



**HAL**  
open science

# Convection, rotation et champ magnétique dans les intérieurs planétaires

Thomas Gastine

► **To cite this version:**

Thomas Gastine. Convection, rotation et champ magnétique dans les intérieurs planétaires. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris Cité, 2022. tel-04326874

**HAL Id: tel-04326874**

**<https://theses.hal.science/tel-04326874>**

Submitted on 6 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

# Convection, rotation et champ magnétique dans les intérieurs planétaires

mémoire présenté le 22 mars 2022 par

**Thomas GASTINE**

devant le jury composé de :

Philippe CARDIN	DR CNRS	ISTerre, Grenoble	Rapporteur
Marianne GREFF	Professeure	IPGP, Université de Paris	Rapporteuse
Caroline NORE	Professeure	LISN, Université Paris Saclay	Rapporteuse
Thierry ALBOUSSIÈRE	DR CNRS	LGL-TPE, ENS Lyon	Examineur
Gaël CHOBLET	DR CNRS	LPG, Nantes	Examineur
Michel RIEUTORD	Professeur	IRAP, Université de Toulouse	Examineur



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Activités de recherche</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction	5
1.1.1	Les champs magnétiques planétaires	5
1.1.2	Les vents zonaux des planètes géantes	11
1.1.3	Problématiques principales	15
1.2	Cadre théorique	15
1.2.1	Équations	15
1.2.2	Adimensionnement et paramètres de contrôle	16
1.2.3	État(s) de référence(s)	18
1.2.4	Conditions aux limites	20
1.2.5	Diagnostics usuels	20
1.3	Cadre numérique : le code MagIC	23
1.3.1	Discrétisation spatiale	23
1.3.2	Discrétisation temporelle	25
1.3.3	Implémentation	26
1.3.4	Validations du code	27
1.4	Convection, rotation et vents zonaux	27
1.4.1	Taylor-Proudman, effet $\beta$ et seuil convectif dans un fluide compressible	27
1.4.2	Différents régimes physiques pour la convection en rotation	29
1.4.3	Génération de vents zonaux	34
1.5	Dynamos convectives	42
1.5.1	Géométrie des dynamos convectives : dipôles et multipôles	42
1.5.2	Domaine QG-MAC et lois d'échelle	48
1.5.3	Influence d'une couche stratifiée stable sur la géodynamo	51
1.5.4	Des modèles intégrés pour Jupiter	53
<b>2</b>	<b>Travaux en cours et projets de recherche</b>	<b>57</b>
2.1	Améliorations et modifications du cadre théorique et numérique	57
2.1.1	Cadre théorique	57
2.1.2	Cadre numérique	58
2.2	Convection, rotation et vents zonaux	60
2.2.1	Quel régime asymptotique pour la convection en rotation avec conditions rigides ?	60
2.2.2	Vers une analyse locale des régimes physiques	60
2.2.3	Variabilité temporelle des jets zonaux : fusion et drift	61
2.3	Dynamos convectives	64
2.3.1	Lois d'échelle	64
2.3.2	Stratification stable dans les planètes et double diffusion	64
<b>A</b>	<b>Curriculum vitæ, activités d'encadrement et liste de publications</b>	<b>67</b>
A.1	Curriculum vitæ	67
A.1.1	Identité	67
A.1.2	Formation	67
A.1.3	Expérience professionnelle	67
A.2	Publications et communications scientifiques	67
A.2.1	Revue internationale à comité de lecture	67
A.2.2	Chapitres de livre	69
A.2.3	Actes de colloques à comité de lecture	69
A.2.4	Conférences invitées dans des congrès	69
A.2.5	Communications à des congrès	70

A.2.6 Séminaires invités . . . . .	70
A.3 Enseignement, formation et diffusion de la culture scientifique . . . . .	71
A.3.1 Enseignement . . . . .	71
A.3.2 Encadrement . . . . .	71
A.4 Transfert technologique, relations industrielles et valorisation . . . . .	72
A.4.1 Financements . . . . .	72
A.4.2 Développements logiciel . . . . .	72
A.4.3 Demandes de temps de calcul . . . . .	72
A.5 Encadrement, animation et management de la recherche . . . . .	72
<b>B Publications significatives</b>	<b>75</b>
B.1 Gastine & Wicht, <i>Icarus</i> , 2012 . . . . .	76
B.2 Gastine <i>et al.</i> , <i>MNRAS</i> , 2014 . . . . .	91
B.3 Gastine, Wicht & Aubert, <i>JFM</i> , 2016 . . . . .	96
B.4 Schwaiger, Gastine & Aubert, <i>GJI</i> , 2019 . . . . .	139
B.5 Tassin, Gastine & Fournier, <i>GJI</i> , 2021 . . . . .	153
<b>C Diplôme de doctorat</b>	<b>177</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

# Chapitre 1

## Activités de recherche

Cette partie synthétise la plus grosse partie de mon activité de recherche de ces dix dernières années. Le chapitre est organisé de la manière suivante : le contexte observationnel et les principales problématiques scientifiques sont détaillés dans § 1.1, le cadre théorique est décrit dans § 1.2, le cadre numérique dans § 1.3. Les résultats de mes travaux sont ensuite exposés dans deux sections distinctes se rapportant aux problèmes sans champ magnétique (§ 1.4) et aux problèmes de dynamo convectives (§ 1.5).

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Les champs magnétiques planétaires

##### Une diversité de géométries et d'amplitude

On sépare usuellement les planètes de notre système solaire en trois groupes distincts : les planètes telluriques pour lesquelles une partie de l'intérieur est rocheux et qui contiennent éventuellement un noyau liquide ; les géantes gazeuses Jupiter et Saturne essentiellement composées d'hydrogène et d'hélium ; et les géantes de glace Uranus et Neptune qui ont une fraction importante d'eau et de méthane en profondeur. La Terre occupe bien sûr une situation privilégiée puisqu'on connaît bien plus précisément sa structure interne et sa composition du fait de la richesse des données observationnelles disponibles. Trois planètes ou satellites telluriques possèdent un champ magnétique actuel d'origine interne : Mercure, la Terre et Ganymède. Les mesures de champ magnétique lithosphérique sur Mars et la Lune indiquent vraisemblablement qu'un champ maintenu par effet dynamo a également été à l'œuvre dans ces planètes par le passé. Les quatre planètes géantes de notre système solaire possèdent également un champ magnétique. On reviendra par la suite sur la structure interne des planètes possédant un champ magnétique.

Le champ magnétique  $B$  d'origine interne est représenté dans un milieu isolant par une décomposition en harmoniques sphériques du potentiel  $V$  suivant

$$B = -\nabla V, \quad V(r, \theta, \phi, t) = r_0 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} [g_{\ell m}(t) \cos(m\phi) + h_{\ell m}(t) \sin(m\phi)] P_{\ell m}(\cos \theta), \quad (1.1)$$

avec  $(r, \theta, \phi)$  les coordonnées sphériques,  $t$  le temps,  $r_0$  le rayon de la surface planétaire et  $P_{\ell m}$  le polynôme associé de Legendre de degré  $\ell$  et d'ordre  $m$  (e.g. ABRAMOWITZ et STEGUN, 1964). Les coefficients  $g_{\ell m}$  et  $h_{\ell m}$  sont les coefficients de Gauss. Du fait d'une résolution spatiale limitée ou d'un impact d'un autre signal magnétique tel que le champ lithosphérique, la décomposition (1.1) pour le champ interne des planètes est en pratique tronquée à un degré et ordre  $\ell_{\max}$ . Pour la Terre, le champ magnétique de grande échelle ( $\ell \leq 4$ ) et sa variation séculaire sont connus depuis plus de quatre siècles (JACKSON, JONKERS et WALKER, 2000). Le développement des observatoires magnétiques à partir de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et les mesures satellitaires depuis plus de deux décennies ont permis une observation en continu du champ magnétique avec une très grande précision. Les modèles du champ géomagnétique interne sont néanmoins limités à une résolution spatiale de  $\ell_{\max} \approx 13$  du fait des anomalies magnétiques dues aux roches aimantées de la croûte qui peuvent atteindre localement une amplitude de plusieurs micro Tesla.

Les observations magnétiques des autres planètes se sont développées bien plus récemment avec l'envoi de sondes spatiales. La proximité de la sonde avec la surface planétaire ainsi que le nombre de survols contraignent alors la résolution spatiale des modèles de champ magnétiques planétaires. La figure 1.1 montre des cartes du champ magnétique de surface des différentes planètes de notre système solaire.

Pour Mercure, la sonde MESSENGER en orbite autour de la planète entre 2011 et 2015 a permis la construction d'un modèle du champ magnétique interne jusqu'à  $\ell_{\max} = 5$  (e.g. THÉBAULT et al., 2018). On observe un champ magnétique environ 100 fois plus faible que le champ de surface terrestre avec une composante principalement dipolaire très faiblement incliné par rapport à l'axe de rotation (l'angle d'inclinaison vaut seulement  $\theta_{\text{dip}} \approx 0.6^\circ$ ). On observe également

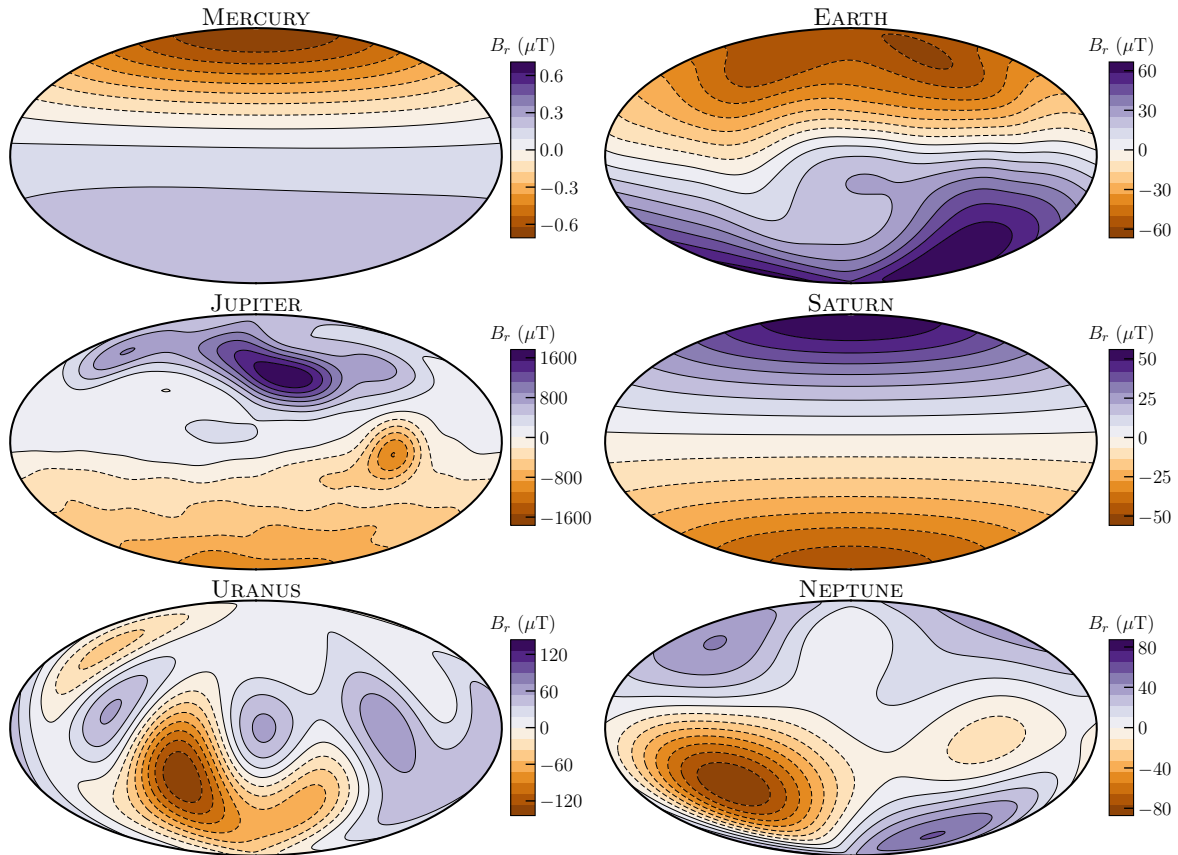


FIGURE 1.1 – Composante radiale du champ magnétique à la surface de Mercure, la Terre, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Le champ de Mercure a été reconstruit à partir d'un modèle de THÉBAULT et al. (2018), tronqué à  $\ell_{\max} = 5$ . Le champ magnétique terrestre a été construit à partir du modèle IGRF-13 (ALKEN et al., 2021). Le champ de Jupiter a été reconstruit à partir du modèle de CONNERNEY et al. (2018), tronqué à  $\ell_{\max} = 10$ . Le champ de Saturne a été reconstruit à partir du modèle de CAO et al. (2020), tronqué à  $\ell_{\max} = 14$ . Le champ d'Uranus a été reconstruit à partir du modèle de HERBERT (2009), tronqué à  $\ell_{\max} = 4$ . Le champ de Neptune a été reconstruit à partir du modèle de CONNERNEY, ACUNA et NESS (1991), tronqué à  $\ell_{\max} = 3$ .

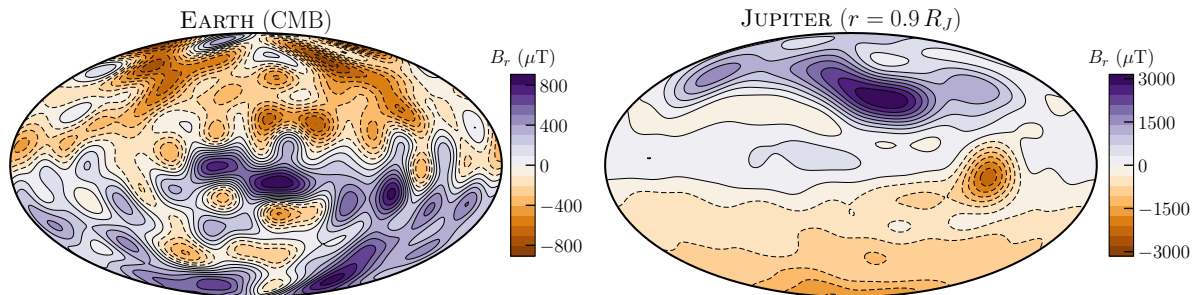


FIGURE 1.2 – Extrapolation potentielle de la composante radiale du champ magnétique terrestre à l'interface noyau-manteau (modèle IGRF-13 ALKEN et al., 2021, gauche) et du champ magnétique jovien à  $r = 0.9 R_J$  (CONNERNEY et al., 2018, droite).

une importante différence d'amplitude du champ magnétique entre l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud. Du fait de cette asymétrie, le champ herméen est souvent décrit par un dipôle dont l'origine serait décalé d'environ 500 km dans l'hémisphère Nord par rapport au centre de la planète (modèle dit du *offset dipole* de B. J. ANDERSON et al., 2012).

Notre connaissance du champ jovien s'est notoirement améliorée depuis le début de la mission Juno en orbite autour de Jupiter depuis juillet 2016. En effet, cette sonde NASA possède une orbite excentrique avec un périjoive très proche de la surface (environ 3000 km). Cette proximité permet des mesures magnétiques de grande précision. À l'heure actuelle, le modèle de champ de CONNERNEY et al. (2018) présenté dans la Fig. 1.1 est défini avec une troncature de  $\ell_{\max} = 10$  proche de la résolution du champ terrestre. L'absence de champ crustal et le prolongement de la mission Juno devraient permettre de raffiner ce modèle de champ dans les années à venir. Le champ observé est très fort, de l'ordre de 30 fois le champ géomagnétique, il s'agit là encore d'un champ dipolaire avec une inclinaison d'environ  $10^\circ$  par rapport à l'axe de rotation. On note également la présence de structures localisées de champ intense dans l'hémisphère Nord et près de l'équateur.

Concernant Saturne, la fin du programme Cassini (« Cassini Grande Finale » avril-septembre 2017) a également permis de réaliser un ensemble d'une vingtaine d'orbites proximales favorables à l'étude des champs potentiels. Le modèle de CAO et al. (2020) reconstruit jusqu'à  $\ell_{\max} = 14$  révèle un champ magnétique d'amplitude relativement faible, proche de celle du champ terrestre, se présentant sous la forme d'un champ principalement dipolaire quasiment parfaitement axisymétrique. La borne supérieure de l'angle d'inclinaison du dipôle est de  $0.007^\circ$ . Ce champ relativement faible et axisymétrique présente des similitudes avec le champ herméen.

Le champ magnétique des géantes de glace Uranus et Neptune est très différent. Dans les deux cas il est relativement mal contraint du fait de la rareté des données disponibles avec les survols de la sonde Voyager 2 à la fin des années 1980. Pour Uranus, l'observation d'aurores permet d'un peu mieux contraindre la géométrie du champ (HERBERT, 2009), de telle sorte que  $\ell_{\max} = 4$  pour Uranus et  $\ell_{\max} = 3$  pour Neptune (CONNERNEY, ACUNA et NESS, 1991). Malgré cette résolution spatiale très limitée, les champs observés sont très différents des autres champs magnétiques planétaires, puisqu'ils présentent une composante dipolaire très faible et qu'ils ne sont pas du tout alignés avec l'axe de rotation. On parle de champ magnétique multipolaires. Le fait qu'une fraction significative de l'énergie magnétique soit contenue dans les degrés et ordres proches de la troncature de résolution indique également que l'amplitude réelle du champ de ces planètes à la surface est probablement plus élevée, avec une organisation du champ sur des plus petites échelles spatiales (pour une revue récente, voir SODERLUND et STANLEY, 2020).

Pour les cas terrestre et jovien pour lesquels le champ magnétique de surface présente une certaine complexité tout en ayant une bonne résolution spatiale, il est intéressant de réaliser une extrapolation potentielle du champ vers l'intérieur. Pour la Terre, au vu de la faible conductivité électrique du manteau, on peut directement utiliser Eq. (1.1) pour construire une carte du champ magnétique à la CMB (*Core Mantle Boundary*). Pour Jupiter, cet exercice est plus discutable puisque il n'y a pas de rayon définissant une frontière claire entre une enveloppe isolante et un intérieur conducteur mais plutôt une croissance continue des propriétés de transport (e.g. FRENCH et al., 2012). Nous considérons ici une profondeur correspondant à un rayon de  $0.9 R_J$  pour laquelle les modèles de structures interne de FRENCH et al. (2012) indiquent une conductivité électrique d'environ  $10^5$  S/m. La figure 1.2 montre les cartes de champ magnétique obtenues pour ces deux planètes et met en lumière des différences importantes. Pour la Terre, le champ magnétique dipolaire s'accompagne de concentrations de champ magnétique intense assez localisées et présente plusieurs structures notables de polarité inversée. Pour Jupiter, on observe une asymétrie importante avec un champ nettement plus fort dans l'hémisphère Nord et des structures présentant une élongation suivant la direction Est-Ouest, notamment proche de l'équateur.

L'observation des champs magnétiques planétaires permet donc de dresser trois grandes catégories : (i) Mercure et Saturne présentent des champs assez faibles avec un très fort degré d'alignement avec l'axe de rotation et un niveau plus ou moins élevé d'asymétrie entre les hémisphères Nord et Sud ; (ii) la Terre et Jupiter ont des champs magnétiques dipolaire inclinés d'environ  $10^\circ$  par rapport à l'axe de rotation mais leurs morphologies au sommet de la région fluide conductrice d'électricité diffèrent ; (iii) Uranus et Neptune ont des champs magnétiques complexes fortement non dipolaires. Outre la comparaison que l'on ébauche ici sur les différences de géométrie des champs magnétiques planétaires, un autre aspect fondamental concernerait la comparaison de la variation séculaire éventuelle de ces champs en regard de notre connaissance du champ géomagnétique. À l'exception de Jupiter pour lequel des modèles de variation séculaire commencent à être ébauchés pour les plus grandes échelles du champ magnétique (RIDLEY et HOLME, 2016 ; MOORE et al., 2019), les données observationnelles disponibles pour les autres planètes ne sont pas suffisantes.

Comprendre les processus physiques à l'origine de la diversité des champs magnétiques planétaires constitue un des axes principaux de mon travail de recherche.

## Des dynamos convectives

Considérons maintenant l'équation d'induction du champ magnétique. Cette équation est obtenue en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère en négligeant les courants de déplacement (approximation magnéto-hydrodynamique, MHD) et la loi d'Ohm. Dans le cas d'une diffusivité magnétique  $\lambda$  uniforme on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1.2)$$



avec  $\lambda = (\sigma\mu_0)^{-1}$  la diffusivité magnétique,  $\sigma$  la conductivité électrique et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Le membre de droite de cette équation contient un terme d'induction et un terme de diffusion Ohmique. Dans la limite d'une enveloppe faiblement conductrice d'électricité comme le manteau terrestre ( $\sigma \approx 0$ ), Eq. (1.2) se ramène à l'équation de Laplace  $\nabla^2 B = 0$  dont la solution a été donnée en Eq. (1.1). Le ratio de l'amplitude des deux phénomènes physiques concurrents présents dans cette équation peut s'écrire sous la forme du nombre de Reynolds magnétique

$$Rm = \frac{Ud}{\lambda}, \quad (1.3)$$

avec  $U$  la vitesse typique de l'écoulement et  $d$  l'échelle caractéristique de l'enveloppe fluide.

L'amplification d'un champ magnétique par effet dynamo nécessite que  $Rm$  soit plus grand qu'une certaine valeur critique  $Rm_c$  de l'ordre de quelques dizaines afin que le terme d'induction excède les processus diffusifs (CHRISTENSEN et AUBERT, 2006). Ceci ne constitue en aucun cas une condition suffisante puisqu'il existe un certain nombre de contraintes sur la forme de l'écoulement permettant de garantir un effet dynamo. Un écoulement purement toroïdal (comme par exemple la rotation différentielle) ou encore un écoulement bi-dimensionnel n'entraînent pas d'amplification du champ magnétique; on parle alors de théorèmes « anti-dynamo » (e.g. BUSSE, 2000).

À ce stade, la question du moteur physique entraînant le fluide et donc à l'origine de l'écoulement  $U$  est cruciale. Bien qu'un forçage par effet de marée ou par précession soit pertinent notamment dans le cadre de la dynamo lunaire (e.g. CÉBRON et al., 2019) ou qu'une dynamo générée par l'instabilité des vents zonaux ait été envisagé pour les planètes géantes (GUERVILLY, CARDIN et SCHAEFFER, 2012), les mouvements dus à la convection d'origine thermique ou compositionnelle sont considérés comme le moteur le plus probable des dynamos planétaires. Le refroidissement séculaire et la chaleur latente de cristallisation de la graine fournissent une source d'énergie d'origine thermique au noyau liquide de la Terre. Lors de la cristallisation de la graine, des éléments légers sont injectés à la base du noyau liquide fournissant une deuxième source de flottabilité cette fois d'origine compositionnelle (e.g. ROBERTS et KING, 2013). On parle alors de processus double diffusif ou thermo-solutal. Pour Mercure, la convection peut être également alimentée par la chaleur latente liée à cristallisation de la graine (CHRISTENSEN, 2006). Du fait de sa proximité avec le Soleil, des courants induits par la magnétosphère solaire modifient probablement la dynamo herméenne (e.g. HEYNER et al., 2011). Pour les quatre planètes géantes, on mesure un flux de chaleur net à la surface (par exemple 5.5 W/m<sup>2</sup> pour Jupiter, e.g. HANEL et al., 1981) trop important pour être associé à du transport thermique par conduction ou radiation (STEVENSON, 1983). Une partie au moins de l'intérieur de ces quatre planètes est donc convectif. Si la conductivité électrique devient suffisante (conductivité d'un métal), alors les mouvements convectifs peuvent entraîner l'amplification du champ magnétique par effet dynamo.

### De la complexité des structures planétaires : convection et stratification stable

Pour mieux appréhender où sont localisées les zones convectives planétaires susceptibles de conduire à un effet dynamo, examinons maintenant la structure interne des planètes ayant un champ magnétique. La figure 1.3 schématise notre connaissance actuelle de la structure interne des planètes.

En l'absence d'observations sismologiques, la structure interne de Mercure est contrainte par les observations gravimétriques et l'étude des variations temporelles de son axe de rotation (librations par exemple). Les modèles récents suggèrent une structure interne avec un manteau silicaté d'environ 400-500 km seulement, un noyau liquide composé de fer et d'éléments légers (soufre et silicium) et éventuellement une couche de sulfure de fer solide à l'interface noyau-manteau (pour une revue, voir SOLOMON, NITTLER et B. J. ANDERSON, 2018, chap. 4) avec donc  $r_{oc} = 0.84 R_M$  ( $R_M = 2440$  km étant le rayon moyen de Mercure). La taille de la graine solide fait encore l'objet d'incertitudes, citons par exemple les travaux de GENOVA et al. (2019) qui donnent une plage de rayons  $r_{ic}$  allant de  $0.3 r_{oc}$  à  $0.7 r_{oc}$ . Les sources de flottabilité permettant d'alimenter une dynamo convective dans la partie liquide du noyau herméen sont d'origine thermique (refroidissement séculaire) et compositionnelle (cristallisation de la graine) comme pour la géodynamo. Ceci étant dit, en utilisant des lois d'échelles qui relient l'amplitude moyenne du champ magnétique à la puissance convective disponible, on obtient une prédiction du champ magnétique herméen de surface au moins un ordre de grandeur plus grand qu'observé (CHRISTENSEN, 2010). Ceci pourrait soit indiquer que la graine solide est dans la fourchette haute des estimations actuelles (STANLEY et al., 2005); ou bien que la partie externe du noyau liquide est sub-adiabatique et n'entraîne pas de mouvements convectifs (CHRISTENSEN, 2006). Cette dernière hypothèse est intéressante puisqu'en plus de la faiblesse de l'amplitude du champ, elle permet également d'expliquer une partie de sa géométrie particulière. En effet une couche conductrice sub-adiabatique (donc stratifiée stable) entraîne un filtrage temporel (et donc *in-fine* spatial) du champ magnétique par effet de peau. Les modèles numériques de CHRISTENSEN (2006) et MANGLIK, WICHT et CHRISTENSEN (2010) font l'hypothèse d'une couche stratifiée stable représentant environ la moitié supérieure du noyau liquide herméen. Ils conduisent à un champ magnétique de surface dipolaire ayant la bonne amplitude mais avec une inclinaison trop grande et une asymétrie Nord/Sud trop faible.

Le champ géomagnétique est généré par les mouvements convectifs dans son noyau liquide. Les incertitudes sur l'état convectif du noyau terrestre proviennent essentiellement de la présence de couches stratifiées stables. L'existence et l'épaisseur de couches stratifiées dans le noyau liquide peuvent être contraintes par des observations sismiques. Les modifications de la vitesse de propagation des ondes P par rapport à un milieu homogène « bien mélangé » fournissent

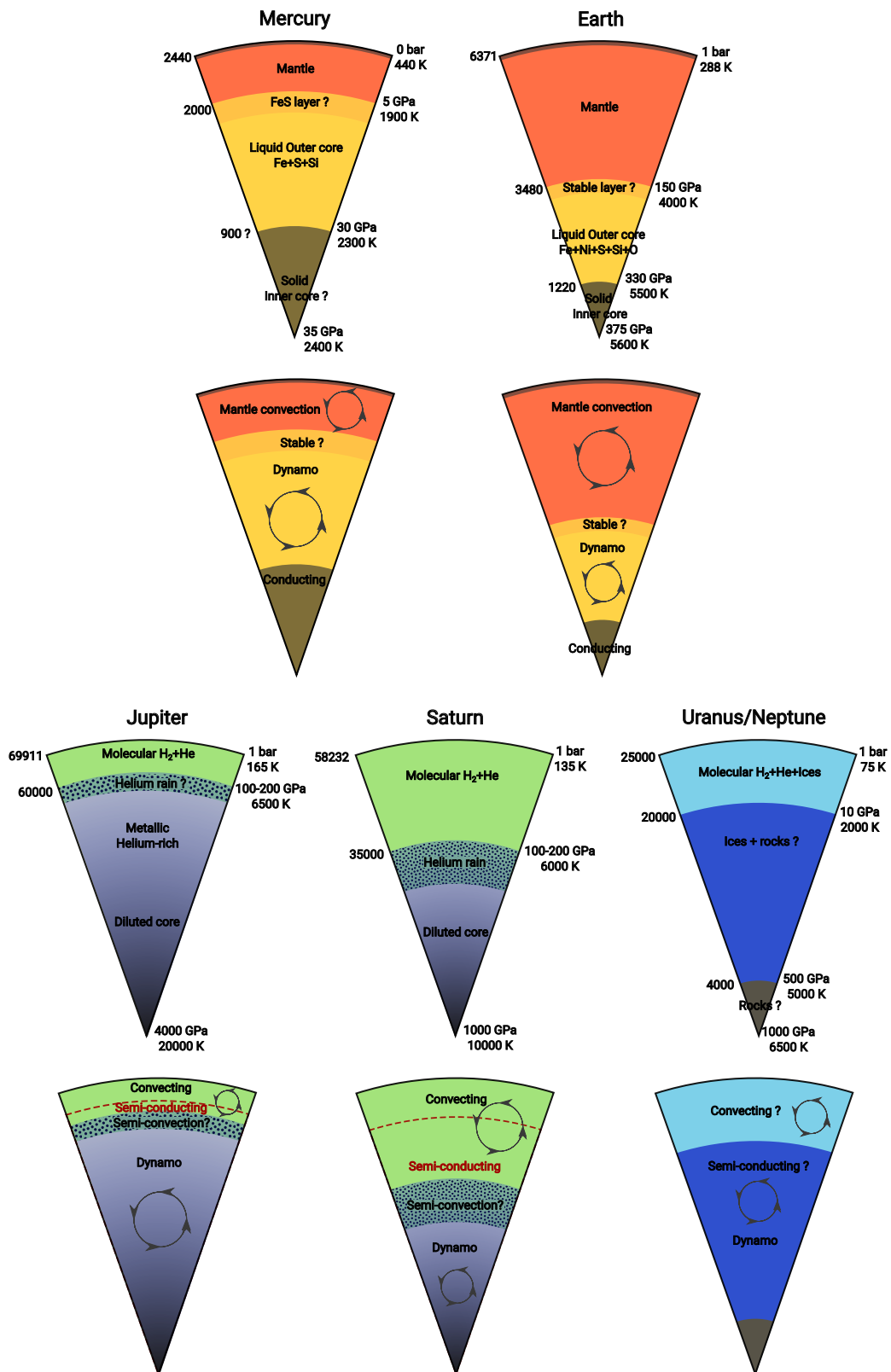


FIGURE 1.3 – Schémas illustrant la structure interne des planètes de notre système solaire possédant un champ magnétique. Pour Mercure, la structure se base sur RIVOLDINI, VAN HOOLST et O. VERHOEVEN (2009), SOLOMON, NITTLER et B. J. ANDERSON (2018) et GENOVA et al. (2019); pour la Terre sur HIROSE, LABROSSE et HERNLUND (2013); pour Jupiter sur WAHL et al. (2017); pour Saturne sur MILITZER, WAHL et HUBBARD (2019); pour Uranus et Neptune sur NETTELMANN et al. (2013) et HELLED, NETTELMANN et GUILLOT (2020). Pour chaque planète, le schéma du haut comprend les longueurs exprimées en kilomètres sur la gauche, les pressions et températures sur la droite, et le schéma du bas matérialise les régions convectives. Les lignes en pointillé pour Jupiter et Saturne correspondent à la profondeur à laquelle la conductivité est inférieure à celle de l’hydrogène métallique mais devrait être suffisante pour entraîner un effet dynamo (voir plus bas Eq. 1.6 et STEVENSON, 2020).

une contrainte sur le profil de densité et donc la valeur de la fréquence de Brunt-Väsälä  $N$  définie ici par

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\rho g^2}{K_S},$$

avec  $g$  la gravité,  $\rho$  la densité et  $K_S$  le module de compressibilité isentropique. Dans ce cadre, mentionnons les travaux de SOURIAU et POUPINET (1991) qui attribuent la diminution de la fréquence d’ondes PKP dans la partie inférieure du noyau liquide à la présence d’une couche inhomogène d’environ 150 km au dessus de l’ICB (*Inner Core Boundary*); ou encore les travaux de HELFFRICH et KANESHIMA (2010) qui en réalisant des mesures sismiques d’ondes  $SmKS$  (ondes se propageant dans le noyau liquide et se réfléchissant  $m - 1$  fois à la CMB) suggèrent un écart de la vitesse de propagation des ondes P de l’ordre de 20–40 m/s par rapport à PREM (*Preliminary Reference Earth Model*, soit 0.1–1% de déviation, voir DZIEWONSKI et D. L. ANDERSON, 1981). HELFFRICH et KANESHIMA (2010) concluaient alors à l’existence d’une couche inhomogène sous la CMB d’environ 300 km d’épaisseur avec une fréquence de Brunt-Väsälä d’environ 0.5 – 1 mHz, soit  $N \sim 10\Omega$  avec  $\Omega$  le taux de rotation de la Terre. L’interprétation de ces signaux ne fait cependant pas l’unanimité et IRVING, COTTAAR et LEKIĆ (2018) suggèrent par exemple qu’il n’y a pas de stratification stable et attribuent plutôt les déviations par rapport à PREM à une modification de l’équation d’état. La présence d’une zone stratifiée stable thermiquement est possible si le flux de chaleur devient localement plus faible que la valeur adiabatique. Or certaines expériences à haute pression et température et simulations numériques *ab-initio* (e.g. Pozzo et al., 2012; OHTA et al., 2016) indiquent une valeur de la conductivité thermique du fer liquide dans les conditions de température et de pression du noyau de 100 – 150 W/m/K alors que d’autres (e.g. KONŌPKOVÁ et al., 2016) donnent des valeurs de 30 W/m/K. Si les valeurs réelles sont plus proches de l’estimation haute, il faudrait un flux thermique à la CMB d’environ 15 TW pour assurer un noyau liquide convectif dans sa partie externe. Cette valeur est clairement dans la fourchette haute du flux estimé à la CMB (LAY, HERNLUND et BUFFETT, 2008). Enfin, notons que la présence d’une couche stable thermiquement sous la CMB pourrait entraîner l’excitation d’ondes MAC (pour *Magneto, Archimedean, Coriolis*) dont la période typique serait éventuellement susceptible d’expliquer les variations décennales du dipôle géomagnétique (BRAGINSKY, 1993; BUFFETT, 2014). Ces études suggèrent une couche stable plus fine de l’ordre d’une centaine de kilomètres avec un niveau de stratification également plus modeste  $N \sim \Omega$ . Comme on le voit, il existe donc encore des incertitudes importantes sur l’état convectif du noyau liquide. Les modèles géodynamo peuvent à ce titre être utilisés pour fournir une contrainte géomagnétique sur l’éventuelle stratification stable au sommet du noyau (voir plus loin la section 1.5.3).

La structure interne des planètes géantes gazeuses Jupiter et Saturne a longtemps été décrite par un système en trois couches : (i) une enveloppe externe moléculaire composée d’hydrogène et d’hélium, (ii) un intérieur métallique conducteur d’électricité dû à la transition vers l’hydrogène métallique autour de 100 GPa, (iii) un noyau solide rocheux au centre. Les mouvements convectifs dans l’hydrogène métallique seraient alors responsables de la génération du champ magnétique de ces planètes. Cette description classique a été modifiée récemment par les progrès sur les équations d’état des mélanges hydrogène-hélium dans les conditions de pression et de température des géantes gazeuses et par les mesures gravimétriques plus précises des missions spatiales. Ainsi, comme illustré sur la Fig. 1.3, on sait désormais que les enveloppes de Jupiter et Saturne sont moins abondantes en hélium que la composition solaire. Cette déplétion pourrait être due à la démixtion de l’hélium et de l’hydrogène métallique sur une certaine plage de pression et de température (LORENZEN, HOLST et REDMER, 2011). Dans cette zone, l’hélium formerait des gouttelettes qui s’enfonceraient jusqu’à atteindre une nouvelle zone de miscibilité. On aurait donc un enrichissement en hélium des zones profondes. De même, les contraintes sur la distribution de masse provenant des mesures gravimétriques suggèrent plutôt la présence d’un cœur dilué enrichi en éléments plus lourds que l’hélium plutôt qu’un noyau solide (WAHL et al., 2017; STEVENSON, 2020). Les transitions entre ces différentes zones restent encore incertaines mais il est clair que du fait de son plus faible rayon, l’enveloppe moléculaire représente une fraction plus importante de l’intérieur de Saturne que de Jupiter. La pression de 100 GPa qui correspond généralement à la pression permettant d’atteindre la métallisation de l’hydrogène correspond à environ  $0.9 R_J$  et  $0.7 R_S$ . Alors que la présence d’une couche d’hélium immiscible est encore très incertaine pour Jupiter du fait des désaccords entre les modèles de structure interne, un consensus semble se dégager pour une couche de taille importante à l’intérieur de Saturne. L’impact dynamique d’une telle zone reste mal compris puisque on aurait ici affaire à un processus double diffusif avec un gradient thermique déstabilisant mais un gradient de composition stabilisant (plus forte concentration d’hélium en bas). En fonction de l’amplitude respective de ces deux phénomènes, on a alors soit une région stable soit un phénomène dit de *semi-convection* (LECONTE et CHABRIER, 2013). Une fois encore les lois d’échelle basées sur la puissance convective disponible pour alimenter la dynamo de CHRISTENSEN (2010) peuvent fournir une borne supérieure : pour Saturne un effet dynamo maintenu par les mouvements convectifs jusqu’à  $0.65 R_S$  conduit à un champ de surface nettement plus grand qu’observé alors qu’une dynamo limitée à  $0.4 R_S$  produirait un champ compatible avec les observations. Là encore, l’étude de l’impact dynamique de telles couches par les modèles numériques peut aider à fournir des contraintes additionnelles sur la structure interne.

La structure interne d’Uranus et de Neptune est plus incertaine du fait des contraintes plus faibles sur leur composition et leur distribution de masse (pour des revues récentes, voir HELLED, NETTELMANN et GUILLOT, 2020; SODERLUND et STANLEY, 2020), en conséquence le schéma sur la Fig. 1.3 ne contient qu’une structure commune pour les deux planètes. Un modèle possible de NETTELMANN et al. (2013) correspondrait à une structure en trois couches : (i) une enveloppe moléculaire non-conductrice d’électricité composée d’hydrogène, d’hélium et d’eau correspondant environ aux 10–20% les plus externes, (ii) une couche intermédiaire riche en molécules d’eau entre  $0.3 R_U$  et  $0.9 R_U$  et (iii) un noyau rocheux.

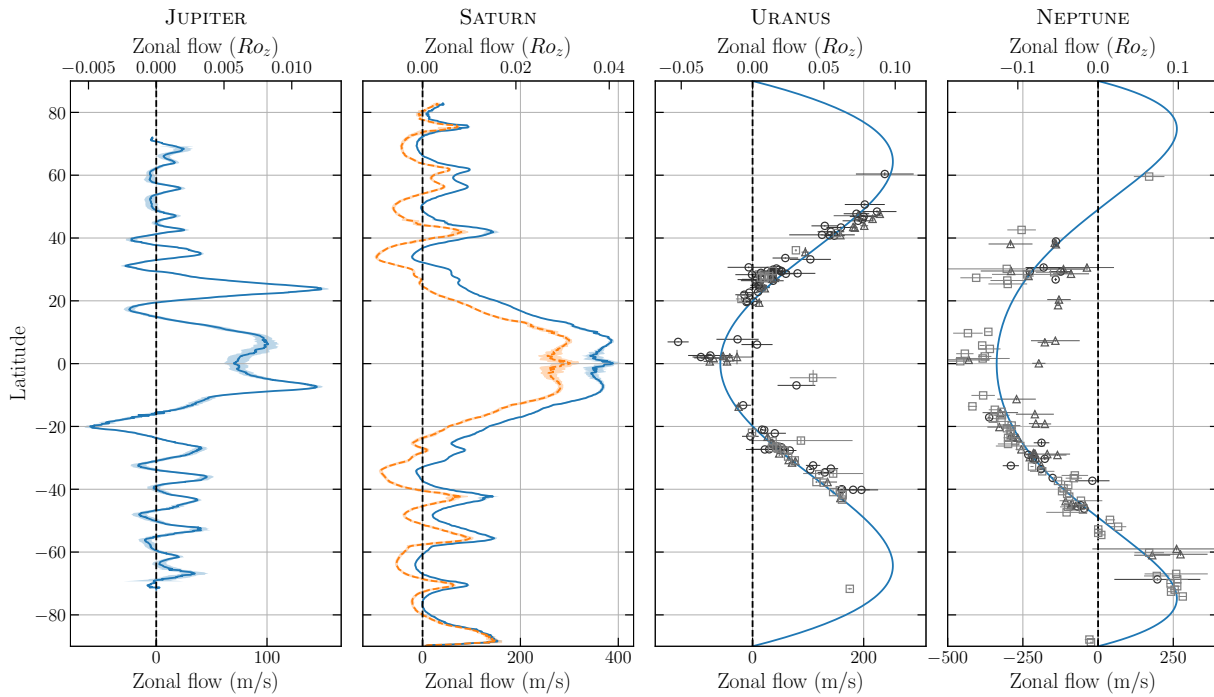


FIGURE 1.4 – Vents zonaux à la surface des quatre planètes géantes en fonction de la latitude. Pour Jupiter, le profil est tiré de TOLLEFSON et al. (2017) et a été obtenu à partir de données du Hubble Space Telescope (HST) pour l’année 2012. Pour Saturne, les profils proviennent de GARCÍA-MELEND0 et al. (2011) et ont été construits à partir de données de la sonde Cassini pour la période 2004-2008 : le profil en trait plein suppose la période de rotation “System III” pour Saturne de 10 h 39 min 24 sec alors que le profil en pointillé utilise la période de rotation de 10 h 33 min 34 sec dérivée par MILITZER, WAHL et HUBBARD (2019) à partir de modèles de structures internes. Les données concernant Uranus sont issues de HAMMEL et al. (2001) (carrés), HAMMEL et al. (2005) (triangles) et SROMOVSKY et FRY (2005) (ronds). Elles proviennent de données de Voyager 2, du HST et du télescope Keck. Les données concernant Neptune sont issues des travaux de LIMAYE et SROMOVSKY (1991) (carrés), SROMOVSKY et al. (2001b) (triangles) et SROMOVSKY et al. (2001a) (ronds) qui s’appuient sur des données de Voyager 2 et du HST. Pour Uranus et Neptune, les profils de vents zonaux sont obtenus en faisant une régression polynomiale d’ordre 6 sur la latitude et en imposant des contraintes d’annulation aux pôles et de symétrie par rapport à l’équateur. Le nombre sans dimension  $Ro_z$  est défini par  $U_z/\Omega r_o$ , où  $U_z$  est la vitesse des vents zonaux,  $\Omega$  le taux de rotation et  $r_o$  le rayon de la planète.

Notons que des modèles « continus » sans changement abrupt entre les différentes zones peuvent tout aussi bien expliquer les contraintes observationnelles dont on dispose (HELLED, NETTELMANN et GUILLOT, 2020). L’observation de champs magnétiques d’origine interne sur Uranus et Neptune impliquent l’existence d’un fluide conducteur d’électricité. Les équations d’état de l’eau obtenues par des calculs *ab-initio* suggèrent deux phases où l’eau pourrait avoir une conductivité suffisante : l’eau ionique avec des ions hydrogène et oxygène aux pressions intermédiaires, puis de l’eau superionique aux plus hautes pressions dans laquelle l’oxygène cristallise mais les ions hydrogènes restent libres (REDMER et al., 2011). Le développement et la forme de la convection dans ces différentes phases restent une question entièrement ouverte. La question du processus MHD conduisant à la génération des champs magnétiques si particuliers des géantes de glace n’est à ce stade pas évidente à relier à leurs structures.

Au bilan, les enveloppes fluides métalliques des planètes ayant un champ magnétique ne sont pas nécessairement entièrement convectives. La présence éventuelle de zones stratifiées stables ou de zones double diffusives peut avoir un impact notable sur l’amplitude et la géométrie du champ. Ces processus physiques sont considérés comme des candidats potentiels pour expliquer la faible amplitude et la géométrie simple des champs magnétiques herméen et saturnien.

## 1.1.2 Les vents zonaux des planètes géantes

### Observations de surface

Les structures en bandes visibles à la surface des quatre planètes géantes de notre système solaire sont associées à des forts mouvements de vents zonaux (i.e. des vents indépendants de la longitude) soit progrades (vers l’Est) soit rétrogrades (vers l’Ouest). La distribution latitudinale de ces vents peut être obtenue assez précisément en réalisant un suivi temporel de structures observées dans la haute atmosphère de ces planètes (autour de 0.5-1 bar) comme par exemple des nuages. Pour Jupiter et Saturne, les données de sondes spatiales comme Cassini ou Juno ou les données du Hubble Space Telescope (HST) ont permis une reconstruction assez précise du profil des vents zonaux jusqu’aux régions

polaires (e.g. PORCO et al., 2003 ; SANCHEZ-LAVEGA, ROJAS et SADA, 2000 ; READ et al., 2009 ; GARCÍA-MELENDO et al., 2011 ; TOLLEFSON et al., 2017). Pour les géantes de glace, les données sont moins nombreuses et proviennent principalement des survols de Voyager 2 et de mesures du HST (e.g. LIMAYE et SROMOVSKY, 1991 ; HAMMEL et al., 2001 ; SROMOVSKY et FRY, 2005).

La figure 1.4 illustre les profils latitudinaux des vents zonaux. Pour Jupiter, on observe une bande principale équatoriale prograde qui atteint environ 100-120 m/s et s'étend entre  $-15^\circ$  et  $15^\circ$ . Ce jet est flanqué dans chaque hémisphère de 6 paires de jets de signes alternés et d'amplitude en général plus faible autour de 20 m/s. On observe une asymétrie importante entre les deux hémisphères avec par exemple un maximum atteint autour de  $23^\circ\text{N}$  (140 m/s). Les jets observés sur Saturne sont plus forts (jusqu'à 400 m/s) et plus larges (jet équatorial entre  $-30^\circ$  et  $30^\circ$ ). On retrouve néanmoins le phénomène d'alternance des directions ainsi que le jet équatorial prograde. En utilisant la période de rotation de référence "System III" de Voyager de 10 h 39 min 24 sec, les jets rétrogrades semblent d'amplitude très faibles (profil en trait plein). Du fait de l'alignement quasi parfait du champ magnétique avec l'axe de rotation (Fig. 1.1), la détermination précise de la période de rotation de Saturne est difficile. D'autres estimations plus récentes basées sur la stabilité des jets (READ et al., 2009), les modèles de structure interne (MILITZER, WAHL et HUBBARD, 2019) ou encore les ondes de gravité observées dans les anneaux (MANKOVICH et al., 2019) convergent vers une période de rotation plus faible autour d'environ 10h 33 min ( $\pm 1$  min). Le profil des vents zonaux secondaires (traits en pointillé) est alors beaucoup plus symétrique par rapport à zéro et le jet équatorial a une amplitude réduite de presque 100 m/s. Bien que moins bien contraints dans les régions polaires, les profils obtenus pour les géantes de glace sont très différents avec notamment un jet équatorial rétrograde très large, de direction opposée à celle observée sur les géantes gazeuses, et un seul jet prograde dans chaque hémisphère. Les vents zonaux sur Uranus et Neptune sont également très forts avec des amplitudes de l'ordre de 200 à 300 m/s. Pour comparer ces différentes configurations, on introduit le nombre de Rossby associé à la vitesse des vents zonaux. On le définit ici par  $Ro_z = U_z/\Omega r_o$ , avec  $U_z$  la vitesse zonale,  $\Omega$  le taux de rotation et  $r_o$  le rayon externe des planètes géantes. On constate alors que la configuration avec jet rétrograde à l'équateur (Uranus/Neptune) est associée à des Rossby beaucoup plus grands que la configuration prograde à l'équateur (Jupiter/Saturne).

La figure 1.4 constitue en quelque sorte un instantané moyenné autour d'une certaine époque. Pour autant, les profils reconstruits depuis le début des missions spatiales à la fin des années 1970 sont dans l'ensemble toujours similaires, bien que des variations locales ou saisonnières des vents zonaux ne sont pas exclues et restent mal comprises à l'heure actuelle (e.g. GARCÍA-MELENDO et al., 2011 ; BARRADO-IZAGIRRE et al., 2013 ; TOLLEFSON et al., 2017).

### Profondeur des jets et scénarios concurrents

Il n'existe quasiment aucune mesure antérieure aux missions Cassini et Juno permettant d'estimer la profondeur des vents zonaux des planètes géantes. La seule mesure *in-situ* provient de la sonde Galileo qui a pénétré l'atmosphère jovienne en 1995 à une latitude de  $6.5^\circ\text{N}$ . La sonde a mesuré une augmentation du vent zonal local d'environ 80 m/s à 0.5 bar (ce qu'on considère comme la « surface ») jusqu'à 160 m/s entre 4 et 21 bars ; cette dernière valeur de pression correspondant à une profondeur d'environ 130 km. Cela reste donc une profondeur extrêmement faible ramenée au rayon de Jupiter ( $R_J = 6.9 \times 10^4$  km) mais cela permet déjà d'exclure l'hypothèse de vents zonaux restreints aux couches atmosphériques superficielles. Plus récemment, l'utilisation des spectromètres infrarouge de la sonde Cassini a permis de montrer que les vents zonaux à la profondeur de 2 bars étaient d'amplitude comparable au profil à la surface de Saturne dans les régions équatoriales et décroissaient légèrement à plus hautes latitudes (STUDWELL et al., 2018).

La question de la profondeur des vents zonaux observés sur les planètes géantes a fait l'objet d'intenses controverses depuis les toutes premières données observationnelles des sondes Pioneer et Voyager dans les années 1970 et 1980. On peut retenir deux scénarios concurrents :

**“Shallow models”** Selon ce type de modèle, les jets zonaux seraient la signature de phénomènes atmosphériques ayant lieu sur les premières centaines de kilomètres, de manière finalement assez analogue à la circulation atmosphérique des planètes telluriques. Le forçage physique permettant d'alimenter les jets proviendrait alors de la convection humide atmosphérique, de la radiation solaire ou encore de la condensation de la vapeur d'eau (LIAN et SHOWMAN, 2010). En pratique, la modélisation numérique de ce type d'écoulement s'appuie sur des approches type GCM (*Global Circulation Model*). Cette approche s'est révélée assez fructueuse puisque ces modèles ont depuis longtemps permis de reproduire quelques caractéristiques clés des jets observés sur Jupiter ou Saturne, comme par exemple l'apparition de jets multiples de directions alternées (e.g. WILLIAMS, 1978 ; CHO et POLVANI, 1996). En l'absence de forçage spécifique dépendant de la latitude, ces modèles échouent en revanche à produire un jet équatorial prograde ayant une amplitude satisfaisante (pour un exemple récent, voir SPIGA et al., 2020).

**“Deep models”** La seconde approche fait l'hypothèse que les vents zonaux observés en surface sont la conséquence de mouvements convectifs ayant lieu en profondeur sur plusieurs milliers de kilomètres, typiquement l'enveloppe moléculaire décrite dans la section précédente. Cette hypothèse a émergé avec les travaux fondateurs de BUSSE (1970) sur le seuil de la convection dans un cylindrique en rotation rapide et de BUSSE (1983) sur un modèle théorique permettant la génération de vents zonaux multiples de directions alternées. Ces modèles théoriques se sont par la suite concrétisés sous la forme de simulations numériques globales de convection 3-D de coquilles sphériques en rotation rapide. Ces modèles produisent spontanément des jets zonaux équatoriaux progrades comme

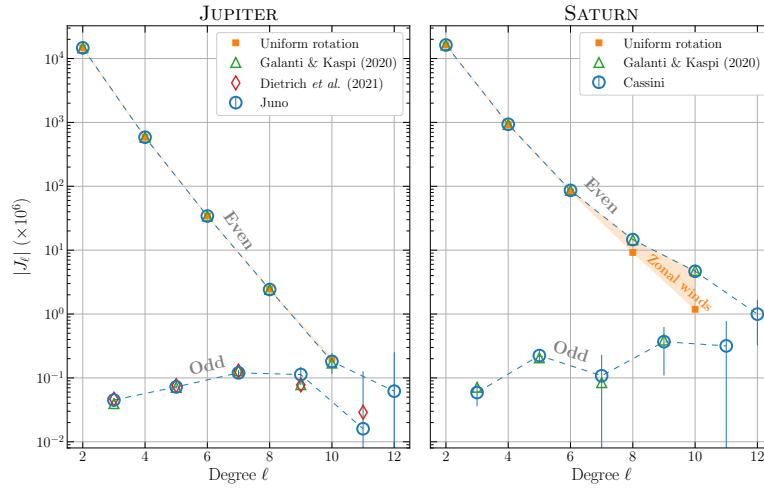


FIGURE 1.5 – Spectre des coefficients  $J_\ell$  du champ de gravité (Eq. 1.4) pour Jupiter (à gauche) et Saturne (à droite). Les mesures de la sonde Juno proviennent du travail de DURANTE et al. (2020) alors que les données de Cassini proviennent de IESS et al. (2019). Les prédictions proviennent de GALANTI et KASPI (2021) et DIETRICH et al. (2021) pour les degrés impairs sur Jupiter. La zone orangée correspond à la déviation par rapport à une rotation solide attribuée aux vents zonaux (e.g. MILITZER, WAHL et HUBBARD, 2019).

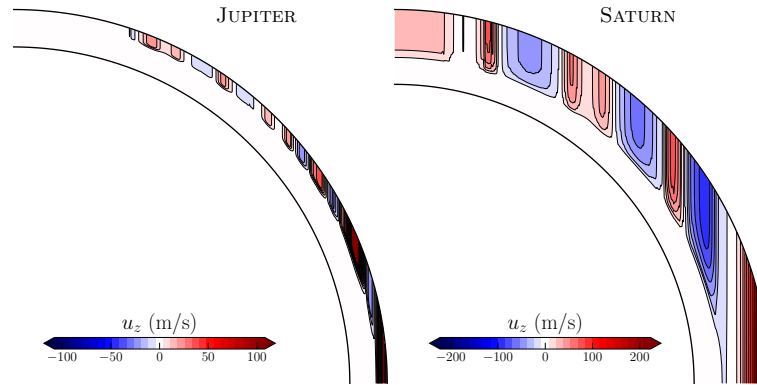


FIGURE 1.6 – Une reconstruction possible des vents zonaux en profondeur pour Jupiter (à gauche) et Saturne (à droite) d’après le modèle de GALANTI et KASPI (2021). La période de rotation de 10 h 33 min 34 sec de MILITZER, WAHL et HUBBARD (2019) a été utilisée pour Saturne. Les transitions obtenues correspondent environ à  $0.97 R_J$  pour Jupiter et  $0.87 R_S$  pour Saturne.

observés sur les géantes gazeuses (e.g. CHRISTENSEN, 2002). Dans la limite des coquilles sphériques ayant un rapport de rayon élevé ( $r_i/r_o \geq 0.8$ ), des bandes zonales multiples de direction alternées peuvent également émerger (HEIMPEL, AURNOU et WICHT, 2005; JONES et KUZANYAN, 2009). Enfin, dans le cas d’un fort forçage convectif, une inversion de la direction du vent zonal à l’équateur est observée et conduit à des profils de rotation différentielle analogue à ceux des géantes de glace (e.g. AURNOU, HEIMPEL et WICHT, 2007).

Entre ces deux scénarios opposés, on note néanmoins des points communs dans certains mécanismes physiques, comme par exemple le rôle fondamental joué par la rotation pour établir une cascade inverse d’énergie depuis le forçage physique à petite échelle jusqu’aux vents zonaux de grande échelle (RHINES, 1975). Dans les deux configurations on relève également une influence cruciale de la nature des conditions aux limites (rigides ou surface libre de contraintes) sur l’échelle caractéristique et l’évolution temporelle des vents zonaux (e.g. AURNOU et HEIMPEL, 2004; CHEMKE et KASPI, 2015). Enfin, la distribution spatiale du forçage physique n’est pas nécessairement liée à la profondeur des vents puisqu’un forçage atmosphérique (shallow) peut conduire à des vents zonaux profonds (e.g. SHOWMAN, GIERASCH et LIAN, 2006). Nous reviendrons sur ces différents mécanismes physiques dans la section 1.4.

### Des contraintes gravimétriques et magnétiques ?

La proximité des orbites des sondes Juno et Cassini (programme “Cassini Grande Finale”) avec la surface de Jupiter et de Saturne (quelques milliers de kilomètres seulement) permettent d’accéder à des mesures gravimétriques de grande

précision. Le potentiel gravitationnel  $\Psi$ , supposé ici axisymétrique, est décomposé en polynômes de Legendre tel que

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{\ell=2}^{+\infty} J_{\ell} \left( \frac{R_{\text{eq}}}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \right], \quad (1.4)$$

avec  $R_{\text{eq}}$  le rayon planétaire à l'équateur,  $G$  la constante de gravitation et  $M$  la masse totale. Le coefficient  $J_{\ell}$  s'écrit

$$J_{\ell} = -\frac{2\pi}{MR_{\text{eq}}^{\ell}} \int_0^{R_{\text{eq}}} \int_0^{\pi} \rho(r, \theta) r^{\ell+2} P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, dr,$$

avec  $\rho$  la densité. En l'absence de phénomène dynamique interne, la densité et donc le champ de gravité sont axisymétriques et symétriques par rapport à l'équateur. En conséquence, seuls les harmoniques zonaux et pairs du potentiel gravitationnel sont non nuls, i.e.  $J_{2n} \neq 0$  pour tout  $n$ . Les harmoniques de degrés impairs correspondent à des asymétries dans la distribution de masse entre l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud et sont donc classiquement interprétées comme associées à la signature d'une dynamique interne comme les vents zonaux. Dans la limite d'un écoulement inviscide en rotation rapide pour lequel l'inertie peut être négligée, les forces pertinentes sont le gradient de pression, la flottabilité et la force de Coriolis. On obtient alors l'équilibre suivant

$$2\rho\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p - \rho\nabla\Psi^*,$$

avec  $p$  la pression,  $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$  et  $\Psi^* = \Psi + \frac{1}{2}\Omega^2 s^2$  où  $s$  le rayon cylindrique et  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unité suivant l'axe de rotation. En prenant le rotationnel de cette expression, on obtient alors une équation dite du vent thermique qui relie la vitesse zonale  $u_{\text{zon}}$  à la densité et au potentiel gravitationnel

$$2\Omega \frac{\partial u_{\text{zon}}}{\partial z} = \mathbf{e}_{\phi} \cdot [\nabla \times \rho(\nabla\Psi^*)]. \quad (1.5)$$

À ce stade, notons que la force centrifuge entraîne une déformation de l'enveloppe fluide symétrique par rapport à l'équateur et qu'elle n'influencera donc que les  $J_{\ell}$  de degrés pairs. De plus, les coefficients  $J_{\ell}$  pairs de bas degrés sont extrêmement dépendants de la structure interne de la planète : aplatissement aux pôles, composition chimique et équation d'état. Au vu des incertitudes pesant sur ces dernières, il est donc périlleux d'essayer de déterminer la signature des vents zonaux en utilisant les coefficients  $J_{\ell}$  pairs avec  $\ell < 8$  (DEBRAS et CHABRIER, 2019; STEVENSON, 2020).

La figure 1.5 illustre les coefficients  $J_{\ell}$  et leur incertitude pour Jupiter (gauche) et Saturne (droite). Ces estimations proviennent des travaux de DURANTE et al. (2020) et IESS et al. (2019). En plus de ces données, les coefficients que l'on obtiendrait dans l'hypothèse d'une rotation solide de ces planètes (carrés orange) sont également représentés. On constate un écart important pour Saturne pour  $\ell \geq 6$  matérialisé par la zone orangée. Cette différence est attribuée à un impact plus important des vents zonaux sur la distribution de masse sur Saturne que sur Jupiter (MILITZER, WAHL et HUBBARD, 2019). Autrement dit, les vents zonaux pénétreraient plus profondément à l'intérieur de Saturne qu'à l'intérieur de Jupiter. L'analyse des degrés impairs semble une piste plus prometteuse pour analyser la signature des vents zonaux puisqu'elle permet de s'affranchir de certaines incertitudes sur l'état de référence (e.g. DIETRICH et al., 2021).

Il est alors possible de procéder à une inversion de Eq. (1.5) pour éventuellement contraindre le profil de l'écoulement zonal en profondeur. Cette procédure pose néanmoins problème puisque (i) elle nécessite de faire des hypothèses sur la manière dont les vents zonaux décroissent en profondeur ; (ii) il y a non unicité des résultats puisque deux profils de vents zonaux différents peuvent conduire à des potentiels gravitationnel identiques. Une illustration de ce dernier point est visible sur la Fig. 1.5 puisque les modèles de GALANTI et KASPI (2021) et DIETRICH et al. (2021) obtiennent des vents zonaux différents avec des coefficients  $J_{\ell}$  très proches.

L'observation du champ magnétique de ces planètes et de son éventuelle variation séculaire fournit néanmoins une contrainte supplémentaire sur la profondeur maximale des vents zonaux. En effet, si ces derniers pénètrent suffisamment en profondeur ils peuvent entraîner un transport advectif des structures magnétiques observées à la surface. Afin de mieux appréhender ce phénomène, il est utile d'introduire un nombre de Reynolds magnétique cette fois associé avec les vents zonaux

$$Rm_z = U_z \sigma d_{\sigma} \mu_0, \quad d_{\sigma} = \left| \frac{\partial \ln \sigma}{\partial r} \right|^{-1}. \quad (1.6)$$

La conductivité électrique  $\sigma$  variant de plusieurs ordres de grandeur dans les 10% les plus externes des planètes géantes (e.g. FRENCH et al., 2012), il est plus pertinent ici de définir une longueur caractéristique basée sur la variation de cette quantité  $d_{\sigma}$  plutôt que sur une épaisseur de fluide comme fait précédemment pour un milieu homogène (e.g. CAO et STEVENSON, 2017). En comparant les mesures magnétiques de la sonde Juno avec les données de sondes antérieures comme Voyager, MOORE et al. (2019) ont montré que l'amplitude des vents zonaux ne pouvaient excéder  $10^{-2}$  m/s à une profondeur de  $0.94 R_J$  pour être compatible avec la variation séculaire observée. Cette profondeur correspond à  $Rm_z \sim 1$ , ce qui implique un équilibre entre induction et diffusion du champ (Eq. 1.2).

La figure 1.6 illustre les profils des vents zonaux de Jupiter et Saturne dérivés par GALANTI et KASPI (2021). Ce modèle suggère des vents zonaux constants sur des cylindres alignés avec l'axe de rotation (cylindres géostrophiques) jusqu'à

une profondeur d'environ  $0.97 R_J$  pour Jupiter et  $0.87 R_S$  pour Saturne au-delà de laquelle leurs amplitudes décroissent très rapidement. Rappelons encore une fois que la valeur exacte du rayon de transition mis en avant dans ce type de profils doit être considéré avec précaution, du fait de la non-unicité de la procédure d'inversion de Eq. (1.5). En tout état de cause, ces auteurs mettent en avant des jets zonaux ne pénétrant pas sur toute l'épaisseur de l'enveloppe moléculaire de Jupiter et Saturne, une limite matérialisée par des pointillés sur la Fig. 1.3. Pour les géantes de glace, l'incertitude est encore plus élevée en l'absence d'orbiteur permettant d'avoir des données gravimétriques précises au-delà de  $J_4$ . SOYUER, SOUBIRAN et HELLED (2020) donnent par exemple des bornes supérieures de pénétration des jets à  $0.9 R_U$  pour Uranus et  $0.92 R_N$  pour Neptune.

On constate donc une progression notable du débat concernant la profondeur des jets zonaux grâce aux données observationnelles récentes. En dépit de désaccords encore importants sur l'interprétation des données gravimétriques, un consensus pour une configuration de jets zonaux s'enfonçant profondément sur plusieurs milliers de kilomètres semble se dégager.

### 1.1.3 Problématiques principales

On peut finalement regrouper les différentes problématiques soulevées dans les sections ci-dessus à propos des dynamos planétaires et des vents zonaux des planètes géantes en trois points principaux

- Comment expliquer la diversité des amplitudes et des morphologies des champs magnétiques planétaires ? Quels sont les processus physiques responsables de ces différences ?
- Quels phénomènes physiques contrôlent l'amplitude, la profondeur et la direction des vents zonaux des planètes géantes ?
- Quelles forces contrôlent ces différents mécanismes ? Quelles lois d'échelle pour la vitesse et l'amplitude du champ magnétique peuvent être dérivées ?

Contribuer à répondre à ces questions en utilisant les modèles numériques globaux constitue le cœur de de mon activité de recherche de ces dix dernières années.

## 1.2 Cadre théorique

### 1.2.1 Équations

On considère les équations qui contrôlent un fluide en rotation dans une coquille sphérique de rayon interne  $r_i$  et de rayon externe  $r_o$  tournant avec un taux de rotation  $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$  autour de l'axe  $z$  formulées dans le référentiel en rotation. On utilisera dans la suite l'approximation anélastique ou l'approximation de Boussinesq des équations de Navier-Stokes. Pour une dérivation détaillée des équations sous ces différentes approximations, on peut se référer à BRAGINSKY et ROBERTS (1995), LANTZ et FAN (1999), ANUFRIEV, JONES et SOWARD (2005) ou encore J. VERHOEVEN, WIESEHÖFER et STELLMACH (2015). Je rappelle ici les principales étapes et approximations de cette dérivation.

L'approximation anélastique procède d'un filtrage temporel des équations de Navier Stokes en supprimant les ondes acoustiques, ce qui implique que la vitesse typique de l'écoulement  $U$  doit rester négligeable devant la vitesse du son  $c_s$ . Cette première hypothèse qui correspond à un nombre de Mach faible,  $U/c_s \ll 1$ , est en pratique bien vérifiée dans les intérieurs planétaires. L'approximation de Boussinesq rajoute un filtrage spatial en faisant l'hypothèse additionnelle que la taille du domaine fluide  $d = r_o - r_i$  est faible devant l'échelle caractéristique de variation radiale de la densité  $d_\rho = |\partial \ln \rho / \partial r|^{-1}$  ou de la température  $d_T = |\partial \ln T / \partial r|^{-1}$ . Cette hypothèse est plus discutable notamment dans les planètes gazeuses pour lesquelles les propriétés de transport et la densité varient de plusieurs ordres de grandeur à l'intérieur. Chaque quantité physique est ensuite développée en une quantité moyenne à symétrie sphérique ne dépendant pas du temps correspondant à un état de référence (avec un indice  $r$ ), et une fluctuation dépendant du temps (quantités primées), tel que

$$x(r, \theta, \phi, t) = x_r(r) + x'(r, \theta, \phi, t).$$

La validité de ce type d'approximation nécessite que  $\epsilon = |x'/x| \ll 1$  à tout instant et pour tout point de l'espace. Pour modéliser les problèmes de convection, on définit donc en général un état de référence « bien mélangé », adiabatique (voir plus bas, § 1.2.3). Sous l'approximation anélastique, l'équation de continuité s'écrit simplement

$$\nabla \cdot (\rho_r \mathbf{u}) = 0, \quad (1.7)$$

alors que l'équation de Navier Stokes s'écrit

$$\rho_r \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} \right) = -\nabla p' + \rho' \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (1.8)$$



avec  $\mathbf{u}$  la vitesse,  $p$  la pression  $\mathbf{B}$  le champ magnétique et  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$  la densité de courant. Sous l'hypothèse d'un fluide Newtonien, le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  s'écrit

$$S_{ij} = 2\nu\rho_r \left( \mathbf{e}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \quad \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.9)$$

avec  $\nu$  la viscosité cinématique. Comme on l'a déjà vu, l'évolution du champ magnétique est décrite par une équation d'induction qui s'écrit dans le cas d'une diffusivité magnétique  $\lambda$  non homogène

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \lambda \nabla \times \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.10)$$

La fluctuation de densité qui contribue au terme de flottabilité de Eq. (1.8) peut s'exprimer en fonction des fluctuations d'entropie  $s'$ , de composition chimique  $\xi'$  et de pression  $p'$ .

$$\rho' = -\frac{\alpha_T \rho_r T_r}{c_p} s' + \frac{\rho_r}{K_S} p' - \alpha_\xi \rho_r \xi',$$

avec  $\alpha_T$  et  $\alpha_\xi$  les coefficients de dilatation thermique et chimique,  $c_p$  la capacité thermique isobare et  $K_S$  le module d'élasticité isentropique. L'évolution temporelle des fluctuations d'entropie et de composition est régie par

$$\rho_r T_r \left( \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s' \right) = -\nabla \cdot \mathbf{F}_T + \mathcal{Q}_v + \mathcal{Q}_\lambda + \mathcal{H}_T, \quad \frac{\partial \xi'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi' = \nabla \cdot (\kappa_\xi \rho_r \nabla \xi') + \mathcal{H}_\xi, \quad (1.11)$$

avec  $\kappa_\xi$  une diffusivité associée à la composition chimique,  $\mathcal{H}_T$  et  $\mathcal{H}_\xi$  les sources éventuelles en volume,  $\mathcal{Q}_v$  et  $\mathcal{Q}_\lambda$  les termes de chauffage visqueux et Ohmique exprimés par

$$\mathcal{Q}_v = 2\nu\rho_r \left[ \sum_{i,j} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ji} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right], \quad \mathcal{Q}_\lambda = \lambda j^2. \quad (1.12)$$

L'équation d'évolution de l'entropie peut également s'exprimer en fonction de la température et de la pression sous la forme suivante

$$\rho_r c_p \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T' \right) - \alpha_T T_r \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p' \right) = -\nabla \cdot \mathbf{F}_T + \mathcal{Q}_v + \mathcal{Q}_\lambda + \mathcal{H}_T, \quad (1.13)$$

ce qui permettra un lien plus immédiat avec l'approximation de Boussinesq, une fois que l'on aura adopté un adimensionnement des équations.

Le flux thermique dans Eqs. (1.11) et (1.13) s'exprime en principe sous la forme d'une loi de Fourier  $\mathbf{F}_T = -\kappa_T \rho_r c_p \nabla T'$  avec  $\kappa_T$  la diffusivité thermique. Ce flux est néanmoins souvent approximé dans les calculs anélastiques par un modèle de turbulence assez simple qui suppose que la diffusion thermique moléculaire n'est pas pertinente dans un écoulement planétaire et que c'est la diffusion d'entropie qui prend le dessus de telle sorte que  $\mathbf{F} = -\kappa_S \rho_r T_r \nabla s'$ , avec  $\kappa_S$  une diffusivité d'entropie (BRAGINSKY et ROBERTS, 1995; JONES et al., 2011). Quelques comparaisons entre les deux approches par LECOANET et al. (2014) ou entre les équations compressible et anélastique par J. VERHOEVEN, WIESEHÖFER et STELLMACH (2015) indiquent un bon accord, au moins en l'absence de rotation et en coordonnées cartésiennes. L'impact de cette approximation reste néanmoins assez mal connu mais a le mérite de simplifier grandement l'implémentation numérique de Eq. (1.11)<sup>1</sup> puisque l'équation d'entropie n'est alors plus couplée avec les fluctuations de pression si l'on fait l'hypothèse additionnelle que les conditions aux limites dépendent uniquement de l'entropie (voir § 1.2.4).

## 1.2.2 Adimensionnement et paramètres de contrôle

Le système d'équations (1.7-1.11) peut être ensuite adimensionné. On adoptera par la suite l'inverse du taux de rotation  $\Omega^{-1}$  comme échelle de temps et l'épaisseur de la coquille sphérique  $d$  comme échelle de longueur. Les quantités de référence comme la densité  $\rho_r$ , la température  $T_r$ , la gravité ou les propriétés de transport sont mises à l'échelle en utilisant leur valeur au rayon externe (notation avec un  $o$  en indice) ou interne (notation avec un  $i$  en indice). Le champ de vitesse s'exprime alors en unités de  $\Omega d$  et le champ magnétique en unités de  $\sqrt{\rho_o \mu_0} d \Omega$ . Les fluctuations d'entropie, de température ou de composition dépendent du choix de conditions aux limites pour ces quantités. Dans le cas où elles sont imposées aux deux frontières, le contraste  $\Delta[\xi, T, s]$  est utilisé comme quantité de référence. Si en revanche un flux  $\mathcal{Q}_{[\xi, T, s]}$  est imposé, alors le produit  $d \mathcal{Q}_{[\xi, T, s]}$  définit la référence. Par la suite, les quantités adimensionnées porteront une tilde. En faisant l'hypothèse additionnelle que la viscosité cinématique  $\nu$ , les diffusivités  $\kappa_\xi$ ,  $\kappa_T$ ,  $\kappa_S$  et la capacité thermique  $c_p$  sont uniformes et en omettant les primes par soucis de lisibilité, on obtient alors pour l'approximation anélastique les équations adimensionnées suivantes :

1. Citons BRAGINSKY et ROBERTS (1995), p. 21, à propos d'un praticien implémentant l'approximation anélastique : “sooner or later he would be forced to accept an engineering approximation”.

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_r \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + 2\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \left( \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}_r} \right) - \frac{Ra_S E^2}{Pr} \tilde{\alpha}_T \tilde{T}_r \tilde{\mathbf{g}} \tilde{s} - \frac{Ra_\xi E^2}{Sc} \tilde{\alpha}_\xi \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\xi} + \frac{1}{\tilde{\rho}_r} (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}} + \frac{E}{\tilde{\rho}_r} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{S}}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\nabla} \times \left( \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{E}{Pm} \tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} \right), \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\xi} = \frac{E}{Sc} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_r \tilde{\nabla} \tilde{\xi}) + \tilde{\mathcal{H}}_\xi, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_r \tilde{T}_r \left( \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{s} \right) &= \frac{E}{Pr} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_r \tilde{T}_r \tilde{\nabla} \tilde{s}) + \frac{DiPr}{Ra_S E} \left( \tilde{Q}_\nu + \frac{1}{Pm} \tilde{Q}_\lambda \right) + \tilde{\mathcal{H}}_T, \\ \tilde{\rho}_r \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \right) - \tilde{\alpha}_T \tilde{T}_r \frac{CoDiPr}{Ra_S E^2} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} \right) &= -\frac{E}{Pr} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_T + \frac{DiPr}{Ra_S E} \left( \tilde{Q}_\nu + \frac{1}{Pm} \tilde{Q}_\lambda \right) + \tilde{\mathcal{H}}_T, \end{aligned} \quad (1.18)$$

les deux dernière équations étant des formulations alternatives possibles suivant les quantités thermodynamiques avec lesquelles on souhaite travailler *in fine* :  $(\tilde{p}, \tilde{s})$  ou  $(\tilde{p}, \tilde{T})$ . Ce système d'équations est gouverné par 8 nombres sans dimension. Le nombre d'Ekman  $E$  correspond au ratio de la viscosité sur la force de Coriolis. Les nombres de Rayleigh  $Ra_S$  et  $Ra_\xi$  caractérisent la vigueur de la convection thermique et chimique. Les nombres de Schmidt  $Sc$ , de Prandtl  $Pr$  et de Prandtl magnétique  $Pm$  correspondent au ratio de la viscosité cinématique sur la diffusivité chimique, d'entropie et magnétique. Ils sont définis par

$$E = \frac{\nu}{\Omega d^2}, \quad Ra_S = \frac{\alpha_{T_o} T_o g_o d^3 \Delta s}{\nu \kappa_S}, \quad Ra_\xi = \frac{\alpha_{\xi_o} g_o d^3 \Delta \xi}{\nu \kappa_\xi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa_S}, \quad Sc = \frac{\nu}{\kappa_\xi}, \quad Pm = \frac{\nu}{\lambda_i}, \quad Co = \alpha_o T_o, \quad Di = \frac{\alpha_o g_o d}{c_p}. \quad (1.19)$$

Les deux derniers paramètres de cette liste correspondent au nombre de compressibilité  $Co$  et au nombre de dissipation  $Di$ .  $Co$  vaut 1 dans la limite d'un gaz parfait et est très faible dans un métal liquide, typiquement  $Co \sim \mathcal{O}(10^{-2})$ . On obtient d'ailleurs l'approximation dite « anélastique liquide » en supposant que  $Co = 0$  (e.g. ANUFRIEV, JONES et SOWARD, 2005; ALBOUSIÈRE et RICARD, 2013). Le nombre de dissipation peut être perçu comme le rapport entre la taille du domaine fluide et l'échelle caractéristique de variation radiale de la température :  $Di = d/d_T$  avec  $d_T = |\partial \ln T / \partial r|^{-1}$ . L'approximation de Boussinesq est alors obtenue en faisant tendre  $Di$  vers zéro. Le système d'équations (1.14-1.18) se ramène alors à

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + 2\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{Ra_T E^2}{Pr} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{T} - \frac{Ra_\xi E^2}{Sc} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\xi} + (\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}} + E \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}}) + \frac{E}{Pm} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{B}}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\xi} = \frac{E}{Sc} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\xi} + \tilde{\mathcal{H}}_\xi, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = \frac{E}{Pr} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} + \tilde{\mathcal{H}}_T. \quad (1.24)$$

où le nombre de Rayleigh thermique est désormais défini en utilisant le contraste de température  $\Delta T$  tel que

$$Ra_T = \frac{\alpha_T g_o d^3 \Delta T}{\nu \kappa_T}. \quad (1.25)$$

et  $Pr = \nu / \kappa_T$ . Notons encore une fois que  $Ra_T$ ,  $Ra_S$  et  $Ra_\xi$  sont susceptibles d'être définis différemment en cas d'utilisation de conditions de Neumann pour une de ces quantités. Par la suite, comme l'immense majorité des modèles possèdent un forçage convectif d'origine purement thermique, on adoptera fréquemment la notation  $Ra$  pour  $Ra_T$  ou  $Ra_S$  par souci de lisibilité.

Avec l'adimensionnement choisi on constate que le préfacteur des termes de poussée d'Archimède dans Eq. (1.15) et Eq. (1.21) implique une combinaison de nombres sans dimension égale à  $Ra_T E^2 / Pr$ . Ce nombre correspond au carré du nombre de Rossby convectif  $Ro_c$  introduit par GILMAN (1977)<sup>2</sup> :

$$Ro_c = \sqrt{\frac{Ra_T E^2}{Pr}}. \quad (1.26)$$

2. Il est parfois également appelé « nombre de Rayleigh modifié  $Ra^*$  » dans la littérature (e.g. CHRISTENSEN, 2002), avec la relation  $Ra^* = Ro_c^2$ .

TABLE 1.1 – Définitions et estimations des principaux paramètres estimés pour Jupiter, le noyau liquide de la Terre et dans les modèles numériques actuels. Pour la Terre, les valeurs proviennent pour l’essentiel de la Table 1 de ANUFRIEV, JONES et SOWARD (2005) et la Table 1 de ROBERTS et KING (2013). Pour Jupiter, les grandeurs ont été reconstruites à partir des modèles de structure interne de FRENCH et al. (2012) en utilisant une densité moyenne de  $\rho_m = 1300 \text{ kg/m}^3$  et une diffusivité électrique moyenne de  $\lambda_m = 1.15 \text{ m}^2/\text{s}$ . La fraction dipolaire  $f_{dip}$  est calculée à partir du modèle de CONNERNEY et al. (2018) pour Jupiter à une profondeur de  $0.9 R_J$  et à partir de l’IGRF-13 à la CMB pour la Terre (ALKEN et al., 2021).

Paramètre	Nom	Définition	Jupiter	Terre	Modèles
$Ra_T$	Rayleigh thermique	$\alpha_{T_o} g_o d^3 \Delta T / \nu \kappa_T$	$10^{31}$	$10^{27}$	$10^3 - 10^{11}$
$Ra_\xi$	Rayleigh chimique	$\alpha_{\xi_o} g_o d^3 \Delta \xi / \nu \kappa_\xi$	?	$10^{31}$	$10^3 - 10^{11}$
$E$	Ekman	$\nu / \Omega d^2$	$10^{-18}$	$10^{-15}$	$10^{-7} - \infty$
$Pr$	Prandtl	$\nu / \kappa_T$	$10^{-2} - 1$	0.1	0.1 - 10
$Sc$	Schmidt	$\nu / \kappa_\xi$	?	$\mathcal{O}(10 - 10^2)$	0.1 - 10
$Ro_c$	Rossby convectif	$\sqrt{\alpha_{T_o} g_o \Delta T / \Omega^2 d}$	$\mathcal{O}(0.1)$	$\mathcal{O}(0.1)$	$10^{-2} - \infty$
$Pm$	Prandtl magnétique	$\nu / \lambda_i$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	0.1 - 10
$Di$	Dissipation	$\alpha_{T_o} g_o d / c_p$	100	0.28	0 - 30
$N_\rho$	Contraste de densité	$\ln(\rho_i / \rho_o)$	8.5	0.2	0 - 5
$Co$	Compressibilité	$\alpha_{T_o} T_o$	0.9	0.04	0 - 1
$\Gamma$	Grüneisen		0.45	1.5	0.2 - 2
$N/\Omega$	Stratification		? (1 - 3)	? (0.5 - 10)	0 - 50
$Rm$	Reynolds magnétique	$U d / \lambda_i$	$\mathcal{O}(10^6)$	$10^3$	$10^2 - 3 \times 10^3$
$Re$	Reynolds	$U d / \nu$	$\mathcal{O}(10^{12})$	$10^9$	$10 - 10^4$
$Ro$	Rossby	$U / \Omega d$	$\mathcal{O}(10^{-6})$	$10^{-6}$	$10^{-3} - \infty$
$\Lambda$	Elsasser	$B^2 / (\rho_m \lambda_m \mu_0 \Omega)$	$\mathcal{O}(10^1 - 10^2)$	10	$10^{-2} - 10^2$
$\Lambda$	Lehnert	$B / (\Omega d \sqrt{\rho_m \mu_0})$	$\mathcal{O}(10^{-5} - 10^{-4})$	$10^{-4}$	$10^{-3} - \infty$
$\overline{E_M} / \overline{E_K}$	Ratio d’énergie	$B^2 / (\mu_0 \rho_m U^2)$	$\mathcal{O}(10^2 - 10^3)$	$\mathcal{O}(10^3 - 10^4)$	0 - 100
$f_{ohm}$	Dissipation Ohmique	$\overline{D_\lambda} / (\overline{D_\lambda} + \overline{D_\nu})$	1	1	0 - 0.9
$f_{dip}$	Fraction dipolaire	$\sqrt{B_{\ell=1, m=0}^2(r_o) / B_{\ell, m \leq 12}^2(r_o)}$	0.77	0.63	0 - 0.95

Dans les problèmes de convection en rotation,  $Ro_c$  est un nombre sans dimension crucial puisqu’il correspond physiquement au ratio de la flottabilité sur la force de Coriolis et qu’il n’implique donc pas les diffusivités du problème.

Les estimations des paramètres de contrôle pour Jupiter, pour le noyau liquide de la Terre et pour les modèles numériques actuels sont indiquées dans la partie supérieure de la Table 1.1. Du fait de leur résolution spatiale limitée, les modèles numériques 3-D ne sont pas capables de modéliser l’ensemble des échelles spatiales et temporelles d’un intérieur planétaire. En conséquence, les diffusivités utilisées dans les modèles sont beaucoup plus élevées que dans les écoulements naturels, ce qui conduit à des nombres de Rayleigh plus faible et des nombres d’Ekman plus grands. En revanche on constate que les modèles numériques sont capables d’atteindre les valeurs de  $Ro_c$  attendues pour le noyau terrestre ou pour Jupiter. Cela implique que les modèles numériques peuvent correctement capturer le ratio entre les forces dominantes des problèmes de convection en rotation.

### 1.2.3 État(s) de référence(s)

#### Densité et température

La définition de l’état de référence est particulièrement importante dans les équations anélastiques puisque les équations (1.14-1.18) font explicitement intervenir les profils de densité  $\rho_r$  et de température  $T_r$ , mais également  $\alpha_T$  et des propriétés de transport comme la diffusivité magnétique. Pour les modèles entièrement convectifs (i.e. sans zone stratifiée stable), l’état de référence est défini comme un état hydrostatique isentropique tel que

$$s_r = \text{const.}, \quad \xi_r = \text{const.}, \quad \frac{d \ln \rho_r}{dr} = -\frac{\alpha_T g}{c_p \Gamma}, \quad \frac{d \ln T_r}{dr} = -\frac{\alpha_T g}{c_p},$$

où la gravité s’écrit  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_r$  avec  $\mathbf{e}_r$  le vecteur unité suivant la direction radiale et  $\Gamma$  le paramètre de Grüneisen. La forme adimensionnée des deux dernières équations s’écrit

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}_r}{d\tilde{r}} = -Di \frac{\tilde{\alpha}_T \tilde{g}}{\Gamma}, \quad \frac{d \ln \tilde{T}_r}{d\tilde{r}} = -Di \tilde{\alpha}_T \tilde{g}. \quad (1.27)$$

Pour entièrement spécifier l’état de référence, on a alors besoin d’une équation d’état  $\tilde{p}_r = f(\tilde{\rho}_r, \tilde{T}_r)$ . Dans les modèles anélastiques, il est assez fréquent de faire deux hypothèses simplificatrices additionnelles : (i) on considère un gaz parfait

( $\alpha_T = 1/T_r$ ); (ii) le fluide considéré n'est pas auto-gravitant de telle sorte que le profil de gravité est spécifié indépendamment du profil de densité. Ces deux approximations sont en fait assez bien justifiées dans le cadre de la modélisation de l'enveloppe des planètes géantes puisque le comportement de la partie moléculaire est relativement bien décrit par un gaz parfait et que l'essentiel de la masse est concentrée dans les couches internes et conduit à  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  (voir JONES et al., 2011). Cette hypothèse devient beaucoup plus discutable dans la partie métallique (FRENCH et al., 2012). Ces problèmes ne se posent pas dans les modèles Boussinesq puisqu'un fluide avec un état de référence avec une densité uniforme conduit à  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$ .

Dans ce cadre là, on obtient alors un état de référence polytropique analytique tel que  $\tilde{\rho}_r = \tilde{T}_r^{m_p}$  et  $\tilde{p}_r = \tilde{T}_r^{m_p+1}$  avec

$$T_r(\tilde{r}) = 1 - Di + Di \frac{\tilde{r}_o}{\tilde{r}}, \quad (1.28)$$

et  $m_p$  l'indice polytropique qui est égal à l'inverse du paramètre de Grüneisen  $m_p = 1/\Gamma$ . Il est alors pratique d'introduire un nombre quantifiant le contraste de densité sur la coquille sphérique  $N_\rho = \ln[\rho_r(\tilde{r}_i)/\rho_r(\tilde{r}_o)]$  qui est relié à  $Di$  et  $m_p$  par la relation

$$Di = \frac{\eta}{1-\eta} \left[ \exp\left(\frac{N_\rho}{m_p}\right) - 1 \right]. \quad (1.29)$$

Une modification du profil de gravité conduit à une modification de la fonction  $N_\rho = f(Di, m_p)$  (e.g. GASTINE, DUARTE et WICHT, 2012). Si l'on souhaite réaliser un modèle moins idéalisé, il est possible de réaliser une régression polynomiale de  $\alpha_T$ ,  $g$ ,  $T_r$  et  $\rho_r$  à partir d'un modèle de structure interne comme celui de FRENCH et al. (2012). Une telle procédure a par exemple été utilisée par JONES (2014) et par GASTINE, WICHT, DUARTE et al. (2014) pour modéliser Jupiter. Les deux approches sont en fait complémentaires puisque le modèle idéalisé (1.28-1.29) permet de facilement réaliser des études paramétriques en variant le contraste de densité  $N_\rho$  alors qu'un état de référence plus précis permet de produire des modèles plus « réalistes ».

Si le domaine fluide contient une zone stratifiée stable, on ne peut plus définir l'état de référence comme un état isentropique. L'équation (1.27) doit alors être remplacée par

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}_r}{d\tilde{r}} = -C_o \epsilon_S \tilde{\alpha}_T \tilde{T}_r \frac{d\tilde{s}_r}{d\tilde{r}} - Di \frac{\tilde{\alpha}_T \tilde{g}}{\Gamma}, \quad \frac{d \ln \tilde{T}_r}{d\tilde{r}} = \epsilon_S \frac{d\tilde{s}_r}{d\tilde{r}} - Di \tilde{\alpha}_T \tilde{g}. \quad (1.30)$$

En plus des nombres sans dimension habituels, l'état de référence fait dans ce cas intervenir le gradient du profil d'entropie (qui s'annule dans le cas adiabatique) et un paramètre  $\epsilon_S$  lié à l'adimensionnement de ce profil et qui caractérise le niveau de proximité avec l'adiabat dans la partie convective. Dans le cas où l'on aurait par exemple une zone convective située au dessus d'une zone stable, il est pratique d'ancrer la valeur du gradient d'entropie à la frontière externe de telle sorte que  $\epsilon_S = d/c_p |ds/dr|_o$ . La définition d'un état de référence non adiabatique nécessite la connaissance de  $ds/dr$  en plus des propriétés thermodynamiques habituelles. À ce stade, soit l'on dispose d'un modèle de structure interne fournissant  $ds/dr$  (cas le moins probable) auquel cas on peut là encore procéder à un fit polynomial, soit on n'en dispose pas (cas le plus probable) auquel cas on peut spécifier un profil analytique *ad-hoc* permettant de contrôler finement la localisation de la couche stratifiée stable et son degré de stratification (pour plus de détails, voir GASTINE et WICHT, 2021). En cas de présence d'une couche stratifiée, il est utile d'introduire un nombre sans dimension additionnel permettant de caractériser l'amplitude de la stratification stable. Pour les fluides en rotation rapide, on compare habituellement la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  au taux de rotation  $\Omega$  (e.g. TAKEHIRO et LISTER, 2001).

La seconde partie de la table 1.1 liste les différents paramètres sans dimension associés à la définition de l'état de référence. Le fort contraste en densité à l'intérieur de Jupiter  $N_\rho \approx 8.5$  est encore une fois très difficile à reproduire numériquement et les modèles actuels négligent en général les premiers 1 ou 2% du rayon sous la surface pour limiter le contraste de densité. Le nombre de dissipation dans le noyau liquide vaut 0.3 et les effets de contraste en densité entre la CMB et l'ICB devraient donc jouer un rôle très secondaire dans les modèles de géodynamo. L'approximation de Boussinesq est donc bien adaptée à ces modèles. Comme on l'a vu précédemment, la localisation et l'amplitude d'éventuelles couches stratifiées stables ne font pas l'unanimité, il y a donc une très large incertitude concernant les valeurs de  $N/\Omega$ .

Pour conclure cette section, notons que l'inclusion de couches stables est une procédure aux limites de l'approximation anélastique puisque rien ne garantit complètement que les perturbations restent petites devant la quantité de référence, notamment aux interfaces entre domaines convectifs et stables. Nous reviendrons sur ces limites et des pistes possibles d'amélioration du modèle dans le paragraphe § 2.1.1.

### Propriétés de transport

La variabilité en rayon des propriétés de transport représente une complexité additionnelle que l'on peut inclure dans les modèles anélastiques. Il s'agit cependant ici d'agir avec un certain degré de parcimonie car un changement important des propriétés de transport comme la viscosité cinématique ou encore la diffusivité thermique entraîne en pratique des nombres d'Ekman ou de Prandtl pouvant localement changer et donc affecter de manière importante les résultats physiques. Les calculs *ab-initio* de FRENCH et al. (2012) pour un mélange hydrogène-hélium dans les conditions

de l'intérieur de Jupiter suggèrent que la viscosité cinématique est presque constante (leur Fig. 6 bas). La diffusivité thermique change d'un peu plus d'un ordre de grandeur dans leur modèle (leur Fig. 9 bas) mais avec une variation non uniforme. Dans la suite, on fera donc l'hypothèse que  $\nu$ ,  $\kappa_S$ ,  $\kappa_T$  et  $\kappa_\xi$  sont constants (Eqs. 1.14-1.18).

La propriété physique qui varie le plus dans les planètes géantes est la conductivité électrique. Alors qu'elle est très faible dans l'enveloppe moléculaire (1 S/m à  $0.95 R_J$ ), elle augmente de manière abrupte avec la pression pour atteindre une valeur supérieure à  $10^5$  S/m en dessous de  $0.9 R_J$  (FRENCH et al., 2012, Table 2). Pour les géantes de glace l'incertitude est bien plus importante mais les calculs *ab-initio* des différentes phases de l'eau indiquent un comportement similaire avec une conductivité faible dans la partie moléculaire qui augmente dans la partie ionique pour atteindre des valeurs comprises entre  $10^3$  et  $3 \times 10^4$  S/m au delà de 10 GPa (REDMER et al., 2011). Ces variations sont paramétrées en utilisant un profil analytique défini par GÓMEZ-PÉREZ, HEIMPEL et WICHT (2010) qui permet de définir deux branches adaptées aux régions moléculaires et métalliques :

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \begin{cases} 1 + (\sigma_m - 1) \left( \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_i}{\mathcal{H}_m} \right)^{\xi_m}, & \tilde{r} \leq \tilde{r}_m, \\ \sigma_m \exp \left( \xi_m \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_m}{\mathcal{H}_m} \frac{\sigma_m - 1}{\sigma_m} \right), & \tilde{r} \geq \tilde{r}_m, \end{cases} \quad (1.31)$$

où  $\tilde{r}_m$  est le rayon séparant les deux fonctions,  $\sigma_m$  correspond à la conductivité électrique à  $\tilde{r} = \tilde{r}_m$ ,  $\xi_m$  est le taux de décroissance de la fonction exponentielle et  $\mathcal{H}_m = \tilde{r}_m - \tilde{r}_i$  l'épaisseur de la région métallique.

### 1.2.4 Conditions aux limites

Les systèmes d'équations (1.14-1.18) et (1.20-1.24) doivent être complétés par des conditions aux limites. Concernant la vitesse, on peut adopter soit des conditions rigides d'annulation de la vitesse aux frontières, i.e.  $\mathbf{u} = 0$ , soit une condition de surface libre de contraintes (dite "stress-free" dans la suite de ce document) pour laquelle on a une contrainte de non pénétration  $u_r = 0$  qui s'accompagne de l'annulation des composantes tangentielles du tenseur des contraintes, à savoir  $\mathbf{e}_r \times (\mathbf{S} \mathbf{e}_r) = 0$ . Cette dernière condition peut s'écrire  $\partial(u_\phi/r)/\partial r = \partial(u_\theta/r)/\partial r = 0$ .

Pour le champ magnétique, on fait usuellement l'hypothèse que le domaine au-delà du rayon externe est isolant, ce qui correspond à faire l'hypothèse d'un champ potentiel en  $r = r_o$ . On peut procéder de même au rayon interne en fonction du problème physique considéré, mais il est parfois plus pertinent, notamment dans le cadre de la géodynamo, de modéliser la diffusion du champ magnétique dans la graine. Cette dernière est alors approximée par un solide sphérique ayant la même conductivité électrique que le noyau liquide et libre de tourner de façon différentielle par rapport au fluide. Dans le référentiel du manteau, son taux de rotation  $\omega_i$  dépend des couples magnétiques  $\Gamma_L$  et visqueux  $\Gamma_V$  (si la condition mécanique est rigide en  $r_i$ ) s'exerçant à sa surface. Avec l'adimensionnement choisi, on a

$$\tilde{I} \frac{d\tilde{\omega}_i}{d\tilde{t}} = \tilde{\Gamma}_V + \tilde{\Gamma}_L, \quad \tilde{\Gamma}_V = E \tilde{r}_i^2 \oint_{\tilde{r}=\tilde{r}_i} \tilde{\rho}_r \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{\tilde{u}_\phi}{\tilde{r}} \right) \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_i} \sin \theta dS, \quad \tilde{\Gamma}_L = \tilde{r}_i \oint \tilde{B}_r \tilde{B}_\phi \sin \theta dS, \quad (1.32)$$

avec  $dS = \sin \theta d\theta d\phi$  et  $\tilde{I}$  le moment d'inertie de la graine dans nos unités adimensionnées (HOLLERBACH, 2000).

Comme on l'a vu précédemment, l'approximation anélastique de BRAGINSKY et ROBERTS (1995) ou LANTZ et FAN (1999) fait l'hypothèse d'une diffusion d'entropie dans l'équation de la chaleur (1.18). Il est alors plus simple numériquement de considérer des conditions aux limites basées sur l'entropie plutôt que la température (voir le benchmark de JONES et al., 2011). On utilise en pratique soit des conditions de Dirichlet soit des conditions de Neumann sur cette quantité selon le problème considéré.

Pour l'équation de composition chimique (1.17) et pour l'équation de température dans l'approximation de Boussinesq (1.24), les conditions aux limites s'expriment également sous la forme de condition de Dirichlet ou de Neumann. Il s'agit encore une fois d'une simplification puisque dans le cas de la Terre par exemple, les conditions aux limites dépendent du temps et impliquent un couplage entre température et composition (e.g. GLATZMAIER et ROBERTS, 1996; CLARTÉ et al., 2021).

### 1.2.5 Diagnostics usuels

Les solutions numériques produites par les codes 3-D MHD en géométrie sphérique sont analysées par différents diagnostics globaux récurrents utilisés depuis les premières études paramétriques systématiques (e.g. KUTZNER et CHRISTENSEN, 2002; CHRISTENSEN, 2002). Par la suite on introduira donc les différentes moyennes suivantes

$$\langle f \rangle_V(t) = \frac{1}{V} \int_V f dV, \quad [f]_\phi(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\phi, \quad \|f\|(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f| \sin \theta d\theta d\phi, \quad \bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} f dt,$$

avec  $V$  le volume du fluide et  $\tau$  l'intervalle temporel considéré pour moyenniser les propriétés.

Avec l'adimensionnement choisi, la vitesse s'exprime naturellement en nombre de Rossby  $Ro$ , correspondant à une estimation du rapport entre inertie et force de Coriolis, mais il est également pratique de considérer le nombre de Reynolds  $Re$ , correspondant au rapport entre inertie et forces visqueuses

$$Ro = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{u}}^2 \rangle_{\tilde{V}}}, \quad Re = RoE^{-1}. \quad (1.33)$$

Dans les situations où la vitesse zonale est nettement plus grande que la vitesse convective, il est nécessaire de scinder les composantes de vitesses en définissant

$$Ro_z = \sqrt{\langle [\tilde{u}_\phi]^2 \rangle_{\tilde{V}}}, \quad Ro_{nz} = \sqrt{Ro^2 - Ro_z^2}, \quad Re_z = Ro_z E^{-1}, \quad Re_c = Ro_{nz} E^{-1}. \quad (1.34)$$

Afin de mesurer le rapport entre induction et diffusion du champ magnétique on introduit un nombre de Reynolds magnétique  $Rm$  dont la définition est modifiée pour prendre en compte la variation de la diffusivité magnétique en fonction du rayon

$$\tilde{\lambda} \text{ variable : } Rm = \frac{Pm}{E\tilde{V}} \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}_o} \frac{\sqrt{4\pi\|\tilde{\mathbf{u}}^2\|}}{\tilde{\lambda}} \tilde{r}^2 d\tilde{r}, \quad \tilde{\lambda} \text{ constant : } Rm = RePm. \quad (1.35)$$

L'amplitude du champ magnétique s'exprime en nombre de Lehnert  $Le$ <sup>3</sup> quantifiant le rapport entre vitesse d'Alfvén et vitesse de rotation ou en nombre d'Elsasser  $\Lambda$  quantifiant le ratio entre force de Lorentz et force de Coriolis :

$$Le = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{B}}^2 \rangle_{\tilde{V}}}; \quad \rho_r \text{ variable : } \Lambda = PmE^{-1} \left\langle \frac{\tilde{\mathbf{B}}^2}{\tilde{\rho}_r \tilde{\lambda}} \right\rangle_{\tilde{V}}, \quad \rho_r \text{ constant : } \Lambda = Le^2 PmE^{-1}. \quad (1.36)$$

La géométrie du champ magnétique est définie par la fraction dipolaire  $f_{dip}$  entre l'amplitude du dipôle axial et l'amplitude totale du champ magnétique tronqué au degré  $\ell_{\max} = 12$  à la surface du domaine fluide (CHRISTENSEN et AUBERT, 2006).

Avec la décomposition en harmoniques sphériques comme stratégie de discrétisation suivant la direction horizontale, une mesure d'une longueur caractéristique associée au degré  $\ell$  peut être estimée en utilisant la demi-longueur d'onde (voir §3.6.3 de BACKUS, PARKER et CONSTABLE, 1996) :

$$\mathcal{L} = \frac{\pi \tilde{r}_{\text{mid}}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \approx \frac{\pi}{\ell} \tilde{r}_{\text{mid}}, \quad (1.37)$$

avec  $\tilde{r}_{\text{mid}}$  correspondant au rayon milieu de la coquille sphérique. Pour choisir un  $\ell$  représentant un écoulement convectif, il est alors courant d'utiliser une longueur intégrale construite à partir du spectre d'énergie cinétique (CHRISTENSEN et AUBERT, 2006)

$$\mathcal{L} = \frac{\pi}{\tilde{\ell}} \tilde{r}_{\text{mid}}, \quad \tilde{\ell} = \frac{\sum_{\ell} \ell \tilde{E}_K^{\ell}}{\sum_{\ell} \tilde{E}_K^{\ell}}, \quad (1.38)$$

avec  $\tilde{E}_K^{\ell}$  l'énergie cinétique au degré  $\ell$ . Cette définition étant directement sensible à la pente du spectre et la troncature numérique utilisée, il peut être utile d'introduire également une mesure de longueur plutôt basée sur le pic du spectre de l'énergie poloïdale :

$$\mathcal{L} = \frac{\pi}{\hat{\ell}} \tilde{r}_{\text{mid}}, \quad \hat{\ell} = \operatorname{argmax}_{\ell} \tilde{E}_{\text{pol}}^{\ell}, \quad (1.39)$$

avec  $\tilde{E}_{\text{pol}}^{\ell}$  l'énergie cinétique poloïdale au degré  $\ell$ .

Les transports de chaleur et de composition chimique peuvent être quantifiés par des nombres de Nusselt  $Nu$  et de Sherwood  $Sh$  dont la définition dépend des conditions aux limites utilisées et de l'approximation, Boussinesq ou anélastique, considérée. En effet pour cette dernière, la diffusion et les conditions aux limites sur l'entropie conduisent à la définition d'un nombre de Nusselt dépendant de l'entropie plutôt que de la température. Quand des conditions de Dirichlet sont utilisées aux deux bords, on a

$$Sh = \frac{\left. \frac{d\|\tilde{\xi}\|}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_o}}{\left. \frac{d\tilde{\xi}_c}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_o}}; \quad \text{Boussinesq : } Nu = \frac{\left. \frac{d\|\tilde{T}\|}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_o}}{\left. \frac{d\tilde{T}_c}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_o}}, \quad \text{Anélastique : } Nu = \frac{\left. \frac{d\|\tilde{s}\|}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_o}}{\left. \frac{d\tilde{s}_c}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_o}}, \quad (1.40)$$

alors que dès qu'au moins une des deux frontières est soumise à une condition de Neumann on adopte les définitions suivantes (GOLUSKIN, 2016) :

$$Sh = \frac{\tilde{\xi}_c(\tilde{r}_i) - \tilde{\xi}_c(\tilde{r}_o)}{\|\tilde{\xi}\|(\tilde{r}_i) - \|\tilde{\xi}\|(\tilde{r}_o)}; \quad \text{Boussinesq : } Nu = \frac{\tilde{T}_c(\tilde{r}_i) - \tilde{T}_c(\tilde{r}_o)}{\|\tilde{T}\|(\tilde{r}_i) - \|\tilde{T}\|(\tilde{r}_o)}, \quad \text{Anélastique : } Nu = \frac{\tilde{s}_c(\tilde{r}_i) - \tilde{s}_c(\tilde{r}_o)}{\|\tilde{s}\|(\tilde{r}_i) - \|\tilde{s}\|(\tilde{r}_o)}, \quad (1.41)$$

3. On trouvera dans la littérature différentes appellations pour cette quantité, comme « nombre de Lorentz  $Lo$  » (e.g. CHRISTENSEN et AUBERT, 2006) ou encore « nombre de Rossby magnétique  $Ro_m$  » (e.g. ROBERTS et KING, 2013).

Dans les deux équations ci-dessus,  $\tilde{\xi}_c$ ,  $\tilde{T}_c$  et  $\tilde{s}_c$  correspondent à la solution statique de

$$\frac{E}{Sc} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_r \tilde{\nabla} \tilde{\xi}_c) + \tilde{H}_\xi = 0; \quad \text{Boussinesq : } \frac{E}{Pr} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T}_c + \tilde{H}_T = 0, \quad \text{Anélastique : } \frac{E}{Pr} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}_r \tilde{T}_r \tilde{\nabla} \tilde{s}_c) + \tilde{H}_T = 0.$$

Enfin, les solutions numériques sont fréquemment examinées en terme de bilan de puissance. En prenant le produit scalaire de Eq. (1.8) par  $\mathbf{u}$  et de Eq. (1.10) par  $\mathbf{B}$  et en intégrant sur le volume, on obtient le bilan d'énergie suivant

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \rho_r \mathbf{u}^2 dV}_{E_K} + \underbrace{\int_{V+V_i} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV}_{E_M} \right) = \underbrace{\int_V \rho' \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV}_{V(\mathcal{P}_T + \mathcal{P}_\xi)} - \underbrace{\int_{V+V_i} \frac{j^2}{\sigma} dV}_{VD_\lambda} - \underbrace{\int_V S^2 dV}_{VD_v}, \quad (1.42)$$

où  $V_i$  correspond au volume de la graine. On peut alors normaliser par le volume du fluide  $V$  et décomposer les sources de flottabilité par unité de volume de la manière suivante

$$\mathcal{P}_\xi(t) = \langle \alpha_\xi \rho_r g \xi u_r \rangle_V; \quad \text{Boussinesq : } \mathcal{P}_T(t) = \langle \alpha_T g \rho_o T u_r \rangle_V, \quad \text{Anélastique : } \mathcal{P}_T(t) = \left\langle \frac{\alpha_T \rho_r T_r}{c_p} g s u_r \right\rangle_V. \quad (1.43)$$

Comme pour le nombre de Rayleigh, on omettra dans la suite l'indice  $T$  ou  $\xi$  quand le forçage est purement thermique. Par la suite, nous verrons que la quantité pertinente est bien souvent la puissance par unité de masse, il est donc pratique de définir une densité moyenne

$$\rho_m = \langle \rho_r \rangle_V. \quad (1.44)$$

Une fois qu'un état statistiquement stationnaire a été atteint, la moyenne temporelle de Eq. (1.42) conduit à un équilibre entre les puissances injectées par les sources d'origines thermique et chimique et les dissipations Ohmique et visqueuse soit

$$\overline{\mathcal{P}_T} + \overline{\mathcal{P}_\xi} - \overline{D_v} - \overline{D_\lambda} = \overline{\mathcal{P}_T} + \overline{\mathcal{P}_\xi} - \frac{1}{f_{\text{ohm}}} \overline{D_\lambda} = 0, \quad f_{\text{ohm}} = \frac{D_\lambda}{D_\lambda + D_v}. \quad (1.45)$$

Dans cette équation,  $f_{\text{ohm}}$  quantifie la fraction d'énergie dissipée ohmiquement. En introduisant  $\mathcal{L}_U$  et  $\mathcal{L}_B$  les échelles de dissipation magnétique et visqueuse, le rapport entre dissipation visqueuse et Ohmique peut s'approximer par

$$\frac{D_v}{D_\lambda} \sim Pm \frac{E_K}{E_M} \frac{\mathcal{L}_B^2}{\mathcal{L}_U^2}.$$

Les dynamos planétaires opèrent en général à  $E_M \gg E_K$  et à des très faibles  $Pm \sim \mathcal{O}(10^{-6})$  (voir Tab 1.1). L'estimation des longueurs de dissipation est plus délicate mais il est raisonnable de supposer que  $\mathcal{L}_U \sim E^{1/3} d$  pour un fluide en rotation rapide et  $\mathcal{L}_B \sim Rm^{-1/2} d$  (DAVIDSON, 2013; ROBERTS et KING, 2013). Pour le noyau liquide de la Terre et Jupiter on obtient alors  $D_v \sim 10^{-3} D_\lambda$  de telle sorte que  $f_{\text{ohm}} \approx 1$  est une bonne approximation pour les dynamos planétaires. Du fait de la difficulté de descendre plus bas que  $Pm \approx 0.1$  dans les modèles, la dissipation visqueuse représente encore une fraction importante du bilan de puissance des dynamos numériques.

Outre l'intérêt de diagnostiquer les différents sources et puits d'énergie, Eq. (1.45) est également un très bon indicateur de la sous-résolution spatiale ou temporelle éventuelle d'un modèle numérique. L'exactitude de cette égalité avec une erreur inférieure à 1% est en général un gage d'une bonne convergence de la solution numérique (e.g. KING, STELLMACH et AURNOU, 2012, Fig. 2).

La dernière partie de la table 1.1 donne des estimations des principaux diagnostics globaux pour le noyau liquide de la Terre et pour Jupiter ainsi que la plage de valeurs accessibles aux modèles 3-D actuels. On constate finalement des régimes physiques relativement similaires pour la géodynamo et la dynamo jovienne avec des Rossby très faible  $\mathcal{O}(10^{-6})$ , des nombres d'Elsasser  $\mathcal{O}(10)$  et des ratios  $\overline{E_M}/\overline{E_K}$  comparables. La différence principale se situe au niveau des nombres de Reynolds, nettement plus élevés dans le cas Jovien. Du point de vu numérique, on constate que le nombre d'Elsasser peut être correctement capturé alors que les nombres de Rossby (inertie sur Coriolis) sont trop élevés et les nombres de Reynolds (inertie sur viscosité) sont trop faibles. La valeur du nombre de Reynolds magnétique estimé à  $10^3$  pour le noyau liquide place la géodynamo dans une configuration plus favorable numériquement que les planètes géantes. En effet  $Rm \sim \mathcal{O}(10^3)$  étant atteignable numériquement, il est possible d'assurer un ratio réaliste entre les temps d'advection et de diffusion magnétique. Ceci améliore nettement la capacité prédictive des modèles géodynamo puisque l'équation d'induction (1.22) opère dans le régime géophysique attendu. Ceci n'est malheureusement pas le cas pour les planètes géantes, et *a fortiori* pour les dynamos stellaires pour lesquelles  $Rm$  est bien plus élevé, il y aura donc une ambiguïté à lever si l'on souhaite confronter les temps caractéristique d'évolution des champs magnétiques numériques à des observables.

Pour résumer, les rapports des forces de flottabilité sur Coriolis et Lorentz sur Coriolis attendus dans les dynamos planétaires peuvent être reproduits correctement par les modèles numériques alors que les rapports impliquant la viscosité ou dans une moindre mesure l'inertie sont sévèrement sur ou sous estimés. Puisque les forces de Lorentz, de Coriolis et de flottabilité constituent en général l'équilibre des forces contrôlant les dynamos planétaires, il est raisonnable de tenter d'appréhender la physique de ces dynamos par une approche numérique dans la mesure où l'on est capable de limiter les effets diffusifs ou tout au moins de quantifier leur effet.

### 1.3 Cadre numérique : le code MagIC

Pour réaliser les expériences numériques que je vais présenter dans les sections suivantes, je m'appuie sur le code pseudo-spectral MagIC. MagIC est directement relié au code de GLATZMAIER (1984) qui était à l'origine dédié à la modélisation de la dynamo solaire dans le cadre de l'approximation anélastique. À la suite d'une collaboration avec Gary Glatzmaier et Peter Olson (CHRISTENSEN, OLSON et GLATZMAIER, 1998), Ulrich Christensen a ensuite modifié ce code pour créer sa propre version Boussinesq et adimensionnée adaptée à l'étude systématique de la géodynamo numérique. Ce code initialement appelé mag est devenu MagIC quand Johannes Wicht a rajouté la graine conductrice (WICHT, 2002). Ma première contribution au code en 2011 a consisté à rétablir les équations anélastiques (supprimées un peu plus d'une décennie auparavant) afin de modéliser la dynamique interne des planètes géantes gazeuses. J'ai ensuite régulièrement contribué au développement du code pour en devenir le développeur principal. Parmi mes contributions notables, j'ai entièrement modernisé le code le portant d'une version Fortran 77 à 90 puis 2003; j'ai implémenté les différents effets physiques additionnels qui n'étaient pas présents dans le code initial (approximation anélastique, double diffusion, précession, sphère pleine); j'ai amélioré la performance des communications MPI (*Message Passing Interface*) initialement implémentées par Tilman Dannert; j'ai modifié en profondeur la structure du code pour rendre le choix de la stratégie de discrétisation en temps et en rayon plus flexible. Depuis septembre 2015, MagIC est un logiciel libre publié sous licence GPLv3, entièrement documenté et disponible à l'adresse suivante : [github.com/magic-sph/magic](https://github.com/magic-sph/magic). Un ensemble de bibliothèques python permet l'analyse des sorties produites par le code. MagIC est associé à la publication de plus de 120 articles scientifiques dans des domaines variés allant de la modélisation de la géodynamo à la dynamique interne des étoiles à neutrons.

L'algorithme implémenté dans MagIC est toujours assez proche de la publication de GLATZMAIER (1984). J'en rappellerai ici les éléments principaux, la publication d'origine ainsi que les articles de TILGNER (1999) et HOLLERBACH (2000) contenant de nombreux détails. Les équations (1.14-1.18) sont résolues en géométrie sphérique  $(r, \theta, \phi)$ . Afin d'assurer l'annulation de la divergence de  $\mathbf{B}$  et de  $\rho_r \mathbf{u}$ , on utilise une décomposition en potentiels poloïdal et toroïdal :

$$\rho_r \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times W \mathbf{e}_r) + \nabla \times Z \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times G \mathbf{e}_r) + \nabla \times H \mathbf{e}_r. \quad (1.46)$$

Les quantités  $W, Z, G, H, s, p$  (et éventuellement  $\xi$ ) sont les inconnues du problème numérique que l'on cherche à résoudre. Les équations pour les potentiels peuvent être obtenues à partir des équations (1.14-1.18) en utilisant les identités suivantes

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B} = -\nabla_H^2 G, \quad \mathbf{e}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla_H^2 H, \quad \nabla_H^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

avec  $\nabla_H^2$  la composante horizontale du Laplacien en géométrie sphérique. Une équation pour l'évolution temporelle de  $Z$  (et  $H$ ) est donc obtenue en considérant la composante radiale du rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (et d'induction). Pour le potentiel poloïdal  $W$  on a deux possibilités : soit considérer la composante radiale de l'équation de Navier-Stokes que l'on doit alors compléter par une autre équation pour la pression; soit éliminer la pression du problème en considérant la composante radiale du double rotationnel de l'équation de Navier-Stokes. La première approche, celle choisie par GLATZMAIER (1984), entraîne une résolution couplée de deux équations impliquant  $W$  et  $p$ ; alors que la seconde utilisée par exemple par DORMY, CARDIN et JAULT (1998) dans le code PARODY n'implique qu'une seule équation pour  $W$  mais au prix d'une dérivée en espace d'ordre plus élevé. Ce choix n'est pas anodin et peut affecter la stabilité du schéma numérique selon la stratégie de discrétisation choisie pour la direction radiale. HOLLERBACH (2000) reporte par exemple des problèmes de stabilité numérique quand la formulation en double rotationnel est utilisée avec une décomposition en polynômes de Chebyshev suivant  $r$  du fait du très mauvais conditionnement numérique des matrices de différenciation d'ordre 4. Dans MagIC on utilise la formulation d'origine en  $(W, p)$  quand on utilise des polynômes de Chebyshev en rayon et la formulation en double rotationnel quand on utilise des différences finies. Le détail de la dérivation des équations pour les potentiels peut être trouvé en ligne sur le site de la documentation de MagIC ([ici](#)) ou encore dans le § 4.4 de la thèse de Tobias Schwaiger disponible sur [Thèses en ligne](#).

#### 1.3.1 Discrétisation spatiale

##### Représentation en harmoniques sphériques

Chaque fonction  $f(r, \theta, \phi, t)$  est décomposée en une série d'harmoniques sphériques tronquée au degré  $\ell_{\max}$  au rayon  $r$  et à l'instant  $t$  par

$$f(r, \theta, \phi, t) \approx \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m}(r, t) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad Y_{\ell m}(\theta, \phi) = P_{\ell m}(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (1.47)$$

Les harmoniques sphériques  $Y_{\ell m}$  forment une base orthogonale telle que

$$\nabla_H^2 Y_{\ell m} = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell m}, \quad \forall(\ell, m).$$



En utilisant la notation  $*$  pour un nombre complexe conjugué, on a  $f_{\ell,-m}(r, t) = f_{\ell m}^*(r, t)$  pour les fonctions réelles. On peut décomposer Eq. (1.47) en deux étapes définissant la transformée en harmoniques sphériques (SHT) inverse suivante

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \phi, t) &\approx \sum_{m=-\ell_{\max}}^{\ell_{\max}} f_m(r, \theta, t) e^{im\phi}, & (\text{transformée de Fourier}) \\ f_m(r, \theta, t) &\approx \sum_{\ell=|m|}^{\ell_{\max}} f_{\ell m}(r, t) P_{\ell m}(\cos \theta). & (\text{transformée de Legendre}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

La transformée directe s'écrit

$$\begin{aligned} f_m(r, \theta, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \phi, t) e^{-im\phi} d\phi \approx \frac{1}{N_\phi} \sum_{k=1}^{N_\phi} f(r, \theta, \phi_k, t) e^{-im\phi_k}, & (\text{transformée de Fourier}) \\ f_{\ell m}(r, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_m(r, \theta, \phi, t) P_{\ell m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx \frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} w_j f_m(r, \theta_j, t) P_{\ell m}(\cos \theta_j), & (\text{transformée de Legendre}) \end{aligned} \quad (1.49)$$

avec  $\theta_j$  et  $w_j$  les  $N_\theta$  points de collocation de Gauss et les poids associés suivant la colatitude et  $\phi_k = 2k\pi/N_\phi$  les  $N_\phi$  points équidistants suivant la direction azimuthale. Dans les transformées (1.48-1.49), les transformées de Fourier peuvent être réalisées par des algorithmes de transformées rapides comme par exemple la bibliothèque FFTW (FRIGO et JOHNSON, 2005), avec une complexité en  $\mathcal{O}(N_\phi \log N_\phi)$  opérations. Il n'y a malheureusement pas d'équivalent pour les transformées de Legendre et chaque transformée individuelle possède une complexité en  $\mathcal{O}(N_\theta^2)$ . Dans MagIC, on utilise depuis la version 5.3 (fin 2016) et grâce au travail de Bertrand Putigny la bibliothèque libre SHTns<sup>4</sup> développée par Nathanaël Schaeffer pour l'intégralité des transformées en harmoniques sphériques (1.48-1.49) (SCHAEFFER, 2013; ISHIOKA, 2018). Dans la suite on adoptera  $N_\phi = 2N_\theta$  et  $N_\theta \geq (3\ell_{\max} + 1)/2$  pour éviter les problèmes d'aliasing dus aux termes non linéaires (e.g. ORSZAG, 1971; BOYD, 2001). MagIC est un code pseudo-spectral puisqu'à chaque pas de temps les termes non linéaires sont calculés dans l'espace physique  $(r, \theta, \phi)$  et ramenés ensuite dans l'espace spectral  $(r, \ell, m)$  par des SHT.

### Représentation en rayon

Pour le schéma en rayon, le code permet à l'initialisation de choisir entre des différences finies ayant une progression géométrique près des bords et un espacement régulier au centre (DORMY, CARDIN et JAULT, 1998) ou bien une approche spectrale basée sur une méthode de collocation et des polynômes de Chebyshev. Pour cette dernière, chaque fonction  $f_{\ell m}(r, t)$  est décomposée en une série tronquée de polynômes de Chebyshev jusqu'au degré  $N_c - 1$

$$f_{\ell m}(r_k, t) \approx c \sum_{n=0}^{N_c-1} f_{\ell mn}''(t) C_n[x(r_k)], \quad (1.50)$$

avec  $c = \sqrt{2/N_r - 1}$  un facteur de normalisation. Dans cette expression, les doubles primes signifient que le premier et le dernier coefficients doivent être multipliés par 1/2.  $C_n(x)$  est le polynôme de Chebyshev de degré  $n$  défini par

$$C_n(x_k) = \cos[n \arccos(x_k)], \quad x_k \in [-1, 1] \subset \mathbb{R},$$

avec  $x_k$  le  $k$ -ième point nodal de la grille de  $N_r$  points de Gauss-Lobatto définis par

$$x_k = \cos \frac{(k-1)\pi}{N_r-1}, \quad k \in [1, N_r].$$

Les coefficients de Chebyshev de la fonction  $f_{\ell m}(r, t)$  s'écrivent

$$f_{\ell mn}(t) \approx c \sum_{k=1}^{N_r} f_{\ell m}(r_k, t) C_n(x_k). \quad (1.51)$$

Les transformées Eq. (1.50-1.51) sont en fait des transformées en cosinus discrètes de type I (DCT-I) qui peuvent être réalisées par des transformées rapides avec FFTW (PRESS et al., 2007, § 12.4.2).

L'intervalle  $x$  sur  $[-1, 1]$  est habituellement directement transformé en  $[r_i, r_o]$  par simple application affine (e.g. GLATZMAIER, 1984, p. 468). À cause du raffinement des points de collocation près des frontières, l'espacement entre deux

4. <https://bitbucket.org/nschaeff/shtns/>

points de grille décroît comme  $N_r^{-2}$  aux bords. Ceci peut être très pénalisant pour l'étude des dynamos présentant un champ fort (disons avec  $\tilde{E}_M > \tilde{E}_K$ ). Dans cette configuration, la propagation d'ondes d'Alfvén près des bords impose une restriction du pas de temps de la simulation (condition de Courant, voir CHRISTENSEN, OLSON et GLATZMAIER, 1999). Il est alors pratique de considérer le mapping de KOSLOFF et TAL-EZER (1993) qui augmente l'espacement des points aux bords du domaine. Il est défini par

$$r_k = \frac{r_o - r_i}{2} \frac{\arcsin(\alpha_{\text{map}} x_k)}{\arcsin \alpha_{\text{map}}} + \frac{r_o + r_i}{2}, \quad k \in [1, N_r].$$

Pour assurer la convergence spectrale, le coefficient du mapping  $\alpha_{\text{map}}$  doit satisfaire l'inégalité suivante

$$\alpha_{\text{map}} \leq \left[ \cosh \left( \frac{|\ln \epsilon_m|}{N_r - 1} \right) \right]^{-1},$$

avec  $\epsilon_m$  la précision machine (KOSLOFF et TAL-EZER, 1993). L'utilisation de ce mapping peut conduire à des gains assez importants en termes de pas de temps (voir § 2.1.2).

### 1.3.2 Discrétisation temporelle

Maintenant que la partie spatiale est entièrement spécifiée, nous pouvons décrire la stratégie de discrétisation temporelle. Prenons en exemple l'équation d'évolution de  $G$  dans la limite Boussinesq. En considérant la composante radiale de Eq. (1.22) et en adoptant la méthode de collocation avec des polynômes de Chebyshev, on obtient

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r_k^2} c \sum_{n=0}^{N_c-1} \left[ \left( \frac{d}{dt} + \frac{E}{Pm} \frac{\ell(\ell+1)}{r_k^2} \right) C_n(x_k) - \frac{E}{Pm} C_n''(x_k) \right] G_{\ell mn}(t) = \int [e_r \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] Y_{\ell m}^* dS, \quad (1.52)$$

où  $C_n''$  est la dérivée seconde de  $C_n$ . Sous forme matricielle, cette équation peut s'écrire

$$\mathbf{A}_\ell \frac{d\mathbf{G}_{\ell m}(t)}{dt} = \mathcal{N}_{\ell m}[\mathbf{u}, \mathbf{B}] + \mathbf{L}_\ell \mathbf{G}_{\ell m}(t), \quad (1.53)$$

où les matrices  $\mathbf{A}_\ell$  et  $\mathbf{L}_\ell \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$  dépendent de  $\ell$  mais pas de  $m$ . Ces matrices sont denses dans le cas d'une méthode de collocation avec des polynômes de Chebyshev mais ont une structure bande si des différences finies sont utilisées (avec un nombre de bandes  $n_b$  qui dépend de l'ordre des différences finies). Le problème semi-discret (1.53) contient un terme non linéaire  $\mathcal{N}_{\ell m}(t) \in \mathbb{C}^{N_r}$ , et un terme de diffusion numériquement raide.

Afin d'obtenir des pas de temps acceptables, on adopte dans MagIC un schéma qui traite implicitement les termes linéaires (sauf Coriolis) et explicitement les termes non linéaires. On parle de schéma IMEX (*IMplicit EXplicit*). Dans MagIC, j'ai implémenté une stratégie flexible permettant de choisir entre des IMEX multisteps (e.g. ASCHER, RUUTH et WETTON, 1995) ou des IMEX Runge Kutta (DIRK, e.g. ASCHER, RUUTH et SPITERI, 1997).

En notant  $\delta t$  la taille du pas de temps, un IMEX multistep avec  $k$  niveaux appliqué à Eq. (1.53) s'écrit

$$\underbrace{(\mathbf{A}_\ell - \delta t b_0^I \mathbf{L}_\ell)}_{\mathbf{M}_\ell^{\delta t}} \mathbf{G}_{\ell m}^{i+1} = \underbrace{\sum_{j=1}^k a_j \mathbf{A}_\ell \mathbf{G}_{\ell m}^{i+1-j} + \delta t \sum_{j=1}^k (b_j^E \mathcal{N}_{\ell m}^{i+1-j} + b_j^I \mathbf{L}_\ell \mathbf{G}_{\ell m}^{i+1-j})}_{\mathbf{B}_{\ell m}^i}. \quad (1.54)$$

La notation en exposant correspond à la discrétisation temporelle avec  $t^i = t^0 + i\delta t$ .  $a_j$ ,  $b_j^E$ , et  $b_j^I$  correspondent aux poids du schéma en temps. Pour le schéma assemblé à partir d'un Crank-Nicolson et d'un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2, appelé CNAB2, utilisé par GLATZMAIER (1984) et dans de nombreuses publications depuis, on a  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b}^E = (3/2, -1/2)$  and  $\mathbf{b}^I = (1/2, 1/2, 0)$  dans la limite d'un  $\delta t$  constant.

Les schémas multistep ont un domaine de stabilité qui décroît avec leur ordre de convergence et ils nécessitent un stockage des états passés pour continuer l'intégration temporelle. Pour pallier ces limites, j'ai également implémenté dans MagIC des schémas IMEX Runge Kutta dits S-DIRK pour *Singly Diagonally-Implicit Runge Kutta*. Dans ce cas on avance Eq. (1.53) de  $t^i$  à  $t^{i+1}$  en résolvant  $n_s$  étapes intermédiaires

$$\mathbf{G}_{\ell m}^1 = \mathbf{G}_{\ell m}^i; \quad \underbrace{(\mathbf{A}_\ell - \delta t a_{kk}^I \mathbf{L}_\ell)}_{\mathbf{M}_\ell^{\delta t}} \mathbf{G}_{\ell m}^k = \underbrace{\mathbf{G}_{\ell m}^i + \delta t \sum_{j=1}^{k-1} (a_{k,j}^E \mathcal{N}_{\ell m}^j + a_{k,j}^I \mathbf{L}_\ell \mathbf{G}_{\ell m}^j)}_{\mathbf{B}_{\ell m}^k}, \quad 2 \leq k \leq n_s. \quad (1.55)$$

À la fin de ces étapes, on assemble la solution à  $t^{i+1}$  par la combinaison linéaire suivante

$$G_{\ell m}^{i+1} = G_{\ell m}^i + \sum_{j=1}^{n_s} \left( c_j^{\mathcal{E}} \mathcal{N}_{\ell m}^j + c_j^{\mathcal{I}} \mathbf{L}_{\ell} G_{\ell m}^j \right). \quad (1.56)$$

Les matrices  $\mathbf{a}^{\mathcal{I}}$  et  $\mathbf{a}^{\mathcal{E}}$  et les vecteurs  $\mathbf{b}^{\mathcal{I}}$ ,  $\mathbf{b}^{\mathcal{E}}$ ,  $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$  and  $\mathbf{c}^{\mathcal{E}}$  permettent d’assembler les tableaux de Butcher d’un schéma S-Dirk. Itérer un schéma S-Dirk de  $\delta t$  coûte donc  $n_s$  fois plus d’opérations de calcul qu’un schéma multistep. Les domaines de stabilité étant nettement plus grands et augmentant avec l’ordre, ce surcoût est souvent compensé par l’utilisation de pas de temps plus grands (e.g. GASTINE, 2019). En outre, ces schémas ne nécessitent aucun stockage des états précédents et peuvent donc redémarrer de n’importe quel état sans perte d’ordre. La publication récente de TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021) contient un nombre important de simulations de dynamo double diffusive réalisées avec le schéma S-Dirk d’ordre 3 BPR353 de BOSCARINO, PARESCHI et RUSSO (2013) qui s’avérait souvent plus efficace et plus précis que CNAB2 (voir aussi § 2.1.2).

Les matrices  $\mathbf{M}_{\ell}^{\delta t}$  qui entrent dans le membre de gauche de Eq. (1.54) et Eq. (1.55) sont réelles et denses dans le cas d’un schéma radial avec une méthode de collocation à base de polynômes de Chebyshev et ont une structure bande dans le cas des différences finies. Ces problèmes linéaires nécessitent donc respectivement  $\mathcal{O}(N_r^3)$  (Chebyshev) et  $\mathcal{O}(n_b^2 N_r)$  (différences finies) opérations pour procéder à une factorisation LU à chaque fois que le pas de temps  $\delta t$  change. Une fois cette factorisation LU effectuée, la résolution de Eq. (1.54) et Eq. (1.55) nécessite respectivement  $\mathcal{O}(N_r^2)$  (Chebyshev) et  $\mathcal{O}(n_b N_r)$  (différences finies) opérations (voir Annexe B.2 de BOYD, 2001). Sans même parler du coût de stockage mémoire, cette différence de complexité algorithmique montre qu’il sera compliqué de conserver une méthode spectrale de collocation au-delà de  $N_r \sim \mathcal{O}(10^3)$ .

### 1.3.3 Implémentation

**Algorithm 1.3.1:** Pseudo-code de MagIC, adapté de LAGO et al. (2021).

```

1: for each time step do
2:   ! "radial loop" : SHTs and non-linear terms
3:   for each  $r$  in  $N_r$  do
4:     ! inverse spherical harmonics transform, Eq. (1.49)
5:     SHT :  $(\ell, m, r) \rightarrow (\theta, \phi, r)$ 
6:     for each  $\theta, \phi$  in  $N_{\theta}, N_{\phi}$  do
7:       compute non-linear terms
8:     end for
9:     ! forward spherical harmonics transform Eq. (1.48)
10:    SHT :  $(\theta, \phi, r) \rightarrow (\ell, m, r)$ 
11:    compute misc terms ! Coriolis force
12:  end for
13:  ! "l-loop" : IMEX time stepping Eq. (1.54) or Eq. (1.55)
14:  for each  $\ell$  in  $N_{\ell}$  do
15:    for  $m = 0$  to  $\ell$ , update  $\mathbf{B}_{\ell m}^i$ 
16:    if  $\delta t$  changed then recompute :  $\mathbf{M}_{\ell}^{\delta t} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$  and its factors
17:    for  $m = 0$  to  $\ell$ , solve  $\mathbf{M}_{\ell}^{\delta t} G_{\ell m}^{i+1} = \mathbf{B}_{\ell m}^i$ 
18:    update radial derivatives
19:    ! DCT-I Eq. (1.50)
20:    if not finite differences then Chebyshev transforms :  $(\ell, m, n) \rightarrow (\ell, m, r)$ 
21:  end for
22: end for

```

L’avancement en temps du code MagIC est illustré par le pseudo-code montré dans l’algorithme 1.3.1. Pour chaque itération, on a deux grandes étapes, la boucle radiale et la boucle en  $\ell$  :

**Boucle radiale** (lignes 2–11) : les termes non linéaires sont calculés dans l’espace physique  $(\theta, \phi, r)$ . On a donc besoin de deux séries de SHT. Les niveaux radiaux sont découplés et peuvent être traités indépendamment. Une parallélisation avec une décomposition de domaines suivant  $r$  avec MPI est donc bien adaptée.

