then obtain a random element of \mathcal{DN}_\bullet^S by first selecting a root \mathbf{o}_n uniformly at random on V_n , and considering only $(G^{n, [\infty]}, \mathbf{o}_n)$ the dynamical component containing \mathbf{o}_n . To enlighten the notation, we use below a slight abuse of notation and write (G^n, \mathbf{o}_n) for $(G^{n, [\infty]}, \mathbf{o}_n)$, knowing that we always work on \mathcal{DN}_\bullet^S .

Definition 3.3.1. Given a deterministic sequence $\{G^n, n \geq 1\}$ of marked dynamical graphs on V_n , we say that $\{G^n, n \geq 1\}$ **converges locally weakly on \mathcal{DN}_\bullet^S** to a random dynamical rooted graph (G^∞, \mathbf{o}) , if the sequence $\{(G^n, \mathbf{o}_n), n \geq 1\}$, where \mathbf{o}_n is a uniform vertex of V_n , converges in distribution to (G^∞, \mathbf{o}) *w.r.t.* the local distance D_\bullet^S . \blacklozenge

Note that even though G^n is here deterministic, we obtain a (nondeterministic) random variable (G^n, \mathbf{o}_n) by the random choice of the root $\mathbf{o}_n \in V_n$. An equivalent definition is the weak convergence of the probability measures

$$\frac{1}{|V_n|} \sum_{v \in V_n} \delta_{(G^n, v)}$$

to the law ν of (G^∞, \mathbf{o}) , as probability measure on the metric space $(\mathcal{DN}_\bullet^S, D_\bullet^S)$, which can also be restated as the convergence

$$\frac{1}{|V_n|} \sum_{v \in V_n} h(G^n, v) \rightarrow \mathbb{E}[h(G^\infty, \mathbf{o})]$$

for every bounded and continuous function $h : \mathcal{DN}_\bullet^S \rightarrow \mathbb{R}$.

Let us give now an easy example of this notion of local convergence for the dynamical percolation on transitive graphs.

Example 3.3.2. Consider $(\Lambda_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}$ a dynamical percolation with parameter $p \in [0, 1]$ on a transitive graph T where we have rooted T at some vertex \mathbf{o} , and denote Λ^n any box of side length n in T . Assume that for all $d \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{o}_n \in \Lambda^n \setminus \Lambda^{n-d+1}) \rightarrow 0,$$

where \mathbf{o}_n is chosen uniformly at random in Λ^n . Then the sequence of dynamical graphs induced by $(\Lambda_t)_{t \geq 0}$ in the box Λ^n , denoted $(\Lambda_t^n)_{t \geq 0}$, converges locally weakly to $(\Lambda_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}$.

Indeed consider the graphical construction of the dynamic of $(\Lambda_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}$, and condition on the event $\{\mathbf{o}_n \notin \Lambda^n \setminus \Lambda^{n-d+1}\}$. Then by translating $(\Lambda_t^n, \mathbf{o}_n)$ to (Λ, \mathbf{o}) , we can couple $(\Lambda_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}$ and $(\Lambda_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}$

⁵¹In the most of our cases, $V_n = \{1, \dots, n\}$.

(in the obvious way) such that the two dynamical balls are equal, *i.e.*

$$(\mathcal{A}_t^{n,[d]}, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0} = (\mathcal{A}_t^{[d]}, \mathbf{o})_{t \geq 0}.$$

◇

§ 3.3.2. The Random Case

Having discussed the notion of local weak convergence for deterministic graphs, we now move on to sequence of **random** dynamical graphs.

Definition 3.3.3. Given a random sequence $\{\mathbf{G}^n, n \geq 1\}$ of marked dynamical graphs on V_n , we say that

- (a) $\{\mathbf{G}^n, n \geq 1\}$ **converges locally weakly** to $(\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o})$ if $\{(\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}, n \geq 1\}$ converges in distribution to $(\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o})$.

Equivalently, for every bounded and continuous function $h : \mathcal{DN}_\bullet^S \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} [h((\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n))] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{|V_n|} \sum_{v \in V_n} h((\mathbf{G}^n, v)) \right] \longrightarrow \mathbb{E} [h((\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o}))].$$

- (b) $\{\mathbf{G}^n, n \geq 1\}$ **converges locally in probability** to $\{\mathbf{G}^n, n \geq 1\}$ having (possibly random) distribution ν if for every bounded and continuous function $h : \mathcal{DN}_\bullet^S \rightarrow \mathbb{R}$ we have convergence in probability of

$$\mathbb{E} [h((\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n)) \mid \mathbf{G}^n] = \frac{1}{|V_n|} \sum_{v \in V_n} h((\mathbf{G}_t^n, v))$$

to the random variable $\mathbb{E}_\nu [h((\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o}))]$.

◇

Remark 3.3.4. As it is the case for static graphs, it is not obvious that the definition (b) makes sense. See [Hof23, Remarks 2.12 and 2.13] for the same observation for static graphs. Let us first remark that local convergence in probability does not mean that $(\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n) \xrightarrow{(\mathbb{P})} (\mathbf{G}, \mathbf{o})$ for which the random objects $\{(\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n), n \geq 1\}$ and (\mathbf{G}, \mathbf{o}) have to live in a common probability space, and which is not necessarily the case. However we can note that definition (b) is equivalent to the convergence in probability of the empirical neighbourhood distribution of \mathbf{G}_n to the measure ν . In that case, all objects live in the space of probability measures on dynamical rooted graphs. ◇

Note that in the definition (b), $\mathbb{E}_\nu [h((\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o}))]$ may be a (nondeterministic) random variable due to the possible random choice of ν . However, in the common case of a deterministic distribution ν , there is a convenient way of proving local in probability convergence.

Lemma 3.3.5. *Let ν be a probability measure on \mathcal{DN}_\bullet^S . Given a random sequence $\{\mathbf{G}^n, n \geq 1\}$ of dynamical graphs on V_n , consider \mathbf{o}_n and \mathbf{o}'_n two independent uniformly chosen vertices, and suppose that $((\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n), (\mathbf{G}^n, \mathbf{o}'_n))$ converges in distribution to $\nu \otimes \nu$. Then $\{\mathbf{G}^n, n \geq 1\}$ converges locally in probability to ν .*

Proof. The result follows from a simple second moment computation. Let h be continuous and bounded, and $(\mathbf{G}_t^\infty, \mathbf{o})_{t \geq 0}$ have distribution ν . Then $h((\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0})$ converges in distribution to $h((\mathbf{G}_t^\infty, \mathbf{o})_{t \geq 0})$, and as h is bounded, we also get a convergence of the first moment, hence

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{|V_n|} \sum_{\nu \in V_n} h((\mathbf{G}_t^n, \nu)_{t \geq 0}) \right] = \mathbb{E} [h((\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0})] \longrightarrow \mathbb{E} [h((\mathbf{G}_t^\infty, \mathbf{o}))].$$

We now compute the second moment of this random variable as

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{|V_n|^2} \sum_{\nu, \nu' \in V_n} h((\mathbf{G}_t^n, \nu)_{t \geq 0}) h((\mathbf{G}_t^n, \nu')_{t \geq 0}) \right] &= \mathbb{E} [h((\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}) h((\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}'_n)_{t \geq 0})] \\ &\longrightarrow \mathbb{E} [h((\mathbf{G}_t^\infty, \mathbf{o})_{t \geq 0})]^2, \end{aligned}$$

where the convergence comes from the convergence in distribution of $((\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}, (\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}'_n)_{t \geq 0})$ and again the fact h is continuous and bounded. Hence the random variable $\frac{1}{|V_n|} \sum_{\nu} h((\mathbf{G}_t^n, \nu)_{t \geq 0})$ converges in \mathbb{L}^2 and in probability to the constant $\mathbb{E} [h((\mathbf{G}_t^\infty, \mathbf{o}))]$. \square

Remark 3.3.6. By Definition 3.2.1, in order to prove the convergence in distribution of the dynamical components $((\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}, (\mathbf{G}_t^n, \mathbf{o}'_n)_{t \geq 0})$ to $\nu \otimes \nu$, it suffices to prove that for fixed $d \geq 1$, $T < +\infty$ and $\delta > 0$, one can couple the dynamical balls $(\mathbf{G}_t^{n, [d]}, \mathbf{o}_n)_{t \leq T}$ and $(\mathbf{G}_t^{n, [d]}, \mathbf{o}'_n)_{t \leq T}$ with $(\mathbf{G}_t^{[d]}, \mathbf{o})_{t \leq T}$ and $(\mathbf{G}_t'^{[d]}, \mathbf{o}')_{t \leq T}$, where \mathbf{G} and \mathbf{G}' are *i.i.d.* dynamical graphs with law ν , so that *w.h.p.* as n tends to infinity, they coincide in \mathcal{DG}_\bullet with corresponding marks at distance less than δ from each other. \diamond

§ 3.4. Completeness of $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$

We present here some of the missing details for the proof Proposition 3.2.2. Since the proofs of completeness for the spaces $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$ and $(\mathcal{DN}_\bullet, D_\bullet^S)$ are very similar, we only give the proof for $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$.

Let us first show a useful lemma which states that a dynamical rooted locally finite graph is characterized by its connected dynamical balls.

Lemma 3.4.1 (Dynamical balls characterized dynamical graph). *Let $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ and $(\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$ be two dynamical rooted locally finite graphs. If for every $d \geq 1$ and $T < +\infty$, $(\mathbf{G}_t^{1, [d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq T} \equiv (\mathbf{G}_t^{2, [d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq T}$, then $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0} \equiv (\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$.*

Remark that if γ is an isomorphism between two dynamical graphs $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ and $(\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$, then for all finite time $T < +\infty$, the restriction of γ to V_T^1 is an isomorphism between the dynamical graphs $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq T}$ and $(\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq T}$. We then deduce immediately that for proving isomorphism between dynamical graphs, we may consider restriction in time and, or distance.

Corollary 3.4.2. *The following statements are equivalent.*

- (i) $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0} \equiv (\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$.
- (ii) For every $d \geq 1$ and $T < +\infty$, $(\mathbf{G}_t^{1, [d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq T} \equiv (\mathbf{G}_t^{2, [d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq T}$.
- (iii) For every $d \geq 1$ and $k \geq 0$, $(\mathbf{G}_t^{1, [d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq k} \equiv (\mathbf{G}_t^{2, [d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq k}$.

(iv) For every $T < +\infty$, $(G_t^1, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq T} \equiv (G_t^2, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq T}$.

(v) For every $k \geq 0$, $(G_t^1, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq k} \equiv (G_t^2, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq k}$.

(vi) For every $d \geq 1$, $(G_t^{1,[d]}, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0} \equiv (G_t^{2,[d]}, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$.

Proof of Lemma 3.4.1. We need to prove that there exists an isomorphism between $(G_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ and $(G_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$. To this end, we use the same subsequence argument as [Hof23, Lemma A.10] which we need of course adapt to our dynamical context. For all $d \geq 0$, since $(G_t^{1,[d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq d}$ and $(G_t^{2,[d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq d}$ are isomorphic it then exists $\gamma^d : V_d^{1,[d]} \rightarrow V_d^{2,[d]}$ an isomorphism which preserves the root and the dynamic of edges. Let us extend each γ^d to a map from V_∞^1 to V_∞^2 . Define $\Gamma^d : V_\infty^1 \rightarrow V_\infty^2$ by

$$\Gamma^d(\mathbf{u}) = \begin{cases} \gamma^d(\mathbf{u}) & \text{if } \mathbf{u} \in V_d^{1,[d]} \\ \mathbf{o}_2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Using this sequence $\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \dots$, we will construct an isomorphism between $(G_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ and $(G_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$. To do so, observe that for all $d \geq 0$, the restriction $\Gamma_{|V_0^{1,[0]}}^d$ of Γ^d to $V_0^{1,[0]}$ is an isomorphism between $(G_0^{1,[0]}, \mathbf{o}_1)$ and $(G_0^{2,[0]}, \mathbf{o}_2)$ (since $V_0^{1,[0]} = \{\mathbf{o}_1\}$). Since the set of such isomorphisms is finite, it exists at least one isomorphism, and call it $\tilde{\gamma}^0$, which is repeated infinitely often in $\Gamma_{|V_0^{1,[0]}}^0, \Gamma_{|V_0^{1,[0]}}^1, \Gamma_{|V_0^{1,[0]}}^2, \dots$. Hence it exists \mathbb{N}_0 an infinite subset of \mathbb{N} such that

$$\Gamma_{|V_0^{1,[0]}}^d = \tilde{\gamma}^0 \quad \text{for all } d \in \mathbb{N}_0.$$

We repeat now this argument. For any $d \in \mathbb{N}_0$, the restriction $\Gamma_{|V_1^{1,[1]}}^d$ is an isomorphism between $(G_t^{1,[1]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq 1}$ and $(G_t^{2,[1]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq 1}$. Remark now that the graphs $(G_1^{1,[1]}, \mathbf{o}_1)$ and $(G_1^{2,[1]}, \mathbf{o}_2)$ are two finite graphs. Then it exists at most a finite number of isomorphisms between them, which implies that it exists a finite number of isomorphisms between the two dynamical graphs $(G_t^{1,[1]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq 1}$ and $(G_t^{2,[1]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq 1}$. Thus it exists at least one, that we denote $\tilde{\gamma}^1$, repeated infinitely often in the sequence $\{\Gamma_{|V_1^{1,[1]}}^d, d \in \mathbb{N}_0\}$. It then exists \mathbb{N}_1 an infinite subset of \mathbb{N}_0 such that

$$\Gamma_{|V_1^{1,[1]}}^d = \tilde{\gamma}^1 \quad \text{for all } d \in \mathbb{N}_1.$$

By induction, we define a sequence of maps $\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2, \dots$ and a non increasing sequence of infinite sets $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_0 \supset \mathbb{N}_2 \supset \dots$ such that for all $r \geq 0$,

$$\Gamma_{|V_r^{1,[r]}}^d = \tilde{\gamma}^r \quad \text{for all } d \in \mathbb{N}_r,$$

where $\tilde{\gamma}^r$ is an isomorphism between $(G_t^{1,[r]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq r}$ et $(G_t^{2,[r]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq t \leq r}$.

Define now $\tilde{\Gamma}^r$ as the first term of the sequence $\{\Gamma^d, d \in \mathbb{N}_r\}$. Then for all $\mathbf{u} \in V_r^{1,[r]}$ we have

$$\tilde{\Gamma}^d(\mathbf{u}) = \tilde{\gamma}^r(\mathbf{u}) \quad \text{for all } d \geq r.$$

Since $(G_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ is connected (with nondecreasing vertex set), we have

$$V_\infty^1 = \bigcup_{t \geq 0} V_t^1 = \bigcup_{t \geq 0} \bigcup_{d \geq 0} V_t^{1,[d]} = \bigcup_{d \geq 0} V_d^{1,[d]}.$$

Moreover the sequence $\{\tilde{\Gamma}^d, d \in \mathbb{N}\}$ converges simply toward the function

$$\gamma(\mathbf{u}) := \sum_{d=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}^d(\mathbf{u}) \mathbb{1}_{\mathbf{U}^d}(\mathbf{u}),$$

where $\mathbf{U}^0 = \mathbf{V}_0^{1,[0]}$ and $\mathbf{U}^d = \mathbf{V}_d^{1,[d]} \setminus \mathbf{V}_{d-1}^{1,[d-1]}$ if $d \geq 1$.

We claim that γ is an isomorphism between $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ and $(\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$. It is bijective by definition of $\tilde{\Gamma}^d$, and moreover for all $d \geq 1$

$$\gamma(\mathbf{o}_1) = \tilde{\Gamma}^d(\mathbf{o}_1) = \mathbf{o}_2.$$

It remains to prove that γ preserves the dynamic of edges. Let us begin by check that $\gamma(\mathbf{V}_t^1) = \mathbf{V}_t^2$ for all time $t \geq 0$. If $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_t^1$, since $(\mathbf{G}_t^1, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}$ is connected, $\vec{d}_t(\mathbf{u}) < +\infty$. Then it exists an integer $d \geq t$ such that $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_t^{1,[d]}$. Let us note now that if φ is an isomorphism between two dynamical graphs $(\mathbf{H}_t^1, \rho_1)_{0 \leq t \leq T}$ and $(\mathbf{H}_t^2, \rho_2)_{0 \leq t \leq T}$, then for all time $0 \leq S \leq T$, the restriction of φ to \mathbf{V}_S^1 is an isomorphism between the dynamical graphs $(\mathbf{H}_s^1, \rho_1)_{0 \leq s \leq S}$ and $(\mathbf{H}_s^2, \rho_2)_{0 \leq s \leq S}$. Since $d \geq t$, this implies that

$$\gamma(\mathbf{u}) = \tilde{\Gamma}^d(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}_t^{2,[d]} \subset \mathbf{V}_t^2.$$

Conversely if $w \in \mathbf{V}_t^2$, then again since $(\mathbf{G}_t^2, \mathbf{o}_2)_{t \geq 0}$ is connected, it exists some $d \geq 0$ such that $\vec{d}_t(w) = d$. The map γ^d is an isomorphism, thus it exists $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_t^{1,[d]}$ such that $\gamma^d(\mathbf{u}) = w$. Recall that $\tilde{\Gamma}^k = \tilde{\gamma}^r$ on $\mathbf{V}_r^{1,[r]}$ for all $k \geq r$. Thus since $s \mapsto \vec{d}_s(\mathbf{u})$ is nonincreasing, if we denote $d' \geq d$ the unique integer such that $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{d'}$, we get

$$\gamma(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}^k(\mathbf{u}) \mathbb{1}_{\mathbf{U}^k}(\mathbf{u}) = \tilde{\Gamma}^{d'}(\mathbf{u}) = \tilde{\gamma}^d(\mathbf{u}) = \Gamma^d|_{\mathbf{V}_d^{1,[d]}}(\mathbf{u}) = \gamma^d(\mathbf{u}) = w.$$

This proves $\gamma(\mathbf{V}_t^1) = \mathbf{V}_t^2$ for all time $t \geq 0$. Finally if $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_t^1$, let

$$d = \max \{ \vec{d}_t(\mathbf{u}), \vec{d}_t(\mathbf{v}), \lceil t \rceil \}.$$

The map $\tilde{\Gamma}^d$ is an isomorphism between $(\mathbf{G}_s^{1,[d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq s \leq d}$ and $(\mathbf{G}_s^{2,[d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq s \leq d}$. This implies that $\tilde{\Gamma}^d(\mathbf{u}), \tilde{\Gamma}^d(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}_t^{2,[d]}$, and moreover $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{E}_t^{1,[d]}$ if and only if $\{\tilde{\Gamma}^d(\mathbf{u}), \tilde{\Gamma}^d(\mathbf{v})\} \in \mathbf{E}_t^{2,[d]}$. Now γ and $\tilde{\Gamma}^d$ coincide on $\mathbf{V}_d^{1,[d]}$, then we deduce that $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{E}_t^{1,[d]}$ if and only if $\{\gamma(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{v})\} \in \mathbf{E}_t^{2,[d]}$, which is equivalent to $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{E}_t^1$ if and only if $\{\gamma(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{v})\} \in \mathbf{E}_t^2$.

This concludes the proof. \square

From this, it is not hard to see that \mathbf{D}_\bullet is well-defined, meaning that it does not depend on the choice of the representatives in the isomorphism classes, and that it is an ultrametric. In particular,

$$\mathbf{D}_\bullet((\mathbf{G}^1, \mathbf{o}_1), (\mathbf{G}^2, \mathbf{o}_2)) = \mathbf{D}_\bullet([\mathbf{G}^1, \mathbf{o}_1], [\mathbf{G}^2, \mathbf{o}_2]).$$

Lemma 3.4.3. $(\mathcal{D}\mathcal{G}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)$ is an ultrametric space.

Let us now introduce an useful ingredient.

Definition 3.4.4. We say that a family $\{(\mathbf{G}_t^d, \mathbf{o}_d)_{t \geq 0}, d \geq 1\}$ of elements of $\mathcal{D}\mathcal{G}_\bullet$ is **consistent** if

$$(\mathbf{G}_t^{d,[r]}, \mathbf{o}_d)_{0 \leq t \leq d} \equiv (\mathbf{G}^r, \mathbf{o}_r)_{0 \leq t \leq d} \quad \text{for all } r \leq d.$$

◆

Remark that if $(G_t, o)_{t \geq 0}$ is a connected dynamical locally finite graph, then the sequence of balls $\{(G_t^{[d]}, o)_{t \geq 0}, d \geq 1\}$ is consistent. The next proposition gives a converse to this fact.

Proposition 3.4.5 (Consistent family has a local limit). *Let $\{(G_t^d, o_d)_{t \geq 0}, d \geq 0\}$ be a consistent family of elements of \mathcal{DG}_\bullet . Then it exists a unique connected dynamical graph $(H_t, o)_{t \geq 0}$ in \mathcal{DG}_\bullet such that*

$$(G_t^d, o_d)_{t \geq 0} \equiv (H_t^{[d]}, o)_{t \geq 0} \quad d \geq 1.$$

Moreover, we have

$$(G_t^d, o_d)_{t \geq 0} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} (H_t, o)_{t \geq 0}$$

in $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$.

Proof. One of the difficulties in considering graphs⁵² is that they are not necessarily defined on a common vertex space. Thus we first define isomorphic copies of $\{(G_t^d, o_d)_{t \geq 0}, d \geq 1\}$ on the common vertex space $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ satisfying the consistency property. Denote for all $d \geq 1$, $N_0^d = |V_0^d|$ and $\mathcal{A}_0^d = \{v \in \mathbb{N}^*, v \leq N_0^d\}$, and for all $n \geq 1$,

$$N_n^d = |V_n^d \setminus V_{n-1}^d| \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_n^d = \{v \in \mathbb{N}^*, v \leq N_n^d\}.$$

We will define recursively a sequence of bijections $\gamma^d : V_\infty^d \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{A}_n^d}$. The set \mathcal{A}_n^d has to be thought as the vertices appeared in G^d during the time interval $]n-1, n]$.

We first let $\gamma^0 = \eta_0$ the unique bijection from $V_\infty^0 = \{o_0\}$ to $\bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{A}_n^0} = \{1_0\}$, where the subscript 0 is to indicate that it appears at time 0 and also to avoid conflict of notation. The map γ^0 is of course an isomorphism of dynamical rooted graphs.

From the consistency property, it exists Γ^d an isomorphism between $(G_t^{d, [d-1]}, o_d)_{0 \leq t \leq d}$ and $(G_t^{d-1}, o_{d-1})_{0 \leq t \leq d}$. Let us remark that Γ^d may be decomposed as

$$\Gamma^d = \sum_{n=0}^d \Gamma^d \mathbb{1}_{U_n^d},$$

where $U_0^d = V_0^d$ and $U_n^d = V_n^d \setminus V_{n-1}^d$. We thus let $\Gamma_n^d = \Gamma^d \mathbb{1}_{U_n^d}$. We then define for all $v \in V_\infty^d$,

$$\gamma^d = \begin{cases} \gamma^{d-1} \circ (\Gamma_n^d)^{-1}(v) & \text{if } v \in V_n^{d, [d-1]} \setminus V_{n-1}^{d, [d-1]} \text{ and } n \leq d \\ \eta_n^d(v) & \text{if } v \in V_n^d \setminus (V_{n-1}^d \cup V_n^{d, [d-1]}) \text{ and } n \leq d \\ \zeta_n^d(v) & \text{if } v \in V_n^d \setminus V_{n-1}^d \text{ and } n > d, \end{cases}$$

where η_n^d and ζ_n^d are two arbitrary bijections from $V_n^d \setminus (V_{n-1}^d \cup V_n^{d, [d-1]})$ on $\mathcal{A}_n^d \setminus \mathcal{A}_{n-1}^{d-1}$, and from $V_n^d \setminus V_{n-1}^d$ on \mathcal{A}_n^d respectively.

We next define $(H_t^d, \rho_d)_{t \geq 0} = \gamma^d((G_t^d, o_d)_{t \geq 0})$ as the image of $(G_t^d, o_d)_{t \geq 0}$ by the map γ^d , that is, $\rho_d = \gamma^d(o_d)$ and for all time $t \geq 0$, the vertex and edge sets of (H_t^d, ρ_d) are respectively given by

$$V_t(H^d) = \{\gamma^d(v), v \in V_t^d\} \quad \text{and} \quad E_t(H^d) = \{(\gamma^d(u), \gamma^d(v)), \{u, v\} \in E_t^d\}.$$

By construction, γ^d is bijective which implies that

$$(H_t^d, \rho_d)_{t \geq 0} \equiv (G_t^d, o_d)_{t \geq 0} \quad \text{for all } d \geq 0.$$

⁵²The same problem holds in the context of static graphs. See [Hof23, Lemma A.12].

Let us define now the dynamical graph $(H_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$. We define the root $\mathfrak{o} = 1_0$, then the vertex set and the edge set of H_t by

$$V_t = \bigcup_{d \geq 1} V_t(H^d) \quad \text{and} \quad E_t = \bigcup_{d \geq 1} E_t(H^d).$$

By construction $(H_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ is locally finite since for all $d \geq 1$, $(H_t^d, \rho_d)_{t \geq 0}$ is. Hence $(H_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ is an element of \mathcal{DG}_\bullet . Furthermore for all $d \geq 1$, we have

$$(H_t^{[d]}, \mathfrak{o})_{t \geq 0} = (H_t^{d, [d]}, \rho_d)_{t \geq 0} \equiv (G_t^{d, [d]}, \mathfrak{o}_d)_{t \geq 0} = (G_t^d, \mathfrak{o}_d)_{t \geq 0}.$$

Furthermore for all $d \geq 1$, we have

$$(H_t^{[d]}, \mathfrak{o})_{0 \leq t \leq d} = (H_t^{d, [d]}, \rho_d)_{0 \leq t \leq d} \equiv (G_t^{d, [d]}, \mathfrak{o}_d)_{0 \leq t \leq d} = (G_t^d, \mathfrak{o}_d)_{0 \leq t \leq d},$$

which implies that

$$D_\bullet((G_t^d, \mathfrak{o}_d)_{t \geq 0}, (G_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}) \leq \frac{2(1 - 2^{-(d+1)})}{1 + d} + 2^{-d} \quad \text{for all } d \geq 1.$$

Thus $(G_t^d, \mathfrak{o}_d)_{t \geq 0} \rightarrow (G_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ in $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$.

Finally if $(H_t', \mathfrak{o}')_{t \geq 0} \in \mathcal{DG}_\bullet$ satisfies for all $d \geq 1$,

$$(H_t'^{[d]}, \mathfrak{o}')_{t \geq 0} \equiv (G_t^{d, [d]}, \mathfrak{o}_d)_{t \geq 0},$$

then for all $d \geq 1$,

$$(H_t'^{[d]}, \mathfrak{o}')_{t \geq 0} \equiv (H_t^{[d]}, \mathfrak{o})_{t \geq 0}.$$

Thus Lemma 3.4.1 implies

$$(H_t', \mathfrak{o}')_{t \geq 0} \equiv (H_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}.$$

Hence the connected dynamical locally finite rooted graph $(H_t, \mathfrak{o})_{t \geq 0}$ is unique in \mathcal{DG}_\bullet . \square

We can now prove that the space $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$ is a complete (ultra) metric space.

Proposition 3.4.6. *The space $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$ is a complete metric space.*

Proof. Let $\{[(G_t^n, \mathfrak{o}_n)_{t \geq 0}], n \geq 1\}$ be a Cauchy sequence in $(\mathcal{DG}_\bullet, D_\bullet)$. Fix $\{(G_t^n, \mathfrak{o}_n)_{t \geq 0}, n \geq 1\}$ a system of representatives. Recall that

$$D_\bullet([(G_t^n, \mathfrak{o}_n)_{t \geq 0}], [(G_t^m, \mathfrak{o}_m)_{t \geq 0}]) = D_\bullet((G_t^n, \mathfrak{o}_n)_{t \geq 0}, (G_t^m, \mathfrak{o}_m)_{t \geq 0}),$$

then let us work with the system of representatives from now on.

For all $\varepsilon > 0$, it exists $N_\varepsilon \geq 1$ such that for all $n, m \geq N_\varepsilon$,

$$D_\bullet((G_t^n, \mathfrak{o}_n)_{t \geq 0}, (G_t^m, \mathfrak{o}_m)_{t \geq 0}) < \varepsilon.$$

This implies for all $d \geq 1$ and all $k \geq 1$, it exists $N_{d,k} \geq 1$ such that for all $n, m \geq N_{d,k}$,

$$(G_t^{n, [d]}, \mathfrak{o}_n)_{0 \leq t \leq k} \equiv (G_t^{m, [d]}, \mathfrak{o}_m)_{0 \leq t \leq k}.$$

In particular, for all $n \geq N_{d,k}$,

$$(G_t^{n, [d]}, \mathfrak{o}_n)_{0 \leq t \leq k} \equiv (G_t^{N_{d,k}, [d]}, \mathfrak{o}_{N_{d,k}})_{0 \leq t \leq k}.$$

In the following, fix $k = d$ and set $N_d = N_{d,d}$ and $(H_t^d, \rho_d)_{t \geq 0} = (G_t^{N_d, [d]}, \mathbf{o}_{N_d})_{t \geq 0}$. Then $(H_t^0, \rho_0)_{t \geq 0}$, $(H_t^1, \rho_1)_{t \geq 0}$, $(H_t^2, \rho_2)_{t \geq 0}$, \dots form a consistent family in the following sense:

$$\forall l, r \leq d, \quad (H_t^{d, [r]}, \rho_d)_{0 \leq t \leq l} = (G_t^{N_d, [r]}, \mathbf{o}_{N_d})_{0 \leq t \leq l} \equiv (G_t^{N_r, [r]}, \mathbf{o}_{N_r})_{0 \leq t \leq l} = (H_t^r, \rho_r)_{0 \leq t \leq l}.$$

Thus from Proposition 3.4.5, it exists a unique dynamical rooted graph $(G_t, \mathbf{o})_{t \geq 0} \in \mathcal{DG}_\bullet$ such that

$$(G_t^{[d]}, \mathbf{o})_{0 \leq t \leq k} \equiv (H_t^d, \rho_d)_{0 \leq t \leq k} \quad \text{for all } d \geq 1, k \geq 0.$$

It follows that for all $n \geq N_d$,

$$(G_t^{n, [d]}, \mathbf{o}_n)_{0 \leq t \leq d} \equiv (G_t^{N_d, [d]}, \mathbf{o}_{N_d})_{0 \leq t \leq d} = (H_t^d, \rho_d)_{0 \leq t \leq d} \equiv (G_t^{[d]}, \mathbf{o})_{0 \leq t \leq d},$$

which implies that

$$D_\bullet((G_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0}, (G_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}) \leq \frac{2(1 - 2^{-(d+1)})}{1 + d} + 2^{-d} \quad \text{for all } n \geq N_d.$$

This shows that $(G_t^n, \mathbf{o}_n)_{t \geq 0} \rightarrow (G_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}$ in the topology induced by the local distance on \mathcal{DG}_\bullet . \square

§ 3.5. The Space \mathcal{CDG}_\bullet .

The topology defined in Section 3.2 by D_\bullet is not the natural one for \mathcal{DG}_\bullet . This is because it relates to a uniform topology which requires that, two dynamical graphs, even they are finite, have exactly the same jumping times. It is then most natural to ask that two “càdlàg” graphs are close from each other after a small time perturbation.

We now consider $\mathcal{CDG}_\bullet \subset \mathcal{DG}_\bullet$ the subset of *càdlàg* rooted graphs, in the sense that for every finite times t and distance d , the process $(G_s^{[d]}, \mathbf{o})_{0 \leq s \leq t}$ has finitely many jumps and is right continuous. For $(G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2) \in \mathcal{CDG}_\bullet$, define the weighted sum

$$D_{\mathbf{sk}}((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2)) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} D_{\mathbf{sk}_k}((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2)),$$

where for each finite time T , $D_{\mathbf{sk}_T}((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2))$ is the infimum of all those values of $\delta \in (0, 1]$ for which there exists $(\tilde{G}^1, \tilde{\mathbf{o}}_1) \equiv (G^1, \mathbf{o}_1)$, $(\tilde{G}^2, \tilde{\mathbf{o}}_2) \equiv (G^2, \mathbf{o}_2)$ and two grids $0 = s_0 < \dots < s_k$, with $s_k \geq T$, and $0 = t_0 < \dots < t_k$ with $t_k \geq T$, such that $|t_i - s_i| \leq \delta$ for $i = 0, \dots, k$ and with $d = \lceil 1/\delta - 1 \rceil$,

$$(\tilde{G}_s^{1, [d]}, \tilde{\mathbf{o}}_1) = (\tilde{G}_t^{2, [d]}, \tilde{\mathbf{o}}_2) \quad \text{for all } s_i \leq s < s_{i+1} \text{ and } t_i \leq t < t_{i+1},$$

for all $i = 1, \dots, k-1$.

It is clear that $D_{\mathbf{sk}}$ is nonnegative and symmetric. Let $(G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2) \in \mathcal{CDG}_\bullet$ and suppose that

$$D_{\mathbf{sk}}((G^1, \mathbf{o}_1), (G^2, \mathbf{o}_2)) = 0.$$

Then we deduce that $D_{\mathbf{sk}}((G^{1, [d]}, \mathbf{o}_1), (G^{2, [d]}, \mathbf{o}_2)) = 0$. Fix $d \geq 1$ and finite time $T < +\infty$. From the càdlàg property, we can prove that the points of discontinuity of $(G_s^{1, [d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq s \leq T}$ and $(G_s^{2, [d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq s \leq T}$ coincide. Consequently we may deduce that $(G_s^{1, [d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq s \leq T} \equiv (G_s^{2, [d]}, \mathbf{o}_2)_{0 \leq s \leq T}$, which implies from Corollary 3.4.2 that $(G^1, \mathbf{o}_2) \equiv (G^2, \mathbf{o}_2)$. Thus to show that $D_{\mathbf{sk}}$ is a metric, we only need to check the

triangle inequality. Remark that it suffices to show that $D_{S_{kT}}$ satisfies it for all finite time $T \geq 0$. Let $(G^1, o_1), (G^2, o_2), (G^3, o_3) \in \mathcal{CDG}_\bullet$, and let us assume that for $i < j \in \{1, 3\}$,

$$D_{S_{kT}}((G^i, o_i), (G^j, o_j)) < \delta^{i,j}, \quad (3.5.1)$$

and set $d_{i,j} = \lceil 1/\delta_{i,j} - 1 \rceil$. By definition, it exists isomorphic copies $(\tilde{G}^1, \tilde{o}_1) \equiv (G^1, o_1)$ and $(\tilde{G}^2, \tilde{o}_2)$ and grids $\sigma = [0 = s_0 < \dots < s_k]$ and $\tau = [0 = t_0 < \dots < t_k]$ with $s_k, t_k \geq T$ such that $|s_i - t_i| \leq \delta_{1,2}$ and

$$(\tilde{G}_s^{1, [d_{1,2}]}, \tilde{o}_1) = (\tilde{G}_t^{2, [d_{1,2}]}, \tilde{o}_2) \quad \text{for all } s_i \leq s < s_{i+1} \text{ and } t_i \leq t < t_{i+1},$$

for $i = 1, \dots, k$. Similarly it exists isomorphic copies $(\tilde{G}^2, \tilde{o}_2) \equiv (G^2, o_2)$ and $(\tilde{G}^3, \tilde{o}_3)$ and grids $\sigma' = [0 = s'_0 < \dots < s'_l]$ and $\tau' = [0 = t'_0 < \dots < t'_l]$ with $s'_l, t'_l \geq T$ such that $|s_i - t_i| \leq \delta_{2,3}$ and

$$(\tilde{G}_s^{2, [d_{2,3}]}, \tilde{o}_2) = (\tilde{G}_t^{3, [d_{2,3}]}, \tilde{o}_3) \quad \text{for all } s'_i \leq s < s'_{i+1} \text{ and } t'_i \leq t < t'_{i+1},$$

for $i = 1, \dots, l$. Remark that by taking a good representative in the class $[(G^2, o_2)]$, we may assume $(\tilde{G}_2, \tilde{o}_2) = (\tilde{G}_2, \tilde{o}_2)$. Set $\delta = \delta_{1,2} + \delta_{2,3}$, and $d = \lceil 1/\delta - 1 \rceil$. Then the two grids $\sigma \cup \tau' = [0 = u_0 < \dots < u_{k+l}]$ and $\sigma' \cup \tau = [0 = r_0 < \dots < r_{k+l}]$ (reordered if necessary) are such that for all $i = 1, \dots, k+l$, $|u_i - r_i| \leq \delta_{1,2} \vee \delta_{2,3}$ and

$$(\tilde{G}_u^{1, [d]}, \tilde{o}_1) = (\tilde{G}_r^{2, [d]}, \tilde{o}_2) \quad \text{and} \quad (\tilde{G}_u^{2, [d]}, \tilde{o}_2) = (\tilde{G}_r^{3, [d]}, \tilde{o}_3)$$

for all $u_i \leq u < u_{i+1}$ and $r_i \leq r < r_{i+1}$. Then we have well

$$(\tilde{G}_u^{1, [d]}, \tilde{o}_1) = (\tilde{G}_r^{3, [d]}, \tilde{o}_3) \quad \text{for all } u_i \leq u < u_{i+1} \text{ and } r_i \leq r < r_{i+1}.$$

We thus get

$$D_{S_{kT}}((G^1, o_1), (G^3, o_3)) \leq \delta = \delta^{1,2} + \delta^{2,3},$$

and since this is true for all $\delta^{i,j} > 0$ satisfying (3.5.1), we deduce the triangular inequality. This proves that D_{S_k} is a metric on \mathcal{CDG}_\bullet .

