



**HAL**  
open science

# Développement d'une méthode de génération de trajectoire versatile pour la réalisation de pièces par procédés DED multi-axes à partir de surfaces facettisées

Lewis Andurand

## ► To cite this version:

Lewis Andurand. Développement d'une méthode de génération de trajectoire versatile pour la réalisation de pièces par procédés DED multi-axes à partir de surfaces facettisées. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Toulon, 2023. Français. NNT : 2023TOUL0001 . tel-04352335

**HAL Id: tel-04352335**

**<https://theses.hal.science/tel-04352335>**

Submitted on 19 Dec 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale 548 - Mer et Sciences  
Laboratoire COSMER - EA 7398  
(*Conception de Systèmes Mécaniques et Robotiques*)

Thèse en vue de l'obtention du grade de **Docteur en  
mécanique des solides, génie mécanique,  
productique, transport et génie civil**

présentée et soutenue publiquement par

**Lewis ANDURAND**

le 31 Août 2023

---

**Développement d'une méthode de  
génération de trajectoire versatile pour  
la réalisation de pièces par procédés  
DED multi-axes à partir de surfaces  
facettisées**

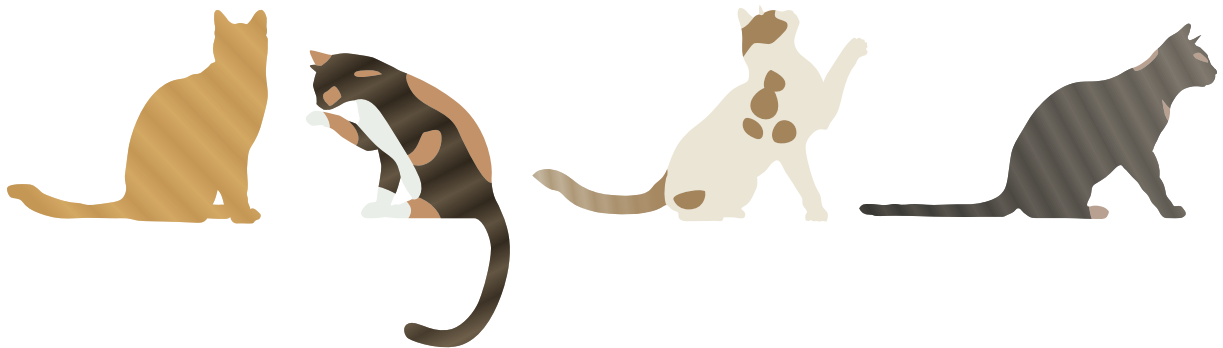
---

Devant le jury d'examen composé de

<b>VILLENEUVE François</b> , Professeur des Universités, Université Grenoble-Alpes	Président de jury
<b>SEGONDS Stéphane</b> , Professeur des Universités, Université de Toulouse III	Rapporteur
<b>PERNOT Jean-Philippe</b> , Professeur des Universités, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers	Rapporteur
<b>HUGEL Vincent</b> , Professeur des Universités, Université de Toulon	Directeur de thèse
<b>CAMPOCASSO Sébastien</b> , Maître de Conférences, Université de Toulon	Encadrant
<b>MUSEAU Matthieu</b> , Maître de Conférences, Université de Grenoble-Alpes	Encadrant



*À Caramelle, À Réglisse,  
À Nougat, À Grissette,  
Nos vaillants familiers à vibrisses,  
Nos adorables petites bêtes*





# Remerciements

Avant de tourner définitivement la page sur l'expérience de thèse, voici quelques mots de remerciements envers les personnes qui ont contribué, par leur soutien ou leur expérience, à l'aboutissement de ces travaux. Mon engagement a été motivé par ma curiosité et mon désir de repousser les limites de mes connaissances. L'ouverture d'esprit permet d'accepter le savoir indépendamment de son origine. Ainsi, il n'y a pas d'âge pour s'instruire, mais la lassitude de l'apprentissage marque le début du vieillissement.

Les premiers remerciements s'adressent aux membres du jury de thèse pour avoir consacré leur temps et leur expertise à l'évaluation du manuscrit : François Villeneuve pour son rôle de président de jury, ainsi que Stéphane Segonds et Jean-Philippe Pernot pour leur rôle de rapporteur. Votre intérêt pour les travaux réalisés et votre évaluation rigoureuse m'ont permis d'enrichir le contenu proposé. Je tiens aussi à remercier respectueusement Vincent Hugel pour sa fonction de directeur de thèse. Votre capacité à échanger avec pertinence sur des thématiques théoriques variées sont une preuve de votre qualité à diriger la recherche. Je vous suis reconnaissant pour la confiance et l'écoute dont vous avez fait preuve au cours de ces années de thèse en m'accordant l'autonomie qui m'a permis de dépasser les obstacles scientifiques.

Les deuxièmes remerciements s'adressent à ma famille, mes amis et autres proches, qui ont constitué un élément indispensable durant cette période ou durant les années précédentes. Tout d'abord, Maman et Papa, je ne saurais jamais être suffisamment reconnaissant pour l'éducation que vous nous avez apportée. Vous nous avez donné tous les ingrédients pour devenir responsables et intègres en nous apprenant la valeur des choses. Vous avez su trouver les mots justes à travers un dévouement indéfectible et un don de soi. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance pour votre intelligence pluridisciplinaire qui a su être une source d'inspiration pour remettre en question mes travaux de thèse, entre deux discussions sur la Nouvelle-Zélande.

Pépé Robert et Mémé Claudette, vous savez favoriser mon goût pour les sciences depuis mon plus jeune âge par votre richesse culturelle. Certes, je n'ai toujours pas totalement compris toutes les subtilités de l'hexafluorure d'uranium ou de l'entropie du rangement, mais vous êtes la clé de voûte qui me motive à comprendre ce que je fais. Mémé Yvette et Pépé Maurice, vous savez placer le bien être au cœur de vos réflexions. Cet atout est indispensable, et se changer les idées avec la cinématographie de Louis de Funès est efficace. Un grand merci aussi à tous mes frères et sœurs pour les moments que nous avons partagés et continuons à partager. Je vous assure une fois de plus que cette sauce curry est tombée toute seule. Je suis innocent. C'est vrai. Ce fut un concours de circonstances.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance aux amis et proches que j'ai pu côtoyer sur toutes ces dernières années pour les sources d'inspiration qu'ils ont été, dont entre autres Loïc, Gabriel, Florent, Vidushan, Jonathan, Quentin, Lotfi et Laura. Élodie, Josette, Bernadette et Madame Raphaëlle Galvez, un seul merci ne suffirait à équivaloir les valeurs précieuses que vous avez su me transmettre.

Dans le cas où ce manuscrit fournirait au lecteur les informations qu'il recherche, lui servirait à initier des réflexions vers des solutions bien plus pertinentes et efficaces que celles qui y sont proposées, ou lui permettrait de mettre en avant des erreurs de raisonnement dans le contenu, alors son rôle aura été rempli avec succès.

*Bien que la lumière nous éclaire, elle peut aussi éblouir et rendre invisibles des indices si proches. Tâche alors à nous de discerner les subtilités qui se dissimulent dans son éclat. Plutôt que d'y philosopher, l'individu féru d'énigmes cherchera sa source de lumière.*

# Sommaire

Liste des acronymes	5
Introduction	7
<b>1 Analyse bibliographique</b>	<b>13</b>
1.1 Procédés DED et génération de trajectoire	13
1.1.1 Fonctionnement des procédés DED	13
1.1.2 Générations de trajectoire par slicing	16
1.1.3 Générations de trajectoire alternatives	19
1.1.4 Optimisation de la qualité de recouvrement	24
1.1.5 Orientation de l’outil	28
1.1.6 Reconstruction de trajectoire	30
1.2 Réseaux et motifs	33
1.2.1 Notions de motif et de réseau	33
1.2.2 Construction d’un réseau de motifs	35
1.2.3 Motifs issus de TPMS	38
1.2.4 Construction d’une TPMS	41
1.3 Bilan de l’état de l’art	50
1.4 Apports de la thèse	55
<b>2 Trajectoires et paramétrisation</b>	<b>63</b>
2.1 Implication et paramétrisation	64
2.2 Paramétrisation du Schwarz Primitif	67
2.3 Algorithme de génération de trajectoire associé	76
2.4 Discussions sur la paramétrisation	88
2.4.1 Convergence et temps de calcul	88
2.4.2 Déformation et assemblage de trajectoires	90
2.4.3 Choix du format de la surface d’entrée	93
<b>3 Algorithme de génération de trajectoire</b>	<b>97</b>
3.1 Énoncé du problème	98
3.1.1 Constats et exigences	98
3.1.2 Énoncé formel	99
3.1.3 Hypothèses de départ de l’algorithme	101
3.2 Fichiers utilisés pour calibrer l’algorithme	103



---

3.3	Contraintes sur la surface d'entrée . . . . .	106
3.4	Algorithme complet de la méthode . . . . .	112
3.5	Outils mathématiques . . . . .	114
3.5.1	Intersection entre deux maillages STL . . . . .	114
3.5.2	Détection de collision sphère-triangle . . . . .	115
3.5.3	Interpolation linéaire sphérique . . . . .	116
3.5.4	Recherche d'un chemin eulérien sur un graphe . . . . .	118
3.6	Étapes de l'algorithme . . . . .	120
3.6.1	Détermination de la couche d'initialisation . . . . .	120
3.6.2	Sélections de voisinage . . . . .	123
3.6.3	Sous-graphes potentiels d'une nouvelle couche . . . . .	127
3.6.4	Reconstruction du graphe d'une nouvelle couche . . . . .	131
3.6.5	Détermination des vecteurs outil . . . . .	135
<b>4</b>	<b>Analyse des résultats et perspectives</b>	<b>139</b>
4.1	Simulations . . . . .	140
4.1.1	Liste des essais et conditions initiales . . . . .	140
4.1.2	Schoen hybride Wrapped Package et Primitif . . . . .	143
4.1.3	Schwarz Primitif . . . . .	145
4.1.4	Schwarz Gyroïde . . . . .	147
4.1.5	Schwarz Diamant . . . . .	149
4.1.6	Lidinoïde . . . . .	151
4.2	Analyse des simulations . . . . .	153
4.2.1	Discrétisation des couches à hauteur fixée . . . . .	153
4.2.2	Répartition des points sur la surface d'entrée . . . . .	156
4.2.3	Évolution du temps de calcul . . . . .	159
4.3	Versatilité de l'algorithme . . . . .	165
4.3.1	Propagation de trajectoire . . . . .	165
4.3.2	Complexités de surfaces . . . . .	167
4.3.3	Combinaison pièce-substrat . . . . .	169
4.3.4	Prédisposition à la rétroaction . . . . .	171
4.4	Anticipation de fabricabilité . . . . .	174
4.4.1	Enjeux et formulation du problème . . . . .	175
4.4.2	Limitation de la précision par dépôt de couches . . . . .	176
4.4.3	Premiers principes de fabricabilité . . . . .	179
4.4.4	Proposition de modèles de fabricabilité . . . . .	182
	<b>Conclusions</b>	<b>187</b>
	<b>Annexes</b>	<b>191</b>
A1	Cycle d'adoption d'une technologie . . . . .	192
A2	Étude des surfaces en algèbre géométrique . . . . .	194
A2.1	Historique . . . . .	194
A2.2	Outils Mathématiques . . . . .	199
A3	Cas particuliers de prédictibilité des couches . . . . .	218
A3.1	Contextualisation . . . . .	218
A3.2	Démonstration . . . . .	218

A4	Détermination de la borne supérieure de $d_P$ . . . . .	219
A4.1	Contextualisation . . . . .	219
A4.2	Approximation de la borne . . . . .	219
A5	Paramètres des simulations par paramétrisation . . . . .	223
A6	Subdivision du maillage initial . . . . .	224
A6.1	Contextualisation . . . . .	224
A6.2	Méthode de subdivision . . . . .	226
A7	Position relative à une enveloppe convexe 3D . . . . .	233
A7.1	Contextualisation . . . . .	233
A7.2	Démonstration . . . . .	234
A8	Liste des 12 cas d'intersection sphère-triangle . . . . .	242
A9	Fonction de couplage des nœuds des graphes . . . . .	243
A9.1	Construction . . . . .	243
A9.2	Démonstration . . . . .	244

<b>Bibliographie</b>	<b>247</b>
----------------------	------------



# Liste des acronymes

<b>ANR</b>	Agence Nationale de la Recherche
<b>CAO</b>	Conception Assistée par Ordinateur
<b>CLP</b>	<i>Crossed Layers of Parallels</i>
<b>CPP</b>	<i>Chinese Postman Problem</i>
<b>CUDA</b>	<i>Compute Unified Device Architecture</i>
<b>D</b>	<i>Diamond</i>
<b>DED</b>	<i>Directed Energy Deposition</i>
<b>F</b>	<i>Face-Centered-Cubic</i>
<b>FAO</b>	Fabrication Assistée par Ordinateur
<b>F-RD</b>	<i>F-type Graph - Rhombic Dodecahedra Graph</i>
<b>G</b>	<i>Gyroid</i>
<b>H</b>	<i>Hexagon</i>
<b>HG</b>	<i>Hexagon and Gyroid</i>
<b>IGES</b>	<i>Initial Graphic Exchange Specification</i>
<b>IPMS</b>	<i>Infinite Periodic Minimal Surface</i>
<b>I-WP</b>	<i>I-type Graph - Wrapped Package</i>
<b>LASER</b>	<i>Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation</i>
<b>M-FDM</b>	<i>Metal Fused Deposition Modeling</i>
<b>NASA</b>	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
<b>OBJ</b>	<i>3D Object</i>
<b>O,C-TO</b>	<i>Octahedra, Cuboctahedra Graph - Tetragonal Octahedon Graph</i>
<b>P</b>	<i>Primitive</i>
<b>PBF</b>	<i>Powder Bed Fusion</i>
<b>R</b>	<i>Rhombic</i>
<b>S</b>	<i>Square Graph</i>

<b>SAT</b>	<i>Separating Axis Theorem</i>
<b>SKP</b>	<i>SketchUp</i>
<b>SLERP</b>	<i>Spherical Linear Interpolation</i>
<b>STL</b>	<i>Stereolithography</i>
<b>STEP</b>	<i>Standard for Exchange of Product Data</i>
<b>T</b>	<i>Tetragonal</i>
<b>TPMS</b>	<i>Triply Periodic Minimal Surfaces</i>
<b>TSP</b>	<i>Travelling Salesman Problem</i>
<b>Y</b>	<i>Y-type Graph</i>
<b>WAAM</b>	<i>Wire and Arc Additive Manufacturing</i>
<b>WP-hybride</b>	<i>Wrapped Package and Primitive Hybrid</i>

# Introduction

Famille de procédés apparue au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, la fabrication additive a été évaluée comme prometteuse pour accroître les possibilités de production et de réparation de pièces mécaniques. À ses débuts, cette technologie s’est distinguée par ses avantages en matière de prototypage rapide de pièces en polymère, réalisées par passes directes de l’outil. Puis, les exigences en matière de résistance mécanique ont amené au développement de nouvelles sous-familles de procédés adaptés aux pièces métalliques.

Les procédés de type *Directed Energy Deposition* (DED) sont une sous-famille relative à l’obtention de pièces métalliques par dépôt de matière sous énergie concentrée. Pour de tels procédés, la source d’énergie et le système d’apport de matière sont couplés, ce qui les rend combinables à des robots multi-axes. Ainsi, les procédés DED sont des candidats prometteurs pour la réalisation de pièces à la structure complexe. En particulier, la technologie *Wire and Arc Additive Manufacturing* (WAAM) permet de déposer des matériaux en fusion pour construire des pièces métalliques de grande taille ou pour réparer des pièces usées. C’est dans ce cadre que s’inscrit le projet BeShape financé par l’Agence Nationale de la Recherche (ANR) (numéro ANR-18-CE10-0014-01). Plusieurs travaux de recherche y ont été conduits pour concevoir des pièces métalliques allégées à travers deux approches complémentaires : la détermination de motifs de remplissage de volume et la génération de trajectoires associées. Les motifs de remplissage retenus pour le projet sont les surfaces minimales tripériodiques. Cette thèse se focalise sur la génération de trajectoire.

La génération de trajectoire fait partie intégrante des défis de la fabrication additive dans le contexte de la transition vers la quatrième révolution industrielle. Le concept d’“industrie 4.0” évoqué puis décrit au Salon Mondial de la Technologie Industrielle de la foire de Hanovre en Allemagne entre 2011 et 2013 a mis en avant la nécessité d’intégrer des outils informatiques et mécatroniques à la fabrication additive [1] afin d’éviter ou retarder la phase de décroissance de maturation de cette technologie (**Annexe A1**).

Depuis près d’une décennie, la recherche dans le domaine de la fabrication additive a conduit à des avancées significatives dans le développement des outils numériques, mais des défis persistent. Ces derniers peuvent être classés en quatre catégories inter-dépendantes :

- Le défi “*Hardware*” ;
- Le défi “*Software*” ;
- Le défi “*Matériaux*” ;
- Le défi “*Services*”.

### 1. Le défi “*Hardware*” :

Les procédés de fabrication additive peuvent être limités par une vitesse de fabrication lente, et un espace de travail réduit, ce qui restreint certaines possibilités d’application. En effet, les dimensions des machines de fabrication additive peuvent limiter la taille des pièces pouvant être produites, et la vitesse de production peut être réduite par la taille et la complexité de la pièce [1]. Enfin, certaines technologies de fabrication additive présentent des limitations en termes de résolution et de précision, ce qui peut influencer leur efficacité pour certaines applications de haute précision. Les robots utilisés pour la fabrication additive multi-axes peuvent aussi présenter certaines limitations : portée du robot, ainsi que la précision et la répétabilité des mouvements. Cela peut rendre difficile le dépôt de matériau sur des surfaces en surplomb, ou bloquer l’accès à certaines zones de la pièce. Enfin, la dynamique du robot peut affecter la qualité de la pièce produite en termes de rugosité de surface et d’homogénéité. Des avancées sont constamment réalisées dans les domaines de la conception mécanique, du contrôle de robots et des algorithmes de planification de mouvement.

### 2. Le défi “*Software*” :

Les limitations numériques sont essentiellement liées à la complexité des logiciels de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) et de Fabrication Assistée par Ordinateur (FAO) utilisés pour la conception et la fabrication des pièces. La conception de pièces pour la fabrication additive peut être complexe et implique une compréhension approfondie des propriétés des matériaux et des contraintes de fabrication. De plus, la génération de trajectoires de fabrication nécessite des algorithmes sophistiqués pour tenir compte des contraintes physiques du processus de fabrication additive. Enfin, la compatibilité entre les différents logiciels de CAO et de FAO n’est pas systématique, ce qui peut rendre la conception et la fabrication de pièces plus difficiles et plus longues. Les routines de génération associées offrent peu de souplesse sur la modification locale de trajectoire [1]. Les avancées se centrent sur le développement d’outils numériques plus accessibles et efficaces, dont des routines d’évitement d’obstacles au cours du dépôt.

### 3. Le défi “*Matériaux*” :

Les procédés de fabrication additive utilisent des gammes de matériaux limitées, ce qui peut rendre difficile la production de certaines pièces spécifiques pour des applications dans les industries navale, automobile et aéronautique [2]. Les matériaux majoritairement employés sont des nuances de métaux ou de polymères. Des progrès sont en cours dans la maîtrise d’autres matériaux, notamment pour le verre et le béton, ce qui améliorera la variété des applications pour la fabrication additive dans les années futures. Par ailleurs, les matériaux d’apport, sous forme de poudre ou de fil, sont bien plus onéreux que leur équivalent sous forme de bloc brut [2]. Cependant, la baisse de leur coût les rend plus abordables et accessibles. Enfin, chaque nouveau matériau nécessite de connaître sa loi de comportement pour calibrer les paramètres physiques - principalement cinématiques et thermiques - du robot de fabrication. Cette calibration peut être chronophage et coûteuse. Ce défi est progressivement résolu par l’augmentation des familles de paramètres disponibles et le développement de méthodes d’adaptation des paramètres en temps réel.

### 4. Le défi “*Services*” :

La fabrication additive offre des avantages considérables à l’industrie manufacturière, allant au-delà de la conception et de la production, mais une insuffisance en termes de support technique peut perturber l’intégration de la fabrication additive dans l’industrie mécanique [3]. En effet, peu de services en fabrication additive proposent une réponse adaptée aux besoins spécifiques de production au niveau des exigences de coût, de délai et de qualité imposés. La multiplication des services de fabrication additive tendrait à proposer une réponse adaptée aux cahiers des charges spécifiques de production en termes de cadence et de fiabilité. Les systèmes de courtage et les outils d’aide à la prise de décision sont des exemples d’alternative [4] et représentent un enjeu pour atteindre un compromis entre performance et intégration.

La génération de trajectoire pour les procédés DED, qui fait partie du défi “*Software*”, est concernée par ces difficultés. L’intégration de méthodes de génération de trajectoire sur des logiciels de CAO et de FAO prenant en compte les aspects “*Hardware*” et “*Matériaux*” et permettant la fabrication de pièces à la géométrie de plus en plus élaborée constituent un enjeu majeur. Les verrous scientifiques associés sont les suivants :

1. L’obtention de trajectoires d’outil fluides et ininterrompues pour la production de pièces présentant une qualité de surface et une précision dimensionnelle élevées ;
2. Le développement d’algorithmes performants de génération de trajectoires pour des géométries complexes et des données volumineuses tout en réduisant le temps de traitement ;
3. L’intégration des propriétés des matériaux, des paramètres de la machine de fabrication et l’évitement des collisions outil-pièce dans le processus de génération de trajectoires pour optimiser la qualité de la pièce et réduire les défauts, notamment la porosité, la distorsion et les contraintes résiduelles ;
4. La conception de stratégies qui prennent en compte une gamme de différents matériaux et de conditions de dépôt variables pour une même pièce.

Les objectifs de cette thèse sont d’apporter une méthode de génération d’une première trajectoire DED systématique et robuste, sur des surfaces sans épaisseur et substrats à la topologie quelconque, pourvu que leurs informations soient stockées sous un format numérique facettisé, et de proposer un moteur de génération de trajectoire sur de telles surfaces pouvant être utilisé quelle que soit la configuration pièce-substrat pour générer des couches à hauteur constante. La méthode proposée doit prendre en charge des surfaces, c’est-à-dire des pièces dont l’épaisseur en tout endroit se limite à celle d’un cordon.



La résolution de ces objectifs permet de recouvrir par des couches toute nature de surface en utilisant une méthode qui offre plus de souplesse dans la reconfiguration des chemins de recouvrement. Cela offre une capacité de prise en charge des contre-indications de trajectoire issues du matériau et de la machine. Il s'agit donc d'un apport au défi *software* possédant des perspectives aux défis *hardware* et *matériaux* de la fabrication additive.

La méthode de génération de trajectoire développée dans cette thèse apporte donc une série de plus-values dans le domaine de la fabrication additive :

1. Elle permet d'obtenir une trajectoire respectant le critère de distance euclidienne constante entre l'outil et la pièce lors du dépôt compatible avec le maintien de conditions de dépôt invariantes pour les procédés DED, sans générer de matériau support et maximisant la continuité des couches. Le respect d'une distance euclidienne constante pour les procédés DED garantit des conditions de dépôt fixes. Elle correspond à la distance physique réelle la plus courte entre l'outil et la pièce ;
2. Elle est applicable sur l'entièreté d'une pièce, ou dans une région délimitée uniquement. Cela permet de considérer toute modification éventuelle de trajectoire par rétroaction pour la prise en charge des contre-indications issues de l'outil (collisions pièce-outil), de la machine (limitations cinématiques ou dynamiques locales) et du matériau (dérive thermique) au cours de la fabrication ;
3. Elle est utilisable aussi bien pour de la fabrication que pour la réparation de pièce, indépendamment des topologies de la pièce et de la rupture ;
4. Elle anticipe toute adaptation ultérieure pour la fabrication de volumes remplis quelconques garantissant le maintien d'une distance euclidienne pièce-outil.

Le manuscrit de thèse se compose de quatre parties. Tout d'abord, le **Chapitre 1** intitulé "**Analyse bibliographique**" présente une synthèse de la littérature pour mettre en évidence l'état de la génération de trajectoire pour la fabrication additive et introduire les surfaces minimales tripériodiques - plus communément appelées *Triply Periodic Minimal Surfaces* (TPMS) - avant de décrire le positionnement de la thèse vis-à-vis de l'état de l'art. Ce chapitre permet de mettre en avant les enjeux du moteur de génération de trajectoire pour le calcul de chemins sur des surfaces à la géométrie élaborée.

Ensuite, le **Chapitre 2 "Trajectoires et paramétrisation"**, met en avant l'importance de la connaissance des voisinages au cours de la génération de trajectoire. Il permet ainsi de justifier le choix du format facettisé des surfaces d'entrée pour la méthode de génération de trajectoire. Ce type de format, issu de la géométrie discrète, permet l'accès à l'ensemble des informations de topologie de la pièce dans le voisinage de travail lors du processus de génération de trajectoire. Une méthode de génération paramétrisée appliquée à un motif de Schwarz *Primitive* (P), qui est une TPMS, est présentée pour appuyer les raisonnements.

Le **Chapitre 3 “Algorithme de génération de trajectoire”** présente en détail la méthode de génération de trajectoire en décrivant les différentes étapes, depuis l’adaptation du maillage de la surface d’entrée jusqu’au calcul des points des couches successives associés chacun à un vecteur outil. Ces étapes détaillent la détermination de la couche d’initialisation, les sélections de voisinage, ainsi que l’obtention des sous-graphes des nouvelles couches et leur reconstruction à partir de ces sous-graphes.

Plusieurs simulations sur des surfaces minimales tripériodiques sont ensuite présentées au **Chapitre 4 “Analyse des résultats et perspectives”** pour illustrer la robustesse de la méthode et les types de géométries prises en charge. Des simulations supplémentaires mettent en évidence les champs d’application de la méthode, notamment sur la prise en charge de multiples directions de propagation, la fabrication de pièces en plusieurs entités non connexes, la priorisation des régions pour le déclenchement du calcul de trajectoire, la réparation ou la fermeture de pièces et l’application à plusieurs substrats non connexes de forme arbitraire. Ce dernier chapitre contient une analyse des performances de la méthode, afin d’explorer les axes d’amélioration. Des pistes y sont présentées concernant la prédiction rapide de la viabilité de trajectoire avant même son calcul.



# Chapitre 1

## Analyse bibliographique

L'analyse bibliographique est constituée de trois sections. Tout d'abord, une synthèse de la littérature sur la génération de trajectoire pour la fabrication additive permet de faire l'état des lieux sur les méthodes disponibles, leurs champs d'applications et leurs limitations. Puis, une deuxième section est centrée sur la notion de motif de remplissage. Elle présente les motifs issus de la littérature, mais détaille aussi leur origine. Cette section détaille aussi la manière d'obtenir un motif répétable ou non, et, plus particulièrement, la méthode d'obtention d'une *Triply Periodic Minimal Surfaces* (TPMS). Enfin, une troisième section met en avant les apports de la thèse. En complément de ce chapitre, une présentation succincte des concepts de base de l'étude mathématique des surfaces est fournie à l'**Annexe A2**, pour sensibiliser sur les possibilités et implications de ces dernières. Cela permet en outre de justifier certains choix effectués au cours de la thèse.

### 1.1 Procédés DED et génération de trajectoire

La fabrication additive est une famille de plusieurs procédés utilisés pour créer des pièces mécaniques par ajout de couches successives sur la pièce en cours de fabrication. Ces procédés sont divisés en sous-catégories en fonction de la nature du matériau d'apport et de la source d'énergie utilisée pour fusionner le matériau d'apport avec la pièce [5]. La fabrication additive métallique est une sous-famille de la fabrication additive. On y distingue notamment les procédés *Directed Energy Deposition* (DED), les procédés de type fusion sur lit de poudre, plus communément désignés par l'acronyme *Powder Bed Fusion* (PBF), et les procédés de type dépôt de filament métallique fondu, désignés par l'acronyme *Metal Fused Deposition Modeling* (M-FDM). Cette section présente le fonctionnement des procédés DED et les outils de génération de trajectoire associés issus de la littérature.

#### 1.1.1 Fonctionnement des procédés DED

Les procédés DED (**Figure 1**) sont caractérisés par un matériau d'apport sous forme de poudre ou de fil. Dans de tels procédés, le système d'apport de matière est couplé avec la source d'énergie [6,7]. Les différents procédés DED sont classés selon la forme du matériau d'apport (poudre ou fil) et la nature de la source d'énergie. Le but ici n'est pas de présenter tous les procédés DED mais uniquement de mettre en avant les raisons de leur utilisation par rapport à d'autres procédés de fabrication additive.

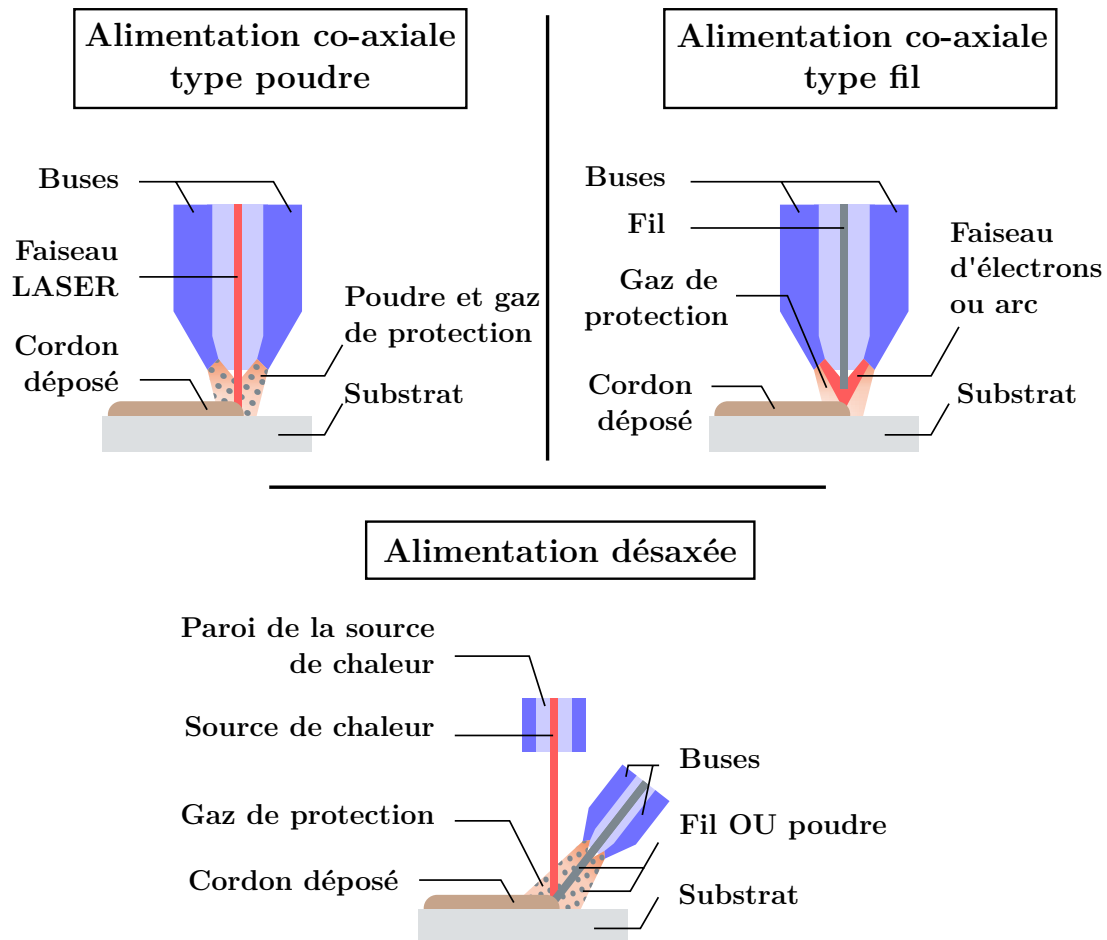
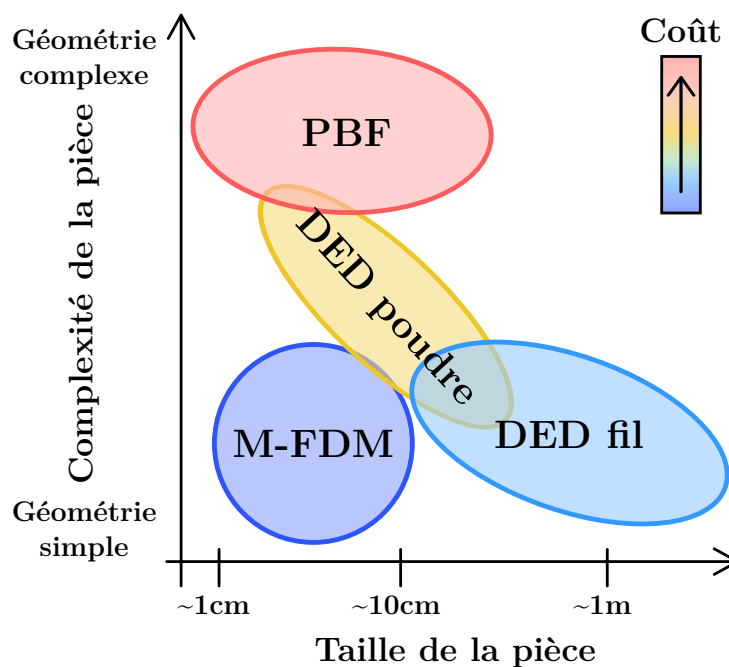


Figure 1 – Fonctionnement des procédés DED

Pour les procédés DED, la source d'énergie est une source de chaleur. Aussi, dans la littérature, les deux expressions sont utilisées. Dans le cas des procédés DED, cette source de chaleur est soit un faisceau *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (LASER), soit un faisceau d'électrons, soit un arc électrique ou plasma. Le système d'apport et la source de chaleur sont immobiles l'un par rapport à l'autre et mis en mouvement par le même mécanisme, d'où la désignation de "couplage". Une conséquence directe du couplage est que les procédés de type DED sont plus facilement combinables avec des technologies multi-axes [5]. En particulier, les procédés DED sont beaucoup plus flexibles en termes de limitations de l'espace de travail que les procédés PBF [8]. De plus, le coût des procédés DED est moins élevé que les procédés PBF, et peut être équivalent à celui des procédés M-FDM si le matériau d'apport est sous forme de fil (**Figure 2**). Enfin, la taille des pièces obtenables peut être plus élevée que les autres procédés dans le cas où le matériau d'apport est du fil. Des analyses économiques sur l'entièreté de la chaîne de production ont mis en avant que les procédés DED sont économiquement rentables si les pièces sont suffisamment grandes pour que leur fabrication nécessite une quantité de matériau d'apport au-dessus d'un seuil minimal de rentabilité [9,10]. Plus précisément, la technologie WAAM est un procédé DED par apport de fil qui a un grand potentiel de rentabilité coût-efficacité [11].

La complexité réduite des pièces qu'il est possible d'obtenir par utilisation de procédés DED s'explique essentiellement par le manque d'outils numériques de FAO adaptés pour la fabrication multi-axes, alors que les procédés PBF reposent essentiellement sur de la fabrication en niveaux de Z, et donc les trajectoires reposent simplement sur des adaptations de méthodes de slicing issues de la fabrication soustractive. De plus, le slicing rend les procédés PBF difficilement adaptables pour la réparation de pièces, là où tout comme les procédés M-FDM, les procédés DED peuvent être utilisés soit pour la fabrication de pièces mécaniques entières, soit pour la réparation de pièces endommagées [12].



**Figure 2** – Comparatif qualitatif des procédés de fabrication additive métallique [13]

Au cours des dernières décennies, la recherche en fabrication additive a mis en avant les nombreux verrous à résoudre pour les rendre intéressants pour une quelconque utilisation industrielle d'un point de vue économique et au niveau des performances mécaniques. Dans le cas des procédés DED, la qualité métallurgique des pièces et l'automatisation des procédés ont été étudiées [14,15,16]. Dès lors, les paramètres influençant la qualité de dépôt ont été mis en avant [17] : une pièce mécanique est considérée comme qualitativement viable si sa microstructure, son état de surface et l'écart géométrique entre la pièce réalisée et la pièce idéale à fabriquer respectent les intervalles de tolérance définis pour de tels procédés. En général, l'homogénéisation de la microstructure de la pièce est la clé pour garantir une optimisation de la qualité mécanique d'une pièce donnée. Ainsi, la recherche des dernières années s'est essentiellement focalisée sur l'identification de paramètres garantissant des conditions de dépôt constantes sur toute la pièce fabriquée dans le but de minimiser les variations des propriétés physiques intrinsèques pouvant être à l'origine d'usure prématurée puis de rupture mécanique.

Chaque procédé DED est sujet à ses propres paramètres pour garantir des conditions de dépôt constantes. On peut notamment citer l'influence des paramètres cinématiques sur la qualité géométrique des cordons dans le cas du WAAM [18]. L'utilisation d'un ratio constant entre la vitesse d'apport de fil et la vitesse d'avance de l'outil par rapport à la pièce en cours de fabrication tend à homogénéiser la géométrie des cordons et dépend du type d'alliage utilisé pour la fabrication. L'utilisation d'un tel ratio constant semble avoir été mentionnée pour la première fois en 2010 [19]. Depuis, ce ratio a été largement utilisé dans la recherche sur le procédé WAAM [20,21,22,23].

D'autres paramètres communs à tous les procédés DED influencent la microstructure locale de la pièce : les transferts thermiques et l'évolution de la température au cours du procédé, ou encore les dépôts et arrêts de dépôt sujets à leurs propres conditions cinématiques et thermiques. De même, les intersections de cordons nécessitent leur propre ajustement de paramètres, car ils sont lieu de chevauchement de cordons [24]. La distance entre l'outil de dépôt et la pièce en cours de fabrication a une influence notable sur les conditions de dépôt [25,17,26]. Garder une telle distance constante au cours de la fabrication permet d'aider à garder une microstructure métallique homogène sur toute la pièce. Cette distance est euclidienne, et constitue une contrainte de position lors du calcul de la trajectoire, alors que les contraintes cinématiques, comme le ratio entre la vitesse d'apport de fil et de vitesse relative de l'outil par rapport à la pièce dans le cas du WAAM sont indépendantes de la trajectoire et peuvent être ajustées après son calcul.

### 1.1.2 Générations de trajectoire par slicing

Contrairement à la fabrication soustractive, la fabrication additive a été automatisée dès ses premières heures [27,28]. Les premiers systèmes de dépôt reposaient sur des technologies 3-axes (Figure 3). La pièce était alors fabriquée par dépôt de matière sur des plans parallèles successifs, d'où l'appellation "fabrication par niveaux de Z".

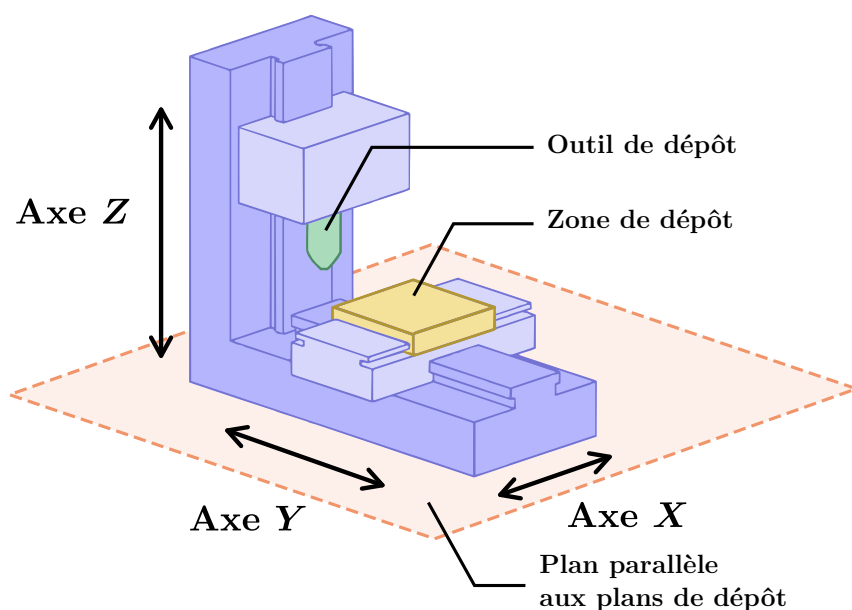
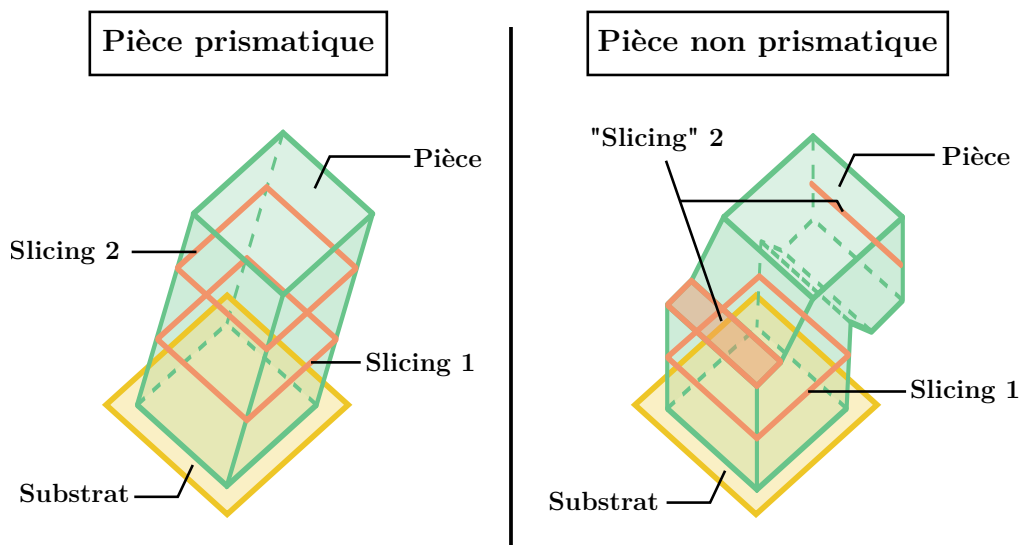


Figure 3 – Fonctionnement d'une technologie additive 3-axes

Parmi les trois axes de telles machines, deux permettent de déposer dans le plan parallèle au substrat initial tandis que le dernier permet de décaler verticalement le plan de dépôt. Les premières trajectoires générées sont adaptées uniquement en 2D, et sont relativement basiques : lignes parallèles juxtaposées et carreaux [20]. Néanmoins, l'ajout d'interpolation permet de remplir de manière continue des pièces dans les différents plans successifs de dépôt. Pour diversifier les types de pièces, des méthodes de slicing ont rapidement été développées. Le substrat initial, plan, est choisi numériquement de sorte à optimiser le temps de fabrication et la précision de dépôt [28,29]. En effet, la précision entre les cordons déposés et la pièce initiale espérée dépend de la distance entre les plans parallèles de dépôt (**Figure 3**) et de la géométrie locale de la pièce [30,31].

Si ces méthodes ont amené de premières spécifications d'automatisation du processus de génération de trajectoire, le besoin de pièces plus complexes s'est fait ressentir [32]. La fabrication additive, abordée par une logique 3-axes, se retrouve alors bridée par l'incapacité de déterminer des trajectoires outil autrement que par des méthodes de slicing [33]. Ces techniques adaptées pour les robots de fabrication 3-axes se révèlent limitées pour de la fabrication multi-axes où le nombre de degrés de liberté est strictement supérieur à trois. En effet, le slicing réduit grandement la possibilité de design des pièces fabricables [34,35,36] car l'ajout de matériau support est nécessaire et son retrait après fabrication peut être compliqué car inaccessible. C'est le cas pour les machines usuelles 3-axes de manière générale, mais aussi pour certaines machines multi-axes selon la morphologie de la pièce, à moins d'utiliser des machines hybrides combinant ajout et retrait de matière de manière alternée au cours de la fabrication. À cela s'ajoute l'impossibilité de fabriquer des surfaces localement assimilables à des plans normaux à la direction de slicing [36]. De plus, dans le cas des procédés DED, le besoin de conserver une distance euclidienne constante peut rendre insuffisante l'utilisation de slicers à niveaux de Z constants dans le cas où la pièce n'est pas assimilable aux parois d'un prisme droit (**Figure 4**).



**Figure 4** – Slicing des parois latérales d'un prisme droit et d'une pièce non prismatique



Aussi, pour augmenter les possibilités de design, des techniques de slicing adaptatif ont été développées pour amener à davantage de possibilités en termes de design pour les procédés DED [37] [38,39,40]. Le slicing est effectué en cherchant la direction idéale des plans parallèles en coupant la pièce en plusieurs entités correspondant à des géométries simples aptes à être tranchées pour la détermination des couches de la trajectoire [39]. Le slicing adaptatif pose les prémisses des besoins des logiciels, et utilise des surfaces triangulées de type *Stereolithography* (STL). Une étape de scanning de la pièce avant le calcul de la trajectoire, et une adaptation de la hauteur de couche localement permettent d'obtenir des couches qui minimisent l'imprécision due à l'effet en escalier [41].