**Boucle en  $\ell$**  (lignes 13–20) : cette partie correspond à l’avancement en temps proprement dit. On construit le vecteur correspondant au membre de droite  $\mathbf{B}_{\ell m}^i$  puis on procède à la factorisation LU de la matrice si nécessaire avant de résoudre le système linéaire Eq. (1.54) ou Eq. (1.55). La solution est ensuite ramenée sur la grille radiale par une DCT-I. Cette dernière étape est omise en cas d’utilisation des différences finies en rayon. En cas d’utilisation de la méthode de collocation, on obtient donc une stratégie de parallélisation avec une décomposition MPI suivant  $\ell$  qui doit être organisée pour assurer un bon équilibre de charge entre les processeurs (“snake ordering” voir LAGO et al., 2021). Des communications globales type `alltoall` sont dans ce cas nécessaires pour basculer vers

la décomposition utilisée dans la boucle radiale. Les différences finies en rayon peuvent quant à elles conserver la décomposition MPI suivant  $r$  et n'impliquent que des communications points à points.

### 1.3.4 Validations du code

MagIC a été régulièrement testé et validé dans différents benchmarks de comparaison de codes. Citons à ce titre le benchmark géodynamo de CHRISTENSEN et al. (2001), le benchmark de convection double diffusive de BREUER et al. (2010), le benchmark anélastique de JONES et al. (2011) et le benchmark en sphère pleine de MARTI et al. (2014). Différentes configurations issues de ces publications sont vérifiées par des [tests de non régression](#) à chaque modification du code source.

## 1.4 Convection, rotation et vents zonaux

### 1.4.1 Taylor-Proudman, effet $\beta$ et seuil convectif dans un fluide compressible

Ma première contribution à l'étude des fluides convectifs en rotation concernait l'étude de l'influence d'un contraste en densité sur l'écoulement convectif et sur les vents zonaux susceptibles de se développer (voir publication jointe en § B.1). À l'époque, la grande majorité des modèles numériques globaux en géométrie sphérique cherchant à modéliser la dynamique interne des planètes géantes s'appuyait sur l'approximation de Boussinesq. Citons à ce titre les travaux de CHRISTENSEN (2002), HEIMPEL, AURNOU et WICHT (2005) et AURNOU, HEIMPEL et WICHT (2007) qui permettaient déjà de produire des vents zonaux multiples de directions alternées présentant une certaine similitude avec les observations des planètes géantes. Comme on l'a vu (Tab. 1.1), le contraste de densité dans les enveloppes moléculaires des planètes géantes étant très important ( $N_\rho \geq 5$ ), l'applicabilité de l'approximation de Boussinesq à ce type d'objets est discutable.

Analysons dans un premier temps l'impact d'un contraste en densité sur le seuil de la convection en rotation rapide. Pour ce faire, on prendra le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (1.8) pour obtenir une équation pour la vorticité  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) - 2\Omega \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{e}_z \right] = \nabla \times \left( \frac{\rho'}{\rho_r} \mathbf{g} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left[ \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\rho_r} \right] + \nabla \times \mathbf{F}_v. \quad (1.57)$$

Avec l'adimensionnement choisi, on obtient alors

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\omega} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) - 2 \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{z}} - (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{e}_z \right] = Ro_c^2 \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}_B + \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}_L + E \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}_v, \quad (1.58)$$

avec  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{d \ln \tilde{\rho}_r}{d \tilde{r}} \tilde{u}_r$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_B$  la flottabilité,  $\tilde{\mathbf{F}}_L$  la force de Lorentz et  $\tilde{\mathbf{F}}_v$  les forces visqueuses. Dans la limite où  $E, Ro_c \ll 1$  avec  $Ro \ll 1$  et en négligeant le champ magnétique, l'équation ci-dessus fournit à l'ordre 0 la variante compressible du théorème de Taylor-Proudman

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{d \ln \rho_r}{dr} u_r \mathbf{e}_z; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{d \ln \rho_r}{dr} u_r, \quad (1.59)$$

avec  $\mathbf{u}_\perp$  la vitesse perpendiculaire à l'axe de rotation. Alors que  $\mathbf{u}_\perp$  reste bien invariant suivant l'axe de rotation comme pour la version incompressible du théorème de Taylor-Proudman, le gradient radial de densité induit des variations de la composante axiale de la vitesse suivant  $z$ .

Pour mieux appréhender le seuil de la convection en géométrie sphérique, BUSSE (1970) a étudié théoriquement le seuil de la convection dans un cylindre avec des bords inclinés en rotation rapide, le « Busse annulus »<sup>5</sup>. En linéarisant la composante axiale de l'équation de vorticité (1.57) couplée avec une équation pour la température, il cherche une solution sous forme de modes propres  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  afin de déterminer le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  conduisant à l'annulation de la partie imaginaire de  $\omega$ , soit  $\Im(\omega) = 0$ . Le seuil de la convection prend la forme d'ondes de Rossby thermiques dont la relation de dispersion s'écrit

$$\frac{\omega}{2\Omega} = -\frac{\beta k_\phi}{(1 + Pr)k^2}, \quad k^2 = k_s^2 + k_\phi^2, \quad \beta = \frac{d \ln h}{ds}, \quad (1.60)$$

où  $s = r \sin \theta$  est le rayon cylindrique et  $\beta$  définit la variation de la hauteur du fluide  $h$  par rapport à la distance à l'axe de rotation. On parle d'effet  $\beta$  *topographique*. On note qu'en l'absence de variation de hauteur du container fluide  $\beta = 0$  et il n'y a donc pas de propagation d'ondes de Rossby. Une augmentation du nombre de Prandtl entraîne une diminution de la fréquence de propagation. Dans une coquille sphérique, on a  $h = 2\sqrt{r_o^2 - s^2}$  pour  $s \geq r_i$  (   l'extérieur du cylindre

5. Notons que dans ce cas là effet  $\beta$  est remplacé par un petit paramètre  $\epsilon$  correspondant à la faible inclinaison des sommets du cylindre

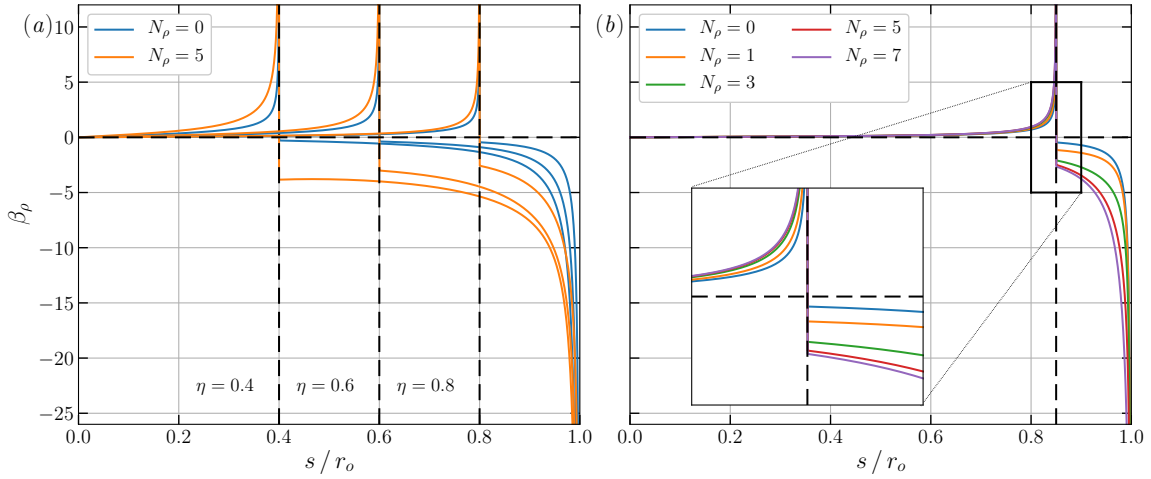


FIGURE 1.7 – Effet  $\beta$  compressible (Eq. 1.62) en fonction du rayon cylindrique  $\tilde{s}$  normalisé par le rayon de la coquille sphérique externe  $\tilde{r}_o$  pour différents contrastes de densité  $N_\rho$  et rapports de rayon  $\eta = \tilde{r}_i/\tilde{r}_o$  dans le cas où  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  et  $m_p = 2$  (figure adaptée de GASTINE, HEIMPEL et WICHT, 2014).

tangent) et  $h = \sqrt{r_o^2 - s^2} - \sqrt{r_i^2 - s^2}$  à l'intérieur, de telle sorte que  $\beta < 0$  pour  $s \geq r_i$  et  $\beta > 0$  pour  $s < r_i$ . Dans la limite de  $E \rightarrow 0$ , le modèle de BUSSE (1970) prédit également que le seuil de la convection thermique suit

$$m_c \sim \left[ \frac{Pr}{(1+Pr)E} \right]^{1/3}, \quad \tilde{\omega}_c \sim \left[ \frac{1}{(1+Pr)E} \right]^{2/3} \frac{1}{Pr^{1/3}}, \quad Ra_c \sim \left[ \frac{Pr}{(1+Pr)E} \right]^{4/3}, \quad (1.61)$$

où  $m_c$  est le mode azimuthal critique correspondant au nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et  $\omega_c$  la fréquence associée. Le seuil correspond à des ondes de Rossby se propageant vers l'Est, leur fréquence  $\omega$  et leur nombre d'onde  $m_c$  augmentent quand  $E$  diminue. L'application du modèle de Busse, dérivé en principe pour des faibles pentes, donne en général une description assez précise du seuil de la convection réel dans les coquilles sphériques, au moins pour  $Pr \sim \mathcal{O}(1)$  (voir par exemple, pour une comparaison SIMITEV et BUSSE, 2003; DORMY et al., 2004).

Pour dériver l'analogie compressible de l'effet  $\beta$ , on considère une version linéarisée de Eq. (1.58) sans flottabilité ni viscosité. Pour la composante axiale on a alors

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 2\Omega \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dr} u_r \right).$$

En multipliant par  $\rho_r$  et en intégrant sur une colonne de fluide  $h$ , on obtient après calcul (voir INGERSOLL et POLLARD, 1982; GASTINE, HEIMPEL et WICHT, 2014)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 2\Omega \beta_\rho u_s, \quad \beta_\rho = \frac{1}{M} \frac{dM}{ds}, \quad M = \int_h \rho_r dz. \quad (1.62)$$

L'effet  $\beta$  compressible dépend donc des variations de la masse intégrée suivant l'axe de rotation et on retrouve  $\beta_\rho = \beta$  dans la limite  $N_\rho = 0$ . La figure 1.7 montre différents profils de  $\beta_\rho$  pour différents contrastes de densité et différents rapports de rayon dans le cas où  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  et  $m_p = 2$ . On obtient les mêmes changements de signe au passage du cylindre tangent que pour l'effet  $\beta$  topographique. L'amplitude de  $\tilde{\beta}_\rho$  présente une augmentation régulière en fonction de  $N_\rho$ . En pratique cela signifie que la fréquence des ondes de Rossby augmente avec le contraste en densité.

Il est possible de généraliser le formalisme du cylindre de Busse à la convection anélastique afin d'étudier les ondes de Rossby thermiques anélastiques. On obtient alors des comportements asymptotiques similaires au cas Boussinesq,  $\beta_\rho$  remplaçant  $\beta$ . Ceci étant dit, la comparaison entre le seuil convectif obtenu dans le modèle cylindrique de Busse et le seuil de la convection calculé en géométrie sphérique donne un moins bon accord qu'en Boussinesq (JONES et KUZANYAN, 2009; BUSSE et SIMITEV, 2014). Ceci est dû à la dépendance au rayon  $\tilde{r}$  de la densité  $\tilde{\rho}_r$  et du gradient d'entropie de l'état de référence  $d\tilde{s}_c/d\tilde{r}$  qu'il est malaisé de prendre en compte dans le formalisme de Busse.

Ce formalisme permet néanmoins de capturer l'impact principal d'un contraste en densité sur le seuil de la convection en rotation. Comme illustré sur la figure 1.8 pour des modèles numériques où la convection est forcée par un contraste d'entropie fixé entre les deux bords, une augmentation de  $N_\rho$  entraîne un déplacement du seuil convectif vers les régions externes qui s'accompagne de  $Ra_c$  et  $m_c$  plus élevés. Pour appréhender ce phénomène, il est pratique d'introduire un nombre de Rayleigh thermique local qui prend en compte les variations locales de la gravité et du profil d'entropie de référence

$$\mathcal{R}(\tilde{r}) = Ra_s \tilde{g} \left| \frac{d\tilde{s}_c}{d\tilde{r}} \right|.$$

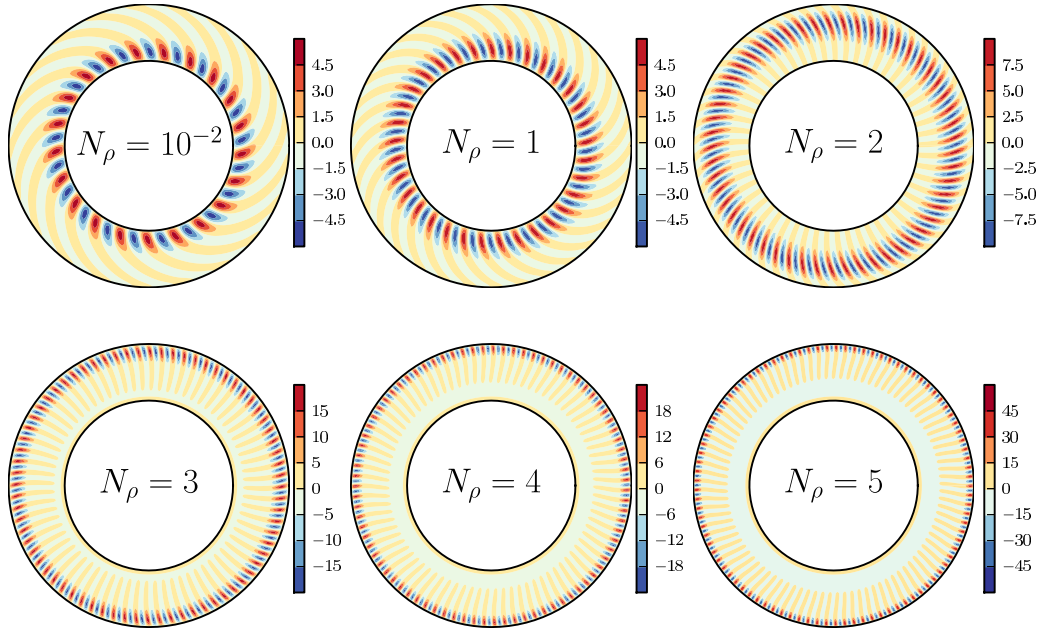


FIGURE 1.8 – Composante radiale de la vitesse (exprimée ici en nombre de Reynolds) dans le plan équatorial pour six modèles numériques avec  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $m_p = 2$  et des contrastes de densité croissant proches du seuil de la convection pour  $E = 10^{-4}$ ,  $Pr = 1$  et  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  (figure tirée de GASTINE et WICHT, 2012).

Dans ces modèles, on a  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  qui décroît quand  $r$  augmente mais  $d\tilde{s}_c/d\tilde{r}$  augmente fortement vers l'extérieur quand l'entropie est fixée aux deux bords. Le maximum de  $\mathcal{R}(r)$  est alors atteint au rayon externe dès que  $N_\rho \geq 2$  (voir Fig. 1 de GASTINE et WICHT, 2012). Ceci explique le déplacement du seuil dans ces régions. Ce contraste au seuil persiste largement dans les simulations non linéaires puisque les modèles anélastiques avec un grand contraste de densité présentent des vitesses croissantes et des échelles caractéristiques décroissantes avec l'augmentation du rayon. Cette disparité d'échelle spatiale entraîne donc un surcoût numérique qui va croissant avec l'augmentation de  $N_\rho$ .

## 1.4.2 Différents régimes physiques pour la convection en rotation

Au-delà du seuil convectif, l'écoulement va se développer dans différents régimes physiques suivant l'importance relative des forces de flottabilité, de rotation, d'inertie et de viscosité. Afin de déterminer les paramètres physiques contrôlant ces limites, j'ai réalisé une étude paramétrique systématique de plus de 200 simulations numériques Boussinesq avec  $Pr = 1$ ,  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  et  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  avec des conditions aux limites rigides et une température imposée aux deux bords (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2015; GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016, publication jointe à ce document en § B.3). J'ai pu ainsi couvrir l'espace des paramètres entre  $E = 3 \times 10^{-7}$  et des simulations sans rotation avec  $10^3 \leq Ra < 2 \times 10^{11}$ . Afin de visualiser l'espace des paramètres couvert, la figure 1.9 montre  $Nu$  en fonction de  $Ra$  pour les différents nombres d'Ekman considérés. Pour chaque valeur de  $E$ , on distingue différents comportements avec tout d'abord une augmentation très lente de  $Nu$  avec  $Ra$  proche du seuil, puis une pente plus raide et enfin un aplatissement graduel pour rejoindre le régime sans rotation (cercles noirs). Par la suite je ne décrirai pas les lois d'échelle du régime sans rotation, le lecteur intéressé est renvoyé à GASTINE, WICHT et AURNOU (2015) pour plus de détails sur les effets de la géométrie sphérique sur la convection Rayleigh-Bénard.

### Régime faiblement non linéaire

Proche du seuil de la convection, l'analyse perturbative menée par BUSSE et OR (1986) a montré que le transport de chaleur, caractérisé par le nombre de Nusselt, suivait un comportement de la forme

$$Nu - 1 \sim \frac{Ra}{Ra_c} - 1. \quad (1.63)$$

Dans ce régime faiblement non linéaire en rotation rapide, la dynamique est contrôlée par un équilibre entre la force de Coriolis, la flottabilité et les forces visqueuses. En considérant l'équation de vorticité (1.57) et en introduisant une longueur caractéristique parallèle à l'axe de rotation  $\mathcal{L}_\parallel$  et une longueur perpendiculaire  $\mathcal{L}_\perp$ , on obtient l'équilibre suivant

$$\Omega \frac{U}{\mathcal{L}_\parallel} \sim \alpha_T g \frac{\Theta}{\mathcal{L}_\perp} \sim \nu \frac{\omega}{\mathcal{L}_\perp^2}, \quad (1.64)$$

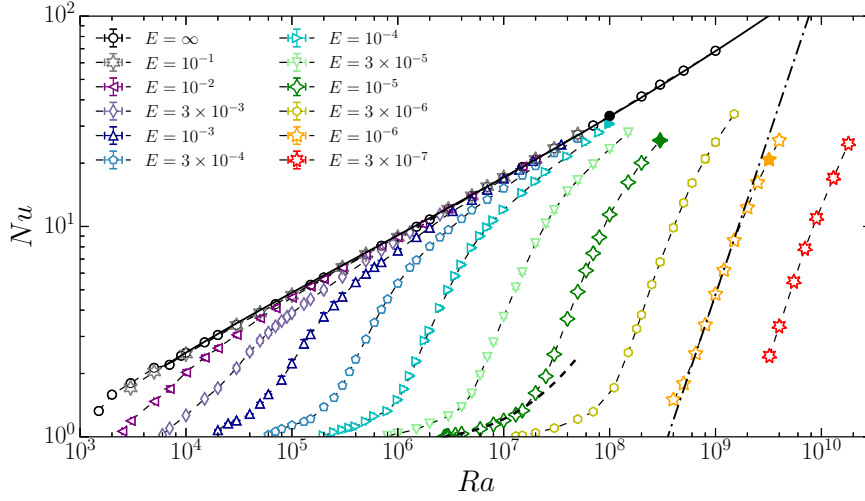


FIGURE 1.9 – Nombre de Nusselt en fonction du nombre Rayleigh pour un ensemble de plus de 200 simulations numériques Boussinesq avec  $Pr = 1$ ,  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (r_o/\tilde{r})^2$ , des conditions mécaniques rigides et une température imposée aux deux bords (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2015; GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016). La courbe en trait plein correspond à la limite sans rotation dérivée par GASTINE, WICHT et AURNOU (2015), la courbe en pointillé au régime faiblement non linéaire (Eq. 1.63) et la courbe avec des tirets de longueurs variables au régime asymptotique (1.66). Les symboles pleins correspondent à 4 simulations numériques dont le champ de température est montré dans la Fig. 2 de (GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016). Figure tirée de (GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016).

où  $U$  correspond à une vitesse caractéristique et  $\Theta$  à une perturbation en température caractéristique. En utilisant Eq. (1.43), on peut alors relier le produit entre  $U$  et  $\Theta$  à la puissance par unité de masse via  $\alpha_T g U \Theta \sim \bar{P}/\rho_m$ . Dans la limite d'un fluide en rotation rapide, on a  $\mathcal{L}_j \gg \mathcal{L}_\perp$  et on fera donc l'hypothèse raisonnable que  $\mathcal{L}_j \sim d$ . Avec  $\omega \sim U/\mathcal{L}_\perp$ , on obtient une loi d'échelle pour la vitesse et la longueur caractéristique de l'écoulement dans le régime contrôlé par la viscosité

$$\frac{\mathcal{L}_\perp}{d} \sim E^{1/3}, \quad Re_c \sim \tilde{\mathcal{P}}_\nu^{1/2} E^{1/3}, \quad Ro_{nz} \sim \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{1/2} E^{-1/6}, \quad (1.65)$$

avec  $Re_c = Ud/\nu$ .  $\tilde{\mathcal{P}}_\nu$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega$  correspondent ici à la puissance par unité de masse adimensionnée avec les unités visqueuses  $\tilde{\mathcal{P}}_\nu = \bar{P}d^4/\nu^3\rho_m$  ou avec le taux de rotation  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega = \bar{P}/\rho_m\Omega^3d^2$ . L'inconvénient éventuel de l'adimensionnement avec le taux de rotation est une amélioration artificielle de la qualité de la régression polynomiale par l'augmentation du nombre de décades de variations (KING et BUFFETT, 2013). Cette loi d'échelle correspond au régime « VAC » (pour *Viscous, Archimedean, Coriolis*) mis en avant par KING et BUFFETT (2013). Le choix d'utiliser une gravité en  $\tilde{g} \sim \tilde{r}^{-2}$  permet de dériver une relation de proportionnalité analytique entre  $\tilde{\mathcal{P}}_\nu$  et  $Ra_Q Pr^{-2}$  (pour une dérivation, voir le § 2.3 de GASTINE, WICHT et AURNOU, 2015) avec  $Ra_Q = Ra(Nu - 1)$ , alors que cette relation n'est qu'approximée dans la configuration plus usuelle où  $\tilde{g} \sim \tilde{r}$  (voir App. A de CHRISTENSEN et AUBERT, 2006).

La figure 1.10 montre la validité de l'hypothèse faiblement non linéaire (1.63) et du régime VAC (1.65) pour des simulations numériques avec  $E \leq 3 \times 10^{-5}$  et  $Ra \leq 6 Ra_c$ . La loi d'échelle concernant l'échelle de longueur est également bien vérifiée (voir GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016, Fig. 4). Dans la limite d'une rotation rapide, le régime faiblement non linéaire contrôlé par la viscosité décrit donc bien la dynamique observée dans les modèles 3-D pour des niveaux de supercriticalité cantonnés à  $Ra \leq 6 Ra_c$  ou encore  $Nu \leq 1.5$  (voir Fig. 1.9).

### Turbulence quasi-géostrophique

Les intérieurs fluides convectifs des planètes en rotation rapide fonctionnent en principe très loin du seuil convectif et la viscosité ne devrait donc pas contrôler la vitesse caractéristique ou la longueur de l'écoulement. Pour simplifier, supposons que le transport de chaleur peut s'écrire sous la forme polynomiale suivante  $Nu \sim Ra^\alpha E^\beta Pr^\gamma$ . Pour que  $Nu$  soit effectivement indépendant des diffusivités  $\nu$  et  $\kappa_T$ , les contraintes  $-\alpha + \beta + \gamma = 0$  et  $\alpha + \gamma = 1$  doivent être satisfaites<sup>6</sup>. Les simulations numériques en coordonnées cartésiennes de STELMACH et al. (2014) et les modèles théoriques de JULIEN, KNOBLOCH et al. (2012) indiquent en outre que  $Nu = f(Ra/Ra_c)$  quand  $Ro_c \ll 1$ . En suivant le seuil théorique (1.61), cette hypothèse fournit la contrainte  $\beta = 4\alpha/3$ . On dérive alors le régime asymptotique du transport de chaleur pour le régime inviscide de la convection en rotation :

$$Nu \sim Ra^{3/2} E^2 Pr^{-1/2}. \quad (1.66)$$

6. Notons que dans la limite sans rotation avec  $\beta = 0$ , on retrouve alors  $Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2}$ , le régime « ultime » de la convection Rayleigh-Bénard de KRAICHNAN (1962).

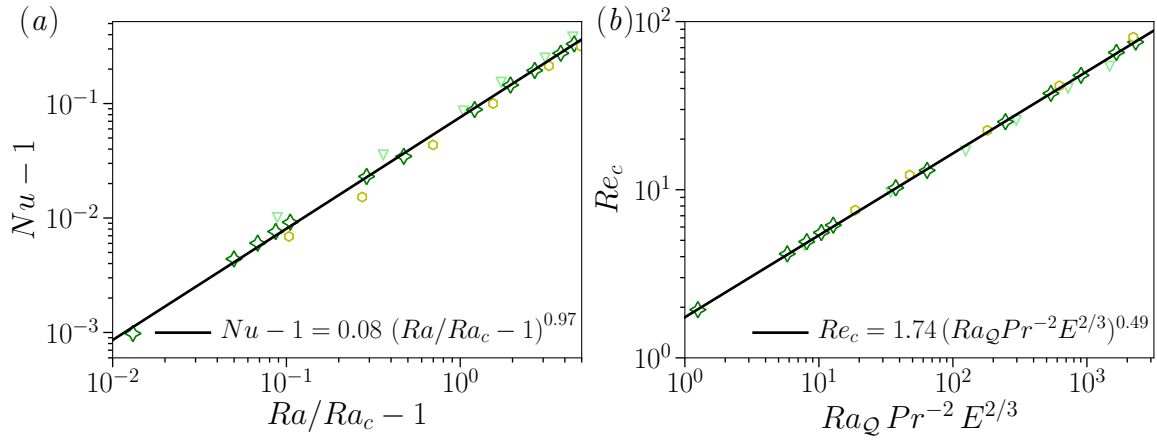


FIGURE 1.10 – (a)  $Nu-1$  en fonction de  $Ra/Ra_c-1$ . (b) Vitesse non zonale (en nombre de Reynolds) en fonction de  $Ra_Q E^{2/3}$  pour tester la fiabilité des relations d'échelle (1.65). Il s'agit de simulations numériques Boussinesq avec  $E \leq 3 \times 10^{-5}$ ,  $Pr = 1$ ,  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  et  $Ra \leq 6Ra_c$ , voir la Fig. 1.9 pour la légende (figure tirée de GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016).

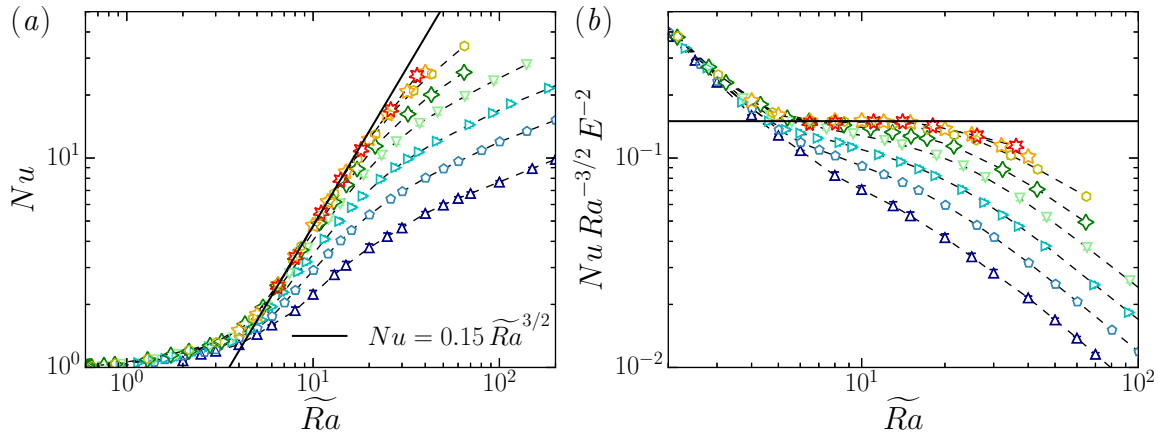


FIGURE 1.11 – (a)  $Nu$  en fonction de  $\tilde{Ra} = Ra E^{4/3}$ . (b) Même relation mais compensée par la loi d'échelle asymptotique (1.66). Les symboles sont les mêmes que dans Fig. 1.9 (figure tirée de GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016).

La figure 1.11 illustre  $Nu$  en fonction de  $\tilde{Ra} = Ra E^{4/3}$  afin de tester l'applicabilité de cette loi d'échelle théorique aux simulations numériques. Dans la partie gauche de la figure, on constate qu'avec la diminution du nombre d'Ekman,  $Nu$  devient effectivement une fonction de  $Ra/Ra_c$ . Au-delà du régime faiblement non linéaire, la pente approche la valeur théorique de  $3/2$  sur une petite plage  $6 \leq \tilde{Ra} \leq 20$  pour les plus faibles  $E$  considérés (Fig. 1.11b). Afin de quantifier les frontières de ce régime asymptotique, faisons l'hypothèse en suivant JULIEN, RUBIO et al. (2012) que Eq. (1.66) reste valable dans les limites de  $E, Ro_c \ll 1$  tant que les couches limites thermiques d'épaisseur  $\lambda_T$  sont contrôlées par la rotation. Autrement dit, en introduisant un nombre de Rossby défini sur l'épaisseur de la couche limite thermique  $Ro_\lambda = Ra_\lambda^{1/2} E_\lambda / Pr$ , avec  $Ra_\lambda$  et  $E_\lambda$  des nombres de Rayleigh et d'Ekman définis avec l'échelle  $\lambda_T$ , et en supposant que  $\lambda_T/d \sim Nu^{-1}$ , on obtient la limite suivante

$$Ro_\lambda \leq 1, \quad Ra E^{8/5} Pr^{-3/5} \leq 1. \quad (1.67)$$

La figure 1.12 illustre un test de cette limite théorique en représentant  $Nu$  compensé par la loi d'échelle (1.66) en fonction de  $Ra E^{8/5}$  (la dépendance à  $Pr$  est omise, il n'y a que des modèles avec  $Pr = 1$ ). On observe un plateau pour  $Ra E^{8/5} \leq 0.4$  indiquant que la loi asymptotique (1.66) est bien atteinte. On obtient donc un espace des paramètres défini par  $Ra \geq 6Ra_c$  et  $Ra E^{8/5} \leq 1$  dans lequel le transport de chaleur s'approche d'un comportement inviscide. Ces frontières définissent un régime de *turbulence quasi-géostrophique* (JULIEN, RUBIO et al., 2012).

Cherchons maintenant des lois d'échelle pour la vitesse et la longueur caractéristique de l'écoulement dans ce régime asymptotique. L'équilibre des forces est maintenant contrôlé par la force de Coriolis, la flottabilité et les forces d'inertie. En considérant (1.57) on a alors

$$\Omega \frac{U}{L_f} \sim \alpha_T g \frac{\Theta}{L_\perp} \sim \frac{U \omega}{L_\perp}, \quad (1.68)$$

ce qui conduit aux lois d'échelles suivantes pour le régime inertiel de la convection en rotation



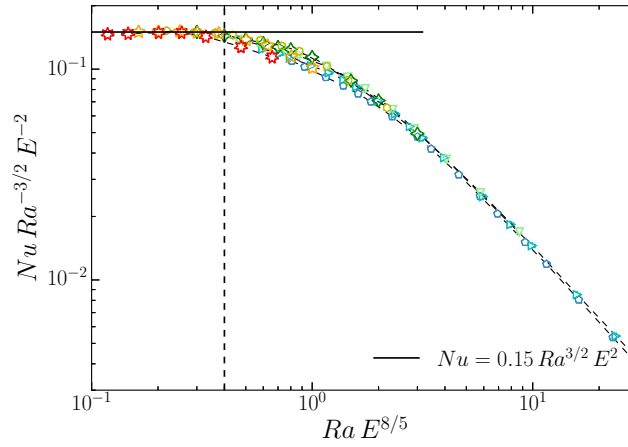


FIGURE 1.12 –  $Nu$  compensé par la loi asymptotique (1.66) en fonction d'un nombre de Rossby défini sur l'épaisseur de la couche limite thermique  $Ra E^{8/5}$ . Seules les modèles avec  $Nu \geq 2$  et  $E \leq 3 \times 10^{-4}$  sont représentés. Les symboles sont les mêmes que dans Fig. 1.9 (figure tirée de GASTINE, WICHT ET AUBERT, 2016).

$$\frac{\mathcal{L}_\perp}{d} \sim (Re_c E)^{1/2}, \quad Re_c \sim \tilde{\mathcal{P}}_v^{2/5} E^{1/5}, \quad Ro_{nz} \sim \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{2/5}. \quad (1.69)$$

L'échelle caractéristique de l'écoulement évolue proportionnellement à la racine du nombre de Rossby, on retrouve donc une sorte d'échelle de Rhines sans le facteur géométrique  $\beta$  (RHINES, 1975). Le régime inertiel de la convection en rotation développé par STEVENSON (1979) et INGERSOLL et POLLARD (1982) est souvent désigné sous l'acronyme « IAC » (pour *Inertia, Archimedean, Coriolis*) dans la littérature (voir par exemple CARDIN et OLSON, 1994; AUBERT et al., 2001; GILLET et JONES, 2006; BARKER, DEMPSEY et LITHWICK, 2014). Les études paramétriques utilisant des modèles numériques de convection en rotation rapide soit en 3-D en géométrie sphérique (CHRISTENSEN, 2002; KING et BUFFETT, 2013) soit en 2-D sous l'approximation quasi-géostrophique de l'écoulement sphérique (e.g. GILLET et JONES, 2006) conduisent généralement à des exposants plus élevés que 2/5 pour la vitesse, généralement assez proche de 1/2. La proximité des exposants obtenus avec 1/2 a d'ailleurs poussé certains auteurs à privilégier l'hypothèse VAC (1.65) pour interpréter les modèles numériques (KING et BUFFETT, 2013). La dispersion des données et les incertitudes concernant l'estimation des longueurs caractéristiques (voir § 1.2.5) ont conduit à des interprétations controversées sur le rôle joué par la viscosité dans les modèles.

Pour progresser sur ce sujet et obtenir une loi d'échelle plus précise permettant une meilleure description des simulations numériques, j'ai suggéré de suivre la stratégie employée par GROSSMANN et LOHSE (2000) pour la convection de Rayleigh-Bénard, à savoir scinder la dissipation visqueuse  $\mathcal{D}_v$  en une partie correspondant aux couches limites et une partie correspondant à l'intérieur du domaine fluide et établir des relations d'échelle pour ces deux régions. En notant  $\mathcal{D}_v^{\text{bu}}$  pour l'intérieur on a

$$\mathcal{D}_v^{\text{bu}} \sim \nu \frac{U^2}{\mathcal{L}_{\text{diss}}^2} \sim U^2 \omega_{\text{diss}},$$

avec  $\mathcal{L}_{\text{diss}}$  l'échelle de dissipation visqueuse telle que le nombre de Reynolds défini à cette échelle vaut 1 :  $U_{\text{diss}} \mathcal{L}_{\text{diss}} / \nu \sim 1$ , et  $\omega_{\text{diss}} = U_{\text{diss}} / \mathcal{L}_{\text{diss}}$  la vorticité associée. En utilisant l'équilibre (1.68), on peut montrer que  $\omega_{\text{diss}} \sim \omega$ , un résultat usuel de turbulence 2-D (e.g. DAVIDSON, 2015), et ainsi dériver

$$\mathcal{D}_v^{\text{bu}} \sim \frac{\nu^3}{d^4} \frac{Re_c^{5/2}}{E^{1/2}}.$$

On peut appliquer la même méthode aux couches limites en prenant en compte le fait que la longueur caractéristique est maintenant l'épaisseur de la couche d'Ekman  $\lambda_U / d \sim E^{1/2}$  et obtenir

$$\mathcal{D}_v^{\text{bl}} \sim \frac{\nu^3}{d^4} \frac{Re_c^2}{E^{1/2}}.$$

En sommant ces deux contributions, on obtient alors

$$\mathcal{D}_v = \frac{\nu^3}{d^4} \left[ a \frac{Re_c^{5/2}}{E^{1/2}} + b \frac{Re_c^2}{E^{1/2}} \right], \quad (1.70)$$

avec deux constantes  $a$  et  $b$  qui peuvent être déterminées en utilisant l'ensemble des modèles numériques situés dans le régime de turbulence quasi-géostrophique. Un fit à nos données numériques conduit à  $b = 4.843(\pm 0.096)$  et  $a =$

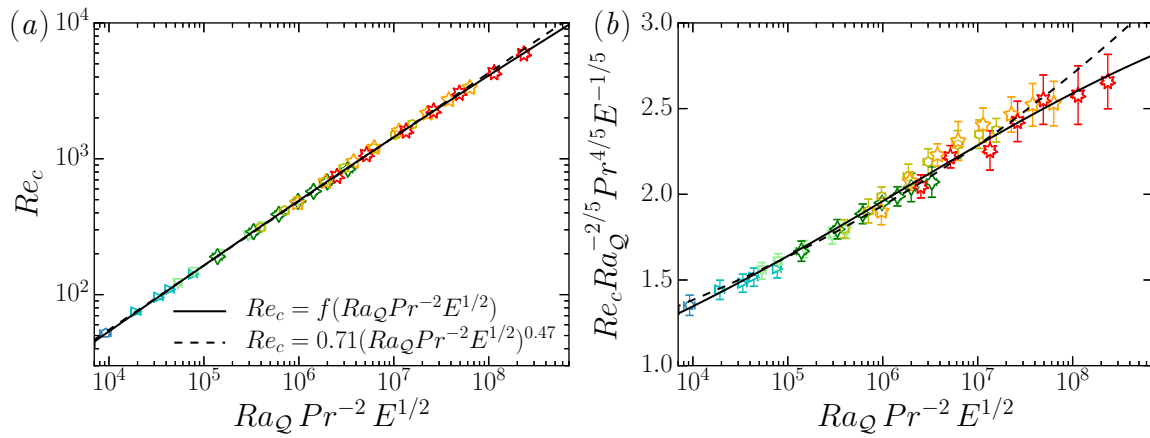


FIGURE 1.13 – (a) Nombre des Reynolds  $Re_c$  en fonction de la puissance convective. La loi théorique (1.70) est représentée en trait plein, une régression polynomiale est représentée en pointillé. (b) Loi d'échelle pour  $Re_c$  compensée par le régime asymptotique IAC (Eq. 1.68). Les simulations représentées satisfont la condition  $Nu > 2$  et  $Ra E^{8/5} < 1$ . Les symboles sont les mêmes que dans Fig. 1.9 (figure tirée de GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016).

0.066( $\pm 0.003$ ). Le nombre de Reynolds minimum à atteindre pour conduire à une équipartition entre dissipation visqueuse par les couches limites et dans l'intérieur du domaine fluide est donc de l'ordre de  $Re_c = (b/a)^2 \approx 5500$ .

En utilisant Eq. (1.70) et le bilan de puissance (1.45), on peut alors déterminer  $Re_c = f(Ra_Q, Pr, E)$ . La figure 1.13 illustre le nombre de Reynolds  $Re_c$  en fonction de la puissance convective pour les modèles numériques situés dans le régime de turbulence quasi-géostrophique. La loi théorique issue de Eq. (1.70) ainsi qu'une régression polynomiale sont également représentées sur cette figure. Afin de discerner les deux, Fig. 1.13b montre la loi d'échelle compensée par le régime asymptotique IAC. La régression polynomiale conduit à un exposant plutôt proche de 1/2 comme obtenu par GILLET et JONES (2006) et KING et BUFFETT (2013) mais conduit à une moins bonne capacité prédictive aux grands nombres de Reynolds. Pour résumer, combiner les contributions des dissipations venant des couches d'Ekman et de l'intérieur du domaine fluide permet de construire un modèle théorique permettant d'expliquer la variabilité observée dans les modèles numériques. La loi d'échelle concernant la longueur typique de l'écoulement est elle aussi graduellement approchée pour les nombres d'Ekman les plus faibles considérés. La figure 10 de GASTINE, WICHT et AUBERT (2016) conduit à  $\mathcal{L}/d \sim (Re_c E)^{0.45}$  pour les modèles à  $E = 3 \times 10^{-7}$ . Les simulations quasi-géostrophique de GUERVILLY, CARDIN et SCHAEFFER (2019) ont depuis montré que la convergence vers le comportement asymptotique (1.69) pour la loi d'échelle de  $\mathcal{L}_\perp$  était très graduel et qu'il fallait  $E < 10^{-9}$  pour atteindre l'exposant théorique de 1/2.

### Régime « transitionnel »

Une fois que les couches limites thermiques dépassent  $Ro_\lambda \sim 1$ , la convection sort du domaine turbulent quasi-géostrophique. Une augmentation additionnelle de  $Ra_T$  à un Ekman fixé conduit alors à une loi  $Nu - Ra$  présentant une pente qui diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de la convection sans rotation (Fig. 1.9). Ce régime, que je qualifie ici de « transitionnel », est en pratique extrêmement délicat à caractériser puisque on assiste à une diminution continue de l'influence de la force de Coriolis et une croissance concomitante de la flottabilité et de l'inertie. L'équilibre à trois forces (1.68) n'est donc plus valable et il devient compliqué de dériver des comportements systématiques.

Il est en revanche intéressant de chercher à déterminer la frontière au-delà de laquelle l'influence de la rotation devient négligeable et l'écoulement convectif en rotation adopte des propriétés indiscernables de celles d'une configuration sans rotation. Cette limite est intéressante à caractériser puisqu'elle permet éventuellement de situer rapidement la dynamique d'un écoulement convectif astrophysique ou de laboratoire. Historiquement, GILMAN (1977) en introduisant  $Ro_c$ , a déjà défini une quantité permettant en principe de scinder ces différents régimes. Bien que  $Ro_c$  semble en général bien fonctionner pour délimiter les transitions de vents zonaux (voir plus loin), on sait depuis les travaux de KING et al. (2009) que cette quantité prédit mal les transitions de la partie convective (non-axisymétrique) de l'écoulement. Dès lors plusieurs critères de transition associant  $Ra$ ,  $E$  et  $Pr$  ont été mis en avant, notamment par SCHMITZ et TILGNER (2009), KING, STELLMACH et AURNOU (2012) ou encore ECKE et NIEMELA (2014). Citons à ce propos la Table 1 de CHENG et al. (2018) qui passe en revue les différentes relations proposées dans la littérature et le § 2 de SODERLUND et al. (2013) qui décrit les implications qu'une modification du critère de transition peut avoir sur notre compréhension de la dynamique des géantes de glace.

Je choisis ici de définir simplement ce paramètre de transition par l'intersection entre les deux lois d'échelle asymptotiques pour le transport de chaleur dans le régime sans rotation  $Nu_{NR} \sim Ra^{1/3}$  (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2015) et le régime turbulent quasi-géostrophique (Eq. 1.66). On obtient alors un paramètre de transition  $Ra E^{12/7}$ , très proche des transitions obtenues par ECKE et NIEMELA (2014) en réalisant des expériences en laboratoire de convection en rotation avec de l'hélium. La figure 1.14 montre le nombre de Nusselt pour des modèles en rotation normalisé par le nombre de

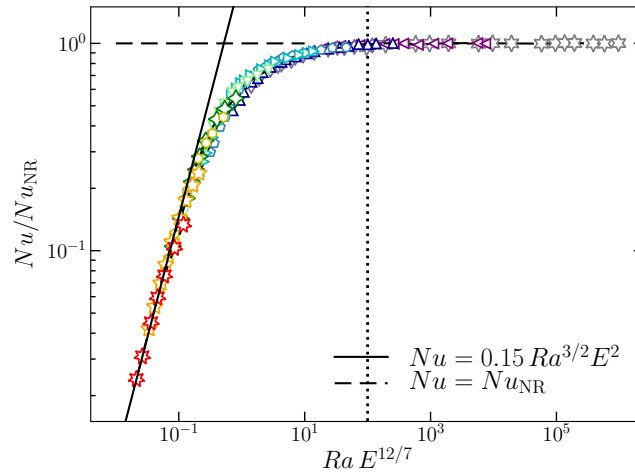


FIGURE 1.14 – Nombre de Nusselt normalisé par le nombre de Nusselt d’un modèle sans rotation au même nombre de Rayleigh en fonction de  $Ra E^{12/7}$ . La droite verticale en pointillé marque une limite possible au-delà de laquelle la majeure partie des propriétés diagnostiques sont indiscernables de la convection sans rotation. Seuls les modèles avec  $Nu \geq 2$  sont représentés et les symboles sont les mêmes que dans Fig. 1.9 (figure tirée de GASTINE, WICHT et AUBERT, 2016).

Nusselt d’un modèle sans rotation au même Rayleigh en fonction de  $Ra E^{12/7}$ . On constate que cette renormalisation permet d’obtenir un comportement unifié des modèles avec très peu de dépendance restante à  $E$  ou  $Ra$ . On constate également que le transport de chaleur devient indiscernable du régime sans rotation quand  $Ra E^{12/7} > 100$ . Cette valeur limite peut servir à délimiter la frontière supérieure du régime transitionnel.

Les différents régimes convectifs dérivés dans les paragraphes précédents peuvent être synthétisés dans le plan  $(E, Ra E^{4/3})$  comme le montre la figure 1.15. La majorité des modèles numériques que l’on peut réaliser actuellement sont localisés soit près du seuil de la convection dans le régime faiblement non linéaire soit dans le régime transitionnel. Le domaine de turbulence quasi-géostrophique est atteint sur une petite plage de paramètres qui nécessite en général des moyens de calcul importants. Ceci étant dit, il est loin d’être évident que les zones convectives planétaires opèrent dans ce régime. Même en faisant l’hypothèse très discutable que les frontières établies ici conservent une quelconque pertinence en présence d’un champ magnétique, les valeurs indiquées dans la Table 1.1 conduisent à  $Ra_T E^{8/5} \gg 1$  localisant en principe le noyau liquide terrestre et l’intérieur de Jupiter dans le régime transitionnel. Il est sans doute plus vraisemblable de confronter ce type de diagramme de régime à des problèmes géophysiques de convection en rotation sans champ magnétique comme par exemple la dynamique des océans de magma primitifs (e.g. MAAS et al., 2021) ou encore la dynamique des océans des satellites de glace (e.g. AMIT et al., 2020).

Rappelons enfin que cette étude systématique a été menée sous trois hypothèses susceptibles de faire évoluer la Fig. 1.15 : (i) des conditions aux limites rigides, (ii)  $Pr = 1$ , (iii) l’approximation de Boussinesq ( $N_\rho = 0$ ). Le changement de conditions mécaniques entraîne, comme on le verra par la suite, un transfert d’énergie très important vers les vents zonaux, ce qui impacte indirectement le transfert de chaleur. Les frontières que l’on a dérivées contiennent pour la plupart une prédiction sur la dépendance à  $Pr$  qu’il serait nécessaire de tester en réalisant des modèles à  $Pr \neq 1$ . Enfin, on peut s’attendre à ce que la prise en compte d’un contraste de densité ( $N_\rho > 0$ ) ait des conséquences subtiles. Comme on l’a vu dans le paragraphe 1.4.1, le seuil convectif suit les mêmes dépendances asymptotiques que dans la configuration Boussinesq dans la limite où  $E \ll 1$ . Ceci étant dit le déplacement du seuil vers les régions externes entraîne un contraste radial de vitesse et de longueur qui persiste très largement dans le régime non linéaire (e.g. GASTINE et WICHT, 2012). Il est alors tout à fait possible de se retrouver dans des configurations hybrides avec des régions internes ayant un écoulement de grande échelle dominé par la rotation et des couches externes dans lesquelles l’influence de la rotation se fait moins sentir du fait de la plus petite échelle de l’écoulement. Il est alors nécessaire d’introduire des diagnostics locaux dépendant du rayon, comme par exemple un nombre de Rossby convectif local (voir GASTINE, WICHT et AURNOU, 2013, Fig. 12).

### 1.4.3 Génération de vents zonaux

#### Régime dominé par la rotation et vents zonaux multiples

Le seuil convectif dans les coquilles sphériques en rotation prend la forme de colonnes de Taylor-Proudman inclinées en azimuth ou spirales (voir Fig. 1.8). Cette inclinaison produit une corrélation entre les composantes de l’écoulement perpendiculaire à l’axe de rotation, soit en coordonnées cylindriques  $u_s$  et  $u_\phi$ , et les éléments du tenseur de Reynolds  $[u_s u_\phi]_\phi$  sont donc non nuls. En considérant la composante zonale de l’équation de Navier-Stokes (1.8) et en omettant la

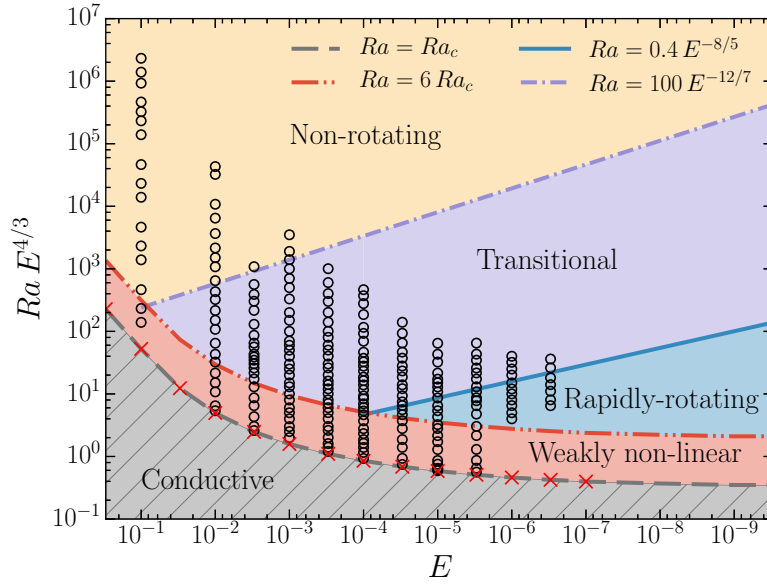


FIGURE 1.15 – Localisation des simulations (ronds noirs) réalisées dans l'étude (GASTINE, WICHT ET AUBERT, 2016) dans un espace  $(E, Ra E^{4/3})$ . Les seuils convectifs (croix rouges) ont été calculés avec le solveur linéaire libre SINGE (VIDAL ET SCHAEFFER, 2015), disponible [ici](#). Les différents régimes sont matérialisés par différentes zones colorées (figure tirée de GASTINE, WICHT ET AUBERT, 2016).

force de Lorentz on obtient

$$\rho_r \frac{\partial [u_\phi]_\phi}{\partial t} + 2\Omega \rho_r [u_s]_\phi = -\frac{1}{s} \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_V, \quad \mathbf{F}_R = \rho_r s [\mathbf{u} u_\phi]_\phi, \quad \mathbf{F}_V = -\rho_r v s^2 \nabla \left( \frac{[u_\phi]_\phi}{s^2} \right). \quad (1.71)$$

Une corrélation  $[u_s u_\phi]_\phi$  constitue donc un terme source permettant la génération d'un écoulement zonal moyen. Dans le régime faiblement non linéaire, la direction du vent zonal dépend directement du sens d'inclinaison des colonnes convectives (voir par exemple la Fig. 4 de BUSSE, 2002). En géométrie sphérique, les colonnes convectives au seuil ont en général  $[u_s u_\phi]_\phi$  qui augmente avec la distance à l'axe de rotation. Un écoulement zonal prograde dans les régions externes est donc généré.

Dans la limite des faibles nombres de Rossby, l'écoulement étant géostrophique, on intègre cette équation suivant l'axe de rotation. Pour des conditions aux limites stress-free aux deux bords, le terme de Coriolis s'annule et on aboutit à

$$\frac{1}{S} \int_S \rho_r \frac{\partial u_\phi}{\partial t} s ds dz = -\frac{1}{S} \int_S \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 \rho_r u_s u_\phi) s ds dz + \frac{v}{S} \int_S \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ s^3 \rho_r \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u_\phi}{s} \right) \right] s ds dz, \quad (1.72)$$

avec  $S = 2\pi s h(s)$  le cylindre géostrophique. Une fois moyennée en temps, on obtient un équilibre entre tenseur de Reynolds et dissipation en volume. Avec des conditions stress-free, les vents zonaux satureront donc à une amplitude en générale très grande devant la valeur de l'écoulement convectif ( $Re_z > Re_c$ ). Au-delà du seuil de la convection, l'interaction entre vents zonaux et écoulement convectif conduit à différents régimes dynamiques dont notamment un régime dit de *vacillating convection* dans lequel l'amplitude des jets varie de manière quasi-périodique au cours du temps : les jets croissent rapidement en amplitude jusqu'à cisailer de manière trop importante l'écoulement convectif, la corrélation entre  $u_s$  et  $u_\phi$  décroît alors entraînant une lente relaxation de l'amplitude des jets, ce qui permet la reconstruction de structures convectives cohérentes et donc une nouvelle augmentation de  $[u_s u_\phi]$  (voir par exemple la Fig. 5 de GROTE ET BUSSE, 2001).

Avec des conditions aux limites rigides en revanche, la situation diffère puisque les frottements aux bords vont plus sévèrement limiter l'amplitude des jets. Pour s'en rendre compte, on intègre Eq. (1.71) uniquement sur l'intérieur du domaine fluide en excluant les couches limites d'Ekman. L'intégration du terme de Coriolis conduit alors à un terme de pompage d'Ekman additionnel (e.g. AUBERT, GILLET ET CARDIN, 2003, Eq. 21). Il y a alors un terme de dissipation additionnel provenant des couches d'Ekman. Suivant les paramètres physiques choisis, la dissipation en volume ou la dissipation par les couches d'Ekman peut alors dominer (GILLET ET JONES, 2006). En mettant Eq. (1.72) à l'échelle et en supposant que les frottements aux bords dominent la configuration avec conditions mécaniques rigides, on obtient alors les lois d'échelle suivantes

$$\text{Stress-free : } Re_z \sim \frac{\mathcal{L}_{\text{zon}}}{d} Re_c^2, \quad \text{Rigide : } Re_z \sim E^{1/2} Re_c^2 \frac{d}{\mathcal{L}_{\text{zon}}}. \quad (1.73)$$

La difficulté consiste désormais à estimer  $\mathcal{L}_{\text{zon}}$ . La longueur pertinente à introduire ici est l'échelle de Rhines  $\mathcal{L}_{Rh}$  (RHINES, 1975) qui marque la séparation entre les grandes échelles dominées par les ondes de Rossby et les petites

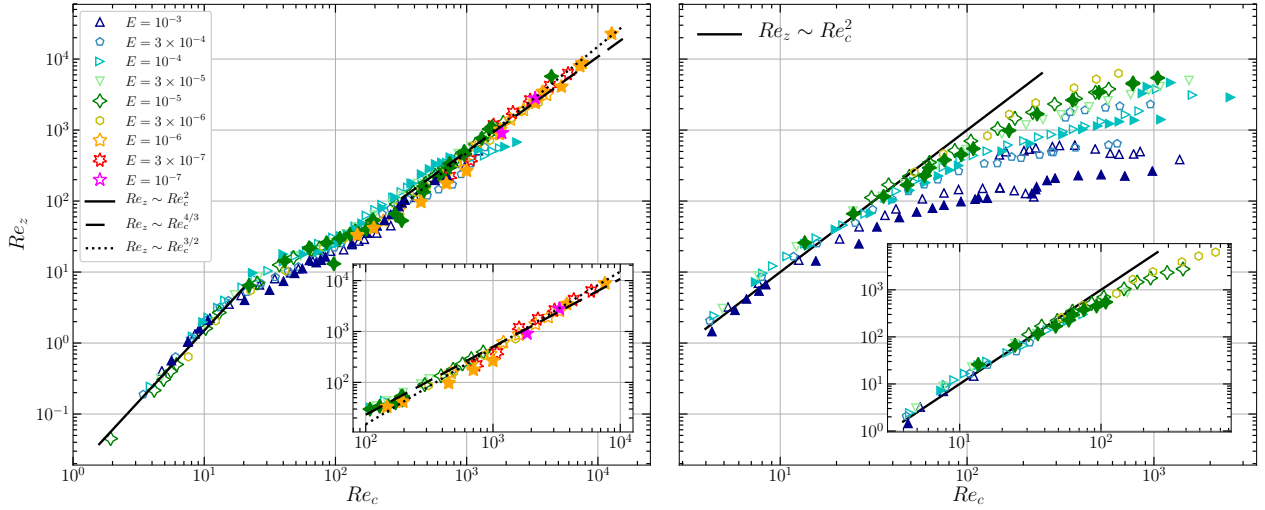


FIGURE 1.16 – Vitesse zonale en fonction de la vitesse convective (exprimées en nombre de Reynolds) pour des simulations Boussinesq avec des conditions aux limites rigide (gauche) et stress-free (droite). Les symboles pleins correspondent à  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$  et  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$  et les ouverts à  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  et  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ . Toutes les simulations ont  $Pr = 1$  et des conditions de température imposée aux deux bords. La figure a été construite en utilisant des simulations de GASTINE et WICHT (2012), GASTINE, WICHT et AURNOU (2013), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016), GASTINE, WICHT et AUBERT (2016) et SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021). La sous-figure à gauche correspond à un filtre sélectionnant uniquement les modèles avec  $Nu > 2$ ,  $Ra E^{8/5} < 1$  et  $Re_c > 100$ , celle à droite uniquement les modèles avec  $Ra E^{8/5} < 1$ .

échelles dominées par la turbulence. En utilisant Eq (1.60), on a  $\mathcal{L}/U \sim 1/\omega$  et donc  $\mathcal{L}_{Rh} \sim (U/\Omega\beta\rho)^{1/2}$ . Il y a encore une ambiguïté à lever sur la vitesse qui doit servir à représenter  $U$  : s’agit-il de la vitesse zonale  $U_z$  ou de la vitesse convective  $U_c$ ? Et surtout peut-on écrire directement  $\mathcal{L}_{zon} \sim \mathcal{L}_{Rh}$ ? Sans rentrer dans les débats, mentionnons simplement qu’il existe un corpus très important d’études indiquant un bon accord entre  $\mathcal{L}_{zon}$  et  $\mathcal{L}_{Rh}$  pour différents modèles de  $\beta$ -plane turbulence ou des modèles de convection quasi-géostrophique. Notons cependant que cet accord peut dépendre de la nature du processus dissipatif (frottement aux bords ou en volume) : en géométrie sphérique avec des conditions stress-free par exemple, les jets à l’extérieur du cylindre tangent sont mal décrits par l’échelle de Rhines et leur taille est plutôt contrôlée par le rapport de rayon de la coquille sphérique de telle sorte que  $\mathcal{L}_{zon} \sim d$  (e.g. HEIMPEL et AURNOU, 2007; HEIMPEL, GASTINE et WICHT, 2016, ainsi que les figures ci-dessous). Concernant la vitesse, l’étude de GUERVILLY et CARDIN (2017) de convection quasi-géostrophique indique une préférence pour  $U \sim U_c$  alors que les modèles cartésiens anélastiques de J. VERHOEVEN et STELLMACH (2014) suggèrent très clairement  $U \sim U_z$ . Pour résumer, on obtient donc les lois d’échelle suivantes

$$\text{Stress-free : } \mathcal{L}_{zon} \sim d, Re_z \sim Re_c^2, \quad \text{Rigide : } \mathcal{L}_{zon} \sim \left(\frac{U_c}{\Omega\beta\rho}\right)^{1/2}, Re_z \sim Re_c^{3/2}; \mathcal{L}_{zon} \sim \left(\frac{U_z}{\Omega\beta\rho}\right)^{1/2}, Re_z \sim Re_c^{4/3}. \quad (1.74)$$

Afin de tester l’applicabilité des lois d’échelle données ici, la figure 1.16 montre  $Re_z$  en fonction de  $Re_c$  pour des modèles avec des conditions aux limites rigides (à gauche) et stress-free (à droite). Cette figure comprend deux configurations avec soit  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$  et  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$  (configuration géodynamo), soit  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  et  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  (configuration planète géante) et a été construite à partir des simulations Boussinesq réalisées dans les publications de GASTINE et WICHT (2012), GASTINE, WICHT et AURNOU (2013), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016), GASTINE, WICHT et AUBERT (2016) et SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021). Pour les simulations avec conditions rigides, notons tout d’abord que  $Re_z$  est effectivement bien décrit par une fonction de  $Re_c$  puisqu’on n’observe pas de dépendance restante à  $E$  ou  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o$ . On distingue ensuite trois régimes distincts : tout d’abord une évolution quadratique  $Re_z \sim Re_c^2$  dans le régime convectif très proche du seuil, puis un régime intermédiaire de plus faible pente pour  $10 < Re_c < 100$  et enfin un troisième régime avec une pente pouvant être compatible avec les deux exposants 4/3 et 3/2 discutés ci-dessus. Une restriction aux modèles avec  $Re_c > 100$  et  $Ra E^{8/5} < 1$ , montrée dans la sous-figure dans le coin inférieur droit, ne permet malheureusement pas de trancher entre les deux scénarios. Des modèles additionnels ou des vérifications éventuelles de la variabilité temporelle de  $Re_z$  dans les modèles les plus turbulents permettraient très vraisemblablement de favoriser un des deux scénarios. Pour les modèles stress-free, l’évolution est assez différente puisqu’on constate qu’il reste une dépendance assez marquée au nombre d’Ekman. En détails, on constate quand même que cette dépendance semble s’amoinrir quand  $E$  diminue. Une sélection des modèles satisfaisant la contrainte  $Ra E^{8/5} < 1$  (sous-figure dans le coin inférieur droit) supprime effectivement la dépendance au nombre d’Ekman. On observe alors un comportement qui suit la prédiction  $Re_z \sim Re_c^2$  jusqu’à  $Re_c \sim 100$  avant de montrer un fléchissement graduel. On peut raisonnablement attribuer cet aplatissement à une décorrélation progressive des composantes de l’écoulement quand le forçage convectif augmente. On obtient alors en pratique  $[u_s u_\phi]_\phi \sim U_c^{\alpha(U_s)}$  avec  $\alpha(U_c)$  une fonction décroissante de  $U_c$  (voir Fig. 12 de

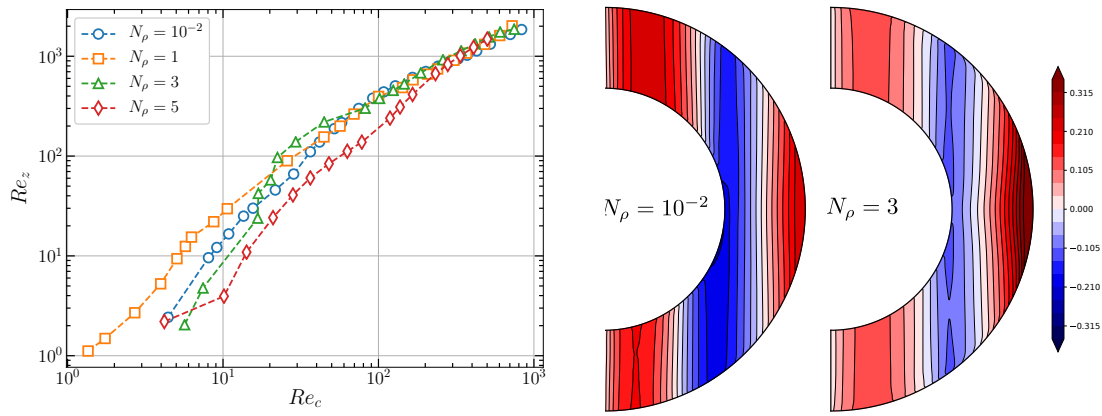


FIGURE 1.17 – Gauche : vitesse zonale en fonction de la vitesse convective pour des modèles anélastiques avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $Pr = 1$ ,  $E = 10^{-4}$ , des conditions mécaniques stress-free avec entropie fixée aux deux bords. Droite : moyenne temporelle de l'écoulement zonal représenté dans un plan méridien pour deux simulations avec des  $Re_c$  très proches de l'ordre de 500 et des contrastes de densité différents. La vitesse est exprimée en nombre de Rossby (figure construite à partir de GASTINE et WICHT, 2012).

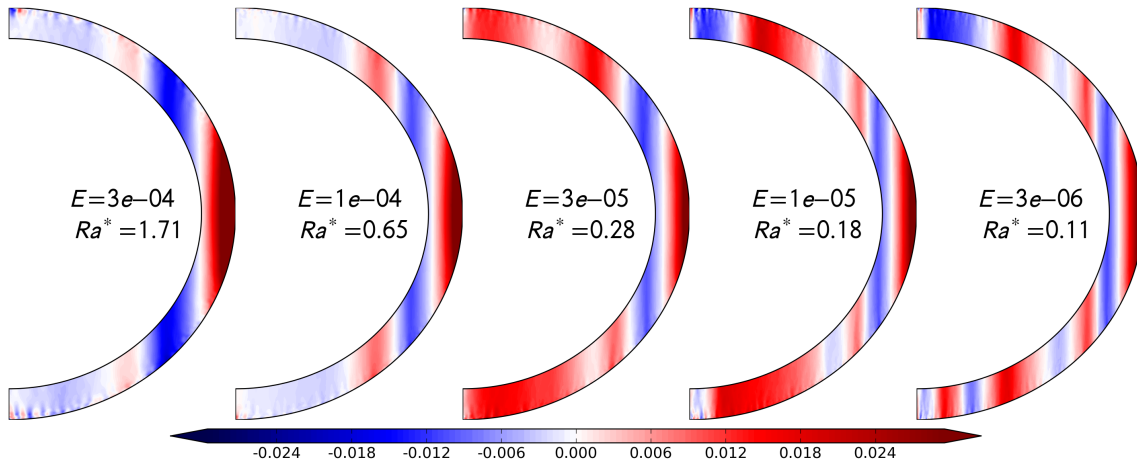


FIGURE 1.18 – Instantanés de l'écoulement zonal de cinq modèles numériques anélastiques avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.85$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $N_\rho = 5$ , des conditions mécaniques stress-free avec entropie fixée aux deux bords. La vitesse est ici exprimée avec un nombre de Rossby construit sur le rayon externe,  $Ro = [u_\phi]_\phi/\Omega r_o$  et rappelons que  $Ra^* = Ro_c^2$  (figure tirée de GASTINE, HEIMPEL et WICHT, 2014).

GASTINE et WICHT, 2012). Il est malheureusement plus délicat de réaliser des modèles avec des conditions stress-free qu'avec des conditions rigides du fait du temps d'équilibrage très lent des vents zonaux par la viscosité en volume. Le domaine avec  $E \leq 10^{-6}$  qui serait bien utile pour confirmer la tendance visible ici est donc pour le moment difficile d'accès.

Afin d'étudier l'influence d'un contraste en densité sur la génération des vents zonaux, la figure 1.17 (gauche) montre  $Re_z$  en fonction de  $Re_c$  pour des modèles numériques avec différents contrastes en densité  $N_\rho$  pour  $E = 10^{-4}$  et  $Pr = 1$ . On constate des évolutions similaires avec une partie quadratique et une pente qui s'aplatit aux forçages les plus élevés. On observe également que la dépendance à  $N_\rho$  diminue avec  $Re_c$  pour finalement conduire à un comportement indépendant du contraste en densité pour  $Re_c > 200$ . Les deux coupes méridionales montrées dans la partie droite de Fig. 1.17 montrent le vent zonal moyen pour deux simulations numériques ayant des valeurs de  $Re_c$  très proches de l'ordre de 500 : un modèle quasi-Boussinesq avec  $N_\rho = 10^{-2}$  et un modèle anélastique avec  $N_\rho = 3$ . Au premier ordre on observe des profils très similaires : des vents zonaux géostrophiques de directions alternées avec un jet prograde dans la région équatoriale, un jet rétrograde attaché au cylindre tangent et un jet prograde dans chaque hémisphère à l'intérieur du cylindre tangent. La différence principale entre le modèle quasi-Boussinesq et le modèle anélastique réside dans la différence d'amplitude entre le jet équatorial principal et les jets aux hautes latitudes : alors qu'elles sont comparables pour  $N_\rho = 10^{-2}$ , le jet équatorial est nettement plus fort pour  $N_\rho = 3$ . Ces similitudes entre les deux configurations permettent de confirmer la pertinence des modèles de HEIMPEL, AURNOU et WICHT (2005) appliqués à Jupiter bien que ceux-ci négligeaient tout contraste en densité.

Pour obtenir un plus grand nombre de bandes de directions alternées, il est nécessaire de considérer des coquilles sphériques avec des rapports de rayon plus grands pour permettre à plus de jets de se développer à l'intérieur du cylindre

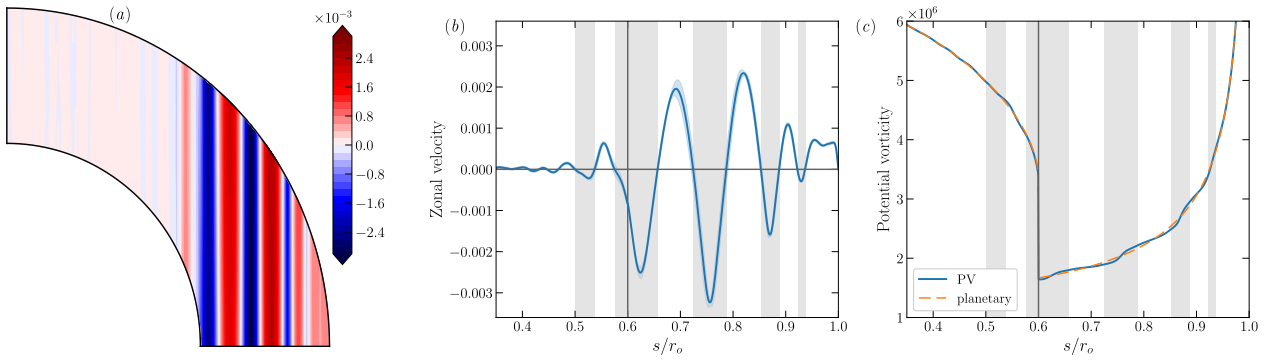


FIGURE 1.19 – (a) Vitesse zonale dans l’hémisphère Nord moyennée en temps dans un plan méridien pour une simulation Boussinesq avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $E = 3 \times 10^{-7}$ ,  $Ra = 1.3 \times 10^{11}$ ,  $Pr = 1$ , des conditions aux limites rigides et une température imposée aux deux bords. (b) Profil de vitesse zonale géostrophique moyennée en temps en fonction du rayon cylindrique  $\tilde{s}/\tilde{r}_o$ . La variabilité temporelle est matérialisée par la zone en bleu clair. (c) Profil de vorticité potentielle et de vorticité planétaire correspondants. Les lignes verticales dans (b) et (c) matérialisent la localisation du cylindre tangent. Les régions grisées correspondent aux régions où les jets sont rétrogrades.

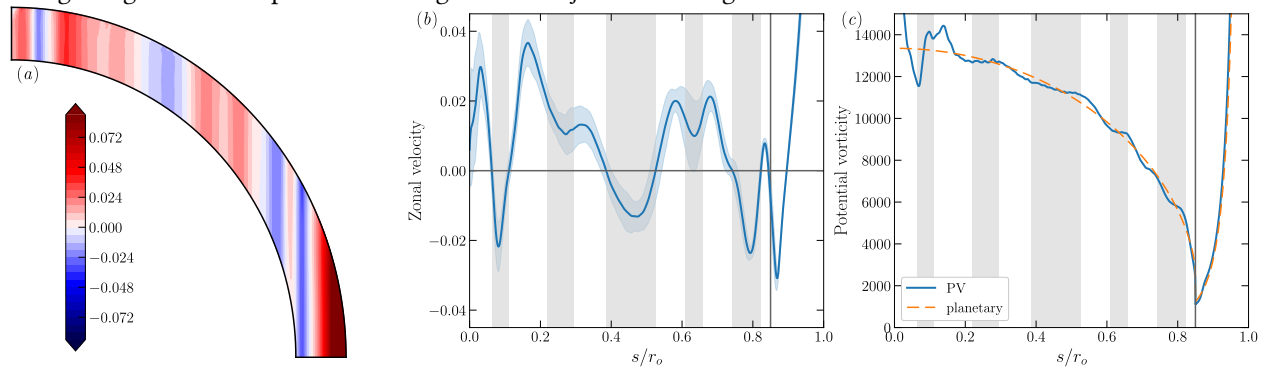


FIGURE 1.20 – (a) Vitesse zonale dans l’hémisphère Nord moyennée en temps dans un plan méridien pour la simulation anélastique à  $E = 3 \times 10^{-6}$  montrée dans Fig. 1.18 (conditions aux limites stress-free). (b) Profil de vitesse zonale géostrophique moyennée en temps en fonction du rayon cylindrique  $\tilde{s}/\tilde{r}_o$ . La variabilité temporelle est matérialisée par la zone en bleu clair. (c) Profil de vorticité potentielle et de vorticité planétaire correspondants. Les lignes verticales dans (b) et (c) matérialisent la localisation du cylindre tangent. Les régions grisées correspondent soit aux zones où les jets sont rétrogrades, soit à un minimum local si le changement de signe n’est pas atteint (comme pour  $\tilde{s}/\tilde{r}_o \approx 0.63$ ).

tangent (CHRISTENSEN, 2002; HEIMPEL, AURNOU et WICHT, 2005). La figure 1.18 montre des instantanés du profil des vents zonaux pour cinq modèles numériques avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.85$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $N_p = 5$ , des nombres d’Ekman décroissants et un forçage convectif entraînant la génération de jets d’amplitude comparable en terme de nombre de Rossby. Au fur et à mesure que le nombre d’Ekman diminue on constate la génération de jets aux plus hautes latitudes. La structure des vents zonaux jusqu’à environ  $\pm 45^\circ$  de latitude ne change plus pour  $E \leq 10^{-5}$ . À  $E = 3 \times 10^{-6}$ , on obtient alors une configuration avec un jet équatorial prograde et plusieurs jets multiples de directions alternées jusqu’aux régions polaires, une structure relativement proche de ce qui est observé sur Saturne (Fig. 1.4).

La taille caractéristique des jets obtenus se compare assez bien à l’échelle de Rhines  $\mathcal{L}_{Rh}$  locale construite à partir de l’effet  $\beta_\rho$  compressible et en utilisant  $U_z$  plutôt que  $U_c$  (voir Fig. 7 de GASTINE, HEIMPEL et WICHT, 2014). Le jet équatorial prograde principal constitue une exception puisqu’il est environ deux fois plus large que  $\mathcal{L}_{Rh}$ . De fait, depuis les travaux de CHRISTENSEN (2002), on constate que la taille du jet équatorial dans les simulations stress-free est contrôlée non pas par l’échelle de Rhines mais par la géométrie de la coquille sphérique (le rapport de rayon  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o$ , voir aussi HEIMPEL et AURNOU, 2007). Si ce phénomène persiste dans un régime astrophysique avec  $E \ll 1$ , il est intéressant puisqu’il permet de définir une contrainte sur la profondeur des jets zonaux de Jupiter et Saturne, la latitude correspondant au minimum du premier jet rétrograde définissant le « cylindre tangent ». On obtient alors une profondeur de  $0.95 R_J$  pour Jupiter et de  $0.85 R_S$  pour Saturne, des profondeurs finalement pas si éloignées des contraintes gravimétriques dont on dispose. La réalisation de modèles numériques ayant une configuration plus proche de celle de Jupiter nécessite donc de considérer des coquilles sphériques encore plus fines que celles montrées dans la Fig. 1.18. Citons à ce titre HEIMPEL, GASTINE et WICHT (2016) pour la génération de vents zonaux multiples dans un modèle Jovien avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.9$  (voir également la discussion dans § 2.2.3).

Le mélange de la vorticité potentielle par la turbulence permet également d’appréhender la formation de vents zonaux multiples de directions alternées (e.g. DRITSCHEL et MCINTYRE, 2008). En suivant GLATZMAIER et GILMAN (1981),

on peut définir la vorticité potentielle d'un élément de fluide compressible en rotation par la vorticité totale divisée par la densité. En l'absence de flottabilité et d'effets visqueux, la vorticité potentielle est conservée par un élément fluide durant son déplacement. En pratique, en utilisant le fait que l'écoulement est géostrophique, on définit

$$PV = \frac{\langle [\omega_z]_\phi \rangle_z + 2\Omega}{M}, \quad \langle f \rangle_z = \frac{1}{h} \int_h f dz, \quad (1.75)$$

avec  $M$  la densité intégrée suivant l'axe de rotation (Eq. 1.62). Encore une fois on retrouve bien  $M = h$  dans la limite  $N_\rho = 0$ . Les vents zonaux sont directement liés au profil de vorticité potentielle par

$$[u_\phi]_\phi(s, t) = \frac{1}{s} \int_0^s s^* [\omega_z]_\phi ds^* = \frac{1}{s} \int_0^s s^* (MPV - 2\Omega) ds^*.$$

La formation de vents zonaux peut être perçue comme le processus physique de mélange de la vorticité potentielle initiale  $2\Omega/M$ , également appelée vorticité planétaire. En pratique, on assiste à la formation d'une structure en escalier avec des larges zones de vorticité potentielle homogène séparée par des régions plus fines avec des gradients importants de PV (DRITSCHER et MCINTYRE, 2008). Cette structuration en escaliers se retrouve également dans le profil de température ou d'entropie (J. VERHOEVEN et STELLMACH, 2014; GUERVILLY et CARDIN, 2017). Dans le cas où  $M$  ou  $h$  sont des fonctions décroissantes du rayon cylindrique, les vents zonaux rétrogrades se développent dans les régions de vorticité potentielle homogène et les jets progrades dans les régions de fort gradient de PV. Les signes sont inversés si  $M$  ou  $h$  croissent avec  $s$ . Dans une coquille sphérique, on a donc deux régions dynamiques différentes séparées par le cylindre tangent, puisque  $M$  ou  $h$  sont des fonctions croissantes de  $s$  pour  $s < r_i$  et décroissantes pour  $s \geq r_i$  (voir Fig. 1.7).

Les figures 1.19 et 1.20 illustrent la formation d'escaliers de vorticité potentielle dans des modèles numériques présentant des jets multiples. La figure 1.19 correspond à un modèle Boussinesq avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  et des conditions aux limites rigides aux deux bords. On observe la formation de jets multiples de signes alternés à l'extérieur du cylindre tangent ainsi que quelques jets d'amplitude beaucoup plus faible pour  $\tilde{s} \lesssim \tilde{r}_i$ . Les figures 1.19(b-c) montrent que le profil de vorticité potentielle dévie très légèrement du profil planétaire. On observe effectivement la formation de zones avec des gradients de PV plus importants associées aux jets rétrogrades. Avec  $E = 3 \times 10^{-7}$ ,  $Ra = 1.3 \times 10^{11}$  et  $Pr = 1$ , ce modèle conduit à  $Re_c \approx Re_z \approx 4200$ , soit un Rossby proche de  $10^{-3}$ , une valeur encore faible pour entraîner une homogénéisation de la vorticité potentielle plus importante. La figure 1.20 correspond à un modèle anélastique avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.85$ ,  $N_\rho = 5$  et des conditions aux limites stress-free aux deux bords. On observe une configuration bien différente puisque désormais des jets multiples de directions alternées se forment à l'intérieur du cylindre tangent (Fig. 1.20b). On observe également un phénomène de formation de zones de PV homogène plus marquées séparées par des zones avec des gradients importants mais cette fois à l'intérieur du cylindre tangent. La configuration correspond maintenant à  $Ro_{nz} \sim 2 \times 10^{-2}$  et  $Ro_z \sim 0.1$ , des valeurs de forçage nettement plus élevées que dans la configuration avec des bords rigides. Il est donc normal que le mélange de PV soit plus efficace. On a également une inversion du signe par rapport à la Fig. 1.19, les jets progrades correspondent maintenant aux zones de forts gradients de PV (Fig. 1.20c). Notons que le même phénomène est visible dans la Fig. 2e-f de HEIMPEL, GASTINE et WICHT (2016) qui utilisent un proxy pour construire la distribution de PV en fonction de la latitude dans un modèle anélastique avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.9$ .

Les configurations physiques favorables à la formation des jets multiples sont donc très dépendantes des conditions aux limites mécaniques et donc du phénomène contrôlant la saturation de l'amplitude des jets. La configuration avec des bords rigides semble en général plus favorable à l'apparition de jets multiples stables (voir aussi ROTVIG, 2007) mais son applicabilité aux planètes géantes est peu réaliste. Les conditions mécaniques peuvent également impacter l'évolution temporelle des jets et leur fusion éventuelle (perspective discutée en § 2.2.3).

### Régime transitionnel et jets rétrogrades

Au-delà du régime dominé par la rotation discuté dans le paragraphe précédent, les vents zonaux suivent une évolution particulière quand la flottabilité devient comparable à la force de Coriolis, i.e. quand  $Ro_c \sim 1$ . Depuis les premières simulations numériques en géométrie sphérique de GILMAN (1977) et GILMAN (1979), une inversion de la direction du vent zonal équatorial est observée quand  $Ro_c > 1$ . Avec des conditions aux limites stress-free, on passe d'une configuration avec un jet équatorial prograde (Figs. 1.17-1.18) à une configuration avec un jet équatorial rétrograde. La figure 1.21 (à gauche) illustre le phénomène pour deux modèles anélastiques avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$  et  $N_\rho = 3$  avec des conditions stress-free : le modèle de gauche avec  $Ro_c = 0.3$  a un jet équatorial prograde, alors que le modèle de droite avec  $Ro_c = 2$  a un jet équatorial rétrograde d'amplitude beaucoup plus élevée.

En réalisant une étude paramétrique systématique avec différentes valeurs de  $N_\rho$  (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2013) et en collectant des modèles numériques provenant de différents codes (GASTINE, YADAV et al., 2014, publication jointe en § B.2), j'ai pu montrer que cette transition avait lieu de manière très robuste à  $Ro_c \approx 1$ , et ce indépendamment du rapport de rayon de la coquille sphérique, du contraste en densité ou de la nature des conditions aux limites thermiques. La figure 1.21 illustre ce résultat en montrant  $\alpha_e = [\overline{u_\phi}]_\phi(r = r_o, \theta = \pi/2)/\Omega d$  en fonction de  $Ro_c$ . On constate que seuls deux quadrants de ce diagramme de régimes sont remplis : (i) la région avec  $Ro_c < 1$  pour laquelle  $\alpha_e > 0$  (équateur prograde) et l'amplitude de la rotation différentielle croît avec  $Ro_c$ ; (ii) la région avec  $Ro_c > 1$  pour laquelle  $\alpha_e < 0$  (équateur rétrograde) avec en général une plus grande amplitude que dans le régime prograde. En outre, proche de la



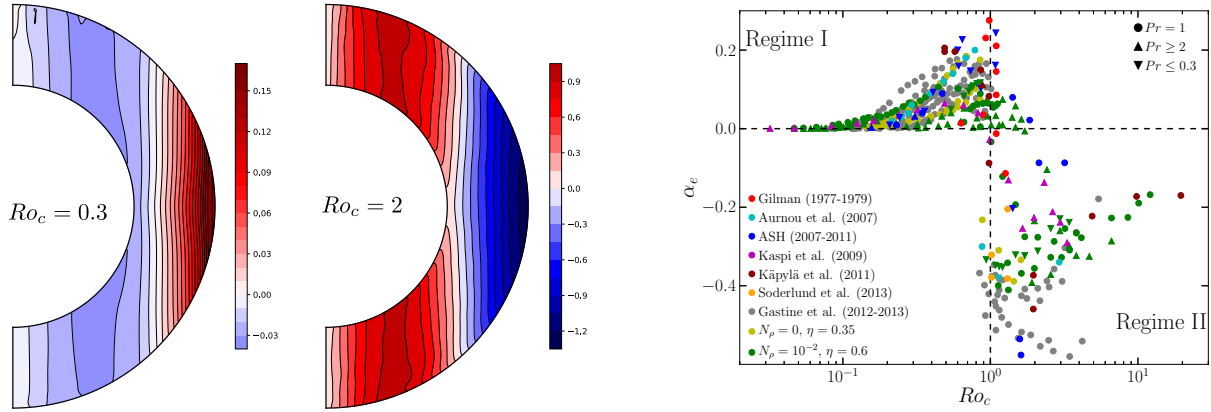


FIGURE 1.21 – Gauche : moyenne temporelle de l'écoulement zonal représentée dans un plan méridien pour deux simulations avec  $N_\rho = 3$ ,  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $Pr = 1$ , des conditions mécaniques stress-free avec entropie imposée aux bords. Droite : amplitude du vent zonal à la surface et à l'équateur (i.e.  $\alpha_e = [\overline{u\phi}]_\phi(r = r_o, \theta = \pi/2)/\Omega d$ ) en fonction de  $Ro_c$  pour un ensemble de simulations réalisés avec plusieurs codes Boussinesq, anélastique ou compressible. Les données ont été extraites des publications suivantes : (GILMAN, 1977; GILMAN, 1979); (AURNOU, HEIMPEL et WICHT, 2007), ASH (BALLOT, BRUN et TURCK-CHIÈZE, 2007; BROWNING, 2008; BRUN et PALACIOS, 2009; BROWN, 2009; MATT et al., 2011; BESSOLAZ et BRUN, 2011); (KASPI, FLIERL et SHOWMAN, 2009); (KÄPYLÄ et al., 2011); (SODERLUND et al., 2013); (GASTINE et WICHT, 2012) et (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2013). Figure de gauche adaptée de (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2013) et de droite tirée de (GASTINE, YADAV et al., 2014).

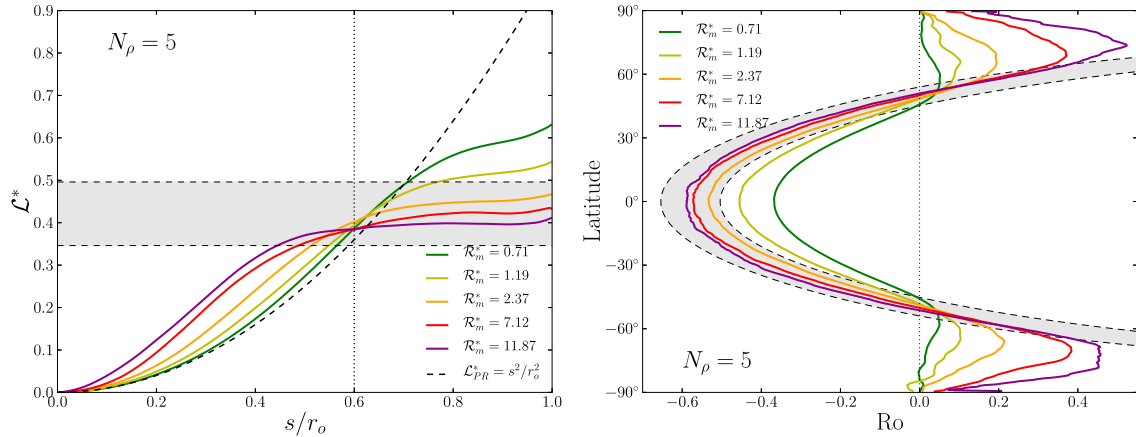


FIGURE 1.22 – Gauche : moment cinétique par unité de masse adimensionné par  $r_o^2\Omega$  (Eq. 1.76) en fonction du rayon cylindrique pour des modèles numériques anélastiques avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $Pr = 1$ ,  $E = 10^{-3}$ ,  $N_\rho = 5$ , des conditions mécaniques stress-free avec entropie fixée aux deux bords. La ligne en tirets correspond à une rotation solide. Le trait vertical en pointillé matérialise la localisation du cylindre tangent. Droite : vents zonaux de surface exprimés ici avec un nombre de Rossby calculé sur le rayon externe  $[\overline{u\phi}]_\phi/\Omega r_o$  pour ces mêmes modèles en fonction de la latitude. Ces figures sont tirées de (GASTINE, WICHT et AURNOU, 2013). Le symbole  $\mathcal{R}_m^*$  utilisé dans la publication d'origine correspond au carré du Rossby convectif  $Ro_c$  estimé au milieu de la coquille sphérique  $\tilde{r}_{mid}$ . Les zones grisées correspondent aux cas limites où le moment cinétique par unité de masse est homogénéisé sur toute la coquille sphérique ou bien uniquement à l'extérieur du cylindre tangent.

transition entre ces deux régimes physiques, un phénomène de bistabilité peut être observé : en fonction des conditions initiales choisies, la solution peut saturer soit sur une configuration prograde soit sur une configuration rétrograde (voir la Fig. 5 de GASTINE, YADAV et al., 2014).

Le changement de régime des vents zonaux est donc directement lié au ratio flottabilité sur force de Coriolis. Quand  $Ro_c \geq 1$ , l'écoulement convectif a une structure beaucoup plus tridimensionnelle et l'influence de la rotation se fait principalement sentir sur les plus grandes structures spatiales (voir la Fig. 3b de GASTINE, YADAV et al., 2014). Un mécanisme mis en avant par GOUGH et LYNDEN-BELL (1968) pour expliquer la formation de vents zonaux de signe opposé dans ce régime physique est l'homogénéisation du moment cinétique par unité de masse par les mouvements de convection turbulente (voir aussi GILMAN et FOUKAL, 1979). Les modèles numériques de CESSI (1998) dans le cadre de l'atmosphère terrestre ou ceux de AURNOU, HEIMPEL et WICHT (2007) dans le cadre de la convection des géantes de glace ont montré que le mélange du moment cinétique par la turbulence était bien observé quand  $Ro_c \sim 1$ . En introduisant  $\mathcal{L}^*$ , le moment cinétique par unité de masse adimensionné par  $r_o^2 \Omega$  on a

$$\mathcal{L}^* = \frac{s[\overline{u_\phi}]_\phi}{r_o^2 \Omega} + \frac{s^2}{r_o^2} \approx \zeta(r_i/r_o, N_\rho), \quad (1.76)$$

où  $\zeta$  dépend de la géométrie de la coquille sphérique et du contraste en densité. Pour vérifier la validité de cette hypothèse physique, et notamment l'influence du contraste en densité sur ces résultats, j'ai mené une étude systématique en faisant varier  $N_\rho$  et  $Ro_c$ . La figure 1.22 (gauche) montre  $\mathcal{L}^*$  en fonction du rayon cylindrique pour une série de cinq modèles numériques anélastiques avec  $N_\rho = 5$ ,  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $E = 10^{-3}$  et  $Pr = 1$  avec des nombres de Rossby croissants. La quantité  $\mathcal{R}_m^*$  utilisée sur cette figure correspond au carré du Rossby convectif  $Ro_c$  estimé ici au rayon central  $\tilde{r}_{mid}$  de la coquille sphérique. Dans tous ces modèles avec  $Ro_c \geq 0.8$ , on constate la formation d'une région où  $\mathcal{L}^*$  est quasi constant dans les régions externes. Cette région s'étend en profondeur avec l'augmentation de  $Ro_c$  pour couvrir  $0.5 \leq \tilde{s}/\tilde{r}_o \leq 1$  dans le cas le plus forcé (ligne violette,  $\mathcal{R}_m^* = 11.87$ , soit  $Ro_c = 3.44$ ). L'équation 1.76 peut ensuite être utilisée pour prédire la forme de la rotation différentielle

$$\frac{[\overline{u_\phi}]_\phi}{\Omega r_o} = \zeta(r_i/r_o, N_\rho) \frac{r_o}{s} - \frac{s}{r_o}, \quad s > 0. \quad (1.77)$$

En faisant l'hypothèse que le moment cinétique par unité de masse est mélangé soit sur toute la coquille sphérique, soit uniquement à l'extérieur du cylindre tangent, on peut déterminer deux valeurs limites pour  $\zeta$  qui servent à définir les régions grisées représentées sur la figure 1.22. La partie droite de cette figure montre les profils latitudinaux des vents zonaux de surface. Tous les modèles sélectionnés ici présentent un jet équatorial rétrograde flanqué de deux bandes progrades aux hautes latitudes. On observe un bon accord entre le profil observé et le profil théorique (Eq. 1.77) (zone grisée) pour les latitudes inférieures à  $\pm 60^\circ$  pour les trois modèles les plus forcés. Pour ces trois cas, le mélange de  $\mathcal{L}^*$  est efficace sur au moins la partie extérieure au cylindre tangent. Notons enfin que le scénario du mélange du moment cinétique par la turbulence nécessite quand même que l'écoulement à grande échelle soit encore influencé par la rotation. Dans la limite  $Ro_c \gg 1$ , l'écoulement n'a aucune raison de présenter un quelconque alignement avec un axe privilégié. Il existe donc vraisemblablement une limite  $\alpha_e \rightarrow 0$  pour  $Ro_c \gg 1$ . Le domaine des jets rétrogrades à l'équateur produits par mélange du moment cinétique est donc restreint à une plage de  $Ro_c$  dont la borne supérieure est difficile à estimer à l'heure actuelle.

Le mécanisme du mélange du moment cinétique par la turbulence est donc très efficace quand  $Ro_c > 1$  et conduit à des profils de vents zonaux très similaires à ceux observés à la surface d'Uranus et de Neptune (Fig. 1.4). Ce scénario semble donc prometteur mais il nécessite *a priori*  $Ro_c > 1$ . Bien qu'il soit assez délicat d'évaluer cette quantité pour les géantes de glace, on estime plutôt que  $Ro_c < 1$  dans leurs régions externes (SODERLUND et al., 2013). À ce stade, nous pouvons donc spéculer sur (i) les incertitudes sur la structure et la dynamique des géantes de glace conduisant à  $Ro_c \sim 1$ ; (ii) une lente dépendance aux paramètres, non visible sur la Fig. 1.21, qui conduirait à un critère de transition plus « favorable »; (iii) d'autres mécanismes physiques produisant des jets rétrogrades (comme par exemple l'influence d'un flux thermique de surface hétérogène, e.g. DIETRICH, GASTINE et WICHT, 2017).

### Impact des vents zonaux sur le transport de chaleur

Pour conclure cette section sur les vents zonaux et établir une connexion avec les régimes convectifs établis dans (1.4.2), examinons l'influence des vents zonaux sur le transport thermique. La rotation différentielle ne participe pas directement au transport de chaleur mais sa rétroaction sur l'écoulement convectif peut affecter la manière dont la chaleur est transportée notamment dans la limite où  $Re_z > Re_c$ . Afin d'étudier cet impact, YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016) ont mené une étude systématique de modèles Boussinesq avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $E = [10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}]$ ,  $Pr = 1$  et différents forçages convectifs du seuil jusqu'à  $Ro_c > 1$  pour les deux jeux de conditions aux limites mécaniques. La figure 1.23 (gauche) montre le nombre de Nusselt en fonction de  $Ra$  pour les conditions rigides (symboles ouverts) et stress-free (symboles pleins). Comme pour la Fig. 1.9, on constate que la loi  $Nu - Ra$  peut être scindée en un régime proche du seuil faiblement non linéaire (dénote  $R_1$  ici); un régime non linéaire où  $Nu$  augmente rapidement avec  $Ra$  ( $R_2$ ) et enfin une lente convergence vers le régime sans rotation ( $R_3$ ). Pour les régimes  $R_1$  et  $R_2$ , la configuration avec conditions aux limites rigides produit des nombres de Nusselt plus élevés que la configuration stress-free aux mêmes

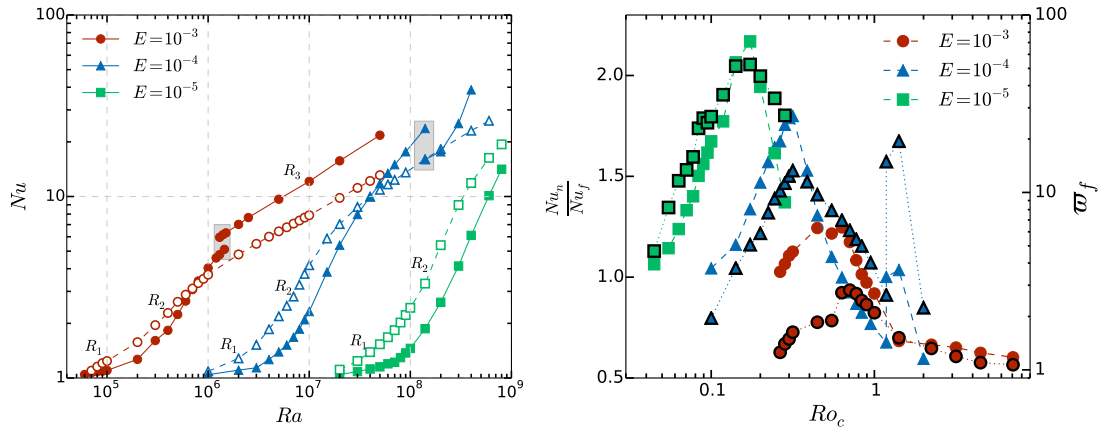


FIGURE 1.23 – Gauche :  $Nu$  en fonction de  $Ra$  pour des simulations Boussinesq avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$ ,  $Pr = 1$  et des conditions aux limites en température imposées aux deux bords. Les symboles pleins correspondent aux modèles avec des conditions mécaniques stress-free et les symboles vides à des conditions mécaniques rigides. Les deux zones grisées correspondent à des configurations où deux états sont possibles selon l’initialisation de la simulation (bistabilité pour  $Ro_c \sim 1$ ). Droite : ratio des nombres de Nusselt obtenus dans les modèles avec des conditions rigides et des conditions stress-free (symboles sans bord noir, échelle à gauche);  $\omega$  pour les modèles stress-free (symboles avec un bord noir, échelle à droite). Figures tirées de (YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS, 2016).

paramètres de contrôle. L’inverse est observé dans la limite sans rotation. Dans cette limite, l’absence de dissipation aux bords permet un transport de chaleur plus efficace, ce qui conduit à  $Nu_f > Nu_n$  ( $Nu_f$  pour la configuration stress-free,  $Nu_n$  pour la configuration rigide) (voir la Fig. 1 de JULIEN et al., 1996). Dans les régimes contrôlés par la rotation en revanche,  $Nu_n > Nu_f$  est directement lié au développement de vents zonaux forts dans la configuration stress-free. Pour le visualiser, j’introduis la quantité

$$\omega = \frac{\tilde{E}_K^z}{\tilde{E}_K^{nz}} = \frac{1}{1 - \tilde{E}_K^z/\tilde{E}_K^{nz}},$$

avec  $\tilde{E}_K^z$  et  $\tilde{E}_K^{nz}$  l’énergie cinétique contenue dans les mouvements zonaux et non-zonaux (CHRISTENSEN, 2002). La figure 1.23 (droite) montre simultanément le ratio  $Nu_n/Nu_f$  (symboles sans bord noir, échelle à gauche) et  $\omega$  (symboles avec bords noirs, échelle à droite) en fonction de  $Ro_c$  pour les trois nombres d’Ekman considérés. On constate une très bonne corrélation dans l’évolution de ces deux quantités en fonction de  $Ro_c$ . Dans le régime des jets progrades ( $Ro_c < 1$ ), la valeur de  $Nu_n/Nu_f$  croît avec  $\omega$ . Autrement dit, plus l’énergie zonale représente une fraction élevée de l’énergie cinétique totale, moins le transport de chaleur est efficace. Une analyse du flux de chaleur en fonction de la latitude montre en effet que dans les régions proches de l’équateur où les jets zonaux sont les plus forts, le flux de chaleur n’augmente presque pas avec  $Ra$  et le transport thermique passe alors plutôt par les régions polaires (voir la Fig. 4a de YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS, 2016). Ce résultat est en accord avec les modèles 2-D sans rotation de GOLUSKIN et al. (2014) qui reportent une loi en  $Nu \sim Ra^{0.077}$  pour de la convection en présence de cisaillement fort. Les perspectives ouvertes par ce travail sont discutées dans § 2.2.2.

## 1.5 Dynamos convectives

### 1.5.1 Géométrie des dynamos convectives : dipôles et multipôles

Comme on l’a vu avec la figure 1.1, les dynamos planétaires peuvent être séparées en deux grandes catégories suivant la morphologie de leur champ de surface avec d’un côté des champs principalement dipolaires et de l’autre des champs multipolaires. La question des mécanismes physiques contrôlant la stabilité d’un champ magnétique dipolaire à grande échelle se pose depuis les toutes premières études paramétriques systématiques de dynamos numériques en coquilles sphériques en rotation menées à la fin des années 1990 (e.g. CHRISTENSEN, OLSON et GLATZMAIER, 1999). Dans la configuration de géodynamo « classique », on considère un fluide Boussinesq dans une coquille sphérique en rotation de rayon  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$  dans laquelle la convection est forcée en imposant un contraste de température entre les deux rayons interne et externe et les conditions mécaniques sont rigides aux deux bords. Pour chaque nombre d’Ekman et de Prandtl, la stratégie consiste alors à paver l’espace des paramètres ( $Ra/Ra_c, Pm$ ). La figure 1.24 montre de tels diagrammes de régimes pour trois nombres d’Ekman différents  $E \in [10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}]$  et  $Pr = 1$ . Cette figure a été construite à partir de simulations de CHRISTENSEN (2006), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, WOLK et al. (2016), DORMY, ORUBA et PETITDEMANGE (2018), PETITDEMANGE (2018), SCHWAIGER, GASTINE

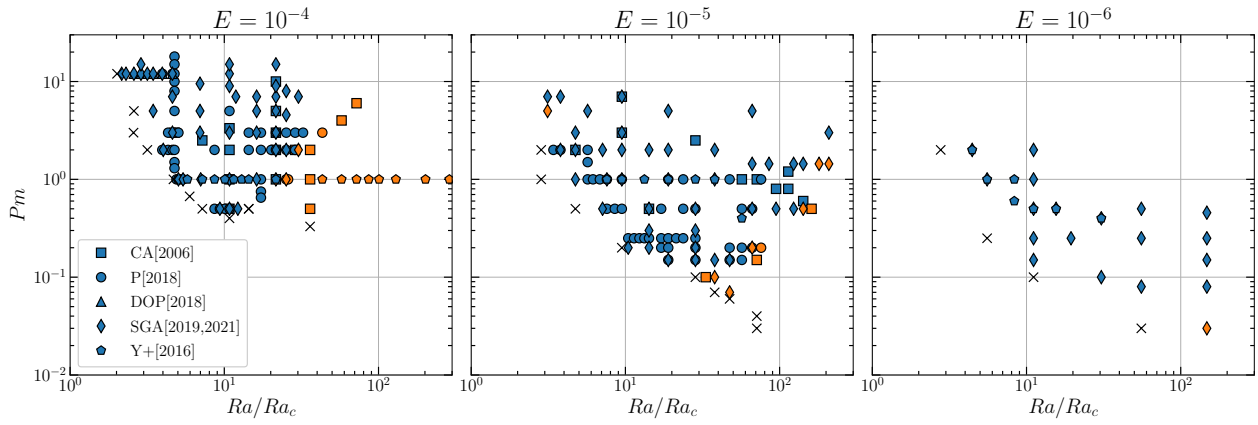


FIGURE 1.24 – Diagrammes de régimes des dynamos Boussinesq dans la configuration géodynamo ( $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$ ): localisation des dipôles (en bleu) et des multipôles (en orange) dans des plans  $(Ra/Ra_c, Pm)$  pour trois nombres d'Ekman différents. Les croix correspondent à des configurations où  $Rm$  n'est pas suffisant pour maintenir un champ magnétique par effet dynamo. Tous les modèles ont  $Pr = 1$ , des conditions aux limites rigides et une température imposée aux deux bords. Figure construite à partir des simulations de CHRISTENSEN (2006) (CA[2006]); YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, WOLK et al. (2016) (Y+[2016]); DORMY, ORUBA et PETITDEMANGE (2018) (DOP[2018]); PETITDEMANGE (2018) (P[2018]) et SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019), SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021) (SGA[2019,2021]).

et AUBERT (2019) et SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021). Une rapide comparaison avec la Fig. 4 de CHRISTENSEN, OLSON et GLATZMAIER (1999) montrant les mêmes diagrammes pour  $E \in [10^{-3}, 3 \times 10^{-4}, 10^{-4}]$  illustre les progrès réalisés en une vingtaine d'années en termes de moyens de calcul.

Ces diagrammes peuvent être scindés en trois régions distinctes. Tout d'abord, quand le nombre de Reynolds magnétique est trop faible, le champ magnétique ne peut pas être maintenu par effet dynamo et on peut alors définir un  $Rm$  critique noté  $Rm_c$ . Pour les dynamos convectives en rotation, on obtient fréquemment  $Rm_c \approx 50 - 100$ , mais il s'agit en fait d'un ordre de grandeur puisque  $Rm_c$  varie en fonction de  $E$ ,  $Pr$  et  $Ra/Ra_c$  (voir la Fig. 4 de PETITDEMANGE, 2018). Ce seuil de la dynamo a lieu pour  $Ra > Ra_c$  et il est matérialisé par les croix dans la Fig. 1.24. Au-delà de ce seuil, i.e. pour  $Pm$  et  $Ra/Ra_c$  suffisants, on obtient alors des dynamos dipolaires (en bleu) aux plus faibles supercriticalités puis des dynamos multipolaires (en orange) au-delà d'une certaine valeur. Pour chaque valeur de  $E$ , la frontière entre ces deux domaines n'est pas verticale : la valeur de  $Ra/Ra_c$  entraînant la perte du dipôle croît avec  $Pm$ , au moins dans la plage de  $Pm$  accessible numériquement. En plus de cette dépendance, on constate des changements importants quand le nombre d'Ekman diminue : le domaine des dynamos dipolaires s'étend vers des niveaux de supercriticalité plus élevés et vers des nombres de Prandtl magnétique plus faibles. On constate par exemple, que le  $Pm$  minimum, noté  $Pm_c$ , permettant de maintenir un champ magnétique dipolaire par effet dynamo passe de  $Pm_c \approx 0.5$  à  $E = 10^{-4}$  à  $Pm_c = 0.05$  à  $E = 10^{-6}$ . Une extrapolation (osée) d'une loi heuristique de la forme  $Pm_c \sim 50 E^{1/2}$  conduit à une valeur de  $Pm_c \sim 10^{-6}$  aux paramètres de la géodynamo (pour une extrapolation similaire, voir également la Fig. 9 de MENU, PETITDEMANGE et GALTIER, 2020). Notons enfin que l'étude systématique menée par Tobias Schwaiger pendant sa thèse (les losanges dans Fig. 1.24) a permis de considérablement améliorer la couverture des paramètres notamment à  $E = 10^{-6}$  (voir publication jointe en § B.4).

Le passage entre des configurations dipolaires et multipolaires est attribué à un rôle accru de l'inertie quand le forçage convectif augmente à un nombre d'Ekman donné. La configuration dominée par un dipôle axial est favorisée par l'alignement des colonnes convectives avec l'axe de rotation, une perte de la nature colonnaire de l'écoulement par augmentation de l'inertie entraîne une géométrie de champ magnétique plus complexe (SREENIVASAN et JONES, 2006). Afin de formaliser cette idée, CHRISTENSEN et AUBERT (2006) ont introduit un nombre de Rossby local  $Ro_{\mathcal{L}}$  comme estimation du ratio entre force d'inertie et force de Coriolis :

$$Ro_{\mathcal{L}} = \frac{U}{\Omega \mathcal{L}}, \quad \mathcal{L} = \frac{\pi}{\ell} \tilde{r}_{\text{mid}},$$

avec  $\tilde{r}$  défini dans Eq. (1.38). La figure 4 de CHRISTENSEN (2010) montre que cette quantité permet de bien séparer les dynamos dipolaires avec  $Ro_{\mathcal{L}} < 0.12$  des dynamos multipolaires avec  $Ro_{\mathcal{L}} > 0.12$ . La pertinence de ce paramètre à prédire la géométrie à grande échelle du champ magnétique est néanmoins remise en question dans de nombreuses configurations que l'on détaille dans les sous-sections suivantes.

### Influence des conditions aux limites mécaniques

Le simple changement des conditions aux limites rigides pour des conditions aux limites stress-free (dans des modèles Boussinesq) modifie la séparation entre dipôles et multipôles. SIMITEV et BUSSE (2009) ont par exemple montré

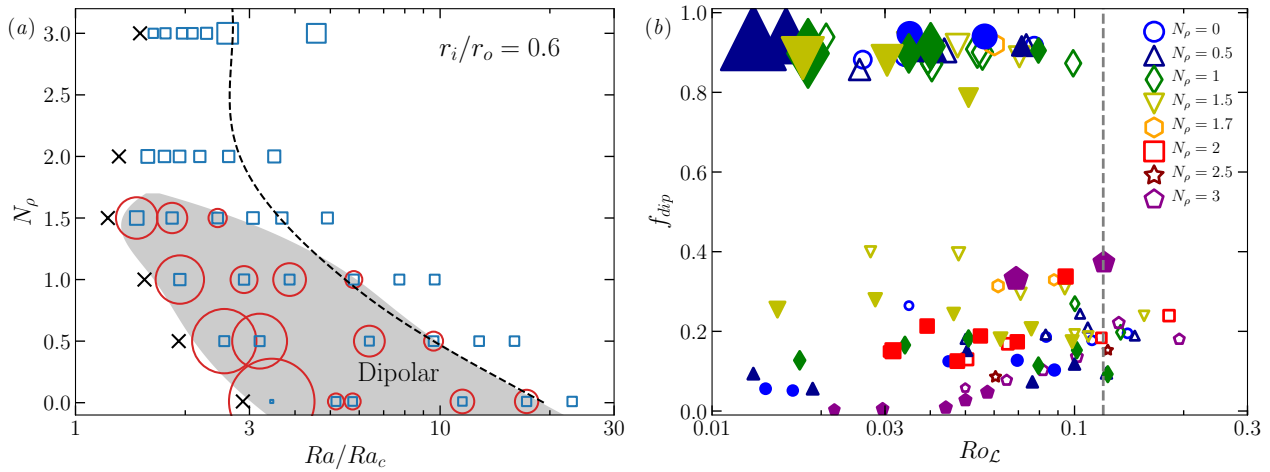


FIGURE 1.25 – (a) Dipôles (cercles rouges) et multipôles (carrés bleus) localisés dans le plan  $(Ra/Ra_c, N_\rho)$  pour un ensemble de simulations numériques anélastiques avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$ ,  $E = 10^{-4}$ ,  $Pr = 1$ ,  $Pm = 2$  avec des conditions mécaniques stress-free et entropie imposée aux deux bords. Les croix correspondent à des modèles où  $Rm$  n'est pas suffisant pour maintenir un champ magnétique par effet dynamo. La ligne en trait pointillé correspond à la limite  $Ro_{\mathcal{L}} = 0.12$  de CHRISTENSEN et AUBERT (2006). (b) Fraction dipolaire à la surface en fonction de  $Ro_{\mathcal{L}}$  pour deux séries de modèles numériques avec  $E = 10^{-4}$ ,  $Pr = 1$  et  $Pm = 2$  :  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  (symboles pleins) et  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.2$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$  (symboles ouverts). La ligne verticale en pointillé correspond à la valeur critique  $Ro_{\mathcal{L}} = 0.12$  de CHRISTENSEN et AUBERT (2006). Figures adaptées de GASTINE, DUARTE et WICHT (2012). Dans les deux figures, la taille des symboles est proportionnelle à  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K$ .

qu'avec des conditions stress-free, la dynamo devient très sensible aux conditions initiales du champ magnétique et présente fréquemment un phénomène de bistabilité : si la condition initiale est celle d'un champ fort, disons avec  $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$ , la configuration dipolaire est stable quand  $Ro_{\mathcal{L}} < 0.1$ , alors que si la condition initiale est un champ faible, la dynamo devient multipolaire même pour  $Ro_{\mathcal{L}} < 0.1$ . Cet effet est attribué à l'influence des vents zonaux dans ces deux configurations. En cas d'initialisation avec un champ fort, la force de Lorentz freine le développement de la rotation différentielle, alors qu'un champ faible couplé avec des conditions mécaniques stress-free permet la croissance de vents zonaux forts. Dans cette deuxième configuration, le vent zonal participe de manière significative à la production de champ magnétique toroïdal axisymétrique, c'est l'effet  $\Omega$ , qui est au contraire négligeable dans les dynamos dipolaires (SCHRINNER, PETITDEMANGE et DORMY, 2012; YADAV et al., 2013). Dans la terminologie du champ moyen, on a donc coexistence d'une dynamo dipolaire  $\alpha^2$  et d'une dynamo multipolaire  $\alpha\Omega$  aux mêmes paramètres de contrôle. Cette bistabilité persiste dans la configuration hybride d'une condition stress-free à  $\tilde{r}_o$  et rigide à  $\tilde{r}_i$  (SASAKI et al., 2011). La bistabilité de la dynamo est d'ailleurs une piste possible pour interpréter la dichotomie du champ magnétique de grande échelle dans les étoiles froides de faible masse en rotation rapide (GASTINE et al., 2013).

Le rôle différentiel joué par le vent zonal sur les deux branches entraîne des différences en termes d'amplitude et de variabilité temporelle du champ magnétique. La branche multipolaire présente un champ plus faible présentant un comportement quasi-cyclique au moins pour  $Rm < 200$ . En utilisant un formalisme de champ moyen, ce comportement peut être analysé en termes d'ondes de Parker dont la fréquence dépend de l'amplitude des vents zonaux et la direction de propagation (vers les pôles ou vers l'équateur) de la distribution spatiale du cisaillement (e.g., Fig. 12-13 de GASTINE, DUARTE et WICHT, 2012). On retrouve ici un comportement physique pertinent pour comprendre les dynamos naturelles présentant un comportement cyclique comme par exemple la dynamo solaire.

### Influence du contraste en densité

L'inclusion d'un contraste en densité avec des conditions aux limites stress-free complexifie encore un peu plus la séparation entre dipôles et multipôles. Pour étudier cet effet, j'ai réalisé une étude paramétrique avec  $E = 10^{-4}$ ,  $Pr = 1$  et  $Pm = 2$  fixés et changé  $Ra_S$  et  $N_\rho$  pour deux configurations différentes  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{r}_o/\tilde{r})^2$  et  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.2$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$  (GASTINE, DUARTE et WICHT, 2012). La figure 1.25a montre les résultats obtenus dans un espace des paramètres  $(Ra/Ra_c, N_\rho)$  pour la configuration avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.6$ . Comme pour la Fig. 1.24, on obtient plusieurs zones avec un régime sans dynamo pour les forçages trop faible, des dynamos dipolaires (cercles rouges) et des dynamos multipolaires (carrés bleus). Le phénomène de bistabilité est bien visible puisque chaque configuration dipolaire s'accompagne d'une solution multipolaire avec un champ plus faible (carrés dans les ronds). Pour  $N_\rho < 2$ , on obtient bien une fenêtre de solution dipolaire qui réduit avec l'augmentation de  $N_\rho$ . Cette réduction peut être comprise si l'on représente  $f_{dip}$  en fonction de  $Ro_{\mathcal{L}}$  (Fig. 1.25b). On constate alors que les solutions dipolaires sont limitées à  $Ro_{\mathcal{L}} < 0.1$  et ce pour les deux rapports de rayons considérés dans l'étude. Du fait de la réduction des échelles spatiales quand le contraste de densité augmente (au seuil, voir Fig. 1.8),  $Ro_{\mathcal{L}}$  atteint la valeur seuil de 0.1 à des niveaux de forçage  $Ra/Ra_c$  plus faible que pour un équivalent

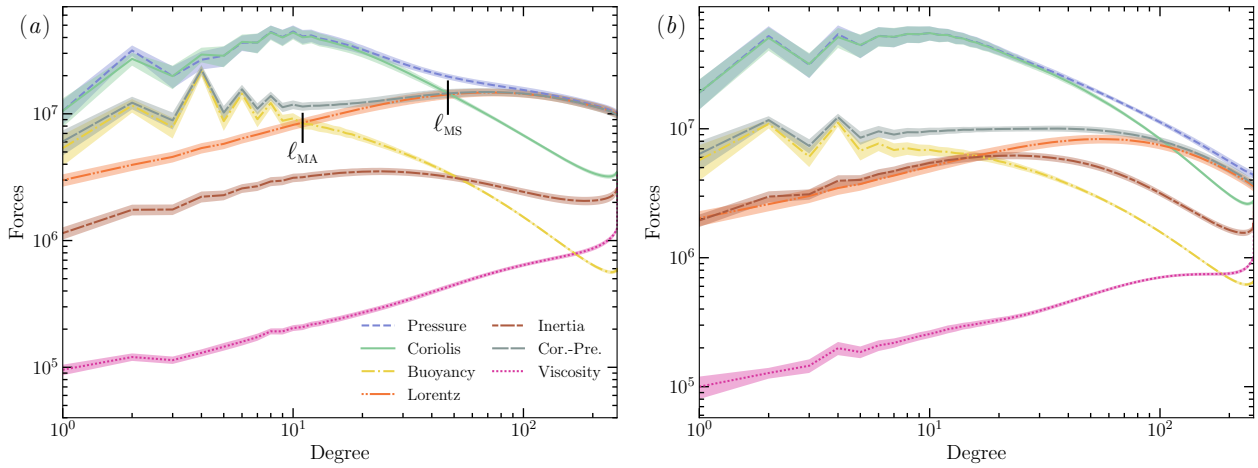


FIGURE 1.26 – Moyenne temporelle du spectre des forces (Eq. 1.79) entrant dans l'équation de Navier-Stokes (1.8) pour un modèle de géodynamo dipolaire (i) et un modèle multipolaire (ii) avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$ ,  $E = 10^{-5}$ ,  $Ra = 1.5 \times 10^9$ ,  $Pr = 1$  des conditions aux limites rigides avec température imposée aux deux bords. La simulation dipolaire a  $Pm = 1.44$ , la multipolaire  $Pm = 0.5$ . Les zones colorées correspondent à l'écart type temporel. Figure adaptée de simulations de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019).

Boussinesq.

Pour les modèles possédant un contraste en densité  $N_\rho \geq 2$ , seule la solution multipolaire persiste même à  $Ro_{\mathcal{L}} < 0.1$  : quelle que soit l'amplitude du champ initial, le seuil de la dynamo prend la forme d'un multipôle. Les solutions dipolaires visibles sur Fig. 1.8 ont toutes  $N_\rho < 2$ . Cette première étude avait néanmoins été menée à  $Pm$ ,  $Pr$  et  $E$  fixés. Les études ultérieures de SCHRINNER et al. (2014) et de RAYNAUD, PETITDEMANGE et DORMY (2015) ont montré qu'il était possible d'augmenter la fenêtre des solutions dipolaires jusqu'à  $N_\rho = 3$  en augmentant le nombre de Prandtl magnétique. En suivant une autre approche, YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN et REINERS (2015) ont obtenu des configurations multipolaires avec un très grand contraste de densité  $N_\rho = 5$  mais en utilisant un nombre de Prandtl élevé  $Pr = 10$  afin de minimiser les effets liés à l'inertie. Enfin, notons que pour les simulations avec  $N_\rho = 3$  montrées sur la Fig. 1.25a, le forçage convectif reste faible et la convection est donc principalement développée dans les régions externes, seule la région fluide proche de  $\tilde{r}_o$  a un  $Rm$  local suffisant pour entraîner un effet dynamo. Une augmentation supplémentaire de  $Ra/Ra_c$  pourrait éventuellement entraîner une dynamo plus distribuée en volume permettant de maintenir un dipôle (pour un exemple d'un tel effet, voir YADAV, CHRISTENSEN et al., 2015).

Même si l'influence jouée par  $N_\rho$  sur la géométrie du champ magnétique au seuil de la dynamo et les bifurcations éventuelles aux forçages plus élevés sont loin d'être tranchés à l'heure actuelle, notons que la solution semble montrer une dépendance notable à l'inertie et à l'amplitude de la force de Lorentz.

### Champ fort et solutions dipolaires

À ce stade néanmoins, la limite  $Ro_{\mathcal{L}} \approx 0.1$  mise en évidence par CHRISTENSEN et AUBERT (2006) semble toujours constituer une limite à ne pas dépasser pour conserver une dynamo dipolaire. L'étude récente menée par MENU, PETITDEMANGE et GALTIER (2020) en adoptant la configuration de géodynamo classique avec des conditions aux limites rigides vient néanmoins contredire ce résultat puisque ces auteurs obtiennent plusieurs dynamos dipolaires avec  $Ro_{\mathcal{L}} > 0.1$ . La différence principale avec l'étude d'origine provient principalement de l'espace des paramètres couverts : MENU, PETITDEMANGE et GALTIER (2020) ont pu étudier la transition dipôle-multipôle à des  $Pm$  nettement plus élevés que CHRISTENSEN et AUBERT (2006) (voir la Fig. 1.24). La conséquence de l'augmentation de  $Pm$  à  $E$  et  $Ra/Ra_c$  fixés est une augmentation de l'amplitude de la force de Lorentz. MENU, PETITDEMANGE et GALTIER (2020) suggèrent donc que les dynamos présentant un champ magnétique plus fort peuvent rester dipolaires plus longtemps et même franchir la limite de  $Ro_{\mathcal{L}} \approx 0.1$ . Ce résultat semble indiquer que le ratio pertinent des forces contrôlant la transition dipôle-multipôle serait Inertie/Lorentz plutôt que Inertie/Coriolis.

### Une mesure directe des forces pour interpréter les dynamos numériques

Les dynamos numériques sont fréquemment interprétées en termes de contributions entrant dans l'équation de vorticité (1.57). L'analyse en termes de vorticité peut néanmoins poser problème, puisque par construction l'équilibre géostrophique va être filtré. En conséquence, des amplitudes comparables des contributions de Coriolis et de Lorentz dans l'équation de vorticité nous renseignent mal sur la nature magnétostrophique ou géostrophique de la dynamo par exemple (à ce sujet, voir la discussion dans § 3.4 de CALKINS et al., 2015). Considérer le rotationnel des forces va

également entraîner un renforcement artificiel des petites échelles (voir par exemple, la Fig. 9 de SREENIVASAN et KAR, 2018).

Pour s'affranchir de ces différents problèmes, j'ai développé durant la thèse de Rakesh Yadav un outil de mesures des différentes contributions des forces dans MagIC. Outre la mesure des quantités intégrées en volume (YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, WOLK et al., 2016), on peut également construire une distribution spectrale des différentes contributions ou des niveaux d'annulation entre différents termes entrant dans l'équation de Navier-Stokes (1.8). La publication de AUBERT, GASTINE et FOURNIER (2017) contient une première utilisation de cette technologie (voir la Fig. 2 de cette étude) avec pour objectif de mettre en évidence les forces contrôlant les modèles numériques de la géodynamo. L'objectif de ce type de diagnostic est d'améliorer notre compréhension des forces contrôlant les dynamos numériques pour mieux appréhender leurs limites et leur applicabilité aux dynamos planétaires. Dans le cadre de la problématique de la transition dipôle/multipôle, on a pour objectif de déterminer exactement l'évolution des différentes forces lors de cette transition et de construire un paramètre critique la caractérisant.

La mise en œuvre de ces diagnostics de forces nécessite de décomposer en harmoniques sphériques vectoriels chaque vecteur  $\mathbf{f}$  représentant une force ou une différence entre plusieurs termes (par exemple Coriolis moins gradient de pression) :

$$\mathbf{f}(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\ell, m} \mathcal{Q}_{\ell m} Y_{\ell m} \mathbf{e}_r + S_{\ell m} r \nabla Y_{\ell m} + \mathcal{T}_{\ell m} \mathbf{r} \times \nabla Y_{\ell m}, \quad (1.78)$$

avec  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ . L'amplitude de chaque force est ensuite construite en utilisant l'identité de Parseval suivante

$$F^2 = \int_V \mathbf{f}^2 dV = 2 \int_{r_i}^{r_o} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=0}^{\ell} |\mathcal{Q}_{\ell m}|^2 + \ell(\ell+1) (|S_{\ell m}|^2 + |\mathcal{T}_{\ell m}|^2) r^2 dr,$$

où la notation primée sur la somme sur l'ordre  $m$  indique que le coefficient  $m = 0$  est multiplié par un demi. Pour construire une distribution spectrale des différentes forces, on définit alors

$$F^2 = \sum_{\ell} \mathcal{F}_{\ell}^2(r_i, r_o), \quad \mathcal{F}_{\ell}^2(r_b, r_t) = 2 \int_{r_b}^{r_t} \sum_{m=0}^{\ell} |\mathcal{Q}_{\ell m}|^2 + \ell(\ell+1) (|S_{\ell m}|^2 + |\mathcal{T}_{\ell m}|^2) r^2 dr, \quad (1.79)$$

avec  $r_b$  et  $r_t$  les bornes d'intégration en rayon que l'on peut changer si l'on souhaite par exemple exclure les couches limites ou encore étudier l'équilibre des forces uniquement sur une partie du volume fluide.

La figure 1.26 illustre deux distributions spectrales de forces pour un modèle de géodynamo dipolaire (à gauche) et un modèle multipolaire (à droite). À l'ordre 0, on observe un équilibre quasi-géostrophique (QG) entre force de Coriolis et gradient de pression aux grandes échelles (jusqu'à  $\ell = \ell_{\text{MS}} \approx 50$  pour le cas dipolaire et jusqu'à  $\ell \approx 100$  pour le cas multipolaire). Aux plus petites échelles, la pression magnétique vient s'équilibrer avec le gradient de pression. Pour la configuration dipolaire (Fig. 1.26a), à l'ordre 1, le reliquat entre force de Coriolis et gradient de pression (en gris) qu'on appelle *force de Coriolis agéostrophique*, s'équilibre avec la flottabilité aux grandes échelles ( $\ell \leq \ell_{\text{MA}}$ ) et avec la force de Lorentz aux petites échelles ( $\ell \geq \ell_{\text{MA}}$ ). L'inertie et la viscosité sont plus faibles d'environ un facteur cinq et de quasiment deux ordres de grandeur que cette équilibre d'ordre 1. Cette hiérarchie des forces constitue l'*équilibre QG-MAC*, QG à l'ordre 0 et MAC (*Magnetic, Archimedean, Coriolis*) à l'ordre 1, mis en évidence par DAVIDSON (2013). Le degré  $\ell_{\text{MA}}$  correspond à la longueur caractéristique à laquelle ces trois contributions sont d'amplitudes comparables. Le niveau de séparation entre les forces MAC et inertie et viscosité dépend bien sûr des paramètres choisis et un plus grand écart peut être atteint, notamment en diminuant  $Ra/Ra_c$  et en augmentant  $Pm$  (voir par exemple la Fig. 1 de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT, 2021). Côté multipôle (Fig. 1.26b), la différence principale réside dans l'abaissement de la force de Lorentz à toutes les échelles spatiales. L'écart entre l'équilibre QG à l'ordre 0 et l'ordre 1 est également plus marqué que dans la configuration dipolaire. Cela indique un plus haut niveau de géostrophie dans la configuration multipolaire. L'inertie atteint maintenant un niveau comparable à la force de Lorentz et à la force de flottabilité. Il n'est plus possible d'isoler un équilibre MAC comme dans l'autre configuration.

Pour étudier si il y a un lien entre ce changement dans la distribution des forces et la géométrie à grande échelle du champ magnétique, Théo Tassin a mené une étude systématique de simulations géodynamo dans la première partie de sa thèse (TASSIN, GASTINE et FOURNIER, 2021, publication jointe à ce document en § B.5). Une particularité notable de ses modèles réside dans leur nature double-diffusive, l'objectif étant d'étudier l'impact du fractionnement entre forçage d'origine chimique et thermique sur la géométrie du champ. Comme la très grande majorité des modèles de géodynamo actuels font l'hypothèse d'un forçage convectif provenant d'une seule source (soit chimique soit thermique), notre idée de départ était de vérifier si l'ajout d'une seconde source de flottabilité, également déstabilisante, avait un impact notable sur le champ magnétique. Pour ce faire nous avons considéré des configurations avec  $Pr = 0.3$  et  $Sc = 3$  et fait varier  $E \in [10^{-4}, 3 \times 10^{-5}, 10^{-5}]$  et les forçages  $Ra_T$  et  $Ra_{\xi}$  de manière à (i) changer le fractionnement de puissance  $P_T^{\%} = 100 \overline{\mathcal{P}_T} / (\overline{\mathcal{P}_T} + \overline{\mathcal{P}_{\xi}})$  et (ii) étudier le passage entre configurations dipolaires et multipolaires. Nous avons alors mis en évidence que la transition entre dipôles et multipôles s'effectuait à  $Ro_{\mathcal{L}}$  nettement plus faibles pour les forçages chimiques ( $P_T^{\%} = 0$ ,  $Ro_{\mathcal{L}} \approx 0.07$ ) que pour les forçages thermiques ( $P_T^{\%} = 100$ ,  $Ro_{\mathcal{L}} \approx 0.12$ ) (voir la Fig. 10 de TASSIN, GASTINE et FOURNIER, 2021).

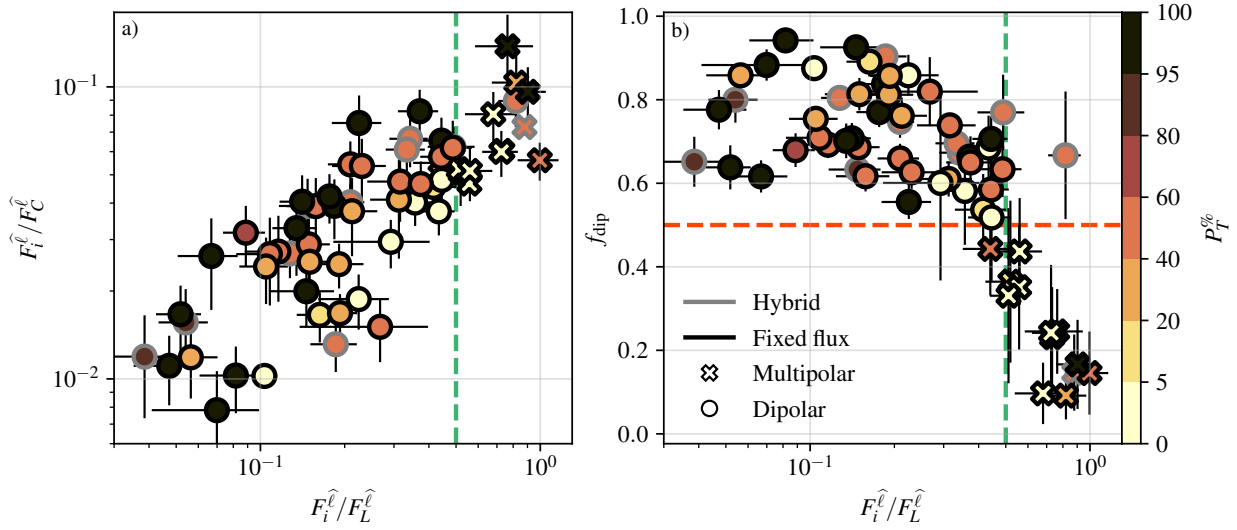


FIGURE 1.27 – (a) Amplitude des forces d’inertie sur les forces de Coriolis en fonction des forces d’inertie sur les forces de Lorentz au pic du spectre d’énergie  $\hat{\ell}$  (Eq. 1.39). (b) Fraction dipolaire en fonction du rapport entre forces d’inertie et forces de Lorentz à  $\hat{\ell}$ . Il s’agit de simulations de géodynamo double diffusive avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$ ,  $Pr = 0.3$ ,  $Sc = 3$ , des conditions aux limites rigides et deux jeux de conditions aux limites thermiques et chimiques (couleur grise ou noir du bord des symboles). La quantité  $P_T^{\%}$  correspond à la fraction relative de puissance thermique  $P_T^{\%}$ . Les lignes vertes correspondent à un ratio de 1 entre inertie et force de Lorentz à  $\hat{\ell}$ . La ligne rouge marque le seuil  $f_{dip} = 0.5$  adopté ici pour marquer la limite entre dipôles et multipôles. Les segments attachés à chaque symbole correspondent à la variabilité temporelle (écart type). Figure tirée de TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021).

