



HAL
open science

Apport de la théorie de l'information quantique dans la perspective du radar quantique

Sylvain Borderieux

► **To cite this version:**

Sylvain Borderieux. Apport de la théorie de l'information quantique dans la perspective du radar quantique. Electronique. ENSTA Bretagne - École nationale supérieure de techniques avancées Bretagne, 2022. Français. NNT : 2022ENTA0011 . tel-04338558

HAL Id: tel-04338558

<https://theses.hal.science/tel-04338558v1>

Submitted on 12 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE TECHNIQUES AVANCÉES BRETAGNE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Électronique*

Par

Sylvain BORDERIEUX

**Apport de la théorie de l'information quantique dans la perspective
du radar quantique**

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 13/12/2022

Unité de recherche : UMR 6285

Rapporteurs avant soutenance :

Aziz BENLARBI-DELAÏ Professeur des Universités, Sorbonne Université, Jussieu, France
Salah BOURENNANE Professeur des Universités, Centrale Marseille, Marseille, France

Composition du Jury :

Président : Ghaïs El Zein Professeur des Universités, IETR, INSA Rennes, Rennes, France

Examineurs : Ghaïs El Zein Professeur des Universités, IETR, INSA Rennes, Rennes, France
Philippe POULIGUEN Docteur, HDR, AID-DGA, Paris, France
Ali KHENCHAF Professeur des universités, ENSTA Bretagne, Brest, France
Arnaud COATANHAY Maître de Conférences, ENSTA Bretagne, Brest, France

Dir. de thèse : Ali KHENCHAF Professeur des universités, ENSTA Bretagne, Brest, France
Co-dir. de thèse : Arnaud COATANHAY Maître de Conférences, ENSTA Bretagne, Brest, France

SOMMAIRE

1	Introduction générale	15
1.1	Contexte	15
1.2	Objectifs	20
1.3	Méthodologie	21
1.4	Organisation du mémoire	22
2	Parallèle entre le radar classique et le radar quantique	25
2.1	La théorie du radar classique	26
2.1.1	Éléments technologiques essentiels d'un radar	26
2.1.2	Description générale du fonctionnement d'un radar moderne	28
2.1.3	Propagation d'une onde radar dans l'atmosphère	31
2.1.4	Interaction signal-cible : la Section Équivalente Radar	33
2.1.5	Synthèse	36
2.2	La théorie du radar quantique	37
2.2.1	Le radar à illumination quantique	37
2.2.2	Description physique du radar quantique : photons vs. ondes EM	42
2.2.3	Éléments technologiques essentiels d'un radar IQ	48
2.2.4	Interaction photon-cible : la Section Équivalente Radar Quantique	50
2.2.5	Interaction photon-environnement de propagation	54
2.2.6	Synthèse	56
3	La théorie de l'information dans un contexte radar	59
3.1	Éléments de la théorie de l'information classique	59
3.1.1	La notion d'information	60
3.1.2	Le canal classique en TIC	64
3.2	Éléments de la théorie de l'information quantique	68
3.2.1	Le formalisme de la mécanique quantique	68
3.2.2	L'entropie de Von Neumann	75
3.3	Synthèse	77

4 Outils de la théorie de l'information quantique	79
4.1 L'intrication	80
4.2 L'évolution des états quantiques	84
4.2.1 Les équations maîtresses	85
4.2.2 Les canaux quantiques	88
4.2.3 Synthèse	91
4.3 Les mesures d'intrication	91
4.4 Les corrélations quantiques au-delà de l'intrication	96
4.5 La théorie de la détection et de la décision	102
4.5.1 Généralités sur la théorie de la décision pour le radar quantique . .	102
4.5.2 Stratégie de décision binaire	105
4.6 Synthèse	106
5 Approche du radar IQ par la théorie de l'information quantique	109
5.1 Le montage du radar IQ	110
5.2 Le radar IQ en OAM	113
5.2.1 Le photon sur les états en OAM	113
5.2.2 Propagation d'un photon sur un état d'OAM dans l'atmosphère . .	116
5.2.3 Analyses sur le radar IQ en OAM	120
5.2.4 Conclusion	122
5.3 Le radar IQ de S. Lloyd	122
5.3.1 Description du radar IQ	123
5.3.2 Évolution de l'information quantique dans l'environnement atmo- sphérique	124
5.3.3 Stratégie de décision binaire	130
5.3.4 Conclusion	138
5.4 Synthèse	139
6 Approche du radar IQ en polarisation par la théorie de l'information quantique	141
6.1 Étude générique du radar IQ	142
6.1.1 Description de la propagation dans le radar IQ	142
6.1.2 Évolution de l'information du système	145
6.1.3 Conclusion	148
6.2 Le radar IQ en états de polarisation	149

6.2.1	Description du système initial	149
6.2.2	Évolution de l'information quantique	152
6.2.3	Stratégie de détection du radar	155
6.2.4	Conclusion	163
6.3	Le radar IQ en états de polarisation : 2 ^{ème} approche	164
6.3.1	Description du système initial et des hypothèses de détection	164
6.3.2	Évolution de l'information quantique	166
6.3.3	Stratégie de détection du radar IQ	169
6.3.4	Conclusion	173
6.4	Conclusion	173
7	Conclusion générale et perspectives	175
	Sommaire des annexes	178
A	Radar IQ en OAM	179
B	Radar IQ de S. Lloyd	181
C	Radar IQ en états de polarisation	185
D	Éléments du modèle d'atténuation atmosphérique	197
E	Radar IQ en polarisation : distributions des corrélations quantiques des hypothèses de détection	205
F	Le radar quantique : aspects technologiques et pratiques	211
F.1	Éléments de la théorie de l'information en variable continue	211
F.1.1	États gaussiens	212
F.1.2	Évolution des états gaussiens et états gaussiens intriqués	215
F.1.3	Discorde gaussienne	218
F.2	Technologies potentielles pour le radar quantique	220
F.2.1	Types de radar IQ	220
F.2.2	Émission et réception des états intriqués	222
F.2.3	Stockage du photon de référence	225
F.3	Synthèse	226

Bibliographie

231

TABLE DES FIGURES

1.1	Photographie d'un bombardier furtif [1] pour illustrer les contre-mesures passives. La forme de l'avion en "aile volante" diffère de la forme standard des bombardiers et des avions de chasse.	16
1.2	Bornes supérieures (courbe solide) des probabilités d'erreur de détection pour les états cohérents (borne de Chernoff) et pour l'illumination quantique (borne de Bhattacharyya) en fonction du nombre de modes M émis avec $N_S = 0.01$ photons en moyenne par mode, $N_B = 20$ photons du bruit thermique en moyenne et une réflectivité de la cible $\kappa = 0.01$. La courbe provient de la référence [2]. La courbe en pointillés est la borne inférieure pour les états cohérents.	18
1.3	Classification des radars classiques et quantiques par mode de fonctionnement d'émission/réception. La catégorie "capteur quantique" regroupe les éléments n'utilisant pas l'intrication quantique et qui ne peuvent donc être classés parmi les radars classiques et quantiques. Le radar FQ désigne un radar que nous pouvons représenter par un interféromètre Mach-Zender où 2 signaux intriqués empruntent des branches différentes. La différence de chemin optique provoque une différence de phase ϕ qui est mesurée pour le procédé de détection. L'utilisation de l'intrication améliore la sensibilité de détection sur cette mesure de phase [3].	19
1.4	Méthodologie et axes de recherche de la thèse : analyse et analogies sur la chaîne radar, étude par la théorie de l'information quantique.	21
1.5	Organisation des chapitres du mémoire de thèse.	22
2.1	Version simplifiée d'un diagramme en blocs d'un radar monostatique à impulsions d'après les références [4, 5]. Les éléments principaux représentés par des blocs nous indiquent le rôle des composants du radar. L'antenne du radar émet une onde EM (rouge) et elle reçoit une onde EM réfléchiée par l'objet (bleue). . .	27
2.2	Illustration du spectre d'absorption de l'atmosphère sur les longueurs d'onde de l'ordre du nanomètre au kilomètre [6].	31

TABLE DES FIGURES

2.3 SER d'un disque conducteur de rayon $r = 1$ mètre en fonction de l'angle d'incidence θ . Le disque est illuminé par une onde EM pour $f = 10$ GHz. 35

2.4 (a) SER d'une plaque de dimension $(1, 1)$ mètre en fonction de l'angle d'incidence θ . La plaque est illuminée par un signal radar à $f = 10$ GHz. La courbe verte tient compte de la polarisation horizontale de l'onde incidente tandis que la courbe rouge est indépendante de la polarisation. (b) SER d'une plaque de dimension $(1, 1)$ mètre en fonction de l'angle d'incidence θ . La plaque est illuminée par un signal radar à $f = 10$ GHz. La courbe bleue tient compte de la polarisation verticale de l'onde incidente tandis que la courbe rouge est indépendante de la polarisation. 35

2.5 Processus de détection du radar à illumination quantique en trois étapes : émission, propagation, réception [7]. 39

2.6 Diagramme en blocs des parties technologiques essentielles à trouver dans un radar à illumination quantique émettant des photons intriqués. 48

2.7 SERQ et SER en fonction de l'angle d'incidence θ sur une plaque de dimension 1×1 m pour une fréquence $f = 3.0 \times 10^9$ Hz du photon incident. 53

2.8 SERQ et SER en fonction de l'angle d'incidence θ sur un disque de rayon $r = 1$ m pour une fréquence $f = 3.0 \times 10^9$ Hz du photon incident. 54

3.1 Entropie binaire $H(p)$ pour une variable aléatoire $X_b = \{p, 1 - p\}$ 63

3.2 Illustration des liens entre les entropies $H(X, Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ et l'information mutuelle $I(X; Y)$ 67

4.1 (a) Entropies jointe et conditionnelle sur l'état de Werner $\hat{\rho}_W$ en fonction du paramètre de mélange statistique $\gamma \in [0, 1]$. (b) Informations mutuelle et conditionnelle de l'état de Werner. 100

4.2 Taux d'intrication de l'état de Werner en utilisant l'intrication de formation avec la concurrence de Wootters et le taux de corrélations quantiques par la discordance quantique 101

5.1 Combinaison des figures sur le schéma général en 3 étapes du radar IQ et des éléments technologiques supposés pour son fonctionnement. 111

5.2 Plan de réflexion et de calcul pour le radar IQ en adoptant une approche par la théorie de l'information quantique et la théorie de la mesure. 112

5.3	Coefficients de diffusion en fonction du rayon relatif r/r_0 pour différentes valeurs $\Delta l = l - l_0$ où l_0 est le nombre azimutal initial.	119
5.4	Probabilités $P(l)$ en fonction du rayon relatif $r_{p,l}/r_0$ où $r_{p,l} = b\sqrt{2p + l + 1}$ [8] pour différents modes LG_p^l du faisceau avec la condition $\Delta l = l - l_0 = 0$	120
5.5	Entropie de Von Neumann conditionnelle $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,\text{out}} \hat{\rho}_{S,\text{out}})_{\{M_S^{(i)}\}}$ et entropie jointe $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}})$ en fonction de $p \in [0, 1]$ pour $\xi = 1/2$	128
5.6	Information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}})$ et corrélations classiques $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}})$ en fonction de $p \in [0, 1]$ pour $\xi = 1/2$	129
5.7	Intrication de formation $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}})$, concurrence de Wootters $\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}})$ et discord quantique $\delta(\hat{\rho}_{AS,\text{out}})$ en fonction de $p \in [0, 1]$ pour $\xi = 1/2$	130
5.8	Illustration des hypothèses de détection H_0 et H_1 pour le radar à illumination quantique.	131
5.9	RSB ₊ du radar IQ en fonction du paramètre $p \in [0, 1]$ avec un bruit thermique n_b pour $f = 5.0 \times 10^{14}$ Hz. Comme le bruit est très faible dans le régime optique, le RSB est très fort pour $p \ll 1$. Il a donc été normalisé avec sa valeur maximale.	135
6.1	(a) Taux d'intrication et (b) discord quantique en fonction de la distance parcourue pour différentes valeurs du paramètre $\Gamma \in [0, 1]$ pour l'état intriqué initial conservant la même configuration de sa matrice densité malgré l'opérateur de mesure du milieu de propagation. L'unité de la distance est arbitraire et dépend de comment est défini le paramètre Γ	146
6.2	(a) Taux d'intrication et de discord quantique en fonction de la distance parcourue pour différentes valeurs du paramètre $\Gamma \in [0, 1]$ pour l'état de Werner soumis à l'opérateur de mesure du milieu de propagation. (b) Pureté de l'état de Werner en fonction de la distance parcourue.	147
6.3	Probabilités d'erreur de détection P_e en fonction du nombre de paires de photons intriqués M générées par le radar IQ calculées avec les bornes de Batthacharyya et de Chernoff.	148
6.4	Concurrence de Wootters $\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{Psi+})$, intrication de formation $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{Psi+})$ et discord quantique $\delta(\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{Psi+})$ en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 3/4]$ pour l'état intriqué initial $ \Psi^+\rangle_{AS}$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$	153
6.5	Information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{Psi+})$ et corrélations classiques $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{Psi+})$ en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 3/4]$ pour l'état intriqué initial $ \Psi^+\rangle_{AS}$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$	154

TABLE DES FIGURES

6.6	Loi de Bose-Einstein $n(f, T)$ sur le régime de fréquences micro-ondes $f \in [1, 400]$ GHz pour les températures $T = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ °C.	156
6.7	Rapports signal-sur-bruit RSB_{H_0} et RSB_{H_1} en fonction de la fréquence sur un intervalle $[1, 1000]$ GHz avec plusieurs probabilités de réflexion de la cible pour une température de $T = 300$ K.	159
6.8	Atténuation \mathcal{A} en fonction de la fréquence $f \in [1, 1000]$ GHz, calculée à partir du modèle MPM pour $T = 300$ K, un taux d'humidité de 50 % et une pression de 101.3 kPa.	162
6.9	Distances maximales de survie x pour l'intrication et pour la discorde en fonction de la fréquence d'émission f du radar IQ dans l'atmosphère. Ces courbes traduisent une tendance d'évolution. Il ne faut pas prendre en compte les pics d'absorption du modèle MPM.	162
6.10	Répartition des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 en fonction du paramètre du canal γ pour 3 fréquences différentes $f = \{10, 50, 100\}$ GHz, pour $\eta = 0.1$	168
6.11	Répartition des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 pour 2 valeurs de $\gamma = \{1/3, 1/2\}$ en fonction du rapport η/p avec $\eta = 0.1$ et où la probabilité p est calculée sur $f \in [5, 20]$ GHz.	169
6.12	RSB des équations (6.32) et (6.34) en fonction de $\gamma \in [0, 3/4]$, pour $f = \{10, 50\}$ GHz et $\eta = 0.1$	171
C.1	Racines des valeurs propres des matrices R en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 3/4]$	188
C.2	Entropie conditionnelle quantique $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A \hat{\rho}_S)$ et entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS})$ en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 1]$	194
C.3	Intrication de formation en fonction de l'amplitude de densité de probabilité $a^2 \in [0.1, 0.5]$ et du paramètre du canal $\gamma \in [0, 3/4]$	195
C.4	Discorde quantique en fonction de l'amplitude de densité de probabilité $a^2 \in [0.1, 0.5]$ et du paramètre du canal $\gamma \in [0, 3/4]$	196
D.1	Atténuation atmosphérique en fonction de la fréquence $f \in [1, 1000]$ GHz pour 3 températures différentes $T = \{0, 27, 40\}$ °C avec un taux d'humidité de 50 % et une pression $P = 101.3$ kPa.	201
F.1	Représentation du principe du procédé SPDC pour obtenir des photons intriqués à partir d'un seul faisceau laser et d'un cristal non-linéaire.	222

F.2 Schéma extrait de l'article [9] d'un dispositif de radar IQ pour une détection à température ambiante incluant un JTWPA pour détecter des cibles faiblement réfléchissantes. 224

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Bandes de fréquences radar d'après la nomenclature standard IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) et la nouvelle nomenclature de l'OTAN (Organisation du Traité de l'Atlantique Nord) d'après la référence [4].	32
2.2	Comparaison entre les probabilités conditionnelles sur une seule détection entre les états cohérents de la lumière et les états intriqués. Les résultats sont extraits de l'article de S. Lloyd [10]. Les probabilités conditionnelles du tableau sont obtenues par les mesures effectuées dans la phase de réception par rapport aux hypothèses formulées en amont sur la présence ou l'absence d'une cible de probabilité de réflexion η	41
3.1	Alphabet de lettres x associé à la variable aléatoire X de la source d'information.	61
3.2	Encodages 1 et 2 des lettres $x \in \mathcal{X}$ en bits d'information. Le nombre de bits qui code un symbole est indiqué sous la succession des bits "0" et "1" qui code le symbole.	61
4.1	Hypothèses de la stratégie de décision binaire. La ligne en rouge représente les hypothèses initiales tandis que la colonne bleue représente les hypothèses décidées comme vraies après la mesure. Les croisements des hypothèses initiales avec les hypothèses décidées donnent les 4 résultats possibles de la stratégie de décision.	103
5.1	Probabilités d'erreur de détection pour des mesures faites sur le radar monophoton et sur le radar IQ.	134
6.1	Probabilités conditionnelles dérivées à partir des opérateurs de mesure (opérateurs de projection) sur l'opérateur $\hat{\Lambda}$. La couleur rouge correspond aux probabilités d'erreur pour la détection radar tandis que la couleur verte correspond aux probabilités de succès.	158
D.1	Paramètres des lignes spectrales pour O_2 et H_2O pour les calculs des profils de lignes spectrales.	199
D.2	Coefficients associés au continuum du spectre pour l'air sec.	199

LISTE DES TABLEAUX

D.3	Coefficients associés au continuum du spectre pour la vapeur d'eau.	200
D.4	Tableau des coefficients pour la molécule O ₂ dans le modèle MPM.	202
D.5	Tableau des coefficients pour la molécule H ₂ O dans le modèle MPM.	203

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Sommaire du chapitre

1.1	Contexte	15
1.2	Objectifs	20
1.3	Méthodologie	21
1.4	Organisation du mémoire	22

Dans ce chapitre nous introduisons la thématique de recherche sur le radar quantique en définissant le cadre général scientifique et les enjeux globaux. Pour cela, nous rappelons le contexte général avec les enjeux scientifiques et militaires dans lequel se place cette thématique dans la section 1.1. Ensuite, les objectifs de travail sont définis dans la section 1.2 et la méthodologie de recherche utilisée est donnée dans la section 1.3. La section 1.4 donne l'organisation générale du mémoire de thèse et l'enchaînement des chapitres.

1.1 Contexte

La technologie RADAR ("Radio Detection and Ranging") née au XX^{ème} siècle est devenue incontournable dans de nombreux secteurs, militaires ou civils, pour détecter, localiser, suivre des cibles, alliées comme adversaires, dans des situations variées, aériennes et maritimes [4,11]. Le radar est d'abord apparu dans les années 1930 avant d'être intensément utilisé pendant la Seconde Guerre Mondiale ce qui a contribué à son développement très rapide. Cette technologie profita essentiellement au renseignement militaire pour la préparation et la coordination des troupes terrestres, aériennes et maritimes comme le démontra par exemple, la bataille d'Angleterre de 1940. Au lendemain de la Seconde Guerre Mondiale, le contexte de la Guerre Froide avec de fortes tensions géopolitiques entre les blocs américain et soviétique constitua un terreau favorable pour le développement continu de cette technologie. Les radars ont diversifié leurs fonctions comme la reconnaissance de cibles, le suivi de cibles multiples et ils ne se cantonnent plus seulement

au secteur militaire. Nous avons vu l'apparition de nouveaux systèmes radars : SAR¹, radar MTI², le SLAR³, ISAR⁴, radars météorologiques, radars pour la radioastronomie, etc. [4, 12]. Bien entendu, leur développement dans le secteur militaire s'est accompagné des contre-mesures pour se dérober aux moyens de détection ennemis. Ces deux aspects complémentaires entrent dans le cadre d'une Guerre Électronique⁵.

Le contexte géopolitique actuel est toujours propice à la Guerre Électronique qui prend des formes plus complexes à mesure que les innovations font évoluer le radar dans un système d'épée et du bouclier où on cherche à observer sans être vu. On distingue les contre-mesures actives avec le brouillage, des contre-mesures passives avec par exemple, des avions furtifs, tel que celui présenté dans la figure 1.1, dont la forme et la nature sont étudiées pour diminuer l'écho radar. La technologie radar repose sur la théorie des ondes électromagnétiques (EM) de Maxwell ainsi que sur la théorie de l'information sur laquelle repose le traitement du signal radar pour détecter une cible, sa position et sa nature [13, 14].



FIGURE 1.1 – Photographie d'un bombardier furtif [1] pour illustrer les contre-mesures passives. La forme de l'avion en "aile volante" diffère de la forme standard des bombardiers et des avions de chasse.

En parallèle du radar, la mécanique quantique se développe depuis le début du XX^{ème} siècle où elle est apparue en réponse à l'échec des théories de physique classique d'expliquer des phénomènes tels que le rayonnement du corps noir et l'effet photo-électrique [15–19]. Si les principes de cette théorie ont donné lieu à quelques applications comme le LASER⁶

1. Synthetic Aperture Radar
2. Moving Target Recognition
3. SideLooking Airborne Radar
4. Inverse Synthetic Aperture Radar
5. Ensemble des mesures visant à détecter un adversaire sans l'être soi-même, à protéger son équipement des attaques et contre-mesures ennemies tout en brouillant l'équipement ennemi.
6. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, inventé en 1960.

et les circuits intégrés, il faut attendre les années 1980 pour qu'un essor des technologies quantiques ait lieu.

Cet essor des technologies quantiques pour l'information reposent essentiellement sur l'utilisation d'objets quantiques uniques mais surtout sur l'utilisation de l'intrication quantique, c'est pourquoi elle est parfois désignée comme la seconde révolution quantique⁷. Il existe ainsi des protocoles sans intrication comme la technique de cryptographie quantique reposant sur l'utilisation de photons uniques qui permet de sécuriser le transfert d'une information (protocole BB84). Cependant, l'élément central de cet essor rapide est l'intrication quantique parce qu'elle engendre des corrélations non-classiques entre plusieurs systèmes quantiques ce qui permet de surpasser des protocoles classiques d'information ou même d'en créer de nouveaux [20, 21]. Pour illustrer cela, nous citons le protocole de cryptographie quantique d'Ekert qui utilise une paire de photons intriqués ainsi que les protocoles de calcul quantique (algorithme de Shor, algorithme de Grover). Un protocole sans équivalent classique est la téléportation quantique qui permet de transférer l'état quantique d'un système sur un autre séparé spatialement en utilisant l'intrication. L'essor des technologies quantiques prend pour origine l'évolution des technologies d'optique ayant conduit à des avancées majeures dans la manipulation des objets quantiques uniques tels que les atomes, photons et électrons permettant alors la conception d'expériences de technologie quantique pour l'information [20, 22].

De la même manière, l'idée du radar quantique repose sur l'usage de l'intrication pour détecter un objet à distance à l'instar de véhiculer une information entre émetteur et un destinataire.

L'émergence du radar quantique commence en 2008 avec l'article de S. Lloyd [10, 23] qui montra que l'utilisation de paires de photons intriqués permettait d'accroître la sensibilité de détection d'un objet de faible réflectivité dans un environnement comportant un fort bruit thermique. Ce concept nommé *l'illumination quantique* (IQ) consiste à émettre un photon qui va être réfléchi par une cible vers le radar tandis que l'autre photon reste piégé dans celui-ci. À la fin du procédé, une mesure jointe est effectuée sur la paire de photons réunis. Ce concept a été décliné par Tan et al. [2] sur des états gaussiens intriqués lui donnant une valeur expérimentale. Dans ce cas précis, l'amélioration de la sensibilité par l'utilisation des états gaussiens est en théorie de 6 dB par rapport à un radar émettant des

7. La première révolution est considérée comme le développement de la théorie quantique au début du XX^{ème} siècle où on découvre la nature duale, onde-corpuscule, de la matière.

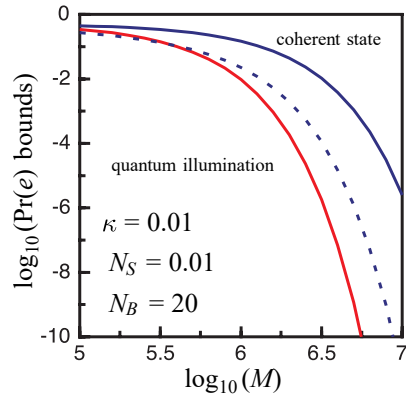


FIGURE 1.2 – Bornes supérieures (courbe solide) des probabilités d’erreur de détection pour les états cohérents (borne de Chernoff) et pour l’illumination quantique (borne de Bhattacharyya) en fonction du nombre de modes M émis avec $N_S = 0.01$ photons en moyenne par mode, $N_B = 20$ photons du bruit thermique en moyenne et une réflectivité de la cible $\kappa = 0.01$. La courbe provient de la référence [2]. La courbe en pointillés est la borne inférieure pour les états cohérents.

états quasi-classiques⁸. Pour l’illustrer, les courbes de la probabilité d’erreur de détection sont représentées dans la figure 1.2. Dès lors, la recherche autour du radar quantique et plus particulièrement du radar IQ a suscité un vif intérêt. Les articles théoriques [24–28] et les tentatives expérimentales d’illumination quantique [9, 29–35] sur le sujet se multiplient. Les études dans la littérature couvrent les régimes de fréquences optiques et micro-ondes seulement une utilisation radar privilégierait le domaine micro-onde comme en théorie radar classique [4, 36]. Cependant, cela induit une multitude de problèmes liés au bruit thermique sur cette gamme de fréquences pour un système de radar quantique émettant une quantité limitée de photons. De plus, il n’existe pas à l’heure actuelle de système de radar quantique opérant dans les mêmes conditions qu’un radar moderne. Par contre, les technologies potentielles pour le radar IQ existent déjà et d’autres sont en développement.

La recherche sur le radar quantique est très active à cause des enjeux suscités par la Guerre Électronique. En effet, le radar quantique serait théoriquement capable de surpasser la technologie radar classique en termes de sensibilité de détection et de furtivité, ce qui pourrait lui permettre de détecter des cibles furtives pour un radar classique [3]. Cependant, il n’existe pas de preuve expérimentale formelle attestant de cette supériorité sur le radar moderne dans des conditions d’utilisation similaires. Il faut donc rester très prudent sur ce sujet. La thématique de recherche sur le radar quantique est récente, elle

8. Les états quasi-classiques sont aussi appelés des états cohérents.

est encore au stade exploratoire. Par ailleurs, il subsiste des ambiguïtés sur l'appellation "radar quantique" que nous levons dans la figure 1.3 où nous séparons le radar quantique (RQ) qui utilise l'intrication quantique pour augmenter ses performances de détection, du radar classique à module quantique (MQ). Le radar MQ désigne un radar moderne utilisant des ondes EM classiques mais bénéficiant dans son système radar d'un élément quantique tel qu'un circuit électronique quantique pour améliorer ses capacités de traitement. En accord avec la littérature sur le sujet, nous posons une définition (1.1) pour le

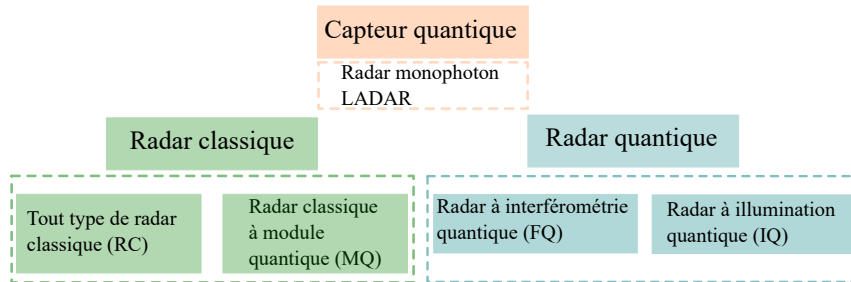


FIGURE 1.3 – Classification des radars classiques et quantiques par mode de fonctionnement d'émission/réception. La catégorie "capteur quantique" regroupe les éléments n'utilisant pas l'intrication quantique et qui ne peuvent donc être classés parmi les radars classiques et quantiques. Le radar FQ désigne un radar que nous pouvons représenter par un interféromètre Mach-Zender où 2 signaux intriqués empruntent des branches différentes. La différence de chemin optique provoque une différence de phase ϕ qui est mesurée pour le procédé de détection. L'utilisation de l'intrication améliore la sensibilité de détection sur cette mesure de phase [3].

radar quantique.

Définition 1.1 (radar quantique). *Un radar quantique est un système radar qui repose sur l'intrication quantique entre un signal de référence et un signal émis dans un environnement. Le traitement du signal implique de recourir à des mesures quantiques d'observables physiques en lien avec le degré de liberté sur lequel est construit l'intrication.*⁹

Dans la suite du document, nous faisons souvent référence au radar quantique et au radar IQ de la même façon.

Pour résumer, la thématique du radar quantique est multidisciplinaire alliant la mécanique quantique, la théorie radar et la théorie de l'information quantique. Cela permet d'explorer le sujet sous des angles différents pour étudier les potentialités d'un tel radar.

9. Les signaux d'émission et de référence peuvent être simplement une paire de photons.

1.2 Objectifs

Dans cette thèse, nous étudions le radar quantique utilisant le procédé d'illumination quantique en nous basant notamment sur l'article de S. Lloyd [10, 23]. Nous avons 2 objectifs de recherche que nous détaillons ci-dessous.

Le 1^{er} objectif est d'étudier le radar IQ en utilisant les outils de la théorie de l'information quantique. Le radar IQ possède un gain en sensibilité de détection grâce à l'intrication initiale or il semble que ce gain qu'on nomme "l'avantage quantique" est conservé malgré la perte de l'intrication qui se produit dans l'environnement de propagation. La conservation de l'avantage quantique serait liée à la survie de corrélations quantiques au-delà de l'intrication qui participeraient alors à la conservation de la sensibilité donc à la conservation d'une information pour le radar IQ. En partant de cette idée, nous étudions le radar IQ en utilisant l'intrication et les corrélations non-classiques dans la stratégie de détection radar en prenant pour base théorique les travaux de S. Lloyd [10, 23].

Le 2^{ème} objectif est de proposer une étude générale du radar IQ en établissant un parallèle entre la théorie radar quantique et la théorie radar classique lorsque cela est possible. Par cette analyse, nous voulons identifier les similitudes et les différences entre les deux systèmes radars et leur fonctionnement. Ce travail d'analyse se construit en suivant une chaîne radar classique généralisée où on retrouve les processus d'émission, de propagation, de réflexion et de réception.

Ces 2 objectifs de travail s'inscrivent dans une démarche de recherche exploratoire sur la thématique récente du radar IQ en adoptant une approche originale par l'utilisation de la théorie de l'information quantique. Cette thèse n'inclut pas d'étude expérimentale mais elle propose 2 points de vue pour aborder ce sujet de recherche. Le choix des objectifs de travail permet de dresser un 1^{er} portrait de la théorie du radar quantique pour une communauté radar et pour une communauté des sciences de l'information. En revanche, nous tenons à souligner que cette théorie du radar quantique est très récente et donc immature contrairement à la théorie radar classique. Il faut garder à l'esprit que ce sujet est exploratoire. Le travail effectué ne permet pas d'affirmer ou d'infirmer que le radar IQ est supérieur au radar classique et qu'en construire un est possible. La question de la faisabilité d'un radar quantique est encore une question ouverte.

Les objectifs de recherche définis nous ont permis de mettre au point notre méthodologie de recherche que nous expliquons dans la section suivante.

1.3 Méthodologie

La méthodologie de recherche s'est construite sur 2 axes suivants les objectifs de travail définis précédemment. Nous détaillons cette méthodologie à l'aide de la figure 1.4.

L'étude sur le radar IQ en établissant un parallèle lorsque c'est possible entre la théorie radar quantique et la théorie radar classique s'axe sur le modèle d'une chaîne radar classique. Ce parallèle est utile pour insister sur les différences entre les deux théories radars du point de vue de leur fonctionnement. Cela confère également un cadre théorique pour identifier le long de la chaîne radar le rôle des parties technologiques sur le système de radar quantique et leur impact qualitatif sur l'évolution de l'information quantique. Cette analyse nourrit notre démarche d'étudier le radar IQ en utilisant la théorie de l'information quantique en ciblant les points critiques où l'information est susceptible d'être perturbée. Nous discutons notamment du processus de détection du radar IQ basée sur la discrimination des états quantiques.

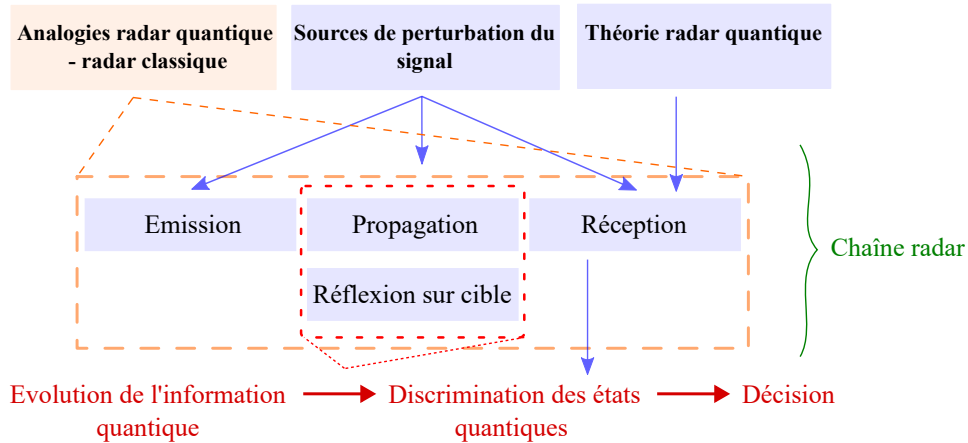


FIGURE 1.4 – Méthodologie et axes de recherche de la thèse : analyse et analogies sur la chaîne radar, étude par la théorie de l'information quantique.

L'étude des points critiques fait intervenir la réflexion et la propagation dans l'environnement du photon émis ou du signal émis comme l'indique la figure 1.4. Nous nous intéressons surtout au milieu de propagation dans le processus du radar IQ parce qu'il est

encore peu étudié par rapport à la phase d'émission et à la cible. Néanmoins, nous menons une approche par la théorie de l'information quantique ce qui n'implique pas nécessairement une étude physique rigoureuse des phénomènes de propagation d'un photon dans un milieu. Une telle étude nécessiterait d'utiliser la théorie de la QED¹⁰ qui est complexe à mettre en œuvre et sort du cadre de travail fixé par la théorie de l'information quantique [20, 21, 37]. Dans cette approche, nous nous focalisons sur le taux d'intrication ainsi que sur le taux de corrélations quantiques représenté par la *discorde quantique* [38] en tentant de les lier au processus de détection du radar IQ.

En bref, nous utilisons en priorité les outils théoriques de la théorie de l'information quantique pour étudier le radar quantique. La méthodologie décrite dans cette section conditionne la structure du mémoire de thèse que nous présentons ci-dessous.

1.4 Organisation du mémoire

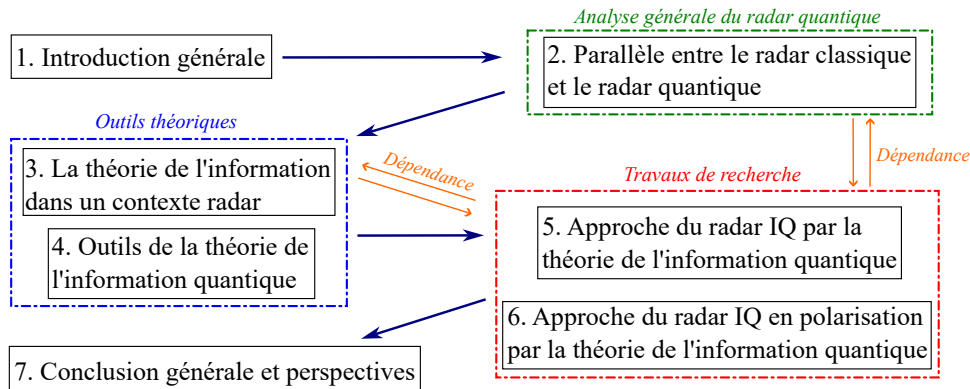


FIGURE 1.5 – Organisation des chapitres du mémoire de thèse.

Le mémoire comporte 5 chapitres couvrant 3 thèmes d'après la figure 1.5. Le chapitre 2 établit les différences et similitudes entre le radar conventionnel et le radar quantique nous permettant d'introduire le sujet. Les chapitres 3 et 4 expliquent les outils de la théorie de l'information quantique dont l'intrication et la discorde que nous utilisons dans les travaux de recherche présentés dans les chapitres 5 et 6. Le chapitre 7 conclut le mémoire en proposant des perspectives pour de potentielles futures recherches sur la thématique

10. Quantum Electro-Dynamics = Électrodynamique Quantique. C'est une théorie des champs quantiques relativistes dont Richard Feynman est l'un des principaux contributeurs.

du radar IQ.

Nous commençons par établir le parallèle entre les théories du radar quantique et du radar classique dans le chapitre qui suit.

PARALLÈLE ENTRE LE RADAR CLASSIQUE ET LE RADAR QUANTIQUE

Sommaire du chapitre

2.1	La théorie du radar classique	26
2.1.1	Éléments technologiques essentiels d'un radar	26
2.1.2	Description générale du fonctionnement d'un radar moderne	28
2.1.3	Propagation d'une onde radar dans l'atmosphère	31
2.1.4	Interaction signal-cible : la Section Équivalente Radar	33
2.1.5	Synthèse	36
2.2	La théorie du radar quantique	37
2.2.1	Le radar à illumination quantique	37
2.2.2	Description physique du radar quantique : photons vs. ondes EM	42
2.2.3	Éléments technologiques essentiels d'un radar IQ	48
2.2.4	Interaction photon-cible : la Section Équivalente Radar Quantique	50
2.2.5	Interaction photon-environnement de propagation	54
2.2.6	Synthèse	56

Nous mettons en parallèle les 2 théories radars pour mettre en évidence les similitudes quand cela est possible et en insistant sur les différences. Pour ce faire, la section 2.1 rappellent les bases théoriques du radar classique en omettant le traitement du signal car le radar IQ mis en parallèle dans la section 2.2 émet des photons individuels où le traitement du signal n'est pas possible comme pour une onde. Dans les 2 sections, nous regardons les différentes parties de la chaîne du radar sur le modèle d'un radar classique. L'objectif principal est de poser les concepts clefs de la théorie du radar quantique qui diffèrent du radar conventionnel sans tomber dans un formalisme mathématique poussé. Nous orientons les explications sur la description physique du radar IQ en parlant de manière succincte des dispositifs technologiques potentiels dans la perspective d'un radar IQ. Ce

chapitre marque donc une transition entre une description classique et une description quantique pour l'étude du radar quantique.

2.1 La théorie du radar classique

La sélection des notions importantes a été faite sur la base d'ouvrages généraux dans la littérature [4, 5, 11, 12]. Nous commençons par introduire en section 2.1.1 les éléments technologiques essentiels constituant un système radar moderne. Suite à cela, nous rappelons la description physique de l'onde radar dans la section 2.1.2. Nous continuons dans la section 2.1.3 par parler des conditions de propagation d'une onde radar dans un milieu dissipatif tel que l'atmosphère. La section 2.1.4 explique les points fondamentaux de la Section Équivalente Radar. Enfin, la section 2.1.5 fait une synthèse des éléments vus sur la théorie du radar classique.

2.1.1 Éléments technologiques essentiels d'un radar

Rappelons qu'un radar est un dispositif électromécanique émettant et recevant des ondes électromagnétiques (EM) sur une gamme de fréquences déterminée pour la détection et la localisation d'objets à distance. Un traitement adéquat du signal reçu permet d'extraire des informations utiles sur les objets détectés (vitesse, composition, forme, taille). Pour les besoins de l'analyse, nous optons pour un radar monostatique émettant des impulsions courtes à une fréquence définie parce que les systèmes de radar quantique imaginés sont essentiellement monostatiques [25, 26].

Le passage en revue des éléments technologiques d'un tel radar se fait via la figure 2.1 représentant un diagramme en blocs simplifié d'un radar monostatique à impulsions. La cible renvoyant l'onde émise par le radar est représentée par un avion évoluant dans l'atmosphère qu'on suppose être un milieu homogène et isotrope dans cet exemple. Nous utilisons le même type de figure pour le radar quantique dans la section 2.2.

Nous spécifions le rôle des blocs technologiques dans la figure 2.1 dans le fonctionnement du radar. Le générateur de forme d'onde permet de moduler l'impulsion envoyée pour lui donner la forme souhaitée (signaux carrés, triangulaires ou sinusoïdaux). L'amplificateur de puissance augmente la puissance du signal émis pour compenser l'atténuation de l'onde dans la couche d'atmosphère traversée. L'onde émise (en rouge) se propage dans

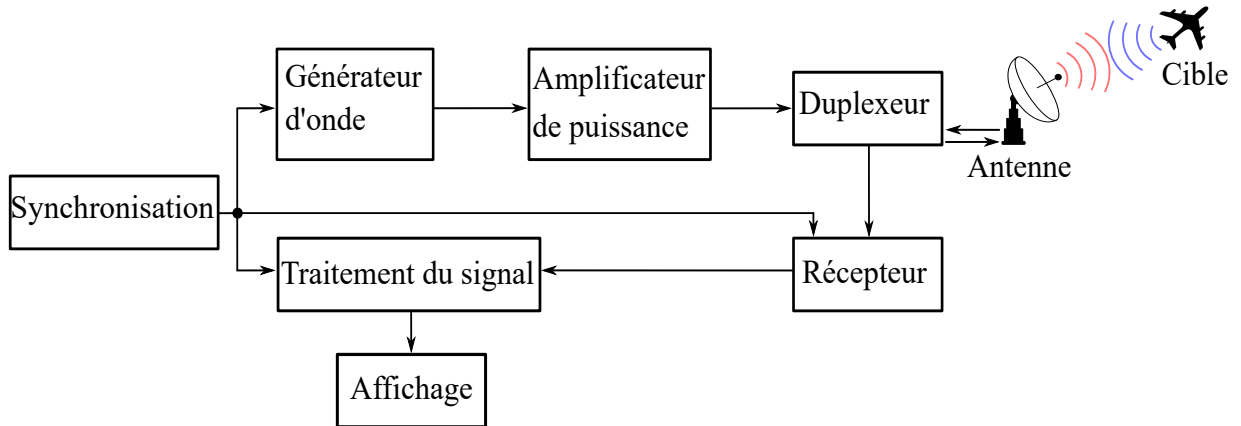


FIGURE 2.1 – Version simplifiée d’un diagramme en blocs d’un radar monostatique à impulsions d’après les références [4, 5]. Les éléments principaux représentés par des blocs nous indiquent le rôle des composants du radar. L’antenne du radar émet une onde EM (rouge) et elle reçoit une onde EM réfléchie par l’objet (bleue).

une région ciblée par l’antenne émettrice, une partie de l’onde impacte la cible puis est réfléchie. La partie de l’onde réfléchie (en bleue) se propage dans toutes les directions et une fraction de celle-ci est captée par l’antenne réceptrice du radar. La puissance de cette fraction de l’écho radar de la cible est très inférieure par rapport à celle de l’onde émise par le radar. Le duplexeur permet de diriger la puissance du signal émis vers l’antenne émettrice et le signal reçu vers le récepteur. Le bloc de synchronisation sert à faire fonctionner ensemble tous les éléments du système radar notamment le duplexeur pour les phases d’émission et de réception. Le signal reçu dans le récepteur passe par la partie de traitement du signal pour extraire les informations utiles sur la cible comme sa position et sa vitesse. La première priorité reste d’établir une décision fiable quant à la présence ou l’absence de l’objet cible. Pour cela, le signal reçu doit dépasser un seuil de détection fixé pour le radar dans les conditions d’utilisation considérées.

En résumé, la figure 2.1 permet de diviser la chaîne de détection du radar en 4 étapes. D’abord, le radar émet dans l’atmosphère une onde EM de forte puissance, cette onde est atténuée par le milieu atmosphérique et par la dispersion de son énergie sur le front d’onde qui s’étend. Une fraction de l’onde émise est réfléchie par un objet (= la cible). Une partie de cette onde réfléchie est renvoyée vers l’antenne réceptrice du radar. Le signal reçu est dirigé vers le récepteur puis vers le traitement du signal pour établir la décision de détection. On distingue 4 étapes sur la chaîne du radar : *l’émission, la propagation,*

la réflexion, la réception, qui déterminent une équation du radar prenant la forme d'un bilan d'énergie entre l'onde réceptionnée et l'onde émise. Cette équation sert notamment à fixer le seuil de détection pour le radar.

Décrire la fonction des blocs du système radar nous a conduit à parler de l'équation du radar que nous traitons dans la section suivante tout en rappelant quelques notions sur la théorie des ondes EM.

2.1.2 Description générale du fonctionnement d'un radar moderne

La technologie radar repose sur l'envoi et la réception d'ondes EM dont le comportement est décrit par la théorie de l'électromagnétisme classique, plus précisément par les équations de Maxwell dérivées du milieu de propagation considéré [3, 13]. Nous rappelons brièvement ces équations avant de traiter l'équation du radar classique.

D'après la figure 2.1 en supposant qu'on se trouve dans un milieu sans charges ni courants, homogène et isotrope, on obtient les équations de Maxwell pour le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et l'induction magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en fonction de la position \vec{r} et du temps t :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1d)$$

Où c est la vitesse de la lumière définie par $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. En utilisant l'identité $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$, on écrit l'équation de propagation du champ électrique (2.2a) en espace libre et celle de l'induction magnétique (2.2b).

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2b)$$

Une des solutions générales de ces équations est une onde plane en supposant que la cible est suffisamment loin du radar. À titre d'exemple, on a :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\varepsilon} E_0 \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \quad (2.3a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{\varepsilon}}{k} E_0 \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \quad (2.3b)$$

Où \vec{k} est le vecteur d'onde, $\vec{\varepsilon}$ est le vecteur de la polarisation de l'onde de fréquence $\omega = 2\pi f$. C'est l'évolution de l'énergie portée par cette onde EM que décrit l'équation du radar. Le rappel de la forme générale de l'onde EM classique nous permettra dans la section 2.2 de pointer la rupture entre l'émission d'une onde pour un radar conventionnel et l'émission d'un photon pour un radar quantique qui change la manière de définir l'équation du radar. Pour l'instant, nous restons dans le cas d'une équation radar classique sous la forme d'un bilan d'énergie tenant compte des 4 étapes de la chaîne du radar que nous avons décrites précédemment [4, 5, 39].

Lors de la phase d'émission, nous envoyons une onde EM de forte puissance pour sonder une région où se trouve potentiellement un objet. L'antenne radar directionnelle peut être orientée en fonction des angles d'azimut θ_a et d'élévation θ_e et elle possède un gain d'émission $G_t(\theta_a, \theta_e)$ proportionnel au paramètre $K \leq 1$ de la forme physique de l'ouverture de l'antenne [5] :

$$G_t(\theta_a, \theta_e) = K \frac{4\pi}{\theta_a \theta_e} \quad (2.4)$$

On peut aussi décrire le gain à l'aide de l'ouverture efficace de l'antenne $A_{\text{eff.}} = \mathcal{O}_{\text{eff.}} A_{\text{antenne}}$ avec $0 \leq \mathcal{O}_{\text{eff.}} \leq 1$ et où A_{antenne} est l'ouverture physique de l'antenne :

$$G_t(\theta_a, \theta_e) = G_t = \frac{4\pi A_{\text{eff.}}}{\lambda^2} \quad (2.5)$$

λ est la longueur d'onde de l'onde EM émise par le radar qui délivre une puissance P_t (t pour "transmise") avec un gain G_t qui se propage dans une sphère de rayon R représentant la distance entre le radar et la cible. On écrit alors la densité de puissance p_{dt} sur une sphère de surface $4\pi R^2$ par :

$$p_{dt} = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2} \quad (2.6)$$

L'onde EM se propage avant d'être réfléchié par un objet qui renvoie le rayonnement dans toutes les directions. Le profil du rayonnement réfléchi par l'objet est décrit par la Section

Équivalente Radar (SER). C'est l'équation du radar qui définit la SER d'un objet qui dépend de la nature, de la forme, de la taille et de l'orientation de celui-ci. La SER est donc décrite par le rapport (2.7) de la puissance réfléchie P_r sur la densité de puissance émise p_{dt} .

$$\sigma = \frac{P_r}{p_{dt}} \quad (2.7)$$

Nous revenons plus en détails sur la SER dans la section 2.1.4. Dans la formule (2.7), la SER s'exprime en m^2 . Du point de vue du radar et en considérant l'ouverture de l'antenne réceptrice, on observe une puissance renvoyée :

$$P_r = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2} \cdot \frac{\sigma}{4\pi R^2} \cdot A_{\text{eff.}} = \frac{P_t G_t \sigma A_{\text{eff.}}}{(4\pi R^2)^2} \quad (2.8)$$

En reprenant le gain d'émission G_t de l'équation (2.5) et en le supposant égal au gain de réception $G_t = G_r = G, \forall(\theta_a, \theta_e)$, nous obtenons la puissance P_r pour le récepteur du radar de la figure 2.1.

$$P_r = \frac{P_t G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} \quad (2.9)$$

Ce qui nous permet de définir une portée maximale en accord avec la puissance renvoyée minimale $P_{r, \min}$ détectable par le radar :

$$R_{\max} = \left(\frac{P_t G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 P_{r, \min}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.10)$$

Notons que les équations (2.9), (2.10) ne prennent pas en compte ni les sources de bruit issus du système radar ni les phénomènes de dissipation et de perturbation causés par la propagation dans l'atmosphère. On réécrit l'expression avec un terme supplémentaire :

$$P_r = \frac{P_t G^2 \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} F_p \quad (2.11)$$

Où F_p est le facteur de propagation qui prend en compte tous les phénomènes liés à la propagation [5].

Il y a 2 paramètres importants pour l'émission radar dans l'atmosphère : la longueur d'onde d'émission λ et le facteur de propagation F_p . Nous discutons des 2 paramètres ci-dessous.

2.1.3 Propagation d'une onde radar dans l'atmosphère

La propagation d'une onde radar dans l'atmosphère dépend de la fréquence d'émission f et des phénomènes de propagation inclus dans le facteur F_p . Néanmoins, nous ne faisons pas une étude physique rigoureuse de tous ces phénomènes parce que cela sort du cadre de travail défini. Nous sélectionnons les éléments utiles pour la partie propagation du radar quantique.

Le choix de la fréquence d'émission $f = c/\lambda$ revêt une grande importance en rapport aux molécules présentes (N_2 , O_2 , CO_2 , H_2O , etc.) dans l'atmosphère et à leur spectre d'absorption [36]. L'importance de la fréquence d'émission est représentée par l'illustration du spectre d'absorption en figure 2.2 où les longueurs d'onde les moins atténuées correspondent au domaine radio de l'ordre du Gigahertz. Plus précisément, la région d'intérêt

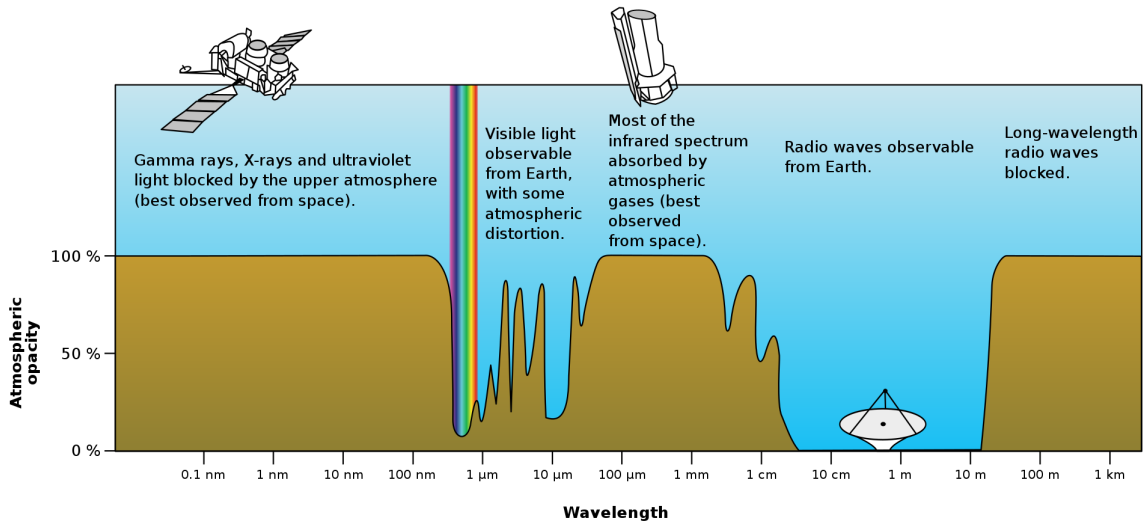


FIGURE 2.2 – Illustration du spectre d'absorption de l'atmosphère sur les longueurs d'onde de l'ordre du nanomètre au kilomètre [6].

pour le domaine radar est l'intervalle $I_{\text{micro-ondes}} = I_{\mu} = [400 \text{ kHz}, 400 \text{ GHz}]$ où l'atténuation est suffisamment faible pour que les ondes radar puissent se propager sur plusieurs dizaines de kilomètres. La sélection plus fine de la fréquence d'émission répond aux besoins du radar lié à sa fonction (détection, suivi de cibles, etc.). Sans entrer dans les détails, nous donnons dans le tableau 2.1 les bandes de fréquences utilisées pour le domaine radar. Dans l'idée où le radar quantique serait un radar militaire, la bande de fréquence d'intérêt est la bande X.

Nomenclature IEEE	Bandes de fréquences	Nomenclature OTAN	Bandes de fréquences
HF	3 - 30 MHz	A	0 - 250 MHz
VHF	30 - 300 MHz	B	250 - 500 MHz
UHF	0.3 - 1 GHz	C	500 - 1000 MHz
L	1 - 2 GHz	D	1 - 2 GHz
S	2 - 4 GHz	E	2 - 3 GHz
C	4 - 8 GHz	F	3 - 4 GHz
X	8 - 12 GHz	G	4 - 6 GHz
K _u	12 - 18 GHz	H	6 - 8 GHz
K	18 - 27 GHz	I	8 - 10 GHz
K _a	27 - 40 GHz	J	10 - 20 GHz
V	40 - 75 GHz	K	20 - 40 GHz
W	75 - 110 GHz

TABLEAU 2.1 – Bandes de fréquences radar d’après la nomenclature standard IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) et la nouvelle nomenclature de l’OTAN (Organisation du Traité de l’Atlantique Nord) d’après la référence [4].

Outre la fréquence d’émission, le facteur de propagation F_p possède un rôle primordial parce qu’il regroupe tous les phénomènes de perturbation sur la propagation de l’onde. On peut citer pour l’exemple les perturbations liées au clutter, à la rugosité du sol, aux réflexions parasites [5, 12].

Cependant, l’atmosphère joue un rôle d’ampleur lorsqu’on la considère dans son intégralité de l’altitude zéro jusqu’à la frontière spatiale aux alentours de 100 km d’altitude. On décompose habituellement l’atmosphère en 4 couches en partant de la plus basse : troposphère, stratosphère, mésosphère et thermosphère. Leurs paramètres environnementaux diffèrent entre-elles (densité volumique de particules, température, humidité, pression, molécules présentes) ce qui provoque des variations de l’indice de réfraction en fonction de l’altitude. Les variations de l’indice de réfraction peuvent modifier la vitesse de groupe de l’onde, changer sa phase, effectuer une rotation de la polarisation. Les modèles numériques de propagation d’onde dans l’atmosphère fonctionnent sur la base de la prédiction de l’indice de réfraction en fonction des paramètres environnementaux considérés [5]. Néanmoins, ce qui nous intéresse dans le facteur de propagation F_p est l’atténuation de l’onde radar causée par les phénomènes d’absorption et de diffusion par les molécules du milieu. Cette atténuation témoigne des interactions entre l’onde EM et les molécules présentes dans le milieu atmosphérique (O_2 , H_2O , CO_2 , etc.).

En nous restreignant à la troposphère en supposant que l'indice de réfraction change peu avec l'altitude [5], le facteur de propagation se réduit à l'atténuation de l'onde $F_p \sim L_a$ (a pour "atténuation"). Cela est particulièrement important dans la mesure où une onde EM est un immense ensemble de photons dont l'absorption et la diffusion provoquent l'atténuation globale de la puissance de l'onde. Cette perte de puissance est en grande partie responsable de la portée effective du radar classique. Dans le cas du radar quantique, nous considérons des photons isolés ce qui complexifie la prise en charge de la propagation pour le radar quantique. Nous aurons recours à des approximations liées à l'atténuation classique qui dépend de la fréquence d'émission f [40–43].

Nous avons vu pour l'instant l'aspect de la propagation d'une onde radar classique. Nous revenons dans la section suivante sur l'influence de l'objet dans la théorie du radar.

2.1.4 Interaction signal-cible : la Section Équivalente Radar

Nous passons en revue les éléments principaux de la théorie de la SER et en donnons des exemples seulement pour des cibles à géométrie simple car la théorie de la Section Équivalente Radar Quantique (SERQ) n'a été développée pour l'instant qu'avec des géométries simples. Notre objectif est de poser un socle théorique pour la SER pour la comparer à la SERQ.

La Section Équivalente Radar (SER) désigne la manière pour un objet de renvoyer le rayonnement émis par un radar et elle est définie par l'équation du radar. Lorsqu'une onde incidente impacte un objet (la cible), cette onde est réfléchie dans toutes les directions et l'antenne réceptrice du radar capte une partie des ondes renvoyées. La SER d'une cible statique ou mobile désigne donc le renvoi de l'onde incidente par l'objet vers le radar et elle dépend des caractéristiques de la cible : la taille, la forme, la nature et l'orientation [4]. En conséquence, la SER est propre à un objet donné. Lors d'une détection radar, la comparaison entre l'onde émise et l'onde reçue (polarisation, phase, temps de propagation, amplitude) dans le cadre d'un traitement complexe du signal que nous n'abordons pas ici, peut donner des informations comme la taille, la forme, l'orientation, la nature, la position, la vitesse [5]. Par conséquent, connaître le profil de SER d'un objet (avion, humain, etc.) est utile pour l'identification de cibles en particulier dans un contexte militaire c'est pourquoi la prédiction analytique et numérique est très utile [5, 39]. Pour des cibles de formes complexes, on privilégie les méthodes de prédictions numériques tandis qu'il

est possible de trouver des formules analytiques pour des formes géométriques simples. Notons que jouer astucieusement sur la forme, la taille et la nature d'un objet permet de réduire son écho radar ce qui le rend plus difficile à détecter comme par exemple le bombardier furtif dans la photographie 1.1 du chapitre 1.

Lors d'une détection radar, l'objet renvoie l'onde incidente dans toutes les directions. La SER totale de la cible est donc $\sigma_R > \sigma_T = \sigma$. En nous plaçant par exemple dans un repère de coordonnées sphériques (r, θ, φ) pour une distance fixe radar-cible R , la SER σ_R va dépendre des angles d'azimut φ et d'élévation θ selon la formule [5] :

$$\sigma_R = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi_r=0}^{2\pi} \int_{\theta_r=0}^{\pi} \sigma_T(\theta_r, \varphi_r) \sin(\theta_r) d\theta_r d\varphi_r \quad (2.12)$$

Où (θ_r, φ_r) sont les angles de la direction de propagation des ondes réfléchies par la cible. En notant (θ_i, φ_i) les angles de la direction de propagation des ondes incidentes, on distingue le cas du radar monostatique du cas du radar bistatique en posant $(\theta_r = \theta_i, \varphi_r = \varphi_i)$ pour le radar monostatique.

La SER dépend également de la longueur d'onde d'émission λ_t par rapport à la dimension spatiale a_T de l'objet. Il existe deux régimes de fonctionnement principaux [5, 12]. Le premier est le régime de Rayleigh pour $\lambda_t \gg a_T$ et le second est le régime optique quand $\lambda_t \ll a_T$. Un radar opère dans le régime optique de manière à pouvoir distinguer la cible car la longueur d'onde est inférieure à l'extension spatiale de l'objet. Ajoutons que la SER dépend également de la polarisation de l'onde incidente comme nous allons le voir ci-dessous.

Pour illustrer les profils de SER classiques de formes géométriques simples, nous traçons les SER¹ pour un disque et une plaque rectangulaire en utilisant les modèles numériques du livre [5]. Une approche similaire est employée dans la section 2.2 avec la SERQ.

Dans la figure 2.3, nous avons la SER d'un disque d'un mètre de rayon en fonction de l'angle d'élévation θ . La SER ne dépend pas de l'angle d'azimut φ du fait de la symétrie centrale. Pour la plaque rectangulaire, nous obtenons la figure 2.4 où on a les SER de la plaque avec et sans prise en compte de la polarisation de l'onde incidente. Nous observons sur ces figures la même structure caractéristique en lobes de la SER en fonction

1. Les SER en dBsm sont calculées avec les codes MATLAB du livre [5]. En fait, nous calculons la SER $P(\text{dBsm}) = 10 \log_{10}(P_r/P_i)$ en fonction de l'angle d'incidence θ_i .

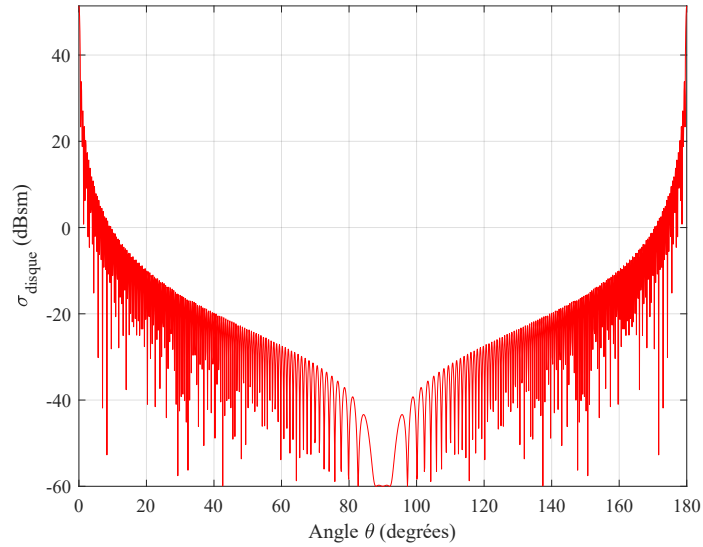


FIGURE 2.3 – SER d'un disque conducteur de rayon $r = 1$ mètre en fonction de l'angle d'incidence θ . Le disque est illuminé par une onde EM pour $f = 10$ GHz.

de l'angle d'incidence θ qui dépend de la différence d'ordre de grandeur de $\lambda_t < a_T$, sachant que nous nous trouvons dans le régime de fonctionnement optique. Sur la figure

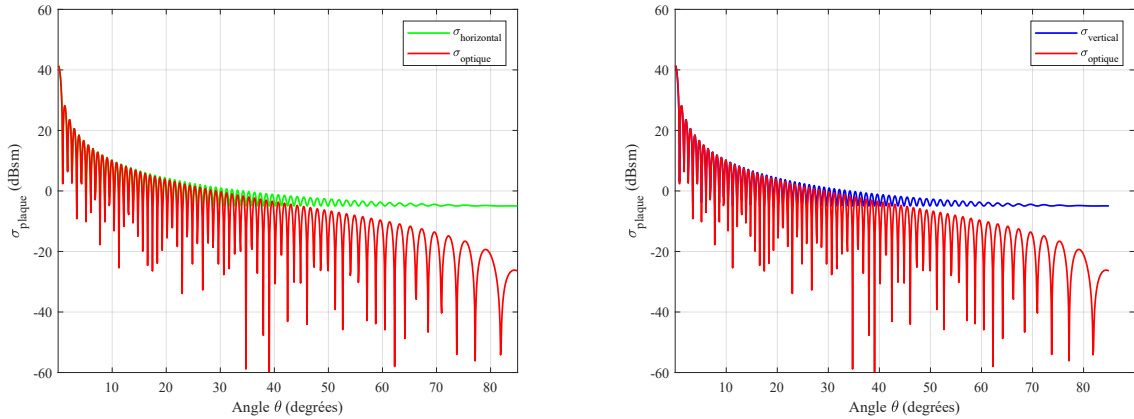


FIGURE 2.4 – (a) SER d'une plaque de dimension (1, 1) mètre en fonction de l'angle d'incidence θ . La plaque est illuminée par un signal radar à $f = 10$ GHz. La courbe verte tient compte de la polarisation horizontale de l'onde incidente tandis que la courbe rouge est indépendante de la polarisation. (b) SER d'une plaque de dimension (1, 1) mètre en fonction de l'angle d'incidence θ . La plaque est illuminée par un signal radar à $f = 10$ GHz. La courbe bleue tient compte de la polarisation verticale de l'onde incidente tandis que la courbe rouge est indépendante de la polarisation.

2.4, la courbe rouge est une approximation indépendante de la polarisation tandis que les courbes verte et bleue représentent respectivement une polarisation linéaire horizontale et verticale. On observe que l'approximation sur la polarisation ne fonctionne que pour des angles d'incidence $\theta \leq 20^\circ$ car au-delà, la SER avec polarisation est supérieure à celle sans polarisation. Sur la plaque, la SER dépend aussi de la dimension longueur-largeur par rapport à la polarisation incidente. Le profil de ces SER servent d'éléments de comparaison qualitatif par rapport aux SERQ de la section 2.2.

Nous avons repris les aspects principaux de la théorie de la SER en plus des autres éléments de la chaîne radar dans les sections précédentes. Nous faisons une synthèse de la théorie radar classique dans la section suivante.

2.1.5 Synthèse

L'idée de toute la section est de rappeler des notions essentielles de la théorie radar classique qui vont servir à dresser le parallèle avec le radar quantique dans la section 2.2.

Pour faire ce parallèle, nous avons rappelé les parties technologiques principales d'un radar conventionnel monostatique qui émet des impulsions dans un environnement atmosphérique ce qui nous a permis de poser une équation du radar généralisée. Cette équation du radar nous a amené à rappeler que le radar classique émet des ondes EM dont le comportement est régi par la théorie de l'électromagnétisme. Ces ondes EM se propagent dans l'atmosphère où elles subissent une atténuation en particulier à cause des molécules présentes dans le milieu traversé. Enfin, nous avons terminé en parlant de la SER qui décrit l'interaction de l'onde radar avec la cible.

En suivant le même schéma de pensée, nous allons établir le parallèle avec le radar IQ dans un cas particulier où le radar quantique émet seulement des photons qui se propagent dans l'atmosphère. Nous revenons alors sur les notions abordées lorsque c'est possible en soulignant les points de divergence entre la théorie du radar quantique et celle du radar conventionnel.

2.2 La théorie du radar quantique

Nous reprenons les étapes de la section précédente pour introduire le radar quantique en nous basant sur une chaîne radar. La section 2.2.1 donne une description générale du radar IQ émettant des paires de photons intriqués avant de passer à la description physique des photons émis par ce radar via la mécanique quantique dans la section 2.2.2. Après cette introduction, nous discutons des composants technologiques du radar quantique de manière succincte dans la section 2.2.3. Ensuite, les sections 2.2.4 et 2.2.5 sont respectivement consacrées à la théorie de la Section Équivalente Radar Quantique et à la modélisation de la propagation d'un photon dans l'atmosphère. À la fin, une synthèse des idées est donnée dans la section 2.2.6.

2.2.1 Le radar à illumination quantique

Lorsque nous parlons de radar quantique en prenant appui sur la figure 1.3 du chapitre 1, nous faisons référence au radar à interférométrie quantique (FQ) et au radar à illumination quantique (IQ). Ces 2 radars diffèrent principalement par la méthode de mesure mais ils permettent en théorie d'améliorer la sensibilité de détection de manière significative. Le radar FQ repose sur la mesure de la phase alors que le radar IQ repose sur la photo-détection.

Pour les différencier, on suppose qu'on émet des faisceaux de photons intriqués via des lasers. Le radar FQ peut être modélisé par un interféromètre de Mach-Zender constitué de 2 miroirs et de 2 séparateurs de faisceaux. Une des branches de l'interféromètre introduit un déphasage φ qui peut être évalué par la mesure de l'intensité qui correspond au nombre de photons à la fin des deux faisceaux. L'avantage quantique correspond à l'amélioration de la sensibilité de détection. En utilisant N photons intriqués, l'erreur statistique sur la mesure est proportionnelle à $1/N$ alors que pour N photons non intriqués, l'erreur statistique est proportionnelle à $1/\sqrt{N}$. Le radar FQ repose sur la mesure de la phase entre les photons intriqués. Ce radar quantique dépend des pertes de photons dans l'atmosphère ce qui limite ses performances à des régimes de fonctionnement avec un fort rapport signal-sur-bruit. De plus, le contexte radar suppose d'utiliser des fréquences de l'ordre du micro-onde or la technologie pour l'émission des états micro-ondes n'est actuellement pas bien maîtrisée [44].