Definition 3.5.1. We call **local Skorokhod J1 topology**, or local Skorokhod topology, the topology induced by D_{S_k} on \mathcal{CDG}_\bullet .

Proposition 3.5.2. *The metric space $(\mathcal{CDG}_\bullet, D_{S_k})$ is complete and separable.*

Proof. Let us first deal with separability. Consider \mathcal{S} the subset of \mathcal{CDG}_\bullet of all finite graphs with finitely many jumps, all at rational times. We claim that \mathcal{S} is dense in \mathcal{CDG}_\bullet . Indeed let $(G, o) \in \mathcal{CDG}_\bullet$ and $\varepsilon > 0$. Take $d \geq 1$ such that $1/(1+d) < \varepsilon/2$, and $K \geq 1$ sufficiently large so that $\sum_{k \geq K} 2^{-k} < \varepsilon/2$. Let $0 = t_0 < t_1 < \dots$ be the discontinuity times of $(G^{[d]}, o)$, and take any sequence of rational times $0 = q_0 < q_1 < \dots$ such that $t_i - \delta < q_i \leq t_i$ for $i \geq 1$. We then set

$$(H_s, \rho) = \begin{cases} (G_t^{[d]}, o) & \text{if } q_i \leq s < q_{i+1} \text{ and } t_i \leq t < t_i + K + 1 \\ (G_{K+1}^{[d]}, o) & \text{if } s \geq K + 1. \end{cases}$$

From the local finiteness and càdlàg property, $(H, \rho) \in \mathcal{S}$, and moreover by construction

$$D_{S_k}((G, o), (H, \rho)) < \varepsilon.$$

To prove completeness we use a consistency argument. Let $\{(G^n, \mathbf{o}_n), n \geq 1\}$ be a Cauchy sequence of \mathcal{CDG}_\bullet . Fix some distance $d \geq 1$ and time $T \geq 0$, and set $\delta = 1/(d+1)$. Then it exists $N(d) \geq 1$ such that for all $n, m \geq N(d)$,

$$d_{\text{Sk}_{T+2}}((G^n, \mathbf{o}_n), (G^m, \mathbf{o}_m)) < \delta.$$

Define for all $n \geq N(d)$, $(t_i^n)_{i \geq 0}$ the jumping times of (G^n, \mathbf{o}_n) , and set $k = \min\{i \geq 1, t_i^{N(d)} \geq T+1\}$, and $(G_0, \mathbf{o}_{N(d)}), \dots, (G_k, \mathbf{o}_{N(d)})$ to be the graphs such that

$$(G_s^{N(d), [d]}, \mathbf{o}_{N(d)}) = (G_i, \mathbf{o}_{N(d)}) \quad \text{if } t_i^{N(d)} \leq s < t_{i+1}^{N(d)}$$

for $i = 0, \dots, k-1$, where we fix $t_0^n = 0$. Remark now that, since for all $n \geq N(d)$,

$$d_{\text{Sk}_{T+2}}((G^{N(d)}, \mathbf{o}_n), (G^n, \mathbf{o}_n)) < \delta,$$

we deduce that (up to isomorphism)

$$(G_s^{n, [d]}, \mathbf{o}_n) = (G_i, \mathbf{o}_{N(d)}) \quad \text{if } t_i^n \leq s < t_{i+1}^n$$

for $i = 0, \dots, k-1$, with $|t_i^{N(d)} - t_i^n| < \delta$ and $t_{k-1}^n \leq T+2$.

We now claim that the sequences $(t_i^n)_{n \geq 1}$ are Cauchy sequences for $i = 0, \dots, k$. If it is the case, we thus define $t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} t_i^n$, and set $(H_t^d, \mathbf{o})_{t \geq 0}$ to be the graph equal to

$$(H_t^d, \mathbf{o}) = \begin{cases} (G_i, \mathbf{o}_{N(d)}) & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ (G_k, \mathbf{o}_{N(d)}) & \text{if } t \geq t_k. \end{cases}$$

Remark that $t_k > T$, and repeat this construction for all $d \geq 1$ (with $T = d$) defines a consistent sequence of dynamical graphs (H^d, \mathbf{o}) . Hence from Proposition 3.4.5, it exists dynamical $(G^\infty, \mathbf{o}_\infty)$ such that for all $d \geq 1$,

$$(G^{\infty, [d]}, \mathbf{o}_\infty) \equiv (H^d, \mathbf{o}).$$

By construction, $(G^\infty, \mathbf{o}_\infty) \in \mathcal{CDG}_\bullet$ and (G^n, \mathbf{o}_n) converges to $(G^\infty, \mathbf{o}_\infty)$ *w.r.t.* D_{Sk} .

It remains to prove that $(t_i^n)_{n \geq N(d)}$ are Cauchy sequences for $i = 0, \dots, k$, with $t_k > T$. To do so, consider the sequence of dynamical balls $\{(G^n, \mathbf{o}_n), n \geq 1\}$ which is a Cauchy sequence of \mathcal{CDG}_\bullet . Hence for all $0 < \varepsilon < 1/(d+1)$, it exists $N(\varepsilon) \geq N(\delta)$ such that $n, m \geq N(\varepsilon)$,

$$d_{\text{Sk}_{T+2}}((G^n, \mathbf{o}_n), (G^m, \mathbf{o}_m)) < \varepsilon.$$

Recall now that for all $r \geq d$, $((G^n, \mathbf{o}_n)^{[r]}, \mathbf{o}_n) = (G^n, \mathbf{o}_n)$, we thus deduce that the sequences of jumping times $(t_i^n)_{i \geq 0}$ depend only on the fixed radius d , which exactly implies $|t_i^n - t_i^m| < \varepsilon$ for all $i = 0, \dots, k$. This concludes the proof. \square

* * *

4 | Local Weak Limit of Dynamical Inhomogeneous Random Graphs

...in which we give a first example of non-trivial local weak limit of dynamical random graphs. We mentioned in Chapter 1 of the introduction that one of the well-known results of Benjamini-Schramm local weak convergence is that of the inhomogeneous random graph $\text{IRG}_n(\kappa)$ on n vertices with connection kernel κ . When the kernel satisfies the mild technical condition of being a graphical kernel, the $\text{IRG}_n(\kappa)$ converges locally in probability to the (unimodular) multi-type (marked) Poisson-Galton-Watson tree $\text{MPGW}(\kappa)$, see the book [Hof23] for a recent detailed exposure of this result. In this chapter, we extend this to dynamical settings, by introducing the dynamical inhomogeneous random graph $\text{DIRG}_n(\kappa, \beta)$, with connection kernel κ and updating kernel β , and its limit the growth-and-segmentation multi-type Poisson-Galton-Watson tree $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$. We obtain similarly the local limit of a slightly different dynamical model, namely the vertex updating inhomogeneous random graph.

§ 4.1. Dynamical Inhomogeneous Random Graphs

The model of **inhomogeneous random graphs** was introduced in fairly general setting by B. Bollobás, S. Janson and O. Riordan in [BJR07], and is one of the main object of study of the book of R. van der Hofstad [Hof23]. We enrich this model with a dynamic to define the **dynamical inhomogeneous random graph** $(G_t^{\mathcal{V}, n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ with vertex set V_n , where in this chapter $V_n = \{1, \dots, n\}$. Here,

$$\mathcal{V} = (S, \mu, (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})_{n \geq 1}),$$

is the **vertex space**, S is a separable metric space called **state space** or **mark space**, and endowed with a Borel probability measure μ , and $x_i^{(n)} \in S$ is the (possibly random) mark associated with vertex $i \in V_n$. No relationship is assumed between $x_i^{(n)}$ and $x_i^{(n')}$, but to simplify notations we shall write further $(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$. It is assumed that the empirical measure $\nu_n := \frac{1}{n} \sum_i \delta_{x_i}$ converges to the measure μ in the usual space of probability measures on S (and this convergence holds in probability when the x_i are random). Equivalently, for any μ -continuity set $A \subseteq S$,

$$\nu_n(A) := \frac{\#\{i \in V_n : x_i \in A\}}{n} \xrightarrow{(\mathbb{P})} \mu(A). \quad (4.1.1)$$

From now on, we assume for convenience that S is **compact** and **totally ordered**. We will be particularly interested in the case when S is $[0, 1]$, endowed with the Lebesgue measure, and $x_i^{(n)} = i/n$, as well as in the case S finite (as introduced and studied by B. Söderberg in [Söd02, Söd03a, Söd03b, Söd03c]).

Given the sequence x_1, \dots, x_n , $(G_t^{\mathcal{V}, n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is the random dynamical graph on V_n , such that any two vertices u and v are initially connected by an edge independently of the others and with a probability

$$p_{u,v} = \frac{1}{n} \kappa(x_u, x_v) \wedge 1,$$

and the connection is updated at rate $\beta_{u,v} = \beta(x_u, x_v)$. That is, after an exponential time with expectation $1/\beta_{u,v}$, the vertices are again connected with probability $p_{u,v}$, independently of the past and independently of the other edges.

Here $\kappa : S \times S \rightarrow [0, \infty)$ and $\beta : S \times S \rightarrow [0, \infty)$ are symmetric non-negative measurable functions on $S \times S$ called the **connection kernel** and the **updating kernel** respectively. We will often drop the vertex space from the notation and write $G^{n,\kappa,\beta}$. Let us note that:

- The dynamical networks we consider are *stationary*. At time $t = 0$ and at later times, the law of the network $G_t^{n,\kappa,\beta}$ is that of the inhomogeneous random graph with vertex space \mathcal{V} and kernel κ , where any two vertices are connected independently with probability $p_{u,\beta_{u,v}}$.
- Each edge evolves independently according to a 2-state Markov chain, where the edge uv turns open at rate $\beta_{u,v}p_{u,v}$ and turns closed at rate $\beta_{u,v}(1 - p_{u,v})$. If we consider another dynamical inhomogeneous random graph with same vertex space but different kernels $\kappa' \leq \kappa$ and $\beta' \leq \beta$, there is a natural coupling for the evolution of the edges in the two dynamical graphs, where the updating times for $G^{n,\kappa',\beta'}$ are included in those for $G^{n,\kappa,\beta}$, and, initially or when the two graphs update simultaneously, the updating edge is open in $G^{n,\kappa,\beta}$ if it is in $G^{n,\kappa',\beta'}$. Using this coupling, we can see that the evolution of the edge uv coincide in the two graphs on the whole time interval $[0, T]$ with probability at least

$$1 - (p_{u,v} - p'_{u,v}) - (\beta_{u,v}p_{u,v} - \beta'_{u,v}p'_{u,v})T. \quad (4.1.2)$$

We will of course be interested in the study of the dynamical inhomogeneous random graph in the limit $n \rightarrow \infty$. We will always assume that the kernels κ and β are *graphical* as in the following definition.

Definition 4.1.1. Let $\mathcal{V} = (S, \mu, (x_1, \dots, x_n)_{n \geq 1})$ be a vertex space. The kernels κ and β are called **graphical** on \mathcal{V} if

- (i) κ and β are continuous *a.e.* on $S \times S$;
- (ii) $\kappa \in \mathbb{L}^1(S \times S, \mu \otimes \mu)$ and $\kappa\beta \in \mathbb{L}^1(S \times S, \mu \otimes \mu)$;

(iii)

$$\frac{1}{n^2} \sum \kappa(x_u, x_v) \wedge n \xrightarrow{(\mathbb{P})} \frac{1}{2} \iint \kappa(x, y) \mu(dx)\mu(dy) \quad (4.1.3)$$

(iv)

$$\frac{1}{n^2} \sum \beta(x_u, x_v) (\kappa(x_u, x_v) \wedge n) \xrightarrow{(\mathbb{P})} \frac{1}{2} \iint \beta(x, y) \kappa(x, y) \mu(dx)\mu(dy). \quad (4.1.4)$$

◆

Note that this is a slight adaptation of the definition of a graphical kernel in [BJR07] of the context of dynamical graphs with the additional updating kernel β . Condition (iii) implies that the number of edges is asymptotically proportional to n , with proportionality constant being precisely $\frac{1}{2} \iint \kappa(x, y) \mu(dx)\mu(dy)$. Condition (iv) implies a similar result when considering all the edges present in the network in a finite time interval $[0, T]$. This means in particular that the model is **sparse**.

- Remark 4.1.2.** 1. The definition of a graphical kernel in [BJR07] does not request (4.1.3) but the weaker assumption that the expectation of the l.h.s. converges to the r.h.s., however they also show that the two are actually equivalent. We prefer the maybe more meaningful definition with a convergence in probability. We also do not lose much by considering the x_i deterministic and replacing the convergence in probability by a simple convergence in (4.1.1), (4.1.3) and (4.1.4).
2. For convenience we supposed that the kernels κ and β do not depend on n . However, our results generalize easily to the case where κ and β can depend on n and be *graphical with limits* κ and β , in the sense that we have $\kappa_n(x, y) \rightarrow \kappa(x, y)$ and $\beta_n(x, y) \rightarrow \beta(x, y)$ for *a.e.* $(x, y) \in S \times S$, as well as an adaptation of (4.1.3) and (4.1.4) with of course κ_n and β_n in the l.h.s.
3. When $S = \{1, \dots, r\}$ is finite, the vertices can be classified according to r different types, and we say κ and β are **finite-type kernels**. Our strategy in the following will be to prove local convergence results for the dynamical inhomogeneous random graphs, by first approximating the kernels by finite-type ones (or regular finitary kernels to be more precise, see later).

◇

§ 4.2. Growth-and-Segmentation Trees

In this section we introduce the **growth-and-segmentation multitype Poisson-Galton-Watson tree**, or more briefly **GSMPGW tree**, appearing in our main Theorem. It should be seen as an analogue of the (multitype) Galton-Watson tree, in the context of dynamical graphs. In the time-dynamics of this process, the appearance of new edges may make it “grow” (in the sense that we concatenate a new tree to the existing one), while the disappearance of edges may split the tree into several connected components, hence obtaining a forest. We still call this process growth-and-segmentation *tree* as it is a dynamically connected graph.

As mentioned earlier, it will be convenient to work with ordered trees. This allows to identify unambiguously any given vertex during the time-dynamics, and to construct the growth-and-segmentation multitype Poisson-Galton-Watson tree as a Markov process on the set of ordered (segmented) trees. The GSMPGW tree can then also be seen as a random element of \mathcal{DN}_\bullet^S simply by forgetting the ordering of the children of each vertex, or of \mathcal{DJ}_\bullet by further forgetting the marks of the vertices.

§ 4.2.1. Ordered Multitype Trees and the Multitype Galton-Watson Tree

We begin with some notations.

Definition 4.2.1. We denote by

- (a) \mathbb{T} the set of **locally finite ordered rooted** trees. Using J. Neveu’s notations [Nev86], a tree $\mathfrak{t} \in \mathbb{T}$ is identified with a subset of

$$\mathcal{U} := \bigcup_{n \geq 0} (\mathbb{N}^*)^n,$$

the set of finite words on positive integers, with the convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$, simply by identifying the u_n -th child of the u_{n-1} -th child of (...) of the u_1 -th child of the root, with the word $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$. In particular, the root is identified with \emptyset .

- (b) \mathbb{ST} the set of **segmented** trees, namely trees in \mathbb{T} where some of the edges can be segmented. For $\mathfrak{t} \in \mathbb{ST}$, we write $V_{\mathfrak{t}}$ for its set of vertices, $\tilde{E}_{\mathfrak{t}}$ for its full set of edges, and $E_{\mathfrak{t}} \subset \tilde{E}_{\mathfrak{t}}$ for the unsegmented ones. We call $(V_{\mathfrak{t}}, \tilde{E}_{\mathfrak{t}}) \in \mathbb{T}$ the full tree (containing both segmented and unsegmented edges) associated to the segmented tree. Note that $\tilde{E}_{\mathfrak{t}} \setminus E_{\mathfrak{t}}$ is then the set of segmented edges, and that the graph $(V_{\mathfrak{t}}, E_{\mathfrak{t}})$ containing only the unsegmented edges is a forest rather than a tree. In the same spirit as percolation, we also say that an edge of $\tilde{E}_{\mathfrak{t}} \setminus E_{\mathfrak{t}}$ is **closed**, and an edge of $E_{\mathfrak{t}}$ is **open**. See Figure 4.1.
- (c) \mathbb{T}_S the set of **multitype** trees, or more precisely trees in \mathbb{T} with types in the mark space S . Formally, a tree with types in S is a couple $(\mathfrak{t}, \mathbf{m})$ where \mathfrak{t} is in \mathbb{T} , and \mathbf{m} is a function from the set of vertices of \mathfrak{t} to the mark space S , associating its type to each vertex of \mathfrak{t} . A multitype tree is called **well-ordered** if the children of each vertex are ordered in increasing order of their types.
- (d) \mathbb{ST}_S the set of **multitype segmented** trees, or segmented trees with types in S .

◆

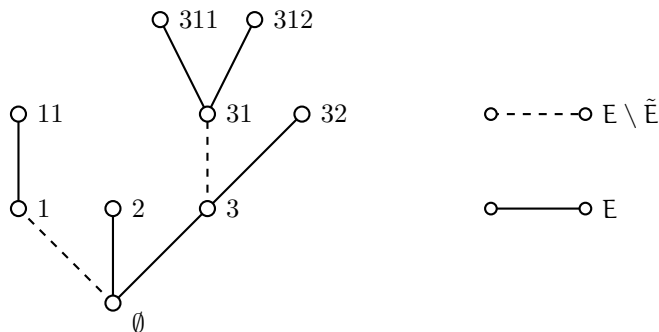


Figure 4.1 – Illustration of an ordered segmented tree. The closed edges are dashed.

We use the common terminologies for trees, father, children, aso. For a vertex \mathbf{u} of a tree \mathfrak{t} , we write $|\mathbf{u}|$ for its length, which is also the graph distance of the vertex to the root. The **height** of \mathfrak{t} is defined by

$$h(\mathfrak{t}) = \sup \{|\mathbf{u}|, \mathbf{u} \in \mathfrak{t}\}.$$

For $d \in \mathbb{N}^*$, we denote by $\mathbb{T}^{[d]}$ the subset of \mathbb{T} consisting in trees with height less than d . The set $\mathbb{T}^{<\infty} = \cup_d \mathbb{T}^{[d]}$ is then the set of finite-height trees, or trees with finitely many vertices. For a tree \mathfrak{t} , we write $\mathfrak{t}^{[d]}$ for its **restriction** to the first d generations, or in other words it consists of the ball centered in \emptyset with radius d . All these definitions extend straightforwardly to segmented trees, or trees with types in S , leading to $\mathbb{T}_S^{[d]}$, $\mathbb{T}_S^{<\infty}$, $\mathbb{ST}_S^{[d]}$ and $\mathbb{ST}_S^{<\infty}$.

Let $\kappa : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a kernel on the mark space S . Then the multitype Poisson-Galton-Watson process with kernel κ is classically defined as the branching process, where each particle of type $x \in S$ is replaced in the next generation by a set of individuals distributed as a Poisson point process (PPP) on S

with intensity $\kappa(x, y) \mu(dy)$. When κ is a graphical kernel, these PPPes will typically be of finite intensity, and thus define a set of children, which we can order with the natural order on S , thus defining an ordered tree.

Definition 4.2.2. Let κ be a graphical kernel on S . A random tree on \mathbb{T}_S is called **multitype Poisson-Galton-Watson tree** with connection kernel κ and denoted $\text{MPGW}(\kappa)$ if

- (a) the root \emptyset has type x_\emptyset distributed according to μ on S , and
- (b) a vertex u with type $x_u = x$ has offspring distribution according to a PPP Π^u with intensity $\kappa(x, y) \mu(dy)$ on S . The children of u are ordered according to their types, thus defining a well-ordered tree.

◆

We also denote by $\text{MPGW}(\kappa, x)$ the multitype Poisson-Galton-Watson tree obtained by fixing the type of the root to be $x_\emptyset = x$. Note that the intensity of the PPP Π^u is finite for μ -a.e. u . Therefore $\text{MPGW}(\kappa)$ is well-defined up to a negligible set, and so is $\text{MPGW}(\kappa, x)$ for μ -a.e. x . The multitype Poisson-Galton-Watson tree is the local weak limit of sparse inhomogeneous random graphs (see for instance [Hof23, Theorem 3.11]), which is precisely the result we mentioned in the abstract, that we generalize in this paper to dynamical settings.

§ 4.2.2. Growing Trees, Segmented Trees and Growth-and-Segmentation Trees

In this section, we construct the growth-and-segmentation Poisson-Galton-Watson tree. It should be seen as an analogue of the Poisson-Galton-Watson tree, but in dynamical settings where edges can additionally appear - leading to growth of the tree - or disappear - leading to segmentation of the tree. It will be convenient to first consider only the growth operation and define the growing multitype Poisson-Galton-Watson tree, or GMPGW tree. The GMPGW tree can also be seen as the accumulated graph of the GSMPGW tree that we introduce later on.

Growing Trees.

Definition 4.2.3. A **growing (multitype) tree** $(\mathfrak{t}_t)_{t \geq 0}$ is a growing sequence of ordered rooted multitype trees $\mathfrak{t}_t \in \mathbb{T}_S$, where for $t \geq 0$ and vertex u of \mathfrak{t}_t , the ordering of the children of u in \mathfrak{t}_t respects the order of appearance of the edges in the process. ◆

On \mathbb{T}_S we may define a natural operation which can be used to describe growing multitype trees. Let $\mathfrak{r}, \mathfrak{s} \in \mathbb{T}_S$ be two trees, and u a vertex of \mathfrak{r} . We denote by $\text{Growth}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, u)$ the tree obtained by adding a child to the vertex u of \mathfrak{r} and merging this child with the root of \mathfrak{s} . See Figure 4.2.

Definition 4.2.4. The random growing tree $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is called **growing multitype Poisson-Galton-Watson tree** with kernels κ and β and denoted $\text{GMPGW}(\kappa, \beta)$ if it is a Markov process on \mathbb{T}_S where:

- (a) $\mathfrak{G}_0^{\kappa, \beta}$ is distributed as a $\text{MPGW}(\kappa)$, and
- (b) at each vertex $u \in \mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}$, a $\text{MPGW}(\kappa, y)$ is grown at rate $\kappa(x_u, y)\beta(x_u, y) \mu(dy)$.

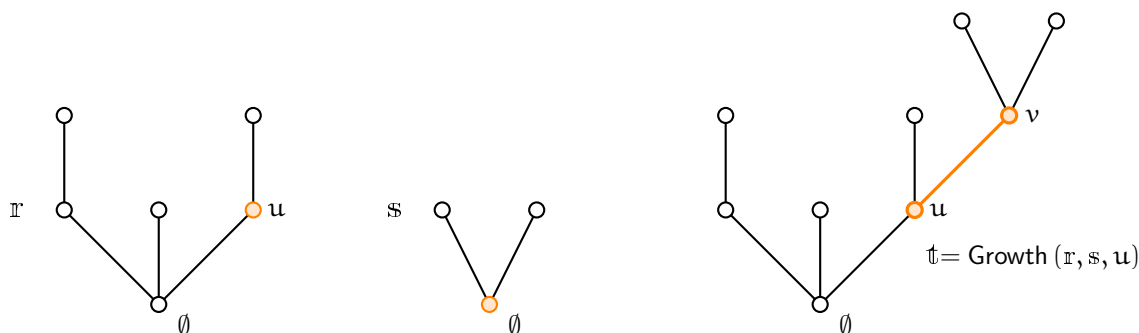


Figure 4.2 – Illustration of the growing operation of trees: the tree \mathfrak{t} (right) is obtained by attaching the tree \mathfrak{s} (center) to the tree \mathfrak{r} (left) at vertex u of \mathfrak{r} .

Remark 4.2.5. • Note that our definition requires both the connection kernel κ and the updating kernel β . Informally, $\kappa(x, y) \mu(dy)$ is the probability of initially finding a child of a vertex of type x which has type in dy . We then multiply this quantity by $\beta(x, y) dt$ to obtain the probability of such an edge being grown in time interval dt .

- One can restate Definition 4.2.4 (b) by saying that a tree is grown at u at total rate

$$\int_{\mathcal{S}} \kappa(x_u, z) \beta(x_u, z) \mu(dz),$$

and is distributed as $\text{MPGW}(\kappa, \mathbf{y})$ where \mathbf{y} is itself distributed according to the probability measure

$$\frac{\kappa(x_u, \mathbf{y}) \beta(x_u, \mathbf{y}) \mu(d\mathbf{y})}{\int_{\mathcal{S}} \kappa(x_u, z) \beta(x_u, z) \mu(dz)}.$$

Note that the rate $\int \kappa(x_u, z) \beta(x_u, z) \mu(dz)$ is *a.s.* finite for every encountered vertex x_u .

- The definition might require some caution as the total rate at which new trees are grown to the whole (possibly) infinite tree $\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}$ will typically be infinite. One way of making this definition rigorous is by truncating the GMPGW tree to the first d generations to have a well-defined continuous-time Markov chain $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta, [d]})_{t \geq 0}$ on $\mathbb{T}_S^{[d]}$, whose total jumping rate is finite on almost every encountered state in $\mathbb{T}_S^{[d]}$. We can then use the consistent family of the laws of $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta, [d]})_{t \geq 0}$ for $d \geq 0$ to define the law of $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$, as a Markov process on \mathbb{T}_S with càdlàg trajectories.
- The definition could naturally lead to construct (or explore) the whole progeny of a vertex as soon as it is added to the tree. However, it is not less natural to construct (or explore) the growing set of direct children of a vertex x up to some time T (that may be finite or infinite), before looking at the progeny of these children. When added to the tree, a vertex u then immediately has a progeny given by a PPP of intensity $\kappa(x_u, \mathbf{y}) \mu(d\mathbf{y})$, and later on the vertex receives a child of type \mathbf{y} at rate $\kappa(x_u, \mathbf{y}) \beta(x_u, \mathbf{y}) \mu(d\mathbf{y})$. This provides another rigorous construction of the process, naturally equivalent to the previous one.



Proposition 4.2.6 (Construction of the strong Markov process $\text{GMPGW}(\kappa, \beta)$). *We can construct $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ a $\text{GMPGW}(\kappa, \beta)$ and it is a strong Markov process on \mathbb{T}_S .*

Proof. We work conditionally on $\mathfrak{G}_0^{\kappa, \beta} = \mathfrak{t}_0$, where \mathfrak{t}_0 is a fixed tree.

- For every vertex $v \in \mathcal{U}$, let Π^v be a PPP with intensity $d_{\mathbb{R}_+}(z)d\mu(y)d_{\mathbb{R}_+}(t)$ independent from the other vertices.
- For every vertex $v \in \mathcal{U} \setminus V(\mathfrak{t}_0)$, let $\Pi^{v,0}$ be a Poisson point process with intensity $d_{\mathbb{R}_+}(z)d\mu(y)$ independent from the other vertices, and from the Π^w .

From these PPPs, we construct $\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}$ as follows.

- For every vertex $v \in V(\mathfrak{t}_0)$, we set $\tau(v) = 0$. Then we have

$$\Pi^v \cap \{(z, y, t), z \leq \kappa(x_v, y)\} = \{(z_k, y_k, t_k), k \geq 1\},$$

with $t_1 < t_2 < \dots$. Then for all $k \geq 1$, at time t_k the vertex $w = v(c_v(\mathfrak{t}_0) + k)$ is added to $\mathfrak{G}_{t_k}^{\kappa, \beta}$ with type y_k . We then set $\tau(w) = t_k$ the apparition time of w .

- For every vertex $v \notin V(\mathfrak{t}_0)$ added at time $\tau(v) = t > 0$ to $\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}$ with type x_v , we have

$$\Pi^{v,0} \cap \{(z, y), z \leq \kappa(x_v, y)\} = \{(z_1, y_1), \dots, (z_{k(v)}, y_{k(v)})\},$$

with $y_1 \leq \dots \leq y_{k(v)}$. Then for all $1 \leq i \leq k(v)$, we set $\tau(vi) = \tau(v)$ and $x_{vi} = y_i$. Then the vertex $w = vi$ with type x_{vi} is added to $\mathfrak{G}_{\tau(v)}^{\kappa, \beta}$ at time $\tau(v)$.

Moreover we have

$$\Pi^v \cap \{(z, y, t), z \leq \kappa(x_v, y)\beta(x_v, y) \text{ and } t > \tau(v)\} = \{(z_k, y_k, t_k), k \geq 1\},$$

with $\tau(v) < t_1 < t_2 < \dots$. Then for all $k \geq 1$, at time t_k the vertex $w = v(c_v(\mathfrak{t}_0) + k)$ is added to $\mathfrak{G}_{t_k}^{\kappa, \beta}$ with type y_k . We then set $\tau(w) = t_k$ the apparition time of w .

The process $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is then defined for all $t \geq 0$ by

$$V(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}) = \{v \in \mathcal{U} : \tau(v) \leq t\},$$

and

$$E(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}) = \{\{u, v\} : u, v \in V(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta}) \text{ and } f(u) = v \text{ or } f(v) = u\}.$$

We easily check that $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is well-defined in the sense that for all $u \in \mathcal{U}$, its type x_u is well-defined and its apparition time satisfies $\tau(u) < +\infty$ almost surely. Moreover from the definition $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is a growing tree.

Let us now check that this process inherits the strong Markov property from the strong Markov property of the PPPs. Denote by $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ the natural filtration associated with $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$, and let σ be an $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -stopping time. We have to prove that conditional on $\sigma < +\infty$, for all time $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}\left(\mathfrak{G}_{\sigma+t}^{\kappa, \beta} \mid (\mathcal{F}_s)_{0 \leq s \leq \sigma}\right) = \mathcal{L}\left(\mathfrak{G}_{\sigma+t}^{\kappa, \beta} \mid \mathcal{F}_\sigma\right).$$

Let Φ be the functional defined by

$$\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta} = \Phi\left(\mathfrak{t}_0, (\Pi^v)_{v \in \mathcal{U}}, (\Pi^{v,0})_{v \notin \mathfrak{t}_0}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

If Π is a PPP with intensity $d_{\mathbb{R}_+}(z)d\mu(\mathbf{y})d_{\mathbb{R}_+}(\mathbf{t})$, we denote for all $s \geq 0$, $\theta_s(\Pi)$ the time translation operator by s of Π , that is the process

$$\theta_s(\Pi) = \Pi \cap ([s, +\infty[\times S \times [0, 1]) - (s, 0, 0).$$

Thus from its construction, we can write for all $\mathbf{t}, s \geq 0$,

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{t}+s}^{\kappa, \beta} = \Phi \left(\mathbf{t}_s, (\theta_s(\Pi^v))_{v \in \mathcal{U}}, (\Pi^{v,0})_{v \notin \mathbf{t}_s} \right).$$

From the strong Markov property and independence of the PPPs, conditionally on \mathcal{F}_σ , $(\theta_\sigma(\Pi^v))_{v \in \mathcal{U}}$ is a family of independent PPPs and independent of $(\Pi^{v,0})_{v \notin \mathbf{t}_\sigma}$. This implies that conditionally on \mathcal{F}_σ , the process $(\mathfrak{G}_{\sigma+t}^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ has the same law as $(\mathfrak{G}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$, which concludes the proof. \square

Growth-and-Segmentation Trees. We begin with a definition.

Definition 4.2.7. A **growth-and-segmentation multitype tree** $(\mathfrak{t}_t)_{t \geq 0}$ is a sequence of multitype segmented trees $\mathfrak{t}_t \in \mathbb{S}\mathbb{T}_S$, where the associated full tree is a growing multitype tree in the sense of Definition 4.2.3. \blacklozenge

Our definitions of $\mathfrak{t} = \text{Growth}(\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathbf{u})$, of $\mathfrak{t}_{\mathbf{u}}$ and $\mathfrak{t}^{\mathbf{u}}$, extend straightforwardly to the case where $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ and \mathfrak{t} can now be segmented trees. We also denote by $\mathfrak{t} = \text{Split}(\mathfrak{s}, \mathbf{u})$ the segmented tree obtained by closing the edge between the vertex \mathbf{u} of \mathfrak{t} different from the root, and its parent. This action defines two sub-segmented trees of \mathfrak{t} , one containing the root, denoted $\mathfrak{t}^{\mathbf{u}}$ and called the **pruned branch** of \mathfrak{t} at \mathbf{u} , and the second containing \mathbf{u} , denoted $\mathfrak{t}_{\mathbf{u}}$ and called **remaining segmented tree** at \mathbf{u} . See Figure 4.3.

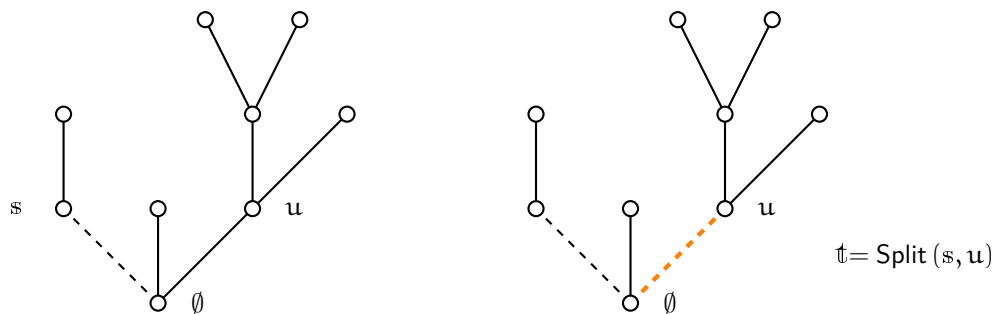


Figure 4.3 – Illustration of the segmentation operation: tree \mathfrak{s} (left) is segmented at vertex \mathbf{u} .

Growth-and-Segmentation Multitype Poisson-Galton-Watson Tree. We can now define the *growth-and-segmentation multitype Poisson-Galton-Watson trees* similarly as the $\text{GMPGW}(\kappa, \beta)$, but with the additional dynamics that each edge uv present in the process is segmented at rate $\beta(x_u, x_v)$.

Definition 4.2.8. The random growth-and-segmentation tree $(\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is called **growth-and-segmentation multitype Poisson-Galton-Watson tree** with edge kernels κ and β , and is denoted $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, if it is a Markov process on $\mathbb{S}\mathbb{T}_S$ where:

- (a) $\mathcal{T}_0^{\kappa, \beta}$ is distributed as a $\text{MPGW}(\kappa)$,

- (b) each edge uv present in $\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta}$ is segmented at rate $\beta(x_u, x_v)$, and
- (c) at each vertex $u \in \mathcal{T}_t^{\kappa, \beta}$, a $\text{MPGW}(\kappa, \mu)$ is grown at rate $\kappa(x_u, y)\beta(x_u, y)\mu(dy)$.

◆

Similarly as before, this defines strong Markov process on \mathbb{ST}_S with càdlàg trajectories.

§ 4.2.3. Monotone Approximation of GSMPGW

We finish this part in showing a monotone approximation for GSMPGW.

Proposition 4.2.9 (Monotone coupling of GSMPGW). *Suppose κ and β are graphical kernels and $(\kappa_n, \beta_n)_{n \geq 0}$ is a sequence of kernels such that $\kappa_n(x, y) \nearrow \kappa(x, y)$ and $\beta_n(x, y) \nearrow \beta(x, y)$. Then we can couple the processes $\mathcal{T}^{\kappa_n, \beta_n}$ and $\mathcal{T}^{\kappa, \beta}$ so that almost surely, for every finite time $T \geq 0$ and distance $d \geq 1$, we have for all n large enough,*

$$\mathcal{T}_t^{\kappa_n, \beta_n, [d]} = \mathcal{T}_t^{\kappa, \beta, [d]} \quad \forall t \leq T.$$

Note that it follows from this proposition that $\mathcal{T}^{\kappa_n, \beta_n}$ converges in distribution to $\mathcal{T}^{\kappa, \beta}$ in \mathcal{DN}_\bullet (or in \mathcal{DG}_\bullet) and the result is actually stronger, as in the theorem the marks in $\mathcal{T}_t^{\kappa_n, \beta_n, [d]}$ and in $\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta, [d]}$ are equal when n is large, and not only close to each other.