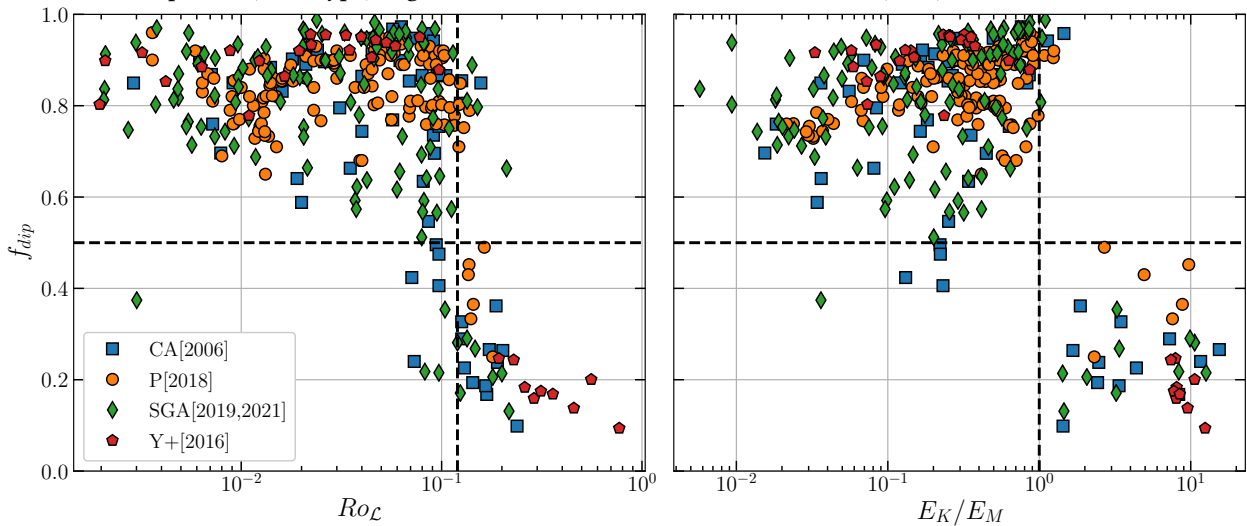


FIGURE 1.28 – Gauche : fraction dipolaire  $f_{dip}$  en fonction de  $Ro_{\mathcal{L}}$  pour les simulations de la figure 1.24 avec  $E \leq 10^{-4}$  et réalisées sans hypothèse de symétrie suivant la direction azimuthale. Droite :  $f_{dip}$  en fonction du ratio d’énergie  $\tilde{E}_K/\tilde{E}_M$ . Les lignes horizontales correspondent à la limite entre dipôles des multipôles. Les lignes verticales correspondent à  $Ro_{\mathcal{L}} = 0.12$  (à gauche) et  $\tilde{E}_K = \tilde{E}_M$  (à droite).



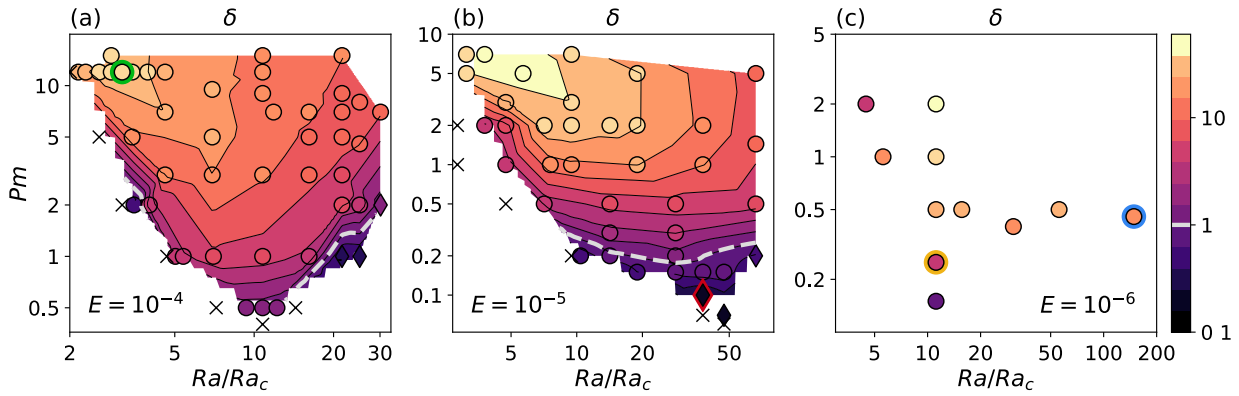


FIGURE 1.29 – Diagrammes de régimes montrant la quantité  $\delta$  (Eq. 1.80) dans des plans  $(Ra/Ra_c, Pm)$  pour trois nombres d’Ekman différents pour des modèles de géodynamo numériques avec  $Pr = 1$  et la configuration classique ( $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ , conditions rigides et température imposée aux deux bords). Les dynamos dipolaires sont matérialisées par des cercles, les multipôles par des losanges. Les niveaux de contour ont été obtenus par interpolation linéaire entre les points de mesure correspondants aux simulations. Les lignes en pointillé blanc correspondent à  $\delta = 1$ . Figure tirée de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019).

En étudiant la distribution spectrale des forces dans tous nos modèles numériques, nous avons montré que la transition dipôle-multipôle était beaucoup plus sensible au ratio inertie/Lorentz qu’au ratio inertie/Coriolis. La figure 1.27a illustre cet effet : en considérant le ratio de ces forces à l’échelle correspondant au pic du spectre  $\hat{\ell}$  (Eq. 1.39), on constate que tous les multipôles sont situés à droite d’une ligne verticale située à une valeur de  $\mathcal{F}_i^{\hat{\ell}}/\mathcal{F}_L^{\hat{\ell}} \approx 0.5$  mais qu’ils couvrent une assez grande gamme du ratio inertie/Coriolis comprise entre 0.04 et 0.1. La figure 1.27b montre ensuite  $f_{dip}$  en fonction du ratio inertie/Lorentz à  $\hat{\ell}$ . À l’exception d’une seule simulation dipolaire avec  $\mathcal{F}_i^{\hat{\ell}}/\mathcal{F}_L^{\hat{\ell}} > 0.5$  présentant une grande variabilité temporelle, le rapport inertie/Lorentz permet de bien séparer les dipôles des multipôles et ce indépendamment du fractionnement de puissance  $P_T^{\%}$  entre les sources thermiques et chimiques.

Puisque le ratio inertie/Lorentz n’est pas toujours évident à évaluer, on peut grossièrement tenter de l’approximer par le rapport des énergies  $\tilde{E}_K/\tilde{E}_M$ , en faisant l’hypothèse que les longueurs caractéristiques pour  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$  sont les mêmes. La figure 1.28 montre  $f_{dip}$  en fonction de  $Ro_{\mathcal{L}}$  (à gauche) et  $f_{dip}$  en fonction de  $\tilde{E}_K/\tilde{E}_M$  (droite) pour des modèles numériques de géodynamo dans la configuration classique avec  $Pr = 1$ , des conditions rigides avec température imposée aux deux bords (même configuration que pour Fig. 1.15). On constate que le critère d’origine  $Ro_{\mathcal{L}} \approx 0.12$  ne permet pas de séparer aussi nettement les configurations dipolaires et multipolaires que le rapport d’équipartition énergétique  $\tilde{E}_K/\tilde{E}_M = 1$ .

Ce résultat soulève plusieurs questions auxquelles il faudra chercher à répondre dans les années à venir :

- Est-ce que le ratio  $\tilde{E}_K/\tilde{E}_M$  permet également d’expliquer la transition dipôle/multipôle dans les modèles ayant un contraste en densité ? Est-ce que cela peut nous aider à comprendre les domaines de stabilité des dipôles pour  $N_{\rho} \geq 3$  ?
- Le champ géomagnétique ayant présenté de nombreuses inversions de sa polarité au cours de son histoire, on fait fréquemment l’hypothèse que la géodynamo devrait opérer dans un régime proche de la transition dipôle-multipôle (e.g. WICHT et TILGNER, 2010). C’est d’ailleurs un argument qui a plusieurs fois été mis en avant pour critiquer le contrôle par un Rossby local,  $Ro_{\mathcal{L}} \approx 0.1$  conduisant à  $\mathcal{L} \sim \mathcal{O}(10^2)$  m dans le noyau liquide (ORUBA et DORMY, 2014). Sachant que  $\tilde{E}_K/\tilde{E}_M \sim \mathcal{O}(10^{-4} - 10^{-3})$  pour le noyau liquide, la géodynamo opérerait là encore bien loin du régime de transition avec ce nouveau critère énergétique. Dès lors se pose la question de produire des dynamos convectives présentant des inversions loin de la transition dipôle-multipôle, une problématique scientifique amenée à progresser dans le cadre de l’ANR RevEarth (*Realistic modelling of Earth’s magnetic field reversals*) de Nathanaël Schaeffer.

## 1.5.2 Domaine QG-MAC et lois d’échelle

### Domaine QG-MAC

L’interprétation des forces contrôlant les dynamos numériques, et donc leur applicabilité aux problèmes astrophysiques, a donné lieu à de nombreuses controverses. En utilisant uniquement comme diagnostic une mesure de longueur basée sur l’échelle intégrale (Eq. 1.38), KING et BUFFETT (2013) suggèrent par exemple un contrôle de la viscosité sur l’ensemble des modèles géodynamo de CHRISTENSEN et AUBERT (2006), et donc un équilibre de force VAC (Eq. 1.65). Or comme on l’a vu sur les spectres de la figure 1.26 (voir aussi AUBERT, GASTINE et FOURNIER, 2017), les dynamos dipolaires présentent au premier ordre un équilibre QG-MAC avec une influence plus ou moins grande de la viscosité et de l’inertie.

Pour essayer de déterminer plus précisément les frontières et les bifurcations éventuelles entre différents régimes dynamo, Tobias Schwaiger a réalisé au cours de sa thèse une étude systématique des équilibres de forces dans les modèles géodynamo. Pour établir le niveau de séparation entre l'équilibre QG-MAC et les forces d'inertie et de Coriolis, il a construit le rapport suivant

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{\ell} \mathcal{F}_L^{\ell^2}}{\sum_{\ell} \max(\mathcal{F}_i^{\ell^2}, \mathcal{F}_v^{\ell^2})}}, \quad (1.80)$$

défini comme l'amplitude de la force de Lorentz sur le contributeur le plus important entre inertie et viscosité. Il s'agit en quelque sorte d'une mesure du niveau d'établissement d'un champ fort dans la dynamo numérique puisque plus  $\delta$  est grand, plus la force de Lorentz est grande devant la viscosité et/ou l'inertie. La figure 1.29 montre les diagrammes de régimes obtenus pour cette grandeur. On constate que  $\delta$  atteint sa valeur maximale pour des modèles numériques proches du seuil et à  $Pm$  élevé, un résultat déjà mis en évidence par DORMY (2016). *A contrario*, les valeurs les plus faibles de  $\delta$  sont observées proches du seuil de la dynamo et dans la région des dynamos multipolaires. La diminution du nombre d'Ekman va de pair avec l'augmentation de  $\delta$ . On constate également que le domaine QG-MAC, correspondant à  $\delta \gg 1$ , s'étend sur une plus grande gamme de paramètres avec la diminution du nombre d'Ekman. En considérant que  $\delta = 1$  marque la frontière des dynamos numériques contrôlées par un équilibre QG-MAC, on constate que la grande majorité des modèles sont gouvernés par cette équilibre. Enfin, notons qu'il n'y a pas de changements abrupts et qu'on observe plutôt un changement graduel de  $\delta$  à part pour le régime proche du seuil de la dynamo et à  $Pm$  élevé.

Ce résultat apparaît donc comme contradictoire avec la conclusion de KING et BUFFETT (2013) qui s'appuyait sur la loi d'échelle  $\bar{\ell} \sim E^{-1/3}$ . Leur figure 4 montre cependant que le jeu de simulations initial de CHRISTENSEN et AUBERT (2006) suivait très imparfaitement cette loi d'échelle visqueuse puisque la longueur variait encore d'un facteur 2 pour chaque nombre d'Ekman (voir aussi la Fig. 2a de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT, 2021) Pour faire avancer le débat, nous avons donc cherché à relier les longueurs que l'on peut construire à partir du spectre d'énergie ( $\bar{\ell}$  et  $\hat{\ell}$ ) à des points particuliers du spectre des forces. Les longueurs intéressantes que l'on peut extraire de ce dernier correspondent aux degrés pour lesquels au moins deux forces sont d'amplitude égales. Les croisements entre force de Lorentz et flottabilité et entre force de Lorentz et gradient de pression (Fig. 1.26 gauche) permettent par exemple de définir les degrés  $\ell_{MA}$  et  $\ell_{MS}$  ainsi que les longueurs associées  $\mathcal{L}_{MA}$  et  $\mathcal{L}_{MS}$ . Par la mesure systématique de ces croisements, nous avons pu montrer que  $\ell_{MA}$  était en bon accord avec le pic du spectre  $\hat{\ell}$  pour les modèles contrôlés par un équilibre QG-MAC (voir Fig. 2b de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT, 2021). Le degré  $\bar{\ell}$  est quant à lui bien supérieur à  $\hat{\ell}$  et ne correspond pas à une localisation particulière dans le spectre des forces. Il paraît donc plus approprié d'utiliser  $\hat{\ell}$  pour estimer une longueur caractéristique pour l'écoulement convectif.

La mise en évidence du régime QG-MAC sur une large gamme de paramètres est intéressante du point de vue de l'applicabilité des dynamos numériques aux dynamos planétaires. Bien que le niveau des forces d'inertie et de viscosité reste beaucoup trop élevé, l'équilibre des forces dominant est le bon et il est alors raisonnable de connecter la dynamique des dynamos numériques aux dynamos naturelles en dérivant des lois d'échelle.

### Lois d'échelle

Pour ce faire, réutilisons l'équation de vorticité (Eq. 1.57) et conservons les contributions des forces de Lorentz, d'Archimède et de Coriolis de l'équilibre QG-MAC

$$\frac{B^2}{\rho \mu_0 \mathcal{L}_{\perp}^2} \sim \frac{\alpha_T T g S^*}{c_p \mathcal{L}_{\perp}} \sim \frac{\Omega U}{\mathcal{L}_{\perp}}, \quad (1.81)$$

avec  $S^*$  la perturbation d'entropie caractéristique. En notant que la puissance convective par unité de masse peut également s'écrire  $\bar{\mathcal{P}}/\rho_m \sim \alpha_T T g S^* U/c_p$ , l'équilibre entre forces de Lorentz et flottabilité conduit à

$$\frac{B^2}{\rho_m \mu_0} \sim \frac{\bar{\mathcal{P}}}{\rho_m} \frac{\mathcal{L}_{\perp}}{U},$$

alors que le bilan de puissance  $\bar{\mathcal{P}} \sim \bar{\mathcal{D}}_v + \bar{\mathcal{D}}_{\lambda}$  conduit à

$$\frac{B^2}{\rho_m \mu_0} \sim f_{\text{ohm}} \frac{\mathcal{L}_{\text{ohm}}^2}{\lambda} \frac{\bar{\mathcal{P}}}{\rho_m},$$

Ces deux relations conduisent à  $f_{\text{ohm}} U/\mathcal{L}_{\perp} \sim \lambda/\mathcal{L}_{\text{ohm}}^2$ . Dans la limite  $f_{\text{ohm}} \rightarrow 1$  pertinente pour les dynamos planétaires, on obtient donc une proportionnalité entre la vorticité à la longueur  $\mathcal{L}_{\perp}$  et la vorticité à l'échelle de dissipation ohmique. Une fois adimensionnée, cette relation s'écrit alors

$$\frac{\mathcal{L}_{\perp}}{d} \sim f_{\text{ohm}} \left( \frac{\mathcal{L}_{\text{ohm}}}{d} \right)^2 Rm. \quad (1.82)$$

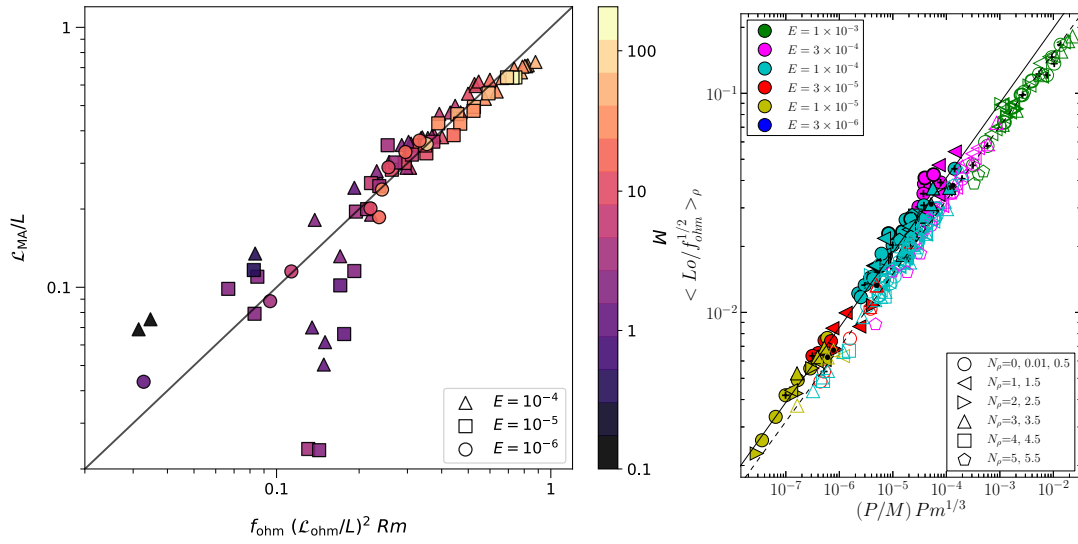


FIGURE 1.30 – Gauche : échelle convective (Eq. 1.39) en fonction de la loi d'échelle (1.82) pour les modèles Boussinesq géodynamo de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021). La couleur des symboles dépend de  $\mathcal{M} = \tilde{E}_M/\tilde{E}_K$  (figure tirée de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT, 2021). Droite : amplitude du champ magnétique (exprimée en  $Le/\sqrt{f_{\text{ohm}}}$ ,  $Le$  étant noté  $Lo$  ici) en fonction de la puissance convective par unité de masse (la notation  $P/M$  correspond ici à  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega$ ) et du nombre de Prandtl magnétique. Les symboles pleins correspondent à des configurations dipolaires, les symboles ouverts à des configurations multipolaires. Les symboles avec un + au milieu correspondent aux configurations ayant une conductivité électrique variable en fonction du rayon. La ligne en trait plein correspond à  $0.9 \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{1/3} Pm^{1/10}$ , la ligne en pointillé à  $0.7 \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{1/3} Pm^{1/10}$  (figure tirée de YADAV et al., 2013).

Pour dériver une loi d'échelle pour l'amplitude de la vitesse et du champ magnétique, il est nécessaire de compléter l'équilibre des forces (1.81) par une équation supplémentaire. La contrainte utilisée par DAVIDSON (2013) à partir de résultats d'expériences de convection en rotation consiste à faire l'hypothèse additionnelle que les vorticités à l'échelle  $\mathcal{L}_\perp$  et à l'échelle de dissipation  $\mathcal{L}_{\text{ohm}}$  ne dépendent pas du taux de rotation  $\Omega$ . La densité d'énergie magnétique est alors elle-même indépendante de  $\Omega$  (CHRISTENSEN, 2010). On fait alors l'hypothèse que la densité d'énergie magnétique ne dépend que de la puissance par unité de masse et de  $\mathcal{L}_\perp$ . On obtient alors une loi polynomiale de la forme

$$\frac{B^2}{\rho_m \mu_0} \sim f_{\text{ohm}} \left( \frac{\bar{\mathcal{P}}}{\rho_m} \right)^{2/3} \mathcal{L}_\perp^{2/3}. \quad (1.83)$$

Cette hypothèse est vraisemblablement plus discutable que l'équilibre MAC conduisant à la relation Eq. (1.82)<sup>7</sup>. Utiliser Eq. (1.83) avec l'équilibre des forces Eq. (1.81) conduit aux relations d'échelle suivantes dérivées par DAVIDSON (2013) et WICHT et SANCHEZ (2019)

$$Ro = \frac{U}{\Omega d} \sim f_{\text{ohm}}^{-1/3} \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{4/9}, \quad \frac{Le}{\sqrt{f_{\text{ohm}}}} \sim \frac{B}{\sqrt{\rho_m \mu_0} \Omega d} \sim \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{1/3}, \quad \frac{\mathcal{L}_\perp}{d} \sim \tilde{\mathcal{P}}_\Omega^{1/9} f_{\text{ohm}}^{2/3}, \quad (1.84)$$

en réutilisant la puissance par unité de masse adimensionnée avec le temps de rotation  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega = \bar{\mathcal{P}}/\Omega^3 d^2 \rho_m$  utilisée dans § 1.4.2. On sait depuis l'étude de CHRISTENSEN et AUBERT (2006) que ces lois d'échelle décrivent relativement bien la dépendance à  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega$  mesurée pour  $Le$  et  $Ro$  pour les modèles de géodynamo Boussinesq. La loi d'échelle pour la longueur est en général plus délicate à tester du fait des difficultés liées à la définition de  $\mathcal{L}$  (Eq. 1.38) et de la faible variation des longueurs dans les dynamos numériques. Pour une valeur de puissance donnée, on observe également une dispersion importante de l'ordre d'un facteur deux autour de la valeur moyenne pour  $Ro$  et  $Le/\sqrt{f_{\text{ohm}}}$ . L'analyse statistique menée par STELZER et JACKSON (2013) suggère que cette dispersion peut être réduite en incluant une dépendance additionnelle à  $Pm$ .

La figure 1.30 (gauche) montre la relation d'échelle (1.82) pour des simulations numériques de la géodynamo de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021). Rappelons que cette loi d'échelle nécessite uniquement l'hypothèse QG-MAC et n'a pas besoin de l'hypothèse additionnelle que  $E_M$  est indépendant de  $\Omega$ . La couleur des symboles change en fonction de la valeur du rapport  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K$ . Comme on l'a vu, ce rapport donne en général une estimation raisonnable du rapport des forces de Lorentz et d'inertie. Autrement dit, plus  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K$  est grand et plus l'équilibre QG-MAC a une séparation importante avec inertie et viscosité. Sur la figure 1.30 (gauche), on observe un bon accord avec la loi d'échelle QG-MAC théorique pour les dynamos avec  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K > 10$ .

7. L'exposant sur  $f_{\text{ohm}}$  peut valoir 2/3 (voir Eq. 9 de DAVIDSON, 2013). On reste ici sur la forme d'origine de CHRISTENSEN (2010).

L'immense majorité des dynamos numériques ayant été utilisées pour tester ces relations d'échelle étant Boussinesq, on a cherché au cours de la thèse de Rakesh Yadav à examiner l'impact d'un contraste en densité. Pour ce faire, nous avons assemblé un ensemble de plus de 250 dynamos numériques avec différentes valeurs de  $N_\rho$ ,  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o$  et  $\tilde{g}$  en plus des variations habituelles de  $E$ ,  $Pm$  et  $Ra$  (voir la Tab. 1 de YADAV et al., 2013). Nous avons alors montré que ces différentes configurations suivaient des lois d'échelle identiques à partir du moment où l'on considérait des quantités normalisées par unité de masse, en accord avec la théorie (1.84). La figure 1.30 (droite) montre  $Le/\sqrt{f_{ohm}}$  en fonction de la puissance par unité de masse et du nombre de Prandtl magnétique. Un fit d'ensemble sur les dynamos dipolaires ou multipolaires révèle un bon accord avec la dépendance théorique  $\tilde{P}_\Omega^{1/3}$  et donne une dépendance additionnelle à  $Pm$ . La dispersion autour de ce comportement moyen reste néanmoins importante surtout pour les configurations dipolaires.

L'influence de la densité et du changement de géométrie de la coquille sphérique est donc bien comprise et on peut donc faire l'hypothèse raisonnable que la loi d'échelle en  $E_M/\rho_m \sim (\overline{P}/\rho_m)^{2/3} \mathcal{L}_f^{2/3}$  fournit une bonne prédiction de l'ordre de grandeur du champ magnétique des dynamos convectives en rotation rapide. CHRISTENSEN, HOLZWARTH et REINERS (2009) ont par exemple montré que cette loi d'échelle permettait d'estimer correctement l'amplitude moyenne de la géodynamo, du champ Jovien mais également d'étoiles de faible masse en rotation rapide.

Pour résumer, la théorie QG-MAC de DAVIDSON (2013) fournit une description assez satisfaisante de l'amplitude moyenne du champ magnétique et de la vitesse des dynamos convectives. Pour autant, comme on le verra dans le § 2.3.1, une analyse plus poussée des résultats numériques suggèrent des écarts encore importants à la théorie qu'il sera nécessaire de mieux appréhender si l'on souhaite faire progresser ce sujet dans les années à venir.

### 1.5.3 Influence d'une couche stratifiée stable sur la géodynamo

La présence éventuelle de zones stratifiées stables peut avoir un impact important sur l'amplitude et la géométrie du champ magnétique. Pour la géodynamo, la présence d'une telle couche est loin d'être établie au vu des incertitudes sur les propriétés de transport. En se plaçant dans l'hypothèse d'une conductivité thermique dans la fourchette haute ( $> 100$  W/m/K), une couche stable localisée sous la CMB pourrait atteindre plusieurs centaines de kilomètres d'épaisseur (e.g. HELFRICH et KANESHIMA, 2010). Les modèles numériques de la géodynamo peuvent alors être utilisés pour mieux contraindre la plausibilité de la présence d'une telle couche notamment en terme de morphologie du champ magnétique à la CMB.

Pour ce faire, j'ai mené une étude paramétrique de modèles numériques de la géodynamo incluant un état de référence possédant une région fluide sub-adiabatique sous la CMB. J'ai ensuite fait varier l'épaisseur de la couche stratifiée  $\mathcal{H}_s$  et l'amplitude de la stratification  $N/\Omega$ . J'ai pu montrer que la loi théorique concernant la distance de pénétration  $\mathcal{D}_p$  de structures convectives en rotation dans une couche stable sans champ magnétique

$$\mathcal{D}_p \sim \left(\frac{N}{\Omega}\right)^{-1} \mathcal{L}, \quad (1.85)$$

mise en évidence par TAKEHIRO et LISTER (2001) dans le cadre d'une étude linéaire continuait de bien décrire l'évolution de  $\mathcal{D}_p$  même dans des dynamos numériques non linéaires avec un champ fort avec  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K > 1$  (voir Fig. 2 de GASTINE, AUBERT et FOURNIER, 2020).

Une couche stratifiée stable a un impact notable sur la géométrie du champ magnétique. Dans la limite d'une très forte stratification  $N/\Omega \gg 1$ , on peut approximer, de manière assez simpliste, la couche fluide par une région solide conductrice d'électricité de même épaisseur<sup>8</sup>. Dans cette zone, le champ magnétique est atténué par effet de peau magnétique d'une amplitude  $\exp(-\mathcal{H}_s/\delta)$ , avec  $\delta$  l'épaisseur de peau magnétique définie par  $\delta \sim (\lambda\mathcal{L}/U)^{1/2}$ . Plus les structures convectives ont une échelle horizontale  $\mathcal{L}$  faibles et plus  $\delta$  diminue. En pratique cela signifie que les structures de petite échelle du champ magnétiques seront plus fortement atténuées que les composantes de grande échelle. On obtiendra donc par exemple un champ plus dipolaire au sommet d'une couche stratifiée stable qu'à sa base.

Est-il alors possible d'obtenir une configuration présentant par exemple des fortes concentrations de champ magnétique ou même des structures de polarité inversées comme observées sur le champ terrestre (voir Fig. 1.2) avec une couche sub-adiabatique sous la CMB? Pour répondre à cette question, nous avons mesuré l'accord morphologique entre le champ magnétique à la CMB produit par les dynamos numériques avec le champ terrestre. Nous avons utilisé les critères introduits par CHRISTENSEN, AUBERT et HULOT (2010) et assemblés à partir de mesures du champ magnétique à la CMB tronquées au degré  $\ell = 8$  : la dipolarité du champ, son niveau de symétrie par rapport à l'équateur, son degré d'axisymétrie et une quantification de la concentration du flux magnétique. La mesure de ces quatre quantités et leur comparaison avec les modèles de champ terrestre conduit à la définition d'un coefficient d'accord morphologique  $\chi^2$ . Pour  $\chi^2 < 2$ , l'accord morphologique entre dynamo numérique et champ terrestre à la CMB est qualifié d'excellent, pour  $2 \geq \chi^2 < 4$ , l'accord est moyen, puis marginal pour  $4 \geq \chi^2 < 8$  et enfin non conforme pour  $\chi^2 \geq 8$  (terminologie issue de CHRISTENSEN, AUBERT et HULOT, 2010).

Pour caractériser l'impact de la couche stratifiée stable sur  $\chi^2$ , nous avons montré que la longueur pertinente à considérer n'était pas  $\mathcal{H}_s$  mais plutôt  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  l'épaisseur effective de la couche une fois la distance de pénétration convective soustraite soit,  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_s - \mathcal{D}_p$ . Les meilleurs valeurs de  $\chi^2$  sont alors atteintes quand  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0$  (voir la Fig. 7 de GASTINE,

8. Cette hypothèse est raisonnable pour les mouvements poléïdaux, beaucoup plus discutable pour les mouvements toroïdaux.

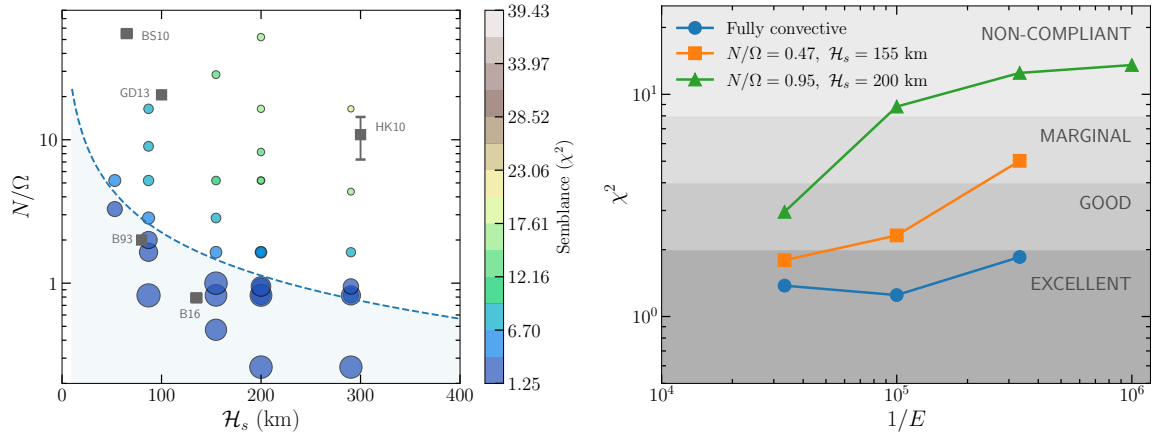


FIGURE 1.31 – Gauche : ressemblance morphologique à la CMB entre les dynamos numériques et le champ géodynamo quantifié par la quantité  $\chi^2$  définie par CHRISTENSEN, AUBERT et HULOT (2010) dans un plan  $(\mathcal{H}_s, N/\Omega)$ . Les modèles numériques ont tous  $E = 3 \times 10^{-5}$  et  $Ra = 3 \times 10^8$ . La taille décroît de manière inversement proportionnelle à la valeur de  $\chi^2$ . Les carrés gris correspondent à différentes estimations de  $\mathcal{H}_s$  et  $N/\Omega$  proposées pour la géodynamo : B93 (BRAGINSKY, 1993); BS10 (BUFFETT et SEAGLE, 2010); HK10 (HELFRICH et KANESHIMA, 2010); GD13 (GUBBINS et DAVIES, 2013) et B16 (BUFFETT, KNEZEK et HOLME, 2016). La ligne en pointillé correspond au critère (1.86). Droite : évolution du paramètre  $\chi^2$  en fonction du nombre d’Ekman pour trois configurations : une entièrement convective (ronds) et deux avec une couche stratifiée stable (carrés et triangles). Figures tirées de GASTINE, AUBERT et FOURNIER (2020).

AUBERT et FOURNIER, 2020). Autrement dit le critère pour obtenir un bon accord morphologique avec la géodynamo s’écrit

$$\mathcal{H}_s \leq D_p, \quad \mathcal{H}_s \leq \left(\frac{N}{\Omega}\right)^{-1} \mathcal{L}. \quad (1.86)$$

La figure 1.31 (gauche) illustre les variations de  $\chi^2$  pour un ensemble de modèles numériques avec une valeur de  $E$  et de  $Ra$  fixée et pour des valeurs de  $\mathcal{H}_s$  et  $N/\Omega$  variables. Le critère (1.86) est matérialisé par la ligne en pointillé sur cette figure. On constate que tous les modèles présentant un excellent accord morphologique avec la géodynamo (grands disques bleu foncé) sont bien localisés en dessous de cette limite. Cette contrainte est déjà assez stricte puisque les configurations avec  $N/\Omega \sim 10$  et  $\mathcal{H}_s \sim 100$  km suggérées dans certaines études (HELFRICH et KANESHIMA, 2010; BUFFETT et SEAGLE, 2010; GUBBINS et DAVIES, 2013) conduisent systématiquement à des valeurs de  $\chi^2$  trop élevées. Les scénarios avec une couche stable présentant un niveau de stratification plus modeste  $N/\Omega \sim 1$  (BRAGINSKY, 1993; BUFFETT, KNEZEK et HOLME, 2016) sont en revanche localisées dans le domaine acceptable.

La figure 1.31 (gauche) considère uniquement des modèles à  $E$  et  $Ra$  fixés. Puisque la limite (1.86) dépend directement de la longueur caractéristique de l’écoulement convectif  $\mathcal{L}$ , on peut s’attendre à des changements significatifs au fur et à mesure que le nombre d’Ekman décroît. À l’interface entre région convective et zone stable, nos simulations indiquent que l’écoulement convectif suit une loi  $\mathcal{L}/d \sim E^{1/3}$  entre  $E = 10^{-3}$  et  $E = 10^{-6}$ . Cette loi d’échelle reflète la faible supercriticalité locale de la convection dans la partie supérieure de la région convective du fait de la faible puissance disponible (changement de signe de  $\tilde{P}(\tilde{r})$ ). Une décroissance de  $\mathcal{L}$  entraîne une réduction de la distance de pénétration  $D_p$  et donc une augmentation de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  qui a son tour va de pair avec une atténuation plus marquée du champ magnétique par effet de peau. La figure 1.31 (droite) montre l’évolution de  $\chi^2$  en fonction du nombre d’Ekman pour une configuration entièrement convective et deux présentant une couche stratifiée stable. Si les configurations entièrement convectives présentent un excellent accord morphologique avec le champ terrestre pour la plage d’Ekman considérée, on constate une dégradation graduelle de  $\chi^2$  avec  $E$  dès que l’on inclue une couche stratifiée stable. Même la configuration avec  $\mathcal{H}_s = 155$  km et  $N/\Omega = 0.47$  possède déjà  $\chi^2 > 4$  à  $E = 3 \times 10^{-6}$ .

Autrement dit, au cours de cette étude, nous n’avons pas réussi à produire de modèle de géodynamo numérique présentant un accord raisonnable avec le champ terrestre aux plus bas nombres d’Ekman considérés dès lors qu’une couche stratifiée stable était incluse. Les expériences de dynamo numérique semblent clairement favoriser un scénario entièrement convectif pour le noyau liquide terrestre actuel (également favorisé par IRVING, COTTAAR et LEKIĆ, 2018). Puisque les modèles opèrent dans un régime éloignés des paramètres de la géodynamo, un changement de comportement n’est pas à exclure. Le critère (1.86) pourrait éventuellement être compatible avec la présence d’une couche stable si la longueur de pénétration augmentait et donc si l’écoulement convectif à l’interface suivait une longueur caractéristique significativement plus grande que  $E^{1/3} d$  par exemple. Puisque la convection alimentant la géodynamo est d’origine thermo-solutale, on pourrait également imaginer une couche sous la CMB stable thermiquement mais instable pour les perturbations de composition. L’instabilité des doigts de sel se développant dans cette région pourrait vraisemblablement modifier les conclusions de notre étude (voir § 2.3.2 pour les perspectives).

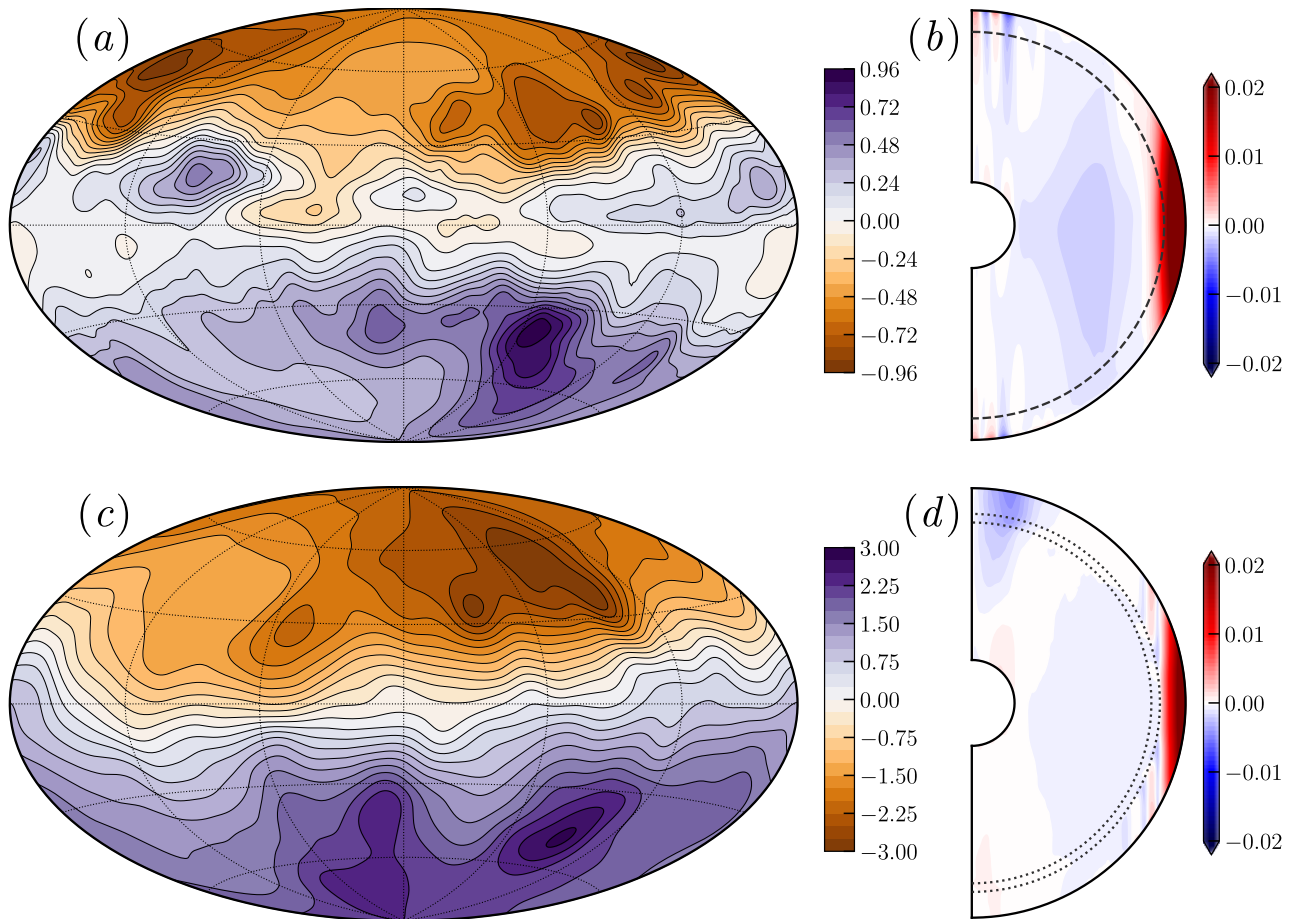


FIGURE 1.32 – (a) et (c) : instantanés de la composante radiale du champ magnétique à la surface pour deux modèles numériques de Jupiter. Le champ est exprimé en nombre d’Elsasser. (b) et (d) : moyennes temporelles des vents zonaux dans un plan méridien pour deux modèles numériques de Jupiter. Les vents zonaux sont exprimés en nombre de Rossby défini sur le rayon externe  $[u_\phi]_\phi/\Omega r_o$ . La ligne en tirets sur (b) correspond au rayon  $\tilde{r}_m$  qui sépare la région métallique de la région ayant une conductivité électrique qui décroît exponentiellement. Les lignes en pointillé sur (d) correspondent aux limites de la zone stratifiée stable. Comme l’amplitude du jet équatorial est nettement plus grande, les niveaux des contours des profils de vents zonaux ont été saturés pour faire ressortir les structures secondaires. Les figures (a) et (b) ont été adaptées de GASTINE, WICHT, DUARTE et al. (2014), les figures (c) et (d) de GASTINE et WICHT (2021).

### 1.5.4 Des modèles intégrés pour Jupiter

#### Influence d’une conductivité électrique variable : vers des modèles intégrés

Un élément clé constitutif de l’intérieur des planètes géantes que l’on a omis jusqu’à présent dans nos modèles est la variabilité de la conductivité électrique en fonction du rayon. Pour l’instant nous avons étudié de manière découplée la formation de vents zonaux dans des régions sans champ magnétique, ou des modèles de dynamo avec ou sans contraste de densité mais présentant une conductivité électrique uniforme. En réalité, les modèles de structure interne de Jupiter suggèrent plutôt une variation continue de la conductivité avec une augmentation exponentielle d’environ 9 ordres de grandeur entre  $0.98 R_J$  et  $0.9 R_J$  puis une augmentation plus lente quasi-linéaire dans la région métallique (voir la Fig. 8 de FRENCH et al., 2012). Dès lors, on s’attend plutôt à une dynamique couplée avec des vents zonaux pouvant rétroagir sur le champ magnétique quand le niveau de conductivité électrique est suffisant. Les régions d’« interface » autour de  $0.9 - 0.95 R_J$  pourraient être particulièrement cruciales puisque la conductivité électrique et la vitesse des vents zonaux pourraient être suffisantes pour générer un champ magnétique toroïdal par effet  $\Omega$  (voir Fig. 1.3).

Pour mieux comprendre cet effet, nous avons étudié au cours de la thèse de Lúcia Duarte l’influence d’une conductivité électrique variable sur les dynamos anélastiques. Pour ce faire, nous avons utilisé une fonction analytique introduite par GÓMEZ-PÉREZ, HEIMPEL et WICHT (2010) qui décrit le profil de conductivité électrique (voir Eq. 1.31). Nous avons alors mené une étude paramétrique en faisant varier le contraste de densité  $N_\rho$  et différents paramètres contrôlant le profil de conductivité comme le rayon de métallisation  $\tilde{r}_m$ . L’étude de DUARTE, GASTINE et WICHT (2013) a permis de mettre en évidence trois régimes dynamo : une configuration dipolaire stable, une configuration multipolaire stable et enfin une configuration présentant une très grande variabilité temporelle avec des alternances entre géométries dipolaire et multipolaire (voir la Fig. 3 de DUARTE, GASTINE et WICHT, 2013). On assiste en fait à une compétition entre

amplitude de la force de Lorentz dans la région métallique et amplitude des vents zonaux dans l'enveloppe moléculaire.

Quand les forces de Lorentz sont importantes, la rotation différentielle est réduite et la configuration dipolaire peut rester stable, en revanche des vents zonaux importants conduisent à une perte du dipôle et à une modulation temporelle de la solution. Un résultat important de cette étude est l'obtention de dynamos dipolaires stables avec un contraste en densité important ( $N_p = 5$ ) et une conductivité électrique décroissant exponentiellement sur les derniers 10% en rayon dans la limite où les forces d'inertie ne sont pas trop importantes (on présentait alors une limite à  $Ro_{\mathcal{L}} < 0.05$ ). En bout de ligne, le rapport entre  $\tilde{E}_M$  et  $\tilde{E}_K$  a probablement encore une fois un rôle clé dans la délimitation des régimes dynamo dans cette configuration avec conductivité électrique variable. On peut donc s'attendre à ce qu'une augmentation de  $Pm$  et/ou une diminution de  $E$  aille de pair avec une augmentation de la plage de stabilité des configurations dipolaires (JONES, 2014; SCHRINNER et al., 2014; RAYNAUD, PETITDEMANGE et DORMY, 2015). Ceci étant dit, les tentatives récentes dans cette direction (DIETRICH et JONES, 2018; DUARTE, WICHT et GASTINE, 2018) ont montré que la stabilité du dipôle était très sensible aux variations des propriétés de transport mais également à la nature du forçage convectif (chauffage par les bords ou chauffage interne). Il reste encore du chemin avant de comprendre les mécanismes contrôlant la stabilité du dipôle dans les modèles anélastiques.

Le travail de Lúcia Duarte a néanmoins constitué la première étape vers des modèles intégrés permettant de générer un champ magnétique dipolaire dans la région métallique et un vent zonal prograde dans les régions équatoriales de l'enveloppe moléculaire, deux caractéristiques observées sur Jupiter et Saturne. À la suite de ce travail, j'ai développé un modèle ayant un état de référence plus « réaliste », plus proche des modèles de structure interne des planètes géantes. À l'inverse de l'utilisation d'une fonction analytique polytropique qui permettait de changer facilement les profils de densité et de température, j'ai considéré une régression polynomiale du modèle *ab initio* de FRENCH et al. (2012).

En considérant un profil de densité plus proche de la structure de Jupiter, on espère notamment obtenir des variations plus réalistes de l'amplitude de la vitesse et du champ magnétique en fonction de la profondeur et d'ainsi pouvoir confronter nos modèles de la dynamo jovienne aux données observationnelles fournies par Juno. La partie supérieure de la figure 1.32 montre le champ de surface d'une telle simulation ainsi que les vents zonaux obtenus. Cette simulation est intéressante puisque la structure du champ magnétique de surface présente un certain nombre de traits communs avec le champ de surface de Jupiter (Fig. 1.1). Outre l'obtention d'une configuration dipolaire, on observe par exemple la formation aux basses latitudes de structures allongées suivant la direction azimuthale, une caractéristique particulière du champ jovien (Fig. 1.2). Dans une publication de 2014 (GASTINE, WICHT, DUARTE et al., 2014), nous avons expliqué cette configuration par un effet dynamo possédant deux contributions (pour une étude plus systématique, voir aussi DUARTE, WICHT et GASTINE, 2018) : une dynamo distribuée dans tout le volume de la partie métallique responsable de la génération du champ dipolaire à grande échelle et une dynamo d'interface liée au cisaillement du sommet de la région métallique par le vent zonal aux basses latitudes. Cette dernière contribution conduit à la formation de bandes de champ toroïdal axisymétrique en profondeur, d'une manière analogue à ce qui est observé dans certains modèles numériques de la dynamo solaire (e.g. BROWN et al., 2010). À la surface, cette contribution entraîne une variabilité temporelle importante du champ poloïdal aux basses latitudes. Pour autant, est-ce le mécanisme physique responsable des particularités du champ jovien ? Et si oui, quelles contraintes peut-on en déduire sur la profondeur des vents zonaux ?

La comparaison des mesures magnétiques de Juno avec celles de Voyager par MOORE et al. (2019) fournit une borne supérieure à l'amplitude des vents zonaux de  $10^{-2}$  m/s à une profondeur de  $0.94 R_J$ . Le paramètre pertinent permettant de définir le rayon au-delà duquel les vents zonaux vont avoir un impact sur l'induction du champ magnétique est  $Rm_z$  (Eq. 1.6). Tant que  $Rm_z \ll 1$ , le vent zonal ne modifie pas le champ et la transition  $Rm_z \sim 1$  correspondrait à  $0.96 R_J$  environ (WICHT et al., 2019; WICHT, GASTINE et DUARTE, 2019), une valeur beaucoup plus proche de la surface que dans la simulation illustrée dans le haut de la figure 1.32. Cette différence s'explique principalement par la valeur plutôt modeste du nombre de Reynolds magnétique de ce modèle numérique  $Rm \sim 10^2$  en comparaison de  $Rm \sim 10^6$  attendu dans Jupiter. En conséquence, une partie des régions fluides entre disons  $0.9 R_J$  et  $0.95 R_J$ , pour lesquelles la conductivité électrique est suffisante pour entraîner une induction possèdent  $Rm < 1$  dans le modèle numérique. Un autre problème majeur de ce modèle concerne la structure des vents zonaux. On observe la formation d'un jet équatorial prograde (Fig. 1.32b) dont la taille est directement liée au rayon correspondant à  $Rm_z \sim 1$ , définissant une sorte de « cylindre tangent magnétique » (WICHT et al., 2019). Ce dernier présente une structure géostrophique et réside entièrement dans la région moléculaire. En revanche on n'observe aucune génération de vents zonaux secondaires présentant une direction alternée comme sur Jupiter.

Pour résumer, bien que ce modèle présente un excellent accord morphologique avec le champ observé et qu'il fournisse un scénario d'explication à la structure particulière du champ jovien aux basses latitudes, il possède un certain nombre de faiblesses intrinsèques ( $Rm$  faible, pas de jets multiples) qui rendent sa confrontation à l'observable discutable (pour une revue, voir WICHT et GASTINE, 2020).

### Immiscibilité de l'hélium : influence d'une couche stratifiée stable intermédiaire

Comme on l'a vu, les contraintes provenant des données gravimétriques et des estimations de la variation séculaire du champ magnétique semblent converger vers une profondeur des vents zonaux autour de  $0.94-0.97 R_J$ . À ce stade pourtant tous les modèles numériques réalisés incorporant une conductivité électrique variable aboutissent systématiquement à une configuration très similaire à celle de la Fig. 1.32b pour ce qui concerne les vents zonaux ; à savoir un jet équatorial

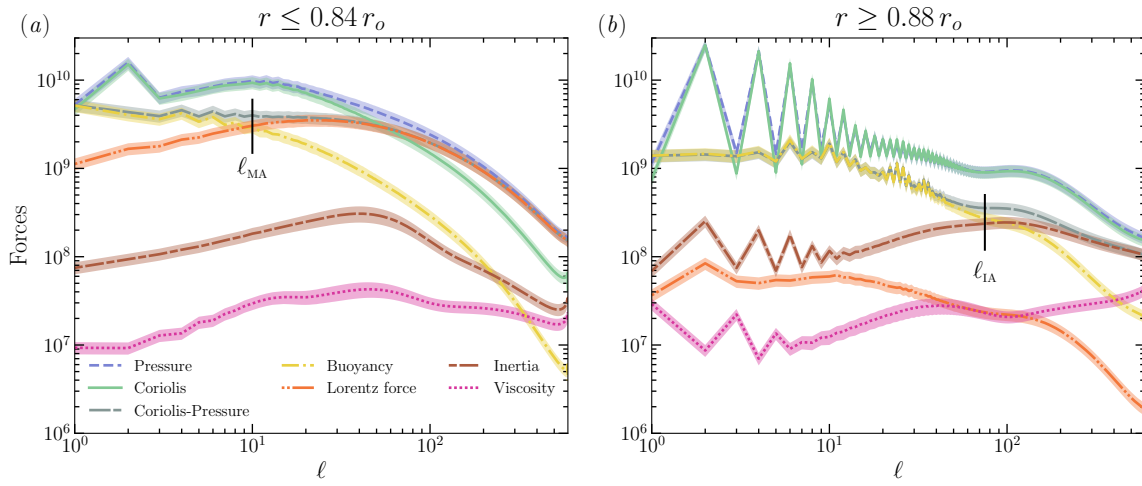


FIGURE 1.33 – Moyenne temporelle du spectre des forces (Eq. 1.79) entrant dans l'équation de Navier-Stokes (1.8) dans la région métallique (a) et dans l'enveloppe moléculaire (b) pour le modèle de la dynamo jovienne avec une couche stratifiée stable intermédiaire de GASTINE et WICHT (2021). Les zones colorées correspondent à l'écart type temporel (figure adaptée de GASTINE et WICHT, 2021).

prograde dont la taille dépend du profil de conductivité mais aucun jet secondaire (outre nos travaux, citons par exemple GÓMEZ-PÉREZ, HEIMPEL et WICHT, 2010; HEIMPEL et GÓMEZ PÉREZ, 2011; JONES, 2014; DIETRICH et JONES, 2018). Dans la section 1.4.3 nous avons montré que former des jets zonaux multiples nécessitait d'opérer dans un régime de turbulence quasi-géostrophique à grand Reynolds et bas Rossby, une condition sans doute pas atteinte dans la plupart de ces modèles intégrés plus coûteux numériquement.

Dans tous les modèles intégrés entièrement convectifs, les forces de Lorentz dans la région métallique suppriment les mouvements zonaux le long de l'axe de rotation et empêchent la formation de jets à l'intérieur du cylindre tangent magnétique. Un autre mécanisme physique serait éventuellement nécessaire pour obtenir des jets multiples de directions alternées confinés dans la région moléculaire. Un candidat sérieux semble être une région stratifiée stable. En effet, plusieurs modèles de structure interne de Jupiter suggèrent la présence d'une zone d'immiscibilité de l'hélium avec l'hydrogène métallique pour des pressions autour de 100–500 GPa (voir Fig. 1.3 et WAHL et al., 2017; DEBRAS et CHABRIER, 2019). La précipitation de l'hélium sous forme de gouttelettes conduirait alors à un enrichissement de la région métallique en hélium et un appauvrissement dans l'enveloppe moléculaire. Suivant l'amplitude de ce gradient de composition, une zone de semi-convection ou bien à une zone stratifiée stable serait formée. Pour étudier l'effet qu'une couche stable située au bas de l'enveloppe moléculaire pourrait avoir sur la localisation des jets zonaux, CHRISTENSEN, WICHT et DIETRICH (2020) ont réalisé des calculs 2-D axisymétriques avec un champ magnétique dipolaire imposé et des jets forcés en volume. Ils ont alors montré que la configuration avec champ imposé et sans couche stable conduisait à une réduction significative de l'amplitude des jets suivant  $z$  (à l'exception du jet équatorial), un résultat finalement assez proche de ce que l'on observe dans les calculs 3-D. En revanche l'inclusion d'une zone stable permet de casser la géostrophie des jets au sommet de la région stable et d'ainsi confiner les jets à la région convective externe (voir leur Fig. 2).

Pour tester si ce mécanisme continuait à fonctionner en présence d'un champ magnétique maintenu par effet dynamo, j'ai donc développé un modèle 3-D de la dynamo jovienne incorporant une couche stratifiée stable située entre deux zones convectives. En suivant le modèle de structure interne de MILITZER et al. (2016), j'ai localisée la couche stable entre  $0.84 R_J$  et  $0.88 R_J$  avec un fort niveau de stratification  $N/\Omega \approx 10$ . Une illustration du champ magnétique de surface et des vents zonaux adaptée de notre publication (GASTINE et WICHT, 2021) est montrée dans le bas de la figure 1.32. En diminuant le nombre d'Ekman par rapport à nos travaux précédents ( $E = 10^{-6}$  ici), nous avons pu produire une dynamo numérique présentant un équilibre QG-MAC dans la région métallique avec  $\tilde{E}_M \sim 10\tilde{E}_K$  (Fig. 1.33a), un équilibre de force finalement assez proche de ce que l'on observe dans les dynamos Boussinesq dipolaires classiques (voir Fig. 1.26a). Dans la partie moléculaire, les spectres de forces montrés sur la Fig. 1.33b montrent un équilibre QG à l'ordre 0 accompagné à l'ordre 1 par une balance entre flottabilité et force de Coriolis agéostrophique jusqu'à  $\ell \approx 80$  puis entre inertie et force de Coriolis agéostrophique au-delà. Du fait de la faible conductivité électrique dans cette région, la contribution de la force de Lorentz est comparable à la viscosité. On retrouve donc un équilibre QG-IAC (Eq. 1.68) propre au régime inertiel de la convection (INGERSOLL et POLLARD, 1982; CARDIN et OLSON, 1994; AUBERT et al., 2001). Cette région abrite également un fort transfert de l'énergie cinétique vers les mouvements zonaux. Nous avons donc produit un modèle numérique conduisant à un équilibre QG-MAC dans la partie métallique et QG-IAC dans la zone moléculaire, deux équilibres de forces que l'on s'attend à retrouver dans les géantes gazeuses.

L'inclusion de la fine couche stable intermédiaire a une influence cruciale sur le champ magnétique. À cause de l'effet de peau lié au fort niveau de stratification, la géométrie du champ magnétique est filtrée et on obtient une configuration beaucoup trop dipolaire par rapport au champ observé (Fig. 1.32c) qui ne permet pas l'obtention de tâches de polarité



inversée par exemple. Côté vents zonaux (Fig. 1.32*d*), la zone stable a également un rôle significatif puisqu'en plus du jet prograde équatorial habituel on observe pour la première fois la formation d'une paire de jets de directions alternées de faible amplitude dans chaque hémisphère à  $\pm 20 - 30^\circ$ . En pratique le mécanisme physique responsable du contrôle de la pénétration des jets est assez subtil. Dans le bas de l'enveloppe moléculaire ( $r \approx 0.9 r_0$ ), les différences entre tenseurs de Reynolds et de Maxwell génèrent une circulation méridienne qui vient légèrement pénétrer dans la couche stable (voir la Fig. 14 de GASTINE et WICHT, 2021). Ce phénomène entraîne la formation de gradients latitudinaux d'entropie qui à leur tour entraînent une diminution rapide de l'écoulement zonal suivant  $z$  (vent thermique Eq. 1.5) et donc un confinement des jets à la région convective externe.

Ce modèle numérique conduit donc à des résultats assez contrastés concernant le rôle d'une couche stable dans Jupiter : si celle-ci semble fondamentale pour produire des jets multiples à l'intérieur du cylindre tangent magnétique, elle entraîne également un lissage très important du champ magnétique qui semble peu compatible avec les observations. Une piste possible d'amélioration consisterait peut-être à décaler la couche stable un peu plus près de la surface (vers  $0.95 R_J$ ) afin de limiter l'atténuation du champ magnétique et de produire un jet équatorial prograde ayant la bonne largeur en latitude. Cette valeur correspondrait néanmoins à des pressions qui semblent bien trop faibles pour engendrer une immiscibilité de l'hélium avec l'hydrogène et donc une quelconque région stable, tout au moins en l'état de notre compréhension de la structure interne des géantes gazeuses. La question scientifique reste donc ici largement ouverte et à creuser dans les années à venir, notamment si l'on souhaite pouvoir participer au mieux à l'interprétation des données des sondes Cassini et Juno.

# Chapitre 2

## Travaux en cours et projets de recherche

Les différentes problématiques scientifiques abordées dans les sections précédentes ouvrent des perspectives de travail pour les années à venir. Dans ce chapitre, je fais le choix de conserver la même organisation que dans le chapitre 1 pour discuter certains projets en cours et pistes de recherche. Je discuterai donc dans un premier temps les opportunités d'amélioration du cadre théorique et numérique avant de discuter les perspectives concernant la problématique de la convection en rotation et de la génération de vents zonaux en géométrie sphérique avant de conclure sur les modèles de dynamos convectives.

### 2.1 Améliorations et modifications du cadre théorique et numérique

#### 2.1.1 Cadre théorique

Comme on l'a vu dans la section 1.2, l'approximation anélastique considérée habituellement dans les modèles de convection (LANTZ et FAN, 1999; JONES et al., 2011) inclut l'hypothèse additionnelle d'une diffusion de l'entropie à la place d'une diffusion de la température. Cette approximation est motivée par le fait que dans les intérieurs planétaires ou stellaires, les diffusivités moléculaires sont peu importantes et peuvent être remplacées par des diffusivités turbulentes (BRAGINSKY et ROBERTS, 1995). Si cette approximation peut paraître raisonnable dans le cas d'une couche entièrement convective, elle devient franchement discutable dès lors qu'on modélise également une couche sub-adiabatique. Un autre inconvénient de la diffusion d'entropie vient des conditions aux limites du système qui sont naturellement exprimées en fonction de l'entropie plutôt que de la température.

Il serait donc judicieux de considérer une formulation alternative utilisant la diffusion en température plutôt qu'en entropie. Une telle approche a été réalisée par LECOANET et al. (2014) dans des modèles de convection 2-D en géométrie cartésienne. Ils ont alors comparé des modèles avec diffusion d'entropie et de température mais en maintenant toujours des conditions aux limites avec entropie fixée aux deux bords pour conserver une définition univoque du nombre de Rayleigh entre les deux configurations. Cette étude suggère des résultats très proches pour les deux modèles, au moins dans le régime faiblement non linéaire de la convection (voir leurs Figs. 3-5). De même dans le régime sub-adiabatique, la relation de dispersion des ondes de gravité semblait peu impactée par le changement du type de diffusion (leur Fig. 1). Les auteurs concluaient alors à l'équivalence des formulations à partir du moment où les diffusivités étaient liées par la relation  $\kappa_T = T_r \kappa_S / c_p$ . Cette conclusion étant issue de calculs locaux, sans rotation, faiblement non linéaires, et avec des conditions aux limites sur l'entropie, il serait nécessaire de s'assurer qu'elle reste valide pour de la convection turbulente en rotation en géométrie sphérique. Ceci dit, d'un point de vue pratique, l'implémentation de la diffusion en température pour des problèmes de convection en géométrie sphérique n'est pas sans difficultés. On a alors le choix de considérer le couple de variables thermodynamique de travail  $(T, p)$  ou  $(s, p)$ . Dans la première formulation, l'opérateur de diffusion de l'équation de température sera simple mais il y aura un terme d'advection de la pression dans l'équation de température (Eq. 1.18); dans la seconde, l'opérateur de diffusion en température devra être reformulé en une fonction de  $s$  et  $p$  et les conditions aux limites sur  $T$  seront plus délicates à traiter. *In fine*, quelle que soit la formulation retenue, la pression ne pourra plus être éliminée du problème et il sera nécessaire de résoudre un système de trois équations couplées contrôlant l'évolution temporelle du potentiel poloidal pour la vitesse  $W$ , de la pression  $p$  et de l'entropie  $s$  (ou la température  $T$ ). Une subtilité concerne l'équation pour le mode à symétrie sphérique  $\ell = m = 0$ . Sans champ magnétique et pour un forçage purement thermique on obtient en moyennant l'équation de Navier-Stokes (1.8) suivant la direction horizontale

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\|p'\|}{\rho_r} \right) = \frac{\alpha_T g}{c_p} \|s'\| + 2\Omega \|u_\phi \sin \theta\| - \|(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_r\|. \quad (2.1)$$

Cette équation nécessite une condition sur un des bords pour pouvoir être résolue. En suivant GLATZMAIER (1984), il est possible d'imposer une condition sur la conservation de la masse totale  $\int_V (\rho_r + \rho') dV = \text{cst}$ . En pratique, cela revient à

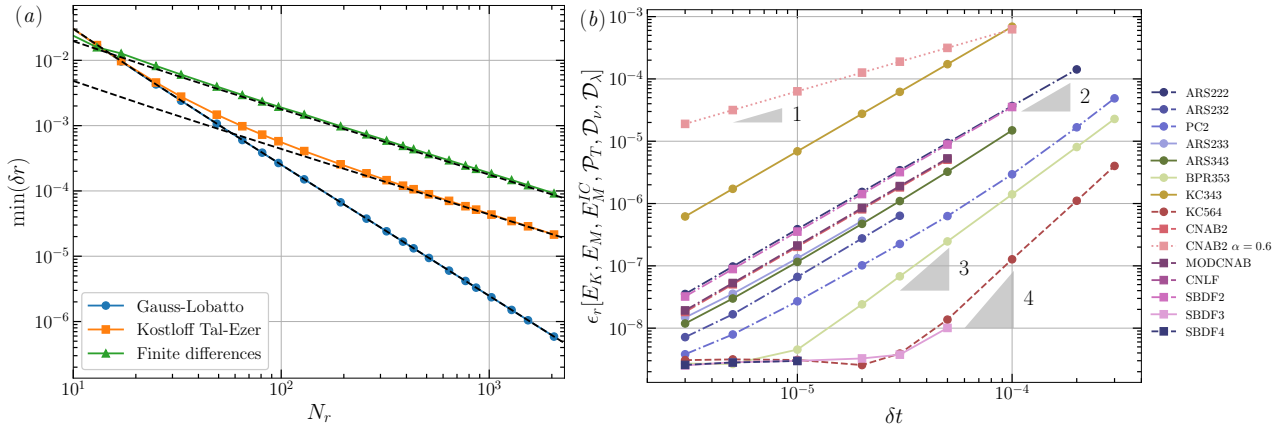


FIGURE 2.1 – (a) Espacement minimal de la grille radiale en fonction de  $N_r$  pour la grille par défaut de Gauss-Lobatto (ronds bleus), pour la grille utilisant le mapping de KOSLOFF et TAL-EZER (1993) (carrés oranges) et pour la grille utilisée avec la méthode des différences finies (triangles verts). (b) Test de convergence temporelle du benchmark BM2 de CHRISTENSEN et al. (2001) pour différents schémas d’intégration temporelle : l’erreur relative  $\epsilon_r$  est construite en utilisant les énergies cinétique et magnétique et les différentes contributions au bilan de puissance (1.42). Les schémas d’ordre 1 ont des lignes en pointillé, ceux d’ordre 2 des points et des tirets, ceux d’ordre 3 des lignes en traits pleins et ceux d’ordre 4 des tirets. Les schémas multistep (Eq. 1.54) sont matérialisés par des carrés, les S-DIRK (Eq. 1.55) par des disques. Les schémas CNAB2, MODCNAB, CNLF, SBDF2, SBDF3 et SBDF4 sont décrits par ASCHER, RUUTH et WETTON (1995). Les schémas ARS222, ARS232, ARS233 et ARS343 sont issus de ASCHER, RUUTH et SPITERI (1997). BPR353 vient de BOSCARINO, PARESCHI et RUSSO (2013), KC343 et KC564 de KENNEDY et CARPENTER (2003) et PC2 de JAMESON, SCHMIDT et TURKEL (1981).

résoudre deux équations couplées pour les composantes à symétrie sphérique de  $s'$  et  $p'$  avec une condition intégrale dépendante du temps pour la deuxième équation.

Un travail d’implémentation de la diffusion de température pour la formulation  $(s, p)$  dans MagIC est en cours mais conduit pour le moment à des instabilités pour les configurations en rotation avec les conditions de température imposées. Du fait de la croissance des vents zonaux, le contraste de pression à symétrie sphérique est modifié (Eq. 2.1) et entraîne une augmentation du contraste en entropie sur la coquille sphérique. Pour progresser, il sera nécessaire de tester l’autre formulation en  $(T, p)$  pour comparaison ainsi qu’examiner si un traitement de la pression sur une grille en quinconce (KHORRAMI, 1991) ou si un changement d’intégrateur temporel règle ces problèmes.

La formulation en température devrait permettre de modéliser plus proprement les configurations anélastiques avec une région sub-adiabatique comme par exemple dans l’intérieur des géantes gazeuses. À terme, afin de mieux décrire les interfaces entre régions convectives et régions stables, il serait également utile de permettre à l’état de référence  $(T_r, \rho_r)$  de changer dans le temps au fur et à mesure de l’évolution de l’état convectif. Cette dépendance temporelle resterait compatible avec l’approximation anélastique tant que le temps caractéristique d’évolution de l’état de référence est beaucoup plus grand que le temps dynamique (GOUGH, 1969), et tant que la conservation de la masse totale est respectée. Il sera sans doute nécessaire d’imaginer une mise à jour de l’état de référence parcimonieuse pour éviter de recalculer systématiquement les opérateurs linéaires. On pourrait alors envisager une stratégie de mise à jour de l’état de référence basée sur un critère comparant par exemple l’amplitude des fluctuations à l’état de référence, e.g.  $|\rho'/\rho_r|$  (pour une approche similaire pour des modèles de convection pénétrative, voir ROGERS et GLATZMAIER, 2005). Ce type d’approche constituerait une avancée notable par rapport aux modèles actuels dans lesquels la zone sub-adiabatique est entièrement contrôlée par un profil analytique *ad-hoc* (GASTINE et WICHT, 2021).

## 2.1.2 Cadre numérique

Outre les modifications du cadre théorique que l’on vient de mentionner, il est également nécessaire de réfléchir aux améliorations possibles de l’outil numérique et de sa performance. Il y a alors plusieurs axes possibles de travail. On peut modifier certaines parties de l’algorithme en espérant en retirer une meilleure efficacité de calcul ; on parle alors de réduction du « *time to solution* ». On peut également agir sur la méthode de parallélisation de l’outil numérique en fonction de son adéquation avec l’évolution des moyens de calcul disponibles. Je ne détaillerai pas ici ce second aspect, la stratégie de parallélisation de MagIC étant vraisemblablement amenée à évoluer dans les années venir au gré de l’évolution du matériel.

Du point de vue purement algorithmique, la méthode pseudo-spectrale dérivée par GLATZMAIER (1984) reste la plus efficace quand on considère des problèmes de mécanique des fluides Boussinesq ou anélastique en géométrie sphérique (voir, par exemple MATSUI et al., 2016). Les deux aspects de l’algorithme d’origine sur lesquels il est possible de jouer concernent le schéma de discrétisation en rayon et l’intégrateur temporel.

### Stratégie de discrétisation radiale

Pour la discrétisation radiale, on sait que l’approche pseudo-spectrale avec des polynômes de Chebyshev et une méthode de collocation est très efficace pour décrire les problèmes simples, laminaires pour lesquelles la convergence spectrale est assurée avec un très petit nombre de polynômes. Assurer un niveau d’erreur comparable avec des différences finies d’ordre 2 pour les problèmes considérés dans les benchmarks nécessite d’utiliser de 2 à 3 fois plus de points de discrétisation suivant la direction radiale (voir, par exemple CHRISTENSEN et al., 2001). Pour les configurations de convection turbulente qui nous intéressent en pratique, cet écart entre différences finies et méthode de collocation a tendance à se réduire : à titre d’exemple des modèles numériques de géodynamo à  $E = 10^{-6}$  et  $Ra \approx 100 Ra_c$  de SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019) calculés avec des différences finies ne nécessitent qu’environ  $N_r^{\text{FD}} \approx 3/2 N_r^{\text{cheb}}$ . À ce niveau de ratio, la méthode des différences finies en rayon devient compétitive du fait de son algorithme de résolution plus rapide des problèmes linéaires (§ 1.3.1).

Pour les problèmes de dynamo, une difficulté additionnelle de la méthode pseudo-spectrale de GLATZMAIER (1984) provient de la restriction du pas de temps lié à la propagation d’ondes d’Alfvén près des bords. La figure 2.1a montre l’espacement minimum de la grille radiale en fonction de  $N_r$  pour une stratégie avec des différences finies ( $\delta\tilde{r} \sim N_r^{-1}$ , triangles), la grille de Gauss-Lobatto ( $\delta\tilde{r} \sim N_r^{-2}$ , ronds) et le mapping de KOSLOFF et TAL-EZER (1993) ( $\delta\tilde{r} \sim N_r^{-1}$ , carrés). Puisque  $\delta\tilde{t} \leq C\delta\tilde{r}/U_A$ , avec  $U_A$  la vitesse d’Alfvén et  $C$  une constante, le pas de temps maximum autorisé sera bien plus grand avec des différences finies ayant une progression géométrique de l’espacement des points près des bords (DORMY, CARDIN et JAULT, 1998) qu’avec la grille de Gauss-Lobatto pour une valeur de  $N_r$  donnée. Le mapping de KOSLOFF et TAL-EZER (1993) permet un gain notable du pas de temps d’intégration pour  $N_r > 100$  pour les calculs dynamo.

Ceci dit, puisque la méthode de collocation implique des matrices denses, elle nécessite un stockage mémoire important en  $\mathcal{O}(N_r^2)$  et des opérations de factorisation dont la complexité croît en  $\mathcal{O}(N_r^3)$ . Dans le futur, et si des résolutions spatiales impliquent plus de  $N_r \gtrsim 10^3$ , il sera nécessaire d’utiliser soit des différences finies soit de changer radicalement de stratégie de discrétisation si l’on souhaite conserver une meilleure précision. Parmi les pistes possibles, citons les différences finies compactes (e.g. TAKAHASHI, 2012) ou encore une méthode à base de polynômes de Chebyshev conduisant à des matrices bandes (MARTI, CALKINS et JULIEN, 2016). J’ai d’ailleurs implémenté cette dernière méthode dans le code 2-D quasi-géostrophique `pizza`<sup>1</sup> pour lequel les résolutions radiales peuvent plus fréquemment dépasser  $10^3$  (GASTINE, 2019). La méthode de MARTI, CALKINS et JULIEN (2016) n’est malheureusement applicable qu’aux équations faisant intervenir aux maximum des polynômes de  $\tilde{r}$  dans tous les préfacteurs. Puisque dans le cadre de l’approximation anélastique ou simplement en cas d’utilisation d’une fonction de mapping non affine, on est amené à introduire des préfacteurs non polynomiaux en  $\tilde{r}$ , il faudrait alors utiliser la méthode plus générale de OLVER et TOWNSEND (2013) à base de polynômes ultrasphériques. Dans cette approche, le nombre de bandes  $n_b$  des matrices obtenues dépend du nombre de polynômes de Chebyshev nécessaires pour représenter les fonctions de  $\tilde{r}$  présentes dans les équations (e.g. le mapping,  $\rho_r$ ,  $T_r$ ,  $\lambda$  et leur dérivées éventuelles). Le gain éventuel par rapport à l’approche en collocation sera donc à évaluer au cas par cas en fonction de la complexité de l’état de référence et/ou de la fonction de mapping considérée.

### Stratégie de discrétisation temporelle

Outre le schéma en rayon, le deuxième volet d’amélioration potentielle du code concerne l’intégrateur temporel. Comme détaillé dans § 1.3.2, j’ai implémenté dans `MAGIC` un cadre permettant de choisir entre différentes stratégies de discrétisation en temps. La figure 2.1b illustre la convergence vers les valeurs de référence du benchmark de géodynamo BM2 de CHRISTENSEN et al. (2001) en fonction du pas de temps  $\delta\tilde{t}$  et du schéma d’intégration temporel. Le schéma CNAB2 modifié utilisé dans la publication de CHRISTENSEN et al. (2001) (carrés roses avec ligne en pointillé) conduit à l’erreur la plus importante et ne possède qu’une convergence d’ordre 1 en temps. En considérant des schémas IMEX multistep (type SBDF) ou IMEX Runge-Kutta d’ordre 3 ou 4 on peut amener la convergence du benchmark BM2 à la précision machine pour  $\delta\tilde{t} \leq 10^{-5}$  (unité visqueuse). De plus, pour un ordre de convergence donné, les schémas S-DIRK (ronds) autorisent des pas de temps plus grands que les multistep (carrés) du fait de leur meilleure stabilité. On peut alors définir une mesure associant l’efficacité d’un schéma numérique ( $\delta\tilde{t}/n_{\text{op}}$  avec  $n_{\text{op}}$  le nombre d’opérations de calcul) et sa précision. En fonction de la raideur numérique du problème physique discrétisé, il sera alors possible de déterminer le meilleur schéma garantissant un bon compromis efficacité/précision.

Mieux comprendre l’intérêt des différents schémas IMEX dans le cadre de la modélisation de la convection était d’ailleurs l’objectif principal de la thèse de Venkatesh Gopinath, que j’ai co-encadrée avec Alexandre Fournier. En implémentant un ensemble d’IMEX dans un code de convection 2-D, il a ainsi pu montrer que certains schémas numériques comme ARS343 (ASCHER, RUUTH et SPITERI, 1997) ou KC564 (KENNEDY et CARPENTER, 2003) permettaient d’assurer une meilleure précision que CNAB2 avec une efficacité de 20 à 30% meilleure, et ce sur une large plage de  $Ra$  et  $Pr$  (publication en révision à *Journal of Computational Physics*). La transposition de ces résultats aux dynamos convectives en géométrie sphérique est loin d’être clair du fait des ingrédients physiques additionnels (forces de Lorentz et de Coriolis). La détermination de la stratégie optimale concernant l’intégration temporelle des problèmes 3-D nécessitera donc de réaliser des études de convergence et de stabilité pour différentes configurations physiques avec et sans rotation, avec et sans champ magnétique, laminaires et turbulentes. Ce projet de recherche devrait être amené à progresser dans

1. <https://github.com/magic-sph/pizza>

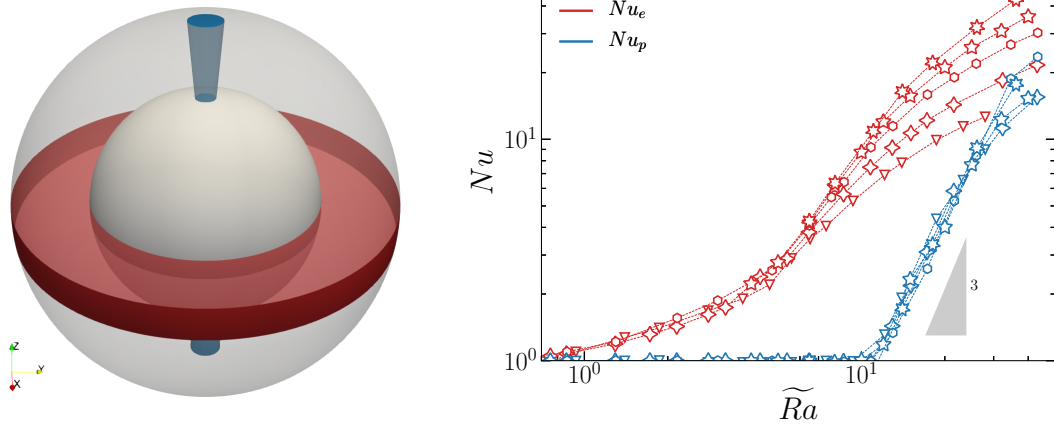


FIGURE 2.2 – Gauche : schéma illustrant les volumes fluides considérés pour construire un nombre de Nusselt pour les régions polaires  $Nu_p$  (en bleu) et pour les régions équatoriales  $Nu_e$  (en rouge). Droite :  $Nu_p$  et  $Nu_e$  en fonction de  $\tilde{Ra} = Ra E^{4/3}$  pour les simulations numériques de GASTINE, WICHT et AUBERT (2016). Les symboles sont les mêmes que sur la Fig. 1.9.

les années à venir dans le cadre de l'ANR [RevEarth](#) (*Realistic modelling of Earth's magnetic field reversals*) portée par Nathanaël Schaeffer.

## 2.2 Convection, rotation et vents zonaux

### 2.2.1 Quel régime asymptotique pour la convection en rotation avec conditions rigides ?

Comme on l'a vu (§ 1.4.3), il y a une incertitude sur la vitesse caractéristique pertinente qui doit rentrer dans l'échelle de Rhines  $\mathcal{L}_{Rh}$ . Avec des conditions aux limites rigides, les simulations 3-D actuelles ne permettent pas d'atteindre  $E < 10^{-7}$  et disons  $Re_c > 10^4$ . Dans cette gamme de paramètres, on a du mal à obtenir  $Re_z \gg Re_c$  et les données numériques ne permettent pas de trancher entre les deux relations d'échelle possibles (voir Fig. 1.16). Ce changement sur l'échelle de longueur impacte également la relation d'échelle pour la vitesse convective  $Re_c$  (GILLET et JONES, 2006) et on obtient alors les deux scénarios suivants :

$$(a) \quad \mathcal{L} \sim \left( \frac{U_c}{\Omega\beta} \right)^{1/2}, \quad Re_z = Re_c^{3/2}, \quad Re_c = \tilde{\mathcal{P}}_v^{2/5} E^{1/5}; \quad (b) \quad \mathcal{L} \sim \left( \frac{U_z}{\Omega\beta} \right)^{1/2}, \quad Re_z = Re_c^{4/3}, \quad Re_c = \tilde{\mathcal{P}}_v^{3/8} E^{1/8}. \quad (2.2)$$

Pour vérifier si les relations (b) ont une quelconque pertinence, il est alors plus approprié de compléter les calculs 3-D existants par des modèles 2-D quasi-géostrophiques (e.g. AUBERT, GILLET et CARDIN, 2003; GILLET et JONES, 2006; GUERVILLY, CARDIN et SCHAEFFER, 2019). Le code libre `pizza` que j'ai récemment développé permet précisément d'étudier ce type de configurations et d'atteindre des nombres d'Ekman  $E \sim 10^{-10}$  et disons  $Re_c \sim 3 \times 10^5$ . À l'heure actuelle, ce code a été testé et validé et présente une bonne extensibilité parallèle jusqu'à quelques milliers de cœurs de calculs pour les résolutions les plus importantes  $\mathcal{O}(10^4 \times 10^4)$  (voir la Fig. 5 de GASTINE, 2019). L'exploitation scientifique de ce code reste encore largement à faire et la réalisation d'une étude paramétrique systématique des modèles convectifs avec  $E < 10^{-7}$  et  $Pr = 1$  permettrait de progresser sur les lois d'échelle en complément des calculs avec  $Pr \ll 1$  réalisés par GUERVILLY, CARDIN et SCHAEFFER (2019).

Notons enfin, qu'en dehors de cette problématique, `pizza` a déjà été utilisé pour valider l'implémentation numérique de Venkatesh Gopinath pendant sa thèse, qu'il est utilisé à l'heure actuelle par Mouloud Kessar, post-doctorant avec Alexandre Fournier et moi-même, afin de tester des intégrateurs temporels innovants, et par Olivier Barrois post-doctorant au DTU à Copenhague pour l'étude de configurations hybrides QG/3-D (champ de vitesse en 2-D, champ magnétique et de température en 3-D).

### 2.2.2 Vers une analyse locale des régimes physiques

En complément des études de relations d'échelle globales telles que décrites dans § 1.4.2, il serait judicieux de réaliser des analyses locales de la dynamique convective. Concernant le transport de chaleur, les expériences en laboratoire dans des cylindres en rotation ou des simulations numériques locales obtiennent des lois d'échelle très différentes de ce que l'on observe en géométrie sphérique avec souvent  $Nu \sim (Ra/Ra_c)^3$  (voir KING, STELLMACH et AURNOU, 2012; STELLMACH

et al., 2014). Comment relier ces résultats locaux aux relations d'échelle obtenues en géométrie sphérique ? Pourquoi est-ce que les exposants des relations  $Nu-Ra$  sont beaucoup plus élevés dans les modèles locaux ? Ces différences impliquent-elles que les régions de haute latitude pour lesquelles gravité et rotation sont alignées se comportent différemment des régions proches de l'équateur pour lesquelles elles sont orthogonales ?

Répondre à ces différentes problématiques nécessite de procéder à des analyses locales du transport thermique. La figure 2.2 représente une première étape dans cette direction : en utilisant les résultats de l'étude de GASTINE, WICHT et AUBERT (2016) et en collaboration avec Jon Aurnou, j'ai construit une mesure du nombre de Nusselt local associé aux régions polaires  $Nu_p$  (en bleu) et aux régions équatoriales  $Nu_e$  (en rouge). La figure 2.2 (droite) montre  $Nu_p$  et  $Nu_e$  en fonction d'un Rayleigh critique asymptotique  $\tilde{Ra} = Ra E^{4/3}$ . On observe que le démarrage de la convection, matérialisé par  $Nu > 1$ , s'effectue d'abord à l'extérieur du cylindre tangent avant d'atteindre les régions polaires pour  $\tilde{Ra} \geq 10$ . On constate également des comportements assez différents avec une croissance plus rapide de  $Nu_p$  que  $Nu_e$  avec  $\tilde{Ra}$ . En particulier, pour les régions polaires, on obtient un comportement très proche de celui observé dans les expériences de laboratoire et les calculs locaux avec  $Nu_p \sim \tilde{Ra}^3$ .

La question de la distribution en latitude du transport thermique est fondamentale notamment dans le cadre de l'étude de la convection dans les océans de sub-surface des satellites de glace comme Europe, Titan ou Encelade. SODERLUND et al. (2014) attribuent par exemple les différences dans la topographie des glaces de surface observées sur Europe à un flux thermique plus important aux basses latitudes dans l'océan de sub-surface. Pour s'assurer de la viabilité d'un tel scénario, il conviendrait de délimiter de manière systématique les frontières des régimes de « polar cooling » ( $Nu_p > Nu_e$ ) et d'« equatorial cooling » ( $Nu_e > Nu_p$ ) (AMIT et al., 2020). En plus des phénomènes de régimes différents pour le transfert thermique discutés ci-dessus, il est vraisemblable que les jets zonaux susceptibles de se développer viennent moduler ou même bloquer le transfert de chaleur dans certaines régions (e.g. GOLUSKIN et al., 2014; YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS, 2016). Bien qu'encore assez incertaines, les estimations des paramètres de contrôle pour la convection dans les océans de sub-surface donnent pour Europe  $r_i/r_o \approx 0.94$ ,  $E \sim 10^{-10}$ ,  $Pr \sim 10$  avec  $Ro_c \sim 10^{-2} - 1$ , une gamme de paramètres située dans le régime « transtionnel » de la Fig. 1.15 et proche de la transition entre vents zonaux progrades et rétrogrades (Fig. 1.21). Il s'agit donc d'une configuration avec  $Pr > 1$  et dans une limite de coquilles sphériques très fines, une configuration assez éloignée de celle étudiée dans mon étude de 2016. L'ANR COLOSSE (Caractérisation des océans enfouis dans le Système Solaire externe), dédiée à l'étude des océans de sub-surface et portée par Gaël Choblet, sera précisément une opportunité de faire progresser ce sujet dans les années venir. À terme, il sera sans doute pertinent de modéliser la dynamique de l'interface entre phase solide et liquide avec par exemple une approche de type champ de phase (e.g. BECKERMANN et al., 1999; FAVIER, PURSEED et DUCHEMIN, 2019; HESTER et al., 2020).

### 2.2.3 Variabilité temporelle des jets zonaux : fusion et drift

Un dernier volet que l'on n'a pas abordé jusqu'à présent concerne la variabilité temporelle des vents zonaux. Si les figures 1.19-1.20 représentent des moyennes temporelles sur quelques centaines de taux de rotation, les vents zonaux présentent souvent une évolution très lente pouvant conduire à des migrations ou des fusions des jets. Là encore, cette évolution temporelle dépend de manière cruciale de la nature des conditions aux limites. Avec des conditions mécaniques rigides aux deux bords et en utilisant des modèles QG, ROTVIG (2007) reportait une nucléation de jets dans les parties externes du fluide et une lente migration du pattern des vents zonaux vers l'intérieur jusqu'à la destruction des jets progrades au niveau du cylindre tangent (voir sa Fig. 4). La partie gauche de la figure 2.3 illustre le même phénomène physique dans un modèle QG avec  $E = 10^{-8}$ ,  $Ra \approx 100 Ra_c$  et  $Pr = 1$  réalisé avec pizza. L'instantané montré dans la Fig. 2.3d montre une configuration avec des jets concentriques de directions alternées qui présentent une taille caractéristique qui réduit au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre en accord avec l'augmentation de  $|\beta|(\tilde{s})$ . Comme pour le modèle de ROTVIG (2007), l'évolution temporelle de cette configuration (Fig. 2.3a) montre une migration des jets vers le centre avec une augmentation de la vitesse de déplacement vers l'intérieur. Proche de la frontière interne, le vent zonal est presque toujours rétrograde, le jet prograde étant détruit en dessous de  $\tilde{s}/\tilde{r}_o \approx 0.4$ . Dans l'ensemble on obtient une évolution quasi-périodique de la forme  $\langle \tilde{u}_\phi \rangle_\phi(\tilde{s}, \tilde{t}) = f(\tilde{s}) \cos[k(\tilde{s})\tilde{s} + \tilde{\omega}\tilde{t}]$  avec parfois des fusions de jets ( $\tilde{t} \approx 2.5 \times 10^5$ ,  $\tilde{s}/\tilde{r}_o \approx 0.8$ ). L'évolution du système est très lente puisqu'il faut plus de  $4 \times 10^5$  périodes de rotation pour qu'un jet créé dans les régions externes ( $\tilde{s}/\tilde{r}_o \approx 0.95$ ) migre jusqu'au rayon interne.

Pour les calculs 3-D, ce phénomène est plus délicat à mettre en évidence du fait du temps d'intégration plus limité et de la nécessité d'atteindre un régime où des jets multiples se forment. La partie droite de la Fig. 2.3 montre des simulations anélastiques de coquilles sphériques très fines avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.95$  avec des conditions mécaniques rigides à  $\tilde{r}_i$  et stress-free à  $\tilde{r}_o$  (configuration dite « hybride », Fig. 2.3b,e) et stress-free aux deux bords (Fig. 2.3c,f). Cette géométrie permet d'obtenir un jet équatorial prograde dont la taille est proche de celui observé sur Jupiter. Le changement de condition mécanique en  $\tilde{r}_i$  a un impact sur la structure des jets : la configuration stress-free conduit à des jets beaucoup plus larges atteignant une amplitude environ 3 à 4 fois plus grande, la configuration avec la condition rigide en bas produit un jet prograde équatorial fort flanqué de 6-7 paires de jets de directions alternées de faible amplitude à l'intérieur du cylindre tangent. Les jets se développent dans tout le volume dans la configuration stress-free alors qu'ils sont cantonnés aux latitudes comprises entre  $\pm 50^\circ$  pour la configuration hybride. Concernant l'évolution temporelle, on constate une

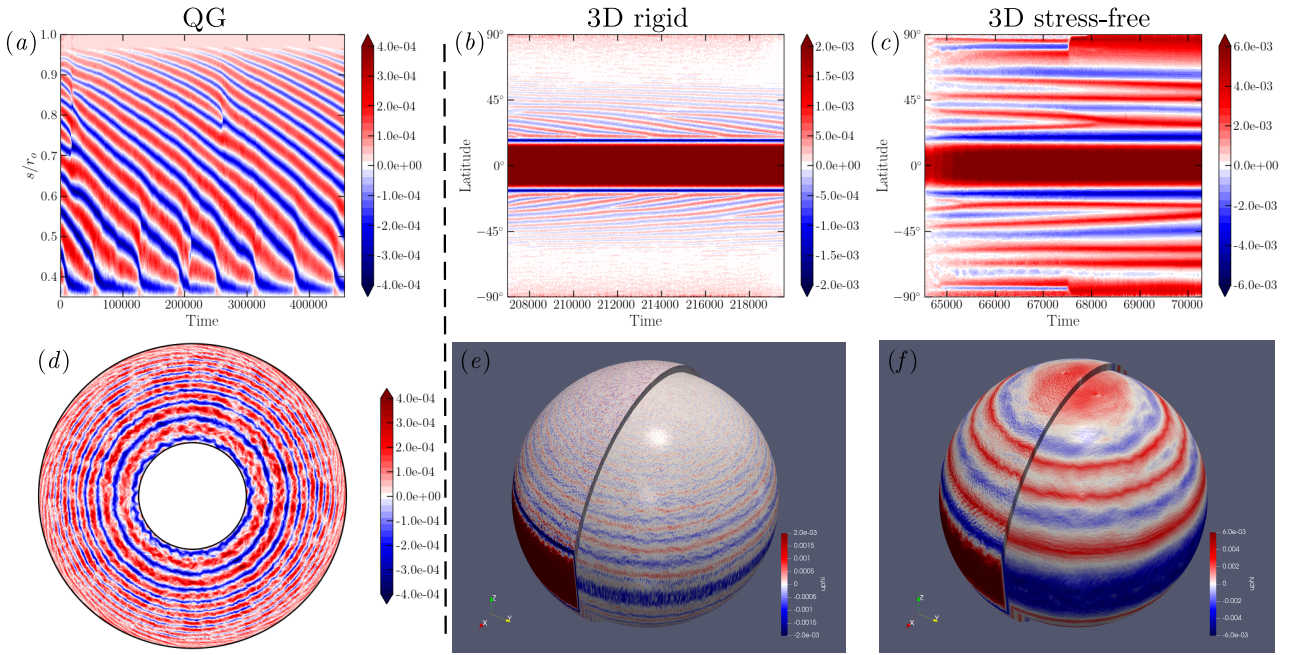


FIGURE 2.3 – (a) Vitesse zonale dans un plan (temps, rayon cylindrique) pour un calcul QG réalisé avec le code `pizza` (GASTINE, 2019). La configuration correspond à  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $E = 10^{-8}$ ,  $Ra \approx 100 Ra_c$ ,  $Pr = 1$  avec des conditions rigides et une température imposée aux deux bords. (b) Diagramme de Hovmöller pour la vitesse zonale pour un calcul 3-D anélastique avec une condition rigide en  $\tilde{r}_i$  et stress-free en  $\tilde{r}_o$  et des conditions de flux en entropie aux deux bords. La configuration correspond à  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.95$ ,  $E = 10^{-6}$ ,  $Ra = 8.5 \times 10^9$  et  $Pr = 0.1$ . (c) Pareil que (b) pour une simulation avec des conditions stress-free aux deux bords avec  $E = 3 \times 10^{-6}$ ,  $Ra = 1.3 \times 10^9$  et  $Pr = 0.1$ . (d) Instantané de la vitesse azimuthale dans le plan équatorial pour le calcul QG correspondant à (a). (e) Instantané de la vitesse zonale à la surface, sur un plan méridien et proche de  $\tilde{r}_i$  pour le calcul 3-D correspondant à (b). (f) Pareil que (e) pour un modèle numérique avec des conditions stress-free aux deux bords. Les temps sont adimensionnés en période de rotation, les vitesses en  $U_\phi/\Omega r_o$ . Le changement abrupt près des pôles dans la figure (c) autour de  $\tilde{t} \approx 67500$  correspond à la suppression des symétries azimuthales utilisées dans la première partie du modèle numérique.

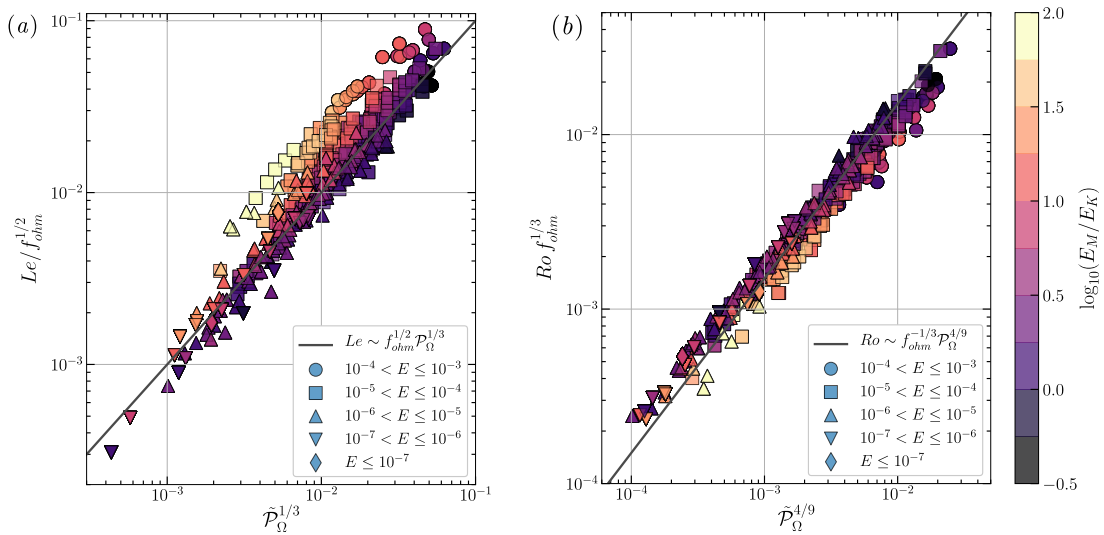


FIGURE 2.4 – (a)  $Le/f_{ohm}^{1/2}$  en fonction de  $\tilde{\mathcal{P}}_{\Omega}^{1/3}$  (Eq. 1.84) pour un ensemble de 429 simulations Boussinesq de la géodynamo ayant un champ magnétique dipolaire. (b)  $Ro f_{ohm}^{1/3}$  en fonction de  $\tilde{\mathcal{P}}_{\Omega}^{4/9}$  (Eq. 1.84) pour les mêmes simulations. Les lignes en trait plein correspondent aux lois d'échelle théorique (1.84) de DAVIDSON (2013). Ces figures ont été construites en utilisant les simulations de CHRISTENSEN et AUBERT (2006), TAKAHASHI, MATSUSHIMA et HONKURA (2008), CHRISTENSEN (2010), SODERLUND, KING et AURNOU (2012), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, WOLK et al. (2016), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016), AUBERT, GASTINE et FOURNIER (2017), SCHAEFFER et al. (2017), DORMY, ORUBA et PETITDEMANGE (2018), PETITDEMANGE (2018), SHEYKO et al. (2018), SREENIVASAN et KAR (2018), SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019), SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021) et TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021).

évolution quasi-périodique des jets à l'intérieur du cylindre tangent dans la configuration avec condition rigide en  $\tilde{r}_i$ , de manière analogue aux modèles atmosphériques de CHEMKE et KASPI (2015) (voir leur Fig. 1). Les jets migrent cette fois vers les basses latitudes (donc les  $\tilde{s}$  croissants) jusqu'à atteindre le cylindre tangent. Par rapport à la configuration QG, le phénomène s'effectue avec une périodicité beaucoup plus rapide de l'ordre de  $2 \times 10^3 - 3 \times 10^3$  périodes de rotation. À l'inverse de la configuration QG, c'est le jet prograde qui est maintenant stable pour  $\theta \approx \pm 20^\circ$ , le jet rétrograde étant détruit dès son arrivée au cylindre tangent. Pour la configuration stress-free en revanche, on observe plutôt une lente fusion des jets et une augmentation de leur amplitude. En reconsidérant les modèles Boussinesq de HEIMPEL, AURNOU et WICHT (2005) (avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.9$  et des conditions stress-free) mais en les intégrant beaucoup plus longtemps, TAKEHIRO, SASAKI et ISHIOKA (2015) reportent une fusion des jets qui se poursuit jusqu'à converger vers une configuration avec un seul jet prograde dans chaque hémisphère à l'intérieur du cylindre tangent. Il est possible qu'une intégration plus longue de la configuration montrée dans la Fig. 2.3c conduise au même phénomène. Ces observations soulèvent plusieurs questions :

- Quel phénomène physique est responsable de la migration des jets avec conditions rigides ?
- Est-ce que ce phénomène est toujours quasi-périodique ou bien un comportement plus chaotique peut être observé à plus haut forçage ? Quels phénomènes contrôlent la périodicité ?
- Quel est le temps caractéristique de fusion des jets avec conditions stress-free ?

Sur Jupiter et Saturne, les jets présentent peu de variabilité tout du moins à l'échelle de la quarantaine d'années d'observations dont on dispose (BARRADO-IZAGIRRE et al., 2013; TOLLEFSON et al., 2017). Est-ce à dire que les phénomènes de fusion/nucléation/migration des jets opèrent sur des échelles plus longues ? Pour progresser sur ces questions, une piste est sans doute à chercher dans l'interaction entre vents zonaux et ondes, un mécanisme mis en évidence par PLUMB (1977) pour expliquer les QBO (*quasi-biannual oscillations*) des jets de l'atmosphère terrestre (SHOWMAN, TAN et ZHANG, 2019). LEMASQUERIER, FAVIER et LE BARS (2021) suggèrent un phénomène de résonance quand la vitesse zonale locale est comparable à la vitesse de phase des ondes de Rossby, entraînant une amplification locale de l'amplitude du tenseur de Reynolds (Eq. 1.71). Cette hypothèse devra être testée dans nos modèles numériques QG et 3-D, et il sera nécessaire de caractériser l'influence de la variation de  $\beta$  avec  $\tilde{s}$  et des processus de saturation des jets (frottements aux bords ou dissipation en volume) sur l'évolution temporelle et la stabilisation des jets zonaux.



## 2.3 Dynamos convectives

### 2.3.1 Lois d'échelle

Comme on l'a vu dans la section 1.5.2, la théorie QG-MAC de DAVIDSON (2013) conduit à des lois d'échelle pour la vitesse, le champ magnétique et la longueur caractéristique de l'écoulement (Eq. 1.84). La loi d'échelle pour le champ magnétique est en général assez bien retrouvée dans les dynamos convectives en dépit d'une dispersion résiduelle souvent attribuée à une influence des diffusivités dans les dynamos numériques ( $Pm$  serait le facteur principal d'après STELZER et JACKSON, 2013). L'analyse de la distribution spectrale des forces (voir Fig. 1.26) suggère pourtant une influence marginale de la viscosité au moins quand la convection n'opère plus dans le régime faiblement non linéaire (SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT, 2019). Un autre problème provient du fait que les analyses des comportements asymptotiques des dynamos numériques s'appuient pour la plupart sur un ensemble de modèles de géodynamo calculés par Ulrich Christensen avant 2010 (CHRISTENSEN et AUBERT, 2006 ; CHRISTENSEN, 2010).

Afin de tester les lois d'échelle (1.84) sur une gamme de paramètres plus étendue, nous avons entrepris avec Alexandre Fournier un lent travail de collecte de résultats de modèles de géodynamo convectives auprès de différents auteurs. Outre les études initiales de CHRISTENSEN et AUBERT (2006) et CHRISTENSEN (2010), nous avons utilisé les calculs de TAKAHASHI, MATSUSHIMA et HONKURA (2008), SODERLUND, KING et AURNOU (2012), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, WOLK et al. (2016), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016), AUBERT, GASTINE et FOURNIER (2017), SCHAEFFER et al. (2017), DORMY, ORUBA et PETITDEMANGE (2018), PETITDEMANGE (2018), SHEYKO et al. (2018), SREENIVASAN et KAR (2018), SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019), SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021) et TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021). Ces dynamos numériques ont toutes été calculées sous l'approximation de Boussinesq mais avec différentes conditions aux limites mécaniques, thermiques et même chimiques pour les modèles double-diffusifs de TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021). Un travail méticuleux de renormalisation des différentes quantités d'intérêt (vitesse, champ magnétique, bilan de puissance 1.42,  $f_{dip}$ , etc) et de suppression des doublons a été nécessaire, ces différentes publications utilisant des définitions ou des adimensionnements différents. À l'heure actuelle, nous disposons d'une base de données de 736 dynamos convectives dont 429 ont une configuration dipolaire avec  $f_{dip} > 0.5$ .

La figure 2.4a montre l'amplitude du champ magnétique ( $Le/\sqrt{f_{ohm}}$ ) en fonction de la puissance convective par unité de masse adimensionnée ( $\tilde{P}_\Omega$ ) pour tous ces modèles numériques. La forme des symboles change avec le nombre d'Ekman et la ligne en trait plein correspond au comportement théorique (1.84). L'augmentation significative de l'ensemble de simulations considérées conduit à une dispersion plus importante de la valeur de l'amplitude du champ magnétique à un niveau de puissance donné que pour l'ensemble initial de CHRISTENSEN et AUBERT (2006). Au lieu de la dépendance à  $Pm$  suggérée par STELZER et JACKSON (2013), nous mettons plutôt en évidence une dépendance systématique au ratio d'énergie  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K$  qui est ici matérialisée par la coloration des symboles. On constate une gradation qui suit  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K$  à un niveau de puissance donné. La loi d'échelle pour la vitesse  $Ro$  (Fig. 2.4b) montre la tendance opposée mais avec une dispersion moins marquée. Si on constate bien qu'une croissance de  $\tilde{E}_M/\tilde{E}_K$  s'accompagne d'une diminution de  $Ro$  à  $\tilde{P}_\Omega$  fixé, il existe plus d'exceptions à ce comportement que pour la loi d'échelle de  $Le$ . Dans les deux cas, il n'est même pas vraiment clair que les exposants théoriques de 1/3 et 4/9 pour la dépendance à  $\tilde{P}_\Omega$  constituent une bonne description de ces dynamos convectives. On semble plutôt observer une pente plus élevée qu'attendue pour  $Le$  et légèrement plus faible pour  $Ro$ . Ces déviations aux lois d'échelle dérivées par DAVIDSON (2013) peuvent avoir plusieurs causes, parmi lesquelles citons deux pistes plausibles :

- L'hypothèse que l'énergie magnétique doit être indépendante du taux de rotation (Eq. 1.83) n'est peut-être pas valide (e.g. SCHRINNER, 2013). Le fait que la dépendance en 1/3 ne soit pas parfaitement établie dans la Fig. 2.4a indiquerait une dépendance résiduelle à la rotation.
- Il y a une rétroaction entre champ magnétique et champ de vitesse, de telle sorte qu'approximer la force de Lorentz par  $B^2/\mu_0\mathcal{L}_\perp$  est trop simpliste.

En tout état de cause, au-delà de la publication du travail d'assemblage de cette base de données, il conviendra dans les années à venir de clarifier les lois d'échelles des systèmes QG-MAC. Réaliser des simulations avec  $\tilde{E}_M \gg \tilde{E}_K$  et à  $\tilde{P}_\Omega$  plus faible permettrait de vérifier si la dépendance observée sur la Fig. 2.4 persiste ou s'amenuise quand on progresse vers le domaine des dynamos planétaires.

À l'exception des dynamos double diffusives de TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021) et de quelques simulations de CHRISTENSEN (2010), la très grande majorité des calculs de géodynamo ont été mené à  $Pr = 1$  pour des raisons évidentes d'optimum numérique. Dans les années à venir, il serait intéressant de compléter cette étude par des modèles avec  $Pr \neq 1$  pour (i) vérifier si les diagrammes de régimes mis en évidence dans la Fig. 1.24 persistent, (ii) vérifier que les équilibres de force discutés sur la Fig. 1.26 sont similaires et (iii) s'assurer que les lois d'échelle (Fig. 2.4) sont peu impactées.

### 2.3.2 Stratification stable dans les planètes et double diffusion

Le dernier aspect que je souhaite discuter ici concerne la stratification stable et les aspects double diffusif ainsi que leur impact sur les dynamos planétaires. Comme on l'a vu dans § 1.1, cette situation peut se présenter dans les noyaux liquides des planètes telluriques avec, par exemple dans le cas de la Terre, une couche stratifiée stable en température

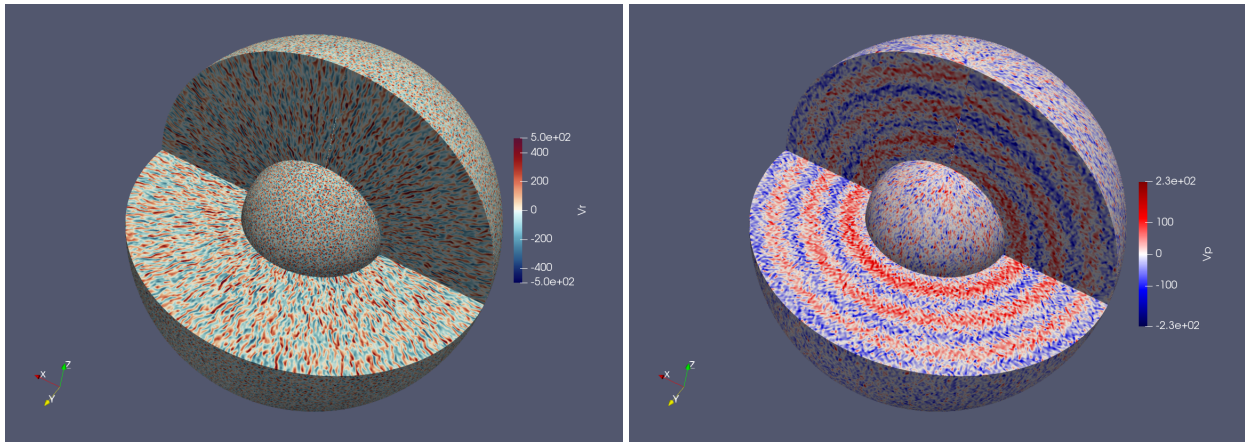


FIGURE 2.5 – Instantanés de la vitesse radiale  $\tilde{u}_r$  (à gauche) et de la vitesse azimutale  $\tilde{u}_\phi$  (à droite) pour une simulation de doigts de sel sans rotation avec  $\tilde{r}_i/\tilde{r}_o = 0.35$ ,  $\tilde{g} = \tilde{r}/\tilde{r}_o$ ,  $Pr = 3$ ,  $Sc = 30$ ,  $Ra_T = -7.5 \times 10^9$  et  $Ra_\xi = 5 \times 10^{10}$ . Les conditions aux limites sont rigides avec température et composition imposées aux deux bords. Les vitesses sont exprimées ici en nombre de Reynolds. Figure produite par Théo Tassin.

mais instable du point de vue des perturbations chimiques sous la CMB. À l’opposé, dans le cas de l’intérieur des géantes gazeuses, le gradient d’hélium croissant vers l’intérieur entraîne un effet de composition stabilisant qui s’accompagne de perturbations thermiques déstabilisantes. En fonction des amplitudes relatives des phénomènes stabilisants et déstabilisants, l’écoulement convectif entre alors dans le régime des doigts de sel dans la première configuration et dans le régime de la semi-convection dans la seconde. La très grande majorité des modèles numériques de ces instabilités publiés à ce jour ont été réalisés en géométrie cartésienne dans des domaines triplement périodiques (e.g. STELLMACH et al., 2011; MIROUH et al., 2012). Il y a donc un vrai besoin d’étudier ces instabilités dans des géométries sphériques globales pour (i) estimer si les régimes mis en évidence par les calculs locaux persistent, (ii) étudier l’impact de la rotation et/ou du champ magnétique (pour des simulations de doigt de sel en rotation en géométrie sphérique, voir MONVILLE et al., 2019).

L’étude des instabilités double diffusive en géométrie sphérique est précisément l’objectif principal de la thèse de Théo Tassin, co-encadrée par Alexandre Fournier et moi-même. À la suite d’une première étude consacrée à la configuration où les deux sources de flottabilité sont déstabilisantes (discutée dans § 1.5.1, voir TASSIN, GASTINE ET FOURNIER, 2021), la deuxième partie de sa thèse est dédiée au problème des doigts de sel en géométrie sphérique et sans rotation. Les doigts de sel se développent sur une échelle caractéristique horizontale qui suit à l’ordre 0 une loi de la forme  $\mathcal{L} \sim |Ra_T|^{-1/4} d$  (RADKO, 2013), mais possède des dépendances secondaires à  $Sc$ ,  $Pr$  et  $Ra_\xi$  (SCHMITT, 1979). La figure 2.5 (gauche) illustre la composante radiale de la vitesse dans une simulation turbulente de doigts de sel sans rotation en géométrie sphérique avec  $Pr = 3$ ,  $Sc = 30$ ,  $Ra_T = -7.5 \times 10^9$  et  $Ra_\xi = 5 \times 10^{10}$ . Dans des configurations physiques favorables qu’il reste encore à élucider, certaines de nos simulations conduisent à une instabilité secondaire qui prend la forme d’une croissance exponentielle de modes toroïdaux de grande échelle, typiquement  $\ell = 1$  et  $m \in [0, 1]$  avec une structure radiale pouvant présenter plusieurs changements de direction (voir la partie droite de la Fig. 2.5). Ces instabilités secondaires, ou collectives, signent principalement dans la composante toroïdale de l’écoulement mais ne conduisent pas à l’apparition d’escaliers thermohalins en température ou composition comme observés dans les calculs locaux triplement périodiques de STELLMACH et al. (2011). L’approximation de périodicité suivant la direction verticale, ou autrement dit l’absence de couches limites thermiques et compositionnelles, semble avoir un impact crucial sur la nature des instabilités collectives observées. Les quelques modèles locaux non périodiques suivant la direction verticale conduisent en effet à des résultats beaucoup plus comparables aux nôtres (YANG, VERZICCO ET LOHSE, 2016). Dans les années à venir et afin de progresser sur cette thématique, on peut ébaucher le plan de travail suivant :

1. Clarifier les mécanismes physiques responsables des instabilités secondaires en géométrie globale et comprendre leur différence avec les modèles locaux périodiques,
2. Étudier l’impact de la rotation et/ou du champ magnétique sur la génération des doigts de sel et sur les instabilités collectives quand  $Ro_c$  varie,
3. Étudier le régime de la semi-convection avec ou sans rotation, et avec ou sans champ magnétique, en géométrie sphérique.

À terme, ces études devraient nous permettre de mieux comprendre la dynamique des régions double diffusives dans les intérieurs planétaires. Dans le cadre des planètes géantes, mieux comprendre l’impact dynamique de zones semi-convectives pourrait nous permettre de mieux appréhender les processus d’axisymétrisation du champ magnétique ou les mécanismes contrôlant la profondeur des jets zonaux.



# Annexe A

## Curriculum vitæ, activités d’encadrement et liste de publications

### A.1 Curriculum vitæ

#### A.1.1 Identité

Thomas Gastine, 38 ans, né le 28/05/1983 à Grenoble, pacsé, 2 enfants. Chargé de recherche CNRS. [Institut de Physique du Globe de Paris](#), Équipe de Géomagnétisme, 1 rue Jussieu, 75238 Paris cedex 5, France. email : [gastine@ipgp.fr](mailto:gastine@ipgp.fr), tel : 01 83 95 74 54, web : <http://www.ipgp.fr/~gastine/>

#### A.1.2 Formation

**2006-2009** Doctorat en Astrophysique, [IRAP](#), [Université de Toulouse](#), “Étude de l’interaction convection-pulsations et application aux Céphéïdes”, sous la direction de Boris Dintrans, thèse soutenue le 18/11/2009, [tel-00439968](tel:00439968)

**2005-2006** Master recherche en Astrophysique, IRAP/Université de Toulouse

**2003-2006** Élève ingénieur à [ISAE-Supaero](#), Toulouse

#### A.1.3 Expérience professionnelle

**2016-** Chargé de recherche au CNRS, [IPGP](#), équipe de Géomagnétisme, Paris

**2010-2016** Post-doctorant au [Max Planck Institut für Sonnensystemforschung](#) (MPS), département “Planets & Comets” avec Johannes Wicht et Ulrich Christensen, Göttingen, Allemagne

**2009-2010** ATER à l’IRAP/Université de Toulouse

### A.2 Publications et communications scientifiques

La liste ci-dessous est également accessible sur mon [site IPGP](#) ou sous forme de [bibliothèque NASA/ADS](#). Au 21/10/2021, date de finalisation de ce document, les 45 publications de rang A listées ci-dessous totalisent 2073 citations pour un h-index de 25 (source NASA/ADS).

#### A.2.1 Revues internationales à comité de lecture

- [1] T. GASTINE et J. WICHT. “Stable stratification promotes multiple zonal jets in a turbulent Jovian dynamo model”. In : *Icarus* 368 (2021), p. 114514. DOI : [10.1016/j.icarus.2021.114514](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2021.114514).
- [2] R. LAGO, T. GASTINE, T. DANNERT, M. RAMPP et J. WICHT. “MagIC v5.10 : a two-dimensional MPI distribution for pseudo-spectral magneto hydrodynamics simulations in spherical geometry”. In : *Geoscientific Model Development* accepted for publication (2021), p. 1-31. DOI : [10.5194/gmd-2021-216](https://doi.org/10.5194/gmd-2021-216).
- [3] T. SCHWAIGER, T. GASTINE et J. AUBERT. “Relating force balances and flow length scales in geodynamo simulations”. In : *Geophysical Journal International* 224.3 (2021), p. 1890-1904. DOI : [10.1093/gji/ggaa545](https://doi.org/10.1093/gji/ggaa545).
- [4] T. TASSIN, T. GASTINE et A. FOURNIER. “Geomagnetic semblance and dipolar-multipolar transition in top-heavy double-diffusive geodynamo models”. In : *Geophysical Journal International* 226.3 (2021), p. 1897-1919. DOI : [10.1093/gji/ggab161](https://doi.org/10.1093/gji/ggab161).

- [5] T. GASTINE, J. AUBERT et A. FOURNIER. “Dynamo-based limit to the extent of a stable layer atop Earth’s core”. In : *Geophysical Journal International* 222.2 (2020), p. 1433-1448. DOI : [10.1093/gji/ggaa250](https://doi.org/10.1093/gji/ggaa250).
- [6] R. RAYNAUD, J. GUILLET, H.-T. JANKA et T. GASTINE. “Magnetar formation through a convective dynamo in protoneutron stars”. In : *Science Advances* 6.11 (2020), eaay2732. DOI : [10.1126/sciadv.aay2732](https://doi.org/10.1126/sciadv.aay2732).
- [7] J. WICHT et T. GASTINE. “Numerical simulations help revealing the dynamics underneath the clouds of Jupiter”. In : *Nature Communications* 11, 2886 (2020), p. 2886. DOI : [10.1038/s41467-020-16680-0](https://doi.org/10.1038/s41467-020-16680-0).
- [8] T. GASTINE. “pizza : an open-source pseudo-spectral code for spherical quasi-geostrophic convection”. In : *Geophysical Journal International* 217.3 (2019), p. 1558-1576. DOI : [10.1093/gji/ggz103](https://doi.org/10.1093/gji/ggz103).
- [9] T. SCHWAIGER, T. GASTINE et J. AUBERT. “Force balance in numerical geodynamo simulations : a systematic study”. In : *Geophysical Journal International* 219 (2019), S101-S114. DOI : [10.1093/gji/ggz192](https://doi.org/10.1093/gji/ggz192).
- [10] J. WICHT, T. GASTINE et L. D. V. DUARTE. “Dynamo Action in the Steeply Decaying Conductivity Region of Jupiter-Like Dynamo Models”. In : *Journal of Geophysical Research (Planets)* 124.3 (2019), p. 837-863. DOI : [10.1029/2018JE005759](https://doi.org/10.1029/2018JE005759).
- [11] J. WICHT, T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et W. DIETRICH. “Dynamo action of the zonal winds in Jupiter”. In : *A&A* 629, A125 (2019), A125. DOI : [10.1051/0004-6361/201935682](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935682).
- [12] L. D. V. DUARTE, J. WICHT et T. GASTINE. “Physical conditions for Jupiter-like dynamo models”. In : *Icarus* 299 (2018), p. 206-221. DOI : [10.1016/j.icarus.2017.07.016](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.07.016).
- [13] R. RAYNAUD, M. RIEUTORD, L. PETITDEMANGE, T. GASTINE et B. PUTIGNY. “Gravity darkening in late-type stars. I. The Coriolis effect”. In : *A&A* 609, A124 (2018), A124. DOI : [10.1051/0004-6361/201731729](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731729).
- [14] J. AUBERT, T. GASTINE et A. FOURNIER. “Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 813 (2017), p. 558-593. DOI : [10.1017/jfm.2016.789](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.789).
- [15] W. DIETRICH, T. GASTINE et J. WICHT. “Reversal and amplification of zonal flows by boundary enforced thermal wind”. In : *Icarus* 282 (2017), p. 380-392. DOI : [10.1016/j.icarus.2016.09.013](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.09.013).
- [16] L. D. V. DUARTE, J. WICHT, M. K. BROWNING et T. GASTINE. “Helicity inversion in spherical convection as a means for equatorward dynamo wave propagation”. In : *MNRAS* 456.2 (2016), p. 1708-1722. DOI : [10.1093/mnras/stv2726](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2726).
- [17] T. GASTINE, J. WICHT et J. AUBERT. “Scaling regimes in spherical shell rotating convection”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 808 (2016), p. 690-732. DOI : [10.1017/jfm.2016.659](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.659).
- [18] M. H. HEIMPEL, T. GASTINE et J. WICHT. “Simulation of deep-seated zonal jets and shallow vortices in gas giant atmospheres”. In : *Nature Geoscience* 9.1 (2016), p. 19-23. DOI : [10.1038/ngeo2601](https://doi.org/10.1038/ngeo2601).
- [19] H. MATSUI et al. “Performance benchmarks for a next generation numerical dynamo model”. In : *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 17.5 (2016), p. 1586-1607. DOI : [10.1002/2015GC006159](https://doi.org/10.1002/2015GC006159).
- [20] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN, L. D. V. DUARTE et A. REINERS. “Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells”. In : *Geophysical Journal International* 204.2 (2016), p. 1120-1133. DOI : [10.1093/gji/ggv506](https://doi.org/10.1093/gji/ggv506).
- [21] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN, S. J. WOLK et K. POPPENHAEGER. “Approaching a realistic force balance in geodynamo simulations”. In : *Proceedings of the National Academy of Science* 113.43 (2016), p. 12065-12070. DOI : [10.1073/pnas.1608998113](https://doi.org/10.1073/pnas.1608998113).
- [22] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU. “Turbulent Rayleigh-Bénard convection in spherical shells”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 778 (2015), p. 721-764. DOI : [10.1017/jfm.2015.401](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.401).
- [23] M. GAURAT, L. JOUVE, F. LIGNIÈRES et T. GASTINE. “Evolution of a magnetic field in a differentially rotating radiative zone”. In : *A&A* 580, A103 (2015), A103. DOI : [10.1051/0004-6361/201526125](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526125).
- [24] L. JOUVE, T. GASTINE et F. LIGNIÈRES. “Three-dimensional evolution of magnetic fields in a differentially rotating stellar radiative zone”. In : *A&A* 575, A106 (2015), A106. DOI : [10.1051/0004-6361/201425240](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201425240).
- [25] R. K. YADAV, U. R. CHRISTENSEN, J. MORIN, T. GASTINE, A. REINERS, K. POPPENHAEGER et S. J. WOLK. “Explaining the Coexistence of Large-scale and Small-scale Magnetic Fields in Fully Convective Stars”. In : *ApJ* 813.2, L31 (2015), p. L31. DOI : [10.1088/2041-8205/813/2/L31](https://doi.org/10.1088/2041-8205/813/2/L31).
- [26] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN et A. REINERS. “Formation of starspots in self-consistent global dynamo models : Polar spots on cool stars”. In : *A&A* 573, A68 (2015), A68. DOI : [10.1051/0004-6361/201424589](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424589).
- [27] T. GASTINE, M. H. HEIMPEL et J. WICHT. “Zonal flow scaling in rapidly-rotating compressible convection”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 232 (2014), p. 36-50. DOI : [10.1016/j.pepi.2014.03.011](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2014.03.011).
- [28] T. GASTINE, J. WICHT, L. D. V. DUARTE, M. H. HEIMPEL et A. BECKER. “Explaining Jupiter’s magnetic field and equatorial jet dynamics”. In : *Geophys. Res. Lett.* 41.15 (2014), p. 5410-5419. DOI : [10.1002/2014GL060814](https://doi.org/10.1002/2014GL060814).

- [29] T. GASTINE, R. K. YADAV, J. MORIN, A. REINERS et J. WICHT. “From solar-like to antisolar differential rotation in cool stars”. In : *MNRAS* 438.1 (2014), p. L76-L80. DOI : [10.1093/mnras1/slt162](https://doi.org/10.1093/mnras1/slt162).
- [30] S. C. MARSDEN et al. “A BCool magnetic snapshot survey of solar-type stars”. In : *MNRAS* 444.4 (2014), p. 3517-3536. DOI : [10.1093/mnras/stu1663](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1663).
- [31] L. D. V. DUARTE, T. GASTINE et J. WICHT. “Anelastic dynamo models with variable electrical conductivity : An application to gas giants”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 222 (2013), p. 22-34. DOI : [10.1016/j.pepi.2013.06.010](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2013.06.010).
- [32] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. R. CHRISTENSEN et J. WICHT. “What controls the magnetic geometry of M dwarfs?” In : *A&A* 549, L5 (2013), p. L5. DOI : [10.1051/0004-6361/201220317](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220317).
- [33] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU. “Zonal flow regimes in rotating anelastic spherical shells : An application to giant planets”. In : *Icarus* 225.1 (2013), p. 156-172. DOI : [10.1016/j.icarus.2013.02.031](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.02.031).
- [34] R. K. YADAV, T. GASTINE et U. R. CHRISTENSEN. “Scaling laws in spherical shell dynamos with free-slip boundaries”. In : *Icarus* 225.1 (2013), p. 185-193. DOI : [10.1016/j.icarus.2013.02.030](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.02.030).
- [35] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN et L. D. V. DUARTE. “Consistent Scaling Laws in Anelastic Spherical Shell Dynamos”. In : *ApJ* 774.1, 6 (2013), p. 6. DOI : [10.1088/0004-637X/774/1/6](https://doi.org/10.1088/0004-637X/774/1/6).
- [36] T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et J. WICHT. “Dipolar versus multipolar dynamos : the influence of the background density stratification”. In : *A&A* 546, A19 (2012), A19. DOI : [10.1051/0004-6361/201219799](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219799).
- [37] T. GASTINE et J. WICHT. “Effects of compressibility on driving zonal flow in gas giants”. In : *Icarus* 219.1 (2012), p. 428-442. DOI : [10.1016/j.icarus.2012.03.018](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.03.018).
- [38] A. MORGENTHALER et al. “Long-term magnetic field monitoring of the Sun-like star  $\xi$  Bootis A”. In : *A&A* 540, A138 (2012), A138. DOI : [10.1051/0004-6361/201118139](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118139).
- [39] T. GASTINE et B. DINTRANS. “A test of time-dependent theories of stellar convection”. In : *A&A* 530, L7 (2011), p. L7. DOI : [10.1051/0004-6361/201116766](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116766).
- [40] T. GASTINE et B. DINTRANS. “Convective quenching of stellar pulsations”. In : *A&A* 528, A6 (2011), A6. DOI : [10.1051/0004-6361/201015631](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015631).
- [41] C. A. JONES, P. BORONSKI, A. S. BRUN, G. A. GLATZMAIER, T. GASTINE, M. S. MIESCH et J. WICHT. “Anelastic convection-driven dynamo benchmarks”. In : *Icarus* 216.1 (2011), p. 120-135. DOI : [10.1016/j.icarus.2011.08.014](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2011.08.014).
- [42] J.-F. DONATI et al. “Large-scale magnetic topologies of early M dwarfs”. In : *MNRAS* 390.2 (2008), p. 545-560. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2008.13799.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13799.x).
- [43] T. GASTINE et B. DINTRANS. “Direct numerical simulations of the  $\kappa$ -mechanism. I. Radial modes in the purely radiative case”. In : *A&A* 484.1 (2008), p. 29-42. DOI : [10.1051/0004-6361:20078936](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078936).
- [44] T. GASTINE et B. DINTRANS. “Direct numerical simulations of the  $\kappa$ -mechanism. II. Nonlinear saturation and the Hertzsprung progression”. In : *A&A* 490.2 (2008), p. 743-752. DOI : [10.1051/0004-6361:200809891](https://doi.org/10.1051/0004-6361:200809891).
- [45] J. MORIN et al. “Large-scale magnetic topologies of mid M dwarfs”. In : *MNRAS* 390.2 (2008), p. 567-581. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2008.13809.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13809.x).

## A.2.2 Chapitres de livre

- [1] J. WICHT, M. FRENCH, S. STELLMACH, N. NETTELMANN, T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et R. REDMER. “Modeling the Interior Dynamics of Gas Planets”. In : *Magnetic Fields in the Solar System*. Sous la dir. de H. LÜHR, J. WICHT, S. A. GILDER et M. HOLSCHNEIDER. T. 448. Astrophysics and Space Science Library. 2018, p. 7-81. DOI : [10.1007/978-3-319-64292-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-64292-5_2).

## A.2.3 Actes de colloques à comité de lecture

- [1] T. GASTINE et B. DINTRANS, “Numerical simulations of the  $\kappa$ -mechanism with convection”, In : *Astrophysics and Space Science* 328 (2010), p. 245-251, DOI : [10.1007/s10509-010-0276-3](https://doi.org/10.1007/s10509-010-0276-3)

## A.2.4 Conférences invitées dans des congrès

- [1] T. GASTINE, J. WICHT, et L. D. V. DUARTE, *Modelling the internal dynamics of Jupiter*, workshop “Dynamo action : from the lab to the stars”, 09/2019, Paris
- [2] T. GASTINE, J. WICHT, et J. AUBERT, *Scaling regimes in spherical shell rotating convection*, conférence “Rotating convection from the Lab to the Stars”, 05/2018, Leiden

- [3] T. GASTINE, J. WICHT, et J. AUBERT, *Modelling the internal dynamics of Jupiter : success and challenges*, “Rocks and Stars conference”, 09/2017, Göttingen
- [4] T. GASTINE, J. WICHT, J. M. AURNOU et M. HEIMPEL, *Zonal flow regimes in rotating anelastic spherical shells*, AGU Fall Meeting, 12/2013, San Francisco
- [5] T. GASTINE et J. WICHT, *Anelastic models of the zonal winds in gas giants*, AGU Fall Meeting, 12/2012, San Francisco

### A.2.5 Communications à des congrès

- [1] T. GASTINE, J. AUBERT et A. FOURNIER, *Dynamical influence of a stable layer underneath the core-mantle boundary*, IAGA, 05/2019, Montréal
- [2] T. GASTINE, J. WICHT et L. D. V. DUARTE, *Modelling the internal dynamics of Jupiter*, conférence “MHD Days 2018”, 11/2018, Dresden
- [3] T. GASTINE, J. WICHT et J. AUBERT, *Scaling regimes in spherical shell rotating convection*, conférence “Rotating convection from the Lab to the Stars”, 05/2018, Leiden
- [4] T. GASTINE, J. WICHT et J. AUBERT, *Scaling regimes in spherical shell rotating convection*, conférence “MHD Days 2016”, 12/2016, Göttingen
- [5] T. GASTINE, J. WICHT et J. AURNOU, *Rayleigh-Bénard convection in spherical shells*, conférence “MHD Days 2015”, 11/2015, Ilmenau
- [6] T. GASTINE, J. WICHT, M. HEIMPEL, L. D. V. DUARTE, & A. BECKER, *Explaining Jupiter’s internal dynamics*, IUGG 2015, 06/2015, Prague
- [7] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU, *Turbulent Rayleigh-Bénard convection in spherical shells*, “Rayleigh Bénard Conference”, 06/2015, Göttingen
- [8] T. GASTINE, R. K. YADAV, J. MORIN, A. REINERS et J. WICHT, *From solar-like to antisolar differential rotation in cool stars*, conférence “MHD days 2014”, 12/2014, Potsdam
- [9] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. R. CHRISTENSEN, J. WICHT et R. K. YADAV, *What controls the magnetic field of M dwarfs ?*, Symposium IAU 302, 08/2013, Biarritz
- [10] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU, *Zonal flow regimes in rotating anelastic spherical shells*, workshop “Dynamo iGdR”, 07/2013, Ascona
- [11] T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et J. WICHT, *Dipolar and multipolar dynamos : the influence of the density stratification*, AGU Fall Meeting, 12/2012, San Francisco
- [12] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. R. CHRISTENSEN et J. WICHT, *What controls magnetic fields of M dwarfs ?*, conférence “B-cool 2012”, 10/2012, Göttingen
- [13] T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et J. WICHT, *Anelastic dynamo models of Jupiter and Saturn*, conférence “MHD Days 2012”, 10/2012, Nice
- [14] T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et J. WICHT, *Anelastic dynamo models of gas giants*, EGU General Assembly, 04/2012, Vienne
- [15] T. GASTINE et J. WICHT, *Effects of density stratification in driving zonal flow in gas giants*, AGU Fall Meeting, 12/2011, San Francisco
- [16] T. GASTINE et J. WICHT, *Compressibility effects on driving zonal flow in gas giants*, EPSC-DPS Joint Meeting, 10/2011, Nantes
- [17] T. GASTINE et J. WICHT, *Effects of density stratification in driving zonal winds in gas giants*, workshop “Dynamo iGdR”, 09/2011, Cargèse
- [18] T. GASTINE et B. DINTRANS, *Nonlinear simulations of the convection-pulsation coupling*, conférence annuelle de la SF2A, 06/2011, Paris
- [19] T. GASTINE et B. DINTRANS, *Numerical simulations of the  $\kappa$ -mechanism with convection*, conférence du réseau HELAS “Synergies between solar and stellar modelling”, 06/2009, Rome
- [20] T. GASTINE et B. DINTRANS, *Direct Numerical Simulations of the  $\kappa$ -mechanism*, conférence annuelle de la SF2A, 06/2008, Paris

### A.2.6 Séminaires invités

- [1] T. GASTINE, J. WICHT et L. D. V. DUARTE, *Modelling the internal dynamics of Jupiter : success and challenges*, LPG Nantes, 05/2019, Nantes
- [2] T. GASTINE, *Numerical models of turbulent convection in spherical shells*, Université de Cottbus, 11/2018, Cottbus

- [3] T. GASTINE, J. WICHT, M. HEIMPEL, L. D. V. DUARTE et A. BECKER, *Explaining Jupiter's internal dynamics*, séminaire labo Exeter University, 04/2015, Exeter
- [4] T. GASTINE, J. WICHT, M. HEIMPEL, L. D. V. DUARTE et A. BECKER, *Explaining Jupiter's internal dynamics*, séminaire labo IRAP, 02/2015, Toulouse
- [5] T. GASTINE, J. WICHT, M. HEIMPEL, L. D. V. DUARTE et A. BECKER, *Explaining Jupiter's internal dynamics*, séminaire labo IPGP, 11/2014, Paris
- [6] T. GASTINE, J. WICHT, M. HEIMPEL et J. M. AURNOU, *Modelling the zonal winds of the giant planets*, DAMTP, 10/2014, Cambridge
- [7] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. .R. CHRISTENSEN, J. WICHT et R. .K. YADAV, *Bridging planetary and stellar dynamos : can we learn something about the magnetism of M dwarfs ?*, IPAG, Université de Grenoble, 11/2013, Grenoble
- [8] T. GASTINE, J. WICHT, M. HEIMPEL et J. M. AURNOU, *Modelling the zonal winds of the giant planets*, IPGP, 10/2013, Paris
- [9] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. .R. CHRISTENSEN, J. WICHT et R. .K. YADAV, *Bridging planetary and stellar dynamos : can we learn something about the magnetism of M dwarfs ?*, LUPM, Université de Montpellier, 10/2013, Montpellier
- [10] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU, *Modelling the zonal winds of giant planets*, Geophysics Institute, Université de Göttingen, 04/2013, Göttingen
- [11] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. .R. CHRISTENSEN, J. WICHT et R. .K. YADAV, *From planetary to stellar dynamos : what can we learn about the magnetic field of M dwarfs ?*, LERMA, 04/2013, Paris
- [12] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. .R. CHRISTENSEN, J. WICHT et R. .K. YADAV, *Bridging the gap between stellar and planetary dynamos : what can we learn about the magnetic field of M dwarfs ?*, IRAP, Université de Toulouse, 02/2013, Toulouse
- [13] T. GASTINE, *Modelling the zonal winds of the four giant planets*, Department of Physics, University of Alberta, 11/2012, Edmonton
- [14] T. GASTINE, *Modelling the zonal winds of the gas giants*, CeNoS, University of Münster, 06/2012, Münster
- [15] T. GASTINE, *Effects of compressibility on driving zonal winds in giant planets*, ISTerre, Université de Grenoble, 03/2012, Grenoble
- [16] T. GASTINE, *Effects of density stratification in driving zonal winds in gas giants*, School of Mathematics, University of Leeds, 01/2012, Leeds

## A.3 Enseignement, formation et diffusion de la culture scientifique

### A.3.1 Enseignement

Depuis 2020, je suis responsable du module de M1 « Modélisation Numérique » à l'IPGP. Ce cours comporte 15h de cours magistraux ainsi que 16h de TP/TD. Ce cours vise à introduire la notion de modélisation numérique en s'appuyant sur la méthode des différences finies. Les notions d'analyse numérique comme la consistance ou la stabilité sont développées et illustrées à partir de problèmes physiques classiques (équation de la chaleur, équation de transport). Ces cours s'appuient sur des travaux pratiques réalisés en python.