Le radar IQ utilise la photo-détection sur des paires de photons intriqués en effectuant une mesure jointe sur les deux photons. Contrairement au radar FQ, c'est dans un régime

à faible rapport signal-sur-bruit que le radar IQ donne un avantage quantique sur la sensibilité de détection [2, 10, 25]. Le point intéressant que nous rappelons plus tard est que l'avantage quantique semble se conserver malgré la perte de l'intrication initiale entre les 2 photons qui est sensible aux perturbations dans l'environnement. Dans cette thèse, nous étudions seulement le radar IQ du point de vue de la théorie de l'information quantique en nous focalisant sur les paires individuelles de photons intriqués. Notons au passage que la comparaison entre un radar quantique et un radar classique est très délicate c'est pourquoi il est plus juste et plus prudent d'établir des parallèles entre les 2 théories.

Plonger dans la théorie du radar IQ implique deux différences fondamentales par rapport à un radar conventionnel. D'abord, nous avons une différence d'énergie : un radar IQ émet des photons $E = \hbar\omega$ qui sont des quanta d'énergie et non des ondes EM. Un radar moderne émet une onde de forte puissance de l'ordre de 10 kW à une fréquence de l'ordre du micro-onde $I_\mu = [400 \text{ kHz}, 400 \text{ GHz}]$ pour compenser les pertes par atténuation dans l'atmosphère. Pour un radar IQ, les puissances en jeu sont plus faibles. Pour l'illustrer, nous commençons par prendre un photon optique et un photon micro-onde. Par exemple, un photon optique de longueur d'onde $\lambda = 640 \text{ nm}$ donc une fréquence de l'ordre de $f = 4.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ a une énergie 10^4 fois plus grande que celle d'un photon micro-onde de 10 GHz. En conservant ces 2 fréquences, nous supposons que le radar IQ utilise un laser pour émettre les photons. Pour un laser standard d'une puissance moyenne de 1 W à une fréquence optique $f = 4.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ avec une fréquence de répétition de 100 MHz, nous avons un flux d'environ 3.2×10^{10} photons/impulsion ce qui est déjà un nombre immense quand on souhaite étudier des photons un à un. En conservant le même flux pour des photons micro-ondes de 10 GHz, nous obtenons un laser d'une puissance moyenne d'environ $21 \mu\text{W}$ ce qui est très faible comparé au laser optique et davantage par rapport à l'émission d'un radar conventionnel.

L'autre différence est l'utilisation de la mécanique quantique requise pour décrire l'état des paires de photons intriqués parce qu'il n'est pas possible de décrire l'intrication quantique en utilisant la théorie classique des ondes EM. L'intrication quantique joue un rôle fondamentale dans le radar IQ car elle est à l'origine du gain en sensibilité de détection dont nous avons déjà discuté. Ce phénomène purement quantique est détaillé dans le chapitre 4. Pour le moment, nous donnons une image du phénomène ci-dessous.

L'intrication quantique est une des caractéristiques les plus importantes de la mécanique

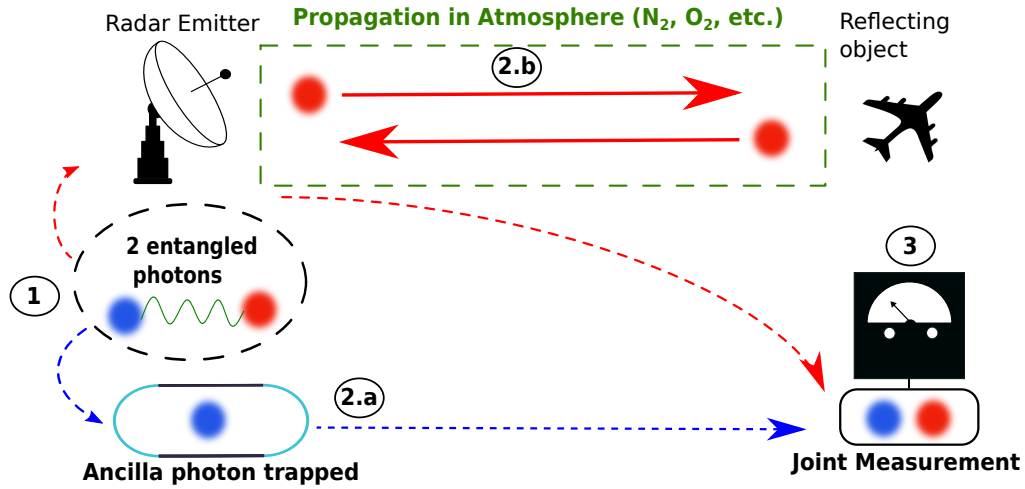


FIGURE 2.5 – Processus de détection du radar à illumination quantique en trois étapes : émission, propagation, réception [7].

quantique qui ne possède pas d'équivalent en physique classique [17, 20, 38]. Elle résulte des corrélations EPR², c'est-à-dire des corrélations non-classiques, qui existent entre deux systèmes quantiques A et B liant leurs états quantiques Φ_A et Φ_B quelle que soit la distance qui les sépare. L'état intriqué Φ_{AB} implique que si une mesure est appliquée sur un système A (B), l'état de l'autre système B (A) s'en trouve instantanément modifié même si la distance séparant A de B est supérieure à celle de la vitesse de l'information, c'est-à-dire supérieure à la vitesse de la lumière c . Ainsi, pour un état totalement intriqué, la connaissance du résultat de la mesure de l'état de A (B) implique la connaissance du résultat de la mesure de l'état de B (A). Cela met en évidence la présence de ces corrélations non-classiques qui lient les deux parties du système AB. Cet exemple met aussi en avant le rôle fondamental de la mesure en mécanique quantique [15].

Le radar IQ repose sur le fait que les photons utilisés sont initialement dans un état intriqué ce qui améliore les performances de détection. Nous utilisons la figure 2.5 pour décrire le schéma de fonctionnement du radar IQ à l'aide de la littérature dédiée à ce sujet [3, 10, 25]. Le processus du radar IQ se décompose en 3 étapes sur le modèle de l'équation du radar classique : émission, propagation, réception ; où nous incluons dans la phase de propagation, la réflexion sur la cible. Ces étapes sont détaillées ci-dessous en représentant le photon A (pour "ancilla" en latin) en bleu et le photon S (pour "signal" en anglais) en rouge.

2. Einstein-Podolsky-Rosen.

Étape 1 : Phase d'émission

Cette étape consiste à créer une paire de photons intriqués AS selon un état quantique souhaité. L'intrication quantique peut se faire sur les différents niveaux de liberté du photon : polarisation, niveaux énergie, moment angulaire orbital³. L'état selon lequel est créé l'intrication quantique conditionne la méthode de détection que l'on sélectionne lors de l'étape de réception, autrement dit les appareils de mesure nécessaires.

Étape 2 : Phase de propagation

Elle se divise en 2 sous-étapes qui ont lieu en parallèle et qui doivent être synchronisées pour réussir une mesure jointe dans l'étape 3.

Étape 2.a : Stockage du photon de "référence" A

Le photon A est stocké dans le système radar et doit être préservé de toute perturbation. Un tel stockage se fait grâce à une mémoire quantique qui préserve le photon et son état quantique. Le photon A est alors supposé, ni perturbé, ni diffusé dans cette mémoire quantique et il ne doit subir aucune mesure en l'absence du photon S qui pourrait perturber son état. La durée du stockage doit correspondre au temps d'aller-retour du photon S.

Étape 2.b : Transmission et propagation du photon "signal" S

Cela consiste à émettre le photon S dans un environnement, comme l'atmosphère ou le vide. Dans le vide, le photon S n'est pas perturbé tandis que dans l'atmosphère, en supposant qu'il n'est ni absorbé ni diffusé entre le radar et la cible, il va interagir avec les molécules du milieu ce qui va perturber son état quantique. Le photon S est réfléchi par la cible avec une probabilité de réflexion $\eta \in [0, 1]$ et il peut potentiellement revenir dans le radar IQ. On suppose qu'il subit les mêmes interactions avec les molécules atmosphériques sur le retour.

Étape 3 : Réception et mesure jointe

Dans la mesure où le photon S n'est ni absorbé ni diffusé et qu'il retourne dans le radar, une mesure jointe est effectuée sur la paire de photons AS pour connaître son nouvel état quantique. À l'issue de cette mesure jointe, une décision est prise concernant la présence ou l'absence de la cible.

Les 3 étapes que nous venons de décrire doivent s'enchaîner un grand nombre de fois pour

3. Le degré de liberté choisi impacte la manière dont nous modélisons l'influence de la propagation du photon dans l'étape suivante.

	États cohérents	États intriqués
P(non absent)	$1 - b$	$1 - \frac{b}{d}$
P(non présent)	$(1 - b)(1 - \eta)$	$(1 - \frac{b}{d})(1 - \eta)$
P(oui absent)	b	$\frac{b}{d}$
P(oui présent)	$b(1 - \eta) + \eta$	$(1 - \eta)\frac{b}{d} + \eta$

TABLEAU 2.2 – Comparaison entre les probabilités conditionnelles sur une seule détection entre les états cohérents de la lumière et les états intriqués. Les résultats sont extraits de l'article de S. Lloyd [10]. Les probabilités conditionnelles du tableau sont obtenues par les mesures effectuées dans la phase de réception par rapport aux hypothèses formulées en amont sur la présence ou l'absence d'une cible de probabilité de réflexion η .

effectuer une détection radar pour plusieurs raisons. D'abord, parce que nous n'émettons que des photons isolés qui ont donc une probabilité non négligeable d'être détruits ou diffusés sur l'aller-retour ce qui interrompt notre chaîne radar. Ensuite, le résultat d'une mesure en mécanique quantique est aléatoire ce qui implique de reproduire un grand nombre de fois l'expérience afin d'obtenir une valeur moyenne sur l'ensemble des mesures. Pour une détection radar complète, on doit faire une succession des 3 étapes précédemment décrites. La méthode de décision sur la présence ou l'absence de la cible consiste en la discrimination des états quantiques à l'émission et à la réception que nous développons au chapitre 4. Dans l'article fondateur de S. Lloyd [10], nous avons repris dans le tableau 2.2 les probabilités conditionnelles sur un seul événement de détection. Dans ce tableau, η est la probabilité de réflexion du photon par la cible, $b = e^{\beta\hbar\omega}(e^{\beta\hbar\omega} - 1) \ll 1$ est le nombre moyen de photons thermiques par mode et d est le nombre de modes intriqués. Ces modes sont des états d'énergie thermique qui correspondent aux probabilités d'occupation des photons sur les états de Fock où un état de Fock désigne un état quantique dont le nombre d'occupation est bien défini. On observe que ces probabilités d'erreur de détection sont diminuées par le nombre de modes intriqués d initial. Le point surprenant avec le radar IQ est que l'avantage quantique sur la sensibilité est maintenue même quand l'intrication quantique initiale a disparu. Comme nous l'avons écrit dans le chapitre 1, nous étudions le radar IQ avec la théorie de l'information quantique pour essayer de comprendre le rôle des corrélations quantiques dans le fonctionnement du radar IQ.

Nous avons vu que le radar IQ émet des photons intriqués à la différence d'un radar classique émettant des ondes EM [3]. Pour l'instant, nous avons donné une description générale du protocole IQ seulement pour continuer, nous devons différencier le photon de

l'onde EM en utilisant le formalisme mathématique de la mécanique quantique.

2.2.2 Description physique du radar quantique : photons vs. ondes EM

En physique classique, la lumière est décrite par une onde EM classique composée d'une multitude de photons cohérents. Pour donner une description quantique à la lumière, nous devons la quantifier en partant du formalisme des ondes classiques. Le processus de quantification du champ EM consiste à passer d'une description de l'onde EM classique continue à une description de l'onde EM quantique en prenant les photons comme briques de base.

Le radar IQ est né parce que les technologies pour créer l'intrication quantique ont récemment évolué [25]. De manière générale, l'attrait des technologies quantiques pour les sciences de l'information reposant sur l'intrication nourrit ce développement. Ces technologies reposent sur la théorie de l'optique quantique qui diffère de l'optique semi-classique parce que dans cette dernière la matière est quantifiée mais pas la lumière qui est décrite par une onde classique. Dans l'optique quantique, la matière et la lumière sont quantifiées. L'optique semi-classique permet de décrire des phénomènes tels que l'effet photo-électrique, la conduction des métaux et l'émission stimulée qui a d'ailleurs conduit à l'invention des lasers. En revanche, elle ne pouvait pas expliquer l'émission spontanée et les propriétés intrinsèques du photon notamment sur la photo-détection, simple ou double contrairement à l'optique quantique [22, 45, 46]. Enfin, l'adoption de ce formalisme permet d'exprimer un photon dans un formalisme quantique où il est possible de décrire des systèmes intriqués de 2 photons ou plus.

Le processus de quantification du champ EM utilise la fonction de Hamilton de l'onde classique pour introduire la quantification de l'énergie [22, 45]. Pour commencer le processus, nous commençons par reprendre des éléments de physique classique. En mécanique classique, un système est décrit par un Lagrangien $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ qui dépend des coordonnées généralisées $q_j(t)$ et des vitesses généralisées $\dot{q}_j(t)$. On définit via le Lagrangien le moment conjugué à $q_j(t)$ qui est $p_j(t) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$. Les couples $(q_j(t), p_j(t))$ sont les variables dynamiques fondamentales du système qui décrivent sa dynamique. Les grandeurs physiques du système s'expriment en fonction de ce couple de variables dynamiques. Pour décrire

l'énergie totale d'un système, on utilise la fonction de Hamilton $H(q_j, p_j, t)$ dérivée du Lagrangien. Cette fonction dépend du couple de variables dynamiques avec les équations d'Hamilton qui décrivent la dynamique du système étudié :

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (2.13a)$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (2.13b)$$

Le but de la quantification canonique du champ EM est d'identifier les variables dynamiques du système qu'on appelle aussi des variables conjuguées canoniques pour obtenir la fonction de Hamilton de l'onde. Cette fonction de Hamilton H est ensuite transformée en un opérateur Hamiltonien \hat{H} du champ EM quantique en remplaçant les variables conjuguées canoniques (q_j, p_j) par des opérateurs (\hat{Q}_j, \hat{P}_j) décrivant les mêmes grandeurs physiques. Ces opérateurs possèdent des relations de commutation $[\hat{Q}_j, \hat{P}_l] = i\hbar\delta_{jl}$ où \hbar est la constante de Planck réduite et δ_{jl} est le symbole de Dirac. Nous discutons de ces relations de commutation plus loin.

L'objectif de la quantification canonique est de trouver l'expression du champ quantique du photon pour illustrer la différence entre les ondes EM classiques et les ondes EM quantiques. Pour cela, on procède en 3 étapes [22, 45]. D'abord, on identifie les variables conjuguées canoniques classiques. Ensuite, on exprime la fonction d'Hamilton H du champ en fonction des variables conjuguées canoniques. Enfin, on procède à la quantification pour obtenir un opérateur Hamiltonien \hat{H} .

On commence par considérer la propagation d'une onde plane monochromatique suivant l'axe (Ox) d'un repère cartésien (O, x, y, z) , en espace libre, sans courants ni charges. Cette situation correspond aux équations de Maxwell posées dans l'équation (2.1). La solution élémentaire des équations de Maxwell est un mode l du champ oscillant à une fréquence ω_l qui peut être décrit par un oscillateur harmonique à la même fréquence. Les expressions du champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et de l'induction magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ de l'onde plane sont :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l(t) e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} + \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} = \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l(0) e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega_l t)} + \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^*(0) e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega_l t)} \quad (2.14a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l}{\omega_l} \mathcal{E}_l(t) e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} + \frac{\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l}{\omega_l} \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} \quad (2.14b)$$

Où l'amplitude complexe du champ est $\mathcal{E}_l(t) = \mathcal{E}_l(0) \exp(-i\omega_l t)$ à la fréquence $\omega_l = ck_l$ décrit l'état du champ. Le mode $l : (\vec{\epsilon}_l, \vec{k}_l)$ du champ est décrit par le vecteur polarisation $\vec{\epsilon}_l$ et le vecteur d'onde \vec{k}_l . Dans l'exponentielle spatiale, le signe $-$ signifie que l'onde plane se propage suivant \vec{k}_l , le signe $+$ signifie que l'onde se propage contre \vec{k}_l . D'après les équations de Maxwell (2.1b), (2.1c), les vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre direct impliquant que $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ sont orthogonaux entre eux. La dynamique de l'onde EM dépend de l'amplitude complexe $\mathcal{E}_l(t)$ dont les dérivées en fonction du temps sont :

$$\frac{d\mathcal{E}_l(t)}{dt} = -i\omega_l \mathcal{E}_l(t) \quad (2.15a)$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_l(t)}{dt^2} = -\omega_l^2 \mathcal{E}_l(t) \quad (2.15b)$$

$\mathcal{E}_l(t)$ décrit la dynamique du champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et de l'induction magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ qu'on exprime grâce aux relations de Maxwell (2.1a), (2.1b) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = i\vec{k}_l \cdot \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}(t) e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} - i\vec{k}_l \cdot \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} \quad (2.16a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = i\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l(t) e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} - i\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} \quad (2.16b)$$

En utilisant les équations de Maxwell (2.1), on obtient alors l'induction magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en fonction de l'amplitude complexe $\mathcal{E}_l(t)$:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l \frac{1}{\omega_l^2} \frac{d\mathcal{E}_l(t)}{dt} e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} - i\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l \frac{1}{\omega_l^2} \frac{d\mathcal{E}_l^*(t)}{dt} e^{-i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} \quad (2.17)$$

Ce qui revient à retrouver au final les expressions de l'équation (2.14). L'amplitude $\mathcal{E}_l(t)$ joue un rôle important puisque notre objectif est de décrire un photon par la quantification du champ. Le photon représente alors un mode $l : (\vec{\epsilon}_l, \vec{k}_l)$ du champ ce qui nous permet de réécrire l'expression [45] :

$$\mathcal{E}_l(t) = i\mathcal{E}_l^{(1)} \alpha(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V_l}} \alpha(t) \quad (2.18)$$

La constante $\mathcal{E}_l^{(1)}$ est l'amplitude du photon de fréquence ω_l et possède la dimension d'un champ électrique. Il dépend du volume de quantification V_l du mode qui sert à quantifier l'énergie. Le nombre imaginaire i dans l'équation est arbitraire mais il est largement utilisé dans la littérature [22, 45, 47]. La dynamique du mode $l : (\vec{\epsilon}_l, \vec{k}_l)$ d'amplitude

complexe $\mathcal{E}_l(t)$ est désormais décrite par la fonction complexe $\alpha(t)$ décrivant la dynamique temporelle par : $d\alpha(t)/dt = -i\omega_l\alpha(t)$. Pour revenir au couple de variables dynamiques qui nous intéresse pour décrire la dynamique du champ, nous réarrangeons l'expression de $\alpha(t)$ en faisant apparaître une partie réelle et une partie imaginaire associées au module et à la phase que l'on note respectivement Q_l et P_l [45] :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (Q_l + iP_l) \quad (2.19a)$$

$$\alpha^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (Q_l - iP_l) \quad (2.19b)$$

Les variables conjuguées canoniques Q_l et P_l sont les quadratures du champ classique qu'on réécrit en fonction de $\alpha(t)$ et $\alpha^*(t)$:

$$Q_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)) \quad (2.20a)$$

$$P_l = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\alpha^*(t) - \alpha(t)) \quad (2.20b)$$

À ce stade, nous disposons des expressions de $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, $\mathcal{E}_l^{(1)}$ ainsi que Q_l , P_l en fonction de l'amplitude complexe $\alpha(t)$ du mode l . Nous utilisons ces grandeurs pour calculer l'énergie du mode l dans le volume de quantification V_l grâce à la fonction de Hamilton H_l . Le volume de quantification V_l où nous observons le mode du champ se présente sous la forme d'un cube de côté L arbitraire sur les directions $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ vérifiant les relations pour le mode l : $k_{lx}L = 2\pi n_{lx}$, $k_{ly}L = 2\pi n_{ly}$, $k_{lz}L = 2\pi n_{lz}$. Le volume V_l possède des conditions aux bords périodiques de sorte que si le champ se propage suivant x , on ait : $\vec{E}(0, 0, 0, t) = \vec{E}(L, 0, 0, t)$. En utilisant le volume de quantification V_l , nous exprimons la fonction de Hamilton du champ dans le mode l :

$$H_l = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_l} d^3r (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \epsilon_0 \int_{V_l} d^3r \vec{E}^2(\vec{r}, t) = 2\epsilon_0 V_l [\mathcal{E}^{(1)}]^2 |\alpha(t)|^2 \quad (2.21a)$$

$$= \hbar\omega_l |\alpha(t)|^2 \quad (2.21b)$$

$$= \frac{\omega_l}{2} (Q_l^2 + P_l^2) \quad (2.21c)$$

Nous obtenons alors la fonction de Hamilton H_l en fonction des quadratures Q_l et P_l .

Nous vérifions qu'elles respectent les relations de Hamilton (2.13) :

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \Rightarrow \frac{dQ_l}{dt} = \frac{\partial H_l}{\partial P_l} = \omega_l P_l \quad (2.22a)$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{dP_l}{dt} = -\frac{\partial H_l}{\partial Q_l} = -\omega_l Q_l \quad (2.22b)$$

Les résultats (2.22a) et (2.22b) montrent qu'elles décrivent bien la dynamique du système. Maintenant, pour décrire le champ quantique dans le mode l , nous remplaçons les variables dynamiques α et α^* respectivement par des opérateurs annihilation \hat{a}_l et création \hat{a}_l^\dagger qui s'expriment en fonction des opérateurs \hat{Q}_l et \hat{P}_l :

$$\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{Q}_l + i\hat{P}_l) \quad (2.23a)$$

$$\hat{a}_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{Q}_l - i\hat{P}_l) \quad (2.23b)$$

\hat{a}_l , \hat{a}_l^\dagger sont respectivement les opérateurs annihilation et création du mode l du champ. Les opérateurs \hat{a}_l , \hat{a}_l^\dagger agissent sur les états de Fock $\{|n\rangle\}_{n=0\dots N}$ qui représentent le nombre de photons occupant un état quantique. Ils permettent de définir l'opérateur nombre $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$ dans un état donné. Les opérateurs \hat{a}_l et \hat{a}_l^\dagger obéissent aux relations de commutation :

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger] = \delta_{ll'} \quad (2.24a)$$

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}] = [\hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_{l'}^\dagger] = 0 \quad (2.24b)$$

Où $\delta_{ll'}$ est le symbole de Dirac. En procédant à la quantification du champ, les variables conjuguées canoniques (Q_l, P_l) sont remplacées par les opérateurs hermitiens (\hat{Q}_l, \hat{P}_l) ce qui signifie qu'ils représentent des grandeurs physiques mesurables. À l'inverse, \hat{a}_l et \hat{a}_l^\dagger ne sont pas des opérateurs hermitiens donc ils ne représentent pas des grandeurs physiques. Ces types d'opérateurs sont expliqués plus en détails dans le chapitre 3. Les opérateurs \hat{Q}_l et \hat{P}_l obéissent aux relations de commutation :

$$[\hat{Q}_l, \hat{P}_{l'}] = i\hbar\delta_{ll'} \quad (2.25a)$$

$$[\hat{Q}_l, \hat{Q}_{l'}] = [\hat{P}_l, \hat{P}_{l'}] = 0 \quad (2.25b)$$

Ces relations traduisent la nature quantique du champ EM et donc du photon de fréquence

ω_l qui est un mode l du champ. Physiquement, \hat{Q}_l et \hat{P}_l sont des positions et moments généralisés mais ils ne commutent pas d'après (2.25a). Cela signifie qu'il existe une limite physique à la précision sur une mesure de l'un ou de l'autre qui se traduit par l'incertitude d'Heisenberg : $\Delta\hat{Q}_l\Delta\hat{P}_l \geq \hbar/2$ souvent reprise pour désigner l'incertitude sur la position et le moment d'une particule matérielle. Ces opérateurs \hat{Q}_l et \hat{P}_l peuvent être exprimés, comme pour les amplitudes complexes $\alpha(t)$ et $\alpha^*(t)$ avec les variables conjuguées (Q_l, P_l) , en fonction des opérateurs création-annihilation :

$$\hat{Q}_l = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger) \quad (2.26a)$$

$$\hat{P}_l = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}_l^\dagger - \hat{a}_l) \quad (2.26b)$$

Ce qui nous permet finalement d'écrire l'opérateur Hamiltonien \hat{H}_l représentant l'énergie du champ quantique dans le mode l :

$$\hat{H}_l = \frac{\omega_l}{2} (\hat{Q}_l^2 + \hat{P}_l^2) = \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (2.27)$$

La forme de l'Hamiltonien quantique \hat{H}_l correspond à celle d'un oscillateur harmonique de fréquence ω_l . Le facteur $\hbar\omega_l/2$ provient de l'état de vide quantique qui est un état non peuplé mais qui participe au bilan d'énergie. Il est alors possible de décrire l'énergie du champ EM quantique comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants $\hat{H} = \sum_l^{+\infty} \hat{H}_l$ autrement dit comme un ensemble de photons. Dans ce formalisme, un photon $\hbar\omega_l$ peut s'exprimer via l'opérateur champ électrique $\hat{E}(\vec{r}, t)$:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i\vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^{(1)} \hat{a}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega_l t)} - i\vec{\epsilon}_l \mathcal{E}_l^{(1)} \hat{a}_l^\dagger e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega_l t)} \quad (2.28)$$

Où on retrouve l'amplitude du photon $\mathcal{E}_l^{(1)}$, les opérateurs création-annihilation \hat{a}_l^\dagger et \hat{a}_l du mode l en fonction des exponentielles spatiotemporelles. La description quantique du photon a été possible en recourant au formalisme de la variable continue c'est-à-dire un formalisme avec des opérateurs \hat{Q}_l et \hat{P}_l dans un espace des phases continue or dans la suite de la thèse nous utilisons un formalisme standard discret de la mécanique quantique sous la forme de vecteurs décrivant des états quantiques. Ce formalisme est expliqué dans le chapitre 3.

Dans cette partie, nous avons exprimé un photon avec le formalisme de l'optique quantique comme un mode l du champ EM quantique. L'intérêt de l'explication est de formuler une description physique du photon pour pouvoir ensuite l'utiliser dans des systèmes intriqués. L'optique quantique a contribué à l'étude des photons, des propriétés de la lumière et de l'intrication [22, 47, 48]. Lorsque nous aborderons la théorie de l'information au chapitre 3, nous utiliserons un formalisme différent pour décrire les systèmes de photons. Dans l'hypothèse où un radar IQ puisse être construit, les éléments technologiques feront intervenir l'optique quantique. Dans la section suivante, nous identifions le rôle de ces éléments.

2.2.3 Éléments technologiques essentiels d'un radar IQ

Le radar IQ doit remplir le même objectif qu'un radar moderne classique à savoir détecter la présence d'un objet dans un environnement. Nous reprenons les 4 étapes de la chaîne du radar (émission, propagation, réflexion, réception) pour définir l'équation du radar quantique en tenant compte des spécificités du processus IQ. En parallèle, nous discutons des éléments technologiques du radar IQ à l'aide de la figure 2.6. Nous insistons sur le fait que parmi les technologies potentielles pour le radar quantique, certaines sont encore au stade du développement en laboratoire.

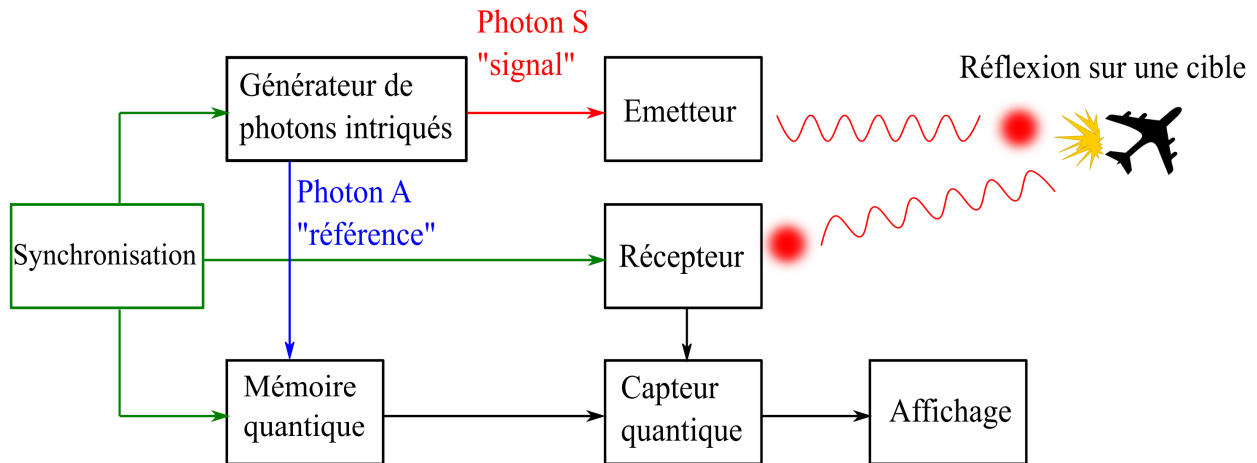


FIGURE 2.6 – Diagramme en blocs des parties technologiques essentielles à trouver dans un radar à illumination quantique émettant des photons intriqués.

Nous précisons que le radar IQ étudié utilise des paires de photons individuelles pour fonctionner ce qui est sensiblement différent d'émettre une onde ou bien un faible nombre

de photons. Le radar IQ n'émet qu'un photon dans l'environnement ce qui donne une équation du radar quantique sous la forme d'un bilan de probabilité P_r de retrouver le photon initial à contrario de l'équation radar classique qui est un bilan d'énergie entre l'onde reçue et l'onde émise. L'équation du radar IQ s'écrit :

$$P_r = P_p^2 \cdot \frac{\sigma_Q}{4\pi R^2} \cdot P_a \quad (2.29)$$

Les différents termes sont expliqués ci-dessous en reprenant les étapes du processus IQ vues en figure 2.5 avec la figure 2.6.

L'étape 1 du processus consiste à créer la paire de photons intriqués. Il existe plusieurs moyens techniques de le faire cités en annexe F. Nous pouvons par exemple utiliser des "quantum dots" qui sont des semi-conducteurs étudiés pour créer des paires de photons intriqués [49]. Les sources de photons intriqués émettaient majoritairement des photons de fréquence optique mais les progrès techniques récents ont permis de construire des sources de photons intriqués micro-ondes. Cependant, ces sources nécessitent de travailler à basse température de l'ordre de quelques degrés Kelvin impliquant des dispositifs de refroidissement onéreux.

L'étape 2 constituée des sous-étapes 2.a et 2.b consiste à séparer la paire de photons intriqués en émettant le photon S tout en gardant le photon A de référence dans une mémoire quantique. Une mémoire quantique est un dispositif qui préserve l'état quantique du photon A durant le temps de propagation du photon S de signal. De tels dispositifs font l'objet de recherches très actives dans le cadre du stockage de l'information pour les protocoles d'information quantique [50]. À l'heure actuelle, il n'existe pas de mémoire quantique viable pour le radar IQ dans le régime micro-onde.

Dans l'étape 2.b qui a lieu en parallèle de l'étape 2.a, le photon S de signal se propage jusqu'à la cible où il est réfléchi. Le photon S peut alors potentiellement revenir jusqu'au radar IQ. Sur la distance radar-cible R , le photon émis peut être absorbé ou diffusé par les molécules (N_2 , O_2 , etc.) présentes dans l'atmosphère impliquant la perte de l'information portée par le photon. Pour éviter cela, nous devons supposer que le photon S n'est ni absorbé ni diffusé en posant une probabilité P_p , élevée au carré pour prendre en compte l'aller-retour dans l'équation du radar. La réflexion du photon S sur l'objet est décrite par une SERQ, σ_Q , que nous détaillons dans la section 2.2.4 en supposant que le photon se propageait dans une sphère de surface $4\pi R^2$. Notons que la figure 2.6 souligne que l'émetteur et le récepteur sont deux dispositifs distincts.

Dans l'étape 3 et dans l'hypothèse où le photon S revient dans le radar IQ, une mesure jointe est effectuée sur les photons A et S à l'aide d'un capteur quantique. Dans l'équation du radar, nous ajoutons une probabilité P_a de détecter le photon S qui dépend de l'efficacité du capteur quantique par rapport à la fréquence d'émission. Il est en effet plus difficile de détecter des photons micro-ondes que des photons optiques car leur énergie est environ 10^4 fois plus faible. Actuellement, il existe peu de littérature à propos des capteurs quantiques micro-ondes contrairement aux capteurs dans le régime optique (voir annexe F). Pour effectuer la mesure jointe, le dispositif de synchronisation qui libère le photon A en même temps que le photon S reçu par le radar IQ doit être très précis ce qui représente une contrainte technique conséquente. Il est nécessaire de savoir le temps de stockage à l'avance, par conséquent de connaître la position de l'objet en amont.

En résumé, les principaux points bloquants technologiques sont la mémoire quantique et la réception/mesure pour faire la détection radar même si des progrès expérimentaux ont été faits récemment [25, 51].

2.2.4 Interaction photon-cible : la Section Équivalente Radar Quantique

Nous abordons ici le concept de la Section Équivalente Radar Quantique (SERQ⁴) qui est l'équivalent quantique de la SER discutée dans la section 2.1.4. Notre objectif est de résumer les points essentiels de la théorie de la SERQ dans la littérature actuelle [3, 52–58].

La théorie de la SERQ répond au même besoin que la SER mais le traitement est différent car les objets physiques utilisés sont différents (ondes \neq photons) impliquant des théories physiques différentes (électromagnétisme \neq physique quantique). La SERQ représente la manière dont un objet renvoie le photon émis par le radar quantique. Ce faisant, la définition de la SERQ notée σ_Q prend une forme générale analogue à la SER du point de

4. Ou en anglais, QRCS : Quantum Radar Cross Section.

vue du récepteur du radar quantique [3] :

$$\sigma_C = \lim_{R \rightarrow +\infty} 4\pi R^2 \frac{I_r}{I_i} \quad \text{Définition classique} \quad (2.30a)$$

$$\sigma_Q = \lim_{R \rightarrow +\infty} 4\pi R^2 \frac{\langle \hat{I}_r \rangle}{\langle \hat{I}_i \rangle} \quad \text{Définition quantique} \quad (2.30b)$$

Dans la définition classique (2.30a), I_i est l'intensité incidente du rayonnement et I_r l'intensité reçue par le radar. Nous considérons l'intensité provoquée par une onde classique ce qui sous-entend un lien de proportionnalité entre le champ EM classique et l'intensité : $|\vec{E}|^2 \propto I$. Dans la définition quantique (2.30b), nous considérons le rapport entre les espérances statistiques quantiques de l'intensité reçue $\langle \hat{I}_r \rangle$ et de l'intensité incidente $\langle \hat{I}_i \rangle$ obtenues grâce à un grand nombre de mesures effectuées dans les mêmes conditions [3, 55]. La théorie de la SER classique repose sur l'équation (2.30a) où une onde radar de forte puissance (quelques kilowatts) est réfléchiée sur un objet ce qui produit l'écho radar de cet objet [55]. La théorie de la SER quantique reprend cette idée dans l'équation (2.30b) seulement il y a un seul photon incident sur la surface de la cible qui est réfléchi. Le photon incident est en mesure de "voir" individuellement les atomes de la surface de l'objet et les interactions par absorption et diffusion vont dépendre de la nature des atomes et de la fréquence du photon.

Dans la littérature, il existe des travaux qui traitent de la SERQ [3, 52–55, 57]. Dans les références [3, 55], la théorie de la SERQ est construite à partir de la théorie quantique des champs pour traiter une interaction entre un photon incident et une surface. Cette surface est représentée comme un réseau ordonné d'atomes identiques ayant deux niveaux d'énergie, un niveau fondamental et un niveau excité. La SERQ est modélisée par la somme des interactions indépendantes entre le photon incident et l'ensemble des atomes du réseau à la surface de l'objet. Cela donne la formule générale [55] :

$$\sigma_Q = 4\pi A_{\perp} \frac{\left| \sum_{n=1}^N \left(\vec{d}_{ab}^{(n)} \cdot \vec{\epsilon}_{k,\sigma} \right) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_n} \right|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi_r d\theta_r \sin\theta_r \left| \sum_{n=1}^N \left(\vec{d}_{ab}^{(n)} \cdot \vec{\epsilon}_{k,\sigma} \right) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_n} \right|^2} \quad (2.31)$$

Dans cette formule, σ_Q est exprimée dans un repère sphérique (r, θ, φ) et A_{\perp} est la surface projetée de l'objet changeant par rapport à l'angle d'observation. Dans l'exponentielle complexe, nous retrouvons le produit scalaire entre la différence des vecteurs d'onde inci-

dent et réfléchi ($\vec{k}_i - \vec{k}_r$) et le vecteur position \vec{r}_n des n atomes ordonnés sur le réseau. Le terme au numérateur correspond à la somme au carré des réponses individuelles des atomes ordonnés sur le réseau par rapport à l'illumination du radar quantique où on a $\theta_i = \theta_r$, $\vec{k}_r = -\vec{k}_i$ dans une situation monostatique. Le terme au dénominateur est la somme au carré des contributions individuelles des atomes en prenant en compte tous les angles d'observation possibles dans une demi-sphère ($r, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Dans la formule (2.31), $\vec{\varepsilon}_{k,\sigma}$ est le vecteur polarisation du photon incident de vecteur d'onde $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$. Le vecteur \vec{d}_{ab} est le vecteur polarisation des n atomes de la surface de l'objet. Le produit scalaire $\vec{d}_{ab}^{(n)} \cdot \vec{\varepsilon}_{k,\sigma}$ prend en compte la polarisation commune des atomes de la surface et de celle du photon incident de spin⁵ σ . Pour cela, on suppose que les vecteurs polarisations de tous les atomes sont alignés dans la même direction ce qui n'est possible qu'en appliquant un champ électromagnétique à l'objet [53]. Dans un cas réaliste, les atomes de la surface ont une polarisation aléatoire ce qui induit la polarisation moyenne de la surface est $\langle \vec{d}_{\text{surface}} \rangle = \vec{0}$. Dans ce cas, la polarisation du photon incident a peu d'incidence sur la SERQ. Cependant, il a été montré pour des cibles à géométrie simple que le terme de polarisation $\vec{d}_{ab}^{(n)} \cdot \vec{\varepsilon}_{k,\sigma}$ pour des choix de polarisation linéaire \vec{d}_{ab} commune aux atomes du réseau a des effets conséquents sur la SERQ [53].

Pour illustrer la SERQ, nous présentons des simulations faites avec les formules provenant des références [52, 55] pour 2 types de cibles canoniques : une plaque rectangulaire et un disque, sans prendre en compte la polarisation des atomes. Dans la référence [55], nous avons la théorie de la SERQ et le développement en transformée de Fourier de cette théorie pour des cibles à géométrie simple ce qui permet d'obtenir des prédictions de SERQ calculables numériquement. Il faut noter cependant que cette théorie nécessite encore des améliorations pour prendre en compte la diffraction sur les bords des objets qui serait nécessaire pour passer aux prédictions de SERQ sur des cibles ayant des géométries complexes (avions, bateaux, etc.). Pour valider les prédictions de la SERQ, des expériences sont nécessaires [55].

En reprenant les résultats de l'article [52], nous traçons les SERQ pour les géométries sélectionnées dans les figures 2.7 et 2.8. Dans les deux figures, nous obtenons le même profil en lobes pour la SERQ similaire à celui de la SER mais qui est dû aux interactions individuelles du photon incident avec les atomes du réseau à la surface de l'objet. Sur la

5. Le spin est une propriété intrinsèque d'une particule (électron, photon, etc.) qui ne possède pas d'équivalent classique.

figure 2.7, nous avons la SER et la SERQ pour une plaque rectangulaire. Elles ont toutes les deux une allure similaire exceptée pour des angles d'élévation $\theta \geq 40^\circ$ où la SERQ devient plus grande que la SER. Sur la figure 2.8 où nous avons la SERQ et la SER pour un disque, nous faisons le même constat.

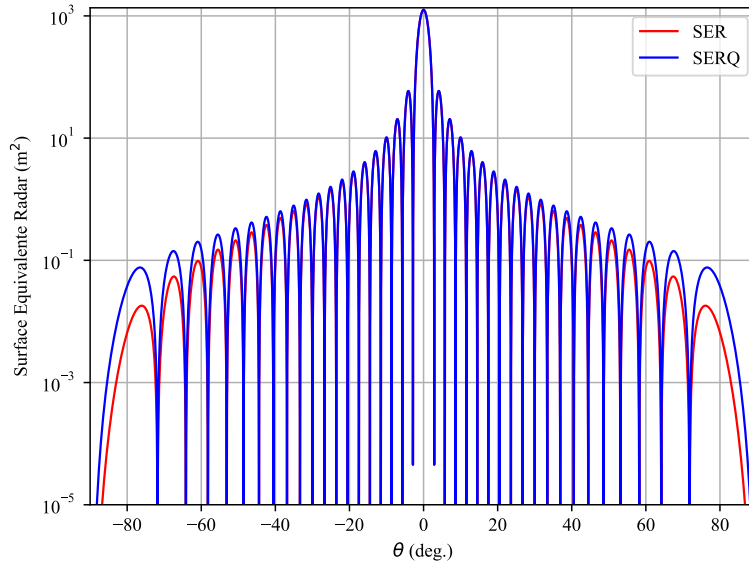


FIGURE 2.7 – SERQ et SER en fonction de l'angle d'incidence θ sur une plaque de dimension 1×1 m pour une fréquence $f = 3.0 \times 10^9$ Hz du photon incident.

Du point de vue de la théorie de l'information quantique, la SERQ ne donne pas de renseignement sur l'évolution de l'information quantique avant et après l'interaction avec l'objet parce qu'il s'agit d'une étude géométrique avec la théorie quantique des champs reposant sur une interaction élastique entre le photon et les atomes de la surface de la cible. Comme cette théorie repose sur l'absorption et la réémission du photon S, l'intrication entre A et S devrait être détruite de même que la plupart des corrélations quantiques [55]. La théorie de la SERQ nous donne une probabilité de capter le photon réfléchi par l'objet mais cela n'apporte pas d'information notable concernant l'évolution de l'intrication et des corrélations quantiques lorsque le photon S interagit avec l'objet tandis que le photon A est piégé dans le radar IQ. En l'absence d'information à ce sujet, nous faisons une hypothèse simplificatrice. Nous considérons que les objets se comportent comme des miroirs avec une probabilité non nulle de renvoyer le photon incident vers le radar sans altérer

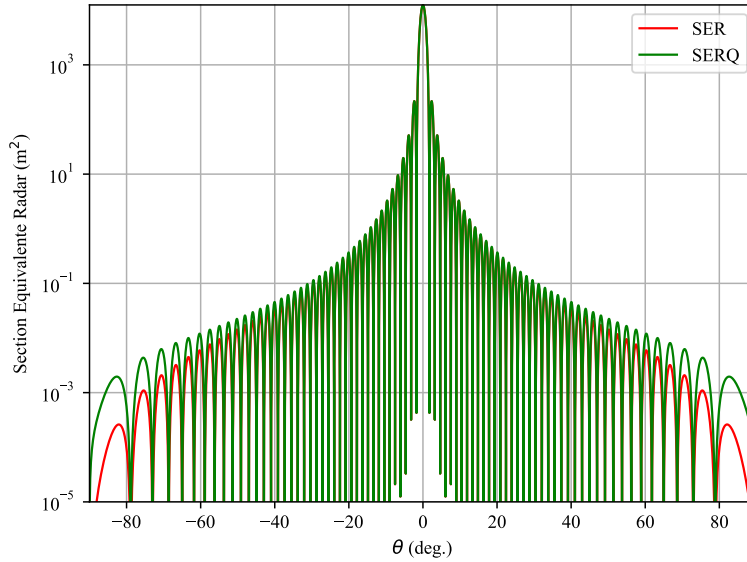


FIGURE 2.8 – SERQ et SER en fonction de l’angle d’incidence θ sur un disque de rayon $r = 1$ m pour une fréquence $f = 3.0 \times 10^9$ Hz du photon incident.

l’état quantique du photon.

Nous avons donné dans cette section un aperçu global de la SERQ développée à l’heure actuelle reposant sur des considérations géométriques sur des formes simples. Elle n’apporte pas de vision sur l’évolution de l’information quantique pour l’étude du radar IQ. Dans la suite, nous nous intéressons à la propagation du photon émis dans l’atmosphère.

2.2.5 Interaction photon-environnement de propagation

En théorie du radar classique, l’onde EM émise par l’antenne directionnelle du radar subit une atténuation dans le milieu de propagation c’est-à-dire dans l’atmosphère. De plus, comme l’onde se propage dans toutes les directions, son front d’onde s’étend et donc la densité d’énergie par unité de surface diminue. Comme nous l’avons évoqué pour établir l’équation du radar classique, l’atténuation dans l’atmosphère provient de l’absorption et de la diffusion de l’onde. En se référant à une onde EM classique, les perturbations applicables à l’onde le sont aussi aux photons pris individuellement. Du point de vue du radar IQ, la question est de savoir si le photon de signal émis est récupéré à la fin. Or même s’il est récupéré, le photon interagit avec les molécules présentes dans l’atmosphère

provoquant une évolution de son état quantique. Nous discutons des interactions possibles pour le photon émis dans l'atmosphère.

Tout d'abord, nous avons une *perturbation destructive* dont le résultat est la perte du photon émis ce qui constitue le lien direct avec l'atténuation pour le radar classique. Ce cas de figure arrive lorsque le photon transmis est diffusé ou bien absorbé par une molécule atmosphérique. Si le photon est absorbé, il est définitivement perdu. Si le photon est diffusé, il se propage dans une direction aléatoire et il n'est plus disponible dans le cadre du processus de détection du radar IQ. Il est donc considéré comme perdu d'autant plus qu'il est potentiellement absorbé après sa diffusion.

En second, nous avons une *perturbation non-destructive* avec les molécules du milieu sous la forme d'un couplage entre le photon et l'environnement de propagation ce qui modifie l'état quantique du photon. En conséquence, cette modification se répercute sur l'état quantique intriqué des deux photons A et S utilisés dans le processus IQ à cause des corrélations quantiques qui existent entre les deux photons.

Dans la théorie du radar quantique où nous considérons le cas d'une paire de photons, nous devons considérer les deux types de perturbation dans la phase de propagation pour établir la détection radar du radar IQ. En revanche, pour adopter une approche par la théorie de l'information, nous devons supposer que le photon émis ne puisse pas être absorbé ni diffusé. S'il l'était, nous perdriions toute l'information transportée par ce photon et nous n'aurions évidemment plus une paire de photons intriqués. Nous devons donc étudier la perturbation que subit le photon qui se propage dans un milieu donné sans que ce photon puisse disparaître. Pour modéliser l'interaction photon-environnement, nous avons 3 possibilités dans la littérature : l'électrodynamique quantique, les équations maîtresses et les canaux quantiques [21, 47, 59]. Nous discutons de manière succincte sans formalisme des avantages et inconvénients pour chacune de ces méthodes pour justifier notre choix de modèle.

L'électrodynamique quantique (QED⁶) consiste à développer une approche par la théorie des champs quantiques pour décrire la propagation du photon dans un milieu [59]. Le principe est de calculer des intégrales de chemin pour le photon dans l'espace ce qui permet de déterminer ensuite une trajectoire "classique" modélisant ainsi la propagation. Cette théorie est certes complète dans la description physique du photon mais elle est aussi

6. Quantum Electro-Dynamics, en anglais.

très complexe à mettre en oeuvre. Étant donné que notre approche s'axe sur la théorie de l'information, nous souhaitons éviter de trop développer l'aspect "propagation", c'est pourquoi nous avons renoncé à utiliser la QED.

Les équations maîtresses reposent sur l'équation de Shrödinger et plus particulièrement sur l'équation de Liouville-Von Neumann qui décrivent l'évolution d'un système quantique en fonction du temps [47]. Ce type de modèle repose sur une approche phénoménologique où nous décrivons un Hamiltonien quantique d'interaction entre le photon et son environnement. Nous revenons sur cette approche dans le chapitre 4. Cette théorie est aussi complexe à mettre en oeuvre à cause de l'Hamiltonien d'interaction qui doit refléter le couplage entre les systèmes photon-atmosphère. Nous avons étudié cette approche pour regarder dans quel cadre nous pourrions l'utiliser. Cependant, à la vue de la difficulté que cela représente pour un photon dans l'atmosphère, nous avons préféré mettre cette méthode de modélisation de côté.

Les canaux quantiques sont des outils très utilisés en théorie de l'information quantique [20, 21, 37]. Ils reposent sur un formalisme d'opérateurs appliqués à des systèmes quantiques. Le canal quantique permet de faire évoluer statistiquement l'état quantique d'un système en définissant l'action qui va le modifier. Cette méthode de modélisation propose une description physique moins précise que les deux précédentes mais elle peut toutefois être paramétrée. De ce fait, elle constitue une solution pertinente de modélisation pour la phase de propagation, directement tirée de la théorie de l'information quantique. Pour cette raison, notre choix s'est porté sur le canal quantique comme outil privilégié de modélisation pour la propagation.

Nous venons de discuter de la phase de propagation du photon émis par le radar IQ dans l'atmosphère en citant nos options de modèle. Dans la section suivante, nous donnons une synthèse des éléments vus sur le radar IQ.

2.2.6 Synthèse

L'objectif du chapitre 2 a été d'établir un parallèle entre le radar classique et le radar quantique sur le modèle de l'équation du radar classique. Nous avons commencé la section 2.2 par une description générale du radar IQ émettant des paires de photons intriqués. Ensuite, nous avons regardé les aspects du fonctionnement du radar IQ, de l'interaction d'un photon avec un objet et de la propagation des photons dans l'atmosphère en sachant que nous étudierons le radar IQ par la théorie de l'information quantique.

Nous avons d'abord synthétisé le fonctionnement du radar IQ utilisant des paires de photons pour ensuite aborder la description physique des photons. Pour différencier l'onde classique du photon, nous avons repris la quantification canonique d'une onde EM classique pour décrire le photon comme étant un mode du champ EM quantique. Ce passage classique-quantique permet de décrire l'état quantique d'un photon et de décrire des systèmes intriqués indispensables pour le radar IQ. Ensuite, nous nous sommes intéressés au rôle des éléments technologiques susceptibles d'intervenir dans un radar IQ à l'aide d'un diagramme en blocs simplifié. À la différence du radar classique, il faut ajouter un dispositif pour créer une paire de photons intriqués, une mémoire quantique pour stocker le photon de référence, un capteur quantique adapté à la mesure jointe sur les photons intriqués. Il faut donc des dispositifs de pointe qui n'en sont encore qu'au stade du laboratoire et non au stade industriel. De plus, contrairement au radar classique il n'est pas nécessaire d'avoir une antenne pour émettre les photons par contre les dispositifs d'émission et de réception sont distincts l'un de l'autre. Dans ce système radar, un des points critiques est la mémoire quantique à synchroniser avec la réception pour la mesure jointe. Dans la section 2.2.4, nous avons discuté des principaux aspects de l'interaction du photon avec un objet en résumant les connaissances actuelles sur la théorie de la SERQ [3, 55]. Nous avons observé que les SER et les SERQ présentent des profils similaires mais ils ne proviennent pas des mêmes processus d'interaction avec la surface de l'objet. Du point de vue de la théorie de l'information quantique, la SERQ n'apporte que peu de renseignements de l'influence de la réflexion sur l'évolution de l'information quantique. Enfin dans la section 2.2.5, nous avons abordé la modélisation de la phase de propagation qui joue un rôle prépondérant dans l'évolution des états quantiques et donc dans l'évolution de l'information quantique parce qu'elle est presque obligatoirement à l'origine de la perte de l'intrication quantique initiale. Nous avons discuté de 3 modèles possibles (QED, équations maîtresses, canaux quantiques) en éliminant d'emblée la QED dans le cadre de ce travail de recherche ce qui nous a conduit à considérer en priorité les canaux quantiques comme outil privilégié de modélisation.

À travers ce chapitre, nous avons effectué un parallèle entre un radar conventionnel et un radar IQ nous donnant un socle de base pour l'étude du radar IQ par la théorie de l'information quantique. Nous faisons une introduction de cette théorie dans le chapitre suivant.

LA THÉORIE DE L'INFORMATION DANS UN CONTEXTE RADAR

Sommaire du chapitre

3.1	Éléments de la théorie de l'information classique	59
3.1.1	La notion d'information	60
3.1.2	Le canal classique en TIC	64
3.2	Éléments de la théorie de l'information quantique	68
3.2.1	Le formalisme de la mécanique quantique	68
3.2.2	L'entropie de Von Neumann	75
3.3	Synthèse	77

Ce chapitre est une introduction à la théorie de l'information quantique (TIQ) en commençant par une présentation succincte de la théorie de l'information classique (TIC) [14]. La section 3.1 expose des concepts fondamentaux de la théorie de l'information qui interviennent pour les transmissions d'information dans un cadre classique. Ensuite, la section 3.2 reprend ces concepts fondamentaux dans un cadre quantique pour introduire les notions théoriques nécessaires à l'usage des outils propres à la TIQ dans le chapitre 4.

3.1 Éléments de la théorie de l'information classique

Nous avons vu dans le chapitre 2 que le radar s'inscrit dans toute une chaîne radar en 4 phases (émission, propagation, réflexion, réception) avec pour 1^{er} objectif de détecter une cible. On représente la situation du radar par un canal de propagation qui véhicule une information dépendant du milieu considéré : la cible est-elle présente ? Le même raisonnement est applicable au radar quantique. Le radar quantique et le radar classique se décrivent avec des théories physiques différentes mettant en jeu des concepts physiques différents. La TIC est adaptée au radar conventionnel mais nous devons nous adapter

pour le radar quantique et utiliser la TIQ.

Nous commençons par reprendre des concepts fondamentaux de la TIC selon 2 axes pour ensuite passer à la TIQ. Dans la section 3.1.1, nous discutons de l'information transmise entre un émetteur nommé Alice qui envoie un message codé à un destinataire nommé Bob à travers un canal de transmission sans bruit, nous permettant ainsi d'introduire la notion d'entropie. Puis dans la section 3.1.2, nous introduisons la notion de canal d'information qui incorpore du bruit entravant la transmission d'une information entre Alice et Bob. Suite à cela, nous verrons que les notions abordées ici se retrouvent dans la TIQ sous un autre formalisme [20, 21, 37].

3.1.1 La notion d'information

La théorie de l'information est un sujet vaste qui désigne essentiellement l'étude de la transmission et de la manipulation d'une information entre un émetteur (Alice) et un destinataire (Bob) [14]. Cette information est liée au système physique sur lequel on travaille. L'information d'un système désigne le nombre de questions qu'on doit poser au système pour lever l'incertitude sur son état [60]. La mesure de l'incertitude sur un système et donc de l'information correspond à l'entropie de Shannon définie plus bas. Pour illustrer le concept d'information et d'entropie, nous allons regarder le cas de la transmission d'un message entre un émetteur et un récepteur.

Pour cela, nous allons imaginer un cas simple où Alice qui dispose d'une source d'information envoie un message codé à Bob. L'exemple sert à illustrer l'entropie d'une source d'information dont se sert Alice pour coder les messages transmis à Bob. Alice va essayer 2 manières d'encoder 2 messages différents et nous allons calculer la longueur moyenne du message en bits classique "0" et "1" pour déterminer lequel des encodages est le plus performant c'est-à-dire celui qui minimise le nombre de bits à envoyer pour transcrire le message.

Alice dispose d'une source d'information produisant des bits "0" et "1" à mettre en relation avec un alphabet de 6 lettres $\mathcal{X} = \{a, e, f, h, l, o\}$. Quand Alice utilise la source pour produire une lettre, on note $x \in \mathcal{X}$ les réalisations associées à la distribution de probabilités sur la variable aléatoire X qui sont répertoriées dans le tableau 3.1. Les lettres de l'alphabet \mathcal{X} n'ont pas la même probabilité d'apparition. Certaines sont plus susceptibles d'être produites par la source d'information que d'autres ce qui a un impact sur la manière optimale d'encoder un message. Nous classons par ordre décroissant les probabilités

Symbole $x \in \mathcal{X}$	a	e	f	h	l	o
$P(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$

TABLEAU 3.1 – Alphabet de lettres x associé à la variable aléatoire X de la source d'information.

d'apparition des lettres $x \in \mathcal{X}$:

$$P(a) > P(o) > P(e) > P(f) = P(h) > P(l) \quad \text{tel que} \quad \sum_i P_i = 1 \quad (3.1)$$

Pour cet exemple, Alice utilise les encodages n°1 et n°2 des 6 symboles de l'alphabet \mathcal{X} dans le tableau 3.2 pour composer les messages *hello* et *halo*. Il faut remarquer que l'encodage n°1 utilise toujours 6 bits "0" et "1" pour coder un seul symbole alors que l'encodage n°2 utilise moins de bits pour coder un symbole ayant une plus forte probabilité d'apparaître (exemple : a avec 1 bit) qu'un autre symbole (exemple : b avec 5 bits). L'envoi du message se fait via les bits "0" et "1" en codant les lettres $x \in \mathcal{X}$ sur un schéma binaire respectant la probabilité d'apparition des symboles. Alice envoie les 2 messages codés en

Symbole $x \in \mathcal{X}$	a	e	f	h	l	o
Encodage n°1	000000	000001	000010	000100	001000	010000
Nombre de bits par symbole	6	6	6	6	6	6
Encodage n°2	0	100	1010	1001	01011	01
Nombre de bits par symbole	1	3	4	4	5	2

TABLEAU 3.2 – Encodages 1 et 2 des lettres $x \in \mathcal{X}$ en bits d'information. Le nombre de bits qui code un symbole est indiqué sous la succession des bits "0" et "1" qui code le symbole.

commençant par l'encodage n°1 :

$$\begin{aligned} \textit{hello} &\longrightarrow 000100 \ 000001 \ 001000 \ 001000 \ 010000 \\ \textit{halo} &\longrightarrow 000100 \ 000000 \ 001000 \ 010000 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Elle réitère l'expérience avec l'encodage n°2 :

$$\begin{aligned} \textit{hello} &\longrightarrow 1001 \ 100 \ 01011 \ 01011 \ 01 \\ \textit{halo} &\longrightarrow 1001 \ 0 \ 01011 \ 01 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bob connaît l'encodage de la source, il est donc capable de déchiffrer le message d'Alice.

On remarque que les longueurs des 2 messages codés sont différentes pour les 2 encodages avec les messages issus de l'encodage n°2 qui sont plus courts. Pour savoir qu'elle est l'encodage le plus performant c'est-à-dire celui où on utilise le moins de bits pour coder le message à Bob, on calcule les longueurs moyennes des mots codés en additionnant les produits des probabilités d'apparition de chaque symbole par le nombre de bits utilisés dans l'encodage pour ce symbole. On trouve pour l'encodage n°1 une longueur moyenne de 6 bits et pour l'encodage n°2 une longueur moyenne de $91/36 \approx 2.5$ bits. C'est donc l'encodage n°2 qui est le plus performant. En partant de cet exemple, on cherche à exprimer l'information associée à un symbole x particulier.

La mesure de cette information correspond à la mesure de la surprise de voir ce symbole x produit par la source selon la variable aléatoire X . Cette information notée $i(x)$ s'écrit avec une fonction logarithme [21] :

$$i(x) \equiv -\log(p_X(x)) \quad \text{où } x \in \{a, e, f, h, l, o\} \quad (3.4)$$

La base logarithmique dépend du nombre de bits différents ("0" et "1") donc pour ce cas-là : $\log_2(p_X(x)) = \ln(p_X(x))/\ln(2)$. En considérant l'ensemble des probabilités d'apparition des symboles avec leurs informations respectives, on définit l'entropie de la source d'information que l'on nomme plus généralement l'entropie de Shannon.

Définition 3.1 (Entropie de Shannon). *L'entropie de Shannon pour une variable aléatoire discrète X dont les réalisations x de probabilité $p_X(x)$ appartiennent à un alphabet \mathcal{X} est définie par :*

$$H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log p_X(x) \quad (3.5)$$

Où les probabilités $p_X(x)$ sont telles que $\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) = 1$ donc $H(X) \geq 0$.

L'entropie de Shannon se définit également comme l'espérance de l'information de la variable aléatoire X telle que :

$$\mathbb{E}_X\{-\log(p_X(X))\} = H(X) \geq 0 \quad (3.6)$$

L'entropie de Shannon est une fonction concave qui mesure l'incertitude sur une distribution de probabilités. Pour l'illustrer, nous prenons l'exemple d'une variable aléatoire binaire $X_b = \{p, 1 - p\}$ dont l'entropie $H(p)$ est tracée dans la figure 3.1 montrant la concavité de $H(p)$ par rapport à p . Le maximum de l'entropie est atteinte pour $p = 1/2$

ce qui signifie que l'incertitude est maximale par rapport aux deux réalisations possibles de la variable X_b . À l'inverse, $H(p) = 0$ lorsque $p = 0$ ou $p = 1$. On est certain de connaître la réalisation de X_b donc le gain d'information est nulle. L'entropie de Shannon joue un

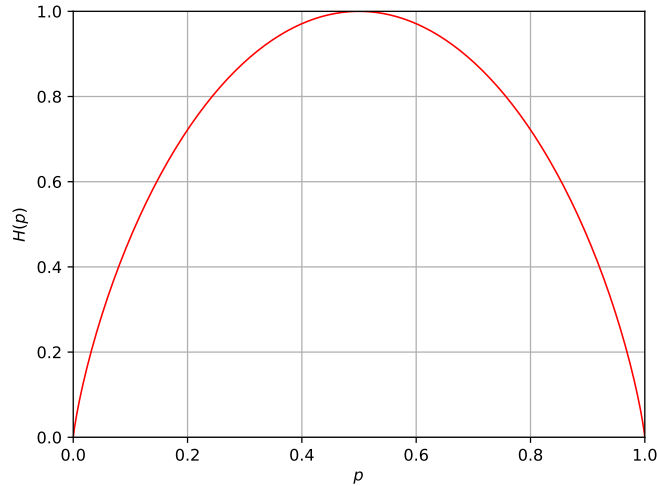


FIGURE 3.1 – Entropie binaire $H(p)$ pour une variable aléatoire $X_b = \{p, 1 - p\}$.

rôle fondamental en théorie de l'information classique dont elle constitue l'outil théorique de base.

Nous ajoutons à titre indicatif que l'entropie ne se retrouve pas qu'en théorie de l'information. En effet, la 1^{ère} définition de l'entropie vient de la thermodynamique et a été formulée par Ludwig Boltzmann. Il s'agit de l'entropie microcanonique d'un système physique à l'équilibre macroscopique comportant Ω micro-états différents. L'entropie de Boltzmann s'écrit :

$$S = k_B \ln(\Omega) \tag{3.7}$$

Où $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et Ω est le nombre de configurations possibles pour les micro-états du système. La définition de l'entropie de Shannon et celle de Von Neumann sont différentes. Il convient donc de faire attention lorsque nous parlons de l'entropie de manière générale. Dans cette thèse, la notion d'entropie est toujours liée à la définition de Shannon (3.1) ou à celle de son homologue quantique que nous verrons plus tard.

Nous avons vu que l'entropie de Shannon H est la notion fondamentale de la TIC. On

la retrouve à la base d'autres grandeurs importantes de cette théorie que nous nommons dans la section suivante, notamment lorsque notre champ d'action s'étend à plusieurs variables aléatoires co-dépendantes. Cela nous amène à parler des canaux de communication véhiculant une information entre un émetteur et un récepteur.

3.1.2 Le canal classique en TIC

Nous désignons par la notion de *canal*, le milieu et son influence sur une information véhiculée entre un émetteur et un récepteur. Le milieu n'est pas explicitement spécifié parce que c'est son action générale qui nous intéresse et comment le formalisme de la TIC permet de le décrire. On parlera indifféremment de *canal de transmission* et de *canal de communication*. Pour présenter le canal, nous reprenons le scénario où Alice souhaite communiquer avec Bob. Le cas présenté dans la section 3.1.1 suppose que le milieu qui sépare Alice de Bob est non-bruité. Cela signifie que la totalité des messages envoyés par Alice est réceptionnée par Bob sans altération. De fait, c'est un cas idéal qui n'arrive pas dans la réalité.

On considère maintenant que le milieu de transmission comporte un bruit qui altère l'information envoyée par Alice, Bob ne reçoit pas le message envoyé de manière fidèle. Le signal transmis par Alice est modélisé par une variable aléatoire X alors que le signal réceptionné par Bob suit une variable aléatoire Y qui dépend de X . Pour déterminer la capacité de Bob de retrouver le message de Alice après le passage dans le milieu, on définit alors une entropie conditionnelle $H(Y|X)$.

Définition 3.2 (Entropie conditionnelle). *Soient deux variables aléatoires X et Y associées respectivement à des alphabets \mathcal{X} et \mathcal{Y} . L'entropie conditionnelle entre les réalisations $y \in \mathcal{Y}$ conditionnées par les réalisations $x \in \mathcal{X}$ est définie par :*

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X = x) \quad (3.8a)$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log p(y|x) \quad (3.8b)$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(y|x) \quad (3.8c)$$

Où $p(x, y) = p(x)p(y|x)$ est la probabilité jointe des réalisations $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$.

Dans la TIC, l'entropie conditionnelle sert à caractériser un canal de transmission. En effet, si Alice est en entrée du canal et Bob est en sortie, les signaux en sortie vont dépendre de ce qui est envoyé en entrée. Autrement dit, les réalisations $y \in \mathcal{Y}$ pour Bob vont dépendre des réalisations $x \in \mathcal{X}$ d'Alice. De la même façon, nous définissons l'entropie jointe $H(X, Y)$ pour les variables X et Y .

Définition 3.3 (Entropie jointe). *L'entropie jointe entre deux variables aléatoires X et Y est définie par :*

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y) \quad (3.9)$$

L'entropie jointe décrit l'incertitude sur les réalisations jointes (x, y) par rapport au couple de variables aléatoires (X, Y) . Les définitions des entropies des équations (3.8) et (3.9) sont liées par la "règle de la chaîne".

Théorème 3.1 (Règle de la chaîne).

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3.10)$$

Cette règle se vérifie en développant l'entropie jointe sur les probabilités $p(x)$.

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y) \quad (3.11a)$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log [p(x) \cdot p(y|x)] \quad (3.11b)$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x) - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(y|x) \quad (3.11c)$$

$$= H(X) + H(Y|X) \quad (3.11d)$$

En faisant le même raisonnement sur $p(y)$, on obtient $H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y)$ par conséquent nous avons la relation suivante entre les variables aléatoires X, Y :

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3.12)$$

Avec $H(X|Y) \neq H(Y|X)$. La prise en compte de plusieurs variables aléatoires (X, Y, \dots) permet de décrire d'autres grandeurs directement liées aux entropies de Shannon.

Dans un scénario avec Alice et Bob qui disposent respectivement des variables aléatoires

X et Y , nous posons les définitions de *l'information mutuelle* pour la TIC en utilisant l'entropie relative entre deux distributions de probabilités pour une variable aléatoire X .

Définition 3.4 (Entropie relative). *Pour une variable aléatoire X comportant deux distributions de probabilité $p(x)$ et $q(x)$, l'entropie relative est définie par :*

$$D(p||q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) - p(x) \log q(x) \quad (3.13)$$

L'entropie relative tient le rôle d'une distance entre les distributions de probabilité $p(x)$ et $q(x)$. En utilisant la définition (3.4) pour deux variables aléatoires X et Y , on obtient *l'information mutuelle* entre ces deux variables.

Définition 3.5 (Information mutuelle). *Pour deux variables aléatoires X et Y , l'information mutuelle est définie par :*

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (3.14a)$$

$$= H(Y) - H(Y|X) \quad (3.14b)$$

La formule (3.14) se vérifie en utilisant l'entropie relative et la règle de Bayes $p(x, y) = p(x) p(y|x) = p(y) p(x|y)$ en ayant $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$:

$$I(X; Y) = D(p(x, y)||p(x).p(y)) \quad (3.15a)$$

$$= \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x).p(y)} \quad (3.15b)$$

$$= \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(y|x)}{p(y)} \quad (3.15c)$$

$$= - \sum_y p(y) \log p(y) + \sum_x \sum_y p(x, y) \log p(y|x) \quad (3.15d)$$

$$= H(Y) - H(Y|X) \quad (3.15e)$$

En faisant le même calcul suivant $p(x)$, on obtient : $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$. Ensuite, en utilisant le théorème (3.1) on obtient le théorème (3.2) où l'information mutuelle se décline sous deux formes équivalentes.