The proof of this easy result is best seen in the “temporal first” construction of the growth-and-segmentation tree. In this construction, for each vertex u starting from the root, its children are constructed with the use of

- a PPP of intensity $\kappa(x_u, y)\mu(dy)$ as well as another PPP of intensity

$$\kappa(x_u, y)\beta(x_u, y)\mu(dy)\mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq T\}} dt,$$

in the case of the growth-and-segmentation tree $(\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta, [d]})_{0 \leq t \leq T}$,

- a PPP of intensity $\kappa_n(x_u, y)\mu(dy)$ as well as another PPP of intensity

$$\kappa_n(x_u, y)\beta_n(x_u, y)\mu(dy)\mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq T\}} dt,$$

in the case of the growth-and-segmentation tree $(\mathcal{T}_t^{\kappa_n, \beta_n, [d]})_{0 \leq t \leq T}$.

and we couple the involved PPP so as to guarantee that they *a.s.* coincide for large n . Hence, almost surely, for n large enough the growing trees coincide up to time T and distance d (including finitely many vertices). Finally, taking n large enough also ensures that we can make the segmentation times coincide for all the (finitely many) edges, almost surely. \square

§ 4.3. Main Results

Our main result shows that for all suitable kernels κ and β , the dynamical inhomogeneous random graph $(G_t^{n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ admits a local limit.

Theorem 4.3.1 (Local weak convergence in probability). *As n tends to infinity, the (marked) dynamical inhomogeneous random graph $(G_t^{n,\kappa,\beta})_{t \geq 0}$ converges locally in probability to (the distribution of) the GSMPGW(κ, β), in the sense of Definition 3.3.3.*

To establish this result, from Lemma 3.3.5 it suffices to prove that when considering two independent roots uniformly chosen among the vertex set V_n of $G^{n,\kappa,\beta}$, the two dynamical marked graphs converge jointly to two independent copies of the limit, which is the case $k = 2$ of the following theorem:

Theorem 4.3.2 (Joint local convergence of dynamical components). *For all $k \in \mathbb{N}$, as $n \rightarrow \infty$, the k dynamical components*

$$\left((G_t^{n,\kappa,\beta,[\infty]}, \mathbf{o}_1)_{t \geq 0}, \dots, (G_t^{n,\kappa,\beta,[\infty]}, \mathbf{o}_k)_{t \geq 0} \right)$$

seen as random variables on \mathcal{DN}_\bullet^S and rooted at uniform roots $\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_k$ in V_n , jointly converge in distribution to k independent copies of the GSMPGW(κ, β).

By Remark 3.3.6 (or its obvious generalization with k dynamical components), it is actually sufficient, for finite d and T and positive δ , to couple the dynamical balls up to distance d and time T , with corresponding marks at distance less than δ from each other. This is the content of the following theorem:

Theorem 4.3.3 (Coupling of dynamical balls). *Fix $k \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ and $T > 0$. Then one can couple the k randomly rooted dynamical balls*

$$\left((G_t^{n,\kappa,\beta,[d]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq T}, \dots, (G_t^{n,\kappa,\beta,[d]}, \mathbf{o}_k)_{0 \leq t \leq T} \right)$$

with k independent copies of the GSMPGW(κ, β), restricted to distance d and time $[0, T]$, so that they coincide (in \mathcal{DG}_\bullet) with corresponding marks at distance less than δ from each other w.h.p. as $n \rightarrow \infty$.

At this point, we stress that all three theorems above are *annealed*, as the dynamical inhomogeneous random graph is a random model constructed on a possibly random sequence (x_1, \dots, x_n) . However, we directly deduce a similar *quenched* result if we first condition on any realization of the vertex space such that all three convergence results (4.1.1), (4.1.3) and (4.1.4) hold (with then a simple limit rather than a limit in probability).

We will prove Theorem 4.3.3 first in the context of finite-type kernels, *i.e.* when the state space $S = \{1, \dots, r\}$ is finite, where we will actually obtain a more quantitative quenched result, in which t and d may depend on n but not grow too quickly.

Theorem 4.3.4 (Quantitative coupling for finite-type kernels). *Suppose $S = \{1, \dots, r\}$ is finite, and $k \in \mathbb{N}$, and condition on a realization of the vertex space. Then there exists a finite constant $c = c(\kappa, \beta)$ depending only on the kernels κ and β , such that for any $n \geq 0$ and choices of t_n and d_n , we can couple the k randomly rooted dynamical inhomogeneous (marked) random graphs*

$$\left((G_t^{n,\kappa,\beta,[d_n]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq t_n}, \dots, (G_t^{n,\kappa,\beta,[d_n]}, \mathbf{o}_k)_{0 \leq t \leq t_n} \right)$$

with k independent copies of GSMPGW(κ, β), restricted to distance d_n and time $[0, t_n]$, so that they coincide (in \mathcal{DN}_\bullet^S) with probability at least

$$1 - \frac{(c(1+t_n))^{2d_n+1}}{n} - (c(1+t_n))^{d_n+1} \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right|. \quad (4.3.1)$$

Note that this quantitative quenched result implies the annealed result with $t_n = t$ and $d_n = d$ not depending on n , simply by observing that the vertex space must have

$$\mathbb{E} \left[\sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right] \rightarrow 0,$$

and thus the expectation of (4.3.1) tends to 1 as n tends to infinity.

Note also that Theorem 4.3.4 is of course valid with the choice $t_n = 0$, but if you make the natural assumption $t_n \geq 1$ then you can replace the terms $1 + t_n$ by t_n in (4.3.1). A typical application of this theorem is to answer the question of how large you can take d_n and t_n for the coupling to hold with high probability. For example, if the types of the vertices are first chosen randomly and taken i.i.d. with distribution μ , then the term $\sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right|$ is typically of order $1/\sqrt{n}$. Thus the coupling holds whp at least under the following two choices:

$$\begin{aligned} d_n = d \quad \text{fixed} \quad & \text{and} \quad t_n = o(n^{1/(2d+2)}), \quad \text{or} \\ t_n = t \quad \text{fixed} \quad & \text{and} \quad d_n \leq \alpha \log n \quad \text{with small } \alpha > 0. \end{aligned}$$

The proof will actually provide an explicit expression for the constant c . To understand the expression, observe that $(c(1 + t_n))^{d_n}$ is a typical estimate on the number of vertices contained in the dynamical ball. For each such vertex, we have to couple all the new vertices it connects to up until time t_n for the two processes, which provides the second term. Moreover, for each such two vertices, we have to check that their connection has the same evolution up to time t_n for the two processes (for example of non-existing if the two vertices are in two different balls), which provides the first term.

Sketch of Proofs. Our main results all follow from Theorem 4.3.3 and Theorem 4.3.4.

In Section 4.4.1, we prove that Theorem 4.3.3 follows from the same result with finite-type kernels, and in particular follows from Theorem 4.3.4. To this end, we show that the finite graph $(G_t^{n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is well-approximated by dynamical inhomogeneous random graphs $(G_t^{n, \kappa_m, \beta_m})_{t \geq 0}$ with “finite-type” kernels κ_m , in the sense that we can couple the two graphs such that the dynamical balls coincide with high probability until fixed time $T \geq 0$ and fixed radius $d \geq 1$. Moreover Proposition 4.2.9 proves that $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$ is well-approximated by finite-type kernels too. Combining these two coupling approximation gives us the desired coupling between the two processes with general graphical kernels κ and β .

In Section 4.4.2, we finally establish Theorem 4.3.4 with an explicit coupled construction of the dynamical balls for finite n and for the limiting process. The approach is computationally and notationally heavy but based on simple principles:

- We introduce a third intermediate process, so as to prove separately a coupling result concerning the time-evolution of the dynamical balls, and one concerning the exploration of a dynamical ball at a fixed time, namely after revealing a new edge of the graph.
- For this exploration at a fixed time, we use standard tools (coupling results for binomial and Poisson random variables), already needed when dealing with static graphs.
- We finally deal with the time-evolution by showing that the dynamical balls are pure jump Markov processes with transition rates converging fast enough to those of the limiting process.

§ 4.4. Proofs of Main Results

§ 4.4.1. From Finite-Type Kernels to General Graphical Kernels

In this part, we show how we can deduce Theorem 4.3.3 from Theorem 4.3.4 (or rather the annealed version of Theorem 4.3.4) with an approximation argument of general graphical kernels κ and β .

Regular Finitary Kernels. Suppose there exists a projection π from S to $\tilde{S} = \{1, \dots, r\}$, such that:

- Each $S_i := \pi^{-1}(i)$ is a μ -continuity set. Then, letting $\tilde{\mu} = \pi\mu$ and $\tilde{x}_n = \pi(x_n)$, we obtain the vertex space

$$\tilde{V} = (\tilde{S}, \tilde{\mu}, (\tilde{x}_1^{(n)}, \dots, \tilde{x}_n^{(n)})_{n \geq 1}).$$

- There exist finite-type kernels $\tilde{\kappa}$ and $\tilde{\beta}$ on the state space $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ such that for every x and y in S , we have

$$\kappa(x, y) = \tilde{\kappa}(\pi(x), \pi(y)), \quad \beta(x, y) = \tilde{\beta}(\pi(x), \pi(y)).$$

In that case, we say κ and β are **regular finitary kernels** with associated projection π (following the terminology of [BJR07]).

The projection π extends naturally to graphs with marks in S , simply by projecting the marks of each vertex. This defines in particular a projection from $\mathbb{S}\mathbb{T}_S$ to $\mathbb{S}\mathbb{T}_{\tilde{S}}$. It is then clear that $\pi(G^{\nu, n, \kappa, \beta})$ and $G^{\tilde{\nu}, n, \tilde{\kappa}, \tilde{\beta}}$ have the same law, as well as $\pi(\mathcal{T}^{\kappa, \beta})$ and $\mathcal{T}^{\tilde{\kappa}, \tilde{\beta}}$. Thus we can apply Theorem 4.3.4, or rather the annealed version discussed just after this theorem, to obtain the following proposition:

Proposition 4.4.1 (Coupling for regular finitary kernels). *Suppose κ and β are regular finitary kernels with associated projection π . Fix $k \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$ and $T > 0$. One can couple the k dynamical balls*

$$\left((G_t^{n, \kappa, \beta, [d]}, \mathbf{o}_n^1)_{0 \leq t \leq T}, \dots, (G_t^{n, \kappa, \beta, [d]}, \mathbf{o}_n^k)_{0 \leq t \leq T} \right)$$

with k independent copies of the GSMPGW(κ, β), restricted to distance d and time $[0, T]$, so that their projections coincide in $\mathcal{DN}_{\bullet}^{\tilde{S}}$ w.h.p. as $n \rightarrow \infty$.

Note here that in the coupling we can only ask the projections of the marks to coincide in \tilde{S} , but we cannot ask the marks themselves to coincide in S . In particular, on the state space S , it may seem that Proposition 4.4.1 implies a convergence in distribution only in \mathcal{DG}_{\bullet} and not in \mathcal{DN}_{\bullet}^S .

However, for a given regular finitary kernel, we could modify the associated projection by refining the associated partition of S into the S_i , and ask in this refined partition the further request that each S_i be of diameter less than a given $\delta > 0$, using the compactness of S . This would have the effect of providing a coupling where the associated dynamical graphs (asymptotically) not only coincide, but also have the associated marks at distance less than δ . As this is true for any $\delta > 0$, we indeed can deduce a convergence in distribution in \mathcal{DN}_{\bullet}^S . We do not detail more this approximation argument, as we will write down in the next subsection a more detailed approximation argument directly for general graphical kernels, and only need Proposition 4.4.1 from the current subsection.

General Graphical Kernels. We now consider κ and β graphical kernels. We consider an approximating partition as in [Hof23, Lemma 3.6], which provides approximating kernels $(\kappa_m)_{m \geq 1}$ and $(\beta_m)_{m \geq 1}$ that satisfy:

1. For each m , the kernels κ_m and β_m are regular finitary.
2. The sequence of kernels $(\kappa_m)_{m \geq 1}$ (resp. $(\beta_m)_{m \geq 1}$) is nondecreasing and bounded by κ (resp. β), with for μ -a.e. x and y in S :

$$\kappa_m(x, y) \rightarrow \kappa(x, y), \quad \beta_m(x, y) \rightarrow \beta(x, y).$$

We then have, as κ is a graphical kernel,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{u < v} \left(\frac{\kappa_m(x_u, x_v)}{n} \wedge 1 \right) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2} \int \int_{S^2} \kappa(x, y) \mu(dx) \mu(dy), \\ & \frac{1}{n} \sum_{u < v} \left(\frac{\kappa(x_u, x_v)}{n} \wedge 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} \frac{1}{2} \int \int_{S^2} \kappa(x, y) \mu(dx) \mu(dy), \end{aligned}$$

and thus also

$$\frac{1}{n} \sum_{u < v} \left(\frac{\kappa(x_u, x_v)}{n} \wedge 1 \right) - \left(\frac{\kappa_m(x_u, x_v)}{n} \wedge 1 \right) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 0.$$

Similarly,

$$\frac{1}{n} \sum_{u < v} \beta(x_u, x_v) \left(\frac{\kappa(x_u, x_v)}{n} \wedge 1 \right) - \beta_m(x_u, x_v) \left(\frac{\kappa_m(x_u, x_v)}{n} \wedge 1 \right) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{(\mathbb{P})} 0.$$

Using (4.1.2), we deduce that for every $T \geq 0$,

$$\frac{1}{n} \mathbb{P} \left(\exists t \leq T, uv \in E(G_t^{n, \kappa_m, \beta_m}) \Delta E(G_t^{n, \kappa, \beta}) \right) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0, \quad (4.4.1)$$

where Δ is the notation for the symmetric difference between the two edge sets. In other words, when m and n are large, the average number of edges which can differ between the two random graphs within the time interval $[0, T]$, is bounded by a small constant times n . This result and Proposition 4.4.1 for the kernels κ_m and β_m are sufficient to prove Theorem 4.3.3 for the kernels κ and β , as we now explain.

We fix $k \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$ and $T > 0$. Moreover we let $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$, and aim to show that for large n , we can couple the k dynamical balls

$$\left((G_t^{n, \kappa, \beta, [d]}, \mathbf{o}_n^1)_{0 \leq t \leq T}, \dots, (G_t^{n, \kappa, \beta, [d]}, \mathbf{o}_n^k)_{0 \leq t \leq T} \right)$$

with k copies of the $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, restricted to distance d and time $[0, T]$, so that with probability larger than $1 - \varepsilon$, they coincide in \mathcal{DG}_\bullet , with marks at distance less than δ from each other.

Choose K large enough so that the probability that the segmented tree $\mathcal{T}_T^{\kappa, \beta, [d]}$ has more than K (possibly segmented) edges, is bounded by ε . The existence of such a K is guaranteed since $(\mathcal{T}_t^{\kappa, \beta, [d]})_{t \geq 0}$ is a non-explosive Markov process on \mathcal{ST}_S .

Choose m large enough so that for n larger than m , we have

$$\frac{1}{n} \sum_{u < v} \mathbb{P} \left(\exists t \leq T, uv \in E(G^{n, \kappa_m, \beta_m}) \Delta E(G^{n, \kappa, \beta}) \right) \leq \varepsilon/K.$$

Then as $n \rightarrow \infty$, we have *w.h.p.*

$$\frac{1}{n} \sum_{u < v} \mathbb{1}_{\{\exists t \leq T, uv \in E(G^{n, \kappa_m, \beta_m}) \Delta E(G^{n, \kappa, \beta})\}} \leq 2\varepsilon/K. \quad (4.4.2)$$

Now, using Proposition 4.2.9 and increasing the value of m if necessary, we can ensure that with probability at least $1 - \varepsilon$, we have

$$\mathcal{F}_t^{\kappa_m, \beta_m, [d]} = \mathcal{F}_t^{\kappa, \beta, [d]} \quad \forall t \leq T.$$

For these regular finitary kernels κ_m and β_m , we can associate a projection π on some finite set $\tilde{S} = \{1, \dots, r\}$ so that $\text{diam}(S_i) \leq \delta$ for any $i \leq r$. Then by Proposition 4.4.1, we can ensure that for \mathbf{n} large enough, we can couple the k dynamical balls

$$\left((G_t^{\mathbf{n}, \kappa_m, \beta_m, [d]}, \mathbf{o}_t^1)_{0 \leq t \leq T}, \dots, (G_t^{\mathbf{n}, \kappa_m, \beta_m, [d]}, \mathbf{o}_t^k)_{0 \leq t \leq T} \right)$$

with k independent copies of the $\text{GSMPGW}(\kappa_m, \beta_m)$, restricted to distance d and time $[0, T]$, so that with error probability less than ε , they coincide in $\mathcal{D}\mathcal{G}_\bullet$, with marks at distance less than δ from each other. In turn, with error probability less than $2\varepsilon k$, these k independent copies of $\text{GSMPGW}(\kappa_m, \beta_m)$ coincide with k independent copies of $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$ when restricted to distance d and time $[0, T]$, and moreover none of the k segmented trees has more than K (possibly segmented) edges at time T .

When further Inequality (4.4.2) is satisfied, the dynamical balls

$$\left((G_t^{\mathbf{n}, \kappa_m, \beta_m, [d]}, \mathbf{o}_t^1)_{0 \leq t \leq T}, \dots, (G_t^{\mathbf{n}, \kappa_m, \beta_m, [d]}, \mathbf{o}_t^k)_{0 \leq t \leq T} \right)$$

also coincide with the dynamical balls

$$\left((G_t^{\mathbf{n}, \kappa, \beta, [d]}, \mathbf{o}_t^1)_{0 \leq t \leq T}, \dots, (G_t^{\mathbf{n}, \kappa, \beta, [d]}, \mathbf{o}_t^k)_{0 \leq t \leq T} \right)$$

with error probability bounded by $2\varepsilon k$. Finally, for large enough \mathbf{n} , we accomplish the desired coupling with error probability less than $(2 + 4k)\varepsilon$. \square

§ 4.4.2. Coupling of dynamical balls for finite-type kernels

We finally prove Theorem 4.3.4, which then implies all our main results. As it is a quenched result, we work conditionally on the vertex space, and thus consider x_1, \dots, x_n to be deterministic. For $j = 1, \dots, k$, let us write $(\mathcal{B}_t^{(\mathbf{n}), j})_{t \geq 0} = ((V_t^{(\mathbf{n}), j}, E_t^{(\mathbf{n}), j}), \mathbf{o}_j)_{t \geq 0}$ for the dynamical ball of radius d_n of the dynamical inhomogeneous random graph $(G_t^{\mathbf{n}, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ centered at \mathbf{o}_j . Let us also write $\hat{E}_t^{(\mathbf{n}), j}$ its respective accumulated edges. In the following, we consider

$$T_\dagger = \sup \left\{ t \geq 0, \mathcal{B}_t^{(\mathbf{n}), 1}, \dots, \mathcal{B}_t^{(\mathbf{n}), k} \text{ are disjoint segmented trees,} \right. \\ \left. \text{and no edge of } \bigcup_j \hat{E}_t^{(\mathbf{n}), j} \text{ has been segmented and after reappeared} \right\},$$

with the convention $\sup \emptyset = 0$. For $t < T_\dagger$, in the trees $(V_t^{(\mathbf{n}), 1}, \hat{E}_t^{(\mathbf{n}), 1}), \dots, (V_t^{(\mathbf{n}), k}, \hat{E}_t^{(\mathbf{n}), k})$, we can order the children of each vertex by order of appearance, then by the order of their types, and then in case of ties by the natural order on the vertex set V_n . Thus we can define, for $t < T_\dagger$,

$$F_t^{(\mathbf{n}), j} = [V_t^{(\mathbf{n}), j}, \hat{E}_t^{(\mathbf{n}), j}, E_t^{(\mathbf{n}), j}] \in \mathcal{ST}_S^{[d_n]}$$

the ordered segmented tree. For a vertex $u \in F_t^{(\mathbf{n}), j} \subset \mathcal{U}$, we write v_u^j the corresponding vertex in $V_t^{(\mathbf{n}), j} \subset V_n$, and its type $x_{v_u^j}$ will be simply written x_u^j . For $t \geq T_\dagger$, we will simply define $(F_t^{(\mathbf{n}), 1}, \dots, F_t^{(\mathbf{n}), k}) = \dagger$,

where \dagger is a cemetery state that we introduce, so that T_\dagger is also the hitting time of this cemetery state. We also write $(\mathcal{F}_t^{1,[d_n]}, \dots, \mathcal{F}_t^{k,[d_n]})_{t \leq t_n}$ for k independent copies of $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$ truncated at height d_n . In order to couple $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k})_{t \leq t_n}$ with $(\mathcal{F}_t^{1,[d_n]}, \dots, \mathcal{F}_t^{k,[d_n]})_{t \leq t_n}$, we will actually see that these are Markov processes on $(\mathbb{S}\mathbb{T}_S^{[d_n]})^k \cup \{\dagger\}$ (which might still be unclear for the process $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k})$), whose transition rates are close to another. Note that if the coupling succeeds, then we have $t_n < T_\dagger$, so that we will not be interested in what happens after time T_\dagger .

For $t < T_\dagger$, we write $V_t^{(n),=d_n,j}$ for the vertices at distance exactly d_n from the root \mathbf{o}_j in the tree $(V_t^{(n),j}, \hat{E}_t^{(n),j})$, and $V_t^{(n),[d_n-1],j}$ for the remaining vertices at distance at most $d_n - 1$. An important observation is that every edge uv with $u \in V_n \setminus \bigcup_j V_t^{(n),[d_n-1],j}$ and $v \in V_n \setminus \bigcup_j V_t^{(n),j}$, is open at time t independently with probability $p_{u,v} = \kappa(x_u, x_v)/n$. This is a consequence of the independence of the evolution of these edges from the evolution of the dynamical balls up to time t , together with the stationarity property.

Let us consider the different possible transitions modifying the process $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k})$ while it is in some state (f_1, \dots, f_k) .

1. Each edge can be segmented. If uu' is an unsegmented edge in $f_j = F_t^{(n),j}$, this holds at rate $\beta(x_u^j, x_{u'}^j)(1 - \kappa(x_u^j, x_{u'}^j)/n)$.
2. Each segmented edge or each pair of unconnected vertices can get connected. In that case we reach time T_\dagger and by construction the process jumps to the cemetery state \dagger . For each such edge between $u \in f_j = F_t^{(n),j}$ and $u' \in f_{j'} = F_t^{(n),j'}$, this holds at rate $\beta(x_u^j, x_{u'}^{j'})\kappa(x_u^j, x_{u'}^{j'})/n$.
3. For each $l = 1, \dots, k$, for each vertex u of $f_l = F_t^{(n),[d_n-1],l}$ and each type $x \in S$, an edge can appear between the vertex $v_u^l \in V_t^{(n),[d_n-1],l}$ and some vertex $v \in V_n \setminus \bigcup_j V_t^{(n),l}$ of type $x_v = x$. This holds at rate

$$\begin{aligned} & (n_x - |\bigcup_{j=1}^k V_t^{(n),j}(x)|) \beta(x_u^l, x) \frac{\kappa(x_u^l, x)}{n} \\ &= \beta(x_u^l, x) \kappa(x_u^l, x) \frac{n_x}{n} - \frac{\beta(x_u^l, x) \kappa(x_u^l, x)}{n} \sum_{j=1}^k |V_t^{(n),j}(x)|, \end{aligned}$$

where $V_t^{(n),j}(x)$ is the set of vertices of type x in $F_t^{(n),j}$. When this happens, the process $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k})$ will jump to a new random value. We will see that its conditional distribution depends only on the current value of the process and on l, u and x , but not on the values of the vertices v_u^l and v in V_n for example, and we will further write this conditional distribution as $\mu_{(f_1, \dots, f_k), l, u, x}^{(n)}$.

To understand this distribution, suppose $(F_{t-}^{(n),1}, \dots, F_{t-}^{(n),k}) = (f_1, \dots, f_k)$ and at time t an edge has been added between $v_u^l \in V_{t-}^{(n),[d_n-1],l}$ and $v \in V_n \setminus \bigcup_j V_{t-}^{(n),j}$ with $x_v = x$. The new value for $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k})$ will then be:

- Either $(f_1, \dots, \text{Growth}(f_l, t, u), \dots, f_k)$ for some tree $\mathfrak{t} \in \mathbb{T}_S^{[d_n-|u|-1]}$ with root of type x and height at most $d_n - |u| - 1$.
- Or the cemetery state if $\mathcal{B}_t^{(n),1}, \dots, \mathcal{B}_t^{(n),k}$ are no more disjoint segmented trees.

Let us fix $\mathfrak{t} \in \mathbb{T}_S^{[d_n-|u|-1]}$ with root of type x and compute the probability of having $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k}) = (f_1, \dots, \text{Growth}(f_l, t, u), \dots, f_k)$. To this end, we check successively for every $w \in \mathfrak{t}$ in the contour (or

lexicographical, or depth-first) order whether the neighbourhood of the corresponding vertex in V_n corresponds to that in \mathfrak{t} . This also requires some notation.

Let us write $c_w(\mathfrak{t})$ for the number of children of w in the tree \mathfrak{t} and $c_w^y(\mathfrak{t})$ for the number of children of given type y . Let us write e_w^y for the number of explored vertices of type y when we explore w , including w . This is also the number of vertices of type y which arrive no later than w in \mathfrak{t} in the contour order. Let us finally write s_w^y for the number of “seen but unexplored” vertices of type y when we explore w . These seen vertices are also the children of the explored vertices, not counting the children of w itself. Let us finally write $u' = u(c_u(\mathfrak{f}_l) + 1)$ so that we will now have $v_{u'}^l = v$. We then have

$$\begin{aligned} & \mu_{(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k), l, u, x}^{(n)}(\mathfrak{f}_1, \dots, \text{Growth}(\mathfrak{f}_l, \mathfrak{t}, u), \dots, \mathfrak{f}_k) \\ &= \prod_{w \in \mathfrak{t}} \prod_{y=1}^r \mu_{\sum_j |\mathfrak{f}_j| + s_w^y, \frac{\kappa(x_w^y, y)}{n}}^{\text{bin}}(0) \prod_{\substack{w \in \mathfrak{t} \\ |w| < d_n - |u| - 1}} \prod_{y=1}^r \mu_{n_y - \sum_j |\mathfrak{f}_j^y| - s_w^y - e_w^y, \frac{\kappa(x_w^y, y)}{n}}^{\text{bin}}(c_w^y(\mathfrak{t})), \end{aligned}$$

where we recall that $\mu_{n,p}^{\text{bin}}$ denotes the binomial distribution with parameters n and p . Indeed, to obtain this result (see Figure 4.4), successively for each $w \in \mathfrak{t}$ in the contour order, starting from $w = \emptyset_{\mathfrak{t}}$ and $v_{u'}^l = v$:

- We first check that the corresponding vertex $v_{u'w}^l$ is not connected to any other vertex in $\bigcup_j V_{\mathfrak{t}^-}^{(n), =d_n, j}$ or in the set of seen and unexplored vertices at this time. This provides the first term.
- If $|w| < d_n - |u| - 1$ and thus $|u'w| < d_n$, we check that the number of children of $v_{u'w}^l$ of type y is equal to $c_w^y(\mathfrak{t})$, which provides the second term. Moreover, if this is the case, we define accordingly $v_{u'w_i}^l$ for $1 \leq i \leq c_w^y(\mathfrak{t})$.

Finally, the fact that $\mu_{(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k), l, u, x}^{(n)}$ is a probability measure allows to write

$$\mu_{(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k), l, u, x}^{(n)}(\dagger) = 1 - \sum_{\mathfrak{t} \in \mathbb{T}_S^{[d_n - |u| - 1]}} \mu_{(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k), l, u, x}^{(n)}(\mathfrak{f}_1, \dots, \text{Growth}(\mathfrak{f}_l, \mathfrak{t}, u), \dots, \mathfrak{f}_k).$$

At this point, we have proven that $(F_t^{(n), 1}, \dots, F_t^{(n), k})$ is indeed markovian and we have provided its transition rates. We will compare these rates with those of $(\mathcal{S}^{1, [d_n]}, \dots, \mathcal{S}^{k, [d_n]})$, which we can simply make explicit as these are k -independent copies of $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$, truncated at height d_n . When this process is in state $(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k) \in (\mathbb{S}\mathbb{T}_S^{[d_n]})^k$, these rates are given by:

1. Each edge uu' in some \mathfrak{f}_j is segmented at rate $\beta(x_{u'}^j, x_u^j)$.
2. For each $l = 1, \dots, k$, for each vertex u of $\mathfrak{f}_l = F_t^{(n), [d_n - 1], l}$ and each type $x \in S$, a $\text{MPGW}(\kappa, \chi)$ (truncated at height $d_n - |u| - 1$) is grown at u at rate $\kappa(x_u^l, x)\beta(x_u^l, x)\mu_x$. Calling $\mu_{(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k), l, u, x}^{d_n}$ the law of the k -tuple of trees after this growth, we thus have for any tree $\mathfrak{t} \in \mathbb{T}_S^{[d_n - |u| - 1]}$ with root of type x :

$$\begin{aligned} \mu_{(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_k), l, u, x}^{d_n}(\mathfrak{f}_1, \dots, \text{Growth}(\mathfrak{f}_l, \mathfrak{t}, u), \dots, \mathfrak{f}_k) &= \mathbb{P}\left(\text{MPGW}(\kappa, \chi)^{[d_n - |u| - 1]} = \mathfrak{t}\right) \\ &= \prod_{\substack{w \in \mathfrak{t} \\ |w| < d_n - |u| - 1}} \prod_{y=1}^r \mu_{\kappa(x_w^y, y)\mu_y}^{\text{po}}(c_w^y(\mathfrak{t})), \end{aligned}$$

where we recall that μ_λ^{po} denotes the Poisson law with parameter λ .

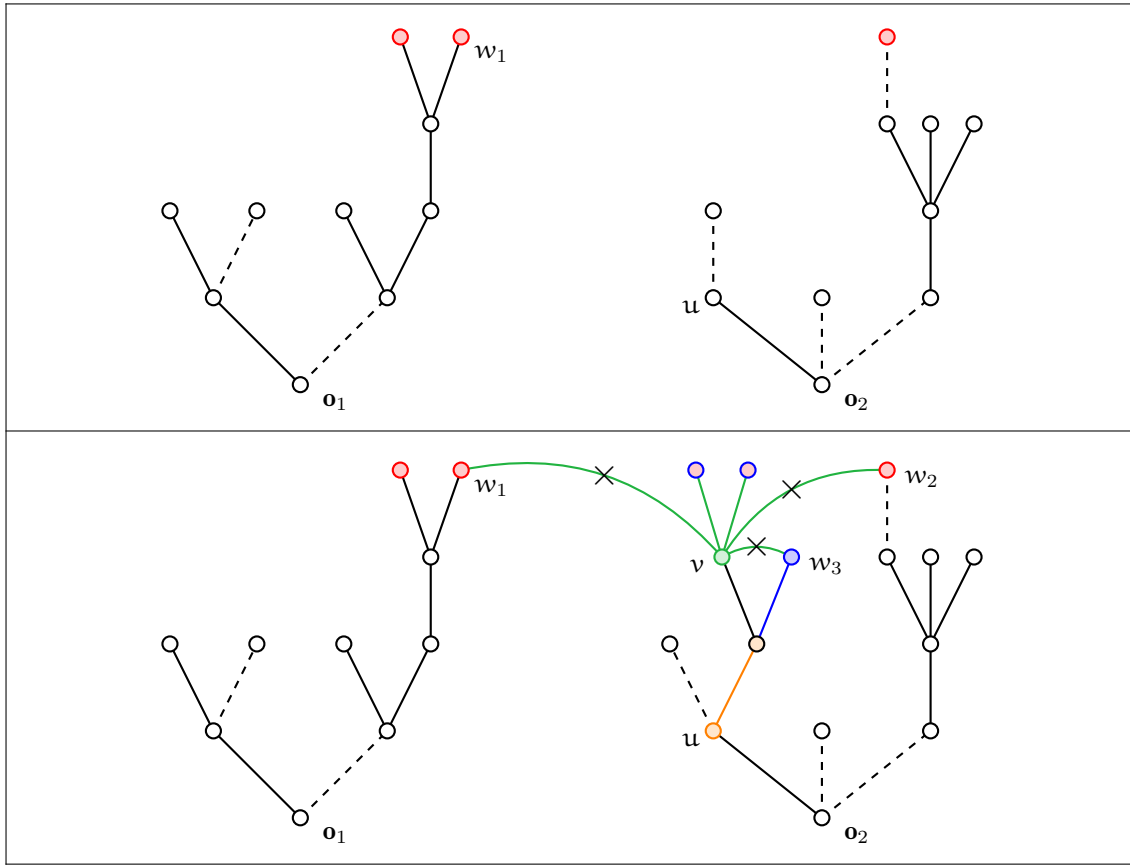


Figure 4.4 – Illustration of one step of the exploration process at a growing time. On the top are the two balls just before that growing time. On the bottom a new component is grown at u (orange edge). Blue vertices correspond to stack vertices. Green edges with black cross (not all displayed) are edges checked to be not connected to v when the vertex v (in green) is explored. Black vertices correspond to the explored vertices. Red vertices correspond to those at distance d from its corresponding root. The unseen vertices are not displayed for a better visibility.

In order to couple the Markov processes $(F^{(n),1}, \dots, F^{(n),k})$ and $(\mathcal{T}^{1,[d_n]}, \dots, \mathcal{T}^{k,[d_n]})$, it will be convenient to introduce a third continuous-time Markov process $(\tilde{F}^{(n),1}, \dots, \tilde{F}^{(n),k})$, with initial condition $(\tilde{F}_0^{(n),1}, \dots, \tilde{F}_0^{(n),k}) = (\mathcal{T}_0^{1,[d_n]}, \dots, \mathcal{T}_0^{k,[d_n]})$, and with the same jump rates as those of $(F^{(n),1}, \dots, F^{(n),k})$, except that when a new vertex of type x is added to one of the segmented tree $\tilde{F}^{(n),1}$, we use the distribution $\mu_{(\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k), l, u, x}^{d_n}$ instead of $\mu_{(\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k), l, u, x}^{(n)}$ to determine the state of the process. To this end, we will show that it is unlikely that the segmented trees contain too many vertices.

For given $(\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k)$, the sum over $(\mathbb{f}'_1, \dots, \mathbb{f}'_k)$ of the absolute value of the differences between the transition rates from $(\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k)$ to $(\mathbb{f}'_1, \dots, \mathbb{f}'_k)$ for the Markov chains $(\mathcal{T}^{1,[d_n]}, \dots, \mathcal{T}^{k,[d_n]})$ and $(\tilde{F}^{(n),1}, \dots, \tilde{F}^{(n),k})$ is bounded by

$$\max_{x, y \in S} \beta(x, y) \kappa(x, y) \left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{f} - 1)}{2n} + \frac{\mathbf{f}^2}{n} + \mathbf{f} \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu(z) \right| \right)$$

$$\leq \max_{x,y \in S} \kappa(x,y) \beta(x,y) \left(\frac{3\mathbf{f}^2}{2n} + \mathbf{f} \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right),$$

where $\mathbf{f} = |\mathbb{f}_1| + \dots + |\mathbb{f}_k|$.

The first term with $\mathbf{f}(\mathbf{f} - 1)/2n$ comes from comparing, for each unordered pair of vertices u and u' of $\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k$, the rate at which the edge is segmented if uu' is the edge of some \mathbb{f}_j , or the rate at which it appears otherwise (in V_n , leading to the process $(\tilde{F}^{(n),1}, \dots, \tilde{F}^{(n),k})$ jump to the cemetery state). The second and third term come from comparing the rates of growth.