Cependant, les géométries restent trop restrictives car les pièces sont composées d'un ensemble d'entités basiques. La direction de propagation est supposée unique dans chaque entité, le substrat initial est supposé connexe et plan, et le slicing se fait par des plans parallèles [28,42,35]. Ainsi, les pièces ont une géométrie fermée et ne présentent pas de trous. Il n'y a pas ou peu d'embranchements, et pas de jonction [39]. Les couches formées sont continues, et correspondent à des boucles fermées sans croisement. De telles courbes sont appelées en Mathématiques "courbes de Jordan". Enfin, les couches calculées ne respectent pas le critère de distance euclidienne constante nécessaire pour conserver une qualité géométrique dans le cas de procédés DED [17].

L'apparition du slicing uniforme offre des possibilités supplémentaires pour des régions en porte à faux et à hauteur de couche variable [43,44]. Ce nouveau type de slicing, d'abord limité aux formats facettisés, est adaptable aux formats paramétrés [43]. Le slicing par empilement orthogonal [45] marque une des premières variantes aux plans parallèles à propagation unidirectionnelle en proposant une optimisation permettant d'empiler les couches dans des directions différentes selon la région de la pièce pour optimiser les propriétés mécaniques (Figure 5). Il constitue une des premières fois où l'optimisation de la résistance mécanique de la pièce est prise en compte lors de la phase de génération de la trajectoire en choisissant des directions de plans minimisant les contraintes résiduelles.

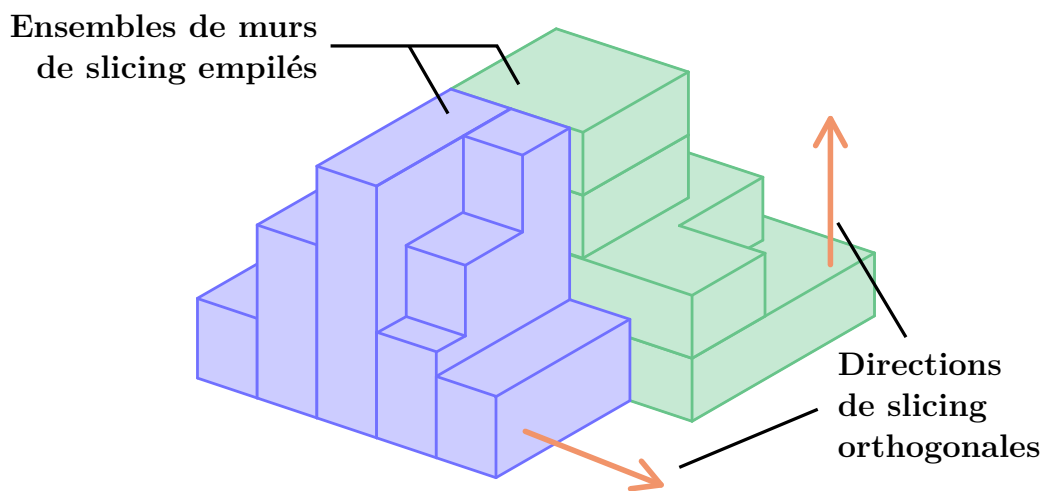
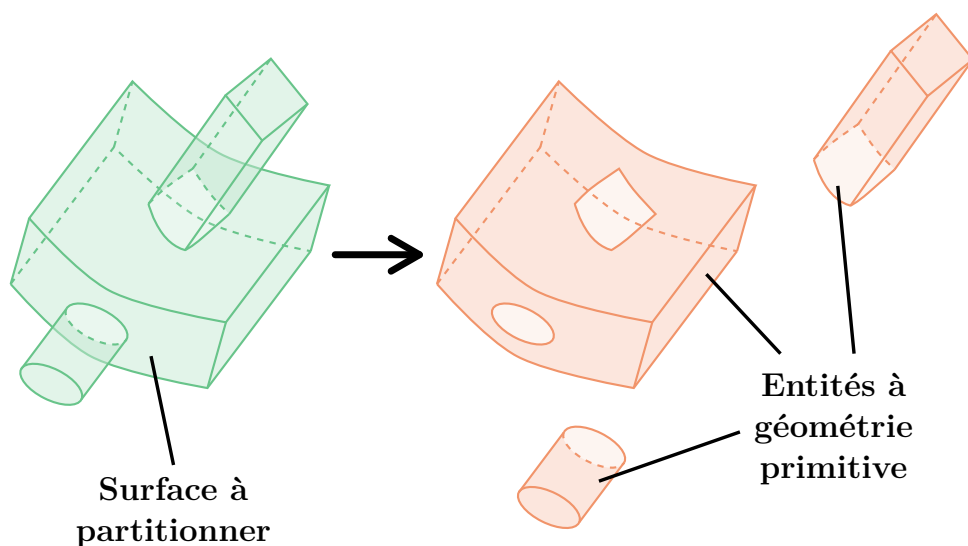


Figure 5 – Slicing orthogonal

### 1.1.3 Générations de trajectoire alternatives

Le slicing, qu'il soit adaptatif ou non, est régi par des contraintes en termes de libertés géométriques ou de format d'entrée, comme expliqué précédemment. Néanmoins, l'utilisation se limite exclusivement à des plans parallèles et ne permet pas de générer de trajectoire pour des pièces à enchevêtrement important, comportant des ouvertures et des zones non connexes. Des méthodes de génération de trajectoire alternatives ont alors été développées pour étendre les possibilités d'application de la fabrication additive.

Tout d'abord, des travaux sur des méthodes de partition en entités (**Figure 6**) de plus en plus élaborées ont été développées [43,46,47]. Une méthode de partition rapide et optimisée basée sur la construction de polygones judicieusement choisis à partir de nuages de points initial permet d'envisager la reconstruction des courbes de trajectoire sur différentes entités [48,46], et la décomposition des routines d'intersection en plusieurs tâches simples permet d'automatiser davantage les calculs [49].



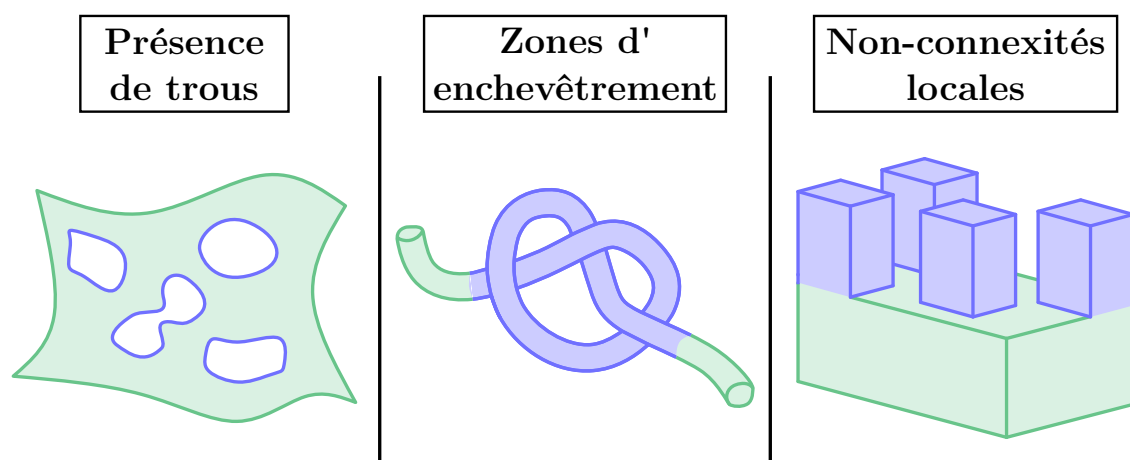
**Figure 6** – Partition par constats géométriques

De manière plus générale, l'étape de partition est abordée sous forme d'un problème multi-variable, en utilisant des approches non linéaires. Cette approche, d'abord utilisée pour des robots de peinture [50], ne nécessitait pas de suivre avec précision la surface de travail car la seule contrainte pour ce type de tâche est de recouvrir les parois extérieures de la pièce. Des améliorations ultérieures ont permis d'adapter cette approche à de la génération de trajectoire DED [29,46,51]. Cependant, une des grandes limites du découpage en entités réside dans la nécessité que la pièce puisse être partitionnée en entités [39]. Dans le cas où cela n'est pas possible, des constats sur la courbure de Gauss permettent d'atteindre un découpage [40], mais cela démultiplie les régions, et rend difficile la détermination de couches dans les régions partitionnées lorsque les variations de profil sont importantes.

Ensuite, des méthodes ont été envisagées pour optimiser les méthodes de calcul de trajectoire et les formats pris en charge. L'adaptation des méthodes à des surfaces numériques paramétrisées [52] apporte une contribution aux types de fichiers pris en charge réduits jusque-là aux surfaces maillées [38] tandis que l'utilisation d'arbres de parcours de type octree apporte quelques améliorations en termes de convergence des algorithmes [53].

Historiquement, les premiers formats pris en charge ont été des formats discrétisés. Dans de tels formats numériques, les surfaces sont stockées sous forme de facettes polygonales décrites par un ensemble de points dont les sommets sont reliés par des arêtes. Le format le plus utilisé est le format STL. De tels formats sont utiles pour décrire des géométries de pièces de manière systématique, mais nécessitent un stockage en mémoire de plus en plus important dès lors où la géométrie doit être décrite avec précision : davantage de polygones sont nécessaires pour décrire la surface. Des méthodes de génération de trajectoire basées sur formats paramétrés [54,55,56], où les surfaces sont décrites par des équations, ont ensuite été développées. Cependant, de tels formats permettent de solutionner ces problèmes de mémoire au prix de la complexité des surfaces envisageables. Les équations utilisées décrivent un ensemble de géométries primitives qui constituent la surface totale.

Des méthodes d'analyse statistique permettent de choisir une direction préférentielle de slicing minimisant le besoin d'adapter les hauteurs de slicing [57]. Le slicing est aussi ajusté pour des surfaces dont l'intérieur est renforcé par des structures de remplissage [58]. Mais, une fois de plus, ces optimisations ne sont appliquées qu'à des géométries relativement simples dont les tranchages se réduisent à des contours 2D uniquement [52,53,58]. De plus, le maintien de la distance euclidienne n'est pas garanti pour des géométries complexes, car les couches sont supposées empilées dans une direction unique [59]. Enfin, l'analyse statistique ne tient compte que des directions de tranchage, et en aucun cas de la forme des couches [57]. En somme, les géométries envisageables pour lesquelles le critère de distance euclidienne est garanti sont restreintes à des formes relativement primitives, ne comportant pas d'ouvertures, ne comportant pas d'embranchement et dont tout voisinage peut être considéré comme connexe, c'est-à-dire constitué d'un seul morceau (**Figure 7**).



**Figure 7** – Sources de complexité d'une géométrie

Ainsi, en cas de variation du profil de courbure sur l'intercouche, la distance n'est plus nécessairement vérifiée. De plus, le slicing est effectué en partant d'un substrat plan et, a priori, unique : cette restriction réduit davantage les cas d'application des trajectoires calculées. Ces méthodes s'avèrent fonctionnelles si chaque couche de la trajectoire correspond à une courbe fermée et sans boucle, donc des courbes de Jordan.

Dans le but d'adapter les méthodes de génération de trajectoire aux procédés DED et ainsi garantir une homogénéité des conditions de dépôt [26], des techniques de génération de trajectoire à hauteur de couche constante ont été développées. Diverses méthodes se sont inspirées du slicing adaptatif pour obtenir de telles trajectoires. L'idée consiste à optimiser les lieux de tranchage non pas pour éviter l'effet en escalier [52,38], mais pour maîtriser la distance entre les points de couches directement superposées [37,60]. Par conséquent, en choisissant judicieusement les valeurs de tranchage localement, cela aboutira à de la génération à hauteur de couche constante.

Des variantes reposent sur l'utilisation d'une équation bi-paramétrée de la surface à fabriquer pour calculer un chemin de dépôt respectant le critère de distance euclidienne via une optimisation numérique [61,62]. La direction de propagation des couches se fait par considérations à la fois locales et globales, car le critère de distance est évalué localement mais en s'appuyant sur des réseaux de courbes globaux dont la forme détermine la possibilité d'obtention de points sur la trajectoire et la qualité de convergence.

Cependant, cela nécessite de connaître l'équation de la surface à fabriquer pour effectuer une propagation locale, ce qui n'est pas garanti dans le cas général [63], surtout si la pièce est issue de l'assemblage de formes primitives combinées par opérations booléennes. De plus, ce type de génération de trajectoire ne peut être appliqué qu'à des structures particulières puisque la forme bi-paramétrée nécessaire doit être telle qu'un paramètre évolue dans la direction d'empilement des couches supposée unique, et l'autre paramètre doit évoluer dans des directions localement parallèles aux cordons déposés.

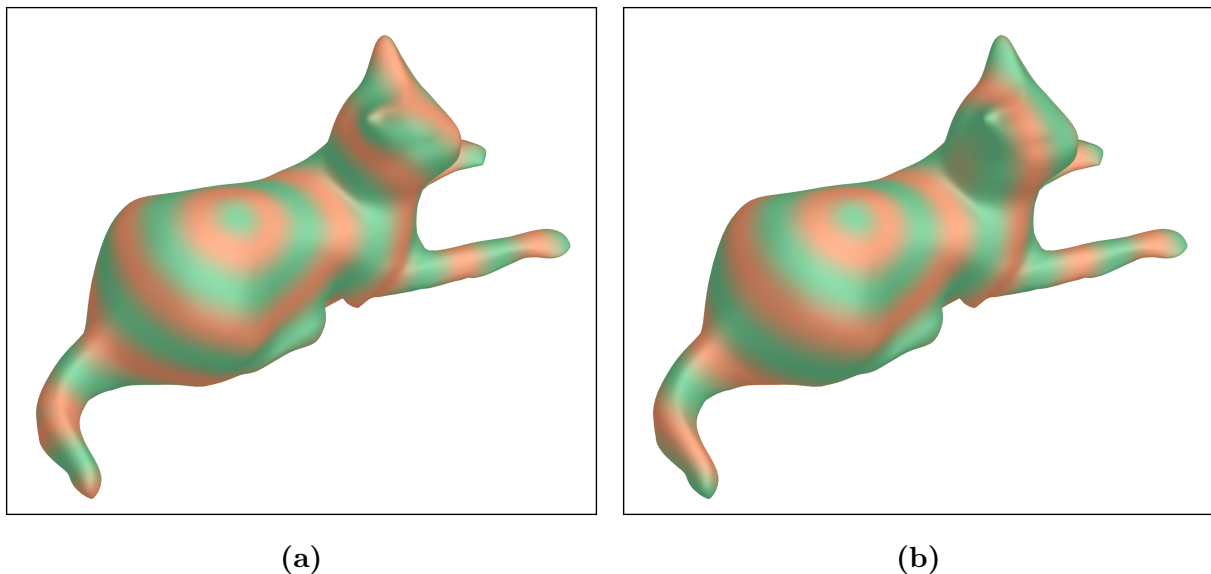
Ainsi, la convergence de recherche de points et la discrétisation du chemin obtenu sont fortement dépendantes de la paramétrisation choisie, et la paramétrisation est elle-même dépendante de la forme et de la position du substrat. Dès que la forme de la surface, du substrat, ou leur position relative varie, une nouvelle méthode doit être développée sans que la propagation ne soit garantie. De plus, les surfaces 2D à fabriquer par procédés additifs sont souvent complexes et éventuellement issues de l'assemblage de structures différentes qui ne sont pas nécessairement décrites par une équation globale. À cela s'ajoute le fait que la direction d'empilement n'est pas unique dans le cas général puisque la surface à fabriquer peut comporter des jonctions. Ces jonctions, qui constituent un lieu de connexion entre éléments d'une pièce, sont aussi un lieu potentiel de fortes variations d'orientation de l'outil de dépôt.

Enfin, l'utilisation de fonctions d'optimisation pour la recherche de points est extrêmement sensible à la topologie de la pièce : un profil de pièce présentant de fortes variations locales ne permet pas la convergence vers un point solution vérifiant le critère de hauteur de couche. Adaptée pour des tubulures continues sans embranchement et associées à

substrat unique [55], cette méthode n'est pas applicable pour des géométries davantage complexes. Dès que des trous ou des embranchements de plusieurs tubulures sont ajoutés à la pièce, ce type de méthode n'est pas fonctionnelle car la direction de propagation est supposée unique. La combinaison à du découpage en entités [39] résout les problèmes d'embranchement, mais ne permet pas d'alléger le manque de libertés concernant le substrat initial et la possibilité de paramétrer la surface en réseaux parallèles.

Une autre alternative notable repose sur l'utilisation de géodésiques pour le calcul de flux de propagation sur la surface à fabriquer [64,65], pour l'appliquer à de la génération de trajectoire [62]. La notion de géodésique est détaillée plus amplement à l' **Annexe A2**. Cette méthode est aussi connue sous le nom de la "Méthode de la Chaleur" en référence au comportement géodésique de l'équation de conduction thermique. Dans la pratique, les modules de simulation physique résolvent numériquement l'Équation de la Chaleur – qui est une équation de transport – sur la surface afin de déterminer les iso-courbes situées à une distance géodésique constante d'un ensemble de points sources.

Cependant, il s'agit de distances géodésiques (**Figure 8a**) et non de distances euclidiennes (**Figure 8b**), ce qui peut amener à des iso-courbes différentes dans le cas de surfaces complexes qui ont de fortes évolutions de courbure, des trous et des régions locales non connexes. Ces notions mathématiques sont elles aussi détaillées à l' **Annexe A2**.



**Figure 8** – Fronts d'onde géodésique et euclidien  
(a) Front d'onde géodésique (b) Front d'onde euclidien

L'utilisation de géodésiques est une méthode innovante car elle permet de générer des trajectoires sur des surfaces complexes. Elle est aussi adaptable à tout type de substrat initial, mais n'est pas directement adaptable pour de la hauteur de couche constante. En effet, les distances géodésiques sont embarquées dans l'espace topologique qu'est la surface à fabriquer, et pas dans l'espace de plongement, qui sont les distances à considérer pour

les procédés DED. Dans la pratique, les géodésiques sont un outil pertinent pour étudier la propagation de perturbations physiques dans un milieu homogène, et déterminer des fronts d'onde. Ces fronts d'onde, à distance géodésique constante les uns des autres ne sont pas nécessairement à distance euclidienne constante : ce n'est le cas que si le vecteur normal à la surface ne change pas d'orientation au cours de tout transport parallèle reliant deux fronts d'onde. Davantage d'explications sur le transport parallèle et les géodésiques sont données à l'**Annexe A2**.

Ainsi, dans le cas où la pièce est enchevêtrée sur elle-même, les distances géodésiques, qui parcourent toute la distance d'enchevêtrement entre deux points sont fortement différentes des distances euclidiennes entre ces derniers, qui correspondent à la distance "à vol d'oiseau" vue depuis l'espace de plongement. C'est aussi le cas si la surface comporte des trous car ces derniers n'influent pas sur les distances euclidiennes tandis qu'ils représentent des obstacles qui distordent les flux géodésiques : les distances géodésiques contournent les trous à leur frontière. Enfin, cette méthode ne donne pas d'information sur la trajectoire en elle-même : elle détermine des fronts d'ondes, mais ne fournit pas de courbes avec des points organisés. De plus, elle nécessite de lourdes précautions sur le maillage d'entrée, pour permettre la propagation des géodésiques entre mailles adjacentes de la surface [64].

Enfin, des variantes des méthodes présentées ont permis d'augmenter la diversité des géométries envisageables en fabrication additive. Une première variante prend en compte la présence de trous pour des structures prismatiques déposées sur un substrat plan ou légèrement courbé [66], mais elle repose sur une méthode de tranchage par plans légèrement courbés parallèles [37] et ne permet donc pas de générer des trajectoires sur des pièces enchevêtrées. De même, la frontière des trous présents sur la surface doit être telle que ses variations de profil soient faibles au fur et à mesure de l'empilement, et non concaves pour éviter le calcul de couches qui ne reposeraient pas sur du matériau support et seraient donc invalides. Cela limite grandement la densité de trous, leur taille et leur forme.

Une deuxième variante du slicing adaptatif s'inspirant des géodésiques [64] pour le calcul d'une trajectoire a apporté une contribution à la gestion de jonctions ou d'embranchements [67,66]. Valable à la fois pour des surfaces et volumes, cette variante prend en charge des directions de propagation multiples. L'apport notable est l'utilisation d'un découpage de la pièce en régions convexes de travail [66] qui offre une alternative aux découpages en entités usuels [39,68,48] et facilite la propagation de la trajectoire à travers les zones concaves, comme c'est le cas au niveau d'un embranchement.

Ainsi, les méthodes de génération de trajectoire alternatives apportent des améliorations sur les géométries envisageables et les formats pris en charge pour l'obtention de couches à hauteur constante recherchée pour les procédés DED. Elles nécessitent toutefois des précautions, notamment sur la topologie du substrat initial. En effet, la forme du substrat doit être relativement similaire à un plan peu courbé pour déclencher la propagation de la trajectoire. De plus, elles ne garantissent ainsi pas nécessairement la constance de la hauteur de couche pour des topologies présentant des trous, ou enchevêtrées sur elles-mêmes. Enfin, elles nécessitent une anticipation préalable du lieu des embranchements et

des jonctions qui s'appuie sur l'étude du graphe obtenu en déterminant les directions de propagation de la trajectoire avant son calcul. Ces directions sont elles-mêmes anticipées en s'appuyant éventuellement sur un découpage en entités. Cette anticipation préconditionne les couches de la trajectoire avant même leur calcul en imposant un ensemble de directions. Cela facilite l'obtention de couches recouvrant la pièce, mais ne permet pas de modifier la morphologie de leur empilement.

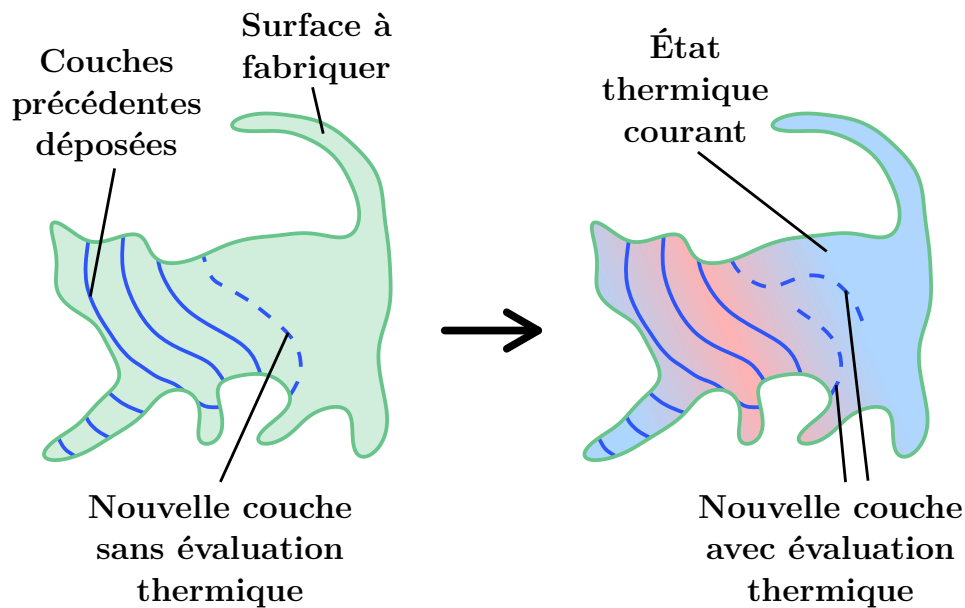
### 1.1.4 Optimisation de la qualité de recouvrement

En parallèle aux travaux de génération de trajectoire, des travaux d'optimisation lors du recouvrement ont permis d'apporter quelques améliorations sur les types de pièces envisageables pour la fabrication additive par procédés DED. Le recouvrement désigne le balayage de la géométrie à fabriquer par un ensemble de couches successives. Ces travaux peuvent être classés en différentes catégories :

- Catégories de matériaux pris en charge ;
- Optimisation thermique du dépôt ;
- Stratégies de remplissage ;
- Suppression du matériau support ;
- Catégories de substrats pris en charge.

Premièrement, des travaux sur l'incorporation de matériaux hétérogènes ont mis en évidence les défis liés au contrôle numérique direct en fabrication additive pour l'obtention de géométries complexes [69,68]. La complexité des trajectoires à élaborer pour l'outil nécessite la mise en place de boucles de contrôle numérique direct détachées de toute intervention humaine au cours du processus [69], et d'envisager l'interdépendance des tâches de génération de trajectoire : choix du lieu du support, choix du matériau, orientation de l'outil, et minimisation du temps de fabrication. L'utilisation de matériaux hétérogènes combinée découpage de pièces en entités [68] permet d'offrir plus de libertés sur les performances mécaniques, mais ne résout que partiellement le libertés de complexité de pièces car la réparation de pièces présentant une rupture quelconque n'est pas envisagée : chaque entité a une géométrie simple, et est assignée à un seul matériau.

Deuxièmement, l'étude de la thermique également permis de sensibiliser à certaines exigences d'un point de vue trajectoiriste (**Figure 9**). Le développement de méthodes de génération de trajectoire prenant en compte la conduction thermique [70] apporte une contribution à la compréhension de la physique lors des départ et arrêts de dépôt, comblant ainsi certaines lacunes des méthodes antérieures sur la réorganisation en temps réel des trajectoires de remplissage. En particulier, l'utilisation d'arbres K-d offre une possibilité pour partitionner les couches de la trajectoire [71]. Un arbre K-d est une structure de données arborescente utilisée pour stocker des points dans un espace à K dimensions et permet une recherche efficace de voisins les plus proches d'un point donné en prenant avantage de la subdivision récursive de l'espace issue de la construction de cet arbre. L'utilisation de coefficients associés à l'état thermique de la pièce en temps réel permet de privilégier les tronçons de couche situés dans les régions à la température la plus basse.



**Figure 9** – Prise en compte de la thermique sur une trajectoire

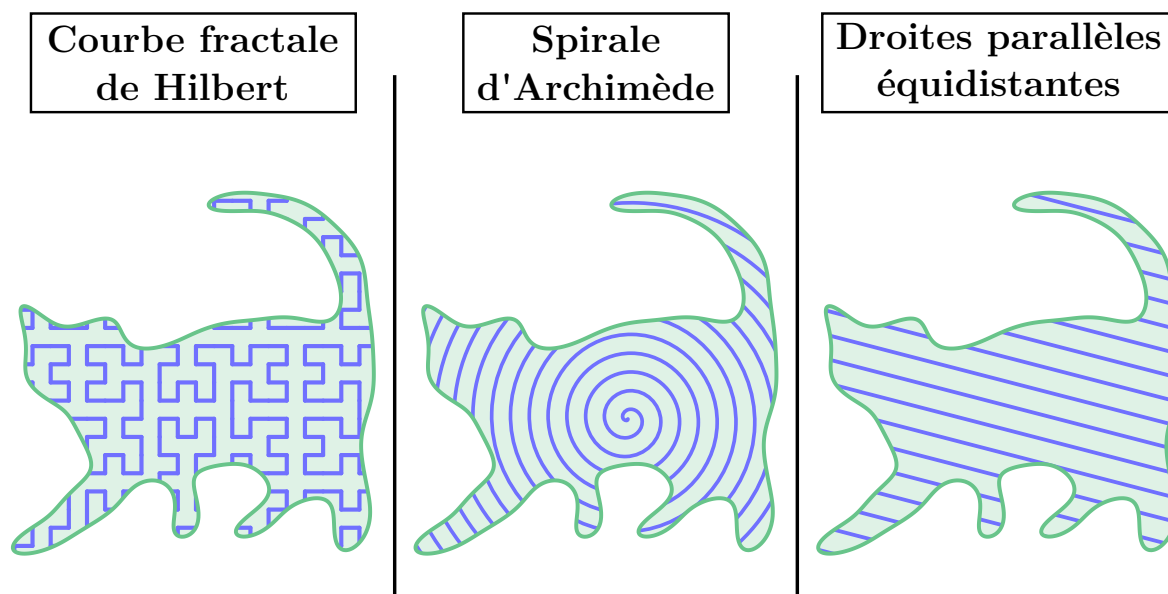
Ainsi, cette approche se différencie des méthodes antérieures d'optimisation thermique de la trajectoire car elle permet de modifier la forme des couches et ne se limite pas uniquement à la réorganisation des points au sein d'une même couche. Toutefois, elle suppose que le matériau est homogène et que le régime thermique est permanent, ce qui peut donc ne pas tenir compte des états thermiques transitoires des départs et arrêts de dépôt. Enfin, en considérant uniquement l'homogénéisation thermique, cette démarche d'optimisation de chemin de dépôt ne tient pas compte du critère de distance euclidienne qui participe aussi à la qualité du dépôt [17].

Des travaux minimisant les contraintes résiduelles et les déformations liées à la thermique [72] ont permis d'explicitier des critères de choix sur le design initial de la pièce. Les couches supérieures de la trajectoire sont déterminées en tenant compte des contraintes thermiques sur les couches précédentes. Cependant, ces optimisations thermiques, si elles permettent d'uniformiser la température au sein de la pièce en cours de fabrication par minimisation de la dérive thermique, ne garantissent pas la qualité de la microstructure, ne serait-ce car elles n'assurent pas le maintien systématique d'une hauteur de couche constante au cours de la fabrication.

Troisièmement, des stratégies de parcours outil de volumes internes des pièces ont permis d'ajouter plus de libertés sur les pièces fabriquées [73,74,75]. Plusieurs types de topologies de parcours outil 2D pour de la fabrication en niveaux de Z sont envisagées (**Figure 10**) : fractales [73,74], spirales [73,74] et cordons parallèles juxtaposés [76,74]. Ces structures de parcours outil sont intéressantes pour des structures prismatiques car ces dernières sont invariantes par translation dans une même direction et déposées sur un substrat plan. Dans le cas de cordons juxtaposés, les différentes couches sont formées d'un



ensemble d'arêtes appelées "nervures" [76]. Cependant, les structures de type "nervure" sont beaucoup trop restrictives en termes de libertés géométriques, et aucune information sur le respect de la distance euclidienne entre les cordons juxtaposés n'est donnée. De plus, la juxtaposition n'est considérée que pour deux cordons, et pas davantage, et ne propose pas de structure de remplissage à proprement parler : il s'agit de structures d'élargissement de parois avant tout. Une variante des méthodes de juxtaposition généralisée au remplissage d'aires planes et basé sur le *Travelling Salesman Problem* (TSP) permet d'envisager le remplissage par cordons parallèles sans aucune interruption de dépôt [75].



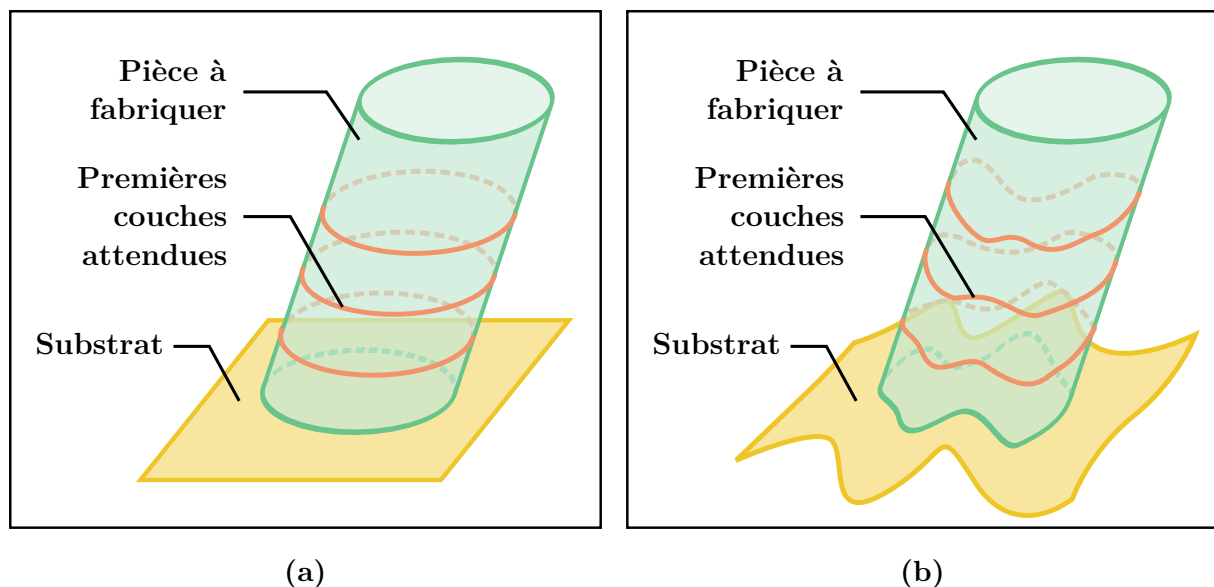
**Figure 10** – Structures de parcours outil 2D

L'utilisation de spirales et fractales est innovante car cela permet d'utiliser des schémas de remplissage sans interruption de dépôt et dont les courbes peuvent être lissées par changement des coefficients associés aux structures de remplissage [75].

Quatrièmement, l'utilisation de machines multi-axes a soulevé la question de la nécessité d'ajout de matériau support au cours de la fabrication. L'ajout de support fut une alternative historiquement utilisée dans le but d'éviter l'effondrement de la pièce lors de la fabrication à une époque où cette dernière se faisait exclusivement par plans parallèles. Dans le cadre de la fabrication métallique, le matériau support permet aussi de contrôler l'évacuation de chaleur au cours du processus et donc de minimiser les contraintes résiduelles internes dues à la thermique. Or, son retrait après réalisation de la pièce est une étape qui prend du temps et qui est difficilement réalisable, voire inenvisageable dans le cas où le support est ajouté dans une partie interne à la pièce, qui devient inaccessible après fabrication. Aussi, progressivement, dans le cadre des procédés DED multi-axes, le parti a été pris d'éviter tout ajout de support [77,67,47].

Cela a pour effet de simplifier la génération de trajectoire en déterminant un chemin de dépôt qui se réduit à suivre exclusivement le contour de la pièce à réaliser [47]. Dans le cadre de pièces métalliques, ce choix s'explique par le fait qu'une pièce, après fabrication, nécessitera un traitement thermique ultérieur pour tout usage mécanique, et qu'un choix optimal d'ordonnement de l'ordre des points au sein même d'une couche permet de soulager ces contraintes en priorisant le dépôt sur des zones plus refroidies que d'autres [71,78]. En l'absence de support, les couches sont empilées les unes sur les autres : une nouvelle couche est nécessairement déposée sur la couche qui la précède. La première couche est déposée sur le substrat initial.

Cinquièmement, la suppression du matériau support s'est indirectement accompagnée de progrès sur les types de substrats pris en charge lors de la génération de trajectoire. Historiquement, les substrats utilisés étaient des plans, car ce type de substrat était parfaitement adapté à de la fabrication en niveaux de Z sur machine 3-axes, et des plans parallèles. Or, comme souligné précédemment, le slicing par plans parallèles implique bon nombre de restrictions concernant la géométrie de la pièce à fabriquer. Plus précisément, c'est la combinaison entre la géométrie de la pièce et la forme ainsi que la position du substrat initial qui détermine la propagation de la trajectoire (Figure 11). La limitation à des substrats plans uniquement réduit les possibilités de fabrication d'une même pièce lorsque la forme du substrat change. C'est en particulier un enjeu dans le cas de l'ajout d'entités identiques sur une même pièce mais dont l'interface avec cette dernière est à chaque fois différente. C'est dans ce contexte que de nouveaux types de substrats ont été envisagés pour la génération de trajectoire.



**Figure 11** – Effet de la combinaison entre pièce et substrat sur la trajectoire

- (a) Cylindre oblique et substrat plan
- (b) Cylindre oblique et substrat oscillé

Par conséquent, des méthodes de génération de trajectoire basées sur un substrat dit “non plan” ont été développées [79,66,80]. Ces substrats consistent en des plans légèrement courbés, et offrent une possibilité d’ajout d’entité sur des pièces à la surface bombée ou creuse, qui fonctionne aussi bien pour de la création de surfaces que pour du remplissage de volumes [79,66]. Cependant, une fois de plus, les géométries réalisables sont beaucoup trop restrictives car les surfaces courbées de tranchage sont trop similaires à un plan. Le tranchage ne se fait plus par plan parallèle, mais par un même plan courbé translaté dans une direction de propagation unique. Pour solutionner les restrictions liées aux embranchements et jonctions, des ellipsoïdes sont utilisés pour subdiviser la pièce en entités [80], ce qui permet de considérer des géométries locales à forte concavité.

Néanmoins, cette variante suppose une fois de plus une direction de propagation unique sur les entités considérées [64,67]. De plus, le plan courbé utilisé pour le slicing ne varie pas au cours du processus : c’est la même surface de tranchage qui est utilisée plusieurs fois par translation dans l’espace dans le sens de propagation. Bien que l’utilisation de substrats courbés puisse être combinée à du slicing adaptatif pour respecter le critère de distance euclidienne dans le cas des procédés DED, le découpage en entités implique que la pièce à réaliser puisse être partitionnée en entités à direction de propagation unique. Selon la combinaison pièce-substrat, cela n’est pas nécessairement le cas pour une même géométrie de pièce.

De manière plus générale, le développement d’un tranchage pour une forme de substrat présente les mêmes faiblesses que le tranchage en niveaux de  $Z$  avec un plan classique. Bien que des plans courbés, voire même des demi-sphères [81] puissent être envisagés pour le tranchage, l’utilisation de plans courbés pour le slicing ne résout pas les limitations de génération de trajectoire pour les pièces enchevêtrées sur elles-mêmes avec de fortes non-connexités locales, ou plus généralement les géométries comportant des trous.

### 1.1.5 Orientation de l’outil

L’orientation de l’outil est un élément important pour garantir la qualité des conditions de dépôt au cours de la fabrication [41,56]. Les méthodes d’orientation outil permettent d’associer chaque position spatiale à une orientation d’outil. Usuellement, l’orientation de l’outil est déterminée en fonction de la morphologie de la géométrie de la pièce et la morphologie des couches. Une catégorie de méthodes détermine l’ensemble des vecteurs outils indépendamment des couches [41,42]. Cependant, cette indépendance implique une variation de la position de l’outil par rapport au dépôt, donc une variation des conditions de dépôt. Cela a donc amené au développement de méthodes alternatives d’orientation permettant une position invariante de l’outil par rapport au lieu de dépôt.

Le développement de méthodes d’orientation prenant partiellement en compte la forme des couches [69,82] a permis d’améliorer l’automatisation des procédés de fabrication additive pour les procédés DED. Une méthode d’orientation d’outil par création d’une base locale a été développée [69]. Cette méthode considère l’organisation successive des points du trajet lors de leur calcul et anticipe l’orientation de l’outil.

Or, le raisonnement développé se base sur l'utilisation de couches dont la hauteur est considérée comme nulle car il s'appuie sur l'évaluation du profil de la surface au point de dépôt. Le vecteur outil est calculé à partir du produit vectoriel du vecteur tangent à la couche au point dont le vecteur outil doit être calculé, et du vecteur normal à la surface dont on connaît l'équation en ce point. Cette base correspond à une base de Darboux (**Annexe A2**). D'une part, cela n'est cohérent que si le profil selon la direction de propagation de la surface dans l'inter-couches varie peu. D'autre part, cela implique que le point le plus proche sur la couche précédente est localement connexe avec le point de la couche calculée dont le vecteur outil est calculé. Toutefois, cela n'est pas nécessairement le cas sur une pièce, que sa géométrie soit basique ou non. En considérant le point local de dépôt uniquement, le voisinage de la couche précédente n'est pas pris en compte.

Par conséquent, il en ressort que le vecteur outil ne compense pas les approximations effectuées et garantit un orientation d'outil invariante par rapport au mur de dépôt local dans des cas très particuliers uniquement [82] : la base est calculée sur la surface entière et non sur la surface en cours de fabrication, et donc intègre un décalage systématique pour les surfaces à courbure moyenne variable.

Or, par définition, ce repère est local, et il ne tient compte en aucun cas du comportement de la surface dans un voisinage étendu dans un rayon représentatif de la valeur de la hauteur de couche. Cela signifie fondamentalement que le vecteur calculé ne tient pas compte de la couche sur laquelle elle repose dès lors où le profil de la pièce à fabriquer est différent du profil correspondant à l'ensemble des cordons effectivement déposés puisqu'il est déterminé sur un voisinage restreint (**Figure 12**).

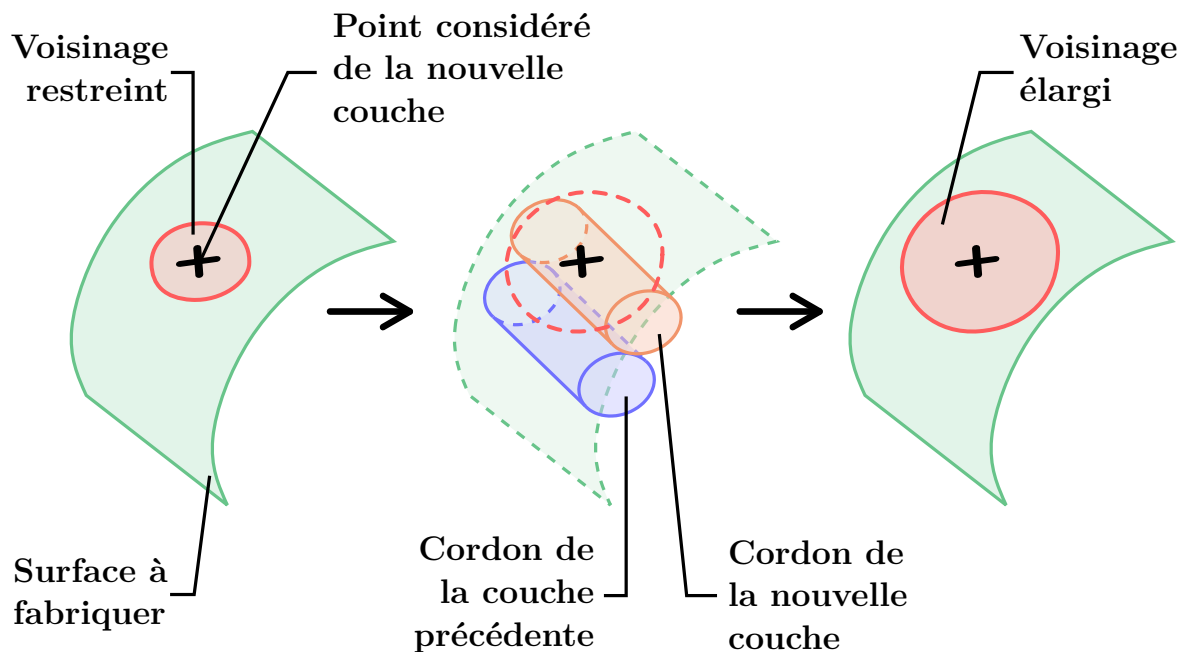
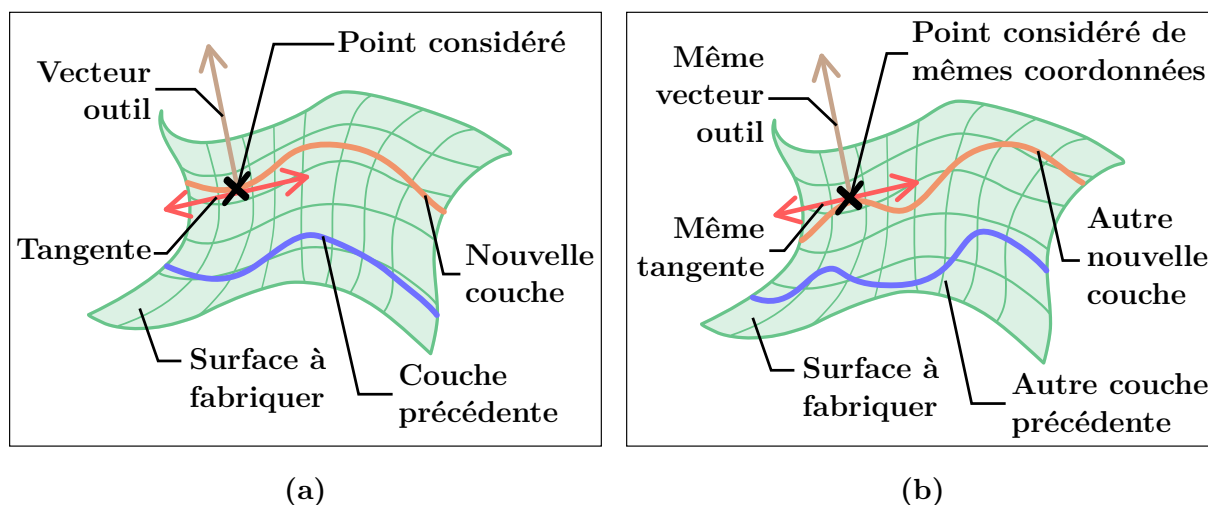


Figure 12 – Élargissement de voisinage local

Une conséquence directe de l'utilisation d'un voisinage restreint de rayon inférieur à la valeur de la hauteur de couche est que le repère est indépendant de la forme de l'empilement des couches (**Figure 13**), ce qui est contradictoire avec le principe même de dépôt : si la forme de la couche précédente au voisinage du point de la couche calculée varie, alors une modification de l'orientation du vecteur outil peut être attendue car cela change le lieu de dépôt. De plus, ce voisinage, s'il est trop petit, ne prend pas en charge les zones localement non connexes, ou présentant des discontinuités sur la définition de la surface. C'est en particulier le cas pour les frontières au niveau des trous, les points de rebroussement sur les couches et les angles vifs sur la surface.