Théorème 3.2 (Information mutuelle, information conditionnelle). *Pour un couple de variables aléatoires (X, Y) , l'information mutuelle $I(X; Y)$ s'écrit de deux manières équivalentes :*

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3.16a)$$

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (3.16b)$$

Le théorème (3.2) est important parce qu'il établit le lien entre la définition conditionnelle et la définition jointe de l'information mutuelle. La figure 3.2 illustre les conséquences de ce théorème. Dans cette figure, le recouvrement des domaines $H(X)$ et $H(Y)$ permet de visualiser l'information mutuelle $I(X; Y)$. D'une part, l'information mutuelle est l'in-

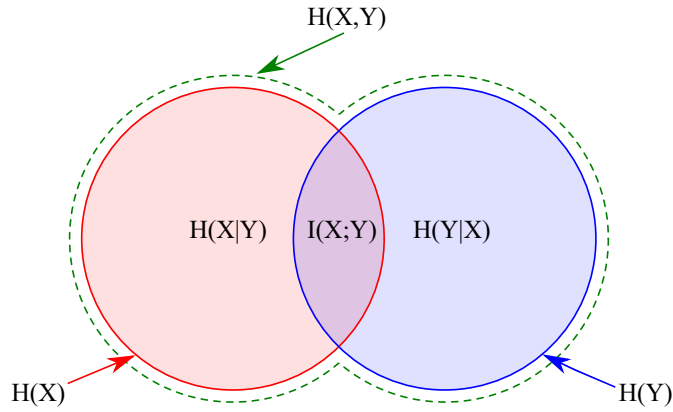


FIGURE 3.2 – Illustration des liens entre les entropies $H(X, Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ et l'information mutuelle $I(X; Y)$.

formation qui vérifie les réalisations sur (x, y) simultanément. D'autre part, la définition conditionnelle fait intervenir une condition entre les distributions de probabilité des variables aléatoires X et Y . En ce sens, les réalisations $x \in \mathcal{X}$ dépendent des réalisations $y \in \mathcal{Y}$ parce que la variable aléatoire X est corrélée à la variable aléatoire Y . La définition jointe fait intervenir les entropies $H(X)$ et $H(Y)$ et l'entropie jointe $H(X, Y)$. Cette dernière est l'entropie qui prend en compte à la fois les réalisations $x \in \mathcal{X}$ et les réalisations $y \in \mathcal{Y}$. Il existe des grandeurs analogues dans la TIQ mais nous verrons qu'elle propose aussi des notions inconnues en TIC et qui sont mises à profit dans la théorie du radar quantique. Ces notions concernent le type de corrélations qu'on observe et la définition de l'information mutuelle quantique par rapport à sa définition classique.

Nous avons rappelé ici les notions fondamentales de la TIC qui servent de socle de comparaison avec la TIQ. Il est primordial de connaître ces fondamentaux pour comprendre les différences entre la TIC et la TIQ mais aussi pourquoi cette dernière suscite un tel engouement depuis plusieurs années. Notons que nous abordons l'une et l'autre des théories de l'information dans un contexte radar où il n'est pas question de procéder à un encodage de l'information entre un émetteur et un récepteur comme on le ferait pour un système de communication.

3.2 Éléments de la théorie de l'information quantique

La théorie de l'information quantique (TIQ) est le prolongement de la théorie de l'information classique (TIC). L'objectif des deux théories est le même : offrir une description physique de l'information, de sa transmission et de sa manipulation. L'aspect fondamental qui différencie ces deux théories réside dans le cadre physique dans lequel on évolue. La TIC est réservée à des systèmes que l'on peut décrire efficacement par la physique classique (ondes EM, mécanique classique, électronique). De manière générale, les systèmes décrits sont à une échelle macroscopique et n'ont pas besoin d'une description quantique pour être utilisés. La TIQ se place dans la continuité de la TIC sauf que les systèmes considérés sont à l'échelle atomique de l'ordre de l'angström. Cela nous impose le recours à la mécanique quantique pour décrire le comportement des systèmes pour pouvoir les exploiter [20, 21, 37].

Nous reprenons ici des notions analogues à la section précédente. Nous présentons d'abord le formalisme de la mécanique quantique avant de définir les grandeurs fondamentales de la TIQ. Après avoir posé ce socle théorique nous discuterons des spécificités intrinsèques de la TIQ dans le chapitre 4.

3.2.1 Le formalisme de la mécanique quantique

La mécanique quantique est la théorie qui décrit le comportement des systèmes à l'échelle atomique et subatomique alors que la mécanique classique décrit efficacement les systèmes à l'échelle macroscopique. L'apparition de la mécanique quantique date du début du XX^{ème} par la volonté de décrire des phénomènes que la physique classique ne parvenait pas à expliquer (rayonnement du corps noir, effet-photoélectrique, raies d'absorption, etc.). Les concepts les plus importants de la mécanique quantique sont la quantification

des niveaux d'énergie et le principe de superposition. Nous proposons ici d'introduire le formalisme de la théorie quantique.

Considérons une particule matérielle quelconque dont on veut décrire l'état quantique. La mécanique quantique peut être utilisée sous deux formes équivalentes représentées dans l'équation (3.17). La 1^{ère} forme est la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ d'une particule présente à la position \vec{r} à l'instant t et la 2^{ème} forme est la notation de Dirac sous la forme d'un vecteur $|\Psi\rangle$ dans un espace vectoriel complexe \mathcal{H} [15, 18].

$$\Psi(\vec{r}, t) \in \mathcal{F} \longleftrightarrow |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \quad (3.17)$$

\mathcal{F} est un espace de fonctions et \mathcal{H} est un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe de dimension infinie disposant d'un produit scalaire et dans lequel est représenté l'état $|\Psi\rangle$ [20]. Cependant, nous allons considérer seulement des espaces de Hilbert de dimension finie. Les deux formalismes présentés sont équivalents mais la notation de Dirac est majoritairement utilisée du fait de son efficacité, c'est pourquoi nous l'utilisons dans la TIQ. Le formalisme de Dirac est le même pour décrire l'état de particules matérielles (électrons, atomes, etc.) et celui de photons.

Nous commençons par un cas général pour poser le formalisme et illustrer le principe de superposition. Imaginons un système A dans un état quantique $|\Psi\rangle_A$, son état quantique s'écrit par la superposition :

$$|\Psi\rangle_A = \sum_{i=1}^d \alpha_i |u_i\rangle_A = \alpha_1 |u_1\rangle_A + \alpha_2 |u_2\rangle_A + \cdots + \alpha_d |u_d\rangle_A \quad ; \quad |\Psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A \quad (3.18)$$

Où \mathcal{H}_A est un espace de Hilbert de dimension finie $d \geq 2$ dans lequel on décrit l'état quantique $|\Psi\rangle_A$. Cet état $|\Psi\rangle_A$ est défini par une superposition de vecteurs propres $\{|u_i\rangle_A\}$ représentant les états propres du système associés à une observable pour l'état quantique considéré. Nous expliquons plus loin ce qu'est une observable. Les vecteurs propres $\{|u_i\rangle_A\}$ forment une base orthonormée dans \mathcal{H}_A . Ils vérifient la relation $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$ où δ est le symbole de Dirac. Dans l'équation (3.18), les coefficients $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont appelés des *amplitudes de densité de probabilité* liées aux probabilités sur les états propres vérifiant la relation de normalisation des probabilités : $\sum_i |\alpha_i|^2 = \sum_i |\langle \alpha_i | \Psi \rangle|^2 = 1$. Notons que le vecteur d'état $|\Psi\rangle_A$ d'un système est défini à une phase près. Cela signifie que $|\Psi\rangle_A$ et

$|\Psi'\rangle_A = e^{i\varphi} |\Psi\rangle_A$ avec $\varphi \in [0, 2\pi]$ représentent le même état quantique accessible par la mesure car : $\langle \Psi' | \Psi' \rangle_A = \langle \Psi | \Psi \rangle_A$.

Nous avons vu la notation "ket" noté $|\cdot\rangle$. La notation complémentaire du "ket" est le "bra" noté $\langle \cdot |$ qui est le transposé conjugué du "ket". Par exemple, pour l'état quantique $|\Psi\rangle_A$, son transposé conjugué $(|\Psi\rangle_A)^*$ s'écrit :

$$(|\Psi\rangle_A)^* = \langle \Psi |_A = \sum_{i=1}^d \alpha_i^* \langle u_i |_A = \alpha_1^* \langle u_1 |_A + \alpha_2^* \langle u_2 |_A + \dots + \alpha_d^* \langle u_d |_A \quad ; \quad \langle \Psi |_A \in \mathcal{H}_A^* \quad (3.19)$$

Où \mathcal{H}_A^* est l'espace duale de \mathcal{H}_A . Les kets $|\cdot\rangle$ représentent des états physiques purs sur la base des états propres, ils sont représentés par un vecteur colonne. Les bras $\langle \cdot |$ ne représentent pas un état physique¹, ils sont représentés par un vecteur ligne.

$$|\Psi\rangle_A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)^T \quad (3.20a)$$

$$\langle \Psi |_A \equiv (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_d^*) \quad (3.20b)$$

En suivant cette notation, on définit le produit scalaire entre deux vecteurs $|\Psi\rangle_A$ et $|\Phi\rangle_B$ de même dimension $d = \dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B)$ par :

$$\langle \Phi |_B |\Psi\rangle_A = \langle \Phi | \Psi \rangle_{BA} = \left(\sum_{i=1}^d \beta_i^* \langle v_i |_B \right) \left(\sum_{j=1}^d \alpha_j |u_j\rangle_A \right) \quad (3.21a)$$

$$= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \beta_i^* \alpha_j \langle v_i | u_j \rangle_{BA} \quad (3.21b)$$

Où $\langle v_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$ est la relation d'orthonormalisation entre les vecteurs propres.

L'état quantique $|\Psi\rangle_A$ de l'équation (3.18) est nommé "qudit" parce que c'est un système qui possède d niveaux. Pour illustrer le lien entre la TIQ et la TIC, nous utilisons le cas particulier du "qubit" qui est un système à 2 niveaux aussi appelé "bit quantique". Les qubits sont très répandus parce qu'ils possèdent un lien direct avec la TIC. Supposons qu'on ait une base d'états propres quelconques que l'on note $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ auxquels on fait

1. Les bras notés $\langle \cdot |$ représentent des fonctionnelles linéaires qui sont appliquées aux kets et qui donnent un nombre complexe selon la notation "braket".

correspondre un bit classique "0" ou "1" :

$$0 \longrightarrow |0\rangle ; \quad 1 \longrightarrow |1\rangle \quad (3.22)$$

On définit alors le qubit $|\varphi\rangle$ par la superposition des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$:

$$|\varphi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle \quad (3.23)$$

Où $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$. Nous observons ici la différence entre les bits classiques et les bits quantiques. Les bits classiques, *cbits*, ne peuvent prendre qu'une seule valeur à la fois : "0" ou "1", tandis que les bits quantiques, *qubits*, sont des superpositions des deux bits classiques. En théorie, ils peuvent ainsi véhiculer plus d'information que les cbits. Cependant, si une mesure est effectuée sur $|\varphi\rangle$, nous n'obtiendrons qu'un seul des deux états propres : $|0\rangle$ avec une probabilité $|\alpha_0|^2$ et $|1\rangle$ avec une probabilité $|\alpha_1|^2$. À partir de l'équation (3.23), on peut obtenir n'importe quel état $|\varphi\rangle$ par la combinaison des nombres $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$. On peut représenter ces combinaisons sur une sphère de rayon unité appelée sphère de Bloch [20].

Comme en physique classique, l'état d'un système quantique peut évoluer. L'évolution de l'état quantique d'un système est décrit un opérateur linéaire qui représente l'action d'une fonction imposée à un état. Supposons qu'on ait un état $|\Psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ et un état $|\Psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$. Un opérateur linéaire \hat{A} est une application linéaire qui transforme l'état $|\Psi_1\rangle$ en $|\Psi_2\rangle$:

$$\hat{A} : |\Psi_1\rangle \rightarrow |\Psi_2\rangle \Leftrightarrow \hat{A} |\Psi_1\rangle = |\Psi_2\rangle ; \quad \hat{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \quad (3.24)$$

Où $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est l'ensemble des opérateurs linéaires allant de \mathcal{H}_1 à \mathcal{H}_2 . Si $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2)$ alors $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, on peut alors écrire $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. L'opérateur linéaire \hat{A} répond aux critères de linéarité. Ainsi, si on pose $|\Psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on obtient :

$$\hat{A} |\Psi\rangle = \hat{A}(\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) = \lambda_1 \hat{A} |\psi_1\rangle + \lambda_2 \hat{A} |\psi_2\rangle \quad (3.25)$$

L'ordre d'application de l'opérateur a une grande importance en particulier si plus d'un opérateur est appliqué. La représentation d'un opérateur est une matrice carrée. En posant les bases orthonormées $\{|u_i\rangle\}_{i=1..d_1}$, $\{|v_j\rangle\}_{j=1..d_2}$ pour les espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , on

obtient une matrice $\mathcal{M}_{d_1, d_2}(\mathbb{C})$:

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,d_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,d_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{d_1,1} & \cdots & a_{d_1,j} & \cdots & a_{d_1,d_2} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Où les éléments matriciels sont :

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \langle u_i | \hat{A} | v_j \rangle \quad (3.27)$$

La représentation de \hat{A} est propre à la base de vecteurs choisie mais la trace de l'opérateur $\text{Tr}\{\hat{A}\} = \sum_i \langle u_i | \hat{A} | v_i \rangle$ est indépendante du choix de la base.

Lorsqu'on considère plusieurs opérateurs, il faut faire attention à l'ordre d'application ainsi qu'aux relations entre eux. Supposons qu'on ait 2 opérateurs $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on définit leur relation de commutation par :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (3.28)$$

Si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, on dit qu'ils commutent ce qui revêt une grande importance lorsque les opérateurs désignent des grandeurs physiques accessibles par une mesure quantique.

En mécanique quantique, les opérateurs auto-adjoints sont appelés des opérateurs hermitiens. Ils sont notés $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ où le symbole \dagger désigne le transposée conjugué. Un opérateur hermitien \hat{A} est une observable c'est-à-dire qu'ils représente une grandeur physique mesurable (polarisation, énergie, etc.). Par exemple, un état quantique $|\Psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ est associé à l'observable \hat{A} via une équation aux valeurs propres :

$$\hat{A} |\Psi_i\rangle_A = a_i |\Psi_i\rangle_A \quad (3.29)$$

L'ensemble des valeurs propres $\{a_i\}_{i=1\dots d} \in \mathbb{R}$ sont associées aux vecteurs propres $|\Psi_i\rangle_A$ qui forment une base orthonormée vérifiant la relation de fermeture $\sum_i^d |\psi_i\rangle \langle \psi_i|_A = \hat{I}$ où \hat{I} est l'opérateur identité. Il arrive que certaines valeurs propres soient dégénérées c'est-à-dire qu'elles correspondent à plus d'un vecteur propre. L'ensemble des valeurs propres $\{a_i\}$ constituent le spectre de l'opérateur \hat{A} . Quand un appareil de mesure effectue une mesure

quantique sur le système A, on obtient une valeur a_i qui correspond à l'état $|\Psi_i\rangle_A$ dans lequel se trouve le système au moment de la mesure. En effectuant un grand nombre de mesures sur le système, on définit une valeur moyenne de l'observable : $\langle \hat{A} \rangle_\Psi = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$. Pour illustrer ce qu'est une observable, nous prenons l'exemple de l'opérateur Hamiltonien que nous avons déjà vu au chapitre 2. L'opérateur Hamiltonien \hat{H} représente l'ensemble des niveaux d'énergie de l'état d'un système quantique suivant l'équation aux valeurs propres : $\hat{H} |\Psi_i\rangle_A = \varepsilon_i |\Psi_i\rangle_A$ où $\{\varepsilon_i\}$ est l'ensemble des niveaux d'énergie du système.

En mécanique quantique, il y a 3 classes d'opérateurs particulièrement importantes à citer : les opérateurs unitaires \hat{U} , les projections \hat{P} et les opérateurs densité $\hat{\rho}$.

Les opérateurs unitaires $\hat{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ sont des opérateurs qui préservent la norme du vecteur d'état sur lequel ils sont appliqués [20]. Ces opérateurs vérifient les relations : $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}_{\mathcal{H}_1}$, $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}_{\mathcal{H}_2}$ où \hat{I} est l'opérateur identité. Lorsque nous avons $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \Rightarrow \hat{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on écrit $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$.

Les opérateurs de projection définissent l'action de projeter un état quelconque $|\Psi\rangle_A$ sur un autre état qui peut être par exemple un de ses états propres $\{|u_i\rangle\}$. Pour l'illustrer, prenons $|\Psi\rangle_A = \sum_{i=1}^d \alpha_i |u_i\rangle_A$ de l'équation (3.18). Sur cet état, nous appliquons l'opération de projection \hat{P}_{u_2} sur $|\Psi\rangle_A$ s'écrit :

$$\hat{P}_{u_2} |\Psi\rangle_A = \frac{|u_2\rangle \langle u_2|}{\sqrt{\| \langle u_2 | \Psi \rangle_A \|^2}} |\Psi\rangle_A \quad (3.30a)$$

$$= \frac{|u_2\rangle \langle u_2|}{\sqrt{\| \langle u_2 | \Psi \rangle_A \|^2}} (\alpha_1 |u_1\rangle_A + \alpha_2 |u_2\rangle_A + \dots + \alpha_d |u_d\rangle_A) \quad (3.30b)$$

$$= |u_2\rangle_A \quad (3.30c)$$

Où la normalisation de l'état final est effectuée avec $\sqrt{\| \langle u_i | \Psi \rangle_A \|^2}$. Les opérateurs de projection \hat{P} vérifient la relation $\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$ et ils sont positifs : $\hat{P} \geq 0$. Les projections sont associées au dernier type d'opérateur que nous présentons : la matrice densité [21].

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'état quantique est représenté un vecteur d'état qui représente un seul état quantique $|\Psi\rangle_A$. Dans ce cas, l'information accessible sur cet état est maximale, on dit que c'est un état pur. Cependant, dans la nature un état quantique ne peut généralement pas être représenté par un seul vecteur d'état. On doit alors faire des projections sur plusieurs états quantiques parce que nous ne connaissons pas l'état dans lequel se trouve le système. Nous nous trouvons alors dans un cas d'état mixte que l'on

représente par une matrice densité $\hat{\rho}$. La représentation de l'état mixte Ψ_A d'un système quantique A se fait via l'opérateur densité $\hat{\rho}_{\Psi_A}$.

Définition 3.6 (Opérateur densité). *L'opérateur densité, ou matrice densité, de l'état $\Psi_A \in \mathcal{H}_A$ d'un système A correspond à un ensemble d'états $\mathcal{E} \equiv \{p_i, |\psi_i\rangle_A\}$ défini par :*

$$\hat{\rho}_{\Psi_A} = \sum_{i=1}^d p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|_A \quad ; \quad \hat{\rho}_{\Psi_A} \in \mathcal{D}(\hat{H}_A) \quad (3.31)$$

Où $\mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$ est l'ensemble des opérateurs densité de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_A .

L'espace $\mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$ est tel que $\mathcal{D}(\mathcal{H}_A) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, et il peut être appelé l'espace des états du système A [20]. L'opérateur densité est très important parce qu'il contient toute l'information accessible de l'état quantique Ψ_A d'un système A liée à une observable. Par exemple, pour l'état $|\Psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ de l'équation (3.18) dans la base de vecteurs $\{|u_i\rangle_A\}$, nous obtenons la matrice densité suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\Psi_A} &= |\Psi\rangle \langle \Psi|_A = \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i |u_i\rangle_A \right) \left(\sum_{j=1}^d \alpha_j^* \langle u_j|_A \right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^* & \cdots & \alpha_1 \alpha_j^* & \cdots & \alpha_1 \alpha_d^* \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_i \alpha_1^* & \cdots & \alpha_i \alpha_j^* & \cdots & \alpha_i \alpha_d^* \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_d \alpha_1^* & \cdots & \alpha_d \alpha_j^* & \cdots & \alpha_d \alpha_d^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'opérateur densité décrit un ensemble d'états quantiques propres $\mathcal{E}_A \equiv \{|\alpha_i|^2, |u_i\rangle_A\}$. Les éléments diagonaux $|\alpha_i|^2$ sont les *probabilités d'occupation* des états propres $|u_i\rangle_A$ tandis que les éléments non-diagonaux sont les *termes d'interférences*. La matrice densité possède plusieurs propriétés que nous rappelons ci-dessous.

En considérant une matrice densité $\hat{\rho} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'un système quantique quelconque, nous avons les propriétés suivantes. La matrice densité est de *trace unité* : $\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \sum_i \langle u_i | \hat{\rho} | u_i \rangle = 1$. C'est une conséquence des projections sur l'ensemble des états propres dont la somme des probabilités associées doit être égale à 1. L'opérateur densité est hermitien, $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}^\dagger = \left(\sum_{i=1}^d p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right)^\dagger = \sum_{i=1}^d p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \hat{\rho} \quad (3.33)$$

Enfin, tout opérateur densité est positif : $\hat{\rho} \geq 0$.

Précédemment, nous avons vu qu'une observable était définie par rapport à une équation aux valeurs propres et que la mesure sur le système nous donnait les valeurs propres de l'observable. En notant l'observable \hat{O} pour une équation aux valeurs propres $\hat{O}|\Psi\rangle = \left(\sum_{i=1}^d \alpha_O^{(i)}\right)|\Psi\rangle$ où $|\Psi\rangle$ est un état quantique et d la dimension de l'espace de Hilbert dans lequel agit \hat{O} , on définit la moyenne de l'observable \hat{O} pour $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ par :

$$\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{O}\} = \sum_{i=1}^d \langle u_i | \hat{\rho} \hat{O} | u_i \rangle \quad (3.34)$$

La notion de valeur moyenne quantique $\langle \dots \rangle$ dans l'équation (3.34) correspond à une moyenne statistique sur un grand nombre de mesures effectuées. En effet, en mécanique quantique le résultat d'une mesure étant aléatoire, il faut répéter un grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions pour obtenir un résultat.

Dans cette section, nous avons introduit le formalisme de Dirac pour décrire les états quantiques purs par des vecteurs d'état, et mixtes par des opérateurs densité. L'opérateur densité d'un système est très important puisqu'il représente toute l'information accessible sur son état quantique. La TIQ utilise cette représentation pour donner une valeur quantifiable de l'information via l'entropie du système.

3.2.2 L'entropie de Von Neumann

L'entropie de Von Neumann est l'analogie quantique de l'entropie de Shannon. L'entropie de Shannon quantifie l'incertitude sur un ensemble $\mathcal{E}_c \equiv \{p_X(x), x\}$ pour une variable aléatoire X . L'entropie de Von Neumann s'applique sur un ensemble $\mathcal{E}_q \equiv \{p_X(x), |\psi_x\rangle\}$ où elle quantifie l'incertitude sur un état quantique représenté par une matrice densité $\hat{\rho} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs appliqués sur \mathcal{H} . Nous posons la définition (3.7) de cette entropie quantique [21].

Définition 3.7 (Entropie de Von Neumann). *L'entropie de Von Neumann d'un opérateur densité $\hat{\rho} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une mesure de l'incertitude sur un état quantique définie par :*

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}) = -\text{Tr}\{\hat{\rho} \log \hat{\rho}\} \quad (3.35)$$

La base du logarithme dépend la dimension d de l'espace de Hilbert \mathcal{H} dans lequel est défini

l'état quantique.

L'entropie de Von Neumann et l'entropie de Shannon sont analogues. Il est possible de retrouver l'entropie de Shannon à partir de celle de Von Neumann dans des cas particuliers. Pour l'illustrer, prenons l'exemple d'Alice et Bob qui possèdent chacun un qubit $\hat{\rho} = 1/2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ sur des états $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. L'opérateur densité $\hat{\rho}_{AB}$ du système AB des deux qubits est complètement mixte dans une base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ce qui correspond à un état classique. La matrice densité s'écrit :

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{\hat{I}_{AB}}{4} = \frac{1}{4} (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|) \quad (3.36)$$

En théorie de l'information classique, l'état $\hat{\rho}_{AB}$ correspondrait à un ensemble $\mathcal{E} \equiv \{p_X(x), x\}$ où la variable aléatoire est $X = \{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$ pour les réalisations $x = \{(0_A, 0_B), (0_A, 1_B), (1_A, 0_B), (1_A, 1_B)\}$. Le calcul de l'entropie de Von Neumann donne :

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AB}) = -\text{Tr}\{\hat{\rho}_{AB} \log \hat{\rho}_{AB}\} = -\frac{1}{4} \log_4 \left(\frac{1}{4} \right) \quad (3.37)$$

Le calcul de l'entropie de Shannon de la variable aléatoire X donne :

$$H(X) = -\sum_x p_X(x) \log_4(p_X(x)) = -\frac{1}{4} \log_4 \left(\frac{1}{4} \right) \quad (3.38)$$

Le logarithme est en base 4 parce qu'on considère 4 questions à poser par rapport aux réalisations possibles, une pour chacune des réalisations de x . Au final, dans cet exemple, on trouve $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AB}) = H(X)$ ce qui illustre l'équivalence des deux entropies. Dans cet exemple, nous pouvons réécrire l'entropie de Von Neumann : $\mathcal{S}(\hat{\rho}) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$ où les $\{\lambda_i\}$ sont les valeurs propres de la matrice densité $\hat{\rho}$.

L'entropie de Shannon H et l'entropie de Von Neumann \mathcal{S} possède des propriétés similaires [20, 37]. Nous exposons ici quelques-unes de ces propriétés pour un opérateur densité $\hat{\rho} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Les propriétés de l'entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho})$ sont :

1. L'entropie est positive : $\mathcal{S}(\hat{\rho}) \geq 0$. Il n'est pas possible d'avoir une incertitude négative sur un état quantique. Cette propriété vient de la positivité de l'entropie de Shannon.
2. La valeur minimale est : $\min[\mathcal{S}(\hat{\rho})] = 0$ et elle correspond à la matrice densité d'un état pur. En d'autres termes, nous avons une connaissance totale de l'état $\hat{\rho}$ dans

la base considérée.

3. La valeur maximale est $\max[\mathcal{S}(\hat{\rho})] = \log(d)$ où d est la dimension du système quantique. La valeur maximale de l'entropie de Von Neumann est atteinte pour un état complètement mixte. Ainsi, une mesure sur le système donne un résultat totalement aléatoire.
4. L'entropie de Von Neumann est additive : $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_A) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_B)$.
5. Pour un opérateur unitaire quelconque \hat{U} c'est-à-dire tel que $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}$, on a : $\mathcal{S}(\hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger) = \mathcal{S}(\hat{\rho})$.
6. L'entropie de Von Neumann est concave. Pour deux opérateurs densité $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ et $p \in [0, 1]$: $\mathcal{S}(p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2) \geq p\mathcal{S}(\hat{\rho}_1) + (1-p)\mathcal{S}(\hat{\rho}_2)$. On obtient une égalité si et seulement si $p = 0$ ou bien $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$.
7. L'entropie de Von Neumann est sous-additive : $\forall \hat{\rho}_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, on a : $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_B) \geq \mathcal{S}(\hat{\rho}_{AB})$. L'égalité est obtenue pour un état produit $\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$.

Ces propriétés sont importantes pour le chapitre 4 où nous abordons des thématiques centrales de la théorie de l'information quantique qui sont primordiales dans le contexte du radar quantique.

3.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue des fondamentaux de la TIC pour introduire la TIQ dans le contexte du radar IQ. Pour cela, nous avons introduit le formalisme de Dirac que nous avons précédemment utilisé dans le chapitre 2. Puis, nous avons défini l'entropie de Von Neumann $\mathcal{S}(\hat{\rho})$ qui est l'analogie quantique de l'entropie de Shannon H . L'entropie de Von Neumann \mathcal{S} nous permet de quantifier l'incertitude sur un état quantique $\hat{\rho}$ en rapport à la dimension de l'espace de Hilbert \mathcal{H} associé.

Dans le chapitre suivant, nous plongeons dans la TIQ pour présenter des concepts essentiels pour cette théorie et pour le radar quantique : l'intrication quantique et les corrélations quantiques au-delà de l'intrication.

OUTILS DE LA THÉORIE DE L'INFORMATION QUANTIQUE

Sommaire du chapitre

4.1	L'intrication	80
4.2	L'évolution des états quantiques	84
4.2.1	Les équations maîtresses	85
4.2.2	Les canaux quantiques	88
4.2.3	Synthèse	91
4.3	Les mesures d'intrication	91
4.4	Les corrélations quantiques au-delà de l'intrication	96
4.5	La théorie de la détection et de la décision	102
4.5.1	Généralités sur la théorie de la décision pour le radar quantique . .	102
4.5.2	Stratégie de décision binaire	105
4.6	Synthèse	106

Nous abordons ici les outils théoriques fondamentaux de la TIQ en commençant par une ressource primordiale : l'intrication quantique, dans la section 4.1. L'évolution de l'intrication découle de celle de l'état du système c'est pour cela que nous voyons comment modéliser l'évolution d'un système quantique dans la section 4.2. Pour suivre l'évolution de l'intrication, nous regardons les mesures d'intrication qui existent actuellement dans la section 4.3. Ensuite, dans la section 4.4, nous discutons de la présence des corrélations quantiques qui existent au-delà de l'intrication quantique et qui sont quantifiées par la discordance quantique. La section 4.5 aborde la théorie de la décision pour le radar quantique. Enfin, la section 4.6 fait une synthèse des éléments fondamentaux évoqués.

4.1 L'intrication

L'intrication est une des caractéristiques fondamentales de la mécanique quantique qui n'a aucun équivalent en physique classique. Pour décrire un tel phénomène, nous allons considérer un système de deux qubits que nous représentons sous la forme d'un état intriqué et sous la forme d'un état séparable, c'est-à-dire un état non-intriqué.

Supposons qu'Alice et Bob possèdent chacun un qubit sur une base de vecteurs propres $\{|0\rangle, |1\rangle\}_{i=A \text{ ou } B} \in \mathcal{H}_i$. La base des deux qubits A et B est $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}_{AB} \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ où \otimes désigne le produit tensoriel des espaces de Hilbert \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . Par définition, un état dit *séparable* peut être représenté comme un produit tensoriel des états des deux sous-systèmes qui le constituent. À l'inverse, un *état intriqué* des deux qubits est représenté par un vecteur d'état $|\Psi\rangle_{AB}$ qui ne peut pas être écrit sous la forme d'un produit tensoriel des états des sous-systèmes A et B. Par exemple, prenons un état intriqué :

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}) \quad (4.1)$$

Dans cette équation, on constate qu'il n'est effectivement pas possible de mettre l'état quantique $|\Psi\rangle_{AB}$ du système AB sous la forme d'un état produit de ses sous-systèmes : $|\Psi\rangle_{AB} \neq |\varphi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$. Si on utilise l'opérateur densité pour cet état, on obtient :

$$\hat{\rho}_{AB} = |\Psi\rangle \langle \Psi|_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Les matrices densité réduite $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$ des sous-systèmes sont obtenues en réalisant la trace partielle de $\hat{\rho}_{AB}$ sur le sous-système A et sur le sous-système B. Pour obtenir l'opérateur densité du système A, on écrit :

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B\{\hat{\rho}_{AB}\} = \sum_{j=0}^1 (\hat{I}_A \otimes \langle j|_B) \hat{\rho}_{AB} (\hat{I}_A \otimes |j\rangle_B) \quad (4.3a)$$

$$= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0|_A + |1\rangle \langle 1|_A) \quad (4.3b)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.3c)$$

Et pour obtenir l'opérateur densité du système B, on écrit :

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A\{\hat{\rho}_{AB}\} = \sum_{i=0}^1 \left(\langle i|_A \otimes \hat{I}_B \right) \hat{\rho}_{AB} \left(|i\rangle_A \otimes \hat{I}_B \right) \quad (4.4a)$$

$$= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0|_B + |1\rangle \langle 1|_B) \quad (4.4b)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.4c)$$

Où $\hat{I}_{i=A,B}$ désigne la matrice identité sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_i . On remarque qu'il n'est pas possible de mettre la matrice densité du système complet AB sous la forme d'un produit tensoriel : $\hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$. Un tel état produit donnerait l'état mixte (4.5) sur la base des 2 qubits considérés :

$$\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

L'état intriqué $|\Psi\rangle_{AB}$ est un état pur puisqu'on le représente sous la forme d'un vecteur d'état c'est-à-dire que nous connaissons le maximum d'information sur l'état du système AB. On peut le vérifier en calculant la pureté de la matrice densité $\hat{\rho}_{AB} = |\Psi\rangle \langle \Psi|_{AB}$: $P(\hat{\rho}_{AB}) = \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{AB})^2\} = 1$. À titre de comparaison, les matrices densités des sous-systèmes A et B sont des états complètement mixtes de la forme \hat{I}/d où $d = \dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$. En effet, le calcul de leur pureté donne $P(\hat{\rho}_A) = P(\hat{\rho}_B) = 1/2$.

L'état intriqué bipartite $|\Psi\rangle_{AB}$ n'a pas été choisi au hasard. Il s'agit de l'état singulet $|\Psi^-\rangle$ qui est l'un des quatre états intriqués de Bell : $\{|\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle\}$ représentées dans la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ par les vecteurs d'états :

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (4.6a)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (4.6b)$$

Ces 4 états intriqués forment une base de Bell et ils s'avèrent particulièrement utiles pour étudier les systèmes de qubits intriqués [17]. Les matrices densités correspondantes à ces

états sont :

$$\hat{\rho}_{\Psi^\pm} = |\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \pm\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7a)$$

$$\hat{\rho}_{\Phi^\pm} = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.7b)$$

La représentation en opérateur densité de l'état intriqué $|\Psi\rangle_{AB}$ dans l'équation (4.2) nous permet de souligner 3 points importants.

Le 1^{er} point est que la connaissance de l'état pur $|\Psi\rangle_{AB}$ implique qu'on a une incertitude maximale sur l'état des sous-systèmes (4.3) et (4.4) puisque ceux-ci sont complètement mixtes. Une mesure sur les états propres du système A ou du système B donnera un résultat totalement aléatoire.

Le 2^{ème} point est la présence des termes non-diagonaux dans l'équation (4.2) qu'on ne retrouve pas dans l'état complètement mixte (4.5). Ces termes non-diagonaux sont des termes d'interférences qui montrent la présence de corrélations quantiques fortes au sein du système AB. Ces corrélations sont dites quantiques car il n'existe aucune analogie pour l'intrication en physique classique.

Cela nous amène au 3^{ème} point qui concerne l'interdépendance des états $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$. Pour un état totalement intriqué comme dans l'équation (4.2), la mesure sur $\hat{\rho}_A$ implique la connaissance sur $\hat{\rho}_B$ et inversement. Cela découle directement de la définition de l'état intriqué $\hat{\rho}_{AB}$ ce qui marque une différence fondamentale avec la physique classique.

Une description classique complète d'un système AB entraîne la description complète des sous-systèmes A et B qui le composent. C'est une conséquence du fait que la description complète du système total n'est autre que la réunion des descriptions complètes des sous-systèmes. Cependant, en mécanique quantique, la description précise de l'état d'un système quantique n'implique pas forcément la connaissance parfaite des sous-systèmes comme en témoigne les équations (4.2), (4.3), (4.4).

Pour caractériser un état intriqué, il est possible de l'écrire sous une forme particulière : la décomposition de Schmidt. Supposons qu'on ait un état pur $|\Psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$,

il est possible de décomposer l'état sous la forme :

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i=0}^{d-1} q_i |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (4.8)$$

Où $\{|i\rangle_A\}$ est la base orthonormée du système A, $\{|i\rangle_B\}$ est la base orthonormée du système B et où les amplitudes réelles et positives $\{q_i\}$ sont les coefficients de Schmidt normalisés tels que $\sum_i q_i^2 = 1$. Les coefficients q_i forment un vecteur $[q_i]_{i=0,\dots,d-1}$ dont le nombre de coefficients non nuls correspond au rang de Schmidt d de l'état bipartite intriqué qui caractérise l'intrication du système considéré. Le rang de Schmidt vérifie la relation $d \leq \min[\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_B)]$. Cet outil permet de caractériser l'intrication d'états purs mais il n'est pas adapté aux états mixtes or en pratique, les systèmes quantiques sont majoritairement dans des états mixtes.

Depuis les débuts de la mécanique quantique, l'intrication a été pointée du doigt par de nombreux physiciens pour ses propriétés contre-intuitives qui mettent en évidence une non-localité quantique. Deux interprétations sont proposées actuellement : l'holisme quantique et le principe de non-localité. L'holisme quantique consiste à considérer l'état intriqué comme un tout et non comme une somme de ses composantes même s'ils sont séparés spatialement et temporellement. La non-localité quantique suggère qu'il existe des états quantiques qui ont des propriétés non locales. Ces deux interprétations entrent en conflit avec le principe de localité de la physique moderne. L'intrication est un phénomène de nature purement quantique qui ne dépend pas de la distance qui sépare les deux parties d'un système AB. Ce problème avec le principe de localité a été formulé dans le paradoxe EPR (Einstein, Podolsky, Rosen) en introduisant la possibilité de l'existence de variables cachées. Le théorème de Bell reprend le paradoxe EPR en introduisant les inégalités de Bell qui doivent témoigner ou non de la présence de variables cachées ce qui démontrerait que la mécanique quantique ne propose pas une description correcte du phénomène [17, 21, 46]. Plusieurs expériences ont testé ces inégalités depuis les années 1970 et elles ont permis de montrer que ces inégalités peuvent être violées dans certains cas. Ces expériences confortent donc l'idée que la mécanique quantique propose une description correcte des phénomènes physiques observés sans pour autant nous expliquer pourquoi.

Nous venons d'introduire un concept essentiel de la mécanique quantique : l'intrication. Cependant, lorsqu'un système intriqué évolue dans un environnement, il est très suscep-

tible de perdre cette intrication à cause de l'interaction avec le milieu. Par conséquent, il devient important de modéliser l'évolution de l'état quantique plongé dans cet environnement qui provoque des perturbations. Pour cette raison, nous regardons les méthodes d'évolution des états quantiques dans la section suivante.

4.2 L'évolution des états quantiques

Dans le contexte du radar quantique, plus précisément du radar IQ, nous émettons des photons dans l'environnement pour faire la détection radar. Le système physique, le photon émis, est alors en interaction avec son environnement ce qui va modifier son état quantique.

On qualifie de *système quantique ouvert* tout système qui évolue librement dans un environnement sur lequel nous n'avons aucun contrôle [47]. Ce type de système entre en jeu dans le radar quantique où un photon se propage dans le vide ou dans l'atmosphère. Le photon et l'environnement interagissent ce qui va modifier l'état quantique du photon et donc l'information portée par celui-ci. Dans la littérature, il existe 3 manières de décrire l'évolution d'un système quantique dans un environnement perturbateur.

Le choix le plus naturel consiste à utiliser la *théorie de l'électrodynamique quantique (QED)*, ou théorie des champs quantiques, en calculant les intégrales de chemin pour les photons et en prenant en compte toutes les interactions possibles [59]. Cette théorie est en mesure de répondre à nos attentes pour modéliser les interactions entre un photon et les molécules de l'atmosphère seulement elle est complexe à utiliser. Au chapitre 2, nous avons choisi de ne pas l'utiliser.

Un autre choix est directement lié à l'équation de Shrödinger dépendante du temps qui décrit l'évolution temporelle d'un état quantique quelconque. À partir de cette équation de Shrödinger, on définit des *équations maîtresses* dont le rôle est de définir l'évolution des systèmes quantiques ouverts [47, 61–66]. Nous avons tenté d'utiliser cette approche dans le travail de recherche.

La dernière option consiste à utiliser un *canal quantique*. Cet outil provient directement de la TIQ [20, 21, 37]. Il permet de définir l'évolution des états quantiques en utilisant des opérateurs linéaires liant plusieurs espaces de Hilbert différents. Les canaux quantiques sont très utilisés dans les stratégies de communication quantique (distribution de clef quantique, téléportation quantique, etc.).

Pour ces travaux de recherche, nous avons pré-sélectionné les deux dernières méthodes citées pour modéliser l'évolution de l'état d'un photon dans un environnement. Nous décrivons ces deux méthodes ci-dessous.

4.2.1 Les équations maîtresses

Les équations maîtresses sont utiles pour la description de systèmes quantiques ouverts en adoptant une approche temporelle phénoménologique avec des équations différentielles. Le principe sous-jacent est de décrire une interaction supposée faible entre un système quantique S de dimension finie et un réservoir R d'oscillateurs harmoniques à l'équilibre thermodynamique. Nous reprenons ici la méthodologie issue du livre [47] pour écrire une équation maîtresse pour un qubit $\hat{\rho}_S$ en interaction avec un réservoir R modélisant un environnement de propagation comme l'atmosphère. Le raisonnement à suivre se divise en 3 étapes :

1. Il faut écrire l'Hamiltonien du système *qubit + réservoir* qui comporte trois termes : deux Hamiltoniens indépendants qui décrivent la dynamique interne des systèmes isolés S et R, et un Hamiltonien d'interaction entre le qubit S et le réservoir R.
2. On utilise l'équation de Liouville-Von Neumann pour décrire l'évolution temporelle du système S.
3. On utilise les fonctions d'auto-corrélation des systèmes S et R en interaction pour obtenir l'équation maîtresse en fonction du temps $d\hat{\rho}(t)/dt$.

Nous présentons la manière générale pour obtenir une telle équation maîtresse pour un qubit. Il est important de noter qu'il existe d'autres manières de construire ce type d'équation que la méthode extraite de la référence [47].

La 1^{ère} étape consiste à écrire l'opérateur Hamiltonien du système S + R :

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR} \quad (4.9)$$

Le qubit S est décrit par la matrice densité $\hat{\rho}_S$ sur une base des états d'énergie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Son Hamiltonien s'écrit sous cette forme :

$$\hat{H}_S = E_0 |0\rangle \langle 0|_S + E_1 |1\rangle \langle 1|_S \quad (4.10)$$

Où E_0 et E_1 sont des énergies. L'opérateur Hamiltonien du réservoir R s'écrit :

$$\hat{H}_R = \sum_k^{+\infty} \hbar \omega_k \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks} \quad (4.11)$$

Où \hat{a}_{ks}^\dagger et \hat{a}_{ks} sont les opérateurs création et annihilation du mode d'énergie k de spin s . L'Hamiltonien d'interaction \hat{H}_{SR} s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{SR} = & - (\vec{p}_{01} |0\rangle \langle 1|_S + \vec{p}_{10} |1\rangle \langle 0|) \times \\ & \left(\sum_k i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \vec{\varepsilon}_{ks} \hat{a}_{ks} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \sum_k i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \vec{\varepsilon}_{ks} \hat{a}_{ks}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

\vec{p}_{01} et \vec{p}_{10} correspondent aux vecteurs de passage entre les éléments non-diagonaux $|0\rangle \langle 1|$ et $|1\rangle \langle 0|$ de l'Hamiltonien d'interaction. $\vec{\varepsilon}_{ks}$ est le vecteur polarisation pour le mode k de spin s . V désigne le volume de quantification des modes d'énergie (k, s) et \vec{r} est le vecteur position. Enfin, l'opérateur Hamiltonien d'interaction \hat{H}_{SR} est décrit comme un produit d'opérateurs :

$$\hat{H}_{SR} = \sum_\alpha \hat{S}_\alpha \hat{R}_\alpha \quad (4.13)$$

Ces opérateurs \hat{S}_α et \hat{R}_α sont des opérateurs qui décrivent respectivement les échanges d'énergie pour les systèmes S et R. L'indice α est un indice muet pour les sommes. Les opérateurs utilisés sont supposés hermitiens donc $\hat{S}_\alpha = \hat{S}_\alpha^\dagger$ et $\hat{R}_\alpha = \hat{R}_\alpha^\dagger$. Étant donné qu'on a supposé que le système R est à l'équilibre thermodynamique, les échelles de temps auxquelles évoluent les systèmes S et R sont différentes. Nous pouvons nous concentrer sur l'évolution du système S en supposant que l'état du système R n'est pas ou peu impacté par l'interaction S + R.

La 2^{ème} étape consiste à modéliser le problème sous la forme d'une équation de Liouville-Von Neumann. On commence par considérer le réservoir R dont la taille est très supérieure à celle du qubit S en supposant que l'état $\hat{\rho}_R$ est en équilibre thermodynamique :

$$\hat{\rho}_R = e^{-\frac{\hat{H}_R}{k_B T}} / \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_R}{k_B T}} \right\} \quad (4.14)$$

Où k_B est la constante de Boltzmann et T est la température du bain d'oscillateurs R. L'interaction entre les systèmes S et R va créer un couplage. La construction de l'évolution

de $\hat{\rho}_S$ en interaction avec $\hat{\rho}_R$ suppose que l'état initial est complètement décorrélé :

$$\hat{\rho}_{S+R}(t=0) = \hat{\rho}(t=0) = \hat{\rho}_S(t=0) \otimes \hat{\rho}_R \quad (4.15)$$

L'évolution de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ du système complet est décrite par de l'équation Liouville-Von Neumann :

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] = -i \hat{\mathcal{L}} \hat{\rho} \quad (4.16)$$

Où $\hat{\mathcal{L}}_i = [\hat{H}_i, \dots]$ est l'opérateur de Liouville. À partir de cette équation, nous construisons l'équation maîtresse pour le qubit S. Nous omettons volontairement le développement des calculs avec les fonctions d'auto-corrélations qui est assez long pour donner le type de résultat attendu.

Au terme des calculs, nous trouvons une équation d'évolution de l'opérateur densité $\hat{\rho}_S$ sous cette forme :

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S(t)}{\partial t} = -i \hat{\mathcal{L}}_S \hat{\rho}_S(t) - \int_0^t d\tau Tr_B \left\{ \hat{\mathcal{L}}_{SB} \tilde{U}(\tau) \hat{\mathcal{L}}_{SB} \hat{\rho}_B \hat{\rho}(t - \tau) \right\} \quad (4.17)$$

Où $\tilde{U}(\tau) = \exp \left[-i \left(\hat{\mathcal{L}}_S + \hat{\mathcal{L}}_B \right) \tau \right]$ est l'opérateur d'évolution temporelle. On remarque que les opérateurs de Liouville $\hat{\mathcal{L}}_S$ pour le système S et $\hat{\mathcal{L}}_{SB}$ pour l'interaction entre S + R apparaissent parce que c'est le suivi du système S par rapport à l'interaction avec le milieu qui est important en supposant que l'impact sur le système R est minime. Grâce à cette équation maîtresse, on est en mesure de décrire l'évolution temporelle d'un système quantique en interaction avec un environnement. Ce genre d'équation est utile mais elle nécessite des calculs plutôt lourds et une bonne connaissance des interactions du qubit avec son environnement pour évaluer le terme d'interaction \hat{H}_{SR} . De surcroît, dans l'hypothèse d'un radar quantique, seul le photon émis est en contact direct avec l'environnement de propagation tandis que l'autre photon est stocké dans une mémoire quantique. L'équation maîtresse devrait donc prendre en compte tout l'état quantique intriqué pas seulement le système S + R ce qui complexifie la modélisation.

En plus des équations maîtresses, nous disposons des canaux quantiques fournis par la TIQ pour modéliser l'évolution des états quantiques.

4.2.2 Les canaux quantiques

Les canaux quantiques sont des outils théoriques qui permettent de faire une modélisation de l'évolution d'un état quantique soumis à une contrainte de son environnement. Dans la TIC, nous avons vu que les transmissions d'information sont sujets à un bruit qui altère l'information véhiculée entre un émetteur et un récepteur. En TIQ, les canaux quantiques peuvent modéliser l'environnement ou plutôt l'action de l'environnement sur le système ce qui altère l'information quantique véhiculée. Le canal quantique est un outil important pour modéliser des transmissions bruitées qui s'avère aussi adaptée pour la modélisation de l'action d'un environnement dans le contexte d'un radar quantique.

Les canaux quantiques \mathcal{N} décrivent des évolutions physiques pour des opérateurs quantiques en vérifiant 2 conditions au préalable pour les définir correctement :

1. *Linéarité* : un canal quantique est une opération linéaire,

$$\mathcal{N}(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}) = \alpha\mathcal{N}(\hat{A}) + \beta\mathcal{N}(\hat{B}) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} ; \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \quad (4.18)$$

2. *Opération linéaire complètement positive* : une opération linéaire positive $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ est positive si, $\forall \hat{A} \geq 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$.

Une opération linéaire $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ est complètement positive si $\hat{I}_R \otimes \mathcal{N}$ est une opération positive où R est un système de référence de taille arbitraire et \hat{I}_R est un super-opérateur c'est-à-dire un opérateur qui peut s'appliquer sur plusieurs espaces de Hilbert.

3. *Préservation de la trace* : la trace de l'opérateur en entrée est la même que celle en sortie c'est-à-dire $\text{Tr}\{\hat{A}\} = \text{Tr}\{\mathcal{N}(\hat{A})\}$ pour $\forall \hat{A} \in \mathcal{H}_A$.

En prenant pour exemple, un opérateur densité $\hat{\rho}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, cela donne une opération linéaire $\mathcal{N}_{A \rightarrow B}$ pour passer d'un espace des opérateurs $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ à un espace des opérateurs $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ où on a $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) \Rightarrow \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$. Le canal quantique préserve la trace de l'opérateur densité ce qui signifie que : $\text{Tr}\{\hat{\rho}_A\} = \text{Tr}\{\mathcal{N}_{A \rightarrow B}(\hat{\rho}_A)\} = 1$, on a conservation de la probabilité totale sur les états propres associés aux vecteurs propres de l'état quantique. Un canal quantique peut être défini sous la forme d'une somme d'opérateurs de Kraus.

Théorème 4.1 (Canal quantique). *Un canal quantique $\mathcal{N} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ est une opération linéaire, complètement positive, préservant la trace, si et seulement s'il possède*

une décomposition en opérateurs de Kraus :

$$\mathcal{N}_{A \rightarrow B}(\hat{\rho}_A) = \sum_{i=0}^{d-1} \hat{K}_i \hat{\rho}_A \hat{K}_i^\dagger \quad (4.19)$$

Où $\hat{\rho}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$, $\hat{K}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$, $\forall i \in \{0, \dots, d-1\}$ avec $d \leq \dim(\mathcal{H}_A) \dim(\mathcal{H}_B)$. Et les opérateurs de Kraus vérifient la relation d'unitarité :

$$\sum_{i=0}^{d-1} \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = \hat{I}_A \quad (4.20)$$

Où \hat{I}_A est l'opérateur identité sur \mathcal{H}_A .

Parmi les canaux quantiques connus, nous citons par exemple les canaux à brisure d'intrication qui transforment l'état intriqué en entrée $\hat{\rho}_{AB}$ en un état séparable $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$. Ce type de canal quantique doit être défini avec des opérateurs de Kraus de rang 1 [21].

En pratique, il existe plusieurs types de canaux quantiques utiles dans le contexte du radar quantique qui se distinguent par l'action qu'ils ont sur le système. Comme on utilise des photons intriqués qui possèdent : une polarisation, une phase, une énergie $\hbar\omega$, on dispose de plusieurs choix en terme de canal en s'accordant sur ces propriétés sur lesquelles on effectue une intrication. Nous listons quelques exemples ci-dessous [21].

Canal bit-flip : Nous avons par exemple le canal quantique *bit-flip* où, pour un qubit quelconque $\hat{\rho}$, l'action du canal est définie par :

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \sum_{i=0}^{d-1} \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger = \hat{K}_0 \hat{\rho} \hat{K}_0^\dagger + \hat{K}_1 \hat{\rho} \hat{K}_1^\dagger \quad (4.21)$$

Avec les opérateurs de Kraus suivants :

$$\hat{K}_0 = \sqrt{p} \hat{\sigma}_x \quad (4.22a)$$

$$\hat{K}_1 = \sqrt{1-p} \hat{I} \quad (4.22b)$$

Où $\hat{\sigma}_x$ est l'une des trois matrices de Pauli notées dans l'équation .

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Canal de déphasage : Nous avons également le canal de déphasage défini avec les opérateurs de Kraus :

$$\hat{K}_0 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_z \quad (4.24a)$$

$$\hat{K}_1 = \sqrt{1-p}\hat{I} \quad (4.24b)$$

Le canal de déphasage produit le même effet qu'une mesure sur l'état en entrée dont on perd le résultat de mesure ou bien on n'a pas accès au résultat. Plus précisément, ce canal détruit les termes non-diagonaux de l'opérateur densité en entrée [21].

Canal de Pauli : Le canal de Pauli est une généralisation des canaux *bit-flip* et de *déphasage* dont l'action est définie par l'expression :

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \sum_{i,j=0}^{d-1} p(i,j)\hat{\sigma}_z(i)\hat{\sigma}_x(j)\hat{\rho}\hat{\sigma}_x(i)^\dagger\hat{\sigma}_z(j)^\dagger \quad (4.25)$$

Où $p(i,j)$ est une distribution de probabilités. Ce type de canal est aussi applicable à des systèmes plus complexes comme des qudits.

Canal de dépolarisation : Les opérateurs de Kraus qui définissent ce canal font intervenir les matrices de Pauli définies en (4.23) :

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1-p}\hat{I} \quad ; \quad \hat{K}_2 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_y \quad (4.26a)$$

$$\hat{K}_1 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_x \quad ; \quad \hat{K}_3 = \sqrt{p}\hat{\sigma}_z \quad (4.26b)$$

Pour un photon décrit comme un qubit sur les états de polarisation, le canal de dépolarisation remplace progressivement le qubit en entrée par son état complètement mixte $\hat{I}/2$.

Canal d'atténuation : Ce type de canal est utilisé majoritairement pour des systèmes à 2 ou plusieurs niveaux d'énergie. Pour un système à 2 niveaux, il peut être défini par les opérateurs de Kraus suivants :

$$\hat{K}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27a)$$

$$\hat{K}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix} \quad (4.27b)$$

Où $0 \leq \gamma \leq 1$ est un paramètre scalaire lié à la force d'action du canal. Le canal d'atté-

nuation (amortissement) est une approximation de l'évolution d'un système comportant du bruit majoritairement utilisé pour des systèmes matériels comme un atome qui émet un photon par émission spontanée.

Notons que les canaux quantiques présentés ici sont des généralités qu'il convient d'adapter aux contraintes du système quantique étudié. Dans la section suivante, nous discutons de l'utilisation des méthodes de modélisation à notre disposition.

4.2.3 Synthèse

Au travers de cette section 4.2, nous avons défini 2 types d'outils pour modéliser l'évolution des états quantiques dans le contexte de radar quantique opérant dans un milieu perturbateur, l'atmosphère.

Le 1^{er} outil est l'équation maîtresse qui utilise un opérateur Hamiltonien de l'interaction entre l'environnement et le système (le photon) pour décrire l'évolution de ce dernier.

Le 2^{ème} outil est le canal quantique qui permet de faire évoluer un état quantique en utilisant un ensemble d'opérateurs de Kraus à appliquer sur le système.

Notre objectif avec ces outils est de modéliser l'évolution des qubits photoniques intriqués selon des états différents. L'évolution quantique va se traduire par une perte de l'intrication qui n'est pas instantanée.

Due à la difficulté pour modéliser une interaction phénoménologique avec les équations maîtresses en utilisant un Hamiltonien d'interaction adéquat, nous avons privilégié les canaux quantiques pour modéliser l'environnement de propagation.

Cependant en mécanique quantique, le phénomène d'intrication quantique est vu de façon binaire : soit le système est intriqué, soit il ne l'est pas. Il faut nuancer ce point pour tenir compte de l'évolution progressive de l'état quantique d'un système, et à fortiori, de son intrication et des corrélations quantiques. Nous avons donc besoin d'outils pour calculer un *taux d'intrication* et la TIQ nous offre de tels outils que nous décrivons ci-dessous.

4.3 Les mesures d'intrication

Si la mécanique quantique nous dit quand un système est intriqué, la théorie de l'information quantique le quantifie avec un taux d'intrication. En pratique, nous savons qu'un

système complètement intriqué est utopique à cause de toutes les perturbations qu'on ne peut éviter expérimentalement. La TIQ capture cette nuance par le calcul du degré d'intrication d'un système quantique. On passe progressivement d'une intrication totale à une intrication partielle puis finalement à une intrication nulle, c'est-à-dire un état séparable. La quantification de l'intrication est possible en utilisant la séparabilité des sous-systèmes de l'état intriqué et en utilisant des opérations inhérentes à la TIQ : les *opérations locales et la communication classique* (LOCC¹).

Les LOCC sont un élément central dans la théorie de l'information quantique [20, 21]. Ils sont à la base de plusieurs protocoles quantiques pour la transmission et le chiffrement de l'information. Les LOCC permettent de créer des états quantiques séparables mais il n'est pas possible de les utiliser pour créer des états intriqués [20]. Nous ne nous intéressons pas ici au formalisme mathématique derrière les LOCC mais à l'idée qui se cache derrière ce type d'opération. Pour cela, nous exprimons l'idée des LOCC en 5 étapes d'un protocole d'information en TIQ. Supposons qu'Alice et Bob effectuent un protocole où ils utilisent des opérations quantiques. Les opérations qu'ils utilisent appartiennent à la classe des LOCC si elles peuvent être divisées selon ces étapes [38] :

1. Alice fait une mesure locale sur son système A.
2. Alice envoie le résultat de la mesure à Bob en lui envoyant un signal classique. Elle effectue une communication classique avec Bob (ex. : elle envoie un email avec le résultat).
3. Bob effectue une mesure locale sur son système B qui dépend du résultat que lui a communiqué Alice. La mesure a un aspect conditionnel par rapport au résultat donné par Alice.
4. Bob transmet le résultat de sa mesure à Alice par une autre communication classique.
5. Par rapport au résultat de Bob, Alice effectue une autre mesure locale sur son système A. Puis le schéma opératoire reprend à l'étape 2.

Nous remarquons qu'outre les mesures quantiques, Alice et Bob dépendent de canaux de communication classiques pour s'informer des résultats de l'un et de l'autre. Les LOCC ne peuvent pas créer d'états intriqués mais ils sont utilisés pour étudier l'intrication des systèmes quantiques. Or dans la TIQ, l'intrication constitue une ressource importante

1. Local Operation and Classical Communication, en anglais.

(cryptographie quantique, distribution de clef quantique, etc.) donc la mesure du degré d'intrication d'un système s'avère particulièrement utile. Il existe par exemple *l'intrication par distillation* \mathcal{E}_d qui correspond au nombre maximal d'états singulets purs intriqués qu'on peut obtenir à partir d'un état intriqué mixte en utilisant des LOCC. Le nombre de copies utilisées de l'état mixte tend vers l'infini. Comme, \mathcal{E}_d est très compliqué à calculer, on lui préfère les mesures d'intrication ci-dessous.

Les *mesures d'intrication* notées, \mathcal{E} , doivent respecter deux conditions [38] :

1. La valeur \mathcal{E} n'augmente pas si l'état est soumis à des LOCC.
2. La mesure $\mathcal{E} = 0$ si le système est séparable (non-intriqué).

Sans nous intéresser aux détails qui ont conduit à l'élaboration des mesures du degré d'intrication, nous allons en présenter quelques-unes en distinguant les mesures pour les états purs et pour les états mixtes.

D'abord, nous prenons l'exemple d'un état pur intriqué $\hat{\rho}_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|_{AB}$ selon un des quatre états de Bell (voir équation (4.6)). Les matrices densité réduites des sous-systèmes sont $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B\{\hat{\rho}_{AB}\}$ et $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A\{\hat{\rho}_{AB}\}$. Le *taux d'intrication* de l'état pur $|\Psi\rangle_{AB}$ est égal à l'entropie de Von Neumann de ses sous-systèmes :

$$\mathcal{E}(|\Psi\rangle_{AB}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_A) = - \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i^{(A)} \log(\lambda_i^{(A)}) \quad (4.28a)$$

$$\mathcal{E}(|\Psi\rangle_{AB}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_B) = - \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i^{(B)} \log(\lambda_i^{(B)}) \quad (4.28b)$$

Comme dans cet exemple, le taux d'intrication est pour une paire de qubits dans un état de Bell, on aura $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AB}) = 1$ quel que soit l'état de Bell sélectionné. La base du logarithme utilisé dépend de la dimension de la matrice densité réduite du sous-système $d = \dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B)$.

Les mesures d'intrication s'étendent aux états mixtes $\hat{\rho}$ en faisant une construction convexe sur tous les états purs $|\varphi_i\rangle$ qui le constituent. Cette mesure est appelée *l'intrication de formation* et elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_F(\hat{\rho}) = \min_{\{p_i, |\varphi_i\rangle\}} \left[\sum_i p_i \mathcal{E}(|\varphi_i\rangle) \right] \quad (4.29)$$

Où on prend le minimum sur tous les ensembles $\{p_i, |\varphi_i\rangle\}$ avec $p_i \geq 0$ et $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$.

Les calculs pour parvenir à trouver le minimum sur toutes les décompositions d'états peuvent être très difficiles. L'intrication de formation quantifie les ressources nécessaires pour créer un état intriqué.

En se restreignant aux systèmes biparties, on évalue aussi le taux d'intrication des états mixtes par *l'intrication de formation* dans l'équation (4.29). Pour un système de 2 qubits, il existe une expression proche pour le taux d'intrication donnée par Wootters [67]. L'intrication de formation $\mathcal{E}_F(\hat{\rho})$ s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_F(\hat{\rho}) = h(x) \quad \text{avec} \quad x = \frac{1 + \sqrt{1 - \mathcal{C}(\hat{\rho})^2}}{2} \quad (4.30a)$$

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) \quad (4.30b)$$

Dans la formule (4.30), l'intrication de formation est égale à l'entropie binaire $h(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(x)$ où x est défini grâce à la concurrence de Wootters $0 \leq \mathcal{C}(\hat{\rho}) \leq 1$. Cette grandeur est calculée comme le maximum entre zéro et la différence entre les racines carrées des valeurs propres en ordre décroissant de la matrice de spin-flip $R = \hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)\hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$ où le symbole $*$ correspond au complexe conjugué. La concurrence est déjà en elle-même une mesure d'intrication parfois utilisée dans la littérature mais le calcul complet comprend l'entropie binaire $h(x)$ dans sa définition.

D'autres mesures d'intrication sont basées sur les distances entre opérateurs. Ainsi, pour deux opérateurs $\hat{\rho}, \hat{\sigma} \in \mathcal{H}$, la mesure d'intrication s'écrit :

$$\mathcal{E}_D(\hat{\rho}) = \min_{\hat{\sigma} \in \mathcal{S}_e} [D(\hat{\rho}, \hat{\sigma})] \quad (4.31)$$

Où $D(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ est la distance entre les deux opérateurs densité. Cette mesure d'intrication consiste à trouver le minimum de cette distance $\forall \hat{\sigma} \in \mathcal{S}_e$ qui est l'ensemble des états séparables c'est-à-dire l'ensemble des états non-intriqués. L'idée derrière cette mesure d'intrication par distance entre opérateurs est de quantifier un "éloignement" entre l'état $\hat{\rho}$ potentiellement intriqué par rapport à une référence $\hat{\sigma}$, qui est l'état séparable sur la même base de vecteurs propres.

Ces mesures d'intrication par distance doivent logiquement respecter les propriétés d'une distance. Ces propriétés sont :

1. *Positivité* : $D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \geq 0$ et $D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = 0$ si et seulement si $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$.
2. *Symétrie* : $D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = D(\hat{\sigma}, \hat{\rho})$.

3. *Inégalité triangulaire* : $\forall \hat{\rho}, \hat{\sigma}, \hat{\pi} \in \mathcal{H}$, $D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \leq D(\hat{\rho}, \hat{\pi}) + D(\hat{\pi}, \hat{\sigma})$.

Une autre propriété s'ajoute à celles intrinsèques de la distance, la distance $D(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ ne doit pas augmenter sous l'action d'opérations quantiques Λ appliquées séparément sur chacun des états quantiques :

$$D(\Lambda(\hat{\rho}), \Lambda(\hat{\sigma})) \leq D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \quad (4.32)$$

En accord avec ces critères, il y a plusieurs choix. Nous avons la distance trace D_t définie par :

$$D_t(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_1 \quad (4.33)$$

Où on prend la norme de l'opérateur hermitien $\hat{M} = \hat{\rho} - \hat{\sigma}$ tel que $\|\hat{M}\|_1 = \text{Tr}\{\sqrt{\hat{M}^\dagger \hat{M}}\}$. De même, nous disposons de la distance de Bures :

$$D_b(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = 2 \left(1 - \sqrt{F(\hat{\rho}, \hat{\sigma})} \right) \quad (4.34)$$

Où F est la fidélité définie par :

$$F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}} \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\rho}}} \right)^2 \quad (4.35)$$

Nous citons une dernière distance, qui n'est pas une distance au sens mathématique, mais elle vérifie la condition de non-augmentation sous l'action d'opérations quantiques définie dans l'équation (4.32). Cette mesure est égale à l'infimum de l'entropie relative quantique définie entre $\hat{\rho}$ et $\hat{\sigma}$:

$$\mathcal{E}_S(\hat{\rho}) = \inf_{\hat{\sigma} \in \mathcal{S}_e} [\mathcal{S}(\hat{\rho} \|\hat{\sigma})] = \text{Tr}\{\hat{\rho} \log \hat{\rho}\} - \text{Tr}\{\hat{\rho} \log \hat{\sigma}\} \quad (4.36)$$

Ces mesures d'intrication \mathcal{E}_F , \mathcal{E}_D , \mathcal{E}_S remplissent les deux critères obligatoires pour les mesures d'intrication. Cependant, elles ne donnent pas les mêmes valeurs de taux d'intrication pour les mêmes états quantiques $\hat{\rho}$ intriqué et $\hat{\sigma}$ séparable.

Dans la littérature, les différentes manières \mathcal{E}_d , \mathcal{E}_F et \mathcal{E}_S de mesurer l'intrication d'un système quantique sont classées par l'inégalité [38] :

$$\mathcal{E}_d \leq \mathcal{E}_S \leq \mathcal{E}_F \quad (4.37)$$

En pratique, on est amené à choisir entre les différentes mesures d'intrication selon la situation. La plus utilisée est l'intrication de formation \mathcal{E}_F en particulier pour les états biparties qui nous intéressent parce que le calcul est plus aisé en particulier lorsqu'on travaille avec des qubits. C'est cette mesure d'intrication que nous utiliserons en priorité dans les chapitres 5 et 6.

Nous venons de présenter les mesures du degré d'intrication d'un système quantique. Il est important de mentionner que l'intrication quantique ne représente pas toutes les corrélations quantiques au sein d'un système. C'est pourquoi, nous abordons les corrélations quantiques au-delà du seul phénomène de l'intrication dans la section suivante.

4.4 Les corrélations quantiques au-delà de l'intrication

Un système quantique intriqué bipartite possède des corrélations quantiques fortes entre les 2 parties du système. En revanche, il existe aussi des systèmes quantiques qui sont non-intriqués mais qui possèdent tout de même des corrélations quantiques qui ne sont pas dues à l'intrication quantique.

Les corrélations sont qualifiées de "quantiques" parce que des corrélations au sens classique ne peuvent être à l'origine de l'intrication d'un système. En effet, nous avons discuté dans la section 4.2 de la nature non-classique de l'intrication. Celle-ci n'a pas d'équivalent classique notamment parce que la description complète de l'état total $\hat{\rho}_{AB}$ du système bipartite AB ne peut pas être attribuée à la description complète des états $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$ des sous-systèmes. Un système quantique intriqué possède donc des corrélations quantiques. Cependant, il existe des corrélations quantiques ayant un sens plus global que celles qui sont attribuées au phénomène d'intrication. Ces dernières peuvent être appréhendées par les outils de la TIQ et par le principe de la mesure en mécanique quantique. Cela permet de définir une mesure des corrélations quantiques que l'on appelle la *discorde quantique* [68–71] qui répond aux 3 critères retenus pour une mesure de corrélation Q [38] :

1. $Q \geq 0$.
2. $Q = 0$ si les systèmes sont corrélés de manière classique.
3. Q est invariant sous l'action d'opérations unitaires locales.

La discordance quantique fait l'objet d'un nombre croissant de recherches, tant théoriques [70–73] qu'appliquées [74–87] puisqu'elle peut être une ressource pour les processus de transmission quantique de l'information. Pour introduire la notion de corrélations quantiques que capture la discordance, nous allons commencer par rappeler des notions de la TIC vues que nous transposons à la mécanique quantique pour comprendre d'où vient la discordance quantique.

Dans la TIC, lorsqu'on dispose de deux variables aléatoires X et Y , on décrit l'information mutuelle entre ces deux variables aléatoires par une information mutuelle $I(X;Y)$ qui possède deux écritures équivalentes :

$$I(X;Y) = \underbrace{H(Y) - H(Y|X)}_{\text{définition conditionnelle}} = \underbrace{H(X) + H(Y) - H(X,Y)}_{\text{définition jointe}} \quad (4.38)$$

Où $H(X)$ est l'entropie de Shannon. $H(Y|X)$ est l'entropie conditionnelle de Y sachant X et $H(X,Y)$ est l'entropie jointe de X et Y . L'équation (4.38) établit donc une équivalence entre une définition conditionnelle et une définition jointe de l'information mutuelle comme indiquée dans la section 3.1.2. Et ces deux définitions donnent le même résultat en TIC.