Therefore, from Lemma A.1.2 we can couple the two processes so that

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists t \leq t_n, (\tilde{F}_t^{(n),1}, \dots, \tilde{F}_t^{(n),k}) \neq (\mathcal{F}_t^{1,[d_n]}, \dots, \mathcal{F}_t^{k,[d_n]})) \\ & \leq t_n \max_{x,y} \kappa(x,y) \beta(x,y) \left(\frac{3\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n^2]}{2n} + \mathbb{E}[\mathbf{Z}_n] \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right), \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

where

$$\mathbf{Z}_n := \left| \mathcal{F}_{t_n}^{1,[d_n]} \right| + \dots + \left| \mathcal{F}_{t_n}^{k,[d_n]} \right|.$$

It remains to couple the two processes $(F^{(n),1}, \dots, F^{(n),k})$ and $(\tilde{F}^{(n),1}, \dots, \tilde{F}^{(n),k})$ up to time t_n . To this end, we first observe that the k roots of $(F^{(n),1}, \dots, F^{(n),k})$ correspond to distinct vertices in V_n and have types coupled with those of $(\tilde{F}^{(n),1}, \dots, \tilde{F}^{(n),k})$ with failure probability roughly bounded by

$$k \left(\frac{k}{n} + \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right).$$

Next, since two edges do not flip simultaneously, it suffices to couple the growing operations encoded with the distributions $\mu_{(\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k), l, u, x}^{(n)}$ and $\mu_{(\mathbb{f}_1, \dots, \mathbb{f}_k), l, u, x}^{d_n}$. We thus couple successively the offspring of each vertex encountered, that we are ordered according to their order of appearance, then (in case of ties) the index of the tree between 1 and k , and finally the contour order inside the given.

Suppose the j -th (appeared) vertex is u in $F^{(n),l}$ (and in $\tilde{F}^{(n),l}$ as well), and the number of revealed vertices before we reveal the offspring of u is $n(j)$. When exploring its offspring, we have to consider:

- A family of Poisson random variables $(P_y^u)_{y \in S}$ with parameters $\kappa(x_u, y) \mu_y$ yielding its number of children of type y , in the case of $\tilde{F}^{(n),l}$ (and when u is not already at maximal depth d_n).
- A family of binomial random variables $(B_y^u)_{y \in S}$ and $(B_y'^u)_{y \in S}$ with parameters $(b_y^u, \kappa(x_u, y)/n)$ and $(n_y - b_y'^u, \kappa(x_u, y)/n)$ for some b_y^u and $b_y'^u$ satisfying $\sum_y b_y^u \leq n(j)$ and $\sum_y b_y'^u \leq n(j)$, and yielding:
 - the number of connections to previously explored and revealed vertices of type y in $(F^{(n),1}, \dots, F^{(n),k})$,
 - the number of children of type y (when u not already at maximal depth d_n)

in the case of $F^{(n),l}$.

The total variation distance between a binomial $\mu_{n,p}^{\text{bin}}$ distribution and a Poisson $\mu_{n,p}^{\text{po}}$ distribution with the same mean is at most p (see for instance [BHJ92]). Thus all the B_y^u are 0 with failure probability at

most $\sum_y \kappa(x_u, y) b_y^u/n$, and we can couple each B_y^u with P_y^u with failure probability at most

$$\begin{aligned} & d_{\text{TV}}(\mu_{n_y - b_y^u, \kappa(x_v, y)/n}^{\text{bin}}, \mu_{\kappa(x_v, y)\mu_y}^{\text{po}}) \\ & \leq d_{\text{TV}}(\mu_{n_y - b_y^u, \kappa(x_v, y)/n}^{\text{bin}}, \mu_{n_y, \kappa(x_v, y)/n}^{\text{bin}}) + d_{\text{TV}}(\mu_{n_y, \kappa(x_v, y)/n}^{\text{bin}}, \mu_{\kappa(x_v, y)\mu_y}^{\text{po}}) \\ & \leq \kappa(x_v, y) \frac{b_y^u}{n} + d_{\text{TV}}(\mu_{n_y, \kappa(x_v, y)/n}^{\text{bin}}, \mu_{\kappa(x_v, y)n_y/n}^{\text{po}}) + d_{\text{TV}}(\mu_{\kappa(x_v, y)n_y/n}^{\text{po}}, \mu_{\kappa(x_v, y)\mu_y}^{\text{po}}) \\ & \leq \kappa(x_v, y) \left(\frac{b_y^u + 1}{n} + \left| \frac{n_y}{n} - \mu_y \right| \right). \end{aligned}$$

Hence, all these couplings succeed for vertex u with failure probability bounded by

$$\max_{x, y \in S} \kappa(x, y) \left(\frac{2n(j) + |S|}{n} + \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right).$$

We repeat this for all the vertices encountered until time t_n . On the event that the first coupling succeeded, the number of these encountered vertices is

$$\left| \tilde{F}_{t_n}^{(n),1} \right| + \dots + \left| \tilde{F}_{t_n}^{(n),k} \right| = \left| \mathcal{F}_{t_n}^{1, [d_n]} \right| + \dots + \left| \mathcal{F}_{t_n}^{k, [d_n]} \right| = \mathbf{Z}_n.$$

For $j \leq \mathbf{Z}_n$ we also have $n(j) \leq \mathbf{Z}_n$, and therefore this second coupling fails with probability bounded by

$$\left(1 + \max_{x, y \in S} \kappa(x, y) \right) \left(\frac{2\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n^2] + |S|\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n]}{n} + \mathbb{E}[\mathbf{Z}_n] \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right), \quad (4.4.4)$$

and in particular the probability of $T_{\dagger} < t_n$ is bounded by the same quantity.

Combining (4.4.3) and (4.4.4), we finally obtain that we can couple the three processes $(F_t^{(n),1}, \dots, F_t^{(n),k})$, $(\tilde{F}_t^{(n),1}, \dots, \tilde{F}_t^{(n),k})$ and $(\mathcal{F}_t^{1, [d_n]}, \dots, \mathcal{F}_t^{k, [d_n]})$ up until time t_n and with failure probability bounded by:

$$\left(1 + \max_{x, y \in S} \kappa(x, y)(1 + \beta(x, y)t_n) \right) \left(\frac{2\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n^2] + |S|\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n]}{n} + \mathbb{E}[\mathbf{Z}_n] \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right| \right). \quad (4.4.5)$$

To conclude Theorem 4.3.4, it remains to prove that the first two moments of \mathbf{Z}_n can be bounded by $(c(1 + t_n))^{d_n}$ and $(c(1 + t_n))^{2d_n}$ respectively, for some constant $c > 0$. It clearly suffices to prove this when there is only one ball, so we suppose $k = 1$. Then we can roughly bound \mathbf{Z}_n by the number $\tilde{\mathbf{Z}}_n$ of vertices at distance at most d_n from the root of a PGW tree with parameter $\lambda_n = 1 + \max_{x, y \in S} \kappa(x, y)(1 + \beta(x, y)t_n)$, and we can assume $\lambda_n \geq 2$ by increasing its value if necessary. From a classic analysis of Galton-Watson processes (see for instance [Har48, Har63, AN72]), we get the following estimates

$$\begin{aligned} \lambda_n^{d_n} & \leq \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Z}}_n] = \frac{\lambda_n^{d_n+1} - 1}{\lambda_n - 1} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \lambda_n^{d_n} \leq 2\lambda_n^{d_n}, \\ \lambda_n^{2d_n} & \leq \mathbb{E}[(\tilde{\mathbf{Z}}_n)^2] \leq 2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \right)^3 \lambda_n^{2d_n} \leq 16\lambda_n^{2d_n}, \end{aligned}$$

as wanted. This concludes the proof. \square

As final remarks, we stress that we clearly could have provided better estimates of the moments of \mathbf{Z}_n , for example as most vertices in the dynamical balls are added at times close to t_n and have less time to generate offspring than the initial root vertices. We also could have obtained the same formula as (4.4.5) with $\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n \wedge \omega_n]$ instead of $\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n]$, with arbitrary choice of ω_n , simply by stopping the process when \mathbf{Z}_n exceeds ω_n , but at the cost of adding an error term $\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n > \omega_n)$.

§ 4.5. Vertex Updating Inhomogeneous Random Graph

In this section, we discuss briefly **vertex updating inhomogeneous random graphs**, a model of dynamical graph with a different kind of dynamics where several edges can be updated simultaneously. More precisely, we consider as before a vertex space $\mathcal{V} = (\mathcal{S}, \mu, (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})_{n \geq 1})$ and a **connection kernel** $\kappa : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$, but we now consider an **updating function** $\beta : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ which is a function of only one variable. The dynamic is then the following: all edges adjacent to a vertex are updated simultaneously at rate depending on the type of the vertex. Upon updating vertex loses all its connections, and new connections are built independently.

More formally, given the sequence $x_1, \dots, x_n, (H_t^{n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is the random dynamical graph on V_n , such that any two vertices u and v are initially connected by an edge independently of the others and with a probability

$$p_{u,v} = \frac{1}{n} \kappa(x_u, x_v) \wedge 1,$$

and each vertex u updates independently with rate $\beta_u = \beta(x_u)$. That is, after an exponential time with expectation $1/\beta_u$, every unordered pair $\{u, v\}$, for $u \neq v$ forms an edge with probability $p_{u,v}$ independently of its previous state and all other edges. The remaining edges vw with $v, w \neq u$ remain unchanged.

We obtain the local limit of these dynamical graphs in a similar manner as for the dynamical inhomogeneous random graphs. In order to describe the limiting model, we need the growing operation $\text{Growth}(r, s, u)$ which was introduced in Section 4.2.2, as well as a new operation, which we write $\text{Merge}(r, s, u)$, and which is the tree obtained by merging the root of the tree s with the vertex u of r , assuming this root and u have the same type.

Definition 4.5.1. The random growth-and-segmentation tree $(\mathcal{H}_t^{\kappa, \beta})_{t \geq 0}$ is called **vertex-growth-and-segmentation multitype Poisson-Galton-Watson tree** with edge and vertex kernels κ and β , and denoted $\text{VGSMPGW}(\kappa, \beta)$, if it is a Markov process on $\mathbb{ST}_{\mathcal{S}}$ where:

- (a) $\mathcal{H}_0^{\kappa, \beta}$ is distributed as a $\text{MPGW}(\kappa)$,
- (b) for each vertex $u \in \mathcal{H}_t^{\kappa, \beta}$, at rate $\beta(x_u)$, all its incident edges are segmented, and a new $\text{MPGW}(\kappa, x_u)$ is merged at u ,
- (c) at each vertex $u \in \mathcal{H}_t^{\kappa, \beta}$, a $\text{MPGW}(\kappa, y)$ is grown at rate $\kappa(x_u, y)\beta(y) \mu(dy)$.

◆

Similarly as before, this defines a strong Markov process on $\mathbb{ST}_{\mathcal{S}}$ with càdlàg trajectories. The reason why we now have two different growing operations, is that the dynamical ball can grow either by the update of one of its own vertices, leading to a merging operation, or by the update of one external vertex that then connects to one vertex of the ball, leading to a growing operation.

All the results of Section 4.3 can be adapted to these new settings, in a similar way that we do not detail. We just state the rephrasing of the first and last result in these new settings.

Theorem 4.5.2 (Local weak convergence in probability). *As n tends to infinity, the (marked) vertex updating inhomogeneous random graph $(H_t^{n, \kappa, \beta})_{t \geq 0}$ converges locally in probability to (the distribution of) the $\text{VGSMPGW}(\kappa, \beta)$.*

Theorem 4.5.3 (Coupling for the finite-type kernels). *Suppose $S = \{1, \dots, r\}$ is finite, and $k \in \mathbb{N}$. Then there exists a finite constant $c = c(\kappa, \beta) > 0$ depending only on the kernels κ and β , such that for any $n \geq 0$ and choices of t_n and d_n , we can couple the k randomly rooted dynamical balls*

$$\left((H_t^{n, \kappa, \beta, [d_n]}, \mathbf{o}_1)_{0 \leq t \leq t_n}, \dots, (H_t^{n, \kappa, \beta, [d_n]}, \mathbf{o}_k)_{0 \leq t \leq t_n} \right)$$

with k independent copies of $\text{VGSMPGW}(\kappa, \beta)$, restricted to distance d_n and time $[0, t_n]$, so that they coincide (in \mathcal{DN}_\bullet^S) with probability at least

$$1 - \frac{(c(1 + t_n))^{2d_n+1}}{n} - (c(1 + t_n))^{d_n+1} \sum_{z \in S} \left| \frac{n_z}{n} - \mu_z \right|. \quad (4.5.1)$$

* * *

5 | Consequences of Local Weak Convergence for Dynamical Graphs

...in which we discuss some consequences of local weak convergence for dynamical graphs. We show that local weak convergence provide a good framework to understand non trivial asymptotic properties of large finite dynamical graphs. As a perspective, we leave the framework of this thesis in order to propose a definition of unimodularity for dynamical graphs. We have not investigated this notion so far, however we hope that it will be interesting to investigate.

§ 5.1. Local Functionals

We have defined a notion of local weak convergence on \mathcal{DG}_\bullet for random variables $\{(\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n), n \geq 1\}$ to $(\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o}_\infty)$. This implies that for all continuous functional $\varphi : \mathcal{DG}_\bullet \rightarrow M$, where M is some metric space, the sequence $\{\varphi(\mathbf{G}^n, \mathbf{o}_n), n \geq 1\}$ also converges in distribution to $\varphi(\mathbf{G}^\infty, \mathbf{o}_\infty)$. In our context, a continuous function $\varphi : \mathcal{DG}_\bullet \rightarrow M$ is a function which only depends on dynamical balls.

Local Neighbourhoods of the Root. A first example is the weak convergence of the number of vertices at fixed (space-time) distance from an uniformly chosen root. If $(\mathbf{G}_t, \mathbf{o})_{t \geq 0} \in \mathcal{DG}_\bullet$, denote $\partial \mathbf{G}_t^{[d]}(\mathbf{o})$ (resp. $\partial \mathcal{B}_t^{\mathbf{G}, [d]}(\mathbf{o})$) the set of all vertices at graph distance exactly d at time t in the accumulated graph $(\hat{\mathbf{G}}_t, \mathbf{o})$ (resp. in the graph $(\mathbf{G}_t, \mathbf{o})$).

Proposition 5.1.1. *Let $T \geq 0$ and $d \geq 1$ be fixed time and radius. Let $(\mathbf{G}^n)_{n \geq 1}$ be a sequence of dynamical random graphs on $V_n = \{1, \dots, n\}$. If $(\mathbf{G}^n)_{n \geq 1}$ converges locally weakly in the annealed sense to (\mathbf{G}, \mathbf{o}) , then*

$$\left(\left(|\partial \mathbf{G}_s^{n, [r]}(\mathbf{o}_n)| \right)_{0 \leq s \leq T} \right)_{r=1, \dots, d} \xrightarrow{(\mathcal{L})} \left(\left(|\partial \mathbf{G}_s^{[r]}(\mathbf{o})| \right)_{0 \leq s \leq T} \right)_{r=1, \dots, d},$$

and

$$\left(\left(|\partial \mathcal{B}_s^{\mathbf{G}^n, [r]}(\mathbf{o}_n)| \right)_{0 \leq s \leq T} \right)_{r=1, \dots, d} \xrightarrow{(\mathcal{L})} \left(\left(|\partial \mathcal{B}_s^{\mathbf{G}, [r]}(\mathbf{o})| \right)_{0 \leq s \leq T} \right)_{r=1, \dots, d}.$$

Proof. Consider $M = \mathbb{C}\text{àdlàg}([0, T], \mathbb{N})$ the space of càdlàg functions defined on $[0, T]$ with values in \mathbb{N} endowed with the supremum norm. To prove the proposition, it suffices to show that the functionals $\varphi, \psi : \mathcal{DG}_\bullet \rightarrow M^d$ defined by

$$\varphi((\mathbf{G}_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}) = \left(\left(|\partial \mathbf{G}_t^{[r]}(\mathbf{o})| \right)_{t \geq 0} \right)_{r=1, \dots, d} \quad \text{and} \quad \psi((\mathbf{G}_t, \mathbf{o})_{t \geq 0}) = \left(\left(|\partial \mathcal{B}_t^{\mathbf{G}, [r]}(\mathbf{o})| \right)_{t \geq 0} \right)_{r=1, \dots, d}$$

are continuous. Let $0 < \varepsilon < 1$. Fix $(\mathbf{G}, \mathbf{o}) \in \mathcal{DG}_\bullet$ and note that for $(\mathbf{H}, \rho) \in \mathcal{DG}_\bullet$,

$$D_\bullet((\mathbf{G}, \mathbf{o}), (\mathbf{H}, \rho)) \geq \frac{2^{-\lceil T \rceil}}{1 + \sup \{k \geq 0 : (\mathbf{G}_s^{[k]}, \mathbf{o})_{0 \leq s \leq \lceil T \rceil} \equiv (\mathbf{H}_s^{[k]}, \rho)_{0 \leq s \leq \lceil T \rceil}\}}.$$

Set $\delta = 2^{-\lceil T \rceil} / (d+1)$. This means that if $\mathbf{D}_\bullet((G, \mathbf{o}), (H, \rho)) \leq \delta$, then $(G_s^{[d]}, \mathbf{o})_{0 \leq s \leq \lceil T \rceil} \equiv (H_s^{[d]}, \rho)_{0 \leq s \leq \lceil T \rceil}$. This implies that for all $r = 1, \dots, d$, $|\partial G_t^{[r]}(\mathbf{o})| = |\partial H_t^{[r]}(\rho)|$ and

$$\left| |\partial \mathcal{B}_t^{G, [r]}(\mathbf{o})| - |\partial \mathcal{B}_t^{H, [r]}(\rho)| \right| = 0 < \varepsilon,$$

otherwise the dynamical balls of radius d cannot be isomorphic which concludes the proof. \square

If $(G_t, \mathbf{o})_{t \geq 0} \in \mathcal{DG}_\bullet$, denote $\deg_t^G(\mathbf{o})$ the degree of \mathbf{o} at time t in G_t . As an immediate consequence of the previous proposition and the definition of the GSM PGW (κ, β) , in the particular case where $d = 1$, we get the intuitive convergence of $(\deg_t^{G^{n, \kappa, \beta}}(\mathbf{o}_n))_{t \geq 0}$ to a birth-and-death process. To simplify the statement, we only state the convergence in the homogeneous case, that is when the kernels κ and β are constant (or equivalently when $S = \{1\}$). It can be extend to finite-type graphical kernels.

Corollary 5.1.2. *Suppose $S = \{1\}$, and κ and β be two constants. Then for all finite time $T \geq 0$, the process $(\deg_s^{G^{n, \kappa, \beta}}(\mathbf{o}_n))_{0 \leq s \leq T}$ converges in distribution to the birth-and-death process on $[0, T]$ with parameters $(\kappa\beta, \beta)$ and initial distribution $\text{Poi}(\kappa)$.*

§ 5.2. Beyond Continuous Local Functionals: Metastability of Contact Process on Dynamical Inhomogeneous Random Graphs

We mentioned in Chapter 1 some applications of local weak convergence to the study of the number of spanning trees, of the empirical spectral distribution and of the contact process. All of these properties or process are not “local” in the sense that they depend on the entire graph and not only on the neighbourhoods of some random vertex. In this part, we first give some two other examples of the powerful tool of local convergence to understand asymptotic properties of large finite *static* random graphs. We then show that this is also the case in our dynamical context developed here.

§ 5.2.1. Motivations from “Static” Graphs

Locality of the Giant. One of the very first question studied in the context of random graphs is the appearance of a giant component. See for instance [BJR07] and [Rio12] for the study of a phase transition of the appearance of the giant in inhomogeneous random graph and configuration model respectively. In the recent paper [Hof21], R. van der Hofstad showed that the giant component is *almost local* in the sense that local convergence (in probability), not alone but combined with an additional and simple assumption on the sequence of graphs, suffices to deduce the appearance of a giant component.

In this part we denote the largest component of a given finite graph G by $|\mathcal{C}_{\max}| = \max_{v \in G} |\mathcal{C}(v)|$ with $\mathcal{C}(v)$ the connected component of v in the underlying graph. Considering a sequence $(\mathbf{G}_n)_{n \geq 1}$ of finite random graphs (with n vertices) which converges locally in probability to some limit $(\mathbf{G}, \mathbf{o}) \sim \mu$, it is not difficult to prove that if we write $\zeta := \nu(|\mathcal{C}(\mathbf{o})| = \infty)$ the *survival probability* in (\mathbf{G}, \mathbf{o}) , then

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}_{\max}^n| \leq n(\zeta + \varepsilon)) \longrightarrow 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

This implies in particular that if $\zeta = 0$, then $|\mathcal{C}_{\max}^n|/n \xrightarrow{(\mathbb{P})} 0$, and so a giant component may exist only when $\zeta > 0$. But more than this result on the (non) existence of the giant component, one could naturally

expect that the proportion of vertices in the giant component converges to the *survival probability*, that is

$$\frac{|\mathcal{C}_{\max}^n|}{n} \xrightarrow{(\mathbb{P})} \zeta. \quad (5.2.1)$$

However it is clear that the functional which gives the proportion of vertices in the largest component $|\mathcal{C}_{\max}|$ cannot be continuous in the local convergence topology. Thus as a “global” object, the above convergence (5.2.1) cannot be a simple consequence of local weak convergence of $(\mathbf{G}_n)_{n \geq 1}$.

R. van der Hofstad gave a rather simple criterion in order to get (5.2.1), and also

$$\frac{|\mathcal{C}_{(2)}^n|}{n} \xrightarrow{(\mathbb{P})} 0,$$

where $\mathcal{C}_{(2)}^n$ denote the second largest component. This convergence implies a lot of consequences on the structure properties of giant component. Let us mention for instance two of them.

1. *Number of vertices with fixed degree in the giant.* Assume that the survival probability ζ is positive. Then the rescaled (by n) number of vertices of degree $k \geq 1$ in the largest component \mathcal{C}_{\max} converges in probability to the probability

$$\mu(|\mathcal{C}(\mathbf{o})|, \deg(\mathbf{o}) = k).$$

2. *The giant has a local limit.* Assume again that the survival probability ζ is positive. Then the largest component converges locally to (\mathbf{G}, \mathbf{o}) in the sense that for all distance $d \geq 1$, and all finite rooted graph (H, ρ) we have

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in \mathcal{C}_{\max}} \mathbb{1}_{\{(\mathbf{G}_n^{[d]}, v) \equiv (H, \rho)\}} \xrightarrow{(\mathbb{P})} \mu(|\mathcal{C}(\mathbf{o})| = \infty, (\mathbf{G}^{[d]}, \mathbf{o}) \equiv (H, \rho))$$

and

$$\frac{1}{n} \sum_{v \notin \mathcal{C}_{\max}} \mathbb{1}_{\{(\mathbf{G}_n^{[d]}, v) \equiv (H, \rho)\}} \xrightarrow{(\mathbb{P})} \mu(|\mathcal{C}(\mathbf{o})| < \infty, (\mathbf{G}^{[d]}, \mathbf{o}) \equiv (H, \rho)).$$

For more details on the locality of the giant, we refer to [Hof21] and references therein.

Locality of Recurrence for Random Walks. We finish this part with the reason why I. Benjamini and O. Schramm introduced local weak limit of graphs: the study of the recurrence property of random walk on local weak limit. See [BS01].

On connected finite graphs the simple random walk is obviously recurrent. However recurrence of random walk is a property which depends again on the entire graphs, so that we cannot expect that it passes through the local limit. Indeed it suffices to consider a finite box with increasing size in \mathbb{Z}^d for $d \geq 3$, which converges locally in probability to \mathbb{Z}^d for which the random walk is transient.

But I. Benjamini and O. Schramm showed that for a sequence of uniformly rooted finite random graphs $(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n)$ satisfying the two following conditions:

- (i) the degree of each vertex of \mathbf{G}_n is uniformly bounded by a constant which does not depend on n , that is it exists a finite positive constant M such that

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{v \in \mathbf{G}_n} \deg(v) < M,$$

(ii) the random graphs $(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n)$ are *a.s.* planar, *i.e.* they can be embedded in the plane in such a way the edges do not cross,

if $(\mathbf{G}_n, \mathbf{o}_n)$ converges locally weakly to some limiting random graph (\mathbf{G}, \mathbf{o}) , then (\mathbf{G}, \mathbf{o}) is *a.s.* recurrent.

Remark 5.2.1. The preceding example shows that the planar hypothesis is necessary. ◇

More recently, in the case where the degree of the root \mathbf{o} in the limiting graph (\mathbf{G}, \mathbf{o}) has an exponential tail, O. Gurel-Gurevich and A. Nachmias [GGN13] proved the same result without the uniform bounded degrees assumption. As a consequence of that they showed that the *Uniform Infinite Planar Triangulation* (resp. *Quadrangulation*⁵³) are *a.s.* recurrent.

This question, that leaves the works of this thesis, may also be interesting to investigate in the context of local weak limit of dynamical graph developed here.

Open Question

Does recurrence property “pass through” the local weak limit of dynamical graphs ?

§ 5.2.2. Metastability of Contact Process on Dynamical Inhomogeneous Random Graphs

We describe now an application of the theory of local convergence for dynamical graphs exposed in Chapter 3 to the study of contact process which is a popular model of spread of an infection in a population. Recall that the contact process is a Markov process whose dynamic is the following. Every infected vertex infects each of its neighbours with rate λ , called the *infection rate*, and becomes healthy with rate 1. In the same way as percolation, the configuration of the graph at a time t can be interpreted as an element of $\{0, 1\}^V$ where state 0 means that the corresponding vertex is healthy, and 1 that is infected.

In a recent work [JLM22], the authors consider the contact process on a dynamical inhomogeneous random graph. Their graph model fits our settings when we take the mark space to be $S = [0, 1]$, $x_i^{(n)} = i/n$, with connection kernel to be either of the following kernels:

- the *factor kernel* $\kappa(x, y) = \alpha x^{-\gamma} y^{-\gamma}$,
- the *preferential attachment kernel* $\kappa(x, y) = \alpha (x \wedge y)^{-\gamma} (x \vee y)^{\gamma-1}$,
- the *strong kernel* $\kappa(x, y) = \alpha (x \wedge y)^{-\gamma}$,
- the *weak kernel* $\kappa(x, y) = \alpha (x \vee y)^{-\gamma-1}$,

and updating kernel

$$\beta(x, y) = b (x^{-\gamma\eta} + y^{-\gamma\eta}),$$

where $\alpha > 0$, $b > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ and $\eta \in \mathbb{R}$ are various parameters of the model. Applying Theorem 4.3.1, we directly obtain that their randomly rooted graphs converge locally in probability to the corresponding $\text{GSMPGW}(\kappa, \beta)$.

On top of this graph dynamics, the authors consider the contact process. It is easily seen that on finite graphs, the infection will become extinct in finite time, however they could obtain the following

⁵³See [AS03, Kri06] for formal definitions of these limiting graphs and proofs of local convergence.

metastability result, in some regime of the parameters γ and η , that we can simply call *slow extinction regime*: writing $I_n(t)$ for the expected proportion of infected vertices at time t in the contact process run on the dynamical graph with initially all vertex infected, there exists some $\varepsilon > 0$ such that:

1. For every sequence t_n going to infinity slower than $e^{\varepsilon n}$, we have

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_n(t_n) > 0.$$

2. For every sequences (s_n) and (t_n) both going to infinity slower than $e^{\varepsilon n}$, we have

$$I_n(s_n) - I_n(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Property 1. is a result of slow extinction or exponential survival while property 2. can be considered as a result of “weak metastability” in the sens that the mean infection rate stays almost constant during a large time interval.

The function I_n is actually nonincreasing, so in particular whenever $1 \ll s_n \ll t_n \leq e^{\varepsilon n}$, the function I_n is approximately constant on the whole time-interval $[s_n, t_n]$ and takes a value far from 0. However, they could not show how this value depends on n , and in particular, defining the lower metastable density to be $\rho^-(\lambda) = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n(t_n)$ and the upper metastable density to be $\rho^+(\lambda) = \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n(t_n)$, they could not prove that $\rho^+(\lambda) = \rho^-(\lambda)$. This identity is however a simple consequence of our local convergence result, as we now explain.

Theorem 5.2.2 (Metastability of the contact process). *Write $\theta(\lambda)$ for the probability that the contact process with infection rate λ survives on the GSM PGW(κ, β), starting from only the root infected. Then, in the slow extinction regime, we have*

$$\rho^+(\lambda) = \rho^-(\lambda) = \theta(\lambda) > 0.$$

Actually, the slow extinction regime is the regime where [JLM22] can prove that there is slow extinction (namely the mean extinction time is exponential in the number of vertices) whatever the value of $\lambda > 0$, which implies in particular $\rho^-(\lambda) > 0$. Although we do not prove this, it is natural to conjecture that the link between metastability and $\theta(\lambda) > 0$ holds more generally.

Conjecture 5.2.3 (Local survival is equivalent to metastability). *We have $\theta(\lambda) > 0$ precisely when there is slow extinction of the contact process, and in that case there is metastability, with metastable density $\theta(\lambda)$.*

Let us remark that the functional $h : \mathcal{DG}_\bullet \rightarrow [0, 1]$ which associates to a dynamical graph the probability that the contact process survives forever is obviously not continuous.

Proof of Theorem 5.2.2. Using the duality property of the contact process and of the dynamical inhomogeneous graph, we can rewrite $I_n(t)$ as

$$I_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{v \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{P}_v(\text{Infection has not been extinct by time } t),$$

where \mathbb{P}_v stands for the contact process starting from only v infected. Looking again at the proof of metastability by [JLM22], the authors actually prove that for every small error $r > 0$, there exists $t > 0$ such that uniformly in large n , we have $I_n(t_n) - I_n(t) \leq r$. Therefore, it suffices to prove the convergence

of $I_n(t)$ when $n \rightarrow \infty$ for fixed t to obtain the claimed result. To this end, simply consider the functional $h_t : \mathcal{DG}_\bullet \rightarrow [0, 1]$, which to a given dynamical graph, associates the probability that a contact process started from only the root infected, survives in this dynamical graph up to time t . The functional h_t is clearly continuous. Hence we obtain

$$I_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[h_t(\text{GSMPGW}(\kappa, \beta))], \quad (5.2.2)$$

and subsequently $\rho^+(\lambda) = \rho^-(\lambda)$ as claimed. We can further write it as simply $\rho(\lambda)$ and call it the *metastable density*. Furthermore, using that the graphs converge *locally in probability* and not only *locally weakly*, we can strengthen (5.2.2) by conditioning on the evolution of the dynamical graph (but not of the contact process run on this graph) and obtain the convergence in probability of the corresponding random variables. Finally, we have

$$\rho(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h_t(\text{GSMPGW}(\kappa, \beta))] = \mathbb{E}[h(\text{GSMPGW}(\kappa, \beta))],$$

where we recall that h is the probability that the contact process on the dynamical graph survives for all times $t \in \mathbb{R}_+$. \square

Finally, we mention [JLM19], where the authors study the contact process on vertex-updating inhomogeneous random graphs. We then obtain similarly the following strengthening of their results:

Theorem 5.2.4. *Suppose the contact process with infection rate $\lambda > 0$ survives with positive probability on the VGSMPEGW(κ, β), starting from only the root infected. Then this probability is also the metastable density of the contact process on the vertex-updating inhomogeneous random graphs with kernels κ and β .*

§ 5.3. Unimodularity

In this part, we discuss briefly a notion of unimodularity which is similar to the usual notion. We stress the reader again that we have not investigated this notion so far, and thus this part has to be understood as an introduction in this dynamical context.

Dynamical Doubly Rooted Graphs. Similarly to the space \mathcal{DG}_\bullet , we first define $\mathcal{DG}_{\bullet\bullet}$ the space of isomorphism classes of connected dynamical *doubly* rooted locally finite graphs with nondecreasing vertex set $(G_t, \mathfrak{o}, \rho)_{t \geq 0}$.

A **dynamical doubly rooted graph** is a process of doubly rooted graphs $(G_t, \mathfrak{o}, \rho)_{t \geq 0} = ((V_t, E_t), \mathfrak{o}, \rho)_{t \geq 0}$ depending on time, where the set of vertices V_t always contains the two specific vertices \mathfrak{o} and ρ called the roots, and is included in a vertex set V . We further assume the graphs has nondecreasing vertex set and is locally finite in the sense of dynamical graphs. We denote again (G, \mathfrak{o}, ρ) for the dynamical doubly rooted graphs $(G_t, \mathfrak{o}, \rho)_{t \geq 0}$. We are also interested in connected dynamical doubly rooted graphs (G, \mathfrak{o}, ρ) , that are graphs in which \mathfrak{o} and ρ are connected at time 0, and for all $t \geq 0$ and v in V_t , either $\vec{d}_t(\mathfrak{o}, v) < +\infty$ or $\vec{d}_t(\rho, v) < +\infty$. See Figure 5.1. Two dynamical doubly rooted graph $(G_t^1, \mathfrak{o}_1, \rho_1)_{t \geq 0}$ and $(G_t^2, \mathfrak{o}_2, \rho_2)_{t \geq 0}$ are isomorphic, and we also write $(G^1, \mathfrak{o}_1, \rho_1) \equiv (G^2, \mathfrak{o}_2, \rho_2)$, if there exists a bijective map $\gamma : V_\infty(G^1) \rightarrow V_\infty(G^2)$ sending \mathfrak{o}_1 to \mathfrak{o}_2 and ρ_1 to ρ_2 and preserves the dynamic of edges. We then endow $\mathcal{DG}_{\bullet\bullet}$ with a local topology *w.r.t.* $(G^{[d]}, \mathfrak{o}, \rho)$ the dynamical balls of radius $d \geq 0$ given by the

dynamical doubly rooted graphs made by all vertices at space-time distance less than d from either o or ρ . Following Section 3.1, we may introduce a local distance which metrize the local topology of dynamical doubly rooted local convergence and turn out this space complete.

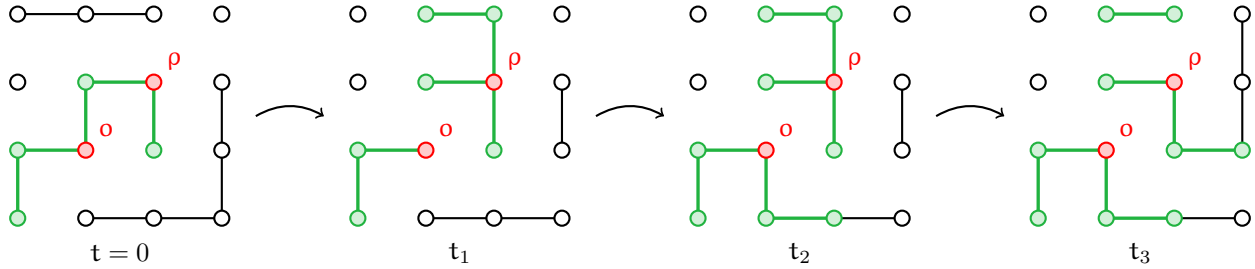


Figure 5.1 – Illustration of the evolution of the ball of radius 2 of a dynamical doubly rooted graph.

Masse-Transport Principle. A Borel function $f : \mathcal{DG}_{\bullet\bullet} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is called a **transport function**.

Definition 5.3.1. A dynamical random rooted graph $(G_t, o)_{t \geq 0}$ is **unimodular** if it obeys the **Mass-Transport Principle**, i.e. for all Borel function $f : \mathcal{DG}_{\bullet\bullet} \rightarrow [0, \infty]$, we have

$$\mathbb{E} \left[\sum_{v \in V_\infty(G)} f((G_t, o, v)_{t \geq 0}) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{v \in V_\infty(G)} f((G_t, v, o)_{t \geq 0}) \right].$$

◆

In the case of finite dynamical graphs, the notion of unimodularity coincide with uniform rooting.

Proposition 5.3.2. *A finite dynamical rooted random graph $(G_t, o)_{t \geq 0}$ is uniformly rooted if and only if it is unimodular.*

Again as in the static case, all local weak limits of dynamical are unimodular.

Theorem 5.3.3 (Local weak limits are unimodular). *Let $(G^n)_{n \geq 1}$ be a sequence of finite random dynamical graphs which converges locally weakly toward $(G_t, o)_{t \geq 0}$. Then $(G_t, o)_{t \geq 0}$ is unimodular.*

The proofs of these two results are careful rereading of those in the static case, we skip them and refer to [Cur21].

At this stage, we do not know how this notion may be deeply connected to other fields of random graphs. However we may expect that unimodularity for dynamical graphs is related with for instance random walks or percolation as it is explained in [AL07] or [Cur21].

A | Appendix of Part II

Coupling of Markov Processes

...in which we recall the definition of continuous time Markov processes defined on countable state space. We then give our coupling result used in the proof of Theorem 4.3.4.