**Figure 13** – Incohérence de l'indépendance du vecteur outil aux couches précédentes

- (a) Vecteur outil d'un point d'une couche arbitraire
- (b) Même vecteur outil sur une autre couche arbitraire

Pour compenser certains vecteurs outil, des méthodes de réorientation d'outil à partir d'analyse statistique sont implicitement intégrées dans les logiciels de génération de trajectoire [79,51]. Cela résulte à l'obtention de transitions fluides entre différentes positions d'outil pour de la fabrication automatisée [79]. En particulier, l'implémentation de méthodes adaptatives utilisant de données spatiales préalablement interpolées et filtrées permet d'atténuer voire supprimer l'influence de la torsion de la courbe de trajectoire sur la réorientation de l'outil [51]. Néanmoins, pour être efficaces, les méthodes de réorientation d'outil nécessitent des vecteurs outil d'entrée fiables et suffisamment cohérents par rapport à la forme de la trajectoire.

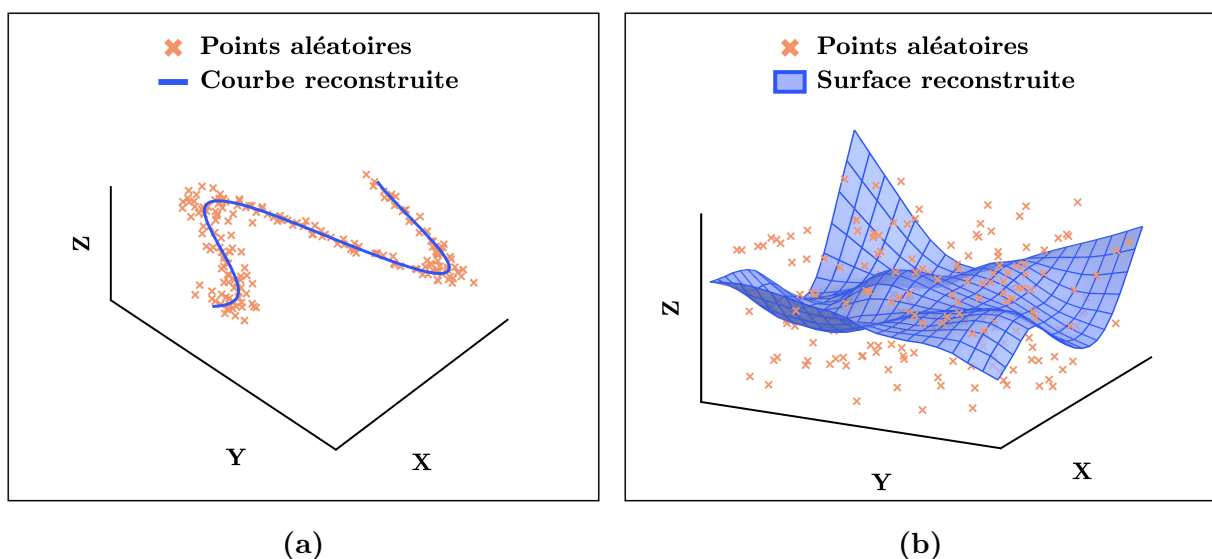
### 1.1.6 Reconstruction de trajectoire

Le processus de génération de trajectoire consiste d'abord à trouver une séquence de points organisés les uns par rapport aux autres. La recherche des points s'accompagne donc d'une reconstruction de courbes à partir des points trouvés modélisant les couches de matière lors du dépôt. Ces courbes sont obtenues en reliant les points par des segments ou par des courbes. Si l'ordre des points est connu, l'utilisation d'algorithmes classiques

de régression ou d'interpolation permet de modéliser la relation entre les coordonnées spatiales. La régression polynomiale et l'utilisation de splines cubiques sont les méthodes les plus courantes. Cependant, un nuage de points en entrée est insuffisant car la connaissance des liaisons entre points successifs est nécessaire.

Une première approche issue de la littérature consiste à calculer les points et à reconstruire le chemin en maîtrisant la précision de l'effecteur [51]. Ainsi, le chemin tient donc compte de la cinématique du robot de dépôt. Cependant, cette méthode laisse libre la création des liaisons entre les points à partir du nuage de points initial. En effet, la contrainte principale est de recouvrir une surface sans chercher à déterminer s'il existe du matériau support pour chaque courbe tracée. Elle est donc adaptée à des structures issues d'entités combinables comme des pales d'hélice, mais difficilement adaptable à des surfaces enchevêtrées à directions de propagation non évidentes. De plus, elle se limite à des géométries basiques correspondant à des plans légèrement courbés et ne comportant pas de trou.

Une autre approche de reconstruction de courbes à partir d'un nuage de points repose sur l'utilisation de graphes et une minimisation des moindres carrés [83]. Cependant, cette alternative n'est efficace que pour des courbes dont un squelette global peut être initialement extrait par analyse statistique. Elle ne permet donc pas de recouvrir l'ensemble des points du nuage, mais cherche à en éliminer pour reconstruire une courbe avec de nouveaux points qui ne font pas partie du nuage initial. Une approche similaire, applicable à la reconstruction de courbes ou de surfaces, effectue une partition optimisée des points avec des K-moyennes [84]. Cependant, elle crée aussi des courbes dont les nœuds ne correspondent pas à des points situés sur le nuage initial. Ces deux méthodes sont davantage adaptées à la reconstruction de modèles CAO par reverse engineering (**Figure 14**) qu'à la reconstruction de courbes passant par un ensemble de points donnés.



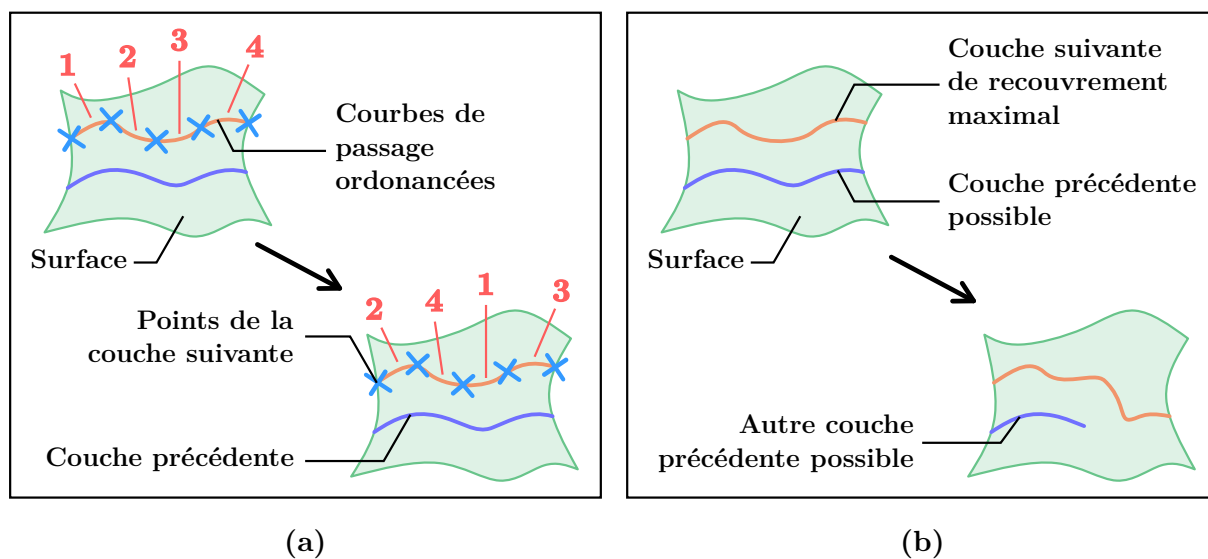
**Figure 14** – Reconstruction d'un modèle par reverse-engineering

- (a) Reconstruction d'une courbe
- (b) Reconstruction d'une surface

À l'issue de la reconstruction de la courbe d'une couche, il est aussi possible de réorganiser l'ordre de parcours des points pour optimiser certaines contraintes physiques, comme les collisions pièce-outil, ou la dérive thermique. En assimilant les chemins à des arêtes et les points à des nœuds, il est possible d'utiliser les outils de la théorie des graphes pour réorganiser les couches.

Une première méthode applique une solution algorithmique classique du *Chinese Postman Problem* (CPP) à l'aide de graphes pour la fabrication de lattices formées par des segments [85]. Cependant, cette méthode ne permet pas d'empiler des cordons les uns sur les autres, limitant ainsi les structures à des formes 2D et filaires uniquement. Une méthode alternative appliquée à des structures prismatiques primitives et utilisable pour des pièces déposées sur un substrat plan et invariantes sur la direction normale au plan permet de créer des couches de cordons juxtaposés par un ensemble d'arêtes, appelées "nervures" [76]. Cependant, cette méthode n'est appliquée qu'à des couches planes. Une autre méthode génère des trajectoires continues à partir de graphes hamiltoniens pour le remplissage de structures [78], tandis qu'une dernière approche utilise le machine learning pour la réorganisation des couches et permet notamment d'accélérer la vitesse de calcul de la trajectoire [86]. Ces deux approches permettent le remplissage d'aires uniformément discrétisées, mais ne calculent pas les couches successivement empilées.

Les méthodes précédentes de réorganisation ne considèrent qu'une organisation intra-couches (**Figure 15a**). Elles n'envisagent pas de réorganiser la trajectoire avec un réordonnement des arêtes de dépôt inter-couches. Or, l'organisation au niveau inter-couches (**Figure 15b**) permettrait d'envisager des formes de couches différentes pour obtenir une même pièce et ainsi apporter plus de souplesse pour faire face aux contraintes thermiques, cinématiques, dynamiques et aux collisions lors de la fabrication.



**Figure 15** – Réorganisation des couches d'une trajectoire

- (a) Réorganisation intra-couches
- (b) Réorganisation inter-couches

Ainsi, cette section a mis en évidence l'ensemble de l'état de l'art de la génération de trajectoire en fabrication additive, en mettant l'accent sur les procédés DED multi-axes. Les méthodes de slicing, très pertinentes et efficaces pour les machines 3-axes, limitent les géométries envisageables dès lors où il s'agit de maintenir une distance euclidienne constante entre la pièce et l'outil durant le dépôt. L'élaboration de structures géométriques complexes aux applications concrètes dans le monde mécanique a amené à l'élaboration de nouvelles méthodes, basées sur la détermination de directions de propagation par slicing optimisé, ou utilisation de flux géodésiques voire d'équations bi-paramétrisées. Néanmoins, la recherche de directions de propagation demeure une nécessité pour l'obtention d'une trajectoire. De plus, cette recherche est aussi fortement sensible à la forme du substrat, ce qui peut limiter leur utilisation pour des applications de réparation de pièces endommagées.

Plus généralement, la recherche d'une direction de propagation présuppose que la pièce puisse être décomposée en entités primitives, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour des géométries élaborées. En particulier, les motifs de remplissage ou les designs issus d'une optimisation topologique sont des cas de géométries de forme et complexité variable qui font l'objet de la section suivante.

## 1.2 Réseaux et motifs

Dans un deuxième temps, il convient de présenter les concepts de motif et de remplissage, qui sont au centre du projet BeShape auquel est rattaché cette thèse. Cette section a pour but de fournir un état des lieux des motifs étudiés en mécanique, présenter quelques surfaces minimales et discuter de leur pertinence en mécanique. Cela permet aussi de mieux comprendre pourquoi les outils de slicing actuels sont insuffisants pour la génération de trajectoire associées à de telles structures, dont l'enchevêtrement, la présence de multiples trous et les complexités locales constituent des obstacles majeurs.

### 1.2.1 Notions de motif et de réseau

L'étude des motifs est une branche à part entière de l'algèbre géométrique qui s'intéresse à l'unification de la combinatoire et de l'arithmétique avec la topologie. Cette étude est fortement liée à la cohomologie. Cette science est apparue dans les années 1960 avec les travaux d'Alexandre Grothendieck. La première utilisation du mot "motif" pour les mathématiques se trouve dans une lettre qu'il a écrite à Jean-Pierre Serre, un autre mathématicien étudiant la cohomologie [87]. Dans une discussion épistolaire s'étalant entre 1955 et 1987, Alexandre Grothendieck, espère découvrir la raison commune – désignée alors littéralement "motif commun" – à l'existence de tous les invariants cohomologiques de la topologie [88]. Comme évoqué à l'**Annexe A2**, la cohomologie est un concept abstrait. Dans le cas de la génération de trajectoire pour la fabrication additive par procédés DED, les motifs ne sont ici considérés qu'en tant que surfaces à fabriquer.

De manière générale un motif peut être vu comme une entité géométrique indépendante répétée plusieurs fois dans l'espace dans lequel il est plongé (**Figure 16a**). L'agencement des répétitions d'un motif au sein de l'espace dans lequel il est plongé est décrit par son



réseau. Dans le cas de la fabrication additive, il n’y a pas de définition claire. Les motifs sont souvent désignés par le terme “cellule” ou “lattice” dans la littérature [89]. Ils sont uniquement caractérisés par leur caractère assemblable au sein d’une seule entité.

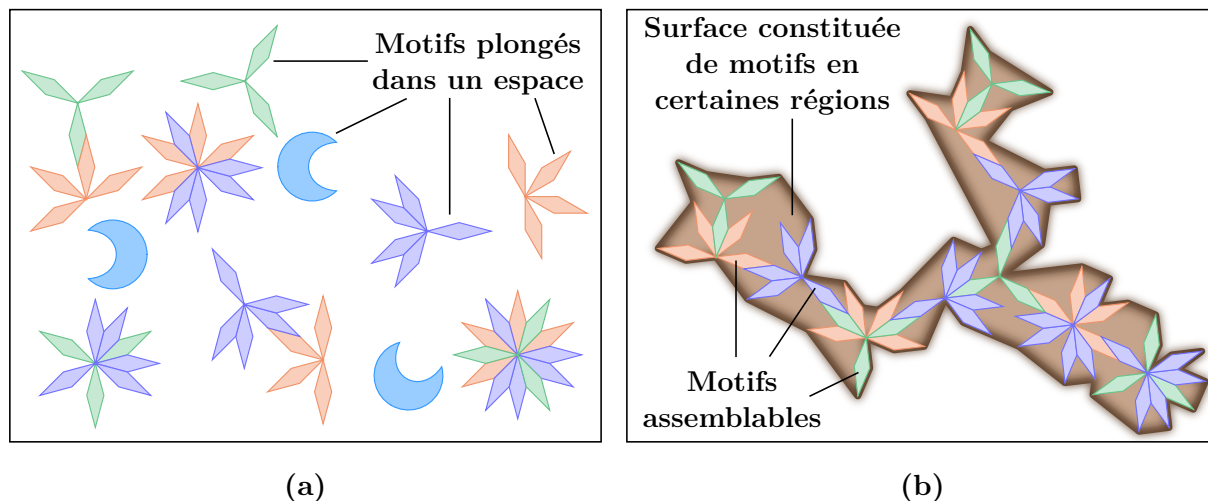


Figure 16 – Réseau de motifs

(a) Cas général (b) Restriction à la fabrication additive

Le motif peut donc être considéré comme une sous-surface issue d’une surface mère pouvant apparaître plusieurs fois en différentes régions de cette dernière (**Figure 16b**). De plus, cette surface mère est connexe pour assurer la cohérence physique de la surface : une variété différentielle connexe est telle que deux points quelconques peuvent être reliés par un trajet tracé sur cette dernière (**Figure 17**). La connexité formalise l’idée d’entité indépendante. L’appellation “composante connexe” est aussi utilisée, et la connexité est souvent implicitement supposée lors de l’usage du terme “entité” seul.

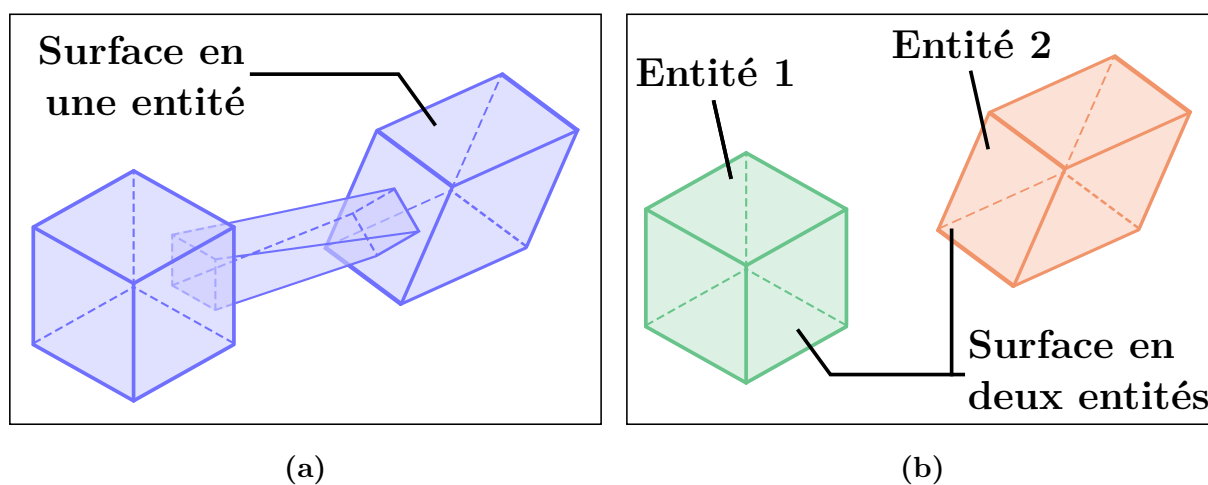


Figure 17 – Connexité

(a) Surface connexe (b) Surface non connexe

La notion de connexité est importante pour un motif car elle est nécessairement liée au concept de transition des efforts. Les efforts subis par un corps se propagent majoritairement dans la matière qui constitue ce corps. Si une partie des efforts peut être dissipée en dehors de ce corps ou absorbée par l'environnement qui l'entoure dans le cas d'une onde de choc par exemple, il est généralement admis que ce n'est pas le cas pour un chargement statique si la densité du milieu extérieur est extrêmement inférieure à celle de la matière constituant le corps sous charge.

### 1.2.2 Construction d'un réseau de motifs

Les motifs d'un réseau de motifs doivent donc être connexes entre eux afin d'assurer une viabilité mécanique à la pièce qu'ils remplissent. Bien qu'évident, ce fait doit être souligné car ce qui fait d'une entité un "motif", c'est avant tout sa nature à représenter un élément restreint d'un plus grand ensemble contenant d'autres éléments similaires à lui-même. En anglais, "motif" se traduit par "pattern", qui peut aussi être interprété par "patron". Ainsi, un motif constitue une entité modèle réutilisée en tant qu'archétype. Cela pose nécessairement la question d'assemblage. Dans le cadre de la fabrication additive, on considère de plus qu'un motif doit être auto-assemblable (**Figure 18**), c'est-à-dire que ses extrémités possèdent des interfaces pouvant être en contact parfait avec les extrémités d'une duplication de lui-même. Le réseau de motifs n'est donc constitué que d'un seul type de motif répété à l'identique dans son réseau. Cependant, cela n'implique pas la possibilité de dupliquer et assembler la trajectoire d'un même motif auto-assemblable pour obtenir un réseau, car la nature du voisinage d'un même endroit du motif n'est pas la même au bord et au centre du réseau au cours de la fabrication, et l'accessibilité non plus.

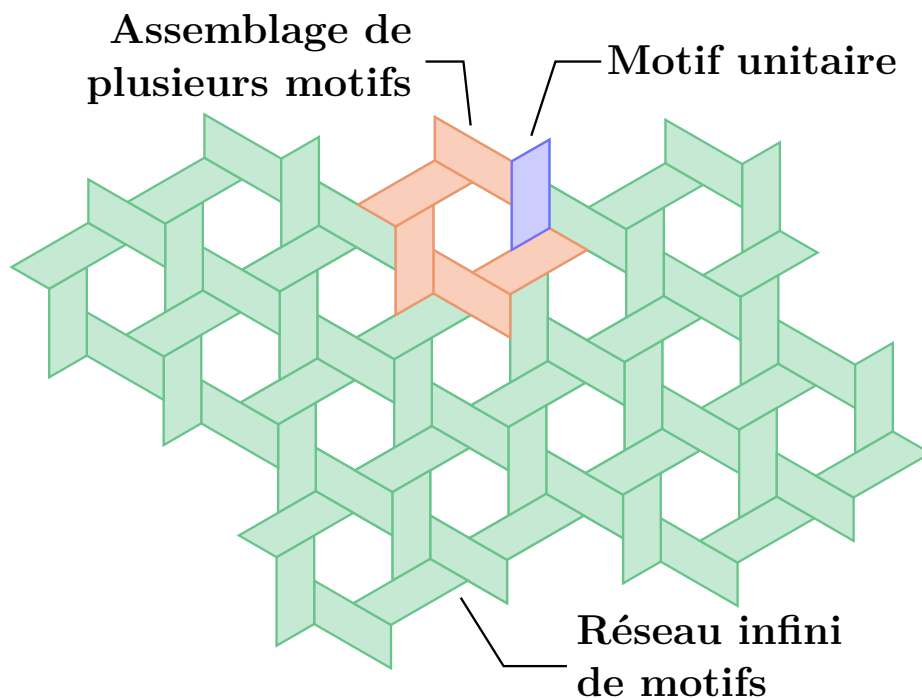


Figure 18 – Motif plan auto-assemblable

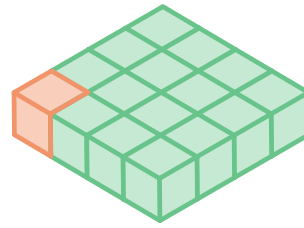
Un réseau s'obtient à partir de déformations topologiques appliquées successivement. Selon le type de logiciel d'infographie ou de CAO, les méthodes numériques varient [90]. Il est possible d'envisager une méthode de création d'un motif qui tienne compte des contraintes de connexité et d'auto-assemblage (**Figure 19**). La démarche présentée ici est une illustration qualitative éclairée par les outils mathématiques décrits dans l'**Annexe A2**. Cette illustration, qui synthétise les grands principes de modélisation de solide, simplifie fortement l'ensemble des considérations à prendre en compte pour l'obtention d'un réseau de motifs [91]. L'idée consiste à raisonner sur un réseau de surfaces cubiques collées les unes aux autres. Les cubes sont des entités simples qui respectent ces deux contraintes. Il s'agit alors de déformer ce réseau de cubes selon certaines règles afin d'obtenir le réseau de motifs auto-assemblables souhaité.

Dans un premier temps, le réseau est uniquement déformé sans déchirure ni recollement : seuls des homéomorphismes sont appliqués. Puis, dans un second temps, des opérations booléennes sont appliquées aux cubes déformés du réseau pour retirer de la matière. Ces opérations booléennes doivent garantir la conservation de la connexité du réseau, et peuvent générer l'apparition de trous dans le réseau. L'approche s'inspire des opérations de sculpture dynamique sur des logiciels de modélisation d'objets volumiques [92] et surfaciques [93,94]. Au total, cinq étapes consécutives permettent d'obtenir cette déformation :

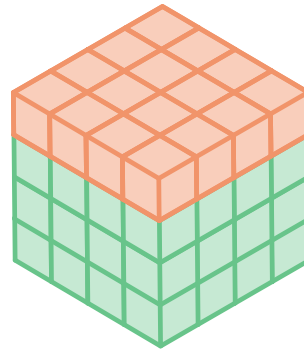
1. À partir d'un cube initial, un pavage infini de surfaces cubiques est créé (Étape 1 sur la **Figure 19**). Les faces de chaque cube coïncident avec celles d'un cube voisin.
2. Ce pavage est dupliqué verticalement par une succession de translations selon la direction normale au plan du premier pavage (Étape 2 sur la **Figure 19**). Cet empilement de pavages résulte en un réseau de cubes coïncidents dans les trois directions déterminées par les arêtes des cubes.
3. Puis, certains murs de cubes subissent une glissée : leurs faces ne coïncident plus avec celles des cubes des murs voisins (Étape 3 sur la **Figure 19**). Les glissées correspondent à des translations de murs de cubes dans des plans de coïncidence entre les faces des cubes. Étant donné que les murs sont infinis, la connexité est nécessairement garantie à ce stade de la déformation.
4. Il est ensuite possible de transformer les cubes en parallélépipèdes tous identiques en inclinant les faces et en dilatant les distances (Étape 4 sur la **Figure 19**). Durant ce processus, deux faces opposées sur un cube subissent la même inclinaison. Les directions de dilatation correspondent à celles des arêtes des cubes.
5. Enfin, certaines opérations de déformation telles que des opérations booléennes de suppression de volume, des torsions ou autre qui respectent les nécessités de connexité et d'auto-assemblage sont appliquées sur un motif et répercutées sur tous les autres motifs du réseau (Étape 5 sur la **Figure 19**). C'est durant cette étape que des trous peuvent être ajoutés sur les motifs par opération booléenne de suppression, à condition qu'ils respectent les nécessités de connexité et d'auto-assemblage.

**Étape 1**

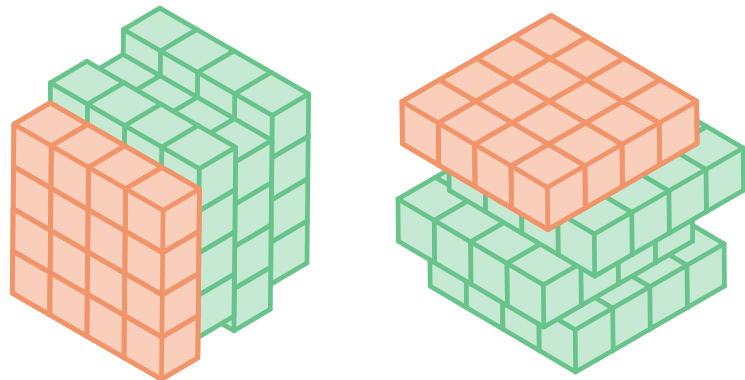
Pavage plan de cubes  
coïncidents

**Étape 2**

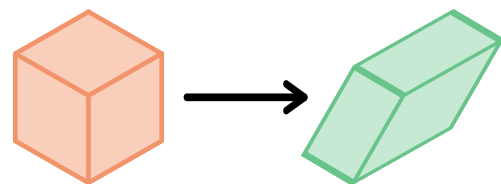
Duplications coïncidentes  
et empilées du pavage dans  
la direction orthogonale au  
plan du premier pavage

**Étape 3**

Glissées de murs  
de cubes via des  
translations

**Étape 4**

Transformation en  
réseau de parallélépipèdes

**Étape 5**

Autres déformations  
répercutées par symétrie

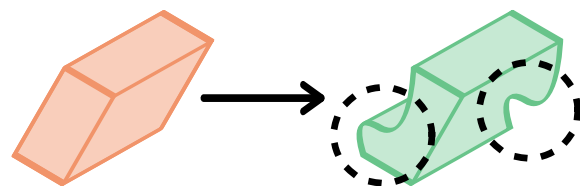
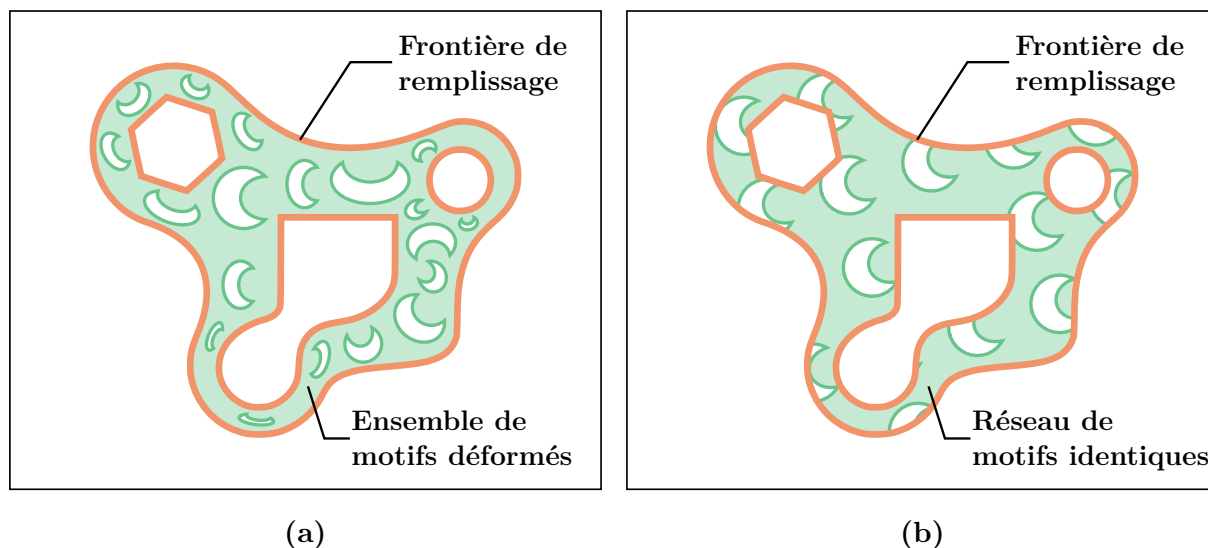


Figure 19 – Déformation d'un réseau de cubes

Comme expliqué à la **Section 1.1**, les procédés DED combinés aux technologies multi-axes sont prometteurs en vue de l'obtention de structures complexes. Ils sont donc envisagés pour la réalisation de pièces mécaniques au design optimisée. En particulier, le remplissage de pièces mécaniques par des structures internes est une possibilité, afin de réduire leur masse, ou pour augmenter leurs performances mécaniques (en particulier une résistance mécanique et un module d'élasticité plus élevés) [95]. Les motivations autour des motifs rappellent celles de l'utilisation de mousses métalliques pour certaines pièces mécaniques [96]. En effet, afin de réduire la masse d'une pièce dont seule l'enveloppe extérieure est fonctionnelle, il est possible d'envisager une optimisation topologique cherchant à évier l'intérieur, initialement rempli de matière, en le remplaçant par des structures, de taille et forme variable (**Figure 20a**). L'optimisation topologique est la science qui vise à trouver un compromis entre le volume de la pièce et ses propriétés mécaniques à partir de contraintes spécifiées en entrée par l'utilisateur. Notons que, dans le cas de l'optimisation topologique, le remplissage n'est pas forcément réduit à un réseau d'un même motif répété plusieurs fois et non dilaté (**Figure 20b**).



**Figure 20** – Évidement d'une pièce mécanique

- (a) Remplissage de motifs par optimisation topologique
- (b) Remplissage par un réseau de motifs

### 1.2.3 Motifs issus de TPMS

Plusieurs travaux de recherche sur les structures de remplissage ont été réalisés au cours des deux dernières décennies pour déterminer de potentiels motifs de remplissage [89]. Les structures ont essentiellement été étudiées vis-à-vis de leur comportement face à des sollicitations de compression, de traction, voire de cisaillement [97,98]. Parmi les études effectuées, certains motifs semblent sortir du lot : les surfaces minimales tripériodiques [99,100,101,102]. Aussi désignées par l'expression *Triply Periodic Minimal Surfaces* (TPMS), ces surfaces sont des motifs auto-assemblables (**Figure 21**). Ces surfaces sont dites minimales car leur courbure moyenne est nulle en tout point.

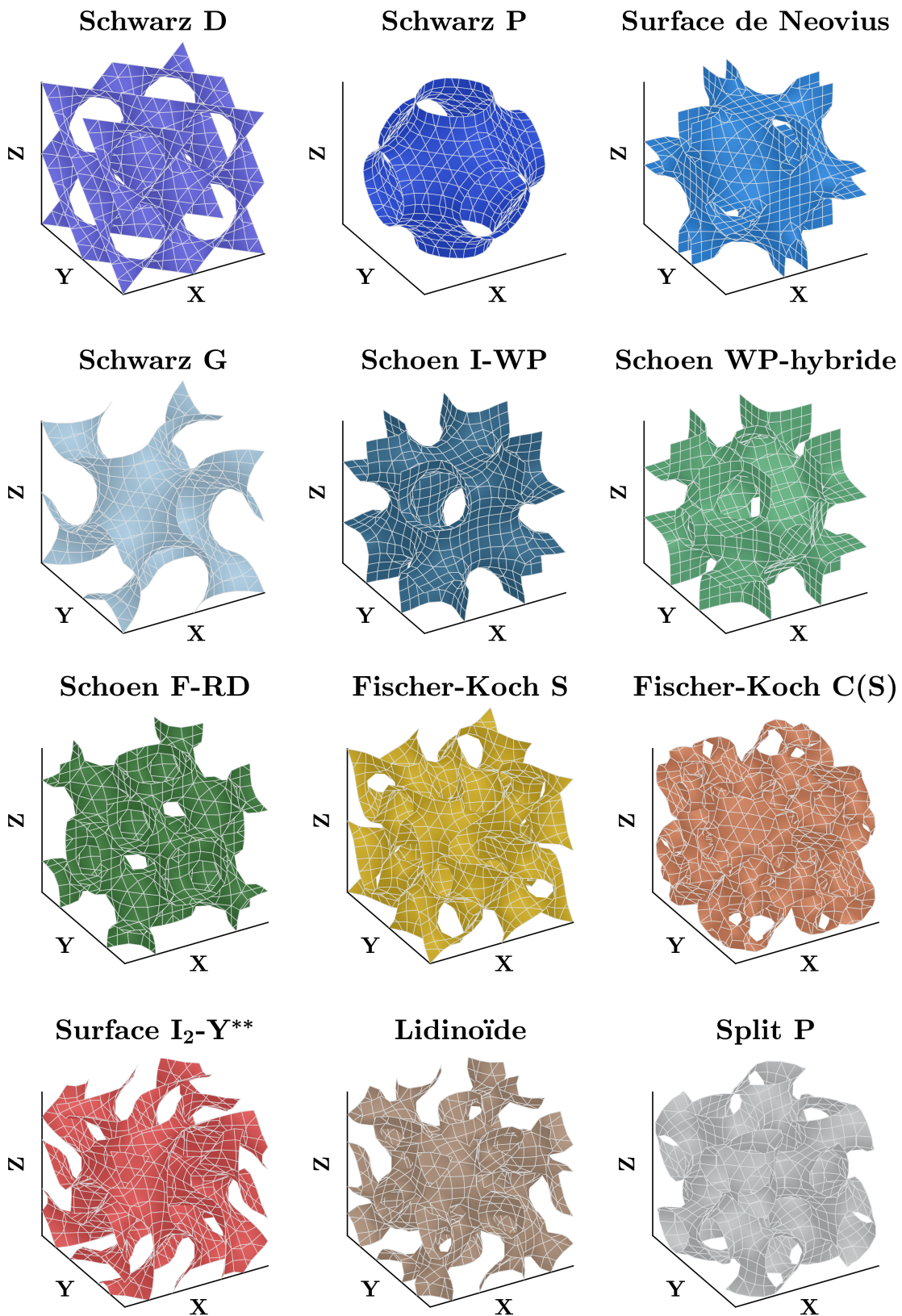


Figure 21 – Quelques TPMS

## Analyse bibliographique

Il existe de nombreuses TPMS. De plus, une même TPMS peut avoir plusieurs appellations dans la littérature. Le **Tableau 1** regroupe les principales TPMS issues dans la littérature et indique les désignations utilisées dans la thèse. Il contient les quelques TPMS illustrées à la **Figure 21** et en introduit davantage.

Désignation retenue	Nom(s) d'usage
Schwarz D	Schwarz Diamond ; Schwarz Face-Centered-Cubic
Schwarz P	Schwarz Primitive
Schwarz H	Schwarz Hexagon ; Schwarz Rhombic
Schwarz CLP	Schwarz Crossed Layers of Parallels ; Schwarz Tetragonal
Surface de Neovius	Neovius Surface ; Complement of Schwarz Primitive
Schwarz G	Schwarz Gyroid ; Gyroid ; Schoen Gyroid
Schoen I-WP	Schoen I-type Graph - Wrapped Package
Schoen F-RD	Schoen F-type Graph - Rhombic Dodecahedra Graph
Schoen WP-hybride	Schoen Primitive and Wrapped Package Hybrid ; Schoen Octahedra, Cuboctahedra Graph - Tetragonal Octahedron Graph
Fischer-Koch S	Fischer-Koch Square Graph
Fischer-Koch C(S)	Fischer-Koch Complement of Square Graph
Fischer-Koch Y	Fischer-Koch Y-type Graph
Fischer-Koch C(Y)	Fischer-Koch Complement of Y-type Graph
Surface I <sub>2</sub> -Y**	Second I-type Graph - Y**-type Graph Surface
Lidinoïde	Hexagon and Gyroid Surface ; Lidinoid
Split P	Split Primitif

Désignation retenue	Abbréviation(s) d'usage	Année de découverte	Filiation
Schwarz D	D ; F	Entre 1860 et 1861 puis en 1865	Bernhard Riemann puis Hermann Amandus Schwarz
Schwarz P	P	1867	Hermann Amandus Schwarz
Schwarz H	H ; R	1867	Hermann Amandus Schwarz
Schwarz CLP	CLP ; T	1867	Hermann Amandus Schwarz
Surface de Neovius	C(P), CP	1883	Edvard Rudolf Neovius
Schwarz G	G ; Y*	1970	Alan Hugh Schoen
Schoen I-WP	I-WP	1970	Alan Hugh Schoen
Schoen F-RD	F-RD	1970	Alan Hugh Schoen
Schoen WP-hybride	WP-hybrid ; O, C-TO	1970	Alan Hugh Schoen
Fischer-Koch S	S	1987	Werner Fischer et Elke Koch
Fischer-Koch C(S)	C(S), CS	1987	Werner Fischer et Elke Koch
Fischer-Koch Y	Y	1987	Werner Fischer et Elke Koch
Fischer-Koch C(Y)	C(Y), CY	1987	Werner Fischer et Elke Koch
Surface I <sub>2</sub> -Y**	I <sub>2</sub> -Y**	Supposée entre 1987 et 1990	Supposée à Werner Fischer et Elke Koch
Lidinoïde	HG, L	1990	Sven Lidin
Split P	SP	Supposée entre 1990 et 2000	Supposée inspirée par Peter Pieruschka

**Table 1** – TPMS les plus répandues et noms retenus dans la thèse

Notons cependant que les pièces métalliques évidées, si elles permettent de réduire la masse embarquée, ne sont généralement étudiées que de manière statique. Le comportement dynamique est fortement influencé par l'évidement, et peut conduire à des pièces inaptes à résister à certaines sollicitations cycliques. Il en va de même pour des propriétés de conduction thermique ou électrique, voire le comportement face à un champ magnétique. Aussi, il est important de garder à l'esprit la diversité des cahiers des charges possibles, impliquant une diversité multiple du type de pièces à fabriquer. Ce constat implique la manière dont doit être pensé l'algorithme de génération de trajectoire. Les implications de la génération de trajectoire sont discutées à la **Section 3.1**. Aussi, les applications des TPMS sont majoritairement liées au design des parois [103].

Les TPMS sont surtout intéressantes pour leur caractère de tripériodicité. La tripériodicité permet une facilité de remplissage de pièces par création de réseaux avec des motifs identiques dans l'espace 3D (**Figure 22**). Cette propriété rend la conception de structures remplies sur des logiciels de CAO relativement aisée à travers des opérations booléennes entre un réseau et un volume frontière. Le caractère minimal des TPMS est quant à lui pertinent pour des applications où toute la surface est sollicitée de manière homogène par une perturbation physique. On peut imaginer par exemple des applications en mécanique des fluides où un réseau de TPMS serait plongé dans un liquide sous pression, ou des applications sur le contact entre le fluide et un réseau de TPMS [104]. D'autres applications peuvent être envisagées : des applications en thermique [105,106,107,108] et en acoustique [109,110] où le réseau serait plongé dans une atmosphère sujet à de la convection thermique, ou à une onde mécanique. Des études en électromagnétisme sont tout aussi envisageables dans un tel contexte.

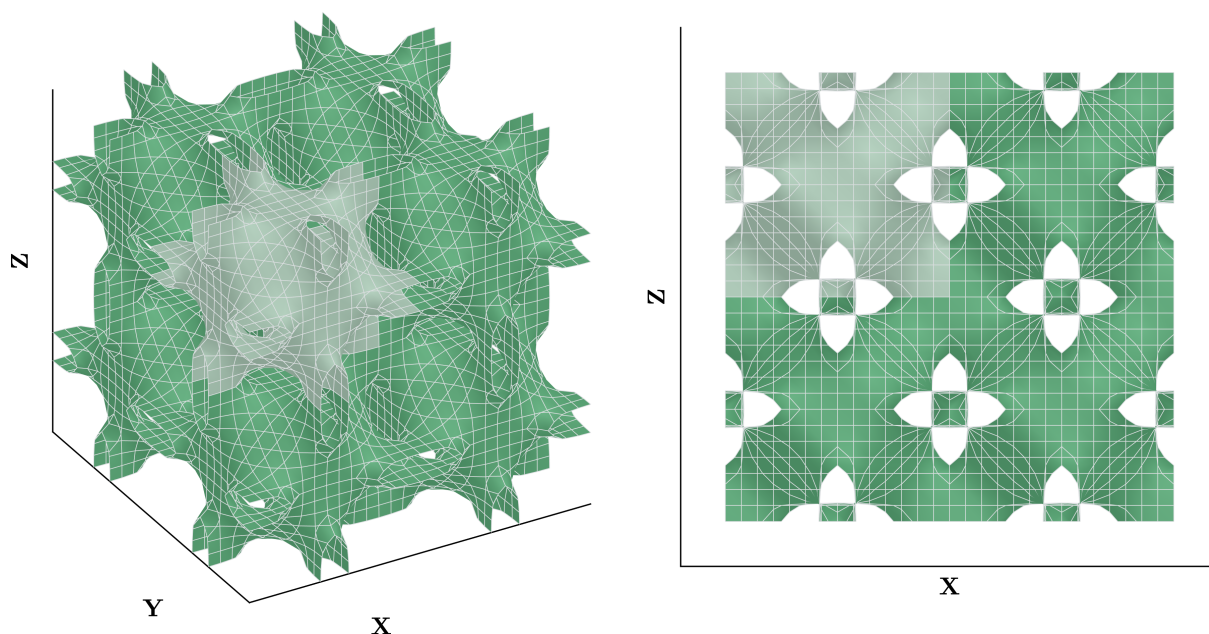
Le caractère minimal n'est cependant a priori pas pertinent pour la résistance mécanique à des efforts exprimés localement, et non pas globalement, puisque les efforts transitent à l'intérieur de la TPMS et non pas sur les parois de cette dernière [111]. Ainsi, l'épaisseur de la pièce doit être prise en compte, et donc les études sont effectuées sur un volume, amenant à des réflexions sur la pertinence du design de base des TPMS selon la sollicitation [112,113]. L'équation approximative d'une TPMS peut être modifiée pour obtenir un design mécaniquement plus viable [114,115], conduisant à une surface qui n'est plus nécessairement minimale. De même, certaines structures en nid d'abeilles sont notamment créées en s'inspirant de TPMS pour des applications en mécanique [116]. Une autre stratégie consiste aussi à utiliser plusieurs réseaux de TPMS différents, et d'adapter le gradient pour créer une interface de contact entre les deux réseaux [117] : la zone de gradient évolutif ne correspond pas non plus à une zone où la surface est minimale. Enfin, il peut être possible de créer de nouvelles surfaces tripériodiques non nécessairement minimales en imbriquant et fusionnant des TPMS ou surfaces issues de TPMS modifiées différentes les unes dans les autres [118].

#### 1.2.4 Construction d'une TPMS

La propriété minimale des TPMS est essentiellement intéressante afin de déterminer l'équation régissant la forme d'une structure donnée [119]. Il existe neuf définitions déterminant ce qu'est une surface minimale [120]. Parmi ces neuf définitions, toutes sous-



entendent qu'une surface minimale est une surface qui minimise localement son aire, c'est-à-dire qu'elle a localement une courbure moyenne nulle. Ces neuf définitions se rejoignent entre elles : certaines se basent uniquement sur des critères géométriques en posant les conditions locales que doivent vérifier les surfaces, sous forme d'équation différentielle ou encore sous forme de constat topologique expliquant que tous les points de la surface sont censés être des points-col avec des courbures principales opposées : on retrouve ainsi le fait qu'une surface minimale ait une courbure moyenne nulle en tout point. En réalité, les surfaces minimales sont une sous-famille des surfaces à courbure moyenne constante, qui ont aussi plusieurs applications en physique et en informatique [121,122].