À présent, nous étendons cette définition à la TIQ [38]. Nous considérons qu'Alice et Bob partagent deux qubits dans un état intriqué $\hat{\rho}_{AB}$ selon un état de Bell $|\Psi^+\rangle_{AB}$. Nous sommes dans l'espace des états $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ d'un système à deux particules. Nous écrivons l'information mutuelle quantique du système AB en suivant les deux définitions proposées dans l'équation (3.16) de la section 3.1.2 de la TIC :

$$\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AB}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_A) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_B) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_{AB}) \quad (4.39a)$$

$$\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AB})_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} = \mathcal{S}(\hat{\rho}_A) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B)_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} \quad (4.39b)$$

Dans cette équation, nous avons d'abord une définition naturelle de l'information mutuelle (4.39a) qui correspond à la différence entre les entropies de Von Neumann marginales des états $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$ et l'entropie de Von Neumann jointe de l'état $\hat{\rho}_{AB}$.

Ensuite, nous avons la définition conditionnelle de l'information mutuelle (4.39b) qui correspond à la différence entre l'entropie de Von Neumann de l'état $\hat{\rho}_A$ et l'entropie de Von Neumann conditionnelle $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B)$ qui dépend de la mesure quantique faite sur le système

A ou B. L'entropie conditionnelle quantique dépend des opérateurs de mesure $\{\hat{M}_B^{(i)}\}$ appliqués au sous-système B pour connaître l'état du sous-système A. Les définitions (4.39a) et (4.39b) ne sont donc pas équivalentes car elles ne fournissent pas nécessairement le même résultat. Cela est dû à la mesure quantique effectuée sur l'un des sous-systèmes A (ou B) pour connaître l'état de l'autre sous-système B (ou A).

Or dans la définition de l'information mutuelle en TIC, il n'est pas fait état d'une quelconque mesure. En physique classique, il est possible de faire une mesure sur un système classique qui ait une perturbation négligeable sur l'état du système considéré.

En mécanique quantique, la mesure perturbe le système de manière fondamentale de sorte que l'état du système après la mesure est indissociable de celle-ci à cause du couplage entre le système et l'appareil de mesure [15, 18]. Le résultat d'une mesure quantique est un des états propres de l'observable \hat{M} qu'on a choisi pour étudier le système. En mécanique quantique, comme la mesure perturbe le système quantique nous n'avons en fait accès qu'à une partie de l'information totale du système. On dit que le résultat de la mesure donne un état "classique" parce que la superposition d'états antérieure à la mesure est détruite. C'est l'impact de la mesure en mécanique quantique qui provoque cette différence entre les deux définitions de l'équation (4.39).

C'est pourquoi l'équation (4.39a) est nommée *l'information mutuelle quantique* parce qu'elle représente l'incertitude jointe sur l'état $\hat{\rho}_{AB}$ c'est-à-dire qu'elle englobe toutes les corrélations existantes dans le système. Par opposition, l'équation (4.39b) dépend de la mesure effectuée \hat{M} effectuée et sur quel système elle est faite. C'est le taux d'incertitude auquel on a accès par la mesure donc elle correspond à un *taux de corrélations classiques*, ce qu'on assimile à une *information classique*.

La *discord quantique* est définie comme le minimum de la différence entre les deux définitions non-équivalentes de l'information mutuelle quantique :

$$\delta(\hat{\rho}_{AB}) = \min_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} [\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AB}) - \mathcal{J}(\hat{\rho}_{AB})] = \min_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} \left[\mathcal{S}(\hat{\rho}_B) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_{AB}) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B)_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} \right] \quad (4.40a)$$

$$= \mathcal{I}(\hat{\rho}_{AB}) - \max_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} [\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AB})] \quad (4.40b)$$

Où les opérateurs de mesure $\{\hat{M}_B^{(i)}\}$ sont des opérateurs de projection de rang 1 qui correspondent à une mesure de Von Neumann sur le sous-système B pour connaître l'état du sous-système A. Ces opérateurs de projection agissent sur l'un des états propres du

sous-système B. Il faut noter que la discordance dépend de l'entropie conditionnelle quantique $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B)$ qui est non-symétrique par rapport au sous-système sur lequel on choisit d'effectuer la mesure. En conséquence, la discordance n'est pas nécessairement symétrique. L'entropie conditionnelle quantique est définie par :

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B)_{\{\hat{M}_B^{(i)}\}} = \sum_i p_i \mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(i)}) \quad (4.41)$$

Où $p_i = \text{Tr}\{\hat{\rho}_{AB}\hat{M}_B^{(i)}\}$ est la probabilité de projection sur l'état d'indice i associée à l'opérateur densité réduite $\hat{\rho}_A^{(i)} = p_i^{-1}\text{Tr}_B\{\hat{\rho}_{AB}\hat{M}_B^{(i)}\}$.

La discordance quantique est une thématique récente en TIQ. Il est fondamental de ne pas la confondre avec une mesure d'intrication qui quantifie le phénomène d'intrication d'un système. La discordance quantique est une mesure des corrélations quantiques au sens global, elle n'est pas spécifiquement associée à l'intrication. De fait, un système quantique intriqué a une discordance non nulle parce que des corrélations quantiques sont forcément présentes. En revanche, un système non-intriqué peut aussi avoir une discordance non nulle et c'est là, la différence fondamentale.

Pour illustrer ces propos, nous reprenons l'article [68] où nous allons regarder l'intrication et la discordance dans un système quantique particulier : un état de Werner pour un système de deux qubits [88, 89]. Ce type de système se présente sous la forme d'un mélange statistique entre un état complètement intriqué et un état séparable totalement mixte. Nous utilisons ce type de système pour une paire de qubits AB dans un état de Bell dans une base quelconque $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{AB} :

$$\hat{\rho}_W = \gamma |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|_{AB} + \frac{1-\gamma}{4}\hat{I}_{AB} = \gamma\hat{\rho}_{AB} + \frac{1-\gamma}{4}\hat{I}_{AB} \quad (4.42)$$

Où $\gamma \in [0, 1]$ est un paramètre réel qui contrôle le mélange statistique entre les deux états extrémaux. L'état totalement intriqué est un état de Bell tandis que l'état séparable complètement mixte correspond à une distribution en $1/d$ sur tous les états propres, où $d = \dim(\mathcal{H}_{AB})$.

Les calculs des entropies et des quantités d'information mutuelle et conditionnelle nous permettent d'obtenir la figure 4.1. L'entropie conditionnelle est calculée avec les opérateurs de mesure de Von Neumann sur les états propres $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ c'est-à-dire les opérateurs

$\hat{M}^{(0)} = \hat{I}_A \otimes \hat{M}_B^{(0)}$ et $\hat{M}^{(1)} = \hat{I}_A \otimes \hat{M}_B^{(1)}$ tels que $(\hat{M}^{(0)})^\dagger \hat{M}^{(0)} + (\hat{M}^{(1)})^\dagger \hat{M}^{(1)} = \hat{I}_{AS}$.

Dans la figure 4.1, pour $\gamma = 1$, l'état extrémal est l'état pur complètement intriqué.

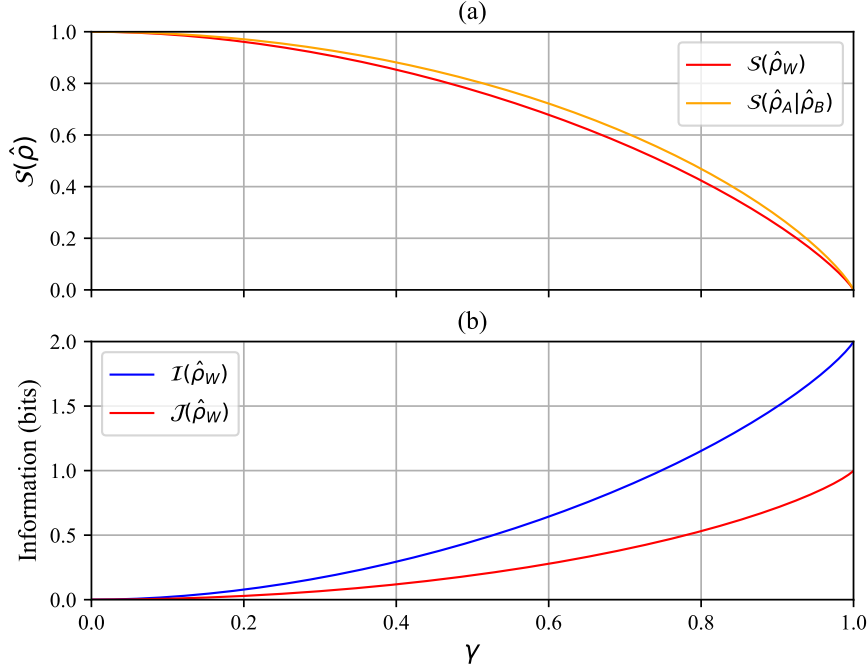


FIGURE 4.1 – (a) Entropies jointe et conditionnelle sur l'état de Werner $\hat{\rho}_W$ en fonction du paramètre de mélange statistique $\gamma \in [0, 1]$. (b) Informations mutuelle et conditionnelle de l'état de Werner.

L'entropie $S(\hat{\rho}_W)$ est donc égale à zéro parce que l'état quantique est pur. L'entropie conditionnelle $S(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B)$ est elle aussi égale à zéro parce qu'il n'existe aucune incertitude entre les états sur les sous-systèmes A et B dès lors qu'une mesure est effectuée sur l'un des sous-systèmes.

Pour $\gamma = 0$, l'état extrémal est non-intriqué et complètement mixte. L'entropie jointe est donc maximale et égale à 1 car l'état est complètement mixte donc l'incertitude est maximale. L'entropie conditionnelle est maximale et égale à 1 parce que le système est non-intriqué ce qui implique une incertitude totale sur A ou B si une mesure est faite sur B ou A. Les deux entropies augmentent quand γ tend vers 0 parce que le système perd son intrication.

Les mêmes observations sont faites sur l'information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_W)$ et sur l'information classique $\mathcal{J}(\hat{\rho}_W)$. À savoir, les deux grandeurs sont maximales pour l'état

totallement intriqué et sont égales à zéro pour l'état complètement mixte. Nous notons au passage que l'information mutuelle quantique a pour valeur maximale $\mathcal{I}_{\max}(\hat{\rho}_W) = 2$ alors qu'en TIC, l'information mutuelle est bornée à 1. Cela montre que l'incertitude, autrement dit, l'information mutuelle accessible sur les états des sous-systèmes A et B est plus grande que l'information classique $\mathcal{J}_{\max}(\hat{\rho}_W) = 1$ à laquelle on peut accéder par la mesure partielle sur les sous-systèmes. Cette différence information mutuelle/information classique nous donne le taux de corrélations quantiques c'est-à-dire la discorde quantique représentée dans la figure 4.2. On observe alors que la discorde et l'intrication de forma-

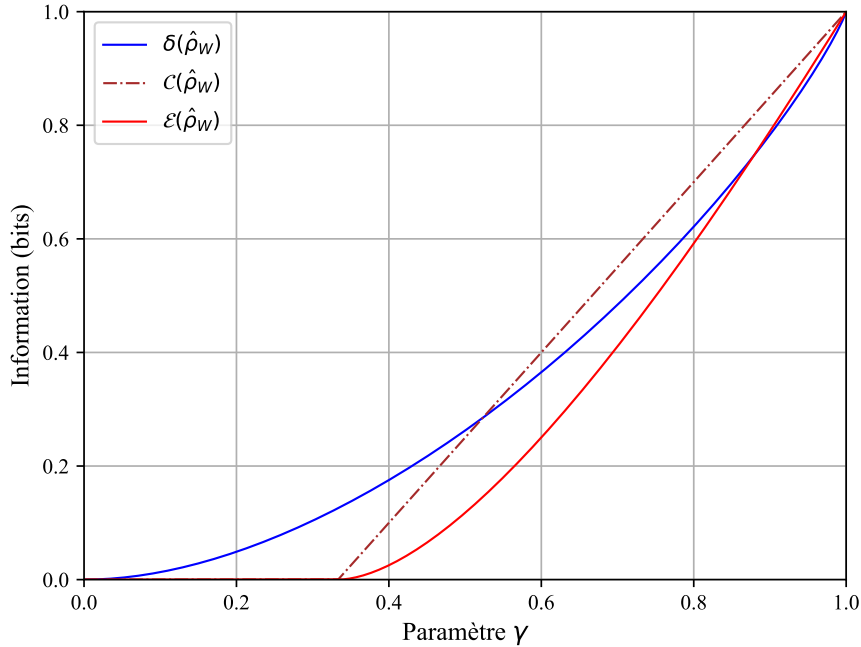


FIGURE 4.2 – Taux d'intrication de l'état de Werner en utilisant l'intrication de formation avec la concurrence de Wootters et le taux de corrélations quantiques par la discorde quantique

tion diminuent en fonction du paramètre γ qui tend vers 0. Ce qu'on observe alors est la perte de l'intrication apparaît avant la perte de la totalité des corrélations quantiques. Cela montre clairement la différence entre les deux quantités $\delta(\hat{\rho}_W)$ et $\mathcal{E}(\hat{\rho}_W)$. Cela montre aussi que la discorde est potentiellement non-nulle pour des états non-intriqués.

Nous avons présenté ici le taux de corrélations quantiques d'un système mesuré par la discorde quantique. Ce taux s'avère intéressant pour des systèmes en intrication partielle ou non-intriqués dans le contexte du radar quantique. La formule (4.40) montre que cette

quantité dépend des opérateurs de mesure utilisés sur le système.

Dans le cadre du radar quantique, nous avons également besoin de définir une stratégie de décision à propos de la cible lorsqu'on utilise des systèmes quantiques. Ce thème est abordé dans la section suivante.

4.5 La théorie de la détection et de la décision

À ce stade la théorie du radar quantique est encore en cours de formation ce qui signifie qu'on manque de recul sur les stratégies de décision pour le contexte radar. La théorie de la décision actuelle repose sur la discrimination des états quantiques impliqués dans le radar lors de la réception d'un signal. Dans la section 4.5.1, nous présentons l'essentiel de cette théorie de décision pour le radar IQ. Dans la section 4.5.2, nous discutons spécifiquement de la stratégie de décision binaire.

4.5.1 Généralités sur la théorie de la décision pour le radar quantique

Actuellement sur le radar IQ, on ne dispose pas d'autant d'informations sur la cible comme en théorie radar classique. La 1^{ère} information accessible importante est la présence/l'absence d'un objet en minimisant l'erreur [26]. Ici, on suppose que le signal émis par le radar IQ dans le milieu de propagation est composé de 1 ou plusieurs photons intriqués avec d'autres dans le système radar. La stratégie de décision est donc binaire, représentée par deux hypothèses :

- **Hypothèse H_0** : La cible est absente. Le signal envoyé depuis le radar quantique ne peut pas être reçu. Le récepteur n'aura alors que du bruit ambiant qui sera en majorité du bruit thermique.
- **Hypothèse H_1** : La cible est présente. Il y a une possibilité que le signal envoyé soit réfléchi par l'objet et une possibilité que ce signal réfléchi revienne au radar. Le récepteur peut potentiellement détecter la cible nonobstant il peut aussi détecter le bruit ambiant. La fiabilité de la détection va donc dépendre du bruit ambiant et de la capacité de l'objet à renvoyer le signal incident.

Ces hypothèses définissent une stratégie de décision selon 4 résultats possibles répertoriés dans le tableau 4.1. La stratégie de décision binaire repose sur la discrimination de ces 2 hypothèses et donc des états quantiques associés. Cette stratégie est analogue à la théorie

Initialisation	H_0	H_1
Décision		
H_0	succès	<i>Signal manqué</i>
H_1	<i>Fausse alarme</i>	succès

TABLEAU 4.1 – Hypothèses de la stratégie de décision binaire. La ligne en rouge représente les hypothèses initiales tandis que la colonne bleue représente les hypothèses décidées comme vraies après la mesure. Les croisements des hypothèses initiales avec les hypothèses décidées donnent les 4 résultats possibles de la stratégie de décision.

radar classique où il faut différencier des distributions de probabilité. En notant les états quantiques associés aux hypothèses : $\hat{\rho}_0$ et $\hat{\rho}_1$, le processus de décision pour savoir si la cible est présente ou pas repose sur la discrimination de ces opérateurs densités pour obtenir les probabilités $p(H_{i=0,1}|H_{i=0,1})$ associées aux hypothèses. Dans le tableau 4.1, les résultats qui posent problème en théorie radar sont écrits en rouge. La probabilité de fausse alarme correspond à la détection d'un signal alors qu'on se trouve dans l'hypothèse H_0 . La probabilité de manquer le signal correspond à ne pas détecter le signal alors que l'objet est présent. Pour un radar IQ, l'objectif consiste à minimiser ces probabilités pour que le processus de détection soit fiable.

La discrimination des états quantiques pour le radar quantique repose sur le test de vraisemblance [26] :

$$\Lambda = \frac{p_1}{p_0} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma \quad (4.43)$$

Où $\gamma = w_0/w_1$ est le seuil de détection. Si les deux hypothèses sont équiprobables $w_0 = w_1 = 1/2$ alors $\gamma = 1$. Il existe deux processus de décision qui s'appuient sur l'équation (4.43) : l'approche Bayésienne et l'approche de Neyman-Pearson. L'approche Bayésienne prend toutes les sources d'erreur en considération sans distinguer si l'une d'entre elles impacte plus le processus de décision qu'une autre. L'approche de Neyman-Pearson distingue la contribution de chacune des sources d'erreur sur la théorie de la décision.

Dans l'approche Bayésienne, nous disposons de 2 opérateurs densités $\hat{\rho}_0$ et $\hat{\rho}_1$ qui représentent respectivement 2 hypothèses H_0 et H_1 [90]. La discrimination des opérateurs densités permet de minimiser la probabilité d'erreur de détection P_e entre les hypothèses :

$$P_e = w_0 \text{Tr}\{\hat{E}_1 \hat{\rho}_0\} + w_1 \text{Tr}\{\hat{E}_0 \hat{\rho}_1\} \quad (4.44)$$

Les opérateurs de mesure sont associées aux hypothèses choisies et elles vérifient la relation d'unitarité $\hat{E}_0 + \hat{E}_1 = \hat{I}$ où \hat{I} est l'opérateur identité. En exploitant cette relation, on obtient la minimisation de la probabilité d'erreur de détection :

$$P_e = w_1 - \text{Tr}\{\hat{E}_1(w_1\hat{\rho}_1 - w_0\hat{\rho}_0)\} \quad (4.45)$$

Or pour un opérateur positif $\hat{A} \geq 0$, sa valeur absolue est définie par $|\hat{A}| = (\hat{A}^*\hat{A})^{1/2}$ [91,92]. D'après l'article [92], la décomposition de Jordan d'un opérateur hermitien (auto-adjoint) $\hat{A} = \hat{A}_+ - \hat{A}_-$ donne une partie positive $\hat{A}_+ = (|\hat{A}| + \hat{A})/2$ et une partie négative $\hat{A}_- = (|\hat{A}| - \hat{A})/2$. Ces deux parties sont positives $\hat{A}_+, \hat{A}_- \geq 0$ et vérifient la relation $\hat{A}_+\hat{A}_- = 0$. On réécrit la probabilité d'erreur :

$$P_e = \frac{1}{2} (1 - \text{Tr}|w_1\hat{\rho}_1 - w_0\hat{\rho}_0|) = \frac{1}{2} (1 - \|w_1\hat{\rho}_1 - w_0\hat{\rho}_0\|_1) \quad (4.46)$$

Où $\|\hat{M}\|_1 = \text{Tr}\{\sqrt{\hat{M}^*\hat{M}}\}$ est la norme 1. Or pour un radar quantique où il faut envoyer un photon à la fois, un grand nombre de fois pour parvenir à faire un processus de détection, il faut écrire :

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \|w_1\hat{\rho}_1^{\otimes M} - w_0\hat{\rho}_0^{\otimes M}\|_1\right) \quad (4.47)$$

Où M est le nombre de copies du système quantique envoyé. L'expression de la forme (4.47) où on a un produit tensoriel \otimes des opérateurs densités $\hat{\rho}_0 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_0$ et $\hat{\rho}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_1$ est très compliquée à calculer [26]. Pour éviter des calculs lourds, on utilise alors les bornes de Battacharyya ξ_{QC} et de Chernoff ξ_{QB} :

$$P_e \leq \frac{1}{2} e^{-M\xi_{QC}} \leq \frac{1}{2} e^{-M\xi_{QB}} \quad (4.48)$$

Où les termes dans les exponentielles sont définies par :

$$\xi_{QC} = -\log \left(\min_{0 \leq s \leq 1} \text{Tr}\{\hat{\rho}_0^s \hat{\rho}_1^{1-s}\} \right) \quad (4.49a)$$

$$\xi_{QB} = -\log \left(\text{Tr}\{\sqrt{\hat{\rho}_0} \sqrt{\hat{\rho}_1}\} \right) \quad (4.49b)$$

La borne de Chernoff a un comportement asymptotique plus prononcée que la borne de Battacharyya en revanche elle est plus complexe à calculer à cause de la minimisation $0 \leq s \leq 1$ requise [26]. Il est parfois possible de trouver des expressions analytiques pour ces bornes.

La détermination des probabilités d'erreur P_e est utilisée dans la théorie du radar quantique pour mesurer la fiabilité de la détection. Le processus de détection basée sur la discrimination des états quantiques a pour origine une stratégie plus générale que nous abordons dans la section suivante.

4.5.2 Stratégie de décision binaire

Pour définir la stratégie de détection binaire pour le radar IQ, nous nous basons sur la référence [90] qui traite de la théorie de la détection en mécanique quantique.

La stratégie binaire provient d'une stratégie sur M hypothèses où un instrument de mesure doit choisir une hypothèse H_j quand une hypothèse H_k est vraie. L'instrument de mesure applique un opérateur de mesure noté \hat{M} pour décider dans quelle hypothèse on se trouve avec plus ou moins de fiabilité. L'opérateur de mesure \hat{M} n'est pas nécessairement un projecteur. La stratégie de décision sur les M hypothèses revient à définir des probabilités $P(j|k) = \text{Tr}\{\hat{\rho}_k \hat{M}_j\}$ avec $j, k = 1 \dots M$ et où les opérateurs de mesure \hat{M}_j vérifient $\sum_{j=1}^M \hat{M}_j = \hat{I}$. Le principe est de minimiser un coût moyen d'erreur $\bar{C} = \text{Tr}\{\sum_{i=1}^M \hat{W}_i \hat{M}_i\}$ avec les opérateurs de risque $\hat{W}_i = \sum_{j=1}^M p_j C_{ij} \hat{\rho}_j$ où on a les probabilités $\sum_{j=1}^M p_j = 1$. La minimisation de \bar{C} s'effectue en définissant $(\hat{W}_i - \hat{Y}) \hat{M}_i = \hat{M}_i (\hat{W}_i - \hat{Y}) = \hat{0}$ et $(\hat{W}_i - \hat{Y}) \geq \hat{0}, \forall i = 1 \dots M$ où on a l'opérateur de Lagrange $\hat{Y} = \sum_{j=1}^M \hat{M}_j \hat{W}_j = \sum_{j=1}^M \hat{W}_j \hat{M}_j$ [90]. Nous l'appliquons à un cas binaire correspondant au cas du radar IQ.

Nous définissons nos hypothèses $(H_0, p_0, \hat{\rho}_0)$ et $(H_1, p_1, \hat{\rho}_1)$ avec des opérateurs de mesure $\hat{M}_0 + \hat{M}_1 = \hat{I}$ respectant la condition de commutation :

$$\hat{M}_0 (\hat{M}_0 + \hat{M}_1) = (\hat{M}_0 + \hat{M}_1) \hat{M}_0 \Rightarrow \hat{M}_0 \hat{M}_1 = \hat{M}_1 \hat{M}_0 \quad (4.50)$$

Nous obtenons alors l'opérateur de Lagrange $\hat{Y} = \hat{W}_0 \hat{M}_0 + \hat{W}_1 \hat{M}_1$ que nous utilisons pour l'équation :

$$\hat{W}_0 - \hat{Y} = \hat{W}_0 - \hat{W}_0 \hat{M}_0 - \hat{W}_1 \hat{M}_1 \quad (4.51a)$$

$$= \hat{W}_0 (\hat{I} - \hat{M}_0) - \hat{W}_1 \hat{M}_1 \quad (4.51b)$$

$$= (\hat{W}_0 - \hat{W}_1) \hat{M}_1 \quad (4.51c)$$

Nous en déduisons l'équation (4.52).

$$(\hat{W}_0 - \hat{\Upsilon}) = (\hat{W}_0 - \hat{W}_1) \hat{M}_1 \hat{M}_0 = 0 \quad (4.52)$$

En utilisant la définition des opérateurs $\hat{W}_{i=0,1}$, nous écrivons la différence entre les opérateurs densités $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_0$:

$$\hat{W}_0 - \hat{W}_1 = p_0 C_{00} \hat{\rho}_0 + p_1 \hat{\rho}_{01} \hat{\rho}_1 - p_0 C_{10} \hat{\rho}_0 - p_1 C_{11} \hat{\rho}_1 \quad (4.53a)$$

$$= p_1 (C_{01} - C_{11}) \hat{\rho}_1 - p_0 (C_{10} - C_{00}) \hat{\rho}_0 \quad (4.53b)$$

$$= p_1 (C_{01} - C_{11}) (\hat{\rho}_1 - \lambda \hat{\rho}_0) \quad (4.53c)$$

Grâce à cette équation, nous retrouvons le test de vraisemblance λ similaire à celui de l'équation (4.43) :

$$\lambda = \frac{p_0 (C_{10} - C_{00})}{p_1 (C_{01} - C_{11})} \quad (4.54)$$

L'analyse de l'équation (4.53c) permet de déterminer d'une part que les opérateurs de mesure respectant les conditions de la stratégie de détection binaire sont des projecteurs [90]. D'autre part, on en déduit que les valeurs propres positives sont associées à l'opérateur densité $\hat{\rho}_1$ donc H_1 et que les valeurs propres négatives sont associées à $\hat{\rho}_0$ donc H_0 . Cette stratégie de décision sera notamment reprise dans les études faites sur le radar IQ dans les chapitres 5 et 6.

4.6 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons vu la ressource essentielle qu'est l'intrication quantique pour la TIQ et comment la quantifier. Il faut mentionner que le degré d'intrication quantique sur les états mixtes dépend de la méthode utilisée car il n'y a pas de consensus sur une méthode particulière qui fonctionne quel que soit l'état quantique étudié.

En lien avec le changement du taux d'intrication, nous avons vu les outils théoriques à notre disposition pour l'évolution des systèmes quantiques ouverts et nous avons fait notre choix en privilégiant les canaux quantiques. Dans la section 4.4, nous avons introduit une mesure des corrélations quantiques au-delà de l'intrication quantique. Cette mesure nommée, la discorde quantique, dépend des opérateurs de mesure appliqués sur les sous-systèmes contrairement au taux d'intrication. Il serait possible de mettre à profit

la discordance pour le radar quantique.

La théorie du radar quantique n'en est qu'à ses débuts ce qui explique qu'on en reste à une stratégie de détection binaire basée sur la discrimination des états quantiques. L'étape importante est de définir les hypothèses de détection adéquates dans l'environnement étudié.

En utilisant les outils développés dans les chapitres 3 et 4 ainsi que l'analyse du chapitre 2, nous effectuons l'étude du radar IQ dans le chapitre 5 puis dans le chapitre 6.

APPROCHE DU RADAR IQ PAR LA THÉORIE DE L'INFORMATION QUANTIQUE

Sommaire du chapitre

5.1	Le montage du radar IQ	110
5.2	Le radar IQ en OAM	113
5.2.1	Le photon sur les états en OAM	113
5.2.2	Propagation d'un photon sur un état d'OAM dans l'atmosphère . .	116
5.2.3	Analyses sur le radar IQ en OAM	120
5.2.4	Conclusion	122
5.3	Le radar IQ de S. Lloyd	122
5.3.1	Description du radar IQ	123
5.3.2	Évolution de l'information quantique dans l'environnement atmo- sphérique	124
5.3.3	Stratégie de décision binaire	130
5.3.4	Conclusion	138
5.4	Synthèse	139

Nous débutons l'étude du radar IQ en utilisant les concepts dans la TIQ vus dans les deux chapitres précédents. Nous utilisons le même montage du radar IQ pour chacune des études en modifiant les états physiques sur lesquels l'intrication quantique initiale est créée. Le chapitre se divise en trois parties pour poser la situation radar dans laquelle nous nous plaçons puis pour exposer les travaux de recherche effectués. Dans la section 5.1, nous décrivons le montage pour le radar IQ en détaillant la méthodologie générale pour l'ensemble des travaux entrepris. Dans la section 5.2, nous explorons la possibilité d'un radar IQ dans l'atmosphère utilisant les états de moment angulaire orbital (OAM¹). Dans la section 5.3, nous reprenons le radar IQ de S. Lloyd pour lier l'influence du milieu

1. Orbital Angular Momentum, en anglais

de propagation au modèle de décision binaire du radar basé sur la photo-détection [10]. Enfin, la section 5.4 fait la synthèse des travaux décrits dans ce chapitre.

5.1 Le montage du radar IQ

L'approche du radar IQ par la TIQ a pour objectif de lier l'information quantique aux capacités de détection du radar en fonction des états quantiques des photons utilisés. Les quantités qui nous intéressent en priorité sont le taux d'intrication du système quantique et le taux de corrélations quantiques, vus au chapitre 4.

Dans les chapitres précédents, nous avons vu en priorité comment fonctionne le radar IQ et quels sont les outils de la TIQ qui présentent un intérêt pour étudier le radar IQ. Le chapitre 2 nous a donné une vision d'ensemble de la chaîne du radar quantique et la TIQ nous donne des outils pour étudier le radar IQ en adoptant le point de vue de l'information quantique. Nous nous étions contentés jusqu'ici de décrire des systèmes quantiques selon des états $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ mais à partir de ce point nous donnons un sens physique aux états quantiques qui sont utilisés dans le processus de détection du radar IQ. Nous explorons au travers de ce chapitre et du suivant différents degrés de liberté (exemple : polarisation) pour créer les états intriqués initiaux utilisés par le radar quantique. Pour suivre l'évolution de l'information quantique au sein du radar IQ, il faut pouvoir exprimer l'opérateur densité $\hat{\rho}$ sur les états physiques composant l'état intriqué initial qui est choisi en général sur un état de Bell (voir chapitre 4). L'utilisation des différents degrés de liberté pour exprimer l'état quantique va conditionner notre manière de modéliser la propagation du photon dans l'atmosphère et la manière de considérer la mesure jointe à la fin de la chaîne du radar. Essayer différentes pistes d'états physiques pour les états intriqués peut offrir des opportunités intéressantes pour la perspective d'un radar quantique. Dans les travaux de recherche, nous insistons sur l'approche par la TIQ ce qui implique que la modélisation physique par une approche phénoménologique de la phase de propagation sort du cadre de travail de thèse. L'utilisation des canaux quantiques permet de décrire une évolution statistique des états quantiques que nous pouvons paramétrer en fonction des contraintes imposées par l'environnement de propagation.

Dans les travaux, nous considérons le radar IQ décrit au chapitre 2 que nous représentons dans la figure 5.1 en combinant les étapes de fonctionnement avec quelques aspects

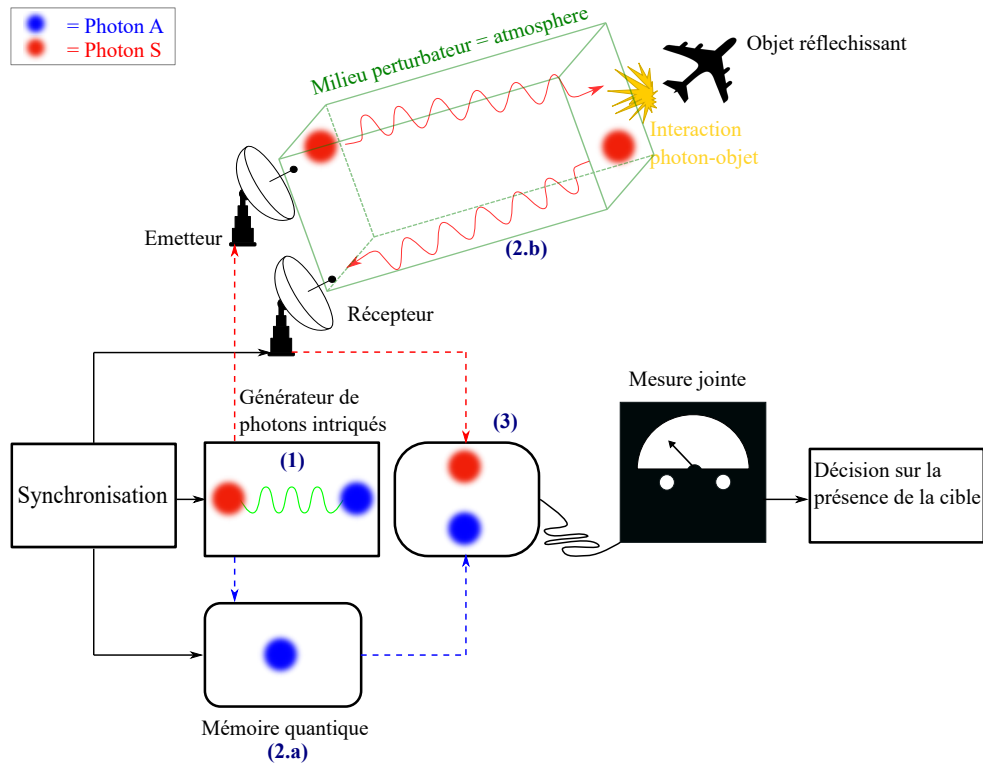


FIGURE 5.1 – Combinaison des figures sur le schéma général en 3 étapes du radar IQ et des éléments technologiques supposés pour son fonctionnement.

techniques du diagramme simplifié de blocs du système du radar IQ. Nous rappelons brièvement avec cette figure les 3 étapes de la chaîne du radar IQ en même temps que nous présentons l'enchaînement des étapes de calcul décrites dans la figure 5.2.

L'étape (1) de la figure 5.1 consiste à créer la paire de photons intriqués sur l'un des degrés de liberté possibles ce qui correspond au choix des états quantiques pour le radar dans la figure 5.2. Les parties technologiques pour l'émission au sein du système radar varient en fonction des états quantiques utilisés pour créer l'intrication mais il n'est pas question de décrire ces composants. Le principe de fonctionnement reste le même : on utilise au départ une paire de photons initialement intriqué au maximum ce qui permet d'avoir le maximum d'information quantique du point de vue du radar. À partir de ces états nous pourrions calculer le taux d'intrication et le taux de corrélations quantiques pour le système initial dans le radar. La définition des états quantiques initiaux conditionne également le choix des appareils de mesure pour l'étape de réception (3). Cette étape correspond à la discrimination des états quantiques puis toute la suite de la détection représentée.

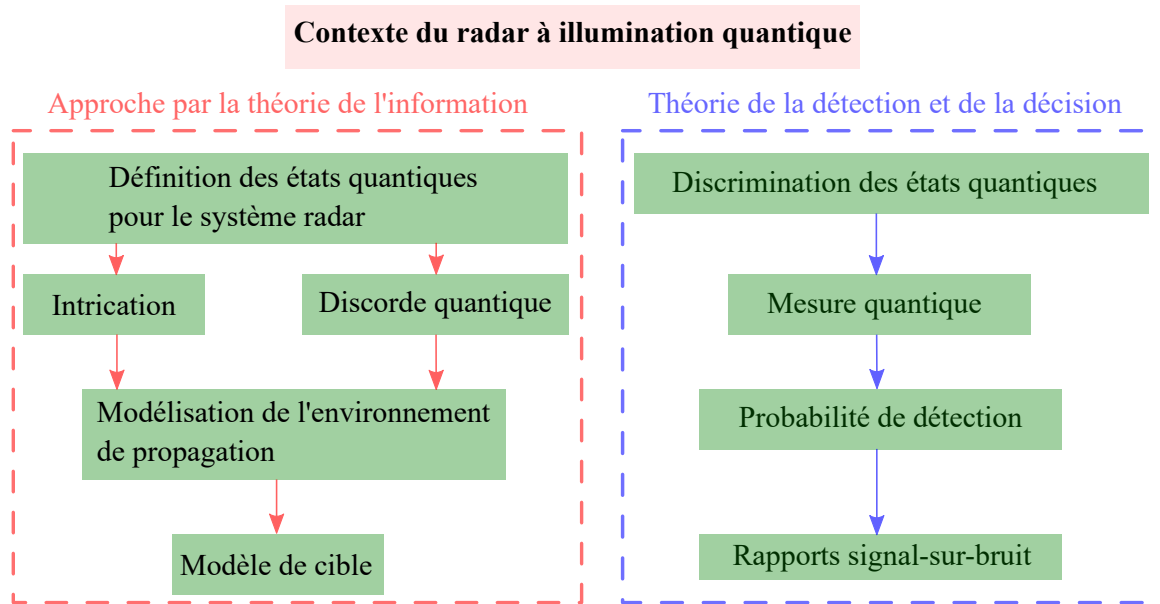


FIGURE 5.2 – Plan de réflexion et de calcul pour le radar IQ en adoptant une approche par la théorie de l'information quantique et la théorie de la mesure.

L'étape (2.a) n'est pas explicitée dans les calculs puisque nous ne faisons pas référence à un dispositif expérimental particulier si ce n'est que c'est une mémoire quantique qui n'altère pas l'état quantique du photon stocké. On se place donc dans un cas idéal. Dans la TIQ, cela signifie qu'on n'applique pas localement la perturbation provenant de l'environnement sur ce photon.

L'étape (2.b) correspond à la propagation dans l'environnement (figure 5.2) et donc à l'interaction du photon avec ce dernier ce qui modifie son état quantique. Le changement de l'état quantique s'accompagne de la perte de l'intrication et des corrélations quantiques entre le photon A et le photon S. On suppose que le photon S n'est pas absorbé ou diffusé par le milieu car sinon nous perdons le support de l'information et donc l'information avec lui. Pour la cible, nous avons vu que la théorie de la SERQ au chapitre 2 ne donnait pas un apport conséquent sur l'évolution de l'information quantique si bien que nous nous contentons de définir la cible par sa capacité de renvoyer le photon signal S jusqu'au radar avec une probabilité de réflexion η .

À la fin de la chaîne radar dans l'étape (3), nous essayons lorsque cela est possible de mettre en place la stratégie de décision binaire en parallèle des grandeurs calculées avec les outils de la TIQ. Comme pour l'étape d'émission de l'état intriqué, nous ne discutons pas des technologies adéquates à utiliser pour la réception.

Nous commençons par étudier un radar IQ sur les moments angulaires orbitaux que nous allons expliquer dans la section suivante. Cette étude sort légèrement du cadre que nous nous sommes fixés ici parce que nous avons voulu envisager l'utilisation potentielle des états de moments angulaires orbitaux pour le radar quantique bien qu'il n'y ait pas de travaux relatifs à cela dans la littérature à notre connaissance. Ce travail d'analyse ne constitue pas l'essentiel du travail de thèse qui est présenté plus loin dans ce chapitre et dans le suivant.

5.2 Le radar IQ en OAM

Nous nous intéressons à un potentiel radar IQ utilisant des états intriqués en moment angulaire orbital (OAM). Nous avons vu au chapitre 2 qu'un photon constitue un mode du champ EM quantique avec une polarisation $\vec{\epsilon}$ et un vecteur d'onde \vec{k} . L'état en OAM d'un photon est lié à la distribution statistique de l'énergie sur le front d'onde du mode du champ EM et il peut être relié au moment angulaire orbital d'une onde EM classique [93]. De plus, en utilisant des faisceaux lasers, il est possible de créer des états intriqués sur ces états d'OAM. Cette thématique de recherche apparue au début des années 1990 pour les sciences de l'information quantique n'a pris un réel essor que pendant les années 2000 où les travaux sur le sujet se sont multipliés [94–102].

Le travail effectué sur cette partie est une analyse de la pertinence d'utiliser les OAM pour un radar IQ en reprenant certains résultats des articles [8, 103, 104] pour nous forger une idée. Pour mener ce travail d'analyse, nous commençons par décrire ce qu'est un état d'OAM dans la section 5.2.1 avant de décrire la modélisation de la propagation d'un photon dans l'atmosphère dans la section 5.2.2. La section 5.2.3 parle ensuite des études faites sur les états intriqués. Enfin, la section 5.2.4 donne une conclusion.

5.2.1 Le photon sur les états en OAM

La théorie des OAM est complexe c'est pourquoi nous ne présentons ici que les idées essentielles. Pour obtenir un développement complet, la référence [105] est disponible.

Pour représenter ce qu'est une OAM, prenons une analogie avec la polarisation d'une onde EM classique polarisée de manière circulaire. Le champ \vec{E} de cette onde peut alors tourner

dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Le mouvement de la charge électrique peut être vue comme le moment cinétique intrinsèque des photons qui constituent cette onde à une fréquence fixée. Ce moment intrinsèque est nommé le moment angulaire de spin (SAM) et le vecteur du spin correspond aux deux états de polarisation circulaire. L'autre manière qu'a une onde de transporter du moment cinétique est le moment angulaire orbital (OAM) qui correspond à la rotation du photon autour d'un axe externe comme l'axe de propagation de l'onde. Pour se le représenter mentalement, on peut imaginer la Terre qui tourne autour du Soleil. La Terre assimilée au photon possède une rotation propre (comme le spin) mais elle fait aussi une révolution autour du Soleil qu'on assimile alors notre OAM. Si une onde classique transporte une OAM, son équation de propagation possède un facteur supplémentaire $\exp(-il\theta)$ où θ représente la rotation autour de l'axe et l est un entier qui représente un indice azimutal. La représentation graphique d'une OAM prend la forme d'une hélice dont la structure est déterminée par l'indice azimutal l . En optique quantique, la structure de l'hélice correspondant à une valeur l est utilisée pour coder de l'information en utilisant l'OAM de l'onde. Nous donnons une représentation plus mathématique dans le paragraphe suivant à partir de la référence [105].

En théorie classique des champs, une onde EM transporte un moment angulaire total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ que l'on écrit ainsi par analogie avec les opérateurs de moments en mécanique quantique $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ qui représentent respectivement le moment orbital et le spin d'une particule [15]. Dans l'expression de \vec{J} , \vec{S} est associé à la nature vectorielle de l'onde c'est-à-dire à la polarisation. On la nomme SAM pour "moment angulaire de spin". \vec{L} est appelée la composante OAM par analogie avec l'opérateur de mécanique quantique.

En se plaçant dans la physique des lasers dans laquelle on utilise l'équation parabolique pour décrire l'évolution de l'amplitude $U(r, \phi, z)$ du champ, nous avons plusieurs solutions à cette équation qui correspondent à des modes du champ. En se plaçant toute de suite dans l'approximation paraxiale dans un repère de coordonnées cylindriques, certains des modes du champ transportent un moment angulaire orbital comme les modes de Bessel ou bien ceux de Laguerre-Gauss (LG). Les modes LG ont pour expression générale [105] :

$$\begin{aligned}
 U_{p,l}(r, \phi, z) = & \frac{C_{p,l}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} \times L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \times e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \\
 & \times e^{\frac{ikr^2z}{2(z^2-z_R^2)}} \times e^{il\phi} \times e^{-i\Phi(r,p,l)}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Où r est la distance par rapport à l'axe de propagation indiquée par la distance z et ϕ est l'angle de rotation autour de cet axe. $C_{p,l} = \sqrt{2^{|l|+1}p! / (\pi(p + |l|))!}$ est une constante de normalisation. La fonction $\Phi(r, p, l) = (2p + l + 1) \arctan(z/z_R)$ est la phase de Gouy. $L_p^{|l|}(x)$ est un polynôme de Laguerre généralisé (voir annexe A). Dans l'équation (5.1), l'indice $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 0$ détermine la structure radiale des modes du champ est appelé l'indice radial. La distribution de l'intensité des modes du faisceau LG prend la forme de $p + 1$ anneaux concentriques. L'indice $l \in \mathbb{N}$ est l'indice azimutal qui apparaît dans le facteur de phase azimutal $e^{il\phi}$. Ce facteur produit $|l|$ rampes du front de la phase formant une structure hélicoïdale lorsqu'on représente les surfaces de phase égale en fonction du rapport k/z . De plus, la chiralité de l'hélice dépend du signe de l'indice azimutal l . Cet indice a aussi une influence sur le rayon des anneaux de l'intensité des modes du faisceau. La structure hélicoïdale est importante parce qu'elle est commune aux faisceaux de lumière qui portent une OAM.

Les modes LG ont la particularité de former un ensemble complet orthonormé de fonctions. On peut alors décrire tout faisceau de lumière monochromatique avec ces modes LG. En mécanique quantique, il existe des fonctions d'onde qui portent un facteur de phase similaire au facteur de phase azimutal $e^{il\phi}$. Ces fonctions d'onde en mécanique quantique ont des fonctions propres dépendant de la composante z du moment angulaire avec l comme valeur propre [105]. En 1992, Allen et al. ont montré qu'une relation existait entre les fronts de phase hélicoïdaux des modes LG et les OAM portées [93]. Le faisceau de lumière en modes LG de facteur de phase azimutal $e^{il\phi}$ porte une OAM qui est proportionnelle à l'indice l . Le rapport entre le moment angulaire \vec{L} et le moment linéaire \vec{P} du faisceau donne : $\vec{L}/\vec{P} = l/k$. Or comme un photon possède un moment linéaire $p = \hbar k$, on trouve alors que ces modes portent une OAM en unités $\hbar l$. Et en ajoutant la composante liée à la polarisation pour obtenir le moment angulaire total, on trouve que pour des photons ayant une polarisation circulaire σ , les OAM sont en unités $\pm \hbar l$.

En procédant à la quantification canonique du champ, il est possible de montrer que les photons dans l'état $|\sigma, k, p, l\rangle$ sont dépendants des propriétés du faisceau de lumière dans les modes LG. Comme les OAM dépendent seulement de l'indice azimutal l , il est possible de créer des superpositions d'états $|\sigma, k, p, l\rangle$ sur la même valeur l .

Dans l'étude d'un radar IQ, nous devrions commencer par étudier l'état intriqué AS. Cependant, nous étudions d'abord la propagation d'un photon S dans l'atmosphère en accord avec les propriétés des faisceaux LG dont nous venons de discuter. Comme l'OAM

est associée à la distribution de l'énergie sur le front d'onde, la modélisation de la propagation dans l'atmosphère se fait au moyen d'un écran à perturbation de phase qui modifie l'indice de réfraction du milieu. Cet écran modélise la perturbation en déformant le front d'onde par l'utilisation d'un modèle de turbulence.

5.2.2 Propagation d'un photon sur un état d'OAM dans l'atmosphère

Pour faire l'étude de cette propagation, on considère un photon S décrit sur un état d'OAM qui se propage dans l'atmosphère. Pour modéliser cette propagation et son impact sur l'état quantique initial, nous reprenons en partie les résultats de l'approche par un écran de phase de l'article de C. Paterson [8].

L'approche de C. Paterson consiste à modéliser la propagation du photon dans un milieu comportant des perturbations de phase en lui appliquant un écran de turbulences pris en régime faible puis à calculer la probabilité de retrouver le nombre azimutal initial l sur lequel était créé l'état du photon. Pour cela, on considère un faisceau LG_p^l dans l'approximation paraxiale dans un repère de coordonnées cylindriques (r, θ, z) qui envoie un photon dans une superposition d'états propres d'OAM dans l'environnement atmosphérique. Les fonctions propres d'OAM s'écrivent [8] :

$$\varphi_{p,l}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_p(r) e^{il\theta} \quad (5.2)$$

La fonction propre $\varphi_{p,l}(r, \theta)$ de valeurs propres $l_z = \hbar l$ possède une contribution radiale $R_p(r)$ et une contribution azimutale $e^{il\theta}$. Les fonctions radiales forment une base complète et orthonormée vérifiant la relation de fermeture $\sum_p R_p^*(r) R_p(r') = \delta(r, r')/r$ où δ est la fonction de Dirac. Nous distinguons par $|\Psi(r, \theta, z)\rangle$ l'état du photon qui se propage lié à l'amplitude complexe du champ $\Psi(r, \theta, z)$ dont la phase va être modifiée par le milieu de propagation. On exprime $\Psi(r, \theta, z)$ en fonction de la fonction propre d'OAM en notant l_0 l'indice azimutal initial :

$$\Psi(r, \theta, z) = \varphi_{p,l}(r, \theta) e^{i\phi(r,\theta)} = \frac{R_p(r, z)}{\sqrt{2\pi}} e^{il_0\theta} e^{i\phi(r,\theta)} \quad (5.3)$$

Le facteur $e^{i\phi(r,\theta)}$ est la perturbation de la phase introduite par le milieu de propagation.

Si pendant la propagation, on fait une mesure du nombre azimutal l , on obtient :

$$P(l|\Psi(r, \theta, z)) = \sum_p |a_{p,l}(z)|^2 = |\langle \varphi_{p,l}(r, \theta) | \Psi(r, \theta, z) \rangle|^2 \quad (5.4a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{r'} \int_{\theta'} \int_r \int_\theta \sum_p R_p^*(r') R_p(r) \Psi(r', \theta', z) \Psi(r, \theta, z) e^{-il\Delta\theta} r' dr' d\theta' r dr d\theta \quad (5.4b)$$

Où $\Delta\theta = \theta - \theta'$. Cette probabilité doit être réécrite pour prendre en compte les rotations θ autour de l'axe de propagation z . Pour cela, on suppose qu'il existe une symétrie de rotation autour de l'axe de propagation et que les turbulences imposées sur l'état du photon sont isotropes. On exprime alors la probabilité $P(l|\Psi(r, \theta, z))$ dépendant d'une fonction de corrélation des rotations $C(r, \Delta\theta, z)$ pour la fonction d'onde autour de l'axe de propagation :

$$P(l|\Psi(r, \theta, z)) = \int_r \int_{\Delta\theta} C(r, \Delta\theta, z) \frac{1}{2\pi} e^{-il\Delta\theta} r dr d\Delta\theta \quad (5.5)$$

Où la fonction de corrélation sur les rotations est $C(r, \Delta\theta, z) = \Psi^*(r', 0, z) \Psi(r, \Delta\theta, z)$. Seulement les perturbations sur le photon sont aléatoires, il faut donc renouveler un grand nombre de fois la mesure pour avoir une probabilité $P(l)$ sur la moyenne statistique des mesures : $P(l) = \langle P(l|\Psi(r, \theta, z)) \rangle$. La moyenne statistique s'applique sur les modifications aléatoires dans la fonction $C(r, \Delta\theta, z)$. Nous obtenons alors :

$$P(l) = \langle P(l|\Psi(r, \theta, z)) \rangle = \int_r \int_{\Delta\theta} \langle C(r, \Delta\theta, z) \rangle \frac{1}{2\pi} e^{-il\Delta\theta} r dr d\Delta\theta \quad (5.6)$$

En notant $C'(r, \Delta\theta, z)$ cette fonction moyenne qui est interprétée comme la fonction de corrélation des rotations de la fonction d'onde sur les mesures du nombre azimutal l , nous écrivons :

$$C'(r, \Delta\theta, z) = \frac{1}{2\pi} |R_p(r, z)|^2 e^{il_0\Delta\theta} \langle e^{i\phi(r, \Delta\theta) - \phi(r, 0)} \rangle = \frac{1}{2\pi} |R_p(r, z)|^2 e^{il_0\Delta\theta} B(r, \Delta\theta) \quad (5.7)$$

$B(r, \Delta\theta)$ est considérée comme une fonction de corrélation de la phase de la fonction d'onde sur les mesures de l'indice azimutal l . Nous utilisons le résultat de l'article de C. Paterson [8] pour écrire la probabilité $P(l)$ en fonction de $\Theta(r, \Delta l)$ qui intègre la fonction

de corrélation de la phase par rapport à θ autour de l'axe de propagation :

$$P(l) = \int_0^{+\infty} dr r |R_p(r, z)|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Delta\theta B(r, \Delta\theta) e^{-i\Delta l \Delta\theta} \right)}_{\Theta(r, \Delta l)} \quad (5.8)$$

$\Theta(r, \Delta l)$ est interprétée comme l'ensemble des coefficients de diffusion des OAM entre eux qui vont perturber la détection de l'indice azimutal initial noté l_0 . Elle dépend de la différence entre les OAM, $\Delta l = l - l_0$ par rapport à l'indice azimutal choisi pour exprimer l'état du photon S. Toujours dans cet article, les turbulences sont modélisées par un modèle de Kolmogorov qui permet d'exprimer la fonction de corrélation de la phase par l'équation (5.9) en supposant que les perturbations de la phase suivent une loi gaussienne permettant d'écrire $\langle e^{ix} \rangle = e^{-\langle |x|^2 \rangle / 2}$.

$$B(r, \Delta\theta) = e^{-\frac{1}{2} D(|2r \sin(\Delta\theta/2)|)} = e^{-6.88 \times 2^{2/3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} |\sin(\Delta\theta/2)|^{5/3}} \quad (5.9)$$

Dans cette équation, la grandeur $D(|\Delta x|) = \langle |\phi(x) - \phi(x + \Delta x)|^2 \rangle$ est la structure de phase des fluctuations du milieu telle que $D(\Delta x) = 6.88(\Delta x/r_0)^{5/3}$ avec $r_0 = (0.16C_n^2 k^2 L)^{-3/5}$ qui est le paramètre de Fried dans le régime de turbulence en fonction de la distance de propagation L [106]. Le paramètre de Fried r_0 est important parce qu'il est la longueur de corrélation des turbulences c'est-à-dire qu'il représente l'ordre de grandeur des turbulences. C_n^2 est la constante de structure de phase qu'on fixe arbitrairement à $C_0 = 1.0 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/5}$ ce qui correspond à une altitude proche du sol [104].

Nous n'allons pas calculer la probabilité $P(l = l_0 \pm \Delta l)$ mais seulement $P(l = l_0)$ et $\Theta(r, \Delta l)$ en fonction du rayon du faisceau et du paramètre r_0 qui définit les turbulences.

Dans la figure 5.3, $\Theta(r, \Delta l)$ est tracé en fonction de r/r_0 . On remarque que les coefficients de diffusion des OAM diminuent à mesure que Δl augmente. Ces coefficients ont une plus grande influence quand le rapport r/r_0 devient supérieur à 1. Dans la figure 5.4, la probabilité $P(l = l_0)$ est représentée en fonction de $r_{p,l}/r_0$ où $r_{p,l}$ est le rayon du faisceau calculé en fonction des paramètres p et l , $r_{p,l} = b\sqrt{2p+l+1}$ à partir de la répartition de l'intensité sur le faisceau $\langle r^2 \rangle = \int R_{p,l}(r) r^2 r dr = (2p+l+1)b^2$. Notons que sur cette figure, les probabilités diffèrent légèrement de l'article de C. Paterson sûrement à cause d'un problème sur le calcul de $r_{p,l}$ que nous avons effectué car elles sont décalées. En revanche, cela ne change pas la tendance générale de ces courbes. On remarque que ces

probabilités diminuent à mesure que $r_{p,l}/r_0$ devient supérieur à 1. Comme nous avons vu que les coefficients de diffusion ont plus d'impact lorsque le paramètre des turbulences devient comparable au rayon autour de l'axe de propagation $r/r_0 \sim 1$, la probabilité $P(l = l_0 \pm \Delta l)$ est impactée par le régime de turbulence ce qui va la faire décroître à mesure que r/r_0 tend vers 1.

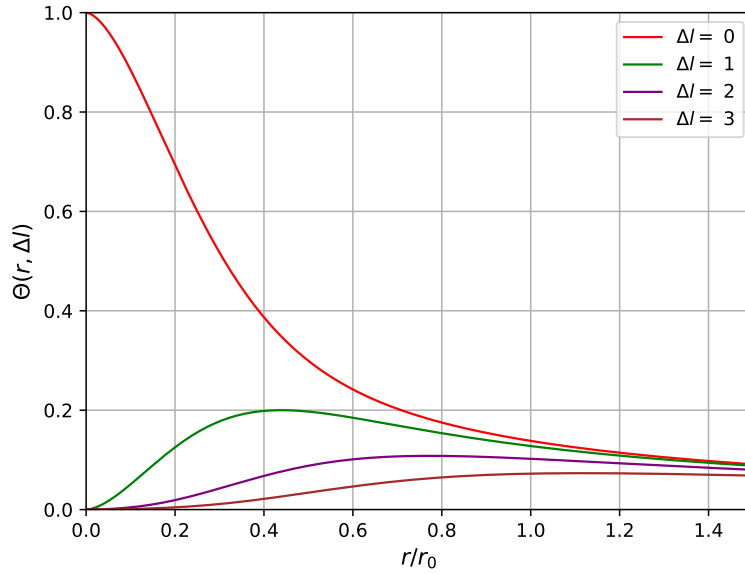


FIGURE 5.3 – Coefficients de diffusion en fonction du rayon relatif r/r_0 pour différentes valeurs $\Delta l = l - l_0$ où l_0 est le nombre azimutal initial.

Sans avoir à calculer $P(l = l_0 \pm \Delta l)$, une limite de l'utilisation des OAM apparaît. Les perturbations imposées au photon représentent un régime de turbulence faible dans l'atmosphère d'après le modèle utilisé. Or en utilisant un laser sur les mêmes modes d'OAM LG_p^l , les perturbations ont une influence majeure lorsque le rayon r du mode LG_p^l du faisceau est semblable à l'ordre de grandeur des turbulences r_0 . En utilisant le même mode sur d'autres régimes de turbulences plus forts il est possible que les coefficients de diffusion des OAM ne détériorent complètement l'état du photon initial ce qui réduit la probabilité de mesurer le bon indice azimutal l au cours d'une propagation trop longue. Un tel cas de figure est un point bloquant pour une utilisation radar quantique en particulier quand on considère l'intrication entre 2 photons qui est un phénomène fragile.

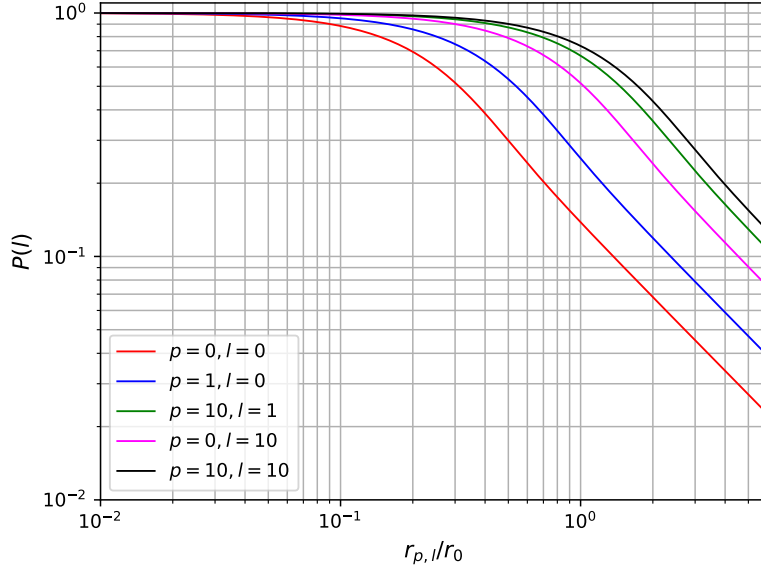


FIGURE 5.4 – Probabilités $P(l)$ en fonction du rayon relatif $r_{p,l}/r_0$ où $r_{p,l} = b\sqrt{2p+l+1}$ [8] pour différents modes LG_p^l du faisceau avec la condition $\Delta l = l - l_0 = 0$.

En tenant compte de cette limite, nous analysons les articles traitant de l'intrication en OAM ci-dessous.

5.2.3 Analyses sur le radar IQ en OAM

Les articles qui servent de base à l'analyse étudient la propagation d'états intriqués sur les OAM pour des paires de photons en utilisant des régimes de turbulences proches suivant le modèle de perturbation de l'indice de réfraction par un écran à perturbation de phase [103, 104].

Dans l'article de N. D. Leonhard [103], l'état intriqué initial en OAM est défini par un état de Bell :

$$|\Psi_0\rangle_{AS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|l_0, -l_0\rangle + e^{i\gamma} |-l_0, l_0\rangle \right) \quad (5.10)$$

Où γ représente une phase relative. L'état $|\Psi_0\rangle_{AS}$ est représenté sur la base des états propres $\{|-l_0, -l_0\rangle, |-l_0, l_0\rangle, |l_0, -l_0\rangle, |l_0, l_0\rangle\}$ qui est une base de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{AS} de dimension finie $\dim(\mathcal{H}_{AS}) = 4$ incluse dans l'espace de Hilbert de dimension infinie de l'ensemble des états d'OAM. Le modèle d'écran à perturbation de phase est utilisé

sur les 2 photons qui subissent donc les mêmes perturbations locales dans un régime de turbulence faible. Ensuite, la concurrence de Wootters est calculée pour suivre l'évolution de l'intrication en fonction du rapport $\xi(l)/r_0$ où $\xi(l)$ est la longueur de cohérence des corrélations de la phase désignant la distance moyenne entre 2 points du faisceau ayant un déphasage de $\pi/2$. Cette longueur $\xi(l)$ dépend de la structure spatiale de l'OAM indicée l . L'article a montré que le déclin du taux d'intrication en fonction de $\xi(l)/r_0$ adopte le même comportement quelle que soit la valeur $l = \{1, \dots, 100\}$ utilisée. C'est cette longueur de cohérence $\xi(l)$ qui détermine la résistance de l'intrication aux perturbations de l'environnement. Le régime de perturbation utilisé est faible donc si le paramètre r_0 décrit un régime de turbulence plus fort, le déclin de l'intrication sera plus rapide. En revanche, cet article ne renseigne pas sur la distance de survie de propagation de l'intrication.

L'article de M. S. Wei [104] utilise la même approche que le précédent en utilisant un état de Werner comme état initial pour faire varier le taux d'intrication initiale calculée là aussi avec la concurrence de Wootters. Cet état est construit avec l'état de Bell précédent :

$$\hat{\rho}_0 = y |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|_{AS} + \frac{1-y}{4} \hat{I}_{AS} \quad (5.11)$$

Où $y \in [0, 1]$ contrôle le mélange statistique entre l'état intriqué et l'état mixte. Leur objectif était de tester l'évolution de l'intrication et des corrélations quantiques en fonction de la distance de propagation pour un régime de turbulences faible et moyen. Ils ont montré une décroissance différente pour l'intrication et les corrélations quantiques en fonction de la distance de propagation et de l'indice azimutal l . Ce qui nous intéresse est le taux d'intrication qu'ils ont pu calculer en fonction de la distance de propagation en modifiant les paramètres du régime de turbulences. L'ordre de grandeur de la survie de l'intrication sur les OAM dans l'atmosphère est estimée au plus à quelques kilomètres ce qui représente une faible distance si on souhaite l'utiliser pour un radar quantique même si accroître l'indice azimutal l initial tend à améliorer la distance de survie de l'intrication. Le modèle de cet article nous donne une idée de la survie de l'intrication dans l'atmosphère cependant le modèle utilisé a imposé des perturbations sur les 2 photons qui se propagent et non sur un seul des 2 photons comme attendu pour un radar IQ.

L'analyse succincte des résultats des deux articles cités en plus de l'analyse de la propagation d'un photon décrit sur un état OAM dans l'atmosphère tendent à éloigner la

possibilité d'utiliser un état intriqué en OAM dans un radar IQ. Cela prend en compte le fait que les OAM sont sensibles aux turbulences atmosphériques et que la survie de l'intrication dépend de la longueur de corrélation de phase du faisceau de l'indice azimutal sur lequel est construit l'intrication initiale.

5.2.4 Conclusion

L'analyse des articles traitant des OAM et de leur propagation dans l'atmosphère montrent qu'ils sont très sensibles aux turbulences atmosphériques ce qui les rend inadaptés à une utilisation par un radar quantique pour l'instant. De plus, nous manquons de recul sur les OAM parce qu'il n'existe pas d'études à notre connaissance sur la potentialité d'un radar quantique en OAM.

L'état en OAM d'un photon seul se propageant dans l'atmosphère dépend de l'ordre des grandeurs de turbulences si bien qu'en régime de fortes turbulences, il est possible que l'état initial soit trop altéré pour récupérer l'information initiale. De plus, les études sur l'intrication montrent que la survie de l'intrication dépend des turbulences et que la survie de l'intrication dans l'atmosphère est faible, de l'ordre de quelques kilomètres. En prenant en considération les points cités, nous avons préféré abandonner cette piste de recherche afin de nous consacrer à l'étude du radar IQ imaginé par S. Lloyd dans la section suivante.

5.3 Le radar IQ de S. Lloyd

Nous reprenons le modèle original de S. Lloyd qui utilise la photo-détection sur les paires de photons intriqués émises par le radar IQ pour étudier l'influence du milieu de propagation sur la détection radar [10]. Notre objectif est d'étudier ce radar IQ dans un cas simple en traquant l'évolution des corrélations quantiques dans l'environnement de propagation puis en reliant ces corrélations quantiques à la stratégie de décision binaire de S. Lloyd. Le modèle proposé est un modèle élémentaire où la propagation du photon dans l'atmosphère est décrit suivant 2 états d'énergie thermique très proches. Nous travaillons à des énergies très faibles ce qui fait que le modèle proposé n'est pas réaliste en pratique. Ce modèle élémentaire est composé de deux autres modèles. Le 1^{er} modèle est la stratégie de décision binaire pensée par S. Lloyd basée sur une mesure jointe par photo-détection alors que le bruit de l'environnement est modélisé par un bain d'oscillateurs harmoniques en équilibre thermique. Le 2^{ème} modèle consiste au suivi de l'évolution de l'information

quantique pour l'état intriqué soumis à un environnement de propagation qui perturbe l'état du photon émis par le radar. Le milieu de propagation est modélisé par un canal quantique d'amortissement dépendant d'un paramètre p caractéristique de l'environnement de propagation considéré.

Nous présentons ce travail de recherche en 4 parties. La section 5.3.1 décrit le système radar utilisé. La section 5.3.2 traite l'évolution de l'information quantique soumise à l'influence d'un environnement atmosphérique. Ensuite, la section 5.3.3 élabore la stratégie de décision binaire du radar IQ en parallèle de l'analyse de la section 5.3.2. Enfin, la section 5.3.4 constitue une conclusion sur cette approche du radar IQ par la TIQ.

5.3.1 Description du radar IQ

La configuration du système radar utilisé est celle présentée en 3 étapes de la figure 5.1 où nous raisonnons en termes de niveaux d'énergie thermique pour effectuer la détection radar. Nous prenons en compte toute la chaîne du radar en faisant des hypothèses simplificatrices pour traiter la situation radar et pour combiner l'approche décisionnaire de S. Lloyd avec la modélisation de l'environnement de propagation.

Pour utiliser à la fois le modèle de S. Lloyd et la TIQ, nous devons établir un lien entre les deux. Dans le radar IQ de S. Lloyd, le processus de détection est basé sur un photo-détecteur et sur une cible ayant une probabilité de réflexion η [10].

Nous avons vu au chapitre 2 que la théorie de la SERQ n'apportait pas beaucoup d'information sur l'évolution de l'état quantique du photon S en contact avec les atomes de la surface de la cible ni sur l'évolution de l'intrication entre le photon incident et celui resté dans le radar. Cela justifie l'utilisation de la probabilité η . Cependant, dans cette étude nous nous concentrons avant tout sur l'influence du milieu de propagation et non sur celle de la cible. Par conséquent, nous faisons l'hypothèse simplificatrice que la cible renvoie avec certitude le photon incident vers le radar IQ. Nous ne prenons donc pas en compte l'influence de la cible pour nous focaliser sur celle de l'environnement de propagation.

Dans le récepteur du radar IQ, sur un événement de détection le photo-détecteur peut voir dn_b photons où d est le nombre d'états d'énergie thermique perçus par le détecteur. $n_b = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})e^{-\beta\hbar\omega}$ est le nombre moyen de photons par état d'énergie thermique avec $\beta = (k_B T)^{-1}$ où k_B est la constante de Boltzmann et T la température [107]. Cela représente les photons qui sont issus du bruit thermique. D'après l'article [10], le photo-

détecteur peut distinguer $d = W \times t_d$ états thermiques sur un événement de détection où W est la largeur de la bande de fréquence et t_d est la fenêtre temporelle de détection. Le photo-détecteur peut détecter au plus 1 photon par événement de détection ce qui correspond à $dn_b \ll 1$. Cette approximation est valide dans le régime optique mais pas dans le régime micro-onde.