En 2020 et 2021, j'ai assuré l'ensemble des cours, la rédaction intégrale des notes de cours (disponibles [ici](#)) ainsi que le développement de tous les TP.

En plus de cette activité, j'interviens occasionnellement sur des TP de modélisation en M2 et sur une formation d'initiation à  $\text{\LaTeX}$  (typiquement entre 8 et 12h de TP par an).

Enfin, j'ai eu l'occasion en janvier 2020 de présenter pour la deuxième fois un cours sur les méthodes spectrales avec en exemple le code `MagIC` dans le cadre de l'école [Astrosim 2](#). Pour cela, j'ai donné 3 cours de 2h chacun ainsi que 3 séances de TP/TD sur ordinateur d'une demi-journée chacune. Ce cours permet à des étudiants en thèse en astrophysique de se familiariser avec un panel varié de méthodes numériques en utilisant des logiciels libres bien implantés dans la communauté.

### A.3.2 Encadrement

Entre 2011 et 2014, j'ai co-encadré avec Johannes Wicht la thèse de Lúcia Duarte. Cette thèse, soutenue le 7/02/2014, s'inscrivait dans le cadre du projet *Planetmag*, à l'origine du financement de mon postdoc lors de mon séjour au MPS. Il s'agissait de développer des modèles numériques plus réalistes de la dynamo des planètes géantes gazeuses Jupiter et Saturne. Publications associées : DUARTE, GASTINE et WICHT (2013) et DUARTE, WICHT et GASTINE (2018).

Entre 2012 et 2015, j'ai co-encadré avec Ulrich Christensen la thèse de Rakesh Yadav. Cette thèse, soutenue le 23/01/2015, portait sur l'étude de l'influence du contraste de densité sur les dynamos des planètes géantes et des étoiles



de faible masse. Il s'agissait notamment d'établir des lois d'échelle de l'amplitude moyenne du champ magnétique et du champ de vitesse en s'appuyant sur un ensemble de simulations numériques anélastiques réalisées avec MagIC. Publications associées : YADAV et al. (2013), YADAV, GASTINE et CHRISTENSEN (2013), YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN et REINERS (2015) et YADAV, GASTINE, CHRISTENSEN, DUARTE et REINERS (2016).

Entre 2016 et 2019, j'ai co-encadré avec Alexandre Fournier la thèse de Venkatesh Gopinath. Cette thèse, soutenue le 15/07/2019, était financée par le Centre Franco-Indien pour la promotion de la Recherche Avancée (CEFIPRA). L'objectif de ce travail était d'étudier les qualités/limitations de méthodes numériques dédiées à discrétiser l'avancement en temps des systèmes dynamiques, encore très peu utilisées en géosciences à l'heure actuelle. Pour ce faire, Venkatesh a considéré au cours de sa thèse un problème simplifié de convection en 2-D. Une publication de ses résultats est en cours de révision à *Journal of Computational Physics*.

Entre 2017 et 2020, j'ai co-encadré avec Julien Aubert la thèse de Tobias Schwaiger. Cette thèse, soutenue le 23/11/2020, était financé au travers du concours INSPIRE (EU H2020/Marie Curie/USPC 2017). L'objectif de ce travail était de mieux comprendre les différents équilibres de forces gouvernant les modèles numériques de la géodynamo. Elle s'appuyait sur la réalisation d'un grand nombre de simulations numériques réalisées avec le code MagIC. Publications associées : SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2019) et SCHWAIGER, GASTINE et AUBERT (2021).

Depuis septembre 2019, je co-dirige avec Alexandre Fournier la thèse de Théo Tassin (soutenance prévue en 2022) qui avait également effectué son stage de M2 avec nous. Son travail de thèse a pour objectif de mieux comprendre la physique de la convection double-diffusive. Déjà bien étudié dans le cadre de l'océan, ce phénomène physique reste encore peu connu dans le cadre de la géodynamo et des intérieurs planétaires. Là encore il s'agit d'une approche qui s'appuie sur des calculs haute performance sur les centres de calcul nationaux en utilisant le code MagIC. Publication associée : TASSIN, GASTINE et FOURNIER (2021).

Enfin, je co-encadre avec Alexandre Fournier le travail de post-doctorat de Mouloud Kessar financé dans le cadre du projet européen « Centre of Excellence for Exascale in Solid Earth » (ChESEE). Ce travail vise à établir l'intérêt éventuel des méthodes numériques de parallélisation en temps pour la modélisation de la convection dans le noyau terrestre en utilisant le code QG pizza.

## A.4 Transfert technologique, relations industrielles et valorisation

### A.4.1 Financements

J'ai obtenu en 2017 un financement du [Programme National de Planétologie](#) pour réaliser des modèles numériques de la géodynamo incluant une couche stratifiée stable sous la CMB. Ces travaux ont donné lieu à une publication acceptée en 2020 dans GJI (GASTINE, AUBERT et FOURNIER, 2020).

Je suis responsable pour le partenaire IPGP de l'ANR [RevEarth](#) (*Realistic modelling of Earth's magnetic field reversals*) portée par Nathanaël Schaeffer à ISTERre pour la période 2020-2023. Cette ANR vise à mieux comprendre les inversions du champ magnétique terrestre, notamment par la réalisation de simulations numériques de la géodynamo sur de très grandes échelles de temps.

Je suis responsable pour l'IPGP de l'ANR [COLOSSe](#) (Caractérisation des océans enfouis dans le Système Solaire externe) portée par Gaël Choblet au LPG Nantes pour la période 2021-2024. Cette ANR a pour objectif de mieux comprendre la dynamique interne des océans de sub-surface des satellites de glace de notre système solaire comme par exemple Europe ou Encelade.

### A.4.2 Développements logiciel

- [1] 2010- , développeur principal du code MagIC, logiciel libre pour modéliser les écoulements MHD en géométrie sphérique, <https://github.com/magic-sph/magic>, DOI : [10.5281/zenodo.4590225](https://doi.org/10.5281/zenodo.4590225)
- [2] 2018- , développeur principal du code pizza, logiciel libre pour modéliser les écoulements quasi-géostrophiques en 2-D, <https://github.com/magic-sph/pizza>

### A.4.3 Demandes de temps de calcul

J'obtiens régulièrement un soutien en heures de calcul sur les centres nationaux de GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif), de l'ordre de 5 millions d'heures mono-cœur par an. À titre indicatif, ce volume d'heures correspond d'après GENCI, en termes de valorisation, à une somme d'environ 40000 euros.

## A.5 Encadrement, animation et management de la recherche

Je suis régulièrement rapporteur pour les revues de rang A suivantes : [Astronomy & Astrophysics](#), [Geophysical Journal International](#), [Journal of Fluid Mechanics](#), [Monthly Notices of the Royal Astronomical Society](#), [Nature](#), [Icarus](#) et [Physics of the Earth and Planetary Interiors](#).

Depuis novembre 2016, je suis membre du Comité Thématique Astrophysique et Géophysique (CT4) de GENCI. Ce comité a pour objectif d'évaluer les demandes de temps de calcul sur les centres de calcul intensif nationaux de GENCI pour les thématiques scientifiques liées à l'Astrophysique et la Géophysique. Il y a en général deux sessions d'évaluation des dossiers par an avec en général entre 3 et 5 dossiers à évaluer pour chaque membre du comité.

Depuis mai 2021, je suis responsable de l'équipe de géomagnétisme de l'IPGP.



## Annexe B

# Publications significatives

Ce chapitre contient cinq publications illustrant différents aspects de mon travail de recherche :

- la dynamique interne des planètes géantes (publication [B.1](#))
- la dynamique des vents zonaux dans les intérieurs planétaires et stellaires (publication [B.2](#))
- les lois d'échelle des fluides convectifs en rotation (publication [B.3](#))
- l'étude de l'équilibre des forces contrôlant les dynamos numériques (publications [B.4](#))
- les modèles numériques de la géodynamo (publications [B.4](#) et [B.5](#))



## Effects of compressibility on driving zonal flow in gas giants

T. Gastine\*, J. Wicht

Max Planck Institut für Sonnensystemforschung, Max Planck Strasse 2, 37191 Katlenburg Lindau, Germany

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 14 October 2011

Revised 15 March 2012

Accepted 19 March 2012

Available online 27 March 2012

#### Keywords:

Atmospheres, Dynamics

Jupiter, Interior

Saturn, Interior

### ABSTRACT

The banded structures observed on the surfaces of the gas giants are associated with strong zonal winds alternating in direction with latitude. We use three-dimensional numerical simulations of compressible convection in the anelastic approximation to explore the properties of zonal winds in rapidly rotating spherical shells. Since the model is restricted to the electrically insulating outer envelope, we therefore neglect magnetic effects.

A systematic parametric study for various density scaleheights and Rayleigh numbers allows to explore the dependence of convection and zonal jets on these parameters and to derive scaling laws.

While the density stratification affects the local flow amplitude and the convective scales, global quantities and zonal jets properties remain fairly independent of the density stratification. The zonal jets are maintained by Reynolds stresses, which rely on the correlation between zonal and cylindrically radial flow components. The gradual loss of this correlation with increasing supercriticality hampers all our simulations and explains why the additional compressional source of vorticity hardly affects zonal flows.

All these common features may explain why previous Boussinesq models were already successful in reproducing the morphology of zonal jets in gas giants.

© 2012 Elsevier Inc. All rights reserved.

### 1. Introduction

The banded structures at the surfaces of Jupiter and Saturn are associated with prograde and retrograde zonal flows. In both planets, a large amplitude eastward equatorial jet ( $150 \text{ m s}^{-1}$  for Jupiter and  $300 \text{ m s}^{-1}$  for Saturn) is flanked by multiple alternating zonal winds of weaker amplitudes (typically tens of  $\text{m s}^{-1}$ ). This alternating pattern is observed up to the polar region (Porco et al., 2003).

Two competing types of models have tried to address the question of what drives the zonal winds and how deep they reach into the planet (see the review of Vasavada and Showman (2005)). In the “weather layer” hypothesis, zonal winds are confined to a very thin layer near the cloud level. Such shallow models, that rely on global circulation codes, successfully recover the observed alternating banded structures of zonal flows (e.g. Williams, 1978; Cho and Polvani, 1996). While earlier shallow models mostly produce rather retro- than prograde equatorial jet, this has been hampered in most recent approaches by adding additional forcing mechanisms, such as moist radiative relaxation at the equator (Scott and Polvani, 2008) or condensation of water vapor (Lian and Showman, 2010). In the “deep models”, the zonal winds are supposed to extend over the whole molecular envelope ( $\sim 10^4$  km). The direction, the amplitude and the number of jets are

reproduced, provided thin shells are assumed and convection is strongly driven (Heimpel et al., 2005).

The *in situ* measurement by the Galileo probe further stimulated the discussion. They showed that the velocity increases up to  $170 \text{ m s}^{-1}$  over the sampling depth between 0.4 and 22 bars (Atkinson et al., 1997). Though this result indicates that the amplitude of zonal winds increases well below the cloud level, it hardly proves the “deep models” since the probe has merely scratched the outermost 150 kms of Jupiter’s atmosphere (Vasavada and Showman, 2005).

Interior models of the giants planets suggest that hydrogen becomes metallic at about 1.5 Mbar, corresponding roughly to 0.85 Jupiter’s radius and 0.6 Saturn’s radius (Guillot, 1999; Guillot et al., 2004; Nettelmann et al., 2008). This has traditionally been used to independently model the dynamics of the molecular layer without regarding the conducting region. Lorentz forces and increasing density would prevent these strong zonal winds to penetrate significantly into the molecular layer, where timescales thus tend to be slower. However, shock waves experiments suggest that the increase of electrical conductivity is more gradual rather than abrupt (Nellis et al., 1996; Nellis, 2000). Liu et al. (2008) therefore argue that zonal jets must be confined to a thin upper layer (0.96 Jupiter’s radius and 0.86 Saturn’s radius), since deep zonal winds would already generate important Ohmic dissipation incompatible with the observed surface flux. However, Glatzmaier (2008) claimed that the kinetic model of Liu et al. (2008) is too simplistic

\* Corresponding author.

E-mail address: [gastine@mps.mpg.de](mailto:gastine@mps.mpg.de) (T. Gastine).

as this does not allow the magnetic field to adjust the differential rotation, which would severely reduce Ohmic dissipation.

Notwithstanding this open discussion, the fact that deep models successfully reproduce the primary properties of the zonal jets speaks in their favor. These models rely on 3-D numerical simulations of rapidly rotating shells (e.g. Christensen, 2001, 2002; Heimpel et al., 2005). When convection is strongly driven, the nonlinear inertial term  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  becomes influential and gives rises to Reynolds stresses, a statistical correlation between the convective flow components that allows to feed energy into zonal winds (e.g. Plaut et al., 2008).

Most of these simulations use the Boussinesq approximation, which assumes homogeneous reference state. This seems acceptable for terrestrial planets, but becomes rather dubious for gas planets, where for example the density increases by four orders of magnitude (Guillot, 1999; Anufriev et al., 2005).

The anelastic approximation we adopt here, provides a more realistic framework, which allows to incorporate the background density stratification, while filtering out fast acoustic waves (Lantz and Fan, 1999). Jones and Kuzanyan (2009) presented 3-D anelastic simulations that showed many interesting differences with the Boussinesq results. The zonal flows still remain large-scale and deep-seated but the local small-scale convection is severely affected by compressibility and strongly depends on radius. While the main equatorial band remains a robust common feature, it seems more difficult to get stable multiple high latitude jets, even in the most extreme parameters. Kaspi et al. (2009) used a modified anelastic approach neglecting viscous heating but including a more realistic equation of state. In their model, the zonal flows show a more pronounced variation in the direction of the rotation axis than in the work of Jones and Kuzanyan (2009). Evonuk (2008) and Glatzmaier et al. (2009) pointed out that compressibility adds a new vorticity source that could potentially help to generate Reynolds stresses that, *in fine*, maintain zonal flows.

Following these recent studies, we focus here on the effects of compressibility on rapidly rotating convection. The main aim of this paper is to determine the exact influence of the density background on the driving of zonal flows. To this end, we have conducted a systematic parametric study for various density stratifications and solutions that span weakly supercritical to strongly nonlinear convection.

In Section 2, we introduce the anelastic model and the numerical methods. Section 3 presents the results, starting with convection close to the onset and then progressing into the nonlinear regime. In Section 4, we concentrate on the zonal winds mechanism and related scaling laws, before concluding in Section 5.

## 2. The hydrodynamical model

### 2.1. The anelastic equations

We consider thermal convection of an ideal gas in a spherical shell of outer radius  $r_o$  and inner radius  $r_i$ , rotating at a constant frequency  $\Omega$  about the  $z$  axis. Being interested in the dynamics of the molecular region of gas giants, we assume that the mass is concentrated in the inner part, resulting in a gravity  $g \propto 1/r^2$ . We employ the anelastic approximation following Braginsky and Roberts (1995), Gilman and Glatzmaier (1981) and Lantz and Fan (1999). Thermodynamical quantities, such as density, temperature and pressure are decomposed into the sum of an adiabatic reference state (quantities with overbars) and a perturbation (primed quantities):

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad p = \bar{p} + p'. \quad (1)$$

When assuming  $g \propto 1/r^2$ , the polytropic and adiabatic reference state is given by (see Jones et al. (2011) for further details)

$$\bar{T}(r) = \frac{c_0}{(1-\eta)r} + 1 - c_0 \quad \text{and} \quad \bar{\rho}(r) = \bar{T}^m, \quad (2)$$

with

$$c_0 = \frac{\eta}{1-\eta} \left( \exp \frac{N_\rho}{m} - 1 \right) \quad \text{with} \quad N_\rho = \ln \frac{\bar{\rho}(r_i)}{\bar{\rho}(r_o)}. \quad (3)$$

Here  $\bar{T}$  and  $\bar{\rho}$  are the background temperature and density,  $m$  is the polytropic index,  $\eta = r_i/r_o$  is the aspect ratio and  $N_\rho$  corresponds to the number of density scale heights covered over the layer. For example,  $N_\rho = 3$  corresponds to a density contrast of approximately 20, while the largest value explored here ( $N_\rho = 5$ ) implies  $\bar{\rho}_i/\bar{\rho}_o \simeq 150$ .

We use a dimensionless formulation, where outer boundaries reference values serve to non-dimensionalise density and temperature. The shell thickness  $d = r_o - r_i$  is used as a length scale, while the viscous diffusion time  $d^2/\nu$  serves as the time scale,  $\nu$  being the constant kinematic viscosity. Entropy is expressed in units of  $\Delta s$ , the small imposed entropy contrast over the layer. The anelastic continuity equation is

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \quad (4)$$

while the dimensionless momentum equation is then

$$\mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla \frac{p'}{\bar{\rho}} + \frac{\text{RaE}}{\text{Pr}} \frac{r^2}{r_o^2} \mathbf{s} \mathbf{e}_r + \frac{\text{E}}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{u}$ ,  $p$  and  $s$  are velocity, pressure and entropy, respectively.  $\mathbf{S}$  is the traceless rate-of-strain tensor with a constant kinematic viscosity, given by

$$\mathbf{S} = \bar{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right). \quad (6)$$

The dimensionless entropy equation then reads

$$\bar{\rho} \bar{T} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{T} \nabla s) + \text{Di} \bar{\rho} S^2, \quad (7)$$

where thermal diffusivity is assumed to be constant. As stated by Jones and Kuzanyan (2009), in anelastic simulations with large density stratification, viscous heating plays a significant role in the global energy balance. It involves the dissipation parameter Di (e.g. Anufriev et al., 2005), that is given by

$$\text{Di} = \frac{\eta \text{Pr} (e^{N_\rho/m} - 1)}{\text{Ra}}. \quad (8)$$

In this formulation, turbulent viscosity is expected to dominate over molecular viscosity and therefore thermal diffusion relies mainly on entropy diffusion rather than on temperature diffusion (Braginsky and Roberts, 1995; Lantz and Fan, 1999; Jones and Kuzanyan, 2009, 2011). That is why, the turbulent heat flux has been assumed to be proportional to the entropy gradient as in the mixing-length theory (Vitense, 1953; Böhm-Vitense, 1958).

In addition to the two anelastic parameters (the polytropic index  $m$  and the density stratification  $N_\rho$ ) and the aspect ratio  $\eta$ , the three non-dimensional parameters that control the system of Eqs. (4), (5) and (7) are the Ekman number

$$\text{E} = \frac{\nu}{\Omega d^2}, \quad (9)$$

the Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (10)$$

and the Rayleigh number

$$\text{Ra} = \frac{g_o d^3 \Delta s}{c_p \nu \kappa}, \quad (11)$$

$g_0$  being the gravity at the outer radius,  $c_p$  the specific heat, and  $\kappa$  the thermal diffusivity. This definition of the Rayleigh number is based on the entropy jump over the layer and on values of the physical quantities at the outer boundary. However, for analyzing where convection sets in first, the radial dependence of the diffusive entropy gradient has to be considered. This can be cast into a depth-dependent Rayleigh number:

$$\mathcal{R} = \frac{gd^4}{c_p \nu \kappa} \left| \frac{ds_c}{dr} \right|, \quad (12)$$

where  $s_c$  is the solution of (see Jones et al., 2011)

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla s_c) = 0. \quad (13)$$

In our simulations, thermal and viscous diffusivities are assumed to be constant, but gravity and entropy vary with radius. Gravity is decreasing outward (as  $g \propto 1/r^2$ ), but the entropy gradient is inversely proportional to  $\bar{\rho} T$  (Eq. (13)) and therefore increases rapidly toward the surface for large density stratifications. As a consequence, we can see in Fig. 1 that this local Rayleigh number increases outward for density stratification larger than 3, while it increases downward for weaker density stratifications.

Several authors argued that Rayleigh numbers at mid-depth may offer a more meaningful reference value (e.g. Unno et al., 1960; Gough et al., 1976; Glatzmaier and Gilman, 1981). Here we follow Kaspi et al. (2009), who suggest to use a mass-weighted average defined as

$$\langle \mathcal{R} \rangle_\rho = \frac{d^4}{c_p \nu \kappa} \left\langle g \left| \frac{ds_c}{dr} \right| \right\rangle_\rho, \quad (14)$$

where the average is defined as  $\langle \dots \rangle_\rho = \int_{r_i}^{r_o} (\dots) \bar{\rho} r^2 dr / \int_{r_i}^{r_o} \bar{\rho} r^2 dr$  (Kaspi et al., 2009). This new definition of the Rayleigh number can be related to the usual one (Eq. (11)), by the coefficient  $\langle g | ds_c / dr | \rangle_\rho$ , that has an analytical solution for a polytropic index of 2

$$\left\langle g \left| \frac{ds_c}{dr} \right| \right\rangle_\rho = \frac{3N_\rho}{(1 - e^{-N_\rho})(1 + \eta e^{N_\rho/2} + \eta^2 e^{N_\rho})}. \quad (15)$$

Moreover, in the limit of small viscosity and thermal diffusivity, the force balance is expected to become independent on viscosity (low Ekman number). Therefore, following Christensen (2002) and Christensen and Aubert (2006), it is more relevant to consider a modified Rayleigh number that does not depend anymore on diffusivities, defined as

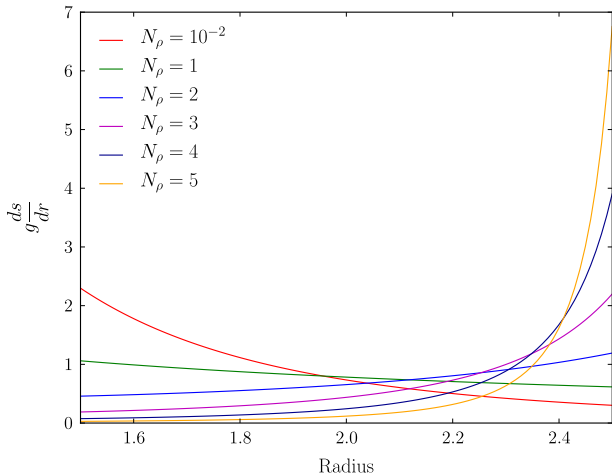


Fig. 1. Radial profile of  $g|ds_c/dr|$  for different background density stratifications  $N_\rho = [10^{-2}, 1, 2, 3, 4, 5]$ .

$$\langle \text{Ra}^* \rangle_\rho = \frac{1}{c_p \Omega^2} \left\langle g \left| \frac{ds_c}{dr} \right| \right\rangle_\rho = \langle \mathcal{R} \rangle_\rho E^2 \text{Pr}^{-1}. \quad (16)$$

To get a non-dimensional measure of the radial heat transport that is also independent of the thermal diffusivity, we use a modified Nusselt number

$$\text{Nu}^* = \frac{q}{\rho T \Omega d^2 (ds_c/dr)} = \text{Nu} E \text{Pr}^{-1}. \quad (17)$$

where  $q$  is the heat flux. Once the simulation has reached the non-linear saturation, the time-average of this modified Nusselt number should become constant with radius as there is no internal heat source in the system. Therefore, there is no need to consider mass-weighted average of this parameter.

Finally, it is also useful to analyze our simulations in terms of an alternate Rayleigh number based on the heat flux rather than on the entropy contrast  $\Delta s$

$$\text{Ra}_q^* = \frac{qg}{c_p \rho T \Omega^3 d^2}. \quad (18)$$

This flux-based Rayleigh number can be related to the modified Nusselt number as follows:

$$\text{Ra}_q^* = \frac{g}{c_p \Omega^2} \left| \frac{ds_c}{dr} \right| \text{Nu}^* = \text{Ra}^* \text{Nu}^*. \quad (19)$$

Once again, this number varies with radius, and therefore it is useful to consider the mass-weighted average counterpart of this quantity

$$\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = \langle \text{Ra}^* \rangle_\rho \text{Nu}^*. \quad (20)$$

## 2.2. The numerical method

The numerical simulations of this study have been carried out with a modified version of the code MagIC (Wicht, 2002). The new anelastic version has been tested and validated against different compressible convection and dynamo benchmarks (Jones et al., 2011). To solve the system of Eqs. (4), (5) and (7) in spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$ , the mass flux  $\bar{\rho} u$  is decomposed into a poloidal and a toroidal contribution

$$\bar{\rho} u = \nabla \times (\nabla \times W e_r) + \nabla \times Z e_r, \quad (21)$$

where  $W$  and  $Z$  are the poloidal and toroidal potentials.  $W$ ,  $Z$ ,  $p$  and  $s$  are then expanded in spherical harmonic functions up to degree  $\ell_{\max}$  in the angular variables  $\theta$  and  $\phi$  and in Chebyshev polynomials up to degree  $N_r$  in the radial direction. The equations for  $W$  and  $Z$  are obtained by taking the horizontal part of the divergence and the radial component of the curl of Eq. (5), respectively. A more exhaustive description of the numerical method and spectral transforms involved in the computation can be found in Gilman and Glatzmaier (1981) and in Christensen and Wicht (2007).

## 2.3. Boundary conditions

In all the simulations presented in this study, we have assumed constant entropy and stress-free boundary conditions for the velocity at both limits. Under the anelastic approximation, the non-penetrating stress-free boundary conditions is modified compared to the usual Boussinesq one as it now involves the background density

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2 \bar{\rho}} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2 \bar{\rho}} Z \right) = 0 \quad \text{for } r = [r_i, r_o]. \quad (22)$$

The non-penetrating condition of the radial motion is not affected by the anelastic approximation and remains  $u_r = 0$  (or  $W = 0$ ) at both limits.

### 3. Physical properties of compressible convection

We have fixed the aspect ratio  $\eta = 0.6$  to the lower value suggested for the molecular to metallic hydrogen transition in Jupiter ( $0.85R_J$ ) and Saturn ( $0.6R_S$ ) (e.g. Liu et al., 2008). This limits the numerical difficulties associated with thinner shells and therefore allows to reach higher density stratification. The Ekman number is kept fixed at  $E = 10^{-4}$ , which is larger than the most extreme values chosen by Jones and Kuzanyan (2009) but allows us to conduct a large number of simulations. Following previous Boussinesq studies (e.g. Christensen, 2002), the Prandtl number is set to 1, while the polytropic index is  $m = 2$  following Jones and Kuzanyan (2009). Being mostly interested in the effects of density stratification on zonal flow generation, we have performed simulations at five different values of  $N_\rho$  ( $10^{-2}, 1, 2, 3, 4, 5$ ) that span the range from nearly Boussinesq to a density contrast of 150. In the gas giants, the density jump between the 1 bar level and the bottom of the molecular region corresponds to  $N_\rho \simeq 8.5$  (e.g. Guillot, 1999; Nettelmann et al., 2008). For numerical reasons, we cannot afford to increase  $N_\rho$  beyond 5. However, since the density gradient decreases rapidly with depth,  $N_\rho = 5$  covers already 99% of the molecular envelope when starting at the metallic transition. The remaining rather thin upper atmosphere (roughly 500 kms) may involve additional physical effects such as radiative transfer, weather effects insolation, that we do not include in our model. For each of the stratifications used in this study, the Rayleigh number has been varied, starting from close to onset up to 140 times the critical value. Altogether more than 140 simulations have been computed, each running for at least 0.2 viscous time ensuring that the nonlinear saturation has been reached (see Table 2).

The numerical resolution increases from ( $N_r = 73, \ell_{\max} = 85$ ) for Boussinesq runs close to onset to ( $N_r = 161, \ell_{\max} = 341$ ) for the more demanding highly supercritical simulations with strong stratification. In the latter cases, we have resolved to imposing a twofold or a fourfold azimuthal symmetry, effectively solving for only half or a quarter of the spherical shell, respectively. A comparison of testruns with or without symmetries showed no significant statistical differences.

#### 3.1. Onset of convection

The linear stability analysis by Jones et al. (2009) shows that density stratification can have a significant influence both on the value of the critical Rayleigh number and on the location of the first unstable mode. To facilitate the comparison between different density contrasts, we have therefore computed the corresponding critical Rayleigh numbers (Table 1). The values have been obtained by trial and error, monitoring the growth or decay of initial disturbances at various Rayleigh numbers.

Fig. 2 emphasizes how the location of the convective instability changes when  $N_\rho$  is increased. In the nearly Boussinesq case ( $N_\rho = 10^{-2}$ ), convection sets in near the tangent cylinder. The convective columns show a strong prograde spiralling, typical for

**Table 1**

Values of the critical Rayleigh numbers (and flux-based counterparts) and azimuthal wavenumbers for different background density stratifications (with  $E = 10^{-4}$  and  $Pr = 1$ ).

$N_\rho$	$Ra_{\text{crit}}$	$Ra_q^*$	$\langle Ra_q^* \rangle_\rho$	$m_{\text{crit}}$
$10^{-2}$	$1.739 \times 10^5$	$1.739 \times 10^{-7}$	$2.666 \times 10^{-7}$	21
1	$5.175 \times 10^5$	$5.175 \times 10^{-7}$	$8.275 \times 10^{-7}$	34
2	$1.141 \times 10^6$	$1.141 \times 10^{-6}$	$1.496 \times 10^{-6}$	53
3	$1.529 \times 10^6$	$1.529 \times 10^{-6}$	$1.326 \times 10^{-6}$	72
4	$1.852 \times 10^6$	$1.852 \times 10^{-6}$	$9.023 \times 10^{-7}$	83
5	$2.341 \times 10^6$	$2.341 \times 10^{-6}$	$5.727 \times 10^{-7}$	93

**Table 2**

List of numerical simulations presented in this work. For all the simulations,  $E = 10^{-4}$  and  $Pr = 1$ .

$Ra/Ra_{\text{crit}}$	$\langle Ro \rangle_\rho$	$\langle Ro_{\text{pol}} \rangle_\rho$	$E_{\text{tor}}^{m=0}/E_{\text{kin}}$	Nu
<i><math>N_\rho = 10^{-2}</math>, symbol = red circle</i>				
1.0006	$4.49 \times 10^{-5}$	$2.49 \times 10^{-5}$	0.002	1.0002
1.0063	$1.03 \times 10^{-4}$	$5.71 \times 10^{-5}$	0.011	1.0009
1.035	$2.35 \times 10^{-4}$	$1.26 \times 10^{-4}$	0.058	1.0045
1.15	$5.04 \times 10^{-4}$	$2.45 \times 10^{-4}$	0.231	1.016
1.72	$1.25 \times 10^{-3}$	$4.41 \times 10^{-4}$	0.586	1.045
2.01	$1.52 \times 10^{-3}$	$4.96 \times 10^{-4}$	0.640	1.053
2.30	$1.98 \times 10^{-3}$	$5.86 \times 10^{-4}$	0.700	1.067
2.87	$2.85 \times 10^{-3}$	$7.19 \times 10^{-4}$	0.773	1.087
3.45	$3.37 \times 10^{-3}$	$8.23 \times 10^{-4}$	0.788	1.104
4.60	$5.05 \times 10^{-3}$	$1.24 \times 10^{-3}$	0.816	1.1800
5.75	$7.18 \times 10^{-3}$	$1.58 \times 10^{-3}$	0.843	1.23
7.47	$1.16 \times 10^{-2}$	$2.03 \times 10^{-3}$	0.902	1.31
8.62	$1.44 \times 10^{-2}$	$2.35 \times 10^{-3}$	0.916	1.37
10.35	$1.95 \times 10^{-2}$	$2.97 \times 10^{-3}$	0.929	1.51
11.50	$2.24 \times 10^{-2}$	$3.38 \times 10^{-3}$	0.933	1.61
14.37	$3.09 \times 10^{-2}$	$4.51 \times 10^{-3}$	0.942	1.89
17.25	$3.90 \times 10^{-2}$	$5.62 \times 10^{-3}$	0.945	2.20
20.12	$4.51 \times 10^{-2}$	$6.67 \times 10^{-3}$	0.943	2.52
23.00	$5.20 \times 10^{-2}$	$7.96 \times 10^{-3}$	0.939	2.89
28.75	$6.34 \times 10^{-2}$	$1.04 \times 10^{-2}$	0.932	3.65
34.50	$7.30 \times 10^{-2}$	$1.27 \times 10^{-2}$	0.924	4.44
40.25	$8.30 \times 10^{-2}$	$1.52 \times 10^{-2}$	0.915	5.29
46.00	$9.10 \times 10^{-2}$	$1.77 \times 10^{-2}$	0.903	6.04
51.75	$9.98 \times 10^{-2}$	$2.00 \times 10^{-2}$	0.893	6.81
57.50	$1.09 \times 10^{-1}$	$2.24 \times 10^{-2}$	0.883	7.60
69.00	$1.21 \times 10^{-1}$	$2.73 \times 10^{-2}$	0.874	9.22
86.25	$1.42 \times 10^{-1}$	$3.40 \times 10^{-2}$	0.863	11.53
115.0	$1.79 \times 10^{-1}$	$4.78 \times 10^{-2}$	0.845	16.21
143.7	$2.03 \times 10^{-1}$	$5.74 \times 10^{-2}$	0.830	19.50
<i><math>N_\rho = 1</math>, symbol = green triangle</i>				
1.0010	$5.36 \times 10^{-5}$	$3.66 \times 10^{-5}$	0.002	1.0001
1.0068	$1.31 \times 10^{-4}$	$8.82 \times 10^{-5}$	0.014	1.0008
1.0145	$1.95 \times 10^{-4}$	$1.30 \times 10^{-4}$	0.033	1.0018
1.024	$2.54 \times 10^{-4}$	$1.67 \times 10^{-4}$	0.055	1.0029
1.062	$4.23 \times 10^{-4}$	$2.58 \times 10^{-4}$	0.156	1.007
1.15	$6.99 \times 10^{-4}$	$3.79 \times 10^{-4}$	0.357	1.009
1.35	$1.15 \times 10^{-3}$	$5.29 \times 10^{-4}$	0.537	1.028
1.44	$1.48 \times 10^{-3}$	$6.17 \times 10^{-4}$	0.619	1.036
1.54	$1.78 \times 10^{-3}$	$6.88 \times 10^{-4}$	0.674	1.044
1.73	$2.40 \times 10^{-3}$	$8.13 \times 10^{-4}$	0.748	1.058
1.93	$3.11 \times 10^{-3}$	$9.47 \times 10^{-4}$	0.795	1.07
2.51	$6.21 \times 10^{-3}$	$1.48 \times 10^{-3}$	0.858	1.14
2.89	$9.23 \times 10^{-3}$	$1.97 \times 10^{-3}$	0.885	1.23
3.28	$1.15 \times 10^{-2}$	$2.20 \times 10^{-3}$	0.905	1.26
3.86	$1.59 \times 10^{-2}$	$2.71 \times 10^{-3}$	0.925	1.37
4.83	$2.00 \times 10^{-2}$	$3.57 \times 10^{-3}$	0.922	1.49
5.79	$2.61 \times 10^{-2}$	$4.43 \times 10^{-3}$	0.931	1.69
7.72	$3.92 \times 10^{-2}$	$6.28 \times 10^{-3}$	0.937	2.17
9.66	$4.91 \times 10^{-2}$	$8.39 \times 10^{-3}$	0.927	2.79
11.59	$5.83 \times 10^{-2}$	$1.08 \times 10^{-2}$	0.916	3.42
13.52	$6.74 \times 10^{-2}$	$1.31 \times 10^{-2}$	0.909	4.14
15.45	$7.63 \times 10^{-2}$	$1.53 \times 10^{-2}$	0.904	4.86
19.32	$9.45 \times 10^{-2}$	$2.02 \times 10^{-2}$	0.896	6.41
23.18	$1.12 \times 10^{-1}$	$2.48 \times 10^{-2}$	0.893	7.84
28.98	$1.38 \times 10^{-1}$	$3.04 \times 10^{-2}$	0.875	9.69
38.64	$1.71 \times 10^{-1}$	$3.95 \times 10^{-2}$	0.873	12.86
48.30	$1.98 \times 10^{-1}$	$4.87 \times 10^{-2}$	0.871	15.97
<i><math>N_\rho = 2</math>, symbol = blue triangle</i>				
1.0001	$3.65 \times 10^{-5}$	$2.63 \times 10^{-5}$	0.001	1.0001
1.0035	$9.13 \times 10^{-5}$	$6.77 \times 10^{-5}$	0.007	1.0005
1.0079	$1.28 \times 10^{-4}$	$9.57 \times 10^{-5}$	0.014	1.0010
1.051	$2.80 \times 10^{-4}$	$1.99 \times 10^{-4}$	0.093	1.0045
1.13	$5.96 \times 10^{-4}$	$3.75 \times 10^{-4}$	0.339	1.013
1.31	$1.56 \times 10^{-3}$	$7.12 \times 10^{-4}$	0.636	1.040
1.57	$3.94 \times 10^{-3}$	$1.32 \times 10^{-3}$	0.782	1.11
1.75	$6.15 \times 10^{-3}$	$1.74 \times 10^{-3}$	0.838	1.17
1.92	$7.95 \times 10^{-3}$	$1.94 \times 10^{-3}$	0.877	1.20
2.19	$1.07 \times 10^{-2}$	$2.29 \times 10^{-3}$	0.903	1.26
2.45	$1.35 \times 10^{-2}$	$2.61 \times 10^{-3}$	0.920	1.31
2.62	$1.50 \times 10^{-2}$	$2.81 \times 10^{-3}$	0.925	1.35
3.06	$2.04 \times 10^{-2}$	$3.49 \times 10^{-3}$	0.936	1.49

(continued on next page)



Table 2 (continued)

Ra/Ra <sub>crit</sub>	$\langle Ro \rangle_\rho$	$\langle Ro_{pol} \rangle_\rho$	$E_{tor}^{m=0}/E_{kin}$	Nu
3.50	$2.53 \times 10^{-2}$	$4.11 \times 10^{-3}$	0.940	1.64
4.38	$3.43 \times 10^{-2}$	$5.44 \times 10^{-3}$	0.941	1.97
5.25	$4.24 \times 10^{-2}$	$6.81 \times 10^{-3}$	0.938	2.38
6.13	$5.10 \times 10^{-2}$	$8.57 \times 10^{-3}$	0.931	2.94
7.01	$5.27 \times 10^{-2}$	$1.05 \times 10^{-2}$	0.905	3.52
8.76	$6.80 \times 10^{-2}$	$1.40 \times 10^{-2}$	0.900	4.64
13.14	$1.03 \times 10^{-1}$	$2.16 \times 10^{-2}$	0.904	6.98
17.52	$1.35 \times 10^{-1}$	$2.88 \times 10^{-2}$	0.902	9.38
26.29	$1.80 \times 10^{-1}$	$4.10 \times 10^{-2}$	0.896	13.33
<i>N<sub>ρ</sub> = 3, symbol = magenta diamond</i>				
1.0020	$4.24 \times 10^{-5}$	$3.32 \times 10^{-5}$	0.001	1.0003
1.0039	$6.35 \times 10^{-5}$	$5.15 \times 10^{-5}$	0.002	1.0007
1.0072	$9.32 \times 10^{-5}$	$7.21 \times 10^{-5}$	0.004	1.0013
1.013	$1.27 \times 10^{-4}$	$1.01 \times 10^{-4}$	0.008	1.0025
1.046	$2.29 \times 10^{-4}$	$1.75 \times 10^{-4}$	0.037	1.0076
1.11	$3.14 \times 10^{-4}$	$2.30 \times 10^{-4}$	0.111	1.0134
1.24	$5.17 \times 10^{-4}$	$3.35 \times 10^{-4}$	0.307	1.024
1.63	$1.75 \times 10^{-3}$	$7.85 \times 10^{-4}$	0.675	1.074
1.83	$2.91 \times 10^{-3}$	$1.09 \times 10^{-3}$	0.770	1.11
1.96	$3.80 \times 10^{-3}$	$1.27 \times 10^{-3}$	0.812	1.13
2.28	$6.30 \times 10^{-3}$	$1.75 \times 10^{-3}$	0.866	1.20
2.61	$9.09 \times 10^{-3}$	$2.15 \times 10^{-3}$	0.899	1.27
3.27	$1.47 \times 10^{-2}$	$2.99 \times 10^{-3}$	0.920	1.45
3.92	$2.07 \times 10^{-2}$	$3.95 \times 10^{-3}$	0.924	1.76
4.57	$2.62 \times 10^{-2}$	$4.90 \times 10^{-3}$	0.922	2.09
5.23	$3.21 \times 10^{-2}$	$5.84 \times 10^{-3}$	0.924	2.42
5.88	$3.77 \times 10^{-2}$	$6.91 \times 10^{-3}$	0.922	2.81
7.19	$4.91 \times 10^{-2}$	$8.94 \times 10^{-3}$	0.922	3.51
9.81	$6.66 \times 10^{-2}$	$1.28 \times 10^{-2}$	0.916	4.80
13.08	$8.48 \times 10^{-2}$	$1.74 \times 10^{-2}$	0.908	6.30
16.35	$1.03 \times 10^{-1}$	$2.17 \times 10^{-2}$	0.905	7.84
20.92	$1.25 \times 10^{-1}$	$2.70 \times 10^{-2}$	0.902	9.47
26.16	$1.47 \times 10^{-1}$	$3.28 \times 10^{-2}$	0.900	11.76
32.70	$1.70 \times 10^{-1}$	$4.09 \times 10^{-2}$	0.886	14.14
<i>N<sub>ρ</sub> = 4, symbol = dark blue pentagon</i>				
1.0005	$2.52 \times 10^{-5}$	$2.02 \times 10^{-5}$	0.000	1.0002
1.0016	$3.63 \times 10^{-5}$	$3.02 \times 10^{-5}$	0.000	1.0005
1.0097	$8.11 \times 10^{-5}$	$6.89 \times 10^{-5}$	0.002	1.0025
1.025	$1.34 \times 10^{-4}$	$1.11 \times 10^{-4}$	0.006	1.0063
1.079	$2.21 \times 10^{-4}$	$1.82 \times 10^{-4}$	0.039	1.017
1.34	$4.11 \times 10^{-4}$	$2.96 \times 10^{-4}$	0.280	1.037
1.61	$6.76 \times 10^{-4}$	$4.00 \times 10^{-4}$	0.462	1.054
1.88	$1.09 \times 10^{-3}$	$5.50 \times 10^{-4}$	0.607	1.078
2.15	$1.69 \times 10^{-3}$	$7.32 \times 10^{-4}$	0.706	1.109
2.69	$3.41 \times 10^{-3}$	$1.18 \times 10^{-3}$	0.809	1.21
3.23	$5.70 \times 10^{-3}$	$1.68 \times 10^{-3}$	0.854	1.35
3.77	$8.52 \times 10^{-3}$	$2.20 \times 10^{-3}$	0.877	1.50
4.31	$1.20 \times 10^{-2}$	$3.05 \times 10^{-3}$	0.869	1.92
5.39	$1.96 \times 10^{-2}$	$4.43 \times 10^{-3}$	0.893	2.52
7.01	$3.03 \times 10^{-2}$	$6.25 \times 10^{-3}$	0.907	3.29
8.63	$3.89 \times 10^{-2}$	$7.61 \times 10^{-3}$	0.916	3.70
10.79	$5.04 \times 10^{-2}$	$9.62 \times 10^{-3}$	0.919	4.48
14.03	$6.57 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$	0.920	5.49
17.27	$7.80 \times 10^{-2}$	$1.51 \times 10^{-2}$	0.917	6.56
21.59	$8.86 \times 10^{-2}$	$1.81 \times 10^{-2}$	0.909	7.87
26.99	$1.05 \times 10^{-1}$	$2.23 \times 10^{-2}$	0.904	8.65
32.39	$1.16 \times 10^{-1}$	$2.61 \times 10^{-2}$	0.896	9.73
<i>N<sub>ρ</sub> = 5, symbol = orange square</i>				
1.0017	$2.49 \times 10^{-5}$	$2.24 \times 10^{-5}$	0.000	1.0005
1.0038	$3.56 \times 10^{-5}$	$3.21 \times 10^{-5}$	0.001	1.0011
1.025	$9.09 \times 10^{-5}$	$8.06 \times 10^{-5}$	0.003	1.0066
1.067	$1.50 \times 10^{-4}$	$1.33 \times 10^{-4}$	0.013	1.017
1.28	$2.71 \times 10^{-4}$	$2.19 \times 10^{-4}$	0.124	1.041
1.70	$4.61 \times 10^{-4}$	$3.10 \times 10^{-4}$	0.351	1.061
2.13	$8.20 \times 10^{-4}$	$4.50 \times 10^{-4}$	0.548	1.104
2.56	$1.32 \times 10^{-3}$	$6.19 \times 10^{-4}$	0.661	1.163
2.99	$1.96 \times 10^{-3}$	$8.10 \times 10^{-4}$	0.726	1.24
3.41	$2.82 \times 10^{-3}$	$1.08 \times 10^{-3}$	0.751	1.37
3.84	$3.92 \times 10^{-3}$	$1.44 \times 10^{-3}$	0.759	1.57
4.27	$5.04 \times 10^{-3}$	$1.77 \times 10^{-3}$	0.766	1.77
5.55	$9.65 \times 10^{-3}$	$2.92 \times 10^{-3}$	0.821	2.37
6.40	$1.30 \times 10^{-2}$	$3.56 \times 10^{-3}$	0.853	2.67
7.68	$1.82 \times 10^{-2}$	$4.45 \times 10^{-3}$	0.881	3.06
11.11	$3.09 \times 10^{-2}$	$6.65 \times 10^{-3}$	0.904	4.01

Table 2 (continued)

Ra/Ra <sub>crit</sub>	$\langle Ro \rangle_\rho$	$\langle Ro_{pol} \rangle_\rho$	$E_{tor}^{m=0}/E_{kin}$	Nu
13.67	$3.99 \times 10^{-2}$	$8.17 \times 10^{-3}$	0.911	4.68
17.09	$5.03 \times 10^{-2}$	$1.01 \times 10^{-2}$	0.914	5.45
21.36	$6.26 \times 10^{-2}$	$1.26 \times 10^{-2}$	0.914	6.52
25.63	$6.94 \times 10^{-2}$	$1.40 \times 10^{-2}$	0.915	6.87
32.04	$7.85 \times 10^{-2}$	$1.63 \times 10^{-2}$	0.911	8.04

rapidly rotating convection at a moderate Prandtl number (e.g. Zhang, 1992). For  $N_\rho = 1$ , the wavenumber increases but the instability stays attached to the inner boundary. However, when increasing  $N_\rho$  further, it moves outward and is progressively confined to the very thin outermost region.

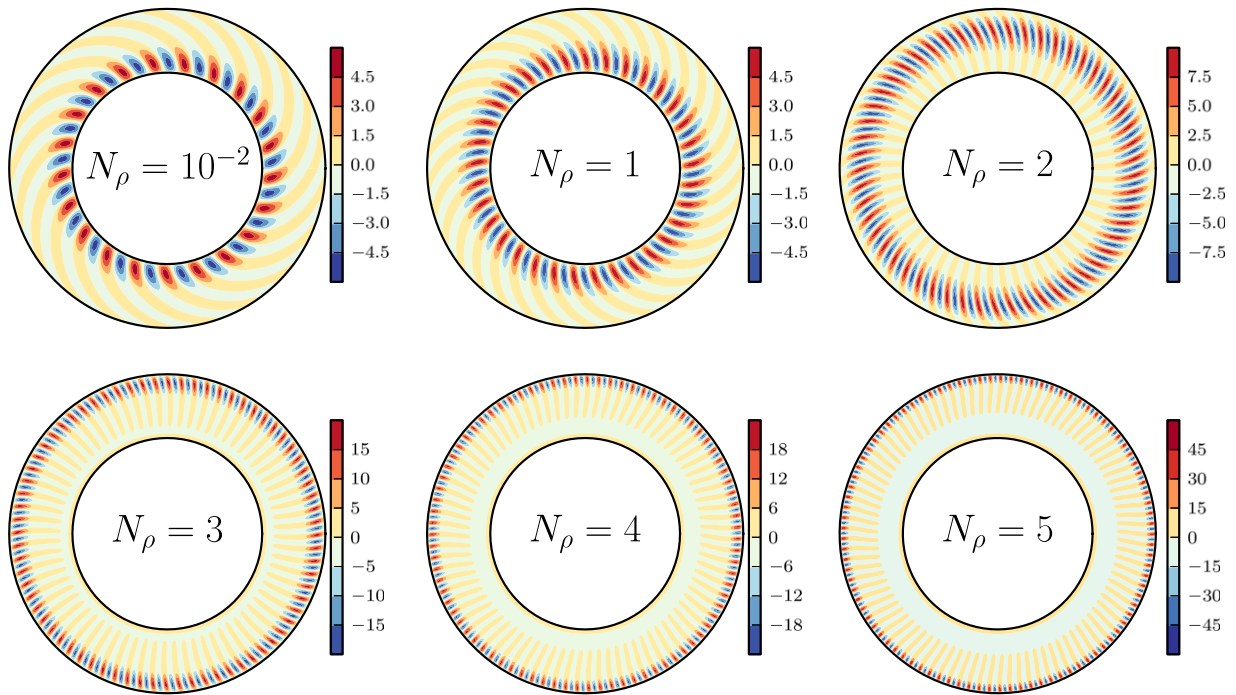
This behavior can be explained by the depth-dependent of buoyancy expressed via the modified Rayleigh number (Eq. (12)). Fig. 2 demonstrates how larger buoyancy values are more and more confined close to the outer boundary as  $N_\rho$  grows. This implies a decrease in radial lengthscale, which goes along with a rapid increase in wavenumber. This allows the instability to maintain a more or less spherical cross section (Glatzmaier and Gilman, 1981; Jones et al., 2009).

### 3.2. Convection regimes

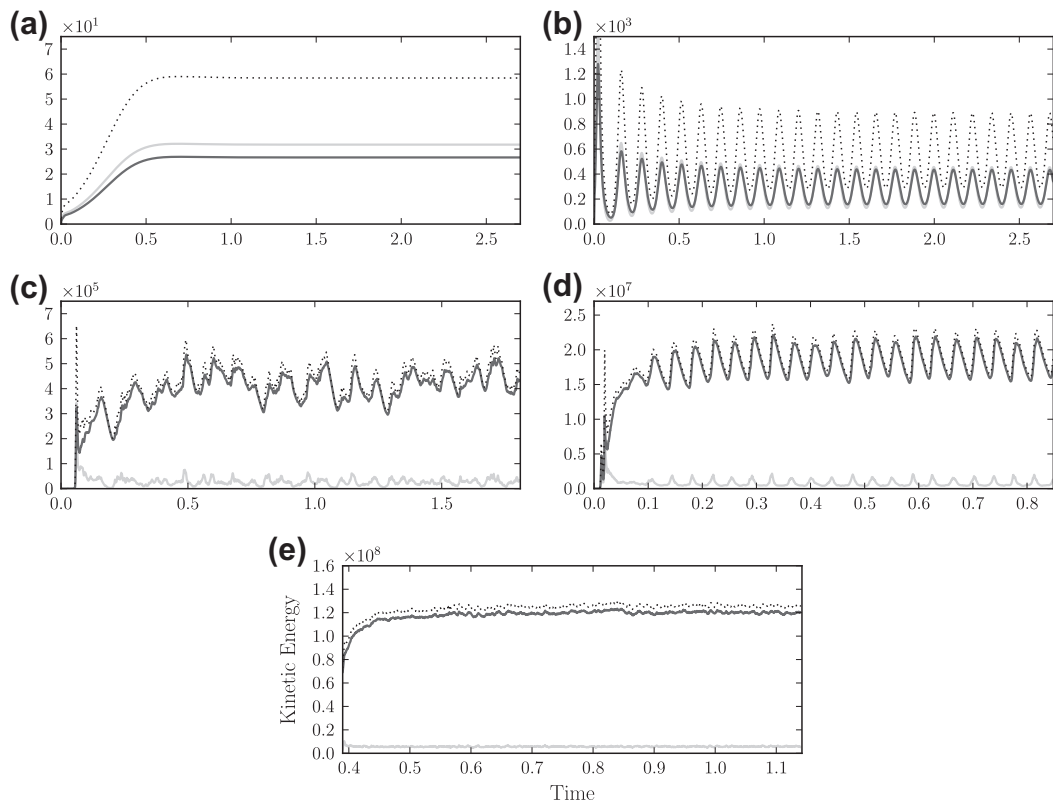
The properties of rotating thermal convection have been explored extensively under the Boussinesq approximation (e.g. Zhang, 1992; Grote and Busse, 2001; Christensen, 2001). The respective studies show that when the Rayleigh number is increased beyond onset distinct regimes with different temporal behavior are encountered. Here we explore whether these regimes are retained in the presence of density stratification.

Fig. 3 illustrates the time dependence in the temporal variation characteristic for the different regimes at  $N_\rho = 2$  and in Fig. 4 we attempt to show how the regimes boundaries change on increasing  $N_\rho$ . At  $N_\rho = 2$ , we still find the same regimes identified in the Boussinesq simulations. Very close to onset, the solutions simply drift in azimuth due to its Rossby wave character (Busse, 1994) and the kinetic energy becomes stationary (Fig. 3a). The drift is a consequence of both the height change of the container and the background density stratification encountered by the convective instability. Its amplitude and direction depends on the chosen stratification (Evonuk, 2008; Glatzmaier et al., 2009). At a still rather small supercriticality, the solution starts to vacillate in amplitude, while retaining its columnar form. Fig. 3b demonstrates that the poloidal and toroidal kinetic energies oscillate in phase and have a comparable magnitude.

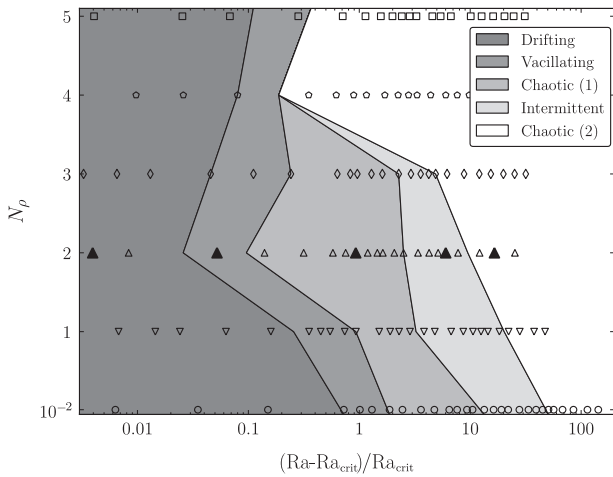
A further increase of the Rayleigh number leads to a third regime with a more chaotic time-dependence (Fig. 3c). The zonal flow production is already so efficient that the toroidal energy dominates the kinetic energy budget. Since the poloidal flow is directly driven by convective up- and downwellings, its amplitude can serve as a proxy for the convective flow vigor. Zonal flows are the axisymmetric contribution of toroidal flow and already dominate the toroidal energy here. Both the convective and the zonal flows display large amplitude modulations. A fourth regime with intermittent nearly oscillatory convection is encountered once  $Ra \gtrsim 4 \times Ra_c$  (panel (d) in Fig. 3). Here, the zonal flow periodically becomes so large that the associated shear disrupts the convective structures (see for further details Christensen, 2001; Grote and Busse, 2001; Simitev and Busse, 2003; Heimpel and Aurnou, 2012). The Reynolds stresses then decrease and the zonal flow cannot be maintained any more against viscous forces. The convection recovers once the zonal flows amplitude has decreased sufficiently.



**Fig. 2.** Radial component of the velocity  $u_r$  in the equatorial plane for different density stratifications very close to onset of convection (less than 5% over the critical Rayleigh number). Outward flows are rendered in red, inward flows in blue, dimensionless radial velocities are expressed in terms of Reynolds numbers. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)



**Fig. 3.** Time series of the kinetic energy for different simulations with a moderate density contrast ( $N_\rho = 2$ ). In each panel, the dotted black line corresponds to the total kinetic energy, while solid black line and solid gray line correspond respectively to toroidal and poloidal parts of the kinetic energy. The simulation displayed in (a) corresponds to  $Ra = 1.145 \times 10^6$  (1.004 $\times$  supercritical), (b) to  $Ra = 1.2 \times 10^6$  (1.05 $\times$  supercritical), (c) to  $Ra = 2.2 \times 10^6$  (1.93 $\times$  supercritical), (d) to  $Ra = 8 \times 10^6$  (7 $\times$  supercritical) and (e) to  $Ra = 2 \times 10^7$  (17.5 $\times$  supercritical). These five simulations can be localized in the regime diagram displayed in Fig. 4.



**Fig. 4.** Regime diagram  $(Ra, N_\rho)$  displaying how the different nonlinear regimes of rotating compressible convection depend on supercriticality and density stratification. Each symbol corresponds to one simulation computed in this study. The five black triangles denote the localizations of the five simulations emphasized in Fig. 3.

A similar but less regular competition may also cause the large variation in the chaotic regime. Typical for this intermittent regime, which has mainly been observed in Boussinesq simulations but has also been reported in some anelastic simulations of turbulent convection in solar-like stars (Ballot et al., 2007), is that the convective features typically occupy only an azimuthal fraction of the volume. Finally, in the strongly supercritical regime, convection becomes once more chaotic but the variations are much smaller than in the first chaotic regime (Fig. 3e). Convective features now fill the whole spherical shell and efficiently drive strong zonal winds.

For  $N_\rho = 2$  we thus find the following regime succession also typical for Boussinesq convection at  $Pr \lesssim 1$  (Grote and Busse, 2001):

Drifting  $\rightarrow$  Vacillating  $\rightarrow$  Chaotic  $\rightarrow$  Intermittent  $\rightarrow$  Chaotic.

The regime diagram displayed in Fig. 4 shows that the first chaotic and the intermittent regime tend to vanish for larger values of  $N_\rho$ . For  $N_\rho = [4 - 5]$ , we found neither the first chaotic nor the intermittent regime, which could mean that both have retreated to a rather small region of the parameter space or are missing altogether. Due to the lack of an intermittent regime, however, the separation of the first and second chaotic regime is less clear cut, being based only on the variation amplitude. The narrowing of the regime diagram for increasing density stratification was also found in 3-D simulations of convection in rapidly rotating isothermal spherical shells (Tortorella, 2005).

The large amplitude oscillations in the first chaotic and the intermittent regime require a more global interaction between convection and zonal flow. When the density stratification is increased, however, the solution becomes more small scale and chaotic and the convective columns progressively lose their integrity in the direction of the rotation axis (Glatzmaier et al., 2009; Jones and Kuzanyan, 2009). This likely prevents the required more global interaction and the related regimes at larger density stratification.

### 3.3. Flow properties

The background density stratification causes significant changes in the convective flow that we discuss first before describing the zonal flows in Section 3.3.2.

#### 3.3.1. Convective flows

Fig. 5 illustrates how the radial velocity varies with depth in a strongly-stratified anelastic simulation at  $N_\rho = 5$ . The Rayleigh number of  $Ra = 8 \times 10^6$  guarantees that the solution is safely located in the second chaotic regime. Deeper within the interior, the convection is characterized by larger azimuthal length scales and lower amplitudes. With increasing radius, the azimuthal length scale decreases, while the amplitude increases. The convective features remain roughly aligned with the rotation axis at any radius. The changes in length scale are coupled to the background density profile as the density scale height defined by  $H_\rho = -(d \ln \bar{\rho} / dr)^{-1}$  is a good proxy for the typical size of the convective eddies. At  $N_\rho = 5$ , this scale height decreases by a factor of five when going from the inner to the outer boundary, which about explains the variation shown in Fig. 5.

The increase in amplitude can be explained by the variation of the background density: since  $\bar{\rho}$  decreases by a factor of about 150 from  $r_i$  to  $r_o$ , a rising (falling) convective plume compensates this with increasing (decreasing) flow amplitude. Fig. 5 shows an increase of about 60 which seems somewhat on the low side. However, the radial increase in the number of convective columns and the scale change show that the convective features hardly reach through the whole shell without being modified.

#### 3.3.2. Zonal flows

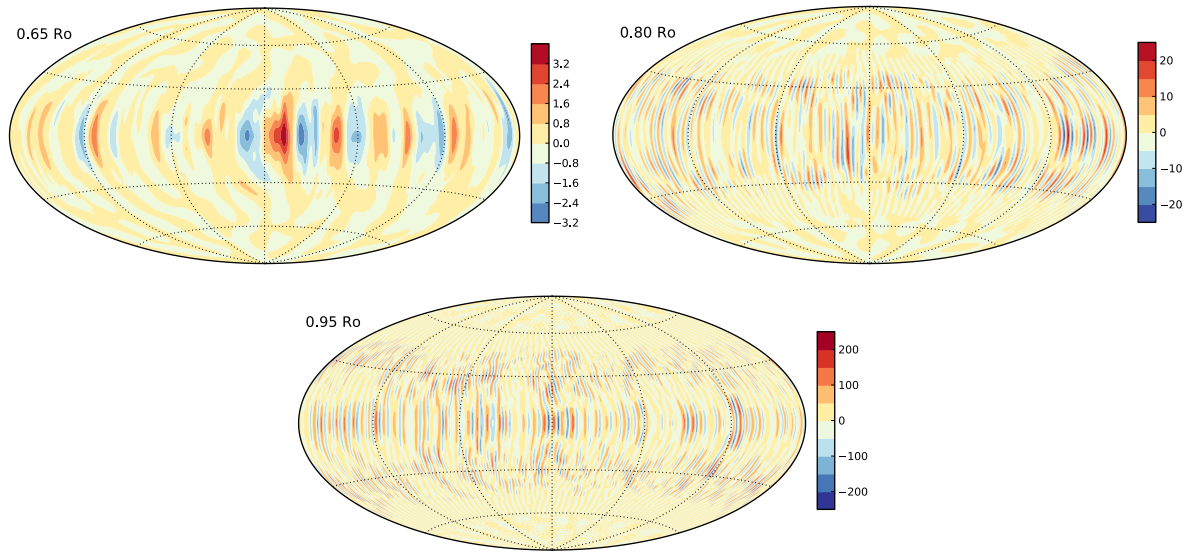
Evonuk (2008) and Glatzmaier et al. (2009) argue that the density stratification can significantly influence the generation of zonal winds. Exploring the possible related effects is the main focus of our study. Fig. 6 shows how the zonal flows evolve on increasing the Rayleigh number in moderately stratified simulations ( $N_\rho = 3$ ). Close to the onset of convection, a thin prograde equatorial jet develops in the very outer part of the shell. The latitudinal extent of this jet is smaller than in Boussinesq convection because the convective columns are confined closer to the outer boundary (see the simulation with  $N_\rho = 3$  in Fig. 2). It is flanked by weak amplitude retrograde jets that strongly vary along  $z$ . As  $Ra$  is increased, convection starts to fill the whole shell, the equatorial jet broadens and the zonal winds become more and more geostrophic with a second retrograde jet that reaches throughout the shell. For  $Ra = 5 \times 10^6$  ( $3.3 \times$  critical) the equatorial jet has reached a maximum width that it retains at even higher Rayleigh numbers. The retrograde jet broadens toward higher latitudes until additional flanking prograde jets develop below and above the inner boundary at large Rayleigh numbers and confine it to mid latitudes. The amplitude of these high-latitude jets becomes comparable to that of the equatorial jet for strongly nonlinear simulations ( $Ra = 4 \times 10^7$ ,  $26 \times Ra_c$ ), while the retrograde jet vigor intensifies to about 50% of this amplitude. In this multiple jets regime, retrograde zonal winds are anchored to the tangent cylinder in a similar way to what was already observed in Boussinesq simulations (e.g. Christensen, 2001; Heimpel et al., 2005).

The strong  $z$ -dependence at low Rayleigh numbers is a typical thermal wind feature, which can be understood by considering the  $\phi$ -component of the curl of the momentum Eq. (5):

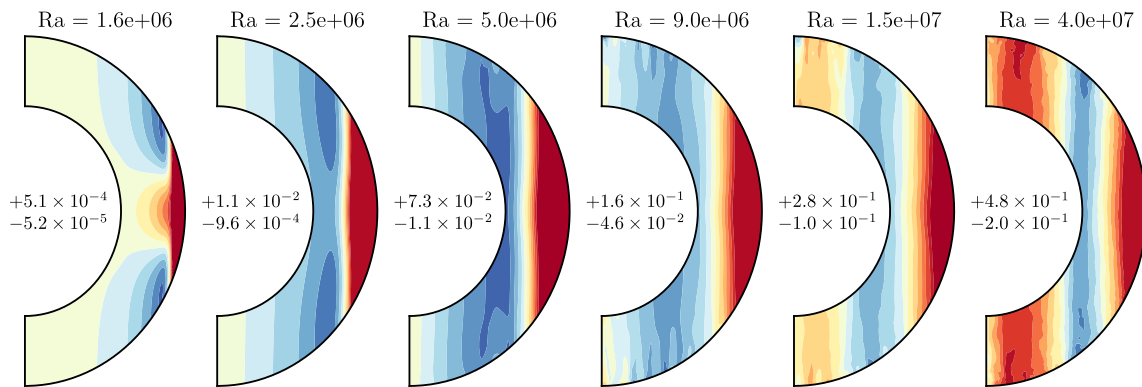
$$\frac{D\omega_\phi}{Dt} = r \sin \theta (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \left( \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \right) - \omega_\phi \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{2}{E} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} - \frac{Ra}{Pr} \frac{r_o^2}{r^3} \frac{\partial s}{\partial \theta} + [\nabla \times (\bar{\rho}^{-1} \nabla \cdot \mathbf{S})]_\phi. \quad (23)$$

Here  $D/Dt$  corresponds to the substantial time derivative and  $\omega_\phi$  is the azimuthal vorticity component. For low Rayleigh numbers, inertial contributions can be neglected, and the  $z$ -dependence of the zonal flows is ruled by the thermal wind balance:

$$\frac{2}{E} \frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial z} \simeq \frac{Ra}{Pr} \frac{r_o^2}{r^3} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \theta}, \quad (24)$$



**Fig. 5.** Radial velocity  $u_r$ , on spherical surfaces at three different radii close to the inner boundary ( $r = 0.65r_o$ ), at the layer middle, and close to the outer boundary ( $r = 0.95r_o$ ). Outward flows are rendered in red, inward flows in blue, dimensionless radial velocities are expressed in terms of Reynolds numbers. From a model with  $N_\rho = 5$  and  $Ra = 8 \times 10^6$ . (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)



**Fig. 6.** Zonally averaged azimuthal velocity in the meridian plane for simulations with  $N_\rho = 3$  and different Rayleigh numbers. Colorscales are centered around zero: prograde jets are rendered in red, retrograde jets in blue. Prograde contours have been truncated in amplitude to emphasize the structure of the retrograde flows. Dimensionless azimuthal velocities are expressed here in terms of Rossby numbers. The extrema of the zonal flow velocity are indicated in the center of each panel. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

where overlines denote an azimuthal average. This allows us to define the typical lengthscale

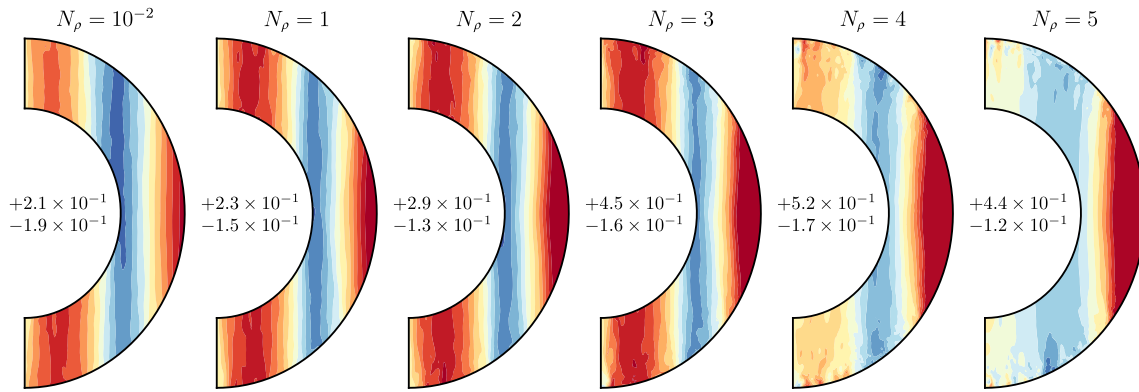
$$L_z = \left( \frac{\partial \ln \overline{u_\phi}}{\partial z} \right)^{-1} = \overline{u_\phi} \left( \frac{Ra}{2Pr} \frac{E}{r_o^2} \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \theta} \right)^{-1}. \quad (25)$$

For vanishing Ekman numbers,  $L_z$  approaches infinity and zonal flows become independent of  $z$ , recovering Taylor–Proudman theorem and therefore a geostrophic structure. For the lowest Rayleigh number solution shown in Fig. 6a, the thermal winds caused  $z$ -variation is still clearly apparent where  $u_\phi$  is weak and  $L_z$  therefore small. At larger Rayleigh numbers, the thermal wind balance still holds in a statistical sense. According to Eq. (24),  $\partial \overline{u_\phi} / \partial z$  increases linearly with  $Ra$ , while, at least closer to onset, the zonal flow amplitude rises faster.  $L_z$  therefore grows with the Rayleigh number and the  $z$ -variation is gradually lost. In the simulations of Kaspi et al. (2009) however, the zonal winds still vary strongly close to the surface. These are likely promoted by the depth-dependence of the thermal expansion coefficient, which is neglected in our ideal gas model.

Fig. 7 compares the zonal flows at different density stratifications for simulations with similar  $\langle Ra_q^* \rangle_\rho$  and demonstrates that

the structure changes very little for  $N_\rho \leq 3$ . In the two cases at  $N_\rho = 4$  and  $N_\rho = 5$  the high-latitude jets are still little pronounced and the retrograde jet is also rather weak. According to the development shown in Fig. 6 they seem to correspond to a lower supercriticality. The fact that  $N_\rho = 4$  and 5 simulations have a supercriticality that is about three times higher than that of the  $N_\rho = 2$  case, however, implies that significantly larger supercriticalities are required to reach a comparable multiple jet structure when the density stratification is strong. Since both large Rayleigh numbers and strong density stratifications promote smaller scales, we could not afford to further increase  $Ra$  for  $N_\rho > 3$ . While the zonal winds are very geostrophic for smaller density stratification, additional non-geostrophic small scale features start to appear for larger stratifications as it has already been reported by Jones and Kuzanyan (2009). They are strongly time-dependent and therefore disappear when time averaged quantities are considered.

Except for these secondary features and the requirement for larger supercriticalities at stronger stratifications, the zonal flow structure is surprisingly independent of the background density profile. We now turn to discussing their amplitude.



**Fig. 7.** Zonally averaged azimuthal velocity in the meridian plane for simulations with different density stratifications. The different setups correspond to  $N_\rho = 10^{-2}$ ,  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = 1.70 \times 10^{-4}$  (i.e.  $\text{Ra} = 1.2 \times 10^7$ );  $N_\rho = 1$ ,  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = 1.50 \times 10^{-4}$  (i.e.  $\text{Ra} = 1.2 \times 10^7$ );  $N_\rho = 2$ ,  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = 1.37 \times 10^{-4}$  (i.e.  $\text{Ra} = 1.5 \times 10^7$ );  $N_\rho = 3$ ,  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = 2.63 \times 10^{-4}$  (i.e.  $\text{Ra} = 3.2 \times 10^7$ );  $N_\rho = 4$ ,  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = 2.84 \times 10^{-4}$  (i.e.  $\text{Ra} = 6 \times 10^7$ ) and  $N_\rho = 5$ ,  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho = 1.48 \times 10^{-4}$  (i.e.  $\text{Ra} = 7.5 \times 10^7$ ). Colorscales are centered around zero: prograde jets are rendered in red, retrograde jets in blue. Prograde contours have been truncated in amplitude to emphasize the structure of the retrograde flows. Dimensionless azimuthal velocities are expressed here in terms of Rossby numbers. The extrema of the zonal flow velocity are indicated in the center of each panel. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

#### 4. Scaling laws

To evaluate how the different flow properties depend on the background density stratification, we consider time averaged quantities in the following. Each simulation has been run for at least 0.2 viscous diffusion times to get rid of any transients and to allow for an averaging period long enough to suppress short term variations. The Reynolds numbers  $\text{Re}$  and Rossby numbers  $\text{Ro} = \text{ERe}$ , used to quantify the amplitude of different flow contributions are based on the non-dimensional time averaged root-mean square velocity:

$$\text{Re} = (\langle u^2 \rangle)^{1/2}, \quad (26)$$

with

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \frac{1}{V_s} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V u^2 dt dV, \quad (27)$$

where  $\tau$  is the averaging interval,  $V_s$  is the volume of the spherical shell and  $dV$  is a volume element. As pointed out by Kaspi et al. (2009), a comparison of simulations with different density backgrounds may be more relevant if one considers mass-weighted average quantities. Therefore, the mass-weighted counterparts of Reynolds and Rossby numbers are defined using the time averaged kinetic energy, that is

$$\langle \text{Re} \rangle_\rho = \left( \frac{2E_{\text{kin}}}{\langle \bar{\rho} \rangle} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

with

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{V_s} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V \bar{\rho} u^2 dt dV. \quad (29)$$

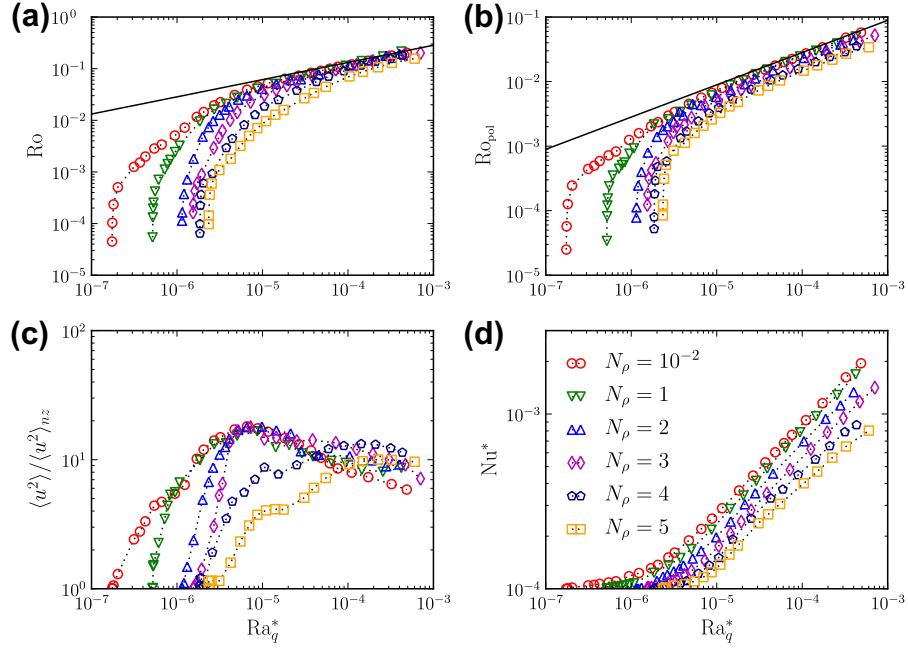
Figs. 8 and 9 show how different time-average properties for the various density stratifications explored here depend on the flux-based Rayleigh number (Eq. (19)) and the mass-weighted flux-based Rayleigh number (Eq. (20)), respectively. The total Rossby number  $\text{Ro}$  (Fig. 8a) and the poloidal Rossby number  $\text{Ro}_{\text{pol}}$  (Fig. 8b), as well as their mass-weighted counterparts (Fig. 9a and b) first rise steeply. The slope flattens once convection fills the whole shell and seems to reach an asymptotic value for large Rayleigh numbers. The asymptotic slopes are larger for the poloidal than for the total flow amplitude. In both Figs. 8 and 9, the curves collapse at larger Rayleigh numbers, and the asymptotic slopes

become independent of the density stratification. This is even more convincing when mass-weighted average quantities are considered, which basically confirms Kaspi et al. (2009). The remaining differences at low Rayleigh numbers can at least partly be explained by the different critical values. Compared to the gas giants, the Rossby numbers where our simulations reach the asymptotic regime are roughly one order of magnitude larger. However this is likely a consequence of the moderate Ekman number used in our models as Christensen (2002) showed that this transitional Rossby number decreases with Ekman number.

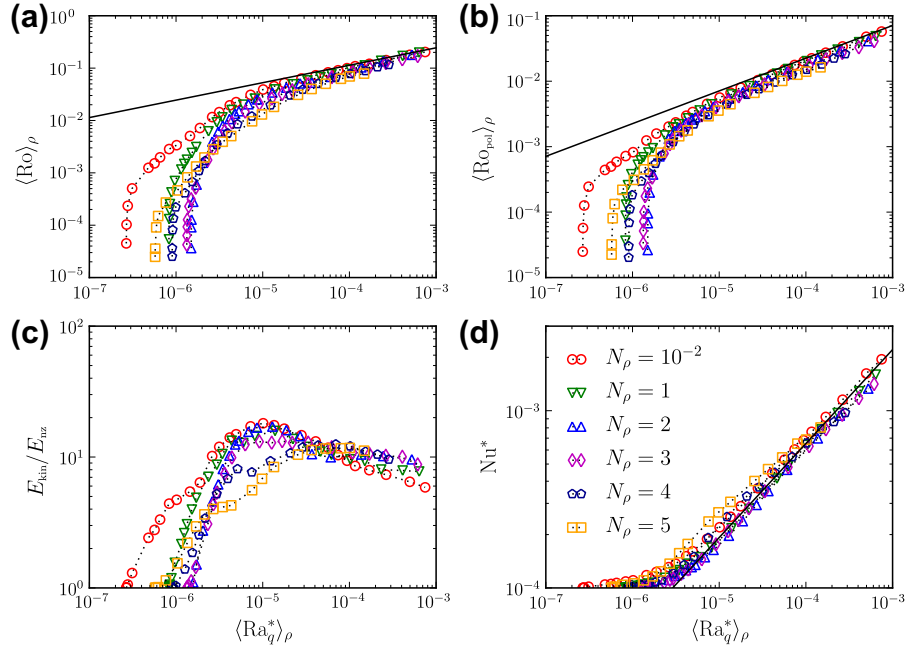
Fig. 9c displays the ratio of the total to the non-zonal kinetic energy, while Fig. 8c corresponds to the ratio of square velocities only. For all density stratifications, this ratio initially increases in the weakly supercritical regime but decays once the convection becomes strongly nonlinear. Similarly to what has been reported for Boussinesq simulations (Christensen, 2002), the maximum is reached close to the transition to the intermittent regime (see Fig. 4 for  $N_\rho \leq 3$ ).

In the nearly Boussinesq simulations, the maximum ratio is  $E_{\text{kin}}/E_{\text{nz}} \simeq 20$ , which means that 95% of the energy are carried by zonal flows. For  $N_\rho = 5$  this decreases to about 90% at a maximum ratio of  $E_{\text{kin}}/E_{\text{nz}} \simeq 10$ . These values are on the low side of the expected ratio for Jupiter: around 50–100 from the work of Salyk et al. (2006). However, this moderate maximum ratio is once more a consequence of the too large Ekman number used in our simulations (Christensen, 2002). The slope of the decrease for larger Rayleigh numbers also seems to vary with  $N_\rho$ , but a clear dependence is difficult to extract from our dataset. Considering mass-weighted quantities slightly helps to merge the different simulations, but they are far from collapsing as nicely as for the Rossby numbers.

Panels (d) in Figs. 8 and 9 show the dependence of the modified Nusselt number on the Rayleigh numbers. Close to onset of convection, the heat transport is dominated by conduction. The classically defined Nusselt number remains close to unity and the Nusselt number increases only weakly with the Rayleigh number. When the convective motions become more vigorous, convective heat transport starts to dominate and the Nusselt number rises steeply. Using the mass-weighted Rayleigh number  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho$  allows to collapse the curves for different density stratifications and a similar asymptotic slope is reached. This once more emphasizes that mass-weighted quantities are probably more meaningful parameters, when considering strongly nonlinear convection.



**Fig. 8.** Time-averaged properties plotted against flux-based Rayleigh number defined in Eq. (19): (a) Rossby number; (b) Rossby number for the poloidal flow component; (c) ratio of square velocity over non-zonal square velocity; (d) modified Nusselt number.



**Fig. 9.** Time-averaged properties plotted against mass-weighted flux-based Rayleigh number defined in Eq. (20): (a) mass-weighted Rossby number; (b) mass-weighted Rossby number for the poloidal flow component; (c) ratio of kinetic energy over non-zonal kinetic energy; (d) modified Nusselt number.

Based on the results displayed in Fig. 9 we have estimated the asymptotic dependence of  $\langle \text{Ro} \rangle_\rho$ ,  $\langle \text{Ro}_{\text{pol}} \rangle_\rho$  and  $\text{Nu}^*$  on  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho$  to:

$$\langle \text{Ro} \rangle_\rho = 2.45 \left( \langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho \right)^{1/3}, \quad (30)$$

$$\langle \text{Ro}_{\text{pol}} \rangle_\rho = 2.25 \left( \langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho \right)^{1/2}, \quad (31)$$

$$\text{Nu}^* = 0.086 \left( \langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho \right)^{0.53}. \quad (32)$$

Black lines in Fig. 9 show the respective asymptotes. The same slopes have been obtained for the usual Rossby and poloidal Rossby numbers in Fig. 8, as the nearly Boussinesq simulations hardly depend on the density background (therefore mass-weighted counterparts of Rossby and poloidal Rossby numbers are equivalent to their usual definitions).

The amplitude of the convective flow, quantified via the poloidal Rossby number, is thus found to depend on the mass-weighted flux-based Rayleigh number with a slope of 1/2. This is compatible with both laboratory experiments of turbulent rotating convection

(e.g. Fernando et al., 1991) and previous anelastic numerical simulations Showman et al. (2011) but slightly differs from the exponent 2/5 suggested by Christensen (2002). Investigating the reason for this difference would probably require more simulations at lower Ekman numbers and lies beyond the scope of this study.

The Nusselt number scaling Eq. (32) is in a very good agreement with previous laws derived by Christensen (2002) and Christensen and Aubert (2006) for Boussinesq simulations. In the highly supercritical regime, the convective transport dominates diffusion. Then  $Nu \sim u_{\text{conv}} \delta s$ , or  $Nu^* \sim Ro_{\text{pol}} \delta s$  where  $\delta s$  is a measure for the typical entropy fluctuations. Since  $Nu^*$  and  $Ro_{\text{pol}}$  depend with a very similar exponent on  $\langle Ra_q^* \rangle_\rho$ , the typical entropy fluctuations  $\delta s$  may vary very little with  $\langle Ra_q^* \rangle_\rho$  in the asymptotic regime, in agreement with previous Boussinesq results (Christensen, 2002).

In the highly supercritical regime, the majority of the kinetic energy is carried by zonal flows. The asymptotic law for the total Rossby number (Eq. (30)) therefore applies to the amplitude of zonal winds. Based on energy considerations for the highly supercritical regime, Showman et al. (2011) derived a scaling law for strong zonal jets that suggest an exponent of 1/2 rather than the 1/3 promoted here. We further discuss this difference in the following section.

#### 4.1. Force balance and correlation of the convective flow

To explore how the strong zonal flows are generated and maintained, we analyze the azimuthal component of the Navier–Stokes Eq. (5) integrated over cylindrical surfaces of radius  $s$ . The Coriolis term is proportional to the net mass flux across these surfaces and therefore vanishes. The integrated Navier–Stokes equation thus simplifies to

$$\int_s \bar{\rho} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} s d\phi dz = - \int_s \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} [s^2 \bar{\rho} u_s u_\phi] s d\phi dz + \int_s \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ s^2 \bar{\rho} s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u_\phi}{s} \right) \right] s d\phi dz.$$

On time average the two terms on the right hand side, Reynolds stress and viscous stress, should balance. This leads to the following condition

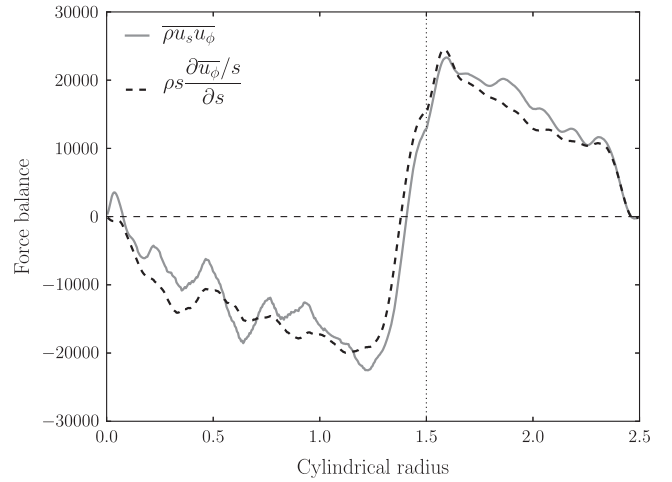
$$\int_z \bar{\rho} s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\overline{u_\phi}}{s} \right) dz = \int_z \overline{\rho u_s u_\phi} dz, \quad (34)$$

where the overlines indicate an azimuthal average. Fig. 10 compares the left and right hand side of Eq. (34) for a case with  $N_\rho = 3$  and  $Ra = 2 \times 10^7$  (corresponding to  $\langle Ra_q^* \rangle_\rho = 1.7 \times 10^{-4}$ ) that lies very close to the asymptotic regimes found in Fig. 9. These two terms balance to a good degree, which proves that zonal flows are indeed maintained by Reynolds stresses against viscous dissipation.

According to Eq. (10), we can also directly relate the viscous contribution in Fig. 9 to zonal flow gradients. Zonal flows are thus expected to increase outside the tangent cylinder, located at  $s = 1.5$ , and to mainly decrease inside the tangent cylinder. A conversion to Reynolds stresses suggests that the strongest stresses can be found around the tangent cylinder and close to the outer boundary. The stresses are negative around the tangent cylinder and predominantly positive elsewhere. All this corresponds nicely to the multiple jet cases described above with a prograde equatorial jet, a retrograde jet around the tangent cylinder, and a prograde, high latitude jet in each hemisphere.

Since the typical length scale of the zonal jets remains of order unity, Eq. (10) suggests the scaling (e.g. Christensen, 2002)

$$\langle Re_{\text{zon}} \rangle_\rho \sim C_{s\phi} \langle Re_{\text{pol}} \rangle_\rho^2, \quad (35)$$



**Fig. 10.** Time average of Reynolds stresses (solid gray line) and viscous force (dashed black line) integrated over cylinders (Eq. (34)) for a model with  $N_\rho = 3$  and  $Ra = 2 \times 10^7$ . The vertical line corresponds to the tangent cylinder.

where  $\langle Re_{\text{zon}} \rangle_\rho$  is the Reynolds number of axisymmetric zonal flows and  $C_{s\phi}$  quantifies the correlation of  $u_s$  and  $u_\phi$  throughout the shell:

$$C_{s\phi} = \frac{\overline{[\rho u_s u_\phi]}}{\left[ \overline{[\rho u_s^2]} \overline{[\rho u_\phi^2]} \right]^{1/2}}. \quad (36)$$

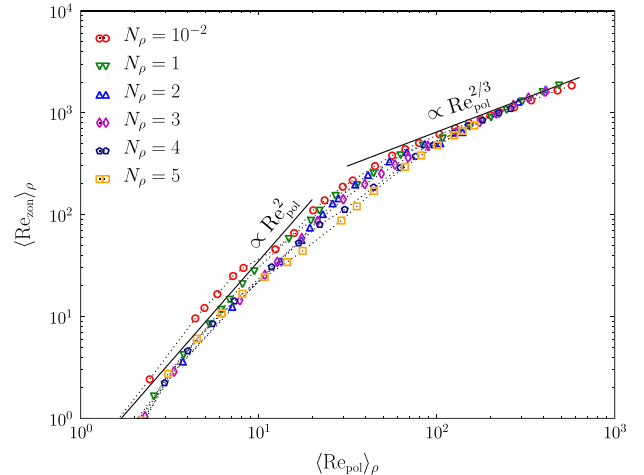
Here, the rectangular brackets  $[\dots]$  corresponds to an average over  $s$  and  $z$ . In Fig. 11 we show  $\langle Re_{\text{zon}} \rangle_\rho$  versus  $\langle Re_{\text{pol}} \rangle_\rho$  for all the simulations of this study, while Fig. 12 shows the dependence of  $C_{s\phi}$  on the mass-weighted flux-based Rayleigh number for some snapshots.

For lower Rayleigh numbers and thus smaller poloidal Reynolds numbers  $\langle Re_{\text{zon}} \rangle_\rho$  scales roughly like  $\langle Re_{\text{pol}} \rangle_\rho^2$  and  $C_{s\phi}$  is largely independent of the Rayleigh number. Convection assumes the form of regular large scale columns that are tilted in prograde direction due to the height change in the container and the background density stratification (e.g. Busse, 1983, 2002). The integrity of the rolls in  $z$ -direction and the consistent tilt guarantees a good correlation of  $u_s$  and  $u_\phi$  and  $C_{s\phi}$  is of order one.

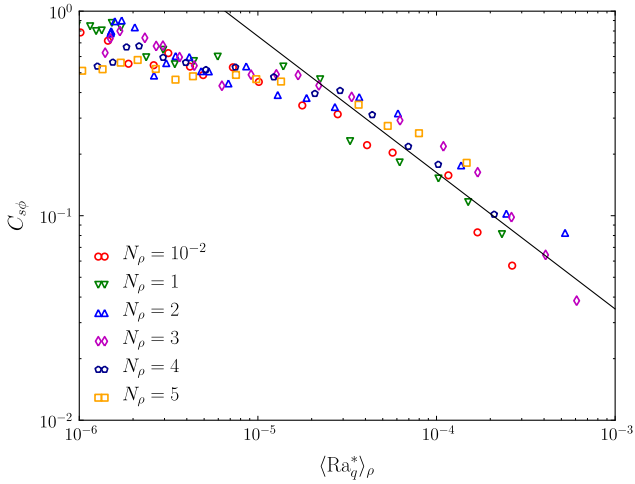
For larger Rayleigh numbers the results approach the asymptotic scaling

$$\langle Re_{\text{zon}} \rangle_\rho \sim \langle Re_{\text{pol}} \rangle_\rho^{2/3}. \quad (37)$$

When using Eqs. (30) and (35) this suggests that



**Fig. 11.** Reynolds number of axisymmetric zonal flows plotted against poloidal Reynolds number.



**Fig. 12.** Correlation  $C_{s\phi}$  plotted against mass-averaged flux-based Rayleigh number. The solid line is proportional to  $\langle Ra_q^* \rangle_\rho^{-2/3}$ .

$$C_{s\phi} \sim \langle Ra_q^* \rangle_\rho^{-2/3}, \quad (38)$$

which is more or less confirmed by the correlation shown in Fig. 12. The small scale turbulent motions that develop for highly supercritical convection tend to destroy the correlation (Christensen, 2002; Showman et al., 2011). Once more, neither the ratio of  $\langle Re_{zon} \rangle_\rho$  to  $\langle Re_{pol} \rangle_\rho$ , nor the dependence of the correlation  $C_{s\phi}$  on  $\langle Ra_q^* \rangle_\rho$  is significantly affected by the different density stratifications employed.

The loss of correlation explains why the ratio of total to non-zonal kinetic energy shown in Fig. 9c decreases for larger Rayleigh numbers. Our scaling of  $C_{s\phi}$  differs from Showman et al. (2011), who suggest an exponent of  $-1/2$ . This also explains the difference in the scaling of the Rossby number mentioned above. This difference may come from specific assumptions used in the model by Kaspi et al. (2009). While these authors employ a more realistic equation of state, they also consider a simplified expression of the viscosity and neglect viscous heating. As Jones and Kuzanyan (2009) have demonstrated, viscous heating can contribute up to 50% to the heat budget, and is therefore likely to influence the average flow properties in the strongly nonlinear regime.

#### 4.2. Density stratification and vorticity production

The z-component of the vorticity equation allows to analyze how the correlation between  $u_s$  and  $u_\phi$  comes about. Taking the z-component of the curl of the momentum Eq. (5) leads to

$$\frac{D\omega_z}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)u_z = \frac{2}{E} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \left( \frac{2}{E} + \omega_z \right) \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{Ra}{Pr} \frac{r_0^2}{r^3} \frac{\partial s}{\partial \phi} + [\nabla \times (\bar{\rho}^{-1} \nabla \cdot \mathbf{S})]_z, \quad (39)$$

where  $D/Dt$  denotes the substantial time derivative and  $\omega_z$  is the vorticity component along the axis of rotation. For small Ekman numbers, the first two terms on the right hand side dominate. In the Boussinesq approximation, the divergence of  $\mathbf{u}$  vanishes and thus only the first term can contribute. This is called the vortex stretching term because it describes the vorticity changes in a fluid column experiencing the height gradient of the container (e.g. Schaeffer and Cardin, 2005; Glatzmaier et al., 2009). Because of the curved boundary, the absolute value of the gradient and thus the stretching effect increases with  $s$ , leading to the prograde tilt of the convective columns (e.g. Busse, 1983, 2002). At larger Rayleigh numbers, these columns loose their integrity along  $z$

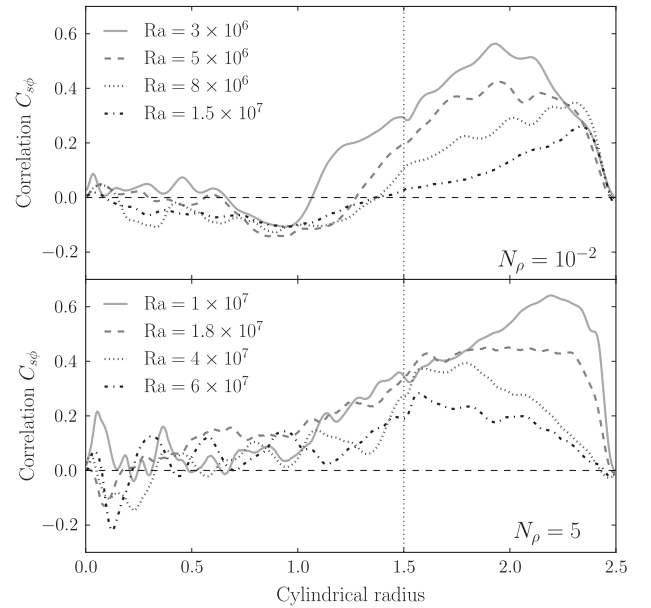
and turbulent effects rather than the boundary curvature start to influence the flow. As reported above, this leads to the decrease in the correlation  $C_{s\phi}$ .

Besides this classical mechanism, compressibility brings a new vorticity source. As explained by Evonuk (2008) and Glatzmaier et al. (2009), rising (sinking) plumes generate negative (positive) vorticity due to the compressional source  $(2E^{-1} + \omega_z) \nabla \cdot \mathbf{u}$  in Eq. (39). In the 2-D anelastic simulations performed by Glatzmaier et al. (2009), the classical vortex stretching term is neglected and the new compressional term is the only source of vorticity. They report that the direction of the equatorial jet depends on the variations of the density background. According to Eq. (4), this new compressional source  $\nabla \cdot \mathbf{u} = -(d \ln \bar{\rho} / dr) u_r$  is directly proportional to the density gradient. It is therefore expected to prevail closer to the outer boundary, where this gradient is strong. Moreover, since this mechanism is a local process, it may be less sensitive to the loss of correlation along a convective column with increasing Rayleigh number (Glatzmaier et al., 2009).

At first sight, however, this is hard to reconcile with the fact that the zonal wind structure depends little on the density stratification in our simulations. Figs. 11 and 12 have actually demonstrated that the decorrelation affects all our cases to a similar degree, independently of the density background.

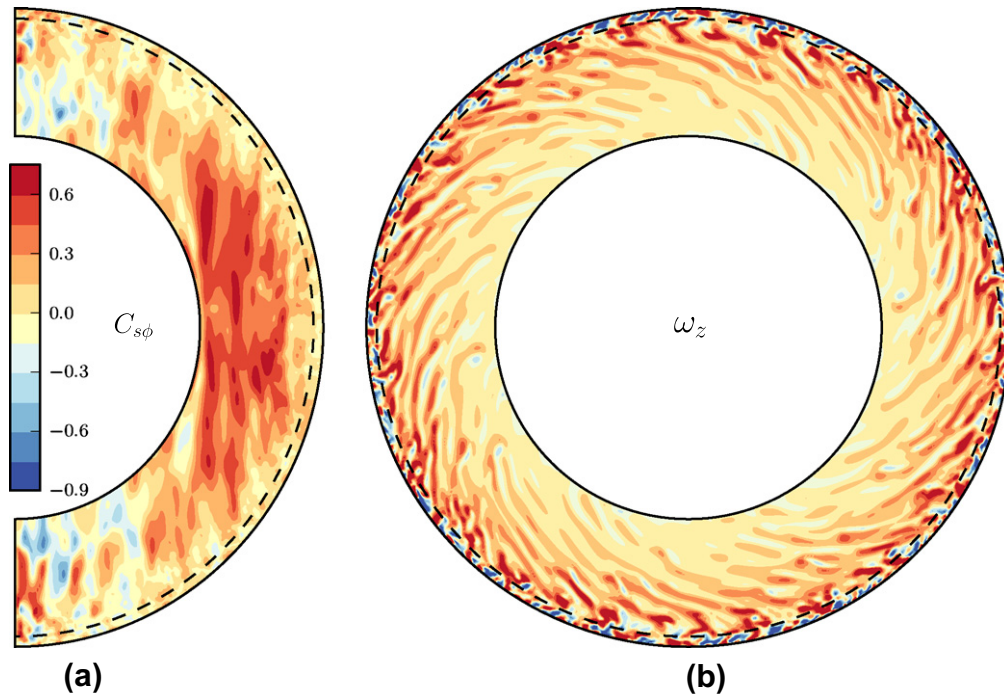
In order to better understand the decorrelation, Fig. 13 compares the radial correlation profiles for nearly Boussinesq and  $N_\rho = 5$  cases at various Rayleigh numbers. In the nearly Boussinesq cases, the correlation is predominantly lost in the interior but changes very little close to the outer surface, in agreement with the results of Christensen (2002). For the strongly stratified cases, the correlation indeed peaks close to the outer boundary as expected from the new compressional vorticity source, as long as the Rayleigh number remains moderate. However, on increasing the supercriticality, this particularly strong correlation is lost first and the maximum of  $C_{s\phi}$  is now located deeper in the interior.

This is also illustrated by Fig. 14a, which shows a meridional cut of azimuthally averaged  $C_{s\phi}$ . Fig. 14b shows that the decorrelation

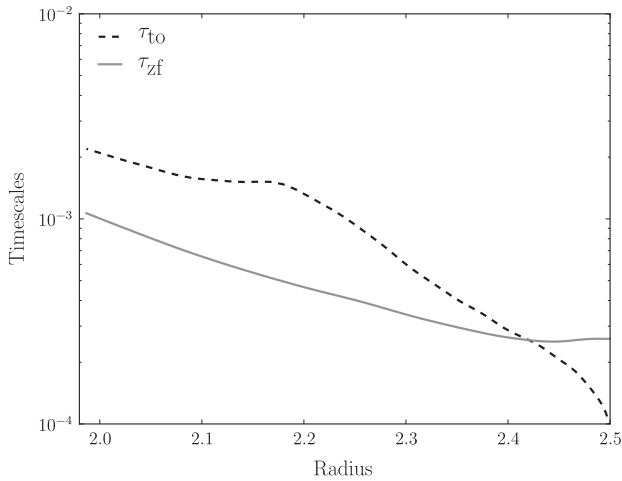


**Fig. 13.** Time-average of the correlation  $C_{s\phi}$  integrated over cylindrical surfaces for simulations with  $N_\rho = 10^{-2}$  (upper panel):  $Ra = 3 \times 10^6$  (solid light-gray line),  $Ra = 5 \times 10^6$  (dashed gray line),  $Ra = 8 \times 10^6$  (dotted dark-gray line) and  $Ra = 1.5 \times 10^7$  (dot-dashed black line); and for simulations with  $N_\rho = 5$  (lower panel):  $Ra = 1 \times 10^7$  (solid light-gray line),  $Ra = 1.8 \times 10^7$  (dashed gray line),  $Ra = 4 \times 10^7$  (dotted dark-gray line) and  $Ra = 6 \times 10^7$  (dot-dashed black line). The vertical line corresponds to the tangent cylinder.





**Fig. 14.** (a) Correlation  $C_{s\phi}$  in the meridional plane. (b) Vorticity along the axis of rotation  $\omega_z$  displayed in the equatorial plane. From a model with  $N_\rho = 5$ ,  $Ra = 4 \times 10^7$ . Positive values are rendered in red, negative ones in blue. The dashed lines in both panels correspond to the radius where the turnover timescale of convection becomes equal to the timescale associated with zonal shear (see Eq. (40)). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)



**Fig. 15.** Radial profiles of the two timescales defined in Eq. (40): turnover timescale of convection (dashed black line) and timescale associated with shear (solid gray line). These profiles have been derived from an azimuthal average of the values in the equatorial plane for a model with  $N_\rho = 5$  and  $Ra = 4 \times 10^7$  (same model as in Fig. 14).

goes along with a change in the vorticity pattern. In the inner part, the flow still shows a pronounced tilt that leads to Reynolds stresses and is clearly dominated by positive  $z$ -vorticity. Close to the outer boundary, convective motions are more radially oriented, without a preferred tilt or a clearly preferred sign. We attribute this to an increased mixing efficiency in the very outer part of the flow (Aurnou et al., 2007). The local turnover timescale of convection is a good proxy to quantify the mixing efficiency. We estimate this timescale to be  $\tau_{to} \sim H_\rho / u_{conv}$ . This can be compared with a timescale associated to zonal shear, defined by  $\tau_{zf} \sim \delta / u_{zonal}$  (where  $\delta$  is the typical width of the jets). To yield a significant correlation

between  $u_s$  and  $u_\phi$ , the shear timescale needs to be lower than the turnover timescale, so that a fluid parcel could be diverted in azimuthal direction before losing its identity, leading to

$$\tau_{to} > \tau_{zf} \Rightarrow \frac{H_\rho}{u_{conv}} > \frac{\delta}{u_{zonal}}. \quad (40)$$

Fig. 15 shows that this condition is fulfilled in the inner part of the layer but fails in a very thin layer close to the surface (approximately the outermost 5%). We have marked the radius where both timescales become equal by a dashed circle in Fig. 14.

As demonstrated above for stronger stratifications (see Fig. 5),  $H_\rho$  decreases outward while  $u_{conv}$  increases. This leads to a shorter turnover timescale close to the surface. Therefore, surface plumes that could potentially help to generate vorticity via the compressional source have a too short lifetime to significantly foster Reynolds stresses. In the deeper part, the extra efficiency gained by compressible effects is limited, explaining why zonal jets of compressible and Boussinesq simulations are found to be similar.

## 5. Conclusion

We have investigated the effects of compressibility in 3-D rapidly rotating convection. Following Gilman and Glatzmaier (1981), Jones and Kuzanyan (2009) and Kaspi et al. (2009), all the simulations have been computed under the anelastic approximation. As we focus on the effects of the density stratification, we have deliberately chosen a moderate Ekman number of  $10^{-4}$ , which allowed us to reach more supercritical Rayleigh numbers. From the simulations computed in this parametric study, we highlight the following results:

- Concerning the onset of convection, an increase of the density stratification is accompanied with a strong confinement of the convective columns close to the outer boundary as well as an

increase of the critical azimuthal wavenumber, in agreement with the results of the linear stability of Jones et al. (2009). This gradual outward shift of the onset of convection is explained by the radial increase of buoyancy.

- When increasing supercriticality, the solutions which simply drift close to onset, start to vacillate, then become intermittent and finally chaotic (Grote and Busse, 2001). While these different regimes are clearly separated in the Boussinesq cases, the transitions occupy a shorter fraction of the parameter space with increase of density stratification.
- For stronger background density stratifications, the convective flow amplitude increases outward, while the lengthscale decreases. Concerning zonal winds, Boussinesq and anelastic simulations show very similar properties, provided the convection is strongly driven: both the extent and the number of jets become fairly independent of the density background. This suggests that zonal flows follow a universal behavior, independent of the density stratification, and may also explain why Boussinesq models were already very successful in reproducing the morphology of the jets observed in gas giants (e.g. Heimpel et al., 2005).
- In the strongly nonlinear regime, the solutions seem to follow the same asymptotic scaling laws, independently of the density stratification. Convective Rossby number and Nusselt number follow previously studied laws (Christensen, 2002). The scaling of the total Rossby number differs slightly from that suggested by Showman et al. (2011), which may be attributed to the different model used by these authors. The obtained scaling laws allow us to extrapolate our simulations to Jupiter. Taking an internal heat flux of  $5.44 \text{ W m}^{-2}$  (Hanel et al., 1981),  $\Omega = 1.75 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $c_p = 1.3 \times 10^4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  and  $d = 1.2 \times 10^4 \text{ kms}$ , the evolution models of Guillot et al. (2004) suggest that the flux-based Rayleigh number decreases from  $\text{Ra}_q^* \sim 5 \times 10^{-7}$  at the surface to  $\text{Ra}_q^* \sim 3 \times 10^{-12}$  at the bottom of the molecular envelope (i.e.  $\eta = 0.85$ ). This leads to a mass-weighted flux based Rayleigh number of  $\langle \text{Ra}_q^* \rangle_\rho \sim 1.2 \times 10^{-11}$ . Our scaling law (Eq. (30)) then predicts a Rossby number of  $6 \times 10^{-4}$ , which corresponds to an average zonal velocity around  $1 \text{ m s}^{-1}$ . In agreement with the previous extrapolations of Showman et al. (2011), this value is much weaker (about one order of magnitude) than the surface zonal winds of gas giants. This rescaling is however tentative as the scaling laws may still depend on other parameters that have been kept constant in this study, for example Ekman number, Prandtl number or aspect ratio, and further simulations would be required to clarify this.
- The zonal jets are maintained by Reynolds stresses, which rely on the correlation between zonal ( $u_\phi$ ) and cylindrically radial ( $u_s$ ) flow components. The gradual loss of this correlation with increasing supercriticality hampers all our simulations, independently of the background density stratification. However in the strongly stratified simulations, the correlation is first lost in the outer part of the flow, where compressibility effects are most significant. Because of the short lengthscales and the large flow amplitudes found there, the fluid parcels lose their identity before interacting efficiently with the zonal flows. This may explain why the additional compressional source of vorticity has not the important effect expected by Evonuk (2008) and Glatzmaier et al. (2009) in our simulations. However, the influence of the different vorticity contributions are hard to disentangle in 3-D compressible convection, stressing the need of future theoretical work to address this question.

All the results obtained in this study have been derived in a non-conducting layer, where magnetic effects have been neglected. Nevertheless, as suggested by Liu et al. (2008), the Ohmic dissipation associated with the outer semi-conducting region

could strongly limit the extent of the surface jets. Addressing this problem would require 3-D dynamo simulations of compressible convection with variable conductivity (Stanley and Glatzmaier, 2010; Heimpel and Gómez Pérez, 2011).

## Acknowledgments

All the computations have been carried out on the GWDG computer facilities in Göttingen. This work was supported by the Special Priority Program 1488 (PlanetMag, URL <http://www.planetmag.de>) of the German Science Foundation.

## References

- Anufriev, A.P., Jones, C.A., Soward, A.M., 2005. The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.* 152, 163–190.
- Atkinson, D.H., Ingersoll, A.P., Seiff, A., 1997. Deep winds on Jupiter as measured by the Galileo probe. *Nature* 388, 649–650.
- Aurnou, J., Heimpel, M., Wicht, J., 2007. The effects of vigorous mixing in a convective model of zonal flow on the ice giants. *Icarus* 190, 110–126.
- Ballot, J., Brun, A.S., Turck-Chièze, S., 2007. Simulations of turbulent convection in rotating young solarlike stars: Differential rotation and meridional circulation. *Astrophys. J.* 669, 1190–1208.
- Böhm-Vitense, E., 1958. Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. *Z. Astrophys.* 46, 108–143.
- Braginsky, S.I., Roberts, P.H., 1995. Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 79, 1–97.
- Busse, F.H., 1983. A model of mean zonal flows in the major planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 23, 153–174.
- Busse, F.H., 1994. Convection driven zonal flows and vortices in the major planets. *Chaos* 4, 123–134.
- Busse, F.H., 2002. Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Phys. Fluids* 14, 1301–1314.
- Cho, J., Polvani, L.M., 1996. The morphogenesis of bands and zonal winds in the atmospheres on the giant outer planets. *Science* 273, 335–337.
- Christensen, U.R., 2001. Zonal flow driven by deep convection in the major planets. *Geophys. Res. Lett.* 28, 2553–2556.
- Christensen, U.R., 2002. Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* 470, 115–133.
- Christensen, U.R., Aubert, J., 2006. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Int.* 166, 97–114.
- Christensen, U., Wicht, J., 2007. Numerical dynamo simulations. In: Schubert, G. (Ed.), *Treatise on Geophysics*, vol. 8. Elsevier, Amsterdam, pp. 97–114.
- Evonuk, M., 2008. The role of density stratification in generating zonal flow structures in a rotating fluid. *Astrophys. J.* 673, 1154–1159.
- Fernando, H.J.S., Chen, R.R., Boyer, D.L., 1991. Effects of rotation on convective turbulence. *J. Fluid Mech.* 228, 513–547.
- Gilman, P.A., Glatzmaier, G.A., 1981. Compressible convection in a rotating spherical shell: I – Anelastic equations. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 45, 335–349.
- Glatzmaier, G.A., 2008. A note on “Constraints on deep-seated zonal winds inside Jupiter and Saturn”. *Icarus* 196, 665–666.
- Glatzmaier, G.A., Gilman, P.A., 1981. Compressible convection in a rotating spherical shell: II – A linear anelastic model. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 45, 351–380.
- Glatzmaier, G., Evonuk, M., Rogers, T., 2009. Differential rotation in giant planets maintained by density-stratified turbulent convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 103, 31–51.
- Gough, D.O., Moore, D.R., Spiegel, E.A., Weiss, N.O., 1976. Convective instability in a compressible atmosphere: II. *Astrophys. J.* 206, 536–542.
- Grote, E., Busse, F.H., 2001. Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells. *Fluid Dyn. Res.* 28, 349–368.
- Guillot, T., 1999. Interior of giant planets inside and outside the Solar System. *Science* 286, 72–77.
- Guillot, T., Stevenson, D.J., Hubbard, W.B., Saumon, D., 2004. The interior of Jupiter. In: Bagenal, F., Dowling, T.E., McKinnon, W.B. (Eds.), *Jupiter. The Planet, Satellites and Magnetosphere*, vol. 1. Cambridge Planetary Science, Cambridge, pp. 35–57.
- Hanel, R., Conrath, B., Herath, L., Kunde, V., Pirraglia, J., 1981. Albedo, internal heat, and energy balance of Jupiter – Preliminary results of the Voyager infrared investigation. *J. Geophys. Res.* 86, 8705–8712.
- Heimpel, M., Aurnou, J.M., 2012. Convective bursts and the coupling of Saturn's equatorial storms and interior rotation. *Astrophys. J.* 746, 51.1–51.14.
- Heimpel, M., Gómez Pérez, N., 2011. On the relationship between zonal jets and dynamo action in giant planets. *Geophys. Res. Lett.* 38, L14201.
- Heimpel, M., Aurnou, J., Wicht, J., 2005. Simulation of equatorial and high-latitude jets on Jupiter in a deep convection model. *Nature* 438, 193–196.
- Jones, C.A., Kuzanyan, K.M., 2009. Compressible convection in the deep atmospheres of giant planets. *Icarus* 204, 227–238.

- Jones, C.A., Kuzanyan, K.M., Mitchell, R.H., 2009. Linear theory of compressible convection in rapidly rotating spherical shells, using the anelastic approximation. *J. Fluid Mech.* 634, 291–319.
- Jones, C.A., Boronski, P., Brun, A.S., Glatzmaier, G.A., Gastine, T., Miesch, M.S., Wicht, J., 2011. Anelastic convection-driven dynamo benchmarks. *Icarus* 216, 120–135.
- Kaspi, Y., Flierl, G.R., Showman, A.P., 2009. The deep wind structure of the giant planets: Results from an anelastic general circulation model. *Icarus* 202, 525–542.
- Lantz, S.R., Fan, Y., 1999. Anelastic magnetohydrodynamic equations for modeling solar and stellar convection zones. *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 121, 247–264.
- Lian, Y., Showman, A.P., 2010. Generation of equatorial jets by large-scale latent heating on the giant planets. *Icarus* 207, 373–393.
- Liu, J., Goldreich, P.M., Stevenson, D.J., 2008. Constraints on deep-seated zonal winds inside Jupiter and Saturn. *Icarus* 196, 653–664.
- Nellis, W.J., 2000. Metallization of fluid hydrogen at 140 GPa (1.4 Mbar): Implications for Jupiter. *Planet. Space Sci.* 48, 671–677.
- Nellis, W.J., Weir, S.T., Mitchell, A.C., 1996. Metallization and electrical conductivity of hydrogen in Jupiter. *Science* 273, 936–938.
- Nettelmann, N., Holst, B., Kietzmann, A., French, M., Redmer, R., Blaschke, D., 2008. Ab initio equation of state data for hydrogen, helium, and water and the internal structure of Jupiter. *Astrophys. J.* 683, 1217–1228.
- Plaut, E., Lebranchu, Y., Simatev, R., Busse, F.H., 2008. Reynolds stresses and mean fields generated by pure waves: Applications to shear flows and convection in a rotating shell. *J. Fluid Mech.* 602, 303–326.
- Porco, C.C. et al., 2003. Cassini imaging of Jupiter's atmosphere, satellites, and rings. *Science* 299, 1541–1547.
- Salyk, C., Ingersoll, A.P., Lorre, J., Vasavada, A., Del Genio, A.D., 2006. Interaction between eddies and mean flow in Jupiter's atmosphere: Analysis of Cassini imaging data. *Icarus* 185, 430–442.
- Schaeffer, N., Cardin, P., 2005. Quasigeostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers. *Phys. Fluids* 17, 104111.1–104111.12.
- Scott, R.K., Polvani, L.M., 2008. Equatorial superrotation in shallow atmospheres. *Geophys. Res. Lett.* 35, L24202.1–L24202.5.
- Showman, A.P., Kaspi, Y., Flierl, G.R., 2011. Scaling laws for convection and jet speeds in the giant planets. *Icarus* 211, 1258–1273.
- Simatev, R., Busse, F.H., 2003. Patterns of convection in rotating spherical shells. *New J. Phys.* 5, 97.1–97.20.
- Stanley, S., Glatzmaier, G.A., 2010. Dynamo models for planets other than Earth. *Space Sci. Rev.* 152, 617–649.
- Tortorella, D.A., 2005. Numerical Studies of Thermal and Compressible Convection in Rotating Spherical Shells: An Application to the Giant Planets. Ph.D. Thesis. International Max Planck Research School, Universities of Braunschweig and Göttingen, Germany.
- Unno, W., Kato, S., Makita, M., 1960. Convective instability in polytropic atmospheres. *I. Publ. Astron. Soc. J.* 12, 192–202.
- Vasavada, A.R., Showman, A.P., 2005. Jovian atmospheric dynamics: An update after Galileo and Cassini. *Rep. Prog. Phys.* 68, 1935–1996.
- Vitense, E., 1953. Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne. *Z. Astrophys.* 32, 135–164.
- Wicht, J., 2002. Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Phys. Earth Planet. Inter.* 132, 281–302.
- Williams, G.P., 1978. Planetary circulations. I – Barotropic representation of jovian and terrestrial turbulence. *J. Atmos. Sci.* 35, 1399–1426.
- Zhang, K., 1992. Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* 236, 535–556.

# From solar-like to antisolar differential rotation in cool stars

T. Gastine,<sup>1★</sup> R. K. Yadav,<sup>1,2</sup> J. Morin,<sup>2,3</sup> A. Reiners<sup>2</sup> and J. Wicht<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Max Planck Institut für Sonnensystemforschung, Max-Planck Strasse 2., D-37191 Katlenburg-Lindau, Germany

<sup>2</sup>Institut für Astrophysik, Georg-August-Universität Göttingen, Friedrich-Hund Platz, D-37077 Göttingen, Germany

<sup>3</sup>LUPM–UMR5299, CNRS & Université Montpellier II, Place E. Bataillon, F-34095 Montpellier Cedex 05, France

Accepted 2013 November 8. Received 2013 November 5; in original form 2013 October 10

## ABSTRACT

Stellar differential rotation can be separated into two main regimes: solar-like when the equator rotates faster than the poles and antisolar when the polar regions rotate faster than the equator. We investigate the transition between these two regimes with 3D numerical simulations of rotating spherical shells. We conduct a systematic parameter study which also includes models from different research groups. We find that the direction of the differential rotation is governed by the contribution of the Coriolis force in the force balance, independently of the model setup (presence of a magnetic field, thickness of the convective layer, density stratification). Rapidly rotating cases with a small Rossby number yield solar-like differential rotation, while weakly rotating models sustain antisolar differential rotation. Close to the transition, the two kinds of differential rotation are two possible bistable states. This study provides theoretical support for the existence of antisolar differential rotation in cool stars with large Rossby numbers.

**Key words:** convection – MHD – turbulence – Sun: rotation – stars: rotation.

## 1 INTRODUCTION

The solar surface rotates differentially with the equatorial regions rotating faster than the poles. In addition, helioseismic measurements revealed the internal rotation profile of the Sun: (i) the outer convective region exhibits significant latitudinal gradients of shear; (ii) a strong radial differential rotation is observed at the bottom of the convective zone forming the tachocline; (iii) and the radiative core rotates nearly uniformly (e.g. Thompson et al. 2003).

In cool stars other than the Sun, the surface differential rotation can be inferred from different measurements techniques encompassing Doppler imaging (e.g. Collier Cameron, Donati & Semel 2002), Fourier transform of the spectral lines (e.g. Reiners & Schmitt 2002) or period detection in the photometric measurements (e.g. Reinhold, Reiners & Basri 2013). The latitudinal differential rotation in stars is usually described by a single-parameter law of the form  $\Omega(\theta) = \Omega_e(1 - \alpha \sin^2\theta)$ ,  $\theta$  being the latitude and  $\Omega_e$  the angular velocity at the equator. Differential rotation is then usually categorized as ‘solar-like’ when  $\alpha > 0$  ( $\alpha_\odot = 0.2$ ), or as ‘antisolar’ when the polar regions rotate faster than the equator (i.e.  $\alpha < 0$ ). For main- and pre-main-sequence stars, observations of absolute surface shear show some dependence on rotation period and effective temperature (Barnes et al. 2005; Ammler-von Eiff & Reiners 2012; Reinhold et al. 2013). Information on the sign of differential rotation is very sparse because observational signatures are very subtle (Fourier technique) or only the absolute value is obtained (photometric technique). Up to now, antisolar differential rotation

has only been reported for a handful of K giant stars observed with the Doppler imaging technique (e.g. Strassmeier, Kratzwald & Weber 2003; Weber, Strassmeier & Washuettl 2005; Kovári et al. 2007). We may thus wonder what determines the sign of differential rotation in cool stars.

The first theoretical approach to model stellar differential rotation relies on hydrodynamical mean-field models (e.g. Ruediger 1989). In a similar way as in the mean-field dynamo models, the velocity components  $u_i$  are therefore decomposed into a mean-field contribution  $\bar{u}_i$  and in a fluctuating part  $u'_i$ . The quadratic correlations of the fluctuating quantities, such as Reynolds stresses  $Q_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ , are then parametrized as functions of the mean-field quantities only. Reynolds stresses are for instance expanded assuming  $Q_{ij} = \Lambda_{ijk} \bar{\Omega}_k - N_{ijkl} \partial \bar{u}_k / \partial x_l$ , where  $\Lambda_{ijk}$  and  $N_{ijkl}$  are third- and fourth-order tensors, respectively. The parametrization of the velocity correlations  $Q_{ij}$  thus involves some free coefficients (turbulent viscosity for instance) that need to be set to ensure the closure of the mean-field model. Despite these approximations, mean-field approaches were quite successful in predicting a weak dependence of the surface shear on the rotation rate and a strong correlation with the effective temperature as observed on the main-sequence stars (Küker & Rüdiger 2011). In addition, these models have a strong prediction concerning the sense of the differential rotation and predominantly yield solar-like  $\Omega(\theta)$  profiles (Kitchatinov & Rüdiger 1999). Antisolar differential rotation can only be maintained in the case of very strong meridional circulation (Kitchatinov & Rüdiger 2004).

Alternatively, stellar differential rotation can be modelled using 3D hydrodynamical and dynamo models of rotating convection in spherical geometry. In that case, the differential rotation is

\* E-mail: [gastine@mps.mpg.de](mailto:gastine@mps.mpg.de)

maintained by the interaction of turbulent convection with rotation. Despite their own limitations (high diffusivities and moderate density contrasts), 3D models allow us to fully take into account the non-linearities involved in the angular momentum transport. In contrast with mean-field approaches, no parametrization of Reynolds stresses is required in 3D simulations. Although a large number of such simulations yield solar-like differential rotation, they have also frequently produced antisolar differential rotation over a broad range of parameters and model setups (e.g. Gilman 1977; Glatzmaier & Gilman 1982; Aurnou, Heimpel & Wicht 2007; Steffen & Freytag 2007; Bessolaz & Brun 2011; Käpylä et al. 2011; Matt et al. 2011; Gastine, Wicht & Aurnou 2013a, hereafter GWA13). The differential rotation direction is suspected to be controlled by the relative contribution of buoyancy and Coriolis force in the global force balance (Gilman 1977; Aurnou et al. 2007). Cases where rotation dominates the force balance yield prograde equatorial azimuthal flows, while a weak rotational influence leads to antisolar differential rotation. As shown in previous parameter studies, these two regimes can be well separated by a critical convective Rossby number of unity (Gilman 1977), independently of the background density stratification (Gastine & Wicht 2012, hereafter GW12; GWA13).

This work extends these studies to a broader range of parameters to investigate the zonal flow transition in 3D models in a systematic way. For the sake of generality, we also incorporate data of different research groups who reported antisolar differential rotation in their models.

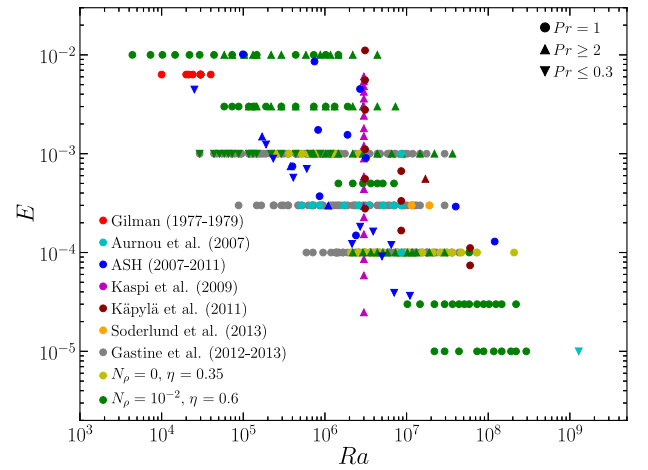
## 2 HYDRODYNAMICAL MODEL

We consider numerical simulations of an anelastic ideal gas in spherical shells rotating at a constant rotation rate  $\Omega_0$ . A fixed entropy contrast  $\Delta s$  between the inner and the outer boundary drives the convective motions. Our numerical models are computed using the anelastic spectral code MAGIC (Wicht 2002; GW12) that has been validated against hydrodynamical and dynamo benchmarks (Jones et al. 2011). We non-dimensionalize the MHD equations using  $\Omega_0^{-1}$  as the time unit and the shell thickness  $d = r_o - r_i$  as the reference length-scale. The anelastic system of equations is then governed by four dimensionless parameters

$$E = \frac{\nu}{\Omega_0 d^2}, \quad Ra = \frac{g_o d^3 \Delta s}{c_p \nu \kappa}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Pm = \frac{\nu}{\lambda}, \quad (1)$$

where  $\nu$ ,  $\kappa$  and  $\lambda$  are the constant kinematic, thermal and magnetic diffusivities and  $g_o$  is the gravity at the outer boundary. Details of the numerical implementation are extensively discussed by Jones et al. (2011) and GW12. Differential rotation maintained in 3D models is suspected to be sensitive to the relative contribution of buoyancy and Coriolis force in the force balance. The ratio between these two forces can be roughly assessed by the so-called *convective Rossby number*, defined by  $Ro_c = \sqrt{Ra E^2 / Pr}$ .

The converged solution of a numerical simulation is then characterized by several diagnostic parameters. The rms flow velocity is given in units of the Rossby number  $Ro' = u'_{\text{rms}} / \Omega_0 d$ , where primed quantities correspond to the non-axisymmetric contribution. The typical flow length-scale  $\ell$  is defined as  $\ell = \pi d / \bar{l}_u$ , where  $\bar{l}_u$  is the mean spherical harmonic degree obtained from the kinetic energy spectrum (e.g. Christensen & Aubert 2006; Schrunner, Petitdemange & Dormy 2012). A *local Rossby number*  $Ro_\ell = u'_{\text{rms}} / \Omega_0 \ell$  can then be used to evaluate the relative contribution of inertia and



**Figure 1.** Dimensionless control parameters explored by various numerical models computed with different codes. Data have been gathered and adapted from Gilman (1977, 1979), Aurnou et al. (2007), ASH (Ballot, Brun & Turck-Chièze 2007; Browning 2008; Brown 2009; Brun & Palacios 2009; Matt et al. 2011; Bessolaz & Brun 2011), Kaspi, Flierl & Showman (2009), Käpylä et al. (2011), Soderlund et al. (2013); GW12 and GWA13.

Coriolis force to the global force balance. Differential rotation is quantified by the amplitude of the equatorial surface zonal flow

$$\alpha_e = \frac{\bar{u}_\phi(r = r_o, \theta = 0)}{\Omega_0 r_o} = \frac{d\Omega(r = r_o, \theta = 0)}{\Omega_0}, \quad (2)$$

where overbars denote axisymmetric quantities.

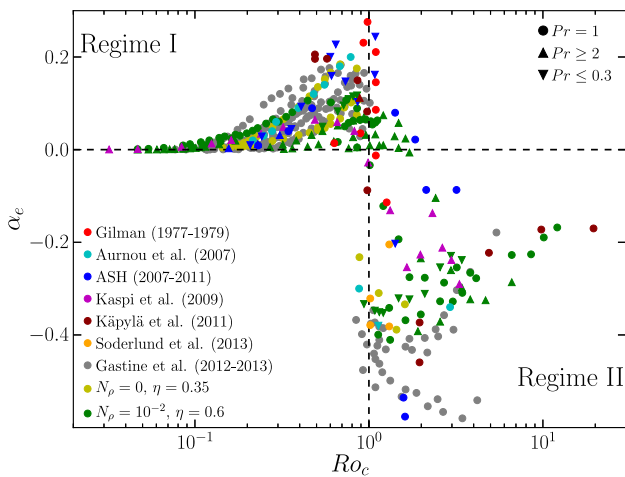
Our previous parameter studies were dedicated to the effects of the density stratification on the differential rotation (GW12; GWA13). They assumed  $Pr = 1$  and covered a limited range of Ekman numbers ( $E = 10^{-3} - 10^{-4}$ ). To extend the coverage of the parameter space, we have computed here 150 new cases which span the range of  $10^{-5} < E < 10^{-2}$ ,  $10^3 < Ra < 5 \times 10^8$  and  $Pr \in [0.1, 1, 10]$ . We consider here non-magnetic nearly Boussinesq models (i.e.  $N_\rho = \ln(\rho_{\text{bot}}/\rho_{\text{top}}) = 10^{-2}$ ) in a thin spherical shell of aspect ratio  $\eta = r_i/r_o = 0.6$ . To investigate how the magnetic field influences differential rotation, we also consider a few Boussinesq dynamo models with  $\eta = 0.35$  and  $Pm = 1$ .