**Figure 22** – Surface de Neovius dans son réseau

Parmi les neuf définitions des surfaces minimales, certaines définitions font allusion à des bilans d'énergie : l'énergie de déformation de la surface. Par exemple, une des définitions, appelée "définition du film de savon" stipule qu'une surface est minimale si et seulement si chaque point de la surface possède un voisinage égal à l'unique film de savon idéal reliant le point avec les frontières de son voisinage. La forme d'une bulle de savon est toujours celle qui minimise les contraintes de tension superficielle qu'elle subit. C'est d'ailleurs pour cela que les bulles de savon, en l'absence de contact avec une autre surface, ont une forme sphérique. Cette définition met notamment en avant que les propriétés énergétiques s'appliquent sur la paroi de la surface, et que son épaisseur est supposée négligeable. Comme expliqué au paragraphe précédent, cela explique notamment pourquoi d'un point de vue statique, les TPMS ne sont pas aussi performantes que des surfaces dilatées obtenues par modification du design d'une TPMS. La paramétrisation de Weierstrass-Enneper permet d'obtenir une équation paramétrée d'une surface minimale décrite par deux réseaux de fonctions à valeurs complexes  $f$  et  $g$  (Équation 1) :

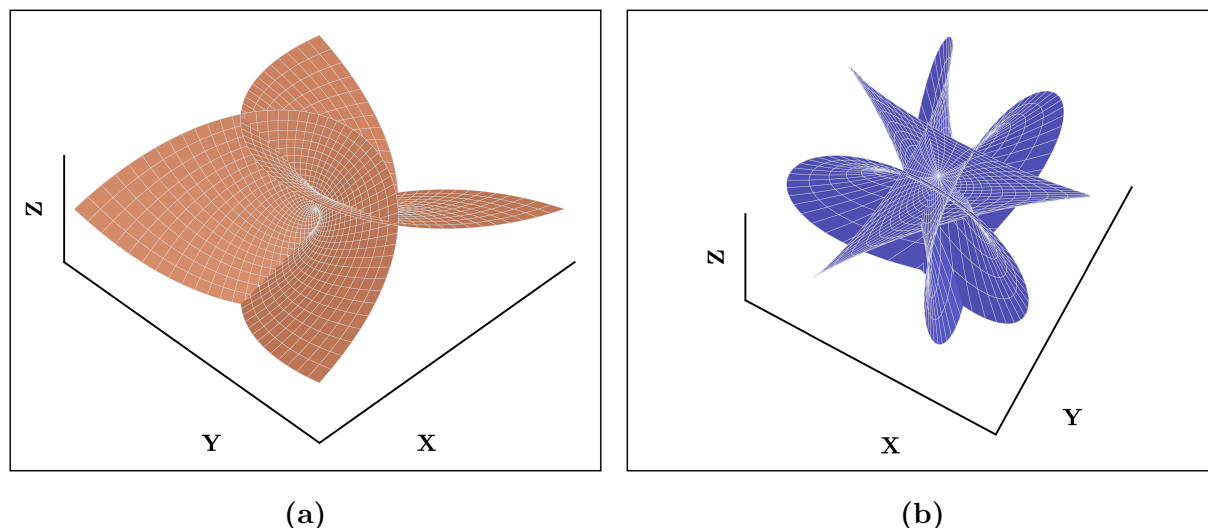
$$\left\{ \begin{array}{l} x(w) = C \Re \left( \int_0^w (1 - g(z)^2) f(z) dz \right) + C_x \\ y(w) = C \Re \left( i \int_0^w (1 + g(z)^2) f(z) dz \right) + C_y \\ z(w) = C \Re \left( 2 \int_0^w g(z) f(z) dz \right) + C_z \end{array} \right. \quad (1)$$

Dans l'Équation 1,  $w$  est une variable à valeurs complexes, tandis que  $C$ ,  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$  sont des constantes réelles.  $\Re$  désigne l'opérateur "partie réelle". La paramétrisation donne les valeurs des coordonnées cartésiennes réelles  $x$ ,  $y$  et  $z$  de tout point appartenant à la surface. La paramétrisation n'est valide que si  $f$  est méromorphe et que  $g$  est holomorphe. Si la paramétrisation d'une surface minimale existe, elle n'est cependant pas unique. La forme présentée à l'Équation 1 est celle qui a historiquement été proposée en premier par Alfred Enneper et Karl Weierstrass en 1863. Elle a notamment été obtenue en utilisant la première forme fondamentale (Équation A2-5 p216 de l'Annexe A2), qui s'annule en tout point dans le cas particulier des surfaces minimales : les abscisses curvilignes sont minimisées. On peut expliquer qualitativement la forme de cette paramétrisation. Assignée aux coordonnées cartésiennes, l'Équation 1 donne ainsi  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ , quelles que soient les valeurs prises par les fonctions  $f$  et  $g$ . L'égalité étant vérifiée pour des différentielles explique la présence d'intégrales sur les équations de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Puis, on constate que l'intérieur des intégrales semble avoir été construit en utilisant les identités remarquables de type  $(a + b)^2$  et  $(a - b)^2$  avec la fonction constante de valeur 1 et  $g$ , puis en multipliant par  $f$ . C'est d'autant plus visible en posant  $C = 1$  et  $C_x = C_y = C_z = 0$ .

Ainsi, une surface minimale peut être créée à partir de deux fonctions  $f$  et  $g$ . En posant  $u$  et  $v$  deux réels tels que  $w = u + iv$ , on obtient des équations bi-paramétrées des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  des points appartenant à la surface minimale. C'est ainsi qu'Enneper a proposé l'équation de la surface dite "surface d'Enneper" (Figure 23a) en 1864 en posant  $f(z) = 1$  et  $g(z) = z$ , donnant ainsi les bi-paramétrisations des coordonnées cartésiennes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(u, v) = u \left( 1 - \frac{1}{3}u^2 + v^2 \right) \\ y(u, v) = v \left( 1 - \frac{1}{3}v^2 + u^2 \right) \\ z(u, v) = (u^2 - v^2) \end{array} \right. \quad (2)$$

La surface d'Enneper est une des surfaces minimales les plus simples obtenable à partir de la paramétrisation d'Enneper-Weierstrass. Physiquement, un film de savon ayant sa forme ne pourrait exister car il serait en équilibre d'énergie potentielle instable. D'autres formes de surfaces minimales peuvent être créées par la même méthode de paramétrisation. On peut notamment citer la Fleur de Jeener (**Figure 23b**) créée par le graveur Patrice Jeener, qui s'est spécialisé dans la gravure de surfaces mathématiques. Il a créé l'équation de sa fleur à partir de la paramétrisation de Weierstrass-Enneper [123].



**Figure 23** – Surfaces minimales construites par paramétrisation

(a) Surface d'Enneper (b) Fleur de Jeener

La construction de l'équation d'une TPMS est cependant plus difficile que celle d'une surface minimale car l'équation doit aussi satisfaire des contraintes de périodicité. Riemann aurait découvert une première surface de ce type entre 1860 et 1861 [124], mais elle sera communiquée en 1867 à titre post-mortem. Indépendamment de Riemann, Hermann Amandus Schwarz décrira la même surface en 1865 [125]. La surface minimale en question est caractérisée par des similitudes à un réseau cubique à faces centrées, ce qui lui vaudra par conséquent l'appellation de surface *Face-Centered-Cubic* (F) [126]. À l'époque, la désignation TPMS n'existe pas et on parle uniquement de surfaces minimales périodiques. Le caractère minimal de telles surfaces était le centre d'intérêt principal de telles structures. En effet, l'étude des surfaces minimales constituait un enjeu en physique depuis la formulation du problème de Plateau en 1760, constituant à déterminer une surface minimale associée à partir de la connaissance de ses frontières [127].

La démarche de Schwarz consiste à décrire de telles surfaces en partant de la paramétrisation de Weierstrass-Enneper. La surface F est aujourd'hui plus communément connue sous le nom de "surface de Schwarz Diamant". Schwarz présentera trois surfaces supplémentaires en 1867 à l'occasion de sa proposition de réponse à un problème proposé par l'Académie Royale des Sciences de Prusse à Berlin [125]. Il s'agit de la surface *Primitive* (P), la surface *Rhombic* (R) et la surface *Tetragonal* (T). Les désignations des

surfaces sont issues de parallélismes avec la cristallographie. Aussi, “P”, “R” et “T” font respectivement allusion aux réseaux cristallins primitifs, rhombiques et tétraonaux. Ces surfaces seront elles aussi renommées plusieurs décennies plus tard. Une dernière surface sera découverte au XIX<sup>ème</sup> siècle : en 1883, Edvard Rudolf Neovius, décrira une surface correspondant au complément de la surface P durant ses travaux de thèses, dont le directeur était Schwarz lui-même [128]. De par sa genèse, cette surface sera nommée “surface C(P)”, mais dans la pratique elle est de nos jours plus souvent désignée en tant que “surface de Neovius”.

Il faudra attendre 1970 pour que les travaux sur les surfaces minimales se poursuivent. C’est Alan Hugh Schoen qui étudiera à nouveau ces surfaces pour la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) [129]. À cette époque, il désigne ces surfaces par l’appellation *Infinite Periodic Minimal Surface* (IPMS). Tout comme Schwarz, les motifs unitaires des réseaux sont aussi implicitement supposés sans intersection avec eux-mêmes. Ces surfaces sont décrites à l’aide de concepts mathématiques, mais l’approche est avant tout cristallographique et biologique : il n’y a pas encore de preuve formelle mathématique permettant de créer des outils pour manipuler ces surfaces. Les motifs unitaires des réseaux sont obtenus à partir de l’assemblage d’une même surface courbée – appelée “carreau” dans la suite de la thèse – dupliquée et assemblée avec d’autres carreaux identiques à la même manière qu’un puzzle en trois dimensions. Au cours de ses travaux, les surfaces, F, R et T seront respectivement renommées surfaces *Diamond* (D), *Hexagon* (H) et *Crossed Layers of Parallels* (CLP) en référence à l’aspect visuel des motifs et des réseaux. La surface *Primitive* (P) n’aura pas changé de nom. De nos jours, les acronymes de ces surfaces sont souvent précédés du substantif “Schwarz”. Il découvrira au total 12 surfaces.

L’originalité de son approche s’explique par le fait que les IPMS soient décrits à l’aide de deux graphes labyrinthiques [130]. Ces graphes constituent le squelette des IPMS. L’enchevêtrement de ces deux réseaux de graphes permet de comprendre la manière dont sont construits les réseaux des IPMS. Il nomme ainsi les surfaces qu’il décrit en fonction de l’agencement des squelettes. Certaines IPMS peuvent avoir deux squelettes correspondant à deux graphes identiques. Les surfaces les plus populaires décrites par Schoen sont le gyroïde, la surface *I-type Graph - Wrapped Package* (I-WP), la surface *F-type Graph - Rhombic Dodecahedra Graph* (F-RD), la surface *Octahedra, Cuboctahedra Graph - Tetragonal Octahedron Graph* (O,C-TO) plus communément désignée de nos jours en tant que surface *Wrapped Package and Primitive Hybrid* (WP-hybride). Le gyroïde est parfois désigné en tant que Schoen *Gyroid* (G) ou encore Schwarz G, car Schoen a découvert qu’il pouvait obtenir cette surface en déformant un Schwarz P ou un Schwarz D. Il démontre que les Schwarz D, P et G font partie de la même famille de réseau, et qu’il est possible de passer de l’un à l’autre à l’aide d’une transformation de Bonnet [131]. Cette transformation, à ne pas confondre avec la formule de Gauss-Bonnet (**Équation A2-3** p215), permet de changer la forme des fonctions  $f$  et  $g$  de la paramétrisation de Weierstrass-Enneper. Ainsi, les fonctions  $f$  et  $g$  issues de la paramétrisation de Weierstrass-Enneper des trois motifs conjugués par la transformation de Bonnet d’angle  $\alpha$  sont de la forme :

$$\begin{cases} f(z) = e^{i\alpha} (z^4 - 14z^2 + 1)^{-1/2} \\ g(z) = z \end{cases} \quad (3)$$

Pour le Schwarz D,  $\alpha$  vaut exactement  $0^\circ$ , et sa valeur est de  $90^\circ$  pour le Schwarz P. Pour le Schwarz G la valeur approximative est d'environ  $38,0148^\circ$  et se calcule à l'aide d'intégrales elliptiques de la première espèce, et de la fonction Arc Tangente [129]. Les coordonnées cartésiennes issues de la paramétrisation de Weierstrass-Enneper seront quant à elles obtenues environ trois décennies plus tard par Paul Gandy et Jacek Klinowski [132,133,134] et se limitent à un seul carreau minimal de motif.

Après Schoen, les travaux sur les IPMS seront quasi inexistantes jusqu'à la moitié des années 1980. La désignation TPMS des surfaces minimales sera utilisée pour la première fois par Werner Fischer et Elke Koch dès 1986 dans l'abstract d'une conférence et réutilisée l'année suivante dans un article plus détaillé [135]. Abordant aussi les TPMS sous le prisme de la cristallographie, ils définiront notamment quatre nouvelles surfaces : les surfaces *Square Graph* (S) et *Y-type Graph* (Y), ainsi que leurs compléments associés. Une fois encore, les désignations qu'ils ont choisies font référence aux squelettes des graphes des TPMS concernées.

Par la suite, Fischer et Koch étudieront d'autres types de surfaces minimales [136]. Enfin, Sven Lidin proposera lui aussi une TPMS en 1990, encore une fois par une approche par la cristallographie, en appliquant une transformation de Bonnet au Schwarz H [137]. Déterminée d'une manière similaire au Schwarz G, et possédant une forme relativement proche de cette dernière, cette surface a d'abord été désignée en tant que surface *Hexagon and Gyroid* (HG), mais il est coutume de désigner ce motif par le seul mot "lidinoïde". Le lidinoïde se distingue notamment par le fait que le motif unitaire n'est pas connexe : il est en réalité composé d'une sous-entité principale, et de deux petites sous-entités non connexes entre elles (**Figure 21**). Il existe une multitude de TPMS, et de nouvelles familles sont régulièrement découvertes [138]. L'origine de certaines TPMS est d'ailleurs difficile à déterminer tant la multiplicité de ce type de surfaces est devenue grande depuis les années 1990. C'est le cas notamment du *Split Primitive*, dont il n'y a pas de référence claire mais dont le motif rappelle les structures aléatoires d'éponges auto-assemblables de Peter Pieruschka [139,140], mais dont l'analogie des squelettes avec ceux d'une variante de Schwarz G – le double Schwarz G – rappelle les travaux sur les polymères de Hirokazu Hasegawa [141] d'une part, et ceux de Yushu Matsushita, Naoya Torikai, Jiro Suzuki et Motohiro Seki [142] d'autre part.

Les travaux de Schoen sont surtout devenus populaires dans la communauté mathématique à la fin des années 1980 par les travaux de Hermann Karcher, qui démontrera leur existence par son approche du Problème de Plateau [143]. Le Problème de Plateau a été proposé par Joseph-Louis Lagrange en 1760, et consiste en la recherche, pour un ensemble de bords donnés, de la surface minimale s'appuyant sur ces bords. Ce problème ouvert a été nommé en hommage à Joseph Plateau qui étudiait les films de savon. Ce n'est qu'à partir des années 1930, que des solutions non particulières au Problème de Plateau ont été investiguées [127,144]. Avec l'aide de Konrad Polthier, Karcher proposera en 1996 une méthode de construction des surfaces minimales pour pouvoir les visualiser directement par informatique [145]. Ils développent ainsi une méthode de discrétisation adaptée aux TPMS à l'aide de raisonnements sur les symétries de ces motifs. Les surfaces sont reconstruites à partir de duplications de carreaux définis par des équations paramétriques puis triangulées et assemblées.

Vers la fin des années 1990, d'autres méthodes numériques, plus robustes, vont permettre la manipulation numérique des TPMS. En particulier, les outils de construction de surfaces par la méthode des surfaces de niveaux vont amener à des solutions approximant les surfaces par des équations implicites [146]. Cette méthode permet de trouver une solution à une équation comportant trois variables indépendantes. Une équation implicite à trois variables permet en effet de décrire l'équation d'une surface liant les trois coordonnées cartésiennes des points situés sur cette dernière. Appliquée aux TPMS, la méthode des surfaces de niveaux permet d'obtenir une approximation fidèle des équations des surfaces sous forme implicite. Connaissant deux coordonnées, il est possible de trouver la troisième coordonnée dans le cas où l'équation implicite est bijective.

Or, dans le cas des TPMS, la périodicité implique la présence de fonctions trigonométriques, ce qui rend la tâche plus complexe. Néanmoins, avec des raisonnements de continuité de voisinage, il est possible d'obtenir la troisième coordonnée. Puis, à partir du nuage de points et de la connaissance de l'équation implicite de la fonction, une surface discrétisée relative à l'équation implicite peut être reconstruite. Depuis la fin des années 1990, plusieurs équations approximatives de plusieurs motifs, dont des TPMS, ont ainsi été obtenues à l'aide d'outils numériques [147,148,149]. Il est parfois possible de trouver plusieurs équations approximatives très proches pour une même TPMS dans la littérature. Le **Tableau 2** regroupe certaines équations de certaines TPMS trouvées dans la littérature utilisées pour représenter les motifs unitaires, avec une éventuelle adaptation des coefficients. Les équations implicites présentées dans cette table correspondent à celles utilisées pour approximer les TPMS correspondantes dans la thèse pour en générer éventuellement des trajectoires. Les motifs sont inclus dans des cubes de longueur  $2\pi$ .

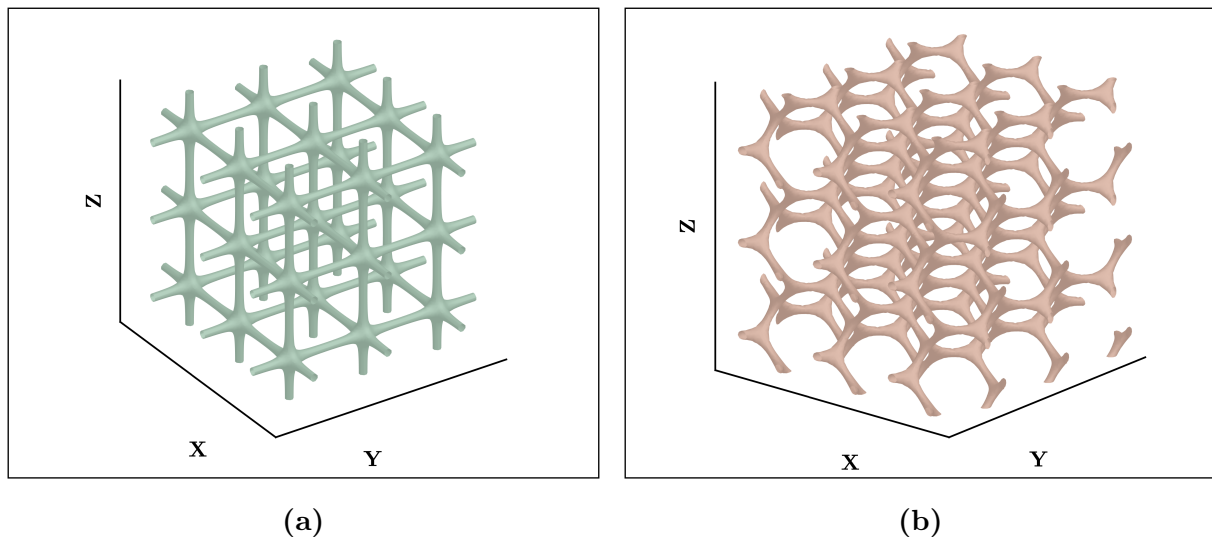
Enfin, notons que la méthode des surfaces de niveaux peut aussi être utilisée pour approximer les équations de squelettes de TPMS [148]. Cela est illustré à la (**Figure 24**) pour un des deux squelettes du Schwarz P et un des deux squelettes du Schwarz G. Structures relativement filaires, ces squelettes peuvent être perçus comme des lattices.

TPMS	Équation implicite approximative
Schwarz D	$\sin(x) \sin(y) \sin(z) + \sin(x) \cos(y) \cos(z) + \cos(x) \sin(y) \cos(z) + \cos(x) \cos(y) \sin(z) = 0$
Schwarz P	$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 0$
Surface de Neovius	$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) + 4 \cos(x) \cos(y) \cos(z) = 0$
Schwarz G	$\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(z) + \sin(z) \cos(x) = 0$
Schoen I-WP	$2(\cos(x) \cos(y) + \cos(y) \cos(z) + \cos(z) \cos(x)) - (\cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z)) = 0$
Schoen F-RD	$4 \cos(x) \cos(y) \cos(z) - (\cos(2x) \cos(2y) + \cos(2y) \cos(2z) + \cos(2z) \cos(2x)) = 0$
Schoen WP-hybride	$\cos(x) \cos(y) + \cos(y) \cos(z) + \cos(z) \cos(x) - \cos(x) \cos(y) \cos(z) + 0,3 = 0$
Fischer-Koch S	$\cos(2x) \sin(y) \cos(z) + \cos(2y) \sin(z) \cos(x) + \cos(2z) \sin(x) \cos(y) = 0$
Fischer-Koch C(S)	$\cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z) + 2(\sin(3x) \sin(2y) \cos(z) + \sin(3y) \sin(2z) \cos(x) + \sin(3z) \sin(2x) \cos(y)) + 2(\sin(2x) \cos(3y) \sin(z) + \sin(2y) \cos(3z) \sin(x) + \sin(2z) \cos(3x) \sin(y)) = 0$
Surface I <sub>2</sub> -Y**	$-2(\sin(2x) \cos(y) \sin(z) + \sin(x) \sin(2y) \cos(z) + \cos(x) \sin(y) \sin(2z)) + \cos(2x) \cos(2y) + \cos(2y) \cos(2z) + \cos(2z) \cos(2x) = 0$
Lidinoïde	$\sin(2x) \cos(y) \sin(z) + \sin(2y) \cos(z) \sin(x) + \sin(2z) \cos(x) \sin(y) - \cos(2x) \cos(2y) - \cos(2y) \cos(2z) - \cos(2z) \cos(2x) + 0,3 = 0$
Split P	$1,1(\sin(2x) \sin(z) \cos(y) + \sin(2y) \sin(x) \cos(z) + \sin(2z) \sin(y) \cos(x)) - 0,2(\cos(2x) \cos(2y) + \cos(2y) \cos(2z) + \cos(2z) \cos(2x)) - 0,4(\cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z)) = 0$

**Table 2** – Équations approximatives des TPMS utilisées

Les TPMS pour lesquelles une équation implicite approximative a été trouvée sont telles que le motif unitaire est inclus dans un cube (**Figure 21**). Cela simplifie énormément les raisonnements sur la périodicité pour l'obtention de l'équation, étant donné que les directions de duplication sont dans ce cas orthogonales entre elles, et n'ont pour composante qu'une seule coordonnée cartésienne de l'espace 3D. De ce fait, cela explique éventuellement pourquoi il n'y a, à ce jour, pas de formule implicite permettant d'approximer le

Schwarz H, étant donné que son enveloppe est un hexagone, et qu'il y a donc 4 directions de duplication, dont 3 coplanaires et non orthogonales entre elles. Le Schwarz H est considéré comme étant une TPMS, et il s'agit d'un des rares motifs ayant plus de 3 directions de duplications, et dont toutes ne sont pas orthogonales entre elles. Aussi, c'est pour cela que l'adjectif "tripériodique" de TPMS doit a priori être compris au sens de "répétable dans l'espace 3D" et non "répétable dans 3 directions générant l'espace 3D".



**Figure 24** – Surfaces issues de squelettes de TPMS

- (a) Un des squelettes congruents du Schwarz P
- (b) Un des squelettes congruents du Schwarz G

En conclusion, nous avons mis en avant dans cette section l'intérêt des TPMS dans différents domaines scientifiques, et résumé les travaux réalisés autour de ces surfaces. Les TPMS sont un cas particulier des surfaces minimales où les motifs peuvent être dupliqués puis assemblés avec eux-mêmes. Le caractère minimal de ces surfaces a des applications dans des domaines où une perturbation physique se propage à travers des surfaces, comme en thermique et en acoustique, ou dans des domaines cherchant à décrire l'organisation de la matière comme en cristallographie et en biologie. De par leur forme, les TPMS ont aussi des applications en architecture. Le caractère tripériodique peut être utilisé en mécanique statique pour créer des pièces plus légères. Cependant, la nature minimale des surfaces n'est, dans ce cas-là, pas la propriété utilisée étant donné que les TPMS sont associées à une épaisseur non négligeable en mécanique, et que des efforts transitent à l'intérieur du volume correspondant. Néanmoins, en les combinant avec l'optimisation topologique, il est possible de créer des motifs inspirés des TPMS à des fins mécaniques. Enfin, il est possible d'obtenir une équation paramétrée des coordonnées cartésiennes d'un carreau d'une TPMS à partir de la paramétrisation de Weierstrass-Enneper, mais pour obtenir une équation continue à un motif entier, il est nécessaire d'utiliser une approximation par la méthode des surfaces de niveaux : cela permet d'obtenir une équation implicite approximant la surface et liant les coordonnées cartésiennes des points situés dessus.



### 1.3 Bilan de l'état de l'art

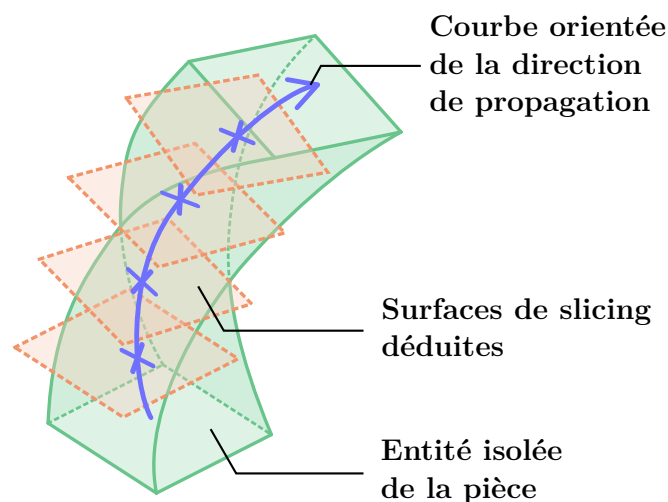
Le **Tableau 3** classe par thématique les différentes références en génération de trajectoire de la **Section 1.1**. Les références dont l'approche est similaire sont regroupées.

Calcul des arêtes de dépôt							
Détermination des couches de contour		Remplissage d'aires		Direction de propagation			
{Kulkarni et al. 1996 [52], Tata et al. 1998 [38], Siraskar et al. 2015 [53], Garashchenko et al. 2020 [57], Bhatt et al. 2020 [47]}  {Dong et al. 1999 [32], Pandey et al. 2003 [41], Flemmer et al. 2015 [42], Tang et al. 2016 [150]}  {Starly et al. 2005 [54], Flores et al. 2019 [60]}  {Crane et al. 2017 [64], Xie et al. 2022 [80]}  {Freitas et al. 2017 [51]}  {Chalvin et al. 2019 [55]}		{Kulkarni et al. 2000 [69], Zhang et al. 2015 [79], Zhao et al. 2018 [37], Freire et al. 2020 [56], Dai et al. 2018 [67], Xu et al. 2019 [66]}  {Hildebrand et al. 2013 [45]}  {Dolenc et al. 1994 [43], Lettori et al. 2022 [44]}		{Mizugaki et al. 1991 [73], Paul et al. 1997 [27], Jin et al. 2014 [34], Stathatos et al. 2019 [71], Wolfer et al. 2019 [70], Chen et al. 2020 [72], Bi et al. 2022 [74], Singh et al. 2022 [75]}  {Antonio 1994 [50]}  {Yigit et al. 2020 [81]}  {Ding et al. 2018 [58], Cheng et al. 2020 [78]}  {Ren et al. 2020 [86]}		{Hur et al. 1998 [28], Alexander et al. 1998 [29], Trimurthulu et al. 2004 [30], Canellidis et al. 2009 [31]}  {Rajagopalan et al. 2001 [68], Singh et al. 2001 [39], Sheng et al. 2003 [48], Zhang et al. 2004 [40]}  {Luo et al. 2016 [35]}  {Dai et al. 2018 [67], Xu et al. 2019 [66], Xie et al. 2022 [80]}	
Constituants d'une trajectoire DED							
Vecteurs outil		Reconstruction de courbes 3D		Constance de la distance pièce-outil			
{Zhang et al. 2015 [79], Freire et al. 2020 [56]}  {Kulkarni et al. 2000 [69], Campocasso et al. 2018 [82], Chalvin et al. 2019 [55], Bhatt et al. 2020 [47], Diourté et al. 2020 [62]}  {Pandey et al. 2003 [41], Flemmer et al. 2015 [42], Freitas et al. 2017 [51]}		{Antonio 1994 [50]}  {Lee 2000 [83], Kumar et al. 2014 [84]}  {Chen et al. 2003 [49], Pesko 2009 [46]}  {Freitas et al. 2017 [51]}		{Chen et al. 2003 [49]}  {Starly et al. 2005 [54], Flores et al. 2019 [60]}  {Chalvin et al. 2019 [55], Diourté et al. 2020 [62]}  {Yigit et al. 2020 [81]}			
Réorganisabilité de la trajectoire							
Minimisation du temps de parcours		Prise en compte de la thermique		Réorientation de l'outil (hors gestion des collisions)			
{Antonio 1994 [50]}  {Chen et al. 2003 [49]}  {Dreifus et al. 2017 [85], {Nguyen et al. 2020 [76]}  {Hamoud et al. 2022 [36]}		{Stathatos et al. 2019 [71], Ren et al. 2020 [86]}  {Wolfer et al. 2019 [70], Chen et al. 2020 [72]}  {Cheng et al. 2020 [78]}		{Kulkarni et al. 2000 [69], Campocasso et al. 2018 [82]}  {Zhang et al. 2015 [79]}  {Freitas et al. 2017 [51]}			

**Table 3** – Bilan bibliographique de la génération de trajectoire pour les procédés DED

À l'issue de ces sections, deux constats principaux résultent. Tout d'abord, les méthodes de génération de trajectoire actuelles prennent en compte un nombre de géométries trop restreint vis-à-vis des structures attendues. Les topologies de pièces sont relativement primitives, et prennent peu en charge les structures présentant de nombreuses discontinuités de matières (comme les surfaces trouées) ou des voisinages discontinus (telles les surfaces enchevêtrées). La forte dépendance des méthodes à la forme du substrat constitue un bridage supplémentaire qui menace leur application pour de la réparation de pièce, où le substrat correspond à la zone de rupture et dont la forme est arbitraire.

Deuxièmement, les méthodes reposent exclusivement sur un choix préalable d'une direction de propagation de la trajectoire et une anticipation de la forme des couches par tranchage ou paramétrisation dans les sous-espaces orthogonaux à cette direction. À l'issue de la synthèse bibliographique il est possible de constater que parmi les méthodes de génération de trajectoire présentées, toutes cherchent à anticiper les directions d'empilement des couches pour déterminer des surfaces de slicing ou des iso-courbes d'appui éventuellement adaptés afin de calculer la trajectoire. Si nécessaire, la pièce est partitionnée en régions dont la géométrie est suffisamment primitive pour faciliter cette tâche de prédiction. Pour chaque région considérée, cette prédiction se fait en déterminant une courbe selon laquelle la pièce est tranchée à différents intervalles (**Figure 25**). Cette courbe est déterminée par constats intuitifs (par exemple, dans le cas d'un cylindre ou d'un prisme, c'est l'axe complémentaire à la surface de la base qui est considéré), ou peut être issue d'une moyenne des courbes du flux géodésique s'appuyant sur la pièce et partant du substrat.

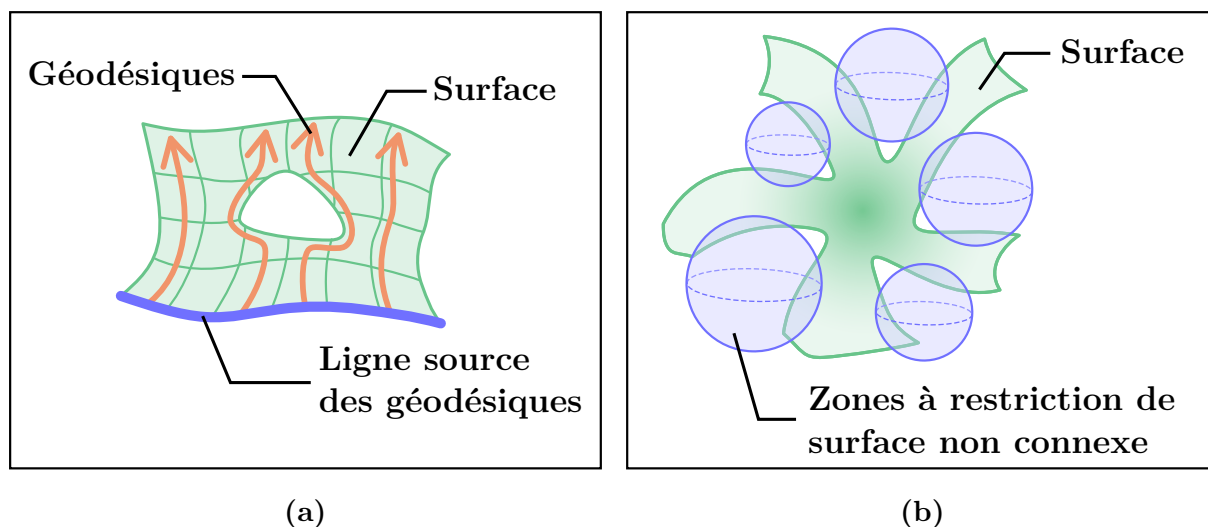


**Figure 25** – Prédiction des lieux de tranchage pour le calcul de trajectoire sur une entité

Cependant, la recherche de cette courbe n'est pas aisée dans le cas où le substrat n'est pas en un seul morceau sur l'entité primitive considérée. De plus, cela suppose qu'une telle courbe existe et soit en un seul morceau pour chaque région considérée, et à minima qu'une partition de la pièce en des entités vérifiant ces contraintes soit possible. Par exemple, dans le cas où l'entité est un disque plan dont le contour constitue le substrat

de départ, la propagation est radiale et donc il n'y a pas de direction globale, tandis que dans le cas où la géométrie est enchevêtrée sur elle-même, il y a plusieurs directions de propagations différentes et le découpage en entités n'est pas aisé. Si les méthodes les plus modernes permettent de prendre en compte des trous localisés, et des jonctions ou embranchements, et donc des courbes de tranchage en plusieurs morceaux, elles cherchent toujours à prédire les courbes de tranchage et ne sont actuellement viables que pour un nombre réduit d'embranchements, de jonctions ou de trous car ces topologies locales sont source d'augmentation de la complexité algorithmique des calculs numériques.

En effet, la présence de trous est un obstacle à la propagation des géodésiques, et engendre une distorsion de ces dernières, ce qui altère la courbe de tranchage obtenue par rapport à celle espérée (**Figure 26a**). Puis, les embranchements et jonctions sont le lieu de non-connexités locales (**Figure 26b**). Les méthodes de génération de trajectoire les plus abouties jusque-là ne sont capables de gérer des embranchements et des jonctions qu'à condition que des entités puissent être clairement identifiées.



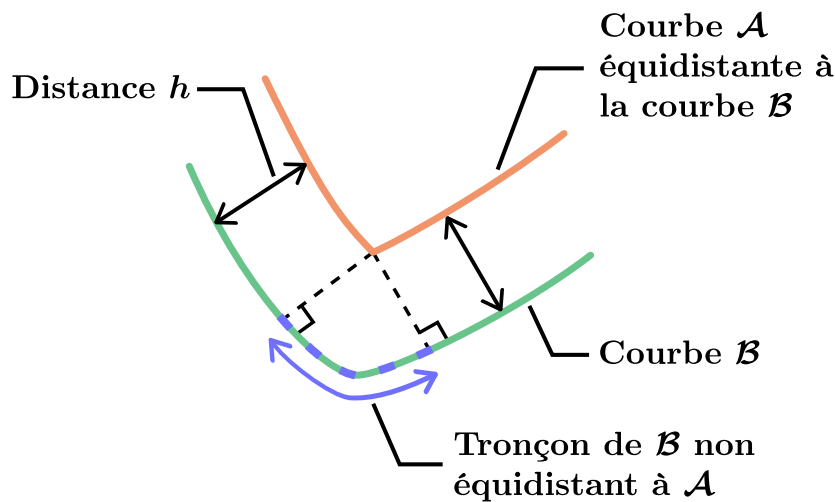
**Figure 26** – Obstacles de prédictibilité de trajectoire

- (a) Distorsion des géodésiques à la frontière d'un trou
- (b) Non-connexités locales des embranchements et jonctions

L'étape de recherche d'une direction de propagation est admise implicitement et son existence n'a jusqu'ici jamais été remise en cause par les méthodes de génération de trajectoire. S'il s'agissait d'une manière simple, efficace et pertinente aux premières heures de la fabrication additive, car le substrat initial était toujours plan et les machines exclusivement issues de technologies 3-axes pour des pièces fabriquées par niveaux de Z, les changements opérés à la fois sur les cinématiques de machines employées, la forme des substrats, et la forme des pièces ont changé la donne. On peut alors se demander si, pour une géométrie de pièce quelconque, il est possible de prédire les directions de propagation de toutes les couches suivantes. Pour répondre à ce questionnement, un raisonnement mathématique est proposé à l'**Annexe A3**.

Une couche  $C_n$  est déterminée par la couche qui la précède  $C_{n-1}$ . Chaque point d'une nouvelle couche étant situé à une distance euclidienne constante  $h$  de la couche qui la précède, l'application  $f_h$  qui permet l'obtention d'une nouvelle couche à partir de celle qui la précède est régie par cette hauteur de couche. Cette application est donc utilisée à chaque calcul d'une nouvelle couche de manière itérative, ce qui signifie qu'une nouvelle couche nécessite la connaissance de toutes les couches qui la précèdent, à moins que les involutions successives de l'application  $f_h$  se simplifient de manière triviale, ce qui est le cas si les distances euclidiennes correspondent toutes à des distances géodésiques sur la surface (**Annexe A3**). En effet, les distances géodésiques sont cumulatives : la monotonie du cumul permet de déterminer toute couche à partir d'une unique couche quelconque.

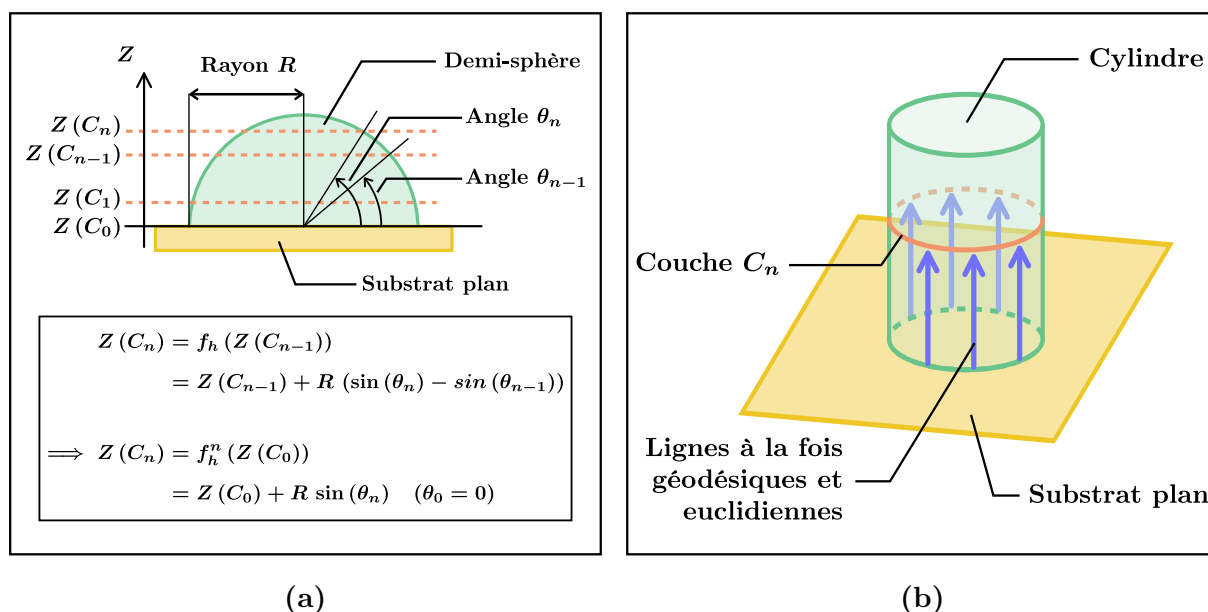
Une conséquence directe du caractère cumulatif des distances géodésiques est la possibilité d'inverser l'application qui à une couche donnée associe la couche suivante. L'inversion de cette application n'est pas systématique pour des distances euclidiennes : si une courbe  $\mathcal{A}$  est située à une distance constante  $h$  d'une courbe  $\mathcal{B}$ , alors tous les points de  $\mathcal{A}$  sont à une distance  $h$  du point le plus proche de  $\mathcal{B}$ , mais la réciproque est fautive (**Figure 27**).



**Figure 27** – Contre-exemple de non-réciprocité d'une courbe d'équidistance

Ainsi, la trajectoire à hauteur de couche fixée ne peut être prédite que dans des cas particuliers, s'il existe une simplification des coordonnées des  $n$  involutions de  $f_h$  valable sur toute la surface (**Figure 28a**), ou si toutes les distances euclidiennes calculées durant tout le processus de génération de trajectoire correspondent aussi à des distances géodésiques plongées dans la surface de la pièce considérée (**Figure 28b**). Dans le premier cas, la possibilité de simplification implique une invariance de géométrie locale en tout lieu de la pièce. Dans le deuxième cas, cela implique que toute direction d'empilement locale est colinéaire à une direction principale de courbure et dont la valeur est nulle : le profil local

de la surface dans le plan de courbure associé est donc une droite. Dans les deux cas, cela restreint grandement les possibilités en termes de topologie de la surface, et dépend aussi de la topologie et du lieu du substrat. Ainsi, si la forme des couches d'une pièce donnée est prévisible pour un substrat donné car les conditions d'un des cas particuliers sont respectées, le changement de la nature du substrat peut rendre caduque l'existence de ces conditions.



**Figure 28** – Cas de prévisibilité de la forme des couches

(a) Simplification triviale d'involutions

(b) Correspondance entre distances euclidiennes et géodésiques

En conclusion, dans le cas général, toute couche nécessite la connaissance de la couche qui la précède, et donc de toutes les couches qui la précèdent, pour être calculée. Cela implique que toute anticipation de la forme des couches ou des directions de propagation de la trajectoire pour un duo substrat-pièce donné nécessite le calcul de la trajectoire elle-même. Cette implication met en avant une des grandes limitations des méthodes traditionnelles : ces dernières présupposent une direction de propagation globale et la forme des plans - éventuellement courbés - à la seule connaissance de la couche d'intersection et avant le calcul même des couches. Or, si les distances euclidiennes ne suivent pas le profil de la pièce, plus le nombre de couches calculées augmente, plus l'écart entre la forme des couches et leur direction de propagation s'éloigne de celles présupposées. Les situations où il y a divergence trop importante entre propagation espérée et propagation effective se traduisent par une incapacité à calculer les couches suivantes.

Cela réduit ainsi grandement la complexité des surfaces pour lesquelles le slicing peut être appliqué. Le découpage en entités simples, s'il permet de réduire cet écart en décomposant la pièce en des entités plus simples, n'est pas systématique pour des pièces davantage complexes, et se fait au détriment de la minimisation du nombre de couches et

donc de la minimisation des départs et arrêts d'arc car le découpage en entités ne permet pas de considérer la pièce dans son entièreté, et donc d'envisager des couches de cordons continus et présents à la fois dans deux régions de découpage différentes. D'autre part, le découpage en entités ne résout pas les problèmes de jonctions, bifurcations et trous. Quelques travaux, qui proposent de combler ces manquements, sont limités à des pièces avec des directions de propagation évidentes – types structures en squelettes telles les tubulures ou les lattices – présentes en nombre modéré, et ne sont pas adaptés pour des pièces enchevêtrées car les problèmes de non-connexité locale ne sont pas pris en compte.

Enfin, la génération de trajectoire est un problème de résolution dont la solution dépend de la pièce dont on souhaite générer une trajectoire, mais aussi du substrat qui lui est associé. Ce dernier constitue les conditions initiales de la trajectoire que l'on souhaite obtenir sur une pièce donnée. Le changement du lieu du substrat influe sur les directions de propagation et donc la forme des couches de la trajectoire. La complexité de recherche de trajectoire ne dépend pas directement de la géométrie de la pièce à fabriquer ou de la topologie du substrat associé : c'est la nature de la configuration pièce-substrat qui influe sur cette complexité.