In this part E is a countable state space. Recall that a stochastic process $X = (X_t)_{t \geq 0}$ on E is a Markov process with transition rates $(\tau_{e,f})_{e \neq f \in E}$ and initial distribution μ , if conditional on $X_0 = e$, the jump chain $(Y_n)_{n \geq 1}$ of X is discrete-time Markov chain, and for each $n \geq 1$, conditional on Y_0, \dots, Y_{n-1} the holding times S_1, \dots, S_n are independent exponential random variables of parameters $\tau_{Y_0}, \dots, \tau_{Y_{n-1}}$ respectively, where we recall that $\tau_e = \sum_{f \neq e} \tau_{e,f}$.

There is a convenient way to construct Markov processes on countable state space in terms of PPPs, which we now briefly explain. Let X be a continuous time Markov process on E with initial distribution μ . Define a family $(\Pi_{e,f})_{e \neq f \in E}$ of independent PPPs with $\{\Pi_{e,f}(t), t \geq 0\}$ having rate $\tau_{e,f}$ which describes the jumping times from state e to f . Define now the stochastic process \tilde{X} as follows: \tilde{X}_0 has distribution μ , and if $t \in \Pi_{e,f}$, we then set

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} f & \text{if } \tilde{X}_{t-} = e \\ \tilde{X}_{t-} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

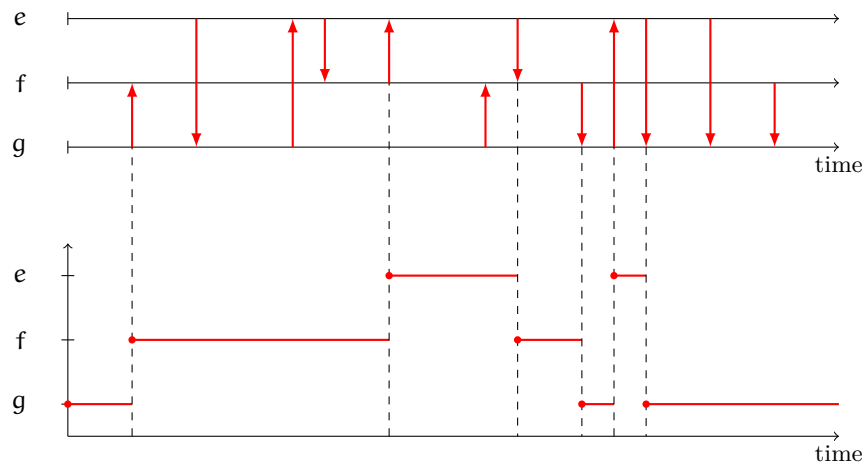


Figure A.1 – Graphical representation of a Markov process evolving on three states. On the top: Transition times given by PPPs. On the bottom: Markov process starting from g evolving according to the Poisson description.

This *graphical representation* described above is a very useful tool in order to construct convenient coupling as we explained in the next section.

§ A.1. Coupling of Markov Processes

Coupling of random variables is a very useful tool in probability theory in order to show convergence in distribution, as to prove convergence of binomial to Poisson distribution for instance, or to construct random variables with some explicit properties, such as stochastic domination, as well.

Definition A.1.1. The random variables $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ are a **coupling** of the random variables X_1, \dots, X_n when $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ are defined on the same probability space, and are such that the marginal distribution of \tilde{X}_k is the same as that of X_k for all $k = 1, \dots, n$, *i.e.* for all measurable subset A ,

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_k \in A) = \mathbb{P}(X_k \in A).$$

◆

In the context of Markov processes, the next lemma shows that if X and Y are two Markov processes on countable state space with “close” transition rates, then we may couple them so that for all finite time t , they coincide until time t with “high” probability.

Lemma A.1.2 (Coupling of Markov processes). *Let X and Y be two continuous time Markov processes on a countable state space E with transition rates $(\tau_{e,f}^X)_{e,f \in E}$ and $(\tau_{e,f}^Y)_{e,f \in E}$ respectively, started from same state $e_0 \in E$. For $e \in E$, we define*

$$\Delta(e) := \sum_{f \in E, f \neq e} |\tau_{e,f}^X - \tau_{e,f}^Y|.$$

Then there exists a coupling (\tilde{X}, \tilde{Y}) of (X, Y) such that for all time $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\exists s \leq t, \tilde{X}_s \neq \tilde{Y}_s) \leq t \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} \Delta(X_s) \right].$$

Proof. We let Z be a Markov process started from e_0 with transition rates $\tau_{e,f}^Z := \min(\tau_{e,f}^X, \tau_{e,f}^Y)$, and constructed from a graphical representation of independent PPPs $(\Pi_{e,f}^Z)_{e,f \in E}$ with intensities $\tau_{e,f}^Z$. We also let $(\Pi_{e,f}^{Z,X})_{e,f \in E}$ and $(\Pi_{e,f}^{Z,Y})_{e,f \in E}$ be independent families of PPPs with intensities $\tau_{e,f}^X - \tau_{e,f}^Z$ and $\tau_{e,f}^Y - \tau_{e,f}^Z$ respectively. We now define $\Pi_{e,f}^X = \Pi_{e,f}^Z \cup \Pi_{e,f}^{Z,X}$ for $e, f \in E$, and observe these are independent PPPs with intensities $\tau_{e,f}^X$. These can thus be used to construct a Markov process \tilde{X} with same law as X . We similarly construct \tilde{Y} with same law as Y .

We now work conditionally on the process $(Z_s)_{s \geq 0}$, and write $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t$ its jumping times up to time t and e_0, \dots, e_{k-1} its successive states, so that $Z_s = e_i$ for $s_i \leq s < s_{i+1}$. We also let $T := \inf\{s \geq 0, \tilde{X}_s \neq Z_s \text{ or } \tilde{Y}_s \neq Z_s\}$. Letting the conditioning on Z be implicit to enlighten the notation, we have, for $0 \leq i \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq s_{i+1} \mid T > s_i) &= 1 - \mathbb{P} \left(\left(\bigcup_{f \neq e_i} (\Pi_{e_i,f}^{Z,X} \cup \Pi_{e_i,f}^{Z,Y}) \right) \cap [s_i, s_{i+1}[= \emptyset \right) \\ &= 1 - \exp \left(- (s_{i+1} - s_i) \Delta(e_i) \right) = 1 - \exp \left(- (s_{i+1} - s_i) \Delta(\tilde{X}_{s_i}) \right) \\ &\leq (s_{i+1} - s_i) \sup_{s \leq t} \Delta(\tilde{X}_s). \end{aligned}$$

Summing over i , we obtain

$$\mathbb{P}(T \leq t \mid Z) \leq t \sup_{s \leq t} \Delta(\tilde{X}_s),$$

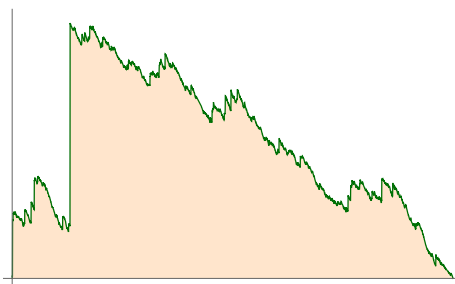
and we conclude by taking the expectation of this inequality.

□

* * *

Principe de Grande pour le α -Stable

Cette partie, consit  e de deux chapitres, est issue d'un travail en collaboration avec Christina Goldschmidt et Grégory Miermont.



6 Large Deviations Principle for α -Stable Lévy Processes without Negative Jumps

...in which we establish a large deviation principle for the normalized excursion and bridges of α -stable Lévy process without negative jumps, with $1 < \alpha < 2$. Based on this, we derive precise asymptotics for the tail distribution of functionals of the normalized excursion and bridge, in particular, the area and maximum functionals. We advocate the use of the Skorokhod $M1$ topology, rather than the more usual $J1$ topology, as we believe it is better suited to large deviation principles for Lévy processes in general.

§ 6.1. Introduction

Fix $\alpha \in (1, 2)$. Let $L = (L_t, t \geq 0)$ be an α -stable Lévy process without negative jumps, having Laplace transform

$$\mathbb{E}[\exp(-\lambda L_t)] = \exp(t\lambda^\alpha), \quad \lambda, t > 0.$$

Our main goal in this paper is to establish a strong large deviation principle for the normalized bridges and excursions of the process L . This contributes to the rich study of functional large deviation principles (LDP) for Lévy processes and related processes, which has its roots in the classical theorem of Cramér and its extension to random walks, see Chapter 5.1 in [DZ98], and references therein. For a Lévy process $(X(t), t \geq 0)$, the natural setting is to consider the family of renormalized processes

$$X_T = (X(Tt)/T, 0 \leq t \leq 1). \quad (6.1.1)$$

The case where X is Brownian motion is addressed by a famous theorem of Schilder [Sch66], who showed a large deviation principle with speed T in the space of continuous functions, where the rate function is the Dirichlet energy. Other Lévy processes are addressed in the landmark paper by Lynch and Sethuraman [LS87], which was extended in various directions in particular by Borovkov, Mogul'skiĭ and others, see for instance [Mog93, BM13b, BM14, Mog17, KM19, KLM20] and references therein. However, the vast majority of the results in the above references assume that the Lévy process has a vanishing Gaussian part, as well as the Cramér condition that $\mathbb{E}[e^{\lambda X(1)}] < \infty$ for every λ in a non-empty neighborhood of 0. These conditions imply that the trajectories of the Lévy process have finite variation almost surely, and that the law of $X(1)$ has exponential tails. Various situations may occur when the Cramér condition does not hold. The references [Gan98, GRR14] consider the case of stretched exponential tails, while [RBZ19] considers the situation where the tail of $X(1)$ is regularly varying. In these cases, large deviation principles hold with sublinear speeds, and even logarithmic speed when the tails are regularly varying.

The case of stable Lévy processes with no negative jumps is in a sense a boundary case of the works mentioned above, due to the asymmetric nature of the tails of L_1 :

$$\mathbb{P}(L_1 > x) \asymp \frac{C_\alpha}{x^\alpha}, \quad \mathbb{P}(L_1 < -x) \asymp \exp(-c_\alpha x^{\alpha'}), \quad x \rightarrow \infty,$$

where $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1) \in (2, \infty)$ is the conjugate exponent of α , $C_\alpha = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ and $c_\alpha = (\alpha - 1)/\alpha^{\alpha'}$. Heuristically, although it is “easy” for the process to go up, it is “costly” for it to go down, and large deviation probabilities may have different speeds depending on whether the events involved allow the process to “go down” or not.

However, considering bridges and excursions of such processes is a way to root them at a given value at time 1, which prevents the process from “going up too much”. This phenomenon is well-known and was already exploited in [ABDJ13, Kor17], in particular in the study of the heights of random trees. However, to our knowledge it has not been used to derive an actual LDP result for stable excursions and bridges, and we fill this gap in the present work. Note that LDPs for bridge-like random walks and Lévy processes were considered under the Cramér condition in [BM13a].

Although we believe our results should have extensions to much larger classes of Lévy process bridges and excursions, we focus here on the particular case of the stable processes. In this case, precise estimates are known for the transition densities and the entrance law of the excursion measure, which allow us to provide a rather straightforward extension of the method of proof presented by Serlet in [Ser97]. However, our proof differs from the latter in a crucial aspect. As is often the case in LDP theory, the choice of an appropriate topology on the path space is an important matter. In [LS87], the authors derived a strong LDP for Lévy processes as in (6.1.1) in a “weak” topology, and observed that the rate function is not good (in the sense that it does not have compact level sets) in the natural Skorokhod J1 topology. In a series of papers, Borovkov and Mogul’skiĭ improved these results by considering local versions of the LDP in the J1 topology, or by working in the completion of the Skorokhod J1 metric. Unsurprisingly, similar questions arise in our context. Indeed, since it is much less costly for the process L to go up rather than to go down, a similar property also holds for its bridges and excursions, and this implies that in the large deviation regimes considered in this paper (and in stark contrast with [RBZ19]), we cannot distinguish between the situation where the process performs one big jump, or two jumps of half the size at extremely nearby locations, precluding exponential tightness in the J1 topology.

Fortunately, Skorokhod introduced three other possible topologies, called M1, J2 and M2, on spaces of càdlàg functions, and M1 will turn out to suit our purposes, with a very minor adaptation. This will allow us to introduce a distance function dist that induces a slight variant of the M1 topology and makes $(\text{Càdlàg}[0, 1], \text{dist})$ a Polish space in which a strong LDP holds for the excursion and bridge of the process L . We note that Mogul’skiĭ and others [BM14, Mog17] also considered the weaker M2 topology, but in the context of processes satisfying the Cramér condition. The M1 topology was also used by O’Brien [O’B99] to prove LDPs for the processes $(L \vee 1)^\varepsilon$ as $\varepsilon \downarrow 0$, but these large deviations regimes are very different from the one considered here.

§ 6.1.1. Main Results

Let $e = (e_t, 0 \leq t \leq 1)$ be the normalized excursion of L above its past infimum [Cha97], and let $\mathfrak{b}^{(x)} = (\mathfrak{b}_t^{(x)}, 0 \leq t \leq 1)$ be the bridge of L from 0 to $x \in \mathbb{R}$ with unit duration. We set $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{(0)}$. These processes satisfy a.s. $e_0 = e_1 = \mathfrak{b}_0^{(x)} = 0$, $\mathfrak{b}_1^{(x)} = x$, and $e_t > 0$ for every $t \in (0, 1)$. We view e and $\mathfrak{b}^{(x)}$ as random variables in the space $\text{Càdlàg}[0, 1]$ of “càdlàg” functions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, that is, functions which are right-continuous at every point $t \in [0, 1]$ and have left-limits at every point $t \in (0, 1)$. We denote by $f(t+) = f(t)$ and $f(t-)$ the right- and left-limits of $f \in \text{Càdlàg}[0, 1]$ at t , whenever applicable. We turn $\text{Càdlàg}[0, 1]$ into a measurable space by equipping it with the σ -algebra generated by the evaluation maps

$f \mapsto f(t)$ for $t \in [0, 1]$.

Let us recall the definition of a large deviation principle. If S is a topological space, a *rate function* is a lower semicontinuous function $I : S \rightarrow [0, \infty]$, *i.e.* a function such that the level sets $\mathcal{L}_I(c) = \{x \in S : I(x) \leq c\}$ are closed for every $c \geq 0$. A rate function is called *good* if the sets $\mathcal{L}_I(c)$, $c \geq 0$ are compact.

Definition 6.1.1. Let $\beta > 0$ be fixed. A family $(X_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ of random elements in the space S (endowed with the completed Borel σ -algebra) is said to satisfy the **large deviation principle** (LDP) with speed $\varepsilon^{-\beta}$, and rate function I , if for every Borel set $A \subseteq S$,

$$-\inf_{x \in \overset{\circ}{A}} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A) \leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\beta \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x).$$

We define a rate function in the following way. Assume that $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ has bounded variation, meaning that it can be written as the difference $g - h$ of two non-decreasing functions $g, h \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$. This decomposition is not unique; however, it becomes unique if we further require that $g(0) = 0$ and that the Stieltjes measures dg and dh are mutually singular. This “minimal” decomposition is classically called the *Jordan decomposition* of f , and we write $g = f_\uparrow, h = f_\downarrow$. We denote by $H^{(\alpha)}$ the subspace of $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ of functions f with bounded variation such that f_\downarrow is an absolutely continuous function with derivative $f'_\downarrow \in \mathbb{L}^{\alpha'}[0, 1]$, where $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1) \in (2, \infty)$ is the conjugate exponent of α . Set

$$D_{\text{ex}}[0, 1] := \{f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : f(1) = 0, f \geq 0\}, \quad (6.1.2)$$

(note that we do not impose the usual condition that $f(0) = 0$) and define

$$H_{\text{ex}} = H^{(\alpha)} \cap D_{\text{ex}}[0, 1]. \quad (6.1.3)$$

Let us define the rate function $I_e : \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ by the formula

$$I_e(f) = \begin{cases} c_\alpha \int_0^1 |f'_\downarrow(s)|^{\alpha'} ds & \text{if } f \in H_{\text{ex}}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.1.4)$$

Alternatively, we may define I_e as follows for nonnegative functions f with bounded variation and such that $f(1) = 0$. Write $f = f_{\text{ac}} + f_{\text{sing}}$ as a sum of an absolutely continuous part and a singular part, and let $f_{\text{sing}} = f_{\text{sing}\uparrow} - f_{\text{sing}\downarrow}$ be the Jordan decomposition of f_{sing} . Then we have

$$I_e(f) = c_\alpha \int_0^1 (f'_{\text{ac}}(s))_-^{\alpha'} ds + \infty \cdot f_{\text{sing}\downarrow}(1), \quad (6.1.5)$$

where $(f'_{\text{ac}}(s))_-$ denotes the negative part of $f'_{\text{ac}}(s)$, and we let $I_e(f) = \infty$ if f is not nonnegative, or if f does not satisfy $f(1) = 0$, or if f does not have bounded variation. In this way, we note that the shape of the rate function is exactly that involved in [LS87, Theorem 5.1] (although this theorem does not apply in our context) and the other references mentioned earlier in this introduction.

We defer a discussion of the topology until Section 6.2.2, where we will introduce a distance dist on the set $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$. We can now state our main result.

Theorem 6.1.2 (LDP for the normalized excursion e). *The laws of $(\varepsilon e_t)_{t \in [0, 1]}$ satisfy a LDP in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ as $\varepsilon \downarrow 0$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function I_e .*

We also have the following result, proved in Section 6.6.3.

Proposition 6.1.3. *The rate function $I_{\mathfrak{e}}$ is not a good rate function for the Skorokhod J1 topology. Moreover, the laws of $(\varepsilon_{\mathfrak{e}_t})_{t \in [0,1]}$ are not exponentially tight in $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$ endowed with the Skorokhod J1 topology.*

Recall that in a Polish space, an LDP with a good rate function implies exponential tightness (see [LS87, Lemma 2.6] or [EG99]). However, since the rate function $I_{\mathfrak{e}}$ is not good, this does not rule out the possibility that $\varepsilon_{\mathfrak{e}}$ satisfies the LDP in the J1 topology, and we do not know whether this property holds or not. Note that this problem has been the topic of several references dealing with random walks and Lévy processes under the Cramér condition, including [LS87, Mog93, BM13b], and at present there is no complete answer to this question in that context either. However, we believe that the M1 topology is a more natural choice in this context, since it is arguably a strong topology for which the rate functions are better behaved.

Theorem 6.1.2 allows us to deduce general LDPs for functionals of the normalized stable excursion. This extends the results of [FJ09] dealing with Brownian excursions to the case of stable excursions, and was the initial motivation for the present work. Define the sets

$$\mathbb{K}^{(\alpha)} = \{f \in H^{(\alpha)} : \|f\|_{\alpha'} \leq 1\}, \quad \mathbb{K}_{\text{ex}} = \mathbb{K}^{(\alpha)} \cap \mathbb{D}_{\text{ex}}[0,1]. \quad (6.1.6)$$

It will be shown in Lemma 6.6.1 below that \mathbb{K}_{ex} is a compact subset of $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1], \text{dist})$. This will imply, using the contraction principle, the following logarithmic asymptotics for the right tails of functionals of \mathfrak{e} .

Theorem 6.1.4 (Logarithmic asymptotics for the right tails of functionals of \mathfrak{e}). *Let Φ be a continuous nonnegative functional $\mathbb{D}_{\text{ex}}[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ which is also positive-homogeneous in the sense that $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ for every $f \in \mathbb{D}_{\text{ex}}[0,1]$ and $\lambda \geq 0$, and not identically 0 on \mathbb{K}_{ex} . Define $X = \Phi(\mathfrak{e})$ and let*

$$\gamma_{\Phi} := \max \{ \Phi(f) : f \in \mathbb{K}_{\text{ex}} \}.$$

Then $\varepsilon \Phi(\mathfrak{e})$ satisfies a LDP in \mathbb{R}_+ as $\varepsilon \downarrow 0$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function $J_{\Phi}^{\mathfrak{e}}(x) = c_{\alpha} \left(\frac{x}{\gamma_{\Phi}} \right)^{\alpha'}$. In particular,

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim c_{\alpha} \left(\frac{x}{\gamma_{\Phi}} \right)^{\alpha'} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty. \quad (6.1.7)$$

Using [JC04, Theorem 4.5], we have that (6.1.7) implies the following asymptotics for the Laplace transform and the moments:

$$\log \mathbb{E} [e^{tX}] \sim (\gamma_{\Phi} t)^{\alpha} \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \quad (6.1.8)$$

$$\mathbb{E} [X^n]^{1/n} \sim \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_{\Phi} \left(\frac{n}{e} \right)^{1/\alpha'} \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (6.1.9)$$

Taking as a particular case the functions $\Phi(f) = \int_0^1 f(s) ds$ and $\Phi(f) = \sup_{s \in [0,1]} f(s)$, we obtain the following result, which improves [Pro21, Corollary 1.2] by pinning down the precise constants.

Corollary 6.1.5 (Logarithmic asymptotics for the right tails of the area under \mathfrak{e}). *Set*

$$\mathcal{A}_{\text{ex}} = \int_0^1 \mathfrak{e}_t dt.$$

Then it holds that

$$-\log \mathbb{P}(\mathcal{A}_{\text{ex}} > x) \sim c_\alpha (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} x^{\alpha'} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty, \quad (6.1.10)$$

$$\log \mathbb{E} [e^{t\mathcal{A}_{\text{ex}}}] \sim \frac{t^\alpha}{\alpha + 1} \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \quad (6.1.11)$$

$$\mathbb{E} [\mathcal{A}_{\text{ex}}^n]^{1/n} \sim \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{n}{e} \right)^{1/\alpha'} \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (6.1.12)$$

Corollary 6.1.6 (Logarithmic asymptotics for the right tails of the supremum of \mathfrak{e}). *It holds that*

$$-\log \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathfrak{e}_t > x \right) \sim c_\alpha x^{\alpha'} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty, \quad (6.1.13)$$

$$\log \mathbb{E} [e^{t \sup_{0 \leq s \leq 1} \mathfrak{e}_s}] \sim t^\alpha \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \quad (6.1.14)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathfrak{e}_t \right)^n \right]^{1/n} \sim \alpha^{1/\alpha} \left(\frac{n}{e} \right)^{1/\alpha'} \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (6.1.15)$$

§ 6.1.2. Large Deviation Principles for Bridges

Theorems 6.1.2 and 6.1.4 have counterparts for bridges of the Lévy process L . For $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, we let

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{br}}^{(\mathbf{a})}[0, 1] &:= \{f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : f(1) = \mathbf{a}\}, \\ \mathbf{H}_{\text{br}}^{(\mathbf{a})} &:= \mathbf{H}^{(\alpha)} \cap \mathbf{D}_{\text{br}}^{(\mathbf{a})}[0, 1]. \end{aligned}$$

We may now state the main results concerning the stable Lévy bridge. In this statement and the rest of the paper, for $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, we let $\mathbf{a}_- = \mathbf{a} \vee 0$ and $\mathbf{a}_+ = (-\mathbf{a})_+$ be the positive and negative parts of \mathbf{a} .

Theorem 6.1.7 (LDP for the stable bridge $\mathfrak{b}^{(\mathbf{a})}$). *Let $(\mathbf{a}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ be such that $\varepsilon \mathbf{a}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{a}$ as $\varepsilon \downarrow 0$. Then the laws of $(\varepsilon \mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})_{t \in [0, 1]}$ satisfy a LDP in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ as $\varepsilon \downarrow 0$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function $\mathbf{I}_{\mathfrak{b}, \mathbf{a}}$ defined by*

$$\mathbf{I}_{\mathfrak{b}, \mathbf{a}}(f) = \begin{cases} c_\alpha \left(\int_0^1 |f'_\downarrow(s)|^{\alpha'} ds - (\mathbf{a}_-)^{\alpha'} \right) & \text{if } f \in \mathbf{H}_{\text{br}}^{(\mathbf{a})}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.1.16)$$

We obtain an analogue of Theorem 6.1.4 for bridges. Let

$$\mathbf{K}_{\text{br}} := \mathbf{K}^{(\alpha)} \cap \mathbf{D}_{\text{br}}^{(0)}[0, 1].$$

Again, \mathbf{K}_{br} is a compact subset of $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$, and the following logarithmic asymptotics hold for the right tails of functionals of \mathfrak{b} .

Theorem 6.1.8 (Logarithmic asymptotics for the right tails of functionals of \mathfrak{b}). *Let Φ be a continuous nonnegative functional $\mathbf{D}_{\text{br}}^{(0)}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ which is also positive-homogeneous in the sense that $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ for every $f \in \mathbf{D}_{\text{br}}^{(0)}[0, 1]$ and $\lambda \geq 0$, and not identically 0 on \mathbf{K}_{br} . Define $X = \Phi(\mathfrak{b})$ and let*

$$\gamma_\Phi := \max\{\Phi(f) : f \in \mathbf{K}_{\text{br}}\}.$$

Then $\varepsilon \Phi(\mathfrak{b})$ satisfies a LDP in \mathbb{R}_+ as $\varepsilon \downarrow 0$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function $\mathbf{J}_\Phi^{\mathfrak{b}}(x) = c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'}$. In particular,

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty.$$

As an application, using the same proof as for Corollary 6.1.6, we may reprove an exact logarithmic asymptotic for the right tails of the supremum of the stable Lévy bridge obtained by Kortchemski in [Kor17, Corollary 13].

Corollary 6.1.9 ([Kor17, Corollary 13]). *We have*

$$-\log \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \mathfrak{b}_t > x \right) \sim c_\alpha x^{\alpha'}.$$

§ 6.1.3. Outline of the Proofs and Organization of the Paper

The proofs for excursions and bridges are very much alike, but some extra technicalities arise for excursions, so we focus mostly on this case, and deal with bridges in Section 6.7. Section 6.2 will recall the basics of stable processes, bridges and excursions, as well as the results on the M1 topology that will be needed in this paper.

In order to prove Theorem 6.1.2, we first establish the LDP for the finite-dimensional marginals of εe (Proposition 6.3.1). This relies on the explicit form of the finite-dimensional marginals of the stable excursion in terms of stable densities and related quantities, which is recalled in Section 6.2.1. The key input is the following estimate for stable densities $p_t(x) = \mathbb{P}(L_t \in dx) / dx$, [Sat99, Equation (14.35)],

$$\begin{cases} p_1(x) = C_\alpha x^{-\alpha-1} (1 + O(x^{-\alpha})) & \text{as } x \rightarrow +\infty \\ p_1(-x) = c''_\alpha x^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}} \exp(-c_\alpha x^{\alpha'}) (1 + O(x^{-\alpha'})) & \text{as } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (6.1.17)$$

The asymmetry of these two asymptotic behaviors will play a key role. This will imply that εe satisfies a large deviation principle for the weak topology on $\text{Càdlàg}[0, 1]$ of pointwise convergence at continuity points of the limit. This result is proved in Section 6.5, which is also devoted to the identification of the rate function. In order to prove an LDP in $(\text{Càdlàg}[0, 1], \text{dist})$, we show that the laws of $(\varepsilon e, \varepsilon \in (0, 1))$ are exponentially tight in this space. This relies on a Kolmogorov-type criterion which we prove in Section 6.2.2, and apply to our present context is Section 6.4. Finally, Theorem 6.1.4 is proved in Section 6.6.1 using the ideas of Fill and Janson [FJ09], who treated the Brownian case.

Acknowledgement

Thanks are due to Loïc Chaumont for an interesting conversation around stable excursions.

§ 6.2. Preliminaries

§ 6.2.1. Excursions and Bridges of Spectrally Positive Stable Lévy Processes

We begin by recalling the definitions for the stable excursions and bridges, for which we mainly refer to [Cha97]. We denote by \mathbb{P}_x the law under which the canonical càdlàg process $(L_t, t \geq 0)$ is a spectrally positive Lévy process with exponent α , started from x , and we set $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0$. We let $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ be the natural

filtration. We denote by $(p_t)_{t \geq 0}$ the continuous transition semigroup density of L under \mathbb{P}_x , for which we recall the scaling property

$$p_t(x) = t^{-1/\alpha} p_1(t^{-1/\alpha} x).$$

Let \mathcal{E} be the excursion space, which is defined by

$$\mathcal{E} = \{ \omega \in \text{Càdlàg}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) : \omega(0) = 0 \text{ and } \zeta(\omega) = \sup\{t > 0, \omega(t) > 0\} \in (0, \infty) \}.$$

Denote by \underline{n} the Itô measure of L above its past infimum. The σ -finite “law” of the lifetime under \underline{n} has been calculated by Monrad and Silverstein (see [MS79, Lemma 3.2])

$$\underline{n}(t < \zeta) = \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})^{-1} t^{-1/\alpha}.$$

For $\lambda > 0$, we define the scaling operator $S^{(\lambda)}$ on \mathcal{E} by

$$S^{(\lambda)}(\omega) = (\lambda^{1/\alpha} \omega_{t/\lambda}, t \geq 0).$$

Then there exists a unique collection of probability measures $(\underline{n}^{(t)}, t > 0)$ on \mathcal{E} such that

- (i) for every $t > 0$, $\underline{n}^{(t)}(\zeta = t) = 1$;
- (ii) for every $\lambda > 0$ and $t > 0$, we have $S^{(\lambda)}(\underline{n}^{(t)}) = \underline{n}^{(\lambda t)}$; and
- (iii) for every measurable subset A of \mathcal{E} ,

$$\underline{n}(A) = \int_0^\infty \frac{ds}{\alpha \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) s^{1 + \frac{1}{\alpha}}} \underline{n}^{(s)}(A).$$

The probability distribution $\underline{n}^{(1)}$ on càdlàg paths with unit lifetime is called the law of the normalized excursion of L .

We denote by $\mathbb{P}_x^{(0, \infty)}$ the law of the process (L, \mathbb{P}_x) , $x > 0$, killed when it leaves $[0, \infty)$, so that

$$\mathbb{P}_x^{(0, \infty)}(A, t < \zeta) := \mathbb{P}(A, t < \tau_{(-\infty, 0)}), \quad t \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}_t.$$

We denote by $(p_t^{(0, \infty)}(x, \cdot))_{t \geq 0}$ the transition semigroup under $\mathbb{P}_x^{(0, \infty)}$. The measure \underline{n} is Markovian with semigroup $(p_t^{(0, \infty)}(x, \cdot))_{t \geq 0}$ under \mathbb{P}_x , which means that if F is measurable and nonnegative, and $\theta_t f = f(t + \cdot)$ is the shift operator, then

$$\underline{n}(\mathbb{1}_A F \circ \theta_t \mathbb{1}_{\{t < \zeta\}}) = \underline{n}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{L_t}^{(0, \infty)}[F] \mathbb{1}_{\{t < \zeta\}}), \quad t \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}_t. \quad (6.2.1)$$

We denote by $(q_x(t))_{t \geq 0}$ the density of the first hitting time of 0 under $\mathbb{P}_x^{(0, \infty)}$. Thanks to the absence of negative jumps, the density $(q_x(t))_{t \geq 0}$ can be related to the law of L through the relation (see for instance [Ber96, Corollary VII.3])

$$q_x(t) = \frac{x}{t} p_t(-x).$$

Hence it satisfies the following scaling property

$$q_x(t) = x^{-\alpha} q_1(x^{-\alpha} t).$$

Let $(j_t)_{t \geq 0}$ the density of the entrance law under the measure \underline{n} , defined by the fact that, for every $t > 0$,

$$\underline{n}(f(L_t) \mathbb{1}_{\{t < \zeta\}}) = \int_0^\infty f(x) j_t(x) dx,$$

where f is an arbitrary bounded and Borel function. Recall that for all $t > 0$, j_t is an integrable function in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, and we may choose it so that it satisfies the following scaling property

$$j_t(x) = t^{-2/\alpha} j_1(t^{-1/\alpha} x) \quad (6.2.2)$$

(see [MS79, Lemma 3.2]). Combining the above expressions, we may show that the law of the normalized excursion has a density *w.r.t.* the Lebesgue measure. If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ and $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ are two measurable nonnegative functions, we then have

$$\begin{aligned} \underline{n}(f(L_t)g(\zeta)\mathbb{1}_{\{t < \zeta\}}) &= \int_t^\infty ds g(s) \int_{\mathbb{R}} f(x) j_t(x) q_x(s-t) dx \\ &= \int_t^\infty \frac{g(s)}{\alpha \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) s^{1 + \frac{1}{\alpha}}} \underline{n}^{(s)}(f(L_t)) ds. \end{aligned}$$

This implies that for all $s > 0$,

$$\underline{n}^{(s)}(f(L_t)) = \alpha \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\mathbb{R}_+} f(x) j_t(x) q_x(s-t) dx.$$

In particular, when $s = 1$ the law of the normalized excursion is then

$$\underline{n}^{(1)}(f(L_t)) = \alpha \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\mathbb{R}_+} f(x) j_t(x) q_x(1-t) dx.$$

Using similar argument and using the Markov property, we can compute

$$\underline{n}^{(1)}(f(L_{t_1}, \dots, L_{t_n})) = \alpha \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\mathbb{R}_+^n} j_{t_1}(x_1) \prod_{i=1}^{n-1} p_{t_{i+1}-t_i}^{(0, \infty)}(x_i, x_{i+1}) q_{x_n}(1-t_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (6.2.3)$$

This gives the finite-dimensional marginal laws for the excursion process e , so that the left hand-side of the preceding equation can also be written as $\mathbb{E}[f(e_{t_1}, \dots, e_{t_n})]$. In particular, for every $t \in (0, 1)$, the law of $(e_{t+s}, 0 \leq s \leq 1-t)$ can be obtained from the following formula, valid for every non-negative measurable F :

$$\mathbb{E}[F(e_{t+s}, 0 \leq s \leq 1-t)] = \alpha \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\mathbb{R}_+} j_t(x) q_x(1-t) \mathbb{E}_x^{1-t}[F(L)], \quad (6.2.4)$$

where \mathbb{E}_x^δ is the law of the first-passage bridge of duration $\delta > 0$ started from $x > 0$. The latter is defined by absolute continuity for every $\delta' > 0$ and $\mathcal{F}_{\delta'}$ -measurable $F \geq 0$ by the formula

$$\mathbb{E}_x^\delta[F] = \mathbb{E}_x \left[F \mathbb{1}_{\{\tau_0 > \delta'\}} \frac{q_{L_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta)} \right]. \quad (6.2.5)$$

In a similar but simpler way, the law of the bridge $b^{(a)}$ has finite-dimensional marginal laws given by

$$\mathbb{E} \left[f(b_{t_1}^{(a)}, \dots, b_{t_n}^{(a)}) \right] = \frac{1}{p_1(a)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^n p_{t_{i+1}-t_i}(x_{i+1} - x_i) dx_1 \cdots dx_n, \quad (6.2.6)$$

where $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < 1 = t_{n+1}$, and where by convention we let $x_0 = 0$ and $x_{n+1} = a$ in the above integral.

§ 6.2.2. Basic Results on the Skorokhod M1 Topology

In this section, we introduce the distance dist on $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ and study some of its key properties.

By convention, for $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$, we let $f(0-) = 0$, which is a way to “root” the function f at 0: by contrast, we adopt the convention $f(1+) = f(1)$.

For two real numbers $x, y \in \mathbb{R}$, the real interval $[x \wedge y, x \vee y]$ will more simply be denoted by $[x, y]$, even when $x > y$.

The Space ($\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist}$). For $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$, we define the *augmented graph* of f *rooted at 0*, to be the set

$$\Gamma_0(f) = \{(t, x) : t \in [0, 1], x \in [f(t-), f(t)]\} \subset [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Note in particular that $\Gamma_0(f)$ contains the segments $\{0\} \times [0, f(0)]$ and $\{1\} \times [f(1-), f(1)]$. For $(t, x), (u, y) \in \Gamma_0(f)$, we write $(t, x) \preceq (u, y)$ if $t < u$ or if $t = u$ and $|x - f(t-)| \leq |y - f(t-)|$. This defines a total order on $\Gamma_0(f)$. We say that a function $r \in [0, 1] \mapsto (t(r), x(r))$ is a *parametric representation* of $\Gamma_0(f)$ if it is an increasing bijection from $([0, 1], \leq)$ to $(\Gamma_0(f), \preceq)$, and we write $\Pi(f)$ for the set of all parametric representations of $\Gamma_0(f)$. For $f_1, f_2 \in \mathbb{D}[0, 1]$, we let

$$\text{dist}(f_1, f_2) = \inf \left\{ \sup_{r \in [0, 1]} |t_1(r) - t_2(r)| \vee |x_1(r) - x_2(r)| : (t_1, x_1) \in \Pi(f_1), (t_2, x_2) \in \Pi(f_2) \right\}.$$

This indeed defines a distance function that makes $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ a Polish space⁵⁴. We refer to [Whi02, Theorems 12.3.1 and 12.8.1] with the slight modification that the convention taken in this and other classical references is that $f(0-) = f(0)$ rather than $f(0-) = 0$, and that f is supposed to be continuous at 0 and 1. Had we chosen the former convention, the topology induced by dist would be the so-called *Skorokhod M1 topology* introduced by Skorokhod in [Sko56], which is a weaker variant of the more classical J1 topology. Our choice of convention that $f(0-) = 0$ allows a sequence of functions that jump “right after time 0” to be possibly convergent in our topology. For example, one has $\text{dist}(\mathbb{1}_{[1/n, 1]}, \mathbb{1}_{[0, 1]}) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, while the sequence $\mathbb{1}_{[1/n, 1]}$ is not convergent in the classical M1 topology, and in fact our topology is strictly weaker than the M1 topology. On the other hand, observe that $\mathbb{1}_{[0, 1/n]}$ is not convergent in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$.