Furthermore, we include additional data from published studies which encompasses Boussinesq (e.g. Aurnou et al. 2007), anelastic spherical harmonic (ASH; e.g. Gilman 1977) and fully compressible 3D models (Käpylä et al. 2011). To our knowledge, all the data reporting antisolar differential rotation have been gathered in Fig. 1, provided control and relevant diagnostic parameters (i.e.  $\alpha_e$ ) were accessible. Note that to ease the comparison between the different setups, the Rayleigh numbers have been rescaled in Fig. 1 to use the entropy gradient at mid-depth, i.e.  $Ra = g_o d^3 |ds/dr|_m / c_p \nu \kappa$ . This provides a better way of comparing different reference state models (see Kaspi et al. 2009; GWA13).

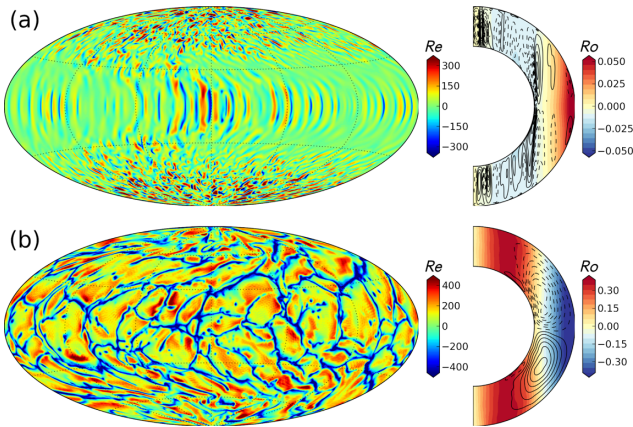
## 3 RESULTS

### 3.1 Differential rotation regimes

Fig. 2 shows the surface differential rotation amplitude  $\alpha_e$  as a function of  $Ro_c$  for the Fig. 1 data set. When Coriolis forces dominate the force balance (i.e.  $Ro_c \ll 1$ , regime I), the equatorial zonal flow is prograde and its amplitude increases with  $Ro_c$ . A relatively sharp transition to retrograde zonal winds (or antisolar differential



**Figure 2.** Amplitude of the surface zonal flows at the equator in units of  $\alpha_e = \bar{u}_\phi / \Omega_0 r_o$  as a function of  $Ro_c$  for the numerical models of Fig. 1.



**Figure 3.** Left-hand panels: radial velocity at  $r = 0.95 r_o$ . Right-hand panels: time-averaged zonal velocity (coloured levels) and meridional circulation (solid and dashed lines). Case (a) corresponds to  $N_\rho = 3$ ,  $\eta = 0.6$ ,  $E = 10^{-4}$ ,  $Ra = 9 \times 10^6$ ,  $Pr = 1$ , case (b) to  $N_\rho = 3$ ,  $\eta = 0.6$ ,  $E = 10^{-3}$ ,  $Ra = 4 \times 10^6$ ,  $Pr = 1$ . Radial velocity is given in Reynolds number units ( $u_r d / \nu$ ) while zonal flows are expressed in Rossby number units.

rotation) then occurs close to  $Ro_c \sim 1$ . Although the data set is scattered, the retrograde equatorial flow is on average stronger than in regime I and reaches values of  $\alpha_e \sim -0.4$  for  $Ro_c \sim 1$ . When buoyancy starts to dominate the force balance (i.e.  $Ro_c \gg 1$ , regime II), the differential rotation decreases suggesting a possible third regime where turbulent motion gradually suppress the mean flows ( $Ro_c > 10$ , see GWA13 and Brummell, Hurlburt & Toomre 1998).

Despite differences in size of the convective layer, values of the control parameters, definition of the Rayleigh number, choice of thermal boundary conditions and so on, the transition between regimes I and II is well captured by  $Ro_c$ , with all the data points concentrating in the top-left and bottom-right quadrants.

To illustrate the differences in the differential rotation patterns in the two regimes, Fig. 3 shows radial velocity and zonal flows for two selected models. In the rotation-dominated regime ( $Ro_c = 0.09$ , upper panels) convective columns aligned with the rotation axis are visible at low latitudes. They are accompanied at higher latitudes by small-scale time-dependent convective cells. Due to the curvature of the spherical shell, the convective columns are slightly tilted in

the prograde direction and give rise to Reynolds stresses (a statistical correlation between the convective flow components, see Busse 1983; Christensen 2002). Reynolds stresses maintain a positive flux of angular momentum away from the rotation axis which is responsible for the observed differential rotation. The pair of geostrophic zonal flows with an eastward equator and westward poles is typical in this regime (e.g. Käpylä et al. 2011; GW12). In contrast, when buoyancy becomes a first-order contribution in the force balance ( $Ro_c = 4$ , lower panels), the convective features lose their preferred alignment with the rotation axis and the zonal flow direction reverses. The equatorial jet becomes retrograde and is flanked by two prograde zonal winds inside the tangent cylinder. The antisolar differential rotation observed here can be attributed to the mixing of angular momentum by the turbulent convective motions (e.g. Gilman & Foukal 1979; Aurnou et al. 2007). As demonstrated by GWA13, the angular momentum per unit mass  $\mathcal{M}$  is thus a conserved quantity such that

$$\mathcal{M} = \bar{u}_\phi s + \Omega_0 s^2 = \text{const.} = \zeta(\eta, N_\rho) \Omega_0 r_o^2, \quad (3)$$

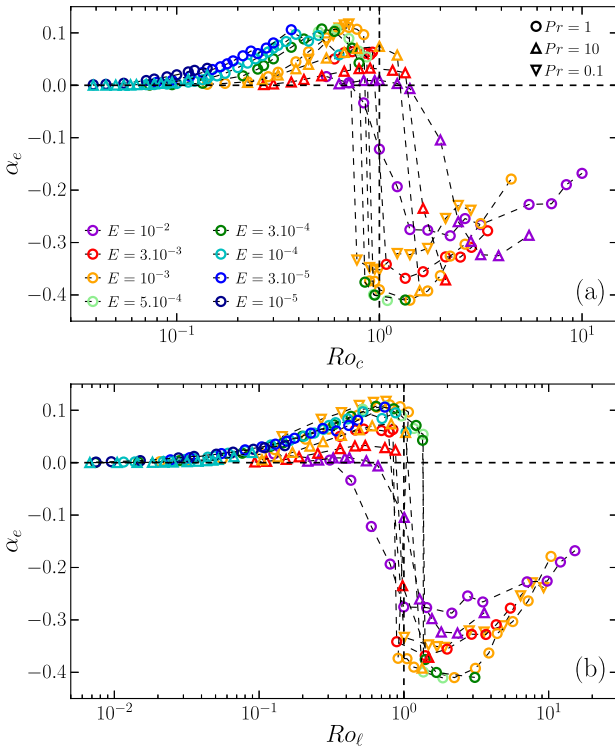
where  $s$  is the cylindrical radius and  $0 < \zeta(\eta, N_\rho) < 1$  depends on the background density stratification, the size of the convective zone and the efficiency of the angular momentum mixing. Using  $\Omega_0 r_o^2$  to non-dimensionalize this equation leads to the following formulation of the differential rotation in regime II:

$$Ro = \frac{\bar{u}_\phi}{\Omega_0 r_o} = \zeta(\eta, N_\rho) \frac{r_o}{s} - \frac{s}{r_o}. \quad (4)$$

Comparisons between the zonal flow profiles and this theoretical prediction give good agreement for models with  $Ro_c \gtrsim 1$  (Aurnou et al. 2007; GWA13).

Meridional circulation patterns change when differential rotation changes sign (e.g. Bessolaz & Brun 2011; Matt et al. 2011). In the upper panel of Fig. 3, multiple small-scale meridional circulation cells are observed, while the second model shows only one large-scale cell in each hemisphere. This transition results from a change in the spatial variations of the azimuthal force balance between viscous and Reynolds stresses (a mechanism sometimes known as ‘gyroscopic pumping’, e.g. Miesch & Hindman 2011).

Fig. 4(a) shows the same quantities as Fig. 2 for a consistent subset of nearly Boussinesq numerical models ( $N_\rho = 10^{-2}$ ) with  $\eta = 0.6$ . This subset is partly composed by the Boussinesq models of GW12 and GWA13 and partly by the additional cases computed for the present study. Considering the same reference model for the whole subset allows us to more accurately scrutinize the zonal flow transition. While the regime change occurs in the range  $0.8 < Ro_c < 2$ , some parameter dependence is still noticeable. For instance, the transition is rather gradual for large Ekman numbers ( $E = 10^{-2}$ , magenta symbols) and becomes sharper when the Ekman number is lowered. Moreover, the Prandtl number dependence does not seem to be perfectly captured by  $Ro_c$ . In fact, the zonal flow transition in the numerical models with  $Pr = 10$  ( $Pr = 0.1$ ) takes place at higher (lower) values of  $Ro_c$  than the  $Pr = 1$  cases. As our data set is limited to relatively large Ekman numbers for  $Pr \neq 1$ , we might however speculate that such  $Pr$  dependence vanishes at low Ekman numbers. As shown in Fig. 4(b), the zonal flow transition is better captured when  $\alpha_e$  is plotted against the local Rossby number  $Ro_\ell$ . This reduction of the dispersion is expected as  $Ro_c$  is only a rough proxy of the convective Rossby number, while  $Ro_\ell$  is a measure of the actual local Rossby number of a numerical model. A precise estimate of  $Ro_\ell$  for the whole data set of models shown in Fig. 2 would thus also help to reduce the observed dispersion.



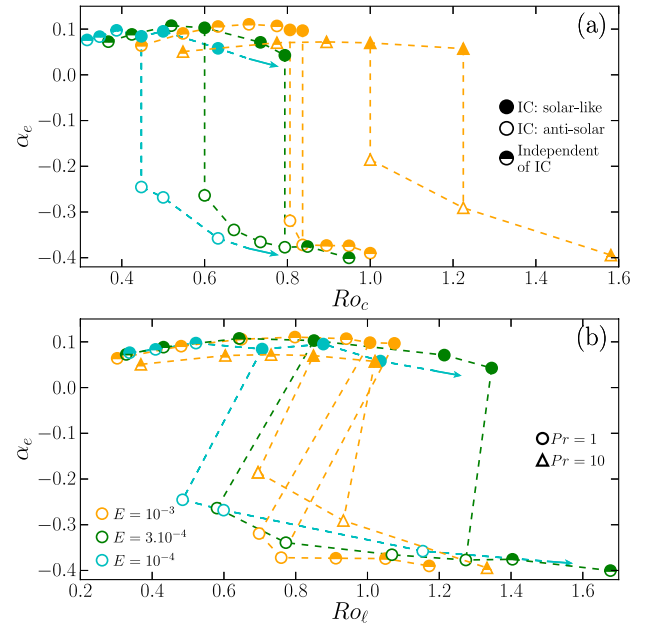
**Figure 4.** (a)  $\alpha_e$  as a function of  $Ro_c$  and (b) as a function of  $Ro_\ell$ . All the numerical models have  $N_p = 10^{-2}$  and  $\eta = 0.6$ .

### 3.2 Zonal flow bistability

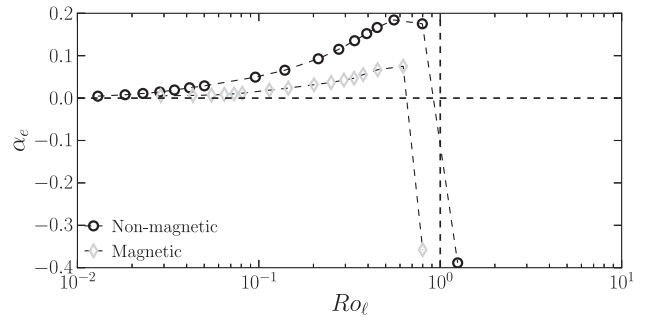
We find several cases of bistability where the two kinds of differential rotation are stable at identical parameters (i.e.  $Ra$ ,  $E$  and  $Pr$ ) when  $Ro_c \sim Ro_\ell \sim 1$ . The initial condition then selects which differential rotation profile will be adopted by the converged solution. As shown in Fig. 5, starting from a model with a solar-like differential rotation and increasing  $Ro_c$  (or  $Ro_\ell$ ) maintains a solution with the same kind of differential rotation for  $0.5 < Ro_\ell < 1.3$  before falling on the other branch at higher  $Ro_\ell$ . Alternatively, if one initiates this model with  $\alpha_e < 0$  and decreases  $Ro_c$ , the solution may remain on that branch. Once again, the  $Pr$  dependence on the bistability region seems to be better captured when one considers  $Ro_\ell$  instead of  $Ro_c$ . The hysteresis loop is relatively narrow for  $E = 10^{-3}$  and becomes wider at  $E = 3 \times 10^{-4}$ . At  $E = 10^{-4}$ , it becomes numerically too demanding to further investigate the extent of the two branches. Hence, an Ekman number dependence cannot be completely ruled out and the extent of the bistability region might increase further when  $E$  is lowered.

### 3.3 Magnetic field influence

To investigate if the zonal flow transition is affected by the presence of magnetic field, we compute two sets of Boussinesq models with  $\eta = 0.35$ : one consists of non-magnetic cases, while the other contains their dynamo counterparts. Fig. 6 shows that in both cases the transition between regimes I and II occurs around  $Ro_\ell \sim 1$ . Due to the influence of the magnetic field on the convective flow velocity and length-scale, the exact value of  $Ro_\ell$  at the transition is slightly lower in the dynamo models. In the rotation-dominated regime, the magnetic cases have significantly weaker zonal flows than the non-magnetic ones. In contrast, hydrodynamical and dynamo mod-



**Figure 5.** (a)  $\alpha_e$  as a function of  $Ro_c$  and (b) as a function of  $Ro_\ell$ . Selection of numerical models with  $N_p = 10^{-2}$  and  $\eta = 0.6$  to illustrate the bistability of the zonal flow. The dependence on the initial conditions (IC) is shown by different symbol fill styles. The blue arrows indicate possible continuation of the hysteresis loop for the  $E = 10^{-4}$  cases.



**Figure 6.**  $\alpha_e$  as a function of  $Ro_\ell$  for non-magnetic and magnetic ( $Pm = 1$ ) models with  $N_p = 0$ ,  $\eta = 0.35$ ,  $E = 10^{-4}$  and  $Pr = 1$ .

els yield similar zonal flow amplitude in regime II, confirming the previous findings by Soderlund et al. (2013). These differences can be attributed to the relative efficiency of the magnetic braking. The quenching of the differential rotation by Lorentz forces is indeed more pronounced when the magnetic field has a significant large-scale contribution ( $Ro_\ell < 1$ ; Yadav, Gastine & Christensen 2013).

## 4 DISCUSSION

We investigate the transition between solar-like and antisolar differential rotation in rotating spherical shells. We extend previous studies (GW12; GWA13) with a new set of models which covers a broader range of control parameters. We also include models published by various groups in our analysis.

From this set of simulations, we confirm previous findings that the direction of differential rotation is determined by the value of the convective Rossby number defined as  $Ro_c = \sqrt{Ra E^2 / Pr}$ . In the rotation-dominated regime (regime I,  $Ro_c < 1$ ), the differential rotation is solar-like, i.e. the equator rotates faster than the

poles. When buoyancy dominates the force balance ( $Ro_c > 1$ ), the turbulent convective motions homogenize the angular momentum, which leads to antisolar differential rotation profiles. The regime transition takes place at  $Ro_c \sim 1$ , independently of the details of the model (density stratification, thickness of the convective layer and so on). We show that the local Rossby number  $Ro_\ell$  – a good proxy of the relative contribution of Coriolis force and inertia in the force balance (Christensen & Aubert 2006) – helps to better separate the two regimes. Close to the transition ( $0.5 < Ro_\ell < 1.5$ ), the two kinds of differential rotation are two possible stable states at the same parameter values, forming a bistable region. The presence of a magnetic field reduces the amplitude of differential rotation in regime I without affecting the regime change at  $Ro_\ell \sim 1$ .

It should be however noted that global numerical models always operate in a parameter regime far from the stellar values due to their large diffusivities (i.e. small Rayleigh and large Ekman numbers). Hence, the existence of additional dynamical regimes cannot be ruled out at realistic parameters. Nonetheless, antisolar differential rotation is systematically found in weakly rotating 3D simulations in contrast with the mean-field results. A closer comparison between mean-field predictions and 3D simulations is therefore desirable to better establish the limits of validity of such mean-field approaches (e.g. Käpylä et al. 2011).

Our results provide theoretical support for the existence of slowly rotating cool stars exhibiting antisolar differential rotation. A further validation of our prediction requires to estimate  $Ro_\ell$  in stellar convective zones. We adopt  $Ro_{\text{emp}}$ , the ratio of the rotation period  $P_{\text{rot}}$  and the turnover time of convection  $\tau_{\text{conv}}$ , as our best available proxy for  $Ro_\ell$  (e.g. Gastine et al. 2013b). With  $P_{\text{rot}} = 25$  d and  $\tau_{\text{conv}} = 12\text{--}50$  d (Reiners 2012), the solar Rossby number lies in the range  $0.5 < Ro_{\text{emp}} < 2$ . This suggests that the Sun might be at the limit of the rotation-dominated regime and that stars with Rossby number just above the solar value could exhibit strong antisolar differential rotation. Claims of antisolar differential rotation are so far restricted to K giants. Most of these stars are in binary systems where tidal effects likely have an impact on the surface shear (e.g. Kovári et al. 2007). The K giant HD 31993 is the only single giant for which a significant antisolar differential rotation is reported ( $\alpha = -0.125$ ; Strassmeier et al. 2003). For this star  $P_{\text{rot}} = 25.3$  d and  $\tau_{\text{conv}} \simeq 25$  d (Gunn, Mitrou & Doyle 1998) yield  $Ro_{\text{emp}} \simeq 1$ , a value close to the threshold but compatible with  $\alpha < 0$ .

Measuring differential rotation for stars clearly in the  $Ro > 1$  regime remains challenging. Doppler imaging or line profile analysis are sensitive to the sign of differential rotation but suffer from some limitations. Doppler imaging indeed relies on the presence of large spots at the stellar photosphere which is not expected for  $Ro_{\text{emp}} > 1$ . Line profile analysis requires a minimum rotational velocity  $v \sin i_{\text{min}} \sim 10\text{--}20$  km s<sup>-1</sup>. This is incompatible with  $Ro_{\text{emp}} > 1$  for cool main-sequence stars. Although Ammler-von Eiff & Reiners (2012) observed line profile shapes attributable to  $\alpha \lesssim 0$  for dwarf stars with  $Ro_{\text{emp}} < 1$ , they attributed these signatures to the presence of cool polar spots. With their larger radii, weakly active evolved giant stars might be more suitable targets. Space missions *CoRoT* and *Kepler* collect high-precision photometric data for a vast sample of stars. Although this technique cannot directly determine the sign of  $\alpha$ , a regime change in the differential rotation might still be captured. Our numerical models indeed suggest a relatively sharp rise in  $|\alpha|$  at the transition between solar and antisolar differential rotation. Latest results based on moderate to fast rotators ( $P_{\text{rot}} < 45$  d) by Reinhold et al. (2013) suggest a possible increase of  $|\alpha|$  with the Rossby number stressing the need for further analysis of slowly rotating Kepler stars.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We thank P. Käpylä for providing us the parameters of his numerical models and A. S. Brun for fruitful discussion. Computations have been carried out on the GWDG computer facilities in Göttingen and on HRLN in Hannover. We acknowledge funding from the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) through Project SFB 963/A17 and through the Special Priority Program 1488.

## REFERENCES

- Ammler-von Eiff M., Reiners A., 2012, *A&A*, 542, A116  
Aurnou J., Heimpel M., Wicht J., 2007, *Icarus*, 190, 110  
Ballot J., Brun A. S., Turck-Chièze S., 2007, *ApJ*, 669, 1190  
Barnes J. R., Collier Cameron A., Donati J.-F., James D. J., Marsden S. C., Petit P., 2005, *MNRAS*, 357, L1  
Bessolaz N., Brun A. S., 2011, *ApJ*, 728, 115  
Brown B. P., 2009, PhD thesis, Univ. Colorado  
Browning M. K., 2008, *ApJ*, 676, 1262  
Brummell N. H., Hurlburt N. E., Toomre J., 1998, *ApJ*, 493, 955  
Brun A. S., Palacios A., 2009, *ApJ*, 702, 1078  
Busse F. H., 1983, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 23, 153  
Christensen U. R., 2002, *J. Fluid Mech.*, 470, 115  
Christensen U. R., Aubert J., 2006, *Geophys. J. Int.*, 166, 97  
Collier Cameron A., Donati J.-F., Semel M., 2002, *MNRAS*, 330, 699  
Gastine T., Wicht J., 2012, *Icarus*, 219, 428 (GW12)  
Gastine T., Wicht J., Aurnou J. M., 2013a, *Icarus*, 225, 156 (GWA13)  
Gastine T., Morin J., Duarte L., Reiners A., Christensen U. R., Wicht J., 2013b, *A&A*, 549, L5  
Gilman P. A., 1977, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 8, 93  
Gilman P. A., 1979, *ApJ*, 231, 284  
Gilman P. A., Foukal P. V., 1979, *ApJ*, 229, 1179  
Glatzmaier G. A., Gilman P. A., 1982, *ApJ*, 256, 316  
Gunn A. G., Mitrou C. K., Doyle J. G., 1998, *MNRAS*, 296, 150  
Jones C. A., Boronski P., Brun A. S., Glatzmaier G. A., Gastine T., Miesch M. S., Wicht J., 2011, *Icarus*, 216, 120  
Käpylä P. J., Mantere M. J., Guerrero G., Brandenburg A., Chatterjee P., 2011, *A&A*, 531, A162  
Kaspi Y., Flierl G. R., Showman A. P., 2009, *Icarus*, 202, 525  
Kitchatinov L. L., Rüdiger G., 1999, *A&A*, 344, 911  
Kitchatinov L. L., Rüdiger G., 2004, *Astron. Nachr.*, 325, 496  
Kovári Z., Bartus J., Strassmeier K. G., Vida K., Švanda M., Oláh K., 2007, *A&A*, 474, 165  
Küker M., Rüdiger G., 2011, *Astron. Nachr.*, 332, 933  
Matt S. P., Do Cao O., Brown B. P., Brun A. S., 2011, *Astron. Nachr.*, 332, 897  
Miesch M. S., Hindman B. W., 2011, *ApJ*, 743, 79  
Reiners A., 2012, *Living Rev. Sol. Phys.*, 9, 1  
Reiners A., Schmitt J. H. M. M., 2002, *A&A*, 384, 155  
Reinhold T., Reiners A., Basri G., 2013, *A&A*, in press, doi:10.1051/0004-6361/201321970  
Ruediger G., 1989, *Differential Rotation and Stellar Convection. Sun and the Solar Stars*. Akademie Verlag, Berlin  
Schrinner M., Petitdemange L., Dormy E., 2012, *ApJ*, 752, 121  
Soderlund K. M., Heimpel M. H., King E. M., Aurnou J. M., 2013, *Icarus*, 224, 97  
Steffen M., Freytag B., 2007, *Astron. Nachr.*, 328, 1054  
Strassmeier K. G., Kratzwald L., Weber M., 2003, *A&A*, 408, 1103  
Thompson M. J., Christensen-Dalsgaard J., Miesch M. S., Toomre J., 2003, *ARA&A*, 41, 599  
Weber M., Strassmeier K. G., Washuettl A., 2005, *Astron. Nachr.*, 326, 287  
Wicht J., 2002, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 132, 281  
Yadav R. K., Gastine T., Christensen U. R., 2013, *Icarus*, 225, 185

This paper has been typeset from a  $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.



# Scaling regimes in spherical shell rotating convection

Thomas Gastine<sup>1,2,†</sup>, Johannes Wicht<sup>2</sup> and Julien Aubert<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut de Physique du Globe de Paris, Sorbonne Paris Cité, Université Paris-Diderot, UMR 7154 CNRS, 1 rue Jussieu, F-75005 Paris, France

<sup>2</sup>Max Planck Institut für Sonnensystemforschung, Justus-von-Liebig-Weg 3, 37077 Göttingen, Germany

(Received 7 July 2016; revised 8 September 2016; accepted 6 October 2016)

Rayleigh–Bénard convection in rotating spherical shells can be considered as a simplified analogue of many astrophysical and geophysical fluid flows. Here, we use three-dimensional direct numerical simulations to study this physical process. We construct a dataset of more than 200 numerical models that cover a broad parameter range with Ekman numbers spanning  $3 \times 10^{-7} \leq E \leq 10^{-1}$ , Rayleigh numbers within the range  $10^3 < Ra < 2 \times 10^{10}$  and a Prandtl number of unity. The radius ratio  $r_i/r_o$  is 0.6 in all cases and gravity is assumed to be proportional to  $1/r^2$ . We investigate the scaling behaviours of both local (length scales, boundary layers) and global (Nusselt and Reynolds numbers) properties across various physical regimes from onset of rotating convection to weakly rotating convection. Close to critical, the convective flow is dominated by a triple force balance between viscosity, Coriolis force and buoyancy. For larger supercriticalities, a small subset of our numerical data approach the asymptotic diffusivity-free scaling of rotating convection  $Nu \sim Ra^{3/2} E^2$  in a narrow fraction of the parameter space delimited by  $6 Ra_c \leq Ra \leq 0.4 E^{-8/5}$ . Using a decomposition of the viscous dissipation rate into bulk and boundary layer contributions, we establish a theoretical scaling of the flow velocity that accurately describes the numerical data. In rapidly rotating turbulent convection, the fluid bulk is controlled by a triple force balance between Coriolis, inertia and buoyancy, while the remaining fraction of the dissipation can be attributed to the viscous friction in the Ekman layers. Beyond  $Ra \simeq E^{-8/5}$ , the rotational constraint on the convective flow is gradually lost and the flow properties continuously vary to match the regime changes between rotation-dominated and non-rotating convection. We show that the quantity  $RaE^{12/7}$  provides an accurate transition parameter to separate rotating and non-rotating convection.

**Key words:** Bénard convection, geostrophic turbulence, rotating flows

## 1. Introduction

Convection-driven flows under the influence of rotation are a ubiquitous physical phenomenon in the fluid interiors of natural objects. The liquid iron core of terrestrial planets, the envelopes of gas giants or the convective regions of rapidly rotating cool stars harbour highly turbulent convective flows strongly constrained by the

† Email address for correspondence: [gastine@ipgp.fr](mailto:gastine@ipgp.fr)

dominant role of the Coriolis force. Rayleigh–Bénard convection (hereafter RBC) is a classical framework to examine the influence of rotation on turbulent convection. In its canonical form, rotating RBC consists of a planar fluid layer confined between two horizontal rigid plates separated from a distance  $L$ , rotating about the vertical axis with a constant rotation rate  $\Omega$ . In this configuration, convective motions are driven by a fixed imposed temperature contrast  $\Delta T$  between the two plates. The dynamics is then controlled by three dimensionless numbers, namely the Rayleigh number  $Ra = \alpha_T g L^3 \Delta T / \nu \kappa$ , the Ekman number  $E = \nu / \Omega L^2$  and the Prandtl number  $Pr = \nu / \kappa$ , where  $\nu$  and  $\kappa$  are the viscous and thermal diffusivities,  $\alpha_T$  is the thermal expansivity and  $g$  is the gravity. A combination of these parameters, named the convective Rossby number  $Ro_c = Ra^{1/2} E / Pr^{1/2}$ , is frequently employed as a reasonable proxy of the ratio between the global-scale buoyancy and Coriolis forces (Gilman 1977). The key issue in RBC is to explore the efficiency of the heat and momentum transports across the layer. Important quantities in this regard are the Reynolds number  $Re$  and the dimensionless heat transport, defined by the Nusselt number  $Nu = QL / \rho c_p \kappa \Delta T$ , where  $Q$  is the total heat flux,  $\rho$  is the density and  $c_p$  the heat capacity. The Nusselt number is the most widely studied diagnostic since it can be easily measured experimentally and numerically and then compared to numerical and theoretical predictions. The understanding of the scaling dependence of  $Nu$  upon the control parameters  $Ra$ ,  $E$  and  $Pr$  is of paramount importance to identify the different regimes and to possibly extrapolate the scaling behaviours to natural objects.

Rotational constraints delay the onset of convection and the critical Rayleigh number increases with increasing rotation rate as  $Ra_c \sim E^{-4/3}$  when  $E \rightarrow 0$  (Chandrasekhar 1961). The convective pattern takes the form of elongated Taylor columns which have a typical horizontal size  $\ell \sim E^{1/3} L$  and are aligned with the rotation axis. Beyond  $Ra_c$ , the heat transport rises much more rapidly than for non-rotating convection (e.g. Rossby 1969; Boubnov & Golitsyn 1990). Hence, if the Rayleigh number is continuously increased far beyond  $Ra_c$  at a given Ekman number, the heat transfer properties will eventually transition to a state where rotational effects become secondary. In this weakly rotating regime with  $Ro_c \gg 1$ , the scaling properties become essentially reminiscent to non-rotating RBC (e.g. Liu & Ecke 1997; Zhong *et al.* 2009). The heat transport scaling is then expected to become independent of the Ekman number and to approach the scalings obtained in classical RBC, i.e.  $Nu \sim Ra^{v_{eff}}$ , with  $0.27 \leq v_{eff} \leq 1/3$  for  $10^5 \leq Ra \leq 10^{12}$  (e.g. Grossmann & Lohse 2000; Funfschilling *et al.* 2005; Ahlers, Grossmann & Lohse 2009; Chillà & Schumacher 2012).

A turbulent regime of rotating convection is expected when both  $Ro_c \ll 1$  and  $Re \gg 1$ . This implies large supercriticalities in combination with low Ekman numbers to ensure that the rotational constraints are not lost. This parameter range is therefore particularly difficult to explore with current-day laboratory experiments and numerical simulations (see Aurnou *et al.* 2015). In the following, we make the assumption that the heat transport scaling can be written as

$$Nu \sim Ra^\alpha E^\beta Pr^\gamma \quad (1.1)$$

in this regime. In general however, the values of the exponents  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  might well continuously vary with  $Ra$ , similarly to classical RBC (Grossmann & Lohse 2000). In contrast to non-rotating convection, where the heat transport is controlled by diffusive processes in the thermal boundary layers, a dominant fraction of the temperature difference is accommodated in the fluid bulk when  $Ro_c \ll 1$  (e.g. Boubnov & Golitsyn

1990; Schmitz & Tilgner 2009; Kunnen, Geurts & Clercx 2010; Julien *et al.* 2012*b*; King, Stellmach & Buffett 2013). We can therefore hypothesise that the heat transport is controlled by the fluid bulk rather than by the thermal boundary layers that play an important role in the weakly rotating limit. Because the viscous dissipation is rather weak in the fluid interior, we make the assumption that  $Nu$  will thus become independent of the diffusivities  $\nu$  and  $\kappa$  in the asymptotic limit of rapidly rotating convection (Gillet & Jones 2006; Jones 2015). From the definition of  $Ra$ ,  $E$ ,  $Pr$  and  $Nu$ , this requirement yields the following combination of the scaling exponents

$$-\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \gamma = 1. \quad (1.2a,b)$$

In the limit of non-rotating convection, the dependence on  $E$  vanishes (i.e.  $\beta = 0$ ) and the previous relationship between the scaling exponents relating  $\alpha$  and  $\gamma$  yields the so-called ultimate regime of classical RBC  $Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2}$  (Kraichnan 1962). Numerical models of rotating convection by King, Stellmach & Aurnou (2012) further indicate that the heat flux might only depend on the supercriticality  $Ra/Ra_c$  when  $Ro_c \ll 1$  (see also Julien *et al.* 2012*a*; Stellmach *et al.* 2014). This second hypothesis yields  $\beta = 4\alpha/3$  when  $E \rightarrow 0$  and allows us to derive the following diffusivity-free scaling for rotating convection

$$Nu \sim Ra^{3/2} E^2 Pr^{-1/2}. \quad (1.3)$$

Gillet & Jones (2006) derive the same equation under the hypothesis that a triple force balance between Coriolis force, inertia and buoyancy controls the asymptotic regime of rapidly rotating turbulent convection (see also Stevenson 1979; Barker, Dempsey & Lithwick 2014). The analysis carried out by Julien *et al.* (2012*a*) leads to the same inviscid scaling in the framework of asymptotically reduced equations expected to hold when  $E \rightarrow 0$ . The evidence for such a low- $Ro_c$  scaling law is however strongly debated. Specifically, King *et al.* (2012) suggest a much steeper heat transport scaling  $Nu \sim Ra^3 E^4$  for  $E = O(10^{-5})$  and  $Ro_c = O(0.1)$ , based on laboratory experiments in water complemented by numerical simulations of rotating convection with rigid mechanical boundaries in Cartesian coordinates (see also King *et al.* 2013). Similar numerical models by Schmitz & Tilgner (2009) that instead employ stress-free boundaries rather found  $Nu \sim (Ra E^{4/3})^{1.22}$  for a comparable parameter range. This discrepancy implies that the viscous boundary layers might still have a direct influence on the heat transport even at low  $E$ . The recent comparative study by Stellmach *et al.* (2014) for rigid and stress-free numerical models at lower Ekman numbers  $E = O(10^{-7})$  indeed reveals an active role of the Ekman boundary layers (see also Kunnen *et al.* 2016; Plumley *et al.* 2016). While the stress-free models gradually approach the diffusivity-free scaling (1.3) (see also Barker *et al.* 2014), the Ekman pumping in the cases with rigid boundaries leads to increasing scaling exponents when  $E$  is decreased towards geophysical values (Cheng *et al.* 2015; Julien *et al.* 2016). This prominent role of the boundary layers therefore questions the relevance of the inviscid scaling (1.3) for rigid boundaries.

Although the spherical geometry is more natural for studying rotating convection in astrophysical and geophysical objects, the majority of the rotating RBC laboratory experiments developed over the past three decades have been carried out in planar and cylindrical cells, in which the rotation axis and the gravity are aligned. The Cartesian geometry also allows the computation of efficient local direct numerical simulations that operate at low Ekman numbers (e.g. Kunnen *et al.* 2010; Ecke & Niemela 2014; Horn & Shishkina 2015). Hence, the fruitful interplay between numerical and laboratory experiments in planar or cylindrical geometries enabled a complementary

coverage of the parameter space in the low- $Ro_c$  regime (e.g. Aurnou 2007; Stellmach *et al.* 2014; Aurnou *et al.* 2015; Cheng *et al.* 2015). However, it remains unclear whether the planar RBC results can be directly applied to rotating convection in spherical geometry. Two specific features of thermal convection in rotating spherical shells are indeed expected to yield significant dynamical differences with the planar or cylindrical RBC set-ups: (i) in most of the fluid volume of spherical shells, gravity is inclined with respect to the rotation axis; (ii) due to both curvature and radial variations of the gravitational acceleration, spherical RBC features a significant asymmetry between the hot and the cold bounding surfaces (e.g. Bercovici *et al.* 1989; Jarvis 1993; Gastine, Wicht & Aurnou 2015).

Besides the micro-gravity experiments that operate at relatively large Ekman numbers due to their moderate sizes ( $E = O(10^{-3})$ , see Hart, Glatzmaier & Toomre 1986; Egbers *et al.* 2003), most of the laboratory investigations of spherical rotating RBC make use of the centrifugal force as a surrogate for the radial gravitational acceleration (Busse & Carrigan 1974; Cardin & Olson 1994; Sumita & Olson 2003; Shew & Lathrop 2005). The combined influence of the laboratory gravity and the centrifugal acceleration of the rotating vessel indeed allows generation of surfaces of gravity potential close to the spherical surfaces in the lower hemisphere of the spherical shell (see for a review Cardin & Olson 2015). This technique was first employed to explore the onset of convection in rotating spherical RBC (Cordero & Busse 1992). Sumita & Olson (2003) studied the scaling behaviours of the heat transport for a relatively low Ekman number ( $E \simeq 5 \times 10^{-6}$ ) but with a strong convective forcing ( $Ra \geq 200 Ra_c$ ). In this parameter range, they obtained  $Nu \sim Ra^{0.41}$ , a scaling exponent that is hardly steeper than non-rotating RBC and therefore suggests that the Coriolis force only plays a minor role on the heat transfer.

Numerical simulations of three-dimensional convection in spherical shells have been developed since the late 1970s as a complementary approach to the laboratory experiments (e.g. Gilman 1977; Tilgner & Busse 1997; Christensen 2002). Christensen & Aubert (2006), later complemented by King *et al.* (2010), conducted a systematic parameter study of the scaling properties of convective dynamo models with rigid boundaries and reported the scaling  $Nu \sim Ra^{6/5} E^{8/5}$  for  $E = O(10^{-5})$ . These studies were however carried out in the presence of a self-sustained magnetic field that can possibly impinge on the heat transport. More recently, Yadav *et al.* (2016) studied the influence of both the presence of a magnetic field and the nature of the mechanical boundary condition on the heat transfer in spherical RBC. Magnetic and non-magnetic models were found to exhibit similar heat transfer scaling behaviours possibly because of the parameter space limitation to  $E = O(10^{-5})$  (see also Soderlund, King & Aurnou 2012; Garcia, Sánchez & Net 2014). Furthermore, these authors did not observe the steep increase of the  $Ra$ -scaling exponent beyond  $3/2$  reported in the Cartesian calculations (e.g. King *et al.* 2012) when rigid boundaries were employed. Since the heat transport in spherical shells is dominated by the equatorial regions where the gravity is nearly perpendicular to the rotation axis (Tilgner & Busse 1997; Yadav *et al.* 2016), it is not entirely surprising that the scaling properties differ from the Cartesian models that would best represent the high-latitude dynamics of a spherical shell.

While  $Nu$  is a ubiquitous diagnostic quantity studied in both laboratory experiments and numerical models; numerical calculations also enable the computation of additional diagnostics that can provide direct insights on the dynamical regimes. In that regard, the scaling analysis of the convective flow speed  $Re$  and the typical length scale  $\ell$  can be used to disentangle the underlying force balance in rotating

RBC (Aubert *et al.* 2001; King & Buffett 2013). Two theoretical scalings for  $Re$  and  $\ell$  have been put forward. The first one, frequently called the inertial scaling of rotating convection, hypothesises a triple force balance between Coriolis, inertia and Archimedean forces (CIA scaling, see Stevenson 1979; Cardin & Olson 1994; Aubert *et al.* 2001; Barker *et al.* 2014), while the second rather relies on a triple balance between viscosity, Archimedean and Coriolis forces (VAC scaling, see King *et al.* 2013). These two concurrent theories however lead to scaling exponents for  $Re(Ra, E, Pr)$  close to each other. Using the numerical dataset by Christensen & Aubert (2006), King & Buffett (2013) even demonstrated that these limited data can support both  $Re$ -scalings at the same statistical confidence level. This study indicates a sizeable role played by viscosity in rotating RBC models with  $E \geq 10^{-5}$ . To decrease the numerical cost of direct three-dimensional calculations, the quasi-geostrophic approximation of spherical convection (hereafter QG, see Busse & Or 1986; Cardin & Olson 1994) has been developed. In the limit of  $E \rightarrow 0$  and  $Ro_c \ll 1$ , convection is strongly constrained by rotation and can be approximated by a quasi-two-dimensional flow, which allows us to decrease the Ekman number to  $E = O(10^{-7})$  (Aubert, Gillet & Cardin 2003; Gillet & Jones 2006; Guervilly 2010). However, the scaling analyses carried out by Gillet & Jones (2006) and Guervilly (2010) did not show any clear evidence of convergence towards the diffusivity-free scalings for both  $Nu$  and  $Re$ , even when  $E \lesssim 10^{-6}$ . Furthermore, the lack of a direct one-to-one comparison between the QG results and the fully three-dimensional computations makes the interpretation of these results difficult. Hence, the determination of an accurate scaling law for both  $Re$  and  $\ell$  in rapidly rotating spherical RBC forms one of the main goals of this work.

The aims of this study are twofold: (i) to determine the boundaries of the different physical regimes of rapidly rotating convection in spherical shells by means of three-dimensional numerical simulations; (ii) to establish the scaling behaviours of both the local (length scale, boundary layers) and the global ( $Nu$  and  $Re$ ) properties that hold within each of these different regimes. We conduct a systematic parameter study varying the Ekman number within the range  $3 \times 10^{-7} \leq E \leq 10^{-1}$  and the Rayleigh number within the range  $10^3 \lesssim Ra \lesssim 2 \times 10^{10}$  for a unity Prandtl number spherical shell of radius ratio  $r_i/r_o = 0.6$ . To do so, we construct a dataset of 227 rotating simulations that complement our previous non-rotating calculations (Gastine *et al.* 2015). Recent improvements of pseudo-spectral numerical codes (Schaeffer 2013) enabled us to decrease the Ekman number to values comparable to those used in present-day local Cartesian calculations. Our dataset allows us to determine the regime boundaries for rotating convection and to check the validity of the diffusivity-free scaling (1.3) in the low- $E$  regime. We examine the scaling behaviours of seven different diagnostics:  $Nu$  and  $Re$ , the viscous dissipation rate, the typical flow length scale, the interior temperature gradient and the viscous and the thermal boundary layer thicknesses.

In § 2, we introduce the hydrodynamical model and the various diagnostic quantities of interest. The numerical results are presented in § 3. We conclude with a summary of our findings in § 4.

## 2. Formulation of the hydrodynamical problem

### 2.1. Governing equations

We consider rotating convection of a Boussinesq fluid confined in a spherical shell that rotates at a constant frequency  $\Omega$  about the  $z$  axis. Convective motions are driven by a fixed temperature contrast  $\Delta T = T_i - T_o$  between the inner radius  $r_i$  and the outer

radius  $r_o$ . The boundaries are impermeable, no slip and held at constant temperatures. We adopt a dimensionless formulation of the Navier–Stokes equations using the shell thickness  $L = r_o - r_i$  as the reference length scale and the viscous diffusion time  $L^2/\nu$  as the reference time scale. The temperature contrast  $\Delta T$  defines the temperature scale and gravity is non-dimensionalised using its reference value at the outer boundary  $g_o$ . The dimensionless equations that govern convective motions for the velocity  $\mathbf{u}$ , the pressure  $p$  and the temperature  $T$  are then expressed by

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \frac{2}{E} \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{Ra}{Pr} \tilde{g} \tilde{T} \mathbf{e}_r + \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \frac{1}{Pr} \Delta \tilde{T}, \quad (2.3)$$

where the tildes designate the dimensionless variables. The units vectors in the radial and vertical directions are denoted by  $\mathbf{e}_r$  and  $\mathbf{e}_z$ , respectively. We make the assumption of a centrally condensed mass which yields a dimensionless gravity profile of the form  $\tilde{g} = (r_o/r)^2$ . This particular choice is motivated by the exact analytical relation between the buoyancy power and the so-called flux-based Rayleigh number when  $\tilde{g} \sim 1/r^2$  (see below and Gastine *et al.* 2015). This enables us to conduct an exact analysis of the viscous dissipation rate and to directly compare our numerical models with our previous calculations of non-rotating convection which employed the same gravity profile.

The dimensionless equations (2.1)–(2.3) are governed by the Ekman number  $E$ , the Rayleigh number  $Ra$ , the Prandtl number  $Pr$  and the radius ratio of the spherical shell  $\eta$  defined by

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2}, \quad Ra = \frac{\alpha_T g_o \Delta T L^3}{\nu \kappa}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \eta = \frac{r_i}{r_o}, \quad (2.4a-d)$$

where  $\alpha_T$  is the thermal expansion coefficient,  $\nu$  is the kinematic viscosity and  $\kappa$  is the thermal diffusivity. In the following, we will also consider the convective Rossby number,  $Ro_c$ , expressed by

$$Ro_c = \sqrt{\frac{\alpha_T g_o \Delta T}{\Omega^2 L}} = \frac{Ra^{1/2} E}{Pr^{1/2}}, \quad (2.5)$$

which provides a good proxy of the relative importance of buoyancy forcing and Coriolis force in rotating convection (e.g. Gilman 1977).

## 2.2. Numerical technique

The numerical simulations carried out in this study have been computed using the open-source magnetohydrodynamics code MagIC (Wicht 2002; Gastine *et al.* 2016). (Available at <http://www.github.com/magic-sph/magic>.) MagIC has been validated via several benchmark tests for convection and dynamo action in a spherical shell geometry (Christensen *et al.* 2001; Jones *et al.* 2011). To solve the system of equations (2.1)–(2.3) in spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$ , the velocity field is decomposed into a poloidal and a toroidal contribution

$$\tilde{\mathbf{u}} = \nabla \times (\nabla \times \tilde{W} \mathbf{e}_r) + \nabla \times \tilde{Z} \mathbf{e}_r, \quad (2.6)$$

where  $\tilde{W}$  and  $\tilde{Z}$  are the poloidal and toroidal potentials. The dimensionless unknowns  $\tilde{W}$ ,  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{p}$  and  $\tilde{T}$  are expanded in spherical harmonic functions up to degree  $l_{max}$  in the colatitude  $\theta$  and longitude  $\phi$  and in Chebyshev polynomials up to degree  $N_r$  in the radial direction. The equations are time advanced using an explicit second-order Adams–Bashforth scheme for the Coriolis acceleration and the nonlinear terms and an implicit Crank–Nicolson algorithm for the remaining linear terms. The explicit treatment of the Coriolis force implies that the dimensionless time step size is limited to a fraction of the rotation period. For a comprehensive description of the numerical method and the associated spectral transforms, the reader is referred to Gilman & Glatzmaier (1981), Tilgner & Busse (1997) and Christensen & Wicht (2015). For the most demanding calculations, MagIC uses the open-source library SHTns to speed up the spherical harmonic transforms (Schaeffer 2013). (Available at <https://bitbucket.org/nschaeff/shtns>.)

### 2.3. Diagnostics

We introduce in the following several diagnostic properties to quantify the impact of the different control parameters on the flow and temperature properties. We adopt several notations regarding averaging procedures. Overbars  $\overline{\dots}$  correspond to temporal averaging, angular brackets  $\langle \dots \rangle$  to spatial averaging over the entire spherical shell volume and  $\langle \dots \rangle_s$  to an average over a spherical surface

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} f dt, \quad \langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(r, \theta, \phi) dV, \quad \langle f \rangle_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (2.7a-c)$$

where  $V$  is the spherical shell volume and  $\tau$  is the time averaging interval.

For the sake of clarity, we introduce the notation  $\vartheta$  to define the time and horizontally averaged radial dimensionless temperature profile

$$\vartheta(r) = \overline{\langle \tilde{T} \rangle_s}. \quad (2.8)$$

The heat transport is characterised by the Nusselt number  $Nu$ , the ratio of the total heat flux to the heat carried by conduction

$$Nu = \frac{\eta Q L}{\rho c_p \kappa \Delta T} = \frac{\left. \frac{d\vartheta}{dr} \right|_{r=r_o}}{\left. \frac{d\tilde{T}_c}{dr} \right|_{r=r_o}} = \frac{\left. \frac{d\vartheta}{dr} \right|_{r=r_i}}{\left. \frac{d\tilde{T}_c}{dr} \right|_{r=r_i}}, \quad (2.9)$$

where  $Q$  is the heat flux,  $c_p$  is the heat capacity and  $\tilde{T}_c$  is the dimensionless conductive temperature profile, solution of

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{T}_c}{dr} \right) = 0, \quad \tilde{T}_c(r_i) = 1, \quad \tilde{T}_c(r_o) = 0. \quad (2.10)$$

The dimensionless kinetic energy  $\tilde{E}_k$  is defined by

$$\tilde{E}_k = \frac{1}{2} \overline{\langle \tilde{u}^2 \rangle} = \sum_{l=1}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \mathcal{E}_l^m, \quad (2.11)$$

where  $\mathcal{E}_l^m$  is the dimensionless kinetic energy density at a spherical harmonic degree  $l$  and order  $m$ . In rotating spherical shells, the axisymmetric zonal flow can represent

a significant fraction of the total kinetic energy (e.g. Christensen 2002; Gastine & Wicht 2012; Yadav *et al.* 2016). Since this flow does not directly contribute to the heat transfer, we decide to rather characterise the root-mean-square (r.m.s.) flow velocity by the time-averaged convective Reynolds number expressed by

$$Re_c = \sqrt{2 \sum_{l=1}^{l_{max}} \sum_{m=1}^l \mathcal{E}_l^m}, \quad (2.12)$$

where the contribution from the axisymmetric flows ( $m = 0$ ) has been excluded. The fluid bulk in rotating convection usually departs from the well-mixed convective interior obtained in classical RBC. Under the influence of rapid rotation, turbulent mixing is inhibited and strong interior temperature gradients can persist (e.g. Julien *et al.* 1996; King *et al.* 2009; Stellmach *et al.* 2014). We denote the bulk temperature gradient at mid-shell by

$$\beta_T = \left. \frac{d\vartheta}{dr} \right|_{r=r_m}, \quad r_m = \frac{1 + \eta}{2(1 - \eta)}. \quad (2.13a,b)$$

Following Christensen & Aubert (2006), the typical flow length scale is determined from the time-averaged kinetic energy spectrum

$$\ell^{-1} = \left( \frac{L \sum_{l=1}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l l \mathcal{E}_l^m(t)}{\pi \sum_{l=1}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \mathcal{E}_l^m(t)} \right). \quad (2.14)$$

Several different approaches have been considered to define the thermal boundary layer thickness  $\lambda_T$ . They either rely on the mean radial temperature profile  $\vartheta(r)$  (e.g. Verzicco & Camussi 1999; Breuer *et al.* 2004; Liu & Ecke 2011) or on the r.m.s. of the temperature fluctuations (e.g. Julien *et al.* 2012b; King *et al.* 2013; Kunnen *et al.* 2016). For consistency with the definition adopted in our non-rotating calculations (Gastine *et al.* 2015),  $\lambda_T^i$  ( $\lambda_T^o$ ) is defined here as the depth where the linear fit to the temperature profile near the inner (outer) boundary intersects the linear fit to the profile at mid-depth. The comparison of this boundary layer definition with the estimate coming from the location of the peaks of the r.m.s. of the temperature fluctuations for a few selected cases yield similar boundary layer thicknesses. The viscous boundary layer thicknesses are estimated following a similar slope-intersection method:  $\lambda_U^i$  ( $\lambda_U^o$ ) is defined as the distance from the inner (outer) boundary where the linear fit to the horizontal velocity profile  $u_h = \sqrt{u_\theta^2 + u_\phi^2}$  near the inner (outer) boundary intersects the horizontal line passing through the maximum of  $u_h$  (see also Breuer *et al.* 2004).

#### 2.4. Parameter choice and resolution checks

We aim at studying the scaling behaviours of both the local (length scales, temperature gradient, boundary layers) and the global (Nusselt and Reynolds numbers) properties for each dynamical regimes of rotating convection in spherical shells. To achieve this



goal, we build a dataset of 227 global spherical shell models that span the range  $3 \times 10^{-7} \leq E \leq 10^{-1}$  and  $10^3 < Ra < 2 \times 10^{10}$ . The radius ratio  $\eta$  is kept fixed to  $\eta = 0.6$  and the Prandtl number to  $Pr = 1$  to limit the extension of the parameter space. This set-up also allows a direct comparison with our previous non-rotating models (Gastine *et al.* 2015). The numerical dataset constructed in this study thoroughly explores various dynamical regimes of rotating convection encompassing convection close to critical, turbulent quasi-geostrophic convection and weakly rotating convection. The summary table 2 given in appendix A contains the calculations of the main control and diagnostic quantities computed for each numerical simulation.

Particular attention must be paid to the numerical resolution requirements for global models of convection (Shishkina *et al.* 2010; King *et al.* 2012), since under-resolution can significantly degrade the accuracy of the obtained exponents when deriving asymptotic scaling laws (Amati *et al.* 2005). The comparison of the viscous and thermal dissipation rates with the time-averaged Nusselt number provides a robust way to validate the numerical resolutions employed in our models (e.g. Stevens, Verzicco & Lohse 2010; Lakkaraju *et al.* 2012). As demonstrated in our previous RBC calculations (Gastine *et al.* 2015), the choice of a centrally condensed mass (i.e.  $\tilde{g} \sim 1/r^2$ ) ensures the following analytical relations between the dimensionless viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$  and the flux-based Rayleigh number defined by  $Ra_Q = Ra(Nu - 1)$ :

$$\tilde{\epsilon}_U = \overline{\langle (\nabla \times \tilde{\mathbf{u}})^2 \rangle} = \frac{3}{1 + \eta + \eta^2} \frac{Ra_Q}{Pr^2}, \quad (2.15)$$

and between the dimensionless thermal dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_T$  and the Nusselt number

$$\tilde{\epsilon}_T = \overline{\langle (\nabla \tilde{T})^2 \rangle} = \frac{3\eta}{1 + \eta + \eta^2} Nu. \quad (2.16)$$

The related ratios

$$\chi_T = \frac{(1 + \eta + \eta^2) \tilde{\epsilon}_T}{3\eta Nu}, \quad \chi_U = \frac{(1 + \eta + \eta^2) Pr^2 \tilde{\epsilon}_U}{3 Ra_Q}, \quad (2.17a,b)$$

can thus be used to check the adequacy of the spatial resolutions of the numerical models. As shown in table 2, these ratios are very close to unity (within 3%) for all the simulations computed here, validating the grid resolutions. The temporal convergence of the numerical models has been ensured by running the simulations for at least 50 convective overturn times.

The numerical truncations employed here range from ( $N_r = 61$ ,  $l_{max} = 64$ ) for the case with the largest Ekman and lowest Rayleigh numbers to ( $N_r = 641$ ,  $l_{max} = 1345$ ) for the numerical model with  $E = 3 \times 10^{-7}$  and the highest  $Ra$ . To save computational resources, some of the most demanding cases (with  $E \leq 3 \times 10^{-6}$ ) have been computed on an azimuthally truncated spherical shell with a twofold, fourfold or eightfold symmetry (see table 2 for details). Since rapidly rotating convection is dominated by small-scale structures, this assumption is not considered to have any significant impact on the results. In addition, the comparison of test cases with or without symmetries showed no statistical differences. The total computational time spent to construct the present dataset of numerical models corresponds to roughly 13 million core hours of Intel Ivy Bridge cores.

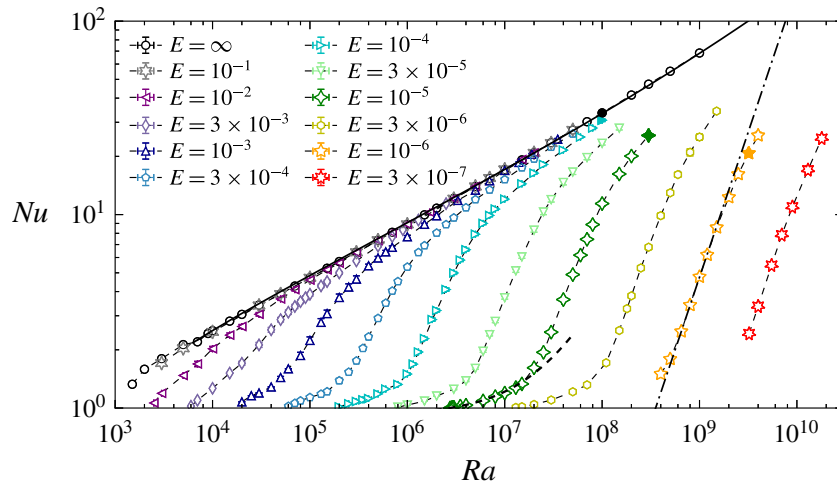


FIGURE 1. (Colour online) Nusselt number as a function of the Rayleigh number with Ekman numbers denoted by symbol shape (and colour online). The dashed black line corresponds to the weakly nonlinear onset scaling  $Nu - 1 = 0.08(Ra/Ra_c - 1)$  (3.2) discussed in § 3.1. The dot-dashed black line corresponds to the asymptotic scaling  $Nu = 0.15 Ra^{3/2} E^2$  (3.10) in the rotation-dominated regime discussed in § 3.2. The solid black line corresponds to heat transfer scaling for non-rotating convection derived in Gastine *et al.* (2015). The four filled-in symbols correspond to the four cases highlighted in figure 2. The error bars correspond to one standard deviation from the time-averaged Nusselt number (i.e.  $Nu \pm \sigma$ ). For most of the numerical models, these error bars are smaller than the size of the symbols.

### 3. Numerical results

Figure 1 shows  $Nu$  as a function of  $Ra$  for both rotating and non-rotating cases. In rotating convection, the onset is delayed and the critical Rayleigh number  $Ra_c$  increases with decreasing Ekman number. Close to critical,  $Nu$  initially increases slowly and roughly linearly with  $Ra$  (dashed line). Beyond this weakly nonlinear regime of rotating convection, i.e. when  $Nu \gtrsim 2$ , the heat transport increases more rapidly with  $Ra$  than in the non-rotating RBC (dotted-dashed line). This behaviour is reminiscent to that observed in plane layer studies (e.g. Rossby 1969; King *et al.* 2009; Schmitz & Tilgner 2009; Cheng *et al.* 2015). Above a transitional Rayleigh number that will be determined below, the heat transfer data for each Ekman number then tend towards the non-rotating behaviour. As shown in our previous study (Gastine *et al.* 2015), the non-rotating data ( $E = \infty$ ) can be accurately described by a dissipation analysis that follows the Grossmann & Lohse (2000) theory (black circles and solid black line). The non-rotating RBC thus defines an effective upper limit for the heat transport in rotating convection in spherical shells at large  $Ra$ . In contrast to plane layer calculations, the spherical shell data do not exhibit any overshoot of rotating heat transfer beyond the non-rotating RBC scalings (Liu & Ecke 1997; Zhong *et al.* 2009).

To illustrate the diversity of the dynamical regimes in rotating spherical shell RBC, figure 2 shows equatorial, meridional and radial cuts of the dimensionless temperature fluctuations  $\tilde{T}' = \tilde{T} - \vartheta$  for four selected cases. The filled-in symbols in figure 1 indicate their positions in the  $Nu - Ra$  parameter space. The image in figure 2(a) corresponds to a non-rotating model with  $Ra = 10^8$ . Due to an efficient turbulent mixing, the fluid bulk is nearly isothermalised and most of the temperature fluctuations take the form of thermal plumes that depart from the thin boundary layers. As visible

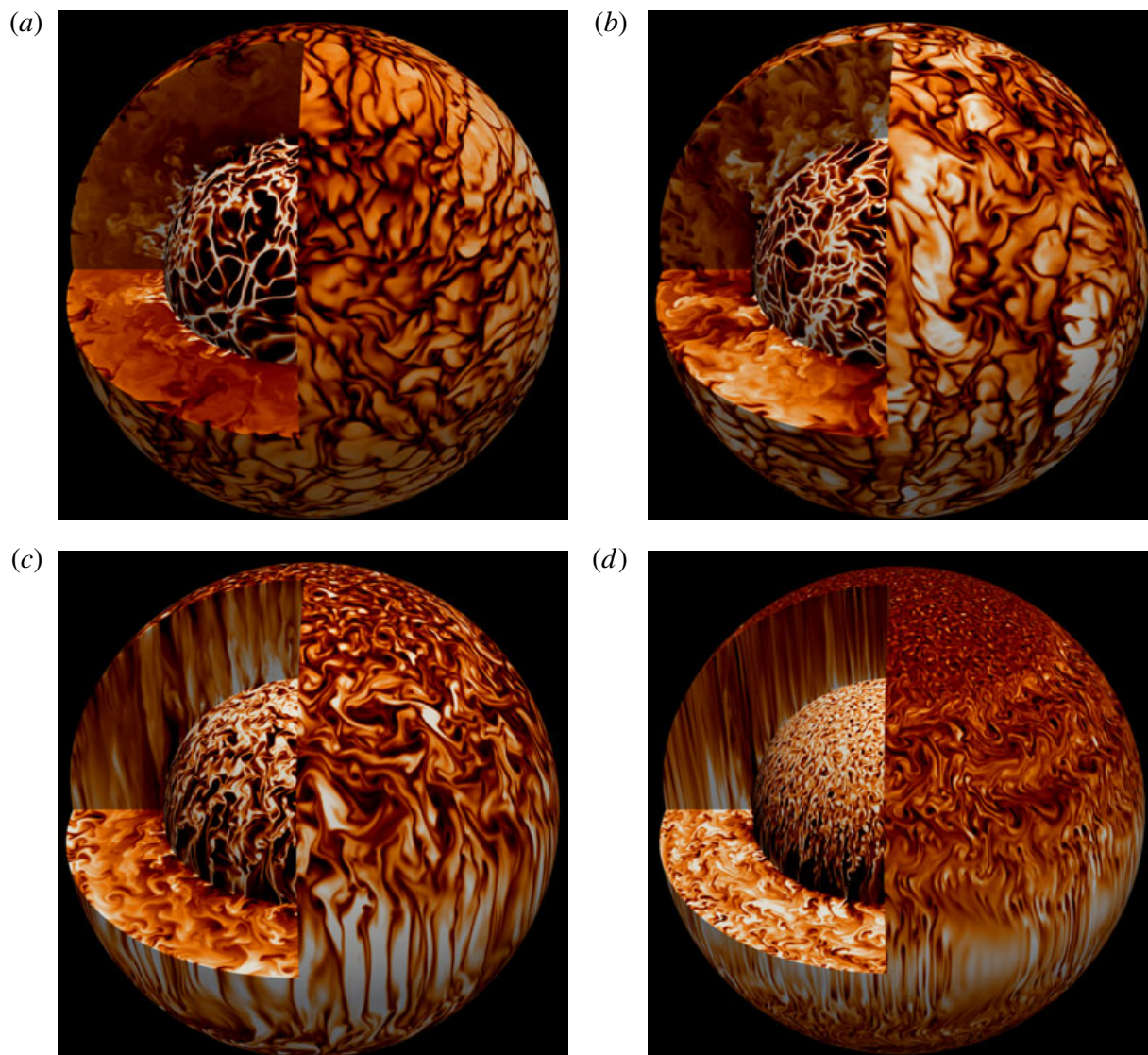


FIGURE 2. (Colour online) Meridional sections, equatorial cut and radial surfaces of the temperature fluctuations  $\tilde{T}' = \tilde{T} - \vartheta$ . The inner (outer) surface corresponds to the location of the inner (outer) thermal boundary layer  $r = r_i + \lambda_T^i$  ( $r = r_o - \lambda_T^o$ ). Colour levels range from  $-0.15$  (black) to  $0.15$  (white). (a) corresponds to a non-rotating model with  $Ra = 10^8$  (Gastine *et al.* 2015). (b) corresponds to a numerical model with  $E = 10^{-4}$  and  $Ro_c = 1$  (case 146 in table 2). (c) corresponds to a numerical model with  $E = 10^{-5}$  and  $Ro_c = 0.17$  (case 191 in table 2). (d) corresponds to a numerical model with  $E = 10^{-6}$  and  $Ro_c = 0.05$  (case 219 in table 2).

on both spherical surfaces, the plume network is organised in long and thin sheet-like structures. Figure 2(b) corresponds to a numerical simulation with  $E = 10^{-4}$  and  $Ra = 10^8$ , i.e.  $Ro_c = 1$ . The turbulent flow remains essentially anisotropic and three-dimensional with a typical length scale comparable to that in the non-rotating model. At the connection points of the convective lanes network, we nevertheless observe the formation of vortical structures, which indicates the influence of the Coriolis force on the largest scale. Figure 2(c) shows a numerical model with  $E = 10^{-5}$  and  $Ra = 3 \times 10^8$ . In the equatorial region, columnar structures aligned with the rotation axis are observed. At high latitudes, the integrity of the convective features is disrupted. This gradual loss of geostrophy is expected when the buoyancy forcing increases in strength

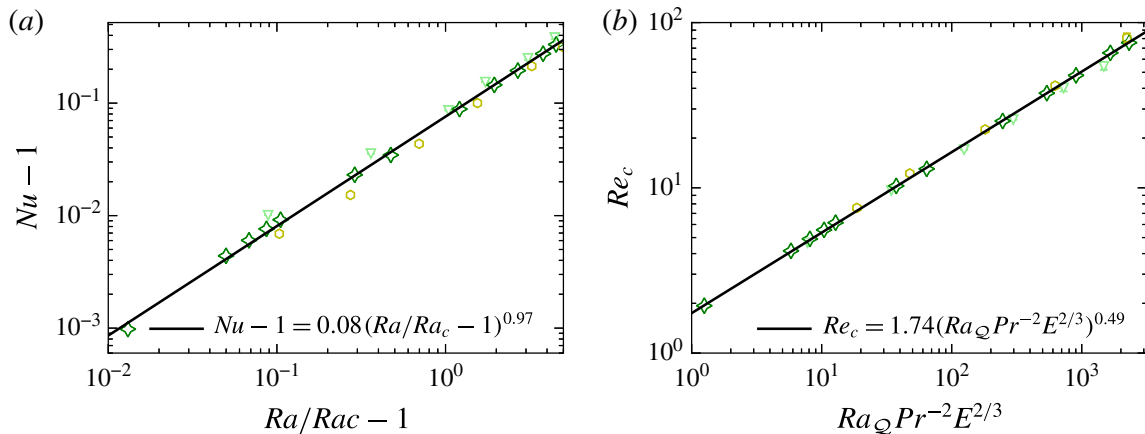


FIGURE 3. (Colour online) (a) Nusselt number  $Nu - 1$  as a function of  $Ra/Ra_c - 1$ . (b) Reynolds number  $Re_c$  as a function of  $Ra_Q Pr^{-2} E^{2/3}$ . Only the cases with  $E \leq 3 \times 10^{-5}$  and  $Ra \leq 6 Ra_c$  are displayed in this figure. In both panels, the solid black lines correspond to the least-square fits to the data. The symbols have the same meaning as in figure 1.

with respect to the rotational constraint (here  $Ro_c = 0.17$ ). The image in figure 2(d) corresponds to a numerical model with  $E = 10^{-6}$  and  $Ro_c = 0.05$ . As compared to the previous model, the stronger rotational influence on the flow results in a more pronounced alignment of the convective features with the rotation axis. Decreasing the Ekman number from  $10^{-5}$  (figure 2c) to  $10^{-6}$  (figure 2d) is accompanied by an obvious decrease of the typical convective flow length scale. In the rapidly rotating regime when  $Ro_c \ll 1$ , Coriolis forces inhibit the turbulent mixing and the fluid bulk therefore departs from an isothermal state.

### 3.1. Weakly nonlinear regime of rotating convection

In rotating spherical shells, the convective flow at onset takes the form of prograde drifting thermal Rossby waves that first develop in the vicinity of the tangent cylinder (e.g. Busse 1970; Dormy *et al.* 2004). The critical Rayleigh number  $Ra_c$  and azimuthal wavenumber  $m_c$  follow

$$Ra_c \sim E^{-4/3}, \quad m_c \sim E^{-1/3}. \quad (3.1a,b)$$

The exact values of  $Ra_c$  and  $m_c$  for the different Ekman numbers considered in this study are given in table 3. For marginally supercritical Rayleigh numbers, the weakly nonlinear perturbation analyses carried out by Busse & Or (1986) and Gillet & Jones (2006) predicted that the heat transport increases linearly with the supercriticality, i.e.:

$$Nu - 1 \sim \frac{Ra}{Ra_c} - 1. \quad (3.2)$$

Figure 3(a) shows  $Nu - 1$  as a function of  $Ra/Ra_c - 1$  for the numerical simulations with  $E \leq 3 \times 10^{-5}$  and  $Ra \leq 6 Ra_c$ . The best fit to the data yields  $Nu - 1 = 0.076(\pm 0.003)(Ra/Ra_c - 1)^{0.973(\pm 0.019)}$ . In spite of a remaining weak dependence on the Ekman number, the scaling (3.2) holds reasonably well for the numerical models with  $Ra \leq 6 Ra_c$ .

A useful tool for establishing a scaling for the typical convective flow speed ( $Re_c$ ) is the linear relation between the viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$  and the flux-based Rayleigh

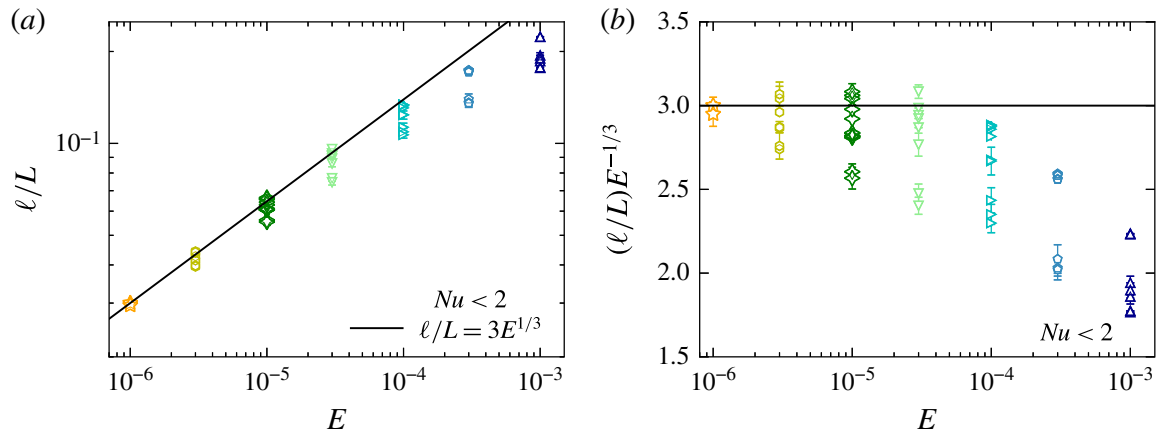


FIGURE 4. (Colour online) (a) Average flow length scale  $\ell/L$  calculated using (2.14) as a function of the Ekman number for the numerical models close to the onset of convection with  $Nu \leq 2$  and  $E \leq 10^{-3}$ . (b) Corresponding compensated  $\ell/L$  scaling. In both panels, the solid black lines correspond to  $\ell/L = 3E^{1/3}$  (3.4). The error bars illustrate the r.m.s. fluctuations and correspond to one standard deviation from the time averages. The symbols have the same meaning as in figure 1.

number  $Ra_Q$  given in (2.15). For a laminar flow close to the onset of convection,  $\epsilon_U$  can be approximated by

$$\epsilon_U \sim \nu \frac{U_c^2}{\ell_\perp^2}, \quad (3.3)$$

where  $\ell_\perp$  is the typical flow length scale and  $U_c$  the typical velocity. Close to the onset of convection,  $\ell_\perp$  remains close to the critical azimuthal wavenumber, such that

$$\ell_\perp/L \sim 1/m_c \sim E^{1/3}. \quad (3.4)$$

Combining (2.15), (3.3) and (3.4) yields a scaling law for the convective flow speed  $Re_c \sim U_c L/\nu$

$$Re_c \sim Ra_Q^{1/2} Pr^{-1} E^{1/3}. \quad (3.5)$$

This scaling relation is sometimes called the Visco–Archimedean–Coriolis (hereafter VAC) scaling and can also be directly derived from the balance between these three forces (Aubert *et al.* 2001; King & Buffett 2013; King *et al.* 2013). Figure 3(b) shows  $Re_c$  versus  $Ra_Q Pr^{-2} E^{2/3}$  for the numerical simulations with  $E \leq 3 \times 10^{-5}$  and  $Ra \leq 6 Ra_c$ . The least-square fit to the data yields  $Re_c = 1.744(\pm 0.041)(Ra_Q E^{2/3})^{0.487(\pm 0.004)}$ , in excellent agreement with the theoretical scaling.

Figure 4(a) shows the average flow length scale  $\ell/L$  plotted as a function of  $E$  for the numerical models close to the onset of convection. The typical scale of convection gradually approaches the theoretical scaling  $\ell/L \sim E^{1/3}$  when  $E \leq 10^{-5}$  and the additional  $Ra$  dependence vanishes. The compensated scaling displayed in figure 4(b) suggests the asymptotic scaling  $\ell \simeq 3E^{1/3}L$ . The cases with the largest Ekman number (i.e.  $E \geq 10^{-4}$ ) significantly depart from this asymptotic law. This is not surprising since the scaling  $m_c \sim E^{-1/3}$  is expected to hold for asymptotically small Ekman numbers (see table 3).

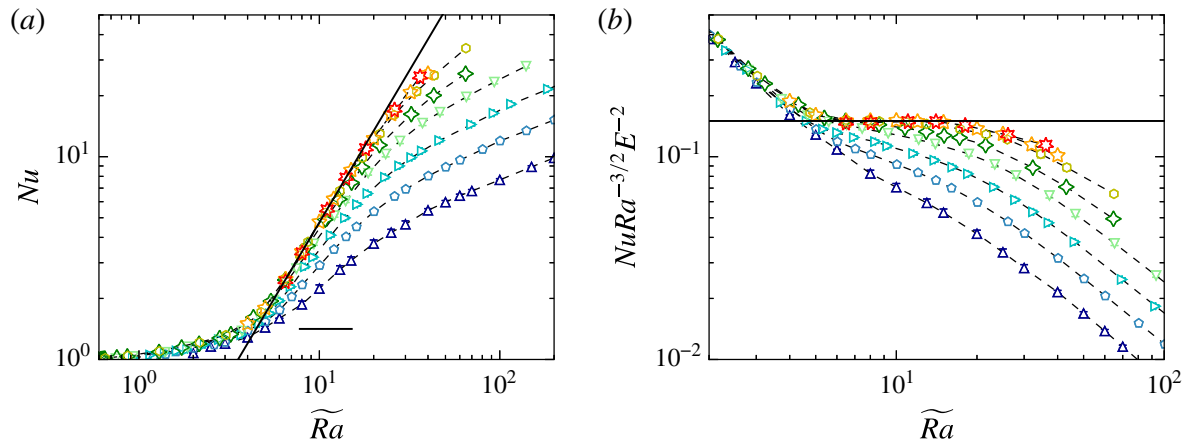


FIGURE 5. (Colour online) (a) Nusselt number as a function of  $\widetilde{Ra} = RaE^{4/3}$ . (b) Corresponding compensated  $Nu$  scaling. In both panels, the solid black line corresponds to the scaling  $Nu = 0.15 Ra^{3/2} E^2$  (3.10). For clarity, only the cases with  $E \leq 10^{-3}$  and  $\widetilde{Ra} < 200$  are displayed in this figure. The symbols have the same meaning as in figure 1.

### 3.2. Nonlinear regime of rotating convection

#### 3.2.1. Nusselt number scaling

As can be seen on figure 1, the weakly nonlinear scaling (3.2) provides an accurate description of the heat transport behaviour up to  $Nu \simeq 1.5$ , which approximately corresponds to  $Ra \simeq 6 Ra_c$ . When  $Nu > 2$ , the heat transport increases much more rapidly and enters the nonlinear regime of rotating convection.

The plane layer numerical simulations of rotating convection by King *et al.* (2012) and Stellmach *et al.* (2014) as well as the asymptotically reduced theoretical models by Julien *et al.* (2012a) indicate that the convective heat flux only depends on the supercriticality  $Ra/Ra_c$  when  $Ro_c \ll 1$ . To check whether our numerical calculations actually support such a behaviour at low Ekman numbers, figure 5(a) shows  $Nu$  as a function of  $\widetilde{Ra} = RaE^{4/3}$ , since  $Ra_c \sim E^{-4/3}$ . For  $\widetilde{Ra} < 6$ ,  $Nu$  slowly increases with the Rayleigh number and follows the previously described weakly nonlinear regime. Beyond this point, a fast steepening of the slope is observed and the function  $Nu = f(\widetilde{Ra})$  starts to show an additional dependence on  $E$ : while the large Ekman number cases quickly depart from a pure function of  $\widetilde{Ra}$ , the low Ekman number simulations continue to follow a law of the form  $Nu = f(\widetilde{Ra})$  up to higher  $\widetilde{Ra}$  values. The exact location of this departure point gradually shifts to increasing  $\widetilde{Ra}$  with decreasing  $E$ . Figure 5(b) shows the compensated scalings of  $Nu$  and reveals that the steepest part of the heat transfer law approaches the diffusivity-free scaling  $Nu = 0.15 \widetilde{Ra}^{3/2}$ , at least in the range  $6 \leq \widetilde{Ra} \leq 20$ . To further assess the validity domain of the diffusivity-free scaling (1.3) in our numerical dataset, we introduce the local effective exponents  $\alpha_{eff}$  and  $\beta_{eff}$  of the  $Nu(Ra, E)$  law:

$$\alpha_{eff} = \left( \frac{\partial \ln Nu}{\partial \ln Ra} \right)_E; \quad \beta_{eff} = \left( \frac{\partial \ln Nu}{\partial \ln E} \right)_{Ra}. \quad (3.6a,b)$$

The local exponent  $\beta_{eff}$  is unfortunately difficult to constrain since our dataset only samples sparse variations of the Ekman number (half-decade sampling). However, the dense coverage in  $Ra$  for each Ekman number subset allows to estimate the variations

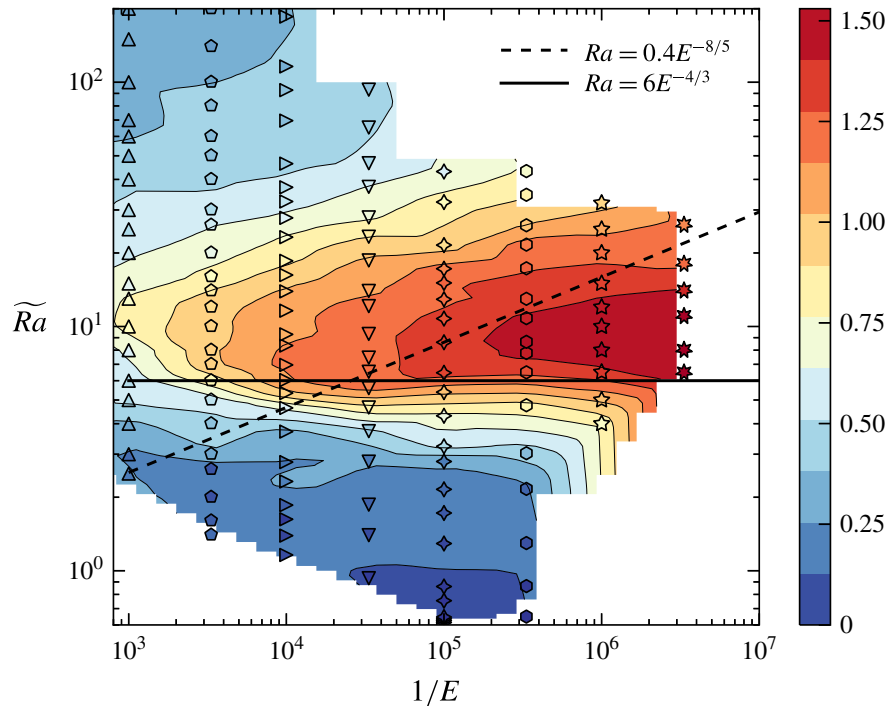


FIGURE 6. (Colour online) Isocontours of the local effective exponent  $\alpha_{eff}$  of the  $Nu = Ra^{\alpha_{eff}} E^{\beta_{eff}}$  scaling in the  $(1/E, \widetilde{Ra})$ -plane. The symbol shape corresponds to the Ekman number as in the previous figures, while the symbol colour scales here with the value of local slope  $\alpha_{eff}$ . The solid black line corresponds to the upper limit of the weakly nonlinear regime  $Ra = 6Ra^{4/3}$ , while the dashed black line corresponds to the dynamical boundary  $Ra = 0.4E^{-8/5}$  derived in figure 7.

of  $\alpha_{eff}$ . Figure 6 shows isocontours of  $\alpha_{eff}$  in a  $(1/E, \widetilde{Ra})$ -plane. Beyond the weakly nonlinear regime delimited by the horizontal solid black line, the effective slope gradually increases with decreasing  $E$ . It reaches a maximum value  $\alpha_{eff} \simeq 3/2$  for a small region around  $E \lesssim 10^{-6}$  and  $\widetilde{Ra} \simeq 10$ .

The numerical simulations carried out by Cheng *et al.* (2015) in Cartesian coordinates revealed a continuous increase of the local exponent  $\alpha_{eff}$  with decreasing  $E$  and exhibit much steeper scaling beyond  $\alpha_{eff} \simeq 3$  (see also Stellmach *et al.* 2014; Kunnen *et al.* 2016). This phenomenon has been attributed to the sizeable role of Ekman pumping that enhances the heat transfer even in the low Ekman number regime (Julien *et al.* 2016). This steep scaling is not observed in absence of Ekman boundary layers, for instance when stress-free mechanical boundary conditions are adopted (Barker *et al.* 2014; Stellmach *et al.* 2014; Kunnen *et al.* 2016; Plumley *et al.* 2016). In that case, local exponents close to  $\alpha_{eff} \simeq 3/2$  are recovered at low Ekman numbers.

The scaling exponents obtained in our simulations in spherical geometry for comparable Ekman numbers  $E = O(10^{-7})$  remain bounded by the diffusivity-free scaling  $\alpha_{eff} = 3/2$  (see also King *et al.* 2010). Although a further increase of  $\alpha_{eff}$  for  $E < 3 \times 10^{-7}$  cannot be *a priori* ruled out, the compensated scaling shown in figure 5(b) suggests a gradual approach to  $\alpha = 3/2$ , which seems to leave little room for further increase. This suggests that our simulations approach the asymptotic diffusivity-free behaviour for the parameter range  $E \leq 10^{-6}$  and  $6 \leq \widetilde{Ra} \leq 20$ .

Clearly however, the validity domain of the diffusivity-free scaling (1.3) remains relatively narrow in our set of numerical models. Beyond the steep scaling with

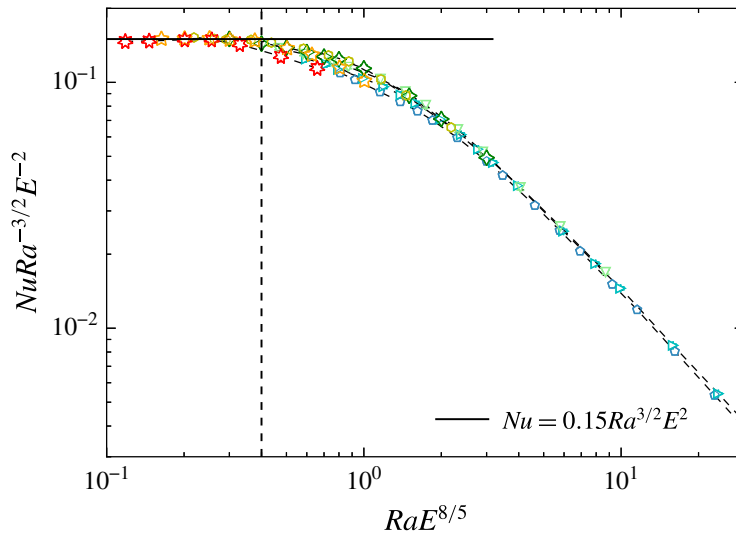


FIGURE 7. (Colour online) Nusselt number compensated by  $Ra^{3/2}E^{-2}$  as a function of  $RaE^{8/5}$ . Only the cases with  $E \leq 3 \times 10^{-4}$  and  $Nu \geq 2$  are displayed in this figure. The solid black line corresponds to the diffusivity-free scaling  $Nu = 0.15Ra^{3/2}E^2$  (3.10) already displayed in figure (5), while the vertical line corresponds to the dynamical boundary scaling  $RaE^{8/5} = 0.4$ . The symbols have the same meaning as in figure 1.

$\alpha_{eff} \simeq 3/2$ , our numerical calculations show a transition to a shallower heat transfer scaling at larger supercriticality  $\widetilde{Ra}$ . The characterisation of the upper bound of the rotation-dominated regime of rotating convection has been a long-standing question. The ratio of the global-scale Coriolis and buoyancy forces, approximated by the value of  $Ro_c$ , has long been postulated to control the transition from rotation-dominated convection to non-rotating convection (e.g. Gilman 1977; Zhong & Ahlers 2010; Stevens, Clercx & Lohse 2013). Using a combination of laboratory experiments and local numerical simulations in Cartesian coordinates, King *et al.* (2009) however demonstrated that a simple  $Ro_c$  criterion does not correctly capture the regime transition, which happens while the bulk Rossby number is still much smaller than unity (see also Cheng *et al.* 2015). They instead suggested that this transition is controlled by the competing thickness of the thermal and Ekman boundary layers. The resulting cross-over was found to follow  $RaE^{3/2} \sim 1$  (King *et al.* 2012). However, numerical experiments that employed stress-free boundary conditions, in which viscous boundary layers are not present, yield a similar regime transition, which questions the role of the Ekman layer on the regime change (e.g. Schmitz & Tilgner 2009).

Julien *et al.* (2012b) thus argued that the transition from rotationally constrained to what they call ‘rotationally influenced’ convection is rather controlled by the dynamics of the thermal boundary layers. In particular, they proposed that the diffusion-free scaling (1.3) breaks down when the thermal boundary layer is no longer in geostrophic balance. In other words,  $Nu \sim \widetilde{Ra}^{3/2}$  would hold as long as the local convective Rossby number in the thermal boundary layer  $Ro_\lambda$  remains smaller than unity. The definition of  $Ro_\lambda$  leads to

$$Ro_\lambda = \frac{Ra_\lambda^{1/2} E_\lambda}{Pr^{1/2}} = \frac{(\alpha_T g \Delta T_\lambda)^{1/2}}{\Omega \lambda^{1/2}}, \quad (3.7)$$



where  $\lambda$  is the thermal boundary layer thickness. Since

$$Nu \sim \frac{\Delta T_\lambda}{\lambda} \frac{L}{\Delta T}, \quad (3.8)$$

using (1.3),  $Ro_\lambda \sim 1$  thus yields

$$Ra E^{8/5} Pr^{-3/5} \sim 1. \quad (3.9)$$

To test the applicability of this transition parameter, figure 7 shows the heat transfer data normalised by the diffusivity-free scaling (1.3),  $NuRa^{-3/2}E^{-2}$ , versus  $RaE^{8/5}$  for the numerical models with  $E \leq 3 \times 10^{-4}$  and  $Nu \geq 2$ . The numerical simulations that fulfil  $RaE^{8/5} < 0.4$  lie very close to the geostrophic scaling (1.3). A best fit to the 16 cases that satisfy this criterion indeed yields  $NuRa^{-3/2}E^{-2} = 0.149(\pm 0.002)$ . The combination of the two criteria  $RaE^{4/3} > 6$  and  $RaE^{8/5} < 0.4$  defines a wedge in the parameter space highlighted by the two black lines visible in figure 6 where the scaling

$$Nu = 0.149(\pm 0.002)Ra^{3/2}E^2 \quad (3.10)$$

holds. The transition parameter (3.9) introduced by Julien *et al.* (2012b) thus enables us to successfully demarcate the rotation-dominated regime and to efficiently collapse the heat transfer data across the regime transition.

### 3.2.2. Reynolds number scaling

To establish a scaling relation for the typical convective flow speed  $Re_c$ , we examine first the variations of the viscous dissipation rate  $\epsilon_U$ . In the limit of vanishing Ekman number, the viscous dissipation is expected to primarily occur in the bulk of the fluid (Busse 1970). However, in the parameter range currently accessible to numerical models (i.e.  $E \geq O(10^{-7})$ ), dissipation by friction through the Ekman boundary layers might still contribute substantially to the total viscous dissipation rate (e.g. Aubert *et al.* 2001). We thus follow the same strategy that has been fruitfully introduced by Grossmann & Lohse (2000) for non-rotating RBC and decompose the viscous dissipation rate into a fluid bulk contribution  $\epsilon_U^{bu}$  and a boundary layer contribution  $\epsilon_U^{bl}$ :

$$\epsilon_U = \epsilon_U^{bu} + \epsilon_U^{bl} = \frac{\nu}{V} \left( \int_{\mathcal{T}} (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV + \int_{V \setminus \mathcal{T}} (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV \right), \quad (3.11)$$

where the integration domain is defined by  $\mathcal{T} = \{r_i + \lambda_U^i \leq r \leq r_o - \lambda_U^o; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ , where  $\lambda_U^i$  ( $\lambda_U^o$ ) are the thicknesses of the inner (outer) viscous boundary layer. We then establish scaling relations for the two contributions  $\epsilon_U^{bu}$  and  $\epsilon_U^{bl}$  as functions of  $Re_c$  and  $E$ , starting with the kinetic dissipation rate in the bulk of the fluid which can be estimated by

$$\epsilon_U^{bu} \sim \nu \frac{U_c^2}{\ell_{diss}^2}, \quad (3.12)$$

where  $\ell_{diss}$  is the viscous dissipation length scale defined such that the local Reynolds number associated with this length scale is unity, i.e.  $u_{diss} \ell_{diss} / \nu \sim 1$ . Following Davidson (2013), we also introduce a small-scale vorticity  $\omega_{diss}$  defined by  $\omega_{diss} \sim u_{diss} / \ell_{diss}$ , which yields

$$\epsilon_U^{bu} \sim U_c^2 \omega_{diss}. \quad (3.13)$$

At this stage, the study of the viscous dissipation rate needs to be complemented by a force balance analysis in order to estimate the scaling of  $\omega_{diss}$ . A viscosity-free scaling of rotating convection was first proposed by Stevenson (1979) and Ingersoll & Pollard (1982) and later further developed by Aubert *et al.* (2001). This scaling, known as the inertial scaling of rapidly rotating convection, hypothesises a triple force balance between Coriolis, inertia and Archimedean force (hereafter CIA). Taking the curl of the Navier–Stokes equation (2.2) in its dimensional form, the CIA triple balance yields

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \sim \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \sim \nabla \times (\alpha_T T g \mathbf{e}_r), \quad (3.14)$$

where the factor two in the vortex stretching term has been omitted. We now introduce the two integral length scales  $\ell_\perp$  and  $\ell_\parallel$ , respectively perpendicular and parallel to the rotation axis. Since rapidly rotating convective patterns take the form of columnar structures aligned with the rotation axis,  $\ell_\perp \ll \ell_\parallel$ . Denoting  $U_c$  the typical velocity,  $\Theta$  the typical thermal perturbation and  $\omega_c$  the typical vorticity, one gets

$$\Omega \frac{U_c}{\ell_\parallel} \sim U_c \frac{\omega_c}{\ell_\perp} \sim \alpha_T g \frac{\Theta}{\ell_\perp}. \quad (3.15)$$

We now assume that the axial dimension of the convection rolls  $\ell_\parallel$  can be approximated by the container length scale  $L$ . This assumption, combined with the balance between Coriolis force and inertia in (3.15), yields

$$\ell_\perp/L \sim \omega_c/\Omega. \quad (3.16)$$

We further assume that the convective heat flux per unit area  $\mathcal{Q}$  scales as

$$\mathcal{Q} \sim \rho c_p U_c \Theta \sim (Nu - 1) \kappa \rho c_p \Delta T/L, \quad (3.17)$$

which implies that the correlation between thermal perturbation and velocity are independent of  $E$ ,  $Pr$  and  $Ra$  (Gillet & Jones 2006). The balance between inertia and buoyancy in (3.15) then leads to

$$Ra_{\mathcal{Q}} Pr^{-2} \sim (L^4/\nu^3) U_c^2 \omega_c. \quad (3.18)$$

Since on time average  $(\nu^3/L^4) \epsilon_U \sim Ra_{\mathcal{Q}} Pr^{-2}$ , it follows from (3.13)  $\omega_{diss} \sim \omega_c$ . The proportionality relation between the typical time scale at the integral length  $\ell_\perp$  and at the dissipation scale  $\ell_{diss}$  is a distinctive feature of two-dimensional turbulence (e.g. Davidson 2015). Finally assuming that  $\omega_c \sim U_c/\ell_\perp$ , one can derive the following expression for the viscous dissipation rate in the fluid bulk

$$\epsilon_U^{bu} = \frac{U_c^3}{\ell_\perp} = \frac{\nu^3}{L^4} \frac{Re_c^{5/2}}{E^{1/2}}. \quad (3.19)$$

The same procedure can be applied to the viscous dissipation in the Ekman boundary layers with the difference that the typical length scale is now the boundary layer thickness  $\lambda_U$ . Furthermore, the dissipation occurs only in the fraction of the fluid volume occupied by the viscous boundary layers. In the limit of  $\lambda_U \ll L$ , this volume fraction can be approximated by the ratio  $\lambda_U/L$ , thus neglecting any curvature effect. This yields

$$\epsilon_U^{bl} \sim \nu \frac{U_c^2}{\lambda_U^2} \frac{\lambda_U}{L}. \quad (3.20)$$

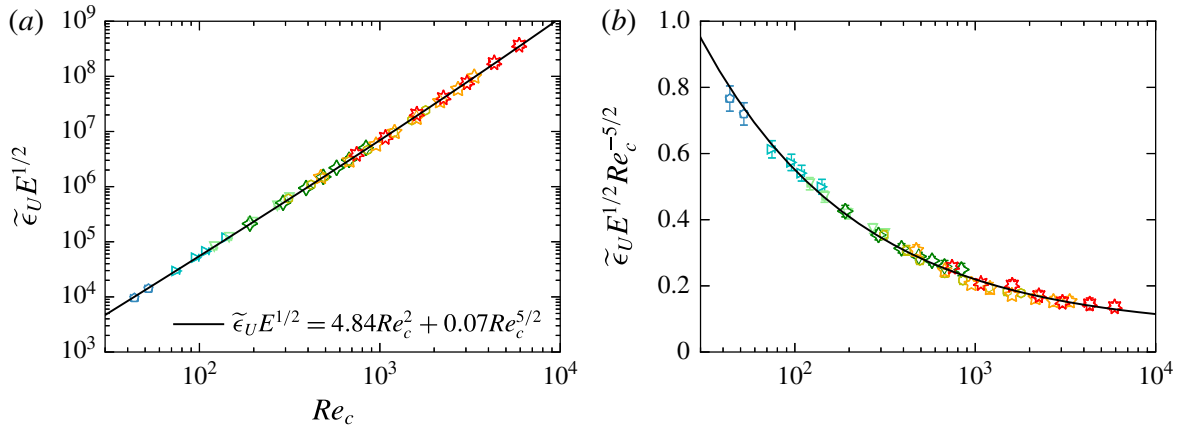


FIGURE 8. (Colour online) (a) Dimensionless viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$  as a function of the Reynolds number  $Re_c$ . (b) Corresponding compensated  $\tilde{\epsilon}_U$  scaling. The solid black lines correspond to the theoretical scaling derived in (3.22) with  $a = 0.066$  and  $b = 4.843$ . Only the cases that fulfil the conditions  $Nu > 2$  and  $RaE^{8/5} < 1$  have been selected on this figure. The error bars illustrate the r.m.s. fluctuations and correspond to one standard deviation from the time averages. The symbols have the same meaning as in figure 1.

Since  $\lambda_U/L \sim E^{1/2}$  (see below in § 3.2.5), the viscous dissipation by friction through the boundary layers can be expressed by

$$\epsilon_U^{bl} \sim \frac{v^3}{L^4} \frac{Re_c^2}{E^{1/2}}. \quad (3.21)$$

Combining (3.19) and (3.21) allows us to derive the following scaling behaviour for the dimensionless viscous dissipation rate

$$\tilde{\epsilon}_U = a \frac{Re_c^{5/2}}{E^{1/2}} + b \frac{Re_c^2}{E^{1/2}}. \quad (3.22)$$

To test the validity of this scaling, we calculate  $\tilde{\epsilon}_U$  and  $Re_c$  in our numerical simulations and directly fit the expression (3.22). This leaves only the two prefactors  $a$  and  $b$  as free fitting parameters. Figure 8(a) shows  $\tilde{\epsilon}_U E^{1/2}$  as a function of  $Re_c$  for the 41 cases that fulfil  $Nu > 2$  and  $RaE^{8/5} < 1$ . The best fit to the numerical data yields  $a = 0.066(\pm 0.003)$  and  $b = 4.843(\pm 0.096)$ . The expression (3.22) provides an excellent agreement with the data, further confirmed by the bulk compensated scaling  $\tilde{\epsilon}_U E^{1/2} Re_c^{-5/2}$  shown in figure 8(b). Explicitly including the viscous friction that occurs in the Ekman boundary layers thus allows to very accurately describe the numerical data over a broad range of parameter  $3 \times 10^{-4} \leq E \leq 3 \times 10^{-7}$ ,  $10^2 \leq Re_c \leq 10^4$ . We also note that a stricter restriction to the 16 turbulent cases that satisfy the criterion  $RaE^{8/5} < 0.4$  and thus lie within the wedge displayed in figure (6) yields very similar values for  $a$  and  $b$ . The expression (3.22) also allows to estimate the transition value of  $Re_c$  beyond which the viscous dissipation that occurs in the interior of the fluid will dominate the dissipation in boundary layers. Figure 8(b) demonstrates that our dataset nearly reaches this point where the bulk scaling alone provides a good description. Using the best fitting parameters  $a$  and  $b$  yields  $Re_c = (b/a)^2 \simeq 5500$ . Beyond this value, the viscous dissipation in the Ekman layers becomes secondary and the dynamical behaviour will then gradually tend towards the inertial scaling of rotating convection.

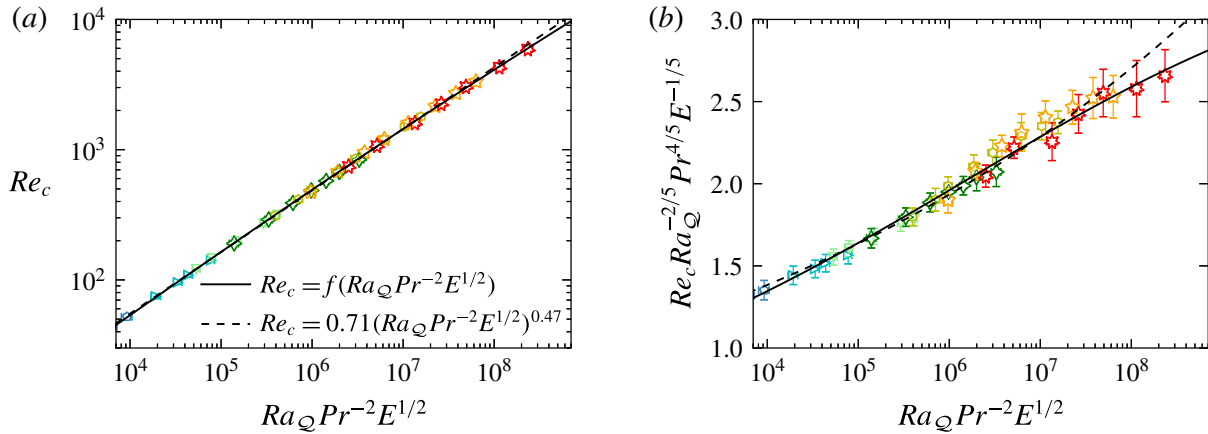


FIGURE 9. (Colour online) (a) Reynolds number  $Re_c$  as a function of  $Ra_Q Pr^{-2} E^{1/2}$ . (b) Corresponding compensated  $Re_c$  scaling. The solid black lines correspond to the theoretical scaling derived in (3.26), while the dashed black lines correspond to the least-square fit to the data. Only the cases that fulfil the conditions  $Nu > 2$  and  $RaE^{8/5} < 1$  have been selected on this figure. The error bars illustrate the r.m.s. fluctuations and correspond to one standard deviation from the time averages. The symbols have the same meaning as in figure 1.

Assuming that the viscous dissipation either entirely occurs in the fluid bulk (i.e.  $\epsilon_U \simeq \epsilon_U^{bu}$ ) or in the Ekman layers (i.e.  $\epsilon_U \simeq \epsilon_U^{bl}$ ) allows one to define the two end-member scaling relations:

$$Re_c^{bu} \leq Re_c \leq Re_c^{bl}, \quad (3.23)$$

where

$$Re_c^{bl} \sim Ra_Q^{1/2} Pr^{-1} E^{1/4} \quad (3.24)$$

and

$$Re_c^{bu} \sim Ra_Q^{2/5} Pr^{-4/5} E^{1/5}. \quad (3.25)$$

We note that (3.25) corresponds to the convective velocity scaling classically obtained in the CIA triple balance (e.g. Aubert *et al.* 2001; Gillet & Jones 2006; Barker *et al.* 2014), while the scaling (3.24) has the same dependence on  $Ra_Q$  as the VAC triple balance (3.5) but carries a different  $E$ -scaling exponent. Once  $a$  and  $b$  have been determined, the equation (3.22) can be numerically solved to derive the combined scaling law for  $Re_c$ :

$$Re_c = f(Ra_Q Pr^{-2} E^{1/2}). \quad (3.26)$$

For comparison purposes, we also compute a simple best fit to the data which yields  $Re_c = 0.708(\pm 0.017)(Ra_Q Pr^{-2} E^{1/2})^{0.473 \pm 0.002}$ . Figure 9(a) shows  $Re_c$  versus  $Ra_Q Pr^{-2} E^{1/2}$  for the 41 cases already shown in figure 8, while figure 9(b) shows the corresponding bulk compensated scaling.

Previous parameter studies of rotating convection in spherical shells either carried out under the quasi-geostrophic assumption (Gillet & Jones 2006; Guervilly 2010) or in fully three-dimensional models (Christensen 2002; King & Buffett 2013) obtained steeper exponents than the 2/5 scaling expected in the classical CIA balance (3.25). This discrepancy has usually been attributed to the significant role played by viscosity in numerical models and thus prompted several authors to rather describe their dataset using the VAC scaling hypothesis (3.5). Since the scaling exponents are relatively close to each other, 2/5 versus 1/2 regarding the dependence on  $Ra_Q$ , discriminating

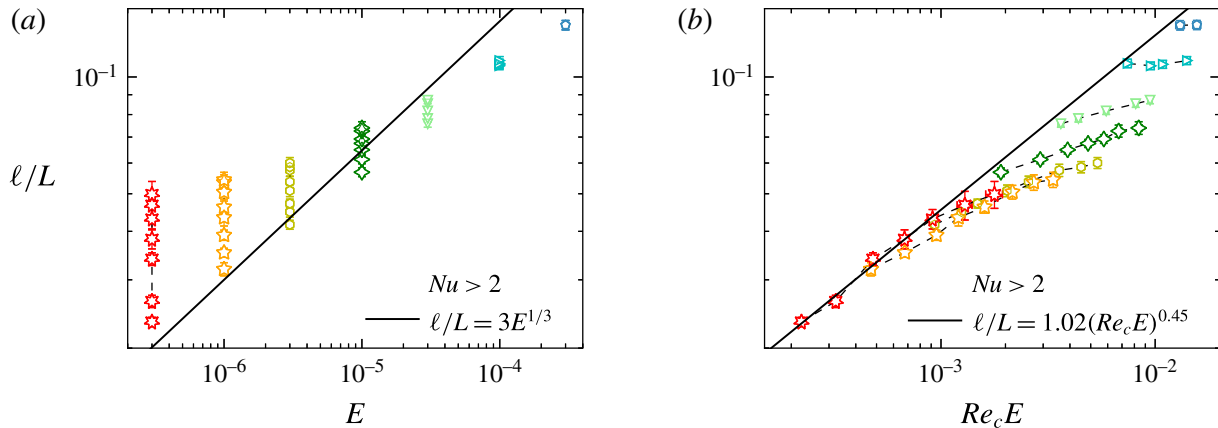


FIGURE 10. (Colour online) (a) Average flow length scale  $\ell/L$  calculated using (2.14) as a function of the Ekman number for the numerical models with  $E \leq 3 \times 10^{-4}$  and  $Nu > 2$ . For comparison, the weakly nonlinear scaling obtained in figure 4 has been plotted as a solid black line. (b) Corresponding compensated  $\ell/L$  scaling. Only the 41 cases that satisfy  $Nu > 2$  and  $RaE^{8/5} < 1$  have been selected on this figure. The solid black line corresponds to the best fit to the cases with  $E = 3 \times 10^{-7}$ . The error bars illustrate the r.m.s. fluctuations and correspond to one standard deviation from the time averages. The symbols have the same meaning as in figure 1.

one scaling from another remains however a difficult task (King & Buffett 2013). (Note however that the Ekman number dependence is not the same for these two scalings.) Here we show that the separation of  $\epsilon_U$  into boundary layers and bulk contributions allows us to very accurately describe the numerical data. Moreover, in the range of  $Re_c$  covered by our numerical dataset (i.e.  $10^2 \leq Re_c < 10^4$ ), the simple power law  $Re_c = 0.708(\pm 0.017)(Ra_Q Pr^{-2} E^{1/2})^{0.473 \pm 0.002}$  provides a statistically nearly indiscernible fit quality from the scaling theory (3.26). Deviations only become more significant at the high end of the parameter range, where the power law fails to accurately capture the complex dependence of  $Re_c$  upon  $Ra_Q Pr^{-2} E^{1/2}$ . This explains why previous analyses that reduced the scaling behaviours of  $Re_c$  to such simple power laws obtained scaling exponents robustly larger than  $2/5$  (e.g. Gillet & Jones 2006; King & Buffett 2013).

### 3.2.3. Flow length scales and interior temperature gradients

Using the equations (3.16) and (3.25), the inertial theory of rotating convection predicts the following scaling for the integral flow length scale  $\ell_{\perp}$

$$\ell_{\perp}/L \sim (U_c/\Omega L)^{1/2} \sim (Re_c E)^{1/2}, \quad (3.27)$$

which is generally referred to as the Rhines scaling (Rhines 1975). Using the numerical models computed by Christensen & Aubert (2006), several analyses of the typical flow length scale suggest that the VAC scaling (3.4) might possibly hold beyond the weakly nonlinear regime of rotating convection (e.g. King & Buffett 2013; Oruba & Dormy 2014). Figure 10(a) shows the calculations of the average flow length scale  $\ell/L$  plotted as a function of  $E$  for the numerical models with  $E \leq 3 \times 10^{-4}$  and  $Nu > 2$ . The  $\ell \sim E^{1/3} L$  scaling that accurately describes the numerical data close to onset of convection (see figure 4) fails to properly capture the length scale variations in the nonlinear regime. Especially, at low Ekman numbers ( $E \leq 3 \times 10^{-6}$ ),  $\ell$  exhibits a strong additional dependence on the convective forcing

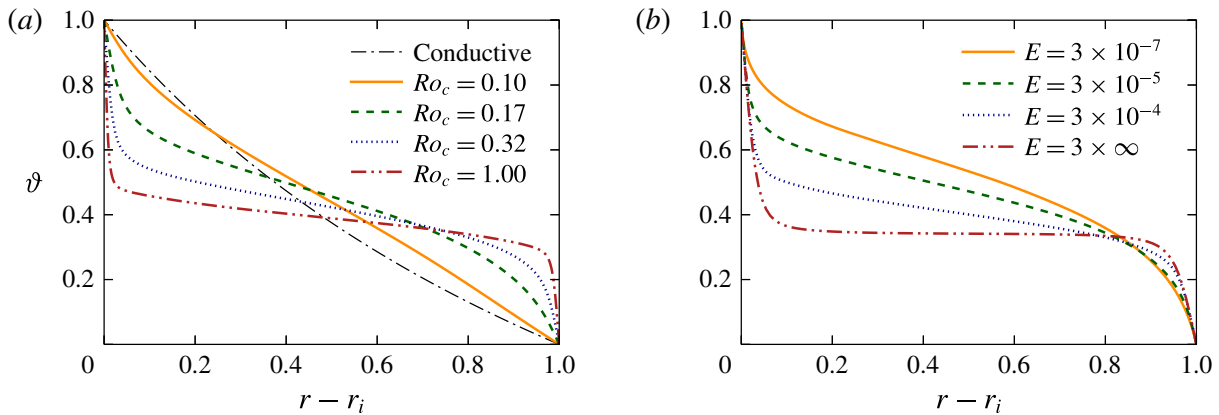


FIGURE 11. (Colour online) (a) Radial profile of the time and horizontally averaged temperature  $\vartheta(r)$  for different convective Rossby number  $Ro_c$  with a fixed Ekman number of  $E = 10^{-4}$ . The dot-dashed black line corresponds to the conductive temperature profile solution of (2.10). (b) Radial profile of the time and horizontally averaged temperature  $\vartheta(r)$  for different Ekman numbers with approximately the same Nusselt number  $10.3 < Nu < 11$ .

and increases with the supercriticality (see table 2 for details). Figure 10(b) shows the calculations of  $\ell$  versus  $Re_c E$  for the 41 numerical models already shown in figures 8 and 9. A best fit to the cases with  $E = 3 \times 10^{-7}$  that fulfil  $RaE^{8/5} < 0.4$  yields  $\ell/L = 1.016(\pm 0.212)(Re_c E)^{0.45(\pm 0.027)}$ , reasonably close to the theoretical scaling (3.27). Since the dissipation that occurs in the boundary layers still plays a substantial role in the velocity scaling (3.22), it is not surprising that (3.27) is only approached for the lowest Ekman number considered in this study.

While non-rotating convection undergoes an efficient turbulent mixing which results in an isothermal fluid interior (e.g. Verzicco & Camussi 1999), the prominent role played by the Coriolis force in rotating convection impedes the mixing. Both experiments (e.g. Boubnov & Golitsyn 1990; Kunen *et al.* 2010) and direct numerical simulations (e.g. Julien *et al.* 1996; King *et al.* 2012; Stellmach *et al.* 2014) have indeed revealed that a large-scale interior temperature gradient can be maintained in the rapidly rotating regime (see also Gillet & Jones 2006; King *et al.* 2010). Figure 11 shows the time- and horizontally averaged temperature profile  $\vartheta(r)$  for several rotating and non-rotating models. At a fixed Ekman number, an increase of the supercriticality (figure 11a) changes the temperature distribution from a nearly conductive state (solid orange line) to a nearly isothermal fluid bulk (dot-dashed line). At larger  $Ro_c$  (broken lines), the rotational constraint decreases and thin thermal boundary layers start to emerge and tend to accommodate an increasing fraction of the temperature drop. As visible in figure 11(b), the transition from rotating to non-rotating convection is thus associated with a gradual lowering of the average temperature gradient and a transition to a physical regime where boundary layers entirely control the heat transfer.

Measuring the interior temperature gradient  $\beta_T$  (2.13a,b) thus helps to characterise the heat transfer regime. Figure 12(a) shows  $\beta_T$  versus  $\widetilde{Ra}$  for the set of numerical simulations with  $E \leq 10^{-3}$ . An increase of the supercriticality  $\widetilde{Ra}$  leads to a gradual decrease of  $|\beta_T|$ . The thermal profiles in the fluid bulk tend to a thermally well-mixed interior (i.e. vanishing  $\beta_T$ ) when the rotational influence on the flow decreases. In contrast to the asymptotic calculations by Julien *et al.* (2012b), our dataset does

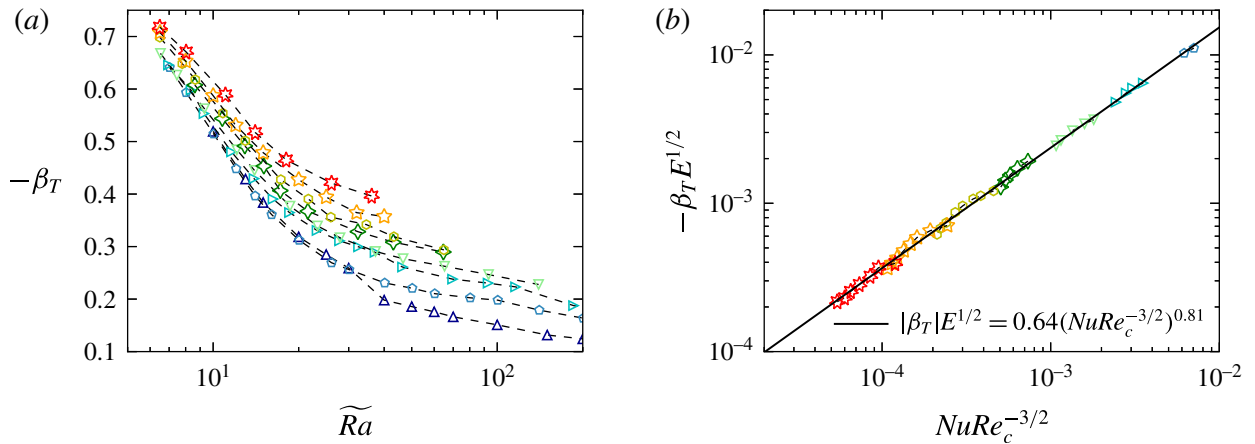


FIGURE 12. (Colour online) (a) Temperature gradient at mid-shell radius  $\beta_T$  versus  $\widetilde{Ra}$  for the numerical models with  $Nu > 2$  and  $E \leq 10^{-3}$ . (b) Absolute temperature gradient at mid-shell renormalised by  $E^{-1/2}$  versus  $NuRe_c^{-3/2}$  for the numerical models with  $RaE^{8/5} < 1$  and  $Nu > 2$ . The solid black line corresponds to the best fit to the data. The symbols have the same meaning as in figure 1.

not show any evidence for a direct scaling relation between  $\beta_T$  and  $\widetilde{Ra}$ . However, following Stevenson (1979) and Barker *et al.* (2014), the interior temperature gradient can be estimated by

$$\beta_T \sim \frac{\Theta}{\ell_{\perp}} \frac{L}{\Delta T}, \quad (3.28)$$

in the rapidly rotating limit. Using (3.27) for the length scale scaling and approximating  $\Theta/\Delta T$  by  $Nu/Re_c$  then yields

$$\beta_T \sim Nu Re_c^{-3/2} E^{-1/2}. \quad (3.29)$$

Figure 12(b) shows that this scaling provides a reasonable description of the 41 numerical cases already discussed in figures 8 and 9. The best fit to the data however gives a shallower exponent than expected from theory:  $\beta_T E^{1/2} = 0.643(\pm 0.027)(Nu Re_c^{-3/2})^{0.812(\pm 0.005)}$ . This discrepancy is not surprising since the underlying  $\ell_{\perp}$  scaling that enters (3.29) is only partially realised in our set of simulations (see figure 10). Lowering the Ekman number further might help to ascertain this scaling. Indeed, the local numerical calculations carried out in Cartesian coordinates by Barker *et al.* (2014) demonstrate the validity of (3.29) once the influence of the viscous boundary layers has been minimised. Replacing the expected asymptotic scalings for  $Nu$  (1.3) and  $Re_c$  (3.25) in (3.29) yields  $\beta_T \sim Pr$ . This implies that  $\beta_T$  should saturate on a constant value in the turbulent quasi-geostrophic regime of rotating convection. Local numerical calculations carried out in Cartesian coordinates by Stellmach *et al.* (2014) indeed obtain a saturation of  $\beta_T$  for  $E = O(10^{-7})$  and  $\widetilde{Ra} \sim 100$ .

#### 3.2.4. Thermal boundary layers

Since the heat transport in the thermal boundary layers is controlled by diffusion, the Nusselt number provides an estimate for the ratio between the thermal boundary layer thickness and the related temperature drop:

$$Nu = \eta \frac{\Delta T_i}{\lambda_T^i} \frac{L}{\Delta T} = \frac{1}{\eta} \frac{\Delta T_o}{\lambda_T^o} \frac{L}{\Delta T}, \quad (3.30)$$

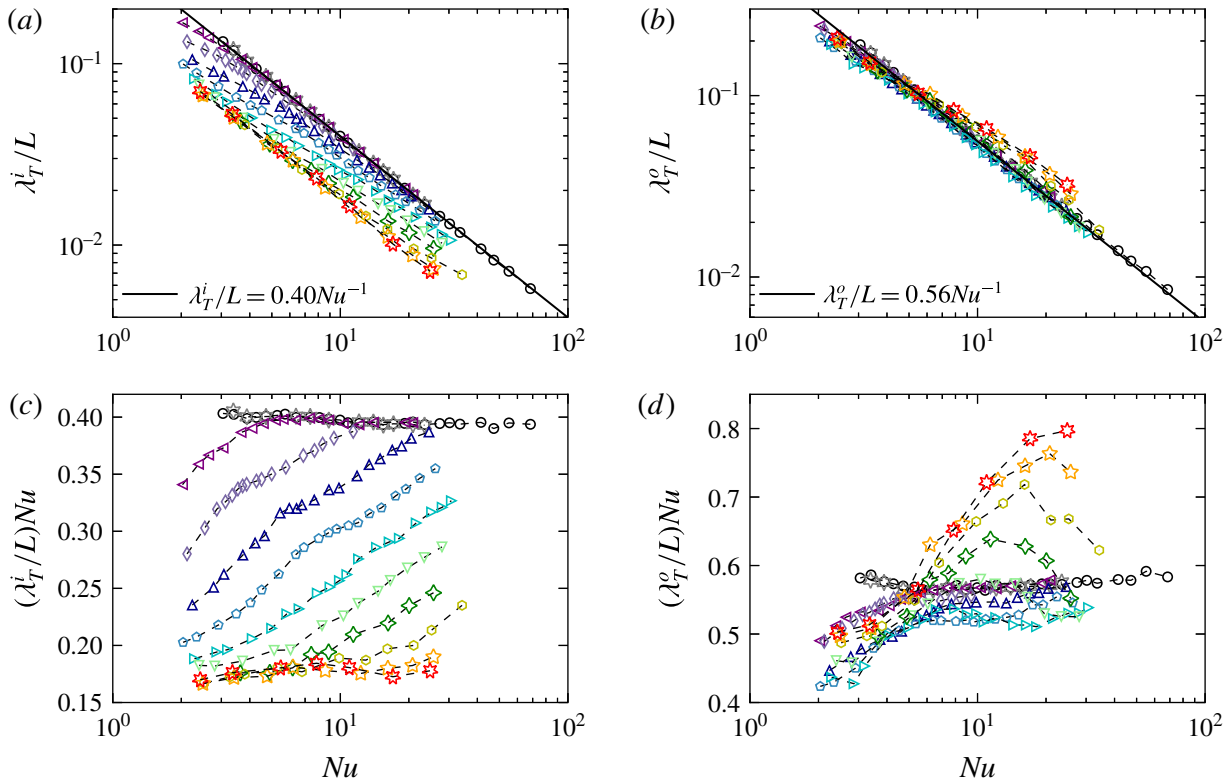


FIGURE 13. (Colour online) (a,b) Thermal boundary layer thickness at the inner (outer) boundary  $\lambda_T^i$  ( $\lambda_T^o$ ) as a function of the Nusselt number. The solid black lines correspond to the theoretical scalings for non-rotating convection derived in Gastine *et al.* (2015). (c,d) Compensated  $\lambda_T^i/L$  ( $\lambda_T^o/L$ ) scaling. The symbols have the same meaning as in figure 1.

where  $\lambda_T^i$  ( $\lambda_T^o$ ) is the thickness of the thermal boundary layer at the inner (outer) boundary and  $\Delta T_i$  ( $\Delta T_o$ ) is the associated temperature contrast. This yields the following scalings for the thermal boundary layer thicknesses at both boundaries:

$$\frac{\lambda_T^i}{L} = \eta \frac{\Delta T_i}{\Delta T} \frac{1}{Nu}; \quad \frac{\lambda_T^o}{L} = \frac{1}{\eta} \frac{\Delta T_o}{\Delta T} \frac{1}{Nu}. \quad (3.31a,b)$$

In non-rotating convection in spherical geometry, the thermal boundary layers are asymmetric and thus  $\Delta T^i/\Delta T^o \neq 1$ . In a previous study, we demonstrated that the ratio  $\Delta T^i/\Delta T^o$  only depends on the radius ratio  $\eta$  and on the gravity profile  $\tilde{g}(r)$  (Gastine *et al.* 2015). Thus, the scaling for the boundary layer thickness in non-rotating RBC is

$$\lambda_T^i/L \sim \lambda_T^o/L \sim Nu^{-1}, \quad (3.32)$$

where only the scaling prefactors depend on the geometry and on the gravity distribution of the spherical shell. In rotating convection however, the temperature drops at each thermal boundary layer are likely to also depend on  $Ra$  and  $E$  and hence a non-trivial additional dependence on  $Nu$  might be expected (see figure 11). Figure 13 shows the calculations of  $\lambda_T^i$  and  $\lambda_T^o$  using the slope-intersection method described in § 2.3 versus  $Nu$  for both rotating and non-rotating simulations. As pointed out by Julien *et al.* (2012b), other methods to estimate the thermal boundary layers in rotating convection might yield different thicknesses. A comparison between the values obtained from the slope-intersection method with the location of the peaks of the r.m.s. of the temperature fluctuations for a few selected cases however yield



similar boundary layer thicknesses (for a comparison, see Gastine *et al.* 2015). Large Ekman number models ( $E \geq 10^{-2}$ ) essentially behave similarly to the non-rotating cases. At the inner boundary of the spherical shell, the cases with intermediate Ekman numbers  $3 \times 10^{-5} \leq E \leq 3 \times 10^{-3}$  exhibit a lower prefactor and a slightly shallower slope than  $Nu^{-1}$  particularly visible in the compensated plot displayed in figure 13(c). The cases with  $E \leq 3 \times 10^{-6}$ , however seem to follow again a scaling  $\lambda_T^i/L \sim Nu^{-1}$ , though with a much smaller prefactor ( $\simeq 0.17$  instead of  $\simeq 0.4$ ) than the non-rotating cases. The thermal boundary layer at the outer boundary behaves quite differently. On average,  $\lambda_T^o$  remains much closer to the values found in the non-rotating models and can thus be roughly approximated by  $\lambda_T^o/L \sim Nu^{-1}$ . However, a secondary, intricate dependence on the Ekman number remains, as visible on the compensated scaling of  $\lambda_T^o$  displayed in figure 13(d). For both boundary layers, the  $Nu^{-1}$  scaling thus provides an acceptable first-order approximation of the thermal boundary layer thickness measured by the slope-intersection method, though subtle dependences on the Ekman number can impinge on both the prefactor and the scaling exponent.

### 3.2.5. Viscous boundary layers

In the range of Rayleigh numbers explored here ( $10^3 \leq Ra \leq 10^{11}$ ), the viscous boundary layers in non-rotating convection are usually assumed to be laminar and follow the Prandtl–Blasius boundary layer theory (Prandtl 1905; Blasius 1908). Balancing the inertia of the fluid bulk with the viscous forces in the boundary layers yields

$$\lambda_U/L \sim Re^{-1/2}. \quad (3.33)$$

In contrast, owing to the primary role of Coriolis force, the viscous boundary layers in rotating convection, called the Ekman layers, differ greatly from non-rotating convection. A scaling relation for the Ekman layers can be derived by considering a force balance between Coriolis force and viscosity in the limit of  $E \rightarrow 0$  (e.g. Greenspan 1968):

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \sim \nu \Delta \mathbf{u} \rightarrow \lambda_U/L \sim E^{1/2}. \quad (3.34)$$

Figure 14 shows the calculations of the viscous boundary layer thicknesses for both the inner and the outer spherical shell boundaries as a function of  $Re_c$  and  $E$ . Here we only examine the mean viscous boundary layer, though in spherical geometry the Ekman layer thickness might also depend on the latitude (Greenspan 1968). When the Ekman number is large ( $E \geq 3 \times 10^{-3}$ ), the influence of rotation on the viscous boundary layer remains secondary.  $\lambda_U^i$  and  $\lambda_U^o$  are then essentially the same as the non-rotating cases (figure 14a,b). As already shown in our previous study (Gastine *et al.* 2015), when  $Re_c \geq 250$ , the scaling exponents are in close agreement with the Prandtl–Blasius scaling (3.33). At lower Ekman numbers ( $E \leq 3 \times 10^{-5}$ ), the viscous boundary layer thicknesses become almost independent of  $Re_c$  and approach the theoretical scaling for Ekman layers (figure 14c,d). Indeed, the best fit to the numerical cases that fulfil  $RaE^{8/5} < 1$  and  $Nu > 2$  yields  $\lambda_U^i/L = 0.875(\pm 0.084) E^{0.465(\pm 0.008)}$  and  $\lambda_U^o/L = 1.109(\pm 0.042) E^{0.497(\pm 0.003)}$ , in good agreement with (3.34).

### 3.3. Transitional regime: from rotating to non-rotating convection

In the previous sections, we mainly explored the range of parameters where the convective flow is strongly constrained by rotation. We showed that the criterion

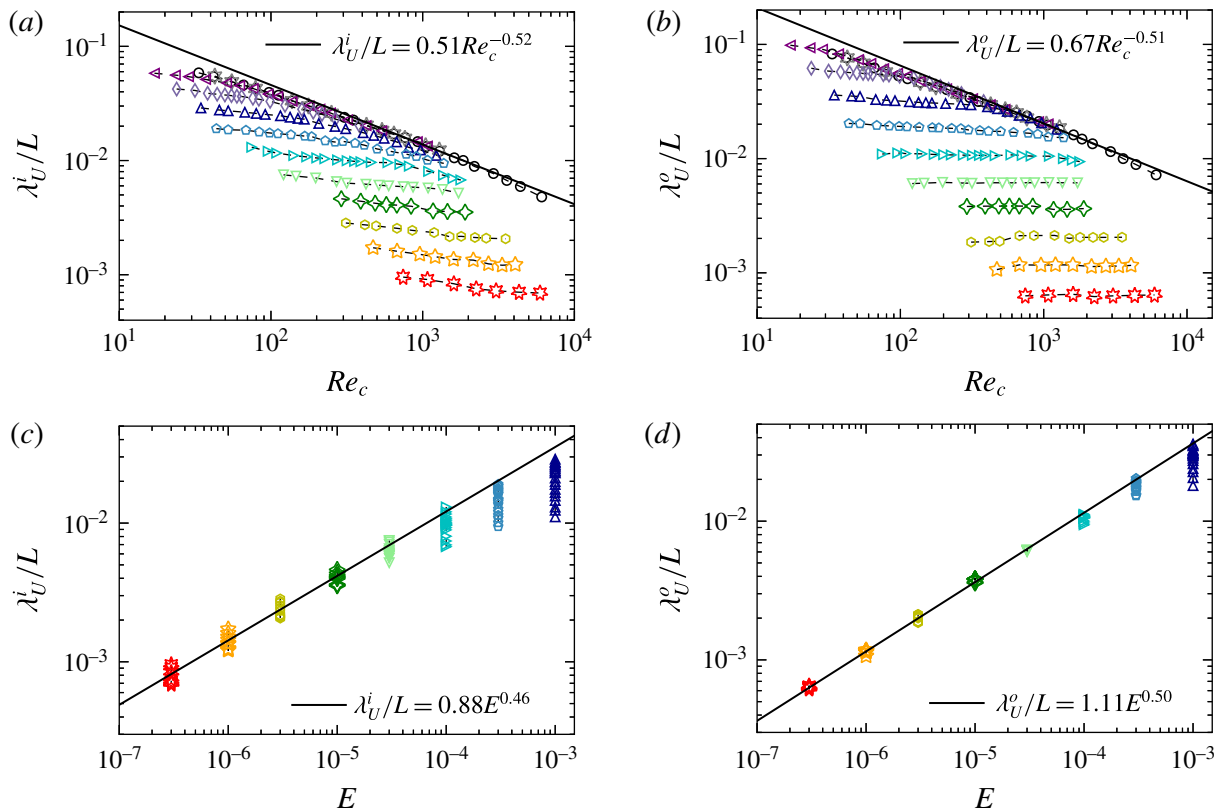


FIGURE 14. (Colour online) (a,b) Viscous boundary layer thickness at the inner (outer) boundary  $\lambda_U^i$  ( $\lambda_U^o$ ) as a function of  $Re_c$ . The solid lines correspond to the scalings obtained for non-rotating convection derived in Gastine *et al.* (2015). (c,d) Viscous boundary layer thickness at the inner (outer) boundary as a function of the Ekman number. The solid black lines correspond to the best fit to the 41 cases that fulfil  $RaE^{8/5} < 1$  and  $Nu > 2$ . The symbols have the same meaning as in figure 1.

$RaE^{8/5} \leq O(1)$  posited by Julien *et al.* (2012a) provides an effective way to characterise the upper bound of this physical regime. Beyond this point, i.e. when  $Ra > E^{-8/5}$ , convection is still influenced by rotation but no longer operates in the turbulent quasi-geostrophic regime. This defines the lower bound of the transitional regime of rotating convection. To illustrate the continuous variations of the physical properties within this regime, figure 15 shows isocontours of the local slope  $\alpha_{eff}$  of the Nusselt scaling in a  $(Ra, Nu)$ -plane. Beyond the rapidly rotating regime of convection in which  $\alpha_{eff} \simeq 3/2$  (dark red area), a rapid decrease of the local exponent is observed. The heat transport is not characterised by one single scaling exponent  $\alpha_{eff}$  but rather exhibits continuous changes, similarly to what is observed in classical RBC (e.g. Grossmann & Lohse 2000; Funfschilling *et al.* 2005). In addition,  $Nu$  does not follow a pure function of the supercriticality  $\widetilde{Ra}$  any longer and the local variations of  $\beta_{eff}$  thus decorrelate from those of  $\alpha_{eff}$  (see figure 5). The numerical models with higher  $E$  and  $Ra$  in which the influence of Coriolis force becomes negligible then transition to a slow growth of  $Nu$  with  $Ra$  close to the values obtained in non-rotating convection (i.e.  $\alpha_{eff} < 0.4$ ,  $\beta_{eff} \simeq 0$ ). This defines the upper bound of the transitional regime.

To determine a transition criterion that only depends on the control parameters, we hypothesise that the transition between rapidly rotating and weakly rotating convection can be defined as the intersection between the steep asymptotic diffusivity-free scaling

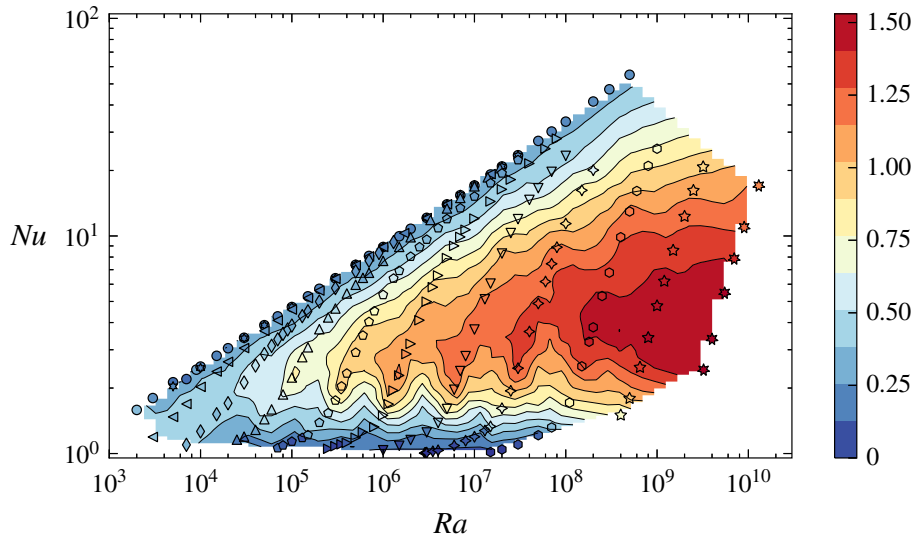


FIGURE 15. (Colour online) Isocontours of the local effective exponent  $\alpha_{eff}$  of the  $Nu = Ra^{\alpha_{eff}} E^{\beta_{eff}}$  scaling in the  $(Ra, Nu)$ -plane. The symbol shape corresponds to the Ekman number as in the previous figures, while the symbol colour scales here with the value of local slope  $\alpha_{eff}$ .

for rotating convection (1.3) and the shallow scaling for non-rotating convection  $Nu_{NR} \sim Ra^{\nu_{eff}}$ . Following Cheng *et al.* (2015) we thus designate  $Ra_T$  for the upper bound of the transitional regime by

$$Ra_T \sim E^{-4/(3-2\nu_{eff})}, \quad (3.35)$$

where the unconstrained  $Pr$  dependence has been dropped. Since the local slope for non-rotating heat transfer increases from approximately  $\nu_{eff} = 0.27$  to  $\nu_{eff} = 0.32$  between  $Ra = 10^5$  and  $Ra = 10^9$  in non-rotating spherical shells (Gastine *et al.* 2015),  $Ra_T$  can range from  $E^{-1.62}$  to  $E^{-1.69}$ . In addition, the Grossmann & Lohse (2000) theory predicts a further increase of  $\nu_{eff}$  beyond  $Ra = 10^9$  to reach  $\nu_{eff} = 1/3$  (Chillà & Schumacher 2012). We thus rather decide to adopt  $Nu_{NR} \sim Ra^{1/3}$  as the physically motivated asymptotic scaling for non-rotating convection. This yields

$$Ra_T \sim E^{-12/7}, \quad (3.36)$$

a value that lies within the range predicted by Ecke & Niemela (2014). The transitional regime of rotating convection thus covers the broad parameter range  $E^{-8/5} \leq Ra \leq E^{-12/7}$  in which the flow properties will continuously vary to match the regime changes between rotation-dominated and non-rotating convection. Due to the intricate nature of the force balance with possible cross-overs of leading forces, the derivation of asymptotic scalings inherent in this transitional regime is challenging. In the following, we thus rather check whether  $Ra_T$  (3.36) represents an accurate transition parameter that separates the regime of rotating convection from the gradual transition to non-rotating behaviour.