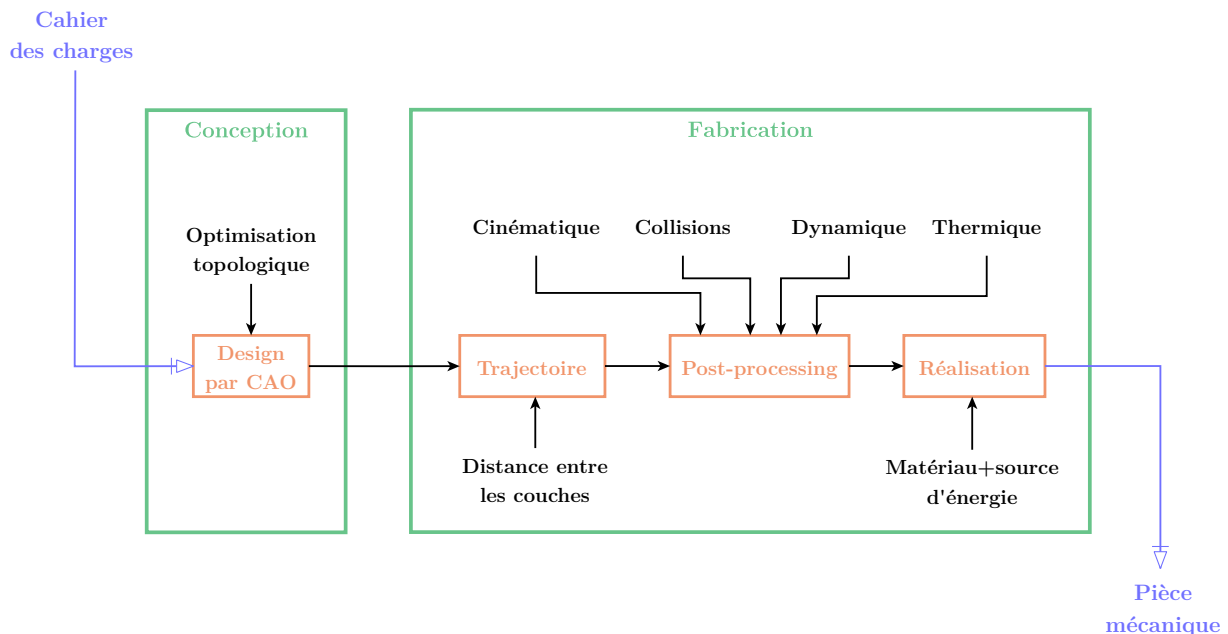
Comme expliqué dans l'**Introduction**, la génération de trajectoire est l'un des verrous à solutionner pour permettre à la fabrication additive d'évoluer efficacement sur le long terme sans recourir au développement d'une méthode de génération de trajectoire particulière à chaque nouveau design de pièce. Les méthodes actuelles, propres à des géométries types, ne fonctionnent pas ou mal pour les géométries quelconques. Plus encore, à géométrie fixée, les méthodes actuelles ne sont valides que pour une gamme de substrats de topologie relativement primitive.

## 1.4 Apports de la thèse

Les progrès en design de conception pour l'obtention de pièces mécaniques durable ont mis en avant l'utilisation d'outils d'optimisation topologique, de gradients de matériaux et d'ajout de structures de remplissage cellulaires pour atteindre les performances escomptées [150]. Cependant, toutes ces exigences supposent que toute pièce conçue doit être fabricable, et ce sans considérer les limitations cinématiques et dynamiques du robot de fabrication, le comportement du matériau lors du dépôt, les possibilités d'évitement de collision pièce-outil ainsi que toute considération trajectoiriste en ce qui concerne l'obtention d'un compromis entre constance de hauteur de couche et écart de profil entre la surface souhaitée et l'empilement théorique de cordons. Les considérations machine, matériau et trajectoiriste, si elles sont solutionnées, permettraient d'accroître la diversité des géométries réalisables [69,41].

Un schéma regroupant les principales étapes du processus de création d'une pièce mécanique par fabrication additive est présenté à la **Figure 29**. Usuellement, une pièce est créée à l'issue de la conception de son design et de sa fabrication. Le design est obtenu en étudiant un ensemble d'exigences mécaniques issues d'un cahier des charges. Puis, une trajectoire est calculée pour permettre d'obtenir une séquence de points successifs organisés et joints par des liaisons associées à des phases de dépôt de matière qui correspondent aux

déplacements de l'outil de dépôt. Cette trajectoire est ajustée par post-processing et est ensuite communiquée au robot, qui fabrique la pièce. La trajectoire après post-processing doit tenir compte des limitations cinématiques de la machine de fabrication ainsi que des collisions, et si possible de sa dynamique et du comportement thermique du matériau pour permettre une fabrication optimale.



**Figure 29** – Principales étapes usuelles de réalisation d'une pièce mécanique par fabrication additive

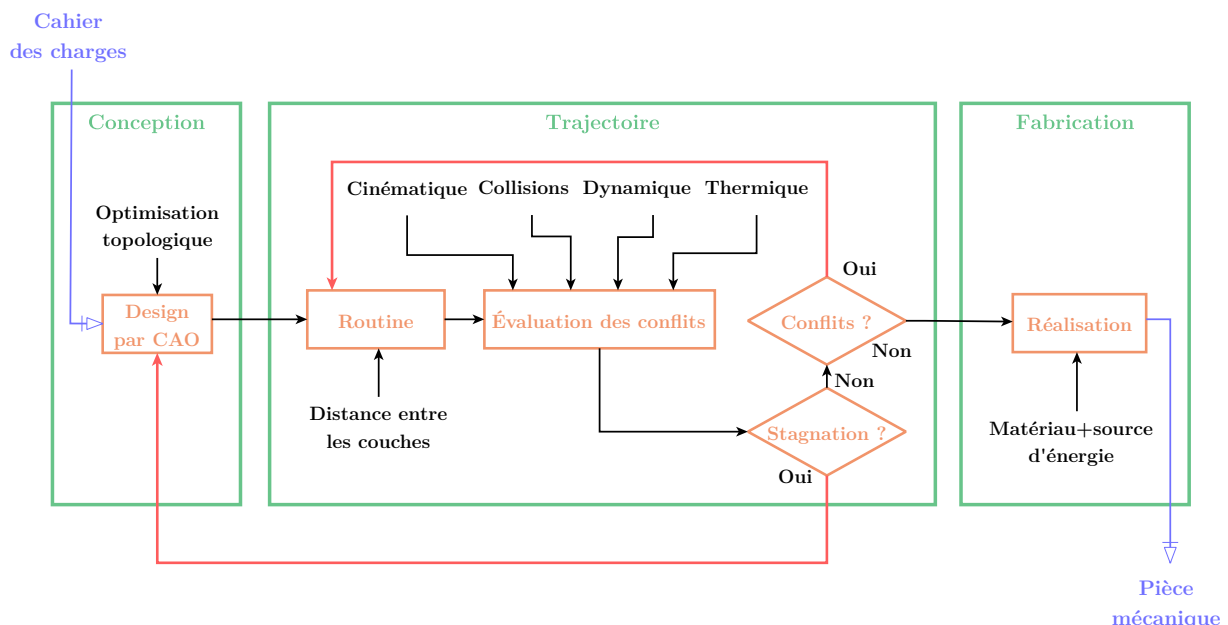
Cependant, aucune rétroaction n'est réalisée sur la chaîne de conception. À chaque nouvelle étape, la sortie de l'étape précédente est utilisée telle quelle sans être remise en question, ce qui présuppose que la sortie donnée convient. L'étape de post-processing de la trajectoire permet d'ajuster la trajectoire calculée afin d'en obtenir une nouvelle qui puisse être utilisée par le robot sans que ce dernier ne rencontre de complication, telle qu'une zone de singularité, une fin de course d'axe ou une collision. Cet ajustement se fait exclusivement sans modifier la forme générale des couches : il modifie l'ordre des points au sein même d'une couche pour des considérations de temps de trajet [49] ou thermique [71,86] et lisse la trajectoire en réorientant éventuellement l'outil sur les points successifs pour éviter les collisions ou éviter les mouvements brusques [27,51,151].

Or, cette démarche n'est valide que s'il existe effectivement une solution de trajectoire avant post-processing dont un ajustement viable serait possible. En procédant sans rétroaction, le choix de la trajectoire initiale se base uniquement sur des critères de direction préférentielle facilitant la génération d'une trajectoire qu'elle qu'en soit sa forme, pourvu qu'elle recouvre entièrement la surface à fabriquer. C'est notamment dans ce sens que s'inscrit le découpage en entités avant calcul de trajectoire [39,80]. La prise en compte de la cinématique et de la dynamique du robot, ainsi que de la thermique du matériau

sont un enjeu majeur pour accroître le type de géométries réalisables par fabrication additive [69,41,150], et ainsi apporter une amélioration majeure attendue d'un point de vue software parmi les verrous principaux de la fabrication additive [1] mentionnés dans l'**Introduction**.

Quelques travaux de recherche ont mis en lumière la pertinence de tenir compte des collisions [47], ou de la thermique [70] dès la phase de génération de trajectoire avant post-processing, mais la génération des couches se fait de manière itérative, et sans retour en arrière. Dès qu'une couche est calculée, la suivante est calculée de manière optimale vis-à-vis de la précédente, et son optimisation se fait sans considérer toute éventuelle modification de la couche précédente : il n'est par exemple pas possible de détériorer légèrement la qualité de la trajectoire de la couche inférieure en vue d'obtenir une couche suivante de bien meilleure qualité et ainsi obtenir une trajectoire globale de meilleure viabilité moyenne.

Ainsi, la rétroaction sur la chaîne de fabrication constitue un enjeu majeur. Il est possible d'approfondir le raisonnement en considérant aussi le cloisonnement entre les étapes de création du design et de fabrication. L'élargissement de la rétroaction sur la chaîne complète de la réalisation – qui inclut les étapes de conception et de fabrication – d'une pièce mécanique permettrait d'élaborer des designs qui ne tiendraient plus uniquement compte de critères de charge mécanique, mais aussi de la possibilité de fabrication. L'ajout de la rétroaction sur le processus de création d'une pièce mécanique par fabrication additive est illustré à la **Figure 30**.



**Figure 30** – Ajout de la rétroaction sur la chaîne de réalisation par fabrication additive



Actuellement, dès qu'une géométrie est créée, il est admis qu'il existe nécessairement une manière de la fabriquer, mais il ne s'agit que d'un postulat. En outre, la validité de cette assertion suppose qu'il est possible d'imaginer n'importe quelle forme d'outil et n'importe quelle cinématique de machine pour fabriquer la pièce. Or, dans la pratique, la machine et la forme de l'outil sont fixées. Enfin, obtenir une pièce n'implique pas la qualité de la fabrication. L'extension de la rétroaction à la création du design permettrait d'affiner la géométrie d'une pièce pour en permettre la fabrication, tout en s'assurant qu'elle remplisse le cahier des charges d'un point de vue fonctionnel. Cela garantirait aussi un apport d'entrée supplémentaire aux fonctions d'optimisation topologiques permettant l'obtention de designs mécaniquement viables et fabricables.

En conclusion, le développement d'une méthode de génération de trajectoire apte à la rétroaction et la plus versatile possible constitue un besoin primordial pour la fabrication additive. Pour un objet, la versatilité qualifie son adaptabilité à un grand nombre de situations et d'usages. Ici, la versatilité s'exprime par une capacité à générer une trajectoire quelle que soit la forme de la surface et quelle que soit la nature du substrat. La souplesse de la versatilité permet d'envisager une réorganisation inter-couches de la trajectoire, en rendant possible la modification des couches précédentes pour ainsi prendre en compte directement lors du calcul de la trajectoire les éventuels feedbacks issus de contraintes cinématiques, dynamiques, thermiques ou de collisions pour une machine de dépôt et un matériau d'apport donnés. L'aptitude à la rétroaction constitue la prise en compte des contre-indications de positionnement local de l'outil ou d'ordre des points dans la séquence de la trajectoire issues de la physique de la machine et du matériau d'apport. Cette aptitude va de pair avec la versatilité. En effet, en étant en mesure de générer une trajectoire locale quelle que soit la géométrie du lieu et quelle que soit la forme de la matière d'appui locale sur laquelle repose le dépôt, alors davantage de topologies de couches sont envisageables et il est ainsi concevable d'adapter entièrement la trajectoire aux contraintes physiques de fabrication. De cette manière, le calcul de la trajectoire agit comme un agent robuste sur la chaîne de fabrication qui n'ajoute pas de contrainte supplémentaire et participe à solutionner les contraintes des étapes ultérieures, ce qui augmente le type de géométries de pièces réalisables.

C'est dans ce contexte scientifique que s'inscrivent les travaux de thèse développés et présentés dans les prochains chapitres. La présente thèse propose une méthode qui a pour vocation de constituer un moteur de génération de trajectoire (**Figure 31**) sur des surfaces sans épaisseur et qui puisse être utilisée quelle que soit la configuration pièce-support pour générer une trajectoire, et donc ainsi anticiper tout type de recalcul de trajectoire local en une région donnée de la pièce. Les zones de recouvrement correspondent à l'ensemble des régions de la surface recouverte par des couches à distance euclidienne constante. Les zones de reliquat correspondent aux régions non recouvertes car leur ordre de grandeur est inférieur à la hauteur de couche. Ces zones peuvent être ultérieurement recouvertes par utilisation d'une hauteur de couche plus petite. La méthode de génération de trajectoire permet de plus d'obtenir des couches à hauteur de couche constante pour être compatible avec les procédés DED. Elle est adaptée à des surfaces d'entrée au format STL, mais pourrait être adaptée pour toute surface d'entrée au format facettisé.

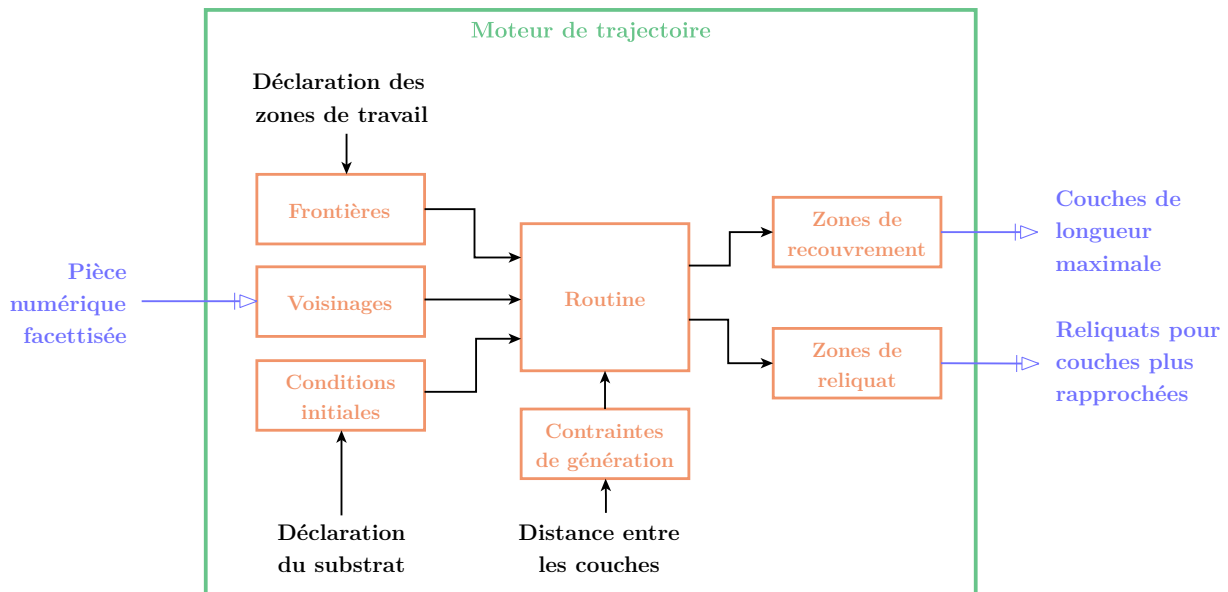
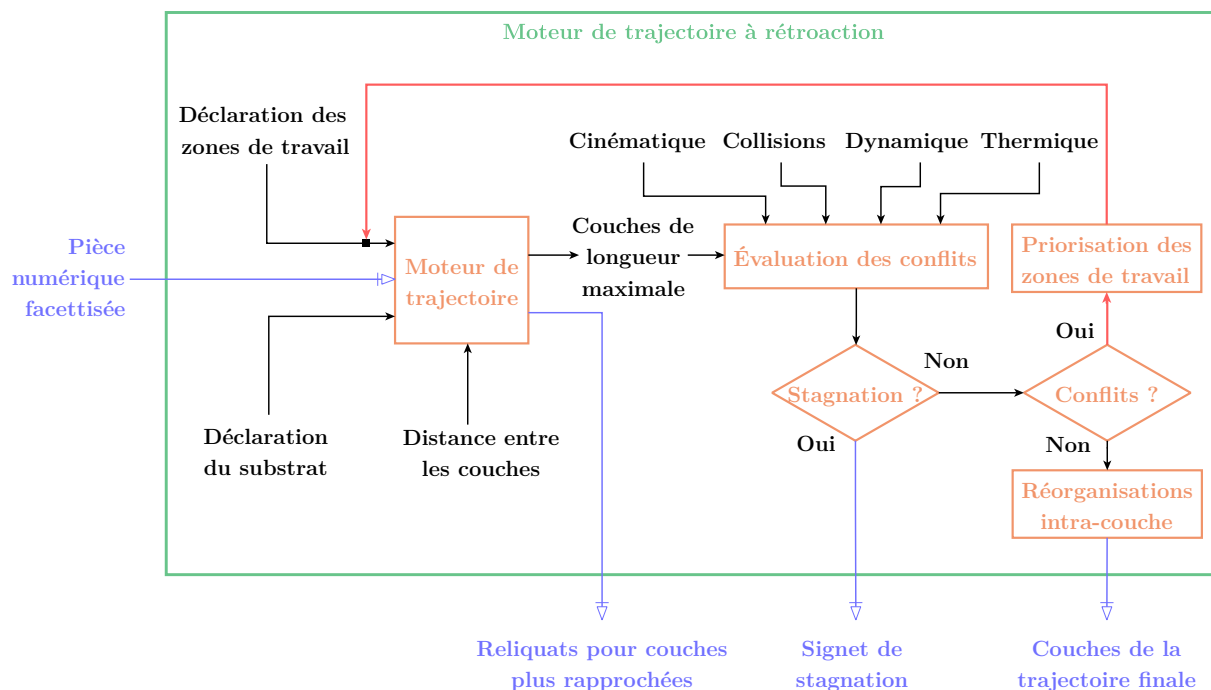


Figure 31 – Contribution principale de la thèse

La routine développée propose une alternative innovante de génération de trajectoire en propageant les couches à travers des considérations locales, et non globales. Elle constitue ainsi une contribution qui s’émancipe du biais des méthodes usuelles qui nécessitent la connaissance de directions globales de fabrication avant le calcul de la trajectoire en vue de sa propre obtention, et brident ainsi la diversité des géométries qu’il est possible d’obtenir. La méthode algorithmique proposée détermine un ensemble de couches respectant le critère de distance euclidienne et recouvrant entièrement une surface sans générer de matériau support, quel que soit le type de géométrie – indépendamment de sa complexité en termes d’enchevêtrement, de non-connexités locales, de présence de trous – et quelles que soient la forme du substrat et sa position vis-à-vis de la pièce. Elle prend aussi en charge des substrats en plusieurs morceaux placés en différentes régions de la pièce à fabriquer. En outre, elle permet aussi l’obtention d’un vecteur outil associé à chaque point de la trajectoire. Enfin, l’utilisation de voisinages locaux de la méthode algorithmique a été pensée en anticipant toute adaptation future à de la génération de trajectoire pour du remplissage de volume, ce qui inclut donc l’obtention de surfaces épaisses.

Enfin, soulignons que la méthode de génération de trajectoire développée permet de propager un ensemble de couches sur une surface, et d’y associer une orientation d’outil sur tout type de morphologie de surface triangulée spécifiée en entrée. Il est donc évident que son utilisation directe sur une surface entière ne garantit pas nécessairement un chemin qui tienne compte des contraintes de diffusion thermique du matériau, des limitations cinématiques et dynamiques du robot de fabrication, ou qui évite toute collision. C’est la capacité de combiner cette méthode algorithmique à la rétroaction issue des contre-indications du matériau et de la machine de fabrication qui permet d’en tenir compte en appliquant la routine de calcul successivement sur des régions délimitées de la pièce et ainsi permettre une adaptation inter-couches de la trajectoire (**Figure 32**). Ainsi, la génération de trajectoire n’est pas découplée des considérations thermiques, cinématiques,

dynamiques et de collisions lorsqu'elle est réappliquée dans les régions délimitées déterminées. L'organisation des régions lors de la rétroaction peut être envisagée en se basant sur une priorisation issue d'études thermiques adaptant éventuellement des travaux déjà existants déjà mentionnés précédemment [71,78,86]. De même, la prise en compte des collisions en off-line [152] ou en temps réel [153], l'évitement de singularités en off-line [154] voire la prise en compte de la dynamique du robot en temps réel [155] ont déjà fait l'objet de travaux qui pourraient être considérés lors de la mise en place de la rétroaction.



**Figure 32** – Application de la rétroaction pour l'obtention de la trajectoire finale

Les travaux de thèse se concentrent exclusivement sur la création d'un moteur versatile de génération de trajectoire, et ne portent pas sur la détermination des sous-régions où l'appliquer par rétroaction. En effet, la première tâche constitue un défi important à lui seul, qui nécessite bon nombre de considérations. La détermination des sous-régions constitue une piste d'amélioration qui ne fait pas l'objet des travaux présentés dans cette thèse. Ainsi, la méthode de génération de trajectoire est appliquée sur des surfaces entières, ce qui, même si cela ne garantit pas nécessairement l'évitement de collisions ou de singularités pour les simulations effectuées, permet de valider la robustesse de la méthode, ce qui est l'objectif principal recherché. Néanmoins, des simulations ont été réalisées en appliquant la routine successivement sur différentes régions disjointes d'une même surface pour valider l'aptitude de la routine algorithmique à être combinée à de la rétroaction. Cette thèse propose une démarche exclusivement théorique et numérique validée par des simulations et démonstrations mathématiques. Elle s'inscrit pleinement dans l'objectif d'apporter une contribution au niveau software de la fabrication additive dont, comme expliqué dans l'**Introduction**, le manque de solutions robustes et versatile réduit fortement les types de pièces ou de substrats envisageables pour cette catégorie de procédés [1].

Le **Tableau 4** résume les contributions de la thèse et met en avant leur pertinence vis-à-vis de l'avancement des outils disponibles pour la génération de trajectoire en fabrication additive DED observés dans la littérature.

Catégories		Évaluations des avancées	Apports de la thèse
Calcul des arêtes de dépôt	Détermination des couches de contour	+	✓
	Remplissage d'aires	++	✗
	Direction de propagation	–	✓
Complexité substrat-pièce	Topologie de la pièce (trous, enchevêtrement)	– – –	✓
	Pluralité des directions de propagation	–	
	Connexité de la pièce	– – –	
	Type de substrat (plan, proche d'un plan ou arbitraire, pluralité)	– –	
Constituants de trajectoire DED	Vecteurs outil	–	✓
	Reconstruction de courbes 3D	–	✓
	Constance de la distance pièce-outil	+	✓
Réorganisabilité de la trajectoire	Minimisation du temps de parcours	+++	✗
	Prise en compte de la thermique	+	✗
	Réorientation de l'outil (hors gestion des collisions)	–	✗

**Table 4** – Contributions de la thèse

La méthode proposée dans cette thèse permet la détermination d'arêtes de dépôt aptes à répondre aux exigences des procédés DED et est applicable à toute complexité de surface ou de pièce facettisée en s'affranchissant d'une quelconque recherche de direction de fabrication. La réorganisabilité de la trajectoire n'est pas au cœur des travaux car permise par la compatibilité de la méthode à la rétroaction de génération de trajectoire. Dans une région délimitée d'une surface, la trajectoire calculée minimise le nombre de cordons déposés, et donc en partie le temps de dépôt. La détermination de ces régions se veut être conditionnée par une priorisation issue de constats de propagation thermique et d'apparition de collisions au cours du calcul de la trajectoire.

La génération de trajectoire sans utilisation de direction de fabrication pour déclencher le recouvrement constitue l'élément central de la méthode développée. L'appui sur des directions de propagation par les méthodes usuelles de génération par slicing, géodésiques ou réseaux d'iso-courbes préconditionne la direction de recherche de trajectoire en amont. Cela peut aboutir à des difficultés voire impossibilités de génération de trajectoire pour des géométries de pièces élaborées ou des configurations pièce-substrat complexes. Le chapitre suivant permet notamment d'illustrer ce phénomène.



# Chapitre 2

## Trajectoires et paramétrisation

Le **Chapitre 1** a permis de mettre en avant les limitations principales des méthodes de tranchage usuelles pour l'obtention de trajectoires adaptées à des combinaisons pièce-substrat de complexité significative. Ce tranchage s'effectue soit par l'utilisation de surfaces de slicing correspondant à des plans, éventuellement courbés, permettant d'extraire des courbes d'intersection avec la pièce à fabriquer, soit par l'utilisation directe d'équations décrivant des réseaux d'iso-courbes situés sur la pièce à fabriquer à condition que cette dernière soit décrite dans sa globalité par une même équation paramétrisée continue. Dans les deux cas, il s'agit de méthodes visant à obtenir des familles de courbes dont la forme se rapproche plus ou moins de la forme des couches attendues pour la trajectoire finale. Puis, ces courbes sont utilisées comme base de travail pour la recherche des courbes correspondant aux couches finales. Pour une adaptation aux procédés DED, une distance euclidienne constante entre les couches successives est aussi recherchée.

Comme souligné à la **Section 1.3**, l'obtention de telles courbes se fait en déterminant en amont des directions de propagation basées exclusivement sur des constats issus de la direction du substrat ou sur un découpage en entités sommaires. Comme évoqué, cela soulève des questionnements majeurs. Tout d'abord, ces constats ne sont possibles qu'à condition qu'une direction puisse être extraite du substrat ou que la pièce à fabriquer puisse effectivement être partitionnée en entités sommaires. Dans le cas inverse, la génération de trajectoire ne peut être déclenchée par de telles méthodes. Deuxièmement, cela présuppose qu'il soit nécessairement possible d'obtenir une trajectoire finale en utilisant les familles de courbes issues du tranchage préalable, et que les problèmes d'optimisation numérique de recherche de points convergent toujours. La possibilité et la vitesse de convergence constituent des éléments induits par la combinaison pièce-substrat et la distance souhaitée entre les couches.

Le **Chapitre 2** s'organise en quatre sections. Il a pour objectif de mettre en avant la corrélation nécessaire entre forme des iso-courbes et direction d'empilement des couches pour assurer la convergence des méthodes de génération de trajectoire par paramétrisation. Cela est mis en avant par une application directe sur le Schwarz P, qui est une des TPMS introduites à la **Section 1.2**. La méthode de génération de trajectoire choisie pour le cas d'application se base sur l'utilisation de réseaux d'iso-courbes. Comme rappelé précédemment, les constats de convergence sont transposables à la méthode d'extraction

de courbes d'intersection par slicing. Le but est de mettre en avant, par ce cas d'application, que la convergence issue des méthodes de tranchage usuelles n'est pas systématique, et que cela restreint par conséquent la gamme de complexités de géométries – dont font notamment partie les TPMS – envisageables pour les procédés de fabrication additive dès la phase de génération de trajectoire, avant même la phase de fabrication.

La première section expose comment approximer le Schwarz P par une équation implicite. Les outils analytiques de manipulation de surfaces décrites par des équations implicites et paramétriques sont discutés, ainsi que les avantages et inconvénients de l'implication et de la paramétrisation. La deuxième section décrit la paramétrisation du Schwarz P. Elle explique comment obtenir un réseau de courbes se propageant selon une unique direction. Cette paramétrisation est utilisable à condition que le substrat associé soit une surface continue relativement similaire à un plan de normale proche à la direction de propagation du réseau d'iso-courbes et qu'il présente les mêmes symétries que celles utilisées lors de la paramétrisation du motif. Dans le cas où les couches tendent à être parallèles au réseau de courbes utilisé pour la propagation des couches, des problèmes de convergence apparaissent. Il est possible de forcer la convergence par l'implémentation de bornes de recherche spécifiques, mais valides uniquement pour la surface donnée et non transposables pour des configurations pièce-substrat différentes. La troisième section présente l'algorithme de génération de trajectoire associé au Schwarz P. Ce dernier est valable uniquement pour un substrat plan normal à la direction de propagation du réseau d'iso-courbes, et pour l'obtention de la trajectoire d'un unique motif. Enfin, la dernière section discute de la convergence et du temps de calcul. Des informations supplémentaires sur la génération de trajectoire par une méthode quelconque sont fournies, telles que la déformation et l'assemblage de trajectoires. La dernière partie de cette section fournit des arguments relatifs au choix de la surface d'entrée pour le moteur de génération de trajectoire présenté au **Chapitre 3**.

### 2.1 Implication et paramétrisation

Une trajectoire nécessite l'utilisation de coordonnées de points et de vecteurs pour déterminer les positions et orientations successives de l'outil de dépôt au cours du processus. L'approximation d'une forme géométrique décrite par une équation, dès lors que cela est envisageable, représente l'objet dans sa globalité. Pour avoir des informations locales, des routines de calcul sont à appliquer. Les équations décrivant un objet géométrique sont soit sous forme implicite, soit sous forme paramétrique.

Le Schwarz P peut être approximé par une équation implicite (**Tableau 2**). Or, dès lors qu'il s'agit de générer une trajectoire à partir d'équations, les routines de calcul se basent généralement sur des méthodes d'interpolation qui utilisent des équations paramétriques [156,157]. Cela s'explique notamment par le fait que les équations implicites fournissent moins d'informations locales que les équations paramétriques pour la description d'une même variété différentielle.

En effet, dans le cas particulier de la description d'une courbe – qui est une variété différentielle d'ordre un – plongée dans un espace de dimension deux, les formes implicites fournissent autant d'informations vectorielles que les équations paramétriques pour la décrire (**Tableau 5**). Cependant, toute forme implicite lie les coordonnées des points situés sur la variété par une seule équation, tandis que les modèles paramétriques décrivent chaque coordonnée par une équation liée uniquement aux équations des autres coordonnées par l'utilisation d'un ou plusieurs mêmes paramètres variables.

Information géométrique locale 2D	Implicitation	Paramétrisation
Équation	$F(x, y) = 0$	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$
Vecteur normal $\vec{N}$	$\left[ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right]$	$[f'(t), g'(t)]$
Vecteur tangent $\vec{T}$	$\left[ -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right]$	$[-g'(t), f'(t)]$

**Table 5** – Informations géométriques locales d'une courbe 2D définie par une équation

Une première implication est qu'une équation implicite ne permet de décrire que des variétés différentielles de dimension  $n - 1$  plongées dans un espace de dimension  $n$ . Une deuxième implication concerne le type d'informations qui en sont extricables (**Tableau 6**).

Information géométrique locale 3D	Implicitation	Paramétrisation
Équation	$F(x, y, z) = 0$	$\begin{cases} x = f(t, u) \\ y = g(t, u) \\ z = h(t, u) \end{cases}$
Vecteur normal $\vec{N}$	$\left[ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right]$	$\left[ \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right] \times \left[ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right]$
Vecteur tangent $\vec{T}$	-	$\begin{cases} \vec{T}_t = \left[ \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right] \\ \vec{T}_u = \left[ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right] \end{cases}$

**Table 6** – Informations géométriques locales d'une surface 3D définie par une équation



Pour une forme implicite, l'équation ne permet que d'extraire une information géométrique issue de multivecteurs (notion rappelée à l'**Annexe A2**) de même dimension que la variété différentielle qu'elle décrit. Au contraire, les modèles paramétriques instaurent autant de paramètres que la dimension de la variété à décrire, et chaque paramètre permet d'extraire un monovecteur. Ces monovecteurs peuvent être combinés pour déterminer les informations géométriques issues de multivecteurs de dimension supérieure.

Ainsi, cela impacte directement la manipulation de surfaces pour la génération de trajectoire, qui sont des variétés différentielles d'ordre deux. Les modèles paramétriques sont davantage adaptés pour de la génération de trajectoire par réseaux d'iso-courbes. Le processus d'obtention d'une équation paramétrique est appelé "paramétrisation", tandis que celui résultant à une équation implicite est désigné par le terme "implication". L'implication et la paramétrisation d'une équation possèdent leurs propres avantages et inconvénients [158], qui sont résumés au **Tableau 7**.

	<b>Implication</b>	<b>Paramétrisation</b>
<b>Avantages</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Toute surface décrite par une équation paramétrique rationnelle peut être implicite</li> <li>2. Possibilité de représenter des courbes fermées à plusieurs variables ainsi que les pentes infinies</li> <li>3. Prédilection à la classification des points (modélisation solide, contrôle d'interférences entre surfaces)</li> <li>4. Prédilection à la représentation des intersections</li> <li>5. Possibilité d'ajout d'offsets pour ajuster la représentation</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Toute quadrique non dégénérée, ainsi que toute surface cubique ayant au plus un point singulier de n'importe quel type peut être paramétrisée</li> <li>2. Possibilité de représenter des courbes fermées à plusieurs variables ainsi que les pentes infinies</li> <li>3. Prédilection à la génération de courbes composites</li> <li>4. Grande flexibilité : forte adaptation et aisance de manipulation des formes libres</li> <li>5. Indépendance du système de coordonnées de l'espace de plongement : facilité de manipulation et du traçage</li> </ol>
<b>Inconvénients</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Exigences quasi-systématiques en temps de calcul et en mémoire informatique</li> <li>2. Degré de la forme implicite plus élevé que celui de la forme paramétrique correspondante</li> <li>3. Difficulté à ajuster pour décrire des formes quelconques</li> <li>4. Dépendance du système de coordonnées de l'espace de plongement : complexité de manipulation et du traçage</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Toute surface décrite par une équation implicite ne peut pas toujours être paramétrisée (en particulier, les surfaces algébriques)</li> <li>2. Difficulté de caractérisation des intersections induite par la grande flexibilité</li> <li>3. Difficulté de classification des points induite par la grande flexibilité</li> </ol>

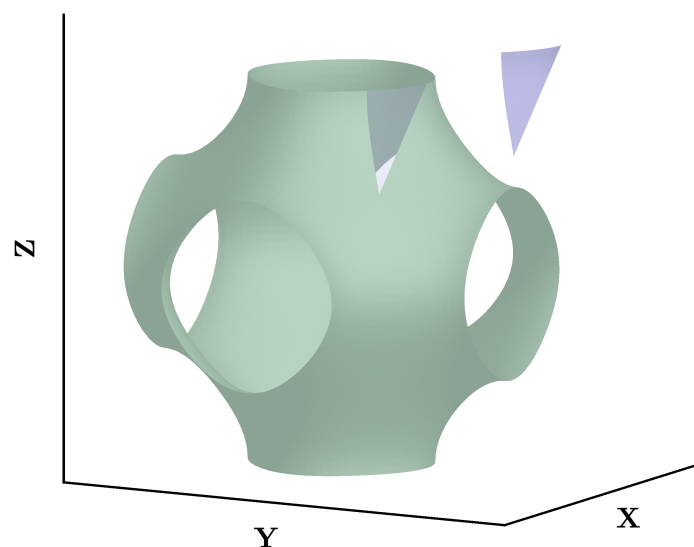
**Table 7** – Avantages et inconvénients des équations de surfaces

Dans le cas de la génération de trajectoire, l'espace de plongement est de dimension trois, donc les formes implicites sont tout autant envisageables que les formes paramétriques pour décrire les surfaces. Mais comme expliqué précédemment, les formes implicites ne permettent que d'extraire les informations vectorielles issues de bivecteurs. Il est ainsi possible de déterminer les vecteurs normaux à la surface qui sont directement issus de bivecteurs, mais pas de réseaux de vecteurs tangents d'iso-courbes. Par conséquent, l'utilisation d'une forme paramétrique est plus pratique pour générer une trajectoire. Il s'agit donc de transformer l'équation implicite du Schwarz P en forme paramétrisée pour générer ensuite des trajectoires de dépôt.

## 2.2 Paramétrisation du Schwarz Primitif

L'objectif de cette section est de paramétriser le Schwarz P à partir de son équation implicite. Une paramétrisation, si elle existe, n'est pas unique. Comme rappelé en introduction du **Chapitre 2**, une paramétrisation conditionne la direction de propagation des iso-courbes sur la surface, et donc elle n'est valide que pour une gamme restreinte de substrats en accord avec cette direction de propagation. Ici, la paramétrisation recherchée doit être apte à de la génération de trajectoire sur un substrat plan en contact avec la frontière inférieure du motif.

La paramétrisation de Weierstrass-Enneper sur le Schwarz P ne permet d'obtenir une équation bi-paramétrée que sur un carreau minimal [134] (**Figure 33**). De plus, sur la bi-paramétrisation recherchée un des paramètres est utilisé comme support de propagation. Ainsi, les iso-courbes de ce paramètre doivent être suffisamment proches de la direction d'empilement des couches pour faciliter la propagation de la trajectoire. Aussi, une nouvelle paramétrisation doit être effectuée pour obtenir un couple de paramètres dont l'un respecte cette condition.



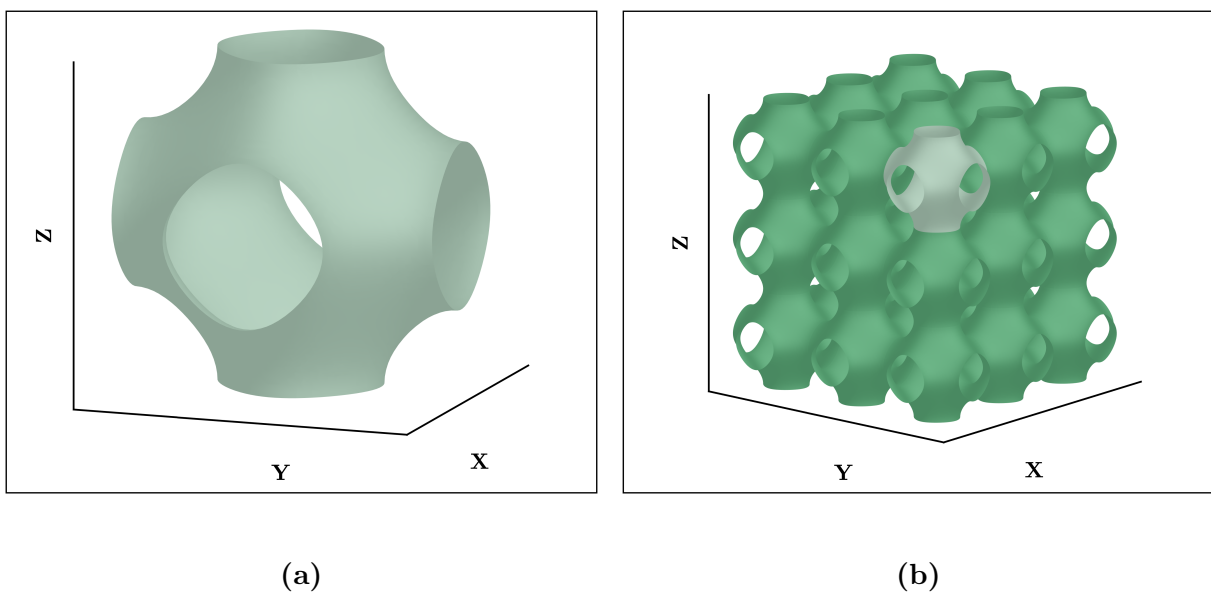
**Figure 33** – Carreau minimal du Schwarz P

La paramétrisation proposée se base sur l'équation implicite approximant la surface du Schwarz P. L'équation approximant le Schwarz P a une forme relativement simple (**Équation 4**). Le motif est inclus dans un cube de côté  $2\pi$ . L'équation peut être transformée pour inclure un facteur d'homothétie que l'on note ici  $\lambda$  (**Équation 5**). Ce facteur permet de moduler la taille du motif de manière homogène dans les trois directions orthogonales  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  de l'espace. Pour un facteur  $\lambda$  donné, le motif est alors inclus dans un cube de côté  $2\pi/\lambda$ .

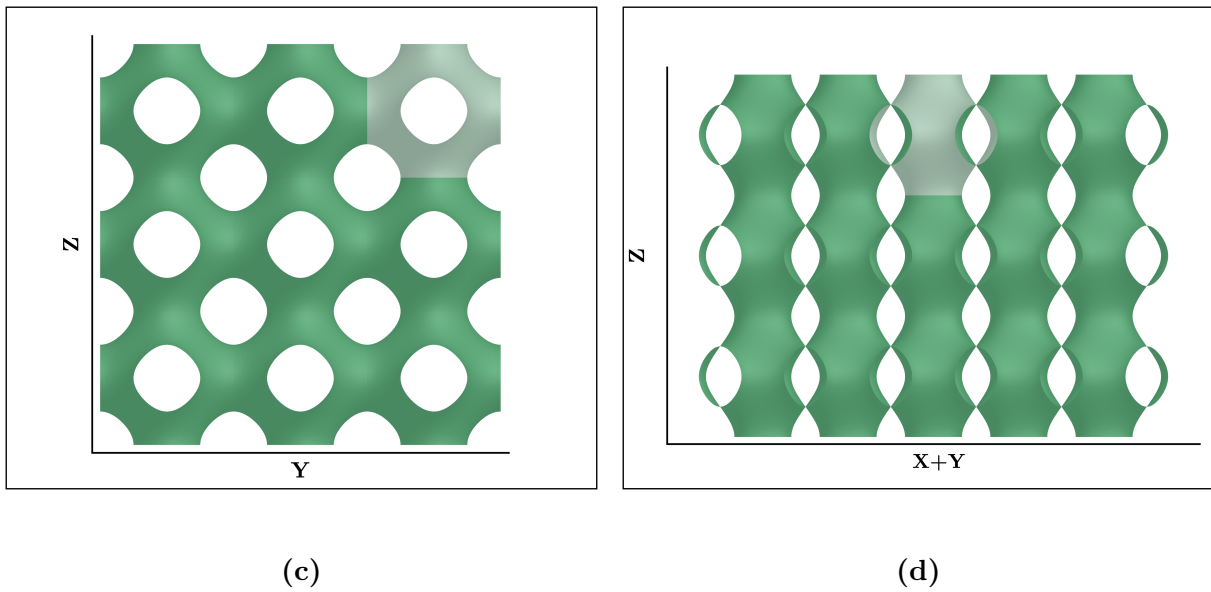
$$\cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 0 \quad (4)$$

$$\cos(\lambda X) + \cos(\lambda Y) + \cos(\lambda Z) = 0 \quad (5)$$

Ces deux équations implicites décrivent des réseaux infinis de Schwarz P (**Figure 34**). Le Schwarz P possède six trous mais est de genre cinq. Les trous caractérisent une difficulté éventuelle sur la génération de trajectoire étant donné qu'ils engendrent des départs et arrêts de dépôt. La paramétrisation doit être telle qu'un des réseaux d'iso-courbes contourne ces trous. Ici, les trous concernés par ce problème sont les quatre trous latéraux. En effet, les deux trous situés au niveau inférieur et supérieur du motif sont à l'interface de plans de normale  $\vec{Z}$ . Or, le substrat associé à la paramétrisation recherchée est un plan de normale  $\vec{Z}$ . De par la forme du motif et le substrat considéré, la direction de propagation des couches attendue est colinéaire à l'axe  $\vec{Z}$ . Cela signifie que seuls les trous latéraux sont des sources potentielles de discontinuité des couches pour cette combinaison pièce-substrat.