Pour accorder la stratégie de photo-détection de Lloyd avec la modélisation de l'influence de l'environnement de propagation par un canal quantique, nous travaillons sur des états d'énergie thermique en nous restreignant au cas limite $d = 2$ états très proches. Cela représente des très faibles énergies ce qui rend le modèle non-réaliste, nous nous plaçons donc dans un cas de modèle élémentaire pour étudier ce radar. Il faut insister aussi sur le fait qu'émettre des photons un à un dans l'environnement pour faire la détection radar n'est pas réaliste puisqu'on peut perdre ce photon par absorption ou diffusion. Il faut donc supposer que le photon n'est ni absorbé ni diffusé pour faire notre approche par la TIQ. Comme le radar IQ repose sur la photo-détection, nous devons utiliser un canal quantique d'amortissement. Le lien entre la stratégie de détection et le canal quantique qui modélise l'action du milieu de propagation est représenté par le paramètre d'amortissement p qui dépend de l'environnement. Ce paramètre p représente l'action de l'environnement de propagation sur l'état du photon à mesure que celui-ci se propage. La stratégie de détection utilise aussi ce paramètre p pour écrire les probabilités d'erreur de détection et les rapports signal-sur-bruit (RSB) dans la section 5.3.3.

Nous commençons par décrire le canal quantique d'amortissement utilisé pour l'évolution de l'information quantique du système AS dans la chaîne du radar.

5.3.2 Évolution de l'information quantique dans l'environnement atmosphérique

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous utilisons des systèmes à 2 niveaux c'est-à-dire des qubits thermiques pour nous accorder sur la stratégie de photo-détection du radar IQ. Nous exprimons l'état quantique intriqué du système AS que l'on soumet à l'action du canal avant d'exprimer le taux d'intrication et les corrélations quantiques.

Nous décrivons l'état du photon S émis par le radar IQ en recourant à une analogie sur les états d'énergie thermique $|\varepsilon_{i=1,2}\rangle$ pour étudier l'évolution d'un qubit thermique dans

un environnement de propagation décrit par un bain d'oscillateurs harmoniques [108]. L'opérateur densité du qubit thermique est décrit en fonction des états d'énergie $|\varepsilon_{i=1,2}\rangle$ qui sont très proches :

$$\hat{\rho}_{S, \text{ th}} = \frac{1}{2} (|\varepsilon_1\rangle \langle \varepsilon_1| + |\varepsilon_2\rangle \langle \varepsilon_2|) \quad (5.12)$$

Où "th" désigne "thermique". Cet opérateur $\hat{\rho}_{S, \text{ th}}$ est impliqué dans l'état intriqué initial $\hat{\rho}_{AS, \text{ th}}$ de l'équation (5.13) sur la base des états d'énergie $\{|\varepsilon_1\varepsilon_1\rangle, |\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle, |\varepsilon_2\varepsilon_1\rangle, |\varepsilon_2\varepsilon_2\rangle\}$ des 2 qubits :

$$\hat{\rho}_{AS, \text{ th}} = |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|_{AS, \text{ th}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Où l'opérateur $\hat{\rho}_{AS, \text{ th}}$ décrit un état de Bell $|\Psi^+\rangle_{AS, \text{ th}}$. Cet état intriqué correspond au cas $d = 2$ et il respecte la forme utilisée des états intriqués dans l'article de Lloyd [10] : $|\Psi^+\rangle_{AS, \text{ th}} = 1/\sqrt{d} \sum_{i,j} |\varepsilon_i\rangle_A |\varepsilon_j\rangle_S$. L'utilisation d'un nombre limité d'états thermiques $d = 2$ permet de lier l'approche de S. Lloyd utilisant des états de Fock à l'état intriqué (5.13) pour étudier l'évolution dans l'environnement de propagation. En gardant cette approche, nous modélisons la modification de l'état $\hat{\rho}_{S, \text{ th}}$ par l'environnement en utilisant un canal de propagation qui s'applique localement sur le photon S mais pas sur le photon A resté dans le radar. Comme l'état du photon S est modifié cela a une influence sur l'état $\hat{\rho}_{AS, \text{ th}}$ qui est intriqué.

Pour modéliser l'évolution, nous utilisons le canal quantique d'amortissement de l'article [108] que nous modifions pour agir sur le système total AS. Le canal quantique d'amortissement s'écrit :

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}_{AS, \text{ in}}) = \sum_{i=0}^3 \hat{K}_i \hat{\rho}_{AS, \text{ in}} \hat{K}_i^\dagger = \hat{\rho}_{AS, \text{ out}} \quad (5.14)$$

Où $\hat{\rho}_{AS, \text{th}} \equiv \hat{\rho}_{AS, \text{in}}$, avec les opérateurs de Kraus du canal \mathcal{N} :

$$\hat{K}_0 = \hat{I}_A \otimes \hat{\Gamma}_0 = \hat{I}_A \otimes \sqrt{1-\xi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad (5.15a)$$

$$\hat{K}_1 = \hat{I}_A \otimes \hat{\Gamma}_1 = \hat{I}_A \otimes \sqrt{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15b)$$

$$\hat{K}_2 = \hat{I}_A \otimes \hat{\Gamma}_2 = \hat{I}_A \otimes \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15c)$$

$$\hat{K}_3 = \hat{I}_A \otimes \hat{\Gamma}_3 = \hat{I}_A \otimes \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.15d)$$

Où \hat{I}_A est l'opérateur identité sur le système A et les opérateurs \hat{K}_i , vérifiant la relation d'unitarité $\sum_{i=0..3} \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = \hat{I}_{AS}$, sont dérivés des opérateurs $\hat{\Gamma}_i$ de l'article [108].

Dans l'équation (5.15), deux paramètres contrôlent l'évolution de $\hat{\rho}_{AS, \text{in}}$. Le 1^{er} paramètre $\xi \in [0, 1/2]$ est la population thermique sur l'état excité $|\varepsilon_2\rangle$. Il contrôle la répartition de la population sur les états du qubit. On suppose que le photon S est totalement mixte donc on prend $\xi = 1/2$ pour les calculs. Toutefois, nous gardons le symbole ξ dans les équations.

Le 2^{ème} paramètre $p = 1 - e^{-\gamma t} \in [0, 1]$ est le paramètre d'amortissement associé à l'état excité $|\varepsilon_2\rangle$ comme une fonction du temps t , où γ est une constante d'amortissement. Ce paramètre γ dépend de l'environnement et de la fréquence du photon S. Ainsi, un photon optique est plus impacté par l'environnement de propagation qu'un photon micro-onde. Cependant, donner une valeur à γ n'est pas l'objectif recherché dans ce travail, il est seulement considéré comme étant dépendant du milieu. Par conséquent, le paramètre qui va contrôler l'évolution de l'état $\hat{\rho}_{AS, \text{in}}$ est $p \in [0, 1]$.

En appliquant le canal quantique (5.14) à l'état (5.13), nous obtenons l'opérateur densité :

$$\hat{\rho}_{AS, \text{out}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p(1-\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-p+p\xi) & \frac{1}{2}\sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1-p} & \frac{1}{2}(1-p\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}p\xi \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

La matrice densité (5.16) dépend à la fois de ξ et p . Elle contient toute l'information à propos de l'état du système AS. Nous l'utilisons pour calculer le taux d'intrication et le

taux de corrélations quantiques de l'état quantique.

Le taux d'intrication est calculé avec l'intrication de formation à partir de la concurrence de Wootters $\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,out})$ [67]. Nous écrivons la matrice $R = \hat{\rho}_{AS,out}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)\hat{\rho}_{AS,out}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$ pour extraire ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$:

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{2}p\sqrt{\xi(1-\xi)} \quad (5.17a)$$

$$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1-p + (1-p+p\xi)(1-p\xi)) + \sqrt{\Delta(R)} \right]} \quad (5.17b)$$

$$\sqrt{\lambda_3} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1-p + (1-p+p\xi)(1-p\xi)) - \sqrt{\Delta(R)} \right]} \quad (5.17c)$$

Où $\sqrt{\lambda_1}$ est de multiplicité 2 et $\Delta(R) = (1-p)(1-p\xi)(1-p+p\xi)$ est le discriminant du polynôme caractéristique de R . Les $\sqrt{\lambda_i}$ sont classées en ordre décroissant pour chaque valeur $p \in [0, 1]$ pour obtenir $\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,out})$ puis le taux d'intrication $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,out}) = h(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x)$ où $x = (1 + \sqrt{1 - \mathcal{C}^2(\hat{\rho}_{AS,out})})/2$ que nous traçons dans la figure 5.7. Nous observons que l'intrication disparaît avant la valeur limite $p = 1$. Nous obtenons donc $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,out}) = 0$ pour $p \approx 0.83$. Ainsi, lorsque $p > 0.83$, le système AS n'est plus intriqué, il est séparable.

Pour le calcul de la discordie quantique, $\delta(\hat{\rho}_{AS,out}) = \min(\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS,out}) - \mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS,out}))$, nous commençons par calculer toutes les entropies décrivant l'information mutuelle quantique \mathcal{I} et les corrélations classiques \mathcal{J} . Le calcul des entropies de Von Neumann des systèmes A et S donnent :

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,out}) = 1 \quad ; \forall p \in [0, 1] \quad (5.18a)$$

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{S,out}) = \frac{1+p-2p\xi}{2} \log\left(\frac{2}{1+p-2p\xi}\right) + \frac{1-p+2p\xi}{2} \log\left(\frac{2}{1-p+2p\xi}\right) \quad (5.18b)$$

Et comme $\xi = 1/2$, nous avons $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,out}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_{S,out}) = 1, \forall p \in [0, 1]$. L'entropie de Von Neumann du système joint AS est calculée en annexe B et tracée dans la figure 5.5. On constate que $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS,out})$ augmente quand p tend vers 1 c'est-à-dire quand l'état $\hat{\rho}_{AS,out}$ perd son intrication et les corrélations quantiques à cause de l'action du canal. Quand $p = 0$, $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS,out}) = 0$ car l'état initial est un état pur intriqué. L'entropie sur le système AS augmente parce que l'incertitude sur l'état $\hat{\rho}_{AS,out}$ du système augmente à mesure qu'il évolue vers un état mixte séparable. L'entropie conditionnelle $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,out}|\hat{\rho}_{S,out})_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}}$

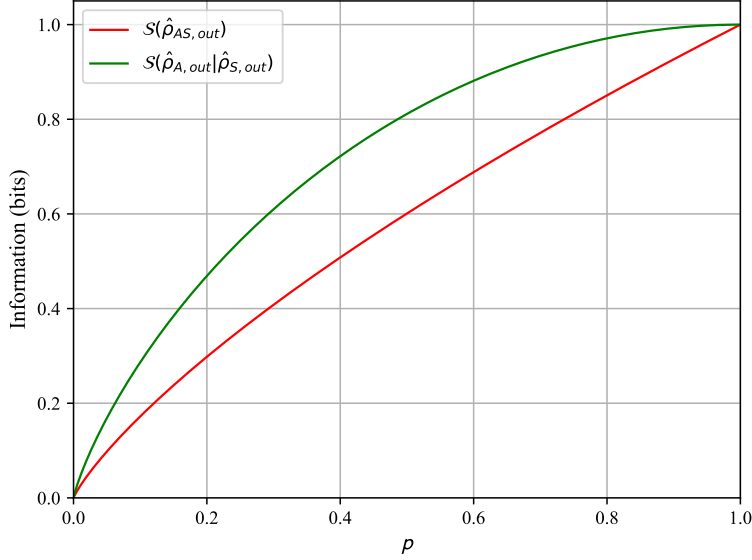


FIGURE 5.5 – Entropie de Von Neumann conditionnelle $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,out}|\hat{\rho}_{S,out})_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}}$ et entropie jointe $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS,out})$ en fonction de $p \in [0, 1]$ pour $\xi = 1/2$.

est calculée en utilisant les projections $\{\hat{M}_S^{(i=1,2)}\}$ avec $\hat{M}_S^{(1)} = \hat{I}_A \otimes |\varepsilon_1\rangle\langle\varepsilon_1|_S$ et $\hat{M}_S^{(2)} = \hat{I}_A \otimes |\varepsilon_2\rangle\langle\varepsilon_2|_S$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,out}|\hat{\rho}_{S,out})_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}} &= \frac{p(1-\xi)}{2} \log\left(\frac{1+p-2p\xi}{p(1-\xi)}\right) + \frac{1-p\xi}{2} \log\left(\frac{1+p-2p\xi}{1-p\xi}\right) \\ &+ \frac{1-p+p\xi}{2} \log\left(\frac{1-p+2p\xi}{1-p+p\xi}\right) + \frac{p\xi}{2} \log\left(\frac{1-p+2p\xi}{p\xi}\right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A,out}|\hat{\rho}_{S,out})_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}}$ est représentée dans la figure 5.5. On constate que l'entropie conditionnelle augmente aussi quand p augmente car on perd les corrélations quantiques entre les systèmes A et S, la mesure de l'état $\hat{\rho}_{S,out}$ ne permet plus de connaître avec certitude l'état $\hat{\rho}_{A,out}$. Et à partir des calculs de ces entropies, nous obtenons la figure 5.6 pour $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS,out})$, $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS,out})$ et la figure 5.7 pour la discordance quantique. Sous l'action du canal, on observe que les grandeurs \mathcal{I} et \mathcal{J} diminuent quand p tend vers 1. L'information mutuelle quantique décroît plus vite que les corrélations classiques sous l'action du canal. Sur la figure 5.7, on remarque que la discordance quantique $\delta(\hat{\rho}_{AS,out})$ et le taux d'intrication $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,out})$ diminuent quand p tend vers 1 mais la discordance survit plus longtemps que l'intrication à l'action du canal. Ainsi, lorsque $p > 0.83$, le système AS n'est plus intriqué mais

il possède toujours des corrélations quantiques puisque $\delta(\hat{\rho}_{AS,out}) \geq 0$ pour $p \in [0.83, 1]$.

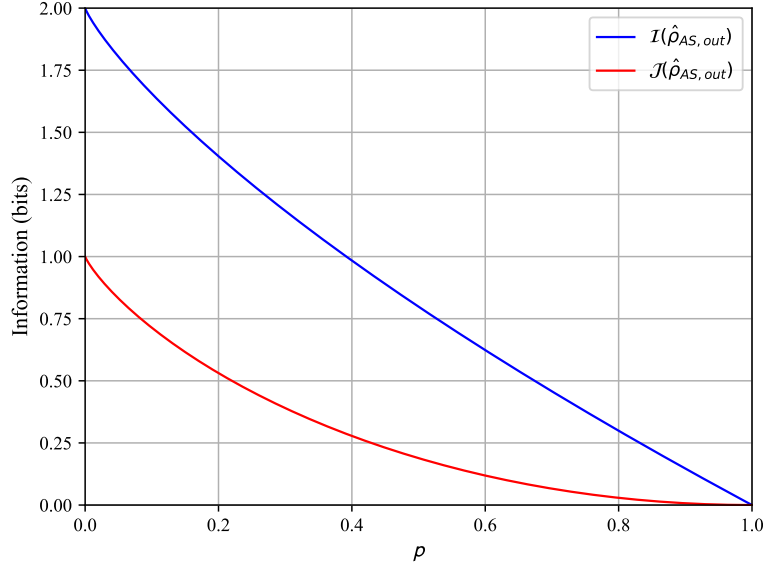


FIGURE 5.6 – Information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS,out})$ et corrélations classiques $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS,out})$ en fonction de $p \in [0, 1]$ pour $\xi = 1/2$.

À travers ces calculs, nous avons observé que des corrélations quantiques survivent au-delà de la perte de l'intrication provoquée par le canal quantique d'amortissement. Or dans l'article de S. Lloyd [10], l'avantage quantique sur la sensibilité de détection est conservée même si l'intrication est perdue. L'approche par la TIQ met en avant la présence des corrélations quantiques qui sont à l'origine de l'amélioration de la sensibilité de détection. Cependant, ces corrélations quantiques disparaissent avec certitude après un temps de propagation finie dans l'atmosphère. Cela soulève la question de la portée effective du radar IQ en terme d'information. En effet, si la perte d'intrication ne provoque pas la perte de l'avantage quantique, la perte des corrélations quantiques en revanche résulterait en une perte de la sensibilité de détection du radar IQ. Par conséquent, même si ce modèle ne se veut pas réaliste, il devient intéressant d'explorer la stratégie de décision liée à l'action du canal quantique de propagation.

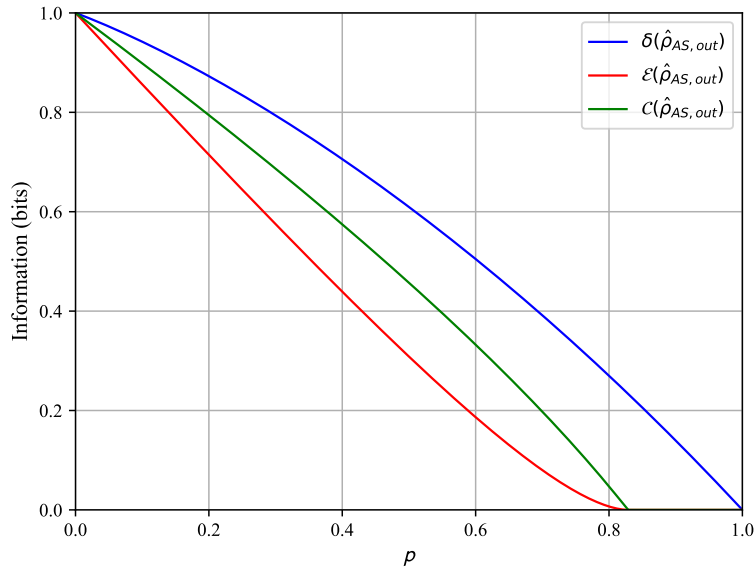


FIGURE 5.7 – Intrication de formation $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,out})$, concurrence de Wootters $\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,out})$ et discord quantique $\delta(\hat{\rho}_{AS,out})$ en fonction de $p \in [0, 1]$ pour $\xi = 1/2$.

5.3.3 Stratégie de décision binaire

Dans cette section, nous reprenons la stratégie de détection binaire de S. Lloyd [10] en tirant parti du livre [90]. Nous liions cette stratégie à l'approche par la théorie de l'information quantique développée dans la section précédente.

La stratégie de décision de Lloyd repose sur deux hypothèses H_0 et H_1 que nous résumons à l'aide de la figure 5.8. L'hypothèse H_0 correspond à l'absence de la cible. Le récepteur du radar IQ ne peut alors recevoir que des photons issus du bruit thermique. L'hypothèse H_1 correspond à la présence de la cible. Le récepteur peut donc potentiellement recevoir le photon S après réflexion sur l'objet ou bien détecter des photons issus du bruit thermique.

Dans le modèle d'illumination quantique de Lloyd, nous rappelons que nous prenons en compte seulement le milieu de propagation et pas la cible. Pour s'affranchir de l'influence de la cible, nous supposons que c'est un objet de probabilité de réflexion $\eta = 1$ qui renvoie avec certitude le photon S dans le radar IQ. Une telle simplification est bien sûr irréaliste car le photon peut être renvoyé ailleurs que vers le radar en principe. Ainsi en termes rigoureux, nous n'effectuons pas une véritable détection avec le radar IQ avec de

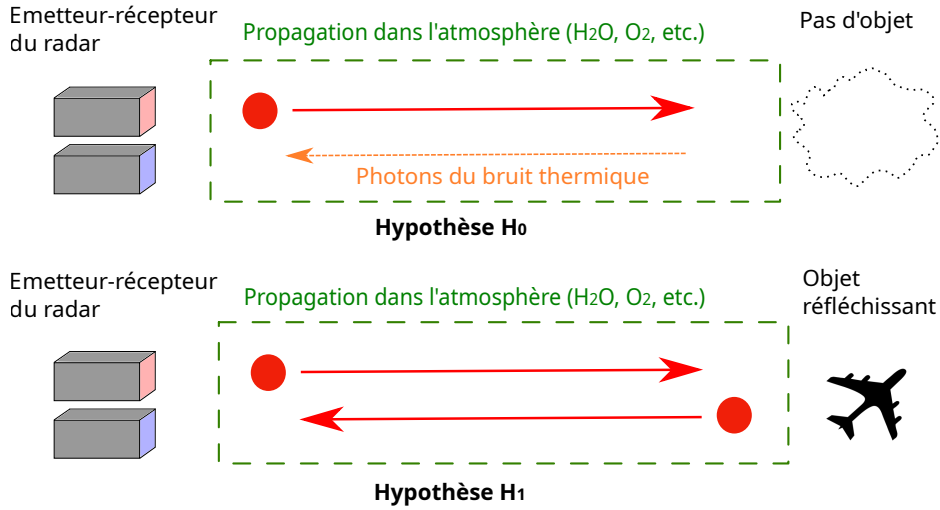


FIGURE 5.8 – Illustration des hypothèses de détection H_0 et H_1 pour le radar à illumination quantique.

telles simplifications mais notre objectif est d'étudier l'évolution de l'information quantique dans le canal d'amortissement avec les RSB calculés par la stratégie de décision.

Les hypothèses simplificatrices faites pour les calculs restent les mêmes. Nous nous limitons à $d = 2$ états thermiques ce qui implique que le nombre de photons thermiques vus par le photo-détecteur est $2n_b \ll 1$, ce qui est irréaliste. Cependant, cela nous permet de travailler avec les qubits thermiques dans la théorie de la décision et d'utiliser le canal d'amortissement agissant comme un bain thermique sur le qubit émis [108]. Le lien avec le canal est défini par la probabilité d'amortissement $p = 1 - e^{-\gamma t}$ défini dans la section 5.3.2 qui, à mesure que p tend vers 1, montre que l'action du canal se fait plus forte. Nous l'adaptions pour la stratégie de décision binaire de S. Lloyd pour notre modèle.

En nous basant sur l'article [10, 23], nous définissons les hypothèses de détection H_0 , H_1 en considérant un radar mono-photon et un radar à illumination quantique. Nous commençons par établir les états thermiques pour le radar mono-photon pour les hypothèses H_0 , H_1 puis nous faisons de même avec pour le radar IQ utilisant des paires de qubits intriqués. Pour chacun des deux radars, nous calculons les probabilités d'erreur de détection grâce aux mesures effectuées.

Pour le radar mono-photon, l'approximation de l'état thermique trouvée pour l'hypothèse

H_0 est donnée par [10] :

$$\hat{\rho}_0 = (1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i| + \mathcal{O}((2n_b)^2) \quad (5.20)$$

Où $|vac\rangle = |0\rangle$ désigne l'état du vide ("vacuum") sur les états d'énergie thermique et $|\varepsilon_i\rangle$ sont les états thermiques peuplés par un photon. Le photo-détecteur ne peut pas avoir un signal utile puisque l'objet est absent. Le photo-détecteur peut seulement obtenir l'état du vide ou bien un photon thermique sur les $d = 2$ états.

Dans l'hypothèse H_1 , l'objet est présent donc il peut renvoyer le photon émis. Nous obtenons l'équation (5.21) où p représente la probabilité d'avoir seulement l'état thermique de l'équation (5.20) en considérant l'action du canal ou bien nous pouvons retrouver le photon S modifié par sa propagation dans l'environnement.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= p\hat{\rho}_0 + (1 - p)\hat{\rho}_S \\ &= p\left[(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|\right] + (1 - p) |\varphi\rangle \langle \varphi|_S + \mathcal{O}((2n_b)^2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Où $|\varphi\rangle_S = 1/\sqrt{2}(|\varepsilon_1\rangle + |\varepsilon_2\rangle)$ est l'état du qubit du photon S.

À partir de là, nous définissons la probabilité d'erreur de détection pour une mesure en utilisant les références [10, 90]. Cela consiste à effectuer des mesures par projection sur les parties positive et négative de l'opérateur $(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_0)$:

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_0) &= p\hat{\rho}_0 + (1 - p)\hat{\rho}_S - \hat{\rho}_0 \\ &= p\left[(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|\right] + (1 - p) |\varphi\rangle \langle \varphi|_S \\ &\quad - \left[(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|\right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

La partie négative correspond à l'hypothèse H_0 et la partie positive correspond à l'hypothèse H_1 . Ainsi, la probabilité de détecter un état est une probabilité conditionnelle d'obtenir un résultat positif ou négatif en sachant l'hypothèse initial, H_0 ou H_1 . Nous faisons à présent un raisonnement analogue pour le radar IQ en tenant compte des équations (5.21), (5.22).

En respectant la configuration du radar IQ de la figure 5.1 et la figure 5.8, nous prenons

en compte les photons A et S de la paire intriquée dans le radar IQ. Dans l'hypothèse H_0 , nous pouvons seulement obtenir un état thermique séparable puisque il n'y a aucun objet à détecter. En accord avec la référence [10], nous obtenons :

$$\hat{\rho}_{AS}^{(H_0)} = \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes \hat{\rho}_0 = \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes [(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|] \quad (5.23)$$

Dans cette équation, nous pouvons, soit détecter un photon issu du bruit thermique sur les états d'énergie $|\varepsilon_i\rangle$ correspondant à l'état produit $\hat{I}_A \otimes \hat{I}_S$, soit l'état du vide $|vac\rangle$. Dans l'hypothèse H_1 , nous obtenons l'équation (5.24) où p est la probabilité d'obtenir l'état thermique (5.23) à cause de l'influence du canal quantique ou bien nous pouvons obtenir l'état intriqué $|\Psi\rangle \langle \Psi|_{AS}$.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AS}^{(H_1)} &= p \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes \hat{\rho}_0 + (1 - p) |\Psi\rangle \langle \Psi|_{AS} \\ &= p \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes [(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|] + (1 - p) |\Psi\rangle \langle \Psi|_{AS} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dans cette équation, nous avons la probabilité décroissante $(1 - p)$ de retrouver le signal utile à mesure que p tend vers 1. Les probabilités d'erreur de détection de la mesure sont calculées avec l'opérateur $(\hat{\rho}_{AS}^{(H_1)} - \hat{\rho}_{AS}^{(H_0)})$ comme pour le radar mono-photon :

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}_{AS}^{(H_1)} - \hat{\rho}_{AS}^{(H_0)}) &= p \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes \hat{\rho}_0 + (1 - p) |\Psi\rangle \langle \Psi|_{AS} - \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes \hat{\rho}_0 \\ &= p \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes [(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|] + (1 - p) |\Psi\rangle \langle \Psi|_{AS} \\ &\quad - \frac{\hat{I}_A}{2} \otimes [(1 - 2n_b) |vac\rangle \langle vac| + n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Où les parties positive et négative correspondent respectivement aux hypothèses H_1 et H_0 . Les probabilités obtenues pour le radar mono-photon et pour le radar IQ sont répertoriées dans le tableau 5.1.

Dans le tableau 5.1, en accord avec les observations de S. Lloyd, on observe que les probabilités d'erreur de détection sont réduites par le nombre de d'états d impliqués dans la paire de qubits intriqués. L'amélioration n'est que d'un facteur $1/2$ ce qui est le cas

Type de radar	Radar mono-photon		Radar IQ	
Résultats	non=(-)	oui=(+)	non=(-)	oui=(+)
H_0	$1 - n_b$	n_b	$1 - \frac{n_b}{2}$	$\frac{n_b}{2}$
H_1	$p(1 - n_b)$	$(1 - p) + pn_b$	$p(1 - \frac{n_b}{2})$	$(1 - p) + p\frac{n_b}{2}$

TABLEAU 5.1 – Probabilités d'erreur de détection pour des mesures faites sur le radar mono-photon et sur le radar IQ.

limite. En utilisant les données du tableau, nous calculons les rapports signal-sur-bruit (RSB) pour les hypothèses H_0 et H_1 des deux radars.

Pour le radar mono-photon, nous calculons les RSB en calculant notamment les ratios $P_e(+)/P_e(-)$ dans l'équation (5.26).

$$\text{RSB}_{H_0} = \frac{P_e(+|H_0)}{P_e(-|H_0)} = \frac{n_b}{1 - n_b} \quad (5.26a)$$

$$\text{RSB}_{H_1} = \frac{P_e(+|H_1)}{P_e(-|H_1)} = \frac{1 - p + pn_b}{p(1 - n_b)} \quad (5.26b)$$

$$\text{RSB}_+ = \frac{P_e(+|H_1)}{P_e(+|H_0)} = \frac{1 - p + pn_b}{n_b} \quad (5.26c)$$

Notons que comme $p = 1 - e^{-\gamma t}$ avec γ constant, quand p tend vers 1, cela correspond à une propagation infinie où nous avons la certitude de perdre le qubit émis ou bien la totalité des corrélations quantiques dans le radar IQ. Dans l'équation (5.26), les RSB_{H_1} et RSB_+ dépendent du paramètre d'amortissement p du canal mais pas RSB_{H_0} . Le RSB_{H_0} dépend exclusivement du bruit thermique $n_b \ll 1$. Nous pouvons associer le RSB_{H_0} avec une probabilité de fausse alarme, de détecter un signal alors qu'aucun objet n'est présent. Comme $n_b \ll 1$, $\text{RSB}_{H_0} < 1$, donc la probabilité de fausse alarme est faible. Pour le RSB_{H_1} , nous avons $pn_b \ll 1$ car $p \in [0, 1]$ et $n_b \ll 1$ donc pour de faibles valeurs de p , nous avons $\text{RSB}_{H_1} > 1$. En revanche, quand p tend vers 1, le RSB_{H_1} tend vers zéro. L'action du canal quantique fait s'effondrer le RSB. Le RSB_+ sert à comparer le signal utile de l'hypothèse H_1 du signal du bruit de l'hypothèse H_0 . Pour p tendant vers 1 avec $n_b \ll 1$, on a $\text{RSB}_+ \approx (1 - p)/n_b$ donc le RSB décroît rapidement vers zéro à cause du facteur $(1 - p)$. Cependant, pour $p \ll 1$, $\text{RSB}_+ > 1$ parce que l'action du canal quantique n'est pas assez forte.

Pour comparer les capacités des deux radars, nous utilisons le RSB_+ parce qu'il fait intervenir les 2 hypothèses de détection. Nous passons aux RSB pour le radar IQ écrits

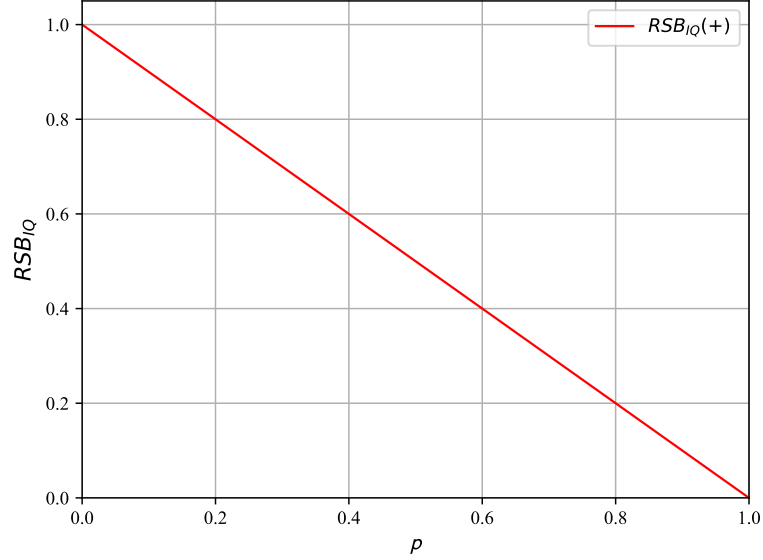


FIGURE 5.9 – RSB_+ du radar IQ en fonction du paramètre $p \in [0, 1]$ avec un bruit thermique n_b pour $f = 5.0 \times 10^{14}$ Hz. Comme le bruit est très faible dans le régime optique, le RSB est très fort pour $p \ll 1$. Il a donc été normalisé avec sa valeur maximale.

dans l'équation (5.27).

$$RSB_{H_0} = \frac{P_e(+|H_0)}{P_e(-|H_0)} = \frac{n_b/2}{1 - n_b/2} \quad (5.27a)$$

$$RSB_{H_1} = \frac{P_e(+|H_1)}{P_e(-|H_1)} = \frac{1 - p + pn_b/2}{p(1 - n_b/2)} \quad (5.27b)$$

$$RSB_+ = \frac{P_e(+|H_1)}{P_e(+|H_0)} = \frac{1 - p + pn_b/2}{n_b/2} \quad (5.27c)$$

Comme le montre l'article [10], les RSB calculés bénéficient d'une amélioration par le nombre d'états intriqués. Le RSB_{H_0} associé à la probabilité de fausse alarme est plus faible que le RSB_{H_0} du radar mono-photon par un facteur $1/2$ originaire des états intriqués. Pour le RSB_{H_1} , comme $n_b/2 \ll 1$, on a $SNR_{H_1} \approx (1 - p)/p$ donc $RSB_{H_1} > 1$ pour de faibles valeurs de p . Cependant, quand p tend vers 1, RSB_{H_1} tend vers zéro à cause de l'influence du canal quantique. De manière similaire, comme $n_b/2 \ll 1$, $RSB_+ \approx (1 - p)/n_b/2$ et donc $RSB_+ > 1$ pour de faibles valeurs de p mais le RSB_+ disparaît quand p tend vers 1. Ce RSB est tracé dans la figure 5.9 où nous voyons sa linéarité en fonction de p .

Les RSB_{H_1} , RSB_+ du radar mono-photon et du radar IQ ont le même comportement à savoir, $\text{RSB}_{H_1} > 1$, $\text{RSB}_+ > 1$ quand $p \ll 1$ puis ils tendent vers zéro quand p tend vers 1. Le lien entre ces deux situations radar reste le canal quantique d'amortissement (5.16) qui agit sur le qubit S émis par le radar. Plus la propagation est longue, plus la perturbation sur l'état quantique du photon S est grande. En bref, plus le paramètre p s'approche de la valeur 1, plus la propagation associée est longue. Or, dans les deux types de radar, c'est le photon émis qui est perturbé. Néanmoins, le plus intéressant est que plus p est proche de 1, plus la probabilité d'obtenir un état séparable $\hat{I}_A/2 \otimes \hat{\rho}_0$ est grande dans l'équation (5.24).

Nous rappelons à présent les résultats sur chacun des modèles utilisés. Le canal quantique d'amortissement permet de décrire l'évolution de l'état intriqué $\hat{\rho}_{\text{AS, out}}$ [108]. Le canal modélise la décohérence de l'état initial complètement intriqué en fonction du paramètre $p = 1 - e^{-\gamma t}$, où γ dépend du milieu atmosphérique traversé. Nous insistons sur le fait que la valeur de γ est qualitative. Lui fixer une valeur sort du cadre de cette étude se basant sur l'article [10]. Toutefois, nous pouvons supposer que la valeur γ dans le régime optique est supérieure comparée à celle du régime micro-onde. Pour cette étude, nous restons dans le régime optique pour respecter les hypothèses simplificatrices de la théorie de la décision binaire. Cette théorie introduit le bruit thermique tandis que le canal quantique introduit l'action de l'environnement.

Le canal quantique utilisé introduit l'action de l'environnement sur la paire de qubits intriqués AS. Le canal d'amortissement fait évoluer l'état totalement intriqué $|\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|_{\text{AS}}$ vers un état séparable totalement mixte $\hat{I}_A/2 \otimes \hat{I}_S/2$.

Dans la théorie de la décision de S. Lloyd, nous considérons seulement le bruit thermique pour la photo-détection afin d'obtenir les RSB relatifs aux hypothèses H_0 et H_1 . Dans l'équation (5.27c), le RSB_+ compare les hypothèses H_1 et H_0 . En regardant la figure 5.9, le RSB normalisé atteint son maximum $\text{RSB}_+ = 1$ quand $p = 0$ tandis que $\text{RSB}_+ \rightarrow 0$ quand $p = 1$. Le maximum de RSB_+ correspond à l'état complètement intriqué $|\Psi\rangle \langle \Psi|_{\text{AS}}$ tandis que $\text{RSB}_+ \rightarrow 0$ correspond à l'état totalement mixte $\hat{I}_A/2 \otimes n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|$. Or, la stratégie de décision et le canal quantique sont liés par le paramètre p dans leur construction ce qui nous autorise à comparer l'état $\hat{\rho}_{\text{AS, out}}$ avec $|\Psi\rangle \langle \Psi|_{\text{AS}}$.

Nous rappelons qu'un système quantique ouvert est un système plongé dans un environnement qui introduit des perturbations faisant évoluer l'état quantique en un état complètement mixte [47]. D'après la figure 5.7, l'état $\hat{\rho}_{\text{AS, out}}$ n'est plus intriqué sur l'intervalle $p \in [0.83, 1]$ mais la discordance quantique n'est pas égale à zéro. L'état est donc

séparable mais il y a donc des corrélations quantiques restantes. D'après la figure 5.9, nous avons $0 < \text{RSB}_+ < 1$ sur l'intervalle $p \in [0.83, 1]$. Le RSB_+ n'est pas égale à zéro quand l'état n'est plus intriqué bien qu'il possède des corrélations quantiques rémanentes. Cela montre le rôle de la discorde quantique dans la stratégie de décision binaire du radar IQ.

Le canal d'amortissement et la stratégie de décision sont couplés avec le paramètre p et les états marginaux coïncident. Cependant, nous n'avons pas une correspondance parfaite pour l'état séparable du canal quantique, $\hat{I}_{AS}/4$, et l'état séparable de la stratégie de décision $\hat{I}_A/2 \otimes n_b \sum_{i=1}^2 |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon_i|$. La différence vient du bruit thermique introduit par la stratégie de décision binaire qui n'apparaît pas explicitement dans le canal quantique d'amortissement. Malgré cette différence, les deux états quantiques sont similaires.

En résumé, quand la discorde est égale à zéro, les corrélations quantiques disparaissent. Dans les deux modèles, nous avons un état séparable complètement mixte. De plus, nous avons $\text{RSB}_+ \rightarrow 0$ pour cet état parce que nous ne pouvons pas faire la discrimination entre le qubit thermique envoyé dans l'atmosphère par le radar IQ et le qubit issu du bruit thermique. De ce point de vue, nous pouvons voir la disparition de la discorde comme la limite opérationnelle du radar IQ.

Dans cette étude, le parallèle entre le canal d'amortissement et la théorie de la décision [10], nous permet de mettre en avant le rôle de la discorde dans la résistance au bruit dans le radar IQ ce qui corrobore le résultat de l'article [109]. De plus, nous avons utilisé un lien qui dépend de l'environnement entre les deux modèles. Cela nous a permis de décrire l'action du milieu d'un côté, et les RSB qui dépendent du bruit thermique de l'autre. Finalement, nous avons trouvé dans ce modèle simplifié que la discorde est liée aux RSB calculés avec la théorie de la décision. En conséquence, il est possible que la discorde intervienne dans la portée du radar IQ du point de vue de l'information quantique. Toutefois, ce modèle simplifié comporte des limites qu'il nous faut souligner.

Nous résumons ces limites en trois points. D'abord, nous avons modélisé la phase de propagation du photon S du radar IQ au moyen d'un canal quantique d'amortissement issu de l'article [108] alors que nous aurions pu utiliser une équation maîtresse [47]. Cependant, cette dernière nécessite un traitement mathématique plus lourd qui se base sur la définition d'un opérateur Hamiltonien d'interaction entre le photon et son environnement. Cela implique une bonne compréhension de tous les processus d'interaction pour définir un tel Hamiltonien pour l'état intriqué initial. Le canal d'amortissement utilisé est un outil

suffisant de la TIQ pour modéliser la phase de propagation en considérant la décohérence comme une moyenne des processus sans détailler chaque phénomène. L'approche par le canal quantique agissant comme un bain thermique sur le qubit S nous donne une idée de l'évolution globale de l'état intriqué $\hat{\rho}_{AS, \text{out}}$ dans l'atmosphère. Une étude phénoménologique serait certes plus adéquate mais cela sort du cadre de cette étude [7].

Deuxièmement, la stratégie de décision binaire repose sur des approximations sur les états thermiques en présence d'un bruit thermique faible n_b ce qui nous limite au régime de fréquence optique pour le radar IQ. De plus, le lien entre le canal et la stratégie de décision symbolisée par $p = 1 - e^{-\gamma t}$ est très simple et il serait difficile de donner une valeur réaliste à γ . Enfin, le canal quantique ne fait pas apparaître le bruit thermique. Dans les deux modèles, les états produits séparables obtenus ne correspondent pas parfaitement entre eux. Cela s'explique en partie par la simplicité du lien entre les deux modèles ainsi que les approximations faites pour construire la stratégie de décision. Malgré cela, le point commun dans les deux modèles est le passage d'un état complètement intriqué à un état séparable totalement mixte lors de la phase de propagation. Autrement dit, le passage d'un état avec des corrélations quantiques maximales à un état quantique en étant dépourvu.

Troisièmement, le modèle est réalisé avec des qubits sur les niveaux d'énergie thermique c'est-à-dire pour un photo-détecteur capable de distinguer $d = 2$ états pour un bruit thermique moyen $n_b \ll 1$. Cela permet de le lier au modèle de l'article [108] mais cela nous restreint au cas limite d'énergie très faible à cause du faible nombre d'états considérés. Par conséquent, le modèle présenté n'est pas réaliste. Afin d'avoir une meilleure approche, nous devrions prendre un plus grand nombre de d'états d mais cela requiert de modifier le canal quantique d'amortissement. Cela n'est pas si simple d'autant que la définition de l'état intriqué initial est plus complexe comme pour l'action du canal sur cet état.

Dans cette section, nous avons discuté de la stratégie de décision de S. Lloyd en la liant à l'action du canal d'amortissement utilisé pour modéliser la phase de propagation. Ensuite, nous avons soulevé les limites du modèle élémentaire présenté. Nous donnons une conclusion à cette étude ci-dessous.

5.3.4 Conclusion

Ce travail a présenté l'estimation de l'influence de la propagation atmosphérique sur un radar IQ basé sur la photo-détection en adoptant une approche par la théorie de l'infor-

mation quantique [7].

Pour souligner l'effet de la phase de propagation atmosphérique, nous avons lié le modèle de détection formulé par S. Lloyd à un canal quantique d'amortissement modélisant cette phase de propagation [108]. La stratégie de détection a été couplée au canal par l'intermédiaire du paramètre d'amortissement $p = 1 - e^{-\gamma t}$. De ce fait, nous avons pu lier le taux de corrélations quantiques représenté par la discorde avec les RSB calculés par la stratégie de décision binaire formulée par Lloyd [10]. Cela montre le rôle de la discorde quantique dans le radar IQ en parallèle de l'intrication. De plus, cela corrobore les résultats de la littérature du rôle de la discorde dans la résistance au bruit des performances du radar IQ [109]. Toutefois, le modèle présenté n'est pas réaliste à cause des multiples approximations faites sur la stratégie de détection ainsi qu'à cause de la simplicité du lien entre le canal quantique et la stratégie de détection. De plus, l'utilisation du canal contraint l'utilisation d'un nombre limité d'états $d = 2$ ce qui nous confine à des énergies très faibles donc le modèle n'est pas réaliste.

Les améliorations à apporter au modèle sont multiples. Nous devrions notamment nous étendre aux qudits c'est-à-dire de prendre des états quantiques de plus grande dimension ou même de passer dans le formalisme de la variable continue. De plus, envisager une modélisation physique plus poussée de la propagation dans l'atmosphère pourrait être bénéfique sur la thématique du radar IQ. Cependant, nous continuons pour l'instant à utiliser le formalisme de la TIQ développé dans les chapitres 3 et 4.

5.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre méthodologie générale de travail sur le radar IQ, une analyse sur le radar IQ en OAM et une étude sur le radar IQ de S. Lloyd.

Dans un premier temps, nous avons étudié la possibilité d'utiliser les OAM sur des paires de photons intriqués pour l'usage du radar IQ. Il s'est avéré que d'après les résultats repris dans la littérature traitant de la propagation des OAM dans l'atmosphère que cette idée a peu de chances d'aboutir à cause de la distance de survie faible de l'intrication quantique. Nous avons donc abandonné cette piste de recherche.

Dans un deuxième temps, nous avons repris le radar IQ de S. Lloyd en combinant un modèle de propagation avec le modèle de décision binaire. Cela a permis de mettre en évidence le rôle de la discorde dans la stratégie de détection en nous basant sur une approche

par la TIQ bien que le modèle élémentaire se limite à de faibles énergies pour accorder le modèle de propagation et de décision et qu'il pourrait être amélioré pour mieux accorder la stratégie de détection avec la modélisation de la propagation.

En nous référant à ces résultats, nous continuons à étudier le radar IQ en explorant d'autres grandeurs physiques pour créer des états intriqués.

APPROCHE DU RADAR IQ EN POLARISATION PAR LA THÉORIE DE L'INFORMATION QUANTIQUE

Sommaire du chapitre

6.1	Étude générique du radar IQ	142
6.1.1	Description de la propagation dans le radar IQ	142
6.1.2	Évolution de l'information du système	145
6.1.3	Conclusion	148
6.2	Le radar IQ en états de polarisation	149
6.2.1	Description du système initial	149
6.2.2	Évolution de l'information quantique	152
6.2.3	Stratégie de détection du radar	155
6.2.4	Conclusion	163
6.3	Le radar IQ en états de polarisation : 2 ^{ème} approche	164
6.3.1	Description du système initial et des hypothèses de détection	164
6.3.2	Évolution de l'information quantique	166
6.3.3	Stratégie de détection du radar IQ	169
6.3.4	Conclusion	173
6.4	Conclusion	173

Nous étudions un radar IQ sur les niveaux de polarisation dans l'atmosphère. Pour cela, nous commençons dans la section 6.1 par présenter une étude générique où on considère que le milieu agit comme une mesure sur l'état intriqué. Ensuite dans la section 6.2, nous étudions le radar IQ en polarisation modélisant le milieu par un canal de propagation et en établissant une stratégie de décision en parallèle. Dans cette étude, on essaye d'estimer approximativement la survie de l'intrication dans l'atmosphère. Dans la section 6.3, nous

repreons le même modèle de canal quantique où nous étudions l'impact des contributions du bruit thermique, de l'action de l'environnement sur l'état intriqué et de la cible sur la stratégie de détection du radar IQ. La section 6.4 donne la conclusion de ce chapitre.

6.1 Étude générique du radar IQ

Cette étude préliminaire a pour objectif de regarder l'évolution d'un état quantique intriqué dans l'atmosphère pour le radar IQ en modifiant le modèle de propagation en supposant que le milieu agit comme un opérateur de mesure sur l'état du photon émis. Nous déduisons le taux d'intrication quantique et le taux de corrélations quantiques lors de cette propagation puis nous estimons les probabilités d'erreur de détection sur plusieurs émissions du radar IQ.

6.1.1 Description de la propagation dans le radar IQ

L'étude se base sur un radar IQ tel que celui décrit la figure 5.1. Nous considérons que le radar produit des paires de photons intriqués sur les états de polarisation que nous nommons $|0\rangle_i, |1\rangle_i$ où $i = A$ ou S .

Dans l'étape (1), la paire de photons est complètement intriquée sur un état de Bell $|\Psi^-\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle_{AS} - |10\rangle_{AS})$ ce qui nous donne la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{AS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Où $\hat{\rho}_{AS} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AS})$ est décrit sur la base des états propres $\{|00\rangle_{AS}, |01\rangle_{AS}, |10\rangle_{AS}, |11\rangle_{AS}\}$ de l'espace des états à 2 photons avec l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{AS} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_S$. Ensuite, les photons A et S sont séparés lors de l'étape (2). Le photon A est piégé dans une mémoire quantique que nous supposons être une cavité avec des miroirs parfaits. Le photon S est émis dans un milieu perturbateur que nous choisissons comme étant l'atmosphère terrestre. Sous l'action de l'atmosphère, l'intrication initiale entre le photon A et le photon S va être détruite. Dans l'article de S. Lloyd [10], le radar IQ fonctionne dans le régime optique et on suppose que l'intrication est perdue instantanément. Malgré cela, le gain en sensibilité du radar est conservé mais il dépend du nombre d'états impliqués dans l'état

intriqué initial [23]. Il est surprenant que le gain soit conservé car l'intrication quantique témoigne des fortes corrélations quantiques qui existent entre le photon A et le photon S or leur perte devrait signifier la perte du gain en sensibilité de détection. Nous étudions la phase de propagation du photon S pour suivre l'évolution de l'intrication et des corrélations quantiques.

La phase de propagation correspond à l'étape (2) de la figure 5.1. Le photon A étant piégé dans la cavité (étape (2.a)), seul le photon S interagit directement avec son environnement. Dans le contexte radar, nous nous référons à la stratégie de décision binaire de S. Lloyd entre deux hypothèses H_1 et H_0 liées à la détection d'un état quantique particulier : intriqué ou non. Dans notre cas, l'hypothèse H_0 correspond à l'absence de la cible donc nous ne pouvons détecter que des photons issus du bruit thermique dans l'atmosphère. Le système AS perdra avec certitude son intrication. L'hypothèse H_1 correspond à la présence de l'objet où l'intrication peut potentiellement survivre.

Le système de photons AS est dans l'état initial $|\Psi^-\rangle_{AS}$. En nous focalisant sur l'hypothèse H_1 où on récupère le photon après la phase de propagation, nous pouvons obtenir deux états quantiques possibles à cause de l'interaction : un état complètement intriqué $\hat{\rho}_{AS}^{(e)} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|_{AS}$ ("e" = intriqué) où un état non-intriqué $\hat{\rho}_{AS}^{(sep)}$ ("sep" = séparable). Cet état séparable est un état totalement mixte $\hat{\rho}_{AS}^{(sep)} = \hat{I}_{AS}/4$ où \hat{I}_{AS} est l'opérateur identité sur le système AS. On peut alors écrire l'évolution de l'état du système AS comme un état de Werner [88] :

$$\hat{\rho}_{AS} \rightarrow \gamma \hat{\rho}_{AS}^{(e)} + (1 - \gamma) \hat{\rho}_{AS}^{(sep)} \quad (6.2)$$

Où $\gamma \in [0, 1]$ contrôle le mélange statistique des 2 états marginaux. Plus le photon S interagit avec son environnement de propagation, plus l'état $\hat{\rho}_{AS}^{(sep)}$ sera représenté dans l'équation (6.2). Pour modéliser ce comportement, nous posons $\gamma = e^{-\Gamma x}$ où $\Gamma \in [0, 1]$ représente la force d'interaction de l'atmosphère sur le photon S en fonction de la distance $x \in [0, +\infty[$ en mètres. Notons qu'ici l'unité de Γ est arbitraire. En supposant que le photon S n'est ni absorbé, ni diffusé, il va tout de même interagir avec l'environnement de propagation autrement dit avec les molécules de l'atmosphère ce qui va modifier son état quantique mais aussi celui du système total AS. Pour modéliser l'action locale de mesure sur le photon S, nous utilisons un opérateur de mesure agissant seulement sur le système S :

$$\hat{X} = \hat{I}_A \otimes \sum_{i=0}^1 \hat{X}_i \quad (6.3)$$

Où \hat{I}_A est l'opérateur identité sur le système A. L'opérateur de mesure locale vérifie la relation d'unitarité : $\sum_i \hat{X}_i^\dagger \hat{X}_i = \hat{I}$ avec la normalisation $K = \sqrt{e^{-2\Gamma x} + e^{2\Gamma x}}$ ce qui nous donne l'équation :

$$\hat{X}_0 = \hat{X}_0^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{e^{\Gamma x}}{K} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-\Gamma x}}{K} \end{pmatrix} \quad (6.4a)$$

$$\hat{X}_1 = \hat{X}_1^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\Gamma x}}{K} & 0 \\ 0 & \frac{e^{\Gamma x}}{K} \end{pmatrix} \quad (6.4b)$$

On suppose que cette interaction prend la forme d'une mesure partielle locale sur le système AS où seul le photon S est soumis à la "mesure" de l'environnement c'est pourquoi on applique seulement l'opérateur (6.4a) sur le système AS projetant le qubit S sur son état propre $|0\rangle_S$. Dans le cadre de cette étude, nous appliquons l'opérateur (6.4a) à l'état complètement intriqué (6.1) que nous utilisons comme système de référence. Nous obtenons la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{AS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-2\Gamma x}}{K} & -\frac{1}{K} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{K} & \frac{e^{2\Gamma x}}{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

L'état décrit par l'opérateur densité (6.5) est physiquement impossible car il ne peut pas garder sa configuration initiale s'il évolue sous l'action de l'environnement de propagation du photon S mais il nous est utile pour mettre en valeur l'évolution de l'état (6.2) ce qui nous donne la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{AS}^{(W)} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\gamma)e^{2\Gamma x}}{2K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\gamma)e^{-2\Gamma x}}{2K} & -\frac{\gamma}{K} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{K} & \frac{(1+\gamma)e^{2\Gamma x}}{2K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\gamma)e^{-2\Gamma x}}{2K} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Nous utilisons les opérateurs densités (6.5) et (6.6) pour calculer le taux d'intrication et le taux de corrélations quantiques.

6.1.2 Évolution de l'information du système

Nous calculons le taux d'intrication et la discorde quantique avant de calculer les probabilités d'erreur de détection sur l'équation (6.8) assimilée à l'hypothèse de détection H_1 .

Le calcul du taux d'intrication utilise l'intrication de formation avec la concurrence de Wootters [67]. On utilise les équations de la formule (4.30) du chapitre 4. Pour le calcul de la discorde quantique, on utilise les formules (4.40) et (4.41) en prenant comme opérateurs de mesure partielle sur les états du photon : $\{\hat{M}_S^{(i)}\}_{i=0,1}$ qui sont des opérateurs de projection ce qui permet de maximiser le taux de corrélations classiques d'après l'équation (4.40a). Ces opérateurs interviennent dans le calcul de l'entropie conditionnelle :

$$\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS})_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}} = \mathcal{S}(\hat{\rho}_A) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_S)_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}} = \mathcal{S}(\hat{\rho}_A) - \sum_{i=0}^1 p_i \mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(i)}) \quad (6.7)$$

Où on a $p_i = \text{Tr}\{(\hat{I}_A \otimes \hat{M}_S^{(i)})\hat{\rho}_{AS}\}$ et $\hat{\rho}_A^{(i)} = \text{Tr}_S\{(\hat{I}_A \otimes \hat{M}_S^{(i)})\hat{\rho}_{AS}\}/p_i$. Avec les calculs numériques, nous obtenons la figure 6.1 pour l'état $\hat{\rho}_{AS}$ et la figure 6.2 pour l'état de Werner $\hat{\rho}_{AS}^{(W)}$.

Dans la figure 6.1, l'intrication de formation et la discorde quantique décroissent de manière identique pour les valeurs de $\Gamma = \{0.2, 0.4, 0.9\}$ testées parce que le taux d'intrication et le taux de corrélations quantiques sont tels que : $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS}) = \delta(\hat{\rho}_{AS}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_S)$. Toutefois, nous rappelons que la courbe n'est pas réaliste puisque l'état quantique ne peut garder une telle configuration quand il est soumis à l'action du milieu de propagation. La courbe est utile pour visualiser l'évolution de l'état de Werner dans la figure 6.2. Dans la figure 6.1, le taux d'intrication $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS})$ et la discorde $\delta(\hat{\rho}_{AS})$ diminuent d'autant plus rapidement pour atteindre zéro à mesure que la force d'interaction de l'environnement Γ tend vers 1.

Dans la figure 6.2, nous avons le taux d'intrication et la discorde pour l'état défini par l'équation (6.6), ce qui traduit à la fois l'action de mesure de l'environnement sur le système S et le fait que l'état intriqué initial évolue vers un état mixte. Cela s'observe par la pureté de l'état qui décroît en fonction de la distance de propagation (figure 6.2.b). Nous observons aussi que le taux d'intrication diminue tandis que la discorde quantique diminue puis stagne à 0.5 bits en fonction de la distance de propagation (figure 6.2.a). Cette évolution traduit une résilience des corrélations quantiques à l'action de l'environnement modélisée par l'action de l'opérateur de mesure sur l'état de Werner. Cela traduit aussi une limite à cette modélisation de l'action du milieu de propagation parce que l'aug-

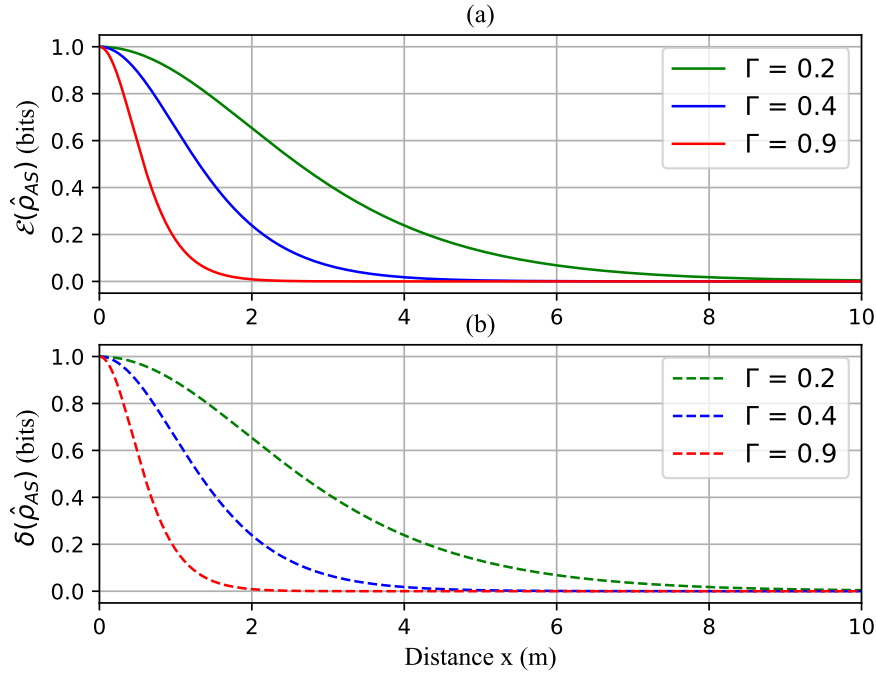


FIGURE 6.1 – (a) Taux d'intrication et (b) discorde quantique en fonction de la distance parcourue pour différentes valeurs du paramètre $\Gamma \in [0, 1]$ pour l'état intriqué initial conservant la même configuration de sa matrice densité malgré l'opérateur de mesure du milieu de propagation. L'unité de la distance est arbitraire et dépend de comment est défini le paramètre Γ .

mentation de la discorde quantique alors que le taux d'intrication continue de diminuer signifie que le milieu introduit des corrélations quantiques dans le système AS du point de vue du radar IQ. Cela est impossible parce que les corrélations quantiques entre A et S ne peuvent que disparaître à cause de l'action du milieu de propagation, elles ne peuvent pas augmenter. Malgré ce problème de modélisation et le fait que Γ est un paramètre mathématique qui ne représente pas une quantité physique réelle, nous avons mis en évidence l'intérêt de la résilience de la discorde quantique pour le radar IQ par rapport à une action perturbatrice imposée sur le système AS.

Pour détecter un objet, un radar quantique ne peut pas envoyer qu'une seule paire de photons. Plusieurs paires intriquées successives doivent être utilisées dans cet objectif et le radar IQ doit pouvoir discriminer les états quantiques entre eux en fonction des hypothèses de détection H_0 et H_1 mentionnées plus haut. En se référant à l'article [10], nous calculons les bornes de détection pour l'état de l'équation (6.2) suivant les hypothèses

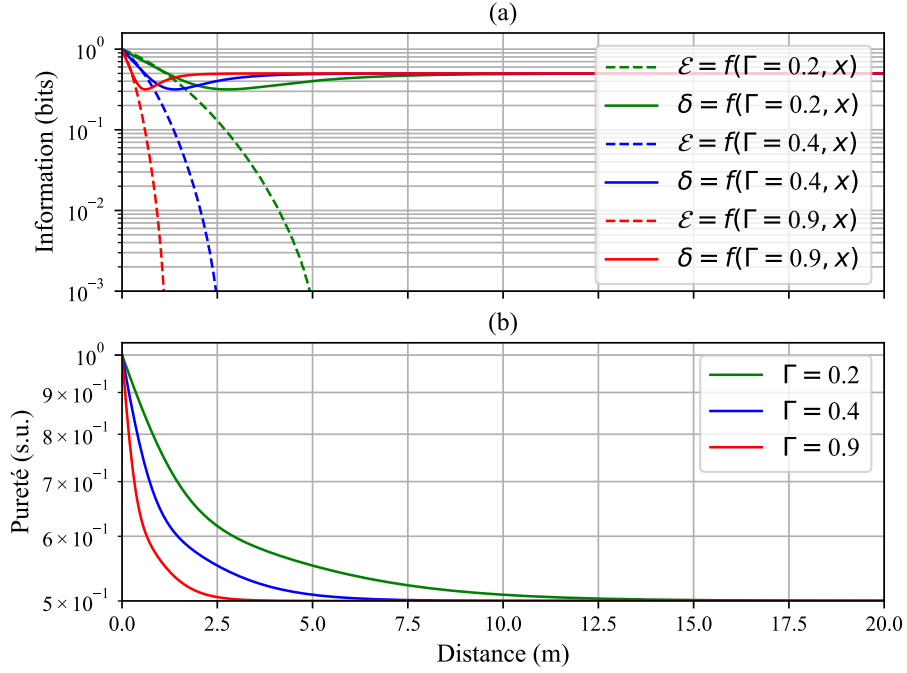


FIGURE 6.2 – (a) Taux d'intrication et de discordance quantique en fonction de la distance parcourue pour différentes valeurs du paramètre $\Gamma \in [0, 1]$ pour l'état de Werner soumis à l'opérateur de mesure du milieu de propagation. (b) Pureté de l'état de Werner en fonction de la distance parcourue.

de détection H_0 et H_1 . Nous posons pour cela : $\hat{\rho}_{AS}^{(sep)} = \hat{\rho}_0$ et $\hat{\rho}_{AS}^{(e)} = \hat{\rho}_1$, puis nous calculons les bornes de Batthacharyya ξ_B et de Chernoff ξ_C [26, 92] :

$$\xi_B = -\log \left(\text{Tr} \left\{ \sqrt{\hat{\rho}_{AS}^{(sep)}} \sqrt{\hat{\rho}_{AS}^{(e)}} \right\} \right) \quad (6.8a)$$

$$\xi_C = -\log \left(\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \left(\text{Tr} \left\{ (\hat{\rho}_{AS}^{(sep)})^\alpha (\hat{\rho}_{AS}^{(e)})^{1-\alpha} \right\} \right) \right) \quad (6.8b)$$

Pour obtenir les probabilités d'erreur de détection P_e telles que :

$$P_e \leq \frac{1}{2} e^{-M \cdot \xi_C} \leq \frac{1}{2} e^{-M \cdot \xi_B} \quad (6.9)$$

Où M est le nombre de paires de photons intriqués émises. Nous obtenons la figure 6.3. Pour une seule paire produite, nous avons $P_{\text{Chernoff}} = 0.125 < P_{\text{Batthacharyya}} = 0.25$. Dans cette figure, nous observons que cette probabilité d'erreur décroît de manière monotone à mesure que le nombre de paires de photons intriqués produites M augmente. Pour

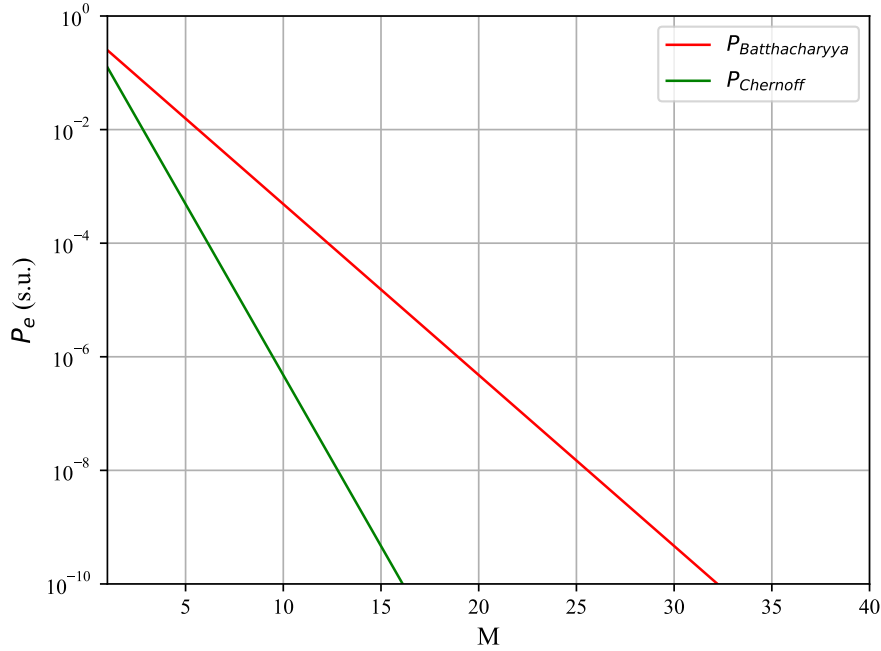


FIGURE 6.3 – Probabilités d’erreur de détection P_e en fonction du nombre de paires de photons intriqués M générées par le radar IQ calculées avec les bornes de Batthacharyya et de Chernoff.

$M = 10$, nous avons déjà des probabilités d’erreur de détection faibles : $P_{\text{Chernoff}} < 10^{-2}$ et $P_{\text{Batthacharyya}} < 10^{-6}$, pour la discrimination des 2 états extrémaux de l’équation (6.2). Notons cependant que la stratégie de décision binaire utilisée à titre d’exemple ici repose sur l’hypothèse qu’on puisse distinguer $\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(\text{sep})} \equiv \hat{\rho}_0$ de $\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(e)} \equiv \hat{\rho}_1$. Nous devons donc considérer la figure 6.3 comme un exemple de l’estimation de cette stratégie décisionnaire. De plus, celle-ci n’est pas très intéressante dans le cas où nous émettons successivement les paires de photons puisque l’évolution de l’information quantique est similaire dans l’optique où on considère qu’ils subissent les mêmes perturbations sur chaque émission.

6.1.3 Conclusion

Nous avons observé l’évolution du taux d’intrication et de la discordance quantique en fonction de la distance parcourue par le photon émis dans le milieu de propagation atmosphérique dont la force d’interaction sur le photon émis est représentée par le paramètre $\Gamma \in [0, 1]$. Nous avons modélisé l’influence de ce milieu de propagation par un opérateur de mesure partielle sur le photon S qui se propage et par le fait que l’état intriqué évolue vers un

état mixte séparable à cause de l'action du milieu.

Nous avons observé une résilience de la discordance à l'action du modèle de propagation tandis que l'intrication disparaissait. De plus, le calcul des probabilités d'erreur de détection en fonction du nombre d'états quantiques générés M montre que ces probabilités diminuent avec le nombre d'états intriqués créés successivement. Néanmoins, ce dernier calcul apporte peu d'information car l'évolution supposée de l'information quantique est similaire sur chacune des paires de photons produites. Malgré les faiblesses du modèle sur la propagation à l'infini qui fait stagner le taux de corrélations quantiques, nous en concluons que la discordance quantique devrait participer à la résilience du radar IQ au bruit de l'environnement.

6.2 Le radar IQ en états de polarisation

Nous continuons notre étude sur un radar IQ sur les états de polarisation des photons impliqués dans la paire intriquée initiale [49, 110, 111]. Ici, notre objectif est de lier la discordance à la stratégie de détection du radar en prenant en compte le milieu de propagation atmosphérique et la cible. Pour cela, on construit en parallèle du modèle de propagation une stratégie de détection binaire. Ensuite, nous donnons une estimation des rapports signal-sur-bruit du radar dans le régime micro-onde dans l'atmosphère. Ce travail a été en partie présenté dans les conférences EQTC'2021 et PIERS'2022 [112, 113].

6.2.1 Description du système initial

L'utilisation des états de polarisation des photons pour le radar IQ est motivée par le fait qu'il existe des moyens technologiques de créer des états intriqués sur ce degré de liberté [49]. De plus, les états de polarisation sont fréquemment utilisés en TIQ. En suivant les mêmes étapes du radar IQ (figure 5.1), nous étudions la propagation du photon S en états de polarisation dans l'atmosphère.

Pour ce radar IQ, nous utilisons donc les états de polarisation d'un photon ce qui nous restreint à l'utilisation de qubits. Nous décrivons l'état du photon sur les états de polarisation horizontale et verticale : $\{|H\rangle_i, |V\rangle_i\} \in \mathcal{H}_i$ où $i = A, S$. La paire de photons intriqués initiale se trouve dans un des quatre états de Bell $|\Phi^\pm\rangle_{AS}, |\Psi^\pm\rangle_{AS}$ dans la base

des vecteurs propres $\{|HH\rangle_{AS}, |HV\rangle_{AS}, |VH\rangle_{AS}, |VV\rangle_{AS}\} \in \mathcal{H}_{AS} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_S$:

$$|\Psi^\pm\rangle_{AS} = a|HV\rangle_{AS} \pm b|VH\rangle_{AS} \quad (6.10a)$$

$$|\Phi^\pm\rangle_S = a|HH\rangle_{AS} \pm b|VV\rangle_{AS} \quad (6.10b)$$

Où nous avons pris des paramètres généralisés $\{a, b\} \in \mathbb{R}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Nous obtenons donc les matrices densités initiales $\hat{\rho}_{AS}^{\Psi^\pm}, \hat{\rho}_{AS}^{\Phi^\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AS})$:

$$\hat{\rho}_{AS}^{\Psi^\pm} = |\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|_{AS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & \pm ab & 0 \\ 0 & \pm ba & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11a)$$

$$\hat{\rho}_{AS}^{\Phi^\pm} = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|_{AS} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & \pm ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm ba & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad (6.11b)$$

Les opérateurs densités réduits des systèmes A et S s'écrivent pour un état de Bell $|\Psi^\pm\rangle_{AS}$:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_S\{\hat{\rho}_{AS}^{\Psi^\pm}\} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad \hat{\rho}_S = \text{Tr}_A\{\hat{\rho}_{AS}^{\Psi^\pm}\} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Et pour un état de Bell $|\Phi^\pm\rangle_{AS}$, on a les opérateurs densité réduits de l'équation (6.13).