### 3.3.1. Nusselt and Reynolds numbers

Figure 16 shows the calculations of the Nusselt number compensated by the heat transfer scaling for non-rotating convection as a function of the transition parameter (3.36). In figure 16(a),  $Nu$  is compensated on the y-axis by the asymptotic scaling

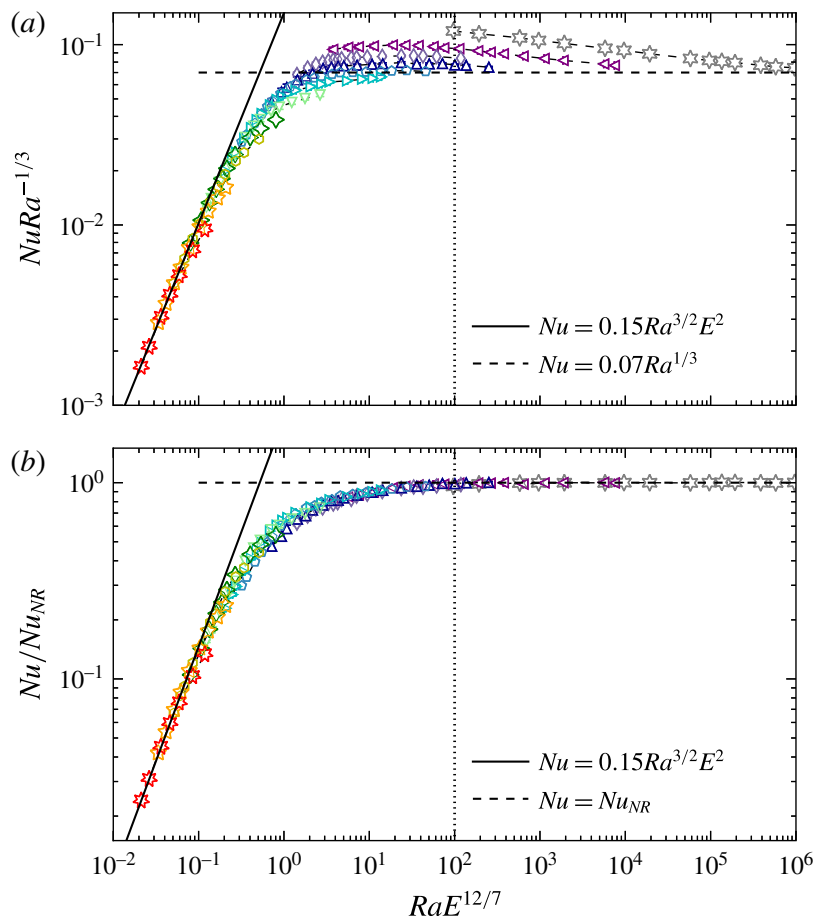


FIGURE 16. (Colour online) (a) Nusselt number  $Nu$  renormalised by  $Ra^{1/3}$  as a function of  $RaE^{12/7}$  (3.36). The solid black line corresponds to the asymptotic scaling for rotating convection (3.10), while the dashed line corresponds to the tentative asymptotic scaling for non-rotating convection. (b) Nusselt number  $Nu$  renormalised by  $Nu_{NR}$  as a function of  $RaE^{12/7}$ .  $Nu_{NR}$  corresponds to the Nusselt number of the non-rotating cases at the same Rayleigh number. On both panels, the weakly nonlinear cases with  $Nu < 2$  have been excluded. The dotted vertical lines correspond to the Rayleigh number  $Ra = 100 E^{-12/7}$  beyond which  $Nu$  adopts a scaling behaviour close to the non-rotating RBC. The symbols have the same meaning as in figure 1.

$Nu_{NR} \sim Ra^{1/3}$ . Well into the rapidly rotating regime (i.e.  $RaE^{12/7} \ll 1$ ), the heat transfer follows the  $Nu \sim Ra^{3/2}E^2$  scaling (solid line). The growth of  $RaE^{12/7}$  is then accompanied by a lowering of the heat transfer slope which levels off around the non-rotating asymptotic scaling when  $RaE^{12/7} \gg 1$  (dotted vertical line). Similarly to King *et al.* (2012), the data are more scattered in the weakly rotating regime. This is expected since the asymptotic scaling  $Nu_{NR} \sim Ra^{1/3}$  used to renormalise the data is not yet realised in the range of Rayleigh numbers covered by our numerical dataset. A much better collapse of the data can nevertheless be achieved by normalising  $Nu$  with the actual calculations of  $Nu_{NR}$ , the Nusselt numbers of the corresponding non-rotating simulations at the same Rayleigh numbers (figure 16b). Since a direct computation of the non-rotating models with  $Ra > 10^9$  becomes numerically intractable, the scaling laws derived in Gastine *et al.* (2015) have been used to estimate  $Nu_{NR}$  for the cases with  $Ra > 10^9$ . This renormalisation allows us to better describe the range  $10 \leq RaE^{12/7} \leq 10^4$  and to remarkably collapse all the rotating simulations with  $Nu > 2$  on one single curve.

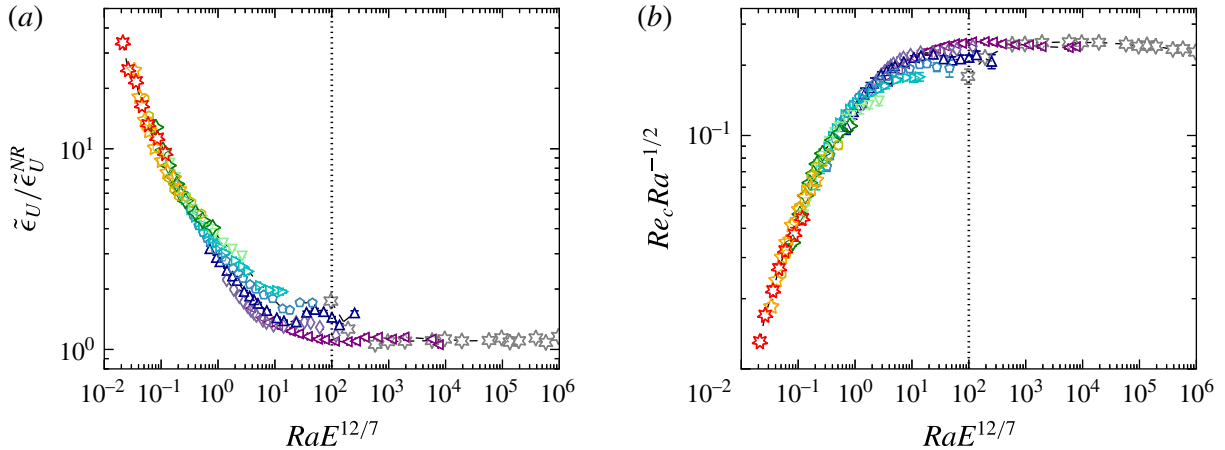


FIGURE 17. (Colour online) (a) Dimensionless viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$  normalised by the scaling for the viscous dissipation rate obtained in non-rotating convection  $\tilde{\epsilon}_U^{NR} = 7.08 Re_c^{5/2} + 0.25 Re_c^3$  (see Gastine *et al.* 2015) as a function of  $RaE^{12/7}$  (3.36). (b) Reynolds number  $Re_c$  renormalised by  $Ra^{1/2}$  as a function of  $RaE^{12/7}$ . On both panels, the weakly nonlinear cases with  $Nu < 2$  have been excluded. The dotted vertical lines correspond to the Rayleigh number  $Ra = 100 E^{-12/7}$  beyond which  $\tilde{\epsilon}_U$  and  $Re_c$  adopt scaling behaviours close to the non-rotating RBC. The symbols have the same meaning as in figure 1.

We can check whether the regime transition criterion (3.36) also applies to the scalings of the dimensionless viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$  and of the flow speed  $Re_c$ . In non-rotating convection,  $\tilde{\epsilon}_U$  can also be decomposed into fluid bulk and boundary layer contributions. Grossmann & Lohse (2000) predicted a scaling of the form  $\tilde{\epsilon}_U^{NR} \sim a Re_c^3 + b Re_c^{5/2}$ , which has been found to also accurately describe the numerical models of non-rotating convection in spherical shells (Gastine *et al.* 2015). Figure 17(a) thus shows  $\tilde{\epsilon}_U$  renormalised by  $\tilde{\epsilon}_U^{NR}$  found by Gastine *et al.* (2015) as a function of the transition parameter. In non-rotating convection, the dependence of the Reynolds number upon  $Ra$  cannot be simply reduced to a simple power law but rather exhibits continuous changes in the local slope exponent, analogous to the Nusselt number scaling. We thus follow the same procedure as for the Nusselt number and renormalise  $Re_c$  by the expected asymptotic scaling from the Grossmann & Lohse (2000) theory in the limit of large  $Ra$ , i.e.  $Re_c^{NR} \sim Ra^{1/2}$ . Figure 17(b) shows the calculations of  $Re_c Ra^{-1/2}$  versus  $RaE^{12/7}$ . Except for the intermediate parameter range  $1 \leq RaE^{12/7} \leq 10^2$ , the numerical data for both  $\tilde{\epsilon}_U$  and  $Re_c$  are well collapsed on a single curve. We note that the scatter of the data in (b) could be possibly further reduced by rather considering the actual values of  $Re_c^{NR}$  calculated in the non-rotating models. Beyond  $RaE^{12/7} = O(10^2)$  (dotted vertical lines), both  $\tilde{\epsilon}_U$  and  $Re_c$  adopt scaling behaviours close to the classical non-rotating RBC.

### 3.3.2. Flow length scale and interior temperature gradient

We now turn to discussing the variations of the bulk temperature gradient  $\beta_T$  and average flow length scale  $\ell$  across the regime transition from rotating to non-rotating convection. Figure 18(a) shows  $\beta_T$  as a function of  $RaE^{12/7}$ . In contrast to the previous quantities, we observe a significant scatter of the data in the rapidly rotating regime. As discussed above, and similarly to the findings by King *et al.* (2013),  $\beta_T$  depends on  $Ra$  and  $E$  in a complex fashion that is not captured by the transition

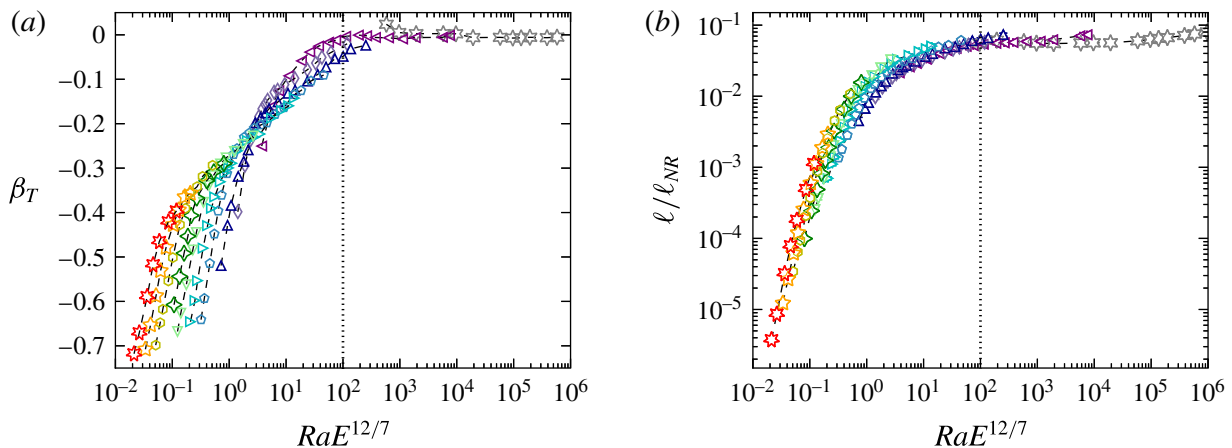


FIGURE 18. (Colour online) (a) Temperature gradient at mid-shell  $\beta_T$  as a function of  $RaE^{12/7}$  (3.36). (b) Convective flow length scale  $\ell$  normalised by the scaling for the plume spacing obtained in non-rotating convection  $\ell_{NR}$  as a function of  $RaE^{12/7}$  (Gastine *et al.* 2015). On both panels, the weakly nonlinear cases with  $Nu < 2$  have been excluded. The dotted vertical lines correspond to the Rayleigh number  $Ra = 100 E^{-12/7}$  beyond which  $\beta_T$  and  $\ell$  adopt scaling behaviours close to the non-rotating RBC. The symbols have the same meaning as in figure 1.

parameter (3.36). In the weakly rotating limit (i.e.  $RaE^{12/7} > 10^2$ ), the bulk of the fluid becomes thermally well mixed, leading to  $\beta_T \simeq 0$ .

The study of the flow length scale necessitates the determination of an asymptotic scaling for  $\ell$  in the non-rotating regime of convection. In classical RBC experiments with rigid sidewalls, the bulk flow is dominated by a large-scale circulation (LSC) pattern. The average flow length scale can therefore be approximated by the vertical size of the container  $L$ . In spherical shells however, the absence of sidewalls precludes the formation of such a global and single cell LSC structure. The typical flow length scale can instead be estimated by the average inter-plume distance (King *et al.* 2013). In our previous study (Gastine *et al.* 2015), we established the following scaling for the plume spacing

$$\ell_{NR}/L \sim Ra^{1/2} Nu^{-5/2}. \quad (3.37)$$

Figure 18(b) shows the calculations of  $\ell$  renormalised by  $\ell_{NR}$  versus the transition parameter  $RaE^{12/7}$ . Though the collapse of the data, especially when  $RaE^{12/7} < 1$ , is not as good as those obtained for  $Nu$ ,  $\tilde{\epsilon}_U$  and  $Re_c$ , the transition parameter (3.36) provides an effective way to capture the transition of the mean flow length scale from rotating (3.27) to non-rotating (3.37) convection. For  $RaE^{12/7} > 100$  (dotted vertical line),  $\ell$  approaches the non-rotating scaling  $\ell_{NR}$  (3.37).

### 3.3.3. Thermal and viscous boundary layers

In figure 19 we examine calculations of the thermal and viscous boundary layer thicknesses at the inner boundary renormalised by their asymptotic scalings in non-rotating convection plotted versus  $RaE^{12/7}$ . Once again, the renormalisation of the axes allows us to collapse the boundary layer thicknesses for all  $E$  on one single curve. The transition parameter  $RaE^{12/7}$  therefore provides an accurate way of distinguishing the variations of most of the physical quantities considered in this study across the regime change from rotating to non-rotating convection.

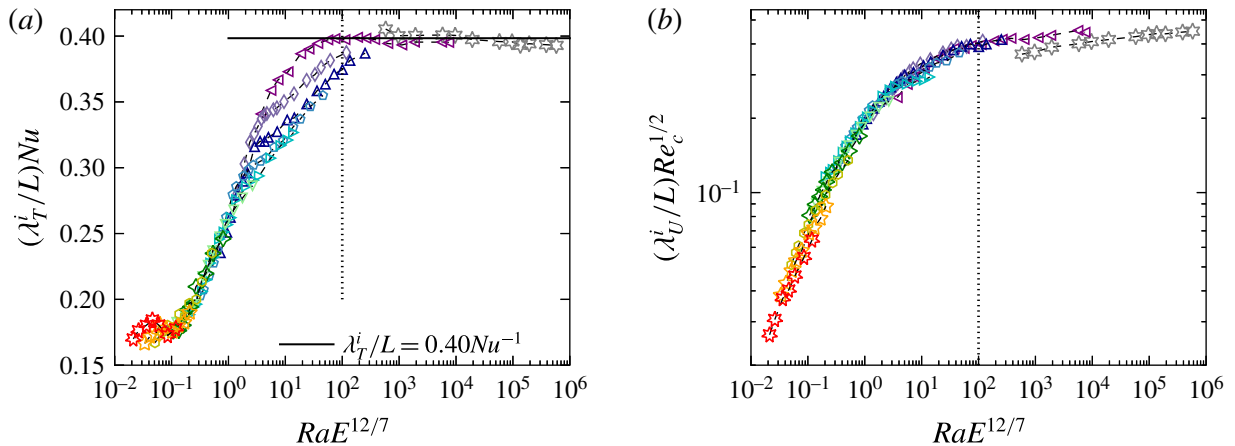


FIGURE 19. (Colour online) (a) Thermal boundary layer thickness at the inner boundary ( $\lambda_T^i$ ) normalised by  $Nu^{-1}$  as a function of  $RaE^{12/7}$  (3.36). The solid black line corresponds to the theoretical scaling obtained in Gastine *et al.* (2015) for non-rotating convection; (b) viscous boundary layer thickness at the inner boundary ( $\lambda_U^i$ ) normalised by  $Re_c^{-1/2}$  as a function of  $RaE^{12/7}$ . The dotted vertical lines correspond to the Rayleigh number  $Ra = 100E^{-12/7}$  beyond which  $\lambda_T^i$  and  $\lambda_U^i$  adopt scaling behaviours close to the non-rotating RBC. The symbols have the same meaning as in figure 1.

Beyond  $RaE^{12/7} = O(10^2)$ , all the diagnostic quantities for the rotating models becomes statistically indiscernible from the non-rotating behaviour. This value can therefore be adopted to define the upper bound of the transitional regime.

#### 4. Conclusion and outlooks

We have studied rotating convection in spherical shells by means of three-dimensional direct numerical simulations. We have constructed a dataset of more than 200 models that cover a broad parameter range with Ekman numbers spanning  $3 \times 10^{-7} \leq E \leq 10^{-1}$ , Rayleigh numbers within the range  $10^3 < Ra < 2 \times 10^{10}$ . The Prandtl number  $Pr$  is one and the radius ratio  $r_i/r_o$  is 0.6 in all cases. Figure 20 shows the parameter space covered by our numerical dataset as well as the regime boundaries of rotating convection derived in this work. We have studied seven different diagnostic quantities and investigated their scaling properties across the regime changes from onset of rotating convection to weakly rotating convection. These quantities encompass the Nusselt number  $Nu$ , the Reynolds number  $Re_c$ , the dimensionless viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$ , the interior temperature gradient  $\beta_T$ , the average flow length scale  $\ell$  and the thermal and viscous boundary layer thicknesses  $\lambda_T$  and  $\lambda_U$ . The scaling behaviours of these seven quantities of interest are summarised in table 1.

For  $Ra$  just above critical (i.e.  $Ra \gtrsim Ra_c$ ), our numerical simulations have confirmed the scaling relation of the form  $Nu - 1 \sim Ra/Ra_c - 1$ , predicted by the perturbation analysis by Busse & Or (1986) and Gillet & Jones (2006). In this weakly nonlinear regime of rotating convection, the convective flow is laminar and takes the form of a drifting thermal Rossby wave with a typical size of  $\ell/L \sim E^{1/3}$ . The triple force balance between viscosity, Coriolis force and buoyancy (the so-called VAC balance), suggests the scaling for the flow velocity  $Re_c \sim Ra_Q^{1/2} E^{1/3}$ , which is in good agreement with the numerical data.

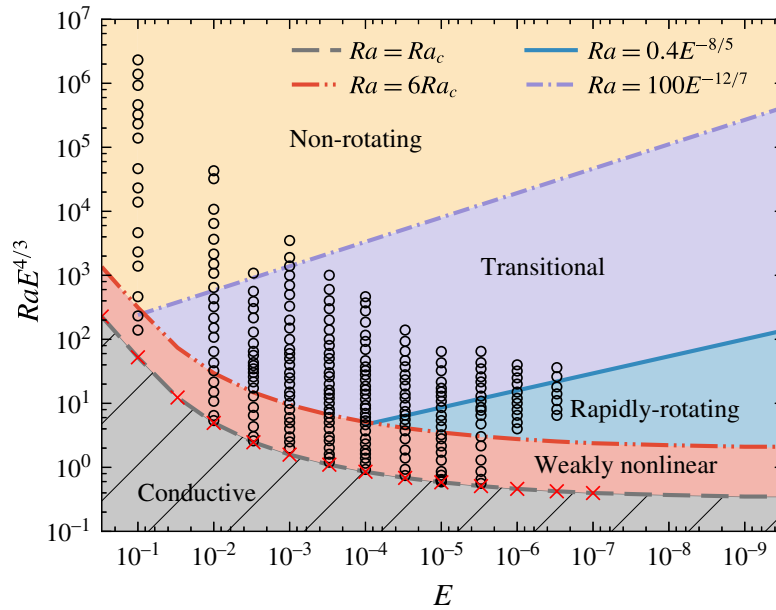


FIGURE 20. (Colour online) Regime diagram that summarises the regime transitions. The black circles correspond to the numerical simulations carried out in this study, while the red crosses mark the critical Rayleigh numbers  $Ra_c$  given in table 3.

In the limit of small Ekman numbers, an increase of the supercriticality is accompanied by a gradual transition to a turbulent quasi-geostrophic regime (when  $Ra \geq 6Ra_c$  and  $Nu > 2$ ). The heat transport scaling is then expected to become independent of the thermal and viscous diffusivities and to depend only on the supercriticality  $Ra/Ra_c$ , yielding  $Nu \sim Ra^{3/2}E^2$  (see Gillet & Jones 2006; Julien *et al.* 2012b; Stellmach *et al.* 2014). A small subset of our numerical data has been found to approach this asymptotic scaling in a narrow fraction of the parameter space delimited by  $6Ra_c \leq Ra \leq 0.4E^{-8/5}$ . In good agreement with the theory by Julien *et al.* (2012b), we have observed a breakdown of the  $Ra^{3/2}$  scaling law when the thermal boundary layer is not dominated by rotational effects any longer, i.e. when  $RaE^{8/5} = O(1)$ .

Thanks to a decomposition of the dimensionless viscous dissipation rate  $\tilde{\epsilon}_U$  into bulk and boundary layer contributions, we derived a theoretical scaling of the form  $\tilde{\epsilon}_U E^{1/2} \sim (aRe^{5/2} + bRe^2)$ , which accurately describes the numerical data when adjusting the two fit parameters  $a$  and  $b$ . A sizeable fraction of the dissipation occurs in the fluid bulk, which is dominated by a triple force balance between Coriolis, inertia and buoyancy (the so-called inertial theory of rotating convection or CIA balance, e.g. Aubert *et al.* 2001). The remaining fraction of the dissipation can be attributed to the viscous friction in the Ekman boundary layers. In contrast to the existing scalings that neglect the boundary layer dissipation (Aubert *et al.* 2001; Gillet & Jones 2006; King & Buffett 2013; Barker *et al.* 2014), this scaling law accurately captures the scaling behaviour of the Reynolds number. Our scaling further predicts that the bulk dissipation will dominate when  $Re_c > 5000$ . Beyond this value, the inertial scaling for rotating convection  $Re_c \sim Ra_Q^{2/5}E^{1/5}$  and  $\ell \sim \sqrt{Re_c E}L$  (Rhines scaling) should be gradually approached.



Regime	Weakly nonlinear $Ra_c < Ra < 6Ra_c$ VAC	Rapidly rotating $6Ra_c < Ra < 0.4E^{-8/5}$ bulk CIA+Ekman friction	Non-rotating $Ra > 100E^{-12/7}$ IA
	Scaling	Scaling	Scaling
	Reference	Reference	Reference
$Nu$	$a \left( \frac{Ra}{Ra_c} - 1 \right) + 1$ Equation (3.2) Figure 3(a)	$\frac{Ra^{3/2}E^2}{Pr^{1/2}}$ Equation (1.3) Figures 5 and 6	$Ra^{0.27} - Ra^{1/3}$ Figures 1 and 16
$\tilde{\epsilon}_U$	$\frac{Re_c^2}{E^{2/3}}$ Equation (3.3)	$a \frac{Re_c^2}{E^{1/2}} + b \frac{Re_c^{5/2}}{E^{1/2}}$ Equation (3.22) Figure 8	$aRe_c^{5/2} + bRe_c^3$ Figure 17(a)
$Re_c$	$\left( \frac{Ra_Q E^{2/3}}{Pr^2} \right)^{1/2}$ Equation (3.5) Figure 3(b)	$\left( \frac{Ra_Q E^{1/2}}{Pr^2} \right)^{1/2}$ to $\left( \frac{Ra_Q E^{1/2}}{Pr^2} \right)^{2/5}$ Equation (3.23) Figure 9	$Ra^{0.46} - Ra^{1/2}$ Figure 17(b)
$-\beta_T$	$\frac{4\eta}{(1 + \eta)^2}$ Equation (2.10)	$\frac{Nu}{Re_c^{3/2} E^{1/2}}$ Equation (3.29) Figure 12	0 Figures 12 and 18(a)
$\ell/L$	$E^{1/3}$ Equation (3.4) Figure 4	$Re_c^{1/2} E^{1/2}$ Equation (3.27) Figure 10	$\frac{Ra^{1/2}}{Nu^{5/2}}$ Equation (3.37) Figure 18(b)
$\lambda_T/L$	Undefined	$0.2Nu^{-1+\alpha(E)}$ Equation (3.32) Figure 13	$0.5Nu^{-1}$ Equation (3.32) Figures 13 and 19(a)
$\lambda_U/L$	$E^{1/2}$ Equation (3.34) Figure 14	$E^{1/2}$ Equation (3.34) Figure 14	$Re^{-1/2}$ Equation (3.33) Figures 14 and 19(b)

TABLE 1. Summary table of the scaling properties of the quantities of interest in the different regimes of rotating convection derived in this work. The acronyms employed on the third line stand for the leading-order force balance: Visco-Archimedean-Coriolis (VAC), Coriolis-Inertia-Archimedean (CIA) and Inertia-Archimedean (IA). The notation  $\alpha(E)$  designates a weak dependence on the Ekman number, while the question marks highlight possible uncertainties on the scaling laws. See text for the successive derivation of scalings.

Beyond  $Ra = 0.4E^{-8/5}$ , the rotational constraint on the convective flow gradually decreases until the dynamics resembles non-rotating convection. Within this parameter range, that we designate as the transitional regime, we have observed continuous changes of the flow properties. The heat transfer scaling exponents show continuous variations that depend on  $Ra$  and  $E$  rather than simple polynomial laws. This makes the derivation of asymptotic scalings inherent to this physical regime extremely difficult. From the intersection between the steep  $Nu \sim Ra^{3/2}E^2$  scaling for rapidly rotating convection and the shallow exponent for non-rotating convection  $Nu \sim Ra^{1/3}$ , we have defined a transition Rayleigh number  $Ra_T \sim E^{-12/7}$ , which indeed allows to separate the rotation-influenced solutions from those resembling non-rotating convection. Beyond  $RaE^{12/7} \sim O(10^2)$ , all the diagnostic quantities studied here follow the scalings for non-rotating convection (Gastine *et al.* 2015). This defines the upper bound of the transitional regime displayed in the regime diagram (figure 20).

Our systematic study of rotating convection in spherical shells revealed interesting differences to the local simulations carried out in Cartesian coordinates (King *et al.* 2012; Stellmach *et al.* 2014; Cheng *et al.* 2015). In the limit of small Ekman numbers ( $E = O(10^{-7})$ ), these studies have obtained much steeper heat transfer scaling laws (from  $Nu \sim Ra^3E^4$  to  $Nu \sim Ra^{3.6}E^{4.8}$ ) than our findings. This has been attributed to an active role of the Ekman boundary layers, which supposedly promotes very efficient heat transfer, much steeper than the diffusivity-free asymptotic scaling (Julien *et al.* 2016). In spherical geometry, the Ekman pumping might play a significant role and may indeed affect the heat transport in the polar regions where gravity is aligned with the rotation axis. As shown by Yadav *et al.* (2016), the heat transport in spherical shells with rigid mechanical boundaries is however dominated by the equatorial regions, where the influence of Ekman pumping on the heat transfer might be negligible. A regional analysis of the heat transport in spherical shell models as well as the computation of new Cartesian models in which gravity is orthogonal to the rotation axis could possibly help to ascertain this scenario.

Dynamo processes and convection in planetary and stellar interiors frequently operate at Prandtl numbers much smaller than unity. The parameter study presented here has been focused on the peculiar case of  $Pr = 1$ . It would be interesting to complement our study with simulations with  $Pr = O(10^{-2}-10^{-1})$  to verify the theoretical  $Pr$ -scalings derived here (see table 1). Recent studies by King & Aurnou (2013) and Guervilly & Cardin (2016) indeed reveal interesting new physical phenomena inherent to small Prandtl number fluids that could possibly impact the scaling properties.

### Acknowledgements

The authors wish to thank J. Aurnou and K. Julien for fruitful scientific discussions and constructive criticisms at different stages of this research work. All the computations have been carried out on the GWDG computer facilities in Göttingen, on the IBM iDataPlex HPC System Hydra at the MPG Rechenzentrum Garching and on the S-CAPAD platform at IPGP. T.G. has been partly supported by the Special Priority Program 1488 (PlanetMag, [www.planetmag.de](http://www.planetmag.de)) of the German Science Foundation. This is IPGP contribution 3780.

## Appendix A. Table of results

No.	$Ra$	$Nu$	$Re_c$	$\beta_T$	$\ell$	$\lambda_T^i/L$	$\lambda_U^i/L$	$\chi_T$	$\chi_U$	$N_r \times \ell_{max}$
$E = 10^{-1}$										
1	$3 \times 10^3$	1.71	0.0	-0.18	0.704	—	—	1.000	1.000	$61 \times 64$
2	$5 \times 10^3$	2.04	12.7	-0.07	0.665	—	—	1.002	1.003	$61 \times 133$
3	$1 \times 10^4$	2.47	21.6	0.03	0.638	—	—	1.000	1.000	$61 \times 133$
4	$3 \times 10^4$	3.39	42.6	0.02	0.481	$1.2 \times 10^{-1}$	$5.5 \times 10^{-2}$	1.001	1.002	$61 \times 133$
5	$5 \times 10^4$	3.88	55.1	0.01	0.420	$1.0 \times 10^{-1}$	$4.9 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 133$
6	$1 \times 10^5$	4.71	79.1	0.00	0.361	$8.5 \times 10^{-2}$	$4.3 \times 10^{-2}$	1.002	1.003	$61 \times 133$
7	$3 \times 10^5$	6.38	137.8	0.00	0.298	$6.3 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^{-2}$	1.001	1.001	$61 \times 133$
8	$5 \times 10^5$	7.37	176.8	0.00	0.270	$5.4 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 133$
9	$1 \times 10^6$	8.90	250.5	-0.01	0.239	$4.5 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 170$
10	$3 \times 10^6$	12.08	426.2	-0.01	0.206	$3.3 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$97 \times 213$
11	$5 \times 10^6$	13.97	539.5	-0.01	0.192	$2.8 \times 10^{-2}$	$1.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.001	$97 \times 256$
12	$7 \times 10^6$	15.45	646.7	-0.01	0.184	$2.5 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	1.000	1.003	$97 \times 213$
13	$1 \times 10^7$	17.12	763.0	-0.01	0.174	$2.3 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$	1.001	1.006	$97 \times 266$
14	$2 \times 10^7$	20.85	1045.5	-0.01	0.161	$1.9 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$	1.000	1.005	$129 \times 426$
15	$3 \times 10^7$	23.44	1288.5	-0.01	0.155	$1.7 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	1.000	1.007	$129 \times 426$
16	$5 \times 10^7$	27.41	1611.5	-0.03	0.144	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	1.001	1.025	$129 \times 426$
$E = 10^{-2}$										
17	$2.5 \times 10^3$	1.062	2.3	-0.87	0.404	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
18	$3 \times 10^3$	1.19	4.5	-0.74	0.400	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
19	$5 \times 10^3$	1.47	8.0	-0.54	0.298	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
20	$7 \times 10^3$	1.69	12.1	-0.40	0.376	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
21	$1 \times 10^4$	2.03	17.1	-0.25	0.366	—	—	0.999	0.998	$61 \times 85$
22	$1.5 \times 10^4$	2.38	23.4	-0.16	0.362	—	—	1.000	1.001	$61 \times 85$
23	$2 \times 10^4$	2.64	28.6	-0.13	0.362	—	—	0.999	0.999	$61 \times 85$
24	$3 \times 10^4$	3.05	37.1	-0.09	0.353	$1.2 \times 10^{-1}$	$5.1 \times 10^{-2}$	1.001	1.001	$61 \times 85$
25	$5 \times 10^4$	3.66	51.1	-0.06	0.348	$1.1 \times 10^{-1}$	$4.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 85$
26	$7 \times 10^4$	4.09	62.3	-0.04	0.342	$9.5 \times 10^{-2}$	$4.5 \times 10^{-2}$	1.000	1.001	$61 \times 85$
27	$1 \times 10^5$	4.59	76.5	-0.03	0.331	$8.6 \times 10^{-2}$	$4.3 \times 10^{-2}$	0.998	0.997	$61 \times 133$
28	$1.5 \times 10^5$	5.18	95.7	-0.02	0.319	$7.7 \times 10^{-2}$	$3.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 133$
29	$2 \times 10^5$	5.61	111.0	-0.01	0.310	$7.1 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-2}$	0.999	0.998	$61 \times 133$
30	$3 \times 10^5$	6.36	137.9	-0.00	0.291	$6.3 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^{-2}$	1.001	1.001	$49 \times 85$
31	$5 \times 10^5$	7.33	178.5	-0.00	0.270	$5.4 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 133$
32	$7 \times 10^5$	8.05	210.4	-0.00	0.257	$4.9 \times 10^{-2}$	$2.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 133$
33	$1 \times 10^6$	8.90	246.8	-0.01	0.242	$4.5 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 133$
34	$1.7 \times 10^6$	10.30	319.4	-0.01	0.226	$3.8 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$97 \times 256$
35	$3 \times 10^6$	12.08	423.8	-0.01	0.202	$3.3 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$97 \times 256$
36	$5 \times 10^6$	13.98	537.5	-0.01	0.191	$2.8 \times 10^{-2}$	$1.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.001	$97 \times 256$
37	$1.5 \times 10^7$	19.25	922.2	-0.01	0.168	$2.1 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	0.998	1.017	$97 \times 341$
38	$2 \times 10^7$	20.82	1074.3	-0.00	0.166	$1.9 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$	0.999	1.006	$121 \times 426$
$E = 3 \times 10^{-3}$										
39	$6 \times 10^3$	1.022	1.9	-0.92	0.380	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
40	$7 \times 10^3$	1.097	4.3	-0.87	0.376	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
41	$1 \times 10^4$	1.26	8.2	-0.77	0.365	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
42	$1.5 \times 10^4$	1.52	11.9	-0.59	0.238	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$

TABLE 2. (continued)

43	$2 \times 10^4$	1.70	15.9	-0.54	0.254	—	—	1.003	1.007	$61 \times 85$
44	$3 \times 10^4$	2.12	23.9	-0.40	0.260	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
45	$4 \times 10^4$	2.54	31.5	-0.29	0.261	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
46	$5 \times 10^4$	2.86	38.2	-0.24	0.263	—	—	1.000	1.000	$61 \times 85$
47	$6 \times 10^4$	3.13	44.2	-0.20	0.265	$1.0 \times 10^{-1}$	$3.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 85$
48	$7 \times 10^4$	3.35	49.7	-0.18	0.267	$9.9 \times 10^{-2}$	$3.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$61 \times 85$
49	$8 \times 10^4$	3.55	54.9	-0.17	0.269	$9.5 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-2}$	0.999	0.999	$61 \times 106$
50	$9 \times 10^4$	3.72	59.6	-0.16	0.269	$9.1 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-2}$	0.999	0.998	$61 \times 106$
51	$1 \times 10^5$	3.87	64.0	-0.15	0.270	$8.8 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 106$
52	$1.3 \times 10^5$	4.28	76.1	-0.13	0.267	$8.0 \times 10^{-2}$	$3.5 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 106$
53	$1.5 \times 10^5$	4.50	83.2	-0.12	0.265	$7.7 \times 10^{-2}$	$3.4 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 106$
54	$2 \times 10^5$	4.99	98.7	-0.11	0.259	$7.0 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 106$
55	$3 \times 10^5$	5.76	123.8	-0.10	0.250	$6.2 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 128$
56	$5 \times 10^5$	6.88	159.8	-0.08	0.239	$5.3 \times 10^{-2}$	$2.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 133$
57	$7 \times 10^5$	7.70	190.0	-0.06	0.234	$4.8 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-2}$	0.999	0.999	$81 \times 133$
58	$9 \times 10^5$	8.36	217.0	-0.05	0.230	$4.5 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$97 \times 170$
59	$1.3 \times 10^6$	9.37	266.6	-0.04	0.222	$4.1 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$97 \times 170$
60	$2.5 \times 10^6$	11.39	380.8	-0.02	0.207	$3.4 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$97 \times 213$

 $E = 10^{-3}$ 

61	$2 \times 10^4$	1.076	4.8	-0.90	0.224	—	—	1.000	1.000	$65 \times 85$
62	$2.5 \times 10^4$	1.16	7.5	-0.86	0.223	—	—	1.000	1.000	$65 \times 85$
63	$3 \times 10^4$	1.20	8.5	-0.85	0.194	—	—	1.000	1.000	$65 \times 85$
64	$4 \times 10^4$	1.28	11.0	-0.83	0.177	—	—	1.000	1.000	$65 \times 85$
65	$5 \times 10^4$	1.44	15.4	-0.74	0.186	—	—	1.000	1.000	$65 \times 85$
66	$6 \times 10^4$	1.60	19.1	-0.64	0.177	—	—	1.000	1.000	$65 \times 85$
67	$8 \times 10^4$	1.87	26.4	-0.59	0.190	—	—	1.001	1.003	$65 \times 85$
68	$1 \times 10^5$	2.24	34.5	-0.52	0.191	—	—	1.000	0.999	$65 \times 85$
69	$1.3 \times 10^5$	2.77	45.7	-0.43	0.190	—	—	0.999	0.999	$65 \times 85$
70	$1.5 \times 10^5$	3.08	52.3	-0.38	0.190	$8.5 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-2}$	1.000	1.001	$65 \times 85$
71	$2 \times 10^5$	3.73	67.3	-0.32	0.190	$7.5 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$65 \times 85$
72	$2.5 \times 10^5$	4.22	80.0	-0.28	0.191	$6.9 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$65 \times 85$
73	$3 \times 10^5$	4.64	91.6	-0.26	0.191	$6.4 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$65 \times 85$
74	$4 \times 10^5$	5.44	115.4	-0.20	0.193	$5.8 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$65 \times 85$
75	$5 \times 10^5$	5.97	133.7	-0.19	0.192	$5.4 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$65 \times 85$
76	$6 \times 10^5$	6.42	150.6	-0.18	0.191	$5.0 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$65 \times 85$
77	$7 \times 10^5$	6.77	165.9	-0.17	0.190	$4.8 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 106$
78	$1 \times 10^6$	7.68	206.7	-0.15	0.190	$4.3 \times 10^{-2}$	$2.1 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 133$
79	$1.5 \times 10^6$	8.91	264.2	-0.13	0.187	$3.8 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-2}$	1.001	1.001	$81 \times 133$
80	$2 \times 10^6$	9.86	310.7	-0.12	0.184	$3.4 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 133$
81	$3.3 \times 10^6$	11.84	405.1	-0.10	0.180	$2.9 \times 10^{-2}$	$1.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.001	$81 \times 133$
82	$5 \times 10^6$	13.38	476.1	-0.09	0.170	$2.7 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	1.000	1.001	$97 \times 213$
83	$7 \times 10^6$	14.95	556.7	-0.07	0.167	$2.4 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$	1.000	1.003	$97 \times 213$
84	$1 \times 10^7$	16.91	673.2	-0.05	0.163	$2.2 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	1.000	1.007	$97 \times 213$
85	$1.4 \times 10^7$	18.60	807.9	-0.05	0.160	$2.0 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$	0.999	1.007	$97 \times 266$
86	$1.9 \times 10^7$	20.49	966.2	-0.03	0.153	$1.9 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	1.000	1.006	$121 \times 341$
87	$3.5 \times 10^7$	24.52	1231.8	-0.02	0.146	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	0.999	1.011	$129 \times 426$

 $E = 3 \times 10^{-4}$ 

88	$6 \times 10^4$	1.022	3.4	-0.94	0.173	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
89	$7 \times 10^4$	1.060	6.0	-0.94	0.173	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$

TABLE 2. (continued)

90	$8 \times 10^4$	1.090	7.8	-0.93	0.174	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
91	$1 \times 10^5$	1.14	10.3	-0.92	0.173	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
92	$1.3 \times 10^5$	1.18	13.2	-0.93	0.171	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
93	$1.5 \times 10^5$	1.22	15.3	-0.92	0.171	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
94	$2 \times 10^5$	1.39	21.2	-0.82	0.140	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
95	$2.5 \times 10^5$	1.53	27.1	-0.76	0.136	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
96	$3 \times 10^5$	1.75	34.9	-0.70	0.135	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
97	$3.5 \times 10^5$	2.04	43.7	-0.64	0.136	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
98	$4 \times 10^5$	2.33	52.2	-0.59	0.136	—	—	1.000	1.000	$65 \times 106$
99	$5 \times 10^5$	2.91	68.4	-0.51	0.138	—	—	1.000	1.001	$73 \times 128$
100	$6 \times 10^5$	3.49	83.6	-0.45	0.139	$6.5 \times 10^{-2}$	$1.8 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 128$
101	$7 \times 10^5$	4.03	97.9	-0.40	0.140	$5.9 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 128$
102	$8 \times 10^5$	4.51	111.2	-0.36	0.140	$5.5 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 128$
103	$1 \times 10^6$	5.36	135.4	-0.31	0.142	$4.9 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	1.001	1.001	$73 \times 128$
104	$1.3 \times 10^6$	6.38	167.0	-0.27	0.142	$4.4 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$	0.999	0.999	$73 \times 128$
105	$1.5 \times 10^6$	6.92	185.5	-0.26	0.144	$4.1 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$73 \times 128$
106	$2 \times 10^6$	8.04	227.9	-0.23	0.144	$3.7 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$73 \times 128$
107	$2.5 \times 10^6$	8.89	264.3	-0.22	0.144	$3.4 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	0.999	0.998	$73 \times 128$
108	$3 \times 10^6$	9.63	298.4	-0.21	0.144	$3.1 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$81 \times 133$
109	$4 \times 10^6$	10.87	358.2	-0.20	0.143	$2.8 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$81 \times 133$
110	$5 \times 10^6$	11.97	412.1	-0.20	0.140	$2.6 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-2}$	1.001	0.999	$81 \times 133$
111	$7 \times 10^6$	13.42	501.0	-0.18	0.136	$2.4 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$97 \times 170$
112	$1 \times 10^7$	15.16	614.0	-0.16	0.132	$2.1 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	1.000	1.003	$97 \times 256$
113	$1.5 \times 10^7$	17.49	779.4	-0.13	0.133	$1.9 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	1.001	1.004	$97 \times 341$
114	$2 \times 10^7$	19.40	908.0	-0.13	0.133	$1.7 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	1.001	1.010	$97 \times 341$
115	$3 \times 10^7$	22.33	1076.3	-0.10	0.121	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-2}$	1.000	1.009	$121 \times 426$
116	$5 \times 10^7$	26.15	1377.0	-0.09	0.123	$1.4 \times 10^{-2}$	$9.4 \times 10^{-3}$	1.001	1.010	$161 \times 512$

$E = 10^{-4}$

117	$2 \times 10^5$	1.014	3.9	-0.94	0.133	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
118	$2.5 \times 10^5$	1.052	8.1	-0.96	0.134	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
119	$3 \times 10^5$	1.081	10.7	-0.96	0.134	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
120	$3.5 \times 10^5$	1.10	12.7	-0.96	0.134	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
121	$4 \times 10^5$	1.12	14.4	-0.96	0.133	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
122	$5 \times 10^5$	1.18	19.5	-0.92	0.131	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
123	$6 \times 10^5$	1.25	24.4	-0.87	0.124	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
124	$8 \times 10^5$	1.32	30.7	-0.86	0.124	—	—	1.000	1.000	$73 \times 85$
125	$1 \times 10^6$	1.50	40.3	-0.79	0.113	—	—	1.001	1.002	$73 \times 85$
126	$1.15 \times 10^6$	1.69	49.5	-0.74	0.109	—	—	1.002	1.005	$73 \times 85$
127	$1.3 \times 10^6$	1.95	60.5	-0.69	0.107	—	—	1.000	1.002	$73 \times 85$
128	$1.5 \times 10^6$	2.29	74.7	-0.65	0.108	—	—	1.000	1.000	$81 \times 128$
129	$1.8 \times 10^6$	2.87	95.8	-0.60	0.107	—	—	1.000	0.999	$73 \times 85$
130	$2 \times 10^6$	3.19	109.1	-0.55	0.108	$6.1 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 128$
131	$2.5 \times 10^6$	4.10	141.4	-0.48	0.110	$5.0 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 128$
132	$3 \times 10^6$	4.99	172.0	-0.43	0.114	$4.3 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	1.000	1.000	$81 \times 128$
133	$3.5 \times 10^6$	5.82	200.4	-0.39	0.115	$3.9 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$81 \times 128$
134	$4 \times 10^6$	6.58	226.5	-0.36	0.116	$3.5 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$81 \times 128$
135	$5 \times 10^6$	7.92	274.7	-0.33	0.117	$3.1 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-2}$	1.000	0.999	$81 \times 128$
136	$6 \times 10^6$	9.01	317.7	-0.31	0.118	$2.8 \times 10^{-2}$	$10.0 \times 10^{-3}$	1.000	0.998	$81 \times 128$
137	$7 \times 10^6$	9.90	355.9	-0.30	0.118	$2.6 \times 10^{-2}$	$9.8 \times 10^{-3}$	1.000	0.998	$81 \times 128$
138	$8 \times 10^6$	10.68	391.8	-0.29	0.119	$2.5 \times 10^{-2}$	$9.8 \times 10^{-3}$	1.000	0.998	$81 \times 133$
139	$1 \times 10^7$	12.02	457.9	-0.26	0.119	$2.3 \times 10^{-2}$	$9.6 \times 10^{-3}$	1.000	1.000	$81 \times 170$

TABLE 2. (continued)

140	$1.5 \times 10^7$	14.41	590.3	-0.24	0.119	$2.0 \times 10^{-2}$	$9.6 \times 10^{-3}$	1.000	1.001	$97 \times 213$
141	$2 \times 10^7$	16.38	707.5	-0.23	0.119	$1.8 \times 10^{-2}$	$9.3 \times 10^{-3}$	1.000	1.003	$97 \times 213$
142	$2.5 \times 10^7$	18.16	816.2	-0.22	0.118	$1.6 \times 10^{-2}$	$8.9 \times 10^{-3}$	1.001	1.008	$97 \times 213$
143	$4 \times 10^7$	21.54	1094.5	-0.19	0.111	$1.4 \times 10^{-2}$	$8.0 \times 10^{-3}$	1.000	1.006	$121 \times 341$
144	$6 \times 10^7$	25.18	1371.3	-0.17	0.104	$1.3 \times 10^{-2}$	$7.4 \times 10^{-3}$	1.000	1.010	$161 \times 426$
145	$8 \times 10^7$	28.02	1583.3	-0.16	0.100	$1.1 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-3}$	0.999	1.003	$201 \times 512$
146	$1 \times 10^8$	30.75	1785.6	-0.14	0.097	$1.1 \times 10^{-2}$	$6.8 \times 10^{-3}$	1.001	1.011	$201 \times 682$
$E = 3 \times 10^{-5}$										
147	$8 \times 10^5$	1.010	4.7	-0.94	0.089	—	—	1.000	1.000	$65 \times 128$
148	$1 \times 10^6$	1.036	9.6	-0.96	0.093	—	—	1.000	1.000	$65 \times 128$
149	$1.5 \times 10^6$	1.086	17.0	-0.97	0.091	—	—	1.000	1.000	$65 \times 128$
150	$2 \times 10^6$	1.15	25.9	-0.95	0.091	—	—	1.000	1.000	$65 \times 128$
151	$3 \times 10^6$	1.25	40.2	-0.91	0.096	—	—	1.000	1.000	$65 \times 128$
152	$4 \times 10^6$	1.38	54.3	-0.85	0.086	—	—	1.000	1.000	$65 \times 128$
153	$5 \times 10^6$	1.60	71.1	-0.78	0.077	—	—	1.000	1.000	$65 \times 133$
154	$6 \times 10^6$	1.96	94.8	-0.71	0.075	—	—	1.000	1.000	$65 \times 133$
155	$7 \times 10^6$	2.39	121.0	-0.67	0.076	—	—	1.000	0.999	$65 \times 133$
156	$8 \times 10^6$	2.80	146.2	-0.63	0.078	—	—	1.000	1.000	$65 \times 170$
157	$1 \times 10^7$	3.72	197.0	-0.56	0.082	$5.0 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-3}$	1.000	1.000	$97 \times 170$
158	$1.3 \times 10^7$	5.12	270.5	-0.48	0.085	$3.8 \times 10^{-2}$	$6.5 \times 10^{-3}$	1.001	1.001	$65 \times 170$
159	$1.5 \times 10^7$	6.04	315.7	-0.45	0.087	$3.2 \times 10^{-2}$	$6.3 \times 10^{-3}$	1.001	1.001	$65 \times 170$
160	$2 \times 10^7$	8.30	423.0	-0.38	0.090	$2.6 \times 10^{-2}$	$6.2 \times 10^{-3}$	1.000	1.000	$97 \times 213$
161	$2.5 \times 10^7$	10.31	514.9	-0.34	0.091	$2.2 \times 10^{-2}$	$6.1 \times 10^{-3}$	1.000	1.001	$97 \times 256$
162	$3 \times 10^7$	11.95	596.9	-0.32	0.092	$2.0 \times 10^{-2}$	$6.0 \times 10^{-3}$	1.000	1.001	$97 \times 256$
163	$4 \times 10^7$	14.65	745.2	-0.29	0.093	$1.7 \times 10^{-2}$	$5.9 \times 10^{-3}$	1.001	1.002	$97 \times 341$
164	$5 \times 10^7$	16.58	864.1	-0.28	0.094	$1.5 \times 10^{-2}$	$5.8 \times 10^{-3}$	1.003	1.005	$97 \times 341$
165	$7 \times 10^7$	19.71	1086.3	-0.26	0.094	$1.4 \times 10^{-2}$	$5.7 \times 10^{-3}$	1.002	1.004	$129 \times 426$
166	$1 \times 10^8$	23.34	1350.8	-0.25	0.095	$1.2 \times 10^{-2}$	$5.6 \times 10^{-3}$	1.003	1.007	$129 \times 512$
167	$1.5 \times 10^8$	27.96	1722.8	-0.23	0.096	$1.0 \times 10^{-2}$	$5.2 \times 10^{-3}$	1.004	1.012	$161 \times 682$
$E = 10^{-5}$										
168	$2.75 \times 10^6$	1.001	1.9	-0.94	0.061	—	—	1.000	0.999	$97 \times 133$
169	$2.85 \times 10^6$	1.004	4.2	-0.94	0.061	—	—	1.000	0.999	$97 \times 133$
170	$2.9 \times 10^6$	1.006	4.9	-0.94	0.061	—	—	1.000	0.999	$97 \times 133$
171	$2.95 \times 10^6$	1.008	5.6	-0.94	0.061	—	—	1.000	1.000	$97 \times 133$
172	$3 \times 10^6$	1.009	6.2	-0.94	0.061	—	—	1.000	1.000	$97 \times 133$
173	$3.5 \times 10^6$	1.023	10.3	-0.95	0.061	—	—	1.000	1.000	$97 \times 133$
174	$4 \times 10^6$	1.035	13.0	-0.96	0.061	—	—	1.000	0.999	$97 \times 170$
175	$6 \times 10^6$	1.089	25.4	-0.99	0.063	—	—	1.000	1.000	$97 \times 170$
176	$8 \times 10^6$	1.15	37.4	-0.99	0.066	—	—	1.000	1.000	$97 \times 170$
177	$1 \times 10^7$	1.19	47.9	-0.95	0.066	—	—	1.000	1.001	$97 \times 170$
178	$1.3 \times 10^7$	1.28	65.6	-0.90	0.066	—	—	1.000	1.002	$97 \times 170$
179	$1.5 \times 10^7$	1.33	75.6	-0.87	0.064	—	—	1.000	1.000	$97 \times 170$
180	$2 \times 10^7$	1.61	106.5	-0.80	0.056	—	—	1.000	0.998	$97 \times 170$
181	$2.5 \times 10^7$	1.94	141.8	-0.74	0.055	—	—	1.000	0.999	$97 \times 213$
182	$3 \times 10^7$	2.47	190.5	-0.69	0.057	—	—	1.000	1.000	$97 \times 213$
183	$4 \times 10^7$	3.64	291.0	-0.61	0.061	$4.8 \times 10^{-2}$	$4.6 \times 10^{-3}$	1.000	1.000	$97 \times 213$
184	$5 \times 10^7$	4.90	390.4	-0.54	0.065	$3.6 \times 10^{-2}$	$4.4 \times 10^{-3}$	1.000	1.001	$97 \times 213$
185	$6 \times 10^7$	6.17	486.3	-0.49	0.067	$2.9 \times 10^{-2}$	$4.2 \times 10^{-3}$	1.002	1.002	$97 \times 213$
186	$7 \times 10^7$	7.45	576.1	-0.45	0.069	$2.6 \times 10^{-2}$	$4.1 \times 10^{-3}$	1.002	1.005	$97 \times 213$
187	$8 \times 10^7$	8.88	675.7	-0.41	0.073	$2.2 \times 10^{-2}$	$4.1 \times 10^{-3}$	1.003	1.004	$97 \times 341$
188	$1 \times 10^8$	11.40	838.6	-0.37	0.074	$1.8 \times 10^{-2}$	$4.0 \times 10^{-3}$	1.006	1.006	$97 \times 341$

TABLE 2. (continued)

189	$1.5 \times 10^8$	16.21	1171.5	-0.33	0.076	$1.4 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-3}$	1.002	1.007	129 × 341
190	$2 \times 10^8$	20.07	1457.3	-0.31	0.078	$1.2 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-3}$	1.006	1.011	129 × 426
191	$3 \times 10^8$	25.66	1903.0	-0.29	0.081	$9.6 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-3}$	1.006	1.015	161 × 682
$E = 3 \times 10^{-6}$										
192	$1.3 \times 10^7$	1.007	7.6	-0.94	0.040	—	—	1.000	0.999	97 × 192
193	$1.5 \times 10^7$	1.015	12.2	-0.95	0.043	—	—	1.000	0.997	97 × 192
194	$2 \times 10^7$	1.043	22.6	-0.97	0.041	—	—	1.000	0.999	97 × 192
195	$3 \times 10^7$	1.10	41.5	-0.99	0.041	—	—	1.000	1.000	97 × 266
196	$5 \times 10^7$	1.21	81.0	-0.95	0.044	—	—	1.000	1.001	129 × 341
197	$7 \times 10^7$	1.32	115.2	-0.88	0.044	—	—	1.000	1.000	129 × 341
198	$1.1 \times 10^8$	1.71	188.7	-0.78	0.040	—	—	1.000	1.000	129 × 426
199	$1.5 \times 10^8$	2.52	311.5	-0.70	0.042	—	—	0.999	1.004	129 × 341
200	$1.8 \times 10^8$	3.26	415.9	-0.65	0.045	$5.3 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-3}$	1.002	1.003	129 × 341
201	$2 \times 10^8$	3.80	493.1	-0.62	0.047	$4.6 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-3}$	1.003	1.003	129 × 426
202	$2.5 \times 10^8$	5.30	678.2	-0.56	0.051	$3.4 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-3}$	1.001	1.003	129 × 512
203	$3 \times 10^8$	6.78	854.4	-0.50	0.054	$2.6 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-3}$	1.005	1.003	129 × 426
204	$4 \times 10^8$	9.87	1190.1	-0.43	0.057	$1.9 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-3}$	1.011	1.009	129 × 512
205	$5 \times 10^8$	12.96	1504.7	-0.39	0.059	$1.4 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-3}$	1.004	1.009	161 × 512
206	$6 \times 10^8$	16.10	1794.0	-0.36	0.060	$1.2 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-3}$	1.015	1.009	201 × 682*
207	$8 \times 10^8$	20.99	2209.9	-0.34	0.063	$9.5 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$	1.004	1.013	201 × 682***
208	$1 \times 10^9$	25.17	2622.5	-0.32	0.064	$8.5 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$	1.008	1.018	201 × 768***
209	$1.5 \times 10^9$	34.27	3520.6	-0.29	0.061	$6.9 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$	0.994	0.982	401 × 1024***
$E = 10^{-6}$										
210	$4 \times 10^8$	1.50	232.8	-0.84	0.030	—	—	1.003	1.001	181 × 512
211	$5 \times 10^8$	1.79	308.8	-0.78	0.029	—	—	1.000	0.998	181 × 576
212	$6.5 \times 10^8$	2.49	471.3	-0.71	0.032	—	—	1.000	1.000	161 × 576**
213	$8 \times 10^8$	3.41	678.0	-0.65	0.035	$5.0 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-3}$	1.001	0.998	181 × 640
214	$1 \times 10^9$	4.77	952.5	-0.59	0.039	$3.6 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-3}$	0.985	0.986	193 × 682**
215	$1.2 \times 10^9$	6.19	1208.0	-0.53	0.043	$2.9 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	1.012	1.022	193 × 853**
216	$1.5 \times 10^9$	8.58	1598.0	-0.48	0.046	$2.1 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-3}$	1.010	1.010	201 × 853
217	$2 \times 10^9$	12.30	2156.9	-0.43	0.050	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-3}$	1.003	1.009	241 × 853**
218	$2.5 \times 10^9$	16.17	2715.3	-0.39	0.053	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-3}$	1.002	1.009	321 × 1024**
219	$3.2 \times 10^9$	20.76	3341.7	-0.36	0.054	$8.8 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	1.005	1.016	321 × 1024*
220	$4 \times 10^9$	25.65	4075.4	-0.36	0.056	$7.4 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	1.003	1.008	401 × 1024**
$E = 3 \times 10^{-7}$										
221	$3.23 \times 10^9$	2.42	744.0	-0.72	0.023	—	—	1.006	1.008	241 × 896
222	$4 \times 10^9$	3.36	1075.2	-0.67	0.026	$5.3 \times 10^{-2}$	$9.1 \times 10^{-4}$	0.996	0.995	241 × 896***
223	$5.5 \times 10^9$	5.47	1605.4	-0.59	0.034	$3.3 \times 10^{-2}$	$8.3 \times 10^{-4}$	1.018	1.010	241 × 896***
224	$7 \times 10^9$	7.85	2254.7	-0.52	0.038	$2.3 \times 10^{-2}$	$7.5 \times 10^{-4}$	1.012	1.019	301 × 1024*
225	$9 \times 10^9$	10.96	3047.8	-0.47	0.043	$1.6 \times 10^{-2}$	$7.2 \times 10^{-4}$	1.009	1.024	401 × 1280**
226	$1.3 \times 10^{10}$	17.02	4317.7	-0.42	0.047	$1.0 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-4}$	1.000	1.014	513 × 1280**
227	$1.8 \times 10^{10}$	24.78	5933.6	-0.40	0.050	$7.2 \times 10^{-3}$	$6.9 \times 10^{-4}$	1.006	1.028	641 × 1365***

TABLE 2. (cntd). Summary table of the quantities of interest for the numerical models computed in this study. These simulations all have  $Pr = 1$  and  $r_i/r_o = 0.6$ . The thermal and viscous boundary layer thicknesses are only given for the cases where boundary layers can be clearly identified. The stars in some selected cases of the last column indicate that those simulations have been computed with an azimuthal symmetry: one star corresponds to a twofold symmetry, two stars to a fourfold symmetry and three stars to an eightfold symmetry.

## Appendix B. Critical Rayleigh numbers

---

$E$	$Ra_c$	$m_c$
$10^{-1}$	$1.130 \times 10^3$	5
$3 \times 10^{-2}$	$1.324 \times 10^3$	6
$10^{-2}$	$2.298 \times 10^3$	7
$3 \times 10^{-3}$	$5.711 \times 10^3$	8
$10^{-3}$	$1.581 \times 10^4$	10
$3 \times 10^{-4}$	$5.482 \times 10^4$	14
$10^{-4}$	$1.838 \times 10^5$	20
$3 \times 10^{-5}$	$7.348 \times 10^5$	30
$10^{-5}$	$2.714 \times 10^6$	43
$3 \times 10^{-6}$	$1.178 \times 10^7$	64
$10^{-6}$	$4.616 \times 10^7$	92
$3 \times 10^{-7}$	$2.108 \times 10^8$	137
$10^{-7}$	$8.560 \times 10^8$	198

---

TABLE 3. Critical Rayleigh numbers  $Ra_c$  and critical azimuthal wavenumbers  $m_c$  for the different Ekman numbers employed here. The exact values have been obtained using the open-source eigenmode solver SINGE (Vidal & Schaeffer 2015) (available at <https://bitbucket.org/nschaeff/singe>).

---

## REFERENCES

- AHLERS, G., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2009 Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh–Bénard convection. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 503–537.
- AMATI, G., KOAL, K., MASSAIOLI, F., SREENIVASAN, K. R. & VERZICCO, R. 2005 Turbulent thermal convection at high Rayleigh numbers for a Boussinesq fluid of constant Prandtl number. *Phys. Fluids* **17** (12), 121701.
- AUBERT, J., BRITO, D., NATAF, H.-C., CARDIN, P. & MASSON, J.-P. 2001 A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 51–74.
- AUBERT, J., GILLET, N. & CARDIN, P. 2003 Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **4** (7), 1052.
- AURNOU, J. M. 2007 Planetary core dynamics and convective heat transfer scaling. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101**, 327–345.
- AURNOU, J. M., CALKINS, M. A., CHENG, J. S., JULIEN, K., KING, E. M., NIEVES, D., SODERLUND, K. M. & STELLMACH, S. 2015 Rotating convective turbulence in Earth and planetary cores. *Phys. Earth Planet. Inter.* **246**, 52–71.
- BARKER, A. J., DEMPSEY, A. M. & LITHWICK, Y. 2014 Theory and simulations of rotating convection. *Astrophys. J.* **791**, 13.
- BERCOVICI, D., SCHUBERT, G., GLATZMAIER, G. A. & ZEBIB, A. 1989 Three-dimensional thermal convection in a spherical shell. *J. Fluid Mech.* **206**, 75–104.
- BLASIUS, H. 1908 Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.* **56**, 1–37.
- BOUBNOV, B. M. & GOLITSYN, G. S. 1990 Temperature and velocity field regimes of convective motions in a rotating plane fluid layer. *J. Fluid Mech.* **219**, 215–239.
- BREUER, M., WESSLING, S., SCHMALZL, J. & HANSEN, U. 2004 Effect of inertia in Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. E* **69** (2), 026302.
- BUSSE, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441–460.



- BUSSE, F. H. & CARRIGAN, C. R. 1974 Convection induced by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **62**, 579–592.
- BUSSE, F. H. & OR, A. C. 1986 Convection in a rotating cylindrical annulus – thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.* **166**, 173–187.
- CARDIN, P. & OLSON, P. 1994 Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell: consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.* **82**, 235–259.
- CARDIN, P. & OLSON, P. 2015 8.13 experiments on core dynamics. In *Treatise on Geophysics*, 2nd edn. (ed. G. Schubert), pp. 317–339. Elsevier.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydrodynamic Stability*. Oxford University Press.
- CHENG, J. S., STELLMACH, S., RIBEIRO, A., GRANNAN, A., KING, E. M. & AURNOU, J. M. 2015 Laboratory-numerical models of rapidly rotating convection in planetary cores. *Geophys. J. Intl* **201**, 1–17.
- CHILLÀ, F. & SCHUMACHER, J. 2012 New perspectives in turbulent Rayleigh–Bénard convection. *Eur. Phys. J. E* **35** (7), 58.
- CHRISTENSEN, U. R. 2002 Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **470**, 115–133.
- CHRISTENSEN, U. R. & AUBERT, J. 2006 Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Intl* **166**, 97–114.
- CHRISTENSEN, U. R., AUBERT, J., CARDIN, P., DORMY, E., GIBBONS, S., GLATZMAIER, G. A., GROTE, E., HONKURA, Y., JONES, C., KONO, M. *et al.* 2001 A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 25–34.
- CHRISTENSEN, U. R. & WICHT, J. 2015 8.10 – numerical dynamo simulations. In *Treatise on Geophysics*, 2nd edn. (ed. G. Schubert), pp. 245–277. Elsevier.
- CORDERO, S. & BUSSE, F. H. 1992 Experiments on convection in rotating hemispherical shells – transition to a quasi-periodic state. *Geophys. Res. Lett.* **19**, 733–736.
- DAVIDSON, P. A. 2013 Scaling laws for planetary dynamos. *Geophys. J. Intl* **195**, 67–74.
- DAVIDSON, P. A. 2015 *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press.
- DORMY, E., SOWARD, A. M., JONES, C. A., JAULT, D. & CARDIN, P. 2004 The onset of thermal convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* **501**, 43–70.
- ECKE, R. E. & NIEMELA, J. J. 2014 Heat transport in the geostrophic regime of rotating Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **113** (11), 114301.
- EGBERS, C., BEYER, W., BONHAGE, A., HOLLERBACH, R. & BELTRAME, P. 2003 The geoflow-experiment on ISS. Part I: experimental preparation and design of laboratory testing hardware. *Adv. Space Res.* **32**, 171–180.
- FUNFSCHILLING, D., BROWN, E., NIKOLAENKO, A. & AHLERS, G. 2005 Heat transport by turbulent Rayleigh Bénard convection in cylindrical samples with aspect ratio one and larger. *J. Fluid Mech.* **536**, 145–154.
- GARCIA, F., SÁNCHEZ, J. & NET, M. 2014 Numerical simulations of thermal convection in rotating spherical shells under laboratory conditions. *Phys. Earth Planet. Inter.* **230**, 28–44.
- GASTINE, T. & WICHT, J. 2012 Effects of compressibility on driving zonal flow in gas giants. *Icarus* **219**, 428–442.
- GASTINE, T., WICHT, J. & AURNOU, J. M. 2015 Turbulent Rayleigh–Bénard convection in spherical shells. *J. Fluid Mech.* **778**, 721–764.
- GASTINE, T., WICHT, J., BARIK, A., PUTIGNY, B. & DUARTE, L. D. V. 2016 MagIC v5.4, doi:10.5281/zenodo.51723.
- GILLET, N. & JONES, C. A. 2006 The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder. *J. Fluid Mech.* **554**, 343–369.
- GILMAN, P. A. 1977 Nonlinear dynamics of boussinesq convection in a deep rotating spherical shell. I. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **8**, 93–135.
- GILMAN, P. A. & GLATZMAIER, G. A. 1981 Compressible convection in a rotating spherical shell. I. Anelastic equations. *Astrophys. J. Suppl.* **45**, 335–349.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.

- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2000 Scaling in thermal convection: a unifying theory. *J. Fluid Mech.* **407**, 27–56.
- GUERVILLY, C. 2010 *Dynamos numériques planétaires générées par cisaillement en surface ou chauffage interne*. PhD thesis, Sciences de la Terre, Univers et Environnement, Université de Grenoble, France.
- GUERVILLY, C. & CARDIN, P. 2016 Subcritical convection in a rapidly rotating sphere at low Prandtl number. *J. Fluid Mech.* (submitted).
- HART, J. E., GLATZMAIER, G. A. & TOOMRE, J. 1986 Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotating hemispherical shell with radial gravity. *J. Fluid Mech.* **173**, 519–544.
- HORN, S. & SHISHKINA, O. 2015 Toroidal and poloidal energy in rotating Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **762**, 232–255.
- INGERSOLL, A. P. & POLLARD, D. 1982 Motion in the interiors and atmospheres of Jupiter and Saturn: scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion. *Icarus* **52**, 62–80.
- JARVIS, G. T. 1993 Effects of curvature on two-dimensional models of mantle convection: cylindrical polar coordinates. *J. Geophys. Res.* **98**, 4477–4485.
- JONES, C. A. 2015 Thermal and compositional convection in the outer core. In *Treatise on Geophysics*, 2nd edn. (ed. G. Schubert), pp. 115–159. Elsevier.
- JONES, C. A., BORONSKI, P., BRUN, A. S., GLATZMAIER, G. A., GASTINE, T., MIESCH, M. S. & WICHT, J. 2011 Anelastic convection-driven dynamo benchmarks. *Icarus* **216**, 120–135.
- JULIEN, K., AURNOU, J. M., CALKINS, M. A., KNOBLOCH, E., MARTI, P., STELLMACH, S. & VASIL, G. M. 2016 A nonlinear model for rotationally constrained convection with Ekman pumping. *J. Fluid Mech.* **798**, 50–87.
- JULIEN, K., KNOBLOCH, E., RUBIO, A. M. & VASIL, G. M. 2012a Heat transport in Low-Rossby-number Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **109** (25), 254503.
- JULIEN, K., LEGG, S., MCWILLIAMS, J. & WERNE, J. 1996 Rapidly rotating turbulent Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **322**, 243–273.
- JULIEN, K., RUBIO, A. M., GROOMS, I. & KNOBLOCH, E. 2012b Statistical and physical balances in low Rossby number Rayleigh–Bénard convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **106**, 392–428.
- KING, E. M. & AURNOU, J. M. 2013 Turbulent convection in liquid metal with and without rotation. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **110** (17), 6688–6693.
- KING, E. M. & BUFFETT, B. A. 2013 Flow speeds and length scales in geodynamo models: the role of viscosity. *Earth Planet. Sci. Lett.* **371**, 156–162.
- KING, E. M., SODERLUND, K. M., CHRISTENSEN, U. R., WICHT, J. & AURNOU, J. M. 2010 Convective heat transfer in planetary dynamo models. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **11**, 6016.
- KING, E. M., STELLMACH, S. & AURNOU, J. M. 2012 Heat transfer by rapidly rotating Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **691**, 568–582.
- KING, E. M., STELLMACH, S. & BUFFETT, B. 2013 Scaling behaviour in Rayleigh–Bénard convection with and without rotation. *J. Fluid Mech.* **717**, 449–471.
- KING, E. M., STELLMACH, S., NOIR, J., HANSEN, U. & AURNOU, J. M. 2009 Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature* **457**, 301–304.
- KRAICHNAN, R. H. 1962 Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluids* **5**, 1374–1389.
- KUNNEN, R. P. J., GEURTS, B. J. & CLERCX, H. J. H. 2010 Experimental and numerical investigation of turbulent convection in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* **642**, 445.
- KUNNEN, R. P. J., OSTILLA-MÓNICO, R., VAN DER POEL, E. P., VERZICCO, R. & LOHSE, D. 2016 Transition to geostrophic convection: the role of the boundary conditions. *J. Fluid Mech.* **799**, 413–432.
- LAKKARAJU, R., STEVENS, R. J. A. M., VERZICCO, R., GROSSMANN, S., PROSPERETTI, A., SUN, C. & LOHSE, D. 2012 Spatial distribution of heat flux and fluctuations in turbulent Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. E* **86** (5), 056315.
- LIU, Y. & ECKE, R. E. 1997 Heat transport scaling in turbulent Rayleigh–Bénard convection: effects of rotation and Prandtl number. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2257–2260.

- LIU, Y. & ECKE, R. E. 2011 Local temperature measurements in turbulent rotating Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. E* **84** (1), 016311.
- ORUBA, L. & DORMY, E. 2014 Predictive scaling laws for spherical rotating dynamos. *Geophys. J. Intl* **198**, 828–847.
- PLUMLEY, M., JULIEN, K., MARTI, P. & STELLMACH, S. 2016 The effects of Ekman pumping on quasi-geostrophic Rayleigh–Benard convection. *J. Fluid Mech.* **803**, 51–71.
- PRANDTL, L. 1905 *Verhandlungen des III. Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904*. pp. 484–491. Teubner.
- RHINES, P. B. 1975 Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.* **69**, 417–443.
- ROSSBY, H. T. 1969 A study of Benard convection with and without rotation. *J. Fluid Mech.* **36**, 309–335.
- SCHAEFFER, N. 2013 Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudospectral numerical simulations. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **14**, 751–758.
- SCHMITZ, S. & TILGNER, A. 2009 Heat transport in rotating convection without Ekman layers. *Phys. Rev. E* **80** (1), 015305.
- SHEW, W. L. & LATHROP, D. P. 2005 Liquid sodium model of geophysical core convection. *Phys. Earth Planet. Inter.* **153**, 136–149.
- SHISHKINA, O., STEVENS, R. J. A. M., GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2010 Boundary layer structure in turbulent thermal convection and its consequences for the required numerical resolution. *New J. Phys.* **12** (7), 075022.
- SODERLUND, K. M., KING, E. M. & AURNOU, J. M. 2012 The influence of magnetic fields in planetary dynamo models. *Earth Planet. Sci. Lett.* **333**, 9–20.
- STELLMACH, S., LISCHPER, M., JULIEN, K., VASIL, G., CHENG, J. S., RIBEIRO, A., KING, E. M. & AURNOU, J. M. 2014 Approaching the asymptotic regime of rapidly rotating convection: boundary layers versus interior dynamics. *Phys. Rev. Lett.* **113** (25), 254501.
- STEVENS, R. J. A. M., CLERCX, H. J. H. & LOHSE, D. 2013 Heat transport and flow structure in rotating Rayleigh–Bénard convection. *Eur. J. Mech. (B/Fluids)* **40**, 41–49.
- STEVENS, R. J. A. M., VERZICCO, R. & LOHSE, D. 2010 Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **643**, 495–507.
- STEVENSON, D. J. 1979 Turbulent thermal convection in the presence of rotation and a magnetic field – a heuristic theory. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **12**, 139–169.
- SUMITA, I. & OLSON, P. 2003 Experiments on highly supercritical thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell. *J. Fluid Mech.* **492**, 271–287.
- TILGNER, A. & BUSSE, F. H. 1997 Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **332**, 359–376.
- VERZICCO, R. & CAMUSSI, R. 1999 Prandtl number effects in convective turbulence. *J. Fluid Mech.* **383**, 55–73.
- VIDAL, J. & SCHAEFFER, N. 2015 Quasi-geostrophic modes in the Earth’s fluid core with an outer stably stratified layer. *Geophys. J. Intl* **202** (3), 2182–2193.
- WICHT, J. 2002 Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Phys. Earth Planet. Inter.* **132**, 281–302.
- YADAV, R. K., GASTINE, T., CHRISTENSEN, U. R., DUARTE, L. D. V. & REINERS, A. 2016 Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells. *Geophys. J. Intl* **204**, 1120–1133.
- ZHONG, J.-Q. & AHLERS, G. 2010 Heat transport and the large-scale circulation in rotating turbulent Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **665**, 300–333.
- ZHONG, J.-Q., STEVENS, R. J. A. M., CLERCX, H. J. H., VERZICCO, R., LOHSE, D. & AHLERS, G. 2009 Prandtl-, Rayleigh-, and Rossby-number dependence of heat transport in turbulent rotating Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **102** (4), 044502.

# Force balance in numerical geodynamo simulations: a systematic study

T. Schwaiger<sup>1b</sup>, T. Gastine and J. Aubert<sup>1b</sup>

*Institut de Physique du Globe de Paris, Sorbonne Paris Cité, Université Paris-Diderot, CNRS, 1 rue Jussieu, F-75005 Paris, France. E-mail: schwaiger@ipgp.fr*

Accepted 2019 April 25. Received 2019 February 5; in original form 2019 April 19

## SUMMARY

Dynamo action in the Earth's outer core is expected to be controlled by a balance between pressure, Coriolis, buoyancy and Lorentz forces, with marginal contributions from inertia and viscous forces. Current numerical simulations of the geodynamo, however, operate at much larger inertia and viscosity because of computational limitations. This casts some doubt on the physical relevance of these models.

Our work aims at finding dynamo models in a moderate computational regime which reproduce the leading-order force balance of the Earth. By performing a systematic parameter space survey with Ekman numbers in the range  $10^{-6} \leq E \leq 10^{-4}$ , we study the variations of the force balance when changing the forcing (Rayleigh number,  $Ra$ ) and the ratio between viscous and magnetic diffusivities (magnetic Prandtl number,  $Pm$ ). For dipole-dominated dynamos, we observe that the force balance is structurally robust throughout the investigated parameter space, exhibiting a quasi-geostrophic (QG) balance (balance between Coriolis and pressure forces) at zeroth order, followed by a first-order Magneto-Archimedean-Coriolis (MAC) balance between the ageostrophic Coriolis, buoyancy and Lorentz forces. At second order, this balance is disturbed by contributions from inertia and viscous forces. Dynamos with a different sequence of the forces, where inertia and/or viscosity replace the Lorentz force in the first-order force balance, can only be found close to the onset of dynamo action and in the multipolar regime. To assess the agreement of the model force balance with that expected in the Earth's core, we introduce a parameter quantifying the distance between the first- and second-order forces. Analysis of this parameter shows that the strongest-field dynamos can be obtained close to the onset of convection ( $Ra$  close to critical) and in situations of reduced magnetic diffusivity (high  $Pm$ ). Decreasing the Ekman number gradually expands this regime towards higher supercriticalities and lower values of  $Pm$ .

Our study illustrates that most classical numerical dynamos are controlled by a QG-MAC balance, while cases where viscosity and inertia play a dominant role are the exception rather than the norm.

**Key words:** Core; Dynamo: theories and simulations; Numerical modelling.

## 1 INTRODUCTION

The Earth's magnetic field is believed to be generated by dynamo action in the liquid outer core. The flow dynamics driving this process are expected to be controlled by a balance between pressure, Coriolis, buoyancy and Lorentz forces, with marginal contributions from inertia and viscous forces (e.g. Roberts & King 2013). However, the exact structure of the leading-order force balance is still debated (e.g. Dormy 2016; Aubert *et al.* 2017; Aurnou & King 2017).

Historically, theoretical considerations largely based on asymptotic studies of magneto-convection resulted in the distinction between weak- and strong-field regimes of dynamo action (e.g. Hollerbach 1996). In a system dominated by rapid rotation, as is the case for the Earth's core, fluid motions tend to be invariant in the direction of the rotation axis, and fulfil the so-called Proudman–Taylor constraint. In the weak-field regime, this rotational constraint is broken by the viscous force or inertia, while the Lorentz force is substantially weaker, leading to small-scale convection. Increasing the vigour of convection increases the magnetic field strength

and as a result, the Lorentz force could eventually break the rotational constraint, leading to larger convective scales. This induces a catastrophic runaway growth of the magnetic field until convection occurs on the scale of the system size. At this point the magnetic field equilibrates at the Elsasser number  $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$ , where  $\Lambda$  measures the relative amplitudes of the Lorentz and Coriolis forces:

$$\Lambda = \frac{|F_{\text{Lorentz}}|}{|F_{\text{Coriolis}}|} = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{|2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}|} \sim \frac{JB}{\rho\Omega U}, \quad (1)$$

with  $J$  representing the current density,  $B$  the magnetic field strength,  $\rho$  the fluid density,  $\Omega$  the rotation rate and  $U$  the flow velocity. The resulting regime is referred to as strong-field regime due to the Lorentz force now being much stronger than the viscous forces and inertia. Since a magnetic field with  $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$  facilitates convection (Malkus 1959), it has been suggested that the core flow dynamics are in a magnetostrophic (MS) state, where pressure, Coriolis and Lorentz forces balance each other at zeroth order (Wu & Roberts 2013). To assess based on geomagnetic observations whether the geodynamo operates in a magnetostrophic regime, the Elsasser number has traditionally been estimated using the following definition:

$$\Lambda_t = \frac{B^2}{\rho\mu\eta\Omega}, \quad (2)$$

where  $\mu$  represents the magnetic permeability and  $\eta$  the magnetic diffusivity. Inserting characteristic values of the Earth (e.g. Christensen & Aubert 2006) yields  $\Lambda_t \sim \mathcal{O}(1)$ , which has often been used to argue for Lorentz and Coriolis forces being of the same order of magnitude in the outer core. The definition of  $\Lambda_t$ , however, does not include length and velocity scales and therefore may provide an inaccurate measure of the relative amplitudes of the forces (Soderlund *et al.* 2012, 2015; Calkins 2018). A more rigorous estimate of this force ratio can be obtained using a dynamic Elsasser number, defined as (Soderlund *et al.* 2012)

$$\Lambda_d = \frac{B^2}{\rho\mu\Omega UD}, \quad (3)$$

where  $D$  represents the thickness of the outer core. Employing characteristic values to this definition yields  $\Lambda_d \sim \mathcal{O}(10^{-2})$  for the Earth, indicating that the Lorentz force is two orders of magnitude smaller than the Coriolis force. This suggests that core flow dynamics could be controlled by a geostrophic balance between pressure and the Coriolis force at leading order, which would result in quasi-geostrophic (QG) instead of magnetostrophic convection dynamics (Soderlund *et al.* 2012; Calkins 2018). This is in agreement with recent studies of the core flow based on the inversion of geomagnetic secular variation data, which suggest that on global scales QG flows appear to describe the observations best (e.g. Gillet *et al.* 2012). Theoretical grounding for how such large-scale quasi-geostrophy could be possible has recently been provided by Aurnou & King (2017), who suggested based on scaling analysis of the Elsasser number that magnetostrophic flow dynamics may be deferred to smaller scales, inaccessible to geomagnetic observations. Aurnou & King (2017) therefore argue for a length-scale-dependent combination of zeroth-order quasi-geostrophy and magnetostrophy.

In addition to observations and theoretical considerations, global numerical dynamo simulations represent an important tool for our understanding of the dynamo mechanism. Although computational resources have increased significantly since the first successful dynamo simulations computed more than 20 yr ago (Glatzmaier &

Roberts 1995), current numerical models still operate at parameters far from the expected conditions of the Earth's core. Despite this limitation, numerical dynamos have proven to be very successful in reproducing numerous features of the geomagnetic field (e.g. Christensen *et al.* 2010). However, it remains uncertain whether these results are obtained for the right physical reasons. As a consequence many studies have been performed, trying to answer this question. Soderlund *et al.* (2012) found that convection in many dynamo simulations does not occur on the system scale, but rather on a scale similar to that of rotating convection. As a result, they argued for a subdominant role of the magnetic field in those numerical models, which was attributed to a sizeable contribution of viscosity (e.g. King & Buffett 2013; Oruba & Dormy 2014). Some authors even suggested that the majority of dynamos found to date belong to the viscous weak-field regime (e.g. Dormy 2016; Dormy *et al.* 2018). However, the discrepancy between dynamo solutions and non-magnetic convection was shown to become more obvious when the viscosity in the models is lowered (e.g. Sakuraba & Roberts 2009; Yadav *et al.* 2016). By explicitly computing the magnitude of all forces (e.g. Wicht & Christensen 2010; Soderlund *et al.* 2012, 2015) and their level of cancellation (e.g. Yadav *et al.* 2016), numerical dynamos were found to be quasi-geostrophic at zeroth order, with buoyancy and Lorentz forces balancing the ageostrophic Coriolis force, that is, the part of the Coriolis force which is not balanced by pressure. More recently, Aubert *et al.* (2017) introduced a length-scale-dependent approach for a more refined analysis of the force balance. High-resolution dynamos (e.g. Yadav *et al.* 2016; Schaeffer *et al.* 2017; Sheyko *et al.* 2018) at advanced parameter regimes support this QG-MAC (Quasi-Geostrophic Magneto-Archimedean-Coriolis) balance, which suggests that it could go all the way to the core (Aubert *et al.* 2017).

While the majority of dynamo models to date therefore seem to support a QG-MAC balance, some studies also report dynamos that could be controlled by a magnetostrophic balance at zeroth order (e.g. Dormy 2016; Dormy *et al.* 2018). Dormy (2016) and Dormy *et al.* (2018) were further able to observe close to the onset of dynamo action a catastrophic runaway growth of the magnetic field from viscously dominated weak-field dynamos to strong-field dynamos in their models, similar to that predicted by asymptotic studies of rotating magneto-convection. These conflicting interpretations illustrate that not only the presumed force balance in the Earth's core but also the force balance obtained in current numerical models are still highly debated topics.

By performing a systematic survey of the numerically accessible parameter space, we attempt to enable a better understanding of force balances. To this end, we will make use of the scale-dependent force balance representations introduced in Aubert *et al.* (2017). Additionally, we will introduce new tools to directly relate the physical scale at which the dynamo is organized locally to the governing force balance. Throughout this work, we adopt the following naming conventions. Some authors use the term 'magnetostrophic' (strictly) to describe a zeroth-order MS balance (e.g. Roberts 1978; Dormy 2016; Dormy *et al.* 2018). Other authors consider 'magnetostrophic' as the QG-MAC balance (e.g. Yadav *et al.* 2016; Aubert *et al.* 2017). Here, 'magnetostrophic' will only refer to the zeroth-order MS balance to avoid possible confusion between the two types of force balances. Likewise, some authors refer to dynamos as being in the strong-field regime only in the presence of a  $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$  magnetic field, that is, dynamos controlled by a zeroth-order MS balance (e.g. Roberts 1978; Dormy 2016; Dormy *et al.* 2018). Many other authors consider strong field simply as the magnetic energy being much larger than the kinetic energy (e.g. Schaeffer *et al.*

2017; Aubert *et al.* 2017). This is the definition that we will retain here.

Section 2 presents the numerical models and methods. The results are presented in Section 3, followed by a discussion in Section 4.

## 2 NUMERICAL MODEL

We consider a spherical shell of thickness  $D = r_o - r_i$  and radius ratio  $r_i/r_o = 0.35$ , where  $r_i$  and  $r_o$  are the inner and outer radii. The shell rotates with angular frequency  $\Omega$  about the axis  $\mathbf{e}_z$ . The inclosed fluid of density  $\rho$  and (kinematic) viscosity  $\nu$  is electrically conducting and incompressible. Convection is driven by a fixed superadiabatic temperature difference  $\Delta T$  between the inner and the outer boundary. Gravity  $\mathbf{g}$  increases linearly with radius.

We solve the geodynamo equations in non-dimensional form using the Boussinesq approximation to obtain the velocity field  $\mathbf{u}$ , magnetic induction  $\mathbf{B}$  and temperature perturbation  $T$ . We adopt  $D$  as reference length scale, the viscous diffusion time  $D^2/\nu$  serves as time unit, temperature is scaled by  $\Delta T$  and magnetic induction by  $\sqrt{\rho\mu\eta\Omega}$ , where  $\mu$  is the magnetic permeability and  $\eta$  the magnetic diffusivity of the fluid. This results in the following set of equations:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{2}{E} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{Ra}{Pr} \frac{\mathbf{r}}{r_o} T + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{EPm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8)$$

where  $P$  is the pressure. The non-dimensional control parameters of the system are the Ekman number

$$E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad (9)$$

the hydrodynamic Prandtl number

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (10)$$

the magnetic Prandtl number

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} \quad (11)$$

and the Rayleigh number

$$Ra = \frac{\alpha g_o D^3 \Delta T}{\nu \kappa}, \quad (12)$$

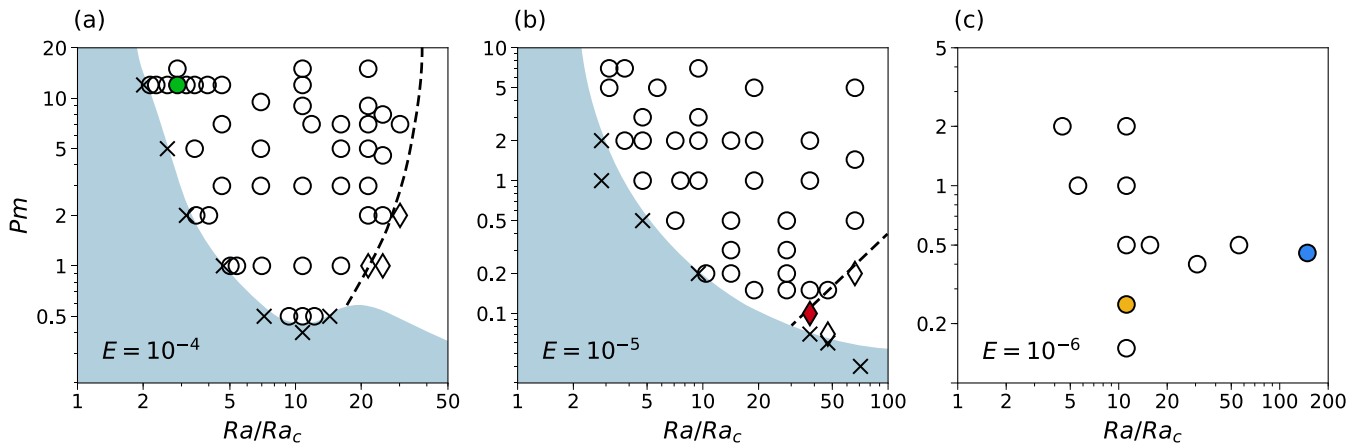
where  $\kappa$  is the thermal diffusivity,  $\alpha$  the thermal expansion coefficient and  $g_o$  the gravity at the outer boundary.

Both boundaries are assumed to be electrically insulating with vanishing velocity field (no-slip) and fixed temperature. All models are simulated with the open-source numerical code MagIC (Wicht 2002; Gastine *et al.* 2016, <https://github.com/magic-sph/magic>), which uses Chebychev polynomials in the radial direction and spherical harmonic decomposition in the angular directions. MagIC relies

on the library SHTns (Schaeffer 2013, <https://bitbucket.org/nschaeff/shtns>) for efficient calculation of the spherical harmonic transforms. Diffusion terms are integrated implicitly in time using a Crank-Nicolson scheme, while a second-order Adams-Bashforth scheme is employed for the explicit treatment of the remaining terms. For the explicit time stepping, numerical stability requires the maximum allowable time step to satisfy a Courant criterion, which is constrained by the spacing of the radial grid points (Christensen *et al.* 1999). To alleviate the time step restrictions due to the Alfvén waves propagating close to the boundaries, we adopt a mapping of the Gauss-Lobatto collocation grid points (Kosloff & Tal-Ezer 1993). This leads to an increase of the maximum allowable time step by up to a factor two and therefore results in a significant reduction of the computational costs (e.g. Boyd 2001, section 16.9).

To systematically study the force balance that drives the convection in geodynamo models, we perform a series of 95 numerical simulations spanning the parameter range  $10^{-6} \leq E \leq 10^{-4}$ ,  $0.07 \leq Pm \leq 15$  and  $1.5 \times 10^6 \leq Ra \leq 2.66 \times 10^{10}$  with  $Pr = 1$ . The control parameters and relevant output parameters of the analysed models are given in Table A1. Fig. 1 shows the regime diagrams for the three different Ekman numbers considered here following Christensen & Aubert (2006). The shaded regions represent areas of the parameter space where no self-sustained dynamos could be found. Depending on the geometry of the generated magnetic field we distinguish between dipolar and multipolar dynamos. The transition between these two regimes appears to shift towards higher supercriticalities ( $Ra/Ra_c$ ) as the Ekman number decreases, while the onset of dynamo action seems to remain approximately at constant  $Ra/Ra_c$ . Decreasing the Ekman number also extends the region of dynamo action (region of self-sustained dynamos) towards lower  $Pm$  (Christensen *et al.* 1999; Christensen & Aubert 2006). None of the investigated dynamo models in the dipolar regime exhibited reversals of the magnetic field polarity. However, for our models with strong magnetic turbulence we expect that reversals could occur, provided the simulations would cover long enough timescales (e.g. Heimpel & Evans 2013). For the explored control parameters, verifying this would be extremely demanding in terms of computational resources. Therefore, this is currently not feasible within the scope of a systematic parameter space survey. To reduce the duration of transients after the start of the simulations, the dynamo models were initiated with an equilibrated solution with similar input parameters whenever possible. Note that close to the transition of the dipolar to the multipolar regime, bistable dynamos can be found (Petitdémange 2018). This can be attributed to the strength of the seed magnetic field. Similarly, some models close to the onset of dynamo action do require a strong magnetic field at the outset for convection to be able to sustain it. Such bistabilities that depend on the initial conditions have been studied in detail by Petitdémange (2018) for the same physical setup. In our study, however, we only consider the dipole-dominated dynamos in all of these cases. To obtain an extensive picture of the evolution of the force balance when changing the control parameters, we reproduced several recently published dynamo models (Yadav *et al.* 2016; Aubert *et al.* 2017; Dormy *et al.* 2018), as well as models covering the parameter space that has been classically explored (e.g. Kutzner & Christensen 2002; Christensen & Aubert 2006).

For our following analysis we will mainly focus on four cases which we consider to be representative for the investigated parameter space. Table 1 summarizes the control parameters of these models, along with the coloured symbols used to locate them in the regime diagrams presented in Fig. 1.



**Figure 1.** Regime diagrams for  $E = 10^{-4}$ ,  $E = 10^{-5}$  and  $E = 10^{-6}$ . Shaded regions represent areas of the parameter space where no self-sustained dynamos exist (computationally too expensive to determine for  $E = 10^{-6}$ ). All dynamo models have been computed with  $Pr = 1$ . Circles represent dipolar, diamonds represent multipolar and crosses represent failed dynamos. The dashed lines tentatively delineate the transition between dipolar and multipolar dynamos. The control parameters of the dynamo models highlighted by coloured symbols are given in Table 1.

**Table 1.** Control parameters of four representative dynamo models with coloured symbols to locate them in the regime diagrams (Fig. 1).

Model	$E$	$Ra$	$Ra/Ra_c$	$Pm$
● A	$10^{-6}$	$2.66 \times 10^{10}$	148.5	0.456
● B	$10^{-4}$	$2.2 \times 10^6$	3.2	12
● C	$10^{-6}$	$2 \times 10^9$	11.2	0.25
◆ D	$10^{-5}$	$4 \times 10^8$	37.8	0.1

### 3 RESULTS

#### 3.1 Force balance spectra

For our systematic study of the force balance, we follow the method introduced by Aubert *et al.* (2017) and decompose each force into spherical harmonic contributions:

$$F_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{V} \int_{r_1+b}^{r_o-b} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=0}^{\ell} F_{\ell m}^2 r^2 dr = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} F_{\ell}^2, \quad (13)$$

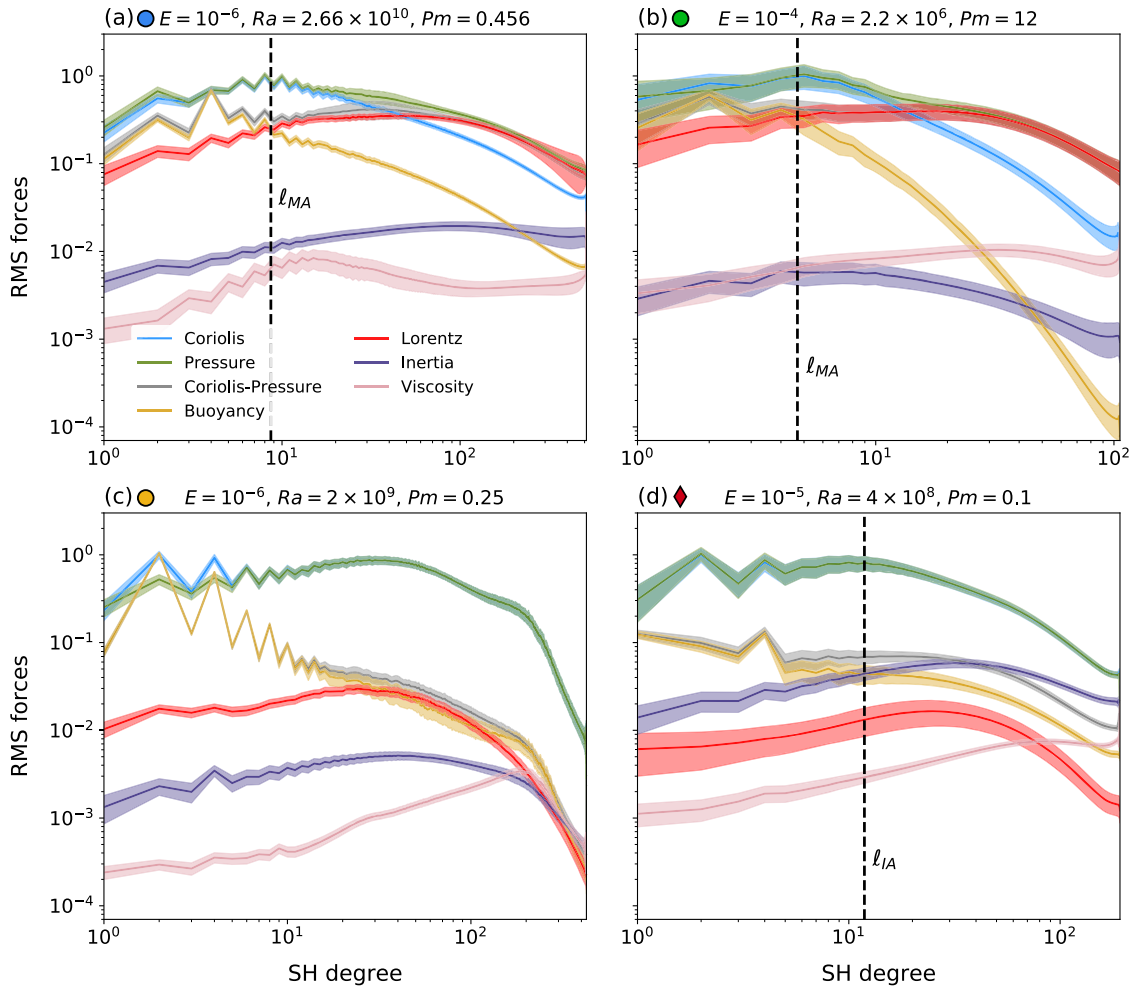
where  $b$  represents the thickness of the viscous boundary layers. Viscous boundary layers are excluded from the calculations since we are primarily interested in the force balance in the bulk of the fluid. The resulting force balance spectra of the four cases given in Table 1 are illustrated in Fig. 2. Most force balance spectra of the dynamo models in the dipolar regime are structurally very similar. Model A (see Fig. 2a), which is among the ‘path’-dynamos analysed by Aubert *et al.* (2017), can be considered as a typical example. At zeroth order, it is characterized by a quasi-geostrophic balance between pressure and the Coriolis force. The ageostrophic part of the Coriolis force is then balanced by buoyancy at small spherical harmonic degrees and by the Lorentz force at large  $\ell$ . This QG-MAC balance has been identified in several recent studies (e.g. Yadav *et al.* 2016; Schaeffer *et al.* 2017; Aubert *et al.* 2017). This balance is, however, quite significantly disturbed by inertia and viscous forces since they are only one to two orders of magnitude smaller than the leading-order forces.

Dormy (2016) recently suggested that dynamos governed by a magnetostrophic balance at zeroth order can be attained even in a computationally moderate regime by adopting a setup close to the onset of convection to minimize inertial effects and with large  $Pm$  to maintain a strong influence of the Lorentz force.

Our study confirms that in these dynamos the Lorentz force is of approximately the same magnitude as the total Coriolis force. Therefore, these models do indeed approach magnetostrophy when considering volume-integrated forces. However, the length-scale-dependent analysis of model B (which corresponds to one of the configurations considered by Dormy *et al.* 2018) using the force balance spectra (see Fig. 2b) reveals the same basic structure as for the QG-MAC cases, that is, like for model A we observe a geostrophic balance at zeroth order, followed by a first-order balance between the ageostrophic Coriolis, buoyancy and Lorentz forces. This indicates that these models do not represent a force balance regime that is different from the one of most dipole-dominated dynamos. Yet, due to the role of inertia getting minimized, the separation between the Lorentz force and second-order forces increases compared to QG-MAC cases at larger supercriticalities. Therefore, one may refer to such dynamo models as strong-field cases.

The only occurrences of dipole-dominated dynamos that cannot be attributed to the QG-MAC regime can be found in regions of the parameter space close to the onset of dynamo action. Model C (see Fig. 2c) can be considered as an example for such dynamos at low  $Pm$ , which are characterized by a significantly weaker Lorentz force compared to typical QG-MAC cases. While the Lorentz force is still larger than inertia and viscous forces at large scales, it becomes very weak towards smaller scales and as a result does not balance the ageostrophic Coriolis force at any point.

By increasing the vigour of convection one eventually reaches the transition from the dipolar to the multipolar regime (e.g. Kutzner & Christensen 2002; Christensen & Aubert 2006). Model D (see Fig. 2d) is an example of a multipolar dynamo close to this transition. Its force balance spectrum features a significantly weaker Lorentz force than the QG-MAC cases. This decrease of the Lorentz force might be related to the increasing role of inertia (Christensen & Aubert 2006) or the breaking of the equatorial symmetry of the flow (Garcia *et al.* 2017). For multipolar cases inertia becomes a first-order contribution to the force balance, such that they are controlled by a first-order CIA (Coriolis-Inertia-Archimedean) balance (Gillet & Jones 2006). At zeroth order these dynamos exhibit a quasi-geostrophic balance again. Therefore, analogously to QG-MAC, we refer to this type of force balance as QG-CIA balance.



**Figure 2.** Force balance spectra for examples of different types of force balances excluding the viscous boundary layers. The spherical harmonic contributions of the r.m.s. forces are normalized with respect to the peak of the Coriolis force. The solid lines represent the time averages of the forces. The corresponding shaded regions represent one standard deviation. (a and b) Examples of QG-MAC balances of dipole-dominated dynamos at  $E = 10^{-6}$  and  $E = 10^{-4}$ . (c) Example of a special case with control parameters close to the onset of dynamo action at  $E = 10^{-6}$ . (d) Example of QG-CIA balance of a multipolar dynamo at  $E = 10^{-5}$ . The four coloured symbols refer to the locations of the dynamos in the parameter space (see Fig. 1). The vertical dashed lines correspond to the cross-over length scales defined in Section 3.1.2.

### 3.1.1 ‘Strong-fieldness’

To evaluate, based on the force balance spectra, which of the dynamos can be attributed to the strong-field regime, we introduce the ‘strong-fieldness’  $\delta$ . This parameter quantifies the separation between the Lorentz force and the second-order forces (inertia and viscous forces) and is defined as

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{\ell=1}^{\ell_{\max}} F_{\text{Lorentz},\ell}^2}{\sum_{\ell=1}^{\ell_{\max}} \max(F_{\text{inertia},\ell}^2, F_{\text{viscous},\ell}^2)}}. \quad (14)$$

Figs 3(a) and (b) show extrapolated contour levels of  $\delta$  for the investigated parameter space at  $E = 10^{-4}$  and  $E = 10^{-5}$ . For  $E = 10^{-6}$ , the limited number of simulations does not allow a meaningful linear interpolation required to draw the contour lines. As a consequence, only the data points are displayed as a scatterplot in Fig. 3(c). We observe that  $\delta$  reaches its maximum for dynamos at low  $Ra/Ra_c$  and high  $Pm$  for all three Ekman numbers. This confirms the results by Dormy (2016) and Dormy *et al.* (2018) who suggested that strong-field dynamos can be attained for this parameter range. The smallest values of  $\delta$  are found close to the onset of dynamo action and in the

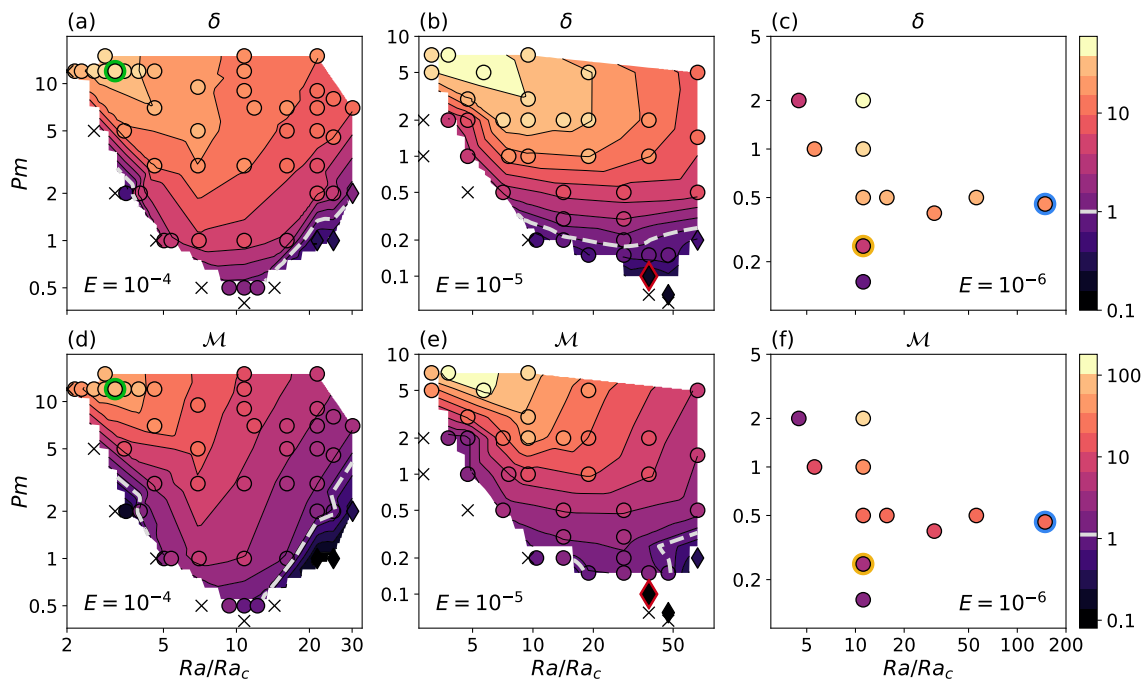
multipolar regime where the Lorentz force falls below the level of inertia. Decreasing the Ekman number from  $E = 10^{-4}$  to  $E = 10^{-6}$  leads to an overall increase of  $\delta$ . In parallel, the parameter region of dynamos with  $\delta \gg 1$ , which corresponds to QG-MAC dynamos, gradually extends towards lower values of  $Pm$ .

The influence of viscous forces on  $\delta$  decreases strongly with decreasing Ekman number. As a consequence,  $\delta$  can be approximated by the ratio between the magnetic and kinetic energies  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M} = \frac{E_{\text{mag}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{B^2}{\rho\mu U^2}, \quad (15)$$

which represents a proxy for the relative magnitudes of the Lorentz force and inertia. The linear interpolations of  $\mathcal{M}$  for the explored parameter space are shown in Figs 3(d)–(f). Comparison of the integral diagnostic  $\mathcal{M}$  to  $\delta$  shows a broad agreement. The discrepancy in the amplitude between the two parameters can be explained by the independence of  $\mathcal{M}$  on length scales, while they are inherently included in the definition of  $\delta$  due to the explicit calculation of the forces. Additionally, viscosity still represents a sizeable contribution at large Ekman numbers.





**Figure 3.** Regime diagrams for Ekman numbers  $E = 10^{-4}$ ,  $E = 10^{-5}$  and  $E = 10^{-6}$  with linear interpolations of the ‘strong-fieldness’  $\delta$  (eq. 14, panels a–c) and the ratio of the magnetic and kinetic energies  $\mathcal{M}$  (eq. 15, panels e–f). The light grey dashed lines correspond to a value of 1. The symbols are filled with the values computed from the simulation output. The meaning of the symbols is the same as in Fig. 1. The symbols of the models given in Table 1 are highlighted by coloured edges.

### 3.1.2 Cross-over length scale

Following Aubert *et al.* (2017) we use the spectral representations of the forces to introduce the cross-over length scales  $d_{\perp}$ . These are defined as the length scales where two forces are of equal amplitude. This implies that these forces are in balance under the constraint of some remainder of the Coriolis force. Hence, this scale corresponds in fact to a three-term balance. To obtain the cross-over length scale which corresponds to the first-order force balance, we therefore determine the spherical harmonic degree,  $\ell_{MA}$ , where buoyancy and the Lorentz force are of equal magnitude in the case of QG-MAC dynamos. Analogously, we also identify the cross-overs between buoyancy and inertia,  $\ell_{IA}$ , and buoyancy and viscous forces,  $\ell_{VA}$ , for QG-CIA and QG-VAC (Quasi-Geostrophic Viscous-Archimedean-Coriolis) dynamos, respectively. Hence, we determine the three following spherical harmonic degrees:

$$\ell_{MA} = \min_{\ell} (|F_{\text{Lorentz},\ell} - F_{\text{buoyancy},\ell}|), \quad (16)$$

$$\ell_{IA} = \min_{\ell} (|F_{\text{inertia},\ell} - F_{\text{buoyancy},\ell}|), \quad (17)$$

$$\ell_{VA} = \min_{\ell} (|F_{\text{viscous},\ell} - F_{\text{buoyancy},\ell}|). \quad (18)$$

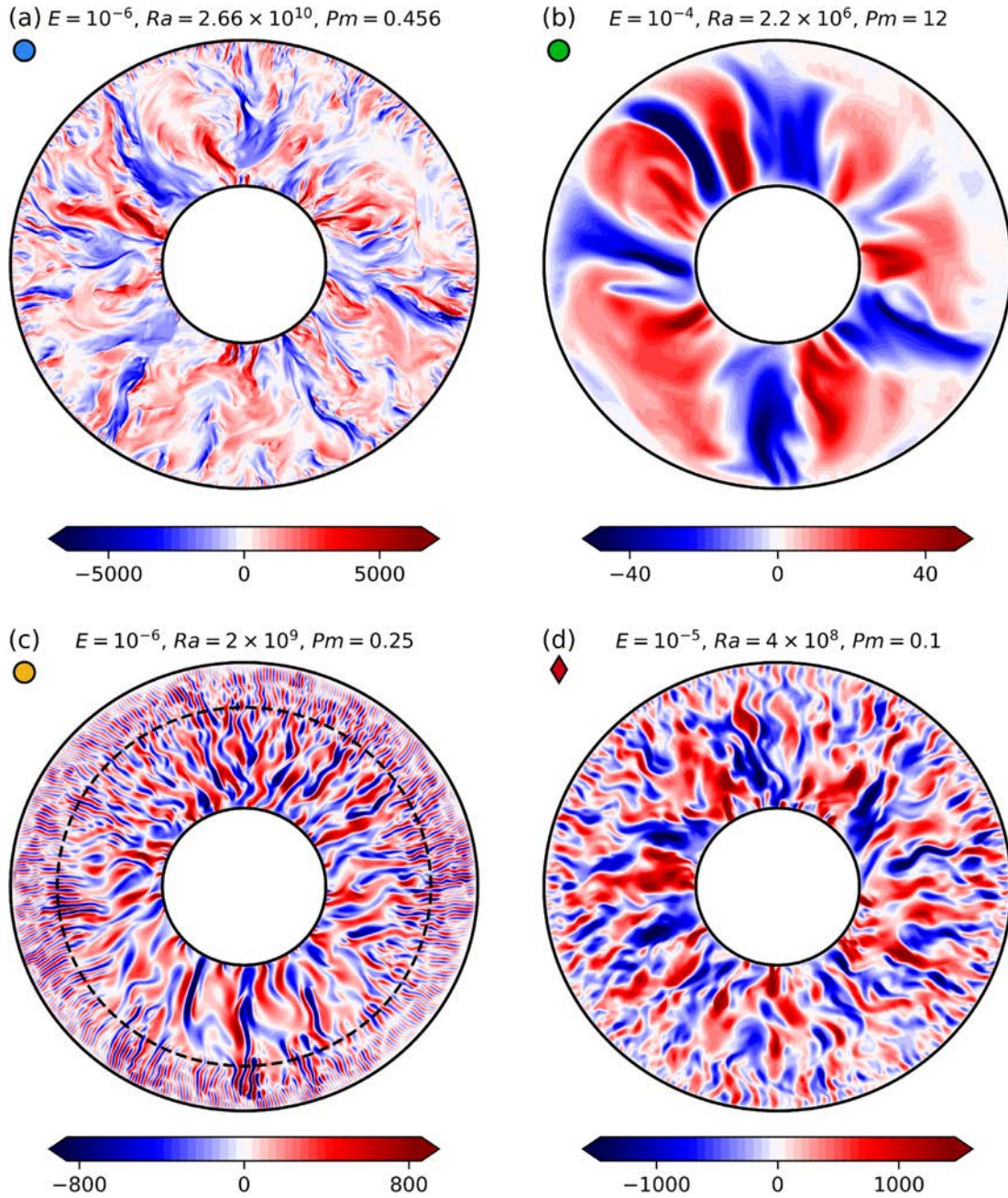
For our example cases (see Table 1), the cross-overs are highlighted by vertical dashed lines in Fig. 2. The associated length scales are defined as  $d_{\perp} = \pi/\ell_{\perp}$ . Note that none of the investigated models exhibits a first-order QG-VAC balance since we exclude viscous boundary layers from the integration of the forces and the bulk viscosity is too small to enter the first-order force balance. Several dynamos close to the onset of dynamo action feature force balances where the Lorentz force, inertia and buoyancy are of the same order of magnitude. Due to the lack of

separation between the three forces, it does not make sense to define a cross-over length scale based on one individual force in such cases. Dynamos featuring a force balance with ill-posed cross-overs, for example, model C (see Fig. 2c), also do not allow the determination of a unique relevant cross-over length scale.

### 3.2 Convective pattern

To qualitatively analyse the effect of the governing force balance on the dominant length scale of the convective flow, we turn to the equatorial planes of the radial velocity of the dynamos, which are presented in Fig. 4.

In the equatorial planes of both QG-MAC dynamos (models A and B) one can observe elongated structures of the scale of the system size despite the large difference in the input parameters (see Figs 4a and b). Since model A is far more supercritical than model B, it also shows a greater range of length scales with small-scale features developing close to the outer boundary (e.g. Sakuraba & Roberts 2009). The equatorial plane of model C (see Fig. 4c) features a rather abrupt change in the size of the convective cells as it transitions from large elongated structures in the interior of the shell to very small scales towards the outer boundary. Yadav *et al.* (2016) also observed such layers of small-scale convection in their simulations at  $E = 10^{-6}$ , which they attributed to a weak Lorentz force in these regions. The equatorial plane of the multipolar dynamo (model D, see Fig. 4d) shows mostly small convective scales, which resemble that of non-magnetic convection due to inertia being much stronger compared to the Lorentz force (see Fig. 2d; e.g. Gillet & Jones 2006; Gastine *et al.* 2016). A gradual decrease of the convective scale with radius can also be observed in the equatorial plane of the multipolar dynamo.



**Figure 4.** Radial velocity in the equatorial plane for the four simulations highlighted in Fig. 1. The abrupt change of the convective length scale towards the outer boundary in the equatorial plane of model C (panel c) is highlighted by a dashed circle at radius  $r \sim 0.8r_o$ .

The dominant length scales of these models can be characterized by the peaks of the poloidal kinetic energy spectra:

$$\ell_{\text{pol}} = \max_{\ell} (E_{\text{pol}}). \quad (19)$$

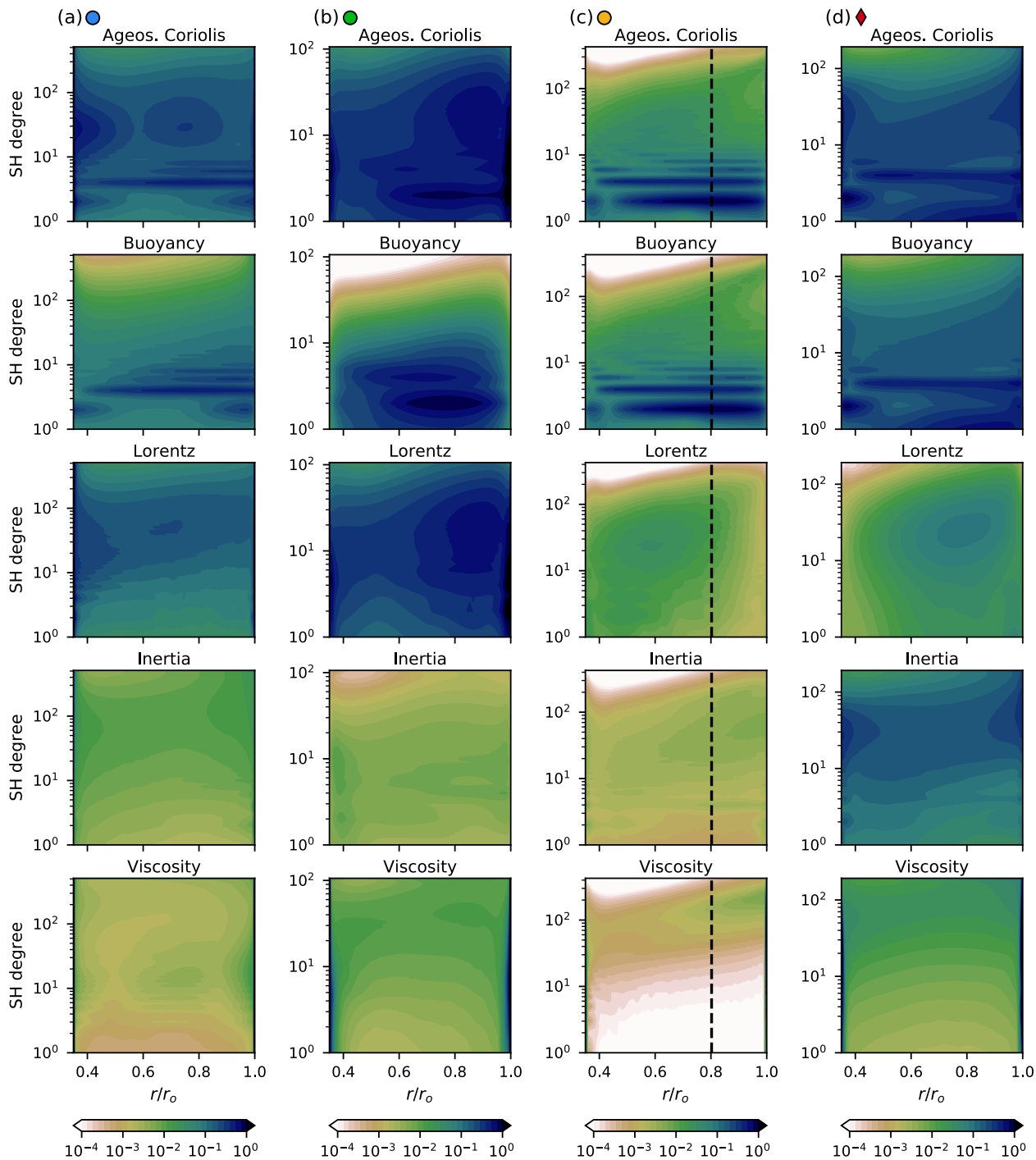
Comparison of the cross-over length scales to the observed number of up- and downwellings, as well as to  $\ell_{\text{pol}}$ , shows a satisfactory agreement for the QG-MAC cases (models A and B). This becomes, however, more challenging for models C and D due to the overall smaller convective cells and the additional strong radial dependence of the length scales. This suggests that analysing the radial dependence of the force balances will help to fully understand how the cross-over length scales relate to the observed convective scales.

### 3.3 2-D force spectra

Changes of the convective length scale in the radial direction, like in the equatorial plane of case C (see Fig. 4c), suggest an underlying change in the dominant force balance with radius. To quantify this effect, we introduce a measure of the local forces defined as

$$F_{\ell}^2(r) = \sum_{m=0}^{\ell} F_{\ell m}^2. \quad (20)$$

The resulting 2-D force spectra of the dynamo models discussed above are illustrated in Fig. 5. We exclude pressure and Coriolis forces from this representation since all investigated models are, on global scales, quasi-geostrophic at zeroth order, and restrict our focus on the contributions of first- and second-order forces.



**Figure 5.** 2-D force balance spectra of the dynamo models highlighted in Fig. 1. The geostrophic balance formed by pressure and Coriolis force is omitted since it is on a global scale present in all of the investigated dynamo models. The 2-D force spectra of each model are normalized by the maximum of the forces excluding the viscous boundary layers. The vertical dashed lines at  $r \sim 0.8 r_o$  in panel (c) correspond to the change of the convective length scale that can be observed in the equatorial plane of model **C** (see Fig. 4c).

The 2-D spectra of the QG-MAC dynamos (models **A** and **B**, see Figs 5a and b) show a balance between the ageostrophic Coriolis force and buoyancy on large scales (small spherical harmonic degrees) and by the Lorentz force on small scales (large  $\ell$ ) for all radii (excluding viscous boundary layers). In model **A** the Lorentz force is very strong throughout the entire volume. Yet, one can observe a maximum close to the inner boundary from which it tends to decrease with increasing radius. Model **B** also displays a strong

Lorentz force throughout the entire shell, however, with a localized maximum towards the outer boundary at intermediate length scales. Note that buoyancy only slightly depends on radius in model **A**, while in model **B** it is significantly larger in the inner part of the volume compared to the boundaries. This is expected as the lower vigour of convection in models with Rayleigh numbers close to the onset of convection leads to an overall less efficient heat transport, and therefore to the formation of thick thermal boundary layers.

In the 2-D force spectra of model **C** (see Fig. 5c), the ageostrophic Coriolis force is balanced by buoyancy and Lorentz force for radii  $r \lesssim 0.8 r_o$ , therefore exhibiting a first-order QG-MAC balance which explains the elongated flow structures in this portion of the volume. However, the Lorentz force is overall considerably weaker on small length scales compared to most QG-MAC dynamos. For larger radii, we observe a significant decrease of the Lorentz force. Additionally, inertia and viscosity increase towards the outer boundary. As a consequence, the ageostrophic Coriolis force is in the outer part of the shell almost entirely balanced by buoyancy and to a smaller extent by inertia and viscous forces. Since inertia and viscous forces are slightly larger than the Lorentz force in this region, the force balance of the dynamo is close to a QG-CIA/QG-VAC regime which appears to be the reason for the layer of small-scale convection that is visible in Fig. 4(c). This change in the governing force balance depending on the radius also explains why the cross-over length scale in the fully integrated force balance spectrum is ill-posed for model **C** (see Fig. 2c).

In the multipolar dynamo (model **D**, see Fig. 5d), the ageostrophic Coriolis force is largely balanced by buoyancy and inertia at all radii. The Lorentz force remains smaller than inertia throughout the entire shell, and therefore does never contribute to the first-order force balance. As a consequence, the dynamo is controlled by a QG-CIA balance throughout the entire shell.

The 2-D force spectra of all four models show that the viscosity is predominantly confined to the inner and outer boundaries, which justifies our decision to exclude the viscous boundary layers when calculating the integrated forces (see eq. 13). While at  $E = 10^{-4}$  the viscous boundary layers still extend into the shell, they become very thin at lower Ekman numbers like  $E = 10^{-6}$ . At  $E = 10^{-4}$ , both the bulk viscosity and inertia are only about one order of magnitude smaller than the leading order forces. Hence, they may still significantly influence the overall force balance. Decreasing the Ekman number to  $E = 10^{-6}$  leads to the bulk viscosity and inertia being two to three orders of magnitude lower than the first-order forces.

### 3.3.1 Cross-over length scales of 2-D force spectra

The 2-D force spectra further allow us to determine the cross-over length scales at each radial level. To obtain an idea on how well these match the convective scale in the equatorial plane, we compare them to  $\ell_{\text{pol}}(r)$ . Fig. 6 illustrates the 2-D spectra of the poloidal kinetic energy for the four example cases, along with the cross-over length scales linked to the different types of force balances for each radial level. While it is generally possible to determine the scales at which the buoyancy-inertia and buoyancy-viscous pairs are of equal magnitude for nearly all radii, the crossing between buoyancy and Lorentz force becomes ill-posed in the thermal boundary layers, where buoyancy is weak. This is especially the case for the strong-field dynamos that are run at low supercritical Rayleigh numbers and are therefore only weakly driven, which leads to the formation of thick thermal boundary layers. In several multipolar dynamos and dynamos close to the onset of convection it is also not possible to determine  $\ell_{\text{MA}}$  in some parts of the volume, or in a few cases even the entire shell, because of the Lorentz force being too weak relative to buoyancy.

Figs 6(a) and (b) show that for both QG-MAC dynamos (models **A** and **B**)  $\ell_{\text{MA}}$  is in good agreement with  $\ell_{\text{pol}}$  in the bulk of the volume. In addition,  $\ell_{\text{IA}}$  and  $\ell_{\text{VA}}$  do not match  $\ell_{\text{pol}}$  with the exception of the viscous boundary layers, where viscosity and therefore

$\ell_{\text{VA}}$  becomes relevant. The separation between the length scales corresponding to the different force balances is larger in model **A** compared to model **B** since it operates at a lower Ekman number.

For model **C** (see Fig. 6c),  $\ell_{\text{MA}}$  is close to  $\ell_{\text{pol}}$  for most of the interior of the volume. Although close to the inner boundary it is not possible to determine a relevant crossing as the spectral contributions of the Lorentz force and buoyancy overlap. This corresponds, however, only to a small portion of the total volume. For the outer region  $\ell_{\text{MA}}$  starts to deviate from  $\ell_{\text{pol}}$  at  $r \gtrsim 1.3$ . Beyond this radius,  $\ell_{\text{IA}}$  and  $\ell_{\text{VA}}$  corresponding to a CIA and VAC balance, respectively, start to match the peaks of the poloidal energy better. This confirms what we observe in the 2-D force spectra (see Fig. 5c), which revealed a QG-MAC balance in the interior of the shell and a QG-CIA/QG-VAC regime towards the outer boundary. Hence, the agreement of the different cross-over length scales with  $\ell_{\text{pol}}$ , that is, the convective length scales, indeed appears to reflect the force balance at the given radius.

For the multipolar dynamo (model **D**, see Fig. 6d),  $\ell_{\text{IA}}$  fits  $\ell_{\text{pol}}$  best. This is expected since the first-order force balance corresponds to a CIA balance. Due to the weak Lorentz force it is not possible to determine  $\ell_{\text{MA}}$  for this dynamo.

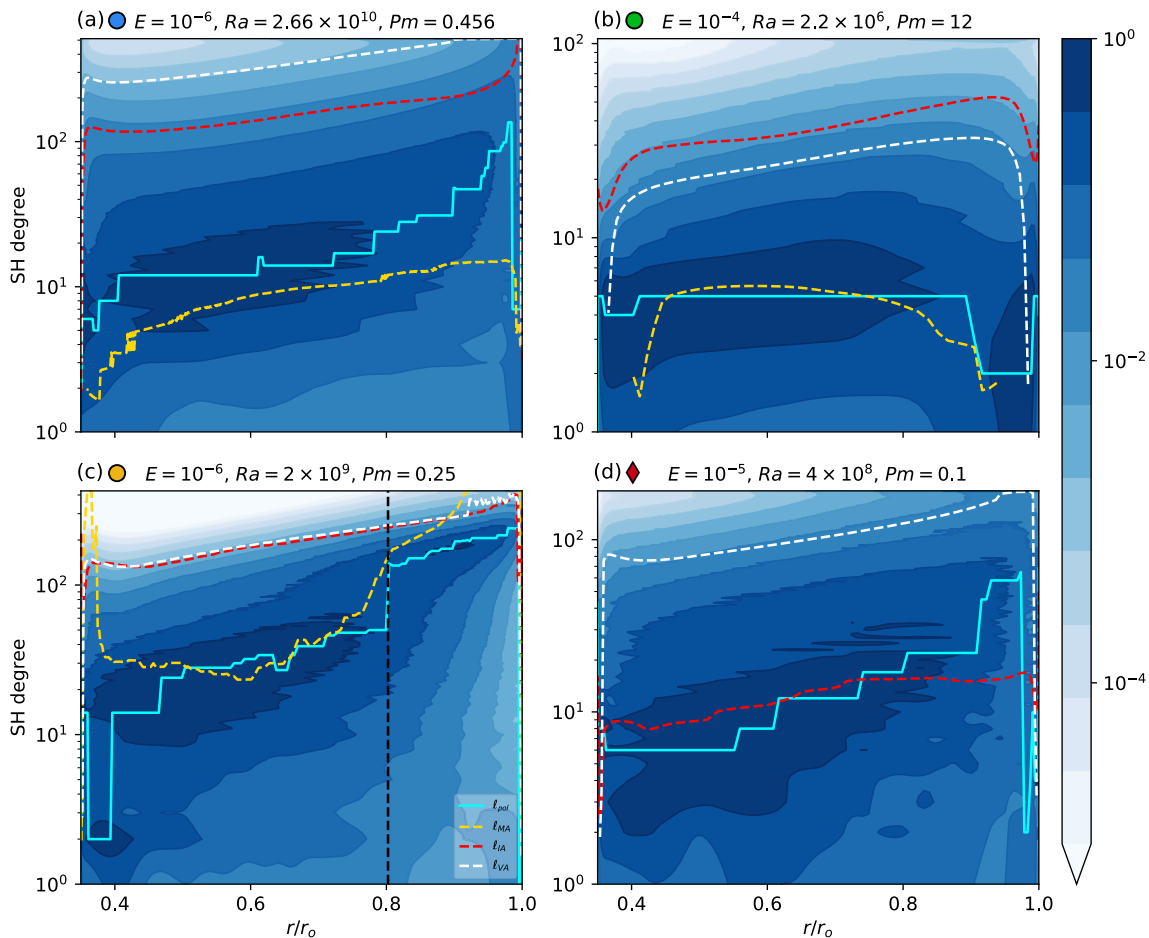
These results suggest that by quantifying the agreement between the peak of the poloidal kinetic energy spectra and the harmonic degrees of the different types of crossings, we can obtain a measure for the type of force balance that controls the dynamo. Therefore, we calculate the volumetric relative misfit between  $\ell_{\text{pol}}$  and the crossings  $\ell_{\perp}$  ( $\ell_{\text{MA}}$ ,  $\ell_{\text{IA}}$  and  $\ell_{\text{VA}}$ ) using the following formula:

$$\chi_i = \sqrt{\frac{4\pi}{V} \int_r \left( \frac{\ell_{\text{pol}}(r) - \ell_{\perp}(r)}{\ell_{\text{pol}}(r)} \right)^2 r^2 dr}, \quad (21)$$

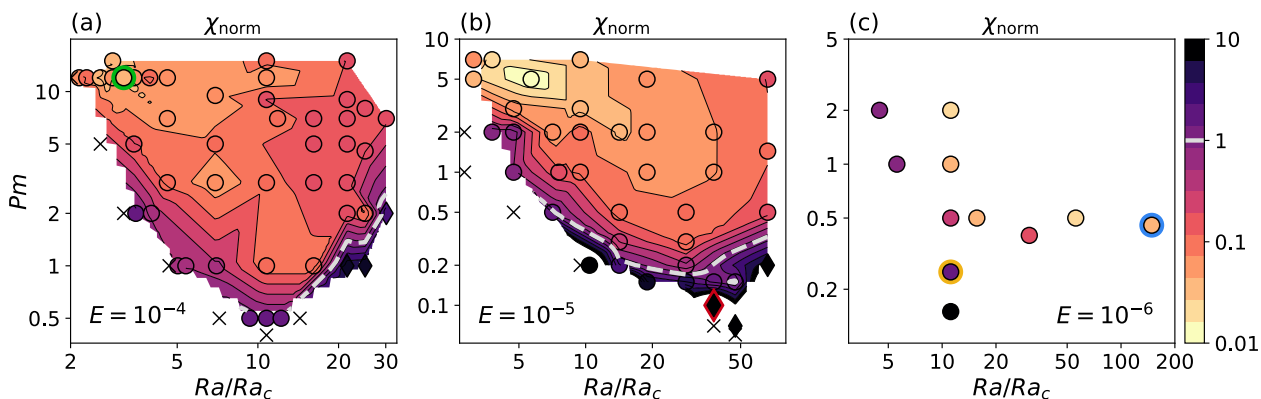
where  $i = [\text{MAC}, \text{CIA}, \text{VAC}]$ . We again exclude viscous boundary layers. Additionally, we restrict the computation of the misfits of all three types of crossings to the part of the volume where  $\ell_{\text{MA}}$  is defined. Since the focus of our study is on finding dynamo models with a force balance relevant to the Earth's core conditions, a simple classification in QG-MAC and non-QG-MAC dynamos is sufficient at first. Therefore, we normalize the misfit that we obtain for the QG-MAC balance by the one for the next best fitting force balance (either QG-CIA or QG-VAC), that is,

$$\chi_{\text{norm}} = \frac{\chi_{\text{MAC}}}{\min(\chi_{\text{CIA}}, \chi_{\text{VAC}})}. \quad (22)$$

This allows us to quantify the discrepancy between the misfit of the cross-over length scales corresponding to a QG-MAC balance and the other types of force balances and therefore essentially whether the dynamo is controlled by a QG-MAC balance or not. Linear interpolations of  $\chi_{\text{norm}}$  for the investigated parameter space are shown in Fig. 7. Comparison of Fig. 7 to the same type of representation for  $\delta$  and  $\mathcal{M}$  (see Fig. 3) shows that in the region of the parameter space at low  $Ra/Ra_c$  and high  $Pm$ , where one can find the strong-field dynamos, we also observe the smallest values for  $\chi_{\text{norm}}$ , that is, the best agreement between  $\ell_{\text{pol}}$  and  $\ell_{\text{MA}}$ . One notable difference is that  $\delta$  and  $\mathcal{M}$  transition generally quite smoothly throughout the parameter space from large to small values as indicated by the equidistant spacing of the contour lines. For  $\chi_{\text{norm}}$ , however, the smaller values found in the region of strong-field dynamos extend to lower values of  $Pm$ , before decaying rather steeply near the onset of dynamo action and close to the transition from the dipolar to the multipolar regime. Therefore,  $\chi_{\text{norm}}$  seems to allow for a better distinction between the different force balance regimes. Decreasing the Ekman number gradually extends the boundaries of the QG-MAC regime towards lower  $Pm$  and higher  $Ra/Ra_c$ .