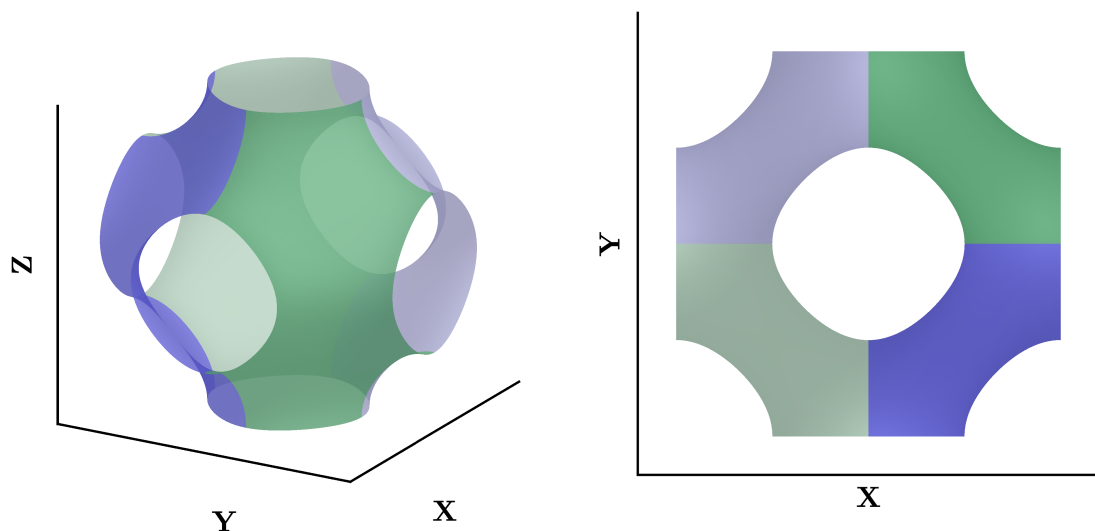
**Figure 34** – Réseau de Schwarz P  
 (a) Motif unitaire (b) Vue trimétrique



**Figure 34** – Réseau de Schwarz P

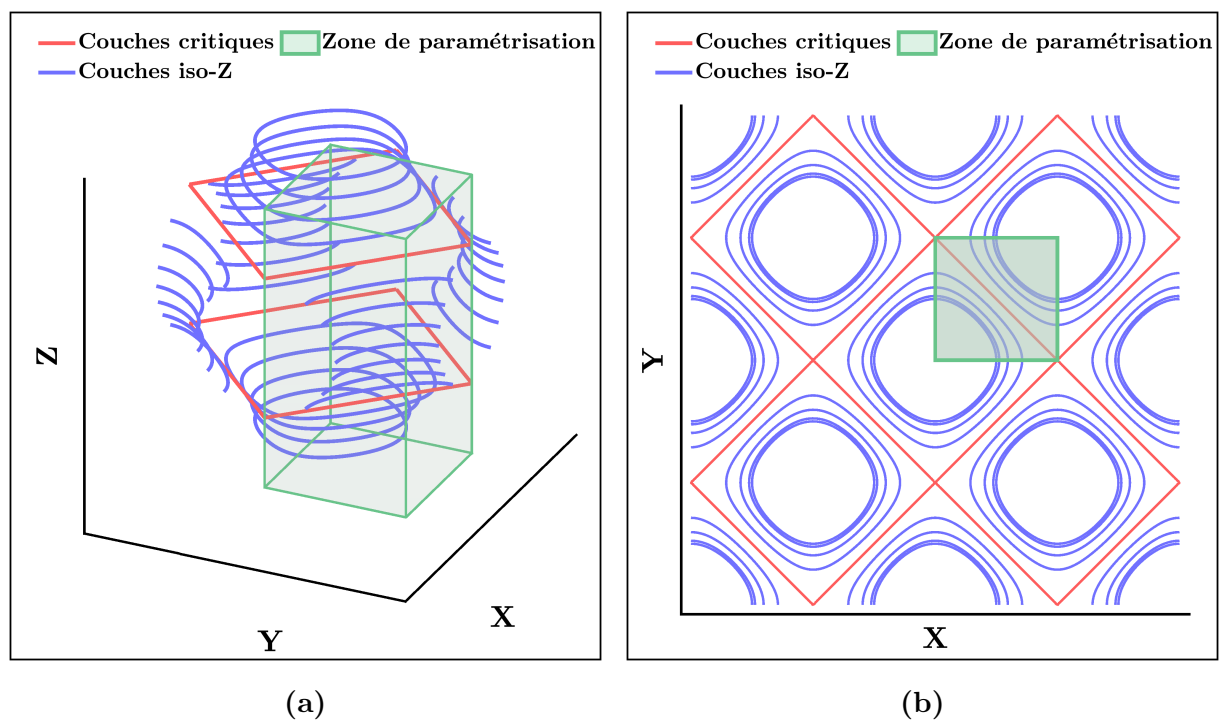
(c) Vue dans le plan de normale  $\vec{Z}$  (d) Vue dans le plan de normale  $\vec{X} + \vec{Y}$

Au vu de l'allure du motif, le motif peut être divisé en quatre parties identiques par rotation autour de l'axe  $\vec{Z}$  (**Figure 35**). Il s'agit d'une des propriétés spécifiques au Schwarz P, qui n'est pas nécessairement partagée par les autres TPMS. Cette propriété permet de réduire la section de motif à utiliser pour l'obtention d'une paramétrisation cohérente avec la configuration pièce-substrat envisagée.



**Figure 35** – Assemblage de quarts de Schwarz P

En projetant le réseau sur le plan de normale  $\vec{Z}$  (**Figure 34c**), on constate que les iso-courbes à  $Z$  constant forment un réseau infini de courbes fermées (**Figure 36**). La taille et la forme des courbes fermées dépend de l'abscisse  $Z$ . Pour un seul motif,  $Z$  varie entre  $-\pi/\lambda$  et  $\pi/\lambda$ . Pour les valeurs égales à  $-\pi/2\lambda$  et  $\pi/2\lambda$ , le réseau de courbes forme une grille. Il s'agit de cas critiques pour lesquels les courbes ne sont plus fermées mais forment deux familles d'une infinité de droites parallèles. Les deux familles de droites sont perpendiculaires entre elles. Les réseaux de droites pour les abscisses  $-\pi/2\lambda$  et  $\pi/2\lambda$  sont identiques. Ils sont indiqués en rouge sur la **Figure 36**. Ces réseaux de droites critiques forment un damier. Par la suite, elles sont mentionnées en tant que "couches critiques". Les première et deuxième couches critiques sont situées respectivement au niveau du premier et du troisième quart de la hauteur du motif (**Figure 36a**).



**Figure 36** – Réseau d'hyperboles du Schwarz P

(a) Iso-Z 3D d'un motif (b) Iso-Z 2D d'un réseau

Pour les valeurs de  $Z$  différentes des valeurs critiques, les courbes fermées à  $Z$  fixé sont identiques et situées soit uniquement dans les cases paires du damier, soit uniquement dans les cases impaires. Deux valeurs de  $Z$  opposées décrivent le même réseau 2D de courbes, et deux valeurs écartées de  $\pi/\lambda$  décrivent des réseaux identiques mais dont les courbes sont situées dans des cases du damier de parité complémentaire. Si l'observation se limite à la zone verte de la **Figure 36**, il est possible de constater des courbes rappelant la forme d'hyperboles. Ainsi, chaque courbe fermée est formée de quatre branches d'hyperboles identiques par rotation.

Les équations des hyperboles du réseau peuvent être obtenues en transformant analytiquement l'équation implicite approximant la surface du Schwarz P (**Équation 5**). Dans le système de coordonnées utilisé, les asymptotes des hyperboles sont parallèles aux axes  $X$  et  $Y$ . Les hyperboles sont donc des hyperboles homographiques dont les équations canoniques sont de la forme  $X'Y' = K'$  où  $X'$  et  $Y'$  sont les coordonnées 2D des points de l'hyperbole centrée en  $(0,0)$  et  $K'$  une constante. La valeur de  $K'$  est donnée par l'**Équation 6**. La forme canonique des hyperboles homographiques est obtenue par identification à l'**Équation 7** en utilisant les formules issues de la trigonométrie permettant de factoriser  $\cos(\lambda X) + \cos(\lambda Y)$ .

$$2K' = K = -\cos(\lambda Z) = -\cos(z) \quad (6)$$

$$\cos\left(\lambda \left[\frac{X+Y}{2}\right]\right) \cos\left(\lambda \left[\frac{X-Y}{2}\right]\right) = \frac{K}{2} = K' \quad (7)$$

L'**Équation 7** peut être assimilée à une hyperbole homographique d'équation  $X'Y' = K'$  en utilisant le changement de variable de l'**Équation 8**. Pour obtenir une forme bi-paramétrisée, les formes canoniques des hyperboles homographiques sont ensuite identifiées à des hyperboles coniques. L'intérêt est que les hyperboles coniques 2D peuvent être facilement décrites par un unique paramètre  $t$ . Ainsi, la forme bi-paramétrée recherchée du Schwarz P peut être obtenue.  $t$  et  $z$  décrivent alors entièrement l'évolution dans le plan des coordonnées  $X$  et  $Y$ . Contrairement aux hyperboles homographiques, les asymptotes des hyperboles coniques ne sont jamais parallèles aux axes du système de coordonnées utilisé pour décrire leur équation. L'identification des formes homographiques à des formes coniques est donc réalisée en changeant de système de coordonnées plan  $(X', Y')$  pour obtenir le système  $(X'', Y'')$  pour que les asymptotes ne soient plus parallèles aux axes du système. La transformation permettant le changement de système est réalisée via une rotation plane dans le sens direct d'angle  $\pi/4$  radians suivie d'une symétrie par rapport à l'axe  $X'$  (**Équation 9**). Ainsi, l'**Équation 7** sous forme homographique mène à la forme conique donnée par l'**Équation 10**.

$$\begin{cases} X' = \cos\left(\lambda \left[\frac{X+Y}{2}\right]\right) \\ Y' = \cos\left(\lambda \left[\frac{X-Y}{2}\right]\right) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} X'' = \frac{(X' + Y')}{\sqrt{2}} \\ Y'' = \frac{(X' - Y')}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\frac{X''}{\sqrt{|K|}}\right)^2 - \left(\frac{Y''}{\sqrt{|K|}}\right)^2 = \text{sgn}(K) \quad (10)$$

La paramétrisation de l'hyperbole conique sous forme canonique est ensuite obtenue par le changement de variables donné à l'**Équation 11**. Cette paramétrisation dépend du signe de  $K$ . L'introduction de ce signe, noté  $\text{sgn}(K)$ , permet de fusionner les paramétrisations pour les valeurs de  $K$  positives et négatives en une unique forme paramétrisée. Puis, les fonctions hyperboliques  $\cosh$  et  $\sinh$  sont changées sous leur forme exponentielle. Ce changement est donné par l'**Équation 12** et permet ainsi d'obtenir une nouvelle forme de  $X''$  et  $Y''$  (**Équation 13**). Ainsi,  $X''$  et  $Y''$  sont exprimés en fonction de  $t$  et  $\text{sgn}(K)$  uniquement. Étant donné que  $K$  est une fonction de  $z$  (**Équation 6**),  $X''$  et  $Y''$  dépendent donc uniquement de  $t$  et  $z$ .

$$\begin{cases} X'' = \cosh(t) \\ Y'' = \sinh(t) \end{cases}, \text{ si } K > 0 \quad \begin{cases} X'' = \sinh(t) \\ Y'' = \cosh(t) \end{cases}, \text{ si } K < 0 \quad (11)$$

$$\begin{cases} \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} X'' = \frac{1}{2}(e^t + \text{sgn}(K)e^{-t}) \\ Y'' = \frac{1}{2}(e^t - \text{sgn}(K)e^{-t}) \end{cases} \quad (13)$$

$X'$  et  $Y'$  puis  $X$  et  $Y$  sont ainsi exprimés en fonction de  $t$  et  $z$  en utilisant l'**Équation 13** dans l'**Équation 9** puis en utilisant l'équation obtenue dans l'**Équation 8**. Les fonctions de  $X$  et  $Y$  résultantes sont données à l'**Équation 14**. Les fonctions  $A(z, t)$  et  $B(z, t)$  qui y apparaissent sont explicitées à l'**Équation 15**. Pour une valeur donnée de  $z$ , l'**Équation 14** décrit ainsi une branche d'hyperbole et paramétrise donc un quart de motif de Schwarz P (**Figure 37**). Le fait que  $X$  et  $Y$  dépendent du signe de  $K$  est cohérent avec le fait que les iso-courbes fermées à  $z$  fixé se situent soit dans les cases paires soit dans les cases impaires du damier plan formé par les couches critiques (**Figure 36**).

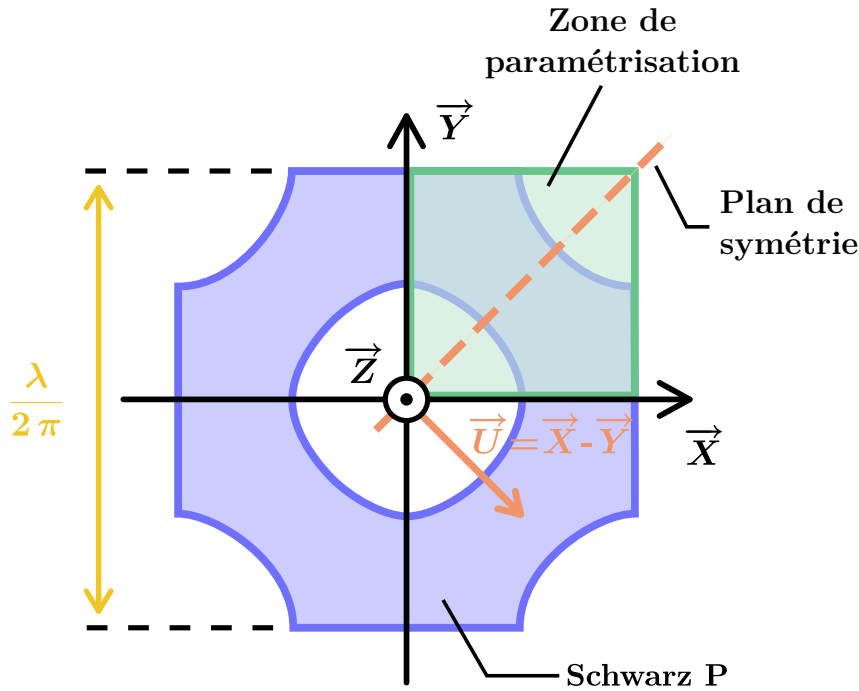


Figure 37 – Schéma de paramétrisation du Schwarz P

$$\begin{cases} X(z, t) = \frac{1}{\lambda} \left[ A(z, t) + \operatorname{sgn}(t) \left( (\pi - B(z, t)) \right) \right] \\ Y(z, t) = \frac{1}{\lambda} \left[ A(z, t) - \operatorname{sgn}(t) \left( (\pi - B(z, t)) \right) \right] \\ Z(z, t) = \frac{z}{\lambda} \end{cases} \quad (14)$$

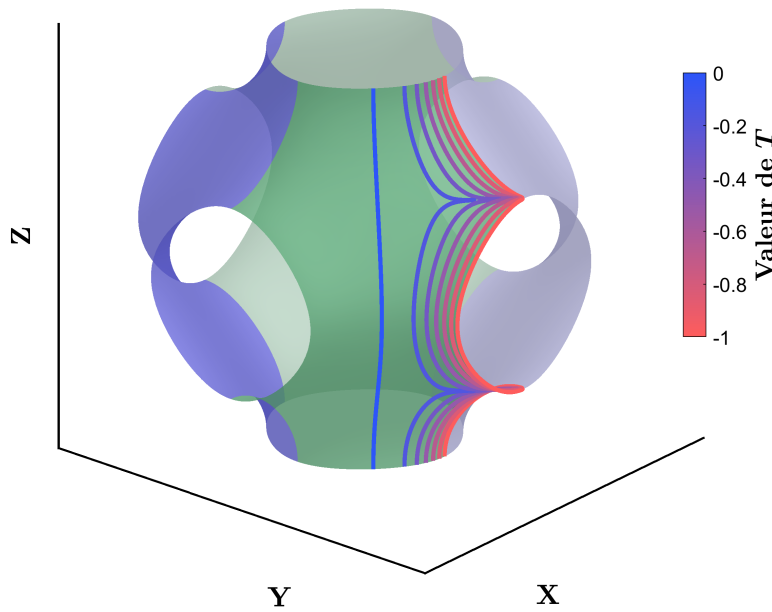
$$\begin{cases} A(z, t) = \arccos \left( \operatorname{sgn}(K) \sqrt{\frac{|K|}{2}} e^{(-\ln(\sqrt{\frac{2}{|K|}}) - t)} \right) \\ B(z, t) = \arccos \left( \operatorname{sgn}(K) \sqrt{\frac{|K|}{2}} e^{(+\ln(\sqrt{\frac{2}{|K|}}) + t)} \right) \end{cases} \quad (15)$$

Les équations de  $X$  et  $Y$  sont denses et peuvent être difficiles à manipuler. En constatant que le paramètre  $t$  varie dans un intervalle symétrique dépendant de  $\ln(|K|)$ , il est possible de simplifier leur forme bi-paramétrée par le changement de variable présenté à l'Équation 16. Cela permet notamment de remplacer  $t$  par le paramètre  $T$  dont l'intervalle de variation est  $[-1, 1]$ . La fonction  $\operatorname{sgn}(t)$  peut aussi être remplacée par  $\operatorname{sgn}(T)$  sans compromettre la paramétrisation.



$$T = \frac{2t}{[\ln(2) - \ln(|K|)]} \quad (16)$$

La finalité étant d'obtenir une forme bi-paramétrée combinable à des méthodes d'optimisation numérique pour la recherche de points de la trajectoire, on peut encore apporter une modification pour assouplir l'utilisation ultérieure de la forme bi-paramétrée. En l'état actuel,  $X$  et  $Y$  dépendent tous les deux du signe de  $K$  et du signe de  $T$ . La fonction signe a une dérivée discontinue en 0, et peut donc causer des problèmes en cas d'utilisation d'algorithmes d'optimisation numérique. Pour éviter ce problème, l'intervalle de variation de  $T$  pour la paramétrisation peut être réduit à un sous-intervalle où son signe est constant. Cela revient à limiter la paramétrisation non plus à un quart de motif (**Figure 35**), mais à un huitième de motif (**Figure 38**). La paramétrisation finale d'un huitième de Schwarz P est donnée à l'**Équation 17**.  $T$  varie sur  $[-1, 0]$  et  $z$  varie sur  $[-\pi, \pi]$ . La constante  $\lambda$  contrôle la taille du cube contenant le motif : la longueur de ses arêtes est de  $2\pi/\lambda$ .



**Figure 38** – Courbes iso-T du huitième de Schwarz P

$$\begin{cases} X(z, T) = \frac{1}{\lambda} \left[ \arccos \left( \operatorname{sgn}(K) \left( \frac{|K|}{2} \right)^{1+\frac{T}{2}} \right) - \arccos \left( \left( \frac{|K|}{2} \right)^{-\frac{T}{2}} \right) \right] \\ Y(z, T) = \frac{1}{\lambda} \left[ \arccos \left( \operatorname{sgn}(K) \left( \frac{|K|}{2} \right)^{1+\frac{T}{2}} \right) + \arccos \left( \left( \frac{|K|}{2} \right)^{-\frac{T}{2}} \right) \right] \\ Z(z, T) = \frac{z}{\lambda} \end{cases} \quad (17)$$

Ainsi, la forme bi-paramétrisée  $(z, T)$  du huitième de Schwarz P convient sensiblement aux exigences. Elle est telle que le paramètre  $z$  évolue dans la direction de propagation des couches. Cette direction de propagation des couches, assimilable à l'axe  $\vec{Z}$ , est unique dans le cas du Schwarz P de par la forme de la surface et le substrat plan situé au niveau de la face inférieure du cube englobant le motif envisagé. Le paramètre  $T$  évolue dans les plans perpendiculaires à la direction de l'axe  $\vec{Z}$ . Il y a cependant un affaissement des courbes iso- $T$  au niveau des valeurs critiques  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  de  $z$  lorsque  $T$  tend vers  $-1$ . Il s'agit des régions proches des iso- $Z$  situées vers le premier quart et le troisième quart de la hauteur du motif.

De par la forme du motif, il est possible d'obtenir la trajectoire d'un quart depuis le huitième en dupliquant la trajectoire et en effectuant une symétrie miroir par rapport au plan de normale  $\vec{U} = \vec{X} - \vec{Y}$  et contenant le point  $O(0, 0, 0)$  (**Figure 37**). L'assemblage de surfaces n'implique pas l'assemblage des couches de trajectoire dans le cas général : davantage d'informations sont précisées à ce sujet à la **Sous-section 2.4.2**. Dans le cas du Schwarz P, les trajectoires des deux huitièmes sont assemblables car il s'agit d'un cas particulier. En effet, dans le cas d'une symétrie miroir, les derniers points à fusionner des couches de chaque huitième correspondent à des maxima locaux. Ainsi, il n'y a pas de risque de décalage entre la trajectoire d'un quart de motif et de deux huitièmes assemblés.

Enfin, la trajectoire du motif entier est obtenue en dupliquant la trajectoire du quart trois fois et en effectuant des rotations autour de l'axe  $\vec{Z}$  d'angles  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$ . Une fois encore, le Schwarz P est un cas particulier qui permet l'assemblage des couches. La combinaison des trajectoires sur un même quart est envisageable car il s'agit encore une fois d'un cas particulier où le quart est lui-même obtenu par symétrie miroir, ce qui signifie que les couches attendues sur un quart sont censées être symétriques par rapport au plan de symétrie. Par conséquent, les premier et dernier points de chaque couche d'un quart de motif – situés au niveau des iso- $T$  pour  $T = -1$  et  $T = 1$  – sont attendus à la même hauteur  $Z$ , ce qui permet leur superposition lors de la duplication des couches pour chaque quart, et donc l'assemblage des couches de la trajectoire.

En effet, dans le cas général, les projetés des points extrémaux d'un morceau de motif sur la couche précédente ne sont pas nécessairement situés sur le même morceau de motif. Cela pourrait ainsi amener à une variation de la valeur de la distance euclidienne à la couche précédente en ces points, aussi bien pour l'assemblage des huitièmes et des quarts. Toutefois, dans le cas du particulier Schwarz P, tous ces points d'interface d'assemblage de couches sont des extrema locaux, d'où le respect du critère de distance euclidienne.

Notons aussi que les duplications de couches sur un huitième puis un quart de motif impliquent que les conditions initiales induites par le substrat doivent être les mêmes pour chaque duplication. Cela signifie que le substrat doit nécessairement présenter les mêmes invariances issues de la symétrie miroir et des rotations pour que les couches résultant de l'assemblage soient valides. Comme détaillé en début de section, le substrat envisagé pour l'algorithme est un plan en contact avec la frontière inférieure du motif. Un tel substrat respecte les invariances de symétrie requises pour l'assemblage des couches, tout en étant normal à la direction de propagation des iso- $Z$  (**Figure 36a**).

## 2.3 Algorithme de génération de trajectoire associé

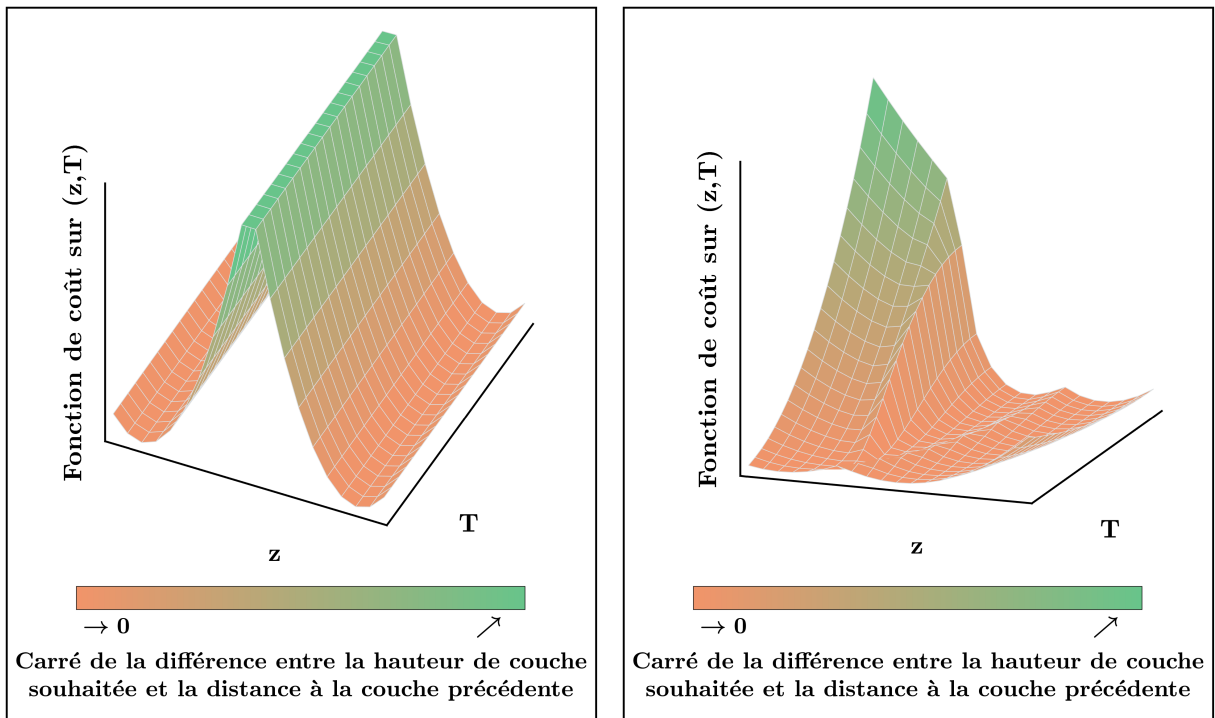
Dans cette section, un algorithme qui permet de générer le chemin de dépôt complet d'un Schwarz P à partir de la paramétrisation de la section précédente est proposé. Les paramètres d'entrée de cet algorithme sont la longueur du motif, notée  $l_P$  et égale à  $2\pi/\lambda$ , la hauteur de couche correspondant à la distance entre deux couches successives, notée  $h_P$ , ainsi que la valeur indicative de discrétisation entre deux points consécutifs d'une même couche, notée  $d_P$ . La signification physique et les bornes supérieures de variation de ces paramètres sont détaillées au **Tableau 8**. Les contraintes de plage de variation sont justifiées dans la suite de la section et à l'**Annexe A4**.

Symbole	Paramètre d'entrée associé	Équivalence physique	Exigence(s) de l'algorithme
$l_P$	Longueur du motif	Longueur du côté du cube minimal contenant le motif	$l_P > 0$
$h_P$	Hauteur de couche	Hauteur de cordon	$h_P > 0$ et $h_P \leq l_P/8$
$d_P$	Valeur indicative de discrétisation des couches	Incrément de déplacement de l'outil de dépôt	$d_P > 0$ et $d_P \leq \min\left(\frac{0,1911}{2} l_P, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) h_P\right)$

**Table 8** – Réglage des paramètres d'entrée

L'objectif est de trouver un ensemble de couches recouvrant un huitième de Schwarz P et respectant le critère de distance euclidienne de valeur  $h_P$ . Les points situés sur un huitième sont déterminés par les deux paramètres  $z$  et  $T$ . Puisque chaque couche dépend de toutes les couches précédentes afin de respecter le critère de distance euclidienne, le chemin du huitième de motif est calculé couche par couche. Les couches attendues sont censées être empilées dans la direction  $\vec{Z}$ . Pour chaque couche, le premier et le dernier point possèdent toujours la même valeur de  $T$ , qui sont respectivement  $T = -1$  et  $T = 0$ .

La connaissance de  $T$  et la contrainte de distance entre les couches  $h_P$  permettent de trouver la valeur  $z$  des points d'une nouvelle couche à générer en utilisant ceux de la couche qui la précède, à l'aide de fonctions d'optimisation numérique. Ces fonctions sont détaillées dans la suite de la section. Lorsque la surface est localement relativement plane, deux vallées de solutions à distance constante non nulle de la couche précédente existent : l'une donne des points au-dessus de la couche précédente, ce qui correspond à la couche souhaitée, et l'autre donne des solutions en dessous de la couche précédente (**Figure 39a**). Pour permettre la convergence de la recherche par optimisation numérique, l'intervalle de recherche doit être réduit afin que seule la vallée souhaitée soit conservée. Cependant, au voisinage des couches critiques, les deux vallées sont proches (**Figure 39b**), ce qui rend la discrimination d'une vallée par rapport à l'autre plus difficile, et donc la convergence de la fonction d'optimisation beaucoup plus difficile. Cela s'explique par l'affaissement des iso-T en ces régions, comme évoqué à la fin de la **Section 2.1**.



(a)

(b)

Figure 39 – Fonction de coût de recherche de trajectoire du Schwarz P

(a) Loin des couches critiques (b) Au voisinage des couches critiques

Pour palier à ce problème de recherche des points sur le huitième de motif au voisinage des deux couches critiques, deux paramétrisations supplémentaires issues de la forme  $(z, T)$  et construites à partir de constats de symétrie sont utilisées. La routine de génération de trajectoire repose sur un basculement entre les différentes paramétrisations (Figure 40).

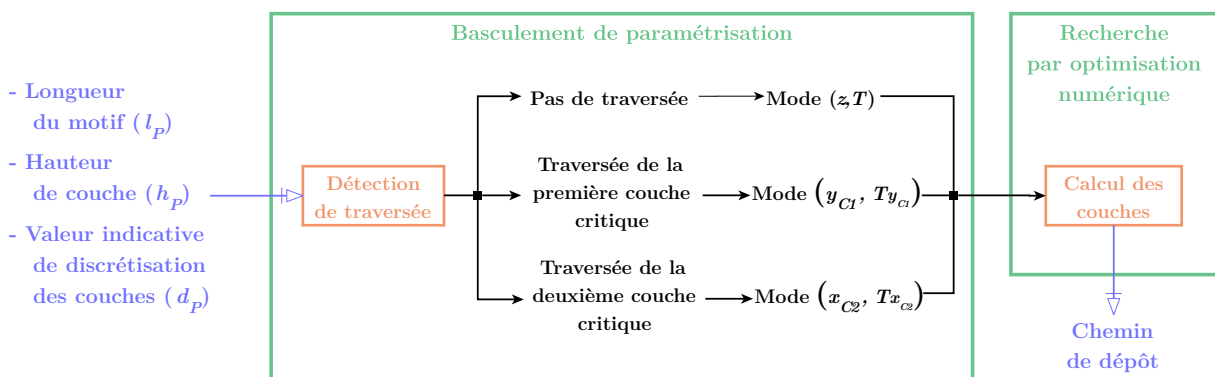


Figure 40 – Structure générale de l'algorithme

L'algorithme développé est implémenté en MATLAB et utilise la fonction d'optimisation "fmincon". La routine d'optimisation choisie lors de l'appel de la fonction utilise la méthode de recherche par points intérieurs [159]. Pour chaque optimisation, la fonction de coût est le carré de la différence d'une distance objectif  $h_P$  avec la distance du point recherché à sa couche précédente. Dans le cas du Schwarz P, l'utilisation d'une fonction d'optimisation à plusieurs variables est à éviter en raison de la forme des iso-Z et des iso-T, ainsi que de l'échelle de variation exponentielle du paramètre  $T$  (Figure 38). En effet, une optimisation à plusieurs variables est plus complexe à contrôler et la multiplicité des variables ne garantit pas la convergence vers une solution.

Afin de solutionner cette limitation, l'algorithme utilise des optimisations à une variable successives. Le fonctionnement de l'algorithme est le même pour les trois modes de paramétrisation. Pour la suite, la notation  $(w, T_w)$  désigne indifféremment une paramétrisation parmi  $(z, T)$ ,  $(y_{C_1}, T_{y_{C_1}})$  et  $(x_{C_2}, T_{x_{C_2}})$ . De même, les notations "iso-W" et "iso- $T_w$ " sont utilisées. Pour chaque couche, le premier et le dernier point sont d'abord déterminés avec une optimisation chacun. Puis, pour chaque autre point de la couche, trois optimisations numériques successives sont appliquées (Figure 41). Pour chaque optimisation amenant successivement aux points  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ , le point de sortie est déterminé à partir d'un autre point spécifié en entrée, et la fonction de coût spécifiée qui permet de déclencher la recherche est le carré de la distance souhaitée entre ces deux points ou le point de sortie et la couche précédente. Selon le contexte, cette distance est une distance euclidienne ou une longueur d'arc. Davantage d'informations sont fournies dans la suite de la section.

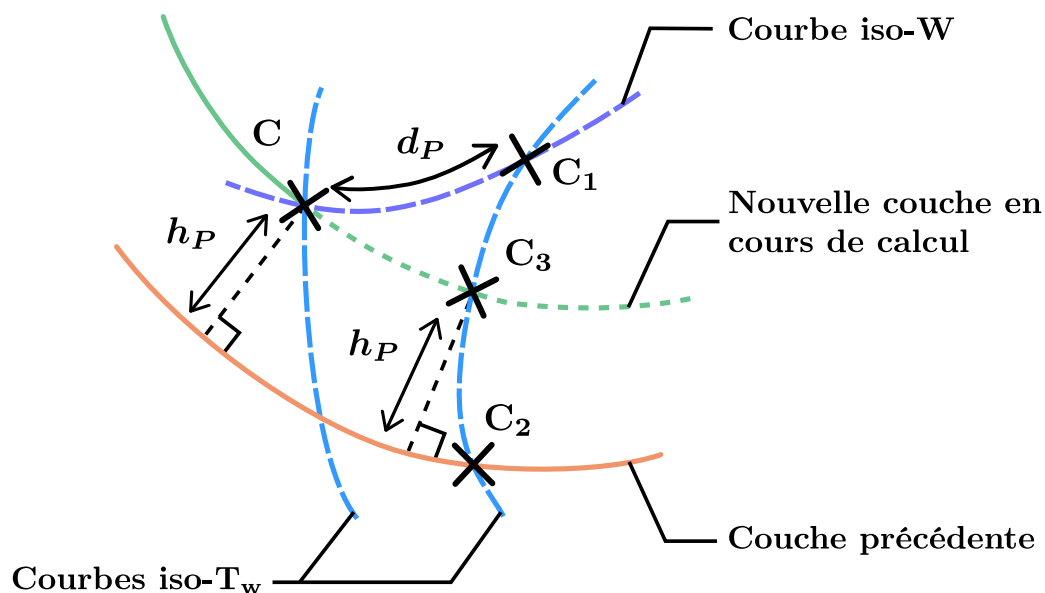


Figure 41 – Recherche des points d'une nouvelle couche

L'optimisation des premiers et derniers points des couches correspond à la troisième optimisation des autres points qu'ils encadrent. Pour les points extrémités, l'optimisation consiste à utiliser le point extrémité correspondant issu de la couche précédente : l'optimisation de recherche se fait sur le paramètre  $w$  en utilisant la même valeur de  $T_w$  que celle du point de la couche précédente utilisé. Cela permet d'obtenir le paramètre  $w$  du premier point et du dernier point de la couche, et donc d'en déduire leurs coordonnées. Les points de sortie de l'optimisation sont situés à une distance euclidienne  $h_P$  de la couche précédente.

Une fois le premier et le dernier point de la couche déterminés, les autres points sont déterminés successivement dans le sens croissant d'évolution des iso- $T_w$ . Pour chaque point, deux points intermédiaires sont calculés. Au cours de la première optimisation, le point précédent de la même couche est utilisé, et un point intermédiaire situé sur le même iso- $T_w$  est calculé. Ce point intermédiaire se trouve sur un iso- $T_w$  différent et à une longueur d'arc constante  $d_P$  du point précédent de la couche. Le choix d'utiliser une longueur d'arc plutôt qu'une distance euclidienne facilite la convergence car l'évolution d'une longueur d'arc au cours du parcours de l'iso- $T_w$  suit une loi nécessairement monotone là où ce n'est pas toujours le cas pour une évolution de distance euclidienne. La première optimisation numérique utilise donc  $T_w$  comme variable, et retourne un point situé à une longueur d'arc  $d_P$  du point précédent de la même couche.

Puis, un deuxième point intermédiaire est déterminé à partir du premier. Le but est de déterminer le point sur le même iso- $T_w$  que ce premier point le plus proche de la couche précédente. Au cours de cette étape, l'optimisation numérique utilise donc  $w$  comme variable. La détermination de ce deuxième point intermédiaire permet de réduire l'intervalle de recherche de la troisième optimisation. En effet, comme évoqué précédemment, une distance non nulle sur la fonction de coût génère deux vallées de solutions correspondant à la couche souhaitée et la couche sous la couche précédente (**Figure 41**). Cela rend la convergence plus difficile, si les vallées sont proches et que l'intervalle de recherche n'est pas judicieusement réduit. En cherchant le pseudo-point d'intersection  $C_2$  entre la couche précédente et l'iso- $T_w$  du premier point intermédiaire, la distance spécifiée dans la fonction de coût est nulle : il n'y a qu'une vallée, ce qui réduit les problèmes de convergences.

Enfin, le deuxième point intermédiaire est utilisé pour déterminer le point de la nouvelle couche recherché. Tout comme la deuxième, l'optimisation se fait sur un iso- $T_w$ , et utilise  $w$  comme variable. Le point résultant se situe à une distance euclidienne  $h_P$  de la couche précédente. L'utilisation du deuxième point intermédiaire permet de réduire l'intervalle de recherche sur la vallée de solutions correspondant à la nouvelle couche, et ainsi d'éviter l'obtention de points non souhaités situés sur la couche en dessous de la couche précédente.

L'algorithme entier de la méthode de génération de trajectoire du Schwarz P est détaillé à la **Figure 42**. La couche d'initialisation du chemin est obtenue comme la courbe d'intersection entre le motif de longueur  $l_P$  et le plan d'équation  $Z = -l_P/2$ . Il s'agit donc de l'iso- $Z$  correspondant à  $z = -\pi$  sur un motif unitaire. Afin de garantir la convergence de l'algorithme, il est nécessaire que le gradient de la fonction de coût soit continu, et donc que les éléments donnés en entrée des fonctions d'optimisation soient de continuité  $C^1$  sur

les intervalles de recherche. De plus, la fonction de coût doit présenter si possible un seul minimum local dans l'intervalle considéré. Ainsi, chaque nouvelle couche est calculée en utilisant une interpolation polynomiale du second degré de la couche qui la précède plutôt que la couche précédente directement. De même, l'introduction des modes de basculement permet d'utiliser des iso- $T_w$  de continuité  $C^1$  sur les intervalles considérés.

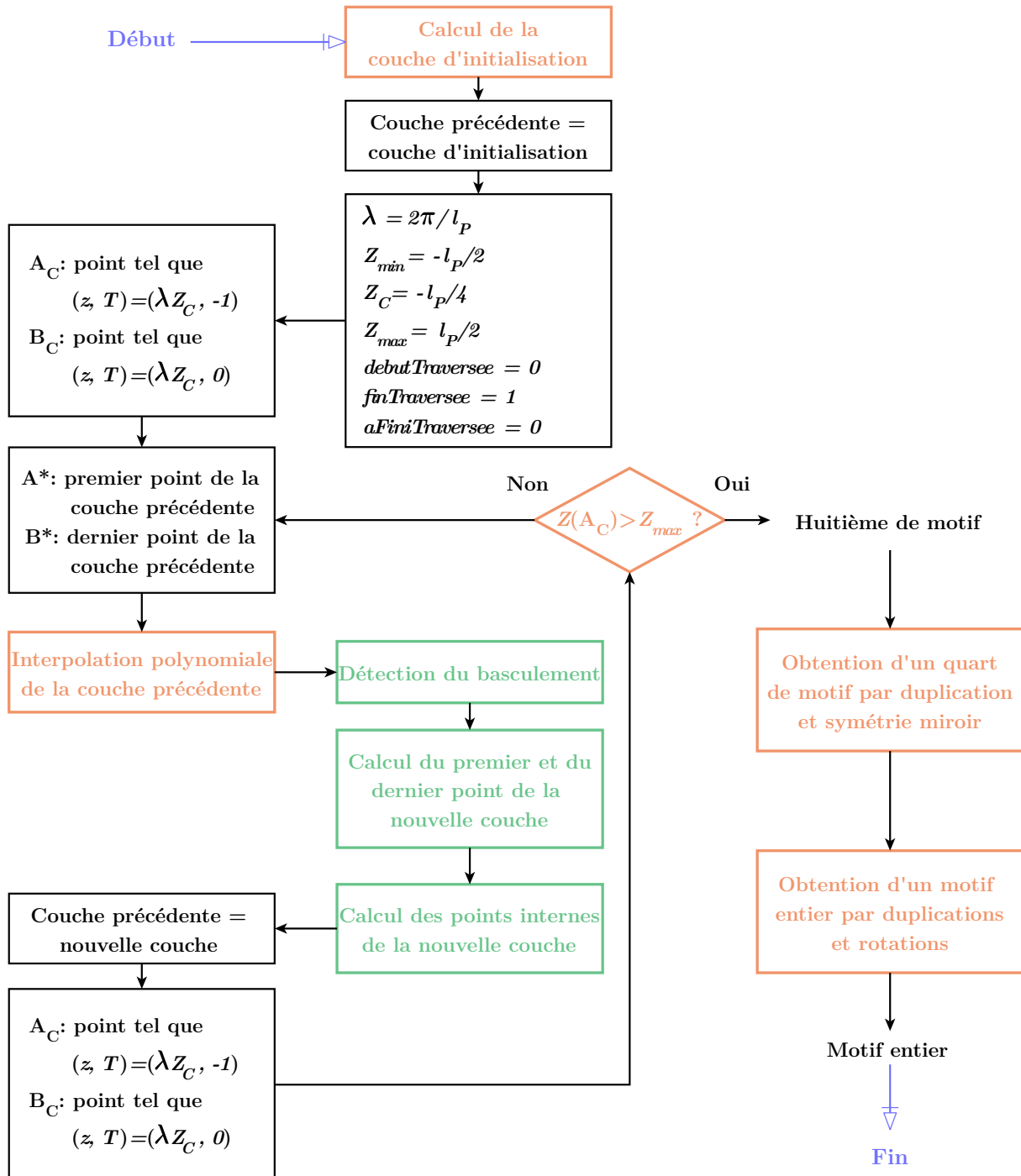


Figure 42 – Algorithme de trajectoire du Schwarz P

Les données de la couche précédente sont stockées en mémoire, et elles sont interpolées par une fonction polynomiale de variable  $s$ , de sorte à obtenir les fonctions de chacune des coordonnées cartésiennes  $X(s)$ ,  $Y(s)$  et  $Z(s)$ . À cet effet, un algorithme itératif basé sur la méthode du nombre d'or est utilisé [160]. À travers cette méthode, on suppose que le paramètre  $s$  varie uniformément entre 0 et 1, entre le point de départ et le point final de la couche précédente. La méthode itérative permet de minimiser la distance entre la fonction polynomiale approximée et la fonction linéaire par morceaux formée par l'ensemble des segments liant les points de la couche précédente en minimisant, pour chaque segment de la couche précédente, l'erreur de corde de la fonction approximative.

La méthode du nombre d'or permet de trouver le minimum ou le maximum à l'intérieur d'un intervalle spécifié à condition que la fonction soit unimodale sur cet intervalle. L'unimodalité signifie que la fonction de distance entre deux points successifs de la couche précédente n'a qu'un seul extremum. Cette hypothèse est valable pour l'interpolation des couches précédentes car la fonction polynomiale traverse exactement les points de cette couche. Ainsi, par continuité, si la distance entre un segment et le polynôme augmente après le passage du sommet de départ du segment, elle doit nécessairement diminuer pour que le polynôme puisse passer par le sommet de fin du segment. La méthode du nombre d'or permet d'approximer par un polynôme tout ensemble de courbes dont l'union est connexe et ne comporte pas d'embranchement. L'ajustement d'un polynôme de degré élevé diminue l'erreur de corde car l'augmentation du nombre de coefficients offre davantage de degrés de liberté, mais cela rend le comportement de la fonction polynomiale en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$  moins prévisible. C'est pour cela que dans l'algorithme l'interpolation se limite à des polynômes du second degré.

Une fois que la couche précédente est interpolée, l'algorithme procède au basculement du mode de paramétrisation. Pour cela, une routine détecte si la nouvelle couche à générer passe à travers une couche critique (**Figure 43**). Cela permet l'obtention du mode  $(w, T_w)$  à utiliser pour le calcul de la nouvelle couche. Comme expliqué précédemment, les changements de paramétrisation permettent de remédier aux problèmes de convergence de l'optimisation au voisinage des couches critiques.

Les paramétrisations alternatives sont obtenues en exploitant la propriété de tripériodicité que possède le Schwarz P en tant que TPMS. Par tripériodicité, la paramétrisation  $(z, T)$  est transformable en une paramétrisation de type  $(x, T)$  ou  $(y, T)$ . La forme des équations paramétrées demeure identique. Puis, étant donné que le Schwarz P possède des symétries selon les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ , il est possible de paramétrer tout huitième – ou quart de motif en élargissant l'intervalle de variation de  $T$  comme détaillé à la **Section 2.2** – à partir d'une forme donnée en changeant les signes des paramètres d'entrée, ou en permutant les coordonnées cartésiennes de sortie avec changement de signe éventuel. Par exemple, la forme  $(z, T)$  est valide pour le quadrant  $(X \geq 0, Y \geq 0)$  du Schwarz P, mais elle permet de paramétrer le quadrant  $(X \leq 0, Y \geq 0)$  par la transformation  $X \rightarrow -X$ . La convergence des calculs nécessite que les iso-Z et les iso-T soient sécants. Or, ce n'est pas le cas au niveau des couches critiques car les iso-T s'affaissent. L'utilisation d'une paramétrisation différente permet de garantir localement que les courbes des iso-Z et des iso-T ne tendent pas à être parallèles dans la région du motif où la trajectoire est calculée.