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_S\{\hat{\rho}_{AS}^{\Phi^\pm}\} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad \hat{\rho}_S = \text{Tr}_A\{\hat{\rho}_{AS}^{\Phi^\pm}\} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Cependant comme nous l'avons vu précédemment, l'état intriqué initial $\hat{\rho}_{AS}$ va évoluer vers un état non-intriqué et mixte à cause de l'interaction avec l'environnement. On s'attend à se retrouver dans les situations suivantes :

$$\hat{\rho}_w^{\Psi^\pm} = (1-z)\hat{\rho}_{AS}^{\Psi^\pm} + z\hat{\rho}_M^{\Psi^\pm} \quad (6.14a)$$

$$\hat{\rho}_w^{\Phi^\pm} = (1-z)\hat{\rho}_{AS}^{\Phi^\pm} + z\hat{\rho}_M^{\Phi^\pm} \quad (6.14b)$$

Où $z \in [0, 1]$ est le paramètre de mélange statistique entre les deux états quantiques marginaux. L'état $\hat{\rho}_M = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_b$ est un état mixte qui représente la situation où toute

l'intrication initiale est perdue. Dans cette situation, le qubit $\hat{\rho}_b$ est présenté comme un qubit en polarisation issu du bruit thermique dont l'état est similaire à un qubit S complètement décorrélé du qubit A tel que $\hat{\rho}_S \equiv \hat{\rho}_b$.

Comme indiqué par la figure 5.1, le photon S se propage dans l'atmosphère et est réfléchi par un objet avant de revenir au radar. Nous construisons le modèle de radar IQ en suivant 2 axes. Le premier axe est la stratégie de détection et le second est l'action de l'environnement sur le système quantique AS.

Dans la stratégie de détection, du point de vue du radar, nous avons 2 contributions : un bruit en polarisation dans l'environnement et une contribution de la cible. En supposant que notre cible n'est pas polarisée et en rappelant que la théorie de la SERQ vue au chapitre 2, n'apporte pas une vision claire de l'évolution de l'information quantique, nous modélisons l'influence de l'objet uniquement par sa probabilité de réflexion $\eta \in [0, 1]$. Le bruit en polarisation est directement lié au bruit thermique représenté par une loi de Bose-Einstein où $n(\omega_i, T) = (e^{\beta\hbar\omega_i} - 1)^{-1}$ est le nombre de photons thermiques à la température T , avec $\beta = (k_B T)^{-1}$ et k_B étant la constante de Boltzmann. On suppose qu'il prend la forme d'un ensemble de qubits en polarisation $\hat{\rho}_b$ vérifiant la statistique de $n(\omega_i, T)$. Nous y revenons dans la section 6.2.3.

Le 2^{ème} axe est la modification de l'état quantique $\hat{\rho}_S$ par l'environnement atmosphérique que nous modélisons par un canal quantique de dépolarisation généralisé [114–118] :

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}_{AS}) = \sum_{i=1}^4 \hat{K}_i \hat{\rho}_{AS} \hat{K}_i^\dagger \quad (6.15)$$

Où les opérateurs de Kraus sont définis par :

$$\hat{K}_1 = \sqrt{1-\gamma} \left(\hat{I}_A \otimes \hat{I}_S \right) \quad (6.16a)$$

$$\hat{K}_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \left(\hat{I}_A \otimes \hat{\sigma}_{x,S} \right) \quad (6.16b)$$

$$\hat{K}_3 = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \left(\hat{I}_A \otimes \hat{\sigma}_{y,S} \right) \quad (6.16c)$$

$$\hat{K}_4 = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \left(\hat{I}_A \otimes \hat{\sigma}_{z,S} \right) \quad (6.16d)$$

Où $\hat{\sigma}_{x,S}, \hat{\sigma}_{y,S}, \hat{\sigma}_{z,S}$ sont les matrices de Pauli et où l'intérêt qu'on porte à ce canal est représenté le paramètre $\gamma \in [0, 1]$, avec $\gamma = 1 - e^{-\kappa t}$. Le nombre $\kappa \in \mathbb{R}^+$ indique la force d'interaction photon-environnement en fonction du temps de propagation t . Plus

précisément, nous parlons en fait d'un couplage représenté par le symbole κ entre le photon et les différentes molécules présentes dans l'environnement de propagation. Il est très difficile théoriquement et expérimentalement de donner une valeur à ce couplage. Néanmoins, on peut l'estimer de manière approximative en supposant que κ est associée la densité d'interactions subies par le photon S avec les espèces atmosphériques représentées comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques. Ces interactions produisent la perte de l'intrication initiale. On fait alors l'hypothèse que cette densité d'interactions est proportionnelle à l'atténuation classique d'une onde EM dans l'atmosphère. L'atténuation dans l'atmosphère traduit la densité d'interactions que subit le photon en lien avec les espèces atmosphériques présentes (O_2 , H_2O , etc.). Le taux d'atténuation doit jouer un rôle d'indicateur approximatif c'est-à-dire qu'il ne représente pas une densité d'interaction bien définie sur l'état du photon S. En utilisant cette approche simplificatrice, nous pouvons ensuite utiliser les outils de la TIQ.

Dans la section suivante, nous utilisons le canal de dépolarisation (6.15) pour modéliser la propagation du photon S dans le cadre du procédé d'illumination quantique.

6.2.2 Évolution de l'information quantique

L'application du canal quantique (6.15) sur l'état intriqué initial (6.10) nous permet d'obtenir l'état quantique en fonction des paramètres du canal et donc du milieu comme supposé plus haut avant de suivre l'évolution de l'intrication quantique.

$$\hat{\rho}_{AS,out}^{\Psi\pm} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\gamma a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3-2\gamma)\frac{a^2}{3} & \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} & 0 \\ 0 & \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} & (3-2\gamma)\frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\gamma b^2 \end{pmatrix} \quad (6.17a)$$

$$\hat{\rho}_{AS,out}^{\Phi\pm} = \begin{pmatrix} (3-2\gamma)\frac{a^2}{3} & 0 & 0 & \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}\gamma a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\gamma b^2 & 0 \\ \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} & 0 & 0 & (3-2\gamma)\frac{b^2}{3} \end{pmatrix} \quad (6.17b)$$

Dans la suite, les calculs effectués tiennent compte des configurations des deux états (6.17a) et (6.17b) pour suivre l'évolution de l'information quantique.

Nous commençons par le calcul du taux d'intrication en utilisant la concurrence de Wootters et l'intrication de formation [67]. Le détail des calculs est donné dans l'annexe C. Nous obtenons d'abord la concurrence de Wootters :

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,out}) = \max \left(0, \sqrt{\lambda_R^{(2)}} - \sqrt{\lambda_R^{(1)}} - \sqrt{\lambda_R^{(1)}} - \sqrt{\lambda_R^{(3)}} \right) = \max (0, 2ab(1 - 2\gamma)) \quad (6.18)$$

Où les racines carrées des valeurs propres $\sqrt{\lambda_R^{(i)}}$ de la matrice $R = \hat{\rho}_{AS,out}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)\hat{\rho}_{AS,out}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$ sont classées en ordre décroissant ce qui nous donne une formule analytique.

En fixant les coefficients $a = b = 1/\sqrt{2}$ pour les calculs numériques, nous obtenons alors la figure 6.4 où le taux d'intrication est $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,out}) = h(x)$ avec l'entropie binaire $h(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x)$ et où $x = (1 + \sqrt{1 - \mathcal{C}^2(\hat{\rho}_{AS,out})})/2$. Nous avons la même courbe quel que soit l'état quantique initial choisi parmi les états de Bell de l'équation (6.10).

Pour obtenir la discordance quantique représentée en bleu sur la figure 6.4, nous commen-

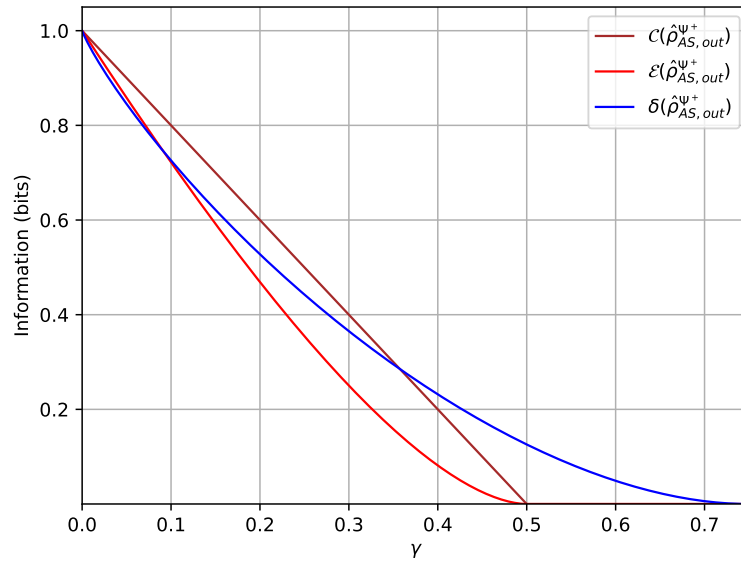


FIGURE 6.4 – Concurrence de Wootters $\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS,out}^{\Psi^+})$, intrication de formation $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS,out}^{\Psi^+})$ et discordance quantique $\delta(\hat{\rho}_{AS,out}^{\Psi^+})$ en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 3/4]$ pour l'état intriqué initial $|\Psi^+\rangle_{AS}$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$.

çons par calculer les informations mutuelles quantique et conditionnelle dans l'annexe C que nous représentons dans la figure 6.5. Les opérateurs de mesure qui minimisent

les corrélations quantiques d'après l'équation (4.40) sont des opérateurs de projections de Von Neumann sur le photon S puisque nous sommes dans le cas d'une paire de qubits intriqués. Ces opérateurs sont donc de la forme : $\hat{M}_S^{(i)} = \hat{I}_A \otimes |i\rangle \langle i|_S$, avec $i = \{H, V\}$.

Dans la figure 6.4, nous observons que la concurrence de Wootters \mathcal{C} et l'intrication de formation \mathcal{E} sont égales à zéro dès que $\gamma = 1/2$, donc lorsque $\gamma > 1/2$, le système AS n'est plus intriqué. Cependant, nous remarquons que la discordance quantique ne devient nulle que pour $\gamma = 3/4$, après que l'intrication ait disparu. De ce fait, malgré l'influence du canal qui détruit l'intrication quantique initiale, une partie des corrélations quantiques subsiste un moment à la propagation. La figure 6.5 nous renseigne sur le calcul de la discordance quantique en montrant l'évolution de l'information mutuelle quantique \mathcal{I} et des corrélations classiques \mathcal{J} . Les deux grandeurs diminuent de manière similaire quand γ

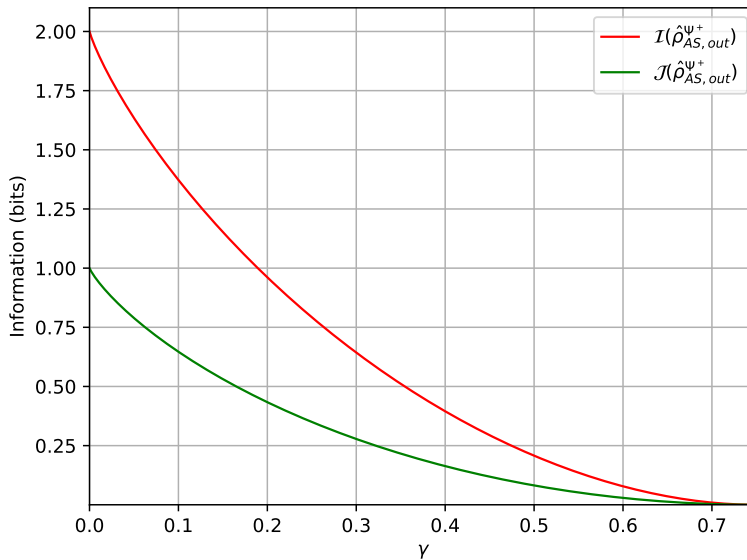


FIGURE 6.5 – Information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS, out}^{\Psi^+})$ et corrélations classiques $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS, out}^{\Psi^+})$ en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 3/4]$ pour l'état intriqué initial $|\Psi^+\rangle_{AS}$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$.

augmente, la décroissance de l'information mutuelle quantique est plus rapide que celle des corrélations classiques. Ainsi, lorsque $\gamma > 3/4$, nous perdons aussi les corrélations quantiques du système initial et nous obtenons un état séparable complètement mixte. De fait, toute l'information quantique présente au départ est désormais perdue et elle ne peut donc pas être mise à profit pour la détection de l'objet dans le processus IQ. Dans

les figures 6.4 et 6.5, les courbes s'arrêtent à $\gamma = 3/4$ car sur l'intervalle $\gamma \in [3/4, 1]$, la discordance quantique augmente mais ce n'est pas un comportement physique. C'est une limite de ce modèle de canal quantique de dépolarisation (6.15) et donc de la définition des opérateurs de Kraus (6.16) [114, 117]. En effet, continuer sur l'intervalle $\gamma \in [3/4, 1]$ reviendrait à dire que l'atmosphère ne détruit plus les corrélations quantiques mais qu'elle en injecte dans le système de la paire de photons AS or cela est impossible. Du point de vue du radar IQ, nous avons déjà perdu toutes les corrélations quantiques initiales.

Dans la section suivante, nous introduisons une stratégie de décision binaire pour le radar IQ sur les états de polarisation $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.

6.2.3 Stratégie de détection du radar

Pour ce radar IQ en états de polarisation, nous avons construit la stratégie de détection en nous basant sur celle de S. Lloyd [10]. Nous avons construit cette stratégie indépendamment du paramètre γ du canal (6.15) en faisant intervenir deux contributions dans la chaîne du radar : la probabilité de réflexion $\eta \in [0, 1]$ de l'objet et le bruit thermique présent qui suit une loi de Bose-Einstein $n(\omega_i, T)$.

La stratégie de décision binaire est faite en s'appuyant sur les références [10, 23, 90, 119]. La détection pour le radar IQ est basée sur la discrimination des états quantiques marginaux qui émergent des différentes situations de détection possibles de l'objet. Nous utilisons alors deux hypothèses H_0 et H_1 qui correspondent respectivement à l'absence et à la présence de l'objet. Dans ces hypothèses, nous avons 2 contributions, une pour la cible et une pour le bruit thermique que nous détaillons ci-dessous.

Comme nous décrivons la paire de photons sur les états de polarisation $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ sur une cible supposée non-polarisée, elle n'aura pas d'impact sur l'état quantique du photon S [55]. Nous supposons aussi que l'intrication n'est pas affectée pour concentrer notre étude sur le bruit thermique du milieu. En résumé, la cible se distingue seulement par sa probabilité de réflexion $\eta \in [0, 1]$ de renvoyer le photon S initial après impact sur sa surface.

Le bruit thermique suit une statistique de Bose-Einstein $n(\omega_i, T) = (e^{\beta\hbar\omega_i} - 1)^{-1}$ qui donne le nombre de photons n d'énergie $\hbar\omega_i$ à une température T . Cette loi est représentée dans la figure 6.6 pour plusieurs températures de 0 °C à 50 °C où on observe que $n(\omega_i, T) > 10^2$ pour $f < 50$ GHz. Notre approche est différente de celle de S. Lloyd car

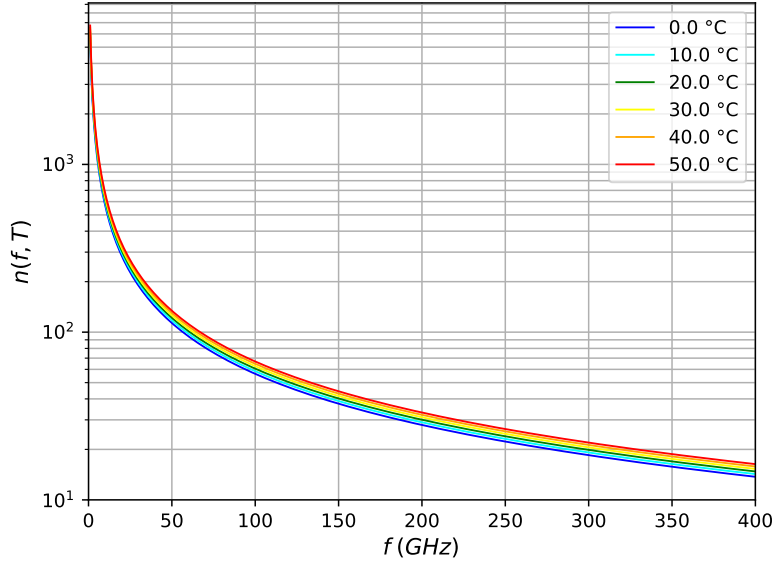


FIGURE 6.6 – Loi de Bose-Einstein $n(f, T)$ sur le régime de fréquences micro-ondes $f \in [1, 400]$ GHz pour les températures $T = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ °C.

nous ne prenons pas en compte l'état du vide thermique pour la stratégie de détection mais nous prenons en compte le bruit en polarisation avec $n(\omega_i, T)$ en supposant que ce bruit est représenté par un ensemble de qubits $\hat{\rho}_b$ en polarisation susceptible de parasiter la détection du radar IQ. Par conséquent, le radar quantique peut à la fois détecter le photon S qui revient après sa propagation-réflexion sur la cible, et détecter un photon thermique ayant la même polarisation que celle du photon de signal. En tenant compte de l'ensemble des hypothèses simplificatrices énoncées, nous construisons la stratégie de décision binaire pour le radar IQ en commençant par l'hypothèse H_0 .

L'hypothèse H_0 correspondant à l'absence de l'objet à détecter, est représentée par l'opérateur :

$$\hat{\rho}_{H_0} = p\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S + (1 - p)\hat{\rho}_M \quad (6.19)$$

Ici, le photon de signal émis par le radar IQ est perdu, il se propage à l'infini où il pourra être soit diffusé, soit absorbé ce qui signifie que l'information quantique est perdue du point de vue du radar IQ. L'équation (6.19) dépeint deux situations. D'abord, comme il n'y a pas d'objet, le photon S est perdu mais un qubit en polarisation du bruit thermique représenté par $\hat{\rho}'_S = \hat{\rho}_b$ peut potentiellement être détecté à la place par le radar IQ. Cela

équivalent à une fausse alarme représentée par l'état $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S$. À l'inverse, si rien n'est détecté alors on ne dispose pas de signal, mais seulement du bruit représenté par l'état $\hat{\rho}_M$, M pour "mixte" qui est un état mixte comme pour $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S$. Le paramètre réel $p \in [0, 1]$ associé à ces états marginaux est la probabilité de détecter "1 qubit photonique parmi l'ensemble des qubits photoniques présents dans l'environnement pendant un événement de détection". Cette probabilité est directement liée à la loi de Bose-Einstein $p = p(f, T) = 1/n(f, T)$ de la figure 6.6 et à la capacité du capteur du radar à détecter p photons sur un événement de détection. Le paramètre p dépend à la fois de la température du milieu et de la fréquence d'émission du radar IQ. Néanmoins, l'équation (6.19) n'est vraie que si $p = 1/n(f, T) < 1$ ce qui constitue la limite de validité de l'hypothèse H_0 dans le modèle. En conséquence, la limite de validité pour l'équation (6.19) s'écrit $f/T > \ln(2)k_B/h$. Cela représente pour $T = 20$ °C, une fréquence d'émission limite $f \approx 4,23 \times 10^{12}$ Hz. Cela couvre donc le régime micro-ondes $I_\mu = [400 \text{ kHz}, 400 \text{ GHz}]$ mais pas le régime optique $I_{\text{opt.}} = [3.75 \times 10^{14}, 7.5 \times 10^{14}]$ Hz.

L'hypothèse H_1 correspond à la présence de l'objet donc celui-ci est potentiellement détectable par le radar IQ. L'opérateur qui décrit l'hypothèse H_1 est :

$$\hat{\rho}_{H_1} = p\eta\hat{\rho}_{AS} + (1 - p\eta)\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S \quad (6.20)$$

Où nous tenons compte que nous pouvons pas distinguer entre eux les photons thermiques qui forment le bruit en polarisation lorsque l'objet n'est pas détecté. Nous n'avons qu'un seul terme à droite pour cette situation. Dans l'équation (6.20), nous considérons à la fois le bruit thermique avec p et la probabilité de réflexion η de l'objet de sorte que l'équation s'apparente à un état de Werner où on a un état complètement intriqué $\hat{\rho}_{AS}$ qui est notre état initial et un état totalement mixte séparable $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S$ qui représente l'évolution attendue d'un état quantique dans un environnement perturbateur.

La stratégie de décision pour le radar IQ repose alors sur l'opérateur $\hat{\Lambda}$ où on souhaite discriminer les états quantiques entre eux :

$$\hat{\Lambda} = \hat{\rho}_{H_1} - \hat{\rho}_{H_0} \quad (6.21a)$$

$$= p\eta\hat{\rho}_{AS} + (1 - p\eta)\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S - p\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S + (1 - p)\hat{\rho}_M \quad (6.21b)$$

À partir de l'opérateur $\hat{\Lambda}$, on effectue des projections sur les états quantiques dans la base $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$. En fixant $a = b = 1/\sqrt{2}$, on utilise les opérateurs de projection $\hat{P}_{HV} = |HV\rangle\langle HV|$, $\hat{P}_{VH} = |VH\rangle\langle VH|$ sur la matrice densité $\hat{\rho}_{AS}^{\Psi^\pm} = |\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|$ et

les opérateurs \hat{P}_{HH} , \hat{P}_{VV} sur la matrice densité $\hat{\rho}_{AS}^{\Phi^\pm} = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$. Nous obtenons alors des probabilités conditionnelles listées dans le tableau 6.1. Et à partir des éléments du tableau

Probabilité conditionnelle	Situation de détection
$P(+ H_1) = p\eta a^2$	Objet détecté dans la situation H_1
$P(- H_1) = (1 - p\eta)a^4$	Objet non détecté dans la situation H_1
$P(+ H_0) = pa^2b^2$	Objet détecté dans la situation H_0
$P(- H_0) = (1 - p)a^2b^2$	Objet non détecté dans la situation H_0

TABLEAU 6.1 – Probabilités conditionnelles dérivées à partir des opérateurs de mesure (opérateurs de projection) sur l'opérateur $\hat{\Lambda}$. La couleur rouge correspond aux probabilités d'erreur pour la détection radar tandis que la couleur verte correspond aux probabilités de succès.

6.1, on calcule les rapports signal-sur-bruit (RSB) en faisant le rapport des probabilités de succès et de raté d'une détection sur les hypothèses :

$$\text{RSB}_{H_1} = \frac{P(+|H_1)}{P(-|H_1)} = \frac{p\eta}{(1 - p\eta)a^2} \quad (6.22a)$$

$$\text{RSB}_{H_0} = \frac{P(+|H_0)}{P(-|H_0)} = \frac{p}{1 - p} \quad (6.22b)$$

$$\text{RSB}_+ = \frac{P(+|H_1)}{P(+|H_0)} = \frac{\eta}{b^2} \quad (6.22c)$$

Comme dans l'article [10], le nombre d'états impliqués dans l'intrication représentés par a , b intervient dans l'amélioration du RSB. Dans cette équation, les formules (6.22a) et (6.22b) dépendent du bruit thermique par p ainsi que de la probabilité de réflexion η mais pas la formule (6.22c) qui ne dépend que de η . Le RSB_+ n'est pas représentatif de la stratégie de détection parce que les hypothèses de détection ne permettent pas de différencier clairement les photons polarisés issus du bruit thermique et un photon S complètement décorrélé du photon A resté dans le radar IQ. Cela représente une limite à ce modèle de détection. Les formules (6.22a) et (6.22b) sont plus claires parce qu'elles font intervenir à la fois le bruit thermique et la réflectivité η .

Le RSB_{H_0} ne fait intervenir que le bruit thermique étant donné que nous ne pouvons pas détecter l'objet qui est absent. Nous n'obtenons donc que des probabilités qui dépendent de la fréquence d'émission f du radar et de la température T du milieu de propagation. Les états impliqués dans l'intrication n'interviennent pas étant donné que l'intrication comme les corrélations quantiques disparaissent quand on se trouve dans l'hypothèse H_0 . Le RSB_{H_1} dépend à la fois de η et de p en faisant intervenir les états de l'intrication. Nous

pouvons donc regarder l'évolution de ce RSB avec l'influence de la cible et l'influence du bruit thermique.

Pour le calcul des RSB_{H_0} et RSB_{H_1} , nous reprenons la condition $a = b = 1/\sqrt{2}$ utilisée dans la section 6.2.2 pour obtenir la figure 6.7. Dans cette figure, nous avons tracé le

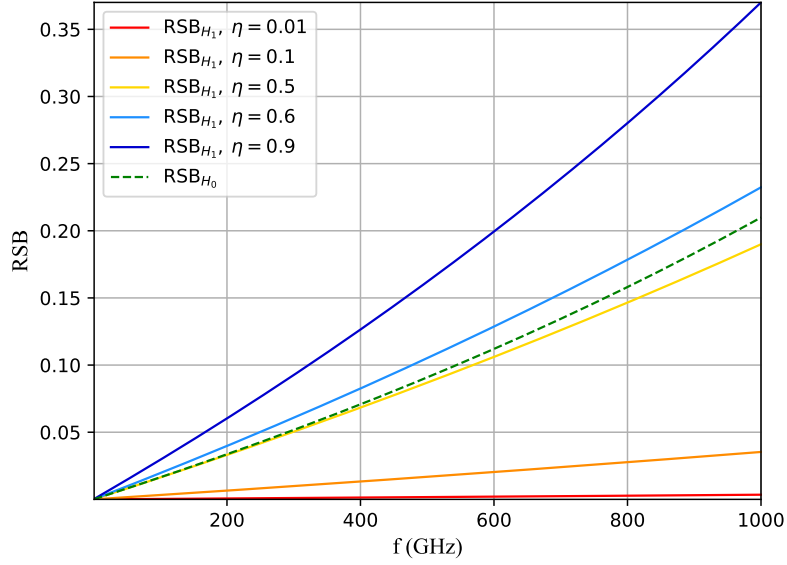


FIGURE 6.7 – Rapports signal-sur-bruit RSB_{H_0} et RSB_{H_1} en fonction de la fréquence sur un intervalle $[1, 1000]$ GHz avec plusieurs probabilités de réflexion de la cible pour une température de $T = 300$ K.

RSB_{H_0} et le RSB_{H_1} sur une partie du régime micro-ondes et au-delà. On remarque que les RSB_{H_0} et RSB_{H_1} sont tous inférieurs à $1/2$ sur cet intervalle. Le RSB_{H_1} est associé à la probabilité de succès lors de notre détection tandis que le RSB_{H_0} est associée à une fausse alarme parce qu'on détecte un photon parasite alors qu'aucun objet n'est présent. Les deux RSB augmentent avec la fréquence d'émission du radar car le nombre de photons thermiques décrit par la loi de Bose-Einstein diminue à mesure que la fréquence augmente. Néanmoins, le RSB_{H_1} ne devient égal ou supérieur au RSB_{H_0} que pour une probabilité de réflexion de la cible $\eta \geq 0,52$. Ainsi selon ce modèle, la détection dépend beaucoup du η de la cible face au bruit thermique représenté par $p = 1/n(\omega_i, T)$. Cela oblige à avoir une cible de forte probabilité de réflexion η pour que $\text{RSB}_{H_1} > \text{RSB}_{H_0}$ lorsque nous sommes dans le régime micro-ondes et malgré cela, le RSB reste inférieur à 1. Ce résultat est à nuancer à cause du modèle simple utilisé pour représenter le bruit de polarisation issu du bruit thermique dont l'un des qubits est supposé être dans le même état quantique que

le photon S émis. À présent, nous reprenons l'analyse avec la TIQ de la section précédente.

Dans la section 6.2.2, le canal quantique de dépolariation fait évoluer l'état quantique intriqué initial en un système mixte dépourvu de corrélations quantiques. Dans la théorie de décision binaire, nous avons suivi un raisonnement similaire à Lloyd où nous distinguons deux états quantiques marginaux [10]. Les deux états quantiques marginaux sont l'état complètement intriqué des équations (6.10a), (6.10b), et les états produits associés. Or, nous avons vu dans la section 6.2.2 que l'intrication quantique disparaît plus rapidement dans le canal quantique que le taux de corrélations quantiques. La discorde quantique est égale à zéro lorsque nous obtenons un état produit tandis que le taux d'intrication est nulle avant. Étant donné que l'information quantique est liée aux corrélations quantiques dans le système de la paire de photons, il est cohérent de dire que la discorde est liée à la stratégie de décision du radar IQ. Dans l'article de S. Lloyd, la sensibilité de détection est maintenue bien que l'intrication ait disparue. En supposant que la discorde quantique est liée au maintien de cette sensibilité du radar IQ [109], la discorde ne perdure pas non plus indéfiniment. Quand toute corrélation quantique est perdue, il serait alors impossible de distinguer par une mesure jointe un qubit du bruit et un qubit du signal émis par le radar IQ au début. En continuant sur cette idée, nous voulons estimer la distance de propagation maximale de l'information quantique pour un processus de détection du radar IQ. En somme, nous allons estimer la distance x pour que l'intrication et la discorde quantique disparaissent.

Pour cela, nous reprenons les idées du chapitre 2 sur la propagation d'une onde EM dans l'atmosphère. Une onde EM classique est un ensemble de photons cohérents de fréquence f . L'atténuation de cette onde dans l'atmosphère résulte en grande partie de l'absorption et de la diffusion des photons la constituant par les molécules présentes (N_2 , H_2O , O_2 , CO_2 , etc.). Dans le radar quantique que nous avons décrit en section 6.2.1, nous sommes obligés de supposer que le photon S n'est ni absorbé, ni diffusé pendant sa propagation pour suivre l'évolution de l'information quantique. En revanche, la densité d'interactions du photon transmis avec l'atmosphère devrait être proportionnelle à l'atténuation d'une onde classique ce qui nous permet d'estimer la force d'interaction moyenne en utilisant un modèle classique d'atténuation [43]. Pour résumer, nous supposons une interaction moyenne de l'atmosphère plutôt que de prendre en compte les interactions individuelles sur les différentes espèces présentes. Une approche similaire a été développée dans l'ar-

ticle [120]¹ où l'atténuation classique est utilisée comme constante de couplage du signal quantique avec l'atmosphère en utilisant une équation maîtresse pour modéliser l'interaction. De plus, l'article [120] utilise le formalisme de la variable continue pour décrire l'état du signal quantique intriqué et il quantifie l'intrication avec la négativité du logarithme². En adaptant cette idée au canal quantique de dépolarisation (6.15), nous estimons la limite de survie des corrélations quantiques pour la propagation du photon dans l'atmosphère. Cela dit, comme cette estimation équivaut à une moyenne des interactions photon-atmosphère, elle ne vaut pas une étude détaillée faisable par la QED ou les équations maîtresses sur chaque espèce [47, 59].

Pour cette estimation, nous utilisons le paramètre $\gamma = 1 - e^{-\kappa t}$ du canal quantique dépolarisant où κ est une atténuation homogène à l'inverse d'un temps. Nous supposons que la perturbation de l'état $\hat{\rho}_S$ est proportionnelle à l'atténuation de l'onde classique EM de même fréquence [43]. Pour une atténuation \mathcal{A} en dB.km⁻¹, on a le paramètre $\kappa = L_C \mathcal{A} c$ où L_C est un coefficient de proportionnalité, fixé arbitrairement à 1 et c est la vitesse de la lumière. Nous faisons l'approximation : $\gamma \approx 1 - e^{-\mathcal{A}x} = 1 - e^{-\mathcal{A}x}$. Pour estimer approximativement γ , il ne faut pas prendre des valeurs d'atténuation sur les pics d'absorption qui sont caractéristiques des spectres d'absorption des molécules utilisés pour le modèle d'atténuation atmosphérique MPM³ or ce qui nous intéresse est une densité d'interactions. L'atténuation \mathcal{A} calculée avec le modèle MPM [43] est représentée dans la figure 6.8. À partir de cette figure, et en considérant une valeur limite du paramètre $\gamma_{\text{lim}} = \{1/2, 3/4\}$ respectivement pour la disparition de l'intrication et pour la disparition de la discordance quantique, on utilise l'équation (6.23) pour estimer la distance maximale x_{max} de l'information quantique.

$$x_{\text{max}} = -\frac{\ln|\gamma_{\text{lim}} - 1|}{\mathcal{A}} \quad (6.23)$$

On obtient la figure 6.9 où nous avons la distance de survie maximale pour le taux d'intrication quantique et pour la discordance quantique dans l'atmosphère selon les paramètres choisis dans la figure 6.8. La survie des corrélations quantiques pour le radar IQ est alors dépendante de la fréquence f du photon transmis. Ainsi, pour une fréquence d'émission $f = 10$ GHz, la disparition totale du taux d'intrication intervient vers $x \approx 35$ km tandis

1. Cette approche se base elle-même sur la référence [121].
 2. Voir chapitre 7.
 3. Millimeter-Wave Propagation Model, détaillé dans l'annexe D.

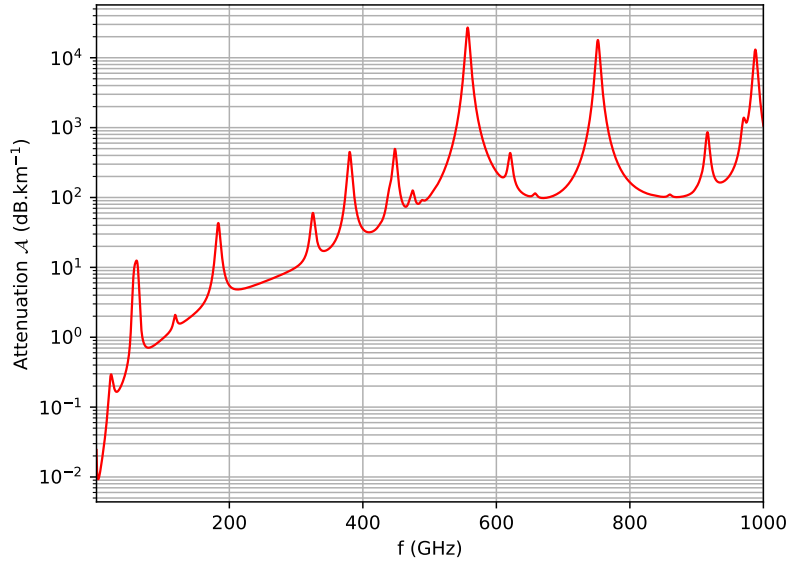


FIGURE 6.8 – Atténuation \mathcal{A} en fonction de la fréquence $f \in [1, 1000]$ GHz, calculée à partir du modèle MPM pour $T = 300$ K, un taux d'humidité de 50 % et une pression de 101.3 kPa.

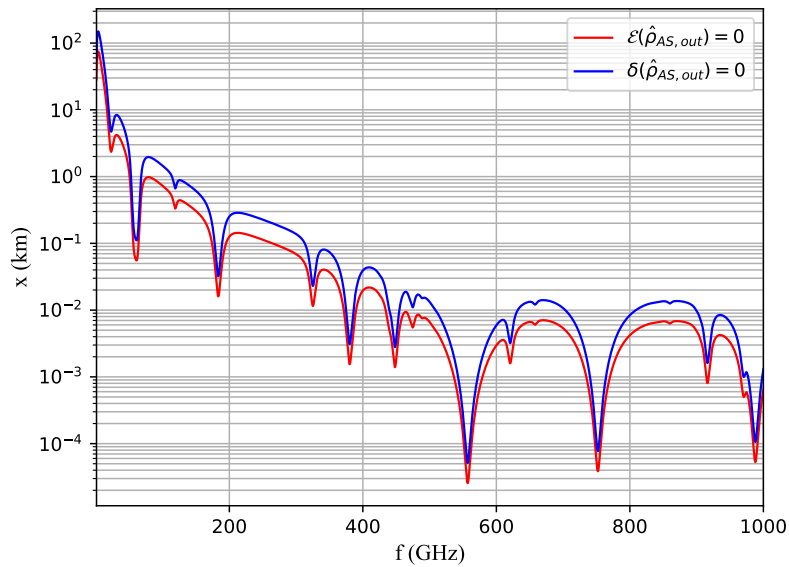


FIGURE 6.9 – Distances maximales de survie x pour l'intrication et pour la discordie en fonction de la fréquence d'émission f du radar IQ dans l'atmosphère. Ces courbes traduisent une tendance d'évolution. Il ne faut pas prendre en compte les pics d'absorption du modèle MPM.

que celle de la discordie intervient pour $x \approx 70$ km. Pour $f = 5$ GHz, nous obtenons par le même calcul, une disparition de l'intrication pour $x \approx 70$ km et une disparition de la discordie pour $x \approx 140$ km. En comparaison dans l'article [120], pour une fréquence $f = 5$ GHz, l'intrication disparaît après 85 km. On est donc dans le même ordre de grandeur. Toutefois, les valeurs données par cette estimation de distance de survie des corrélations quantiques sont à prendre avec grande prudence à cause de la simplicité du modèle utilisé avec le canal quantique (6.15) par rapport à l'étude [120], d'autant que le formalisme et les mesures de l'intrication quantique sont différentes. Cependant, notre objectif n'était pas de faire une étude détaillée des interactions du photon S avec le milieu de propagation mais d'estimer un ordre de grandeur pour la survie des corrélations quantiques dans l'atmosphère. Il faut prendre la figure 6.9 comme la tendance de l'évolution des corrélations quantiques dans l'atmosphère en fonction de la distance de propagation.

Nous concluons l'étude du radar IQ sur les niveaux de polarisation dans la section suivante.

6.2.4 Conclusion

Nous avons étudié le radar IQ en utilisant l'intrication sur les niveaux de polarisation $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ d'une paire de photons dont l'un des photons est soumis à l'action d'un canal de dépolarisation pour modéliser une propagation dans l'atmosphère. La chaîne du radar utilise une cible de probabilité de réflexion η pour renvoyer le photon dans le radar et le bruit en polarisation du milieu est modélisé par la statistique de Bose-Einstein pour construire ensuite la stratégie de décision binaire.

Pour ce radar IQ, nous avons trouvé des RSB $< 1/2$, $\forall f \in [1, 1000]$ GHz ce qui limite la pertinence du radar quantique sur cet intervalle de fréquences. En complément, nous avons estimé la survie des corrélations quantiques dans l'atmosphère à 70 km et celle de l'intrication 35 km pour une fréquence d'émission de 10 GHz. Nous rappelons que ces valeurs sont à considérer avec très grande prudence mais elles correspondent au même ordre de grandeur que l'article [120] dont l'analyse est plus poussée.

L'étude du radar IQ dans cette section 6.2 comporte plusieurs limites. D'abord, nous avons choisi de modéliser l'atmosphère avec seulement un canal quantique or celui-ci modélise l'action mais pas le bruit thermique qui n'apparaît que dans la stratégie de décision. Cette stratégie n'est valide que sur une plage limitée de fréquences par construction des hypothèses H_0 , H_1 et les contributions du bruit p et la cible η ne sont pas explicitement séparées ce qui limite la portée de l'étude. L'estimation de la survie des corrélations quan-

tiques de la figure 6.9 par rapport aux RSB de la figure 6.7 donne des pistes de réflexion sur les gammes de fréquences d'utilisation plausible du radar IQ en optimisant la survie des corrélations quantiques par rapport aux niveaux de bruit thermique.

Dans la section suivante, nous reprenons le même radar IQ en niveaux de polarisation en tentant d'incorporer en un modèle l'action du milieu et le niveau de bruit thermique.

6.3 Le radar IQ en états de polarisation : 2^{ème} approche

Nous reprenons les mêmes états quantiques de l'équation (6.17) pour tenter d'améliorer la stratégie de détection binaire pour étudier l'impact des différents paramètres. Nous souhaitons étudier l'impact des 3 paramètres de cette stratégie : le bruit thermique p , la probabilité de réflexion de la cible η et l'action γ de l'environnement de propagation. Pour étudier l'impact de ces paramètres, nous calculons la discorde quantique sur l'ensemble des hypothèses de détection en sélectionnant celle qui possède une information utile pour le radar IQ. Le calcul de la discorde quantique sur les hypothèses de détection ne doit pas être pris comme un taux de corrélations mais plutôt comme une distribution des corrélations quantiques en fonction de (p, η, γ) à mettre en relation avec la stratégie de décision binaire. Pour ce faire, nous suivons les mêmes étapes que précédemment en décrivant le système initial dans la section 6.3.1, en suivant l'information quantique dans la section 6.3.2 et en traitant la détection radar dans la section 6.3.3. La section 6.3.4 constitue une conclusion.

6.3.1 Description du système initial et des hypothèses de détection

Nous reprenons donc la même modélisation de la phase de propagation qui nous donne l'équation (6.17) mais nous modifions la prise en compte des paramètres du bruit thermique avec p , de la réponse de la cible avec η et de l'influence du milieu de propagation avec γ . Nous faisons apparaître ces 3 paramètres dans la définition des hypothèses H_0 et H_1 . Nous voulons observer la répartition des corrélations quantiques sur les hypothèses de détection en utilisant la discorde quantique. L'objectif de cette approche est d'observer s'il existe un lien la répartition des corrélations quantiques et la stratégie de détection du

radar IQ.

D'abord, pour l'hypothèse H_0 , nous gardons l'équation définie plus haut :

$$\hat{\rho}_{H_0} = p\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S + (1-p)\hat{\rho}_M \quad (6.24)$$

Cette équation ne change pas parce qu'il n'y a que le bruit thermique avec p qui intervient qui induit que le capteur du radar IQ mesure 1 qubit parmi les $n(\omega_i, T)$ présents suivant les hypothèses simplificatrices de la section 6.2.

En revanche, l'hypothèse H_1 initiale (6.20) est modifiée afin de séparer les paramètres en notant $\eta + p$ ce qui était auparavant un produit ηp . En les transformant en somme, nous perdons l'aspect de la description physique au profit de l'étude de l'impact de chaque paramètre. Nous obtenons une hypothèse H_1 modifiée :

$$\hat{\rho}_{H_1} \equiv \hat{\rho}_{AS}^{(1)} = (\eta + p)\hat{\rho}_{AS, \text{out}} + (1 - \eta - p)\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_S \quad (6.25)$$

Dans le côté gauche de l'équation, $\hat{\rho}_{AS, \text{out}}$ est l'état quantique modifié par le canal de dépolarisation tandis que le côté droit correspond à l'état séparable complètement mixte. Le mélange statistique des deux états est assuré par la probabilité de réflexion de la cible $\eta \in [0, 1]$ et par la probabilité $p = 1/n(\omega_i, T)$ associée au bruit thermique qui parasite la détection. Le côté gauche possède des corrélations quantiques comme le décrit l'équation (6.17a) tandis que le côté droit est complètement décorrélé. La définition de l'hypothèse H_1 implique en revanche la restriction $\eta + p < 1$ ce qui limite le régime de fréquences dans lequel l'équation (6.25) est valable.

Nous obtenons les hypothèses de détection (6.24) et (6.25) mais seule l'équation (6.25) comporte l'état quantique intriqué $\hat{\rho}_{AS, \text{out}}$ soumis au milieu de propagation c'est-à-dire la partie ayant des corrélations quantiques du point de vue du radar IQ. Ainsi, nous écrivons l'opérateur :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \hat{\rho}_{H_1} - \hat{\rho}_{H_0} \\ &= (\eta + p)\hat{\rho}_{AS, \text{out}} + (1 - \eta - p)\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_S - p\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S - (1 - p)\hat{\rho}_M \end{aligned} \quad (6.26)$$

Seule la partie relative à H_1 possède des corrélations quantiques que nous voulons quantifier par la discordance quantique [38]. Nous appliquons donc le calcul de la discordance à

l'ensemble de l'hypothèse H_1 en (6.25) en sélectionnant l'équation (6.17a) pour $\hat{\rho}_{\text{AS}, \text{out}}$ ce qui nous donne l'opérateur :

$$\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Où les coefficients $\{\rho_{ii}\}_{i=1\dots 4}$ sont définis en fonction de (η, p, γ) :

$$\rho_{11} = (\eta + p)\frac{2}{3}\gamma a^2 + (1 - \eta - p)a^2 b^2 \quad (6.28a)$$

$$\rho_{22} = (\eta + p)(3 - 2\gamma)\frac{a^2}{3} + (1 - \eta - p)a^4 \quad (6.28b)$$

$$\rho_{23} = \rho_{32} = \pm(\eta + p)(3 - 4\gamma)\frac{ab}{3} \quad (6.28c)$$

$$\rho_{33} = (\eta + p)(3 - 2\gamma)\frac{b^2}{3} + (1 - \eta - p)b^4 \quad (6.28d)$$

$$\rho_{44} = (\eta + p)\frac{2}{3}\gamma b^2 + (1 - \eta - p)a^2 b^2 \quad (6.28e)$$

Et où l'équation (6.27) respecte la condition d'unité de la trace sur l'hypothèse H_1 : $\text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}\} = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1$. Le calcul des corrélations quantiques sur H_1 revient à faire le calcul sur l'opérateur $\hat{\Lambda}$ car du point de vue du radar quantique, seule $\hat{\rho}_{H_1}$ possède une information utile au radar IQ à l'inverse de $\hat{\rho}_{H_0}$ où seul le bruit thermique constitué d'un ensemble de qubits en polarisation est présent.

Dans la section suivante, nous calculons la discorde quantique en utilisant l'opérateur $\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}$ nous donnant ainsi une distribution des corrélations quantiques sur l'ensemble de l'hypothèse H_1 .

6.3.2 Évolution de l'information quantique

Dans cette section, nous nous intéressons à la distribution des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 .

Nous calculons la discorde quantique $\delta(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = \min_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}} (\mathcal{I}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) - \mathcal{J}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}))$ avec les opérateurs de projections $\{\hat{M}_S^{(i)}\}_{i=H,V}$. Nous commençons par le calcul de l'information mu-

tuelle quantique \mathcal{I} puis nous continuons avec les corrélations classiques \mathcal{J} . Comme $\hat{\rho}_{AS}^{(1)}$ est une hypothèse, nous rappelons que ce calcul est à interpréter comme une distribution des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 à mettre en relation avec la stratégie de détection dans la section 6.3.3.

Nous commençons par le calcul des entropies ce qui nous donne l'équation (6.29).

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(1)}) = (\rho_{11} + \rho_{22}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{11} + \rho_{22}} \right) + (\rho_{33} + \rho_{44}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{33} + \rho_{44}} \right) \quad (6.29a)$$

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_S^{(1)}) = (\rho_{11} + \rho_{33}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{11} + \rho_{33}} \right) + (\rho_{22} + \rho_{44}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{22} + \rho_{44}} \right) \quad (6.29b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(1)} | \hat{\rho}_S^{(1)})_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}} &= \rho_{11} \log_2 \left(\frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{\rho_{11}} \right) + \rho_{33} \log_2 \left(\frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{\rho_{33}} \right) \\ &+ \rho_{22} \log_2 \left(\frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{\rho_{22}} \right) + \rho_{44} \log_2 \left(\frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{\rho_{44}} \right) \end{aligned} \quad (6.29c)$$

Où les sommes de coefficients $\{\rho_{ii}\}_{i=1..4}$ s'écrivent :

$$\rho_{11} + \rho_{22} = (\eta + p)a^2 + (1 - \eta - p)(a^2b^2 + a^4) \quad (6.30a)$$

$$\rho_{33} + \rho_{44} = (\eta + p)b^2 + (1 - \eta - p)(b^4 + a^2b^2) \quad (6.30b)$$

$$\rho_{11} + \rho_{33} = (\eta + p)\left(\frac{2}{3}\gamma a^2 + (3 - 2\gamma)\frac{b^2}{3}\right) + (1 - \eta - p)(a^2b^2 + b^4) \quad (6.30c)$$

$$\rho_{22} + \rho_{44} = (\eta + p)\left((3 - 2\gamma)\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3}\gamma b^2\right) + (1 - \eta - p)(a^4 + a^2b^2) \quad (6.30d)$$

L'entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(1)})$ ne dépend pas du canal au contraire de l'entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho}_S^{(1)})$ puisque seul le photon S subit l'influence du canal quantique (6.15). Le calcul de l'entropie jointe $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS}^{(1)})$ ainsi que l'ensemble des autres calculs sont donnés dans l'annexe E. Avec ces données, nous obtenons les informations mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS}^{(1)})$ et classique $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AS}^{(1)})$ et la répartition des corrélations quantiques $\delta(\hat{\rho}_{AS}^{(1)})$ en fonction de (η, p, γ) . Nous obtenons alors les figures 6.10 pour étudier l'impact de γ et 6.11 pour étudier l'impact de η et p .

Dans la figure 6.10, nous avons tracé la répartition des corrélations quantiques en fonction de γ pour plusieurs fréquences d'émission. Nous observons que la répartition des corrélations quantiques est plus importante lorsque $\gamma = 0$ que lorsque $\gamma = 3/4$ ce qui est cohérent puisque l'état est totalement intriqué avant la propagation du photon S. Plus la fréquence d'émission est grande, plus la répartition est prononcée. Lorsque la propagation

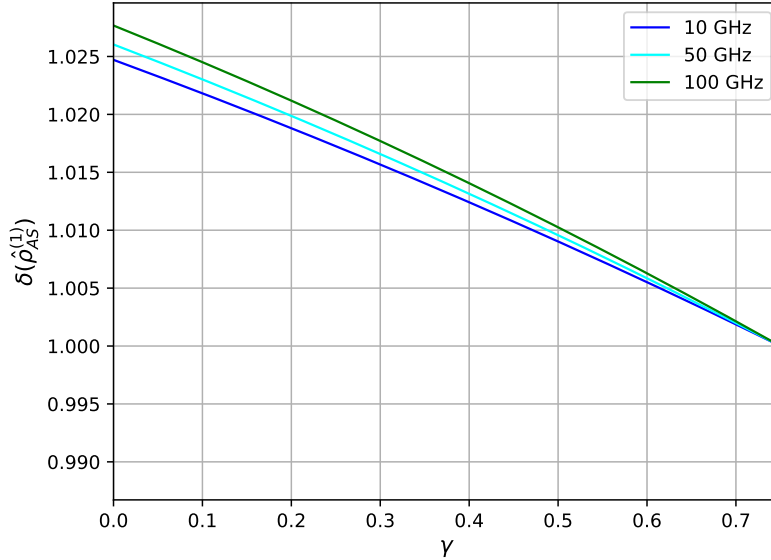


FIGURE 6.10 – Répartition des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 en fonction du paramètre du canal γ pour 3 fréquences différentes $f = \{10, 50, 100\}$ GHz, pour $\eta = 0.1$.

est plus longue, $\gamma \rightarrow 1$, les répartitions convergent étant donné que le système AS évolue vers un état complètement mixte. Toutefois, les écarts de valeurs sont faibles entre les différentes répartitions sur ces 3 fréquences. Compte-tenu des valeurs de $\delta(\hat{\rho}_{AS}^{(1)})$ qui varie d'environ 0.02 bits sur $\gamma \in [0, 3/4]$, on ne peut pas conclure que le calcul des répartitions des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 en fonction de γ nous renseigne sur l'état des corrélations quantiques dans la stratégie de détection du radar IQ.

Dans la figure 6.11, on a tracé la répartition des corrélations quantiques en fonction de η/p où la probabilité p est calculée sur $f \in [5, 20]$ GHz pour 2 propagations différentes $\gamma = \{1/3, 1/2\}$. On constate que pour ces 2 propagations, nous obtenons quasiment les mêmes valeurs de répartition des corrélations quantiques. Nous n'observons donc pas d'évolution de la répartition des corrélations quantiques en fonction de la probabilité de réflexion de la cible η par rapport au bruit thermique du milieu de propagation représenté par la probabilité p .

Dans la suite, nous abordons la stratégie de décision du radar IQ à mettre en relation avec cette répartition des corrélations quantiques.

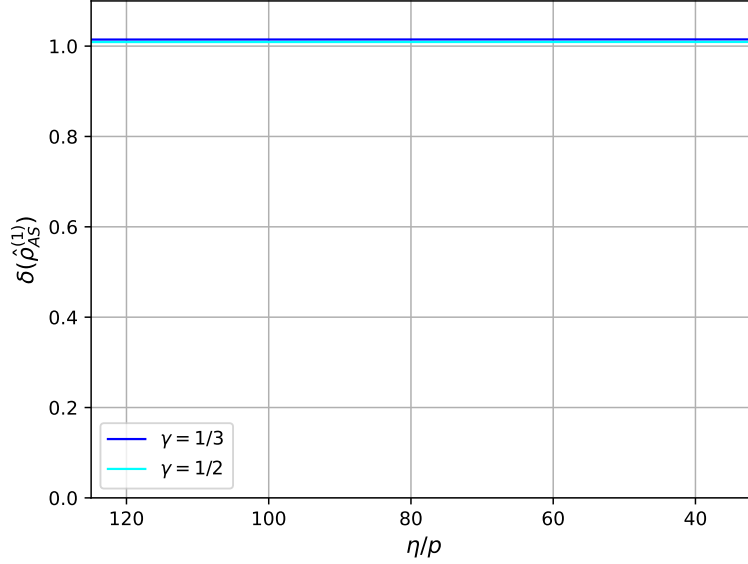


FIGURE 6.11 – Répartition des corrélations quantiques sur l'hypothèse H_1 pour 2 valeurs de $\gamma = \{1/3, 1/2\}$ en fonction du rapport η/p avec $\eta = 0.1$ et où la probabilité p est calculée sur $f \in [5, 20]$ GHz.

6.3.3 Stratégie de détection du radar IQ

La stratégie de détection du radar IQ se base sur l'équation (6.26) pour calculer les rapports signal-sur-bruit en projetant sur les parties positive et négative de l'opérateur $\hat{\Lambda}$ sur la base des états propres du système AS, $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$.

Nous nous intéressons en priorité à l'hypothèse H_1 étant donné que pour l'hypothèse H_0 , nous obtenons le même $\text{RSB}_{H_0} = p/(1-p)$ quelle que soit l'opérateur de projection utilisé. D'abord, nous distinguons les RSB_{H_1} dans l'équation (6.31).

$$\text{RSB}_{H_1}(|HH\rangle) = \frac{(\eta + p) 2\gamma}{(1 - \eta - p) 3b^2} \quad (6.31a)$$

$$\text{RSB}_{H_1}(|HV\rangle) = \frac{(\eta + p) (3 - 2\gamma)}{(1 - \eta - p) 3a^2} \quad (6.31b)$$

$$\text{RSB}_{H_1}(|VH\rangle) = \frac{(\eta + p) (3 - 2\gamma)}{(1 - \eta - p) 3b^2} \quad (6.31c)$$

$$\text{RSB}_{H_1}(|VV\rangle) = \frac{(\eta + p) 2\gamma}{(1 - \eta - p) 3a^2} \quad (6.31d)$$

Dans cette équation, nous avons les RSB_{H_1} pour les 4 projections sur la base des états de polarisation des deux photons $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$. Toutefois, les RSB (6.31a) et (6.31d) ne représentent pas un cas pratique pour le radar IQ car comme l'état intriqué initial $\hat{\rho}_{\text{AS, out}}$ tend vers un état complètement mixte $\hat{I}_{\text{AS}}/4$, on va avoir un recouvrement progressif des états $|HH\rangle, |VV\rangle$. Les RSB qui sont pertinents sont les équations (6.31b) et (6.31c) or comme on prend l'état intriqué initial $|\Psi^\pm\rangle_{\text{AS}}$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$, on obtient :

$$\text{RSB}_{H_1}(|HV\rangle) = \text{RSB}_{H_1}(|VH\rangle) = \frac{(\eta + p)(3 - 2\gamma)2}{(1 - \eta - p)3} \quad (6.32)$$

On voit dans l'équation (6.32) que les états impliqués dans l'intrication améliorent le RSB_{H_1} même si nous sommes dans un cas limite de détection avec seulement 2 photons sur les niveaux de polarisation $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Le RSB_{H_1} dépend du canal avec le paramètre γ , de la cible avec η et du bruit thermique en polarisation avec p . Nous traçons ce RSB_{H_1} dans la figure 6.12. On constate que les RSB_{H_1} sont très faibles quelle que soit l'influence du canal quantique avec γ et les fréquences d'émissions testées. Il est donc difficile d'extraire une information avec cette figure.

Si nous raisonnons alors directement sur l'équation (6.32) pour une propagation faible $\gamma \ll 1$, nous obtenons $\text{RSB}_{H_1} \approx 2(\eta + p)/(1 - \eta - p)$. Dans cette situation, seule une contribution de la cible $\eta > p$ nous donne un RSB intéressant pour le radar IQ mais il faut prendre garde à séparer les 2 contributions de η et de p . Dans le cas extrême où $\eta \ll p$, nous obtiendrions $\text{RSB}_{H_1} \approx p/(1 - p)$ ce qui équivaut au RSB_{H_0} et laisserait une confusion sur la capacité du radar IQ à distinguer un objet immergé dans le bruit thermique. Ainsi, d'après l'équation (6.32), la probabilité de réflexion η joue un rôle crucial sur l'hypothèse H_1 .

À l'inverse, pour une longue propagation $\gamma \rightarrow 1$, nous avons $\text{RSB}_{H_1} \approx 2(\eta + p)/[3(1 - \eta - p)]$. Là encore, il y a une compétition entre les contributions de la cible η et du bruit thermique p . Nous constatons également que le canal quantique joue un rôle avec le facteur $1/3$ qui apparaît. Toutefois, nous avons fait remarquer que ce canal quantique ne permettait un suivi adéquat de l'évolution de l'information quantique dans la section 6.2.2 que sur l'intervalle $[0, 3/4]$, ce qui peut limiter la validité de l'interprétation des RSB obtenus. En tenant compte du facteur $1/3$ par rapport au facteur 2 provenant de l'intrication quantique initiale, nous observons que le RSB_{H_1} pour une longue propagation dépend aussi de l'action du canal quantique de propagation par rapport aux états impliqués dans l'intrication initiale.

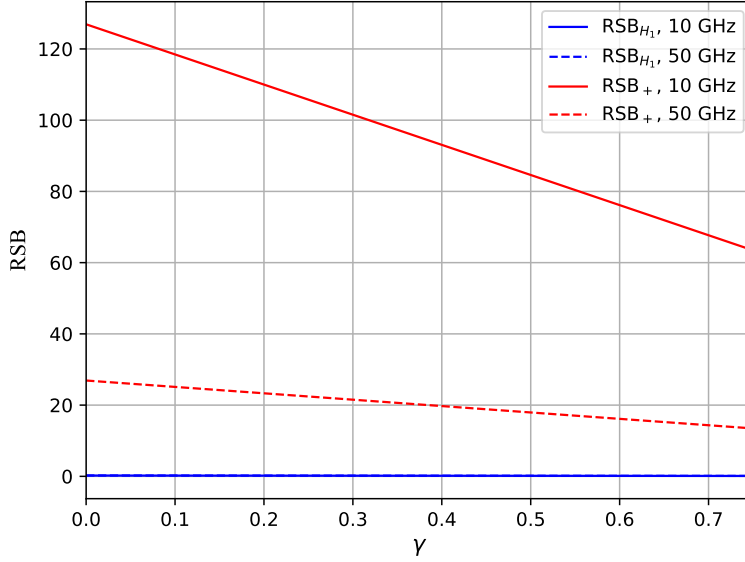


FIGURE 6.12 – RSB des équations (6.32) et (6.34) en fonction de $\gamma \in [0, 3/4]$, pour $f = \{10, 50\}$ GHz et $\eta = 0.1$.

En utilisant les probabilités conditionnelles $P(+|H_1)$ et $P(+|H_0)$, nous obtenons les RSB_+ dans l'équation (6.33).

$$RSB_+ (|HH\rangle) = \frac{(\eta + p) 2\gamma}{3pb^2} \quad (6.33a)$$

$$RSB_+ (|HV\rangle) = \frac{(\eta + p) (3 - 2\gamma)}{3pa^2} \quad (6.33b)$$

$$RSB_+ (|VH\rangle) = \frac{(\eta + p) (3 - 2\gamma)}{3pb^2} \quad (6.33c)$$

$$RSB_+ (|VV\rangle) = \frac{(\eta + p) 2\gamma}{3pa^2} \quad (6.33d)$$

Là encore, nous ne prenons en compte que les RSB des équations (6.33b) et (6.33c) qui donnent pour $a = b = 1/\sqrt{2}$:

$$RSB_+ (|HV\rangle) = \frac{(\eta + p) (3 - 2\gamma) 2}{3p} \quad (6.34)$$

La courbe de l'équation (6.34) est tracée dans la figure 6.12. On constate pour $f = 10$

GHz, le $\text{RSB}_+ > 60$ pour $\gamma < 3/4$ ce qui est avantageux. Le RSB_+ est plus faible quand la fréquence d'émission augmente mais reste supérieur à 1. Ainsi, si le RSB_+ est plus grand pour $f = 50$ GHz, cela provient du plus fort bruit thermique et non de la cible. Il faut en effet séparer les 2 contributions. En l'état, les courbes de la figure 6.12 aident peu sur les RSB réels sur radar IQ car il est nécessaire de distinguer les contributions η et p ce qui revient à une compétition entre elles.

Si nous raisonnons directement sur l'équation (6.34) pour une propagation faible $\gamma \ll 1$, nous obtenons $\text{RSB}_+ \approx 2(\eta + p)/p$. Nous retrouvons l'apport du facteur 2 sur le RSB_+ provenant de l'intrication initiale et nous constatons que ce RSB_+ dépend essentiellement de la contribution de la cible avec η par rapport à p . Nous arrivons à la même conclusion que pour le $\text{RSB}_{H_1, \gamma \ll 1}$, la probabilité de réflexion de la cible η doit contrebalancer le bruit thermique. Et si $\eta \ll p$ alors seul les états impliqués dans l'intrication initiale interviennent dans le RSB_+ .

Pour une longue propagation $\gamma \rightarrow 1$, nous obtenons $\text{RSB}_+ \approx 2(\eta + p)/3p$. La compétition entre la probabilité de réflexion de la cible η et le bruit thermique p va aussi entrer en jeu. Si nous avons une cible $\eta \ll p$ alors le RSB_+ dépendra à la fois du rapport $2/3$ provenant de la compétition des états de l'intrication face à l'action du canal quantique et à la fois du rapport η/p . Cela revient à montrer que le RSB_+ du radar IQ ne dépend pas seulement du rapport des contributions de l'objet et du bruit mais aussi de l'action du canal quantique sur le système intriqué initial AS.

Cette nouvelle approche par le canal de dépolarisation (6.15) avait pour objectif de montrer un lien entre la répartition des corrélations quantiques sur la stratégie de détection représentée par $\hat{\Lambda}$. Au vu des résultats des sections 6.3.2 et 6.3.3, la répartition des corrélations quantiques de la figure (6.10) est plus faible quand $\gamma \rightarrow 1$ ce qui corrobore le $\text{RSB}_{+, \gamma \rightarrow 1}$. La limite du modèle présenté en tenant compte de la répartition des corrélations quantiques sur $\hat{\Lambda}$ est que les figures 6.10 et 6.11 ne nous permettent pas au final de distinguer les contributions objet/bruit pour avoir une analyse fine de la situation. Ainsi, le calcul de la répartition des corrélations quantiques sur $\hat{\rho}_{H_1}$ ne nous apporte pas d'information viable pour la corréler aux RSB_+ du radar IQ.

Néanmoins, le calcul des RSB_{H_1} et RSB_+ nous a permis de mettre en valeur dans ce radar IQ avec des paires de photons intriqués sur les niveaux de polarisation $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ l'importance de la compétition entre la contribution de la cible η par rapport au bruit parasite p . Il a aussi souligné que l'action du canal de propagation joue sur le $\text{RSB}_{+, \gamma \rightarrow 1}$

d'une longue propagation. Néanmoins, comme pour l'approche dans la section 6.2, nous ne pouvons pas mettre en parfaite adéquation l'évolution des corrélations quantiques calculée à partir de l'équation (6.17) et la stratégie de décision du radar IQ établie dans cette section. Cela pose une limite dans le modèle proposé dans cette section en tenant compte à la fois du bruit thermique p , de la probabilité de réflexion η de la cible et de l'action γ du canal quantique.

Dans la section suivante, nous donnons une conclusion sur cette 2^{ème} approche du radar IQ de cette section 6.3.

6.3.4 Conclusion

Cette 2^{ème} approche du radar IQ sur les niveaux de polarisation $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ avait pour objectif de relier la distribution des corrélations quantiques sur l'opérateur $\hat{\Lambda}$ par le calcul de la discordie quantique à la stratégie de détection du radar IQ développée dans la section 6.3.1, pour mettre en avant les contributions séparées des paramètres η pour l'objet, p pour le bruit thermique et γ pour le canal. Si les calculs de RSB mettent bien en avant le rôle du canal quantique de propagation dans la stratégie de détection du radar quantique, elles ne permettent pas montrer de lien entre la répartition des corrélations quantiques et la stratégie de détection basée sur les hypothèses H_0 et H_1 .

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par une étude préliminaire du radar IQ en états de polarisation en modifiant le modèle de propagation. Les résultats sur l'approche par la TIQ présentent des défauts à cause du modèle de propagation qui considère que le milieu agit comme une mesure sur le photon S qui se propage. Suite à cela, nous avons étudié un potentiel radar IQ avec des paires de photons intriqués sur les modes de polarisation $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle\}$ dans l'atmosphère. Nous avons combiné une approche par la TIQ avec un canal de dépolarisation pour modéliser l'action du milieu de propagation avec un processus de détection binaire pour le radar IQ. Pour cette étude, nous avons effectué 2 approches différentes.

La 1^{ère} approche consistait à suivre l'évolution des corrélations quantiques dans le canal

quantique de dépolarisation en parallèle de la stratégie de détection du radar IQ basée sur celle de S. Lloyd. En faisant l'hypothèse que l'atténuation d'une onde classique dans le régime micro-onde est proportionnelle à la force d'interaction d'un photon isolé avec son environnement de propagation, nous avons estimé la distance de survie des corrélations quantiques et de l'intrication dans le canal représentant l'atmosphère. Nous avons trouvé le même ordre de grandeur que l'article [120] qui avait effectué une analyse plus fine au moyen d'une équation maîtresse sur un système en variable continue⁴ pour estimer la disparition de l'intrication. Cette approche du radar IQ en polarisation suggérait de faire un compromis entre la survie des corrélations quantiques et les RSB nécessaires pour le radar IQ dans le régime micro-onde en sachant que les RSB sont inférieurs à 1/2 dans ce régime pour les valeurs testées de η .

La 2^{ème} approche consistait à améliorer la stratégie de détection de la 1^{ère} approche pour séparer les contributions des paramètres η pour l'objet et de p pour le bruit thermique en polarisation tout en tentant de relier cette stratégie à la répartition des corrélations quantiques au sein des hypothèses de détection H_0, H_1 . Si le calcul des RSB soulignent que la compétition entre la probabilité de réflexion η et le bruit thermique p est importante pour que le radar IQ puisse récupérer un signal utile, nous n'avons pas pu établir de lien clair entre la répartition des corrélations quantiques et la stratégie de décision binaire. Le calcul de la discordance quantique sur les hypothèses de détection pour déceler les corrélations quantiques était peut-être une mauvaise approche de la situation radar.

Au cours des chapitres 5 et 6, nous avons concentré notre étude du radar IQ sur une version "standard" discrète de la théorie de l'information quantique. Cependant, le radar quantique est aussi affilié à la théorie de l'information quantique en variable continue à cause des technologies d'optique quantique qui reposent sur ce formalisme [2,26]. Effectuer une étude similaire sur les états de polarisation dans ce nouveau formalisme peut s'avérer intéressant.