**Figure 6.** 2-D-spectra of the poloidal kinetic energy of the dynamo models highlighted in Fig. 1. Each 2-D-spectrum is normalized by its maximum value. The solid blue line connects the peaks of the poloidal kinetic energy spectra ( $\ell_{\text{pol}}$ ) for each radial level. The dashed lines are the harmonic degrees of the crossings in the corresponding force balance spectra; yellow:  $\ell_{\text{MA}}$ , scale at which buoyancy and Lorentz force are equal; red:  $\ell_{\text{IA}}$ , scale at which buoyancy and inertia are equal; grey:  $\ell_{\text{VA}}$ , scale at which buoyancy and viscous forces are equal. The vertical dashed line at  $r \sim 0.8 r_o$  in panel (c) corresponds to the change of the convective length scale that can be observed in the equatorial plane of model C (see Fig. 4c).

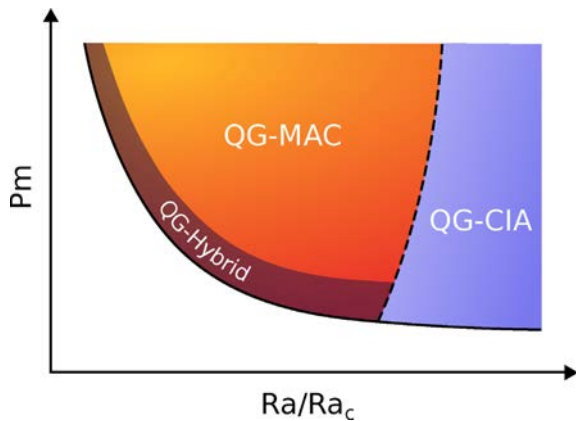


**Figure 7.** Regime diagrams for Ekman numbers  $E = 10^{-4}$ ,  $E = 10^{-5}$  and  $E = 10^{-6}$  with linear interpolations of  $\chi_{\text{norm}}$  (eq. 22), with small values of  $\chi_{\text{norm}}$  corresponding to QG-MAC dynamos and large values to non-QG-MAC dynamos. The symbols are filled with the values computed from the simulation outputs. The meaning of the symbols is the same as in Fig. 1. The symbols of the models given in Table 1 are highlighted by coloured edges.

#### 4 DISCUSSION

Dynamo action in the Earth’s outer core is expected to be controlled by a balance between pressure, Coriolis, buoyancy and Lorentz forces, with marginal contributions from inertia and

viscous forces (e.g. Roberts & King 2013). Current numerical simulations of the geodynamo, however, operate at much larger inertia and viscosity because of computational limitations. This has led to conflicting interpretations of the classical



**Figure 8.** Sketch of the three different force balance regimes attained in our study independent of the Ekman number. The dashed line marks the transition between the dipolar and multipolar regimes.

data set, casting some doubt on the physical relevance of these models.

By performing a systematic survey of the numerically accessible parameter space, we attempted to provide a better understanding of the force balances controlling the flow dynamics in dynamo models. To this end, we resorted to the length-scale-based approach introduced by Aubert *et al.* (2017) and decomposed the amplitudes of the forces into spherical harmonic contributions. We extended this method by additionally looking at the radial dependence of a local force balance measure to analyse possible transitions within the fluid volume. Based on the agreement of the thereby obtained cross-over scales, that is, scales where three forces are in balance, and the convective scales, we introduced a measure that allows to categorize the force balances into three end-member cases. In agreement with recent studies (e.g. Yadav *et al.* 2016; Aubert *et al.* 2017; Schaefer *et al.* 2017), we find that the majority of the dipole-dominated dynamos are at leading order controlled by a quasi-geostrophic balance between pressure and the Coriolis force. The ageostrophic part of the Coriolis force is then balanced by buoyancy on large scales and the Lorentz force on small scales. This QG-MAC balance seems to be very stable throughout the parameter space, with the exception of boundary regimes. Beyond the transition from the dipolar to the multipolar regime inertial effects become more significant so that inertia now balances the ageostrophic Coriolis force at small scales, while the Lorentz force becomes secondary. The resulting dynamos are therefore governed by a QG-CIA balance at leading order. Close to the onset of dynamo action the Lorentz force also falls onto or below the level of inertia and viscous forces. As a result the QG-MAC balance is lost in these regions for at least parts of the fluid volume. Therefore, one may refer to these dynamos as QG-Hybrid cases. These three different force balance regimes are summarized in a sketch in Fig. 8. Decreasing the Ekman number extends the region of dynamos controlled by a QG-MAC balance towards lower values of  $Pm$ , while the transition to the QG-CIA regime (the multipolar regime) moves towards higher supercriticalities.

Analysis of the ‘strong-fieldness’ and the ratio of magnetic and kinetic energies of the dynamos confirms that the strongest-field dynamos can be found in the parts of the parameter space with high  $Pm$  and low  $Ra/Ra_c$  as suggested by Dormy (2016). This is mainly a result of the role of inertia being minimized at low supercriticalities. When decreasing the Ekman number, this region of strong-field dynamos will therefore by construction expand to larger supercriticalities due to the increase of rotational effects on

the fluid. These strong-field dynamos do indeed approach magnetostrophy when considering volume-integrated forces. However, the introduction of a finer length-scale-dependent force balance analysis revealed that these cases are actually controlled by a QG-MAC balance comparable to most dynamo models published to date.

Most dynamo models feature a nearly radially independent force balance. However, in several QG-MAC dynamos a gradual decrease of the convective scale can be observed towards the outer boundary. This can be attributed to a smaller Lorentz force in this region (e.g. Yadav *et al.* 2016). Yet, it does not involve a change of the leading-order force balance. However, by lowering  $Pm$  dynamos can be found for which the convective length scale changes very abruptly from elongated structures in the interior of the shell to small-scale convection in the outer part. The 2-D analysis of the force balance spectra showed that for these cases the force balance changed from a QG-MAC balance in the interior to a mixed QG-CIA/QG-VAC balance towards the outer boundary. By further decreasing  $Pm$  the QG-MAC balance is gradually lost in larger parts of the volume. This stands in contrast to a common strategy in dynamo modelling, which is to decrease  $Pm$  as much as possible to approach Earth’s core conditions (e.g. Sheyko *et al.* 2016). Our results, however, show that following this approach may lead to a significant decrease of the Lorentz force and therefore to the loss of the physically relevant force balance when getting too close to the onset of dynamo action. Strategies such as employed by Dormy (2016) and Aubert *et al.* (2017), which aim at preserving the governing force balance when decreasing the Ekman number (by keeping a constant relation between the control parameters), are immune to this.

Future work should focus on asserting the Ekman number dependence of the boundaries of the different force balance regimes. It would also be of interest to perform a more in depth analysis of length scales.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank two anonymous reviewers for their constructive comments and Rakesh Yadav for kindly providing the restart files of the dynamo models at  $E = 10^{-6}$  that were studied by Yadav *et al.* (2016). We acknowledge support from the Fondation Del Duca of Institut de France (JA, 2017 Research Grant). Numerical computations were performed at S-CAPAD, IPGP and using HPC resources from GENCI-CINES (Grants 2016-A0020402122 and 2018-A0020402122). This project has received funding from the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie Grant Agreement No. 665850. This is IPGP contribution 4036.

## REFERENCES

- Aubert, J., Gastine, T. & Fournier, A., 2017. Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime, *J. Fluid Mech.*, **813**, 558–593.
- Aurnou, J.M. & King, E.M., 2017. The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems, *Proc. R. Soc. A*, **473**(2199).
- Boyd, J.P., 2001. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd edn, Dover Publications.
- Calkins, M.A., 2018. Quasi-geostrophic dynamo theory, *Phys. Earth planet. Inter.*, **276**, 182–189.
- Christensen, U.R. & Aubert, J., 2006. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophys. J. Int.*, **166**(1), 97–114.
- Christensen, U.R., Olson, P. & Glatzmaier, G.A., 1999. Numerical modelling of the geodynamo: a systematic parameter study, *Geophys. J. Int.*, **138**(2), 393–409.

- Christensen, U.R., Aubert, J. & Hulot, G., 2010. Conditions for Earth-like geodynamo models, *Earth planet. Sci. Lett.*, **296**(3), 487–496.
- Dormy, E., 2016. Strong-field spherical dynamos, *J. Fluid Mech.*, **789**, 500–513.
- Dormy, E., Oruba, L. & Petitdemange, L., 2018. Three branches of dynamo action, *Fluid Dyn. Res.*, **50**(1), 011415.
- Garcia, F., Oruba, L. & Dormy, E., 2017. Equatorial symmetry breaking and the loss of dipolarity in rapidly rotating dynamos, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **111**(5), 380–393.
- Gastine, T., Wicht, J. & Aubert, J., 2016. Scaling regimes in spherical shell rotating convection, *J. Fluid Mech.*, **808**, 690–732.
- Gillet, N. & Jones, C.A., 2006. The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder, *J. Fluid Mech.*, **554**, 343–369.
- Gillet, N., Schaeffer, N. & Jault, D., 2012. Rationale and geophysical evidence for quasi-geostrophic rapid dynamics within the Earth's outer core, *Phys. Earth planet. Inter.*, **202–203**, 78–88.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1995. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth planet. Inter.*, **91**(1), 63–75.
- Heimpel, M.H. & Evans, M.E., 2013. Testing the geomagnetic dipole and reversing dynamo models over Earth's cooling history, *Phys. Earth planet. Inter.*, **224**, 124–131.
- Hollerbach, R., 1996. On the theory of the geodynamo, *Phys. Earth planet. Inter.*, **98**(3), 163–185.
- King, E.M. & Buffett, B.A., 2013. Flow speeds and length scales in geodynamo models: the role of viscosity, *Earth planet. Sci. Lett.*, **371–372**, 156–162.
- Kosloff, D. & Tal-Ezer, H., 1993. A modified Chebyshev pseudospectral method with an  $O(N-1)$  time step restriction, *J. Comput. Phys.*, **104**(2), 457–469.
- Kutzner, C. & Christensen, U.R., 2002. From stable dipolar towards reversing numerical dynamos, *Phys. Earth planet. Inter.*, **131**(1), 29–45.
- Malkus, W. V.R., 1959. Magnetoconvection in a viscous fluid of infinite electrical conductivity, *Astrophys. J.*, **130**, 259–275.
- Oruba, L. & Dormy, E., 2014. Predictive scaling laws for spherical rotating dynamos, *Geophys. J. Int.*, **198**(2), 828–847.
- Petitdemange, L., 2018. Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations, *Phys. Earth planet. Inter.*, **277**, 113–132.
- Roberts, P.H., 1978. Magnetoconvection in a rapidly rotating fluid, in *Rotating Fluids in Geophysics*, pp. 421–435, eds Roberts, P.H. & Soward, A.M., Academic Press.
- Roberts, P.H. & King, E.M., 2013. On the genesis of the Earth's magnetism, *Rep. Prog. Phys.*, **76**(9), 1–55.
- Sakuraba, A. & Roberts, P.H., 2009. Generation of a strong magnetic field using uniform heat flux at the surface of the core, *Nat. Geosci.*, **2**, 802–805.
- Schaeffer, N., 2013. Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudo-spectral numerical simulations, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **14**(3), 751–758.
- Schaeffer, N., Jault, D., Nataf, H.-C. & Fournier, A., 2017. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth's core, *Geophys. J. Int.*, **211**(1), 1–29.
- Sheyko, A., Finlay, C.C. & Jackson, A., 2016. Magnetic reversals from planetary dynamo waves, *Nature*, **539**, 551–554.
- Sheyko, A., Finlay, C., Favre, J. & Jackson, A., 2018. Scale separated low viscosity dynamos and dissipation within the Earth's core, *Scientific Reports*, **8**(1), 12566–.
- Soderlund, K.M., King, E.M. & Aurnou, J.M., 2012. The influence of magnetic fields in planetary dynamo models, *Earth planet. Sci. Lett.*, **333–334**, 9–20.
- Soderlund, K.M., Sheyko, A., King, E.M. & Aurnou, J.M., 2015. The competition between Lorentz and Coriolis forces in planetary dynamos, *Prog. Earth planet. Sci.*, **2**(1), 1–10.
- Wicht, J., 2002. Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations, *Phys. Earth planet. Inter.*, **132**(4), 281–302.
- Wicht, J. & Christensen, U.R., 2010. Torsional oscillations in dynamo simulations, *Geophys. J. Int.*, **181**(3), 1367–1380.
- Wu, C.-C. & Roberts, P.H., 2013. On a dynamo driven topographically by longitudinal libration, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **107**(1–2), 20–44.
- Yadav, R.K., Gastine, T., Christensen, U.R., Wolk, S.J. & Poppenhaeger, K., 2016. Approaching a realistic force balance in geodynamo simulations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **113**(43), 12 065–12 070.

## APPENDIX: RESULTS OF SIMULATIONS

**Table A1.** Summary of the relevant parameters of the numerical models that were analysed for this study. All dynamo models have been computed with  $Pr = 1$  and  $r_1/r_0 = 0.35$ .  $Nu$  is the Nusselt number,  $Rm$  the magnetic Reynolds number,  $f_{\text{ohm}}$  the ohmic dissipation fraction and  $f_{\text{dip}}$  the relative dipole strength as defined in Christensen & Aubert (2006).  $\ell_{\perp}$  corresponds to the spherical harmonic degree at which buoyancy and Lorentz forces are of equal magnitude. For cases where this crossing is ill-posed, or the Lorentz force is of the same magnitude or weaker than inertia and/or viscous forces no value is provided.

	$Ra$	$Pm$	$Nu$	$Rm$	$\Lambda$	$\mathcal{M}$	$\delta$	$\chi_{\text{norm}}$	$f_{\text{ohm}}$	$f_{\text{dip}}$	$\ell_{\text{pol}}$	$\ell_{\perp}$	$(N_r, \ell_{\text{max}})$
						$E = 10^{-4}$							
1	$1.500 \times 10^6$	12.000	1.40	209.6	8.50	23.9	20.02	0.07	0.60	0.82	5	5.93	(49, 96)
2	$1.600 \times 10^6$	12.000	1.42	205.2	11.02	32.5	22.07	0.09	0.66	0.84	5	5.57	(49, 96)
3	$1.800 \times 10^6$	12.000	1.48	203.5	19.24	57.5	28.92	0.03	0.73	0.82	5	4.73	(49, 96)
4	$2.000 \times 10^6$	12.000	1.60	238.5	25.10	54.3	30.08	0.05	0.73	0.77	5	4.46	(61, 106)
5	$2.000 \times 10^6$	15.000	1.64	312.1	35.16	55.6	29.32	0.04	0.71	0.72	4	3.46	(65, 128)
6	$2.200 \times 10^6$	12.000	1.71	267.9	29.87	51.0	29.20	0.03	0.72	0.76	5	4.51	(61, 106)
7	$2.400 \times 10^6$	5.000	1.63	153.3	3.67	8.1	13.76	0.12	0.52	0.86	6	8.35	(49, 96)
8	$2.400 \times 10^6$	12.000	1.83	299.8	34.08	46.4	26.44	0.06	0.71	0.74	4	4.51	(61, 106)
9	$2.440 \times 10^6$	2.000	1.37	66.3	0.03	0.2	0.41	1.03	0.04	0.97	5	—	(41, 85)
10	$2.750 \times 10^6$	12.000	1.99	353.7	38.94	38.0	24.12	0.08	0.70	0.72	5	4.53	(61, 106)
11	$2.790 \times 10^6$	2.000	1.55	72.3	0.42	1.6	3.47	0.41	0.28	0.93	6	17.32	(41, 85)
12	$3.200 \times 10^6$	3.000	1.78	120.5	2.12	4.4	10.20	0.1	0.48	0.88	7	9.87	(41, 96)
13	$3.200 \times 10^6$	7.000	2.07	234.8	21.26	27.5	23.86	0.05	0.71	0.78	6	4.94	(61, 106)
14	$3.200 \times 10^6$	12.000	2.18	416.0	44.11	31.2	22.06	0.05	0.67	0.69	5	4.61	(61, 106)
15	$3.500 \times 10^6$	1.000	1.86	46.4	0.45	2.1	2.64	0.48	0.36	0.97	8	23.87	(41, 85)
16	$3.750 \times 10^6$	1.000	1.97	48.4	0.69	3.0	3.72	0.5	0.44	0.96	7	16.54	(41, 85)
17	$4.830 \times 10^6$	3.000	2.46	154.8	8.54	10.9	15.17	0.05	0.67	0.86	6	6.70	(41, 96)
18	$4.830 \times 10^6$	5.000	2.65	263.1	18.52	13.6	17.97	0.08	0.66	0.76	7	5.20	(61, 106)
19	$4.830 \times 10^6$	9.500	2.80	507.7	43.33	16.2	16.74	0.06	0.63	0.67	5	5.00	(49, 106)
20	$4.880 \times 10^6$	1.000	2.35	57.8	1.55	4.7	5.57	0.34	0.55	0.96	7	10.92	(41, 85)
21	$6.500 \times 10^6$	0.500	2.84	43.6	0.49	1.3	1.23	1.29	0.31	0.97	5	—	(41, 85)
22	$7.500 \times 10^6$	0.500	3.25	50.4	0.60	1.2	1.22	1.01	0.31	0.96	6	—	(41, 64)
23	$7.500 \times 10^6$	1.000	3.16	84.6	2.70	3.8	5.01	0.08	0.54	0.95	6	10.91	(41, 85)
24	$7.500 \times 10^6$	3.000	3.44	249.7	11.87	5.8	10.31	0.1	0.59	0.78	7	8.19	(49, 106)
25	$7.500 \times 10^6$	9.000	3.64	726.6	53.23	9.2	12.92	0.12	0.56	0.63	6	5.67	(49, 106)
26	$7.500 \times 10^6$	12.000	3.67	957.0	77.88	10.3	14.16	0.05	0.55	0.60	6	5.30	(65, 128)
27	$7.500 \times 10^6$	15.000	3.68	1195.4	99.66	10.6	13.38	0.08	0.53	0.58	7	5.08	(65, 133)
28	$8.250 \times 10^6$	7.000	3.83	622.6	39.97	7.3	11.94	0.09	0.56	0.64	6	6.32	(49, 106)
29	$8.500 \times 10^6$	0.500	3.64	57.9	0.64	1.0	1.08	1.01	0.29	0.95	7	—	(41, 85)
30	$1.125 \times 10^7$	1.000	4.28	127.0	3.41	2.1	3.58	0.08	0.48	0.91	8	12.29	(41, 85)
31	$1.125 \times 10^7$	3.000	4.51	366.1	14.37	3.2	6.95	0.15	0.53	0.73	6	8.92	(49, 106)
32	$1.125 \times 10^7$	5.000	4.59	594.4	29.30	4.2	8.89	0.18	0.53	0.66	7	8.40	(49, 106)
33	$1.125 \times 10^7$	7.000	4.61	814.6	46.53	5.0	10.36	0.15	0.53	0.62	7	6.78	(61, 128)
34	$1.500 \times 10^7$	1.000	5.90	227.7	0.49	0.1	0.36	5.48	0.11	0.31	6	—	(41, 85)
35	$1.500 \times 10^7$	2.000	5.41	324.0	9.27	1.8	4.12	0.16	0.47	0.77	12	11.23	(41, 85)
36	$1.500 \times 10^7$	3.000	5.46	473.0	16.21	2.2	5.45	0.15	0.48	0.71	9	10.38	(49, 106)
37	$1.500 \times 10^7$	5.000	5.46	757.2	33.83	3.0	6.87	0.19	0.48	0.64	6	8.82	(49, 106)
38	$1.500 \times 10^7$	7.000	5.47	1038.1	53.11	3.5	7.77	0.16	0.48	0.59	8	8.35	(61, 128)
39	$1.500 \times 10^7$	9.000	5.45	1309.4	74.79	4.0	8.80	0.14	0.47	0.57	7	8.28	(65, 133)
40	$1.500 \times 10^7$	15.000	5.38	2108.2	147.91	5.1	9.75	0.12	0.42	0.52	6	6.71	(65, 133)
41	$1.750 \times 10^7$	1.000	6.53	255.2	0.66	0.1	0.38	6.08	0.12	0.31	6	—	(61, 106)
42	$1.750 \times 10^7$	2.000	6.09	381.5	8.83	1.2	3.28	0.11	0.43	0.75	14	13.01	(61, 106)
43	$1.750 \times 10^7$	4.560	5.98	785.2	32.62	2.4	6.14	0.19	0.47	0.65	11	8.91	(61, 106)
44	$1.750 \times 10^7$	8.000	5.96	1327.8	69.66	3.2	7.85	0.15	0.45	0.57	8	8.43	(61, 128)
45	$2.100 \times 10^7$	2.000	7.21	522.6	4.05	0.3	1.21	1.61	0.26	0.28	6	—	(61, 128)
46	$2.100 \times 10^7$	7.000	6.61	1353.1	63.08	2.4	6.50	0.17	0.45	0.58	6	8.69	(81, 133)
						$E = 10^{-5}$							
47	$3.300 \times 10^7$	5.000	1.83	271.5	3.74	27.4	36.83	0.03	0.75	0.27	8	7.70	(81, 133)
48	$3.300 \times 10^7$	7.000	1.87	346.2	7.15	42.5	37.42	0.05	0.78	0.75	9	6.79	(97, 133)
49	$4.000 \times 10^7$	2.000	1.33	104.1	0.09	1.7	3.54	0.67	0.26	0.97	12	31.88	(81, 133)
50	$4.000 \times 10^7$	7.000	2.12	303.1	23.01	180.8	61.43	0.02	0.88	0.84	6	4.92	(97, 133)



Table A1. Continued

	$Ra$	$Pm$	$Nu$	$Rm$	$\Lambda$	$\mathcal{M}$	$\delta$	$\chi_{\text{norm}}$	$f_{\text{ohm}}$	$f_{\text{dip}}$	$\ell_{\text{pol}}$	$\ell_{\perp}$	$(N_r, \ell_{\text{max}})$
51	$5.000 \times 10^7$	1.000	1.52	72.6	0.09	1.8	3.03	0.58	0.33	0.96	14	39.73	(81, 133)
52	$5.000 \times 10^7$	2.000	1.43	132.9	0.16	1.8	5.10	0.68	0.30	0.87	12	28.63	(81, 133)
53	$5.000 \times 10^7$	3.000	2.05	240.9	2.21	12.1	23.33	0.06	0.69	0.76	8	10.46	(81, 133)
54	$6.000 \times 10^7$	5.000	2.81	337.2	26.37	117.5	57.82	0.01	0.87	0.80	7	4.93	(97, 170)
55	$7.500 \times 10^7$	0.500	2.22	60.8	0.20	2.8	2.96	0.98	0.44	0.90	13	—	(81, 133)
56	$7.500 \times 10^7$	2.000	2.49	194.1	3.27	17.6	33.57	0.05	0.77	0.91	8	8.96	(81, 133)
57	$8.000 \times 10^7$	1.000	2.46	120.0	0.93	6.5	12.55	0.13	0.63	0.84	10	12.50	(81, 133)
58	$1.000 \times 10^8$	1.000	3.06	140.5	1.76	9.1	14.19	0.11	0.69	0.91	9	11.10	(81, 133)
59	$1.000 \times 10^8$	2.000	3.67	225.5	11.35	45.3	36.12	0.09	0.86	0.91	6	6.39	(81, 133)
60	$1.000 \times 10^8$	3.000	3.90	341.1	21.15	55.4	37.40	0.04	0.85	0.83	6	5.65	(97, 170)
61	$1.000 \times 10^8$	7.000	4.07	779.9	63.63	74.9	31.72	0.04	0.80	0.75	6	4.96	(97, 170)
62	$1.100 \times 10^8$	0.200	3.01	39.6	0.07	0.9	0.45	—	0.23	0.99	12	—	(97, 170)
63	$1.500 \times 10^8$	0.200	4.10	51.0	0.19	1.4	0.86	1.41	0.33	0.96	14	—	(97, 170)
64	$1.500 \times 10^8$	0.300	4.28	72.6	0.42	2.4	2.11	0.31	0.44	0.91	13	—	(81, 133)
65	$1.500 \times 10^8$	0.500	4.45	116.9	1.03	3.8	4.54	0.09	0.56	0.90	12	16.08	(81, 133)
66	$1.500 \times 10^8$	2.000	5.13	346.3	15.87	26.8	29.72	0.04	0.82	0.87	7	7.39	(97, 170)
67	$2.000 \times 10^8$	0.150	6.31	55.8	0.24	1.2	0.62	3.78	0.34	0.98	12	—	(97, 170)
68	$2.000 \times 10^8$	1.000	6.02	240.4	7.03	12.3	15.42	0.06	0.77	0.94	8	9.60	(97, 170)
69	$2.000 \times 10^8$	2.000	6.31	451.4	19.88	19.7	24.82	0.05	0.80	0.84	9	8.18	(97, 170)
70	$2.000 \times 10^8$	5.000	6.57	1107.2	63.20	26.1	24.92	0.05	0.74	0.74	7	6.60	(97, 170)
71	$3.000 \times 10^8$	0.150	9.90	78.8	0.55	1.3	0.69	2.32	0.43	0.96	13	—	(97, 170)
72	$3.000 \times 10^8$	0.200	9.89	99.3	0.99	2.0	1.33	0.35	0.51	0.96	14	—	(97, 170)
73	$3.000 \times 10^8$	0.300	9.34	136.8	1.70	2.8	2.48	0.1	0.58	0.94	12	15.72	(97, 170)
74	$3.000 \times 10^8$	0.500	8.43	202.0	3.16	3.9	5.11	0.08	0.65	0.95	12	12.83	(97, 192)
75	$4.000 \times 10^8$	0.100	12.38	89.3	0.10	0.1	0.22	—	0.19	0.25	7	—	(97, 192)
76	$4.000 \times 10^8$	0.150	12.52	98.8	0.89	1.4	0.84	1.27	0.48	0.97	12	—	(97, 192)
77	$4.000 \times 10^8$	1.000	10.33	432.5	13.02	7.0	9.80	0.07	0.74	0.90	11	9.71	(121, 256)
78	$4.000 \times 10^8$	2.000	10.55	845.0	30.59	8.6	13.97	0.07	0.73	0.81	10	8.96	(121, 256)
79	$5.000 \times 10^8$	0.070	14.70	77.9	0.07	0.1	0.16	—	0.17	0.24	7	—	(97, 192)
80	$5.000 \times 10^8$	0.150	14.28	116.8	1.07	1.2	0.87	0.91	0.49	0.97	12	—	(97, 192)
81	$7.000 \times 10^8$	0.200	18.93	236.2	0.86	0.3	0.59	9.28	0.36	0.30	9	—	(121, 256)
82	$7.000 \times 10^8$	0.500	15.35	375.5	8.28	2.9	4.70	0.15	0.68	0.94	11	8.95	(121, 256)
83	$7.000 \times 10^8$	1.440	15.64	1018.0	27.55	3.8	6.94	0.11	0.68	0.85	12	10.42	(121, 256)
84	$7.000 \times 10^8$	5.000	15.18	3286.8	131.81	6.2	7.86	0.12	0.56	0.70	9	8.87	(121, 256)
						$E = 10^{-6}$							
85	$8.000 \times 10^8$	2.000	1.37	243.0	0.04	1.5	3.27	0.68	0.23	0.91	39	72.58	(161, 341)
86	$1.000 \times 10^9$	1.000	1.67	141.9	0.15	7.6	15.12	0.76	0.63	0.81	29	25.77	(161, 426)
87	$2.000 \times 10^9$	0.150	2.84	57.1	0.04	1.8	0.82	—	0.32	0.93	22	—	(161, 341)
88	$2.000 \times 10^9$	0.250	3.42	97.9	0.14	3.5	3.70	1.33	0.49	0.77	24	—	(193, 426)
89	$2.000 \times 10^9$	0.500	4.93	176.5	1.22	19.8	19.65	0.21	0.82	0.90	17	16.90	(161, 426)
90	$2.000 \times 10^9$	1.000	4.98	340.9	2.65	22.9	37.09	0.03	0.84	0.92	12	13.22	(193, 426)
91	$2.000 \times 10^9$	2.000	5.69	525.9	11.74	85.3	83.90	0.02	0.91	0.93	11	8.86	(193, 426)
92	$2.800 \times 10^9$	0.500	6.98	259.5	1.72	12.8	16.58	0.03	0.78	0.88	18	15.63	(193, 426)
93	$5.500 \times 10^9$	0.400	12.78	358.0	3.61	11.3	12.36	0.12	0.80	0.88	22	11.07	(289, 426)
94	$1.000 \times 10^{10}$	0.500	20.05	580.9	11.53	17.2	17.52	0.02	0.87	0.94	13	9.64	(321, 512)
95	$2.660 \times 10^{10}$	0.456	41.22	1085.6	30.10	11.8	11.11	0.04	0.90	0.94	11	8.76	(361, 512)

# Geomagnetic semblance and dipolar–multipolar transition in top-heavy double-diffusive geodynamo models

Théo Tassin<sup>1</sup>, Thomas Gastine<sup>1</sup> and Alexandre Fournier<sup>1</sup>

Université de Paris, Institut de Physique du Globe de Paris, CNRS, F-75005 Paris, France. E-mail: [tassin@ipgp.fr](mailto:tassin@ipgp.fr)

Accepted 2021 April 12. Received 2021 April 1; in original form 2020 December 18

## SUMMARY

Convection in the liquid outer core of the Earth is driven by thermal and chemical perturbations. The main purpose of this study is to examine the impact of double-diffusive convection on magnetic field generation by means of 3-D global geodynamo models, in the so-called ‘top-heavy’ regime of double-diffusive convection, when both thermal and compositional background gradients are destabilizing. Using a linear eigensolver, we begin by confirming that, compared to the standard single-diffusive configuration, the onset of convection is facilitated by the addition of a second buoyancy source. We next carry out a systematic parameter survey by performing 79 numerical dynamo simulations. We show that a good agreement between simulated magnetic fields and the geomagnetic field can be attained for any partitioning of the convective input power between its thermal and chemical components. On the contrary, the transition between dipole-dominated and multipolar dynamos is found to strongly depend on the nature of the buoyancy forcing. Classical parameters expected to govern this transition, such as the local Rossby number—a proxy of the ratio of inertial to Coriolis forces—or the degree of equatorial symmetry of the flow, fail to capture the dipole breakdown. A scale-dependent analysis of the force balance instead reveals that the transition occurs when the ratio of inertial to Lorentz forces at the dominant length scale reaches 0.5, regardless of the partitioning of the buoyancy power. The ratio of integrated kinetic to magnetic energy  $E_k/E_m$  provides a reasonable proxy of this force ratio. Given that  $E_k/E_m \approx 10^{-4} - 10^{-3}$  in the Earth’s core, the geodynamo is expected to operate far from the dipole–multipole transition. It hence appears that the occurrence of geomagnetic reversals is unlikely related to dramatic and punctual changes of the amplitude of inertial forces in the Earth’s core, and that another mechanism must be sought.

**Key words:** Composition and structure of the core; Core; Dynamo: theories and simulations; Magnetic field variations through time; Numerical modelling.

## 1 INTRODUCTION

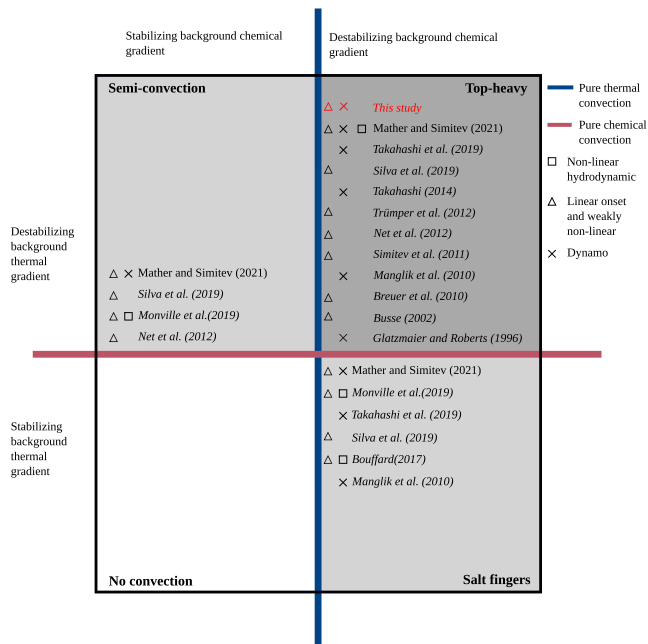
The exact composition of Earth’s core remains unclear but it is admitted that it is mainly composed of iron and nickel with a mixture of lighter elements in liquid state, such as silicon or oxygen (see Hirose *et al.* 2013, for a review). The ongoing crystallization of the inner core releases light elements and latent heat at the inner-core boundary (ICB), while the mantle extracts thermal energy from the outer core at the core–mantle boundary (CMB). This combination of processes is responsible for the joint presence of thermal and chemical inhomogeneities within the outer core.

Convection with two distinct sources of mass anomaly is termed *double-diffusive* convection (e.g. Radko 2013). A key physical parameter of double-diffusive convection is the Lewis number  $Le$ , defined as the ratio of the thermal diffusivity  $\kappa_T$  to the chemical diffusivity  $\kappa_\xi$ . In the liquid core of terrestrial planets,  $Le$  reaches at least  $10-10^4$  (e.g. Loper & Roberts 1981; Li *et al.* 2000).

Under double-diffusive conditions, the increase of the background density with depth does not necessarily imply the stability of the fluid in response to perturbations. As shown in Fig. 1, three configurations can be considered:

- (i) The *salt fingering* regime, when the background thermal gradient  $\nabla T_0$  is stabilizing and the mean compositional gradient  $\nabla \xi_0$  is destabilizing.
- (ii) The *semi-convection* regime, when  $\nabla T_0$  is destabilizing and  $\nabla \xi_0$  is stabilizing.
- (iii) The *top-heavy convection* regime (also known as double-buoyant), when both  $\nabla T_0$  and  $\nabla \xi_0$  are destabilizing.

These three cases correspond to three quadrants in Fig. 1, which is inspired by Ruddick (1983). Note that being located inside one of these three quadrants does not necessarily guarantee that convection occurs, since, for all configurations, the onset does not coincide with the origin of the diagram: a critical contrast in temperature,



**Figure 1.** Schematic overview of previous studies on double-diffusive convection and dynamo action in terrestrial interiors, inspired by the regime diagram of Ruddick (1983). The parameter space has two independent directions, defined by the prescribed background temperature and composition gradients, respectively. It is divided into four quadrants, since each gradient can have a stabilizing or destabilizing effect on fluid motion. The vertical and horizontal lines correspond to purely thermal and purely chemical convection, respectively (in which case there exists a unique destabilizing background profile). The publications that appear in the three quadrants of dynamic interest are the following: Glatzmaier & Roberts (1996), Busse (2002), Breuer *et al.* (2010), Manglik *et al.* (2010), Simitev (2011), Net *et al.* (2012), Trümper *et al.* (2012), Takahashi (2014), Bouffard (2017), Monville *et al.* (2019), Silva *et al.* (2019), Takahashi *et al.* (2019) and Mather & Simitev (2021). Crosses denote dynamo studies, triangles linear and weakly non-linear hydrodynamic studies and squares non-linear hydrodynamic studies.

or composition or both, is required to trigger convective motions. In addition, this diagram does not account for the influence of background rotation (see Monville *et al.* 2019, for the impact of rotation on the onset in the salt fingers regime), or a magnetic field, on the onset.

Double-diffusive convection has been extensively studied in physical oceanography (e.g. Radko 2013), as heat and salinity provide two different sources of buoyancy for seawater, as well as in stellar interiors (e.g. Spiegel 1972), where the molecular diffusivity of composition is only a tiny fraction of the diffusivity of temperature (e.g. Moll *et al.* 2016, and references therein). To our knowledge, a limited number of studies have been devoted to the analysis of double-diffusive convection in the context of Earth’s core, or more generally in the context of the metallic core of terrestrial planets. They are listed in Fig. 1, with possibly several occurrences of a given study when several of the aforementioned regimes were considered. It appears that the top-heavy configuration has been investigated the most; this is also the configuration we shall focus on in this work.

Previous studies devoted to the top-heavy regime are listed in the top-right quadrant of Fig. 1, starting with hydrodynamic, non-magnetic studies. Considering the  $Le \gg 1$  limit for a fluid filling a rapidly rotating annulus, Busse (2002) theoretically predicted that

the addition of chemical buoyancy facilitated the onset of standard thermal convection, in two ways. First by lowering the critical value of the Rayleigh number required to trigger the classical spiralling thermal Rossby waves of size and frequency proportional to  $E^{1/3}$  and  $E^{-2/3}$ , respectively, where  $E = \nu/\Omega D^2$  is the non-dimensional Ekman number,  $\nu$  being the kinematic viscosity,  $\Omega$  the rotation rate and  $D$  the size of the fluid domain. Secondly, and more importantly, by enabling a second class of instability. The latter is characterized by a much lower onset, independent of  $E$ , a critical length scale of the order of the size of the fluid domain, and a very small frequency, proportional to  $E$ . Busse (2002) referred to this class of instability as ‘nearly steady’ (i.e. slow) convection, and he argued that it could facilitate ‘immensely’ convection in Earth’s core, though with several caveats (see Busse 2002, for details). Simitev (2011) pushed the analysis further for various  $Le$ , and stressed that the critical onset curve for convective instability in a rotating annulus forms disconnected regions of instabilities in the parameter space. In particular, the second family of modes (i.e. the slow modes) are stable whenever the compositional gradient is destabilizing. Trümper *et al.* (2012), Net *et al.* (2012) and Silva *et al.* (2019) studied the onset of double-diffusive convection in a spherical shell geometry. In the top-heavy regime with  $3 \leq Le \leq 10$ , Trümper *et al.* (2012) confirmed that the addition of a secondary buoyancy source facilitates the convective onset. Net *et al.* (2012) showed that the properties of the critical onset mode, such as its drift frequency or its azimuthal wave number, strongly depends on the fractioning between thermal and compositional buoyancy. Using a linear eigensolver, Silva *et al.* (2019) carried out a systematic survey of the onset of convection in spherical shells for the different double-diffusive regimes. In the top-heavy configuration with  $Le = 25$ , they showed that the convection onset is characterized by an abrupt change between the purely thermal and the purely compositional eigenmodes depending on the relative proportion of the two buoyancy sources. In addition, they demonstrated that the onset mode features the same asymptotic dependence on the Ekman number as classical thermal Rossby waves over the entire top-heavy regime (top-right quadrant of Fig. 1), thereby casting some doubt on the likelihood of the occurrence of slow modes.

Trümper *et al.* (2012) performed a series of non-linear, moderately supercritical, rotating convection calculations at constant  $Le = 10$ , for different proportions of chemical and thermal driving. To that end, they conducted a parameter survey, varying the chemical and thermal Rayleigh numbers, to be defined below, while keeping their sum constant. This way of sampling the parameter space, however, does not guarantee that the total buoyancy input power stays constant. This complicates the interpretation of their results, for instance regarding the influence of compositional and thermal forcings on the convective flow properties.

Let us now turn our attention to the few self-consistent dynamo calculations in the top-heavy regime published to date (marked with a cross in the top-right quadrant of Fig. 1). The first integration was reported by Glatzmaier & Roberts (1996). This calculation was an anelastic, double-diffusive extension of the celebrated Boussinesq simulation of the geodynamo by Glatzmaier & Roberts (1995). Glatzmaier & Roberts (1996) assumed enhanced and equal values of the diffusivities, that is  $Le = 1$ . Consequently, that simulation did not exhibit stark differences with the purely thermal convective model, except that the dipole did not reverse over the course of the simulated 40 000 yr. The second numerical investigation of geodynamo models driven by top-heavy convection was conducted by Takahashi (2014). His models were based on the Boussinesq approximation with  $Le = 10$  and relatively large Ekman numbers

( $E \geq 2 \times 10^{-4}$ ). In addition, Mather & Simitev (2021) identified a few top-heavy Boussinesq dynamos with  $Le = 25$  and  $E = 10^{-4}$ , that used stress-free mechanical boundary conditions and appeared to be close to onset. Top-heavy dynamo simulations were also performed by Manglik *et al.* (2010) and Takahashi *et al.* (2019) in the context of modelling Mercury's dynamo.

Double-diffusive models of the geodynamo are the exception rather than the rule, essentially on the account of Occam's razor. Efforts carried out in the community since the mid-1990s have been towards understanding the most salient properties of the geomagnetic field using a minimum number of ingredients (e.g. Wicht & Sanchez 2019, for a review). To that end, the *codensity* formalism introduced by Braginsky & Roberts (1995) is particularly attractive: it assumes that the molecular values of  $\kappa_\xi$  and  $\kappa_T$  can be replaced by a single turbulent transport property. Consequently, the mass anomaly field can be described by a single scalar, termed the codensity, that aggregates the two sources of mass anomaly. This approach has the benefit of (i) removing one degree of freedom and (ii) mitigating the numerical cost by suppressing the scale separation between chemical and thermal fields when  $Le \gg 1$ . With regard to Fig. 1, this amounts to restricting the diagram to either the vertical or the horizontal line.

The codensity formalism was quite successful in reproducing some of the best constrained features of the geomagnetic field and its secular variation (e.g. Christensen *et al.* 2010; Aubert *et al.* 2013; Schaeffer *et al.* 2017; Wicht & Sanchez 2019). Most geodynamo models actually assume that the diffusivity of the codensity field equals the kinematic viscosity, yielding a Prandtl number of unity. A remarkable property of the geodynamo that remains to be explained satisfactorily from the numerical modelling standpoint, is its ability to reverse its polarity every once in a while, that is to go from a dipole-dominated state to another dipole-dominated state through a transient multipolar state (see e.g. Valet & Fournier 2016, for a recent review of the relevant palaeomagnetic data). A possibility is that the geodynamo has been, at least punctually in its history, in a dynamic state that can enable the switch between dipole-dominated and multipolar states to occur. A key question that follows is therefore: what are the physical processes that control the transition between dipole-dominated dynamos and multipolar dynamos? This has been analysed intensively numerically, starting with the systematic approach of Kutzner & Christensen (2002), who demonstrated that a stronger convective driving led to a dipole breakdown, and that for intermediate values of the forcing, the simulated field could oscillate between dipolar and multipolar states.

Sreenivasan & Jones (2006) showed that an increasing role of inertia (through stronger driving) perturbed the dominant Magneto–Archimedean–Coriolis force balance to the point that it led to a less structured and less dipole-dominated magnetic field. In the same vein, Christensen & Aubert (2006) assumed that the transition is due to a competition between inertia and Coriolis force. They introduced a diagnostic quantity termed the *local Rossby number*  $Ro_L = u_{\text{rms}}/\Omega L$ , as a proxy of this force ratio. Here  $u_{\text{rms}}$  denotes the average flow speed and  $L$  is an integral measure of the convective flow scale. Based on their ensemble of simulations, Christensen & Aubert (2006) concluded that the breakdown of the dipole occurred above a critical value of about  $Ro_L \simeq 0.12$ , in what appeared a relatively sharp transition (see also Christensen 2010). If this reasoning gives a satisfactory account of the numerical data set, its extrapolation to Earth's core regime raises questions (e.g. Oruba & Dormy 2014). Since the geomagnetic dipole reversed in the past, the numerical evidence collected so far (see Wicht & Tilgner 2010,

for a review) suggests that the geodynamo could lie close to the transition between dipolar and multipolar states. This implies that  $Ro_L$  could be of the order of 0.1 for the Earth's core. Geomagnetic reversals should then reflect the action of a convective feature of scale  $L$  of about 50 m (see Davidson 2013; Aubert *et al.* 2017). It is very unlikely that such a small-scale flow could significantly alter a dipole-dominated magnetic field.

According to Soderlund *et al.* (2012), the breakdown of the dipole is rather due to a decrease of the relative helicity of the flow. In numerical dynamo simulations, coherent helicity favours large-scale poloidal magnetic field through the  $\alpha$ -effect (see Parker 1955) at work in convection columns and it therefore contributes actively to the production and the maintenance of dipolar field (e.g. Olson *et al.* 1999). Conversely, the dipolar field can promote a more helical flow, with the Lorentz force enhancing the flow along the axis of convection columns, as shown by Sreenivasan & Jones (2011). By measuring the integral force balance for dipolar and multipolar numerical dynamos, Soderlund *et al.* (2012) noted that the Coriolis force remained dominant, even in multipolar models. Accordingly, they suggested that, in their models, the modification of the flow structure was rather controlled by a competition of second-order forces, with the ratio of inertia to viscous forces as the parameter controlling the transition.

The role played by viscous effects was further stressed by Oruba & Dormy (2014), who proposed that the transition from dipolar to multipolar dynamos in the numerical data set was controlled by a triple force balance between Coriolis force, viscosity and inertia. A local Rossby number constructed using the viscous lengthscale,  $E^{1/3} \mathcal{D}$ , as opposed to the integral scale  $L$  discussed above, carries the same predictive power in separating dipolar from multipolar dynamo models (their Fig. 4). This argument was subsequently refined by Garcia *et al.* (2017), who included the Prandtl number dependence of the critical convective length scale when defining the local Rossby number. From a mechanistic point of view, Garcia *et al.* (2017) showed that the dipole breakdown was not necessarily correlated to a decrease of the relative helicity, but rather to a weakening of the equatorial symmetry of the flow. Introducing the proportion of kinetic energy contained in this equatorially symmetric component, they demonstrated that the transition could be satisfactorily explained by a sharp decrease of that quantity when the refined local Rossby number exceeded a value of 0.2 (their fig. 3d). This would imply that the transition from a dipolar state to a multipolar state would essentially be a hydrodynamic transition. Discussing the implication of their results for the geodynamo, they clearly stated that the role of inertia was presumably overestimated in the numerical data set that had been investigated so far, stressing the need for stronger field dynamos, where the magnetic field could possibly have an active role.

The early numerical data set admittedly contained a majority of dynamos operating at large Ekman numbers, and relatively low magnetic Prandtl number  $Pm$ . In the dynamos studied by Soderlund *et al.* (2012), the convective flow was not dramatically altered by the presence of a self-sustained magnetic field. Since then, a large number of simulations have been published with lower values of  $E$  and comparatively larger values of  $Pm$  (Yadav *et al.* 2016; Schaeffer *et al.* 2017; Schwaiger *et al.* 2019; Menu *et al.* 2020). For those strong-field dynamos, in the sense of a ratio of bulk magnetic energy to bulk kinetic energy larger than one, the magnetic field has a significant impact on the flow, and on the dipolar–multipolar transition. Menu *et al.* (2020) reported simulations with a prevailing Lorentz force, that remain dipolar way beyond the supposedly critical  $Ro_L \simeq 0.12$  value. Given that Earth hosts a strong-field dynamo, it is

then worth investigating whether the competition between Lorentz force and inertia may actually lead to the transition.

In order to shed light on this particular issue, and to further strengthen our understanding of double-diffusive dynamos, we have performed a suite of 79 novel dynamo models, comprising 44, 20, 15 simulations with top-heavy, purely thermal, purely chemical driving, respectively. The goal of this work is twofold: on the one hand, we will follow an approach similar to that of Takahashi (2014) and study to which extent the relative proportion of chemical to thermal driving impacts the earth-likeness (in a morphological sense) of the simulated magnetic fields. On the other hand, we will examine whether this proportion has an impact on the dipolar to multipolar transition. Takahashi (2014) reported a drop of the dipolarity when the relative contribution of thermal convection to the total input power exceeds 65 per cent. We will analyse whether this was a fortuitous consequence of the cases he considered, and whether we can find a more general rationale to explain the transition, by careful inspection of the force balance at work.

This paper is organized as follows: the derivation of the governing equations and their numerical approximations are presented in Section 2. The results are described in Section 3. We proceed by firstly investigating the onset of convection for top-heavy convection. The impact of the input power distribution on the Earth-likeness is then explored. Finally we examine the transition between dipolar and multipolar dynamos. Section 4 discusses the results and their geophysical implications.

## 2 MODEL AND METHODS

### 2.1 Hypotheses

We operate in spherical coordinates  $(r, \theta, \varphi)$  and consider a spherical shell of volume  $V_o$  filled with a fluid delimited by the ICB, located at the radius  $r_i$ , on one side and by the CMB, located at the radius  $r_o$ , on the other side with  $r_i/r_o = 0.35$ . The shell rotates about the  $\hat{\mathbf{z}}$ -axis with a constant rotation rate  $\Omega$ , where  $\hat{\mathbf{z}}$  is the unit vector in the direction of rotation. The equation of state

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha_T(T - T_0) - \alpha_\xi(\xi - \xi_0)], \quad (1)$$

describes how the density of the fluid  $\rho$  varies with temperature  $T$  and composition  $\xi$ . In this equation,  $\alpha_T$  and  $\alpha_\xi$  are the coefficients of thermal and chemical expansion,  $T_0$ ,  $\rho_0$  and  $\xi_0$  the average temperature, density and composition of lighter elements in the outer core.

The properties of the fluid, including its kinematic viscosity  $\nu$ , its magnetic diffusivity  $\eta$ , its specific heat  $C_p$ , its chemical and thermal diffusivity ( $\kappa_\xi$ ,  $\kappa_T$ ), its coefficients of thermal and chemical expansion ( $\alpha_T$ ,  $\alpha_\xi$ ) are assumed to be spatially uniform and constant in time. Due to the almost uniform density in the outer core, we also assume a linear variation of the acceleration of gravity  $\mathbf{g}$  with radius. The physical and thermodynamic properties of the Earth's core relevant for this study are given in Table 1.

### 2.2 Governing equations

Convection of an electrically conducting fluid gives rise to a magnetic field  $\mathbf{B}$ . The state of the fluid is then described by the velocity field  $\mathbf{u}$ , the magnetic field  $\mathbf{B}$ , the pressure  $p$ , the temperature  $T$  and the composition  $\xi$ . The equations governing the dynamics of the flow under the Boussinesq approximation are cast in a non-dimensional form. We adopt the thickness of the shell  $\mathcal{D} = r_o - r_i$

as reference length scale and the viscous diffusion time  $\mathcal{D}^2/\nu$  as timescale. A velocity scale is then given by  $\nu/\mathcal{D}$ . Composition is scaled by  $\partial\xi = |\partial_r \xi(r_i)|\mathcal{D}$ , pressure by  $\rho_0(\nu/\mathcal{D})^2$ , power by  $\nu^3 \rho_0/\mathcal{D}$  and magnetic induction by  $\sqrt{\rho_0 \mu_0 \eta \Omega}$ , where  $\mu_0$  is the magnetic permeability of vacuum. Temperature unit is based on the temperature gradient at  $r_i$ ,  $\partial T = |\partial_r T(r_i)|\mathcal{D}$ , or at  $r_o$ ,  $\partial T = |\partial_r T(r_o)|\mathcal{D}$ , depending on the thermal boundary conditions. Under the Boussinesq approximation, the equation for the conservation of mass is

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

The dynamics of the flow is described by the Navier–Stokes equation, expressed in the frame rotating with the mantle

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{2}{E} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + \left( \frac{Ra_T}{Pr} T + \frac{Ra_\xi}{Sc} \xi \right) \frac{r}{r_o} \hat{\mathbf{r}} - \nabla p + \frac{1}{E Pm} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3)$$

where  $\hat{\mathbf{r}}$  is the unit vector in the radial direction. The time evolution of the magnetic field under the magnetohydrodynamics approximation is given by the induction equation

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{with} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Finally, the evolution of entropy and composition are governed by the similar transport equations

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T + h^T, \quad (5)$$

and

$$\partial_t \xi + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \frac{1}{Sc} \nabla^2 \xi + h^\xi, \quad (6)$$

where  $h^T$  is a volumetric internal heating and  $h^\xi$  a chemical volumetric source.

The set of eqs (2)–(6) is governed by 6 dimensionless numbers: The Ekman number  $E$  expresses the ratio between viscous and Coriolis forces

$$E = \frac{\nu}{\Omega \mathcal{D}^2},$$

the Prandtl (Schmidt) number between viscous and thermal (chemical) diffusivities

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa_T} \quad \text{and} \quad Sc = \frac{\nu}{\kappa_\xi}$$

and the magnetic Prandtl number between viscous and magnetic diffusivities

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}.$$

The thermal and chemical Rayleigh numbers

$$Ra_T = \frac{\alpha_T g_o \mathcal{D}^3 \partial T}{\nu \kappa_T} \quad \text{and} \quad Ra_\xi = \frac{\alpha_\xi g_o \mathcal{D}^3 \partial \xi}{\nu \kappa_\xi},$$

where  $g_o$  is the gravitational acceleration at the CMB, measure the vigour of thermal and chemical convection. Note that the Lewis number  $Le$  discussed in the Introduction is the ratio of the Schmidt number to the Prandtl number,

$$Le = \frac{\kappa_T}{\kappa_\xi} = \frac{Sc}{Pr}.$$

Table 2 provides estimates of these control parameters for the Earth's core. These non-dimensional number express the ratio of characteristic physical timescales

$$E = \frac{\tau_\Omega}{\tau_\nu}, \quad Pm = \frac{\tau_\eta}{\tau_\nu} \quad \text{and} \quad Le = \frac{\tau_\xi}{\tau_T},$$

**Table 1.** Physical and thermodynamic parameters of Earth’s outer core relevant for this study. The corresponding references are listed in the rightmost column, which may comprise several entries if a bracket of values is provided.

Definition	Symbol	Value	Reference (lower bound–upper bound)
Inner radius	$r_i$	1221.5 km	Dziewonski & Anderson (1981)
Outer radius	$r_o$	3480 km	Dziewonski & Anderson (1981)
Earth angular velocity	$\Omega$	$7.29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	
Gravitational acceleration at CMB	$g_o$	$10.68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	Dziewonski & Anderson (1981)
Core density at CMB	$\rho_o$	$9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	Dziewonski & Anderson (1981)
Specific heat	$C_p$	$(850 \pm 80) \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	Labrosse (2003)
Heating power from core	$Q$	$6 - 16 \text{ TW}$	Buffett (2015)
Thermal conductivity at CMB	$k_T$	$25 - 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	Konôpková <i>et al.</i> (2016), Pozzo <i>et al.</i> (2013), Zhang <i>et al.</i> (2020)
Thermal diffusivity	$\kappa_T$	$(0.3 - 1.4) \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Estimated using values of $k_T$ , $\rho_o$ and $C_p$ .
Coefficient of thermal expansion	$\alpha_T$	$(1.3 \pm 0.1) \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	Labrosse (2003)
Kinematic viscosity	$\nu$	$10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Roberts & King (2013)
Magnetic diffusivity	$\eta$	$0.5 - 2.9 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Pozzo <i>et al.</i> (2013), Konôpková <i>et al.</i> (2016)
Estimated magnetic field strength	$B_{\text{rms}}$	$4 \times 10^{-3} \text{ T}$	Gillet <i>et al.</i> (2010)
Superadiabatic composition contrast	$\Delta\xi$	0.02 - 0.053	Badro <i>et al.</i> (2007), Anufriev <i>et al.</i> (2005)
Chemical diffusivity	$\kappa_\xi$	$(3 \times 10^{-9} - 4.2 \times 10^{-7}) \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	Loper & Roberts (1981), Li <i>et al.</i> (2000)
Coefficient of chemical expansion	$\alpha_\xi$	0.6 - 0.83	Braginsky & Roberts (1995), Labrosse (2015)
Estimated flow velocity	$u_{\text{rms}}$	$(0.3 - 2.0) \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	Finlay & Amit (2011)

**Table 2.** Dimensionless control parameters. The two rightmost columns provide estimates of these parameters for Earth’s core and the values spanned by the simulations computed in this study. Earth’s core values were estimated thanks to Table 1.

Name	Symbol	Definition	Core	This study
Ekman	$E$	$\nu/\Omega D^2$	$10^{-15}$	$10^{-5}-10^{-4}$
Thermal Rayleigh	$Ra_T$	$\alpha_T g_o D^3 \partial T / \nu \kappa_T$	$10^{26}-10^{28}$	$10^6-10^{10}$
Chemical Rayleigh	$Ra_\xi$	$\alpha_\xi g_o D^3 \partial \xi / \nu \kappa_\xi$	$10^{30}-10^{33}$	$10^7-10^{12}$
Magnetic Prandtl	$Pm$	$\nu/\eta$	$(3.4-20) \times 10^{-7}$	0.5–5
Thermal Prandtl	$Pr$	$\nu/\kappa_T$	0.08–0.25	0.3
Schmidt	$Sc$	$\nu/\kappa_\xi$	2–300	3
Lewis	$Le$	$\kappa_T/\kappa_\xi$	9–4000	10

**Table 3.** Characteristic timescales for the Earth’s core. The values were estimated thanks to Table 1.

Name	Symbol	Definition	Core
Typical rotation time	$\tau_\Omega$	$1/\Omega$	4 hr
Turnover time	$\tau_{\text{adv}}$	$D/u_{\text{rms}}$	30–250 yr
Magnetic diffusion time	$\tau_\eta$	$D^2/\eta$	$10^5-10^6$ yr
Thermal diffusion time	$\tau_T$	$D^2/\kappa_T$	$10^9-10^{10}$ yr
Viscous diffusion time	$\tau_\nu$	$D^2/\nu$	$10^{11}$ yr
Chemical diffusion time	$\tau_\xi$	$D^2/\kappa_\xi$	$10^{11}-10^{13}$ yr

where  $\tau_\Omega = 1/\Omega$  is the typical rotation time,  $\tau_\nu = D^2/\nu$  the viscous diffusion time,  $\tau_\eta = D^2/\eta$  the magnetic diffusion time,  $\tau_T = D^2/\kappa_T$  the thermal diffusion time and  $\tau_\xi = D^2/\kappa_\xi$  the chemical diffusion time.

Earth’s outer core evolves on a broad range of timescales, as one can glean from the inspection of Table 3. In particular, even if the evolution of temperature and composition are governed by similar transport equations (see eqs 5 and 6), thermal diffusion is much more efficient than chemical diffusion, which causes the Lewis number to greatly exceeds unity (see Table 2). This implies that the typical lengthscale of chemical heterogeneities is possibly several orders of magnitude smaller than the length scale of thermal heterogeneities. The values of the control parameters spanned by the simulations presented in this work are discussed in section 2.6.

### 2.3 Boundary conditions

The inner core is growing and is ejecting light elements because of its crystallization, which in principle yields coupled boundary conditions for temperature and composition (e.g. Glatzmaier & Roberts 1996; Anufriev *et al.* 2005). For the sake of simplicity, thermal and chemical boundary conditions are considered as decoupled here, as in for example Takahashi (2014). We consider two different setups to explore the impact of varying the thermal boundary conditions:

(i) *Fixed fluxes*: thermal and composition fluxes are imposed at both boundaries with

$$\begin{cases} \partial_r T(r_i) = -1, & \partial_r T(r_o) = 0, \\ \partial_r \xi(r_i) = -1, & \partial_r \xi(r_o) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

(ii) *Hybrid*: temperature is fixed at the ICB while the temperature flux is imposed at the CMB, the boundary conditions on chemical composition are the same as in the previous setup

$$\begin{cases} T(r_i) = 0, & \partial_r T(r_o) = -1, \\ \partial_r \xi(r_i) = -1, & \partial_r \xi(r_o) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

No-slip mechanical boundary conditions are used at both boundaries. The mantle is assumed to be insulating, such that the magnetic field at the CMB has to match a source-free potential field. The inner core is treated as a rigid electrically conducting sphere which can freely rotate around the  $\hat{z}$ -axis (e.g. Hollerbach 2000; Wicht 2002). Its rotation is a response to the viscous and magnetic torques exerted by the outer core on the inner core. The conductivity of the inner core is assumed to be equal to that of the outer core, and its

moment of inertia is calculated by using the same density as the liquid outer core.

## 2.4 Numerical approach

We solve the system of eqs (2)–(6) using the open-source geodynamo code MagIC<sup>1</sup> (Wicht 2002; Gastine *et al.* 2016). This code has been validated against a benchmark for double-diffusive convection initiated by Breuer *et al.* (2010).

The solenoidal vectors  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{B}$  are decomposed in poloidal and toroidal potentials

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \nabla \times [W(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{r}}] + \nabla \times [Z(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{r}}], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \nabla \times [G(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{r}}] + \nabla \times [H(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{r}}], \end{cases}$$

where  $\mathbf{r}$  is the radius vector. The new unknowns are then  $W$ ,  $Z$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $T$ ,  $\xi$  and  $p$ .

Each of these scalar fields is expanded in spherical harmonics to maximum degree and order  $\ell_{\max}$  in the horizontal direction. The spherical harmonic representation of the magnetic poloidal potential  $G$  reads

$$G(r, \theta, \varphi, t) \simeq \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} G_{\ell m}(r, t) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi),$$

where  $G_{\ell m}(r, t)$  is the coefficient associated to  $Y_{\ell}^m$ , the spherical harmonic of degree  $\ell$  and order  $m$ . The non-linear terms are calculated in physical space. The open-source SHTns library<sup>2</sup> (see Schaeffer 2013) is used to compute the forward and inverse spectral transforms on the unit-sphere.

In the radial direction, MagIC uses either a finite difference scheme, or a Chebyshev collocation method (see Boyd 2001). The finite difference grid, whose number of points is denoted by  $N_r$ , is regularly spaced in the bulk of the domain and follows a geometric progression near the boundaries (see Dormy *et al.* 2004). When the collocation approach is selected, Chebyshev polynomials are truncated at degree  $N$  and the  $N_r$  collocation points  $r_k$  are defined by

$$\forall k \in \llbracket 1, N_r \rrbracket, \begin{cases} r_k = \frac{1}{2} [(r_o - r_i)x_k + r_o + r_i] \\ x_k = \cos \left[ \frac{(k-1)\pi}{N_r - 1} \right]. \end{cases} \quad (9)$$

Due to the particular choice of spatial grid given by the equation above, the transforms between physical grid and Chebyshev representation are carried out by fast discrete cosine transform (see Press *et al.* 1992, chapter 12). This discretization yields a point densification close to the boundaries which could impose severe time step restrictions when the magnetic field is strong (see Christensen *et al.* 1999). To mitigate this effect, we adopt the mapping proposed by Kosloff & Tal-Ezer (1993) and replace  $x_k$  in eq. (9) by

$$\forall k \in \llbracket 1, N_r \rrbracket, X_k = \frac{\arcsin(\alpha x_k)}{\arcsin(\alpha)} \quad \text{with } \alpha \in ]0, 1],$$

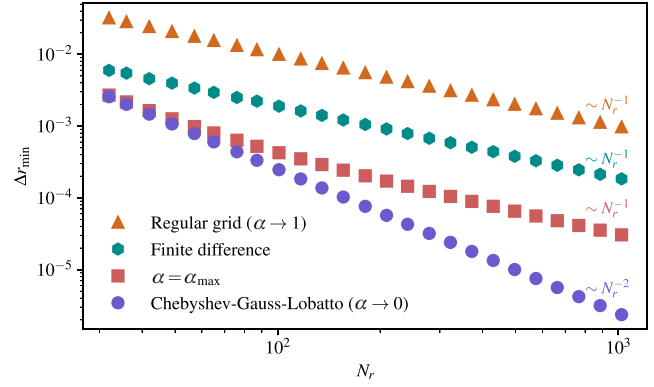
where  $\alpha$  is the mapping coefficient. To maintain the spectral convergence of the simulation  $\alpha$  has to verify

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = \left\{ \cosh \left[ \frac{|\ln(\epsilon)|}{N_r - 1} \right] \right\}^{-1}, \quad (10)$$

where  $\epsilon$  is the machine precision.

<sup>1</sup><https://magic-sph.github.io/>

<sup>2</sup><https://bitbucket.org/nschaeff/shtns>



**Figure 2.** Minimal grid spacing  $\Delta r_{\min}$  between two radial points as a function of the number of collocation points  $N_r$  for a regularly spaced grid, the grid used when finite differences are used, the collocation grid with the mapping by Kosloff & Tal-Ezer (1993) with a mapping coefficient  $\alpha_{\max}$  (eq. 10) and the standard Gauss–Lobatto grid.

Fig. 2 shows the minimum grid spacing  $\Delta r_{\min}$  as a function of  $N_r$  for a regular grid, the finite difference grid with geometrical clustering near the boundaries, and two collocation grids, with  $\alpha \rightarrow 0$  (Gauss–Lobatto grid) and  $\alpha = \alpha_{\max}$ . Because  $\Delta r_{\min} \sim N_r^{-2}$  when using the classical Gauss–Lobatto grid, adopting the mapping by Kosloff & Tal-Ezer (1993) yields a possible increase of  $\Delta r_{\min}$  by a factor 2–3 when  $N_r \gtrsim 100$ . The time step size could in principle rise by a comparable amount, should it be controlled by the propagation of Alfvén waves in the vicinity of the boundaries (Christensen *et al.* 1999). Using the finite difference method enables even larger grid spacing and hence possible additional gain in the time step size. This speed-up shall however be mitigated by the fact that  $N_r$  has to be increased by a factor 1.5–3 when using finite differences to achieve an accuracy comparable to that of the Chebyshev collocation method (see Christensen *et al.* 2001; Matsui *et al.* 2016).

$G_{\ell m}$  is then expanded in truncated Chebyshev series

$$G_{\ell m}(r_k, t) \simeq \sqrt{\frac{2}{N_r - 1}} \sum_{n=0}^{N-1} G_{\ell mn}(t) T_n(r_k), \quad (11)$$

with

$$G_{\ell mn}(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{N_r - 1}} \sum_{n=1}^{N_r} G_{\ell m}(x_k, t) T_n(x_k),$$

where the double primes on the summations indicate that the first and the last indices are multiplied by one half (see Glatzmaier 1984). In the above equations,  $T_n(x_k)$  is the  $n$ -th order Chebyshev polynomial at the collocation point  $x_k$  defined by

$$T_n(x_k) = \cos[n \arccos(x_k)] = \cos \left[ \frac{\pi n(k-1)}{N_r - 1} \right].$$

Further details on spherical harmonics and Chebyshev polynomials expansion can be found in Tilgner (1999) and Christensen & Wicht (2015).

Once the spatial discretization has been specified, the set of eqs (2)–(6) complemented by the boundary conditions (see eqs 7 and 8) forms a semi-discrete system where only the time discretization remains to be expressed. As an example, the time evolution of the poloidal potential for the magnetic field  $G_{\ell m}(r_k)$  (see eq. 11) can be written as an ordinary differential equation

$$\begin{cases} \frac{dG_{\ell m}(r_k, t)}{dt} = \mathcal{E}[\mathbf{u}, \mathbf{B}] + \mathcal{I}[G_{\ell m}], \\ G_{\ell m}(x_k, t_0) = G_{\ell m}^0(x_k), \end{cases} \quad (12)$$

where  $G_{\ell m}^0(r_k)$  is the initial condition,  $\mathcal{E}$  a non linear-function of  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{B}$  and  $\mathcal{I}$  a linear function of  $G_{\ell m}$ . The above equation serves as a canonical example of the treatment of the different contributions: the non-linear terms are treated explicitly (function  $\mathcal{E}$ ) while the remaining linear terms are handled implicitly (function  $\mathcal{I}$ ). In MagIC, several implicit/explicit (IMEX) time schemes are used to time advance the set of eqs (2)–(6) from  $t$  to  $t + \delta t$ :

(i) A combination of a Crank–Nicolson for the implicit terms and a second-order Adams–Bashforth for the explicit terms called CNAB2 (see Glatzmaier 1984).

(ii) Two IMEX Runge–Kutta: PC2 (see Jameson *et al.* 1981) and BPR353 (see Boscarino *et al.* 2013).

CNAB2 has been commonly used in geodynamo models since the pioneering work of Glatzmaier (1984). IMEX Runge–Kutta schemes have been rarely used in the context of geodynamo models (Glatzmaier & Roberts 1996), rapidly rotating convection in spherical shells (Marti *et al.* 2016) or quasi-geostrophic models of 2-D convection (Gastine 2019). For IMEX Runge–Kutta schemes,  $s$  substages are solved to time-advance eq. (12) from  $t$  to  $t + \delta t$

$$G_{\ell m}^i(r_k) = G_{\ell m}(r_k, t) + \delta t \sum_{j=0}^i (a_{i,j}^{\mathcal{E}} \mathcal{E}^j + a_{i,j}^{\mathcal{I}} \mathcal{I}^j), \quad (13)$$

where  $i \in \llbracket 0, s \rrbracket$ ,  $G_{\ell m}^i$  is the intermediate solution at substage  $i$ ,  $\mathcal{E}^j = \mathcal{E}[\mathbf{B}, \mathbf{u}](t + c_j^{\mathcal{E}} \delta t)$  and  $\mathcal{I}^j = \mathcal{I}[G_{\ell m}](t + c_j^{\mathcal{I}} \delta t)$ .  $G_{\ell m}(r_k, t + \delta t)$  is then given by

$$G_{\ell m}(r_k, t + \delta t) = G_{\ell m}(r_k, t) + \delta t \sum_{j=0}^s (b_j^{\mathcal{E}} \mathcal{E}^j + b_j^{\mathcal{I}} \mathcal{I}^j) \quad (14)$$

In the above equations, the matrices  $\mathbf{a}^{\mathcal{I}}$  and  $\mathbf{a}^{\mathcal{E}}$  and the vectors  $\mathbf{b}^{\mathcal{I}}$ ,  $\mathbf{b}^{\mathcal{E}}$ ,  $\mathbf{c}^{\mathcal{E}}$  and  $\mathbf{c}^{\mathcal{I}}$  form the so-called Butcher tables of the IMEX Runge–Kutta schemes given in Appendix A. Since the last lines of  $\mathbf{a}^{\mathcal{E}, \mathcal{I}}$  are equal to  $\mathbf{b}^{\mathcal{E}, \mathcal{I}}$  for PC2 and BPR353, the last operation to retrieve  $G_{\ell m}(r_k, t + \delta t)$  (eq. 14) is actually redundant with the last substage (see Ascher *et al.* 1997). IMEX Runge–Kutta schemes require more computational operations to time advance the set of eqs (2)–(6) from  $t$  to  $t + \delta t$  than CNAB2. However, they allow larger time step sizes that compensate for this extra numerical cost (Marti *et al.* 2016) and they are more accurate and stable. Since BPR353 is a third-order scheme, it is particularly attractive to ensure an accurate equilibration of the most turbulent runs.

## 2.5 Simulation diagnostics

For each diagnostic quantity  $f$ , we adopt in the following overbars for time averaging and angle brackets for spatial averaging

$$\bar{f} = \frac{1}{t_{\text{avg}}} \int_{t_0}^{t_0+t_{\text{avg}}} f(t) dt \quad \text{and} \quad \langle f \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV,$$

where  $t_{\text{avg}}$  corresponds to the averaging time.

### 2.5.1 Integral quantities and scales

The magnetic  $E_m$  and kinetic  $E_k$  energies are given by

$$E_m(t) + E_k(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{V_o+V_i} \frac{\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)}{EPm} dV + \int_{V_o} \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) dV \right],$$

where  $V_i$  is the inner core volume. By multiplying the Navier–Stokes eq. (3) by  $\mathbf{u}$  and the induction eq. (4) by  $\mathbf{B}$ , we obtain the following

power balance:

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_m)(t) = P_T(t) + P_{\xi}(t) - D_v(t) - D_{\eta}(t).$$

In the case of double-diffusive convection, the energy is provided by chemical and thermal buoyancy power  $P_{\xi}$  and  $P_T$  defined by

$$\begin{cases} P_{\xi}(t) = V_o \left\langle \frac{Ra_{\xi}}{Sc} \xi(\mathbf{r}, t) \frac{r}{r_o} u_r(\mathbf{r}, t) \right\rangle_{V_o} \\ P_T(t) = V_o \left\langle \frac{Ra_T}{Pr} T(\mathbf{r}, t) \frac{r}{r_o} u_r(\mathbf{r}, t) \right\rangle_{V_o} \end{cases}$$

and dissipated by viscous and Ohmic dissipations  $D_v$  and  $D_{\eta}$  given by

$$\begin{cases} D_v(t) = V_o \langle [\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle_{V_o} \\ D_{\eta}(t) = (V_o + V_i) \left\langle \frac{[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]^2}{EPm^2} \right\rangle_{V_o+V_i}. \end{cases}$$

Once a statistically steady state has been reached, the input buoyancy powers should compensate the Ohmic and viscous dissipations. Following King *et al.* (2012), to assess the consistency of the numerical computations, we measure the time-average difference between input and output powers  $\Delta P$

$$\Delta P = 100 \times \frac{P_T + P_{\xi} - D_v - D_{\eta}}{P_T + P_{\xi}}.$$

We made sure that this difference remained lower than 1.5 per cent for all the simulations reported in this study. This value is below the 2 per cent threshold considered as sufficient to ensure the convergence of integral diagnostics (see King *et al.* 2012; Gastine *et al.* 2015). For each simulation, the total convective power  $P^{\text{tot}}$  and the relative thermal convective power  $P_T^{\%}$  are defined by

$$P^{\text{tot}} = \overline{P_T(t) + P_{\xi}(t)} \quad \text{and} \quad P_T^{\%} = \frac{P_T(t)}{P_T(t) + P_{\xi}(t)} \times 100. \quad (15)$$

$P_T^{\%}$  hence vanishes for a purely chemical forcing and is equal to 100 per cent for a purely thermal forcing.

Following Christensen & Aubert (2006) and Schwaiger *et al.* (2019), we introduce two quantities to characterize the typical flow lengthscale. The integral scale  $L$  already discussed in the introduction is obtained from the time-averaged kinetic energy spectrum

$$L = \pi \frac{2\overline{E_k(t)}}{\sum_{\ell} \ell \overline{\mathbf{u}^{\ell}(t) \cdot \mathbf{u}^{\ell}(t)}},$$

where  $\overline{\mathbf{u}^{\ell} \cdot \mathbf{u}^{\ell}}/2$  is the kinetic energy contained in spherical harmonic degree  $\ell$ , while the dominant lengthscale  $\widehat{\ell}$  is defined as the peak of the poloidal kinetic energy spectra (Schwaiger *et al.* 2019, 2021)

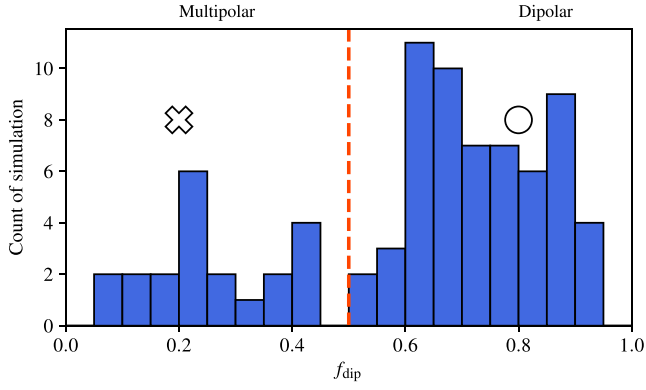
$$\widehat{\ell} = \text{argmax}_{\ell} \left[ \overline{E_{k,p}^{\ell}(t)} \right],$$

where  $E_{k,p}^{\ell}$  is the contribution of spherical harmonic degree  $\ell$  to the total poloidal kinetic energy.

In order to explore the impact of the equatorial symmetry of the flow on the dipole–multipole transition, we consider the relative equatorially symmetric kinetic energy  $\zeta$  introduced by Garcia *et al.* (2017)

$$\zeta = \frac{\overline{E_k^{\text{s,NZ}}}}{\overline{E_k^{\text{NZ}}}}, \quad (16)$$





**Figure 3.** Distribution of the dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  for the 79 numerical simulations of this study. Multipolar simulations are defined as having  $f_{\text{dip}} < 0.5$ , and they will be marked by a cross in subsequent figures. Dipolar simulations ones will be displayed using a circle. The vertical dashed line marks the  $f_{\text{dip}} = 0.5$  limit between dipolar and multipolar simulations.

where  $E_k^{\text{NZ}}$  is the kinetic energy contained in the non-zonal flow and  $E_k^{\text{S,NZ}}$  the kinetic energy contained in the equatorially symmetric part of the non-zonal flow.

We measure the mean convective flow amplitude either by the magnetic Reynolds number  $Rm$  or by the Rossby number  $Ro$  defined by

$$Rm = \frac{\overline{\sqrt{2E_k(t)}} Pm}{\tau_{\text{adv}}} = \frac{\tau_\eta}{\tau_{\text{adv}}}, \quad Ro = \frac{\overline{\sqrt{2E_k(t)}} E}{\tau_{\text{adv}}} = \frac{\tau_\Omega}{\tau_{\text{adv}}},$$

where  $\tau_{\text{adv}} = D/u_{\text{rms}}$  is the characteristic turnover time and  $u_{\text{rms}}$  the root mean square flow velocity. Following Christensen & Aubert (2006), we define a local Rossby number by

$$Ro_L = Ro \frac{D}{L}.$$

The dipolar character of the CMB magnetic field is quantified by its dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$ , defined as the ratio of the axisymmetric dipole component to the total field strength at the CMB in spherical harmonics up to degree and order 12.

Fig. 3 shows the statistical distribution of  $f_{\text{dip}}$  for the simulations reported in this study. Two distinct groups of numerical simulations separated by a gap at  $f_{\text{dip}} \approx 0.5$  are visible in this figure. A magnetic field is considered as dipolar when  $f_{\text{dip}} > 0.5$  and multipolar otherwise. This bound differs from the original threshold of  $f_{\text{dip}} = 0.35$  considered by Christensen & Aubert (2006), but it is found to better separate the two types of dynamo models contained in our data set. Note that the same bound of 0.5 was recently chosen by Menu *et al.* (2020) in their study. The magnetic field amplitude is measured by the Elsasser number  $\Lambda$

$$\Lambda = \frac{\overline{\sqrt{2E_m}}}{\tau_{\text{adv}}}.$$

Finally, transports of heat and chemical composition are quantified by using the Nusselt  $Nu$  and the Sherwood  $Sh$  number defined by (see Goluskin 2016, chapter 1)

$$Nu = \frac{\Delta T_0}{\Delta T} \quad \text{and} \quad Sh = \frac{\Delta \xi_0}{\Delta \xi},$$

where  $\Delta T$ ,  $\Delta \xi$  are the temperature and composition differences between the ICB and the CMB, and the subscript 0 stands for the background conducting state. For both the fixed fluxes and hybrid configurations (recall Section 2.3), we obtain a background composition contrast given by

$$\Delta \xi_0 = \frac{\eta(\eta + 2)}{2(\eta^2 + \eta + 1)}, \quad (17)$$

where  $\eta = r_i/r_o$  is the radius ratio. The background temperature drop  $\Delta T_0$  depends on the imposed boundary conditions. For the fixed flux setup, it reads

$$\Delta T_0^{\text{ff}} = \frac{\eta(\eta + 2)}{2(\eta^2 + \eta + 1)} = \Delta \xi_0, \quad (18)$$

while it becomes

$$\Delta T_0^{\text{hyb}} = \frac{1}{\eta}, \quad (19)$$

for the hybrid setup.

Table 4 gives the definition of most of these integral diagnostics and provides estimates for Earth's core, along with the bracket of values obtained in the numerical data set presented here.

## 2.6 Exploration of parameter space

We compute 79 simulations varying the Ekman number, the magnetic Prandtl number, the thermal and the chemical Rayleigh numbers. The properties of this data set are listed in Table A1. The less turbulent simulations have been initialized with a strong dipolar field and a random thermochemical perturbation. Their final states have been used as initial conditions for the more turbulent simulations, in order to shorten their transients. Three different Ekman numbers are considered in this study:  $10^{-4}$ ,  $3 \times 10^{-5}$  and  $10^{-5}$ .  $Ra_T$  has been varied between 0 and  $6 \times 10^{10}$  and  $Ra_\xi$  between 0 and  $1.9 \times 10^{12}$  to study the influence of the convective forcing and span the transition between dipole-dominated and multipolar dynamos. We adopt  $Pr = 0.3$  and  $Sc = 3$  (i.e.  $Le = 10$ ) for a better comparison with previous studies (e.g. Takahashi 2014) and to mitigate the computational cost associated with large Lewis numbers.  $Pm$  varies between 0.5 and 7, depending on the Ekman number, in order to maintain  $Rm > 100$ . The numerical models were integrated for at least 20 per cent of a magnetic diffusion time  $\tau_\eta$  for the most turbulent (and demanding) ones, and for more than one  $\tau_\eta$  for the others, in order to ensure that a statistically steady state has been reached.

## 3 RESULTS

### 3.1 Onset of top-heavy convection

Fig. 4 shows the location of the 79 computed numerical simulations for the three considered Ekman numbers in the parameter space  $(\mathcal{G}_T, \mathcal{G}_\xi)$  defined by

$$\mathcal{G}_T = 1 + Gr_T E^{4/3} \quad \text{and} \quad \mathcal{G}_\xi = 1 + Gr_\xi E^{4/3},$$

where  $Gr_{T(\xi)}$  corresponds to the thermal (chemical) Grashof number,

$$Gr_T = \frac{Ra_T}{Pr} \quad \text{and} \quad Gr_\xi = \frac{Ra_\xi}{Sc}.$$

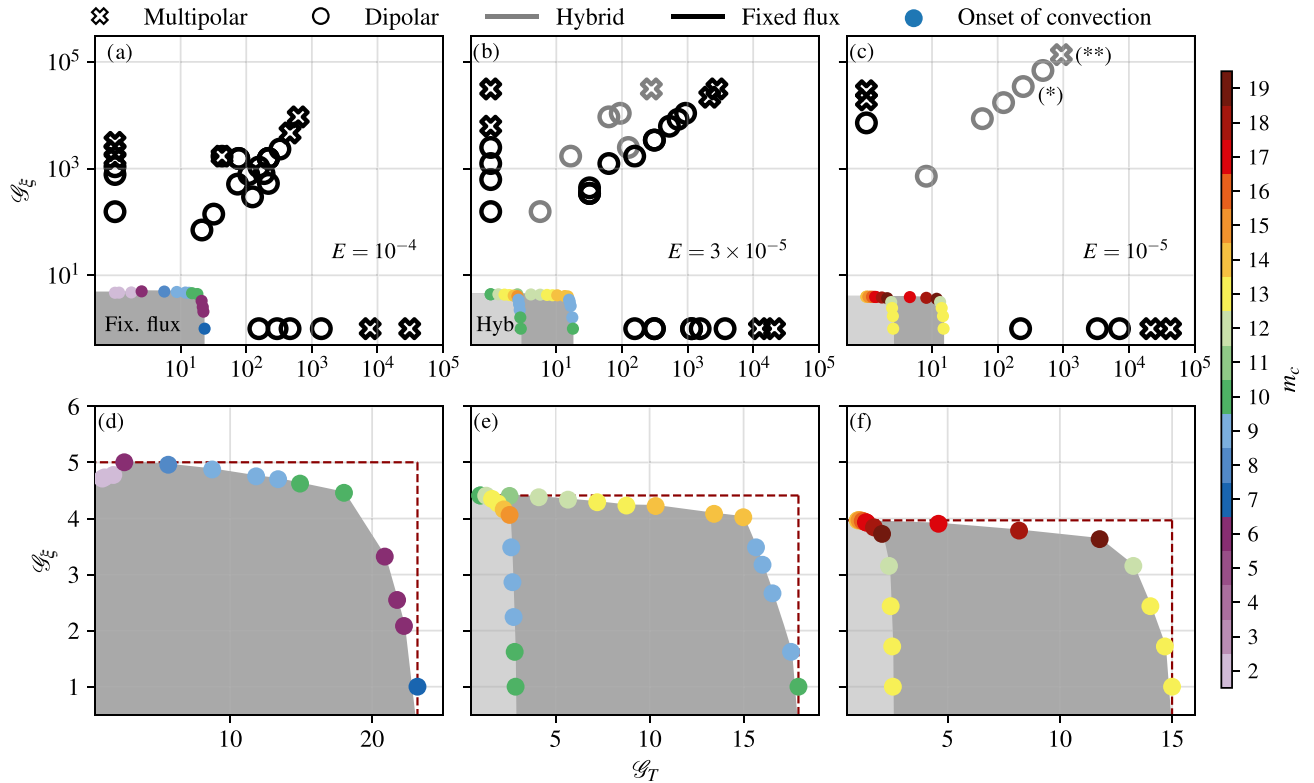
Adding 1 to  $Gr_{T(\xi)} E^{4/3}$  in the above equations allows us to use logarithmic scales in the top row of Fig. 4.

We determine the onset of convection using the open-source software SINGE<sup>3</sup> which computes linear eigenmodes for incompressible, double-diffusive fluids enclosed in a spherical cavity (see Schaeffer 2013; Vidal & Schaeffer 2015; Kaplan *et al.* 2017; Monville *et al.* 2019). For a fixed  $Ra_T$  ( $Ra_\xi$ ), the code solves the generalized

<sup>3</sup><https://bitbucket.org/vidalje/singe>

**Table 4.** Output parameters of the numerical simulations and their estimates for Earth's core.

Name	Symbol	Definition	Earth's core	This study	References
Relative thermal convective power	$P_T^%$	see eq. (15)	20–70 %	0–100 %	Lister & Buffett (1995) - Takahashi (2014)
Rosby	$Ro$	$u_{\text{rms}}/\Omega D$	$(1.7\text{--}12) \times 10^{-6}$	0.002–0.1	Table 1
Local Rosby	$Ro_L$	$u_{\text{rms}}/\Omega L$	$4.7 \times 10^{-5} - 0.09$	0.009–0.45	Davidson (2013) - Olson & Christensen (2006)
Relative equat. symmetric kinetic energy	$\zeta$		0.78–0.9	0.65–0.96	Aubert <i>et al.</i> (2017)
Magnetic Reynolds	$Rm$	$u_{\text{rms}} D/\eta$	$(0.2\text{--}9) \times 10^3$	$10^2\text{--}6 \times 10^3$	Table 1
Elsasser	$\Lambda$	$B_{\text{rms}}^2/\mu_0\eta\rho_o\Omega$	6.7–39	$0.3\text{--}3 \times 10^2$	Table 1
Dipolarity parameter	$f_{\text{dip}}$		0.6–0.7	0.1–1	Gillet <i>et al.</i> (2015)



**Figure 4.** Linear onset of top-heavy convection in  $(1 + Gr_T E^{4/3}, 1 + Gr_\xi E^{4/3})$  parameter space, where  $Gr_T$ ,  $Gr_\xi$  and  $E$  are the thermal Grashof, chemical Grashof and Ekman numbers, respectively, for the three Ekman numbers  $E$  considered in this study:  $10^{-4}$  (left-hand column),  $3 \times 10^{-5}$  (centre column) and  $10^{-5}$  (right-hand column). Critical curves correspond to the edges of the gray shaded areas. Dark grey areas were obtained for fixed-flux boundary conditions and light gray areas for hybrid boundary conditions, the latter present only for  $E = 3 \times 10^{-5}$  and  $E = 10^{-5}$ . The bottom panels (d), (e) and (f) show zoomed-in insets of upper panels (a), (b) and (c). The edges of the gray areas, which define the critical curves, connect discs whose colour defines the critical azimuthal wavenumber  $m_c$ . The top row (in logarithmic scale in both directions) also features the location of the 79 simulations computed in this study. Circles (resp. crosses) represent dipolar (resp. multipolar) simulations. Circles and crosses with gray (resp. black) edges correspond to fixed-flux (resp. hybrid) boundary conditions. Simulations (\*) and (\*\*) are reference simulations discussed in detail in the text (see also Table A1).

eigenvalue problem formed by the linearized Navier–Stokes and transport equations. It seeks eigenmodes  $f$  of the form

$$f(t, r, \theta, \varphi) = \hat{f}(r, \theta) \exp[i(m\varphi - \omega t)],$$

where  $\hat{f}$  is a function of  $r$  and  $\theta$ ,  $m$  is the azimuthal wave number and  $\omega$  the complex angular frequency. Starting at a specific  $(Ra_T, Ra_\xi)$ , the critical mode is determined by varying one of the Rayleigh numbers (keeping the other fixed) in order to obtain an  $\omega$  with a vanishing imaginary part. The onset mode is then characterized by its critical chemical and thermal Rayleigh numbers  $(Ra_\xi^c, Ra_T^c)$ , its critical azimuthal wave number  $m_c$  and its (real) angular drift frequency  $\omega_c$ . Connecting the  $(Ra_\xi^c, Ra_T^c)$  pairs that we collected

with SINGE gives rise to the critical curves plotted in Fig. 4. In each panel, the intersection of these curves with the x-axis (resp. y-axis) corresponds to the critical Rayleigh number for purely thermal (resp. chemical) convection. Underneath the critical curves, the grey-shaded areas are regions of the parameter space where thermal and chemical perturbations are unable to trigger a convective flow.

We note that the shape delimited by the critical curves in the bottom row of Fig. 4 is not rectangular, as would be the case if the two sources of buoyancy were independent. Instead, we observe a decrease of the critical  $Gr_\xi^c$  when  $Gr_T^c$  increases for the three different Ekman numbers. As previously reported by Busse (2002), Trümper *et al.* (2012) and Net *et al.* (2012), and discussed in Section 1,

this demonstrates that the addition of a second buoyancy source facilitates the onset of convection as compared to the single diffusive configurations.

Starting from  $\mathcal{G}_T^c = 0$  and following the critical curve for each Ekman number,  $m_c$  grows until one reaches the upper right ‘corner’ of the onset region and then decreases to a value comparable to the starting  $\mathcal{G}_T^c = 0$   $m_c$  value when  $\mathcal{G}_\xi^c$  tends to zero. We observe that  $m_c$  is nearly constant on the vertical branches, while it increases much faster on the horizontal ones, as already reported by Trümper *et al.* (2012).

As can be seen in Figs 4(e) and (f), the shaded shape is much wider with fixed-flux boundary conditions than with hybrid boundary conditions. This comes from the difference in the temperature contrasts of the background conducting states. An adequate way to compare both setups resorts to using *diagnostic* Grasshof numbers

$$\widetilde{Gr}_T = Gr_T \Delta T_0, \quad \widetilde{Gr}_\xi = Gr_\xi \Delta \xi_0, \quad (20)$$

that are based on the temperature (composition) contrasts  $\Delta T_0$  ( $\Delta \xi_0$ ) of the reference conducting state instead of the *control* thermal (chemical) Grasshof numbers  $Gr_T$  ( $Gr_\xi$ ) (see Johnston & Doering 2009; Goluskin 2016). Using eqs (18) and (19), the temperature difference between ICB and CMB for the conducting states for both setups reads

$$\frac{\Delta T_0^{\text{hyb}}}{\Delta T_0^{\text{ff}}} = \frac{2(\gamma^2 + \gamma + 1)}{\gamma^2(\gamma + 1)} \approx 10.23,$$

which is in good agreement with the actual ratio of critical  $\mathcal{G}_T^c$  observed in panels (e) and (f) of Fig. 4.

The analysis of the onset of double-diffusive convection becomes even more straightforward if one adopts the formalism introduced by Silva *et al.* (2019). This framework rests on two parameters: first, the *diagnostic effective Grasshof number*

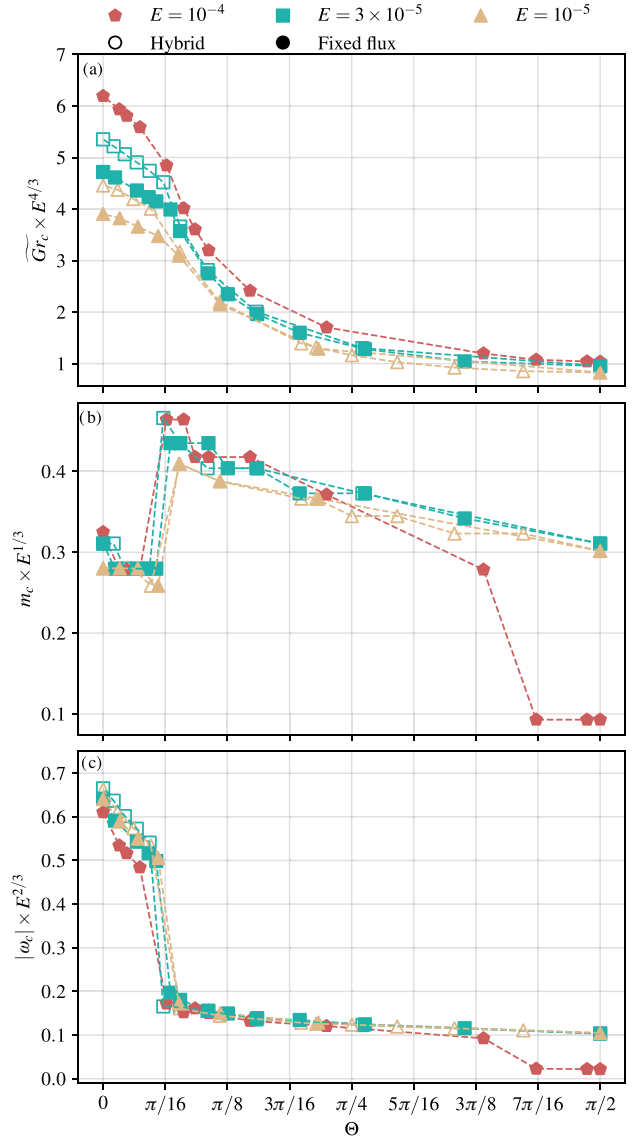
$$\widetilde{Gr}_c = \sqrt{(\widetilde{Gr}_T^c)^2 + (\widetilde{Gr}_\xi^c)^2}, \quad (21)$$

and second the *Grasshof mixing angle*  $\Theta$  such that

$$\cos \Theta = \frac{\widetilde{Gr}_T^c}{\widetilde{Gr}_c}, \quad \sin \Theta = \frac{\widetilde{Gr}_\xi^c}{\widetilde{Gr}_c}. \quad (22)$$

The pair  $(\widetilde{Gr}_c, \Theta)$  can be interpreted as the polar coordinates of the critical onset mode in the  $(Gr_T, Gr_\xi)$  Cartesian parameter space. A mixing angle  $\Theta = 0$  hence corresponds to purely thermal convection, while  $\Theta = \pi/2$  corresponds to purely chemical convection. Fig. 5 shows the critical effective Grasshof number  $\widetilde{Gr}_c$ , the critical azimuthal wave number  $m_c$  and the critical angular drift frequency  $|\omega_c|$ , multiplied in each instance by their expected asymptotic dependence on the Ekman number for purely thermal convection, as a function of the Grasshof mixing angle  $\Theta$ . Adopting a diagnostic effective Grasshof number conveniently enables the merging of the onset curves associated with the two sets of thermal boundary conditions (fixed-flux and hybrid).

The onset curves can be separated into two branches: (i) From  $\Theta = 0$  up to  $\Theta \approx \pi/16$ , the onset mode almost behaves as a pure low- $Pr$  thermal mode with little change in  $m_c E^{1/3}$  and a large drift speed; (ii) a sharp transition to another kind of onset mode, reminiscent of the  $Pr \gtrsim 1$  convection onset, is observed for  $\Theta \gtrsim \pi/16$ . The latter is characterized by a smaller drift frequency, a higher azimuthal wavenumber and a lower effective Grasshof number  $\widetilde{Gr}_c$ . The critical azimuthal wavenumber reaches its maximum for  $\Theta \approx \pi/16$  before gradually decreasing to reach a value comparable to that expected for purely thermal convection towards  $\Theta = \pi/2$ .



**Figure 5.** (a) Critical effective Grasshof number multiplied by  $E^{4/3}$  as a function of the Grasshof mixing angle  $\Theta$ . (b) Critical azimuthal wavenumber  $m_c$  multiplied by  $E^{1/3}$  as a function of  $\Theta$ . (c) Critical drift frequency  $\omega_c$  multiplied by  $E^{2/3}$  as a function of  $\Theta$ . Symbol colours correspond to the Ekman number, open-symbols to hybrid boundary conditions and filled symbols to fixed-flux boundary conditions.

The Ekman dependence is almost perfectly captured by the asymptotic scalings  $E^{-1/3}$  and  $E^{-2/3}$  for the critical wavenumber  $m_c$  and the drift frequency  $\omega_c$ . The case of mixing angles  $\Theta \geq 7\pi/16$  with  $E = 10^{-4}$  constitutes an exception to this rule with a sharp drop to a constant critical wavenumber  $m_c = 2$  (see the small kink in the upper left part of Fig. 4d). The dependence of  $\widetilde{Gr}_c$  on the Ekman number shows a more pronounced departure from the leading-order asymptotic scaling  $Gr_c \sim E^{-4/3}$ . As shown by Dormy *et al.* (2004) for differential heating (see e.g. their Fig. 5), the higher-order terms in the asymptotic expansion of  $Ra_T^c$  as a function of the Ekman number are still significant for  $E > 10^{-6}$  (see also Schaeffer 2016). Given the range of Ekman numbers considered for this study, it is not surprising that the asymptotic scaling for  $Gr_c$  is not perfectly realized yet.

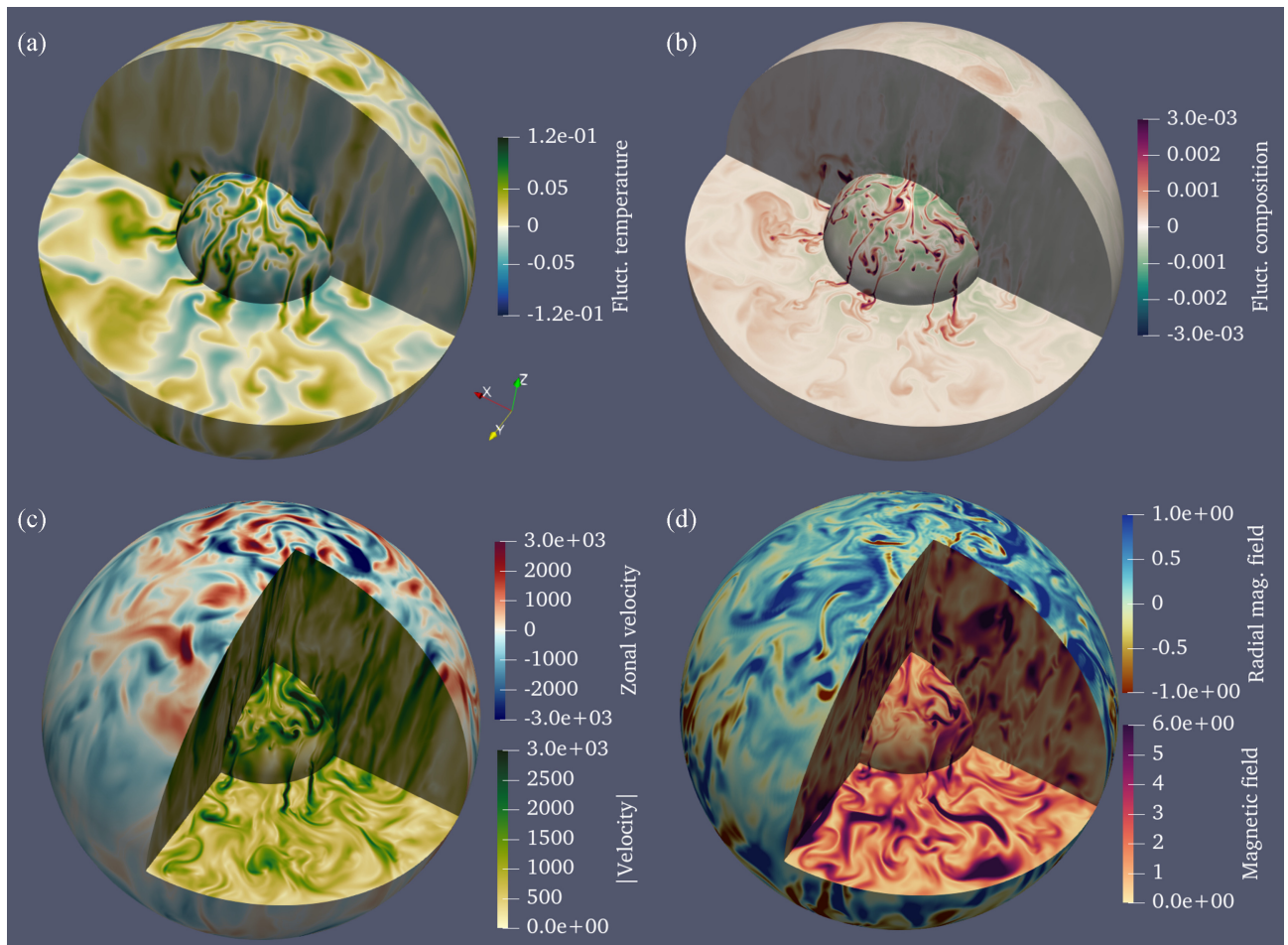
In summary, the onset of double-diffusive convection in the top-heavy regime takes the form of thermal-like drifting Rossby waves, the nature of which strongly depends on the fraction between chemical and thermal forcings. This confirms the results previously obtained by Silva *et al.* (2019, their fig. 9).

### 3.2 A reference case

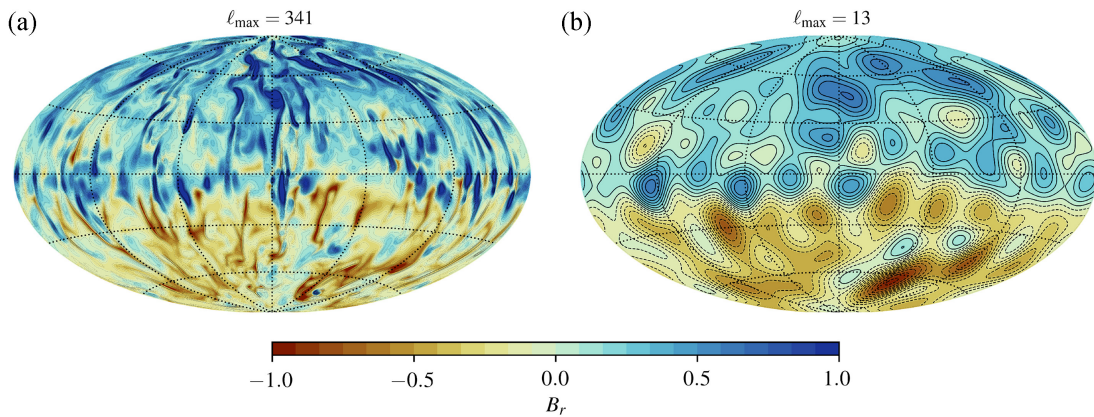
We will now focus on the simulation marked by an asterisk (\*) in Table A1 and in Fig. 4 to highlight specific double-diffusive convection features. This simulation corresponds to  $Ra_T = 3.4 \times 10^8$ ,  $Ra_\xi = 4.8 \times 10^{11}$ ,  $E = 10^{-5}$  and  $Pm = 0.5$  with hybrid boundary conditions. The thermal convective power amounts on average for 46 per cent of the total input power. Since the local Rossby number  $Ro_L$  reaches 0.11, this simulation is expected to operate in a parameter regime close to the transition between dipolar and multipolar regimes ( $Ro_L \approx 0.12$ ) as put forward by Christensen & Aubert (2006). This high value of  $Ro_L$  also indicates the sizeable role played by inertia in the force balance of this simulation. Fig. 6 shows 3-D renderings of several fields extracted from a snapshot taken over the course of the numerical integration: (a) temperature perturbation, (b) composition, (c) zonal velocity and magnitude of

the velocity vector and (d) radial magnetic field and magnitude of the magnetic field vector. We chose the radius of the inner and outer spheres of these renderings to place ourselves outside thermal and compositional boundary layers. Convection is primarily driven by the chemical composition flux at the ICB. Because of the contrast in diffusion coefficients ( $Le = 10$ ), compositional plumes develop at a much smaller scale than that of thermal plumes (see Figs 6a and b). Having  $Le = 10$  also induces a chemical boundary layer much thinner than the thermal one, as illustrated by the Sherwood number  $Sh$  being five times larger than the Nusselt number  $Nu$  in this case (44.8 versus 8.0, see Table A1). The emission of a thermal plume is likely triggered by an impinging chemical plume. Accordingly, one would expect temperature fluctuations to be enslaved to compositional fluctuations, which may explain the outstanding spatial correlation between temperature and composition notable in Figs 6(a) and (b). This correlation was already reported by Trümper *et al.* (2012) for predominantly thermal convection.

In typical dipole-dominated dynamos, the velocity field features extended sheet-like structures that span most of the core volume (see Yadav *et al.* 2013; Schwaiger *et al.* 2019). Because of the strong forcing that characterizes the reference simulation, the convective flow is organized on smaller scales, which likely reflects



**Figure 6.** 3-D renderings of a snapshot of simulation (\*) (see Table A1). On each panel, the inner and outer spherical surfaces correspond to dimensionless radii  $r = 0.57$  and  $r = 1.5$ , respectively. The  $z$ -axis displayed in panel (a) corresponds to the axis of rotation. (a) Temperature perturbation. (b) Composition. (c) Velocity. The outer surface shows the zonal velocity  $u_\phi$ , while the inner surface, the equatorial cut and the two meridional cuts display the magnitude of the velocity field,  $|\mathbf{u}|$ . (d): Magnetic field. The outer surface shows the radial field  $B_r$ , while the inner surface, the equatorial cut and the two meridional cuts display the magnitude of the magnetic field,  $|\mathbf{B}|$ . All fields are dimensionless.



**Figure 7.** Hammer projection of the dimensionless radial magnetic field at the CMB truncated at the spherical harmonic degree  $\ell_{\max} = 341$  (a) and at spherical harmonic degree  $\ell_{\max} = 13$  (b) for the numerical simulation (\*) shown in Fig. 6. It corresponds to the same snapshot as in Fig. 6. The dashed lines in panel(b) correspond to negative values of the radial magnetic field.

the sizeable amplitude of inertia. The magnetic field is dominated by its axisymmetric dipolar component (see Fig. 7a), despite the supposed proximity of the simulation with the dipolar–multipolar transition zone. Inspection of Table A1 indicates that this snapshot-based observation can in fact be extended to the entire duration of the simulation (close to half a magnetic diffusion time), as the average dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  is equal to 0.77.

The radial magnetic field features intense localized flux patches of mostly normal polarity in each hemisphere, with a few reverse flux patches paired with normal ones, mostly at high latitudes. Those fluid regions hosting a locally strong magnetic field are characterized by more quiescent flows, as can be seen in the equatorial planes of Figs 6(c) and (d) in the vicinity of the outer boundary. In a global sense, our reference simulation can be qualified as a *strong-field* dynamo since the ratio of the magnetic energy  $E_m$  to kinetic energy  $E_k$  is slightly larger than unity,  $E_m/E_k = 1.36$ .

Fig. 7 shows a comparison between the radial component of the magnetic field at the CMB (left-hand panel) and its representation truncated at spherical harmonic degree  $\ell_{\max} = 13$  (right-hand panel). The truncated field presents several key similarities with the geomagnetic field at the CMB, such as a significant axial dipole and patches of reverse polarity in both hemispheres.

### 3.3 Earth-likeness

For a more quantitative assessment of the Earth-likeness of the dynamo models, we employ the rating of compliance  $\chi^2$  introduced by Christensen *et al.* (2010). This quantity is derived from four criteria based on the magnetic field at the CMB truncated at the degree  $\ell = 8$

- (i) The relative axial dipole energy  $AD/NAD$ , which corresponds to the ratio of the magnetic energy in the axial dipole field to that of the field up to degree and order eight.
- (ii) The equatorial symmetry  $O/E$  corresponding to the ratio of the magnetic energy at the CMB of components that have odd values of  $(\ell + m)$  for harmonic degrees between two and eight to its counterpart in components with  $\ell + m$  even.
- (iii) The zonality  $Z/NZ$ , which corresponds to the ratio of the zonal to non-zonal magnetic energy for harmonic degrees two to eight at the CMB.
- (iv) The flux concentration factor  $FCF$ , defined by the variance in the squared radial field.

**Table 5.** Time-average of the rating parameters defined by Christensen *et al.* (2010) for Earth and the simulation (\*) (see Table A1).

Name	Earth's value	Simulation (*)
$AD/NAD$	1.4	2.69
$O/E$	1.0	1.75
$Z/NZ$	0.15	0.25
$FCF$	1.5	1.46

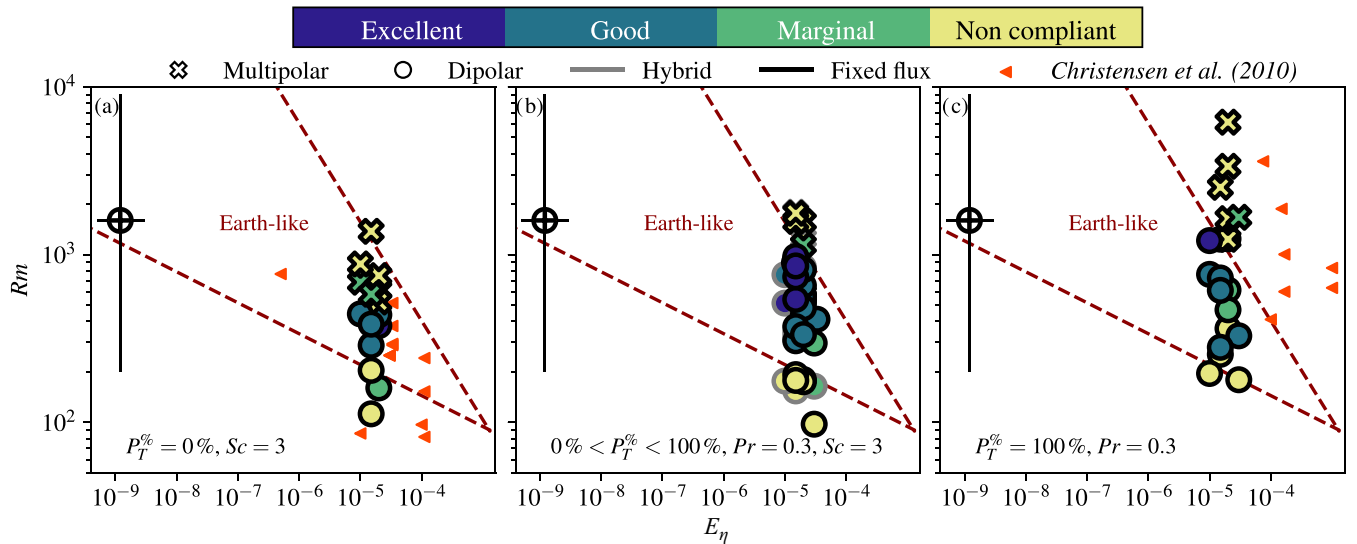
To evaluate these quantities for the Earth, Christensen *et al.* (2010) used different models based on direct measures such as *gufm1* model by Jackson *et al.* (2000) and IGRF-11 model (from Finlay *et al.* 2010), as well as archeomagnetic and lake sediment data (model CALS7K.2 from Korte *et al.* 2005) and a statistical model for palaeofield (see Quidelleur & Courtillot 1996). These models allow to estimate the evolution of the mean value of the Gauss coefficients and their variances. Finally, they obtained the values given in Table 5 for the four rating parameters.

These values are used to determine the rating of compliance between numerical dynamo models and the geomagnetic field  $\chi^2$  expressed by

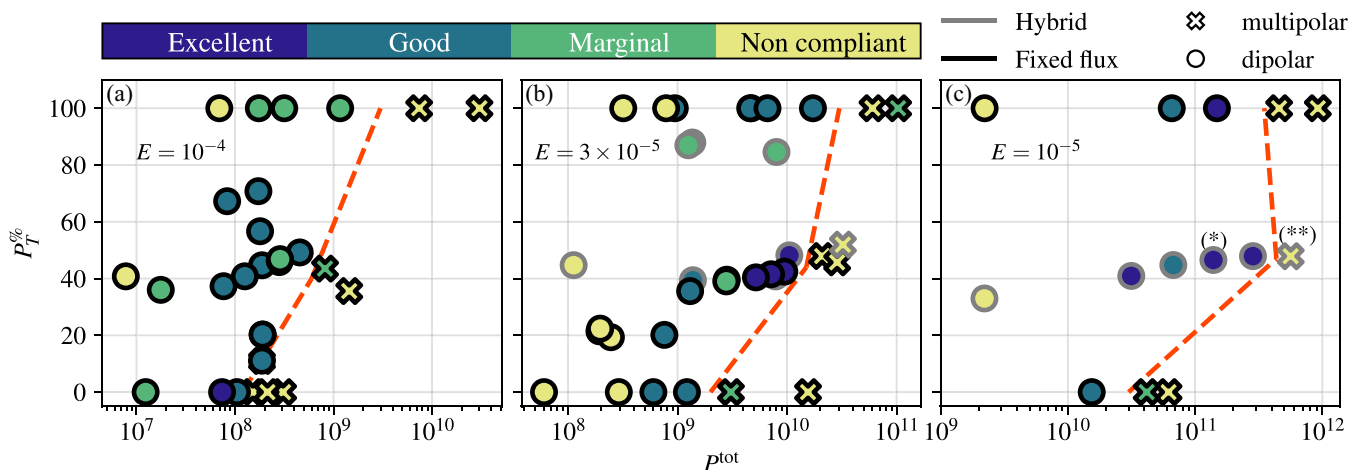
$$\chi^2 = \sum_{\psi_k} \left\{ \frac{\ln(\overline{\psi_k}) - \ln(\psi_k^{\oplus})}{\ln \left[ \sqrt{\text{Var}(\psi_k^{\oplus})} \right]} \right\}^2,$$

where  $\psi_k \in \{AD/NAD, O/E, Z/NZ, FCF\}$ ,  $\text{Var}(\psi_k^{\oplus})$  is the variance of  $\psi_k^{\oplus}$  and the exponent  $\oplus$  stands for the Earth core. The agreement between simulation and Earth is termed by Christensen *et al.* (2010) as *excellent* if  $\chi^2 < 2$ , as *good* when  $2 \leq \chi^2 \leq 4$ , as *marginal* when  $4 < \chi^2 \leq 8$  and *non-compliant* when  $\chi^2 > 8$ . We adopt the same classification in the following. According to Table 5, the relative axial dipole power ( $AD/NAD$ ) and the equatorial symmetry ( $O/E$ ) of the reference simulation (\*) are too large in comparison with the reference geomagnetic values, which penalizes the overall compliance of the simulation. Nevertheless, the simulation remains in excellent agreement with the geomagnetic field with  $\chi^2 = 1.5$ .

Based on this rating of compliance  $\chi^2$ , Christensen *et al.* (2010) propose a representation to classify the different numerical dynamos according to the ratio of three different timescales: the rotation period  $\tau_{\Omega}$ , the advection time  $\tau_{\text{adv}}$  and the magnetic diffusion time  $\tau_{\eta}$ . Those can be cast into two dimensionless numbers: the magnetic Reynolds number  $Rm$  defined by  $\tau_{\eta}/\tau_{\text{adv}}$  and the magnetic Ekman number  $E_{\eta}$  defined by  $\tau_{\Omega}/\tau_{\eta} = E/Pm$ . Fig. 8 shows our



**Figure 8.** Compliance parameter  $\chi^2$  as a function of the magnetic Ekman number  $E_\eta$  and of the magnetic Rayleigh number  $Rm$  for three different setups: purely chemical convection (left-hand panel), double-diffusive convection (centre panel) and pure thermal convection (right-hand panel). Dashed lines mark the limits of the Earth-like domain defined by Christensen *et al.* (2010) and the black symbol  $\oplus$  marks the approximate position of the Earth's dynamo in this representation. The significant size of the error bars is due to the wide range of estimates for  $u_{rms}$  and  $\eta$  (see Table 2). The triangles correspond to the simulations provided by Christensen *et al.* (2010) with  $Pr = 0.3$  or  $Sc = 3$ .

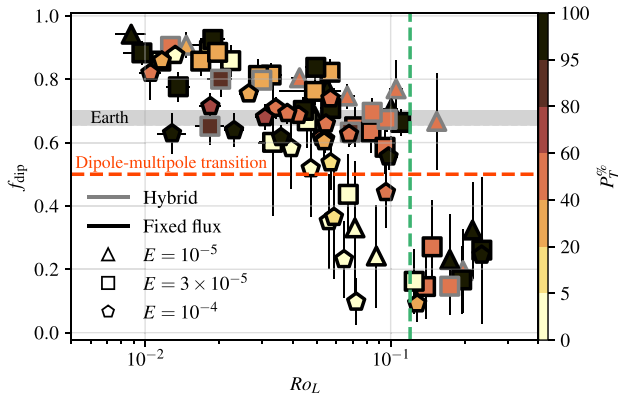


**Figure 9.** Compliance parameter  $\chi^2$  as a function of the input power  $P^{tot}$  and of the relative thermal buoyancy power  $P_T\%$  for the three different Ekman numbers considered in this study. The different colours correspond to the compliance quality defined by Christensen *et al.* (2010). The dashed lines mark a tentative extrapolation of the transition between dipolar and multipolar dynamos in this parameter space.

numerical simulations plotted in the parameter space ( $E_\eta$ ,  $Rm$ ). For comparison purposes, the simulations by Christensen *et al.* (2010) with  $Pr = 0.3$  or  $Sc = 3$  (triangular markers) have been added to our 79 dynamo models. To single out the effect of the diffusivities, the purely chemical, the double-diffusive and the purely thermal simulations have been plotted separately. The black symbol marks the approximate position of Earth's dynamo in this representation (see Tables 1 and 4). Christensen *et al.* (2010) posited the existence, in this parameter space, of a triangular wedge (delimited by dashed lines in Fig. 8), inside which the numerical dynamos yield Earth-like surface magnetic fields (those from our data set are shown in Fig. 8 with dark blue and blue disks for Excellent and Good ratings, respectively). Below the wedge, weakly supercritical dynamos feature too dipolar magnetic fields, on the account of the modest value of the magnetic Reynolds number. Conversely, a significant increase of the input power at a given  $E_\eta$  yields small-scale convective flows,

which possibly lead to the breakdown of the axial dipole (multipolar simulations displayed with crosses in Fig. 8). We observe in Fig. 8 that the upper boundary of the wedge actually depends on the value of  $P_T\%$ : while several purely chemical simulations are already multipolar below  $Rm \simeq 500$ , the transition to multipolar dynamos is delayed to  $Rm > 1500$  for the purely thermal ones. Although all those dynamo models that possess a good or excellent semblance with the geomagnetic field at the CMB lie within the boundaries of the original wedge, having a pair ( $E_\eta$ ,  $Rm$ ) that lies within this wedge cannot be considered as a sufficient condition to produce an Earth-like magnetic field, since the wedge includes a number of simulations with marginal or poor semblance.

To further discuss the impact of  $P_T\%$  on the morphology of the magnetic field at the CMB, Fig. 9 shows  $\chi^2$  in the parameter space ( $P^{tot}$ ,  $P_T\%$ ) for the three different Ekman numbers considered here. The dashed lines mark the tentative boundaries between dipolar



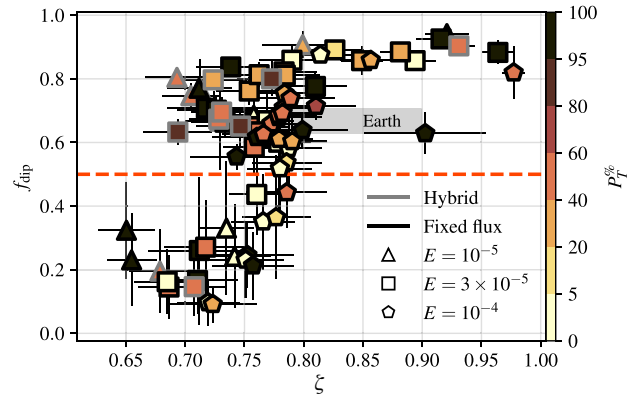
**Figure 10.** The dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  as a function of the local Rossby number  $Ro_L$ . Geophysical range of  $f_{\text{dip}}$  based on the COV-OBS.x1 model by Gillet *et al.* (2015). Black markers correspond to simulations with  $P_T^{\%} = 100\%$ , while white ones correspond to simulations with  $P_T^{\%} = 0\%$ . The horizontal dashed line marks the limit between dipolar and multipolar dynamos adopted in this study (see Section 2.5 for details). The vertical dashed line marks the expected limit between dipolar and multipolar dynamos according to Christensen & Aubert (2006). Vertical and horizontal black segments attached to each symbol represent one standard deviation about the time-averaged values.

and multipolar simulations in term of  $P^{\text{tot}}$ . The dipole–multipole transition is delayed to larger input power  $P^{\text{tot}}$  at lower Ekman numbers. Decreasing  $E$  indeed enables the exploration of a physical regime with lower  $Ro$  prone to sustain dipole-dominated dynamos (see Kutzner & Christensen 2002; Christensen & Aubert 2006). The input power required to obtain multipolar dynamos is multiplied by roughly 300 when decreasing  $E$  from  $10^{-4}$  to  $10^{-5}$ . For each Ekman number, the width of the dipolar window strongly depends on  $P_T^{\%}$  since the actual input power needed to reach the transition is an order of magnitude lower for pure chemical convection than for pure thermal convection. Simulations with  $P_T^{\%} = 40\%$  are found to behave similarly to purely thermal convection. We further observe that Earth-like dynamos can be obtained for any partitioning of power injection with the best agreement obtained close to the dipole–multipole transition. This is a consequence of the way we have sampled the parameter space, mainly adopting one single  $Pm$  value for each Ekman number. Magnetic Reynolds numbers  $Rm \sim \mathcal{O}(1000)$  conducive to yield Earth-like fields are then attained at strong convective forcings. Adopting larger  $Pm$  values at more moderate chemical and thermal Rayleigh numbers could hence produce Earth-like fields further away from the dipole–multipole transition (see Christensen *et al.* 2010). Additional diagnostics are hence required to better understand why the dipole–multipole transition depends so strongly on the nature of the convective forcing.

### 3.4 Breakdown of the dipole

The physical reasons which cause the breakdown of the dipole in numerical models remain poorly known. Several previous studies suggest that the dipole may collapse when inertia reaches a sizeable contribution in the force balance (see Sreenivasan & Jones 2006; Christensen & Aubert 2006).

Christensen & Aubert (2006) introduced the local Rossby number  $Ro_L$  as a proxy of the ratio between inertia and Coriolis force and found no dipole-dominated dynamos for  $Ro_L > 0.12$  (see Christensen 2010). Fig. 10 shows  $f_{\text{dip}}$  as a function of  $Ro_L$  for the 79 simulations computed in this study. The vertical line marks the threshold

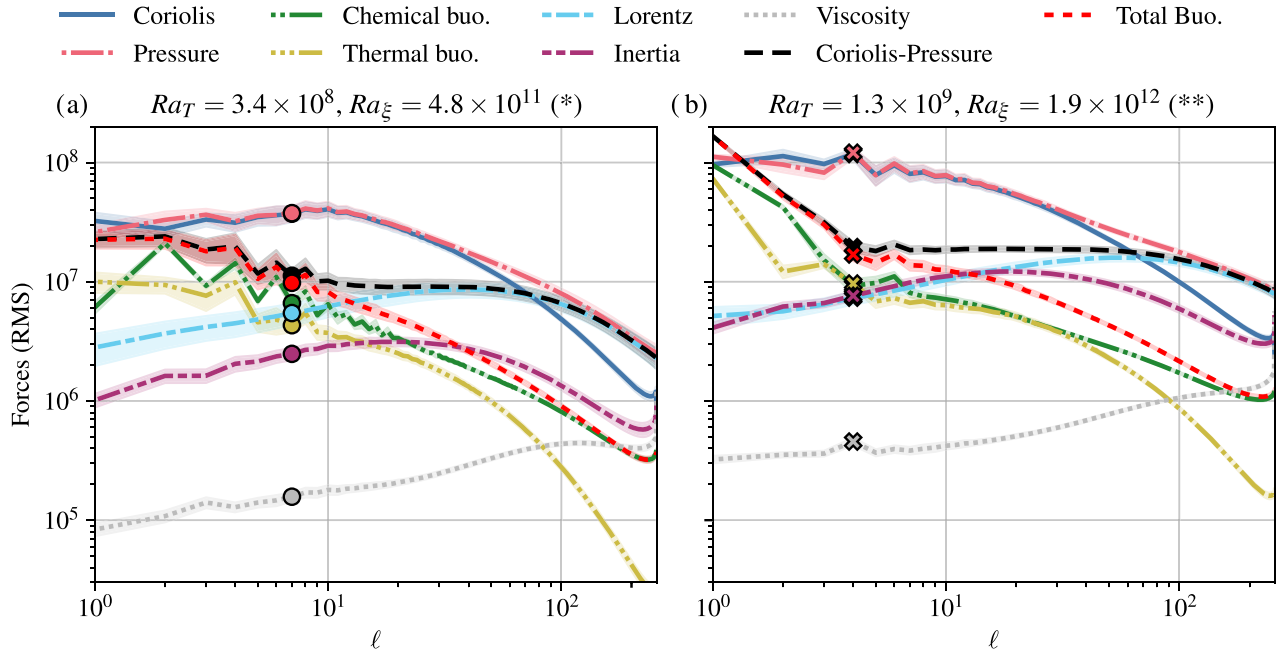


**Figure 11.** The dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  as a function of the relative fraction of equatorially symmetric kinetic energy  $\zeta$  for the 79 simulations computed in this study. Geophysical estimates of  $\zeta$  are based on the study of Aubert (2014). Black markers correspond to simulations with  $P_T^{\%} = 100\%$ , while white ones correspond to simulations with  $P_T^{\%} = 0\%$ . The horizontal dashed line marks the limit between dipolar and multipolar dynamos adopted in this study (see Section 2.5 for details). Vertical and horizontal black segments attached to each symbol represent one standard deviation about the time-averaged values.

value of  $Ro_L = 0.12$  put forward by Christensen & Aubert (2006), while the horizontal line corresponds to  $f_{\text{dip}} = 0.5$ , the boundary between dipolar and multipolar dynamos adopted in this study. To single out the effect of partitioning the input power between chemical and thermal forcings, the symbols have been colour coded according to  $P_T^{\%}$ . Each subset of models with comparable  $P_T^{\%}$  exhibits the same decrease of  $f_{\text{dip}}$  with  $Ro_L$  as reported by Christensen & Aubert (2006). However, the dipole–multipole transition occurs at lower  $Ro_L$  when  $P_T^{\%}$  decreases. For  $P_T^{\%} \geq 40\%$ , the transition happens close to  $Ro_L = 0.12$  while it happens around  $Ro_L = 0.05$  for  $P_T^{\%} = 0\%$ . In addition, the dynamo models with  $P_T^{\%} \geq 40\%$  are clearly separated in two groups of simulations with either  $f_{\text{dip}} \geq 0.5$  or  $f_{\text{dip}} < 0.3$ , while the dipole–multipole transition is much more gradual for pure chemical forcing.  $Ro_L$  hence fails to capture the transition between dipolar and multipolar dynamos, independently of the transport properties of the convecting fluid.

Following Christensen & Aubert (2006), Garcia *et al.* (2017) also envision that the increasing role of inertia would be responsible for the dipole breakdown. They however define another parameter to characterize it. They suggest that the transition is related to a change in the equatorial symmetry properties of the convective flow. To quantify it, they introduce the ratio  $\zeta$  previously defined in eq. (16). Fig. 11 shows  $f_{\text{dip}}$  as a function of  $\zeta$ . Geophysical estimates for  $\zeta$  are based on the study of Aubert (2014). The decrease of the relative equatorial symmetry  $\zeta$  goes along with a gradual weakening of the axisymmetric dipolar field. Below  $\zeta = 0.7$ , no dipolar dynamos are obtained while conversely the models with  $\zeta \geq 0.85$  are all dipolar. However, this parameter has little predictive power to separate the dipolar solutions from the multipolar ones over the intermediate range  $0.7 \leq \zeta \leq 0.85$ .

Another way to examine the dipole–multipole transition resorts to looking at the force balance governing the outer core flow dynamics (see Soderlund *et al.* 2012, 2015). To do so, we analyse force balance spectra following Aubert *et al.* (2017) and Schwaiger *et al.* (2019). Each force entering the Navier–Stokes eq. (3) is hence decomposed into spherical harmonic contributions. The spatial root mean square



**Figure 12.** Force balance spectra as a function of the spherical harmonic degree  $\ell$  for a dipolar (a) and a multipolar (b) simulations with  $E = 10^{-5}$  and  $P_T\% \approx 46\%$ . Thick lines correspond to the time average of each force, while the shaded regions represent one standard deviation about mean. The abscissa of the markers corresponds to the dominant lengthscale  $\hat{\ell}$  for each simulation. A circle corresponds to a dipolar simulation while a cross corresponds to a multipolar one. Both simulations are referenced as simulations (\*) and (\*\*) in Table A1.

$F_{\text{RMS}}$  of a vector  $\mathbf{F}$  reads

$$F_{\text{RMS}}(t) = \sqrt{\langle \mathbf{F}^2(\mathbf{r}, t) \rangle_{V_{o\delta}}}, \quad (23)$$

where  $\delta$  represents the thickness of the viscous boundary layer and  $V_{o\delta}$  the outer core volume that excludes those boundary layers. By using the decomposition in spherical harmonics, the above expression can be rearranged as

$$F_{\text{RMS}}^2(t) = \frac{1}{V_{o\delta}} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \int_{r_i+\delta}^{r_o-\delta} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |F_{\ell m}(r, t)|^2 r^2 dr,$$

We define the time-averaged spectrum  $F^\ell$  as a function of the harmonic degree  $\ell$  for the force  $\mathbf{F}$  by the relation

$$F^\ell = \sqrt{\frac{1}{V_{o\delta}} \int_{r_i+\delta}^{r_o-\delta} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |F_{\ell m}(r, t)|^2 r^2 dr}. \quad (24)$$

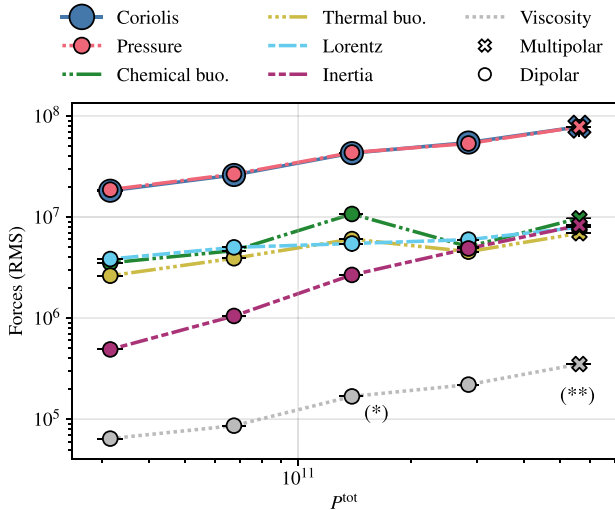
Fig. 12 shows the time-averaged force balance spectra for one dipolar and one multipolar dynamo with  $E = 10^{-5}$  and  $P_T\% \simeq 46\%$ . For both panels, the spherical harmonic at which the poloidal kinetic energy peaks  $\hat{\ell}$  is indicated by filled markers.