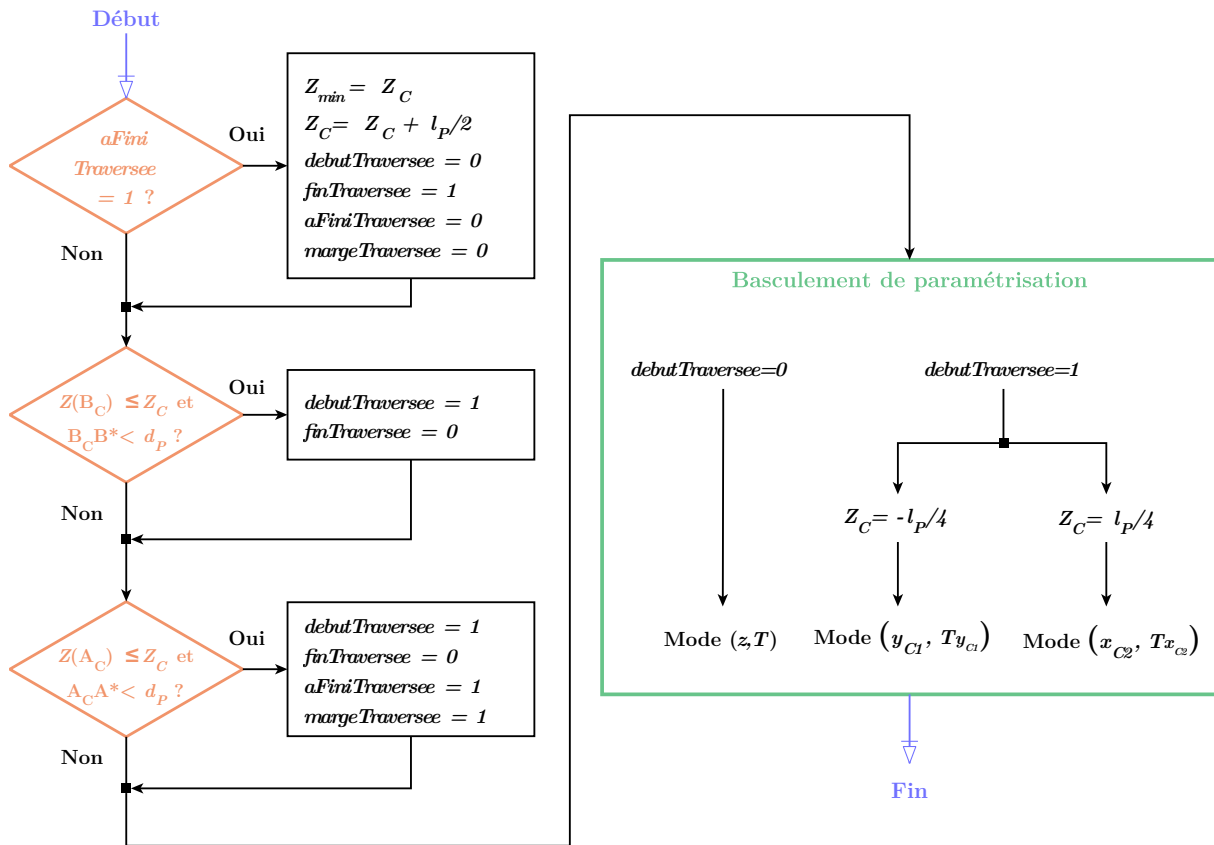


Figure 43 – Détection du basculement de paramétrisation

Les deux paramétrisations alternatives à la forme  $(z, T)$  recherchées doivent être localement dérivables selon leurs deux variables au niveau des couches critiques de la forme  $(z, T)$ . Elles sont déterminées à partir des formes  $(x, T)$  et  $(y, T)$ . La **Figure 44** illustre les plans contenant les couches critiques des paramétrisations  $(x, T)$ ,  $(y, T)$  et  $(z, T)$ .

Les couches critiques constituent une zone de discontinuité de la dérivée de la première variable de la paramétrisation concernée engendrée (**Équation 17** p74). Plus précisément, l'apparition des discontinuités est due à la présence de la fonction Valeur Absolue sur la forme paramétrisée, non dérivable en 0. Cela se produit lorsque  $K$  s'annule, donc lorsque  $\cos(\lambda Z)$  s'annule (**Équation 6** p71). C'est le cas lorsque  $Z$  atteint les valeurs situées au premier et troisième quart de la hauteur du motif.

Par conséquent, les paramétrisations alternatives doivent être choisies de sorte que leurs propres couches critiques soient éloignées des couches générées sécantes aux couches critiques de la paramétrisation  $(z, T)$ . Cela permet de considérer des intervalles d'étude continus et dérivables pour faciliter les optimisations numériques de recherche de points.

— ZONES critiques sur X — ZONES critiques sur Y — ZONES critiques sur Z

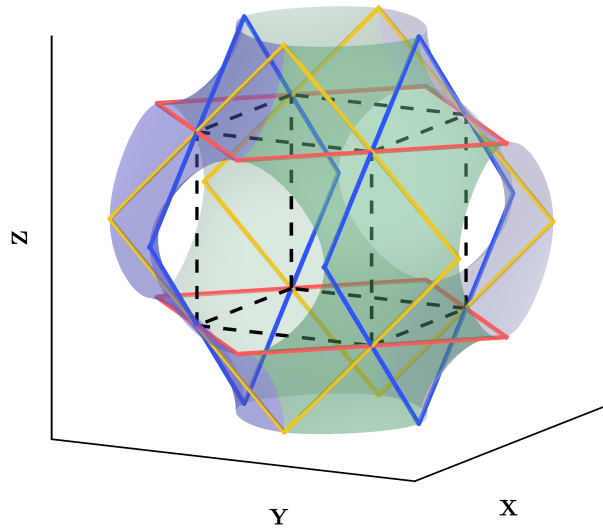


Figure 44 – Zones critiques des différentes paramétrisations

Les courbes iso- $T_w$  des deux paramétrisations alternatives utilisées pour faciliter la convergence au voisinage des couches critiques de la paramétrisation  $(z, T)$  sont représentées à la **Figure 45**. La paramétrisation  $(y_{C1}, T_{y_{C1}})$  est obtenue à partir de la forme  $(z, T)$  par les changements simultanés  $Y \rightarrow Z$  et  $Z \rightarrow -Y$  (**Figure 45a**), tandis que la forme  $(x_{C2}, T_{x_{C2}})$  est obtenue via les transformations simultanées  $X \rightarrow Z$  et  $Z \rightarrow X$  (**Figure 45b**). Ces formes, utilisées respectivement pour les basculements des première et deuxième couches critiques, sont conformes aux exigences de dérivabilité de leurs iso-courbes énoncées à la fin du paragraphe précédent.

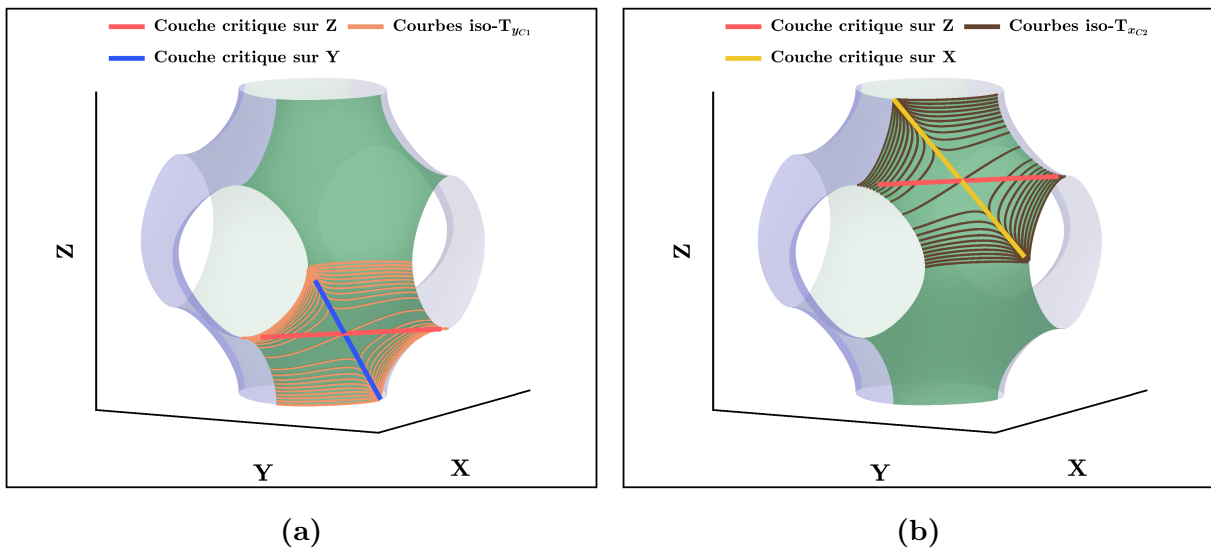


Figure 45 – Iso- $T_w$  des paramétrisations alternatives sur  $[-1, 1]$

- (a) Courbes iso- $T_{y_{C1}}$
- (b) Courbes iso- $T_{x_{C2}}$

Le basculement de paramétrisation est quant à lui détecté en utilisant la monotonie de la progression de la coordonnée  $Z$  des points successifs situés sur une même couche. Lorsque le chemin est généré, les couches sont empilées avec un dénivelé selon l'axe  $\vec{Z}$  en raison de la géométrie du Schwarz P. Cela s'explique par la forme des iso-T, qui sont de moins en moins parallèles à cette direction lorsque le paramètre  $T$  varie de 0 vers  $-1$ . Le rebroussement des iso-T vers  $T = -1$  induit un retard de progression des points de fin des couches selon la coordonnée  $Z$ . Ce dénivelé est croissant au sein même d'une couche et suit une loi monotone. Ainsi, une nouvelle couche à générer traverse une couche critique si son premier point est sous cette couche critique et que son dernier point est situé au-dessus. Donc, le dépassement d'une nouvelle couche peut être déterminé avant son calcul en estimant la distance des points extrémaux de la couche qui la précède avec les points situés à  $T = -1$  et  $T = 0$  sur l'iso- $Z$  de la couche critique concernée, et en comparant les coordonnées  $Z$  de ces différents points (**Figure 43**).

Enfin, les trois modes de paramétrisation nécessitent certaines précautions vis-à-vis des paramètres  $h_P$  et  $d_P$ . Ils conditionnent les bornes supérieures de ces deux paramètres communiquées en début de section (**Tableau 8**). Premièrement, la hauteur de couche  $h_P$  doit être telle que les deux couches critiques ne puissent pas être dépassées d'un coup car le basculement de paramétrisation est effectué au voisinage de ces dernières, indépendamment les unes des autres. Les couches critiques sont espacées de  $l_P/2$ . Or, tout basculement se fait en plusieurs sous-étapes : la détection du début de basculement et de la fin du basculement (**Figure 43**). Pour chaque couche générée, une seule détection est effectuée à la fois pour éviter les collisions de booléens amenant à une indétermination du mode de paramétrisation à choisir. Ainsi, entre les deux couches critiques, il est nécessaire de générer au moins trois couches pour assurer une transition stable des détections au cours des sous-étapes. Par sécurité, la borne supérieure est choisie pour assurer la présence d'au moins quatre couches dans cette zone, ce qui explique l'inégalité  $h_P \leq l_P/8$ . Deuxièmement, la détermination de la borne supérieure de  $d_P$  est beaucoup plus délicate. Le calcul approximatif de cette borne est présenté à l'**Annexe A4**. La démarche développée garantit une valeur de  $d_P$  telle que toute couche de la trajectoire soit interpolée par un polynôme de degré exactement deux pour éviter les problèmes de convergence déjà évoqués dans la section.

Une fois l'étape de basculement de paramétrisation effectuée, les points de la nouvelle couche sont déterminés par le processus décrit en début de section (**Figure 41**). Tout d'abord, le premier et le dernier point de la nouvelle couche sont calculés (**Figure 46**). Leurs bornes de recherche sont choisies selon s'il y a traversée ou non de la couche critique par la nouvelle couche à calculer. La connaissance de ces points extrémaux se fait avant celle des autres points car ils constituent respectivement les conditions de départ et d'arrêt de génération des points internes de la couche. Puis, le calcul des points internes de la couche se fait à partir du point précédent via trois optimisations numériques successives (**Figure 47**). La propagation des points internes se fait dans le sens croissant des iso- $T_w$  du mode de paramétrisation effectif. Les valeurs de  $T_w$  des points extrémaux constituent les bornes de l'intervalle de variation de ce paramètre. Un nouveau point est calculé à partir d'un point précédent s'il existe une valeur de  $T_w$  strictement supérieure et incluse dans cet intervalle telle que la longueur d'arc liant ces deux points est égale à  $d_P$ .

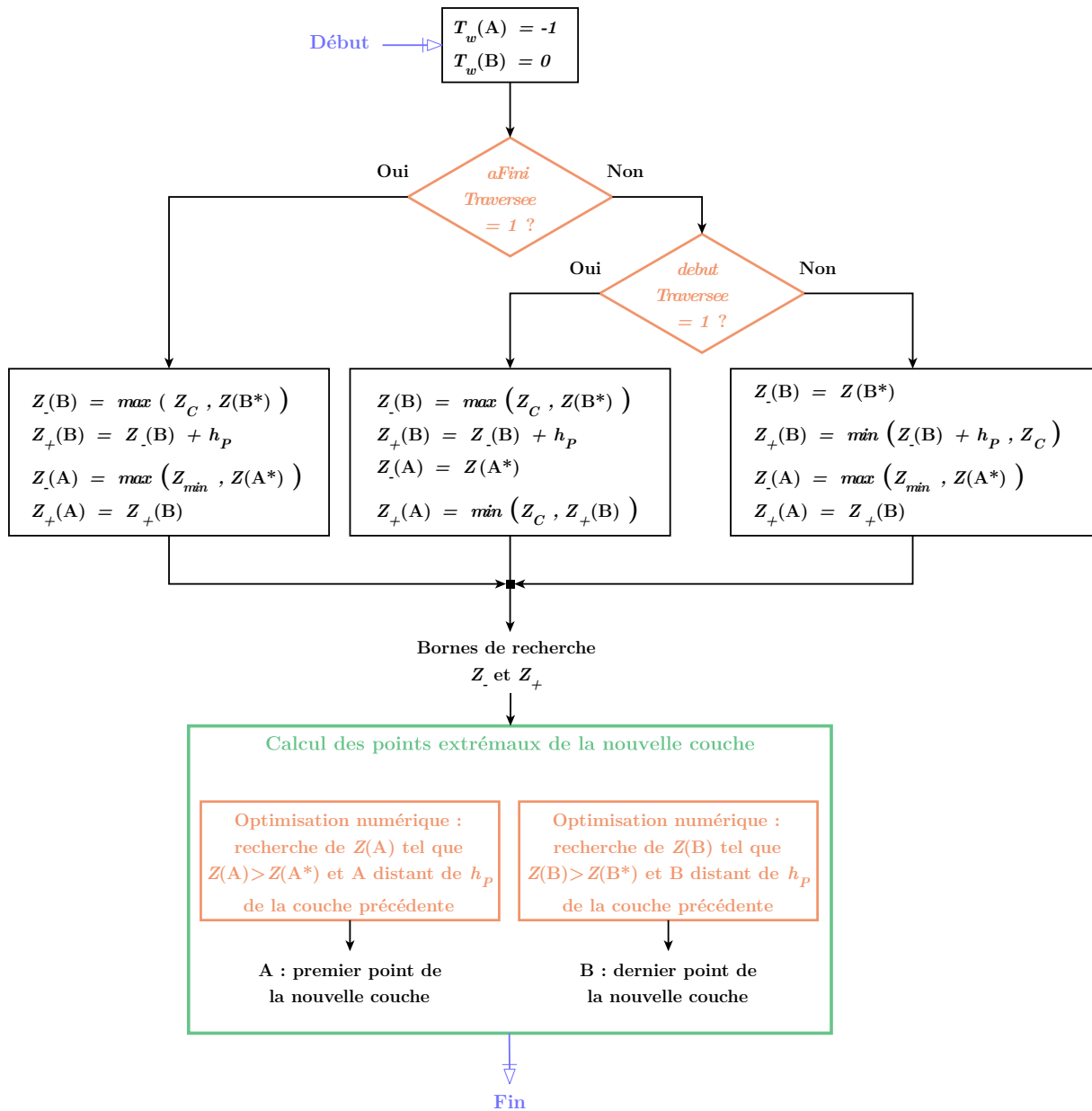


Figure 46 – Calcul des points extrémaux de la nouvelle couche

Cet arc correspond à une longueur d'iso- $W$ . La **Section 2.2** a mis en évidence que ces courbes iso- $W$  peuvent être assimilées à des branches d'hyperboles déformées. Or, en tant que branches d'hyperboles, ces longueurs d'arc font partie de la famille des intégrales elliptiques de la seconde espèce, dont il est prouvé qu'il n'existe pas de forme calculable de manière exacte [161]. Par conséquent, ces longueurs d'arc  $k$  sont calculées de manière numérique. Étant donné que l'échelle de variation de  $T_w$  n'est pas linéaire, le calcul numérique se fait en utilisant un pas de discrétisation adaptatif sur l'arc à mesurer via l'algorithme de quadrature de Gauss-Kronrod [162]. Le calcul de la longueur d'arc fournit le sens de propagation des points au sein de la nouvelle couche et la condition d'arrêt de cette même propagation. La génération des points internes est déclenchée par le premier point de la couche et se termine si un point calculé est proche du dernier de la couche.

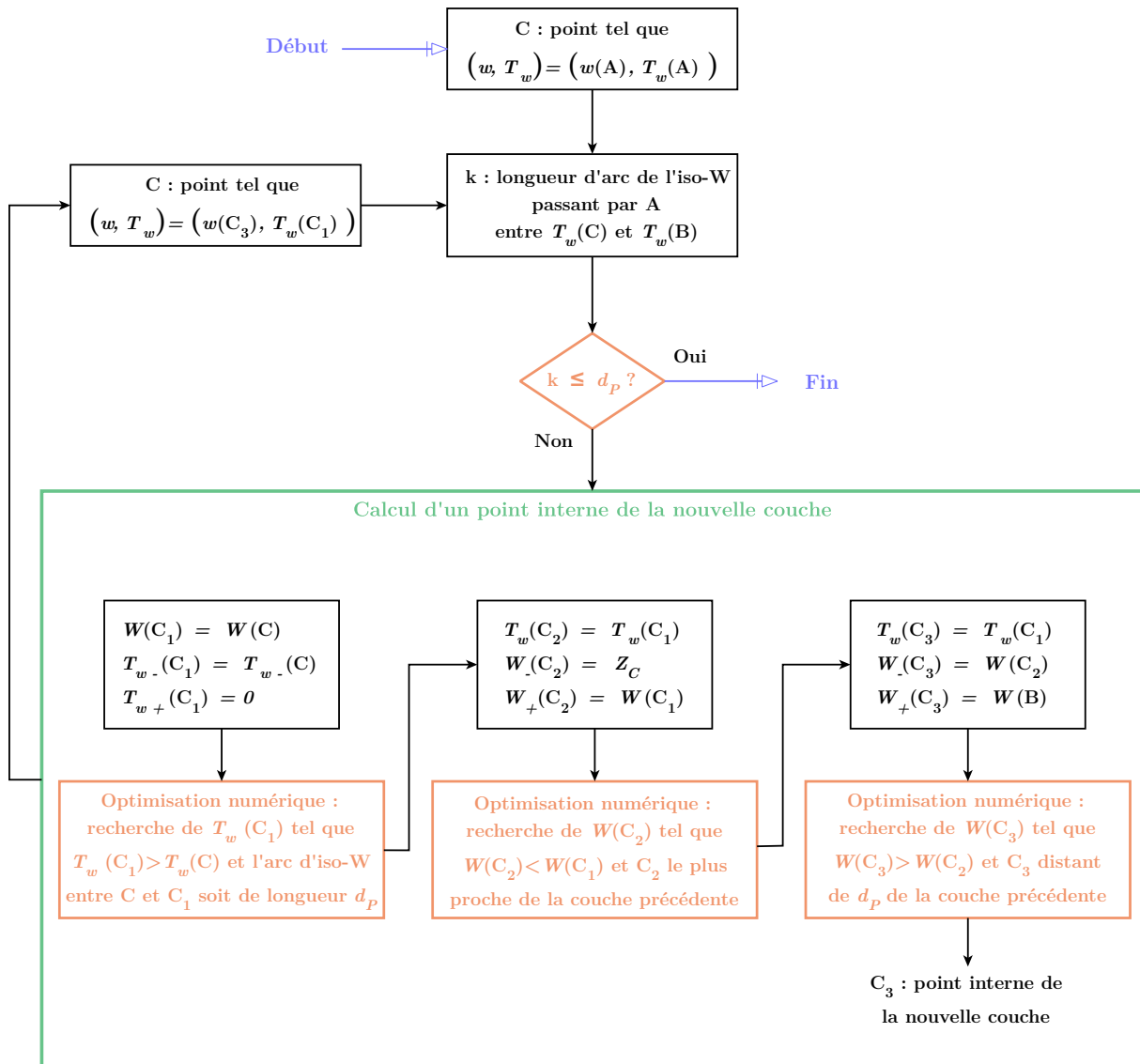


Figure 47 – Calcul des points internes de la nouvelle couche

Le processus de génération de points est répété pour toutes les couches de la trajectoire, jusqu'à l'obtention du chemin correspondant à un huitième de Schwarz P. Finalement, la trajectoire du motif entier est obtenue en effectuant les duplications et transformations décrites à la fin de la **Section 2.2**, puisque le Schwarz P est un cas particulier de surface pour lequel les couches dupliquées se raccordent avec les couches homologues des autres duplications transformées. Pour éviter la présence de points doublons sur le chemin final, un seul point de raccordement est conservé sur chaque jointure entre couches des différents huitièmes de motif. La **Figure 48** présente différentes trajectoires obtenues en appliquant l'algorithme avec divers paramètres d'entrée. Rappelons que l'inégalité  $h_P \leq l_P/8$  est une marge de sécurité pour les transitions de basculement. Elle n'est pas toujours indispensable, mais fortement conseillée pour garantir la transition de basculement, comme le montre la simulation avec  $h_P = 6,00\text{mm}$ .

■ Surface à fabriquer — Couche d'initialisation  
■ Sens de parcours de la trajectoire

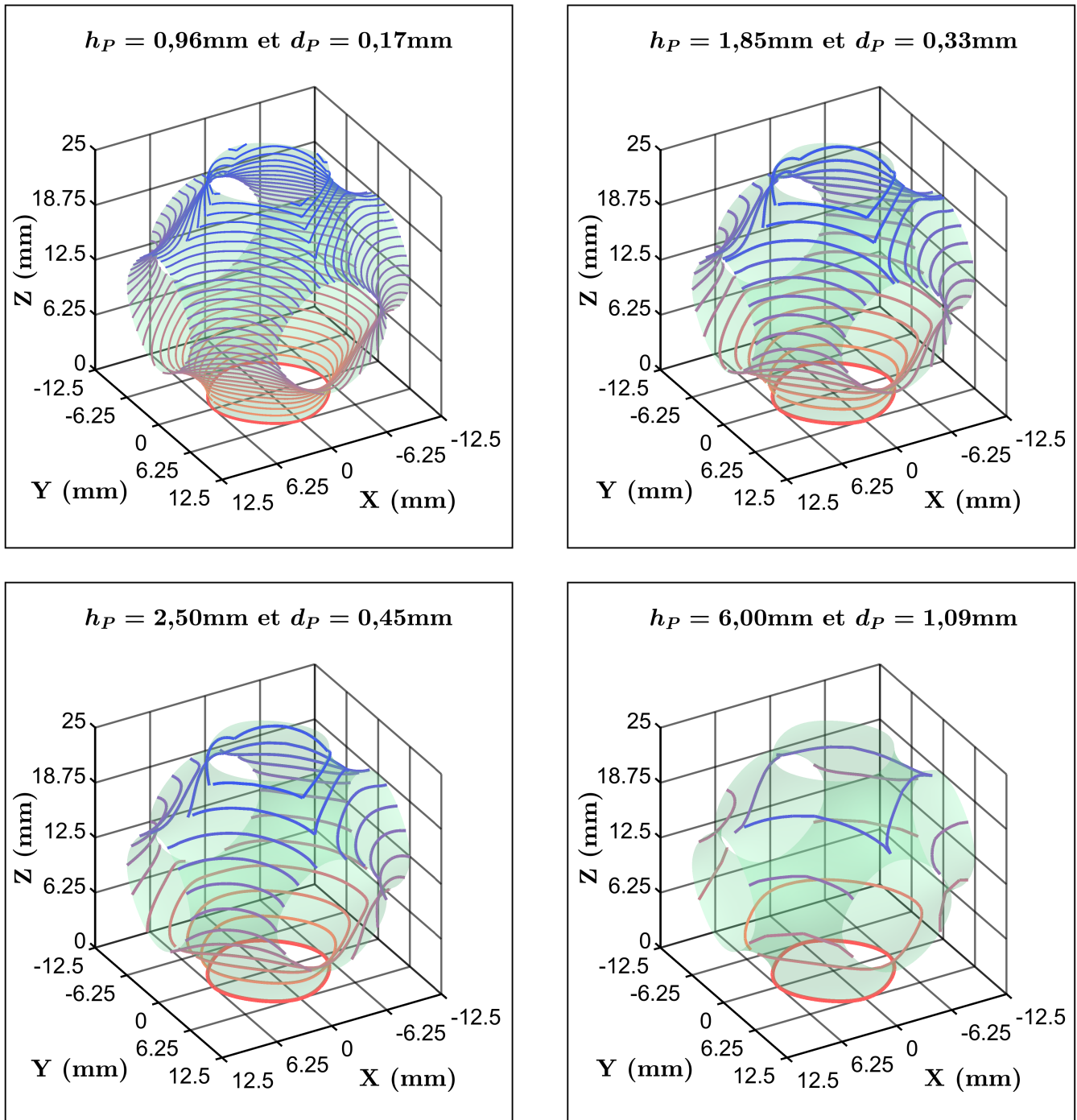


Figure 48 – Quelques trajectoires issues de l'algorithme  
( $l_P = 25\text{mm}$ )

## 2.4 Discussions sur la paramétrisation

La paramétrisation du Schwarz P et l'algorithme associé ont permis de fabriquer un motif de Schwarz P par WAAM [163]. Néanmoins, bien qu'une méthode numérique puisse être développée, la routine reste très rigide car entièrement dépendante de la paramétrisation, et valide pour une famille très restreinte de combinaisons pièces-substrats. Par exemple, la méthode décrite pour le Schwarz P n'est valide que pour un substrat initial possédant les mêmes symétries permettant l'obtention de la trajectoire d'un motif entier depuis un huitième de motif. Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire de trouver une nouvelle paramétrisation et de développer un algorithme totalement différent. Enfin, la paramétrisation ne garantit pas une discrétisation homogène des points calculés dans le cas où l'échelle des paramètres n'est pas linéaire.

Dans cette section, les résultats de l'algorithme paramétrisé du Schwarz P sont examinés. La **Sous-section 2.4.1** analyse la qualité de convergence et le temps de calcul de la méthode développée pour le Schwarz P. Puis, la **Sous-section 2.4.2** élargit les constats de duplication et d'assemblage de tronçons de trajectoire. Enfin, à la **Sous-section 2.4.3**, une discussion sur les formats numériques de surface permet de choisir un format de stockage apte au développement d'une méthode de génération de trajectoire à la fois systématique, robuste et versatile.

### 2.4.1 Convergence et temps de calcul

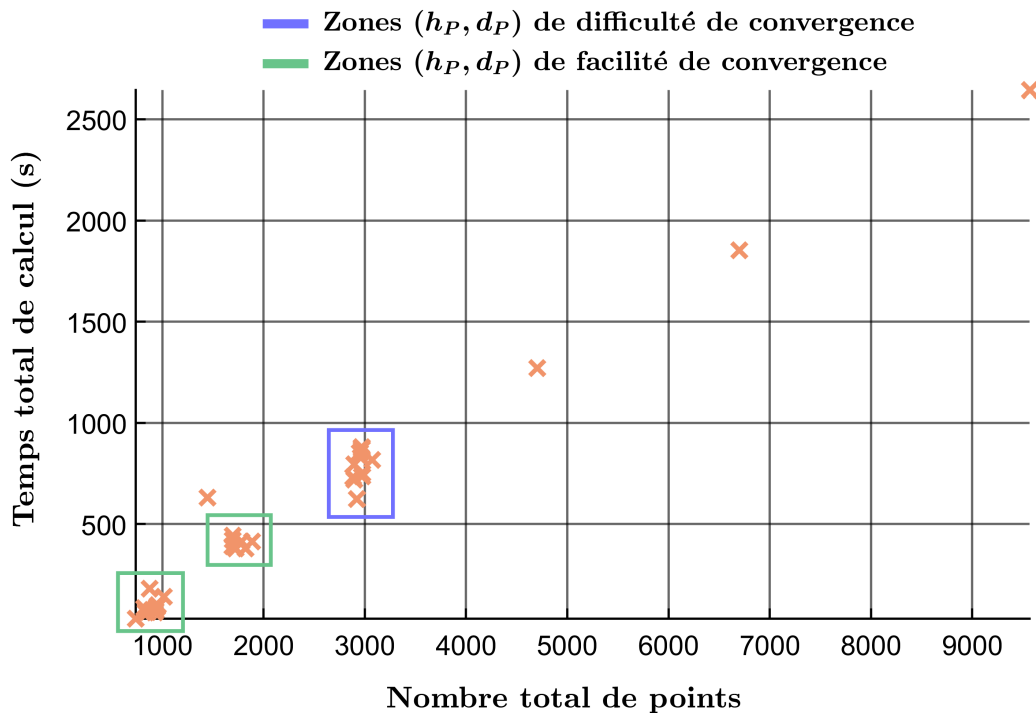
La famille des trois paramétrisations similaires et l'introduction des modes de basculement ont permis de générer une trajectoire, mais leur usage présente de nombreux problèmes. Tout d'abord, comme évoqué précédemment, les iso- $T_w$  ont tendance à s'affaïsser au niveau des droites critiques lorsque  $T_w$  tend vers  $-1$  : l'échelle des iso-T n'est pas linéaire, ce qui engendre une discrétisation non constante entre les points calculés car le pas de calcul sur une méthode d'optimisation numérique est en général constant pour faciliter le calcul de gradient. La présence de la fonction signe sur la paramétrisation du huitième de Schwarz P (**Équation 17** p74) dont la dérivée n'est pas continue rend difficile la convergence de la fonction d'optimisation au niveau des droites critiques, car la fonction de coût associée présente plusieurs vallées proches (**Figure 39** p77). Par conséquent, cela rend le calcul du gradient local numérique de la fonction de coût difficile et augmente le temps de calcul ou conduit à des solutions aberrantes lors des optimisations numériques. Cela a pu être contourné en changeant la paramétrisation au niveau des couches critiques en introduisant des modes de basculement de paramétrisations alternatives.

Cependant, les iso- $T_w$  correspondants évoluent alors dans une direction qui n'est pas orthogonale à la direction de propagation des couches, ce qui, pour un pas constant du paramètre  $T_w$ , engendre une fois de plus une discrétisation hétérogène des points de la trajectoire calculée. De plus, le temps de calcul reste tout de même plus important sur les modes de paramétrisation  $(y_{C1}, T_{y_{C1}})$  et  $(x_{C2}, T_{x_{C2}})$ , car ces modes, déclenchés au niveau du premier et du troisième quart de la hauteur du huitième de Schwarz P, sont utilisés dans des zones relativement proches de leurs propres couches critiques (**Figure 44** p83). Cela s'explique car l'utilisation de fonctions d'optimisation est très sensible aux bornes

de recherche inférieures et supérieures de la zone de recherche. Les bornes de recherche doivent être judicieusement choisies pour s'assurer qu'il n'y a qu'un seul minimum de la fonction de coût dans cet intervalle, ce qui explique l'utilisation de trois optimisations numériques successives pour le calcul des points internes des couches.

Plusieurs simulations ont été effectuées à partir de l'algorithme, pour différentes valeurs des paramètres d'entrée  $l_P$ ,  $h_P$  et  $d_P$ . La **Figure 49** illustre l'évolution du temps de calcul de différentes trajectoires totales pour une même longueur de motif  $l_P = 25\text{mm}$ . Cela permet d'apprécier l'impact du choix de la hauteur de couche  $h_P$  et de la valeur indicative de discrétisation  $d_P$  sur la facilité de convergence de l'algorithme. Le nombre total de points d'une trajectoire à taille de motif fixée est dépendant du nombre de couches et du nombre de points par couche : il est donc influencé indirectement par les paramètres  $h_P$  et  $d_P$  qui permettent de contrôler respectivement la densité de couches et de points sur la trajectoire finale. Le choix de  $h_P$  est essentiellement déterminé par le matériau utilisé et ses propriétés. Il n'y a donc pas réellement de marge de manœuvre sur sa valeur. Au contraire,  $d_P$  peut être ajusté avec davantage de liberté pour atteindre un compromis entre temps de calcul et correspondance de la trajectoire déterminée avec la surface qu'elle décrit dans les zones de difficulté de convergence à géométrie fixée.

Les simulations ont été effectuées avec un système d'exploitation 64 bits sous Windows 10, disposant d'un processeur Intel® Core™ i5-9400H à 2,50GHz, et d'une mémoire de type RAM utilisable de 15,7Go. L'exécution du code se fait en mode monthread.



**Figure 49** – Évolution du temps de calcul des trajectoires



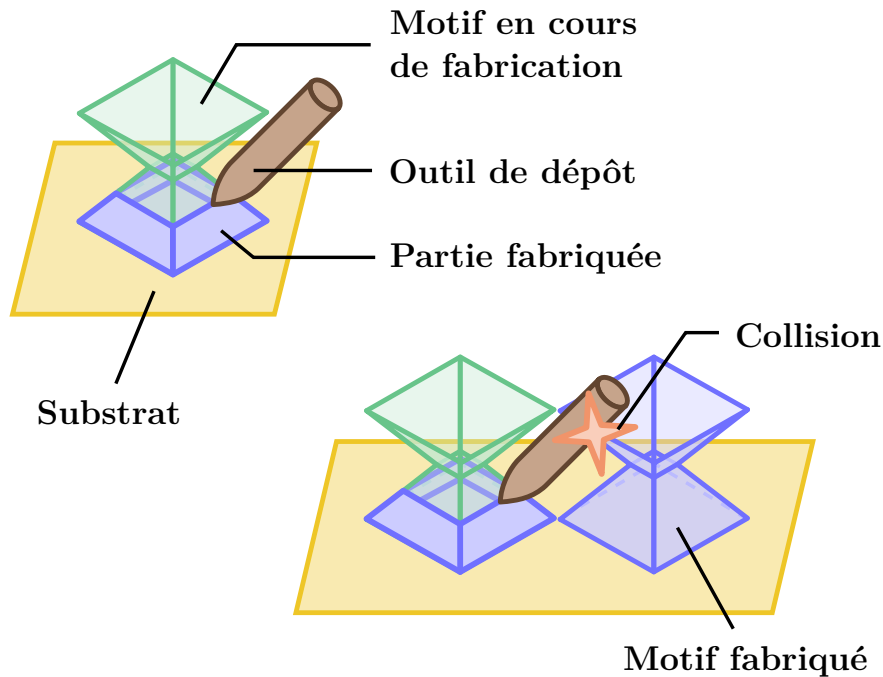
Le temps de calcul semble globalement proportionnel au nombre de points de la trajectoire, ce qui est cohérent avec le fait que les trajectoires à générer sont relativement similaires, même si les valeurs de  $h_P$  et  $d_P$  changent alors que la surface de base reste identique pour toutes les simulations. La liste des valeurs de  $h_P$  et  $d_P$  associées aux différents temps de calcul est fournie à l'**Annexe A5**. On constate cependant des zones où, pour un nombre total de points de la trajectoire équivalent, voire identique, le temps de calcul augmente de manière significative. Cela s'explique car ces régions du graphique correspondent à des simulations où les paramètres  $h_P$  et  $d_P$  varient trop peu pour augmenter le nombre de couches (**Annexe A5**). En effet, une variation négligeable de la hauteur de couche  $h_P$  engendre le même nombre de couches sur une trajectoire générée et n'a donc pas d'influence sur le nombre total de points, tandis qu'une valeur de discrétisation  $d_P$  légèrement différente peut faire varier modérément le nombre de points sur les couches.

Ce phénomène met en avant la forte dépendance du temps de calcul à un choix judicieux de  $d_P$  par rapport à  $h_P$ . Rappelons de plus que  $d_P$  fait appel au calcul de longueurs d'arcs d'iso- $W$  : il est donc sensible au parallélisme des iso- $T_w$  avec la direction de propagation, et par conséquent sensible aux paramétrisations utilisées. Ainsi, la rigidité de  $d_P$  met en lumière la fragilité de convergence de la méthode de génération de trajectoire par sa dépendance totale à la forme des réseaux d'iso-courbes trouvés en amont. Si les deux réseaux ne sont pas respectivement représentatifs de la direction d'empilement et de la forme des couches attendues, alors une divergence progressive s'opère lors du calcul de la trajectoire et entraîne des complications de convergence énoncées précédemment. Le même constat s'applique à la génération de trajectoire par slicing et rejoint les remarques énoncées au **Chapitre 1** : les courbes d'intersection issues du tranchage, si elles sont trop éloignées des couches attendues, amèneront à des complications voire à une impossibilité de génération de trajectoire.

### 2.4.2 Déformation et assemblage de trajectoires

L'assemblage de surfaces ne garantit en aucun cas l'assemblage de trajectoires. L'assemblage de motifs a été présenté à la **Section 1.2**. La fin du **Chapitre 1** a permis de sensibiliser sur cette notion centrale, qui met en avant une des limitations principales de la génération de trajectoire par découpage en entités. Ici, on se propose d'étoffer davantage le raisonnement initié en incluant les constats supplémentaires issus du **Chapitre 2**. La réflexion se base sur la non transposabilité de la trajectoire d'un motif isolé auto-assemblable – comme les TPMS – à l'obtention de la trajectoire d'un assemblage quelconque de motifs identiques à ce dernier.

Un premier argument permet de mettre en avant une première contradiction : la génération de trajectoire d'un seul motif dépend de l'environnement accessible au sein duquel il est fabriqué. Cet environnement change au fur et à mesure que des couches de matériau sont empilées, réduisant les zones auxquelles le robot de fabrication a accès dans son espace de travail. Dans le cas général, il n'est pas possible de dupliquer une même trajectoire pour fabriquer un nouveau motif identique à côté d'un motif déjà fabriqué sans générer de collision (**Figure 50**).



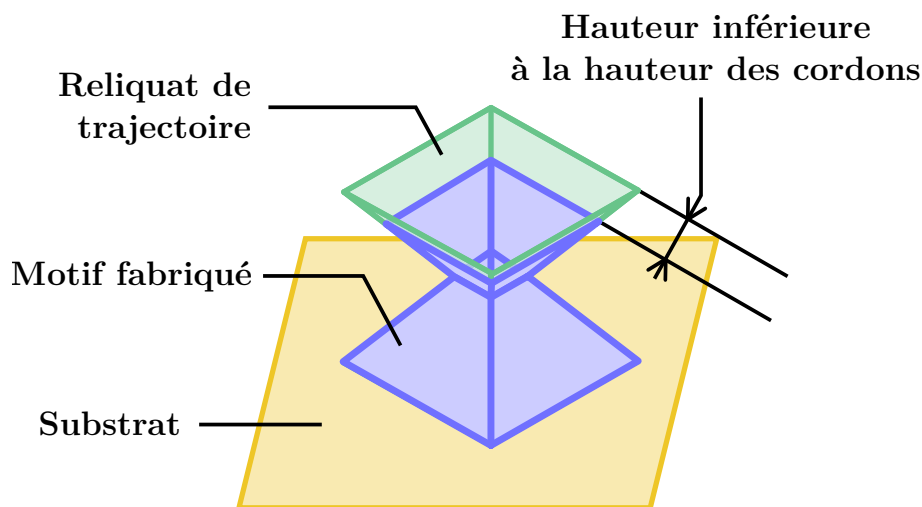
**Figure 50** – Collision après duplication de trajectoire

La duplication de trajectoire est envisageable pour des entités identiques non connexes suffisamment éloignées les unes des autres. Dans le cas du remplissage de pièce par des réseaux de motifs, les cellules unitaires constituent des entités connexes avec leurs voisins. On peut alors suggérer qu'il serait tout de même possible de réutiliser la trajectoire et l'adapter pour éviter les collisions. Par exemple, on pourrait :

- Supprimer les points doublons situés à l'interface entre deux motifs pour n'en conserver qu'un exemplaire ;
- Conserver les points de la trajectoire restants et adapter l'orientation de l'outil pour éviter les collisions entre la matière déjà déposée et l'outil ;
- Changer l'ordre des couches pour fabriquer les motifs en parallèle et ainsi éviter les problèmes d'accessibilité durant la fabrication

Or, ce raisonnement suppose que les trajectoires des motifs à déposer ont la même interface avec le substrat initial. En effet, si le motif a une interface différente, la première couche sera différente, et cela impactera toutes les couches de la trajectoire. Cela réduit grandement les possibilités. De plus, dans un réseau de motifs, les cellules se trouvant à l'intérieur ne sont pas en contact avec le substrat. La matière faisant office de substrat initial est la zone d'interface de ces motifs avec les autres motifs limitrophes du réseau.

Cela signifie que dans le cas général, en procédant par hauteur de couche constante pour les procédés DED, il n'y a pas de garantie que la dernière couche de dépôt atteigne exactement les frontières du motif. Dans le cas général, il y a un reliquat de matière non déposée car le cordon déposé aurait une hauteur inférieure à la hauteur de couche déposée. Ainsi, en supposant qu'un premier motif auto-assemblable soit déposé sur un substrat plan, et qu'un deuxième motif identique soit déposé au-dessus du premier, alors la matière faisant office de substrat au deuxième motif ne sera pas nécessairement un substrat plan (**Figure 51**).



**Figure 51** – Reliquat de trajectoire

Ensuite, quand bien même un motif serait tel que les couches finales arrivent exactement à la frontière extérieure du motif, et que les collisions pourraient être évitées par une réorientation de l'outil et un changement de l'ordre des couches pour fabriquer le plus de motifs possibles en parallèle, les motifs du réseau à fabriquer doivent être identiques, et tous entiers. La trajectoire d'un morceau de motif peut avoir des couches différentes à celles d'un motif entier dans de mêmes régions, même si le substrat initial est le même.

En effet, de la même manière que l'interface avec le substrat peut générer des couches différentes pour un même motif, la suppression de certaines régions du motif peut changer la forme des couches car les directions des distances évaluées pour générer la trajectoire peuvent être impactées (**Figure 52**).

Ainsi, le critère de distance euclidienne des procédés DED est mesuré entre l'extrémité de l'outil et le point le plus proche de la pièce en cours de fabrication. Si une zone de la surface est supprimée, alors aucune matière n'y sera déposée, et donc il se peut que le point de la pièce en cours de fabrication le plus proche d'un point quelconque de la trajectoire ne soit plus à la même distance : il n'est plus censé faire partie de la trajectoire si cette distance ne correspond plus à la hauteur de couche.

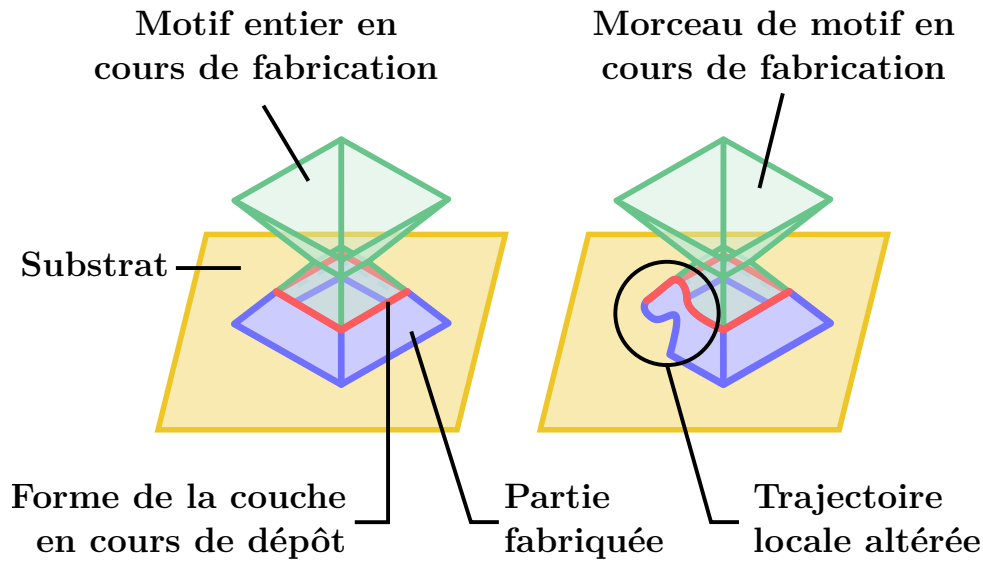


Figure 52 – Trajectoire locale d’un morceau de motif

De plus, le reliquat de trajectoire aux frontières d’une surface, et la modification de la trajectoire locale par suppression de fragments de la surface impliquent directement qu’une trajectoire initiale associée à une surface ne peut pas être déformée par homéomorphisme pour correspondre à celle de la surface correspondant à la surface initiale ayant subi le même homéomorphisme. Ainsi, si une surface correspond à un réseau de motifs ayant subi des déformations locales suite à une phase d’optimisation topologique pour accroître l’efficacité du design de la pièce [117,116], alors la trajectoire ne peut pas être reconstituée de manière rigoureuse à partir du réseau initial tout en respectant le critère de distance euclidienne. La trajectoire devra, a priori, être à nouveau calculée.