4. Voir Annexe F pour la variable continue.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Cette thèse a eu pour objectif d'étudier la théorie du radar quantique en adoptant une approche par la TIQ. La théorie du radar quantique est très récente et a pour origine l'article de S. Lloyd où pour la première fois, l'idée est née d'utiliser l'intrication de photons pour améliorer la sensibilité de détection d'un objet à distance. Cette idée a pour nom le radar IQ. Dans notre travail de recherche, nous avons d'abord établi un parallèle entre la théorie du radar classique et la théorie du radar quantique. Sa mise en place a permis de souligner les points de différence entre les deux théories le long d'une chaîne radar. En laissant de côté les aspects technologiques, nous avons vu que les points critiques à traiter dans cette chaîne radar sont la propagation du photon S dans l'atmosphère pendant que le photon A reste dans le radar IQ et l'interaction entre ce photon S et la cible. Si une théorie de la SERQ existe, elle est en revanche inadaptée à une approche par la TIQ c'est pourquoi l'étude du radar IQ par la TIQ s'est concentrée sur la phase de propagation en se contentant de décrire l'objet uniquement par une probabilité de renvoyer le photon incident. Notre objectif était de lier l'évolution des corrélations quantiques du système de photons dans l'atmosphère à la théorie de la décision binaire du radar IQ. Ces études ont été menées en modifiant le degré de liberté physique sur lequel l'état intriquée de la paire de photons AS est produit. Les travaux menés ont exploré les états d'OAM, le radar IQ original de S. Lloyd en fonction des états d'énergie thermique peuplés par des photons puis les états de polarisation.

Le premier travail sur les OAM prend la forme d'une analyse sur la pertinence d'utiliser ces états intriqués en OAM pour l'usage d'un radar IQ. En faisant des recherches dans la littérature, il est apparu que les OAM ne sont pas adaptées à une utilisation radar parce que l'intrication sur les états d'OAM est très sensible aux turbulences dans l'atmosphère. Cette piste de recherche a donc été abandonnée. Notre deuxième travail a été de

reprendre le radar IQ de S. Lloyd pour lier la stratégie de décision binaire à l'évolution de l'intrication et de la discordance quantique dans l'environnement de propagation modélisé par un canal quantique. En utilisant une analogie sur les états d'énergie thermique pour modéliser la propagation d'un photon dans l'atmosphère, nous sommes parvenus à lier la discordance aux RSB calculés par la théorie de la décision de S. Lloyd. Ce travail présente plusieurs limites au niveau du parallèle entre la modélisation de la propagation et la décision. Néanmoins, il ouvre des perspectives intéressantes sur l'usage de la discordance quantique dans la théorie du radar quantique. En continuant l'étude du radar IQ, nous avons exploré l'utilisation des états de polarisation des photons dans l'atmosphère en nous concentrant sur le régime de fréquences micro-ondes. Comme précédemment, nous avons modélisé la propagation du photon en parallèle de la théorie de la détection afin de mettre en évidence la nécessité de choisir une fréquence d'émission pour optimiser la survie des corrélations quantiques dans l'atmosphère avec les RSB calculés dans un régime de fonctionnement comportant un fort bruit thermique. Puis, par une analogie sur l'atténuation d'une onde classique dans l'atmosphère, nous avons estimé très approximativement la distance de survie de l'intrication et des corrélations quantiques dans l'atmosphère ce qui a donné des ordres de grandeurs proches d'une étude trouvée dans la littérature. Sur ce même radar IQ en états de polarisation, nous avons tenté d'améliorer les hypothèses de détection pour lier la répartition des corrélations quantiques à la stratégie de détection. La répartition des corrélations quantiques a pour objectif de distinguer séparément les contributions du canal de propagation, de la réflectivité de l'objet et du bruit thermique présent. Cette approche n'a cependant pas donné de résultats intéressants. L'approche par la TIQ du radar IQ s'est limitée dans cette thèse à des paires de photons intriqués sur un faible nombre d'états impliqués dans l'intrication initiale.

Dans la perspective de potentielles futures recherches, il serait pertinent d'étendre l'approche par la TIQ à la variable continue. Cette nouvelle approche ouvre des opportunités de pistes expérimentales liées la thématique du radar quantique par des techniques d'optique quantique permettant de générer des états intriqués. Nous invitons à regarder en annexe F quelques éléments théoriques et technologiques à ce sujet. Nous insistons sur le fait que la thématique du radar quantique est très récente, encore au stade exploratoire et que la question de savoir si un radar IQ puisse fonctionner reste une question ouverte.

Annexes

RADAR IQ EN OAM

Nous détaillons quelques étapes des calculs de l'article de C. Paterson [8] pour obtenir la probabilité $P(l|\Psi(r, \theta, z))$ de détecter le nombre azimutal l en ayant les fonctions propres en OAM, $\varphi_{p,l}(r, \theta)$. La probabilité d'une mesure s'écrit alors :

$$P(l|\Psi(r, \theta, z)) = \sum_p |a_{p,l}(z)|^2 = |\langle \varphi_{p,l}(r, \theta) | \Psi(r, \theta, z) \rangle|^2 \quad (\text{A.1a})$$

$$= \sum_p \langle \varphi_{p,l}(r', \theta') | \Psi(r', \theta', z) \rangle^* \langle \varphi_{p,l}(r, \theta) | \Psi(r, \theta, z) \rangle \quad (\text{A.1b})$$

$$= \sum_p \int_{r'} \int_{\theta'} \frac{R_p^*(r')}{\sqrt{2\pi}} \Psi^*(r', \theta', z) e^{il\theta'} r' dr' d\theta' \int_r \int_\theta \frac{R_p(r)}{\sqrt{2\pi}} \Psi(r, \theta, z) e^{-il\theta} r dr d\theta \quad (\text{A.1c})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{r'} \int_{\theta'} \int_r \int_\theta \sum_p R_p^*(r') R_p(r) \Psi^*(r', \theta', z) \Psi(r, \theta, z) e^{-il\Delta\theta} r' dr' d\theta' r dr d\theta \quad (\text{A.1d})$$

Avec $\Delta\theta = \theta - \theta'$. La relation de fermeture $\sum_p R_p^*(r) R_p(r) = \delta(r, r')/r$ vient du fait que les modes LG_p^l forment une base orthonormée complète et que nous pouvons séparer ces modes en 2 contributions : une contribution radiale $R_p(r)$ et une contribution azimutale $e^{il\theta}$ avec la phase [105]. Comme l'écran à perturbation de phase perturbe la partie azimutale du mode LG_p^l , on utilise la relation de fermeture seulement sur la partie radiale pour ensuite étudier la partie azimutale. La partie radiale du faisceau LG_p^l s'écrit [104, 105] :

$$R_p^{|l|}(r, z) = \frac{2}{\omega(z)} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right)^{|l|} e^{-\frac{r^2}{\omega^2(z)}} L_p^{|l|} \left[\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right] e^{\frac{ikr^2}{2R(z)}} \times e^{-i(2p+|l|+1)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)} \quad (\text{A.2})$$

Où on a $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ qui est la taille du point du faisceau dans le mode LG_p^l avec le waist ω_0 qui représente sa taille minimale. $R(z) = z(1 + (z/z_R)^2)$ est le rayon de

courbure du front d'onde avec $z_R = k\omega_0^2/2$ qui est le nombre de Rayleigh. Dans l'équation (A.2), le faisceau dans le mode LG_p^l est décrit en fonction d'un polynôme de Laguerre généralisé :

$$L_p^{|l|}(x) = \sum_{m=0}^p (-1)^m \frac{(p + |l|)!}{(p - m)(m + |l|)!m!} x^m \quad (\text{A.3})$$

La probabilité de détecter le nombre azimutal l s'écrit en faisant une moyenne statistique qui prend en compte les fluctuations de la phase sur l'ensemble des mesures :

$$P(l) = \int_r \int_{\theta'} \int_{\theta} \langle \Psi^*(r', \theta', z) \Psi(r, \theta, z) \rangle \frac{1}{2\pi} e^{-il\Delta\theta} r dr d\theta' d\theta \quad (\text{A.4a})$$

$$= \int_r \int_{\Delta\theta} \langle \Psi^*(r', 0, z) \Psi(r, \theta, z) \rangle \frac{1}{2\pi} e^{-il\Delta\theta} r dr d\Delta\theta \quad (\text{A.4b})$$

$$= \int_r \int_{\Delta\theta} C'(r, \Delta\theta, z) \frac{1}{2\pi} e^{-il\Delta\theta} r dr d\Delta\theta \quad (\text{A.4c})$$

La probabilité $P(l)$ dépend alors des fluctuations aléatoires de la phase sur les fonctions d'onde avec $C'(r, \Delta\theta, z)$ et du nombre azimutal l à détecter.

RADAR IQ DE S. LLOYD

Cette annexe apporte des détails sur les calculs des grandeurs de la TIQ de la section 5.3. L'entropie de Von Neumann jointe est calculée avec la formule :

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS, out}}) = -\text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{AS, out}} \log(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})\} \quad (\text{B.1})$$

Les valeurs propres de la matrice densité $\hat{\rho}_{\text{AS, out}}$ dans la base des états d'énergie thermique s'écrit en fonction de $\xi \in [0, 1/2]$ et $p \in [0, 1]$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}p(1 - \xi) \quad (\text{B.2a})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}p\xi \quad (\text{B.2b})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}p + \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})} \right) \quad (\text{B.2c})$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}p - \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})} \right) \quad (\text{B.2d})$$

Le discriminant du polynôme $\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})$ est écrit dans l'équation (B.3).

$$\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}}) = \left(1 - \frac{1}{2}p \right)^2 - p^2\xi + p^2\xi^2 \quad (\text{B.3})$$

Où $\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}}) \geq 0$ quel que soit $p \in [0, 1]$ et $\xi \in [0, 1/2]$. Nous calculons ensuite les matrices de passage P et P^{-1} dans les équations pour calculer (B.4) et (B.5) pour obtenir $\log(\hat{\rho}_{\text{AS, out}}) = P \log(D) P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2)$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p(\frac{1}{2}-\xi)-\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})}}{d_3} & -\frac{p(\frac{1}{2}-\xi)+\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})}}{d_4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{1-p}}{d_3} & \frac{\sqrt{1-p}}{d_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d_3}{2\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}} & \frac{d_3}{2} \frac{p(\frac{1}{2}-\xi) + \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}}{\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})(1-p)}} & 0 \\ 0 & -\frac{d_4}{2\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}} & -\frac{d_4}{2} \frac{p(\frac{1}{2}-\xi) - \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}}{\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})(1-p)}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Où les coefficients c_i , d_i sont définis dans l'équation (B.6).

$$d_3 = \sqrt{1-p + \left[p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right]^2} \quad (\text{B.6a})$$

$$d_4 = \sqrt{1-p + \left[p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right]^2} \quad (\text{B.6b})$$

Nous exprimons alors la matrice densité du système AS :

$$\log(\hat{\rho}_{AS, \text{out}}) = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & L_3 & 0 \\ 0 & L_4 & L_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_6 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Où les éléments L_i sont écrits dans l'équation (B.8).

$$L_1 = \log(\lambda_1) \quad (\text{B.8a})$$

$$L_2 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}} \left[\left(p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right) \log(\lambda_4) - \left(p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right) \log(\lambda_3) \right] \quad (\text{B.8b})$$

$$L_3 = \frac{\left(p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right) \left(p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right)}{2\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})(1-p)}} [\log(\lambda_4) - \log(\lambda_3)] \quad (\text{B.8c})$$

$$L_4 = \frac{\sqrt{1-p}}{2\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}} [\log(\lambda_3) - \log(\lambda_4)] \quad (\text{B.8d})$$

$$L_5 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})}} \left[\left(p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right) \log(\lambda_3) - \left(p\left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \sqrt{\Delta(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right) \log(\lambda_4) \right] \quad (\text{B.8e})$$

$$L_6 = \log(\lambda_2) \quad (\text{B.8f})$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'opérateur $\hat{\rho}_{\text{AS, out}} \log(\hat{\rho}_{\text{AS, out}})$ dans l'équation (B.9).

$$\hat{\rho}_{\text{AS, out}} \log(\hat{\rho}_{\text{AS, out}}) = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & H_3 & 0 \\ 0 & H_4 & H_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_6 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Où les éléments H_i sont définis par :

$$H_1 = \frac{1}{2}p(1 - \xi)L_1 \quad (\text{B.10a})$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(1 - p + p\xi)L_2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - p}L_4 \quad (\text{B.10b})$$

$$H_3 = \frac{1}{2}(1 - p + p\xi)L_3 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - p}L_5 \quad (\text{B.10c})$$

$$H_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - p}L_2 + \frac{1}{2}(1 - p\xi)L_4 \quad (\text{B.10d})$$

$$H_5 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - p}L_3 + \frac{1}{2}(1 - p\xi)L_5 \quad (\text{B.10e})$$

$$H_6 = \frac{1}{2}p\xi L_6 \quad (\text{B.10f})$$

Ce qui permet d'obtenir les figures 5.6 à 5.7 de la section 5.3.

RADAR IQ EN ÉTATS DE POLARISATION

Nous écrivons dans cette partie les calculs intermédiaires pour le canal de dépolarisation de la section 6.2.

À partir du canal de dépolarisation appliqué aux états de Bell de l'équation (6.15), nous obtenons les matrices densités :

$$\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Psi^\pm} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\gamma a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3-2\gamma)\frac{a^2}{3} & \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} & 0 \\ 0 & \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} & (3-2\gamma)\frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\gamma b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1a})$$

$$\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Phi^\pm} = \begin{pmatrix} (3-2\gamma)\frac{a^2}{3} & 0 & 0 & \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}\gamma a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\gamma b^2 & 0 \\ \pm(3-4\gamma)\frac{ab}{3} & 0 & 0 & (3-2\gamma)\frac{b^2}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1b})$$

Nous commençons par le calcul du taux d'intrication puis nous effectuons le calcul du taux de corrélations quantiques.

Nous calculons l'intrication de formation en utilisant la concurrence de Wootters [38,67]. Pour cela, on calcule la matrice $R = \hat{\rho}_{\text{AS,out}}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$ où le symbole * désigne le complexe conjugué. Pour l'état $|\Psi^+\rangle_{\text{AS}}$, on obtient la matrice R :

$$R^{\Psi^+} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_1 & 0 \\ 0 & R_4 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Avec les coefficients

$$R_1 = \frac{2}{9}a^3b(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma) \quad (\text{C.3a})$$

$$R_2 = (3 - 4\gamma)^2 \frac{a^2b^2}{9} + (3 - 2\gamma)^2 \frac{a^2b^2}{9} = R_3 \quad (\text{C.3b})$$

$$R_4 = \frac{2}{9}ab^3(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma) \quad (\text{C.3c})$$

De même, pour l'état $|\Psi^-\rangle_{\text{AS}}$, on a :

$$R^{\Psi^-} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & S_1 & 0 \\ 0 & S_4 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

avec les coefficients

$$S_1 = -\frac{2}{9}a^3b(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma) \quad (\text{C.5a})$$

$$S_2 = (3 - 4\gamma)^2 \frac{a^2b^2}{9} + (3 - 2\gamma)^2 \frac{a^2b^2}{9} = S_3 \quad (\text{C.5b})$$

$$S_4 = -\frac{2}{9}ab^3(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma) \quad (\text{C.5c})$$

Où on a au final : $R_1 = -S_1$, $R_4 = -S_4$ et $R_2 = R_3 = S_2 = S_3$.

On effectue les mêmes calculs sur l'état $|\Phi^\pm\rangle_{\text{AS}}$. Pour l'état $|\Phi^+\rangle_{\text{AS}}$, on obtient :

$$R^{\Phi^+} = \begin{pmatrix} -R'_2 & 0 & 0 & -R'_1 \\ 0 & \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 & 0 \\ -R'_4 & 0 & 0 & -R'_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Avec les coefficients :

$$R'_1 = -\frac{2}{9}a^3b(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma) \quad (\text{C.7a})$$

$$R'_2 = -(3 - 4\gamma)^2 \frac{a^2b^2}{9} - (3 - 2\gamma)^2 \frac{a^2b^2}{9} = R'_3 \quad (\text{C.7b})$$

$$R'_4 = -\frac{2}{9}ab^3(3 - 4\gamma)(3 - 2\gamma) \quad (\text{C.7c})$$

Pour $|\Phi^-\rangle_{AS}$, nous obtenons :

$$R^{\Phi^-} = \begin{pmatrix} -S'_2 & 0 & 0 & -S'_1 \\ 0 & \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9}\gamma^2 a^2 b^2 & 0 \\ -S'_4 & 0 & 0 & -S'_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Avec les coefficients

$$S'_1 = \frac{2}{9}a^3b(3-4\gamma)(3-2\gamma) \quad (\text{C.9a})$$

$$S'_2 = -(3-4\gamma)^2 \frac{a^2 b^2}{9} - (3-2\gamma)^2 \frac{a^2 b^2}{9} = S'_3 \quad (\text{C.9b})$$

$$S'_4 = \frac{2}{9}ab^3(3-4\gamma)(3-2\gamma) \quad (\text{C.9c})$$

Où on a : $R'_1 = -S'_1$, $R'_4 = -S'_4$ et $R'_2 = R'_3 = S'_2 = S'_3$.

Les calculs des valeurs propres sur les matrices R^{Ψ^\pm} et R^{Φ^\pm} dépendent du même polynôme caractéristique Δ_R donnée dans l'équation (C.10). On a donc les mêmes valeurs propres puisque nous utilisons des états de Bell.

$$\sqrt{\Delta_R} = \frac{4}{9}a^2b^2(3-4\gamma)(3-2\gamma) \quad (\text{C.10})$$

Le déterminant Δ_R évolue en fonction du paramètre $0 \leq \gamma \leq 1$ mais nous stoppons le calcul pour $\gamma = 3/4$ où le déterminant devient nul. Mathématiquement, le déterminant redevient positif après $3/4$ mais le taux d'intrication $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS})$ ne peut plus évoluer puisque l'intrication a disparu. Ensuite, nous obtenons les racines carrées des valeurs propres des matrices R :

$$\sqrt{\lambda_R^{(1)}} = \frac{2}{3}\gamma ab \quad (\text{C.11a})$$

$$\sqrt{\lambda_R^{(2)}} = 2ab(1-\gamma) \quad (\text{C.11b})$$

$$\sqrt{\lambda_R^{(3)}} = \frac{2}{3}\gamma ab \quad (\text{C.11c})$$

$$(\text{C.11d})$$

Parmi ces valeurs propres, on a la valeur propre $\sqrt{\lambda_R^{(1)}}$ de multiplicité 2, et comme $\sqrt{\lambda_R^{(1)}} = \sqrt{\lambda_R^{(3)}}$, on n'obtient au final que deux valeurs propres différentes. Pour visualiser

l'évolution des racines carrées des valeurs propres, celles-ci sont tracées dans la figure C.1. En prenant en compte la multiplicité des valeurs propres, nous trouvons la concurrence

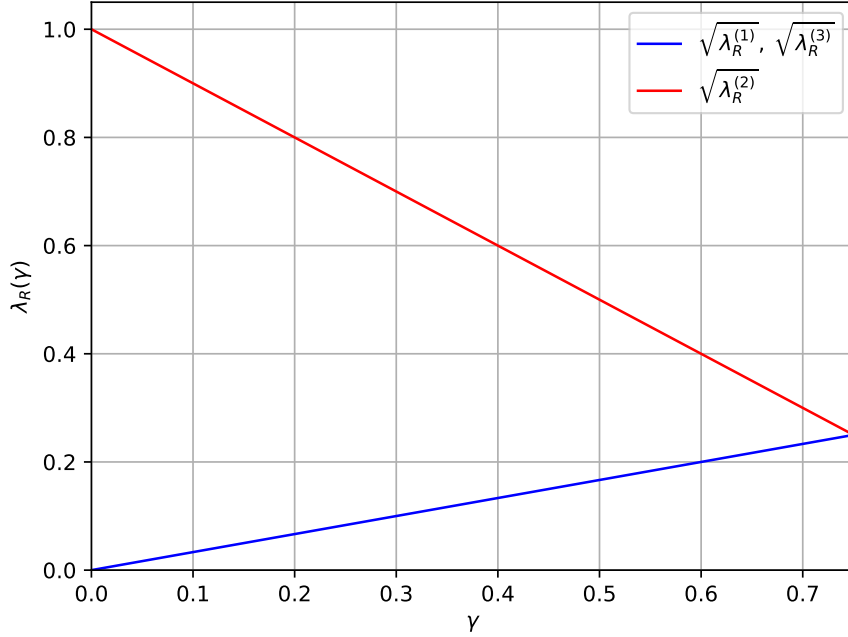


FIGURE C.1 – Racines des valeurs propres des matrices R en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 3/4]$.

de Wootters suivante :

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AS, \text{out}}) = \max \left(0, \sqrt{\lambda_R^{(2)}} - \sqrt{\lambda_R^{(1)}} - \sqrt{\lambda_R^{(1)}} - \sqrt{\lambda_R^{(3)}} \right) \quad (\text{C.12a})$$

$$= \max \left(0, 2ab(1 - \gamma) - 3 \times \frac{2}{3} \gamma ab \right) \quad (\text{C.12b})$$

$$= \max (2ab(1 - 2\gamma)) \quad (\text{C.12c})$$

Puis nous déduisons de l'intrication de formation $\mathcal{E}(\hat{\rho}_{AS, \text{out}}) = h(x)$ où $h(x) = -x \log(x) - (1 - x) \log(1 - x)$ avec $x = \left(1 + \sqrt{1 - \mathcal{C}^2(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})} \right) / 2$.

Le calcul de la discordance quantique se déroule en deux temps : le calcul de l'information mutuelle quantique puis le calcul des corrélations classiques.

Pour l'information mutuelle quantique, nous calculons $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AS, \text{out}}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_{A, \text{out}}) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_{S, \text{out}}) -$

$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})$ où les entropies des systèmes A et S s'écrivent :

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A, \text{out}}) = a^2 \log\left(\frac{1}{a^2}\right) + b^2 \log\left(\frac{1}{b^2}\right) \quad (\text{C.13a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\hat{\rho}_{S, \text{out}}) &= \frac{(3 - 2\gamma)a^2 + 2\gamma b^2}{3} \log\left(\frac{3}{(3 - 2\gamma)a^2 + 2\gamma b^2}\right) \\ &+ \frac{2\gamma a^2 + (3 - 2\gamma)b^2}{3} \log\left(\frac{3}{2\gamma a^2 + (3 - 2\gamma)b^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.13b})$$

L'entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{A, \text{out}})$ ne dépend pas du paramètre γ parce que le canal quantique (6.15) n'agit que sur le qubit S. Pour l'entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{S, \text{out}})$ on a bien une dépendance au paramètre γ venant du canal de propagation.

Les calculs pour l'entropie total $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS, \text{out}})$ pour les états Ψ^\pm et Φ^\pm donnent des expressions différentes pour les calculs intermédiaires sous forme de matrices mais nous obtenons le même résultat pour la valeur de l'entropie de Von Neumann. Chaque calcul se fait en utilisant la diagonalisation des matrices densités (C.1a) et (C.1b) pour calculer le logarithme de matrice $\log \hat{\rho}_{AS, \text{out}} = P \cdot \log(D) \cdot P^{-1}$. Les matrices P et P^{-1} sont les matrices de passage formées des vecteurs propres associées aux valeurs propres définissant la matrice diagonale D . On distingue les calculs pour l'état Ψ^\pm et pour l'état Φ^\pm .

La diagonalisation des états de Bell soumis au canal quantique (6.15) donne les mêmes valeurs propres.

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}\gamma a^2 \quad (\text{C.14a})$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}\gamma b^2 \quad (\text{C.14b})$$

$$\lambda_3 = \frac{3 - 2\gamma + 3\sqrt{\Delta}}{6} \quad (\text{C.14c})$$

$$\lambda_4 = \frac{3 - 2\gamma - 3\sqrt{\Delta}}{6} \quad (\text{C.14d})$$

Où on a le déterminant du polynôme caractéristique :

$$\Delta = \frac{1}{9} \left[(1 - 4a^2b^2)(3 - 2\gamma)^2 + 4a^2b^2(3 - 4\gamma)^2 \right] \quad (\text{C.15})$$

Et où $\Delta = 0$ si $\gamma = 3/4$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$.

Pour l'état Ψ^\pm , le calcul de l'entropie de Von Neumann nécessite de calculer l'opérateur

$\hat{\rho}_{\text{AS,out}} \log \hat{\rho}_{\text{AS,out}}$:

$$\hat{\rho}_{\text{AS,out}} \log \hat{\rho}_{\text{AS,out}} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & \pm H_3 & 0 \\ 0 & \pm H_4 & H_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_6 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Où les éléments $H_{i=1..6}$ sont définis dans l'équation (C.17).

$$H_1 = \frac{2}{3}\gamma a^2 L_1 \quad (\text{C.17a})$$

$$H_2 = (3 - 2\gamma) \frac{a^2}{3} L_2 + (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L_4 \quad (\text{C.17b})$$

$$H_3 = (3 - 2\gamma) \frac{a^2}{3} L_3 + (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L_5 \quad (\text{C.17c})$$

$$H_4 = (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L_2 + (3 - 2\gamma) \frac{b^2}{3} L_4 \quad (\text{C.17d})$$

$$H_5 = (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L_3 + (3 - 2\gamma) \frac{b^2}{3} L_5 \quad (\text{C.17e})$$

$$H_6 = \frac{2}{3}\gamma b^2 L_6 \quad (\text{C.17f})$$

Et les éléments $L_{i=1..6}$ sont définis dans l'équation (C.18).

$$L_1 = \log(\lambda_1) \quad (\text{C.18a})$$

$$L_2 = \frac{1}{c_2 d_1 - c_1 d_2} (c_2 d_1 \log(\lambda_4) - c_1 d_2 \log(\lambda_3)) \quad (\text{C.18b})$$

$$L_3 = \frac{c_1 d_1}{c_2 d_1 - c_1 d_2} (\log(\lambda_4) - \log(\lambda_3)) \quad (\text{C.18c})$$

$$L_4 = \frac{c_2 d_2}{c_2 d_1 - c_1 d_2} (\log(\lambda_3) - \log(\lambda_4)) \quad (\text{C.18d})$$

$$L_5 = \frac{1}{c_2 d_1 - c_1 d_2} (c_2 d_1 \log(\lambda_3) - c_1 d_2 \log(\lambda_4)) \quad (\text{C.18e})$$

$$L_6 = \log(\lambda_2) \quad (\text{C.18f})$$

Les éléments L_i ont été définis à partir des coefficients $c_{i=1..2}$, $d_{i=1..2}$ de l'équation (C.19)

utilisés pour le calcul de $\log \hat{\rho}_{\text{AS,out}}$.

$$c_1 = \frac{2(3-4\gamma)ab}{\sqrt{4(3-4\gamma)^2a^2b^2 + [(3-2\gamma)(2a^2-1) - 3\sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{C.19a})$$

$$c_2 = \frac{(3-2\gamma)(2a^2-1) - 3\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4(3-4\gamma)^2a^2b^2 + [(3-2\gamma)(2a^2-1) - 3\sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{C.19b})$$

$$d_1 = \frac{2(3-4\gamma)ab}{\sqrt{4(3-4\gamma)^2a^2b^2 + [(3-2\gamma)(2a^2-1) + 3\sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{C.19c})$$

$$d_2 = \frac{(3-2\gamma)(2a^2-1) + 3\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4(3-4\gamma)^2a^2b^2 + [(3-2\gamma)(2a^2-1) + 3\sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{C.19d})$$

Et le logarithme de la matrice densité correspondant à l'état de Bell Ψ^\pm a été calculé en utilisant la matrice de passage P et son inverse P^{-1} de l'équation (C.20) en considérant la matrice diagonale : $D = \text{diag}(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2)$.

$$P_{\Psi^+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20a})$$

$$P_{\Psi^+}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d_2}{c_2d_1 - c_1d_2} & -\frac{d_1}{c_2d_1 - c_1d_2} & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{c_2d_1 - c_1d_2} & \frac{c_1}{c_2d_1 - c_1d_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20b})$$

$$P_{\Psi^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20c})$$

$$P_{\Psi^-}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d_2}{c_1d_2 - c_2d_1} & -\frac{d_1}{c_1d_2 - c_2d_1} & 0 \\ 0 & -\frac{c_2}{c_1d_2 - c_2d_1} & \frac{c_1}{c_1d_2 - c_2d_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20d})$$

Où $\det(P_{\Psi^+}) = c_2d_1 - c_1d_2$ et $\det(P_{\Psi^-}) = c_1d_2 - c_2d_1$.

Les mêmes calculs sont effectués pour l'état de Bell Φ^\pm où l'opérateur $\hat{\rho}_{\text{AS,out}}$ $\log \hat{\rho}_{\text{AS,out}}$

est défini dans l'équation (C.21).

$$\hat{\rho}_{\text{AS,out}} \log \hat{\rho}_{\text{AS,out}} = \begin{pmatrix} H'_1 & 0 & 0 & \pm H'_2 \\ 0 & H'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H'_4 & 0 \\ \pm H'_5 & 0 & 0 & H'_6 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Avec les coefficients $H'_{i=1..6}$:

$$H'_1 = (3 - 2\gamma) \frac{a^2}{3} L'_1 + (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L'_5 \quad (\text{C.22a})$$

$$H'_2 = (3 - 2\gamma) \frac{a^2}{3} L'_2 + (3 - 2\gamma) \frac{ab}{3} L'_6 \quad (\text{C.22b})$$

$$H'_3 = \frac{2}{3} \gamma a^2 L'_3 \quad (\text{C.22c})$$

$$H'_4 = \frac{2}{3} \gamma b^2 L'_4 \quad (\text{C.22d})$$

$$H'_5 = (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L'_1 + (3 - 2\gamma) \frac{b^2}{3} L'_5 \quad (\text{C.22e})$$

$$H'_6 = (3 - 4\gamma) \frac{ab}{3} L'_2 + (3 - 2\gamma) \frac{b^2}{3} L'_6 \quad (\text{C.22f})$$

Et où les éléments $L'_{i=1..6}$ sont définis par :

$$L'_1 = \frac{1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} (c_2 d_1 \log(\lambda_3) - c_1 d_2 \log(\lambda_4)) \quad (\text{C.23a})$$

$$L'_2 = \frac{c_1 d_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} (\log(\lambda_4) - \log(\lambda_3)) \quad (\text{C.23b})$$

$$L'_3 = \log(\lambda_1) \quad (\text{C.23c})$$

$$L'_4 = \log(\lambda_2) \quad (\text{C.23d})$$

$$L'_5 = \frac{c_2 d_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} (\log(\lambda_3) - \log(\lambda_4)) \quad (\text{C.23e})$$

$$L'_6 = \frac{1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} (c_2 d_1 \log(\lambda_4) - c_1 d_2 \log(\lambda_3)) \quad (\text{C.23f})$$

Les termes $c_{i=1..2}$, $d_{i=1..2}$ sont ceux définis dans l'équation (C.19).

Le logarithme de la matrice densité $\log \hat{\rho}_{\text{AS,out}} = P \cdot \log(D') \cdot P^{-1}$ a été calculé avec la même matrice diagonale $D' = \text{diag}(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2)$. Les matrices de passage P et P^{-1} sont

données dans l'équation (C.24).

$$P_{\Phi^+} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_2 & -d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24a})$$

$$P_{\Phi^+}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{d_2}{c_2 d_1 - c_1 d_2} & 0 & 0 & -\frac{d_1}{c_2 d_1 - c_1 d_2} \\ \frac{c_2}{c_2 d_1 - c_1 d_2} & 0 & 0 & \frac{c_1}{c_2 d_1 - c_1 d_2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24b})$$

$$P_{\Phi^-} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24c})$$

$$P_{\Phi^-}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} & 0 & 0 & -\frac{d_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} \\ -\frac{c_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} & 0 & 0 & \frac{c_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24d})$$

Où on a $\det(P_{\Phi^+}) = c_2 d_1 - c_1 d_2$ et $\det(P_{\Phi^-}) = c_1 d_2 - c_2 d_1$.

En reprenant les opérateurs (C.16) et (C.21), on calcule l'entropie de Von Neumann dans l'équation (C.25).

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Psi^\pm}) = -\text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Psi^\pm} \log \hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Psi^\pm}\} = -H_1 - H_2 - H_5 - H_6 \quad (\text{C.25a})$$

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Phi^\pm}) = -\text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Phi^\pm} \log \hat{\rho}_{\text{AS,out}}^{\Phi^\pm}\} = -H'_1 - H'_3 - H'_4 - H'_6 \quad (\text{C.25b})$$

En comparant les expressions L_i et L'_i , on trouve que $H_1 = H'_3$, $H_2 = H'_1$, $H_5 = H'_6$, $H_6 = H'_4$ et donc que $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{\Psi^\pm}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{\Phi^\pm})$. Le canal quantique (6.15) a le même effet quel que soit l'état initial choisi pour le radar IQ. L'entropie du système AS est représentée en figure C.2. L'entropie augmente jusqu'à son maximum pour $\gamma = 3/4$.

L'entropie conditionnelle quantique $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{A,out}}|\hat{\rho}_{\text{S,out}})$ est calculée dans l'équation (C.26) en utilisant des opérateurs de projection de Von Neumann $\{\hat{M}_S^{(i)}\}$ agissant sur le sous-système

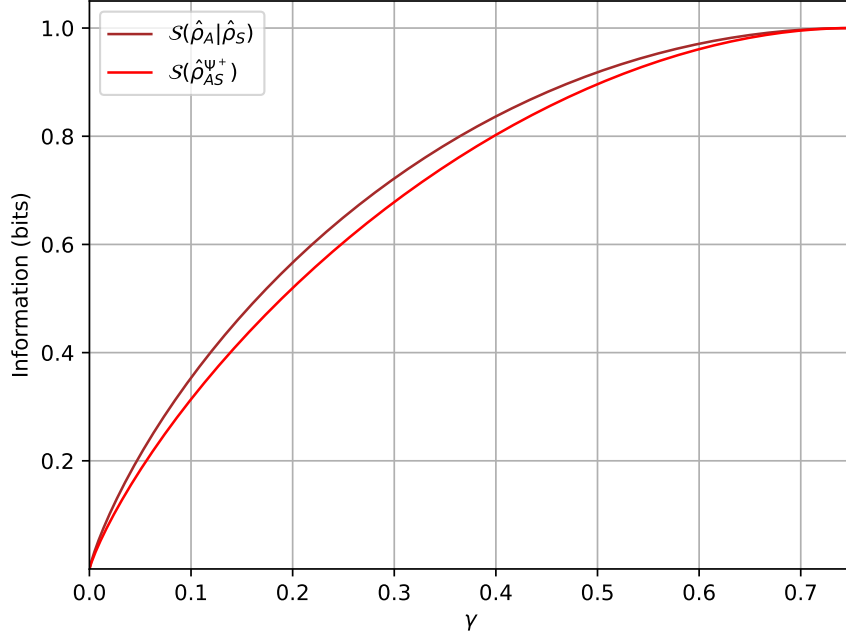


FIGURE C.2 – Entropie conditionnelle quantique $\mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_S)$ et entropie $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS})$ en fonction du paramètre $\gamma \in [0, 1]$.

S ce qui permet de déduire l'état quantique du sous-système A.

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_S)_{\{\hat{M}_S^{(i)}\}} = p_H \mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(H)}) + p_V \mathcal{S}(\hat{\rho}_A^{(V)}) \quad (\text{C.26a})$$

$$= \frac{2\gamma a^2}{3} \log \left(\frac{(3-2\gamma)b^2 + 2\gamma a^2}{2\gamma a^2} \right) \quad (\text{C.26b})$$

$$+ \frac{(3-2\gamma)b^2}{3} \log \left(\frac{2\gamma a^2 + (3-2\gamma)b^2}{(3-2\gamma)b^2} \right) \quad (\text{C.26c})$$

$$+ \frac{(3-2\gamma)a^2}{3} \log \left(\frac{(3-2\gamma)a^2 + 2\gamma b^2}{(3-2\gamma)a^2} \right) \quad (\text{C.26d})$$

$$+ \frac{2\gamma b^2}{3} \log \left(\frac{(3-2\gamma)a^2 + 2\gamma b^2}{2\gamma b^2} \right) \quad (\text{C.26e})$$

Cette entropie quantique conditionnelle est tracée en fonction du paramètre γ en figure C.2. L'entropie augmente quand γ tend vers 1 et est maximum pour $\gamma = 3/4$. Comme l'état de Bell $\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{\Psi^\pm}$ ou $\hat{\rho}_{AS,\text{out}}^{\Phi^\pm}$ tend à devenir un état séparable totalement mixte sous l'effet du canal quantique (6.15), on perd les corrélations quantiques qui faisaient qu'on

avait la connaissance de l'état du sous-système S si on faisait une projection sur le sous-système A.

Nous ajoutons à cette annexe les figures C.3 et C.4 où sont respectivement représentées le taux d'intrication et la discordance en fonction des paramètres a et γ . Les valeurs de a sont choisies de manière arbitraire : $0.1 \leq a \leq 0.5$.

On observe que l'intrication de formation et la discordance quantique ont un comportement similaire en fonction du couple de paramètres (a, γ) si bien qu'il y est impossible de distinguer clairement le taux d'intrication de la figure C.3 du taux de corrélations quantiques de la figure C.4 excepté si on fixe des paramètres a, b comme pour les figures du chapitre 6.

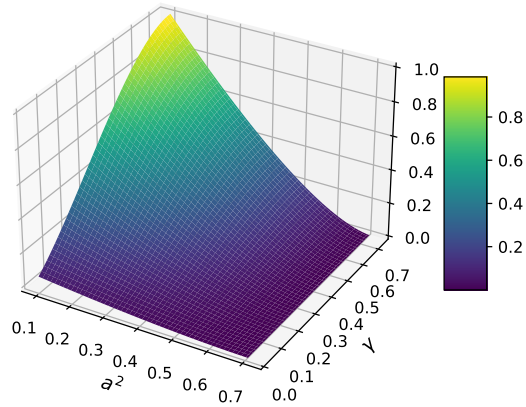


FIGURE C.3 – Intrication de formation en fonction de l'amplitude de densité de probabilité $a^2 \in [0.1, 0.5]$ et du paramètre du canal $\gamma \in [0, 3/4]$.

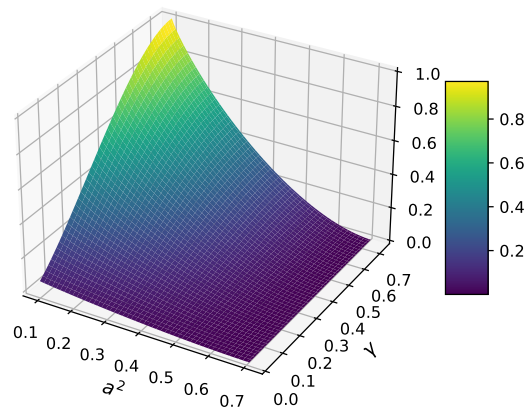


FIGURE C.4 – Discorde quantique en fonction de l'amplitude de densité de probabilité $a^2 \in [0.1, 0.5]$ et du paramètre du canal $\gamma \in [0, 3/4]$.

ÉLÉMENTS DU MODÈLE D'ATTÉNUATION ATMOSPHERIQUE

Dans cette annexe, nous faisons une synthèse du modèle d'atténuation d'une onde EM classique dans l'atmosphère présenté dans l'article [43]. Nous l'avons utilisé pour estimer l'influence de l'atmosphère sur l'état d'un photon dans le chapitre 6 en calculant l'atténuation \mathcal{A} pour le paramètre de canal quantique $\gamma_{\text{canal}} = 1 - e^{-\mathcal{A}x}$. Nous reprenons donc les données de l'article [43] pour présenter le modèle qui considère que les principales absorbants sont l'oxygène O_2 et la vapeur d'eau H_2O sur l'intervalle $f \in [1, 1000]$ GHz. Nous ne reprenons pas point par point le modèle MPM mais seulement les données que nous avons utilisées pour estimer l'atténuation et dont le paramètre γ_{canal} . L'objectif étant d'avoir une estimation de l'atténuation par fréquence sans pour autant être le plus précis possible dans le modèle.

Le modèle MPM repose sur des paramètres météorologiques listées dans l'équation.

$$T = \frac{300}{\Theta} \quad (\text{Température}) \quad (\text{D.1a})$$

$$P = p + e \quad (\text{Pression}) \quad (\text{D.1b})$$

$$RH \quad (\text{Taux d'humidité}) \quad (\text{D.1c})$$

$$w \quad (\text{Concentration d'aérosols hygroscopiques}) \quad (\text{D.1d})$$

La température T nous permet de déduire une température relative Θ . La pression totale P en kPa est calculée à partir de la pression de l'air sec p et de la pression de la vapeur d'eau e . En sachant que si un photon est absorbé par des gouttes d'eau en suspension, on perd son information quantique, on réduit la prise en compte de l'humidité de l'air qu'on fixe nous-mêmes. Sur le même principe, on fixe $w = w_0 = 10^{-4} \text{ g.m}^{-3}$ la concentration d'aérosols hygroscopiques pour l'air sec.

Le principe du modèle MPM est de définir un indice complexe de réfraction sur les unités N [43] :

$$N = N_0 + N'(f) + jN''(f) \quad (\text{D.2})$$

Où N_0 est un terme indépendant de la fréquence f , $N'(f)$ est un terme de dispersion et $N''(f)$ est un terme d'absorption, celui-ci nous intéresse en priorité. Ces termes nous permettent d'obtenir :

$$\alpha = 0.1820fN''(f) \quad (\text{D.3a})$$

$$\beta = 3.336(N_0 + N'(f)) \quad (\text{D.3b})$$

Où α est l'atténuation en dB.km⁻¹ et β le délai de propagation en ps.km⁻¹. La fréquence f est en gigahertz. Nous ne nous intéressons qu'au facteur d'atténuation α dans la suite. Ainsi, en partant de l'équation (D.2), le terme N_0 s'écrit :

$$N_0 = (2,588p + 2,39e)\theta + N_v \quad (\text{D.4})$$

Où $N_v = 41.6e\theta^2$ est une contribution du spectre rotationnel de la vapeur d'eau. Ensuite, le calcul de l'indice de réfraction N prend en compte les termes :

$$N'(f) = \sum_{i=1}^{n_a} (SF')_i + N'_p + \sum_{i=1}^{n_b} (SF')_i + N'_e + N'_w \quad (\text{D.5a})$$

$$N''(f) = \sum_{i=1}^{n_a} (SF'')_i + N''_p + \sum_{i=1}^{n_b} (SF'')_i + N''_e + N''_w \quad (\text{D.5b})$$

Comme nous ne prenons en compte que α , nous ne prenons en compte que $N''(f)$. L'équation (D.5) est un calcul des spectres d'absorption et de dispersion prenant en compte ligne par ligne les contributions des n_a lignes d'oxygène du tableau D.4 et des n_b lignes de vapeur d'eau du tableau D.5 pour calculer les continuum d'absorption N_e , N_p , N_w respectivement pour l'absorption par O_2 , l'absorption par N_2 et les hydrosols.

Dans l'équation (D.5), les fonctions de profil de ligne spectrale F sont définies par :

$$F'(f) = \frac{Z-f}{X} + \frac{Z+f}{Y} - \frac{2}{\nu_0} + \delta \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y} \right) \frac{\gamma f}{\nu_0} \quad (\text{D.6a})$$

$$F''(f) = \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \right) + \frac{\gamma f}{\nu_0} - \delta \left(\frac{\nu_0 - f}{X} + \frac{\nu_0 + f}{Y} \right) \frac{f}{\nu_0} \quad (\text{D.6b})$$

Unité	O ₂	H ₂ O
hHz	$S = a_1 p \Theta^3 e^{a_2(1-\Theta)}$	$S = b_1 e \Theta^{3.5} e^{b_2(1-\Theta)}$
GHz	$\gamma = a_3 (p \Theta^{0.8} + 1.1 \Theta e)$	$\gamma = b_3 (p \Theta^{0.8} + 4.80 e \Theta)$
-	$\delta = a_5 p \Theta^{a_6}$	$\delta = 0$

 TABLEAU D.1 – Paramètres des lignes spectrales pour O₂ et H₂O pour les calculs des profils de lignes spectrales.

Où F' est la dispersion locale et F'' l'absorption locale avec :

$$X = (\nu_0 - f)^2 + \gamma^2 \quad (\text{D.7a})$$

$$Y = (\nu_0 + f)^2 + \gamma^2 \quad (\text{D.7b})$$

$$Z = \frac{\nu_0^2 + f^2}{\nu_0} \quad (\text{D.7c})$$

Dans l'équation (D.5), S est la force de ligne spectrale. Les valeurs pour les espèces O₂ et H₂O sont répertoriées dans les tableaux D.1 et D.2. Dans ces tableaux et les équations (D.5) (D.6), on a ν_0 la fréquence centrale de la ligne spectrale, (a_i, b_i) les coefficients spectroscopiques, γ est la largeur spectrale et δ est une correction de recouvrement.

Coefficients a	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Valeurs (s.u.)	3.07×10^{-4}	1	1	1	1	1	1

TABLEAU D.2 – Coefficients associés au continuum du spectre pour l'air sec.

Les termes du continuum du spectre pour l'air sec s'écrivent :

$$N'_p(f) = a_0 \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{f}{\gamma_0}\right)^2} - 1 \right] p \Theta^2 \quad (\text{D.8a})$$

$$N''_p(f) = \left[\frac{2a_0}{\gamma_0 \left(1 + \left(\frac{f}{\gamma_0}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{f}{60}\right)^2\right)} + a_p p \Theta^{2.5} \right] f p \Theta^2 \quad (\text{D.8b})$$

Avec les coefficients γ_0 et a_p :

$$\gamma_0 = 5.6 \times 10^{-3} (p + 1.1e) \Theta^{0.8} \quad [\text{GHz}] \quad (\text{D.9a})$$

$$a_p = 1.40 \left(1 - 1.2 f^{1.5} \times 10^{-5}\right) 10^{-10} \quad (\text{D.9b})$$

Ensuite, les termes du continuum du spectre pour la vapeur d'eau sont définies par :

$$N'_e(f) = b_0 f^{2.05} e^{\Theta^{2.4}} \quad (\text{D.10a})$$

$$N''_e(f) = (b_f p + b_e e^{\Theta^3}) f e^{\Theta^{2.5}} \quad (\text{D.10b})$$

Où les coefficients b_i sont répertoriés dans le tableau D.3.

Enfin, nous avons le continuum du spectre pour les hydrosols :

Coefficients b	b_f	b_e	b_e	b_1	b_2	b_3
Valeurs (s.u.)	1.40×10^{-6}	5.41×10^{-5}	6.47×10^{-6}	1	1	1

TABLEAU D.3 – Coefficients associés au continuum du spectre pour la vapeur d'eau.

$$N'_w(f) = 2.40 \times 10^{-3} w \varepsilon' \quad (\text{D.11a})$$

$$N''_w(f) = 4.50 \frac{w}{\varepsilon''} (1 + \eta^2) \quad (\text{D.11b})$$

Où on a :

$$\eta = \frac{2 + \varepsilon'}{\varepsilon''} \quad (\text{D.12a})$$

$$\varepsilon' = 4.9 + \frac{185 - \frac{113}{\Theta}}{1 + (f\tau)^2} \quad (\text{D.12b})$$

$$\varepsilon'' = \frac{185 - \frac{113}{\Theta}}{1 + (f\tau)^2} f\tau \quad (\text{D.12c})$$

$$\tau = 4.17 \times 10^{-5} \Theta e^{7.13\Theta} \quad (\text{D.12d})$$

Où τ est exprimé en nanosecondes.

À titre d'exemple, la figure D.1 représente l'atténuation atmosphérique $\mathcal{A} = \alpha$ pour 3 températures différentes.

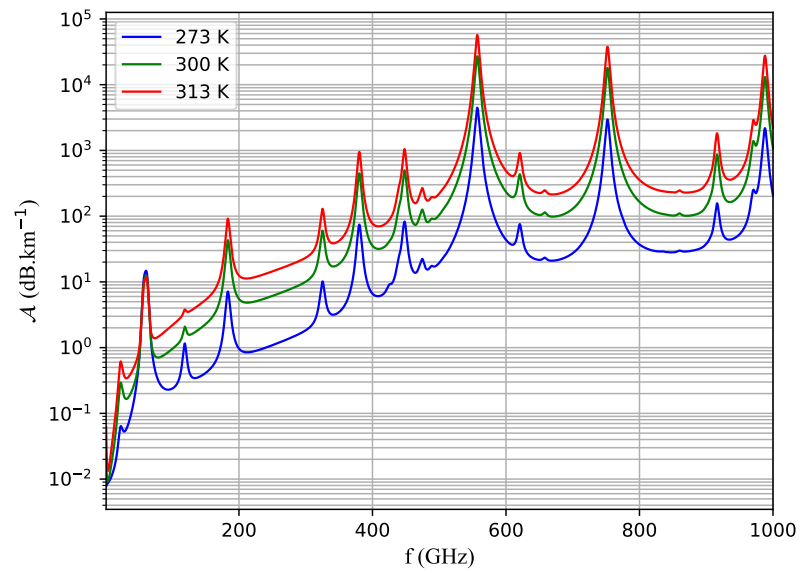


FIGURE D.1 – Atténuation atmosphérique en fonction de la fréquence $f \in [1, 1000]$ GHz pour 3 températures différentes $T = \{0, 27, 40\}$ °C avec un taux d’humidité de 50 % et une pression $P = 101.3$ kPa.

f (GHz)	a_1 (kHz.kPa ⁻¹)	a_2 (kHz.kPa ⁻¹)	a_3 (GHz.kPa ⁻¹)	a_4 (kHz.kPa ⁻¹)	a_5 (kPa ⁻¹)	a_6 (kPa ⁻¹)
49.452379	0.12	11.830	8.40	0.0	5.60	1.7
49.962257	0.34	10.720	8.50	0.0	5.60	1.7
50.474238	0.94	9.690	8.60	0.0	5.60	1.7
50.987748	2.46	8.690	8.70	0.0	5.50	1.7
51.503350	6.08	7.740	8.90	0.0	5.60	1.8
52.021409	14.14	6.840	9.20	0.0	5.50	1.8
52.542393	31.02	6.000	9.40	0.0	5.70	1.8
53.066906	64.10	5.220	9.70	0.0	5.30	1.9
53.595748	124.70	4.480	10.00	0.0	5.40	1.8
54.129999	228.00	3.810	10.20	0.0	4.80	2.0
54.671157	391.80	3.190	10.50	0.0	4.80	1.9
55.221365	631.60	2.620	10.79	0.0	4.17	2.1
55.783800	953.50	2.115	11.10	0.0	3.75	2.1
56.264777	1548.90	0.010	16.46	0.0	7.74	0.9
56.363387	1344.00	1.655	11.44	0.0	2.97	2.3
56.968180	1763.00	1.255	11.81	0.0	2.12	2.5
57.612481	2141.00	0.910	12.21	0.0	0.94	3.7
58.323874	2386.00	0.621	12.66	0.0	-0.55	-3.1
58.446589	1457.00	0.079	14.49	0.0	5.97	0.8
59.164204	2404.00	0.386	13.19	0.0	-2.44	0.1
59.590982	2112.00	0.207	13.60	0.0	3.44	0.5
60.306057	2124.00	0.207	13.82	0.0	-4.13	0.7
60.434775	2461.00	0.386	12.97	0.0	1.32	-1.0
61.150558	2504.00	0.621	12.48	0.0	-0.36	5.8
61.800152	2298.00	0.910	12.07	0.0	-1.59	2.9
62.411212	1933.00	1.255	11.71	0.0	-2.66	2.3
62.486253	1517.00	0.078	14.68	0.0	-4.77	0.9
62.997974	1503.00	1.660	11.39	0.0	-3.34	2.2
63.568595	1087.00	2.110	11.08	0.0	-4.17	2.0
64.127764	733.50	2.620	10.78	0.0	-4.48	2.0
64.678900	463.50	3.190	10.50	0.0	-5.10	1.8
65.224067	274.80	3.810	10.20	0.0	-5.10	1.9
65.764769	153.00	4.480	10.00	0.0	-5.70	1.8
66.302088	80.09	5.220	9.70	0.0	-5.50	1.8
66.836827	39.46	6.000	9.40	0.0	-5.90	1.7
67.369595	18.32	6.840	9.20	0.0	-5.60	1.8
67.900862	8.01	7.740	8.90	0.0	-5.80	1.7
68.431001	3.30	8.690	8.70	0.0	-5.70	1.7
68.960306	1.28	9.690	8.60	0.0	-5.60	1.7
69.489021	0.47	10.720	8.50	0.0	-5.60	1.7
70.017342	0.16	11.830	8.40	0.0	-5.60	1.7
118.750341	945.00	0.000	15.92	0.0	-0.44	0.9
368.498350	67.90	0.020	19.20	0.6	0.0	1.0
424.763120	638.00	0.011	19.16	0.6	0.0	1.0
487.249370	235.00	0.011	19.20	0.6	0.0	1.0
715.393150	99.60	0.089	18.10	0.6	0.0	1.0
773.838730	671.00	0.079	18.10	0.6	0.0	1.0
834.145330	180.00	0.079	18.10	0.6	0.0	1.0

TABLEAU D.4 – Tableau des coefficients pour la molécule O₂ dans le modèle MPM.

f (GHz)	b_1 (kHz.kPa ⁻¹)	b_2 (kHz.kP ⁻¹)	b_3 (GHz.kPa ⁻¹)
22.235080	0.1090	2.143	27.84
67.813960	0.0011	8.730	27.60
119.995940	0.0007	8.347	27.00
183.310117	2.3000	0.653	28.35
321.225644	0.0464	6.156	21.40
325.152919	1.5400	1.515	27.00
336.187000	0.0010	9.802	26.50
380.197372	11.9000	1.018	27.60
390.134508	0.0044	7.318	19.00
437.346667	0.0637	5.015	13.70
439.150812	0.9210	3.561	16.40
443.018295	0.1940	5.015	14.40
448.001075	10.6000	1.370	23.80
470.7088947	0.3300	3.561	18.20
474.689127	1.2800	2.342	19.80
488.491133	0.2530	2.814	24.90
503.568532	0.0374	6.693	11.50
504.482692	0.0125	6.693	11.90
556.936002	510.0000	0.114	30.00
620.700807	5.0900	2.150	22.30
658.006500	0.2740	7.767	30.00
752.033227	250.0000	0.336	28.60
841.073593	0.0130	8.113	14.10
859.865000	0.1330	7.989	28.60
899.407000	0.0550	7.845	28.60
902.555000	0.0380	8.360	26.40
906.205524	0.1830	5.039	23.40
916.171582	8.5600	1.369	25.30
970.315022	9.1600	1.842	24.00
987.926764	138.0000	0.178	28.60

TABLEAU D.5 – Tableau des coefficients pour la molécule H₂O dans le modèle MPM.

RADAR IQ EN POLARISATION : DISTRIBUTIONS DES CORRÉLATIONS QUANTIQUES DES HYPOTHÈSES DE DÉTECTION

Dans cette annexe, nous présentons les calculs de la discorde quantique sur l'opérateur $\hat{\Lambda}$ pour obtenir la répartition des corrélations quantiques.

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda} &= \hat{\rho}_{H_1} - \hat{\rho}_{H_0} \\ &= (\eta + p)\hat{\rho}_{AS, \text{out}} + (1 - \eta - p)\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_S - p\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}'_S - (1 - p)\hat{\rho}_M\end{aligned}\tag{E.1}$$

Seule la partie relative à l'hypothèse H_1 présente des potentielles corrélations quantiques étant donné que l'hypothèse H_0 suppose qu'il n'y pas que du bruit thermique. On écrit :

$$\hat{\rho}_{H_1} \equiv \hat{\rho}_{AS}^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}\tag{E.2}$$

Où les coefficients $\{\rho_{ii}\}_{i=1\dots 4}$ sont définis par :

$$\rho_{11} = (\eta + p)\frac{2}{3}\gamma a^2 + (1 - \eta - p)a^2 b^2 \quad (\text{E.3a})$$

$$\rho_{22} = (\eta + p)(3 - 2\gamma)\frac{a^2}{3} + (1 - \eta - p)a^4 \quad (\text{E.3b})$$

$$\rho_{23} = \rho_{32} = \pm(\eta + p)(3 - 4\gamma)\frac{ab}{3} \quad (\text{E.3c})$$

$$\rho_{33} = (\eta + p)(3 - 2\gamma)\frac{b^2}{3} + (1 - \eta - p)b^4 \quad (\text{E.3d})$$

$$\rho_{44} = (\eta + p)\frac{2}{3}\gamma b^2 + (1 - \eta - p)a^2 b^2 \quad (\text{E.3e})$$

Tels que $\text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}\} = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1$.

Pour calculer la discordance quantique sur l'équation (E.2), on commence par calculer les différentes entropies pour l'information mutuelle quantique \mathcal{I} et l'information classique \mathcal{J} . Nous obtenons les entropies sur les systèmes A et S :

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{A}}^{(1)}) = (\rho_{11} + \rho_{22}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{11} + \rho_{22}} \right) + (\rho_{33} + \rho_{44}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{33} + \rho_{44}} \right) \quad (\text{E.4a})$$

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{S}}^{(1)}) = (\rho_{11} + \rho_{33}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{11} + \rho_{33}} \right) + (\rho_{22} + \rho_{44}) \log_2 \left(\frac{1}{\rho_{22} + \rho_{44}} \right) \quad (\text{E.4b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{A}}^{(1)} | \hat{\rho}_{\text{S}}^{(1)})_{\{\hat{M}_{\text{S}}^{(i)}\}} &= \rho_{11} \log_2 \left(\frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{\rho_{11}} \right) + \rho_{33} \log_2 \left(\frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{\rho_{33}} \right) \\ &+ \rho_{22} \log_2 \left(\frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{\rho_{22}} \right) + \rho_{44} \log_2 \left(\frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{\rho_{44}} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4c})$$

Où les sommes de coefficients $\{\rho_{ii}\}_{i=1\dots 4}$ s'écrivent :

$$\rho_{11} + \rho_{22} = (\eta + p)a^2 + (1 - \eta - p)(a^2 b^2 + a^4) \quad (\text{E.5a})$$

$$\rho_{33} + \rho_{44} = (\eta + p)b^2 + (1 - \eta - p)(b^4 + a^2 b^2) \quad (\text{E.5b})$$

$$\rho_{11} + \rho_{33} = (\eta + p)\left(\frac{2}{3}\gamma a^2 + (3 - 2\gamma)\frac{b^2}{3}\right) + (1 - \eta - p)(a^2 b^2 + b^4) \quad (\text{E.5c})$$

$$\rho_{22} + \rho_{44} = (\eta + p)\left((3 - 2\gamma)\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3}\gamma b^2\right) + (1 - \eta - p)(a^4 + a^2 b^2) \quad (\text{E.5d})$$

L'entropie conditionnelle (E.4c) est calculée avec les mêmes opérateurs de projection que dans l'annexe C : $|HH\rangle\langle HH| + |HV\rangle\langle HV| + |VH\rangle\langle VH| + |VV\rangle\langle VV| = \hat{I}_4$. L'équation

(E.4c) est donc calculée en fonction des hypothèses sur $\hat{\rho}_S^{(1)}$:

$$p_H = \rho_{11} + \rho_{33} \quad (\text{E.6a})$$

$$p_V = \rho_{22} + \rho_{44} \quad (\text{E.6b})$$

Ces probabilités sont associées aux opérateurs $\hat{\rho}_A^{(i)}$:

$$\hat{\rho}_A^{(1,H)} = \frac{1}{\rho_{11} + \rho_{33}} (\rho_{11} |H\rangle \langle H|_A + \rho_{33} |V\rangle \langle V|_A) \quad (\text{E.7a})$$

$$\hat{\rho}_A^{(1,V)} = \frac{1}{\rho_{22} + \rho_{44}} (\rho_{22} |H\rangle \langle H|_A + \rho_{44} |V\rangle \langle V|_A) \quad (\text{E.7b})$$

Ensuite, l'entropie jointe $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{AS}^{(1)})$ est calculée à partir de l'opérateur (E.2) dont les valeurs propres λ_i sont notées :

$$\lambda_1 = \rho_{11} \quad (\text{E.8a})$$

$$\lambda_2 = \rho_{44} \quad (\text{E.8b})$$

$$\lambda_3 = \frac{\rho_{22} + \rho_{33} + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{E.8c})$$

$$\lambda_4 = \frac{\rho_{22} + \rho_{33} - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{E.8d})$$

Où Δ est défini par :

$$\Delta = (\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4\rho_{23}^2 \quad (\text{E.9})$$

Nous calculons alors l'opérateur $\log(\hat{\rho}_{AS}^{(1)}) = P \log(D) P^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2)$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ -b_3 & -b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_4}{a_4 b_3 - a_3 b_4} & -\frac{a_4}{a_4 b_3 - a_3 b_4} & 0 \\ 0 & \frac{b_3}{a_4 b_3 - a_3 b_4} & \frac{a_3}{a_4 b_3 - a_3 b_4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.10})$$

Avec les coefficients $\{a_i, b_i\}_{i=3,4}$:

$$a_3 = \frac{2\rho_{23}}{\sqrt{4\rho_{23}^2 + [(\rho_{22} - \rho_{33}) - \sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{E.11a})$$

$$b_3 = \frac{\rho_{22} - \rho_{33} - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{4\rho_{23}^2 + [(\rho_{22} - \rho_{33}) - \sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{E.11b})$$

$$a_4 = \frac{2\rho_{32}}{\sqrt{4\rho_{32}^2 + [(\rho_{22} - \rho_{33}) + \sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{E.11c})$$

$$b_4 = \frac{\rho_{22} - \rho_{33} + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{4\rho_{32}^2 + [(\rho_{22} - \rho_{33}) + \sqrt{\Delta}]^2}} \quad (\text{E.11d})$$

Où le déterminant de P s'écrit plus simplement :

$$\det(P) = a_4 b_3 - a_3 b_4 = -\frac{4\rho_{32}\sqrt{\Delta}}{4\rho_{32}\sqrt{\Delta}} = -1 \quad (\text{E.12})$$

Nous obtenons donc l'opérateur $\log(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)})$ dans l'équation (E.13).

$$\log(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & l_3 & 0 \\ 0 & l_4 & l_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_6 \end{pmatrix} \quad (\text{E.13})$$

Où les éléments $\{l_i\}_{i=1\dots 6}$ s'écrivent :

$$l_1 = \log(\lambda_1) \quad (\text{E.14a})$$

$$l_2 = \frac{1}{a_4 b_3 - a_3 b_4} (a_4 b_3 \log(\lambda_4) - a_3 b_4 \log(\lambda_3)) \quad (\text{E.14b})$$

$$l_3 = \frac{a_4 a_3}{a_4 b_3 - a_3 b_4} (\log(\lambda_4) - \log(\lambda_3)) \quad (\text{E.14c})$$

$$l_4 = \frac{b_3 b_4}{a_4 b_3 - a_3 b_4} (\log(\lambda_3) - \log(\lambda_4)) \quad (\text{E.14d})$$

$$l_5 = \frac{1}{a_4 b_3 - a_3 b_4} (a_4 b_3 \log(\lambda_3) - a_3 b_4 \log(\lambda_4)) \quad (\text{E.14e})$$

$$l_6 = \log(\lambda_2) \quad (\text{E.14f})$$

Ce qui nous donne pour le calcul de l'entropie jointe $\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = -\text{Tr}\{\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)} \log(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)})\}$, l'opérateur :

$$\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)} \log(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_3 & 0 \\ 0 & h_4 & h_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_6 \end{pmatrix} \quad (\text{E.15})$$

Où les éléments $\{h_i\}_{i=1\dots 6}$ sont définis par :

$$h_1 = \rho_{11}l_1 \quad (\text{E.16a})$$

$$h_2 = \rho_{22}l_2 + \rho_{23}l_4 \quad (\text{E.16b})$$

$$h_3 = \rho_{22}l_3 + \rho_{23}l_5 \quad (\text{E.16c})$$

$$h_4 = \rho_{32}l_2 + \rho_{33}l_4 \quad (\text{E.16d})$$

$$h_5 = \rho_{32}l_3 + \rho_{33}l_5 \quad (\text{E.16e})$$

$$h_6 = \rho_{44}l_6 \quad (\text{E.16f})$$

On écrit l'expression de l'entropie jointe dans l'équation.

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = -h_1 - h_2 - h_5 - h_6 \quad (\text{E.17a})$$

$$= -\rho_{11}l_1 - \rho_{44}l_6 - \rho_{23}(l_3 + l_4) - \rho_{22}l_2 - \rho_{33}l_5 \quad (\text{E.17b})$$

$$\begin{aligned} &= \rho_{11} \log\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + \rho_{44} \log\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \log\left(\frac{1}{\lambda_3}\right) \left(4\rho_{32}^2 + (\rho_{22} - \rho_{33})^2 + \sqrt{\Delta}(\rho_{22} + \rho_{33})\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \log\left(\frac{1}{\lambda_4}\right) \left(\sqrt{\Delta}(\rho_{22} + \rho_{33}) - 4\rho_{32}^2 - (\rho_{22} - \rho_{33})^2\right) \end{aligned} \quad (\text{E.17c})$$

Nous obtenons les informations mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)})$ et $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)})$ dans l'équation (E.18).

$$\mathcal{I}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{A}}^{(1)}) + \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{S}}^{(1)}) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) \quad (\text{E.18a})$$

$$\mathcal{J}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)})_{\{\hat{M}_{\text{S}}^{(i)}\}} = \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{A}}^{(1)}) - \mathcal{S}(\hat{\rho}_{\text{A}}^{(1)} | \hat{\rho}_{\text{S}}^{(1)})_{\{\hat{M}_{\text{S}}^{(i)}\}} \quad (\text{E.18b})$$

Cela nous permet d'obtenir la discordance quantique $\delta(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) = \min_{\{\hat{M}_{\text{S}}^{(i)}\}} [\mathcal{I}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}) - \mathcal{J}(\hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)})]$ qui équivaut à la répartition des corrélations quantiques étant donné que $\hat{\rho}_{H_1} \equiv \hat{\rho}_{\text{AS}}^{(1)}$ est

associée à une hypothèse de détection H_1 .

LE RADAR QUANTIQUE : ASPECTS TECHNOLOGIQUES ET PRATIQUES

Cette annexe a pour but d'évoquer les technologies potentielles pour la conception d'un radar IQ. Chronologiquement, le radar IQ a été pensé dès le début pour les technologies d'optique quantique reposant donc sur la quantification du champ électromagnétique que nous avons vu au chapitre 2. La quantification implique le passage à la variable continue c'est-à-dire à raisonner en fonction des quadratures (\hat{X}, \hat{P}) qui représentent des observables du champ EM quantique. Cette évolution du formalisme implique également d'utiliser la théorie de l'information en variable continue (TIQVC), qui est une branche récente de la TIQ pour étudier le radar IQ [122–126]. Pour parler des technologies potentielles pour le radar quantique, cette annexe se divise en 2 axes. Dans la section F.1, nous fournissons une description substantielle de la TIQVC en reprenant des concepts évoqués dans les chapitres 3 et 4. Puis, dans la section F.2, nous évoquons des technologies développées en optique quantique qui sont pertinentes pour le radar IQ.

F.1 Éléments de la théorie de l'information en variable continue

Dans cette section, nous expliquons les éléments principaux de la TIQVC utiles pour la théorie du radar quantique. Nous nous intéressons en particulier aux états gaussiens dans la section F.1.1 puis aux états gaussiens intriqués biparties dans la section F.1.2, ce qui nous permettra de discuter des mesures d'intrication des états gaussiens, ainsi que de la mesure des corrélations quantiques dans la section F.1.3.

F.1.1 États gaussiens

La TIQVC est le prolongement de la théorie de l'information quantique vue aux chapitres 3 et 4 à la différence près qu'elle repose essentiellement sur la quantification du champ électromagnétique quantique en fonction des opérateurs de quadratures (\hat{X}, \hat{P}) ¹. Nous reprenons cette quantification canonique du champ EM vue au chapitre 2 qui nous permet d'écrire l'opérateur Hamiltonien \hat{H} du champ EM quantique comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques découplés sur les modes k :

$$\hat{H} = \sum_k \hat{H}_k = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{F.1})$$

Où le terme $\hbar\omega/2$ est le terme du vide quantique. Cet opérateur Hamiltonien \hat{H} est exprimé en fonction des opérateurs de création \hat{a}_k^\dagger et d'annihilation² \hat{a}_k sur les modes k :

$$\hat{a}_k^\dagger |k\rangle = \sqrt{k+1} |k+1\rangle \quad (\text{F.2a})$$

$$\hat{a}_k |k\rangle = \sqrt{k} |k-1\rangle \quad (\text{F.2b})$$

Où les $\{|k = 1, 2, \dots\rangle\}$ sont les états de Fock peuplés par k photons (= bosons). Le passage à la variable continue consiste à exprimer les états quantiques dans l'espace des phases (\hat{X}, \hat{P}) qui a un spectre continu contrairement à l'opérateur du nombre d'états $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Nous rappelons l'expression des opérateurs de quadrature \hat{X} et \hat{P} des équations (2.26a) et (2.26b) en posant $\hbar = 2$:

$$\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad (\text{F.3a})$$

$$\hat{P} = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (\text{F.3b})$$

Ces opérateurs sont à assimiler aux positions x et aux moments conjugués p qui ont tous des spectres continus dans l'espace des phases. Les opérateurs de quadratures \hat{X} et \hat{P} vérifient les équations aux valeurs propres :

$$\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle \quad (\text{F.4a})$$

$$\hat{P} |p\rangle = p |p\rangle \quad (\text{F.4b})$$

1. L'opérateur $\hat{X} \equiv \hat{Q}$ du chapitre 2 où \hat{Q} fait référence aux positions généralisées q .

2. L'action de l'opérateur annihilation sur l'état du vide s'écrit : $\hat{a} |0\rangle = 0$

Où les $\{|x\rangle\}_{x \in \mathbb{R}}$, $\{|p\rangle\}_{p \in \mathbb{R}}$ sont les vecteurs propres pour \hat{X} et \hat{P} respectivement.