The M-Oscillation. In this section, we introduce an oscillation function that will serve as a substitute in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ for the classical modulus of continuity. For $x \in \mathbb{R}$ and $A \subset \mathbb{R}$ we let $d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$ be the distance from x to A . Note the elementary inequalities

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y), \quad d(x, A) - d(x, B) \leq d_H(A, B) \quad (6.2.7)$$

where $x \in \mathbb{R}$ and $A, B \subset \mathbb{R}$, and $d_H(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) \vee \sup_{y \in B} d(y, A)$ is the Hausdorff distance between A and B .

For $x, y, z \in \mathbb{R}$, we set

$$M(x, y, z) = d(y, [x, z]) = (y - x)_+ \wedge (y - z)_+ + (y - x)_- \wedge (y - z)_-.$$

⁵⁴Note however that the distance dist is not complete, see [Whi02, Section 12.8].

The M -oscillation of a function $f \in \mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1]$ is the function defined for $\delta > 0$ by

$$w_M(f, \delta) = \sup \{M(f(t_1-), f(t), f(t_2)) : 0 \leq t_1 < t < t_2 \leq 1, |t_2 - t_1| < \delta\}.$$

The choice of the left-limit at t_1 in the first term might appear unnatural at first sight, because of the fact that f has left limits. In fact, it is only needed when $t_1 = 0$, because of our rooting convention $f(0-) = 0$. So in fact, $w_M(f, \delta)$ is the maximum of the two quantities

$$\sup \{M(f(t_1), f(t), f(t_2)) : 0 \leq t_1 < t < t_2 \leq 1, |t_2 - t_1| < \delta\}$$

and

$$\sup \{M(0, f(t), f(t_2)) : 0 < t < t_2 < \delta\},$$

and if $f(0) = 0$, then $w_M(f, \delta)$ is equal to the first quantity.

Theorem 6.2.1. *Let \mathcal{D} be a fixed countable subset of $[0, 1]$ containing 1. Let $K \subset \mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1]$ be such that*

$$\sup \{|f(q)| : f \in K, q \in \mathcal{D}\} < \infty$$

and

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \{w_M(f, \delta) : f \in K\} = 0.$$

Then K is a relatively compact subset of $(\mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1], \text{dist})$.

This theorem can be found in Chapter 12 of Whitt [Whi02], with the minor difference that our space of functions starts with an “initial jump” (recall that $f(0-) = 0$ by our convention).

An Exponential Tightness Criterion. Our second result gives a sufficient condition to check exponential tightness in $(\mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1], \text{dist})$ for a family of random processes.

Theorem 6.2.2 (Exponential Tightness in $(\mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1], \text{dist})$). *Let $\alpha > 1$ and $\{X_{(\varepsilon)}, \varepsilon > 0\}$ be a family of $\mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1]$ -valued stochastic processes. We assume that $X_{(\varepsilon)}(0) = 0$ for every $\varepsilon > 0$.*

1. *Suppose that there exist two constants $c, C \in (0, \infty)$ such that for every $\lambda > 0$, and every $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$,*

$$\mathbb{E} \left[\exp(\lambda M(X_{(\varepsilon)}(t_1), X_{(\varepsilon)}(t), X_{(\varepsilon)}(t_2))) \right] \leq c \exp(C(\lambda \varepsilon)^\alpha |t_2 - t_1|),$$

then it holds that for every $\beta \in (0, 1/\alpha)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P} \left(\bigcup_{n > N} \left\{ w_M(X_{(\varepsilon)}, 2^{-n}) > 2 \frac{2^{-n\beta}}{1 - 2^{-\beta}} \right\} \right) = -\infty.$$

2. *Suppose further that for some countable dense set \mathcal{D} of $[0, 1]$ containing 1, the family of random variables $\{X_{(\varepsilon)}(q), \varepsilon > 0\}$ is exponentially tight with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$, for every $q \in \mathcal{D}$. Then the laws of $X_{(\varepsilon)}$ as $\varepsilon \downarrow 0$ are exponentially tight in $(\mathbb{C}\text{\grave{a}}\text{\grave{d}}\text{\grave{l}}\text{\grave{a}}\text{\grave{g}}[0, 1], \text{dist})$, with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$.*

Proof. For 1., we follow and adapt the approach of Billingsley [Bil68]. Let $D_n = \{k2^{-n}, 0 \leq k \leq n\}$ be the dyadic numbers of level n . Then for $\beta > 0$ and $\lambda > 0$, by Markov’s inequality,

$$\mathbb{P} \left(M(X_{(\varepsilon)}(k2^{-n}), X_{(\varepsilon)}((k+1)2^{-n}), X_{(\varepsilon)}((k+2)2^{-n})) > 2^{-n\beta} \right) \leq c \exp(-\lambda 2^{-n\beta} + C(\lambda \varepsilon)^\alpha 2^{-n+1})$$

which by optimizing over $\lambda > 0$ and taking a union bound yields

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\} : M(X_{(\varepsilon)}(k2^{-n}), X_{(\varepsilon)}((k+1)2^{-n}), X_{(\varepsilon)}((k+2)2^{-n})) > 2^{-n\beta}) \\ \leq 2^n c \exp(-C'(\alpha)\varepsilon^{-\alpha'} 2^{n(1-\alpha\beta)/(\alpha-1)}). \end{aligned}$$

Setting $A_n = \max\{M(f((k-1)2^{-n}), k2^{-n}, (k+1)2^{-n}), 1 \leq k \leq 2^n - 1\}$, this shows that $\mathbb{P}(A_n > 2^{-n\beta}) \leq 2^n c \exp(-C'(\alpha)\varepsilon^{-\alpha'} 2^{n(1-\alpha\beta)/(\alpha-1)})$. Next, let $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ and, for $I \subset [0, 1]$, let

$$\mathcal{L}(I) = \sup \{M(f(t_1), f(t), f(t_2)) : t_1, t, t_2 \in I, t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Fix $n \geq 1$ and $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\}$. We aim at providing bounds for $\mathcal{L}([k2^{-n}, (k+2)2^{-n}])$. For this, by right-continuity, it suffices to bound uniformly the quantities $M(f(t_1), f(t), f(t_2))$ for $t_1 \leq t \leq t_2$ in $[k2^{-n}, (k+2)2^{-n}] \cap D$. For $m \geq n$, let

$$B_m = \max \{M(f(t_1), f(t), f(t_2)) : k2^{-n} \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq (k+2)2^{-n}, t_1, t, t_2 \in D_m\},$$

so that $\mathcal{L}([k2^{-n}, (k+2)2^{-n}])$ is the increasing limit of B_m as $m \rightarrow \infty$. The key observation to make is that for every $m \geq n$,

$$B_m \leq B_{m-1} + 2A_m. \quad (6.2.8)$$

To check this, let us assume that $t_1 < t < t_2$ are in D_m and achieve the maximum defining B_m . If $f(t)$ is between $f(t_1)$ and $f(t_2)$ then this means that $B_m = 0$ and there is nothing to prove, otherwise, we may assume without loss of generality that $f(t_2) \leq f(t_1) < f(t)$, the other cases being symmetric, so that $B_m = f(t) - f(t_1)$. Note that if $t \in D_m \setminus D_{m-1}$, then $t - 2^{-m}, t + 2^{-m}$ belong to D_{m-1} . Moreover, it must hold that $f(t - 2^{-m}) \vee f(t + 2^{-m}) \leq f(t)$, as otherwise, for instance, if $f(t - 2^{-m}) > f(t)$, then we would have

$$M(f(t_1), f(t - 2^{-m}), f(t_2)) = f(t - 2^{-m}) - f(t_1) > f(t) - f(t_1) = M(f(t_1), f(t), f(t_2)),$$

and this would violate the fact that $M(f(t_1), f(t), f(t_2))$ is maximal over points $t_1 < t < t_2$ in D_m . This implies that $M(f(t - 2^{-m}), f(t), f(t + 2^{-m})) = (f(t) - f(t - 2^{-m})) \wedge (f(t) - f(t + 2^{-m}))$, and therefore, we may choose $t' \in \{t - 2^{-m}, t + 2^{-m}\}$ such that $|f(t) - f(t')| \leq A_m$. If $t \in D_{m-1}$, we let $t' = t$.

We define t'_1 in a similar way, setting it to t_1 if the latter belongs to D_{m-1} . If $t_1 \in D_m \setminus D_{m-1}$ then $t_1 \pm 2^{-m}$ belong to D_{m-1} . We note that $f(t_1 - 2^{-m}) \wedge f(t_1 + 2^{-m}) \geq f(t_1)$, as otherwise this would again violate the maximality of $M(f(t_1), f(t), f(t_2))$ over points in D_m . So we may choose $t'_1 \in \{t \pm 2^{-m}\}$ in such a way that $|f(t'_1) - f(t_1)| \leq A_m$.

Finally, we define t'_2 in the following way. If $t_2 \in D_{m-1}$ we let $t'_2 = t_2$ as usual. If $t_2 \in D_m \setminus D_{m-1}$, we have two situations. If $f(t_2 - 2^{-m}) \wedge f(t_2 + 2^{-m}) \geq f(t_2)$ then we may again choose $t'_2 \in \{t_2 \pm 2^{-m}\}$ in such a way that $|f(t'_2) - f(t_2)| \leq A_m$. In this case, we notice that $d_H([f(t_1), f(t_2)], [f(t'_1), f(t'_2)]) \leq A_m$, so that

$$d(f(t), [f(t'_1), f(t'_2)]) \geq d(f(t), [f(t_1), f(t_2)]) - A_m \quad (6.2.9)$$

by (6.2.7). Otherwise, we choose $t'_2 \in \{t_2 - 2^{-m}, t_2 + 2^{-m}\}$ in such a way that $f(t'_2) \leq f(t_2)$. In this case, we have $d_H([f(t_1), f(t_2)], [f(t'_1), f(t'_2)]) \leq A_m$ so that, again by (6.2.7),

$$d(f(t), [f(t'_1), f(t'_2)]) \geq d(f(t), [f(t_1), f(t_2)]) - A_m = d(f(t), [f(t_1), f(t_2)]) - A_m,$$

so that (6.2.9) holds in every case. Therefore, for this choice of t'_1, t', t'_2 and by (6.2.7), we obtain

$$\begin{aligned} B_{m-1} &\geq M(f(t'_1), f(t'), f(t'_2)) = d(f(t'), [f(t'_1), f(t'_2)]) \\ &\geq d(f(t), [f(t'_1), f(t'_2)]) - A_m \\ &\geq d(f(t), [f(t_1), f(t_2)]) - 2A_m = B_m - 2A_m, \end{aligned}$$

so that (6.2.8) holds. By taking a limit, (6.2.8) implies that $\mathcal{L}([k2^{-n}, (k+2)2^{-n}]) \leq B_{n-1} + 2 \sum_{m \geq n} A_m$ where we note that $B_{n-1} = 0$. Furthermore, we note that

$$w_M(f, 2^{-n}) \leq \max_{0 \leq k \leq 2^{n-2}} \mathcal{L}([k2^{-n}, (k+2)2^{-n}])$$

because three numbers within distance 2^{-n} can be fit into the same interval $[k2^{-n}, (k+2)2^{-n}]$ for some k . We deduce that

$$w_M(f, 2^{-n}) \leq 2 \sum_{m \geq n} A_m.$$

Finally, let

$$K_N = \bigcap_{n \geq N} \left\{ f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : w_M(f, 2^{-n}) \leq 2 \frac{2^{-n\beta}}{1 - 2^{-\beta}} \right\},$$

so that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(\varepsilon)} \notin K_N) &\leq \sum_{n \geq N} \mathbb{P}\left(2 \sum_{m \geq n} A_m \geq 2 \frac{2^{-n\beta}}{1 - 2^{-\beta}}\right) \\ &\leq \sum_{n \geq N} \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m \geq 2^{-m\beta}) \\ &\leq \sum_{n \geq N} \sum_{m \geq n} c 2^m \exp(-C'(\alpha) \varepsilon^{-\alpha'} 2^{m(1-\alpha\beta)/(\alpha-1)}) \\ &\leq C'' 2^N \exp(-C'(\alpha) \varepsilon^{-\alpha'} 2^{N(1-\alpha\beta)/(\alpha-1)}) \end{aligned}$$

for some universal $C'' = C''(\alpha) > 0$. We finally deduce that

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(X_{(\varepsilon)} \notin K_N) \leq -C' 2^{N(1-\alpha\beta)/(\alpha-1)},$$

which converges to $-\infty$ as $N \rightarrow \infty$.

It remains to prove 2. Notice that for every choice of $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ in \mathcal{D} with $\max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq k\} < \delta$, it holds that

$$\sup_{t \in [0, 1]} |X_{(\varepsilon)}(t)| \leq \max\{|X_{(\varepsilon)}(t_i)| : 1 \leq i \leq k\} + w_M(X_{(\varepsilon)}, \delta),$$

so that

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, 1]} |X_{(\varepsilon)}(t)| > A\right) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(|X_{(\varepsilon)}(t_i)| > A/2) + \mathbb{P}(w_M(X_{(\varepsilon)}, \delta) > A/2).$$

From the fact that the $X_{(\varepsilon)}(t_i), 1 \leq i \leq k$ are exponentially tight, and by 1., we obtain the existence of $A_N \in (0, \infty)$ such that

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}\left(\sup_{t \in \mathcal{D}} |X_{(\varepsilon)}(t)| > A_N\right) < -N.$$

We deduce that the relatively compact sets of $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ given by

$$\{f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : \sup_{t \in \mathcal{D}} |f(t)| \leq A_N\} \cap K_N$$

fulfill the definition of exponential tightness. \square

§ 6.3. Large Deviations for the Finite-Dimensional Marginal Distributions

In this section we prove the following proposition.

Proposition 6.3.1 (LDP for the marginals of \mathfrak{e}). *Let $\sigma = (t_1, \dots, t_n)$, where $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$, be fixed. Under \mathbb{P} the laws of $\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n})$ satisfy a LDP in \mathbb{R}_+^n with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function*

$$J_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c_\alpha \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left(\frac{(x_i - x_{i+1})_+}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\alpha'} & \text{if } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+ \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The fact that J_σ is a good rate function on \mathbb{R}_+^n is easy to see. Indeed, it is clearly continuous, and for every $c > 0$, $J(x_1, \dots, x_n) \leq c$ implies $(x_i - x_{i+1})_+ \leq c'$ for $1 \leq i \leq n$ and $x_n \leq c'$, where c' is some positive number depending only on t_1, \dots, t_n, c that $x_i \leq x_{i+1} + c'$ that that $\max_{1 \leq i \leq n} x_i \leq nc'$, and the level sets of J_σ are therefore compact.

§ 6.3.1. Estimates for Transition Densities

We will need some crucial estimates for the tails of the transition densities $p_t(x)$, and for the density of the entrance law, $j_t(x)$. In this section, we will make use of positive, finite universal constants c_1, c_2 depending only on α , but whose values may vary from line to line, and of non-universal constants c, C depending on some extra parameters that will always be specified.

First, [Sat99, Equation (14.35)] entails that for every $x \geq 0$, we have

$$c_1 \exp(-c_\alpha x^{\alpha'}) \leq p_1(-x) \leq c_2 (1 + x^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}}) \exp(-c_\alpha x^{\alpha'}) \quad (6.3.1)$$

and [Sat99, Equation (14.33)] entails that

$$c_1 (1 + x)^{-\alpha-1} \leq p_1(x) \leq c_2 (1 + x)^{-\alpha-1}. \quad (6.3.2)$$

By the scaling relations for $p_t(x)$, we deduce that for every $x > 0$ and $t \in (0, 1]$,

$$c_1 \exp\left(-c_\alpha \left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right)^{\alpha'}\right) \leq p_t(-x) \leq \frac{c_2}{t^{1/\alpha}} \left(1 + \left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}}\right) \exp\left(-c_\alpha \left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right)^{\alpha'}\right) \quad (6.3.3)$$

and

$$c_1 (1 + x/t^{1/\alpha})^{-\alpha-1} \leq p_t(x) \leq c_2 (1 + x)^{-\alpha-1}. \quad (6.3.4)$$

In particular, note that for every fixed $\eta \in (0, 1)$ and $x_0 > 0$, we have, for any $t \in (0, 1)$ and $x \geq x_0$,

$$p_t(-x) \leq C(\eta, x_0) \exp\left(- (1 - \eta) c_\alpha \left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right)^{\alpha'}\right). \quad (6.3.5)$$

A similar bound holds for $q_x(t) = \frac{x}{t} p_t(-x)$, with possibly different constants.

Next, by [MS79, Formula (3.20)], it holds that there exists a positive constant $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ and for $0 < a < b < +\infty$,

$$c_1 \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{a^\alpha t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\right) \leq \int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} j_t(y) dy \leq c_2 \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{a^\alpha t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\right). \quad (6.3.6)$$

These estimates will allow us to evaluate the densities involved in (6.2.3) in the large deviation regime. First we give an explicit formula for $p_t^{(0, \infty)}(x, y)$.

Lemma 6.3.2. *Let $t > 0$ and $x, y > 0$. Then*

$$p_t^{(0,\infty)}(x, y) = p_t(y - x) - \int_0^t q_x(s) p_{t-s}(y) ds. \quad (6.3.7)$$

Proof. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a measurable function. On the one hand, we have by definition that

$$\mathbb{E}_x^{(0,\infty)} [f(L_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t^{(0,\infty)}(x, y) dy.$$

On the other hand, if we denote by T_0 the first hitting time of 0 by $(L_t)_{t \geq 0}$, and $L_{t-s}^{(s)} = L_{s+(t-s)}$ for $s < t$, we then have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x^{(0,\infty)} [f(L_t)] &= \mathbb{E}_x [f(L_t) \mathbb{1}_{\{T_0 > t\}}] \\ &= \mathbb{E}_x [f(L_t)] - \mathbb{E}_x [f(L_t) \mathbb{1}_{\{T_0 < t\}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t(y - x) dy - \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{T_0 < t\}} \mathbb{E} \left[f(L_{t-T_0}^{(T_0)}) \mid \mathcal{F}_{T_0} \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t(y - x) dy - \int_0^t q_x(s) \mathbb{E} \left[f(L_{t-s}^{(s)}) \right] ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t(y - x) dy - \int_0^t q_x(s) \int_{\mathbb{R}} f(y) p_{t-s}(y) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left\{ p_t(y - x) - \int_0^t q_x(s) p_{t-s}(y) ds \right\} dy, \end{aligned}$$

where we used the Markov property in the third equality. Thus Equation (6.3.7) follows. \square

Using scaling properties of $p_t(x)$ and $q_x(t)$ we may deduce from Lemma 6.3.2 a bound on the error when we approximate $p_t^{(0,\infty)}(x, y)$ by $p_t(y - x)$, as follows.

Lemma 6.3.3. *For any fixed $t > 0$ and $\eta > 0$, there exists $C = C(\eta, t) > 0$ such that for every $x, y > 0$,*

$$\int_0^t q_x(s) p_{t-s}(y) ds \leq C \exp \left(-c_\alpha (1 - \eta) \left(\frac{x^\alpha}{t} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right). \quad (6.3.8)$$

Proof. We write, using scaling relations for $p_t(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^t q_x(s) p_{t-s}(y) &= \int_0^{t/2} \frac{x}{s} p_s(-x) p_{t-s}(y) ds + \int_{t/2}^t \frac{x}{s} p_s(-x) p_{t-s}(y) ds \\ &\leq \|p_{t/2}\|_\infty \int_0^{t/2} \frac{x}{s} p_s(-x) ds + \|p_1\|_\infty \int_{t/2}^t \frac{ds}{(t-s)^{1/\alpha}} \frac{x}{s} p_s(-x), \end{aligned}$$

and then, using (6.3.3), we get

$$\begin{aligned} \int_0^t q_x(s) p_{t-s}(y) &\leq c_2 \|p_{t/2}\|_\infty \int_0^{t/2} \frac{x ds}{(t/2)^\alpha s^{1+1/\alpha}} \left(1 + \frac{x}{s^{1/\alpha}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}} \exp \left(-c_\alpha \left(\frac{x}{s^{1/\alpha}} \right)^{\alpha'} \right) \\ &\quad + c_2 \|p_1\|_\infty \frac{x}{(t/2)^{1+1/\alpha}} \left(1 + \frac{x}{(t/2)^{1/\alpha}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}} \exp \left(-c_\alpha \left(\frac{x}{t^{1/\alpha}} \right)^{\alpha'} \right) \int_{t/2}^t \frac{ds}{(t-s)^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

The second term is of the desired form, while, by performing a change of variables $u = s^{-\alpha'/\alpha}$, it is straightforward to see that the first term is negligible compared to the second. \square

Proof of Proposition 6.3.1. Since J_σ is a good rate function on \mathbb{R}_+^n , [Ser97, Lemma 5] shows that it suffices to prove that, for every open subset $G \subseteq [0, +\infty[^n$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon(e_{t_1}, \dots, e_{t_n}) \in G) = -\inf_G J_\sigma. \quad (6.3.9)$$

Since J_σ is infinite on $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$, it suffices to consider open sets G of \mathbb{R}_+^n (with the induced topology), and this is what we do from now on. For convenience let us write

$$\Psi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^{n-1} p_{t_{i+1}-t_i}^{(0,\infty)}\left(\frac{x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}}{\varepsilon}\right) \times q_{x_n/\varepsilon}(1-t_n).$$

Using (6.2.3), we can write

$$\mathbb{P}(\varepsilon(e_{t_1}, \dots, e_{t_n}) \in G) = C\varepsilon^n \int_G dx_1 \dots dx_n j_{t_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \Psi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n),$$

where $C = C(\alpha) > 0$ is a positive constant depending only on α .

We start with the lower bound. For a given $\delta > 0$, there exists $(y_1, \dots, y_n) \in G$ such that $J_\sigma(y_1, \dots, y_n) \leq \inf_G J_\sigma + \delta$, and we may assume without loss of generality that y_1, \dots, y_n are pairwise distinct and all lie in $(0, \infty)$. Then, there exists a hypercube $Q_\delta = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \subseteq G$ containing (y_1, \dots, y_n) such that the intervals $[a_i, b_i] \subset (0, \infty)$ are pairwise disjoint, and such that for all $(x_1, \dots, x_n) \in Q_\delta$, we have

$$J_\sigma(x_1, \dots, x_n) \leq \inf_G J_\sigma + \delta.$$

Let us now consider the terms $p_{t_{i+1}-t_i}^{(0,\infty)}(x_i/\varepsilon, x_{i+1}/\varepsilon)$ that involved in the definition of $\Psi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$, where $x_1, \dots, x_n \in Q_\delta$. Fix $\eta \in (0, 1)$. From (6.3.4) and Lemmas 6.3.2 and 6.3.3, for every i such that $y_i > y_{i+1}$, we may bound

$$p_{t_{i+1}-t_i}^{(0,\infty)}\left(\frac{x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}}{\varepsilon}\right) \geq c_1 \exp\left(-\frac{c_\alpha}{\varepsilon^{\alpha'}} \left(\frac{(b_i - a_{i+1})^\alpha}{t_{i+1} - t_i}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) - C(\eta) \exp\left(-\frac{c_\alpha}{\varepsilon^{\alpha'}} (1-\eta) \left(\frac{a_i^\alpha}{t_{i+1} - t_i}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right),$$

and for every i such that $y_i < y_{i+1}$,

$$p_{t_{i+1}-t_i}^{(0,\infty)}\left(\frac{x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}}{\varepsilon}\right) \geq c_1 \left(1 + \frac{b_{i+1} - a_i}{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)^{1/\alpha}}\right)^{-\alpha-1} - C(\eta) \exp\left(-\frac{c_\alpha}{\varepsilon^{\alpha'}} (1-\eta) \left(\frac{a_i^\alpha}{t_{i+1} - t_i}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right).$$

Also, we may bound

$$q_{x_n/\varepsilon}(1-t_n) \geq c_1 \frac{a_n}{1-t_n} \exp\left(\frac{c_\alpha}{\varepsilon^{\alpha'}} \left(\frac{b_n^\alpha}{1-t_n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right).$$

Therefore, by choosing η small enough so that $(1-\eta)a_i^{\alpha'} \geq (b_i - a_{i+1})^{\alpha'}$ for every i such that $x_i > x_{i+1}$, we see that for every ε small enough, $\mathbb{P}(\varepsilon(e_{t_1}, \dots, e_{t_n}) \in G)$ is bounded from below by a quantity of the form

$$c\varepsilon^n \tilde{\Psi}_\varepsilon \int_{a_1}^{b_1} j_{t_1}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) dx_1$$

where, for some constant c depending only on $t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_n$ and b_1, \dots, b_n , and η ,

$$\tilde{\Psi}_\varepsilon = c \prod_{i=1}^n \left(\exp\left(-\frac{c_\alpha}{\varepsilon^{\alpha'}} \left(\frac{(b_i - a_{i+1})^\alpha}{t_{i+1} - t_i}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \mathbb{1}_{\{y_i > y_{i+1}\}} + \varepsilon^{\alpha+1} \mathbb{1}_{\{y_i < y_{i+1}\}} \right),$$

with the convention that $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1} = 0$. Using the asymptotics (6.3.6), we finally obtain

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n}) \in \mathbf{G}) \geq -c_\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_{i+1})_+^\alpha}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

By letting \mathbf{a}_i and \mathbf{b}_i tend to \mathbf{y}_i , we obtain

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n}) \in \mathbf{G}) \geq -J_\sigma(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \geq -\inf_{\mathbf{G}} J - \delta,$$

and since δ was arbitrary, we may conclude that

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n}) \in \mathbf{G}) \geq -\inf_{\mathbf{G}} J.$$

The corresponding upper bound is obtained by similar arguments. It is clear that the upper bound holds if $\inf_{\mathbf{G}} J = 0$, so that we may assume $\inf_{\mathbf{G}} J > 0$. By Lemma 6.3.2, note that $\mathbf{p}_t^{(0, \infty)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{p}_t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Therefore, we have

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \leq C \chi_n \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{p}_{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{\varepsilon} \right) \mathbf{p}_{1-t_n} \left(-\frac{\mathbf{x}_n}{\varepsilon} \right),$$

where C is a positive and finite constant that depends only on t_1, \dots, t_n .

Let $\eta \in (0, 1/2)$ be a fixed constant. Now observe that for $t > 0$, and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, we have

$$\mathbf{p}_t(\mathbf{x}) \leq \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{\{\mathbf{x} < 0\}} + \|\mathbf{p}_t\|_\infty \mathbb{1}_{\{\mathbf{x} \geq 0\}} \leq C \exp \left(-c_\alpha (1 - \eta) \frac{(\mathbf{x}_-)^{\alpha'}}{\varepsilon^{\alpha'} t^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right),$$

where the constant C depends only on η and t , but not on \mathbf{x} . A similar bound holds for $\mathbf{x} \mathbf{p}_t(\mathbf{x})$, possibly with a different constant C . Thus may write for all $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbf{G}$, with our usual convention that $\mathbf{x}_{n+1} = 0$ and $t_{n+1} = 1$, and for a constant C that depends on η, t_1, \dots, t_n but not on $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$,

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &\leq C \exp \left(-\frac{(1-\eta)}{\varepsilon^{\alpha'}} J_\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \right) \\ &\leq C \exp \left(-\frac{1-2\eta}{\varepsilon^{\alpha'}} \inf_{\mathbf{G}} J \right) \exp \left(-\frac{\eta}{\varepsilon^{\alpha'}} J_\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \right). \end{aligned}$$

Since $\mathbf{j}_{t_1} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$, we obtain after changing \mathbf{x}_i/ε into \mathbf{x}_i in the integral,

$$\mathbb{P}(\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n}) \in \mathbf{G}) \leq C \exp \left(-\frac{1-2\eta}{\varepsilon^{\alpha'}} \inf_{\mathbf{G}} J \right) \int_{\mathbb{R}_+^n} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n \exp \left(-\eta J_\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \right)$$

and the last integral is finite. This implies that

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n}) \in \mathbf{G}) \leq -(1-2\eta) \inf_{\mathbf{G}} J.$$

Since this is true for all $\eta > 0$, we get the upper bound

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon(\mathfrak{e}_{t_1}, \dots, \mathfrak{e}_{t_n}) \in \mathbf{G}) \leq -\inf_{\mathbf{G}} J. \quad \square$$

§ 6.4. Exponential Tightness for the Normalized Excursion

In this part we prove the following exponential tightness of the laws of $(\varepsilon e_t)_{t \in [0,1]}$ as $\varepsilon \downarrow 0$ in $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$.

Proposition 6.4.1 (Exponential Tightness of e). *Under \mathbb{P} the laws of $(\varepsilon e_t)_{t \in [0,1]}$ as $\varepsilon \downarrow 0$ are exponentially tight in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1], \text{dist})$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$.*

In order to prove this result, we want to apply Theorem 6.2.2. Note that we already have exponential tightness for $(\varepsilon e(q), \varepsilon > 0)$ for every $q \in [0,1]$, as a consequence of Proposition 6.3.1 for $n = 1$. It turns out that the criterion given in Theorem 6.2.2 cannot be used easily to obtain exponential tightness over the whole interval $[0,1]$. We must instead treat the intervals $[0, 1 - \delta]$ and $[1 - \delta, 1]$ separately.

Lemma 6.4.2. *For every $\delta \in (0,1)$, there exists a constant $C = C(\alpha, \delta) \in (0, \infty)$ such that for every $s, t, u \in [0, 1 - \delta]$ with $s \leq t \leq u$ and $\lambda \geq 0$,*

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda M(e_s, e_t, e_u) \right) \right] \leq C \exp \left((u - s) \lambda^\alpha \right).$$

Proof. We split the expectation into five terms:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda M(e_s, e_t, e_u) \right) \right] &= \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_s - e_t)} \mathbb{1}_{\{e_t \leq e_s \leq e_u\}} \right] + \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_t - e_u)} \mathbb{1}_{\{e_s \leq e_u \leq e_t\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_t - e_s)} \mathbb{1}_{\{e_u \leq e_s \leq e_t\}} \right] + \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_u - e_t)} \mathbb{1}_{\{e_t \leq e_u \leq e_s\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\{e_s \leq e_t \leq e_u\} \cup \{e_u \leq e_t \leq e_s\} \right) \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_s - e_t)} \mathbb{1}_{\{e_t \leq e_s\}} \right] + 2 \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_t - e_u)} \mathbb{1}_{\{e_u \leq e_t\}} \right] + 1. \end{aligned}$$

We see that the two expectation terms of the last line are of the same form $\mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_a - e_b)} \mathbb{1}_{\{e_b \leq e_a\}} \right]$ where $a \leq b$ with $b - a \leq u - s$. For such a, b , letting $c = \alpha \Gamma(1 - 1/\alpha)$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_a - e_b)} \mathbb{1}_{\{e_b \leq e_a\}} \right] &= c \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy j_a(x) p_{b-a}^{(0, \infty)}(x, y) q_y (1 - b) e^{\lambda(x-y)} \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} \\ &\leq c \int_0^\infty dz p_{b-a}(-z) e^{\lambda z} \int_z^\infty j_a(x) q_{x-z} (1 - b) dx, \end{aligned}$$

where we have used the fact that $p_{b-a}^{(0, \infty)}(x, y) \leq p_{b-a}(y - x)$ and a change of variables. We claim that the last integral in x is uniformly bounded over $z \geq 0$, $0 \leq a < b \leq 1 - \delta$. If we can prove this claim, then this will imply the existence of a finite constant such that

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda(e_a - e_b)} \mathbb{1}_{\{e_b \leq e_a\}} \right] \leq C \mathbb{E} \left[e^{-\lambda L_{b-a}} \right] = C \exp \left((b - a) \lambda^\alpha \right) \leq C \exp \left((u - s) \lambda^\alpha \right),$$

for every $a, b \in [0, 1 - \delta]$ with $a \leq b$ and $b - a \leq u - s$, which gives the result.

To prove the claim, note that

$$\begin{aligned} \int_z^\infty j_a(x) q_{x-z} (1 - b) dx &= \int_z^\infty j_a(x) \frac{x - z}{1 - b} p_{1-b}(z - x) dx \\ &\leq 2 \|p_\delta\|_\infty \int_0^\infty x j_a(x) dx \\ &= 2 \|p_\delta\|_\infty \int_0^\infty x j_1(x) dx, \end{aligned}$$

where in the last display we have used the scaling relation (6.2.2) that implies that the integral does not depend on \mathbf{a} . Letting $\bar{J}_1(x) = \int_x^\infty j_a(y) dy$, we may integrate by parts and get an upper bound which is within a multiplicative constant of

$$[x\bar{J}_1(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \bar{J}_1(x) dx.$$

Now by [MS79, (3.20)], we have that $\bar{J}_1(x) \sim \bar{c}x^{-\alpha}$ when $x \rightarrow \infty$ for some finite constant \bar{c} , and the desired uniform upper bound follows. \square

Our next lemma shows that e is exponentially well-behaved near time 1.

Lemma 6.4.3. *For every $\lambda, \gamma > 0$, there exists $\delta \in (0, 1)$ such that*

$$-\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P} \left(\sup_{1-\delta \leq t \leq 1} \varepsilon e_t \geq \gamma \right) \geq \lambda.$$

Proof. For all $\delta > 0$, we have

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1-\delta \leq t \leq 1} \varepsilon e_t \geq \gamma \right) = \mathbb{P}(\varepsilon e_{1-\delta} \geq \gamma) + \mathbb{P} \left(\sup_{1-\delta < t \leq 1} \varepsilon e_t \geq \gamma, \varepsilon e_{1-\delta} < \gamma \right).$$

From Proposition 6.3.1,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon e_{1-\delta} \geq \gamma) \leq -c_\alpha \left(\frac{\gamma^\alpha}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (6.4.1)$$

Let us prove now a similar bound for the second probability. By (6.2.4) we may recast it as

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1-\delta < t \leq 1} \varepsilon e_t \geq \gamma, \varepsilon e_{1-\delta} < \gamma \right) = \alpha \Gamma \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \int_0^{\gamma/\varepsilon} dx j_{1-\delta}(x) q_x(\delta) \mathbb{P}_x^\delta \left(\sup_{0 \leq t \leq \delta} L \geq \gamma/\varepsilon \right). \quad (6.4.2)$$

Now note that $\mathbb{P}_x^\delta(\sup_{0 \leq t \leq \delta} L \geq \gamma/\varepsilon)$ is the limit of $\mathbb{P}_x^{\delta'}(\sup_{0 \leq t \leq \delta'} L \geq \gamma/\varepsilon)$ as $\delta' \uparrow \delta$. By the absolute continuity relation (6.2.5) and an elementary martingale argument, the latter can be rewritten as

$$\mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\tau_0 > S\}} \mathbb{1}_{\{S < \delta'\}} \frac{q_{L_S}(\delta - S)}{q_x(\delta)} \right],$$

where S denotes the stopping time $\inf\{t \geq 0 : L_t > \gamma/\varepsilon\}$. Finally, for every $\eta \in (0, 1)$, we may use (6.3.5) to obtain

$$q_{\gamma/\varepsilon}(\delta - s) \leq C(\eta, \gamma) \exp \left(-(1-\eta)c_\alpha \left(\frac{\gamma^\alpha}{\varepsilon^\alpha \delta} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right).$$

Since this bound does not depend on δ' , plugging it into the previous expectation gives

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1-\delta < t \leq 1} \varepsilon e_t \geq \gamma, \varepsilon e_{1-\delta} < \gamma \right) \leq \alpha \Gamma \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \int_0^{\gamma/\varepsilon} dx j_{1-\delta}(x) C(\eta, \gamma) \exp \left(-(1-\eta)c_\alpha \left(\frac{\gamma^\alpha}{\varepsilon^\alpha \delta} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right).$$

Since $j_{1-\delta}$ is integrable, the desired bound follows. \square

Proof of Proposition 6.4.1. Fix $\lambda > 0$. By Lemma 6.4.3, for every $n \geq 1$, there exists a $\delta_n \in (0, 1)$ such that for every $\varepsilon > 0$ small enough

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1-2\delta_n < t \leq 1} \varepsilon e \geq \frac{1}{2^n} \right) \leq \frac{\exp(-\lambda \varepsilon^{-\alpha'})}{2^n}.$$

For this choice of δ_n , by Lemma 6.4.2 and Theorem 6.2.2, for every $n \geq 0$ there exists a compact set $K_\lambda^{(n)}$ of $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ such that for every $\varepsilon > 0$ small enough,

$$\mathbb{P}\left((\varepsilon e_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 1 - \delta_n) \notin K_\lambda^{(n)}\right) \leq \frac{\exp(-\lambda \varepsilon^{-\alpha'})}{2^n},$$

where $e^{(n)}$ is the process $(e_{t \wedge (1 - \delta_n)}, 0 \leq t \leq 1)$. We conclude by noting that the set K_λ of functions f of $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ such that for every $n \geq 0$, $(f(t \wedge (1 - \delta_n)), 0 \leq t \leq 1) \in K_\lambda^{(n)}$ and $\sup_{1 - 2\delta_n \leq t \leq 1} |f(t)| \leq 2^{-n}$ is relatively compact, and satisfies $\mathbb{P}(\varepsilon e \notin K_\lambda) \leq 2 \exp(-\lambda \varepsilon^{-\alpha'})$. \square

§ 6.5. Proof of Theorem 6.1.2

In this section, we prove Theorem 6.1.2. We will do this by combining the exponential tightness with a weaker form of LDP, as we now explain. The *weak topology* \mathcal{W} on $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ is the topology generated by the basis of neighborhoods of the form

$$N(f, t_1, \dots, t_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \{g \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon_i, 1 \leq i \leq k\},$$

where $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$, and where t_1, \dots, t_k are elements of $[0, 1]$ that are continuity points of f . Here, by convention, 0 is a continuity point of f if and only if $f(0) = 0$, which is consistent with our convention that $f(0-) = 0$. Clearly, this defines a Hausdorff topology, since two different elements of $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ necessarily differ at some common continuity point. It is easy to see that a sequence $(f_n, n \geq 0)$ that converges in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$ to a limit f converges pointwise at every continuity point of f , and therefore converges to f in the topological space $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$. Consequently, the weak topology is coarser than the topology of $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \text{dist})$. Therefore, by [DZ98, Corollary 4.2.6], and by the exponential tightness established in Proposition 6.4.1, Theorem 6.1.2 will follow from the following statement.