The left panel corresponds to the force balance of the reference case (\*) which is in excellent agreement with the geomagnetic field in terms of its low  $\chi^2$  value (recall Section 3.2). Its spectra feature a dominant quasi-geostrophic balance between Coriolis and pressure forces up to  $\ell \approx 60$  accompanied by a magnetostrophic balance at smaller scales. The difference between pressure and Coriolis forces, forming the so-called ageostrophic Coriolis force (long dashed line), is then balanced by the two buoyancy sources (short dashed line) at large scales and by Lorentz force (irregular dashed line) at small scales. This forms the quasi-geostrophic Magneto–Archimedean–Coriolis balance (QG-MAC) devised by Davidson (2013) and expected to control the outer core fluid dynamics (see Roberts & King

2013). This hierarchy of forces is similar to the one observed in geodynamo models that use a codensity approach (e.g. Aubert *et al.* 2017; Schwaiger *et al.* 2019). The breakdown of buoyancy sources reveals a dominant contribution of chemical forcings which grows at small scales. The QG-MAC balance is perturbed by a sizeable inertia, which reaches almost a third of the amplitude of Lorentz force below  $\ell \approx 20$ , while viscous effects are deferred to more than one order of magnitude below. Because of the strong convective forcing, the force separation is hence not as pronounced as in the exemplary dipolar cases by (Schwaiger *et al.* 2019, their fig. 2).

By increasing the input power by a factor 4 while keeping  $P_T\%$  constant, we obtain a numerical model (\*\*) (see Table A1 and Fig. 4c) where dynamo action yields a multipolar field. As compared to the dipole-dominated solution, the amplitude of each contribution is hence shifted to higher values. Most notable changes concern the prominent contribution of the chemical buoyancy for the degree  $\ell = 1$  and the ratio of inertia to Lorentz force. The former comes from a pronounced equatorial asymmetry of the chemical fluctuations. The development of strong equatorially asymmetric convective motions has been observed by Landeau & Aubert (2011) and Dietrich & Wicht (2013) with a codensity approach and flux boundary conditions. Below  $\ell \approx 20$ , inertia reaches a comparable amplitude to Lorentz force, while the smaller scales are still controlled by magnetic effects. This differs from the multipolar dynamo model described by Schwaiger *et al.* (2019), where inertia was significantly larger than Lorentz force at all scales forming the so-called quasi-geostrophic Coriolis–Inertia–Archimedean balance (e.g. Gillet & Jones 2006). Here the situation differs likely because of the larger  $Pm$ , which enables a stronger magnetic field (see Menu *et al.* 2020). At the dominant lengthscale  $\hat{\ell}$ , the ratio  $F_i^\ell/F_L^\ell$  is around 1 for the multipolar model, while it is less than 0.5 for the dipolar one. To examine whether the dipole–multipole transition is controlled by the ratio of inertia over Lorentz forces, we hence focus on the





**Figure 13.** Time-averaged force balance spectra at the dominant lengthscale  $\hat{\ell}$  as a function of the total buoyancy power  $P^{\text{tot}}$  for numerical models with  $E = 10^{-5}$  and  $30\% \leq P_T^{\%} \leq 60\%$ . The dynamo models (\*) and (\*\*\*) correspond to simulations referenced in Table A1. The horizontal and vertical segments attached to each symbol correspond to one standard deviation about the time-averaged values.

force balance at the dominant lengthscale  $\hat{\ell}$ , in contrast to previous studies, which analysed ratio of integrated forces (Soderlund *et al.* 2012, 2015; Yadav *et al.* 2016).

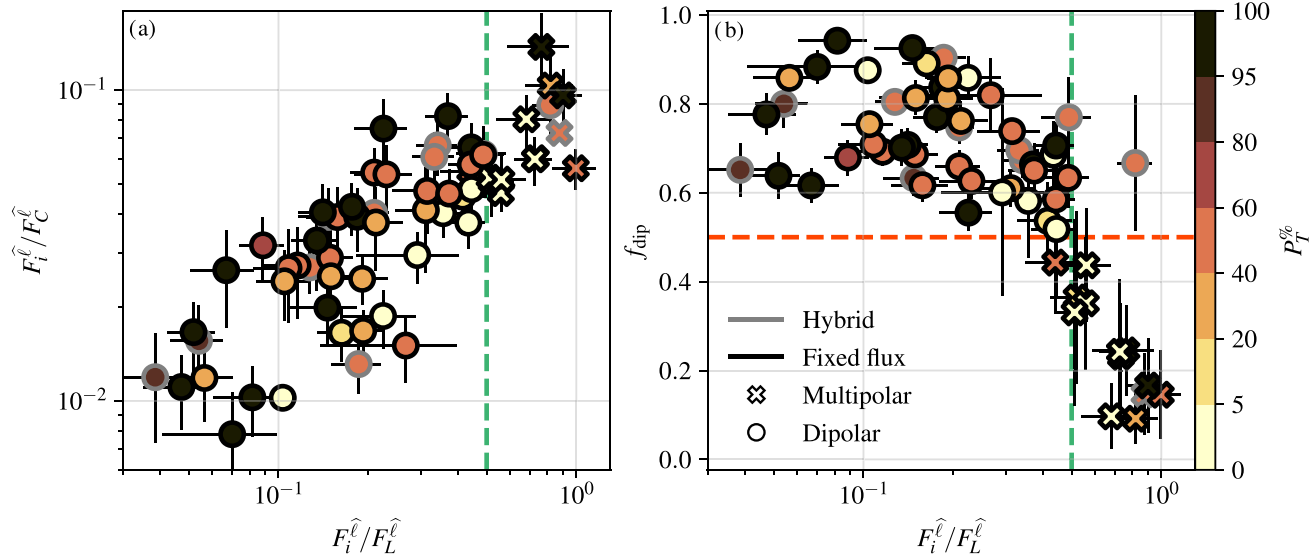
Fig. 13 shows the time-averaged force balance at  $\hat{\ell}$  for the simulations with  $E = 10^{-5}$  and  $30\% \leq P_T^{\%} \leq 60\%$ . The dynamics at  $\hat{\ell}$  is primarily controlled by the geostrophic balance between the Coriolis force and the pressure gradient. The other contributions

grow differently with  $P^{\text{tot}}$ : viscosity and inertia increase continuously while Lorentz force at  $\hat{\ell}$  hardly increases beyond  $P^{\text{tot}} \approx 3 \times 10^{10}$ . The dipole–multipole transition occurs when inertia reaches a comparable amplitude to Lorentz force at  $\hat{\ell}$  (crosses).

The relevance of this force ratio for sustaining the dipolar field has already been put forward by Menu *et al.* (2020), using models with a purely thermal forcing and  $Pr = 1$ . By considering turbulent simulations with large  $Pm$ , they show that strong Lorentz forces at large scale prevent the collapse of the dipole by inertia. As a result, they report dipole-dominated simulations with  $Ro_L$  which exceeds the limit of 0.12 proposed by Christensen & Aubert (2006). Here, we quantify the contribution of inertia at the dominant convective lengthscale by dividing the amplitude of inertia  $F_i^{\hat{\ell}}$  by the amplitude of Coriolis  $F_C^{\hat{\ell}}$  and Lorentz  $F_L^{\hat{\ell}}$  forces.

Fig. 14(a) shows our simulations in the parameter space defined by the amplitude ratios  $(F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}}, F_i^{\hat{\ell}}/F_C^{\hat{\ell}})$ . Each simulation is characterized by the proportion of thermal convection  $P_T^{\%}$  and the nature of its thermal boundary conditions. Increasing the input power of the dynamo leads to a growth of inertia, such that the strongly driven cases all lie in the upper right quadrant of Fig. 14(a). The transition from dipolar to multipolar dynamos occurs sharply when  $F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}}$  exceeds 0.5 over a broad range of  $F_i^{\hat{\ell}}/F_C^{\hat{\ell}}$  ranging from 0.03 to 0.08. This indicates that the transition is much more sensitive to the ratio of inertia over Lorentz force than to the ratio of inertia over Coriolis force. The transition for purely chemical simulations (white symbols) is reached at lower values of  $F_i^{\hat{\ell}}/F_C^{\hat{\ell}}$  and is more continuous than for the thermal ones (black symbols). This confirms the trend already observed in Fig. 10, where  $f_{\text{dip}}$  shows a much more gradual decrease with  $Ro_L$  when  $P_T^{\%} = 0\%$ .

Fig. 14(b) shows  $f_{\text{dip}}$  as a function of  $F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}}$ . In contrast to the previous criteria, the ratio  $F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}}$  successfully captures the transition between dipole-dominated and multipolar dynamos which happens when  $F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}} \simeq 0.5$ , independently of the buoyancy power



**Figure 14.** Ratio of inertia to Coriolis force at the dominant lengthscale  $F_i^{\hat{\ell}}/F_C^{\hat{\ell}}$  (left-hand panel) and the dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  (right-hand panel) as a function of the ratio of inertia to the Lorentz force at the dominant lengthscale  $F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}}$ . Black markers correspond to simulations with  $P_T^{\%} = 100\%$ , while white markers correspond to simulations with  $P_T^{\%} = 0\%$ . Horizontal dashed line marks the limit between dipolar and multipolar dynamo according to Section 2.5. Vertical dashed line marks the limit between dipolar and multipolar dynamo in term of  $F_i^{\hat{\ell}}/F_L^{\hat{\ell}}$  ratio. Vertical and horizontal black segments attached to the symbol correspond to one standard deviation about the time-averaged values.

fraction. The simulation, which singles out in the upper right quadrant of Fig. 14(b), is an exception to this criterion. This numerical model corresponds to  $P_T^{\%} \approx 47\%$  with  $Ra_T = 6.8 \times 10^{10}$ ,  $Ra_{\xi} = 9.6 \times 10^{11}$  with hybrid boundary conditions. Although it features  $F_i^{\ell}/F_L^{\ell} > 0.5$ , its magnetic field is on time-average dominated by an axisymmetric dipole ( $f_{\text{dip}} = 0.69$ ). This dynamo however strongly varies with time with several drops of the dipolar component below  $f_{\text{dip}} = 0.5$  (see Fig. A1 in the appendix). Although the numerical model has been integrated for more than two magnetic diffusion times, the stability of the dipole cannot be granted for certain.

#### 4 SUMMARY AND DISCUSSION

Convection in the liquid outer core of the Earth is thought to be driven by density perturbations from both thermal and chemical origins. In the vast majority of geodynamo models, the difference between the two buoyancy sources is simply ignored. In planetary interiors with huge Reynolds numbers, diffusion processes associated with molecular diffusivities could indeed possibly be superseded by turbulent eddy diffusion (see Braginsky & Roberts 1995). This hypothesis forms the backbone of the so-called ‘codensity’ approach which assumes that both thermal and compositional diffusivities are effectively equal. This approach suppresses some dynamic regimes intrinsic to double-diffusive convection (Radko 2013).

The main goal of this study is to examine the impact of double-diffusive convection on the magnetic field generation when both thermal and compositional gradients are destabilizing (the so-called top-heavy regime, see Takahashi 2014). To do so we have computed 79 global dynamo models, varying the fraction between thermal and compositional buoyancy sources  $P_T^{\%}$ , the Ekman number  $E$  and the vigor of the convective forcing using a Prandtl number  $Pr = 0.3$  and a Schmidt number  $Sc = 3$ . We have explored the influence of the thermal boundary conditions by considering two sets of boundary conditions for temperature and composition.

Using a generalized eigenvalue solver, we have first investigated the onset of thermosolutal convection. In agreement with previous studies (Busse 2002; Net *et al.* 2012; Trümper *et al.* 2012; Silva *et al.* 2019), we have shown that the incorporation of a destabilizing compositional gradient actually facilitates the onset of convection as compared to the single diffusive configurations by reducing the critical thermal Rayleigh number. The critical onset mode in the top-heavy regime of rotating double-diffusive convection is otherwise similar to classical thermal Rossby waves obtained in purely thermal convection (Busse 1970).

To quantify the Earth-likeness of the magnetic fields produced by the non-linear dynamo models, we have used the rating parameters introduced by Christensen *et al.* (2010). Using geodynamo models with a codensity approach, Christensen *et al.* (2010) suggested that the Earth-like dynamo models are located in a wedge-like shape in the 2-D parameter space constructed from the ratio of three typical timescales, namely the rotation rate, the turnover time and the magnetic diffusion time. Here, we have shown that the physical parameters at which the best morphological agreement with the geomagnetic field is attained strongly depend on the ratio of thermal and compositional input power. In particular, we obtain 6 purely compositional multipolar dynamo models that lie within the wedge region of Earth-like dynamos (recall Fig. 8a). This questions the relevance of the regime boundaries proposed by Christensen *et al.* (2010).

We have then used our set of double-diffusive dynamos to examine the transition between dipolar and multipolar dynamos. We have

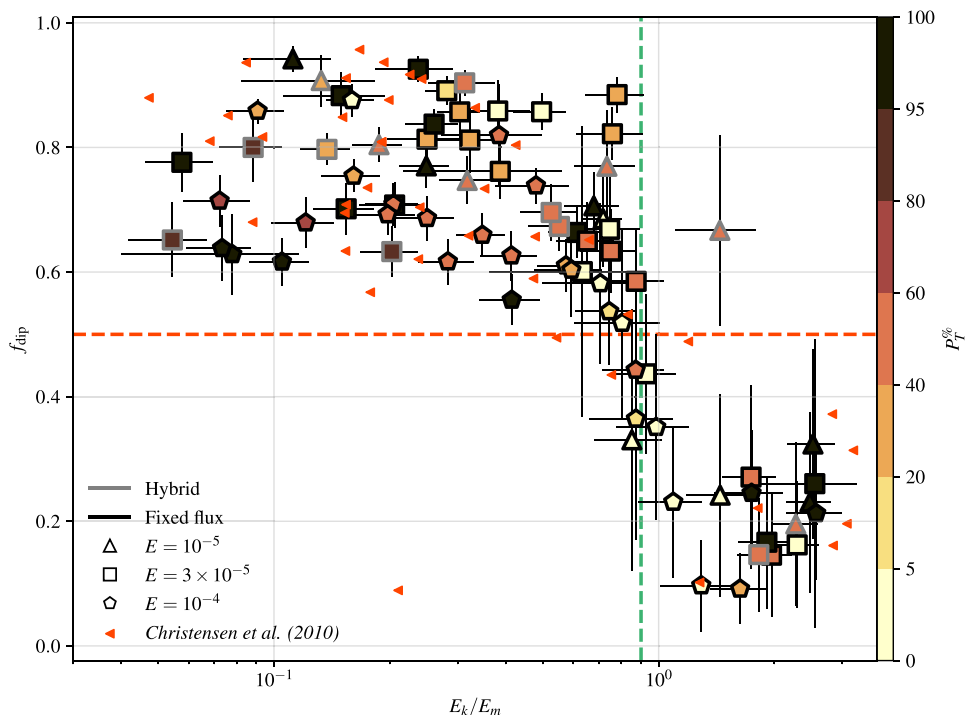
assessed the robustness of several criteria controlling this transition that had been proposed in previous studies. Sreenivasan & Jones (2006) suggested that the dipole breakdown results from an increasing role played by inertia at strong convective forcings. Christensen & Aubert (2006) then introduced the local Rossby number  $Ro_L$  as a proxy of the ratio of inertial to Coriolis forces. They suggested that  $Ro_L \approx 0.12$  marks the boundary between dipole-dominated and multipolar dynamos over a broad range of control parameters. Our numerical dynamo models with  $P_T^{\%} \geq 40\%$  follow a similar behaviour, while the transition between dipolar and multipolar dynamos occurs at lower  $Ro_L$  ( $\approx 0.05$ ) when chemical forcing prevails. A breakdown of the dipole for dynamo models with  $Ro_L < 0.1$  was already reported by Garcia *et al.* (2017) using  $Pr > 1$  under the codensity hypothesis (their Fig. 1).

Using non-magnetic numerical models, Garcia *et al.* (2017) further argued that the breakdown of the dipolar field is correlated with a change in the equatorial symmetry properties of the convective flow. They introduced the relative proportion of kinetic energy contained in the equatorially symmetric convective flow,  $\zeta$ , and suggested that multipolar dynamos would be associated with a lower value of this quantity. However, our numerical data set shows that multipolar and dipolar dynamos coexist over a broad range of  $\zeta$  (0.70–0.85, recall Fig. 11), indicating that this ratio has little predictive power in separating dipolar from multipolar simulations.

While neither  $Ro_L$  nor  $\zeta$  provide a satisfactory measure to characterize the dipole–multipole transition, the analysis of the force balance governing the dynamo models has been found to be a more promising avenue to decipher the physical processes at stake (Soderlund *et al.* 2012, 2015). By considering a spectral decomposition of the different forces (e.g. Aubert *et al.* 2017; Schwaiger *et al.* 2019), we have shown that the transition between dipolar and multipolar dynamos goes along with an increase of inertia at large scales. The analysis of the force ratio at the dominant scale of convection has revealed that the dipole–multipole transition is much more sensitive to the ratio of inertia to Lorentz force than to the ratio of inertia to Coriolis force. The transition from dipolar to multipolar dynamos robustly happens when the ratio of inertial to magnetic forces at the dominant lengthscale of convection exceeds 0.5, independently of  $P_T^{\%}$  and the Ekman number. This confirms the results by Menu *et al.* (2020) who argued that a strong Lorentz force prevents the demise of the axial dipole, delaying its breakdown beyond  $Ro_L \approx 0.12$  (their figs 3 and 4).

Providing a geophysical estimate of the ratio of inertial to magnetic forces at the dominant scale of convection in the Earth’s core is not an easy task. Recent work by Schwaiger *et al.* (2021) suggests that the dominant scale of convection should be that at which the Lorentz force and the buoyancy force, both second-order actors in the force balance, equilibrate. Extrapolation of this finding to Earth’s core yields a scale of approximately 200 km, that corresponds to spherical harmonic degree 40. This is far beyond what can be constrained through the analysis of the geomagnetic secular variation. Estimating the strength of both Lorentz and inertial forces at that scale is hence out of reach.

We can however try to approximate the ratio of these two forces by a simpler proxy, namely the ratio of the total kinetic energy  $E_k$  to total magnetic energy  $E_m$ . To examine the validity of this approximation, Fig. 15 shows  $f_{\text{dip}}$  as a function of the ratio  $E_k/E_m$  for our numerical simulations complemented with the codensity simulations of Christensen (2010) that have  $Pr \neq 1$ . We observe that the dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  exhibits a variation similar to that shown in Fig. 14(b) for the actual force ratio. The transition between dipolar and multipolar dynamos is hence adequately captured by the ratio



**Figure 15.** Dipolarity parameter  $f_{\text{dip}}$  as a function of the kinetic to magnetic energy ratio  $E_k/E_m$ . The triangles correspond to those simulations by Christensen (2010) with  $Pr \neq 1$ . The horizontal dashed line marks the  $f_{\text{dip}} = 0.5$  limit between dipolar and multipolar dynamos. The vertical dashed line corresponds to  $E_k/E_m = 0.9$ . Vertical and horizontal black segments attached to the symbols correspond to one standard deviation about the time-averaged values for  $f_{\text{dip}}$  and  $E_k/E_m$ , respectively.

$E_k/E_m$  (Kutzner & Christensen 2002). All but one of the numerical dynamos of our data set become multipolar for  $E_k/E_m > 0.9$ , independently of  $E$ ,  $P_r^{\%}$ , and the type of thermal boundary conditions prescribed. Using the physical properties from Table 1 leads to the following estimate for the Earth's core

$$\frac{E_k}{E_m} = \mu_0 \rho_o \frac{u_{\text{rms}}^2}{B_{\text{rms}}^2} \approx 10^{-4} - 10^{-3} \ll \mathcal{O}(1).$$

Christensen (2010) and Wicht & Tilgner (2010) argued that convection in the Earth's core should operate in the vicinity of the transition between dipolar and multipolar dynamos in order to explain the reversals of the geomagnetic field. This statement, however, postulates that reversals and the dipole breakdown are governed by the same physical mechanism. The smallness of  $E_k/E_m$  for Earth's core indicates that it should operate far from the dipole–multipole transition, contrary to the numerical evidence accumulated up to now. The palaeomagnetic record indicates that during a reversal or an excursion, the intensity of the field is remarkably low, which suggests that the strength of the geomagnetic field could decrease by about an order of magnitude. This state of affairs admittedly brings the ratio  $E_k/E_m$  closer to unity, yet without reaching it. So it seems that the occurrence of geomagnetic reversals is not directly related to an increase of the relative amplitude of inertia. Other mechanisms proposed to explain geomagnetic reversals rely on the interaction of a limited number of magnetic modes, whose nonlinear evolution is further subject to random fluctuations (e.g. Schmitt *et al.* 2001; P  tr  lis *et al.* 2009). In this useful conceptual framework, the large-scale dynamics of Earth's magnetic field is governed by the induction equation alone. The origin of the fluctuations that can potentially lead to a reversal of polarity is not explicated and

it remains to be found, but evidence from mean fields models by Stefani *et al.* (2006) suggests that the likelihood of reversals increases with the magnetic Reynolds number. In practice, these fluctuations could very well occur in the vicinity of the convective length scale, and have either a hydrodynamic, or a magnetic, or an hydro-magnetic origin, depending on the process driving the instability. Shedding light on the origin of these fluctuations constitutes an interesting avenue for future numerical investigations of geomagnetic reversals.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank Ulrich Christensen and Julien Aubert for sharing their data. Numerical computations were performed at S-CAPAD, IPGP and using HPC resources from GENCI-CINES and TGCC-Irene KNL (Grant 2020-A0070410095). Those computations required roughly 3.3 millions single core hours on Intel Haswell CPUs. This amounts for 33 MWh, or equivalently to a bit more than 3 tons of carbon dioxide emissions. We thank Gabriel Hauteux, from GENCI-CINES, for providing us with a direct measure of the power consumption of MagIC. All the figures have been generated using matplotlib (Hunter 2007) and paraview (<https://www.paraview.org>). The colourbar used in this study were designed by Thyng *et al.* (2016) and Cramer (2018, 2019).

## DATA AVAILABILITY

The data underlying this article will be shared on reasonable request to the corresponding author.

## REFERENCES

- Anufriev, A.P., Jones, C.A. & Soward, A.M., 2005. The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth's core, *Phys. Earth planet. Inter.*, **152**, 163–190.
- Ascher, U.M., Ruuth, S.J. & Spiteri, R.J., 1997. Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations, *Appl. Numer. Math.*, **25**(2–3), 151–167.
- Aubert, J., 2014. Earth's core internal dynamics 1840–2010 imaged by inverse geodynamo modelling, *Geophys. J. Int.*, **197**(3), 1321–1334.
- Aubert, J., Finlay, C.C. & Fournier, A., 2013. Bottom-up control of geomagnetic secular variation by the Earth's inner core, *Nature*, **502**, 219–223.
- Aubert, J., Gastine, T. & Fournier, A., 2017. Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime, *J. Fluid Mech.*, **813**, 558–593.
- Badro, J., Fiquet, G., Guyot, F., Gregoryanz, E., Occelli, F., Antonangeli, D. & Astuto, M., 2007. Effect of light elements on the sound velocities in solid iron: Implications for the composition of Earth's core, *Earth planet. Sci. Lett.*, **254**, 233–238.
- Boscarino, S., Pareschi, L. & Russo, G., 2013. Implicit-explicit Runge–Kutta Schemes for Hyperbolic Systems and Kinetic Equations in the Diffusion Limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, **35**(1), A22–A51.
- Bouffard, M., 2017. *Double-diffusive thermochemical convection in the liquid layers of planetary interiors: a first numerical exploration with a particle-in-cell method*, Theses, Université de Lyon.
- Boyd, J.P., 2001. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd revised edn, Courier Corporation.
- Braginsky, S.I. & Roberts, P.H., 1995. Equations governing convection in earth's core and the geodynamo, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **79**, 1–97.
- Breuer, M., Manglik, A., Wicht, J., Trümper, T., Harder, H. & Hansen, U., 2010. Thermochemically driven convection in a rotating spherical shell, *Geophys. J. Int.*, **183**, 150–162.
- Buffett, B., 2015. Core-mantle interactions, in *Treatise on Geophysics*, 2nd edn, Vol. 8, pp. 345–358, ed. Schubert, G., Elsevier.
- Busse, F.H., 1970. Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, **44**(3), 441–460.
- Busse, F.H., 2002. Is low Rayleigh number convection possible in the Earth's core?, *Geophys. Res. Lett.*, **29**(7), 9.
- Butcher, J.C., 1964. On Runge-Kutta processes of high order, *J. Aust. Math. Soc.*, **4**(2), 179–194.
- Christensen, U., Olson, P. & Glatzmaier, G.A., 1999. Numerical modelling of the geodynamo: a systematic parameter study, *Geophys. J. Int.*, **138**(2), 393–409.
- Christensen, U. *et al.*, 2001. A numerical dynamo benchmark, *Phys. Earth planet. Inter.*, **128**(1–4), 25–34.
- Christensen, U.R., 2010. Dynamo scaling laws and applications to the planets, *Space Sci. Rev.*, **152**(1), 565–590.
- Christensen, U.R. & Aubert, J., 2006. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophys. J. Int.*, **166**, 97–114.
- Christensen, U.R. & Wicht, J., 2015. Numerical dynamo simulations, in *Treatise on Geophysics*, 2nd edn, Vol. 8, pp. 245–282, ed., Schubert, G., Elsevier.
- Christensen, U.R., Aubert, J. & Hulot, G., 2010. Conditions for Earth-like geodynamo models, *Earth planet. Sci. Lett.*, **296**, 487–496.
- Cramer, F., 2018. Geodynamic diagnostics, scientific visualisation and StagLab 3.0, *Geosci. Model Dev.*, **11**(6), 2541–2562.
- Cramer, F., 2019. Scientific Colour Maps, Zenodo.
- Davidson, P., 2013. Scaling laws for planetary dynamos, *Geophys. J. Int.*, **195**(1), 67–74.
- Dietrich, W. & Wicht, J., 2013. A hemispherical dynamo model: Implications for the Martian crustal magnetization, *Phys. Earth planet. Inter.*, **217**, 10–21.
- Dormy, E., Soward, A.M., Jones, C.A., Jault, D. & Cardin, P., 2004. The onset of thermal convection in rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, **501**, 43–70.
- Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference earth model, *Phys. Earth planet. Inter.*, **25**, 297–356.
- Finlay, C.C. & Amit, H., 2011. On flow magnitude and field-flow alignment at Earth's core surface: Core flow magnitude and field-flow alignment, *Geophys. J. Int.*, **186**(1), 175–192.
- Finlay, C.C. *et al.*, 2010. International geomagnetic reference field: the eleventh generation, *Geophys. J. Int.*, **183**(3), 1216–1230.
- García, F., Oruba, L. & Dormy, E., 2017. Equatorial symmetry breaking and the loss of dipolarity in rapidly rotating dynamos, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **111**(5), 380–393.
- Gastine, T., 2019. Pizza: An open-source pseudo-spectral code for spherical quasi-geostrophic convection, *Geophys. J. Int.*, **217**(3), 1558–1576.
- Gastine, T., Wicht, J. & Aurnou, J.M., 2015. Turbulent Rayleigh-Bénard convection in spherical shells, *J. Fluid Mech.*, **778**, 721–764.
- Gastine, T., Wicht, J. & Aubert, J., 2016. Scaling regimes in spherical shell rotating convection, *J. Fluid Mech.*, **808**, 690–732.
- Gillet, N. & Jones, C.A., 2006. The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder, *J. Fluid Mech.*, **554**(-1), 343.
- Gillet, N., Jault, D., Canet, E. & Fournier, A., 2010. Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core, *Nature*, **465**(7294), 74–77.
- Gillet, N., Barrois, O. & Finlay, C.C., 2015. Stochastic forecasting of the geomagnetic field from the COV-OBS. x1 geomagnetic field model, and candidate models for IGRF-12, *Earth, Planets and Space*, **67**(1), 71.
- Glatzmaier, G.A., 1984. Numerical simulations of stellar convective dynamos. I - the model and method, *J. Comput. Phys.*, **55**, 461–484.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1995. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth planet. Inter.*, **91**, 63–75.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1996. An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection, *Phys. D Nonlin. Phenom.*, **97**, 81–94.
- Goluskin, D., 2016. *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*, Springer Briefs in Applied Sciences and Technology, Springer.
- Hirose, K., Labrosse, S. & Hernlund, J., 2013. Composition and state of the core, *Ann. Rev. Earth planet. Sci.*, **41**, 657–691.
- Hollerbach, R., 2000. A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **32**(7), 773–797.
- Hunter, J.D., 2007. Matplotlib: a 2D graphics environment, *Comput. Sci. Eng.*, **9**(3), 90–95.
- Jackson, A., Jonkers, A.R.T. & Walker, M.R., 2000. Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**(1768), 957–990.
- Jameson, A., Schmidt, W. & Turkel, E., 1981. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes, in *Proceedings of the 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Palo Alto, CA, USA.
- Johnston, H. & Doering, C.R., 2009. Comparison of turbulent thermal convection between conditions of constant temperature and constant flux, *Phys. Rev. Lett.*, **102**(6), 064501.
- Kaplan, E.J., Schaeffer, N., Vidal, J. & Cardin, P., 2017. Subcritical thermal convection of liquid metals in a rapidly rotating sphere, *Phys. Rev. Lett.*, **119**(9), 094501.
- King, E.M., Stellmach, S. & Aurnou, J.M., 2012. Heat transfer by rapidly rotating Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **691**, 568–582.
- Konôpková, Z., McWilliams, S.R., Gómez-Pérez, N. & Goncharov, A.F., 2016. Direct measurements of thermal conductivity in solid iron at planetary core conditions, *Nature*, **534**(7605), 99–101.
- Korte, M., Genevey, A., Constable, C.G., Frank, U. & Schnepf, E., 2005. Continuous geomagnetic field models for the past 7 millennia: 1. A new global data compilation, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **6**(2), doi:10.1029/2004GC000800.
- Kosloff, D. & Tal-Ezer, H., 1993. A modified Chebyshev pseudospectral method with an O(N-1) time step restriction, *J. Comput. Phys.*, **104**(2), 457–469.
- Kutzner, C. & Christensen, U., 2002. From stable dipolar towards reversing numerical dynamos, *Phys. Earth planet. Inter.*, **131**(1), 29–45.

- Labrosse, S., 2003. Thermal and magnetic evolution of the Earth's core, *Phys. Earth planet. Inter.*, **140**(1–3), 127–143.
- Labrosse, S., 2015. Thermal evolution of the core with a high thermal conductivity, *Phys. Earth planet. Inter.*, **247**, 36–55.
- Landeau, M. & Aubert, J., 2011. Equatorially asymmetric convection inducing a hemispherical magnetic field in rotating spheres and implications for the past martian dynamo, *Phys. Earth planet. Inter.*, **185**(3–4), 61–73.
- Li, Y., Fruehan, R.J., Lucas, J.A. & Belton, G.R., 2000. The chemical diffusivity of oxygen in liquid iron oxide and a calcium ferrite, *Metall. Mater. Trans., B*, **31**(5), 1059–1068.
- Lister, J.R. & Buffett, B.A., 1995. The strength and efficiency of thermal and compositional convection in the geodynamo, *Phys. Earth planet. Inter.*, **91**, 17–30.
- Loper, D.E. & Roberts, P.H., 1981. A study of conditions at the inner core boundary of the earth, *Phys. Earth planet. Inter.*, **24**(4), 302–307.
- Manglik, A., Wicht, J. & Christensen, U.R., 2010. A dynamo model with double diffusive convection for Mercury's core, *Earth planet. Sci. Lett.*, **289**, 619–628.
- Marti, P., Calkins, M.A. & Julien, K., 2016. A computationally efficient spectral method for modeling core dynamics, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **17**(8), 3031–3053.
- Mather, J.F. & Smittev, R.D., 2021. Regimes of thermo-compositional convection and related dynamos in rotating spherical shells, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **115**(1), 61–84.
- Matsui, H. *et al.*, 2016. Performance benchmarks for a next generation numerical dynamo model, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **17**(5), 1586–1607.
- Menu, M.D., Petitdemange, L. & Galtier, S., 2020. Magnetic effects on fields morphologies and reversals in geodynamo simulations, *Phys. Earth planet. Inter.*, doi:10.1016/j.pepi.2020.106542.
- Moll, R., Garaud, P. & Stellmach, S., 2016. A new model for mixing by double-diffusive convection (semi-convection). III. Thermal and compositional transport through non-layered ODDC, *Astrophys. J.*, **823**, 33.
- Monville, R., Vidal, J., Cébron, D. & Schaeffer, N., 2019. Rotating convection in stably-stratified planetary cores, *Geophys. J. Int.*, **219**(Suppl. 1), S195–S218.
- Net, M., García, F. & Sánchez, J., 2012. Numerical study of the onset of thermosolutal convection in rotating spherical shells, *Phys. Fluids*, **24**(6), 064101.
- Olson, P. & Christensen, U.R., 2006. Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos, *Earth planet. Sci. Lett.*, **250**(3–4), 561–571.
- Olson, P., Christensen, U.R. & Glatzmaier, G.A., 1999. Numerical modelling of the geodynamo: mechanism of field generation and equilibration, *J. geophys. Res.*, **104**(B5), 10383–10404.
- Oruba, L. & Dormy, E., 2014. Transition between viscous dipolar and inertial multipolar dynamos, *Geophys. Res. Lett.*, **41**(20), 7115–7120.
- Parker, E.N., 1955. Hydromagnetic dynamo models, *Astrophys. J.*, **122**, 293.
- Pétreils, F., Fauve, S., Dormy, E. & Valet, J.-P., 2009. Simple mechanism for reversals of earth's magnetic field, *Phys. Rev. Lett.*, **102**(14), 144503.
- Pozzo, M., Davies, C., Gubbins, D. & Alfè, D., 2013. Transport properties for liquid silicon-oxygen-iron mixtures at Earth's core conditions, *Phys. Rev. B*, **87**, doi:10.1103/PhysRevB.87.014110.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. & Vetterling, W.T., 1992. *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, 2nd edn, Vol. 1 of Fortran Numerical Recipes, Cambridge Univ. Press.
- Quidelleur, X. & Courtillot, V., 1996. On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation, *Phys. Earth planet. Inter.*, **95**(1–2), 55–77.
- Radko, T., 2013. *Double-Diffusive Convection*, Cambridge Univ. Press.
- Roberts, P.H. & King, E.M., 2013. On the genesis of the Earth's magnetism, *Rep. Prog. Phys.*, **76**, 096801, doi:10.1088/0034-4885/76/9/096801.
- Ruddick, B., 1983. A practical indicator of the stability of the water column to double-diffusive activity, *Deep Sea Res., A. Oceanogr. Res. Papers*, **30**(10), 1105–1107.
- Schaeffer, N., 2013. Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudo-spectral numerical simulations, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **14**(3), 751–758.
- Schaeffer, N., 2016. Effective scaling for the onset of thermal convection in rotating planetary cores, *Figshare*, [https://figshare.com/articles/figure/Effective\\_scaling\\_for\\_the\\_onset\\_of\\_thermal\\_convection\\_in\\_rotating\\_planetary\\_cores/4231376..](https://figshare.com/articles/figure/Effective_scaling_for_the_onset_of_thermal_convection_in_rotating_planetary_cores/4231376..)
- Schaeffer, N., Jault, D., Nataf, H.C. & Fournier, A., 2017. Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth's core, *Geophys. J. Int.*, **211**(1), 1–29.
- Schmitt, D., Ossendrijver, M.A.J.H. & Hoyng, P., 2001. Magnetic field reversals and secular variation in a bistable geodynamo model, *Phys. Earth planet. Inter.*, **125**(1–4), 119–124.
- Schwaiger, T., Gastine, T. & Aubert, J., 2019. Force balance in numerical geodynamo simulations: a systematic study, *Geophys. J. Int.*, **219**(Suppl. 1), S101–S114.
- Schwaiger, T., Gastine, T. & Aubert, J., 2021. Relating force balances and flow length scales in geodynamo simulations, *Geophys. J. Int.*, **224**, 1890–1904.
- Silva, L., Mather, J.F. & Smittev, R.D., 2019. The onset of thermo-compositional convection in rotating spherical shells, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **113**(4), 377–404.
- Smittev, R.D., 2011. Double-diffusive convection in a rotating cylindrical annulus with conical caps, *Phys. Earth planet. Inter.*, **186**, 183–190.
- Soderlund, K.M., King, E.M. & Aurnou, J.M., 2012. The influence of magnetic fields in planetary dynamo models, *Earth planet. Sci. Lett.*, **333–334**, 9–20.
- Soderlund, K.M., Sheyko, A., King, E.M. & Aurnou, J.M., 2015. The competition between Lorentz and Coriolis forces in planetary dynamos, *Prog. Earth planet. Sci.*, **2**(1), 24.
- Spiegel, E.A., 1972. Convection in stars: II. Special effects, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10**, 261.
- Sreenivasan, B. & Jones, C.A., 2006. The role of inertia in the evolution of spherical dynamos, *Geophys. J. Int.*, **164**(2), 467–476.
- Sreenivasan, B. & Jones, C.A., 2011. Helicity generation and subcritical behaviour in rapidly rotating dynamos, *J. Fluid Mech.*, **688**, 5–30.
- Stefani, F., Gerbeth, G., Günther, U. & Xu, M., 2006. Why dynamos are prone to reversals, *Earth planet. Sci. Lett.*, **243**(3–4), 828–840.
- Takahashi, F., 2014. Double diffusive convection in the Earth's core and the morphology of the geomagnetic field, *Phys. Earth planet. Inter.*, **226**, 83–87.
- Takahashi, F., Shimizu, H. & Tsunakawa, H., 2019. Mercury's anomalous magnetic field caused by a symmetry-breaking self-regulating dynamo, *Nat. Commun.*, **10**, 208.
- Thyng, K., Greene, C., Hetland, R., Zimmerle, H. & DiMarco, S., 2016. True colors of oceanography: guidelines for effective and accurate colormap selection, *Oceanography*, **29**(3), 9–13.
- Tilgner, A., 1999. Spectral methods for the simulation of incompressible flows in spherical shells, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **30**(6), 713–724.
- Trümper, T., Breuer, M. & Hansen, U., 2012. Numerical study on double-diffusive convection in the Earth's core, *Phys. Earth planet. Inter.*, **194**, 55–63.
- Valet, J.-P. & Fournier, A., 2016. Deciphering records of geomagnetic reversals, *Rev. Geophys.*, **54**(2), 410–446.
- Vidal, J. & Schaeffer, N., 2015. Quasi-geostrophic modes in the Earth's fluid core with an outer stably stratified layer, *Geophys. J. Int.*, **202**(3), 2182–2193.
- Wicht, J., 2002. Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations, *Phys. Earth planet. Inter.*, **132**(4), 281–302.
- Wicht, J. & Sanchez, S., 2019. Advances in geodynamo modelling, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **113**(1–2), 2–50.
- Wicht, J. & Tilgner, A., 2010. Theory and modeling of planetary dynamos, *Space Sci. Rev.*, **152**(1), 501–542.
- Yadav, R.K., Gastine, T. & Christensen, U.R., 2013. Scaling laws in spherical shell dynamos with free-slip boundaries, *Icarus*, **225**(1), 185–193.
- Yadav, R.K., Gastine, T., Christensen, U.R., Wolk, S.J. & Poppenhaeger, K., 2016. Approaching a realistic force balance in geodynamo simulations, *PNAS*, **113**(43), 12065–12070.
- Zhang, Y. *et al.*, 2020. Reconciliation of experiments and theory on transport properties of iron and the geodynamo, *Phys. Rev. Lett.*, **125**(7), 078501.

APPENDIX A: TIME SCHEME

We provide in this appendix the matrices  $\mathbf{a}^I$  and  $\mathbf{a}^E$  and the vectors  $\mathbf{b}^I$ ,  $\mathbf{b}^E$ ,  $\mathbf{c}^E$  and  $\mathbf{c}^I$  of the two IMEX Runge–Kutta schemes that we resorted to for this study. These vectors and matrices can conveniently be represented using Butcher tables (Butcher 1964).

**BPR353:** (Boscarino *et al.* 2013)

Implicit component

$$\frac{\mathbf{c}^I | \mathbf{A}^I}{\mathbf{b}^I} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 & \\ \hline 2/3 & 5/18 & -1/9 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 3/4 & -1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 & -1/2 & 1/2 \end{array}$$

Explicit component

$$\frac{\mathbf{c}^E | \mathbf{A}^E}{\mathbf{b}^E} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ \hline 2/3 & 4/9 & 2/9 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \end{array}$$

**PC2:** (Jameson *et al.* 1981)

Implicit component

$$\frac{\mathbf{c}^I | \mathbf{A}^I}{\mathbf{b}^I} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 & \\ \hline 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Explicit component

$$\frac{\mathbf{c}^E | \mathbf{A}^E}{\mathbf{b}^E} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

APPENDIX B: NUMERICAL SIMULATIONS

**Table A1.** Control parameters and simulation diagnostics for the 79 numerical simulations computed for this study. Simulations computed using the finite difference method in radius are marked with a superscript f (the others were computed using the Chebyshev collocation method in radius). Simulations with hybrid boundary conditions are marked by an H in the first column. Simulations are sorted by growing Ekman number and then by growing magnetic Reynolds number. The averaging and running times  $t_{\text{avg}}$  and  $t_{\text{run}}$  are expressed in units of magnetic diffusion time  $\tau_\eta$ .

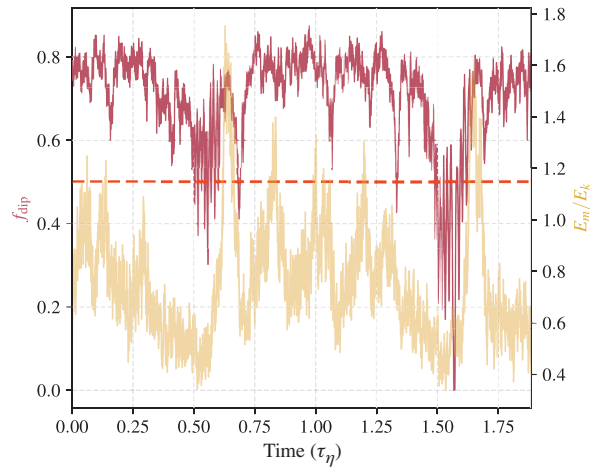
	$Ra_T$ ( $\times 10^8$ )	$Ra_\xi$ ( $\times 10^9$ )	$(N_r, \ell_{\text{max}})$	$Pm$	$\alpha$	$t_{\text{scheme}}$	$t_{\text{avg}}$	$t_{\text{run}}$	$Rm$	$Ro_L$ ( $\times 10^{-2}$ )	$\Lambda$	$f_{\text{ohm}}$	$\chi^2$	$\zeta$	$f_{\text{dip}}$	$P_T^{\%}$	$Nu$	$Sh$
$E = 1 \times 10^{-5}, Pr = 0.3, Sc = 3$																		
H	0.1	10	(97, 133)	1.0	0.935	BPR353	1.80	1.80	176	1.5	2.4	0.66	20.1	0.80	0.91	32	1.8	10.6
	3.1	0	(97, 170)	1.0	0.935	BPR353	2.79	3.09	196	0.9	3.4	0.79	12.6	0.92	0.94	100	2.0	1.0
	0	100	(193, 213)	1.0	0.975	BPR353	0.29	0.29	444	4.9	2.7	0.51	3.4	0.76	0.69	0	1.0	26.6
H	0.8	120	(257, 256)	1.0	0.990	BPR353	0.20	0.37	514	4.3	14.1	0.74	1.8	0.69	0.80	40	4.5	28.1
	0	270	(320, 256) <sup>f</sup>	1.0	None	BPR353	0.47	0.95	685	7.2	5.5	0.54	7.9	0.73	0.33	0	1.0	36.2
	0	400	(380, 256) <sup>f</sup>	1.0	None	BPR353	0.16	0.20	880	8.7	5.4	0.49	14.5	0.74	0.24	0	1.0	41.0
	46	0	(109, 170)	1.0	0.940	BPR353	0.38	0.90	763	5.5	23.5	0.75	2.4	0.71	0.77	100	7.3	1.0
H	1.7	240	(321, 256)	1.0	0.992	BPR353	0.17	0.28	760	6.7	18.2	0.70	2.2	0.70	0.75	44	6.1	35.3
H	3.4	480	(384, 341) <sup>f</sup>	0.5	None	BPR353	0.46	0.67	580	10.5	9.2	0.65	1.5	0.71	0.77	46	8.0	44.8 (*)
	100	0	(129, 213)	1.0	0.932	BPR353	0.26	1.29	1213	10	21.7	0.67	0.8	0.72	0.71	100	10.5	1.0
H	6.8	960	(380, 256) <sup>f</sup>	0.5	None	BPR353	1.54	1.88	843	15.3	10.3	0.60	1.9	0.73	0.69	47	11.0	55.3 (x)
	300	0	(129, 256)	0.5	0.962	BPR353	0.30	1.22	1235	17.4	12.4	0.58	19.2	0.65	0.23	100	16.7	1.0
H	13	1900	(408, 256) <sup>f</sup>	0.5	None	PC2	0.16	0.24	1252	19.7	13.8	0.57	21.2	0.68	0.20	47	14.2	68.2 (**)
	600	0	(129, 256)	0.5	0.962	BPR353	0.22	0.43	1640	21.6	21.4	0.61	11.6	0.65	0.32	100	20.9	1.0

**Table A1.** Continued

$Ra_T$ ( $\times 10^8$ )	$Ra_\xi$ ( $\times 10^9$ )	( $N_r, \ell_{max}$ )	$Pm$	$\alpha$	$t_{scheme}$	$t_{avg}$	$t_{run}$	$Rm$	$Ro_L$ ( $\times 10^{-2}$ )	$\Lambda$	$f_{ohm}$	$\chi^2$	$\zeta$	$f_{dip}$	$P_T^{\%}$	$Nu$	$Sh$	
$E = 3 \times 10^{-5}, Pr = 0.3, Sc = 3$																		
H	0	0.5	(49, 106)	2.0	0.779	CNAB2	1.37	1.55	113	1.2	0.4	0.30	52.3	0.89	0.86	0	1.0	4.0
H	0.015	0.5	(49, 133)	2.0	0.779	CNAB2	1.95	2.33	154	1.3	1.1	0.47	24.0	0.93	0.90	44	1.3	4.6
H	0.1	1.1	(49, 133)	1.0	0.779	CNAB2	2.15	4.39	98	2	0.4	0.31	36.5	0.88	0.88	21	1.4	6.3
H	0.1	1.1	(129, 213)	2.0	0.960	BPR353	0.15	3.11	178	1.7	1.6	0.48	10.7	0.85	0.86	22	1.4	6.4
H	0.1	1.4	(129, 170)	2.0	0.960	BPR353	0.35	1.79	193	1.8	2.0	0.51	13.4	0.83	0.89	19	1.5	7.2
H	0	2	(65, 133)	2.0	0.848	CNAB2	1.81	2.26	204	2.2	1.6	0.43	8.5	0.79	0.86	0	1.0	8.2
H	0.5	0	(49, 133)	2.0	0.779	CNAB2	1.62	1.71	255	1	6.6	0.68	8.9	0.96	0.88	100	1.7	1.0
H	0	4	(97, 133)	2.0	0.975	CNAB2	1.24	1.42	288	3.3	2.0	0.38	2.3	0.78	0.60	0	1.0	11.2
H	0.2	4	(97, 133)	2.0	0.930	CNAB2	1.04	1.32	307	2.9	4.4	0.54	3.4	0.78	0.81	20	2.0	11.5
H	1	0	(49, 106)	1.0	0.779	CNAB2	5.96	6.41	180	1.9	4.1	0.69	10.8	0.92	0.93	100	2.1	1.0
H	1	0	(49, 106)	2.0	0.864	CNAB2	0.79	1.18	281	1.4	20.6	0.81	3.4	0.81	0.78	100	2.4	1.0
H	0	8	(97, 133)	2.0	0.975	CNAB2	1.91	5.45	385	4.6	3	0.41	2.6	0.77	0.67	0	1.0	14.8
H	0.1	1.1	(97, 133)	1.0	0.935	CNAB2	1.30	1.77	164	2.0	9.2	0.79	5.0	0.77	0.80	86	2.2	9.2
H	0.5	5.5	(129, 170)	2.0	0.960	CNAB2	1.21	1.21	373	3.3	8.4	0.62	2.3	0.76	0.81	35	2.4	13.4
H	0.1	1.1	(97, 133)	2.0	0.935	CNAB2	1.61	1.89	317	1.8	27.8	0.79	5.9	0.75	0.65	87	2.3	8.9
H	0.05	5.5	(65, 133)	2.0	0.864	CNAB2	1.63	1.81	342	3	12.8	0.69	2.2	0.72	0.80	39	2.2	12.9
H	1	11	(97, 133)	1.0	0.935	CNAB2	1.10	1.30	297	5.7	3.5	0.51	4.0	0.78	0.82	39	3.1	17.9
H	1	11	(145, 170)	2.0	0.960	CNAB2	1.08	1.23	541	4.9	11.4	0.59	1.5	0.75	0.76	39	3.2	17.4
H	0	20	(97, 133)	2.0	0.975	CNAB2	1.04	1.06	581	6.7	5.5	0.43	5.6	0.76	0.44	0	1.0	20.0
H	3.7	0	(49, 133)	1.0	0.779	CNAB2	1.31	1.41	328	5	12.4	0.71	2.8	0.74	0.84	100	4.0	1.0
H	3.7	0	(81, 133)	2.0	0.900	CNAB2	0.88	1.02	613	4.4	36.7	0.72	3.7	0.73	0.70	100	4.0	1.0
H	1.7	20	(145, 170)	2.0	0.970	CNAB2	0.83	1.08	738	7.1	12.5	0.54	1.7	0.76	0.65	40	4.0	21.3
H	5	0	(97, 133)	2.0	0.864	CNAB2	0.89	1.06	726	5.7	38.6	0.69	2.8	0.72	0.71	100	4.6	1.0
H	2.3	27	(129, 133)	2.0	0.960	CNAB2	1.07	1.07	857	8.3	14.7	0.53	1.7	0.76	0.63	41	4.6	23.3
H	0.2	30	(109, 256)	2.0	0.948	BPR353	1.02	1.10	837	8.4	20	0.57	1.5	0.73	0.70	40	4.0	23.0
H	0.4	8	(97, 170)	2.0	0.962	BPR353	0.95	1.09	755	6.9	42.4	0.68	4.2	0.69	0.63	84	4.2	17.3
H	3	35	(129, 170)	2.0	0.962	CNAB2	1.13	1.13	976	9.5	16.4	0.52	1.8	0.76	0.59	42	5.2	25.2
H	0.3	35	(129, 213)	2.0	0.962	BPR353	0.43	0.51	949	9.7	24.5	0.57	1.6	0.73	0.67	48	4.6	24.2
H	0	100	(193, 213)	2.0	0.970	BPR353	0.13	0.18	1378	12.5	12.4	0.40	26.0	0.68	0.16	0	1.0	31.5
H	12	0	(129, 170)	2.0	0.960	CNAB2	0.94	1.02	1237	11	37.5	0.59	2.5	0.73	0.66	100	6.8	1.0
H	7	70	(193, 170)	2.0	0.983	CNAB2	0.87	1.22	1579	13.9	19	0.44	27.2	0.69	0.15	47	7.2	31.1
H	9	100	(193, 256)	2.0	0.983	PC2	0.10	0.30	1765	14.8	27	0.49	12.2	0.72	0.27	45	8.2	33.1
H	0.9	100	(193, 213)	2.0	0.983	PC2	0.12	0.16	1790	17.4	26.5	0.47	26.3	0.71	0.15	51	7.3	32.6
H	40	0	(97, 213)	2.0	0.960	CNAB2	0.34	0.38	2521	19.5	50	0.50	22.2	0.71	0.17	100	11.0	1.0
H	68	0	(129, 170)	1.0	0.960	BPR353	0.59	0.59	1671	23.5	33	0.53	7.4	0.71	0.26	100	13.0	1.0
$E = 1 \times 10^{-4}, Pr = 0.3, Sc = 3$																		
H	0.013	0.045	(49, 85)	5.0	None	CNAB2	1.09	1.78	175	1.1	1.6	0.32	10.1	0.98	0.82	40	1.2	2.8
H	0	0.1	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.17	1.31	161	1.3	3.2	0.47	4.9	0.81	0.88	0	1.0	3.8
H	0.02	0.09	(49, 85)	5.0	None	CNAB2	2.54	7.73	180	1.2	7.2	0.62	4.3	0.86	0.86	36	1.3	4.0
H	0.1	0	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.86	2.16	363	1.3	34.7	0.67	11.9	0.90	0.63	100	1.7	1.0
H	0	0.5	(49, 85)	5.0	None	CNAB2	1.65	1.99	378	3.9	4	0.32	1.8	0.79	0.58	0	1.0	7.6
H	0.047	0.33	(65, 85)	5.0	None	BPR353	0.50	3.64	345	2.6	14.8	0.58	2.8	0.78	0.75	37	1.6	6.9
H	0.08	0.19	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.10	1.18	334	1.8	31	0.69	3.8	0.81	0.71	67	1.7	6.0
H	0	0.7	(49, 85)	5.0	None	CNAB2	2.02	2.43	438	4.7	4.8	0.31	2.8	0.78	0.52	0	1.0	8.6
H	0.07	0.5	(97, 106)	5.0	None	BPR353	0.35	1.70	438	3.4	18.9	0.56	3.0	0.78	0.71	40	1.8	8.1
H	0	1	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.06	1.33	522	5.6	5.5	0.31	8.1	0.77	0.35	0	1.0	9.9
H	0.14	0.34	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.08	1.09	482	3.1	38.6	0.64	3.8	0.78	0.68	70	2.0	7.7
H	0.19	0	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.14	1.36	469	2.3	60.1	0.69	5.0	0.80	0.64	100	2.0	1.0
H	0.12	0.52	(81, 106)	5.0	None	BPR353	0.89	2.24	516	3.8	27.1	0.58	3.3	0.78	0.69	56	2.0	8.6
H	0.027	1.1	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	2.11	2.44	580	5.9	7.7	0.34	6.3	0.78	0.36	10	1.9	10.4
H	0.027	1.1	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.14	1.30	570	5.7	8.8	0.37	2.9	0.79	0.54	11	1.9	10.3
H	0.1	0.69	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.12	1.45	533	4.2	22.8	0.55	3.4	0.78	0.69	44	2.0	9.1
H	0.049	1	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.05	1.16	573	5.4	11.1	0.41	2.5	0.79	0.60	20	1.9	10.1
H	0.049	1	(65, 133)	5.0	None	BPR353	0.13	1.38	566	5.4	11.2	0.42	2.2	0.78	0.61	20	1.9	10.1
H	0	1.4	(65, 106)	5.0	None	CNAB2	1.32	1.61	615	6.5	7	0.31	16.6	0.75	0.23	0	1.0	11.0
H	0.14	1	(65, 106)	3.0	None	BPR353	0.33	2.10	412	5.7	11.8	0.50	2.5	0.79	0.74	45	2.3	10.6
H	0.14	1	(81, 106)	5.0	None	BPR353	0.37	1.72	655	5.5	24.7	0.51	3.3	0.77	0.66	46	2.3	10.5
H	0.14	1	(81, 133)	7.0	0.909	BPR353	0.42	2.36	896	5.2	40.6	0.52	4.3	0.77	0.62	46	2.3	10.4
H	0	2	(97, 170)	5.0	0.935	BPR353	0.88	2.98	750	7.2	8.7	0.32	39.4	0.72	0.10	0	1.0	12.4
H	0.3	0	(61, 170)	5.0	None	CNAB2	0.16	1.24	616	3.6	72.6	0.66	4.7	0.76	0.62	100	2.4	1.0
H	0.21	1.5	(81, 133)	5.0	0.909	BPR353	0.32	2.74	813	6.8	32	0.51	3.9	0.77	0.63	49	2.7	12.0
H	0.3	3	(97, 170)	5.0	0.935	BPR353	0.28	2.13	1144	9.6	30.2	0.44	6.8	0.79	0.44	43	3.3	14.6
H	0.9	0	(81, 170)	5.0	0.909	BPR353	0.34	2.08	1244	9.8	74.9	0.54	6.9	0.74	0.56	100	3.8	1.0
H	0.4	6	(97, 213)	5.0	0.935	BPR353	0.29	1.85	1576	12.8	30.6	0.38	42.7	0.72	0.09	35	4.0	17.4
H	5	0	(73, 213)	5.0	0.889	BPR353	0.33	1.49	3363	23.5	130	0.39	17.7	0.75	0.25	100	7.4	1.0
H	20	0	(129, 170)	5.0	0.960	CNAB2	0.12	0.39	6160	45.1	297	0.36	21.9	0.76	0.21	100	10.5	1.0

APPENDIX C: SIMULATION <sup>x</sup>

In this appendix we provide in Fig. A1 the detailed time evolution of the dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  and of the magnetic to kinetic energy ratio  $E_m/E_k$  of the anomalous simulation that appears for instance in the top-right quadrant of Figs 14(b) and 15. This simulation is marked with a (x) in Table A1.



**Figure A1.** Time evolution of the dipolar fraction  $f_{\text{dip}}$  and of the magnetic to kinetic energy ratio  $E_m/E_k$  for the simulation (x) of Table A1. The horizontal dashed line corresponds to the boundary between dipole-dominated and multipolar dynamos ( $f_{\text{dip}} = 0.5$ ). Time is scaled by the magnetic diffusion time.





**Annexe C**

**Diplôme de doctorat**

R É P U B L I Q U E F R A N Ç A I S E

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la recherche

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE III

DOCTORAT

Vu le code de l'éducation, notamment son article L. 612-7 ;

Vu le code de la recherche, notamment son article L. 412-1 ;

Vu le décret n° 2002-481 du 8 AVRIL 2002 relatif aux grades et titres universitaires et aux diplômes nationaux ;

Vu l'arrêté du 3 septembre 1998 relatif à la charte des thèses ;

Vu l'arrêté du 27 juin 1985 modifié fixant la liste des établissements autorisés à délivrer, seuls, le doctorat ;

Vu l'arrêté du 21 août 2000 fixant la liste des établissements d'enseignements supérieurs autorisés à délivrer le doctorat conjointement avec une université ou un institut national polytechnique ;

Vu l'arrêté du 7 août 2006 relatif à la formation doctorale ;

Vu les pièces justificatives produites par M. THOMAS GASTINE, né le 28 mai 1983 à GRENOBLE (038), en vue de son inscription au doctorat ;

Vu le procès-verbal du jury attestant que l'intéressé a soutenu, le 28 mai 2009 une thèse portant sur le sujet *Etude de l'interaction convection-pulsations et application*

*aux céphéides*, préparée au sein de l'école doctorale Ecole Doctorale de Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace - UPS, devant un jury présidé par MICHEL

RHEUTORD, PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS et composé de ISABELLE BARAFFE, DIRECTEUR DE RECHERCHE, BORIS DINTRANS, CHARGE DE RECHERCHE, MARIE-JO GOUPLI, ASTRONOME, JOEL SOMMERIA, DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS, JEAN-PAUL ZAHN, ASTRONOME ;

Vu la délibération du jury ;

Le **DIPLOME NATIONAL DE DOCTEUR** en ASTROPHYSIQUE, SCIENCES DE L'ESPACE ET PLANÉTOLOGIE

est délivré à **M. THOMAS GASTINE**

et confère le grade de docteur,

pour en jouir avec les droits et prérogatives qui y sont attachés.

Fait à TOULOUSE, le 26 mai 2010

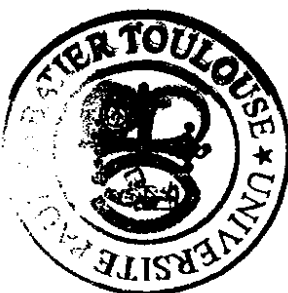
Le titulaire

Le Président

N° TOUL III 7861477

/2010200900217

Gilles FOURTANIER



Le Recteur d'Académie,  
Chancelier des universités

Olivier DUGRIP

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York : Dover, 1964. ISBN : 0-486-61272-4.
- [2] T. ALBOUSSIÈRE et Y. RICARD. “Reflections on dissipation associated with thermal convection”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 725, R1 (2013), p. 1. DOI : [10.1017/jfm.2013.241](https://doi.org/10.1017/jfm.2013.241).
- [3] P. ALKEN et al. “International Geomagnetic Reference Field : the thirteenth generation”. In : *Earth, Planets and Space* 73.1, 49 (2021), p. 49. DOI : [10.1186/s40623-020-01288-x](https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x).
- [4] H. AMIT, G. CHOBLET, G. TOBIE, F. TERRA-NOVA, O. ČADEK et M. BOUFFARD. “Cooling patterns in rotating thin spherical shells - Application to Titan’s subsurface ocean”. In : *Icarus* 338, 113509 (2020), p. 113509. DOI : [10.1016/j.icarus.2019.113509](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.113509).
- [5] B. J. ANDERSON et al. “Low-degree structure in Mercury’s planetary magnetic field”. In : *Journal of Geophysical Research (Planets)* 117, E00L12 (2012), E00L12. DOI : [10.1029/2012JE004159](https://doi.org/10.1029/2012JE004159).
- [6] A. P. ANUFRIEV, C. A. JONES et A. M. SOWARD. “The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth’s core”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 152 (2005), p. 163-190. DOI : [10.1016/j.pepi.2005.06.004](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2005.06.004).
- [7] U. M. ASCHER, S. J. RUUTH et R. J. SPITERI. “Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations”. In : *Applied Numerical Mathematics* 25 (1997), p. 151-167. DOI : [10.1016/S0168-9274\(97\)00056-1](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(97)00056-1).
- [8] U. M. ASCHER, S. J. RUUTH et B. T. R. WETTON. “Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations”. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 32.3 (1995), p. 797-823. DOI : [10.1137/0732037](https://doi.org/10.1137/0732037).
- [9] J. AUBERT, D. BRITO, H.-C. NATAF, P. CARDIN et J.-P. MASSON. “A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 128 (2001), p. 51-74. DOI : [10.1016/S0031-9201\(01\)00277-1](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(01)00277-1).
- [10] J. AUBERT, N. GILLET et P. CARDIN. “Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells”. In : *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 4, 1052 (2003), p. 1052. DOI : [10.1029/2002GC000456](https://doi.org/10.1029/2002GC000456).
- [11] J. AUBERT, T. GASTINE et A. FOURNIER. “Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 813 (2017), p. 558-593. DOI : [10.1017/jfm.2016.789](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.789).
- [12] J. M. AURNOU et M. H. HEIMPEL. “Zonal jets in rotating convection with mixed mechanical boundary conditions”. In : *Icarus* 169 (2004), p. 492-498. DOI : [10.1016/j.icarus.2004.01.013](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2004.01.013).
- [13] J. M. AURNOU, M. H. HEIMPEL et J. WICHT. “The effects of vigorous mixing in a convective model of zonal flow on the ice giants”. In : *Icarus* 190.1 (2007), p. 110-126. DOI : [10.1016/j.icarus.2007.02.024](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.02.024).
- [14] G. BACKUS, R. PARKER et C. CONSTABLE. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, 1996. ISBN : 0-521-41006-1.
- [15] J. BALLOT, A. S. BRUN et S. TURCK-CHIÈZE. “Simulations of Turbulent Convection in Rotating Young Solarlike Stars : Differential Rotation and Meridional Circulation”. In : *ApJ* 669.2 (2007), p. 1190-1208. DOI : [10.1086/521617](https://doi.org/10.1086/521617).
- [16] A. J. BARKER, A. M. DEMPSEY et Y. LITHWICK. “Theory and Simulations of Rotating Convection”. In : *ApJ* 791, 13 (2014), p. 13. DOI : [10.1088/0004-637X/791/1/13](https://doi.org/10.1088/0004-637X/791/1/13).
- [17] N. BARRADO-IZAGIRRE, J. F. ROJAS, R. HUESO, A. SÁNCHEZ-LAVEGA, F. COLAS, J. L. DAUVERGNE, D. PEACH et IOPW TEAM. “Jupiter’s zonal winds and their variability studied with small-size telescopes”. In : *A&A* 554, A74 (2013), A74. DOI : [10.1051/0004-6361/201321201](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321201).
- [18] C. BECKERMANN, H. -. DIEPERS, I. STEINBACH, A. KARMA et X. TONG. “Modeling Melt Convection in Phase-Field Simulations of Solidification”. In : *Journal of Computational Physics* 154.2 (1999), p. 468-496. DOI : [10.1006/jcph.1999.6323](https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6323).

- [19] N. BESSOLAZ et A. S. BRUN. "Hunting for Giant Cells in Deep Stellar Convective Zones Using Wavelet Analysis". In : *ApJ* 728, 115 (2011), p. 115. DOI : [10.1088/0004-637X/728/2/115](https://doi.org/10.1088/0004-637X/728/2/115).
- [20] S. BOSCARINO, L. PARESCHI et G. RUSSO. "Implicit-Explicit Runge–Kutta Schemes for Hyperbolic Systems and Kinetic Equations in the Diffusion Limit". en. In : *SIAM J. Sci. Comput.* 35.1 (2013), A22-A51. ISSN : 1064-8275, 1095-7197. DOI : [10.1137/110842855](https://doi.org/10.1137/110842855).
- [21] J. P. BOYD. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Second Revised Edition. Dover books on mathematics (Mineola, NY : Dover Publications), ISBN 0486411834., 2001, p. 2001. ISBN : 9780486141923.
- [22] S. I. BRAGINSKY. "MAC-oscillations of the hidden ocean of the core". In : *Journal of geomagnetism and geoelectricity* 45 (1993), p. 1517-1538. DOI : [10.5636/jgg.45.1517](https://doi.org/10.5636/jgg.45.1517).
- [23] S. I. BRAGINSKY et P. H. ROBERTS. "Equations governing convection in earth's core and the geodynamo". In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 79.1 (1995), p. 1-97. DOI : [10.1080/03091929508228992](https://doi.org/10.1080/03091929508228992).
- [24] M. BREUER, A. MANGLIK, J. WICHT, T. TRÜMPER, H. HARDER et U. HANSEN. "Thermochemically driven convection in a rotating spherical shell". In : *Geophysical Journal International* 183.1 (2010), p. 150-162. DOI : [10.1111/j.1365-246X.2010.04722.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04722.x).
- [25] B. P. BROWN. "Convection and Dynamo Action in Rapidly Rotating Suns". Thèse de doct. University of Colorado, USA, 2009.
- [26] B. P. BROWN, M. K. BROWNING, A. S. BRUN, M. S. MIESCH et J. TOOMRE. "Persistent Magnetic Wreaths in a Rapidly Rotating Sun". In : *ApJ* 711 (2010), p. 424-438. DOI : [10.1088/0004-637X/711/1/424](https://doi.org/10.1088/0004-637X/711/1/424).
- [27] M. K. BROWNING. "Simulations of Dynamo Action in Fully Convective Stars". In : *ApJ* 676 (2008), p. 1262-1280. DOI : [10.1086/527432](https://doi.org/10.1086/527432).
- [28] A. S. BRUN et A. PALACIOS. "Numerical Simulations of a Rotating Red Giant Star. I. Three-dimensional Models of Turbulent Convection and Associated Mean Flows". In : *ApJ* 702 (2009), p. 1078-1097. DOI : [10.1088/0004-637X/702/2/1078](https://doi.org/10.1088/0004-637X/702/2/1078).
- [29] B. A. BUFFETT. "Geomagnetic fluctuations reveal stable stratification at the top of the Earth's core". In : *Nature* 507 (2014), p. 484-487. DOI : [10.1038/nature13122](https://doi.org/10.1038/nature13122).
- [30] B. A. BUFFETT, N. KNEZEK et R. HOLME. "Evidence for MAC waves at the top of Earth's core and implications for variations in length of day". In : *Geophysical Journal International* 204 (2016), p. 1789-1800. DOI : [10.1093/gji/ggv552](https://doi.org/10.1093/gji/ggv552).
- [31] B. A. BUFFETT et C. T. SEAGLE. "Stratification of the top of the core due to chemical interactions with the mantle". In : *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 115, B04407 (2010), B04407. DOI : [10.1029/2009JB006751](https://doi.org/10.1029/2009JB006751).
- [32] F. H. BUSSE. "Thermal instabilities in rapidly rotating systems." In : *Journal of Fluid Mechanics* 44 (1970), p. 441-460. DOI : [10.1017/S0022112070001921](https://doi.org/10.1017/S0022112070001921).
- [33] F. H. BUSSE. "A model of mean zonal flows in the major planets". In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 23.2 (1983), p. 153-174. DOI : [10.1080/03091928308221746](https://doi.org/10.1080/03091928308221746).
- [34] F. H. BUSSE. "Homogeneous Dynamos in Planetary Cores and in the Laboratory". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 32 (2000), p. 383-408. DOI : [10.1146/annurev.fluid.32.1.383](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.32.1.383).
- [35] F. H. BUSSE. "Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action". In : *Physics of Fluids* 14.4 (2002), p. 1301-1314. DOI : [10.1063/1.1455626](https://doi.org/10.1063/1.1455626).
- [36] F. H. BUSSE et A. C. OR. "Convection in a rotating cylindrical annulus - Thermal Rossby waves". In : *Journal of Fluid Mechanics* 166 (1986), p. 173-187. DOI : [10.1017/S0022112086000095](https://doi.org/10.1017/S0022112086000095).
- [37] F. H. BUSSE et R. D. SIMITEV. "Quasi-geostrophic approximation of anelastic convection". In : *Journal of Fluid Mechanics* 751 (2014), p. 216-227. DOI : [10.1017/jfm.2014.293](https://doi.org/10.1017/jfm.2014.293).
- [38] M. A. CALKINS, K. JULIEN, S. M. TOBIAS et J. M. AURNOU. "A multiscale dynamo model driven by quasi-geostrophic convection". In : *Journal of Fluid Mechanics* 780 (2015), p. 143-166. DOI : [10.1017/jfm.2015.464](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.464).
- [39] H. CAO, M. K. DOUGHERTY, G. J. HUNT, G. PROVAN, S. W. H. COWLEY, E. J. BUNCE, S. KELLOCK et D. J. STEVENSON. "The landscape of Saturn's internal magnetic field from the Cassini Grand Finale". In : *Icarus* 344, 113541 (2020), p. 113541. DOI : [10.1016/j.icarus.2019.113541](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.113541).
- [40] H. CAO et D. J. STEVENSON. "Zonal flow magnetic field interaction in the semi-conducting region of giant planets". In : *Icarus* 296 (2017), p. 59-72. DOI : [10.1016/j.icarus.2017.05.015](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.05.015).
- [41] P. CARDIN et P. OLSON. "Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core". In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 82 (1994), p. 235-259. DOI : [10.1016/0031-9201\(94\)90075-2](https://doi.org/10.1016/0031-9201(94)90075-2).
- [42] D. CÉBRON, R. LAGUERRE, J. NOIR et N. SCHAEFFER. "Precessing spherical shells : flows, dissipation, dynamo and the lunar core". In : *Geophysical Journal International* 219 (2019), S34-S57. DOI : [10.1093/gji/ggz037](https://doi.org/10.1093/gji/ggz037).

- [43] P. CESSI. “Angular Momentum and Temperature Homogenization in the Symmetric Circulation of the Atmosphere.” In : *Journal of Atmospheric Sciences* 55.11 (1998), p. 1997-2015. DOI : [10.1175/1520-0469\(1998\)055<1997:AMATHI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1998)055<1997:AMATHI>2.0.CO;2).
- [44] R. CHEMKE et Y. KASPI. “The Latitudinal Dependence of Atmospheric Jet Scales and Macroturbulent Energy Cascades”. In : *Journal of Atmospheric Sciences* 72.10 (2015), p. 3891-3907. DOI : [10.1175/JAS-D-15-0007.1](https://doi.org/10.1175/JAS-D-15-0007.1).
- [45] J. S. CHENG, J. M. AURNOU, K. JULIEN et R. P. J. KUNNEN. “A heuristic framework for next-generation models of geostrophic convective turbulence”. In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 112.4 (2018), p. 277-300. DOI : [10.1080/03091929.2018.1506024](https://doi.org/10.1080/03091929.2018.1506024).
- [46] J. Y.-K. CHO et L. M. POLVANI. “The Morphogenesis of Bands and Zonal Winds in the Atmospheres on the Giant Outer Planets”. In : *Science* 273.5273 (1996), p. 335-337. DOI : [10.1126/science.273.5273.335](https://doi.org/10.1126/science.273.5273.335).
- [47] U. R. CHRISTENSEN. “Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 470.1 (2002), p. 115-133. DOI : [10.1017/S0022112002002008](https://doi.org/10.1017/S0022112002002008).
- [48] U. R. CHRISTENSEN. “A deep dynamo generating Mercury’s magnetic field”. In : *Nature* 444 (2006), p. 1056-1058. DOI : [10.1038/nature05342](https://doi.org/10.1038/nature05342).
- [49] U. R. CHRISTENSEN. “Dynamo Scaling Laws and Applications to the Planets”. In : *Space Sci. Rev.* 152 (2010), p. 565-590. DOI : [10.1007/s11214-009-9553-2](https://doi.org/10.1007/s11214-009-9553-2).
- [50] U. R. CHRISTENSEN et J. AUBERT. “Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields”. In : *Geophysical Journal International* 166.1 (2006), p. 97-114. DOI : [10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x).
- [51] U. R. CHRISTENSEN, J. AUBERT et G. HULOT. “Conditions for Earth-like geodynamo models”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 296 (2010), p. 487-496. DOI : [10.1016/j.epsl.2010.06.009](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2010.06.009).
- [52] U. R. CHRISTENSEN, P. OLSON et G. A. GLATZMAIER. “Numerical modelling of the geodynamo : a systematic parameter study”. In : *Geophysical Journal International* 138.2 (1999), p. 393-409. DOI : [10.1046/j.1365-246X.1999.00886.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1999.00886.x).
- [53] U. R. CHRISTENSEN, P. OLSON et G. A. GLATZMAIER. “A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures”. In : *Geophys. Res. Lett.* 25.10 (1998), p. 1565-1568. DOI : [10.1029/98GL00911](https://doi.org/10.1029/98GL00911).
- [54] U. R. CHRISTENSEN et al. “A numerical dynamo benchmark”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 128.1-4 (2001), p. 25-34. DOI : [10.1016/S0031-9201\(01\)00275-8](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(01)00275-8).
- [55] U. R. CHRISTENSEN, V. HOLZWARTH et A. REINERS. “Energy flux determines magnetic field strength of planets and stars”. In : *Nature* 457.7226 (2009), p. 167-169. DOI : [10.1038/nature07626](https://doi.org/10.1038/nature07626).
- [56] U. R. CHRISTENSEN, J. WICHT et W. DIETRICH. “Mechanisms for Limiting the Depth of Zonal Winds in the Gas Giant Planets”. In : *ApJ* 890.1, 61 (2020), p. 61. DOI : [10.3847/1538-4357/ab698c](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab698c).
- [57] T. T. CLARTÉ, N. SCHAEFFER, S. LABROSSE et J. VIDAL. “The effects of a Robin boundary condition on thermal convection in a rotating spherical shell”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 918, A36 (2021), A36. DOI : [10.1017/jfm.2021.356](https://doi.org/10.1017/jfm.2021.356).
- [58] J. E. P. CONNERNEY, M. H. ACUNA et N. F. NESS. “The magnetic field of Neptune”. In : *J. Geophys. Res.* 96 (1991), p. 19023-19042. DOI : [10.1029/91JA01165](https://doi.org/10.1029/91JA01165).
- [59] J. E. P. CONNERNEY et al. “A New Model of Jupiter’s Magnetic Field From Juno’s First Nine Orbits”. In : *Geophys. Res. Lett.* 45.6 (2018), p. 2590-2596. DOI : [10.1002/2018GL077312](https://doi.org/10.1002/2018GL077312).
- [60] P. A. DAVIDSON. “Scaling laws for planetary dynamos”. In : *Geophysical Journal International* 195.1 (2013), p. 67-74. DOI : [10.1093/gji/ggt167](https://doi.org/10.1093/gji/ggt167).
- [61] P. A. DAVIDSON. *Turbulence : an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, 2015. ISBN : 9780198722588. DOI : [10.1093/acprof:oso/9780198722588.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198722588.001.0001).
- [62] F. DEBRAS et G. CHABRIER. “New Models of Jupiter in the Context of Juno and Galileo”. In : *ApJ* 872.1, 100 (2019), p. 100. DOI : [10.3847/1538-4357/aaff65](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaff65).
- [63] W. DIETRICH, T. GASTINE et J. WICHT. “Reversal and amplification of zonal flows by boundary enforced thermal wind”. In : *Icarus* 282 (2017), p. 380-392. DOI : [10.1016/j.icarus.2016.09.013](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.09.013).
- [64] W. DIETRICH et C. A. JONES. “Anelastic spherical dynamos with radially variable electrical conductivity”. In : *Icarus* 305 (2018), p. 15-32. DOI : [10.1016/j.icarus.2018.01.003](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.01.003).
- [65] W. DIETRICH, P. WULFF, J. WICHT et U. R. CHRISTENSEN. “Linking zonal winds and gravity - II. Explaining the equatorially antisymmetric gravity moments of Jupiter”. In : *MNRAS* 505.3 (2021), p. 3177-3191. DOI : [10.1093/mnras/stab1566](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1566).

- [66] E. DORMY, P. CARDIN et D. JAULT. “MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 160.1-2 (1998), p. 15-30. DOI : [10.1016/S0012-821X\(98\)00078-8](https://doi.org/10.1016/S0012-821X(98)00078-8).
- [67] E. DORMY, A. M. SOWARD, C. A. JONES, D. JAULT et P. CARDIN. “The onset of thermal convection in rotating spherical shells”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 501 (2004), p. 43-70. DOI : [10.1017/S0022112003007316](https://doi.org/10.1017/S0022112003007316).
- [68] E. DORMY. “Strong-field spherical dynamos”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 789 (2016), p. 500-513. DOI : [10.1017/jfm.2015.747](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.747).
- [69] E. DORMY, L. ORUBA et L. PETITDEMANGE. “Three branches of dynamo action”. In : *Fluid Dynamics Research* 50.1, 011415 (2018), p. 011415. DOI : [10.1088/1873-7005/aa769c](https://doi.org/10.1088/1873-7005/aa769c).
- [70] D. G. DRITSCHEL et M. E. MCINTYRE. “Multiple Jets as PV Staircases : The Phillips Effect and the Resilience of Eddy-Transport Barriers”. In : *Journal of Atmospheric Sciences* 65.3 (2008), p. 855. DOI : [10.1175/2007JAS2227.1](https://doi.org/10.1175/2007JAS2227.1).
- [71] L. D. V. DUARTE, T. GASTINE et J. WICHT. “Anelastic dynamo models with variable electrical conductivity : An application to gas giants”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 222 (2013), p. 22-34. DOI : [10.1016/j.pepi.2013.06.010](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2013.06.010).
- [72] L. D. V. DUARTE, J. WICHT et T. GASTINE. “Physical conditions for Jupiter-like dynamo models”. In : *Icarus* 299 (2018), p. 206-221. DOI : [10.1016/j.icarus.2017.07.016](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.07.016).
- [73] D. DURANTE et al. “Jupiter’s Gravity Field Halfway Through the Juno Mission”. In : *Geophys. Res. Lett.* 47.4, e86572 (2020), e86572. DOI : [10.1029/2019GL086572](https://doi.org/10.1029/2019GL086572).
- [74] A. M. DZIEWONSKI et D. L. ANDERSON. “Preliminary reference Earth model”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 25 (1981), p. 297-356. DOI : [10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).
- [75] R. E. ECKE et J. J. NIEMELA. “Heat Transport in the Geostrophic Regime of Rotating Rayleigh-Bénard Convection”. In : *Physical Review Letters* 113.11, 114301 (2014), p. 114301. DOI : [10.1103/PhysRevLett.113.114301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.114301).
- [76] B. FAVIER, J. PURSEED et L. DUCHEMIN. “Rayleigh-Bénard convection with a melting boundary”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 858 (2019), p. 437-473. DOI : [10.1017/jfm.2018.773](https://doi.org/10.1017/jfm.2018.773).
- [77] M. FRENCH, A. BECKER, W. LORENZEN, N. NETTELMANN, M. BETHKENHAGEN, J. WICHT et R. REDMER. “Ab Initio Simulations for Material Properties along the Jupiter Adiabats”. In : *ApJS* 202, 5 (2012), p. 5. DOI : [10.1088/0067-0049/202/1/5](https://doi.org/10.1088/0067-0049/202/1/5).
- [78] M. FRIGO et S. G. JOHNSON. “The design and implementation of FFTW3”. In : *Proceedings of the IEEE* 93.2 (2005), p. 216-231. DOI : [10.1109/JPROC.2004.840301](https://doi.org/10.1109/JPROC.2004.840301).
- [79] E. GALANTI et Y. KASPI. “Combined magnetic and gravity measurements probe the deep zonal flows of the gas giants”. In : *MNRAS* 501 (2021), p. 2352-2362. DOI : [10.1093/mnras/staa3722](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3722).
- [80] E. GARCÍA-MELENDO, S. PÉREZ-HOYOS, A. SÁNCHEZ-LAVEGA et R. HUESO. “Saturn’s zonal wind profile in 2004-2009 from Cassini ISS images and its long-term variability”. In : *Icarus* 215.1 (2011), p. 62-74. DOI : [10.1016/j.icarus.2011.07.005](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2011.07.005).
- [81] T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et J. WICHT. “Dipolar versus multipolar dynamos : the influence of the background density stratification”. In : *A&A* 546, A19 (2012), A19. DOI : [10.1051/0004-6361/201219799](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219799).
- [82] T. GASTINE, M. H. HEIMPEL et J. WICHT. “Zonal flow scaling in rapidly-rotating compressible convection”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 232 (2014), p. 36-50. DOI : [10.1016/j.pepi.2014.03.011](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2014.03.011).
- [83] T. GASTINE, J. MORIN, L. D. V. DUARTE, A. REINERS, U. R. CHRISTENSEN et J. WICHT. “What controls the magnetic geometry of M dwarfs?” In : *A&A* 549, L5 (2013), p. L5. DOI : [10.1051/0004-6361/201220317](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220317).
- [84] T. GASTINE et J. WICHT. “Effects of compressibility on driving zonal flow in gas giants”. In : *Icarus* 219.1 (2012), p. 428-442. DOI : [10.1016/j.icarus.2012.03.018](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.03.018).
- [85] T. GASTINE et J. WICHT. “Stable stratification promotes multiple zonal jets in a turbulent Jovian dynamo model”. In : *Icarus* 368 (2021), p. 114514. DOI : [10.1016/j.icarus.2021.114514](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2021.114514).
- [86] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU. “Zonal flow regimes in rotating anelastic spherical shells : An application to giant planets”. In : *Icarus* 225.1 (2013), p. 156-172. DOI : [10.1016/j.icarus.2013.02.031](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.02.031).
- [87] T. GASTINE, J. WICHT, L. D. V. DUARTE, M. H. HEIMPEL et A. BECKER. “Explaining Jupiter’s magnetic field and equatorial jet dynamics”. In : *Geophys. Res. Lett.* 41.15 (2014), p. 5410-5419. DOI : [10.1002/2014GL060814](https://doi.org/10.1002/2014GL060814).
- [88] T. GASTINE, R. K. YADAV, J. MORIN, A. REINERS et J. WICHT. “From solar-like to antisolar differential rotation in cool stars”. In : *MNRAS* 438.1 (2014), p. L76-L80. DOI : [10.1093/mnrasl/slt162](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt162).
- [89] T. GASTINE. “pizza : an open-source pseudo-spectral code for spherical quasi-geostrophic convection”. In : *Geophysical Journal International* 217.3 (2019), p. 1558-1576. DOI : [10.1093/gji/ggz103](https://doi.org/10.1093/gji/ggz103).

- [90] T. GASTINE, J. AUBERT et A. FOURNIER. “Dynamo-based limit to the extent of a stable layer atop Earth’s core”. In : *Geophysical Journal International* 222.2 (2020), p. 1433-1448. DOI : [10.1093/gji/ggaa250](https://doi.org/10.1093/gji/ggaa250).
- [91] T. GASTINE, J. WICHT et J. AUBERT. “Scaling regimes in spherical shell rotating convection”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 808 (2016), p. 690-732. DOI : [10.1017/jfm.2016.659](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.659).
- [92] T. GASTINE, J. WICHT et J. M. AURNOU. “Turbulent Rayleigh-Bénard convection in spherical shells”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 778 (2015), p. 721-764. DOI : [10.1017/jfm.2015.401](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.401).
- [93] A. GENOVA et al. “Geodetic Evidence That Mercury Has A Solid Inner Core”. In : *Geophys. Res. Lett.* 46.7 (2019), p. 3625-3633. DOI : [10.1029/2018GL081135](https://doi.org/10.1029/2018GL081135).
- [94] N. GILLET et C. A. JONES. “The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 554 (2006), p. 343-369. DOI : [10.1017/S0022112006009219](https://doi.org/10.1017/S0022112006009219).
- [95] P. A. GILMAN. “Nonlinear Dynamics of Boussinesq Convection in a Deep Rotating Spherical Shell. I.” In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 8 (1977), p. 93-135. DOI : [10.1080/03091927708240373](https://doi.org/10.1080/03091927708240373).
- [96] P. A. GILMAN. “Model calculations concerning rotation at high solar latitudes and the depth of the solar convection zone”. In : *ApJ* 231 (1979), p. 284-292. DOI : [10.1086/157191](https://doi.org/10.1086/157191).
- [97] P. A. GILMAN et P. V. FOUKAL. “Angular velocity gradients in the solar convection zone”. In : *ApJ* 229 (1979), p. 1179-1185. DOI : [10.1086/157052](https://doi.org/10.1086/157052).
- [98] G. A. GLATZMAIER. “Numerical simulations of stellar convective dynamos. I. The model and method.” In : *Journal of Computational Physics* 55 (1984), p. 461-484. DOI : [10.1016/0021-9991\(84\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90033-0).
- [99] G. A. GLATZMAIER et P. A. GILMAN. “Compressible Convection in a Rotating Spherical Shell - Part Three - Analytic Model for Compressible Vorticity Waves”. In : *ApJS* 45 (1981), p. 381. DOI : [10.1086/190716](https://doi.org/10.1086/190716).
- [100] G. A. GLATZMAIER et P. H. ROBERTS. “An Anelastic Evolutionary Geodynamo Simulation Driven by Compositional and Thermal Convection”. In : *Physica D Nonlinear Phenomena* 97 (1996), p. 81-94. DOI : [10.1016/0167-2789\(96\)00100-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(96)00100-5).
- [101] D. GOLUSKIN. *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, 2016. ISBN : 978-3-319-23941-5. DOI : [10.1007/978-3-319-23941-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23941-5).
- [102] D. GOLUSKIN, H. JOHNSTON, G. R. FLIERL et E. A. SPIEGEL. “Convectively driven shear and decreased heat flux”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 759 (2014), p. 360-385. DOI : [10.1017/jfm.2014.577](https://doi.org/10.1017/jfm.2014.577).
- [103] N. GÓMEZ-PÉREZ, M. H. HEIMPEL et J. WICHT. “Effects of a radially varying electrical conductivity on 3D numerical dynamos”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 181.1-2 (2010), p. 42-53. DOI : [10.1016/j.pepi.2010.03.006](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2010.03.006).
- [104] D. O. GOUGH. “The Anelastic Approximation for Thermal Convection.” In : *Journal of Atmospheric Sciences* 26.3 (1969), p. 448-456. DOI : [10.1175/1520-0469\(1969\)026<0448:TAAFTC>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1969)026<0448:TAAFTC>2.0.CO;2).
- [105] D. O. GOUGH et D. LYNDEN-BELL. “Vorticity expulsion by turbulence : astrophysical implications of an Alka-Seltzer experiment”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 32 (1968), p. 437-447. DOI : [10.1017/S0022112068000844](https://doi.org/10.1017/S0022112068000844).
- [106] S. GROSSMANN et D. LOHSE. “Scaling in thermal convection : a unifying theory”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 407.1 (2000), p. 27-56. DOI : [10.1017/S0022112099007545](https://doi.org/10.1017/S0022112099007545).
- [107] E. GROTE et F. H. BUSSE. “Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells”. In : *Fluid Dynamics Research* 28.5 (2001), p. 349-368. DOI : [10.1016/S0169-5983\(01\)00004-1](https://doi.org/10.1016/S0169-5983(01)00004-1).
- [108] D. GUBBINS et C. J. DAVIES. “The stratified layer at the core-mantle boundary caused by barodiffusion of oxygen, sulphur and silicon”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 215 (2013), p. 21-28. DOI : [10.1016/j.pepi.2012.11.001](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2012.11.001).
- [109] C. GUERVILLY et P. CARDIN. “Multiple zonal jets and convective heat transport barriers in a quasi-geostrophic model of planetary cores”. In : *Geophysical Journal International* 211.1 (2017), p. 455-471. DOI : [10.1093/gji/ggx315](https://doi.org/10.1093/gji/ggx315).
- [110] C. GUERVILLY, P. CARDIN et N. SCHAEFFER. “A dynamo driven by zonal jets at the upper surface : Applications to giant planets”. In : *Icarus* 218.1 (2012), p. 100-114. DOI : [10.1016/j.icarus.2011.11.014](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2011.11.014).
- [111] C. GUERVILLY, P. CARDIN et N. SCHAEFFER. “Turbulent convective length scale in planetary cores”. In : *Nature* 570.7761 (2019), p. 368-371. DOI : [10.1038/s41586-019-1301-5](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1301-5).
- [112] H. B. HAMMEL, I. DE PATER, S. GIBBARD, G. W. LOCKWOOD et K. RAGES. “Uranus in 2003 : Zonal winds, banded structure, and discrete features”. In : *Icarus* 175.2 (2005), p. 534-545. DOI : [10.1016/j.icarus.2004.11.012](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2004.11.012).
- [113] H. B. HAMMEL, K. RAGES, G. W. LOCKWOOD, E. KARKOSCHKA et I. DE PATER. “New Measurements of the Winds of Uranus”. In : *Icarus* 153.2 (2001), p. 229-235. DOI : [10.1006/icar.2001.6689](https://doi.org/10.1006/icar.2001.6689).



- [114] R. HANEL, B. CONRATH, L. HERATH, V. KUNDE et J. PIRRAGLIA. "Albedo, internal heat, and energy balance of Jupiter : preliminary results of the voyager infrared investigation". In : *J. Geophys. Res.* 86.A10 (1981), p. 8705-8712. DOI : [10.1029/JA086iA10p08705](https://doi.org/10.1029/JA086iA10p08705).
- [115] M. H. HEIMPEL et J. M. AURNOU. "Turbulent convection in rapidly rotating spherical shells : A model for equatorial and high latitude jets on Jupiter and Saturn". In : *Icarus* 187.2 (2007), p. 540-557. DOI : [10.1016/j.icarus.2006.10.023](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.10.023).
- [116] M. H. HEIMPEL, J. M. AURNOU et J. WICHT. "Simulation of equatorial and high-latitude jets on Jupiter in a deep convection model". In : *Nature* 438.7065 (2005), p. 193-196. DOI : [10.1038/nature04208](https://doi.org/10.1038/nature04208).
- [117] M. H. HEIMPEL, T. GASTINE et J. WICHT. "Simulation of deep-seated zonal jets and shallow vortices in gas giant atmospheres". In : *Nature Geoscience* 9.1 (2016), p. 19-23. DOI : [10.1038/ngeo2601](https://doi.org/10.1038/ngeo2601).
- [118] M. H. HEIMPEL et N. GÓMEZ PÉREZ. "On the relationship between zonal jets and dynamo action in giant planets". In : *Geophys. Res. Lett.* 38.14, L14201 (2011), p. L14201. DOI : [10.1029/2011GL047562](https://doi.org/10.1029/2011GL047562).
- [119] G. HELFFRICH et S. KANESHIMA. "Outer-core compositional stratification from observed core wave speed profiles". In : *Nature* 468 (2010), p. 807-810. DOI : [10.1038/nature09636](https://doi.org/10.1038/nature09636).
- [120] R. HELLED, N. NETTELMANN et T. GUILLOT. "Uranus and Neptune : Origin, Evolution and Internal Structure". In : *Space Sci. Rev.* 216.3, 38 (2020), p. 38. DOI : [10.1007/s11214-020-00660-3](https://doi.org/10.1007/s11214-020-00660-3).
- [121] F. HERBERT. "Aurora and magnetic field of Uranus". In : *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 114.A11, A11206 (2009), A11206. DOI : [10.1029/2009JA014394](https://doi.org/10.1029/2009JA014394).
- [122] E. W. HESTER, L.-A. COUSTON, B. FAVIER, K. J. BURNS et G. M. VASIL. "Improved phase-field models of melting and dissolution in multi-component flows". In : *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 476.2242, 20200508 (2020), p. 20200508. DOI : [10.1098/rspa.2020.0508](https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0508).
- [123] D. HEYNER, J. WICHT, N. GÓMEZ-PÉREZ, D. SCHMITT, H.-U. AUSTER et K.-H. GLASSMEIER. "Evidence from Numerical Experiments for a Feedback Dynamo Generating Mercury's Magnetic Field". In : *Science* 334.6063 (2011), p. 1690. DOI : [10.1126/science.1207290](https://doi.org/10.1126/science.1207290).
- [124] K. HIROSE, S. LABROSSE et J. HERNLUND. "Composition and State of the Core". In : *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 41 (2013), p. 657-691. DOI : [10.1146/annurev-earth-050212-124007](https://doi.org/10.1146/annurev-earth-050212-124007).
- [125] R. HOLLERBACH. "A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry". In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 32.7 (2000), p. 773-797. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0363\(20000415\)32:7<773::AID-FLD988>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(20000415)32:7<773::AID-FLD988>3.0.CO;2-P).
- [126] L. IESS et al. "Measurement and implications of Saturn's gravity field and ring mass". In : *Science* 364.6445, aat2965 (2019), aat2965. DOI : [10.1126/science.aat2965](https://doi.org/10.1126/science.aat2965).
- [127] A. P. INGERSOLL et D. POLLARD. "Motion in the interiors and atmospheres of Jupiter and Saturn - Scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion". In : *Icarus* 52 (1982), p. 62-80. DOI : [10.1016/0019-1035\(82\)90169-5](https://doi.org/10.1016/0019-1035(82)90169-5).
- [128] J. C. E. IRVING, S. COTTAAR et V. LEKIĆ. "Seismically determined elastic parameters for Earth's outer core". In : *Science Advances* 4.6 (2018). DOI : [10.1126/sciadv.aar2538](https://doi.org/10.1126/sciadv.aar2538).
- [129] K. ISHIOKA. "A new recurrence formula for efficient computation of spherical harmonic transform". In : *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* 96.2 (2018), p. 241-249. DOI : [10.2151/jmsj.2018-019](https://doi.org/10.2151/jmsj.2018-019).
- [130] A. JACKSON, A. R. T. JONKERS et M. R. WALKER. "Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records". In : *Astronomy, physics and chemistry of H<sub>3</sub><sup>+</sup>*. T. 358. 2000, p. 957. DOI : [10.1098/rsta.2000.0569](https://doi.org/10.1098/rsta.2000.0569).
- [131] A. JAMESON, W. SCHMIDT et E. TURKEL. "Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes". In : *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*. 1981. DOI : [10.2514/6.1981-1259](https://doi.org/10.2514/6.1981-1259).
- [132] C. A. JONES. "A dynamo model of Jupiter's magnetic field". In : *Icarus* 241 (2014), p. 148-159. DOI : [10.1016/j.icarus.2014.06.020](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.06.020).
- [133] C. A. JONES, P. BORONSKI, A. S. BRUN, G. A. GLATZMAIER, T. GASTINE, M. S. MIESCH et J. WICHT. "Anelastic convection-driven dynamo benchmarks". In : *Icarus* 216.1 (2011), p. 120-135. DOI : [10.1016/j.icarus.2011.08.014](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2011.08.014).
- [134] C. A. JONES et K. M. KUZANYAN. "Compressible convection in the deep atmospheres of giant planets". In : *Icarus* 204.1 (2009), p. 227-238. DOI : [10.1016/j.icarus.2009.05.022](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.05.022).
- [135] K. JULIEN, E. KNOBLOCH, A. M. RUBIO et G. M. VASIL. "Heat Transport in Low-Rossby-Number Rayleigh-Bénard Convection". In : *Physical Review Letters* 109.25, 254503 (2012), p. 254503. DOI : [10.1103/PhysRevLett.109.254503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.254503).

- [136] K. JULIEN, S. LEGG, J. MCWILLIAMS et J. WERNE. “Hard turbulence in rotating Rayleigh-Bénard convection”. In : *Phys. Rev. E* 53.6 (1996), R5557-R5560. DOI : [10.1103/PhysRevE.53.R5557](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.R5557).
- [137] K. JULIEN, A. M. RUBIO, I. GROOMS et E. KNOBLOCH. “Statistical and physical balances in low Rossby number Rayleigh-Bénard convection”. In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 106 (2012), p. 392-428. DOI : [10.1080/03091929.2012.696109](https://doi.org/10.1080/03091929.2012.696109).
- [138] P. J. KÄPYLÄ, M. J. MANTERE, G. GUERRERO, A. BRANDENBURG et P. CHATTERJEE. “Reynolds stress and heat flux in spherical shell convection”. In : *A&A* 531, A162 (2011), A162. DOI : [10.1051/0004-6361/201015884](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015884).
- [139] Y. KASPI, G. R. FLIERL et A. P. SHOWMAN. “The deep wind structure of the giant planets : Results from an anelastic general circulation model”. In : *Icarus* 202.2 (2009), p. 525-542. DOI : [10.1016/j.icarus.2009.03.026](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.03.026).
- [140] C. A. KENNEDY et M. H. CARPENTER. “Additive Runge-Kutta schemes for convection-diffusion-reaction equations”. In : *Applied Numerical Mathematics* 44.1-2 (2003), p. 139-181. DOI : [10.1016/S0168-9274\(02\)00138-1](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(02)00138-1).
- [141] M. R. KHORRAMI. “A Chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows”. In : *International journal for numerical methods in fluids* 12.9 (1991), p. 825-833. DOI : [10.1002/flid.1650120903](https://doi.org/10.1002/flid.1650120903).
- [142] E. M. KING et B. A. BUFFETT. “Flow speeds and length scales in geodynamo models : The role of viscosity”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 371 (2013), p. 156-162. DOI : [10.1016/j.epsl.2013.04.001](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2013.04.001).
- [143] E. M. KING, S. STELLMACH et J. M. AURNOU. “Heat transfer by rapidly rotating Rayleigh-Bénard convection”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 691 (2012), p. 568-582. DOI : [10.1017/jfm.2011.493](https://doi.org/10.1017/jfm.2011.493).
- [144] E. M. KING, S. STELLMACH, J. NOIR, U. HANSEN et J. M. AURNOU. “Boundary layer control of rotating convection systems”. In : *Nature* 457 (2009), p. 301-304. DOI : [10.1038/nature07647](https://doi.org/10.1038/nature07647).
- [145] Z. KONŔPKOVÁ, R. S. MCWILLIAMS, N. GÓMEZ-PÉREZ et A. F. GONCHAROV. “Direct measurement of thermal conductivity in solid iron at planetary core conditions”. In : *Nature* 534.7605 (2016), p. 99-101. DOI : [10.1038/nature18009](https://doi.org/10.1038/nature18009).
- [146] D. KOSLOFF et H. TAL-EZER. “A Modified Chebyshev Pseudospectral Method with an  $O(N^{-1})$  Time Step Restriction”. In : *Journal of Computational Physics* 104.2 (1993), p. 457-469. DOI : [10.1006/jcph.1993.1044](https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1044).
- [147] R. H. KRAICHNAN. “Turbulent Thermal Convection at Arbitrary Prandtl Number”. In : *Physics of Fluids* 5 (1962), p. 1374-1389. DOI : [10.1063/1.1706533](https://doi.org/10.1063/1.1706533).
- [148] C. KUTZNER et U. R. CHRISTENSEN. “From stable dipolar towards reversing numerical dynamos”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 131.1 (2002), p. 29-45. DOI : [10.1016/S0031-9201\(02\)00016-X](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(02)00016-X).
- [149] R. LAGO, T. GASTINE, T. DANNERT, M. RAMPP et J. WICHT. “MagIC v5.10 : a two-dimensional MPI distribution for pseudo-spectral magneto hydrodynamics simulations in spherical geometry”. In : *Geoscientific Model Development* accepted for publication (2021), p. 1-31. DOI : [10.5194/gmd-2021-216](https://doi.org/10.5194/gmd-2021-216).
- [150] S. R. LANTZ et Y. FAN. “Anelastic Magnetohydrodynamic Equations for Modeling Solar and Stellar Convection Zones”. In : *ApJS* 121.1 (1999), p. 247-264. DOI : [10.1086/313187](https://doi.org/10.1086/313187).
- [151] T. LAY, J. HERNLUND et B. A. BUFFETT. “Core-mantle boundary heat flow”. In : *Nature Geoscience* 1 (2008), p. 25-32. DOI : [10.1038/ngeo.2007.44](https://doi.org/10.1038/ngeo.2007.44).
- [152] D. LECOANET, B. P. BROWN, E. G. ZWEIBEL, K. J. BURNS, J. S. OISHI et G. M. VASIL. “Conduction in Low Mach Number Flows. I. Linear and Weakly Nonlinear Regimes”. In : *ApJ* 797.2, 94 (2014), p. 94. DOI : [10.1088/0004-637X/797/2/94](https://doi.org/10.1088/0004-637X/797/2/94).
- [153] J. LCONTE et G. CHABRIER. “Layered convection as the origin of Saturn’s luminosity anomaly”. In : *Nature Geoscience* 6.5 (2013), p. 347-350. DOI : [10.1038/ngeo1791](https://doi.org/10.1038/ngeo1791).
- [154] D. LEMASQUERIER, B. FAVIER et M. LE BARS. “Zonal jets at the laboratory scale : hysteresis and Rossby waves resonance”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 910, A18 (2021), A18. DOI : [10.1017/jfm.2020.1000](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1000).
- [155] Y. LIAN et A. P. SHOWMAN. “Generation of equatorial jets by large-scale latent heating on the giant planets”. In : *Icarus* 207.1 (2010), p. 373-393. DOI : [10.1016/j.icarus.2009.10.006](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.10.006).
- [156] S. S. LIMAYE et L. A. SROMOVSKY. “Winds of Neptune : Voyager observations of cloud motions”. In : *J. Geophys. Res.* 96 (1991), p. 18941-18960. DOI : [10.1029/91JA01701](https://doi.org/10.1029/91JA01701).
- [157] W. LORENZEN, B. HOLST et R. REDMER. “Metallization in hydrogen-helium mixtures”. In : *Phys. Rev. B* 84.23, 235109 (2011), p. 235109. DOI : [10.1103/PhysRevB.84.235109](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.235109).
- [158] C. MAAS, L. MANSKE, K. WÜNNEMANN et U. HANSEN. “On the fate of impact-delivered metal in a terrestrial magma ocean”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 554, 116680 (2021), p. 116680. DOI : [10.1016/j.epsl.2020.116680](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2020.116680).

- [159] A. MANGLIK, J. WICHT et U. R. CHRISTENSEN. “A Dynamo Model with Double Diffusive Convection for Mercury’s Core”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 289 (2010), p. 619-628. DOI : [10.1016/j.epsl.2009.12.007](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.12.007).
- [160] C. MANKOVICH, M. S. MARLEY, J. J. FORTNEY et N. MOVSHOVITZ. “Cassini Ring Seismology as a Probe of Saturn’s Interior. I. Rigid Rotation”. In : *ApJ* 871.1, 1 (2019), p. 1. DOI : [10.3847/1538-4357/aaf798](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaf798).
- [161] P. MARTI, M. A. CALKINS et K. JULIEN. “A computationally efficient spectral method for modeling core dynamics”. In : *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 17.8 (2016), p. 3031-3053. DOI : [10.1002/2016GC006438](https://doi.org/10.1002/2016GC006438).
- [162] P. MARTI et al. “Full sphere hydrodynamic and dynamo benchmarks”. In : *Geophysical Journal International* 197.1 (2014), p. 119-134. DOI : [10.1093/gji/ggt518](https://doi.org/10.1093/gji/ggt518).
- [163] H. MATSUI et al. “Performance benchmarks for a next generation numerical dynamo model”. In : *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 17.5 (2016), p. 1586-1607. DOI : [10.1002/2015GC006159](https://doi.org/10.1002/2015GC006159).
- [164] S. P. MATT, O. DO CAO, B. P. BROWN et A. S. BRUN. “Convection and differential rotation properties of G and K stars computed with the ASH code”. In : *AN* 332 (2011), p. 897. DOI : [10.1002/asna.201111624](https://doi.org/10.1002/asna.201111624).
- [165] M. D. MENU, L. PETITDEMANGE et S. GALTIER. “Magnetic effects on fields morphologies and reversals in geodynamo simulations”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 307, 106542 (2020), p. 106542. DOI : [10.1016/j.pepi.2020.106542](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2020.106542).
- [166] B. MILITZER, F. SOUBIRAN, S. M. WAHL et W. HUBBARD. “Understanding Jupiter’s Interior”. In : *J. Geophys. Res.* 121 (2016), p. 1152-1172. DOI : [10.1002/2016JE005080](https://doi.org/10.1002/2016JE005080).
- [167] B. MILITZER, S. M. WAHL et W. B. HUBBARD. “Models of Saturn’s Interior Constructed with an Accelerated Concentric Maclaurin Spheroid Method”. In : *ApJ* 879.2, 78 (2019), p. 78. DOI : [10.3847/1538-4357/ab23f0](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab23f0).
- [168] G. M. MIROUH, P. GARAUD, S. STELMACH, A. L. TRAXLER et T. S. WOOD. “A New Model for Mixing by Double-diffusive Convection (Semi-convection). I. The Conditions for Layer Formation”. In : *ApJ* 750, 61 (2012), p. 61. DOI : [10.1088/0004-637X/750/1/61](https://doi.org/10.1088/0004-637X/750/1/61).
- [169] R. MONVILLE, J. VIDAL, D. CÉBRON et N. SCHAEFFER. “Rotating double-diffusive convection in stably stratified planetary cores”. In : *Geophysical Journal International* 219 (2019), S195-S218. DOI : [10.1093/gji/ggz347](https://doi.org/10.1093/gji/ggz347).
- [170] K. M. MOORE, H. CAO, J. BLOXHAM, D. J. STEVENSON, J. E. P. CONNERNEY et S. J. BOLTON. “Time variation of Jupiter’s internal magnetic field consistent with zonal wind advection”. In : *Nature Astronomy* 3 (2019), p. 730-735. DOI : [10.1038/s41550-019-0772-5](https://doi.org/10.1038/s41550-019-0772-5).
- [171] N. NETTELMANN, R. HELLED, J. J. FORTNEY et R. REDMER. “New indication for a dichotomy in the interior structure of Uranus and Neptune from the application of modified shape and rotation data”. In : *Planet. Space Sci.* 77 (2013), p. 143-151. DOI : [10.1016/j.pss.2012.06.019](https://doi.org/10.1016/j.pss.2012.06.019).
- [172] K. OHTA, Y. KUWAYAMA, K. HIROSE, K. SHIMIZU et Y. OHISHI. “Experimental determination of the electrical resistivity of iron at Earth’s core conditions”. In : *Nature* 534.7605 (2016), p. 95-98. DOI : [10.1038/nature17957](https://doi.org/10.1038/nature17957).
- [173] S. OLVER et A. TOWNSEND. “A fast and well-conditioned spectral method”. In : *SIAM REview* 55.3 (2013), p. 462-489. DOI : [10.1137/120865458](https://doi.org/10.1137/120865458).
- [174] S. A. ORSZAG. “On the Elimination of Aliasing in Finite-Difference Schemes by Filtering High-Wavenumber Components.” In : *Journal of Atmospheric Sciences* 28 (1971), p. 1074-1074. DOI : [10.1175/1520-0469\(1971\)028<1074:OTEOAI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1971)028<1074:OTEOAI>2.0.CO;2).
- [175] L. ORUBA et E. DORMY. “Transition between Viscous Dipolar and Inertial Multipolar Dynamos”. In : *Geophysical Research Letters* 41.20 (2014), p. 7115-7120. DOI : [10.1002/2014GL062069](https://doi.org/10.1002/2014GL062069).
- [176] L. PETITDEMANGE. “Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 277 (2018), p. 113-132. DOI : [10.1016/j.pepi.2018.02.001](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2018.02.001).
- [177] R. A. PLUMB. “The Interaction of Two Internal Waves with the Mean Flow : Implications for the Theory of the Quasi-Biennial Oscillation.” In : *Journal of Atmospheric Sciences* 34.12 (1977), p. 1847-1858. DOI : [10.1175/1520-0469\(1977\)034<1847:TIOTIW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1977)034<1847:TIOTIW>2.0.CO;2).
- [178] C. C. PORCO et al. “Cassini Imaging of Jupiter’s Atmosphere, Satellites, and Rings”. In : *Science* 299 (2003), p. 1541-1547. DOI : [10.1126/science.1079462](https://doi.org/10.1126/science.1079462).
- [179] M. POZZO, C. DAVIES, D. GUBBINS et D. ALFÈ. “Thermal and electrical conductivity of iron at Earth’s core conditions”. In : *Nature* 485 (2012), p. 355-358. DOI : [10.1038/nature11031](https://doi.org/10.1038/nature11031).
- [180] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY et W. T. VETTERLING. *Numerical Recipes : The art of scientific computing*. Third. T. 1. Cambridge University Press, 2007. ISBN : 978-0-521-88068-8.
- [181] T. RADKO. *Double-diffusive convection*. Cambridge University Press, 2013. ISBN : 9780521880749.
- [182] R. RAYNAUD, L. PETITDEMANGE et E. DORMY. “Dipolar dynamos in stratified systems”. In : *MNRAS* 448.3 (2015), p. 2055-2065. DOI : [10.1093/mnras/stv122](https://doi.org/10.1093/mnras/stv122).

- [183] P. L. READ, B. J. CONRATH, L. N. FLETCHER, P. J. GIERASCH, A. A. SIMON-MILLER et L. C. ZUCHOWSKI. "Mapping potential vorticity dynamics on saturn : Zonal mean circulation from Cassini and Voyager data". In : *Planet. Space Sci.* 57.14-15 (2009), p. 1682-1698. DOI : [10.1016/j.pss.2009.03.004](https://doi.org/10.1016/j.pss.2009.03.004).
- [184] R. REDMER, T. R. MATTSSON, N. NETTELMANN et M. FRENCH. "The phase diagram of water and the magnetic fields of Uranus and Neptune". In : *Icarus* 211.1 (2011), p. 798-803. DOI : [10.1016/j.icarus.2010.08.008](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2010.08.008).
- [185] P. B. RHINES. "Waves and turbulence on a beta-plane". In : *Journal of Fluid Mechanics* 69 (1975), p. 417-443. DOI : [10.1017/S0022112075001504](https://doi.org/10.1017/S0022112075001504).
- [186] V. A. RIDLEY et R. HOLME. "Modeling the Jovian magnetic field and its secular variation using all available magnetic field observations". In : *Journal of Geophysical Research (Planets)* 121.3 (2016), p. 309-337. DOI : [10.1002/2015JE004951](https://doi.org/10.1002/2015JE004951).
- [187] A. RIVOLDINI, T. VAN HOOLST et O. VERHOEVEN. "The interior structure of Mercury and its core sulfur content". In : *Icarus* 201.1 (2009), p. 12-30. DOI : [10.1016/j.icarus.2008.12.020](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2008.12.020).
- [188] P. H. ROBERTS et E. M. KING. "On the genesis of the Earth's magnetism". In : *Reports on Progress in Physics* 76.9, 096801 (2013), p. 096801. DOI : [10.1088/0034-4885/76/9/096801](https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/9/096801).
- [189] T. M. ROGERS et G. A. GLATZMAIER. "Penetrative Convection within the Anelastic Approximation". In : *ApJ* 620.1 (2005), p. 432-441. DOI : [10.1086/423415](https://doi.org/10.1086/423415).
- [190] J. ROTVIG. "Multiple zonal jets and drifting : Thermal convection in a rapidly rotating spherical shell compared to a quasigeostrophic model". In : *Phys. Rev. E* 76.4, 046306 (2007), p. 046306. DOI : [10.1103/PhysRevE.76.046306](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.046306).
- [191] A. SANCHEZ-LAVEGA, J. F. ROJAS et P. V. SADA. "Saturn's Zonal Winds at Cloud Level". In : *Icarus* 147.2 (2000), p. 405-420. DOI : [10.1006/icar.2000.6449](https://doi.org/10.1006/icar.2000.6449).
- [192] Y. SASAKI, S.-i. TAKEHIRO, K. KURAMOTO et Y.-Y. HAYASHI. "Weak-field dynamo emerging in a rotating spherical shell with stress-free top and no-slip bottom boundaries". In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 188.3 (2011), p. 203-213. DOI : [10.1016/j.pepi.2011.06.019](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2011.06.019).
- [193] N. SCHAEFFER, D. JAULT, H. -. NATAF et A. FOURNIER. "Turbulent geodynamo simulations : a leap towards Earth's core". In : *Geophysical Journal International* 211.1 (2017), p. 1-29. DOI : [10.1093/gji/ggx265](https://doi.org/10.1093/gji/ggx265).
- [194] N. SCHAEFFER. "Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudospectral numerical simulations". In : *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 14.3 (2013), p. 751-758. DOI : [10.1002/ggge.20071](https://doi.org/10.1002/ggge.20071).
- [195] R. W. SCHMITT. "The growth rate of super-critical salt fingers". In : *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers* 26.1 (1979), p. 23-40. DOI : [10.1016/0198-0149\(79\)90083-9](https://doi.org/10.1016/0198-0149(79)90083-9).
- [196] S. SCHMITZ et A. TILGNER. "Heat transport in rotating convection without Ekman layers". In : *Phys. Rev. E* 80.1, 015305 (2009), p. 015305. DOI : [10.1103/PhysRevE.80.015305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.015305).
- [197] M. SCHRINNER. "Rotational threshold in global numerical dynamo simulations." In : *MNRAS* 431 (2013), p. L78-L82. DOI : [10.1093/mnrasl/slt012](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt012).
- [198] M. SCHRINNER, L. PETITDEMANGE, R. RAYNAUD et E. DORMY. "Topology and field strength in spherical, anelastic dynamo simulations". In : *A&A* 564, A78 (2014), A78. DOI : [10.1051/0004-6361/201322801](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322801).
- [199] M. SCHRINNER, L. PETITDEMANGE et E. DORMY. "Dipole Collapse and Dynamo Waves in Global Direct Numerical Simulations". In : *ApJ* 752.2, 121 (2012), p. 121. DOI : [10.1088/0004-637X/752/2/121](https://doi.org/10.1088/0004-637X/752/2/121).
- [200] T. SCHWAIGER, T. GASTINE et J. AUBERT. "Force balance in numerical geodynamo simulations : a systematic study". In : *Geophysical Journal International* 219 (2019), S101-S114. DOI : [10.1093/gji/ggz192](https://doi.org/10.1093/gji/ggz192).
- [201] T. SCHWAIGER, T. GASTINE et J. AUBERT. "Relating force balances and flow length scales in geodynamo simulations". In : *Geophysical Journal International* 224.3 (2021), p. 1890-1904. DOI : [10.1093/gji/ggaa545](https://doi.org/10.1093/gji/ggaa545).
- [202] A. SHEYKO, C. FINLAY, J. FAVRE et A. JACKSON. "Scale separated low viscosity dynamos and dissipation within the Earth's core". In : *Scientific reports* 8.1 (2018), p. 1-7. DOI : [10.1038/s41598-018-30864-1](https://doi.org/10.1038/s41598-018-30864-1).
- [203] A. P. SHOWMAN, P. J. GIERASCH et Y. LIAN. "Deep zonal winds can result from shallow driving in a giant-planet atmosphere". In : *Icarus* 182.2 (2006), p. 513-526. DOI : [10.1016/j.icarus.2006.01.019](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.01.019).
- [204] A. P. SHOWMAN, X. TAN et X. ZHANG. "Atmospheric Circulation of Brown Dwarfs and Jupiter- and Saturn-like Planets : Zonal Jets, Long-term Variability, and QBO-type Oscillations". In : *ApJ* 883.1, 4 (2019), p. 4. DOI : [10.3847/1538-4357/ab384a](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab384a).
- [205] R. D. SIMITEV et F. H. BUSSE. "Patterns of convection in rotating spherical shells". In : *New Journal of Physics* 5.1 (2003), p. 97. DOI : [10.1088/1367-2630/5/1/397](https://doi.org/10.1088/1367-2630/5/1/397).
- [206] R. D. SIMITEV et F. H. BUSSE. "Bistability and hysteresis of dipolar dynamos generated by turbulent convection in rotating spherical shells". In : *EPL (Europhysics Letters)* 85.1 (2009), p. 19001. DOI : [10.1209/0295-5075/85/19001](https://doi.org/10.1209/0295-5075/85/19001).

- [207] K. M. SODERLUND, M. H. HEIMPEL, E. M. KING et J. M. AURNOU. “Turbulent models of ice giant internal dynamics : Dynamos, heat transfer, and zonal flows”. In : *Icarus* 224.1 (2013), p. 97-113. DOI : [10.1016/j.icarus.2013.02.014](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.02.014).
- [208] K. M. SODERLUND, B. E. SCHMIDT, J. WICHT et D. D. BLANKENSHIP. “Ocean-driven heating of Europa’s icy shell at low latitudes”. In : *Nature Geoscience* 7.1 (2014), p. 16-19. DOI : [10.1038/ngeo2021](https://doi.org/10.1038/ngeo2021).
- [209] K. M. SODERLUND et S. STANLEY. “The underexplored frontier of ice giant dynamos”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 378.2187, 20190479 (2020), p. 20190479. DOI : [10.1098/rsta.2019.0479](https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0479).
- [210] K. M. SODERLUND, E. M. KING et J. M. AURNOU. “The influence of magnetic fields in planetary dynamo models”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 333 (2012), p. 9-20. DOI : [10.1016/j.epsl.2012.03.038](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2012.03.038).
- [211] S. C. SOLOMON, L. R. NITTLER et B. J. ANDERSON. *Mercury: The view after MESSENGER*. T. 21. Cambridge Planetary Science. Cambridge University Press, 2018. ISBN : 9781107154452.
- [212] A. SOURIAU et G. POUPINET. “The velocity profile at the base of the liquid core from PKP(BC+Cdiff) data : An argument in favour of radial inhomogeneity”. In : *Geophys. Res. Lett.* 18 (1991), p. 2023-2026. DOI : [10.1029/91GL02417](https://doi.org/10.1029/91GL02417).
- [213] D. SOYUER, F. SOUBIRAN et R. HELLED. “Constraining the depth of the winds on Uranus and Neptune via Ohmic dissipation”. In : *MNRAS* 498.1 (2020), p. 621-638. DOI : [10.1093/mnras/staa2461](https://doi.org/10.1093/mnras/staa2461).
- [214] A. SPIGA et al. “Global climate modeling of Saturn’s atmosphere. Part II : Multi-annual high-resolution dynamical simulations”. In : *Icarus* 335, 113377 (2020), p. 113377. DOI : [10.1016/j.icarus.2019.07.011](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.07.011).
- [215] B. SREENIVASAN et C. A. JONES. “The role of inertia in the evolution of spherical dynamos”. In : *Geophysical Journal International* 164 (2006), p. 467-476. DOI : [10.1111/j.1365-246X.2005.02845.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02845.x).
- [216] B. SREENIVASAN et S. KAR. “Scale dependence of kinetic helicity and selection of the axial dipole in rapidly rotating dynamos”. In : *Physical Review Fluids* 3.9, 093801 (2018), p. 093801. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.3.093801](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.093801).
- [217] L. A. SROMOVSKY et P. M. FRY. “Dynamics of cloud features on Uranus”. In : *Icarus* 179.2 (2005), p. 459-484. DOI : [10.1016/j.icarus.2005.07.022](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.07.022).
- [218] L. A. SROMOVSKY, P. M. FRY, T. E. DOWLING, K. H. BAINES et S. S. LIMAYE. “Coordinated 1996 HST and IRTF Imaging of Neptune and Triton. III. Neptune’s Atmospheric Circulation and Cloud Structure”. In : *Icarus* 149.2 (2001), p. 459-488. DOI : [10.1006/icar.2000.6564](https://doi.org/10.1006/icar.2000.6564).
- [219] L. A. SROMOVSKY, P. M. FRY, T. E. DOWLING, K. H. BAINES et S. S. LIMAYE. “Neptune’s Atmospheric Circulation and Cloud Morphology : Changes Revealed by 1998 HST Imaging”. In : *Icarus* 150.2 (2001), p. 244-260. DOI : [10.1006/icar.2000.6574](https://doi.org/10.1006/icar.2000.6574).
- [220] S. STANLEY, J. BLOXHAM, W. E. HUTCHISON et M. T. ZUBER. “Thin shell dynamo models consistent with Mercury’s weak observed magnetic field”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 234.1-2 (2005), p. 27-38. DOI : [10.1016/j.epsl.2005.02.040](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2005.02.040).
- [221] S. STELMACH, M. LISCHPER, K. JULIEN, G. VASIL, J. S. CHENG, A. RIBEIRO, E. M. KING et J. M. AURNOU. “Approaching the Asymptotic Regime of Rapidly Rotating Convection : Boundary Layers versus Interior Dynamics”. In : *Physical Review Letters* 113.25, 254501 (2014), p. 254501. DOI : [10.1103/PhysRevLett.113.254501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.254501).
- [222] S. STELMACH, A. TRAXLER, P. GARAUD, N. BRUMMELL et T. RADKO. “Dynamics of fingering convection. Part 2 The formation of thermohaline staircases”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 677 (2011), p. 554-571. DOI : [10.1017/jfm.2011.99](https://doi.org/10.1017/jfm.2011.99).
- [223] Z. STELZER et A. JACKSON. “Extracting scaling laws from numerical dynamo models”. In : *Geophysical Journal International* 193.3 (2013), p. 1265-1276. DOI : [10.1093/gji/ggt083](https://doi.org/10.1093/gji/ggt083).
- [224] D. J. STEVENSON. “Turbulent thermal convection in the presence of rotation and a magnetic field - A heuristic theory”. In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 12 (1979), p. 139-169. DOI : [10.1080/03091927908242681](https://doi.org/10.1080/03091927908242681).
- [225] D. J. STEVENSON. “Planetary magnetic fields”. In : *Reports on Progress in Physics* 46.5 (1983), p. 555-620. DOI : [10.1088/0034-4885/46/5/001](https://doi.org/10.1088/0034-4885/46/5/001).
- [226] D. J. STEVENSON. “Jupiter’s Interior as Revealed by Juno”. In : *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 48 (2020), p. 465-489. DOI : [10.1146/annurev-earth-081619-052855](https://doi.org/10.1146/annurev-earth-081619-052855).
- [227] A. STUDWELL, L. LI, X. JIANG, K. H. BAINES, P. M. FRY, T. W. MOMARY et U. A. DYUDINA. “Saturn’s Global Zonal Winds Explored by Cassini/VIMS 5- $\mu$ m Images”. In : *Geophys. Res. Lett.* 45.14 (2018), p. 6823-6831. DOI : [10.1029/2018GL078139](https://doi.org/10.1029/2018GL078139).
- [228] F. TAKAHASHI. “Implementation of a high-order combined compact difference scheme in problems of thermally driven convection and dynamo in rotating spherical shells”. In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 106.3 (2012), p. 231-249. DOI : [10.1080/03091929.2011.565337](https://doi.org/10.1080/03091929.2011.565337).

- [229] F. TAKAHASHI, M. MATSUSHIMA et Y. HONKURA. “Scale variability in convection-driven MHD dynamos at low Ekman number”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 167.3-4 (2008), p. 168-178. DOI : [10.1016/j.pepi.2008.03.005](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2008.03.005).
- [230] S.-I. TAKEHIRO et J. R. LISTER. “Penetration of columnar convection into an outer stably stratified layer in rapidly rotating spherical fluid shells”. In : *Earth and Planetary Science Letters* 187 (2001), p. 357-366. DOI : [10.1016/S0012-821X\(01\)00283-7](https://doi.org/10.1016/S0012-821X(01)00283-7).
- [231] S.-I. TAKEHIRO, Y. SASAKI et K. ISHIOKA. “Disappearance of surface banded structure produced by thermal convection in a rapidly rotating thin spherical shell”. In : *Annual Report of the Earth Simulator*. 3173-25 Showa-machi, Kanazawa-ku, Yokohama, 236-0001 JAPAN : Center for Earth Information Science et Technology, 2015, p. 125-130.
- [232] T. TASSIN, T. GASTINE et A. FOURNIER. “Geomagnetic semblance and dipolar-multipolar transition in top-heavy double-diffusive geodynamo models”. In : *Geophysical Journal International* 226.3 (2021), p. 1897-1919. DOI : [10.1093/gji/ggab161](https://doi.org/10.1093/gji/ggab161).
- [233] E. THÉBAULT, B. LANGLAIS, J. S. OLIVEIRA, H. AMIT et L. LECLERCQ. “A time-averaged regional model of the Hermean magnetic field”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 276 (2018), p. 93-105. DOI : [10.1016/j.pepi.2017.07.001](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.07.001).
- [234] A. TILGNER. “Spectral methods for the simulation of incompressible flows in spherical shells”. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30.6 (1999), p. 713-724. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990730\)30:6<713::AID-FLD859>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990730)30:6<713::AID-FLD859>3.0.CO;2-Y).
- [235] J. TOLLEFSON et al. “Changes in Jupiter’s Zonal Wind Profile preceding and during the Juno mission”. In : *Icarus* 296 (2017), p. 163-178. DOI : [10.1016/j.icarus.2017.06.007](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.06.007).
- [236] J. VERHOEVEN et S. STELLMACH. “The compressional beta effect : A source of zonal winds in planets?” In : *Icarus* 237 (2014), p. 143-158. DOI : [10.1016/j.icarus.2014.04.019](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.04.019).
- [237] J. VERHOEVEN, T. WIESEHÖFER et S. STELLMACH. “Anelastic versus Fully Compressible Turbulent Rayleigh-Bénard Convection”. In : *ApJ* 805.1, 62 (2015), p. 62. DOI : [10.1088/0004-637X/805/1/62](https://doi.org/10.1088/0004-637X/805/1/62).
- [238] J. VIDAL et N. SCHAEFFER. “Quasi-geostrophic modes in the Earth’s fluid core with an outer stably stratified layer”. In : *Geophysical Journal International* 202.3 (2015), p. 2182-2193. DOI : [10.1093/gji/ggv282](https://doi.org/10.1093/gji/ggv282).
- [239] S. M. WAHL et al. “Comparing Jupiter interior structure models to Juno gravity measurements and the role of a dilute core”. In : *Geophys. Res. Lett.* 44.10 (2017), p. 4649-4659. DOI : [10.1002/2017GL073160](https://doi.org/10.1002/2017GL073160).
- [240] J. WICHT, T. GASTINE et L. D. V. DUARTE. “Dynamo Action in the Steeply Decaying Conductivity Region of Jupiter-Like Dynamo Models”. In : *Journal of Geophysical Research (Planets)* 124.3 (2019), p. 837-863. DOI : [10.1029/2018JE005759](https://doi.org/10.1029/2018JE005759).
- [241] J. WICHT, T. GASTINE, L. D. V. DUARTE et W. DIETRICH. “Dynamo action of the zonal winds in Jupiter”. In : *A&A* 629, A125 (2019), A125. DOI : [10.1051/0004-6361/201935682](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935682).
- [242] J. WICHT et A. TILGNER. “Theory and Modeling of Planetary Dynamos”. en. In : *Space Sci Rev* 152.1 (2010), p. 501-542. ISSN : 1572-9672. DOI : [10.1007/s11214-010-9638-y](https://doi.org/10.1007/s11214-010-9638-y).
- [243] J. WICHT. “Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations”. In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 132.4 (2002), p. 281-302. DOI : [10.1016/S0031-9201\(02\)00078-X](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(02)00078-X).
- [244] J. WICHT et T. GASTINE. “Numerical simulations help revealing the dynamics underneath the clouds of Jupiter”. In : *Nature Communications* 11, 2886 (2020), p. 2886. DOI : [10.1038/s41467-020-16680-0](https://doi.org/10.1038/s41467-020-16680-0).
- [245] J. WICHT et S. SANCHEZ. “Advances in geodynamo modelling”. In : *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 113.1-2 (2019), p. 2-50. DOI : [10.1080/03091929.2019.1597074](https://doi.org/10.1080/03091929.2019.1597074).
- [246] G. P. WILLIAMS. “Planetary circulations. I. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence.” In : *Journal of Atmospheric Sciences* 35 (1978), p. 1399-1426. DOI : [10.1175/1520-0469\(1978\)035<1399:PCBROJ>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1978)035<1399:PCBROJ>2.0.CO;2).
- [247] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN, L. D. V. DUARTE et A. REINERS. “Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells”. In : *Geophysical Journal International* 204.2 (2016), p. 1120-1133. DOI : [10.1093/gji/ggv506](https://doi.org/10.1093/gji/ggv506).
- [248] R. K. YADAV, U. R. CHRISTENSEN, J. MORIN, T. GASTINE, A. REINERS, K. POPPENHAEGER et S. J. WOLK. “Explaining the Coexistence of Large-scale and Small-scale Magnetic Fields in Fully Convective Stars”. In : *ApJ* 813.2, L31 (2015), p. L31. DOI : [10.1088/2041-8205/813/2/L31](https://doi.org/10.1088/2041-8205/813/2/L31).
- [249] R. K. YADAV, T. GASTINE et U. R. CHRISTENSEN. “Scaling laws in spherical shell dynamos with free-slip boundaries”. In : *Icarus* 225.1 (2013), p. 185-193. DOI : [10.1016/j.icarus.2013.02.030](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.02.030).

- [250] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN et L. D. V. DUARTE. “Consistent Scaling Laws in Anelastic Spherical Shell Dynamos”. In : *ApJ* 774.1, 6 (2013), p. 6. DOI : [10.1088/0004-637X/774/1/6](https://doi.org/10.1088/0004-637X/774/1/6).
- [251] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN et A. REINERS. “Formation of starspots in self-consistent global dynamo models : Polar spots on cool stars”. In : *A&A* 573, A68 (2015), A68. DOI : [10.1051/0004-6361/201424589](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424589).
- [252] R. K. YADAV, T. GASTINE, U. R. CHRISTENSEN, S. J. WOLK et K. POPPENHAEGER. “Approaching a realistic force balance in geodynamo simulations”. In : *Proceedings of the National Academy of Science* 113.43 (2016), p. 12065-12070. DOI : [10.1073/pnas.1608998113](https://doi.org/10.1073/pnas.1608998113).
- [253] Y. YANG, R. VERZICCO et D. LOHSE. “Scaling laws and flow structures of double diffusive convection in the finger regime”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 802 (2016), p. 667-689. DOI : [10.1017/jfm.2016.484](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.484).