À présent, nous discutons de 2 types d'états quantiques importants en optique quantique [22]. D'abord, nous avons les états quasi-classiques, ou états cohérents qui ont des propriétés très proches de la description d'un champ EM classique. Un état quasi-classique $|\alpha\rangle$ est un état propre de l'opérateur annihilation :

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \tag{F.5}$$

Où $\alpha \in \mathbb{C}$. Un état quasi-classique est interprété comme un état du vide dans l'espace des phases mais décalé d'une valeur α par rapport à cet état du vide $|0\rangle$.

L'autre type d'état est l'état comprimé que nous pouvons écrire $|\alpha, r\rangle$ où $r \in \mathbb{R}$ est le taux de compression. L'état comprimé est l'état propre de l'opérateur \hat{a}_r :

$$\hat{a}_r |\alpha, r\rangle = (\hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r) |\alpha, r\rangle \tag{F.6}$$

On appelle $|\alpha, r\rangle$ un état comprimé parce qu'il correspond dans l'espace des phases à un état quasi-classique déformé par une compression suivant les positions x et les moments conjugués p . Nous verrons que l'état comprimé entre dans la construction des états intriqués qui permettent d'avoir une sensibilité plus grande que la limite quantique standard (SQL en anglais) dans certains cas de figure.

Revenons au champ EM quantique dont l'Hamiltonien est défini comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques décrits dans l'espace des phases. Les positions et moments ne possèdent pas les mêmes états propres et nous rappelons que leurs opérateurs ne commutent pas $[\hat{X}_k, \hat{P}_{k'}] = i\hbar\delta_{kk'}$. Cela induit une relation de dispersion fondamentale en physique décrit par l'incertitude d'Heisenberg : $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, que l'on appelle aussi la limite quantique standard (SQL). À cause de cette limite physique qui sous-tend un bruit quantique toujours présent dans l'espace des phases, nous ne pouvons pas décrire l'état $\hat{\rho}$ du champ EM quantique comme des fonctions de densité de probabilité au sens stricte [126]. En revanche, nous pouvons les décrire avec une fonction de distribution dans l'espace des phases appelée, la fonction de Wigner $W_\rho(x, p)$, qui est une fonction de densité de quasi-probabilité dans le sens où nous pouvons obtenir des valeurs négatives [47]. Ainsi,

nous écrivons les densités de probabilité $P(x)$, $P(p)$ par :

$$P(x) = \int_{\mathbb{R}} dp W_{\rho}(x, p) \quad (\text{F.7a})$$

$$P(p) = \int_{\mathbb{R}} dx W_{\rho}(x, p) \quad (\text{F.7b})$$

Où la fonction de Wigner est définie par [126] :

$$W_{\rho}(x, p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dy e^{-\frac{i}{2}py} \langle x + y/2 | \hat{\rho} | x - y/2 \rangle \quad (\text{F.8})$$

Cette fonction est normalisée telle que : $\int_{\mathbb{R}^2} dx dp W_{\rho}(x, p) = 1$.

Parmi ces fonctions de quasi-probabilité, les fonctions de Wigner gaussiennes sont importantes parce que qu'elles permettent de décrire des états gaussiens qui sont les types d'états quantiques communément obtenus dans les expériences en laboratoire [22, 45, 46]. C'est pourquoi nous nous concentrons sur ces états gaussiens dans cette section.

Un état gaussien $\hat{\rho}$ comportant $N = 1, 2, 3, \dots$ modes du champ quantique se caractérise par une fonction de Wigner de la forme :

$$W(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det(V)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{r}-\langle\vec{r}\rangle)^T V^{-1}(\vec{r}-\langle\vec{r}\rangle)} \quad (\text{F.9})$$

Où $\langle\vec{r}\rangle$ est un vecteur moyen formé des moyennes des opérateurs de quadratures du champ :

$$\langle\vec{r}\rangle = \langle\hat{R}\rangle = \begin{pmatrix} \langle\hat{X}\rangle \\ \langle\hat{P}\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{F.10})$$

Et V est la matrice des covariances :

$$V = \begin{pmatrix} \langle\delta\hat{X}^2\rangle & \frac{1}{2}\langle\{\delta\hat{X}, \delta\hat{P}\}\rangle \\ \frac{1}{2}\langle\{\delta\hat{X}, \delta\hat{P}\}\rangle & \langle\delta\hat{X}^2\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{F.11})$$

Où

$$V_{jk} = \frac{1}{2}\langle\{\delta\hat{R}_j, \delta\hat{R}_k\}\rangle \quad (\text{F.12})$$

Et où nous avons l'opérateur de fluctuation pour un opérateur quelconque : $\delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$, ainsi que l'anti-commutateur : $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$; $\forall\hat{A}, \hat{B}$.

L'avantage que procure les états gaussiens est qu'ils sont totalement caractérisés par leurs

1^{er} et 2^{ème} moments statistiques, c'est pourquoi ils sont écrits $\hat{\rho}[\langle \vec{r} \rangle, V]$ [122]. La matrice de covariance V doit être réelle, symétrique, positive, et $\det(V) \geq 1$ ce qui correspond à l'incertitude d'Heisenberg vue plus haut.

Rappelons que nous avons expliqué l'intrication quantique dans le chapitre 4. Dans la section suivante, nous expliquons comment est caractérisée l'intrication sur des états gaussiens. Et comme pour le chapitre 4, une évolution de l'état quantique peut conduire à la perte de l'intrication, c'est pourquoi nous évoquons aussi la manière de caractériser l'évolution des états gaussiens.

F.1.2 Évolution des états gaussiens et états gaussiens intriqués

Pour définir l'intrication pour des états gaussiens dans le formalisme de la variable continue, nous utilisons des opérateurs gaussiens unitaires qui vont agir sur les opérateurs de création et d'annihilation. Un opérateur unitaire gaussien est noté $\mathcal{U}_G(\vec{d}, \mathcal{S})$ où \vec{d} est un vecteur de déplacement et \mathcal{S} est une matrice symplectique. L'application d'un opérateur unitaire gaussien $\mathcal{U}_G(\vec{d}, \mathcal{S})$ sur un état gaussien $\hat{\rho}[\langle \vec{r} \rangle, V]$ a pour effet global :

$$\langle \vec{r} \rangle \rightarrow \mathcal{S} \langle \vec{r} \rangle + \vec{d} \quad (\text{F.13a})$$

$$V \rightarrow \mathcal{S}V\mathcal{S}^\dagger \quad (\text{F.13b})$$

En résumé, il effectue des transformations des 2 moments statistiques qui définissent l'état gaussien. C'est notamment de cette manière qu'agit l'opérateur de compression que nous introduisons ci-dessous.

L'opérateur de compression $\hat{S}(r)$ avec $r \in [0, +\infty[$ correspond à un processus de pompage optique par un cristal non-linéaire d'un laser de fréquence 2ω pour donner deux photons de fréquences ω . Ce procédé est appelé la conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC en anglais). Cet opérateur s'écrit :

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2)} \quad (\text{F.14})$$

Qui, appliqué à l'opérateur annihilation \hat{a} donne³ :

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r) = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r \quad (\text{F.16})$$

Ce qui donne pour les opérateurs $\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$, $\hat{P} = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$:

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{X}\hat{S}(r) = e^r \hat{X} \quad (\text{F.17a})$$

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{P}\hat{S}(r) = e^{-r} \hat{P} \quad (\text{F.17b})$$

Ainsi, l'opérateur de compression $\hat{S}(r)$ s'identifie à un opérateur gaussien $\hat{S}(r) = \hat{U}_G[\vec{0}, \mathcal{T}(r)]$ où :

$$\mathcal{T}(r) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \quad (\text{F.18})$$

Ce qui nous donne la matrice de covariance de l'état :

$$V(r) = \mathcal{T}(r)\mathcal{T}^T(r) = \begin{pmatrix} e^{2r} & 0 \\ 0 & e^{-2r} \end{pmatrix} \quad (\text{F.19})$$

On remarque que la compression sur l'équation (F.17b) est compensée par une expansion sur l'équation (F.17a) conservant ainsi la relation de dispersion globale $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

Pour un système bipartite composé chacun de 2 modes, nous avons l'opérateur de compression bimode :

$$\hat{S}_{12}(r) = e^{r(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2)} \quad (\text{F.20})$$

Ce qui nous donne pour les opérateurs annihilation sur les deux systèmes :

$$\hat{S}_{12}^\dagger(r)\hat{a}_1\hat{S}_{12}(r) = \hat{a}_1 \cosh r + \hat{a}_2^\dagger \sinh r \quad (\text{F.21a})$$

$$\hat{S}_{12}^\dagger(r)\hat{a}_2\hat{S}_{12}(r) = \hat{a}_2 \cosh r + \hat{a}_1^\dagger \sinh r \quad (\text{F.21b})$$

3. L'équation est calculée en utilisant la relation de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{A}, [\hat{A}, \dots [\hat{A}, \hat{B}] \dots]] \quad (\text{F.15a})$$

$$= \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (\text{F.15b})$$

Où \hat{A} , \hat{B} sont deux opérateurs quelconques.

Et donc, pour les opérateurs de quadratures, nous obtenons [126] :

$$\hat{S}_{12}^\dagger(r)\hat{X}_1\hat{S}_{12}(r) = \hat{X}_1 \cosh r + \hat{X}_2 \sinh r \quad (\text{F.22a})$$

$$\hat{S}_{12}^\dagger(r)\hat{X}_2\hat{S}_{12}(r) = \hat{X}_2 \cosh r + \hat{X}_1 \sinh r \quad (\text{F.22b})$$

$$\hat{S}_{12}^\dagger(r)\hat{P}_1\hat{S}_{12}(r) = \hat{P}_1 \cosh r - \hat{P}_2 \sinh r \quad (\text{F.22c})$$

$$\hat{S}_{12}^\dagger(r)\hat{P}_2\hat{S}_{12}(r) = \hat{P}_2 \cosh r - \hat{P}_1 \sinh r \quad (\text{F.22d})$$

L'opérateur de compression bimode s'identifie à un opérateur gaussien $\hat{S}_{12}(r) = \hat{U}_G [\vec{0}, \mathcal{T}_{12}(r)]$ où :

$$\mathcal{T}_{12}(r) = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \sinh r & 0 \\ 0 & \cosh r & 0 & -\sinh r \\ \sinh r & 0 & \cosh r & 0 \\ 0 & -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix} \quad (\text{F.23})$$

Ce qui nous permet d'écrire la matrice de covariance $V_{12}(r)$:

$$V_{12}(r) = \mathcal{T}_{12}(r)\mathcal{T}_{12}^T(r) = \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r \\ \sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix} \quad (\text{F.24})$$

C'est cet état gaussien bipartite qui est noté TSMV⁴ dans la littérature relative au radar IQ et qu'on peut obtenir en laboratoire par un procédé SPDC [2, 26]. Cet état gaussien est pour l'instant le meilleur candidat pour le radar IQ.

Comme pour le chapitre 4, nous souhaitons connaître le taux d'intrication de l'état caractérisé par l'équation (F.24). Ce genre de calcul est moins aisé en TIQVC. Une des mesures d'intrication utilisées pour les états mixtes est la négativité logarithmique définie par [126] :

$$\mathcal{E} [\hat{\rho}_G(\langle \vec{r} \rangle, V)] = \sum_k F(\tilde{\nu}_k) \quad (\text{F.25})$$

Avec $\{\tilde{\nu}_k\}$ est le spectre de valeurs propres symplectiques de la matrice de covariance \tilde{V}_{12}

4. Two-mode squeezed vacuum \equiv état du vide compressé bimode.

de la transposée partielle $\tilde{\rho}_G [\langle \vec{r} \rangle, \tilde{V}]$ de l'opérateur densité $\hat{\rho}_G [\langle \vec{r} \rangle, V]$ et où

$$F(x) = \begin{cases} -\log(x) & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{F.26})$$

Dans cette section, nous avons vu les principaux éléments de la TIQVC qui sont pertinents pour la théorie du radar quantique. Il est notamment question d'un état intriqué que l'on obtient en appliquant l'opérateur (F.20) sur l'état du vide. Nous pouvons quantifier l'intrication en utilisant la matrice de covariance (F.24) de l'état gaussien obtenu. Dans la section suivante, nous étendons la discordance quantique vue au chapitre 4 aux états gaussiens.

F.1.3 Discordance gaussienne

Dans le chapitre 4, nous avons donné la définition de la discordance quantique pour des états quantiques utilisés dans la TIQ standard. Nous étendons cette définition de la discordance quantique aux états gaussiens en ciblant spécifiquement les états TSMV vue dans la section F.1.2 [127–129].

La définition de la discordance quantique gaussienne, notée $\delta_G(\hat{\rho}_{AB})$, provient de l'article [127] qui utilise l'invariance de la discordance quantique sous les opérations locales unitaires \hat{U}_A , \hat{U}_B pour définir le taux de corrélations quantiques grâce à des mesures POVM⁵ sur un des sous-systèmes A, B d'un système bipartite AB dans un état gaussien $\hat{\rho}_{AB}$. Cela correspond à l'équation (F.27).

$$\delta_G(\hat{\rho}_{AB}) = \delta_G \left[\left(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \right) \hat{\rho}_{AB} \left(\hat{U}_A^\dagger \otimes \hat{U}_B^\dagger \right) \right] \quad (\text{F.27})$$

Pour un état gaussien bimode auquel on applique l'opérateur de compression (F.20) dont

5. Positive Operator-Valued Measure tels que $\sum_k \hat{\Pi}_k = \hat{I}$.

la matrice de covariance (F.24) peut s'écrire en blocs :

$$V_{12} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (\text{F.28})$$

Où on omet le taux de compression r pour simplifier les expressions et où les blocs de V_{12} se notent : $A = \text{diag}(a, a)$, $B = \text{diag}(b, b)$, $C = \text{diag}(c_1, c_2)$. Nous notons les quantités $\det(A) = I_1$, $\det(B) = I_2$, $\det(C) = I_3$, et $\det(V_{12}) = I_4$. Pour l'état TSMV, on a $\hat{\rho}_i = \sum_n N_i^n (1 + N_n)^{-(n+1)} |n\rangle \langle n|_i$ où N_i est le nombre moyen de photons thermiques pour l'état du système $i = 1, 2$. Les termes A, B, C, D sont alors définis par :

$$a = \left(N_r + \frac{1}{2} \right) + N_1(1 + N_r) + N_2 N_r \quad (\text{F.29a})$$

$$b = \left(N_r + \frac{1}{2} \right) + N_2(1 + N_r) + N_1 N_r \quad (\text{F.29b})$$

$$c_1 = -c_2 = (1 + N_1 + N_2) \sqrt{N_r(1 + N_r)} \quad (\text{F.29c})$$

Où $N_r = \sinh^2(r)$. Comme pour la définition du chapitre 4, la définition de la discorde quantique gaussienne repose sur le minimum de la différence entre l'information mutuelle quantique $\mathcal{I}(\hat{\rho}_{AB})$ et les corrélations classiques $\mathcal{J}(\hat{\rho}_{AB})$. Pour un état TSMV, la discorde gaussienne quantique est définie en fonction des invariants symplectiques :

$$\delta_G(\hat{\rho}_{AB}) = g(\sqrt{I_2}) - g(\nu_-) - g(\nu_+) + g\left(\frac{\sqrt{I_1} + 2\sqrt{I_1 I_2} + 2I_3}{1 + 2\sqrt{I_2}}\right) \quad (\text{F.30})$$

Où $g(x) = (x + 1/2) \ln(x + 1/2) - (x - 1/2) \ln(x - 1/2)$, avec les valeurs symplectiques de $\hat{\rho}_{AB}$ définies par $\nu_{\pm}^2 = (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4I_4}) / 2$, pour $\Delta = I_1 + I_2 + 2I_3$. La discorde gaussienne de l'équation (F.30) est définie pour le sous-système A donc les mesures gaussiennes sont faites sur le sous-système B. Pour obtenir l'inverse, il faut faire l'échange $I_1 \leftrightarrow I_2$ [127].

Notons que la définition (F.30) implique des mesures gaussiennes mais la discorde quantique gaussienne a aussi été étendue aux mesures non-gaussiennes [128]. Ce taux de corrélations quantiques se prête bien aux états gaussiens qui sont produits en laboratoire ce qui motive des recherches sur l'évolution des corrélations quantiques dans des environnements perturbateurs [129].

Cette définition de la discorde peut être utile pour des recherches sur le radar quantique

avec potentiellement des expériences en laboratoire car elle s’applique à des états que nous pouvons produire par le procédé SPDC.

Dans cette section, nous avons vu l’extension de la discordie quantique pour des états gaussiens TSMV après avoir identifié ces états dans la section F.1.2. L’extension de la théorie radar quantique à la TIQVC est plus naturelle d’un point de vue pratique ce qui peut motiver de futures recherches appliquées au radar IQ. C’est dans cette optique que nous évoquons des technologies potentiellement intéressantes pour le radar quantique dans la section suivante.

F.2 Technologies potentielles pour le radar quantique

Dans cette section, nous présentons quelques idées et technologies potentielles pour le radar quantique en nous basant sur des articles généralistes [31, 44, 130–141] et à caractère expérimental [9, 29–35, 51, 142–146] sur cette thématique qui recensent les pistes pertinentes. L’objectif de cette section est de donner un avant-goût des progrès et challenges dans le domaine du radar quantique.

F.2.1 Types de radar IQ

Si le radar IQ est né avec l’article de S. Lloyd [10], c’est l’article de Tan et al. [2] qui prouve qu’une amélioration de 6 dB de la probabilité d’erreur de détection est possible en utilisant des états intriqués sur des photons en opérant dans le régime optique. Dans cet article, ils ont prouvé que l’utilisation de l’illumination quantique permettait de réduire la probabilité d’erreur de détection par rapport à un radar utilisant des états cohérents [26] :

$$\frac{1}{2}P_{e,\text{IQ}} \approx e^{-\frac{M\kappa N_S}{N_B}} \quad (\text{F.31a})$$

$$\frac{1}{2}P_{e,\text{CS}} \approx \frac{1}{2}e^{-\frac{M\kappa N_S}{4N_B}} \quad (\text{F.31b})$$

Où les M est le nombre de copies de l’état quantique envoyées, κ est la réflectivité de la cible, N_S est le nombre de photons dans le faisceau du signal, et N_B est le nombre de photons issus du bruit thermique. Seulement, Tan et al. a utilisé pour cela des états

gaussiens que nous avons décrits dans la section F.1 dans un régime particulier où $\kappa \ll 1$, $N_S \ll 1$ et $N_B > 1$ que nous retrouvons dans la figure 1.2 au chapitre 1. Ces états gaussiens peuvent être obtenus en laboratoire à l'aide de lasers d'où l'aspect technologique intéressant qui se dégage de l'article [2]. Toutefois, la nécessité de faire une mesure jointe sur le signal et la référence complique la mise en œuvre expérimentale.

Plusieurs expériences d'illumination quantique ont eu lieu [29, 31]. Celle de Barzanjeh et al. [31] a eu lieu dans le régime de fréquences micro-ondes ce qui a provoqué un vif intérêt sans toutefois respecter toutes les conditions de l'illumination quantique [26]. Depuis, d'autres tentatives ont eu lieu sans pour autant respecter les conditions notamment la mesure jointe qui est contraignante [51]. C'est l'évolution des technologies pour les communications quantiques qui a nourri ces tentatives expérimentales produisant une multiplication des types de radar potentiels dans l'éventualité d'un radar IQ. Il existe même une tentative d'illumination quantique pour de l'imagerie [32].

Dès lors, nous distinguons plusieurs types de radar IQ dans la littérature [28] :

- Radar IQ : Radar à illumination quantique
- Radar IQ-MPA⁶ : Radar à illumination quantique avec un récepteur doté d'un amplificateur dans le régime micro-onde
- Radar QCN quantique⁷ : Radar à corrélation quantique de bruit
- Radar QCN - CR⁸ : Radar à corrélation quantique de bruit avec un récepteur des corrélations

Le radar IQ fait référence à celui imaginé par S. Lloyd et Tan et al. [2, 10]. Le radar IQ-MPA désigne un radar IQ micro-onde utilisant un amplificateur paramétrique comme récepteur potentiel du radar. Les radars QCN et QCN-CR se basent sur la mesure hétérodyne du signal reçu et de la référence pour conclure sur la présence et l'absence de la cible sur la base des corrélations entre les deux signaux en effectuant une mesure hétérodyne⁹ [141]. Les protocoles IQ originaux reposent sur la photo-détection qui vise à compter le nombre photons dans un mode donné [26].

Les différents types de radar IQ extraits de l'article [28] reposent avant tout sur les schémas technologiques envisagés pour la réception et l'utilisation du signal reçu avec le signal de

6. IQ-MPA : Microwave Parametric Amplifier Receiver Quantum Illumination Radar.

7. Radar QCN : Quantum Correlated Noise Radar.

8. Radar QCN-CR : Quantum Correlated Noise Radar using a correlation receiver.

9. Mesure des 2 quadratures \hat{Q} , \hat{P} qui est limitée à cause de la non-commutation $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$.

référence. Dans la section suivante, nous discutons des moyens d'émission et de réception développés dans la littérature et qui présentent un intérêt pour le radar IQ.

F.2.2 Émission et réception des états intriqués

Si l'émission et la réception de photons intriqués dans le régime optique $I_{\text{opt.}} = [3.75 \times 10^{14}, 7.5 \times 10^{14}]$ Hz sont maîtrisées, les mêmes processus dans le régime micro-ondes sont encore complexes. L'émission et la réception font appel à des mécanismes et dispositifs d'optique quantique [22, 45–48, 147].

À titre d'exemple, dans le régime $I_{\text{opt.}}$, les paires de photons intriqués sont obtenues en laboratoire par le procédé SPDC¹⁰ pour "conversion paramétrique spontanée descendante". Il s'agit d'un procédé illustré dans la figure F.1 où un faisceau laser de vecteur d'onde \vec{k}_0 , de fréquence ω_0 est injecté dans un cristal non-linéaire $\chi^{(2)}$ pour obtenir deux faisceaux de fréquences $\omega_0 = \omega_A + \omega_S$, et de vecteurs d'ondes $\vec{k}_0 = \vec{k}_A + \vec{k}_S$ dont les photons sont intriqués. En ayant recours à ce procédé SPDC, nous obtenons des états TMSV¹¹ c'est-

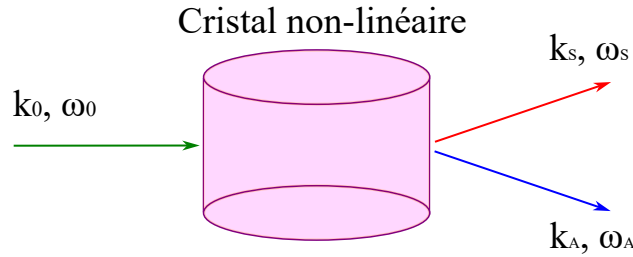


FIGURE F.1 – Représentation du principe du procédé SPDC pour obtenir des photons intriqués à partir d'un seul faisceau laser et d'un cristal non-linéaire.

à-dire des états compressés bimodes qui sont intriqués. Ces états sont des états gaussiens décrits dans la section F.1.2 où ils arborent une matrice de covariance (F.24) décrivant les corrélations quantiques dans le système bipartite. À partir de cette matrice de covariance V_{12} :

$$V_{12} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & -c \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & -c & 0 & b \end{pmatrix} \quad (\text{F.32})$$

10. Spontaneous Parametric Down Conversion. On utilise aussi le terme OPA pour "Optical Parametric Amplifier".

11. Two-Mode Squeezed Vacuum.

Nous avons le critère d'intrication $C > \sqrt{1 - a - b + ab}$ [26, 126] où C représente les corrélations qui doivent être telles que $C > C_c = 2N_S$ où C_c sont les corrélations classiques maximales atteignables sans l'intrication quantique et N_S représente le nombre de photons de signal. Comme indiqué dans la littérature [2, 26, 28], l'avantage quantique de l'intrication diminue à mesure que N_S augmente ce qui pose une limite théorique de la puissance d'émission du radar IQ pour conserver l'avantage quantique.

La détection pour le radar IQ peut se faire par photo-détection ou par mesure homodyne ou hétérodyne des quadratures (\hat{Q}, \hat{P}) du champ EM quantique. La difficulté expérimentale du protocole IQ est de pouvoir faire une mesure jointe alors que les mémoires quantiques, dont nous discutons dans la section F.2.3, ne sont pas encore au point. C'est pour cette raison que des mesures homodynes, hétérodynes sont étudiées dans les variantes de l'illumination quantique que nous avons évoquées dans la section F.2.1.

Cependant, comme l'objectif du radar quantique est d'opérer dans le régime micro-onde, il faut pouvoir générer aussi des faisceaux de photons intriqués dans ce régime de fréquences propre à la théorie radar, seulement le procédé SPDC est réservé pour des fréquences optiques.

Plusieurs solutions se détachent pour la création de signaux intriqués micro-ondes. L'une d'elles consiste à utiliser des convertisseurs électro-opto-mécaniques dont le principe est de convertir des photons micro-ondes en photons optiques pour faciliter la réception et le traitement du signal [30, 33]. Ce type de dispositif requiert l'utilisation de cavité QED. Seulement cette solution suggère de faire une conversion entre les fréquences micro-ondes et optiques ce qui complique le protocole IQ. L'idéal serait de disposer de signaux micro-ondes à l'émission et à la réception.

Une autre solution potentielle serait d'utiliser des JTWPA¹² dans des circuits QED pour le protocole IQ comme source de photons micro-ondes dans des états TSMV [9]. Cette technologie récente se base sur l'utilisation des jonctions Josephson pour créer les paires intriquées dans le régime micro-onde. Néanmoins, sur toutes ces solutions envisagées, la réception comme l'émission nécessitent d'utiliser des circuits réfrigérés à une température de l'ordre Kelvin ou du milliKelvin pour opérer, notamment à cause de l'utilisation de matériaux supraconducteurs pour les jonctions Josephson comme nous l'observons sur la figure F.2. Cela devient une limite pratique pour le protocole IQ d'un point de vue expérimental car l'objectif visé est de faire des expériences à température ambiante or ce

12. Josephson Traveling Wave Parametric Amplifier.

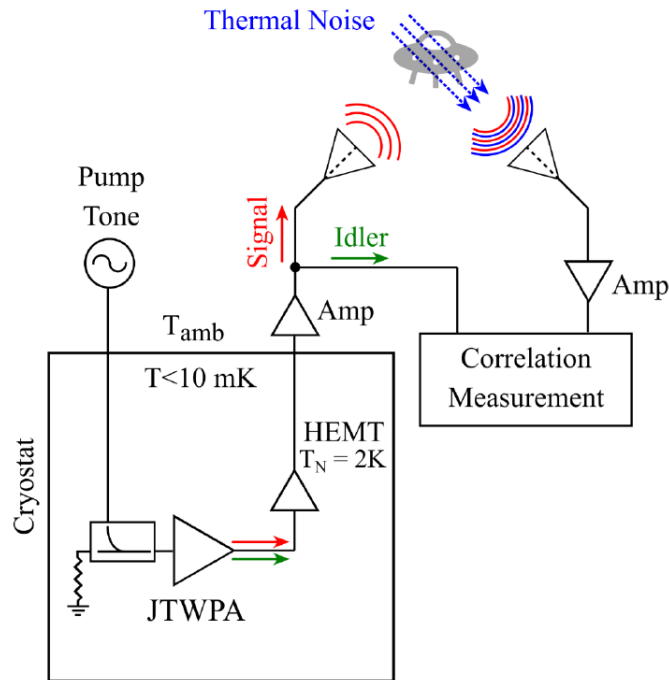


FIGURE F.2 – Schéma extrait de l'article [9] d'un dispositif de radar IQ pour une détection à température ambiante incluant un JTWPA pour détecter des cibles faiblement réfléchissantes.

milieu est à des températures de l'ordre $T > 100$ K contre des températures de 10^{-3} K pour faire fonctionner les JTWPA. Cela pose des problèmes majeurs sur la gestion du bruit thermique dans le processus IQ.

En résumé, si la production de photons optiques intriqués par processus SPDC est bien comprise, la production de paires de photons intriqués micro-ondes se révèle toujours être une limite expérimentale à résoudre dans des conditions opérationnels c'est-à-dire à température ambiante. Il existe peu de littérature sur les détecteurs de photons micro-ondes car la recherche s'est avant tout concentrée sur le régime optique dans le cadre des communications quantiques. Une technologie potentiellement intéressante pour le capteur de photons micro-ondes est celle des jonctions Josephson. Or comme nous l'avons mentionné, ce type de capteur nécessite des températures de fonctionnement très basses à priori incompatible avec une utilisation dans un cadre radar opérationnel.

Dans la section suivante, nous discutons du stockage du signal de référence pour le radar IQ qui est très importante dans la situation de la mesure jointe instituée par le protocole d'illumination quantique.

F.2.3 Stockage du photon de référence

Le stockage du photon de référence ou du signal de référence pour la variable continue est un challenge théorique et technologique dans la conception d'un radar IQ car les signaux reçus et de référence doivent être synchronisés pour effectuer la mesure jointe. Cela implique de connaître l'emplacement de la cible à l'avance et donc on ne peut faire de la localisation comme c'est possible en théorie radar classique.

Le stockage du signal de référence se fait par une mémoire quantique qui préserve l'état quantique suffisamment longtemps pour réutiliser ce que nous avons stocké. La recherche sur les mémoires quantiques dans les régimes optique et micro-onde est très active parce que cela dépasse le cadre de la seule recherche sur le radar quantique. En effet, les mémoires quantiques s'inscrivent dans les thématiques de recherche sur les protocoles de communication quantique et les protocoles de calcul quantique. C'est aussi un enjeu majeur pour la thématique de l'ordinateur quantique qui prend de l'ampleur depuis les années 2000. Une mémoire quantique est adaptée pour préserver l'état quantique du photon mais surtout elle doit être adaptée à son énergie et aussi au degré de liberté (polarisation, fréquence, OAM) que l'on veut préserver. Elle repose sur un contrôle de l'interaction lumière-matière pour imprimer les états quantiques des photons sur les états de la matière.

L'article [50] recense les avancées récentes dans le domaine des mémoires quantiques où 3 protocoles se distinguent que nous décrivons de manière succincte.

D'abord, nous avons les *mémoires à contrôle optique* qui se basent sur l'usage de transitions permises et interdites sur les niveaux d'énergie du matériau utilisé pour la mémoire quantique et qu'on contrôle avec une impulsion. Par exemple, si nous avons un système avec un niveau fondamental $|1\rangle$ et un niveau excité $|3\rangle$, le niveau $|2\rangle$ est un niveau intermédiaire. Les transitions $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ et $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ sont permises mais la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ est interdite ce qui permet de stocker un état quantique avec une durée de vie déterminée. L'absorption et l'émission d'un signal sont alors contrôlées avec une puissante impulsion sur le système.

Un autre protocole se nomme *l'ingénierie d'absorption* qui repose sur les caractéristiques intrinsèques du spectre d'absorption des cristaux dopés aux terres rares [50]. Comme ils ne sont pas contrôlés par une impulsion forte, on élimine le bruit provenant de cette impulsion en sacrifiant en revanche un contrôle à la demande car on doit attendre la relaxation des contraintes sur le système de la mémoire quantique pour la réutiliser. Un avantage

par rapport au protocole à contrôle optique est que le stockage multimode est possible. Le dernier protocole est une *version hybride* des 2 protocoles précédents pour tirer parti du contrôle des systèmes optiques avec l'avantage du stockage multimode de l'ingénierie d'absorption.

Les recherches autour des mémoires quantiques incluent le stockage de signaux quantiques micro-ondes. Des mémoires quantiques potentielles sont en cours de conception en jouant sur les conversions optique/micro-onde et micro-onde/optique, les cavités optiques et les centres NV¹³ dans le diamant. Des références sur le sujet sont trouvables dans l'article [50] qui a fait ce recensement en 2015.

Nous concluons dans la section suivante.

F.3 Synthèse

Dans cette annexe, nous avons introduit des éléments de la théorie de l'information en variable continue dans la section F.1 pour discuter ensuite dans la section F.2 des éléments technologiques pertinents dans la thématique du radar IQ.

La section F.1 a introduit le concept des états gaussiens qui sont les états quantiques de la lumière que l'on obtient le plus facilement en laboratoire. Ces états quantiques sont caractérisés par leurs quadratures de champ moyennes $\langle \hat{R} \rangle = (\langle \hat{X} \rangle \langle \hat{P} \rangle)^T$ et leurs matrices de covariance V . Avec ces états gaussiens, il est possible de créer des états intriqués TSMV qui sont à la base des expérimentations d'illumination quantique en vue du radar IQ. Nous avons aussi évoqué dans cette même section les moyens de quantifier l'intrication quantique et les corrélations quantiques générales dans le formalisme de la variable continue.

La section F.2 nous a permis de discuter brièvement des aspects technologiques pertinents pour le radar IQ dans les régimes de fréquences optiques et micro-ondes. Les technologies impliquant des signaux quantiques micro-ondes sont encore trop peu développées dans l'émission, la réception et les mémoires quantiques pour qu'une application opérationnelle d'un radar IQ puisse voir le jour dans un futur proche. À cela s'ajoute la complexité de la mesure jointe pour le protocole IQ dans un cadre radar opérationnel ce qui pousse

13. Nitrogen-Vacancy

à rechercher des alternatives notamment par les mesures homodynes et hétérodynes.

Cette annexe permet d'entretenir des pistes de réflexion pour étudier le radar IQ sous l'angle de la théorie de l'information quantique en variable continue. Il serait pertinent de continuer sur cette voie car elle permettrait de coller au plus près à ce qui se fait au niveau expérimental actuellement. Il est important de noter que la TIQVC est encore une discipline récente dans la TIQ ce qui implique que des avancées théoriques potentielles peuvent avoir lieu et profiter à la thématique du radar quantique comme aux autres disciplines des sciences et technologies quantiques pour l'information.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier dans ces quelques lignes les personnes qui m'ont aidé au cours de ces trois années intenses de thèse ponctuées qui plus est de la première pandémie du XXI^{ème} siècle.

En premier lieu, je remercie les rapporteurs Salah Bourenane et Aziz Benlarbi-Delaiï d'avoir pris le temps de lire mon mémoire de thèse et de me permettre de soutenir ma thèse. Je remercie les membres du jury Ghâis El Zein, Ali Khenchaf, Arnaud Coatanhay et Philippe Pouliguen pour avoir assisté à ma soutenance.

Je remercie particulièrement mon directeur de thèse Ali Khenchaf qui m'a fait confiance sur ce sujet multidisciplinaire assez atypique qu'est le radar quantique. Ce type de sujet étant nouveau, il fut difficile au début d'orienter correctement mes réflexions. Cependant, Ali a toujours été de bon conseil pour me guider et me suggérer des pistes.

Je remercie grandement mon encadrant Arnaud Coatanhay qui a également su me faire confiance pour ce sujet de thèse. Il a été patient avec moi et il a toujours été là pour m'aider. Il m'a conseillé maintes et maintes fois sur les problèmes que je rencontrais dans ce travail de recherche exploratoire. J'ai également beaucoup appris au travers de nos discussions, tant sur la théorie de l'information quantique que sur d'autres thématiques qui attisent à présent ma curiosité.

En dehors de mes encadrants, je n'oublie pas ceux que j'ai côtoyé ces trois années à l'ENSTA Bretagne dans la joie et la bonne humeur comme dans les moments de doute et de peine. J'ai pris plaisir à déjeuner avec eux, à confronter des idées dans nos échanges quotidiens, à jouer au foot le mercredi midi et bien d'autres choses. Pour ça je remercie Ngoc Tan Truong, Alexandre Corazza, Mira Kaissar Abboud, Zaynab Guerraou, Michael Meighan, Luc Jaulin, Amen Benali, Andreea-Gabriela Tintatu, Leandro Mauricio Da Silva, Juan Pablo Marquez Costa, et tant d'autres.

Merci à Zaynab pour toutes les discussions que nous avons eu dans les pauses cafés qui m'ont beaucoup apportées. Merci à Mira pour ses conseils professionnels avisés, pour nos

discussions enflammés sur divers sujets, scientifiques ou non, et surtout pour sa patience ! Je remercie aussi tout particulièrement Hamza Bounaceur qui ne pourra jamais lire ces lignes. Nous avons débuté en tant que doctorants à la même période en 2019. Malheureusement, il est décédé trois mois avant d'avoir pu mener sa thèse à son terme. Il n'a pas pu présenter le fruit de ses efforts alors que l'avenir lui tendait les bras. Je pense sincèrement à lui ainsi qu'à sa famille.

Je remercie également tout le personnel administratif qui m'a aidé sur ces trois années. Merci à Annick Billon-Coat, responsable de l'école doctorale MathSTIC pour toute l'aide apportée dans les différentes démarches que j'ai faites dans le cadre de cette thèse ainsi qu'à Patricia Cabel qui a pris sa suite. Je remercie Michèle Hofmann de m'avoir aidé dans des démarches administratives diverses dans lesquelles je me perds facilement.

Durant la thèse, j'ai pu faire de l'enseignement ce qui était pour moi un nouveau défi. Je remercie Arnaud Coatanhay et Christophe Osswald qui m'ont formé à cette activité loin d'être évidente mais très enrichissante.

Je n'oublie pas non plus mes colocataires et amis qui m'ont accompagné dans cette aventure et qui se sont succédés dans notre appartement sur toute la période de ma thèse. Je remercie pour cela Pierre, Geoffroy, Victoria, Roxane, Justine, Naïg et Mathias.

Enfin, je remercie ma famille qui m'a soutenu à distance dans cette entreprise incroyable qu'est la thèse. Un merci spécifique pour mes parents qui ont compris ma motivation de faire un doctorat et m'ont soutenu dans les moments de doutes. Merci à mes grands-parents qui m'ont également soutenu dans cette aventure. Un merci particulier à mon grand-père qui m'a fait découvrir et aimé la physique. Merci à ma soeur, à son copain et à mon cousin qui m'ont accompagné dans nos séances de jeux vidéos enflammés me permettant de me changer les idées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B-2 Spirit Bomber. https://fr.wikipedia.org/wiki/Northrop_B-2_Spirit#/media/Fichier:B-2_Spirit_original.jpg.
- [2] Si-Hui Tan, Baris I. Erkmen, Vittorio Giovannetti, Saikat Guha, Seth Lloyd, Lorenzo Maccone, Stefano Pirandola, and Jeffrey H. Shapiro. Quantum Illumination with Gaussian States. *Physical Review Letters*, 101(25) :253601, December 2008.
- [3] Marco Lanzagorta. *Quantum radar*. Morgan & Claypool, 1st edition edition, 2011. OCLC : 1026338468.
- [4] Merrill I. Skolnik. *Radar handbook*. McGraw-Hill Professional, 3rd edition, March 2008.
- [5] Mahafza Bassem R. *Radar Systems Analysis and Design Using MATLAB Third Edition*. Chapman and Hall/CRC, 3rd edition.
- [6] Atmospheric Electromagnetic Absorption Spectrum. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/34/Atmospheric_electromagnetic_opacity.svg/1920px-Atmospheric_electromagnetic_opacity.svg.png.
- [7] Sylvain Borderieux, Arnaud Coatanhay, and Ali Khenchaf. Estimation of the Influence of a Noisy Environment on the Binary Decision Strategy in a Quantum Illumination Radar. *Sensors*, 22(13) :4821, June 2022.
- [8] C. Paterson. Atmospheric Turbulence and Orbital Angular Momentum of Single Photons for Optical Communication. *Physical Review Letters*, 94(15) :153901, April 2005.
- [9] Luca Fasolo, Angelo Greco, Emanuele Enrico, Fabrizio Illuminati, Rosario Lo Franco, David Vitali, and Patrizia Livreri. Josephson Traveling Wave Parametric Amplifiers as non-classical light source for Microwave Quantum Illumination. *Measurement : Sensors*, 18 :100349, December 2021.
- [10] Seth Lloyd. Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination. *Science*, 321(5895) :1463–1465, September 2008.
- [11] Jacques Darricau. *Physique et Théorie du Radar*, volume 1. SODIPE, 2nd edition, 1981.

- [12] Peter Knott, Dirk Heberling, and Matthias Weiss. 12th International Summer School on Radar/SAR, July 2021.
- [13] Richard Fitzpatrick. *Classical Electromagnetism*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.
- [14] Thomas M Cover and Joy A Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley Interscience. John Wiley & Sons, Canada, 2nd edition edition, 2006.
- [15] Cohen Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Mécanique Quantique*, volume 1 of *Enseignement des sciences*. Hermann, Paris, 2nd edition, 1977.
- [16] Cohen Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Mécanique Quantique*, volume 2 of *Enseignement des sciences*. Hermann, Paris, 1st edition, 2007.
- [17] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Mécanique quantique*, volume 3 of *Savoirs actuels*. EDP sciences CNRS éditions, Les Ulis Paris, 1st edition, 2017.
- [18] Leonard Susskind and Art Friedman. *Quantum mechanics. The theoretical minimum*. Basic Books, United-States, 1st edition edition, 2014.
- [19] Leonard Susskind and George Hrabovsky. *The Theoretical Minimum_ What You Need to Know to Start Doing Physics*. Penguin Books. Basic Books, Great Britain, 1st edition edition, 2013.
- [20] Masahito Hayashi, Satoshi Ishizaka, Akinori Kawachi, Gen Kimura, and Tomohiro Ogawa. *Introduction to Quantum Information Science*. Graduate Texts in Physics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015.
- [21] Mark Wilde. *Quantum information theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, second edition edition, 2017. OCLC : ocn973404322.
- [22] Gilbert Grynberg, Alain Aspect, and Claude Fabre. *Introduction to Quantum Optics*. Cambridge University Press, United-States, 1st edition edition, 2010.
- [23] Seth Lloyd. Quantum Illumination. *arXiv :0803.2022 [quant-ph]*, March 2008. arXiv : 0803.2022.
- [24] Jeffrey H Shapiro and Seth Lloyd. Quantum illumination versus coherent-state target detection. *New Journal of Physics*, 11(6) :063045, June 2009.
- [25] Jeffrey H. Shapiro. The Quantum Illumination Story. *arXiv :1910.12277 [quant-ph]*, December 2019. arXiv : 1910.12277.

-
- [26] Giacomo Sorelli, Nicolas Treps, Frederic Grosshans, and Fabrice Boust. Detecting a Target with Quantum Entanglement. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, pages 1–1, 2021.
- [27] Athena Karsa and Stefano Pirandola. Energetic Considerations in Quantum Target Ranging. In *2021 IEEE Radar Conference (RadarConf21)*, pages 1–4, Atlanta, GA, USA, May 2021. IEEE.
- [28] Jeffrey H. Shapiro. Microwave Quantum Radar’s Alphabet Soup : QI, QI-MPA, QCN, QCN-CR. In *2021 IEEE Radar Conference (RadarConf21)*, pages 1–6, Atlanta, GA, USA, May 2021. IEEE.
- [29] E. D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, and M. Genovese. Experimental Realization of Quantum Illumination. *Physical Review Letters*, 110(15) :153603, April 2013.
- [30] Shabir Barzanjeh, M. C. de Oliveira, and Stefano Pirandola. Microwave Photodetection with Electro-Opto-Mechanical Systems. *arXiv :1410.4024 [quant-ph]*, October 2014. arXiv : 1410.4024.
- [31] Shabir Barzanjeh, Saikat Guha, Christian Weedbrook, David Vitali, Jeffrey H. Shapiro, and Stefano Pirandola. Quantum Illumination at the Microwave Wavelengths. *Physical Review Letters*, 114(8) :080503, February 2015. arXiv : 1410.4008.
- [32] Thomas Gregory, Paul-Antoine Moreau, Ermes Toninelli, and Miles J. Padgett. Imaging Through Noise With Quantum Illumination. *Science Advances*, 6(6) :eaay2652, February 2020. arXiv : 1907.09370.
- [33] Qizhi Cai, Jinkun Liao, Bohai Shen, Guangcan Guo, and Qiang Zhou. Microwave Quantum Illumination via Cavity Magnonics. *Physical Review A*, 103(5) :052419, May 2021. arXiv : 2011.04301.
- [34] Yonggi Jo, Sangkyung Lee, Yong Sup Ihn, Zaeill Kim, and Su-Yong Lee. Quantum illumination receiver using double homodyne detection. *Physical Review Research*, 3(1) :013006, January 2021.
- [35] P. Livreri, E. Enrico, L. Fasolo, A. Greco, A. Rettaroli, D. Vitali, A. Farina, Com. F. Marchetti, and A. Sq. D. Giacomini. Microwave Quantum Radar using a Josephson Traveling Wave Parametric Amplifier. In *2022 IEEE Radar Conference (RadarConf22)*, pages 1–5, New York City, NY, USA, March 2022. IEEE.
- [36] Iain H. Woodhouse. *Introduction to Microwave Remote Sensing*. Taylor & Francis Group, 1st edition, 2006.

- [37] Dénes Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [38] Alexander Streltsov. *Quantum Correlations Beyond Entanglement*. SpringerBriefs in Physics. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [39] Erwan Gillion. *Contribution à l'estimation de la SER d'une cible navale en environnement réel : modélisation et mesures*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Rennes, 2014.
- [40] Martin Grabner and Vaclav Kvicera. On the relation between atmospheric visibility and optical wave attenuation. In *2007 16th IST Mobile and Wireless Communications Summit*, pages 1–5, Budapest, Hungary, July 2007. IEEE.
- [41] Guo-yong Hu, Chang-ying Chen, and Zhen-qiang Chen. Free-Space Optical communication using visible light. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 8(2) :186–191, February 2007.
- [42] Bubnov Grigoriy, Vyacheslav Vdovin, Vladimir Khaikin, Pascal Tremblin, and Philippe Baron. Analysis of variations in factors of specific absorption of sub-terahertz waves in the earth's atmosphere. In *2020 7th All-Russian Microwave Conference (RMC)*, pages 229–232, Moscow, Russia, November 2020. IEEE.
- [43] Hans J. Liebe. An updated model for millimeter wave propagation in moist air. *Radio Science*, 20(5) :1069–1089, September 1985.
- [44] Bhashyam Balaji. Quantum Radar : Snake Oil or Good Idea ? In *2018 International Carnahan Conference on Security Technology (ICCST)*, pages 1–7, Montreal, QC, October 2018. IEEE.
- [45] Alain Aspect and Michel Brune. *Quantum Optics 1 : Single Photons*, 2017.
- [46] Alain Aspect and Michel Brune. *Quantum Optics 2 : Two photons and more*, 2020.
- [47] Girish S. Agarwal. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, United-States, 1st edition edition, 2013.
- [48] Mark Fox. *Quantum optics : an introduction*. Number 15 in Oxford master series in physics. Oxford University Press, Oxford ; New York, 2006.
- [49] C. Emary, B. Trauzettel, and C. W. J. Beenakker. Entangled microwave photons from quantum dots. *Physical Review Letters*, 95(12) :127401, September 2005. arXiv :cond-mat/0502550.

-
- [50] Khabat Heshami, Duncan G. England, Peter C. Humphreys, Philip J. Bustard, Victor M. Acosta, Joshua Nunn, and Benjamin J. Sussman. Quantum memories : emerging applications and recent advances. *Journal of Modern Optics*, 63(20) :2005–2028, November 2016.
- [51] S. Barzanjeh, S. Pirandola, D. Vitali, and J. M. Fink. Microwave quantum illumination using a digital receiver. *Science Advances*, 6(19) :eabb0451, May 2020.
- [52] Matthew J. Brandsema, Ram M. Narayanan, and Marco Lanzagorta. Theoretical and computational analysis of the quantum radar cross section for simple geometrical targets. *Quantum Information Processing*, 16(1) :32, January 2017.
- [53] Matthew J. Brandsema, Ram M. Narayanan, and Marco Lanzagorta. The Effect of Polarization on the Quantum Radar Cross Section Response. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 53(2) :1–9, April 2017.
- [54] Matthew J. Brandsema, Ram M. Narayanan, and Marco Lanzagorta. Cross Section Equivalence Between Photons and Non-Relativistic Massive Particles for Targets with Complex Geometries. *Progress In Electromagnetics Research M*, 54 :37–46, 2017.
- [55] Matthew J Brandsema. *Formulation and Analysis of The Quantum Radar Cross Section*. PhD thesis, Pennsylvania State University, United-States, 2017.
- [56] Kang Liu, Huaitie Xiao, Hongqi Fan, and Qiang Fu. Analysis of Quantum Radar Cross Section and Its Influence on Target Detection Performance. *IEEE Photonics Technology Letters*, 26(11) :1146–1149, June 2014.
- [57] Kang Liu, Yanwen Jiang, Xiang Li, Yongqiang Cheng, and Yuliang Qin. New results about quantum scattering characteristics of typical targets. In *2016 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 2669–2671, Beijing, China, July 2016. IEEE.
- [58] Rui Yang, Tiancheng Zhang, Zi He, Hong Cheng Yin, and Rushan Chen. An Efficient Analysis Method for Monostatic quantum radar cross section. In *2019 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT)*, pages 1–3, Guangzhou, China, May 2019. IEEE.
- [59] Tom Lancaster and Stephen Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. Oxford University Press, Oxford, first edition edition, 2014. OCLC : ocn859651399.
- [60] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3) :379–423, 1948.

- [61] R.F. O'Connell. Decoherence in Quantum Systems. *IEEE Transactions On Nanotechnology*, 4(1) :77–82, January 2005.
- [62] Ting Yu and J. H. Eberly. Evolution from Entanglement to Decoherence of Bipartite Mixed "X" States. *arXiv :quant-ph/0503089*, January 2007. arXiv : quant-ph/0503089.
- [63] Maximilian Schlosshauer, A. P. Hines, and G. J. Milburn. Decoherence and dissipation of a quantum harmonic oscillator coupled to two-level systems. *Physical Review A*, 77(2) :022111, February 2008.
- [64] Misbah Qurban, Rabia Tahira, Rameez Ul-Islam, and Manzoor Ikram. Disentanglement in a two-qubit system subjected to dissipative environment : Exact analysis. *Optics Communications*, 366 :285–290, May 2016.
- [65] Li Li, Michael J.W. Hall, and Howard M. Wiseman. Concepts of quantum non-Markovianity : A hierarchy. *Physics Reports*, 759 :1–51, October 2018.
- [66] Maximilian Schlosshauer. Quantum decoherence. *Physics Reports*, 831 :1–57, October 2019.
- [67] William K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 80(10) :2245–2248, March 1998. arXiv : quant-ph/9709029.
- [68] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum Discord : A Measure of the Quantumness of Correlations. *Physical Review Letters*, 88(1) :017901, December 2001.
- [69] L. Henderson and V. Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 34(35) :6899–6905, September 2001. arXiv : quant-ph/0105028.
- [70] Wojciech Hubert Zurek. Quantum Discord and Maxwell's Demons. *Physical Review A*, 67(1) :012320, January 2003. arXiv : quant-ph/0301127.
- [71] Kavan Modi. A pedagogical overview of quantum discord. *Open Systems & Information Dynamics*, 21(01n02) :1440006, June 2014. arXiv : 1312.7676.
- [72] Borivoje Dakic, Vlatko Vedral, and Caslav Brukner. Necessary and sufficient condition for non-zero quantum discord. *Physical Review Letters*, 105(19) :190502, November 2010. arXiv : 1004.0190.

-
- [73] Howard M. Wiseman. Quantum discord is Bohr’s notion of non-mechanical disturbance introduced to counter the Einstein–Podolsky–Rosen argument. *Annals of Physics*, 338 :361–374, November 2013.
- [74] Xue-Qun Yan and Bo-Ying Zhang. Collapse–revival of quantum discord and entanglement. *Annals of Physics*, 349 :350–356, October 2014.
- [75] Paulson K. George. Entanglement sudden death of higher rank boundary qubit-qutrit states. In *2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Pacific Rim (CLEOPR)*, pages 1–3, Singapore, July 2017. IEEE.
- [76] Claudia Benedetti, Matteo G. A. Paris, Fabrizio Buscemi, and Paolo Bordone. Time-evolution of entanglement and quantum discord of bipartite systems subject to $1/f^\alpha$ noise. In *2013 22nd International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF)*, pages 1–4, Montpellier, France, June 2013. IEEE.
- [77] R. Auccaise, L. C. Celeri, D. O. Soares-Pinto, E. R. deAzevedo, J. Maziero, A. M. Souza, T. J. Bonagamba, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, and R. M. Serra. Environment-induced sudden transition in quantum discord dynamics. *Physical Review Letters*, 107(14) :140403, September 2011. arXiv : 1104.3885.
- [78] Animesh Datta, Anil Shaji, and Carlton M. Caves. Quantum discord and the power of one qubit. *Physical Review Letters*, 100(5) :050502, February 2008. arXiv : 0709.0548.
- [79] J. L. Guo, Y. J. Mi, and H. S. Song. Quantum discord dynamics of two-qubit system in a quantum spin environment. *The European Physical Journal D*, 66(1) :24, January 2012.
- [80] Alexander Streltsov and Wojciech H. Zurek. Quantum discord cannot be shared. *Physical Review Letters*, 111(4) :040401, July 2013. arXiv : 1304.2914.
- [81] Hui Wang and Zairong Xi. Quantum discord dynamics of two atoms under different quantum feedbacks. In *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 1634–1638, Beijing, China, July 2012. IEEE.
- [82] Shunlong Luo. Quantum discord for two-qubit systems. *Physical Review A*, 77(4) :042303, April 2008.
- [83] Mazhar Ali, A. R. P. Rau, and Gernot Alber. Quantum discord for two-qubit X-states. *Physical Review A*, 81(4) :042105, April 2010. arXiv : 1002.3429.
- [84] Hong-Ting Song, Yu Pan, Wei Cui, and Zai-Rong Xi. Optimal control of quantum discord in a common environment. In *Proceedings of the 10th World Congress on*

- Intelligent Control and Automation*, pages 1999–2004, Beijing, China, July 2012. IEEE.
- [85] Jia-dong Shi, Dong Wang, Yang-cheng Ma, and Liu Ye. Revival and robustness of Bures distance discord under decoherence channels. *Physics Letters A*, 380(7-8) :843–847, February 2016.
- [86] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini, and C. J. Villas-Boas. Robustness of quantum discord to sudden death. *Physical Review A*, 80(2) :024103, August 2009. arXiv : 0905.3376.
- [87] João P. G. Pinto, Goktug Karpat, and Felipe F. Fanchini. Sudden change of quantum discord for a system of two qubits. *Physical Review A*, 88(3) :034304, September 2013. arXiv : 1309.7945.
- [88] Reinhard F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, 40(8) :4277–4281, October 1989.
- [89] Tohya Hiroshima and Satoshi Ishizaka. Local and Nonlocal Properties of Werner States. *Physical Review A*, 62(4) :044302, September 2000. arXiv : quant-ph/0003058.
- [90] Carl W. Helstrom. *Quantum Detection and Estimation Theory*. Academic Press, New York, 1976.
- [91] Massimiliano F. Sacchi. Optimal discrimination of quantum operations. *Physical Review A*, 71(6) :062340, June 2005. arXiv : quant-ph/0505183.
- [92] K. M. R. Audenaert, J. Calsamiglia, Ll Masanes, R. Muñoz-Tapia, A. Acín, E. Bagan, and F. Verstraete. The Quantum Chernoff Bound. *Physical Review Letters*, 98(16) :160501, April 2007. arXiv : quant-ph/0610027.
- [93] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11) :8185–8189, June 1992.
- [94] Jonathan Leach, Miles J. Padgett, Stephen M. Barnett, Sonja Franke-Arnold, and Johannes Courtial. Measuring the Orbital Angular Momentum of a Single Photon. *Physical Review Letters*, 88(25) :257901, June 2002.
- [95] C Gopaul and R Andrews. The effect of atmospheric turbulence on entangled orbital angular momentum states. *New Journal of Physics*, 9(4) :94–94, April 2007.

-
- [96] Bart-Jan Pors, C. H. Monken, Eric R. Eliel, and J. P. Woerdman. Transport of Orbital-Angular-Momentum Entanglement through a Turbulent Atmosphere. *arXiv :0909.3750 [quant-ph]*, September 2009. arXiv : 0909.3750.
- [97] Yi-Xin Zhang, Jian-Cai Xu, Jian-Yu Wang, and Jian-Jun Jia. Detection Probability Model of Single Photons Propagation in a Slant Path Turbulent Atmosphere. In *2010 Symposium on Photonics and Optoelectronics*, pages 1–4, Chengdu, China, June 2010. IEEE.
- [98] Filippus S. Roux. Infinitesimal propagation equation for decoherence of an OAM entangled biphoton in atmospheric turbulence. *Physical Review A*, 83(5) :053822, May 2011. arXiv : 1102.5166.
- [99] Robert Fickler, Radek Lapkiewicz, William N. Plick, Mario Krenn, Christoph Schaeff, Sven Ramelow, and Anton Zeilinger. Quantum Entanglement of High Angular Momenta. *Science*, 338(6107) :640–643, November 2012.
- [100] Mehul Malik, Malcolm O’Sullivan, Brandon Rodenburg, Mohammad Mirhosseini, Jonathan Leach, Martin P. J. Lavery, Miles J. Padgett, and Robert W. Boyd. Influence of atmospheric turbulence on optical communications using orbital angular momentum for encoding. *Optics Express*, 20(12) :13195, June 2012.
- [101] Jose Raul Gonzalez Alonso and Todd Brun. Protecting OAM Photons from Decoherence in a Turbulent Atmosphere. *Physical Review A*, 88(2) :022326, August 2013. arXiv : 1306.2299.
- [102] Alpha Hamadou Ibrahim, Filippus S. Roux, and Thomas Konrad. Parameter dependence in the atmospheric decoherence of modally entangled photon pairs. *Physical Review A*, 90(5) :052115, November 2014.
- [103] Nina D. Leonhard, Vyacheslav N. Shatokhin, and Andreas Buchleitner. Universal entanglement decay in atmospheric turbulence. *Physical Review A*, 91(1) :012345, January 2015. arXiv : 1408.3324.
- [104] Mei-Song Wei, Jicheng Wang, Yixin Zhang, and Zheng-Da Hu. Nonclassical correlations of photonic qubits carrying orbital angular momentum through non-Kolmogorov atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America A*, 35(6) :873, June 2018.
- [105] Giacomo Sorelli. *Quantum state transfer in diffractive and refractive media*. PhD thesis, Université Albert-Ludwigs, Freiburg, 2019.

- [106] Larry C. Andrews and Ronald L. Phillips. *Laser beam propagation through random media*. SPIE Press, Washington, 2nd edition, 2005.
- [107] William H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. John Wiley & Sons, Canada, 1st edition edition, 1973.
- [108] A. G. de Oliveira, R. M. Gomes, V. C. C. Brasil, N. Rubiano da Silva, L. C. Céleri, and P. H. Souto Ribeiro. Full Thermalization of a Photonic Qubit. *Physics Letters A*, 384(36) :126933, December 2020. arXiv : 2010.01203.
- [109] Christian Weedbrook, Stefano Pirandola, Jayne Thompson, Vlatko Vedral, and Mile Gu. How Discord underlies the Noise Resilience of Quantum Illumination. *New Journal of Physics*, 18(4) :043027, April 2016. arXiv : 1312.3332.
- [110] H. Kumano, K. Matsuda, S. Ekuni, H. Sasakura, and I. Suemune. Characterization of two-photon polarization mixed states generated from entangled-classical hybrid photon source. *Optics Express*, 19(15) :14249, July 2011.
- [111] Geoff J. Pryde. The quantum information cocoon. *Nature Photonics*, 2(8) :461–462, August 2008.
- [112] Sylvain Borderieux, Arnaud Coatanhay, and Ali Khenchaf. Study of the Atmospheric Influence on a Quantum Illumination Radar Scheme with an Information Theory Approach, November 2021.
- [113] Sylvain Borderieux, Arnaud Coatanhay, and Ali Khenchaf. Entanglement Decay of Microwave photons in Atmosphere in a Quantum Illumination Radar Scheme, April 2022.
- [114] Ruchipas Bavontaweepanya. Effect of depolarizing noise on entangled photons. *Journal of Physics : Conference Series*, 1144 :012047, December 2018.
- [115] Mustapha Dehmani, Hamid Ez-Zahraouy, and Abdelilah Benyoussef. Transmissions of quantum entangled states in anisotropic depolarizing channels. *Journal of Russian Laser Research*, 34(1) :71–76, January 2013.
- [116] Rajiuddin Sk and Prasanta K. Panigrahi. Protecting quantum coherence and entanglement in a correlated environment. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 596 :127129, June 2022.
- [117] Juan He and Liu Ye. Protecting entanglement under depolarizing noise environment by using weak measurements. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 419 :7–13, February 2015.

-
- [118] Fatih Ozaydin. Phase damping destroys quantum Fisher information of W states. *Physics Letters A*, 378(43) :3161–3164, September 2014.
- [119] Ricardo Gallego Torromé, Nadya Ben Bekhti-Winkel, and Peter Knott. Quantum illumination with multiple entangled photons. *Advanced Quantum Technologies*, 4(11) :2100101, November 2021. arXiv :2008.09455 [quant-ph].
- [120] Xiang Li, De-wei Wu, Chun-yan Yang, Wei-long Li, and Qiang Miao. Quantitative analysis of decoherence of entangled microwave signals in free space. *Quantum Information Processing*, 18(7) :200, July 2019.
- [121] Jakub S Prauzner-Bechcicki. Two-mode squeezed vacuum state coupled to the common thermal reservoir. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37(15) :L173–L181, April 2004.
- [122] Samuel L. Braunstein and Peter van Loock. Quantum information with continuous variables. *Reviews of Modern Physics*, 77(2) :513–577, June 2005. arXiv : quant-ph/0410100.
- [123] Gaëlle Keller. *Génération et caractérisation d'états intriqués en variables continues*. PhD thesis, Université Paris VI, Paris, 2008.
- [124] Christian Weedbrook, Stefano Pirandola, Raúl García-Patrón, Nicolas J. Cerf, Timothy C. Ralph, Jeffrey H. Shapiro, and Seth Lloyd. Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 84(2) :621–669, May 2012.
- [125] Rémi Blandino. *Intrication de champs quantiques mésoscopiques pour les communications quantiques*. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, 2013.
- [126] Carlos Navarrete-Benlloch. *An introduction to the formalism of quantum information with continuous variables*. IOP Concise Physics. Morgan & Claypool, USA, 2015.
- [127] Paolo Giorda and Matteo G. A. Paris. Gaussian Quantum Discord. *Physical Review Letters*, 105(2) :020503, July 2010.
- [128] Paolo Giorda, Michele Allegra, and Matteo G. A. Paris. Quantum discord for Gaussian states with non-Gaussian measurements. *Physical Review A*, 86(5) :052328, November 2012.
- [129] Xin Liu, Wei Wu, and Changkui Hu. Dynamic of the Gaussian quantum discord and effect of non-Markovian degree. *Canadian Journal of Physics*, 93(4) :481–485, April 2015.

- [130] Johannes A Russer, Michael Würth, Wolfgang Utschick, Florian Bischeltsrieder, and Markus Peichl. Performance Considerations for Quantum Radar. page 4.
- [131] Jerome Bourassa and Christopher M. Wilson. Progress Toward an All-Microwave Quantum Illumination Radar. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 35(11) :58–69, November 2020.
- [132] Matthew Brandsema. Current Readiness for Quantum Radar Implementation. In *2018 IEEE Conference on Antenna Measurements & Applications (CAMA)*, pages 1–4, Västerås, September 2018. IEEE.
- [133] Robert Jonsson and Martin Ankel. Quantum Radar – What is it good for? In *2021 IEEE Radar Conference (RadarConf21)*, pages 1–6, Atlanta, GA, USA, May 2021. IEEE.
- [134] Matthew J. Brandsema, Ram M. Narayanan, and Marco Lanzagorta. Design considerations for quantum radar implementation. page 90770T, Baltimore, Maryland, USA, May 2014.
- [135] Marco Lanzagorta. Low-brightness quantum radar. page 946113, Baltimore, Maryland, United States, May 2015.
- [136] Marco Lanzagorta and Jeffrey Uhlmann. Opportunities and Challenges of Quantum Radar. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 35(11) :38–56, November 2020.
- [137] Konstantin Lukin. Evolution of Quantum Radar Concept to Noise Radar Concept. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 35(11) :30–36, November 2020.
- [138] David Luong, Sreeraman Rajan, and Bhashyam Balaji. Estimating Correlation Coefficients for Quantum Radar and Noise Radar : A Simulation Study. In *2019 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*, pages 1–5, Ottawa, ON, Canada, November 2019. IEEE.
- [139] Lorenzo Maccone and Changliang Ren. Quantum radar. *Physical Review Letters*, 124(20) :200503, May 2020. arXiv : 1905.02672.
- [140] James F. Smith III. Quantum entangled radar theory and a correction method for the effects of the atmosphere on entanglement. page 73420A, Orlando, Florida, USA, May 2009.
- [141] C. W. Sandbo Chang, A. M. Vadiraj, J. Bourassa, B. Balaji, and C. M. Wilson. Quantum-enhanced noise radar. *Applied Physics Letters*, 114(11) :112601, March 2019.

- [142] Ulf Leonhardt. Quantum Physics of Simple Optical Instruments. *Reports on Progress in Physics*, 66(7) :1207–1249, July 2003. arXiv : quant-ph/0305007.
- [143] Sh Barzanjeh, M. Abdi, G. J. Milburn, P. Tombesi, and D. Vitali. Reversible optical to microwave quantum interface. *Physical Review Letters*, 109(13) :130503, September 2012. arXiv : 1110.6215.
- [144] Mark Bradshaw, Syed M. Assad, Jing Yan Haw, Si-Hui Tan, Ping Koy Lam, and Mile Gu. Overarching framework between Gaussian quantum discord and Gaussian quantum illumination. *Physical Review A*, 95(2) :022333, February 2017. arXiv : 1611.10020.
- [145] G. Romero, J. J. García-Ripoll, and E. Solano. Microwave Photon Detector in Circuit QED. *Physical Review Letters*, 102(17) :173602, April 2009.
- [146] Zheshen Zhang, Sara Mouradian, Franco N. C. Wong, and Jeffrey H. Shapiro. Entanglement Enhanced Sensing in a Lossy and Noisy Environment. *Physical Review Letters*, 114(11) :110506, March 2015.
- [147] Amelia Carolina Sparavigna. Poissonian Distributions in Physics : Counting Electrons and Photons. page 23, 2021.

Titre : Apport de la théorie de l'information quantique dans la perspective du radar quantique

Mot clés : radar quantique, illumination quantique, intrication, discord quantique, théorie de l'information

Résumé : Cette thèse propose une approche originale de la thématique du radar à illumination quantique en recourant à la théorie de l'information quantique pour étudier l'évolution des corrélations quantiques le long d'une chaîne radar. Ce mémoire propose d'abord un parallèle des différences et similitudes entre les théories du radar classique et du radar quantique en insistant sur les principes propres aux deux théories. Le radar à illumination quantique étudié utilise des paires de photons intriqués pour établir la présence ou l'absence d'un objet faiblement réfléchissant baigné dans un bruit thermique parasitant la détection. À partir de la mise en pa-

rallèle, les travaux se sont concentrés sur l'influence de l'environnement atmosphérique dans l'évolution de l'intrication du système de photons du radar et dans l'évolution des corrélations quantiques représentées par la discord quantique. L'objectif des recherches était de montrer un lien entre la discord quantique et la stratégie de détection binaire du radar quantique. Les résultats tendent à montrer ce lien même si des améliorations aux modèles composés pour l'étude seraient bienvenues. Cela permettrait notamment d'orienter la recherche vers des cas concrets pouvant bénéficier d'une application expérimentale du procédé d'illumination quantique.

Title: Contribution of the quantum information theory in the perspective of a quantum radar

Keywords: quantum radar, quantum illumination, entanglement, quantum discord, quantum information theory

Abstract: This thesis provides an original approach of the quantum illumination radar using the quantum information theory to study the evolution of quantum correlations in a radar system. We first propose a parallel between the classical radar theory and the quantum radar theory to determine similarities and differences insisting on the last point. The quantum illumination radar uses pairs of entangled photons to detect the absence of the presence of a low-reflecting object into a bright thermal background that disturbs the detection. Using the parallel between the radar theories, re-

search has been done on the atmospheric influence on the evolution of entanglement of the system of photons in the radar, and on the evolution of quantum correlations quantified by the quantum discord. The objective of research was to show a link between the quantum discord and the binary decision strategy of the quantum radar. Results suggest this link even if improvements should be required on the tested models. It should permit to study practical situations particularly if we think about a possible experiment on a quantum illumination protocol.