Proposition 6.5.1. *The laws of $(\varepsilon e_t)_{t \in [0, 1]}$ satisfy a LDP in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$ as $\varepsilon \downarrow 0$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function I_e .*

The remainder of this section is thus devoted to the proof of this proposition, which follows the approach of Lynch and Sethuraman [LS87] closely.

§ 6.5.1. Facts about the rate function

Denote \mathfrak{S} the set of finite subdivisions of $[0, 1]$, and for $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1]$, recall that for $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$

$$J_\sigma(x_1, \dots, x_n) = c_\alpha \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \left(\frac{(x_i - x_{i+1})_+}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\alpha'},$$

where, by convention $x_{n+1} = 0$ and $t_{n+1} = 1$. We let $J_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \infty$ if one of the x_i 's is negative. To ease notation, for $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, we let $I_e^\sigma(f) = J_\sigma(f(t_1), \dots, f(t_n))$. By the Dawson-Gärtner theorem

[DZ98, Theorem 4.6.1], it follows from Propositions 6.3.1 and 6.4.1 that the laws of $(\varepsilon e_t)_{t \in [0,1]}$ satisfy a LDP in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (with the product topology) as $\varepsilon \downarrow 0$, with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function

$$\tilde{I}_e(f) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} J_\sigma(f(t_1), \dots, f(t_n)). \quad (6.5.1)$$

A problem is that the domain of this rate function is not a space of càdlàg function, so we need to proceed otherwise. However, let us prove some properties of the rate function \tilde{I}_e and, in particular, that its restriction to $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$ coincides with the rate function I_e given in Theorem 6.1.2. To this end, we prove the following proposition.

Proposition 6.5.2. *A function $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$ with $f \geq 0$ and $f(1) = 0$ is in H_{ex} if and only if*

$$M_e(f) := \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} I_e^\sigma(f) < \infty.$$

In this case, we have

$$M_e(f) = I_e(f),$$

and consequently, the functions I_e and \tilde{I}_e coincide on $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$.

Proof. This statement should be compared with [LS87, Theorem 3.2], where the proof uses a martingale argument. We provide another elementary proof here, based on the Lebesgue differentiation theorem instead. For convenience, let $\Lambda(x) = c_\alpha(x_-)^{\alpha'}$ for all $x \in \mathbb{R}$, and denote $\mu \perp \nu$ for two measures μ and ν that are mutually singular.

Let $f \in H_{\text{ex}}$, and write $f = f_\uparrow - f_\downarrow$ its Jordan decomposition with absolutely continuous f_\downarrow , such that $f'_\downarrow \in \mathbb{L}^{\alpha'}[0,1]$. Let $\sigma = [0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1]$ be a subdivision of $[0,1]$. The convexity of Λ implies, by Jensen's inequality,

$$\begin{aligned} c_\alpha \sum_{i=0}^n \left(\frac{(f(t_i) - f(t_{i+1}))_+^\alpha}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &= \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) \Lambda \left(\frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) \Lambda \left(\frac{f_\downarrow(t_i) - f_\downarrow(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i} \right) \\ &= c_\alpha \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) \left(\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'_\downarrow(s) ds \right)^{\alpha'} \\ &\leq c_\alpha \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'_\downarrow(s)^{\alpha'} ds \\ &= c_\alpha \int_0^1 f'_\downarrow(s)^{\alpha'} ds, \end{aligned}$$

where we used the fact that f_\uparrow and Λ are non-increasing in the first inequality, and applied Jensen's inequality in the second inequality. Since this is true for all subdivision σ , we get the first bound $M_e(f) \leq \int_0^1 f'_\downarrow(s)^{\alpha'} ds < \infty$.

Conversely, assume that $f \in H_{\text{ex}}$ is not of bounded variation and fix $A > 0$. Then there exists a subdivision $\sigma = [0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1]$ such that

$$A < \sum_{i=0}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i+1}))_+ + \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i+1}))_-.$$

Furthermore

$$f(0) = \sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i+1}))_+ - \sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i+1}))_-.$$

This implies that

$$\sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i+1}))_+ > \frac{\Lambda + f(0)}{2}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda + f(0)}{2} &\leq \sum_{i=0}^n (f(t_i) - f(t_{i+1}))_+ = \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i)^{1/\alpha} \frac{(f(t_i) - f(t_{i+1}))_+}{(t_{i+1} - t_i)^{1/\alpha}} \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{i=0}^n \frac{(f(t_i) - f(t_{i+1}))_+^{\alpha'}}{(t_{i+1} - t_i)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right)^{1/\alpha'}, \end{aligned}$$

by Hölder's inequality, and this entails that $M_{\mathfrak{e}}(f) = \infty$. By the contrapositive, this implies that if $M_{\mathfrak{e}}(f) < \infty$, then f has bounded variation.

Therefore, assuming that $M_{\mathfrak{e}}(f) < \infty$, we may write $f = f_{\uparrow} - f_{\downarrow}$, its Jordan decomposition with $f_{\uparrow}, f_{\downarrow}$ nondecreasing with $f_{\uparrow}(0) = 0$ and $df_{\uparrow} \perp df_{\downarrow}$. We proceed by contradiction. Suppose that f_{\downarrow} is not absolutely continuous. Then there exists $\varepsilon > 0$ such that for all $k \geq 1$, there exists an open set of the form $\mathbf{U}_k = \bigsqcup_{i=1}^{n(k)} (s_i^{(k)}, t_i^{(k)})$ such that

$$\sum_{i=1}^{n(k)} (t_i^{(k)} - s_i^{(k)}) \leq \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n(k)} ((f_{\downarrow}(t_i^{(k)}) - f_{\downarrow}(s_i^{(k)}))) > 2\varepsilon.$$

Moreover since $df_{\downarrow} \perp df_{\uparrow}$, there exists a measurable set \mathbf{B} such that $df_{\downarrow}(\mathbf{B}^c) = df_{\uparrow}(\mathbf{B}) = 0$, and by regularity of the measures Leb , df_{\downarrow} and df_{\uparrow} applied to the set $\mathbf{B} \cap \mathbf{U}_k$, we may find open sets $\mathbf{V}_k^{(1)}, \mathbf{V}_k^{(2)}$ containing $\mathbf{B} \cap \mathbf{U}_k$ such that

$$\text{Leb}(\mathbf{V}_k^{(1)}) < \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad df_{\uparrow}(\mathbf{V}_k^{(2)}) < \varepsilon,$$

and by setting $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k^{(1)} \cap \mathbf{V}_k^{(2)}$, we see that these two inequalities remain true with \mathbf{V}_k in place of $\mathbf{V}_k^{(1)}$ and $\mathbf{V}_k^{(2)}$ respectively, while

$$df_{\downarrow}(\mathbf{V}_k) \geq df_{\downarrow}(\mathbf{B} \cap \mathbf{U}_k) = df_{\downarrow}(\mathbf{U}_k) > 2\varepsilon.$$

By writing the open set \mathbf{V}_k as the limit of finite unions of open intervals, we deduce that we may choose the family of intervals $\{(s_i^{(k)}, t_i^{(k)}), 1 \leq i \leq n(k)\}$ in such a way that

$$\sum_{i=1}^{n(k)} (f_{\uparrow}(t_i^{(k)}) - f_{\uparrow}(s_i^{(k)})) < \varepsilon.$$

Then on the one hand we have

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n(k)} (f(s_i^{(k)}) - f(t_i^{(k)}))_+ &= \sum_{i=1}^{n(k)} (f_{\downarrow}(t_i^{(k)}) - f_{\downarrow}(s_i^{(k)}) - (f_{\uparrow}(t_i^{(k)}) - f_{\uparrow}(s_i^{(k)})))_+ \\ &\geq \sum_{i=1}^{n(k)} (f_{\downarrow}(t_i^{(k)}) - f_{\downarrow}(s_i^{(k)})) - \sum_{i=1}^{n(k)} (f_{\uparrow}(t_i^{(k)}) - f_{\uparrow}(s_i^{(k)})) \\ &\geq \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

And on the other hand, by Hölder's inequality

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n(k)} (f(s_i^{(k)}) - f(t_i^{(k)}))_+ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n(k)} (t_i^{(k)} - s_i^{(k)}) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{n(k)} \frac{(f(s_i^{(k)}) - f(t_i^{(k)}))_+^{\alpha'}}{(t_i^{(k)} - s_i^{(k)})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right)^{1/\alpha'} \\ &\leq \frac{1}{c_\alpha k^{1/\alpha}} M_e(f). \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

But (6.5.2) and (6.5.3) combined contradict the assumption $M_e(f) < +\infty$. Thus f_\downarrow is absolutely continuous.

Let us prove now that $\int_0^1 f'_\downarrow(s)^{\alpha'} ds \leq M_e(f)$, which will prove that $f \in H_{\text{ex}}$, and that if $f \in H_{\text{ex}}$, then $M_e(f) = \int_0^1 f'_\downarrow(s)^{\alpha'} ds$. For $n \geq 1$, define

$$f^{(n)}(t) = n \left(f\left(\frac{\lfloor (n+1)t \rfloor}{n}\right) - f\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right) \right) \text{ for } t \in [0, 1], \quad f^{(n)}(1) = n \left(f(1) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right).$$

By the Lebesgue decomposition theorem, we may write $f_\uparrow = f_{\uparrow\text{ac}} + f_{\uparrow\text{sing}}$, where $f_{\uparrow\text{ac}}$ is an absolutely continuous function and $f_{\uparrow\text{sing}}$ is such that $df_{\uparrow\text{sing}}$ is singular with respect to the Lebesgue measure. By the Lebesgue differentiation theorem, for Lebesgue-almost every $t \in [0, 1]$ we have

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_{\uparrow\text{ac}}(t) - f'_\downarrow(t).$$

Considering the subdivision $\sigma_n = [0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < 1]$, we then have

$$\begin{aligned} M_e(f) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J_{\sigma_n}(f) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \Lambda \left(f^{(n)}\left(\frac{i}{n}\right) \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \Lambda \left(f^{(n)}(s) \right) ds. \end{aligned}$$

By Fatou's lemma, we thus get

$$M_e(f) \geq \int_0^1 \Lambda (f'_{\uparrow\text{ac}}(s) - f'_\downarrow(s)) ds.$$

Recall $df_\uparrow \perp df_\downarrow$, so that we also have $df_{\uparrow\text{ac}} \perp df_\downarrow$. But by the Lebesgue differentiation theorem, we have $df_{\uparrow\text{ac}}(s) = f'_{\uparrow\text{ac}}(s) ds$ and $df_\downarrow(s) = f'_\downarrow(s) ds$, so that the sets $\{f'_{\uparrow\text{ac}} > 0\}$ and $\{f'_\downarrow > 0\}$ intersect in a set of zero Lebesgue measure. Since $f'_{\uparrow\text{ac}} \geq 0$ Lebesgue-a.e., we have $\Lambda(f'_{\uparrow\text{ac}}) = 0$, which implies that

$$\int_0^1 \Lambda (f'_{\uparrow\text{ac}}(s) - f'_\downarrow(s)) ds = \int_0^1 \Lambda (-f'_\downarrow(s)) ds = \int_0^1 f'_\downarrow(s)^{\alpha'} ds,$$

which concludes the proof. \square

In passing, note that the reasoning at the end of this proof explains why we may express the rate function I_e in the alternative form (6.1.5).

Lemma 6.5.3. *The function I_e is a good rate function on the spaces $(\text{Càdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$ and $(\text{Càdlàg}[0, 1], \text{dist})$.*

Proof. We first need to show that if $f_n \rightarrow f$ in the weak topology, with $f_n \geq 0$ and $f_n(1) = f(1) = 0$ for every n , then $\liminf_n I_e(f_n) \geq I_e(f)$. Let $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_k < 1]$ be a subdivision of continuity points of f , so that $f_n(t_i) \rightarrow f(t_i)$ as $n \rightarrow \infty$ for $1 \leq i \leq k$, so that $I_e^\sigma(f_n) = J_\sigma(f_n(t_1), \dots, f_n(t_k))$ converges to $I_e^\sigma(f) = J_\sigma(f(t_1), \dots, f(t_k))$. Since $I_e(f_n) \geq I_e^\sigma(f_n)$ by Proposition 6.5.2, this implies that $\liminf_n I_e(f_n) \geq I_e^\sigma(f)$. Applying Proposition 6.5.2 once again allows to conclude that I_e is a rate function on $(\text{Càdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$, and therefore also on $(\text{Càdlàg}[0, 1], \text{dist})$.

Let us now prove that I_e is good on $(\text{Càdlàg}[0, 1], \text{dist})$, which will imply the result. Fix $c \in (0, \infty)$, and then pick $f \in \text{Càdlàg}[0, 1]$ with $I_e(f) \leq c$, so in particular $f(1) = 0$ and f has bounded variation. Let $s \leq t$ be in $[0, 1]$. Then, by Hölder's inequality,

$$f(s) - f(t) \leq f_\downarrow(t) - f_\downarrow(s) = \int_s^t f'_\downarrow(u) du \leq (c/c_\alpha)(t-s)^{1/\alpha}.$$

Since $f(1) = 0$, this implies that f is uniformly bounded, and, moreover, for every $s \leq t \leq u$,

$$M(f(s), f(t), f(u)) \leq 2((f(s) - f(t))\mathbb{1}_{\{f(t) \leq f(s)\}} + (f(t) - f(u))\mathbb{1}_{\{f(u) \leq f(t)\}}) \leq 4(c/c_\alpha)(u-s)^{1/\alpha},$$

and one concludes by Theorem 6.2.1. \square

Next, for $A \subset \text{Càdlàg}[0, 1]$, and for $\sigma \in \mathfrak{S}$, we let

$$I_e^\sigma(A) = \inf_{f \in A} I_e^\sigma(f), \quad \text{and} \quad I_e(A) = \inf_{f \in A} I_e(f).$$

Lemma 6.5.4. *For every closed set F of $(\text{Càdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$, one has*

$$I_e(F) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} I_e^\sigma(F).$$

Proof. The proof follows closely that of [LS87, Theorem 3.5]. Since we know from (6.5.1) that $I_e^\sigma(A) \leq I_e(A)$ for every $\sigma \in \mathfrak{S}$ and every set A , let us assume by contradiction that $\sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} I_e^\sigma(F) < c < I_e(F)$ for some constant $c \in (0, \infty)$. For every subdivision $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_k < 1] \in \mathfrak{S}$, we may find some element $f_\sigma \in \text{Càdlàg}[0, 1]$ such that $I_e^\sigma(f_\sigma) < c$. We let \hat{f}_σ be the piecewise affine interpolation of the values of f_σ at times $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$, with $\hat{f}_\sigma(0) = \hat{f}_\sigma(1) = 0$ and of course $\hat{f}_\sigma(t_i) = f_\sigma(t_i)$, $1 \leq i \leq k$. Then, plainly,

$$I_e(\hat{f}_\sigma) = I_e^\sigma(\hat{f}_\sigma) = I_e^\sigma(f_\sigma) < c,$$

and, by Lemma 6.5.3, we obtain that $\{\hat{f}_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}\}$ forms a relatively compact family in $(\text{Càdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$ (and even in $(\text{Càdlàg}[0, 1], \text{dist})$). Let f_0 be a cluster point of this family, and $\sigma' = [0 < t'_1 < \dots < t'_l < 1] \in \mathfrak{S}$ be a subdivision consisting of continuity points of f_0 . We fix $\varepsilon > 0$ and consider the weak neighborhood of f_0 defined by

$$N_{\sigma', \varepsilon} = \{f \in \text{Càdlàg}[0, 1] : \max_{1 \leq i \leq l} |f(t'_i) - f_0(t'_i)| < \varepsilon\} \in \mathcal{W}.$$

For any partition σ'' finer than σ' , there exists an even finer σ such that $\hat{f}_\sigma \in N_{\sigma', \varepsilon}$, since f_0 is a cluster point. But since \hat{f}_σ agrees with f_σ on σ , it follows that $f_\sigma \in N_{\sigma', \varepsilon}$, and therefore, that f_0 is also a cluster point of $\{f_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\} \subset F$. Since F is closed, we conclude that $f_0 \in F$, and that $I_e(f_0) \leq c$ by lower semicontinuity of I_e . This finally contradicts the fact that $I_e(F) > c$. \square

We now have all the tools needed to prove Proposition 6.5.1. The proof is split into two lemmas and follows closely that of [LS87, Theorems 4.1 and 4.2].

Lemma 6.5.5. *If F is a closed subset of $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$, then*

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon e \in F) \leq -I_e(F).$$

Proof. For any $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_k < 1] \in \mathfrak{S}$, it holds that

$$\mathbb{P}(\varepsilon e \in F) \leq \mathbb{P}(I_e^\sigma(\varepsilon e) \geq I_e^\sigma(F)).$$

From the explicit form of $I_e^\sigma(\varepsilon e)$ and the fact that $\varepsilon(e_{t_1}, \dots, e_{t_k})$ satisfy a LDP with continuous rate function J_σ by Proposition 6.3.1, we obtain by the contraction principle that

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon e \in F) \leq -I_e^\sigma(F).$$

We conclude by Lemma 6.5.4. □

Lemma 6.5.6. *If G is an open subset of $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1], \mathcal{W})$, then*

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon e \in G) \geq -I_e(G).$$

Proof. Without loss of generality, we may assume that $I(G) < \infty$. We then fix ε and select $f \in G$ such that $I_e(f) < I_e(G) + \varepsilon$. Then, we may find some $\delta > 0$ and a subdivision $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_k < 1]$ consisting of continuity points of f such that $\{g \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1] : \max_{1 \leq i \leq k} |g(t_i) - f(t_i)| < \delta\}$ is contained in G . We deduce that

$$\mathbb{P}(\varepsilon e \in G) \geq \mathbb{P}(\varepsilon(e_{t_1}, \dots, e_{t_k}) \in G')$$

where G' is the open set $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - f(t_i)| < \delta\}$. By Proposition 6.3.1, we obtain that

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon e \in G) \geq - \inf_{(x_1, \dots, x_k) \in G'} J_\sigma(x_1, \dots, x_k).$$

Letting $\delta \rightarrow 0$, we conclude that

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\varepsilon e \in G) \geq -I_e^\sigma(f) \geq -I_e(f) \geq -I_e(G) - \varepsilon,$$

as desired. □

§ 6.6. Consequences of the LDP for Stable Excursions

In this section, we prove the remaining statements: Theorem 6.1.4, Corollaries 6.1.5 and 6.1.6, and Proposition 6.1.3.

§ 6.6.1. Proof of Theorem 6.1.4

We follow the approach of Fill and Janson [FJ09] closely. First, a direct consequence of the fact that I_e is a good rate function is the following.

Lemma 6.6.1. *The set K_{ex} defined at (6.1.6) is a compact subset of $D_{\text{ex}}[0, 1]$.*

The argument for the proof of Theorem 6.1.4 is the same as [FJ09, p.415]. We apply the contraction principle ([Kal02, Theorem 27.11], [DZ98, Theorem 4.2.1]) to the continuous functional $\Phi : D_{\text{ex}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. This entails that $\varepsilon X = \Phi(\varepsilon e)$ satisfies a LDP in $[0, \infty)$ with the good rate function whose value at $x > 0$ is given by

$$\begin{aligned} \inf_{f \in H_{\text{ex}} : \Phi(f) = x} c_\alpha \|f'_\downarrow\|_{\alpha'}^{\alpha'} &= \inf_{f \in H_{\text{ex}} : \Phi(f) \neq 0} c_\alpha \left\| \frac{x f'_\downarrow}{\Phi(f)} \right\|_{\alpha'}^{\alpha'} \\ &= \inf_{f \in H_{\text{ex}} : \Phi(f) \neq 0} c_\alpha \left(\frac{x}{\Phi(f)} \right)^{\alpha'} \|f'_\downarrow\|_{\alpha'}^{\alpha'} \\ &= \inf_{f \in H_{\text{ex}} : \Phi(f) \neq 0} c_\alpha \left(\frac{x}{\Phi(f) \|f'_\downarrow\|_{\alpha'}} \right)^{\alpha'} \\ &= \inf_{f \in H_{\text{ex}} : \|f'_\downarrow\|_{\alpha'} = 1, \Phi(f) \neq 0} c_\alpha \left(\frac{x}{\Phi(f)} \right)^{\alpha'} \\ &= c_\alpha \left(\frac{x}{\gamma_\Phi} \right)^{\alpha'}. \end{aligned}$$

Taking $\Lambda = (1, \infty)$ and $\varepsilon = x^{-1}$ in the definition of an LDP proves (6.1.7). Finally, (6.1.8) and (6.1.9) follow from (6.1.7) by [JC04, Theorem 4.5]. This concludes the proof of Theorem 6.1.4. \square

§ 6.6.2. Applications

Corollaries 6.1.5 and 6.1.6 are obtained by applying Theorem 6.1.4 to the area and supremum functionals, which are both positive-homogeneous and continuous for the M1 topology.

Area under e . Let us compute the constant γ_Φ for the area under the normalized excursion \mathcal{A}_{ex} , corresponding to the functional $\Phi(f) = \int_0^1 f(s) ds$. So let

$$\gamma_f = \max \left\{ \int_0^1 f(u) du : f \in K_{\text{ex}} \right\}.$$

Lemma 6.6.2 (Constant γ_Φ for \mathcal{A}_{ex}). *We have $\gamma_f = (\alpha + 1)^{-1/\alpha}$.*

Proof. Let us first find an upper bound. Let $f \in K_{\text{ex}}$. Note that, by an integration by parts,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(s) ds &= \int_0^1 f_\uparrow(s) ds - \int_0^1 f_\downarrow(s) ds \\ &= \int_0^1 (f_\uparrow(s) - f_\downarrow(1)) ds + \int_0^1 s f'_\downarrow(s) ds \\ &\leq \left(\int_0^1 |f'_\downarrow(s)|^{\alpha'} ds \right)^{1/\alpha'} \left(\int_0^1 s^\alpha ds \right)^{1/\alpha} \leq (\alpha + 1)^{-1/\alpha}, \end{aligned}$$

where in the third line we have used the fact that $f_\uparrow(1) - f_\downarrow(1) = f(1) = 0$, which entails that $f_\uparrow \leq f_\downarrow(1)$, and then Hölder's inequality. We obtain $\gamma_f \leq (\alpha + 1)^{-1/\alpha}$.

Now note that $f(s) = \frac{(\alpha+1)^{1/\alpha'}}{\alpha} (1 - s^\alpha)$ lies in K_{ex} and has

$$\int_0^1 f(s) ds = (\alpha + 1)^{-1/\alpha},$$

so that $\gamma_f = (\alpha + 1)^{-1/\alpha}$ is indeed the optimum. \square

Supremum of \mathfrak{e} . We now compute the constant γ_Φ corresponding to the functional $\sup_{0 \leq t \leq 1} f(t)$ which is continuous for the M1 Skorokhod topology.

Lemma 6.6.3 (Constant γ_Φ for $\sup \mathfrak{e}$). *We have $\gamma_{\sup} = 1$.*

Proof. Remark first that if $f \in \mathbf{K}_{\text{ex}}$, then using the fact $f_\uparrow \leq f_\downarrow(1)$ we get that for all $t \geq 0$,

$$f(t) \leq f_\downarrow(1) - f_\downarrow(t) = \int_t^1 |f'_\downarrow(s)| ds \leq \int_0^1 |f'_\downarrow(s)| ds \leq \left(\int_0^1 |f'_\downarrow(s)|^{\alpha'} ds \right)^{1/\alpha'} = 1,$$

where we used Hölder's inequality in the last inequality. We thus obtain the upper bound $\gamma_{\sup} \leq 1$.

Now note that the function $f(t) = 1 - t$ lies in \mathbf{K}_{ex} and satisfies $\sup f = 1$, so that $\gamma_{\sup} = 1$. \square

§ 6.6.3. Negative Results for the Skorokhod J1 Topology

Here we give a sketch of proof for Proposition 6.1.3. The idea is that it is costless for the process $\varepsilon \mathfrak{e}$ to make macroscopic jumps within small time intervals, which prevents it from being concentrated in J1-compact sets. Fix $\delta > 0$. We note that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon \mathfrak{e}_\delta \in [1, 2], \varepsilon \mathfrak{e}_{2\delta} \in [3, 4]) &= \alpha \Gamma \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \int_{1/\varepsilon}^{2/\varepsilon} dx_1 j_\delta(x_1) \int_{3/\varepsilon}^{4/\varepsilon} dx_2 p_\delta^{(0, \infty)}(x_1, x_2) q_{x_2}(1 - 2\delta) \\ &\geq C(\delta) \varepsilon^{2\alpha+2} \exp(-c_\alpha(3/\varepsilon(1 - 2\delta))^{\alpha'}), \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

where we have used Lemmas 6.3.2, 6.3.3 and (6.3.2) to uniformly bound $p_\delta^{(0, \infty)}(x_1, x_2)$ from below by some constant times $\varepsilon^{\alpha+1}$, then (6.3.3) to uniformly bound $q_{x_2}(1 - 2\delta)$ from below by some constant times $\exp(-c_\alpha(3/\varepsilon(1 - 2\delta))^{\alpha'})$, and finally (6.3.6) to bound the remaining integral. Setting $\omega_{J1}(f, \eta) = \sup_{s < t < u, u - s \leq \eta} |f(u) - f(t)| \wedge |f(t) - f(s)|$, we obtain

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log \mathbb{P}(\omega_{J1}(\varepsilon \mathfrak{e}, 2\delta) \geq 1) \geq -3^{\alpha'} c_\alpha.$$

Since a J1-relatively compact set is included in a set of the form $\{f : \omega_{J1}(f, \delta) < m(\delta), \forall \delta > 0\}$, where $m(\delta)$ is a function that vanishes at 0, this implies that the laws of $\varepsilon \mathfrak{e}$ cannot be exponentially tight in J1.

§ 6.7. LDP for the α -Stable Lévy Bridge

In this part, we adapt the proofs of the LDPs for the normalized excursion in order to get LDP for the Lévy bridge. Roughly speaking the process $\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})}$, called the $(0, 0) \rightarrow (1, \mathfrak{a})$ bridge, is obtained by conditioning L to be equal to \mathfrak{a} at time 1. This is obviously a degenerate conditioning, however, it can be obtained by performing a space-time \mathfrak{h} -transform *w.r.t.* the function $\frac{p_{1-t}(\mathfrak{a} - L_t)}{p_1(\mathfrak{a})}$ (see for instance [Lig68]). This means that the law of $\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})}$ may be defined by

$$\mathbb{P}^{\text{br}}[\Lambda] := \mathbb{E} \left[\frac{p_{1-t}(\mathfrak{a} - L_t)}{p_1(\mathfrak{a})} \mathbb{1}_\Lambda \right], \quad \forall \Lambda \in \mathcal{F}_t, \quad t \in [0, 1]. \quad (6.7.1)$$

See [Cha97] or [Ber96, Chapter VIII] for a rigorous construction.

§ 6.7.1. Large deviations for the Finite-Dimensional Marginal Distributions

This part is devoted to prove that the finite-dimensional marginals of $\mathfrak{b}^{(\mathbf{a})}$ satisfy a LDP on \mathbb{R} .

Proposition 6.7.1 (LDP for the marginals of the stable bridge). *Let $(\mathbf{a}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ be such that $\varepsilon \mathbf{a}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{a}$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Let $[0 < t_1 < \dots < t_n < 1]$ be a finite partition of $[0, 1]$. Under \mathbb{P} the laws of $\varepsilon(\mathfrak{b}_{t_1}^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}, \dots, \mathfrak{b}_{t_n}^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})$ satisfy a LDP in \mathbb{R}^n with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function*

$$J_{\mathfrak{b}, \mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) = c_\alpha \left(\left(\frac{(-x_1)_+^\alpha}{t_1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{(x_i - x_{i+1})_+^\alpha}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \left(\frac{(x_n - \mathbf{a})_+^\alpha}{1 - t_n} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - (\mathbf{a}_-)^{\alpha'} \right).$$

The proof of this proposition is similar to that of Proposition 6.3.1, but is technically simpler and we only explain where the argument differs. It is not difficult to check that $J_{\mathfrak{b}, \mathbf{a}}$ is a good rate function, so [Ser97, Lemma 5] applies. We use it in the same way as in the proof of Proposition 6.3.1, using the expression (6.2.6) for the marginals laws of the bridge, and the bounds (6.3.3) for stable transition densities. The term $-(\mathbf{a}_-)^{\alpha'}$ arising in the definition of $J_{\mathfrak{b}, \mathbf{a}}$ arises from the contribution of the density $p_1(\mathbf{a}_\varepsilon)$ in the denominator of (6.2.6): by (6.3.3) we have

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{\alpha'} \log p_1(\mathbf{a}_\varepsilon) = -c_\alpha (\mathbf{a}_-)^{\alpha'}.$$

§ 6.7.2. Exponential Tightness for the Stable Bridge

Proposition 6.7.2 (Exponential tightness of the Stable Bridge). *Under \mathbb{P} the laws of $(\varepsilon \mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})_{t \in [0, 1]}$ as $\varepsilon \downarrow 0$ are exponentially tight with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$.*

Proposition 6.7.2 is a direct consequence of the tightness criterion in (Càdlàg $[0, 1]$, dist) Theorem 6.2.2 and the following lemma.

Lemma 6.7.3. *There exists a constant $C = C(\alpha) > 0$ such that for every $s, t, u \in [0, 1]$ with $s \leq t \leq u$ and $\lambda \geq 0$,*

$$\mathbb{E} \left[\exp(\lambda M(\mathfrak{b}_s^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}, \mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}, \mathfrak{b}_u^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})) \right] \leq C \exp((u - s)\lambda^\alpha). \quad (6.7.2)$$

Proof. Splitting the expectation into five terms as in the beginning of the proof of Proposition 6.4.1, we get the following bound

$$\mathbb{E} \left[\exp(\lambda M(\mathfrak{b}_s^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}, \mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}, \mathfrak{b}_u^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})) \right] \leq 2\mathbb{E} \left[e^{\lambda(\mathfrak{b}_s^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} - \mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} \leq \mathfrak{b}_s^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}\}} \right] + 2\mathbb{E} \left[e^{\lambda(\mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} - \mathfrak{b}_u^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{b}_u^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} \leq \mathfrak{b}_t^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}\}} \right] + 1.$$

We see that the last two terms are of the same form $\mathbb{E}[e^{\lambda(\mathfrak{b}_\sigma^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} - \mathfrak{b}_\rho^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{b}_\rho^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} \leq \mathfrak{b}_\sigma^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}\}}]$ where $\rho \leq \sigma$ with $\sigma - \rho \leq u - s$. For such ρ, σ , we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\lambda(\mathfrak{b}_\sigma^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} - \mathfrak{b}_\rho^{(\mathbf{a}_\varepsilon)})} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{b}_\rho^{(\mathbf{a}_\varepsilon)} \leq \mathfrak{b}_\sigma^{(\mathbf{a}_\varepsilon)}\}} \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy p_\rho(x) p_{\sigma-\rho}(y-x) \frac{p_{1-\sigma}(\mathbf{a}_\varepsilon - y)}{p_1(\mathbf{a}_\varepsilon)} e^{\lambda(x-y)} \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} \\ &= \frac{1}{p_1(\mathbf{a}_\varepsilon)} \int_0^\infty dz p_{\sigma-\rho}(\mathbf{a}_\varepsilon - z) e^{\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} dx p_\rho(x) p_{1-\sigma}(z-x), \end{aligned}$$

where we have used the change of variables $z = x - y + \mathbf{a}_\varepsilon$. It remains to show that the last integral in x is uniformly bounded over $z \geq 0$, $0 \leq \rho < \sigma \leq 1$. Indeed this gives the existence of a constant $C < \infty$

such that

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda(\mathfrak{b}_\sigma^{(a_\varepsilon)} - \mathfrak{b}_\rho^{(a_\varepsilon)})} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{b}_\rho^{(a_\varepsilon)} \leq \mathfrak{b}_\sigma^{(a_\varepsilon)}\}} \right] \leq C \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \mathfrak{b}_{\sigma-\rho}^{(a_\varepsilon)}} \right] = C \exp((\sigma - \rho)\lambda^\alpha),$$

which gives the result.

However, by the cyclic invariance of the increments of $\mathfrak{b}^{(a)}$, which is a direct consequence of (6.2.6), we see that it suffices to check this boundedness assumption for $0 \leq \rho < \sigma \leq 1/2$ say. For such σ, ρ we have

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p_\rho(x) p_{1-\sigma}(z-x) &= (1-\sigma)^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p_\rho(x) p_1\left(\frac{z-x}{(1-\sigma)^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \\ &\leq 2^{\frac{1}{\alpha}} \|p_1\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p_\rho(x) \\ &= 2^{\frac{1}{\alpha}} \|p_1\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \rho^{-\frac{1}{\alpha}} p_1\left(\frac{x}{\rho^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \\ &= 2^{\frac{1}{\alpha}} \|p_1\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p_1(x), \end{aligned}$$

where the last integral does not depend on ρ . □

§ 6.7.3. Proof of Theorem 6.1.7

We may finally prove Theorem 6.1.7 using Proposition 6.7.1 and Proposition 6.7.2. The scheme of proof is exactly the same as that in Section 6.5: by the exponential tightness, Theorem 6.1.7 is then a direct consequence of the following proposition.

Proposition 6.7.4. *The laws of $(\varepsilon \mathfrak{b}_t^{(a_\varepsilon)})_{t \in [0,1]}$ satisfy a LDP in $(\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1], \mathcal{W})$ as $\varepsilon \downarrow 0$ with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function $I_{\mathfrak{b},a}$.*

We will give a brief account, only pointing out the places where the formulas differ.

Recall that \mathfrak{S} denotes the set of all finite subdivisions of $[0,1]$, and for $\sigma = [0 < t_1 < \dots < t_n < 1]$, and for $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{b},a}^\sigma(x_1, \dots, x_n) &= c_\alpha \left(t_1 \left(\frac{(-x_1)_+}{t_1} \right)^{\alpha'} + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left(\frac{(x_i - x_{i+1})_+}{t_{i+1} - t_i} \right)^{\alpha'} \right. \\ &\quad \left. + (1 - t_n) \left(\frac{(x_n - a)_+}{1 - t_n} \right)^{\alpha'} - (a_-)^{\alpha'} \right). \end{aligned}$$

By the Dawson-Gärtner theorem [DZ98, Theorem 4.6.1], the laws of $(\varepsilon \mathfrak{b}_t^{(a_\varepsilon)})_{t \in [0,1]}$ satisfy a LDP in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (with the product topology) as $\varepsilon \downarrow 0$, with speed $\varepsilon^{-\alpha'}$ and good rate function

$$\tilde{I}_{\mathfrak{b},a}(f) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} J_{\mathfrak{b},a}^\sigma(f(t_1), \dots, f(t_n)). \quad (6.7.3)$$

However the same problem holds for $\tilde{I}_{\mathfrak{b},a}$: the domain of this rate function is not a space of càdlàg function.

The first step is to prove the restriction to $\mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$ of $\tilde{I}_{\mathfrak{b},a}$ leads to the expression of $I_{\mathfrak{b},a}$ given in Theorem 6.1.7. To do so we can easily adapt the proof of Proposition 6.5.2 to get the following proposition. For a subdivision $\sigma = (t_1, \dots, t_n)$ and $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0,1]$, define $I_{\mathfrak{b},a}^\sigma(f) = J_{\mathfrak{b},a}^\sigma(f(t_1), \dots, f(t_n))$.

Proposition 6.7.5. *A function $f \in \mathbb{C}\text{àdlàg}[0, 1]$ with $f(1) = \mathbf{a}$ is in $H_{\text{br}}^{(\mathbf{a})}$ if and only if*

$$M_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}(f) := \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} I_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}^{\sigma}(f) < \infty.$$

In this case, we have

$$M_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}(f) = I_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}(f),$$

and consequently, the functions $I_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}$ and $\tilde{I}_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}$.

Now the proof of Proposition 6.7.4 is a rereading of proofs of Lemmas 6.5.3, 6.5.4, 6.5.5, 6.5.6.

Finally, Theorem 6.1.8 is then deduced from Theorem 6.1.7 along the same lines as in Section 6.6.2.

* * *

B | Appendix of Part III

First-Passage Lévy Bridge & Simulations

...in which we give a formal definition of the first-passage Lévy bridge and explain briefly how simulate bridges and excursions of α -stable Lévy processes without negative jumps.

§ B.1. First-Passage Stable Lévy Bridge

In this part we introduce formally the *first-passage Lévy bridge* defined in Section 6.2.1. The results we show here are already known for the Brownian bridge, and follows a standard approach. However because of the lack of references in the context of Lévy processes, we will give complete proof for the self-containment.

Denote $\mathbb{f}_\delta^{x \rightarrow 0}$ the *first-passage Lévy bridge* on $[0, \delta]$ from $x > 0$ to 0. Informally $\mathbb{f}_\delta^{x \rightarrow 0}$ is an α -stable Lévy bridge without negative jumps starting from x and conditioned on hitting 0 for the first time at time δ , that is

$$\mathbb{f}_\delta^{x \rightarrow 0} := [(\mathbb{L}_s)_{0 \leq s \leq \tau_0} \mid \tau_0 = \delta, L_0 = x].$$

Recall from (6.2.5), we define the law of the first-passage Lévy bridge by letting

$$\mathbb{E} \left[F \left((\mathbb{f}_\delta^{x \rightarrow 0}(t))_{t \in [0, \delta']} \right) \right] = \mathbb{E}_x \left[F((L_t)_{t \in [0, \delta']}) \frac{q_{L_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta')} \mathbb{1}_{\{\tau_0 > \delta'\}} \mathbb{1}_{\{\mathbb{L}_{\delta'} > 0\}} \right] \quad (\text{B.1.1})$$

for all $0 \leq \delta' < \delta$, for all bounded $\mathcal{F}_{\delta'}$ -measurable functional F , which is equivalent to

$$\mathbb{P}(\mathbb{f}_\delta^{x \rightarrow 0} \in \Lambda_{\delta'}) = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbb{L} \in \Lambda_{\delta'}, \tau_0 > \delta', \mathbb{L}_{\delta'} > 0\}} \frac{q_{L_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta)} \right] \quad (\text{B.1.2})$$

for all $0 \leq \delta' < \delta$, and all $\Lambda_{\delta'} \in \mathcal{F}_{\delta'}$. These formulas set the finite-dimensional laws of the first-passage Lévy bridge. Because its law is absolutely continuous with respect to the laws of \mathbb{L} on every $[0, \delta']$, $\delta' < \delta$, the only problem arises at time δ .

Lemma B.1.1. *The probability measure which is defined on each $\mathcal{F}_{\delta'}$, $\delta' \in [0, \delta)$ by (B.1.1) is a regular version of the conditional law of $(\mathbb{L}_s)_{0 \leq s \leq \tau_0}$ given $\tau_0 = \delta$ and $L_0 = x$, in the sense that for all $\delta' > 0$, for Leb-a.e. $\delta > \delta'$,*

$$\mathbb{P}(\mathbb{f}_\delta^{x \rightarrow 0} \in \Lambda_{\delta'}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_x(\mathbb{L} \in \Lambda_{\delta'} \mid |\tau_0 - \delta| < \varepsilon).$$

Proof. Let $\delta' < \delta$, $\Lambda_{\delta'} \in \mathcal{F}_{\delta'}$ and $\varepsilon < \delta - \delta'$. We have from the Markov property

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'} \mid |\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon) &= \frac{\mathbb{P}_x(\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, |\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)}{\mathbb{P}_x(|\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_x(|\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, |\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon\}} \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_x(|\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, \mathbf{T}_0 > \delta'\}} \mathbb{1}_{\{|\mathbf{T}_0 - (\delta - \delta')| < \varepsilon\}} \circ \theta_{\delta'} \mid \mathcal{F}_{\delta'} \right] \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_x(|\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, \mathbf{T}_0 > \delta'\}} \mathbb{P}_{\mathbf{L}_{\delta'}}(|\mathbf{T}_0 - (\delta - \delta')| < \varepsilon) \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, \mathbf{T}_0 > \delta'\}} \frac{\mathbb{P}_{\mathbf{L}_{\delta'}}(|\mathbf{T}_0 - (\delta - \delta')| < \varepsilon)}{\mathbb{P}_x(|\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)} \right].
\end{aligned}$$

Moreover for all $z > 0$, we have

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}_z(|\mathbf{T}_0 - (\delta - \delta')| < \varepsilon)}{\mathbb{P}_x(|\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon)} = \frac{q_z(\delta - \delta')}{q_x(\delta)}. \quad (\text{B.1.3})$$

We thus get from Fatou's lemma

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_x(\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'} \mid |\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon) \geq \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, \mathbf{T}_0 > \delta'\}} \frac{q_{\mathbf{L}_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta)} \right].$$

Moreover taking $\Lambda_{\delta'}^c$, instead of $\Lambda_{\delta'}$ in the last inequality yields to

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_x(\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'} \mid |\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon) &= 1 - \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_x(\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}^c \mid |\mathbf{T}_0 - \delta| < \varepsilon) \\
&\leq 1 - \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}^c, \mathbf{T}_0 > \delta'\}} \frac{q_{\mathbf{L}_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta)} \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{L} \in \Lambda_{\delta'}, \mathbf{T}_0 > \delta'\}} \frac{q_{\mathbf{L}_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta)} \right]
\end{aligned}$$

where in the last equality, we use the following identity

$$\mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{\mathbf{T}_0 > \delta'\}} \frac{q_{\mathbf{L}_{\delta'}}(\delta - \delta')}{q_x(\delta)} \right] = 1.$$

This completes the proof. \square

From the previous lemma and using a standard monotone class argument, we can deduce that the law of $f_{\delta}^{x \rightarrow 0}$ admits a unique extension on the σ -field \mathcal{F}_{δ^-} and such that $f_{\delta}^{x \rightarrow 0}(\delta^-) = 0$ *a.s.*

§ B.2. Simulations of Bridges and Excursions of α -Stable Lévy Processes without Negative Jumps

In this part we explain briefly how simulate the main objects of Part III. The main difficulty of simulation of stable Lévy process is that there are no explicit analytic expressions for the transition function except in the very special case of Brownian motion (where $\alpha = 2$) or Cauchy process (where $\alpha = 1$). However

we can approximate the stable Lévy process by a discrete time stochastic process using a kernel density estimation (see [WW95]) or we may also consider exact simulation on a grid to approximate the process.

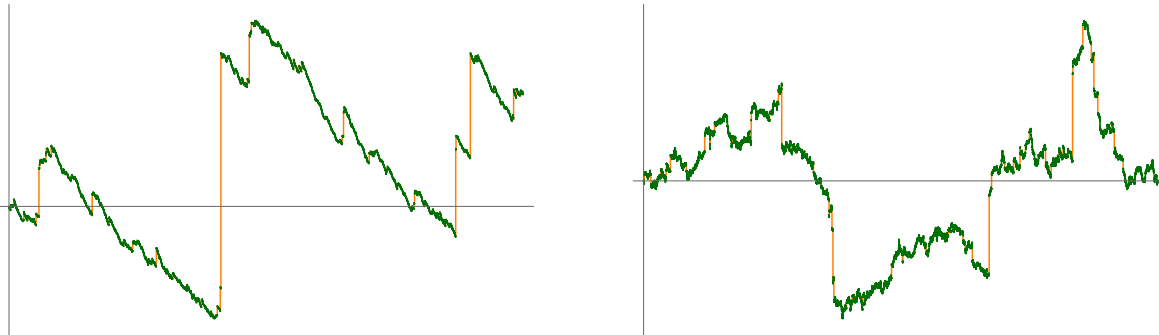


Figure B.1 – On the left is a simulation of a $\frac{4}{3}$ -stable Lévy bridge without negative jumps. On the right is simulation of a $\frac{3}{2}$ -stable symmetric Lévy process. For a better visibility, the jumps are displayed in orange.

Let us now describe simple path constructions⁵⁵ of bridges and excursions from the stable Lévy process without negative jumps.

Denote $L = (L_t)_{0 \leq t \leq 1}$ an α -stable Lévy process on the unit time interval and

$$g = \sup\{t < 1 : L_t = 0\}$$

the last passage time at 0. Then the process b defined by

$$b_t = g^{-1/\alpha} L_{gt}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

has the law of the stable Lévy bridge defined previously. See for instance [Ber96, Chapter VIII. Theorem 12].

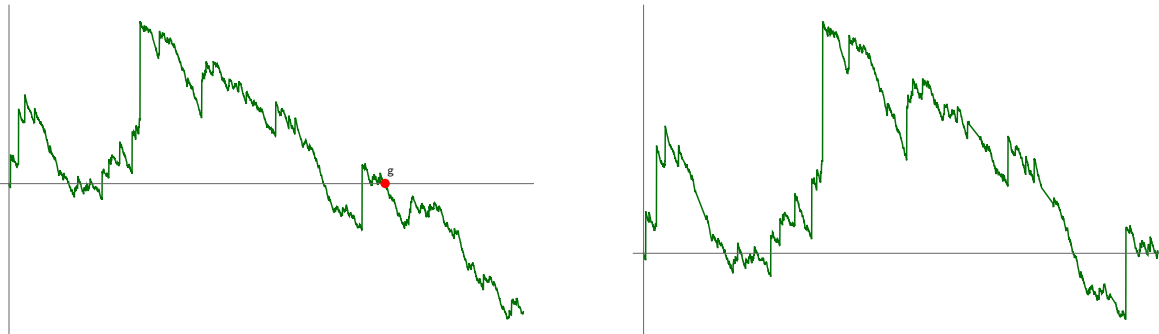


Figure B.2 – On the left is a simulation of a $\frac{4}{3}$ -stable Lévy process without negative jumps. The red dot is the last passage time at 0 of the process. On the right is the stable bridge constructed from the previous process thanks to a proper rescaling.

Instead of giving a similar construction of the excursion from the Lévy process itself, which which can be found for instance in [Ber96, Chapter VIII. Proposition 15], we present a path construction from the

⁵⁵Similar pathway constructions in the case of the Brownian motion may be found in [BP94].

stable bridge given in [Cha97, Théorème 4]. Let \mathfrak{b} be a stable bridge and denote m the hitting time of the absolute minimum of \mathfrak{b} in the time interval $[0, 1]$. Set

$$e_t = \begin{cases} \mathfrak{b}_{m+t} - \mathfrak{b}_m & \text{if } 0 \leq t \leq 1 - m \\ \mathfrak{b}_{m+t-1} - \mathfrak{b}_m & \text{if } 1 - m \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Then the process e has the law of the stable excursion.

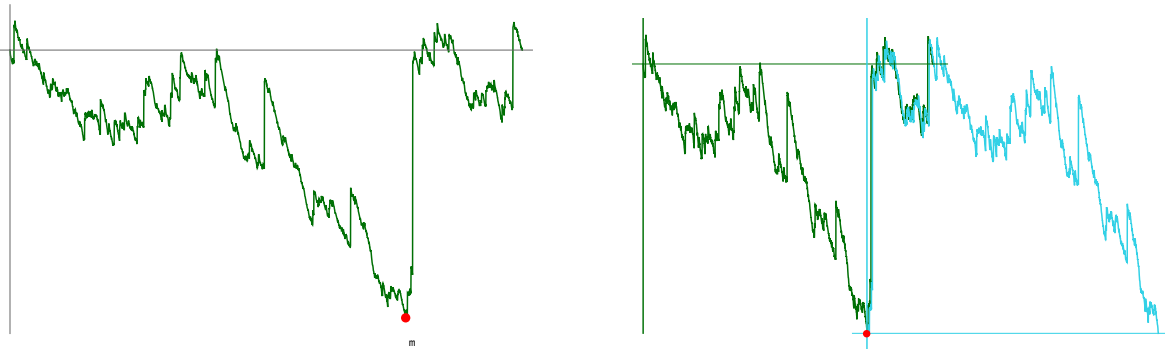


Figure B.3 – On the left is a simulation of a $\frac{4}{3}$ -stable Lévy bridge without negative jumps. The red dot is the absolute minimum value of the bridge. On the right is an “artistic view” of the construction of a stable excursion (in blue) from a stable bridge (in green).

* * *

Bibliographie

« Vous avez terminé ?

Ça tombe bien, j'ai fini mon chapitre.»

Le Capitaine, Ratafia T.1 Mon nom est Capitaine.

Bibliographie

- [ABDJ13] Louigi Addario-Berry, Luc Devroye, and Svante Janson, *Sub-Gaussian tail bounds for the width and height of conditioned Galton-Watson trees*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 2, 1072–1087. MR 3077536
- [AGHdH19] Luca Avena, Hakan Güldaş, Remco van der Hofstad, and Frank den Hollander, *Random walks on dynamic configuration models: a trichotomy*, Stochastic Process. Appl. **129** (2019), no. 9, 3360–3375. MR 3985565
- [AGvdHdH18] Luca Avena, Hakan Güldaş, Remco van der Hofstad, and Frank den Hollander, *Mixing times of random walks on dynamic configuration models*, Ann. Appl. Probab. **28** (2018), no. 4, 1977–2002. MR 3843821
- [AL07] David Aldous and Russell Lyons, *Processes on unimodular random networks*, Electron. J. Probab. **12** (2007), no. 54, 1454–1508. MR 2354165
- [Ald91a] David Aldous, *The continuum random tree. I*, Ann. Probab. **19** (1991), no. 1, 1–28. MR 1085326
- [Ald91b] ———, *The continuum random tree. II. An overview*, Stochastic analysis (Durham, 1990), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 167, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, pp. 23–70. MR 1166406
- [Ald93] ———, *The continuum random tree. III*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 1, 248–289. MR 1207226
- [AN72] Krishna B. Athreya and Peter E. Ney, *Branching processes*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. MR 0373040
- [AS03] Omer Angel and Oded Schramm, *Uniform infinite planar triangulations*, Comm. Math. Phys. **241** (2003), no. 2-3, 191–213. MR 2013797
- [AS04] David Aldous and J. Michael Steele, *The objective method: probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence*, Probability on discrete structures, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 110, Springer, Berlin, 2004, pp. 1–72. MR 2023650
- [ATV14] Miklós Abért, Andreas Berthold Thom, and Bálint Virág, *Benjamini-schramm convergence and pointwise convergence of the spectral measure*, 2014.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1835418

- [BC78] Edward A. Bender and E. Rodney Canfield, *The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences*, J. Combinatorial Theory Ser. A **24** (1978), no. 3, 296–307. MR 505796
- [BdH15] Anton Bovier and Frank den Hollander, *Metastability*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 351, Springer, Cham, 2015, A potential-theoretic approach. MR 3445787
- [Ber96] Jean Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. MR 1406564
- [BHJ92] A. D. Barbour, Lars Holst, and Svante Janson, *Poisson approximation*, Oxford Studies in Probability, vol. 2, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992, Oxford Science Publications. MR 1163825
- [Bil68] Patrick Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968. MR 0233396
- [BJR07] Béla Bollobás, Svante Janson, and Oliver Riordan, *The phase transition in inhomogeneous random graphs*, Random Structures Algorithms **31** (2007), no. 1, 3–122. MR 2337396
- [BLS15] Itai Benjamini, Russell Lyons, and Oded Schramm, *Unimodular random trees*, Ergodic Theory Dynam. Systems **35** (2015), no. 2, 359–373. MR 3316916
- [BM13a] A. A. Borovkov and A. A. Mogul'skiĭ, *Conditional principles of moderately large deviations for trajectories of random walks and processes with independent increments*, Mat. Tr. **16** (2013), no. 2, 45–68. MR 3184037
- [BM13b] ———, *Inequalities and principles of large deviations for the trajectories of processes with independent increments*, Sibirsk. Mat. Zh. **54** (2013), no. 2, 286–297. MR 3088596
- [BM14] ———, *Large deviation principles for random walk trajectories. III*, Theory Probab. Appl. **58** (2014), no. 1, 25–37. MR 3267282
- [Bol80] Béla Bollobás, *A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs*, European J. Combin. **1** (1980), no. 4, 311–316. MR 595929
- [Bor67] A. A. Borovkov, *Boundary value problems for random walks and large deviations in function spaces*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **12** (1967), 635–654. MR 0243585
- [BP94] Jean Bertoin and Jim Pitman, *Path transformations connecting Brownian bridge, excursion and meander*, Bull. Sci. Math. **118** (1994), no. 2, 147–166. MR 1268525
- [BS01] Itai Benjamini and Oded Schramm, *Recurrence of distributional limits of finite planar graphs*, Electron. J. Probab. **6** (2001), no. 23, 13. MR 1873300
- [Cay89] Arthur Cayley, *A theorem on trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. **23** (1889), 376–378.
- [Cha97] L. Chaumont, *Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables*, Bull. Sci. Math. **121** (1997), no. 5, 377–403. MR 1465814

- [Che52] Herman Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Statistics **23** (1952), 493–507. MR 57518
- [Cra38] H. Cramér, *Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités.*, Actual. sci. industr. 736, 5-23. (Confér. internat. Sci. math. Univ. Genève. Théorie des probabilités. III: Les sommes et les fonctions de variables aléatoires.) (1938)., 1938.
- [Cra16] Harry Crane, *Dynamic random networks and their graph limits*, Ann. Appl. Probab. **26** (2016), no. 2, 691–721. MR 3476622
- [Cra17] ———, *Exchangeable graph-valued Feller processes*, Probab. Theory Related Fields **168** (2017), no. 3-4, 849–899. MR 3663633
- [CS15] Van Hao Can and Bruno Schapira, *Metastability for the contact process on the configuration model with infinite mean degree*, Electron. J. Probab. **20** (2015), no. 26, 22. MR 3325096
- [Cur21] Nicolas Curien, *Random graphs, the local convergence point of view*, Lecture Notes available at <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~nicolas.curien/enseignement.html>, 2021.
- [DGM23] Léo Dort, Christina Goldschmidt, and Grégory Miermont, *Large deviations principle for the normalized excursion of an α -stable Lévy process without negative jumps*, 2023+, In preparation.
- [DJ23] Léo Dort and Emmanuel Jacob, *Local weak limit of dynamical inhomogeneous random graphs*, arXiv: 2303.17437 (2023).
- [DM10] Amir Dembo and Andrea Montanari, *Gibbs measures and phase transitions on sparse random graphs*, Braz. J. Probab. Stat. **24** (2010), no. 2, 137–211. MR 2643563
- [Duq03] Thomas Duquesne, *A limit theorem for the contour process of conditioned Galton-Watson trees*, Ann. Probab. **31** (2003), no. 2, 996–1027. MR 1964956
- [DW17] Thomas Duquesne and Minmin Wang, *Decomposition of Lévy trees along their diameter*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 2, 539–593. MR 3634265
- [DZ98] Amir Dembo and Ofer Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, second ed., Applications of Mathematics (New York), vol. 38, Springer-Verlag, New York, 1998. MR 1619036
- [EG99] Peter Eichelsbacher and Malte Grunwald, *Exponential tightness can fail in the strong topology*, Statist. Probab. Lett. **41** (1999), no. 1, 83–86. MR 1659304
- [EK86] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz, *Markov processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986, Characterization and convergence. MR 838085
- [ER59] P. Erdős and A. Rényi, *On random graphs. I*, Publ. Math. Debrecen **6** (1959), 290–297. MR 120167

- [ER60] ———, *On the evolution of random graphs*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **5** (1960), 17–61. MR 125031
- [ER61a] ———, *On the evolution of random graphs*, Bull. Inst. Internat. Statist. **38** (1961), 343–347. MR 148055
- [ER61b] ———, *On the strength of connectedness of a random graph*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 261–267. MR 130187
- [FJ09] James Allen Fill and Svante Janson, *Precise logarithmic asymptotics for the right tails of some limit random variables for random trees*, Ann. Comb. **12** (2009), no. 4, 403–416. MR 2496125
- [Gan98] Nina Gantert, *Functional Erdős-Renyi laws for semiexponential random variables*, Ann. Probab. **26** (1998), no. 3, 1356–1369. MR 1640348
- [GGN13] Ori Gurel-Gurevich and Asaf Nachmias, *Recurrence of planar graph limits*, Ann. of Math. (2) **177** (2013), no. 2, 761–781. MR 3010812
- [Gil59] E. N. Gilbert, *Random graphs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 1141–1144. MR 108839
- [GPS18] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm, *The scaling limits of near-critical and dynamical percolation*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20** (2018), no. 5, 1195–1268. MR 3790067
- [Gri81] G. R. Grimmett, *Random labelled trees and their branching networks*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **30** (1980/81), no. 2, 229–237. MR 607933
- [GRR14] Nina Gantert, Kavita Ramanan, and Franz Rembart, *Large deviations for weighted sums of stretched exponential random variables*, Electron. Commun. Probab. **19** (2014), no. 41, 14. MR 3233203
- [Har48] T. E. Harris, *Branching processes*, Ann. Math. Statistics **19** (1948), 474–494. MR 27465
- [Har63] Theodore E. Harris, *The theory of branching processes*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 119, Springer-Verlag, Berlin; Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963. MR 0163361
- [Har74] T. E. Harris, *Contact interactions on a lattice*, Ann. Probability **2** (1974), 969–988. MR 356292
- [HL78] Paul W. Holland and Samuel Leinhardt, *A dynamic model for social networks*, J. Mathematical Sociology **5** (1977/78), no. 1, 5–20. MR 0446596
- [Hof21] Remco van der Hofstad, *The giant in random graphs is almost local*, arXiv: 2303.17437 (2021).
- [Hof23] ———, *Random graphs and complex networks Volume 2*, Current version available at <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/>, 2023+.

- [HPS97] Olle Häggström, Yuval Peres, and Jeffrey E. Steif, *Dynamical percolation*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33** (1997), no. 4, 497–528. MR 1465800
- [HS20] Jonathan Hermon and Perla Sousi, *A comparison principle for random walk on dynamical percolation*, Ann. Probab. **48** (2020), no. 6, 2952–2987. MR 4164458
- [HUVV22] Marcelo Hilário, Daniel Ungaretti, Daniel Valesin, and Maria Eulália Vares, *Results on the contact process with dynamic edges or under renewals*, Electron. J. Probab. **27** (2022), Paper No. 91, 31. MR 4455874
- [JC04] Svante Janson and Philippe Chassaing, *The center of mass of the ISE and the Wiener index of trees*, Electron. Comm. Probab. **9** (2004), 178–187. MR 2108865
- [JLM19] Emmanuel Jacob, Amitai Linker, and Peter Mörters, *Metastability of the contact process on fast evolving scale-free networks*, Ann. Appl. Probab. **29** (2019), no. 5, 2654–2699. MR 4019872
- [JLM22] Emmanuel Jacob, Amitai Linker, and Peter Mörters, *The contact process on dynamical scale-free networks*, 2022.
- [JM17] Emmanuel Jacob and Peter Mörters, *The contact process on scale-free networks evolving by vertex updating*, R. Soc. Open Sci. **4** (2017), no. 5, May, 170081, 14. MR 3666161
- [Kal02] Olav Kallenberg, *Foundations of modern probability*, second ed., Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 2002. MR 1876169
- [KLM20] F. Kh. Klebaner, A. V. Logachev, and A. A. Mogul’skiĭ, *An extended large deviation principle for the trajectories of a process with independent increments on the half-line*, Problemy Peredachi Informatzii **56** (2020), no. 1, 63–79. MR 4113496
- [KM19] F. C. Klebaner and A. A. Mogul’skiĭ, *Large deviations for processes on half-line: random walk and compound Poisson*, Sib. Èlektron. Mat. Izv. **16** (2019), 1–20. MR 3912024
- [Kor17] Igor Kortchemski, *Sub-exponential tail bounds for conditioned stable Bienaymé-Galton-Watson trees*, Probab. Theory Related Fields **168** (2017), no. 1-2, 1–40. MR 3651047
- [Kri06] Maxim Krikun, *Local structure of random quadrangulations*, arXiv: 0512304 (2006).
- [Les19] Lasse Leskela, *Random graphs and complex networks statistics*, Available at https://math.aalto.fi/~lleskela/papers/Leskela_2019-03-27_Random_graphs_and_network_statistics.pdf, 2019.
- [LGLJ98] Jean-Francois Le Gall and Yves Le Jan, *Branching processes in Lévy processes: the exploration process*, Ann. Probab. **26** (1998), no. 1, 213–252. MR 1617047
- [Lig68] Thomas M. Liggett, *An invariance principle for conditioned sums of independent random variables*, J. Math. Mech. **18** (1968), 559–570. MR 0238373
- [LMSV21] Amitai Linker, Dieter Mitsche, Bruno Schapira, and Daniel Valesin, *The contact process on random hyperbolic graphs: metastability and critical exponents*, Ann. Probab. **49** (2021), no. 3, 1480–1514. MR 4255151

- [LR20] Amitai Linker and Daniel Remenik, *The contact process with dynamic edges on \mathbb{Z}* , Electron. J. Probab. **25** (2020), Paper No. 80, 21. MR 4125785
- [LS87] James Lynch and Jayaram Sethuraman, *Large deviations for processes with independent increments*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 2, 610–627. MR 885133
- [LS06] László Lovász and Balázs Szegedy, *Limits of dense graph sequences*, J. Combin. Theory Ser. B **96** (2006), no. 6, 933–957. MR 2274085
- [Lyo05] Russell Lyons, *Asymptotic enumeration of spanning trees*, Combin. Probab. Comput. **14** (2005), no. 4, 491–522. MR 2160416
- [Mog76] A. A. Mogul’skiĭ, *Large deviations for the trajectories of multidimensional random walks*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **21** (1976), no. 2, 309–323. MR 0420798
- [Mog93] ———, *Large deviations for processes with independent increments*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 1, 202–215. MR 1207223
- [Mog17] ———, *An extended large deviation principle for a process with independent increments*, Sibirsk. Mat. Zh. **58** (2017), no. 3, 660–672. MR 3712759
- [MR95] Michael Molloy and Bruce Reed, *A critical point for random graphs with a given degree sequence*, Proceedings of the Sixth International Seminar on Random Graphs and Probabilistic Methods in Combinatorics and Computer Science, “Random Graphs ’93” (Poznań, 1993), vol. 6, 1995, pp. 161–179. MR 1370952
- [MR98] ———, *The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence*, Combin. Probab. Comput. **7** (1998), no. 3, 295–305. MR 1664335
- [MS79] Ditlev Monrad and Martin L. Silverstein, *Stable processes: sample function growth at a local minimum*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **49** (1979), no. 2, 177–210. MR 543993
- [MVY13] Thomas Mountford, Daniel Valesin, and Qiang Yao, *Metastable densities for the contact process on power law random graphs*, Electron. J. Probab. **18** (2013), No. 103, 36. MR 3145050
- [Nag69a] A. V. Nagaev, *Integral limit theorems with regard to large deviations when Cramér’s condition is not satisfied. I*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **14** (1969), 51–63. MR 0247651
- [Nag69b] ———, *Integral limit theorems with regard to large deviations when Cramér’s condition is not satisfied. II*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **14** (1969), 203–216. MR 0247652
- [Nag69c] ———, *Limit theorems that take into account large deviations when Cramér’s condition is violated*, Izv. Akad. Nauk UzSSR Ser. Fiz.-Mat. Nauk **13** (1969), no. 6, 17–22. MR 0282396
- [Nev86] J. Neveu, *Arbres et processus de Galton-Watson*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **22** (1986), no. 2, 199–207. MR 850756
- [O’B99] George L. O’Brien, *Unusually large values for spectrally positive stable and related processes*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 2, 990–1008. MR 1698995

- [Pro21] Christophe Profeta, *The area under a spectrally positive stable excursion and other related processes*, Electron. J. Probab. **26** (2021), Paper No. 58, 21. MR 4254800
- [PSS18] Y. Peres, P. Sousi, and J. E. Steif, *Quenched exit times for random walk on dynamical percolation*, Markov Process. Related Fields **24** (2018), no. 5, 715–731. MR 4246022
- [PSS20] Yuval Peres, Perla Sousi, and Jeffrey E. Steif, *Mixing time for random walk on supercritical dynamical percolation*, Probab. Theory Related Fields **176** (2020), no. 3-4, 809–849. MR 4087484
- [Puh91] A. Puhalskii, *On functional principle of large deviations*, New trends in probability and statistics, Vol. 1 (Bakuriani, 1990), VSP, Utrecht, 1991, pp. 198–218. MR 1200917
- [PW97] Anatolii A. Puhalskii and Ward Whitt, *Functional large deviation principles for first-passage-time processes*, Ann. Appl. Probab. **7** (1997), no. 2, 362–381. MR 1442318
- [Rát12] Balázs Ráth, *Time evolution of dense multigraph limits under edge-conservative preferential attachment dynamics*, Random Structures Algorithms **41** (2012), no. 3, 365–390. MR 2967178
- [RBZ19] Chang-Han Rhee, Jose Blanchet, and Bert Zwart, *Sample path large deviations for Lévy processes and random walks with regularly varying increments*, Ann. Probab. **47** (2019), no. 6, 3551–3605. MR 4038038
- [Rio12] Oliver Riordan, *The phase transition in the configuration model*, Combin. Probab. Comput. **21** (2012), no. 1-2, 265–299. MR 2900063
- [Ros21] Raphaël Rossignol, *Scaling limit of dynamical percolation on critical Erdős-Rényi random graphs*, Ann. Probab. **49** (2021), no. 1, 322–399. MR 4203340
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, third ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1725357
- [Sat99] Ken-iti Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 68, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author. MR 1739520
- [Sch66] M. Schilder, *Some asymptotic formulas for Wiener integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **125** (1966), 63–85. MR 201892
- [Ser97] Laurent Serlet, *A large deviation principle for the Brownian snake*, Stochastic Process. Appl. **67** (1997), no. 1, 101–115. MR 1445046
- [Sko56] A. V. Skorohod, *Limit theorems for stochastic processes*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **1** (1956), 289–319. MR 0084897
- [Söd02] Bo Söderberg, *General formalism for inhomogeneous random graphs*, Phys. Rev. E (3) **66** (2002), no. 6, 066121, 6. MR 1953933

- [Söd03a] ———, *Properties of random graphs with hidden color*, Phys. Rev. E (3) **68** (2003), no. 2, 026107, 12. MR 2010072
- [Söd03b] ———, *Random graph models with hidden color*, Acta Physica Polonica **34** (2003), no. 10, 5085–5102.
- [Söd03c] ———, *Random graphs with hidden color*, Phys. Rev. E **68** (2003), 015102.
- [Spe97] Joel Spencer, *Enumerating graphs and Brownian motion*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 3, 291–294. MR 1431811
- [ST20] Perla Sousi and Sam Thomas, *Cutoff for random walk on dynamical Erdős-Rényi graph*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **56** (2020), no. 4, 2745–2773. MR 4164855
- [Stu23] Benedikt Stufler, *Local convergence of random planar graphs*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **25** (2023), no. 1, 1–73. MR 4556780
- [Whi02] Ward Whitt, *Stochastic-process limits*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 2002, An introduction to stochastic-process limits and their application to queues. MR 1876437
- [Wri77] E. M. Wright, *The number of connected sparsely edged graphs*, J. Graph Theory **1** (1977), no. 4, 317–330. MR 463026
- [WW95] Aleksander Weron and Rafał Weron, *Computer simulation of Lévy α -stable variables and processes*, Chaos—the interplay between stochastic and deterministic behaviour (Karpacz, 1995), Lecture Notes in Phys., vol. 457, Springer, Berlin, 1995, pp. 379–392. MR 1452625

* * *

Résumé



ette thèse est divisée en deux parties indépendantes.

Dans une première partie, nous introduisons un cadre de travail théorique unifié permettant de définir une notion de limite locale pour des graphes évolutifs, c'est-à-dire des graphes dans lesquels les arêtes apparaissent et disparaissent au cours du temps. Nous montrons pour deux modèles de graphes dynamiques inhomogènes un résultat de convergence locale vers des arbres de Galton-Watson qui croissent et se segmentent au cours du temps. Cette nouvelle notion nous permet d'étudier des propriétés asymptotiques de processus évoluant sur ces graphes dynamiques. Nous nous intéressons ici au processus de contact pour lequel nous démontrons des résultats de métastabilité, renforçant des résultats obtenus récemment par E. Jacob, A. Linker et P. Mörters.

La seconde partie constitue une contribution à la très riche étude des principes de grandes déviations (PGD) fonctionnelles des processus de Lévy, pour laquelle nous nous focalisons sur le cas des processus de Lévy α -stables sans saut négatif, où $1 < \alpha < 2$. Ce travail est motivé par un résultat récent de C. Profeta qui quantifia la queue de distribution logarithmique asymptotique de l'aire sous l'excursion normalisée d'un processus de Lévy α -stable sans saut négatif. Grâce à une approche dû à A. Puhalskii, similaire à la convergence de processus stochastiques, nous établissons un PGD pour les excursions stables. Ce résultat de grandes déviations, que nous obtenons pour la topologie non usuelle M_1 de Skorokhod, nous permet de déterminer des équivalents exacts pour les queues de distribution logarithmique asymptotique de certaines fonctionnelles de l'excursion stable telles que l'aire sous l'excursion et le supremum. Par des raisonnements similaires, nous obtenons un PGD pour les ponts stables.

Abstract



his thesis is divided into two independent parts.

In a first part, we introduce a new unified theoretical framework to define a notion of local weak limit of dynamical graphs, that are graphs in which edges may appear and disappear in function of time. We prove for two models of dynamical inhomogeneous random graphs a local convergence to some dynamical Galton-Watson trees which growth and split in function of time. This new notion let us to study asymptotic properties of processes which evolve on these dynamical graphs. We focus our attention on contact process for which we obtain metastability results, strengthen recent results of E. Jacob, A. Linker and P. Mörters.

The second part contributes to the rich study of functional large deviation principles (LDP) for Lévy processes, for which we focus on the case of α -stable Lévy processes without negative jumps, with $1 < \alpha < 2$. This work is motivated by a recent result of C. Profeta who quantified the logarithmic right-tail asymptotic for the area under the normalized excursion of α -stable Lévy process without negative jumps. With an approach due to A. Puhalskii, which is similar to the convergence of stochastic processes, we establish LDP for stable excursions. Thanks to this large deviations results, that we establish for the unusual M_1 Skorokhod topology, we may deduce exact equivalent for the logarithmic right-tail asymptotic of some functional of the normalized excursion such as the area or the supremum. With similar arguments, we also get a large deviations principle for the stable Lévy bridge.