### 2.4.3 Choix du format de la surface d’entrée

À travers le cas d’application du Schwarz P, le **Chapitre 2** a mis en avant la limitation des informations contenues dans les surfaces stockées sous forme d’équations pour la génération de trajectoire. Les formats numériques associés sont dits “paramétrés”. Or, ces formats présentent des avantages en termes de nécessités en mémoire informatique. Une forme géométrique décrite par équation, que ce soit sous forme implicite ou paramétrique, permet de minimiser l’espace en mémoire informatique nécessaire pour la décrire car les informations locales sont déduites de l’équation par des routines de calcul.

Au contraire, les modèles discrétisés permettent de décrire davantage de géométries en stockant l’ensemble d’informations locales, mais cela augmente drastiquement l’espace en mémoire nécessaire. Cependant, plus d’informations locales sont stockées, plus la géométrie est localement détaillée. Un compromis entre précision et mémoire est donc inévitable lors de la manipulation d’objets discrétisés.

Dans le cas des modèles paramétrés, la surface est décrite par un ensemble d'équations implicites ou paramétrées décrivant directement la surface ou des réseaux de courbes. Ces réseaux de courbes décrivent le profil de la surface, ou constituent un squelette qui permet de décrire la surface. Par exemple, dans le cas d'une surface de révolution, l'axe de révolution fait partie du squelette de la surface. De même, le centre d'une sphère ne fait pas partie de sa surface, mais sa connaissance suffit, en plus du rayon de la sphère à la décrire. Les équations sont associées à des intervalles de variation pour limiter les zones où les calculs des équations doivent être effectués pour générer la surface. L'utilisation de courbes primitives pour décrire une géométrie réduit son impact sur la mémoire de stockage, mais cela se fait au détriment de la prédisposition à représenter des morphologies locales, donc au détriment du type de géométries qu'il est possible de représenter. Dans le cas où des détails locaux sont nécessaires en certaines régions de la surface, un compromis entre mémoire et précision est réalisé : la surface est partitionnée en un ensemble de régions pouvant chacune être représentée par des équations.

Dans le cas où la surface est discrétisée, les informations relatives à la surface ne sont pas globales. L'ensemble des informations locales sont stockées sous forme de mailles dont la géométrie est variable. Ces mailles sont des surfaces planes aux extrémités polygonales. Les mailles sont définies uniquement par les coordonnées cartésiennes des sommets des polygones, appelés "nœuds", et une normale au plan auquel elles appartiennent. Dans le cas où la surface est fermée, les normales sont en général orientées vers l'extérieur de la surface. Sinon, l'orientation peut varier puisque les notions d'intérieur et d'extérieur de la surface ne peuvent pas être définies de manière globale. Enfin, les mailles sont le plus souvent connectées entre elles : cela signifie que des mailles limitrophes partagent des arêtes et sommets communs. Ce choix, qui contraint davantage la liberté sur la création du maillage total, permet néanmoins de conserver davantage d'informations sous forme synthétique dans le cas où des interpolations sont effectuées pour reconstruire une connexion des espaces tangents de la surface, nécessaire pour déterminer certaines grandeurs sur la surface. Les notions de connexion et d'espace tangent sont détaillées à l'**Annexe A2**.

La surface est une information nécessaire pour déterminer la trajectoire de fabrication puisque la surface contient les informations géométriques sur l'objet que l'on souhaite fabriquer. Son format doit être cohérent avec le type de données manipulées lors de la génération de trajectoire. Dans le cas des procédés DED, ce sont essentiellement des distances euclidiennes qui sont considérées. Une conséquence directe de ce type de distance est qu'il suffit de connaître les points aux extrémités d'un segment pour calculer la distance qui les sépare, contrairement aux géodésiques dont le profil de la courbe liant les deux points aux extrémités de cette dernière ne correspond pas dans le cas général à une droite. La distance entre deux points situés sur une surface peut être assimilée à une droite si la variation de courbure au voisinage de ces deux points est faible. C'est d'ailleurs un des critères permettant de fixer le pas de discrétisation lors du stockage d'une surface à un format discrétisé : pour de telles surfaces, la taille et la localisation des polygones sont telles qu'elles minimisent la perte d'information par rapport à la surface idéale décrite. Les distances considérées pour la génération de trajectoire DED sont euclidiennes. L'algorithme est donc amené à utiliser des coordonnées cartésiennes d'ensembles de points pour en déduire des distances euclidiennes entre différents points.

Les formats les plus communs pour le stockage de surfaces sont au nombre de quatre : le format STL, *3D Object* (OBJ), *Initial Graphic Exchange Specification* (IGES) et *Standard for Exchange of Product Data* (STEP). Les caractéristiques principales de ces formats sont détaillées au **Tableau 9**. Puisque la connaissance de points associés à des coordonnées cartésiennes est nécessaire pour calculer les distances pour générer la trajectoire, les formats discrétisés semblent plus pertinents que les formats paramétrés.

Abbréviation du format	Type de données	Structure des objets	Niveau de précision
STL	Discrétisées	Mailles triangulaires définies par leurs sommets et arêtes	Assez bas
OBJ	Discrétisées	Mailles polygonales définies par leurs sommets et arêtes	Moyen
IGES	Paramétrées	Courbes et surfaces définies par leurs lignes, points et courbes de construction	Assez haut
STEP	Paramétrées	Courbes et surfaces définies par leurs lignes, points et courbes de construction	Très haut

**Table 9** – Principaux formats de stockage numérique d’une surface

Le format STL a été choisi pour développer l’algorithme versatile de génération de trajectoire présenté au **Chapitre 3** en raison de la simplicité et de l’unicité de la structure des objets, comparé au format OBJ. Cette unicité de structure est due au fait que toutes les mailles sont triangulaires. Ainsi, en ne considérant que des faces polygonales de même nature, l’algorithme à développer sera simplifié car il n’y aura pas besoin d’adapter certaines routines de calcul en fonction du type de maille polygonale utilisée. Cela permet ainsi de minimiser la structure de l’algorithme et le temps de calcul des routines.

De plus, le triangle est le seul polygone non plat dont l’ordre de stockage des sommets n’a pas d’importance étant donné que chaque sommet est lié à tous les autres. Dans le cas où un polygone a davantage de sommets, ce n’est pas nécessairement le cas et l’ordre de stockage des sommets a donc de l’importance. Il n’y a donc pas de précaution supplémentaire à prendre à ce niveau-là en cas d’utilisation de mailles triangulaires uniquement.

Enfin, notons qu’il est possible d’obtenir un fichier STL à partir d’un fichier OBJ via une triangulation, donc l’algorithme pourrait aussi générer la trajectoire d’un fichier OBJ dans la pratique. Un fichier OBJ a en général moins de mailles qu’un fichier STL pour un même niveau de précision, grâce à la liberté du type de polygones utilisés. Cependant, l’utilisation de polygones de nature différente dans le cadre de fichiers OBJ implique que des routines spécifiques sont à développer pour chaque type de polygone, ce qui augmenterait la rigidité de l’algorithme de trajectoire concerné s’il incluait directement ce type de format sans conversion préalable. Ainsi, la structure STL est idéale car toute surface discrétisée peut être triangulée en un tel format, et qu’elle assure une souplesse sur le systématisme des routines à développer dans le cadre d’un algorithme de génération de trajectoire versatile.



# Chapitre 3

## Algorithme de génération de trajectoire

Le **Chapitre 3** présente la méthode développée au cours de la thèse pour générer des trajectoires robustes et versatiles à partir de surfaces décrites par des fichiers STL. Tout d'abord, le problème à résoudre est formulé en détail (**Section 3.1**), avec une mise en évidence des exigences à respecter pour garantir sa souplesse et son efficacité en tant que moteur destiné à être combiné à de la rétroaction pour la prise en charge des contre-indications machine et matériau comme évoqué à la **Section 1.4**. Une présentation formelle du problème mathématique à résoudre est proposée afin de structurer la démarche, et les hypothèses de départ sont discutées.

Les fichiers utilisés pour calibrer l'algorithme sont ensuite présentés (**Section 3.2**). L'ensemble des fichiers regroupe les difficultés de géométrie locale à surmonter pour assurer la versatilité de la routine à développer.

L'accent est ensuite mis sur les contraintes d'adaptation de la surface fournie en entrée de l'algorithme (**Section 3.3**) pour assurer le systématisme de la routine algorithmique. Cette étape est essentielle pour assurer des conditions de départ et d'arrêt à la génération de trajectoire.

Puis, l'algorithme général de la méthode est présenté (**Section 3.4**). L'algorithme développé a été implémenté en MATLAB. Une attention particulière est portée aux outils mathématiques employés pour sa construction (**Section 3.5**).

Puis les principales étapes de l'algorithme sont exposées en détail (**Section 3.6**). Les couches sont calculées successivement. Chaque couche est associée à un graphe dont les nœuds et les liaisons correspondent aux points et arêtes de la couche. Les étapes consécutives sont décrites : la détermination de la couche d'initialisation, la sélection de voisinage pour la recherche des points potentiels d'une nouvelle couche, la détermination des sous-graphes potentiels d'une nouvelle couche et la reconstruction de son graphe, ainsi que la détermination des vecteurs outils.

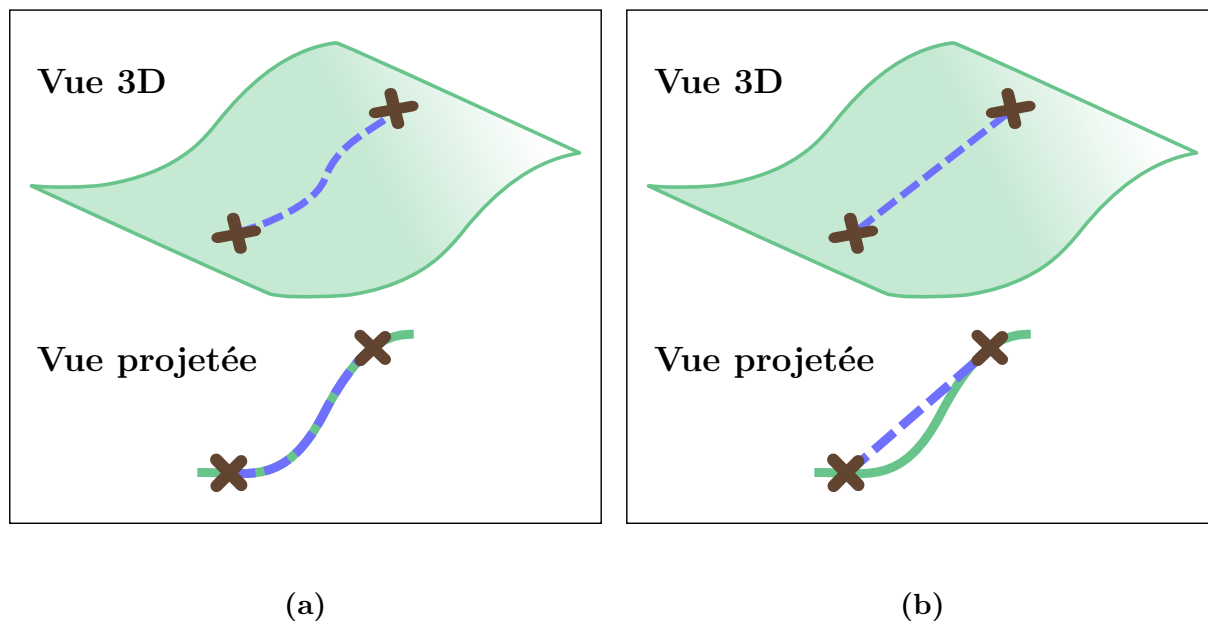


## 3.1 Énoncé du problème

### 3.1.1 Constats et exigences

L'algorithme à développer doit permettre de trouver un premier trajet de dépôt pour l'outil. Ce trajet organisé doit contenir les positions et orientations successives de l'outil au cours de la fabrication, et indiquer les phases de dépôt. Rappelons que ce premier trajet est amené à être modifié ultérieurement par implémentation de la rétroaction (**Section 1.4**). Cette implémentation ne fait pas l'objet des travaux de thèse et constitue une perspective de travaux futurs. Voici les exigences principales issues du **Chapitre 1** :

- Le trajet doit garantir une distance constante entre le bout de l'outil et la pièce en cours de fabrication en toute position calculée. Cette distance physique réelle correspond à une métrique euclidienne (**Figure 53**). Pour soulager la lecture, la constance de ce critère est implicitement sous-entendue par la suite ;
- Pour éviter tout effondrement de la pièce, la matière ne peut être déposée en un point que s'il y a présence de matière déjà déposée à un niveau inférieur afin de servir de support ;
- Pour faciliter la réorganisation, le premier trajet doit minimiser les interruptions de dépôt. En effet, dans le cas de procédés DED et en particulier pour le WAAM, les extrémités des cordons ont une géométrie différente des milieux de cordons en raison des variations des conditions énergétiques [164,17,165].



**Figure 53** – Distances géodésique et euclidienne  
 (a) Distance géodésique (b) Distance euclidienne

### 3.1.2 Énoncé formel

Ainsi, la méthode algorithmique de génération de trajectoire pour les procédés DED développée dans ce chapitre a pour vocation de répondre aux besoins de polyvalence sur la partie software des procédés de fabrication additive mis en avant dans le **Chapitre 1**. Le moteur de génération de trajectoire à construire a pour objectif d'accroître la diversité des types de géométries de pièces, de substrats et de combinaisons pièce-substrat pris en charge en permettant de générer un ensemble de couches de longueur maximale successives respectant le critère de distance euclidienne constante entre la pièce en cours de fabrication et l'outil de dépôt, et recouvrant sans générer de matériau support l'entièreté d'une surface facettisée donnée associée à un substrat, quelles que soient leurs topologies.

Combiné à de la rétroaction, ce moteur est voué à apporter davantage de souplesse et d'adaptabilité à robot de fabrication et matériau d'apport fixés en fournissant une routine systématique et robuste apte à tenir compte de toute modification de topologie de la zone à recouvrir conditionnée par des contraintes de type cinématique, dynamique, collision ou thermique.

La versatilité implique l'indépendance de la méthode recherchée à la forme de la pièce  $S$  et du substrat  $S'$ , de leurs positions relatives et de la distance euclidienne pièce-outil  $h$  amenant à l'obtention de la suite de couches  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  souhaitée. Cette versatilité implique aussi la capacité d'associer le problème à résoudre à un énoncé général. Un énoncé formel du problème mathématique à résoudre est proposé : sa formulation permet de structurer la démarche pour en faciliter la résolution. La **Figure 54** illustre cet énoncé formel.

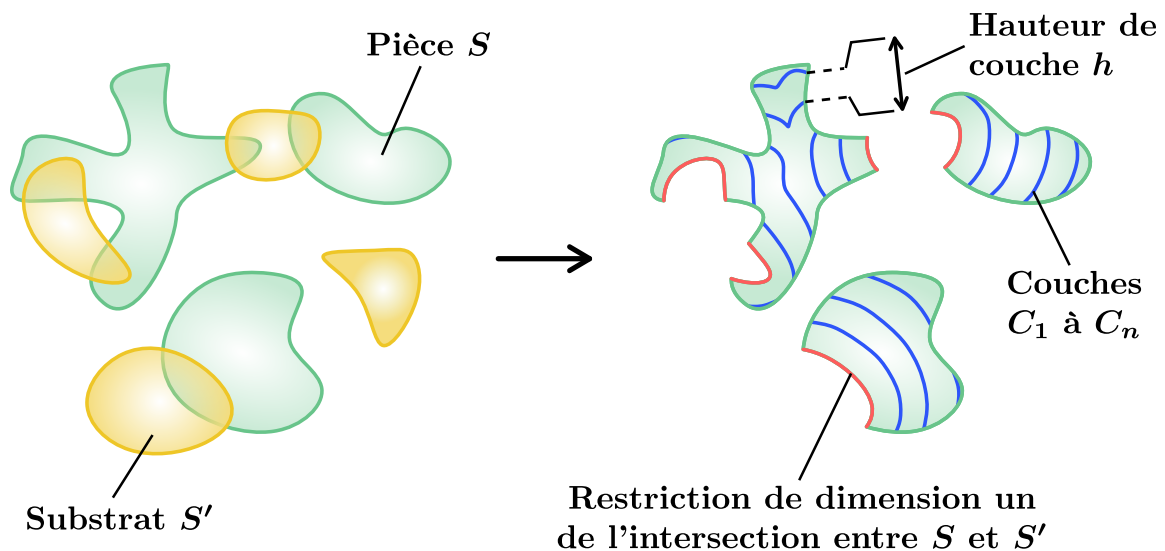


Figure 54 – Schématisation du problème à résoudre

**Énoncé.** Soit  $S$  et  $S'$  deux variétés différentielles de dimension deux quelconques plongées dans un espace de dimension trois. On cherche à recouvrir entièrement la restriction de  $S$  extérieure à toute sous-partie fermée de  $S'$  par une suite de variétés de dimension un  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence telle que chaque point situé sur un nouveau terme de la suite soit situé à une distance euclidienne  $h$  du terme qui le précède, ou de la partie de dimension un de l'intersection entre  $S$  et  $S'$  s'il s'agit du premier terme, et telle que tout nouveau terme soit de longueur totale maximale et de nombre de composantes connexes minimal.

Ainsi, le problème consiste à déterminer les couches successives de la trajectoire à hauteur de couche constante  $h$  et recouvrant sans ajout de matériau support la partie de la surface à fabriquer  $S$  située à l'extérieur du substrat  $S'$ . Ce substrat, qui peut être en plusieurs morceaux non connexes, permet de déterminer les lieux de départ de la trajectoire. Chaque couche est déterminée en fonction de la précédente. La maximisation de la longueur des couches à déterminer et la minimisation de leur nombre d'entités connexes ont un intérêt double. D'une part, cela garantit de maximiser la continuité des couches et donc de minimiser les départs et arrêts de dépôt au sein d'une même couche, car ces phases constituent des étapes transitoires de comportement hétérogène sur les conditions de dépôt et donc, sont à éviter dès que possible. D'autre part, cela permet de réduire le nombre total de couches pour recouvrir la surface à fabriquer.

La définition de la suite par récursivité et à partir de la hauteur de couche suffit à déclencher la propagation de la trajectoire sans chercher à prédire ou imposer une quelconque direction de progression, ce qui s'émancipe de la rigidité des méthodes usuelles mise en avant au **Chapitre 1** et illustrée avec le cas d'application au **Chapitre 2**.

Le critère de distance euclidienne lors du calcul d'une nouvelle couche est évalué vis-à-vis de la couche précédente uniquement, et non pas avec toutes les couches précédentes. Cette considération est valide car les couches recherchées lors de la résolution du problème sont de longueur maximale, et donc une nouvelle couche est entièrement déterminée lorsqu'elle recouvre la totalité de la partie recouvrable de la couche qui la précède. En cas contraire, toutes les couches précédentes devraient être considérées.

Le critère de distance euclidienne n'est pas évalué avec la couche elle-même lors de son propre calcul. Cela fournit une condition d'arrêt permettant de déclencher le calcul de la couche suivante car le calcul d'une nouvelle couche se termine lorsque tous les points de la couche qui la précède ont été utilisés. La prise en charge de la couche elle-même pourrait apporter encore plus de souplesse sur les couches envisageables mais nécessiterait des considérations supplémentaires concernant les conditions de départ et d'arrêt, et sur les méthodes de reconstruction de graphe des couches car les cordons d'une même couche pourraient être empilés les uns sur les autres.

Enfin, les informations fournies dans l'énoncé du problème sont insuffisantes pour garantir le calcul d'une trajectoire adaptée aux limitations cinématiques et dynamiques de la machine ou au comportement thermique du matériau de dépôt après combinaison avec la rétroaction. Cela nécessite des hypothèses supplémentaires qui sont à justifier.

### 3.1.3 Hypothèses de départ de l'algorithme

La **Sous-section 3.1.2** a permis de formuler le problème de génération de trajectoire à résoudre, et donner les grandes implications pour anticiper la versatilité de la méthode nécessaire pour l'obtention d'une première trajectoire relative à des géométries de pièces et de combinaisons pièce-substrat de grande complexité. Or, pour une pièce donnée, la trajectoire n'est pas nécessairement unique. Elle dépend des décisions successives prises pour chaque point de la trajectoire. Dans le cas des procédés DED, ces choix dépendent essentiellement des limitations physiques dues au modèle géométrique et à la dynamique du robot de fabrication, et des contraintes physiques propres au matériau d'apport à considérer pour obtenir un dépôt de qualité acceptable.

Ces limitations physiques amènent à des contre-indications permettant de choisir une première trajectoire compatible aux limitations parmi toutes celles qu'il est possible d'obtenir. La rétroaction a pour vocation de modifier la première trajectoire en délimitant et ordonnant les zones à recouvrir sur la surface à fabriquer pour tenir compte de ces contre-indications physiques. Trois hypothèses sont considérées pour créer un premier chemin de dépôt, qui pourra être réorganisé et modifié ultérieurement en fonction du robot multi-axes et du matériau utilisés :

1. La cinématique du robot de dépôt est supposée idéale ;
2. Les collisions ne sont pas considérées ;
3. L'effet de la thermique n'est pas pris en compte.

La première hypothèse implique que le robot peut atteindre toutes les positions de l'espace de travail sans rencontrer de singularité ou de limite de course d'axe. Cela signifie que le modèle géométrique est toujours considéré comme inversible et que le robot peut toujours atteindre les positions successives de la trajectoire calculée.

La deuxième hypothèse implique que l'outil est modélisé comme un point infinitésimal. Ce point infinitésimal correspond au bout de l'outil de dépôt réel. Avec ce modèle infinitésimal, l'outil ne peut pas entrer en collision avec la pièce en cours de fabrication.

Enfin, la troisième hypothèse signifie que la qualité géométrique et la microstructure des cordons dépendent uniquement du critère de distance euclidienne entre le bout de l'outil et le point le plus proche de la pièce en cours de fabrication. Le gradient de température lors de la fabrication est supposé n'avoir aucun impact sur les déformations subies par la pièce au cours du refroidissement, ni sur l'organisation cristalline des cordons au niveau microscopique, ni sur la hauteur de cordon. Cela revient à supposer que le dépôt se fasse en un temps infini permettant une température de travail constante.

Bien évidemment, ces hypothèses ne sont pas représentatives de la réalité physique au cours de la fabrication, mais elles sont suffisamment raisonnables pour le calcul du premier chemin théorique de la trajectoire avant sa combinaison à la rétroaction pour obtenir le chemin de dépôt final, dès lors où le robot et le matériau d'apport sont connus.

Enfin, en considérant la troisième hypothèse, le matériau support serait uniquement nécessaire pour éviter l'effondrement de la pièce. Sa fonction de facilitation du transfert de chaleur n'est pas considérée lorsque le dépôt est considéré comme réalisé en un temps infini. Or, si le critère de distance euclidienne est respecté et que l'outil est orienté vers le lieu supportant le dépôt, il n'y a pas d'effondrement puisque la matière est toujours déposée sur une partie de la pièce déjà fabriquée. Ainsi, cela justifie les deux contraintes supplémentaires associées à la formulation formelle du problème à résoudre :

1. Aucun matériau support ne doit être ajouté ;
2. La longueur des cordons doit être maximisée.

La première contrainte a pour conséquence qu'aucune phase de dépôt supplémentaire n'est ajoutée durant le calcul de la première trajectoire. Cela est cohérent avec le fait que la localisation du matériau support pour le refroidissement dépend des propriétés du matériau. De plus, le retrait du matériau ajoute du temps de production et nécessite d'avoir accès aux zones internes de la pièce, ce qui peut être extrêmement difficile, voire impossible pour les géométries complexes. Avec cette contrainte, les points de la trajectoire recherchés se situent uniquement sur la surface à fabriquer, ce qui facilite la recherche des couches successives.

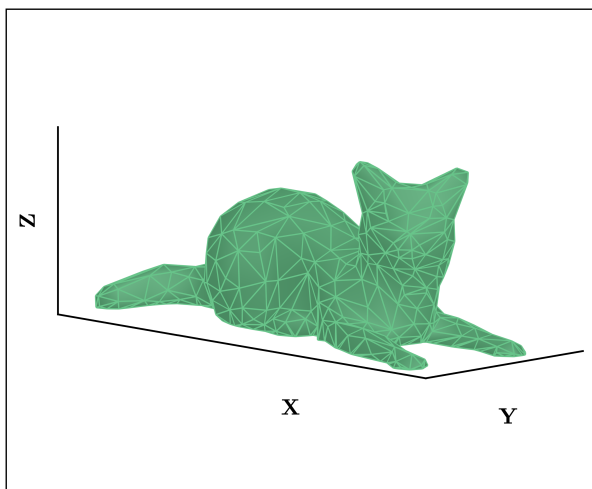
La deuxième contrainte permet quant à elle de minimiser le nombre de départs et d'arrêts de dépôt, comme évoqué à la **Sous-section 3.1.2**. Ce choix permet d'éviter le plus possible les variations brutales des conditions thermiques de dépôt, amenant à des géométries et microstructures différentes au niveau des zones correspondant à des débuts et fins de phases de dépôt. De plus, dans le cas où la longueur des cordons est maximisée, une couche est toujours uniquement en contact de la couche qui la précède et de celle qui la suit, que les couches soient en plusieurs morceaux non connexes ou non. Dans ce cas particulier, le critère de distance euclidienne entre l'outil de dépôt et la pièce en cours de fabrication revient à considérer la distance entre le bout de l'outil et la couche précédente de la trajectoire uniquement. Cela réduit considérablement le nombre de points à considérer pour le calcul des distances au fur et à mesure de l'empilement des couches, et donc cela permet de réduire le temps de calcul.

Notons d'ailleurs que la notion de couche peut être ambiguë si la longueur des cordons n'est pas maximisée : il ne serait parfois pas possible de distinguer la couche d'appartenance de différents cordons car ils ne seraient pas déposés sur la même couche précédente. Dans le cas où la longueur des cordons est maximisée, une couche peut être clairement définie de manière itérative comme l'ensemble de cordons non nécessairement connexes déposés sur la couche précédente.

En conclusion, l'énoncé du problème à résoudre ainsi que les hypothèses nécessaires pour le résoudre ont été posés. Ces étapes sont cruciales pour structurer efficacement la démarche algorithmique à suivre pour la détermination d'une trajectoire de recouvrement apte à être modifiée aux niveaux inter-couches et intra-couches pour tenir compte des contraintes de la machine et du matériau employés en cas d'une combinaison par rétroaction.

### 3.2 Fichiers utilisés pour calibrer l’algorithme

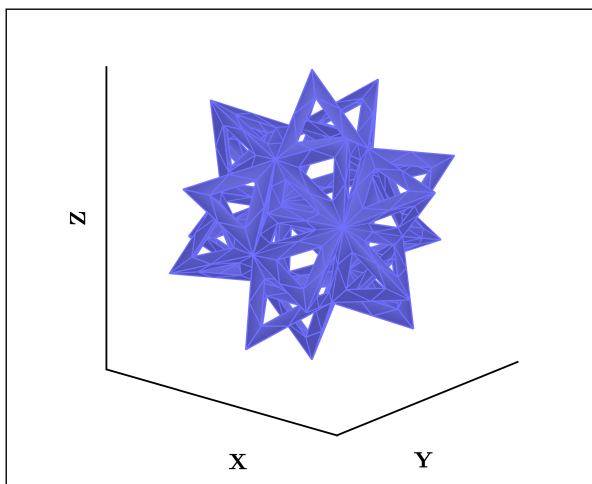
Trois fichiers STL ont été utilisés pour vérifier la cohérence des choix lors de la création de l’algorithme de génération de trajectoire. Ces fichiers ont été choisis de sorte à anticiper le plus de problèmes possible. Les trois fichiers sont illustrés à la **Figure 55**. Ils sont nommés respectivement STL-A, STL-B et STL-C pour la suite du document. En fonction des besoins lors de la construction de l’algorithme, un ou plusieurs des trois fichiers ont été utilisés pour calibrer et valider la robustesse des routines.



(a)



(b)

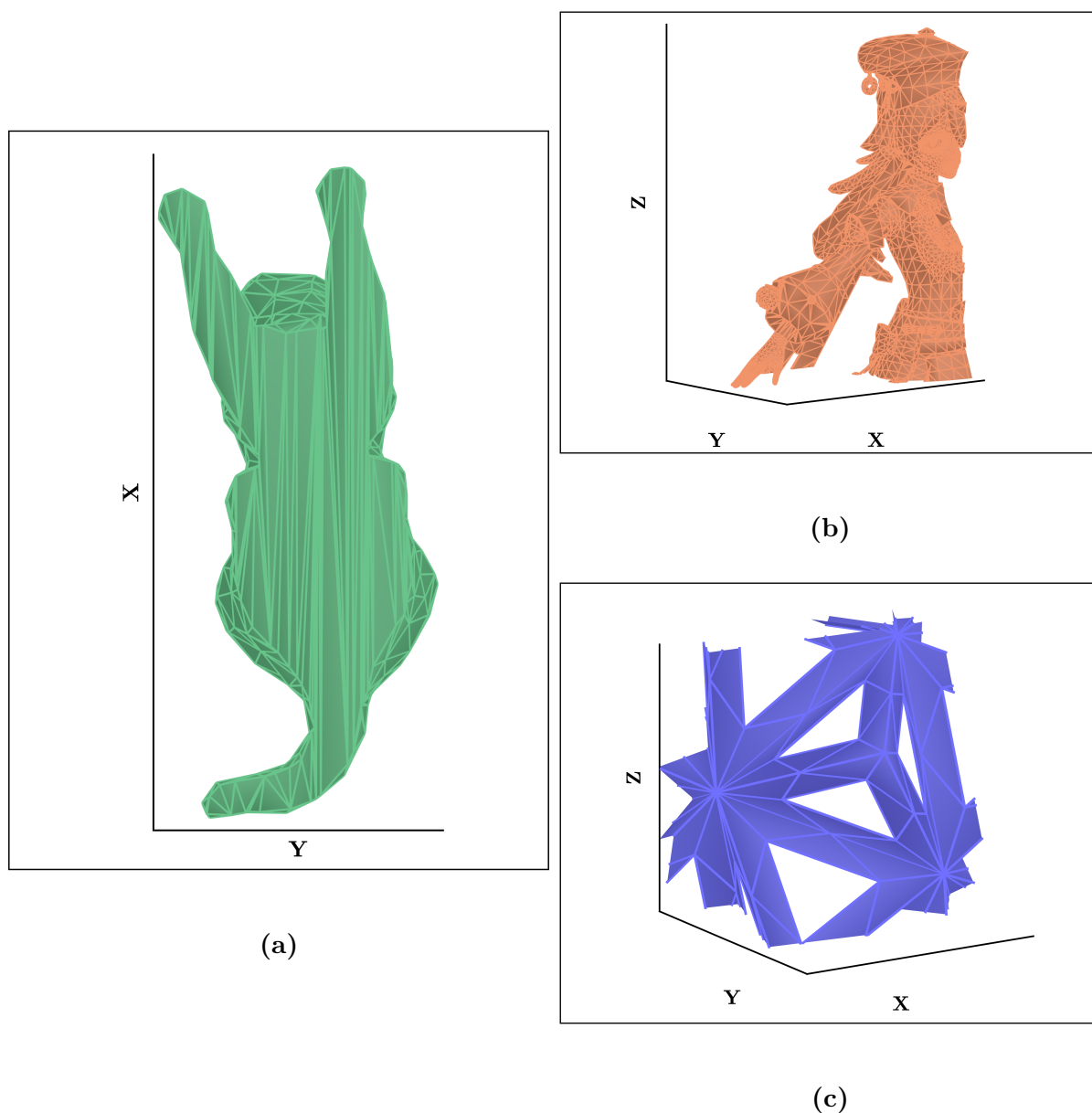


(c)

**Figure 55** – Fichiers utilisés pour construire l’algorithme

(a) Fichier STL-A (b) Fichier STL-B (c) Fichier STL-C

Le fichier STL-A provient d'une banque de fichiers 3D en libre accès [166]. Il possède un nombre de mailles peu élevé, et constitue une surface relativement simple en termes de géométries locales. Il ne comporte aucun trou, mais possède quelques embranchements, notamment entre les deux pattes avant et les deux oreilles du chat. Cependant, il est très intéressant pour la nature des mailles au niveau de son plan inférieur (**Figure 56a**). Les mailles du plan inférieur sont allongées, avec un côté significativement plus court que les deux autres. Ce type de géométrie de maille permet de valider la méthode de subdivision du maillage initial pour éviter le problème de suppression prématurée de mailles au cours de la génération de trajectoire (**Figure 63**).



**Figure 56** – Sources d'erreur potentielles des fichiers utilisés

(a) Mailles longues de STL-A  
(b) Complexités locales de STL-B (c) Trous de STL-C

Le fichier STL-B a été obtenu à partir d'un premier fichier 3D dynamique provenant d'une banque en libre accès [167]. Les fichiers 3D dynamiques permettent de créer des objets articulés donc les maillages sont adaptatifs : ils se modifient en temps réel en fonction de la position du squelette de l'objet. Il est possible de convertir de tels objets en un maillage statique, mais cela nécessite des précautions. En effet, l'intérêt des maillages dynamiques est essentiellement visuel : ils sont utilisés pour l'animation 3D ou la création de maquettes virtuelles. Aussi, les maillages sont beaucoup moins contraints. En particulier, lors de la conversion vers un maillage statique, une étape de réparation du maillage est nécessaire pour résoudre les conflits de mailles imbriquées les unes dans les autres. Néanmoins, les géométries des maillages réalisés sont très souvent complexes justement car leur utilisation est essentiellement visuelle. Aussi, ils sont intéressants à considérer lors de la construction de l'algorithme de génération de trajectoire afin de vérifier la versatilité de la méthode lors de certaines étapes. STL-B possède beaucoup plus de mailles que le fichier STL-A, et leurs dimensions sont très hétérogènes (**Figure 56b**). La géométrie complexe du personnage permet de regrouper une grande diversité de géométries locales : discontinuités de connexité, trous et variations brutales de profil.

Enfin, le STL-C a été créé à partir d'un premier fichier 3D *SketchUp* (SKP) disponible lui aussi sur une banque de fichiers en libre accès [168]. Le format SKP est un format qui permet de représenter des objets 2D ou 3D selon un formalisme similaire. Il est essentiellement utilisé pour la création de scènes, de dessins ou d'assemblages. Le fichier utilisé a tout d'abord été converti en fichier STL. La conversion a généré de légers décalages entre les sommets des faces initialement connectées. Un arrondi des valeurs a permis d'y remédier. La surface correspond à un icosaèdre étoilé à 12 points. Le fichier initial a été construit en assemblant 20 tétraèdres. Or, pour chaque tétraèdre, une des faces se trouve à l'intérieur de la surface. Ces faces ont alors été supprimées car elles ne sont pas censées faire partie de la surface. Puis, des trous ont été ajoutés sur toutes les faces restantes pour obtenir le fichier final STL-C (**Figure 56c**). STL-C a un nombre peu élevé de mailles et ces dernières ont toutes des dimensions identiques. Ces mailles ne sont pas trop allongées, contrairement à celles sur le plan inférieur de STL-A, ou en certaines régions de STL-B. La multiplicité et la proximité des trous constituent la motivation principale de l'utilisation de ce fichier pour la création de l'algorithme de génération de trajectoire. En effet, la forte quantité de bords sur la surface engendre un nombre important de discontinuités sur la surface et permet notamment de vérifier la cohérence des lieux de dépôt lors de la génération des couches de la trajectoire.

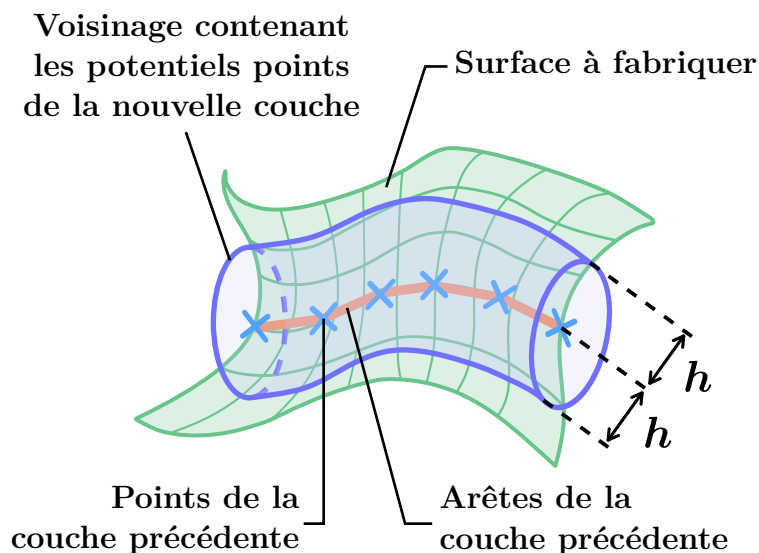
Dans la pratique, STL-A constitue le premier fichier considéré à chaque étape de la programmation. La taille de son maillage permet d'effectuer les calculs rapidement et ainsi d'alterner entre vérification du code et résolution des problèmes. Sa géométrie relativement simple permet d'identifier plus simplement les paramètres à l'origine des erreurs rencontrées. Puis dans un deuxième temps, selon l'étape considérée, l'utilisation de STL-B, STL-C ou des deux permet de s'intéresser aux problèmes plus subtils qui mettraient en péril la versatilité de la méthode.



### 3.3 Contraintes sur la surface d'entrée

Toute surface facettisée utilisée en entrée de l'algorithme doit être adaptée pour assurer le déclenchement de la génération de trajectoire. En effet, d'après l'énoncé du problème et les hypothèses expliqués à la **Section 3.1**, la génération de trajectoire repose essentiellement sur le calcul de distances euclidiennes entre les points de la surface à fabriquer et les points de la couche précédente. Les distances sont à comparer avec la valeur de la hauteur de couche. Pour cela, les points de la surface d'entrée doivent être tels que le voisinage de chaque point contienne les informations suffisantes pour déterminer les prochains points potentiels de la trajectoire. Le voisinage à considérer doit être le plus petit possible pour minimiser le nombre de calculs effectués à chaque fois. La valeur de la hauteur de couche, centrale dans le développement de la routine, est notée  $h$  pour la suite.

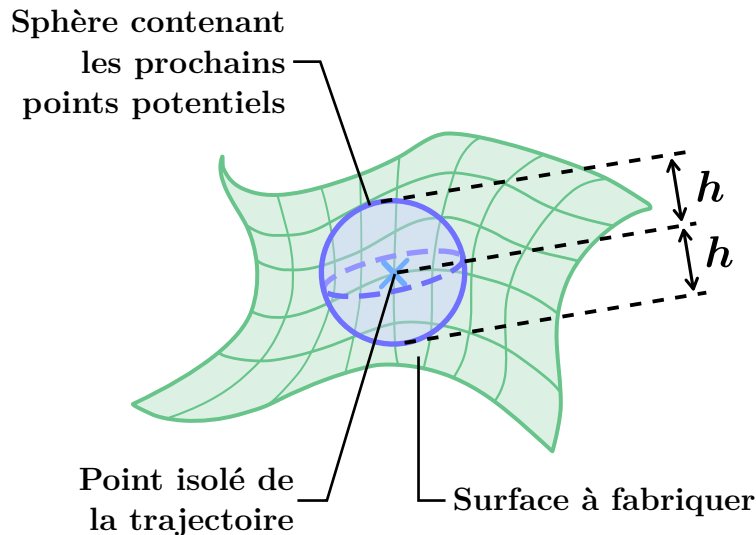
Puisque la recherche des points se fait par rapport à la valeur de la hauteur de couche, le voisinage minimal peut être réduit à l'union d'une infinité de cercles orthogonaux aux segments de la couche précédente et dont le rayon correspond à la valeur de la hauteur de couche  $h$  (**Figure 57**). Cependant, le voisinage doit absolument contenir suffisamment d'informations pour déterminer la trajectoire. Si ce n'est pas le cas, il doit être élargi. Les informations contenues dans le voisinage sont les mailles l'intersectant. Ces mailles sont des faces triangulaires définies par leurs sommets. Étant donné une couche de la trajectoire, les points suivants se trouvent sur le maillage, et à une distance de cette couche correspondant exactement à la hauteur de la valeur de couche.



**Figure 57** – Voisinage minimal et potentiels points de trajectoire

Une couche est constituée de points liés par des arêtes. Puisqu'un segment est constitué d'une infinité de points, il y a donc une infinité de points potentiels possibles. Pour éviter que la détermination des points ne prenne un temps infini, il faut restreindre les

points considérés pour calculer la couche suivante. Si la couche est judicieusement choisie, alors on peut utiliser uniquement les sommets des segments de la couche précédente. En considérant un point isolé de la couche précédente, et en ne considérant pas les segments, les points potentiels de la trajectoire se trouvent alors sur l'intersection entre la sphère de voisinage de  $h$  et l'ensemble des faces du maillage (**Figure 58**).



**Figure 58** – Lieu des prochains points potentiels vis-à-vis d'un point initial isolé

Considérer des points isolés de la couche précédente permet ainsi de simplifier la recherche des points suivants de la trajectoire, mais cela nécessite des précautions sur la distance relative entre les points de la couche précédente utilisés. En effet, considérer des points isolés, revient à supprimer certaines informations sur l'allure locale de la surface, et donc à localement simplifier l'allure de la surface. En outre, si les points isolés ne sont pas choisis judicieusement, le même problème que celui évoqué à la **Sous-section 2.4.2** apparaîtrait : la trajectoire calculée ne respecterait pas le critère de distance euclidienne en considérant les segments des couches.

Cela implique une contrainte sur la discrétisation maximale de la couche précédente (**Figure 59**). La valeur de discrétisation des couches de la trajectoire est désignée par la variable  $d$  pour la suite de ce chapitre et du document. En effet, si deux points successifs de la couche précédente sont trop éloignés, alors l'estimation des solutions possibles pour les prochains points sera faussée (**Figure 59a**). La discrétisation peut néanmoins être choisie de sorte à minimiser l'écart de distance euclidienne des points potentiels trouvés par rapport à la valeur  $h$  souhaitée (**Figure 59b**). Les distances d'un point de la surface à la couche précédente sont évaluées sur les segments de la couche précédente. Ne considérer que les sommets du segment permet aussi de réduire drastiquement la complexité du problème.

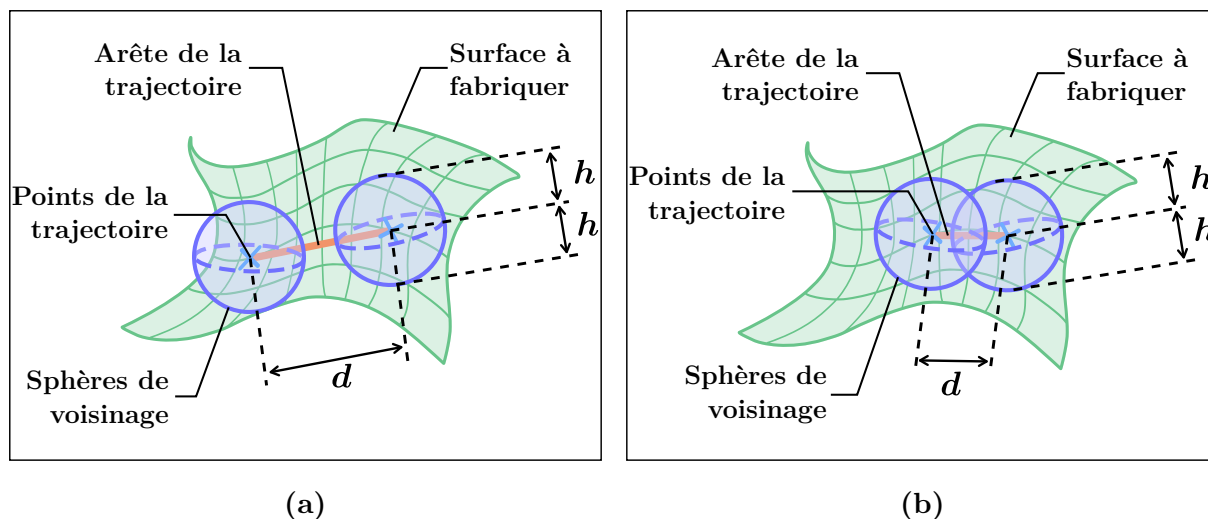


Figure 59 – Contrainte de discrétisation des couches

(a) Sous-discrétisation (b) Discrétisation raisonnable

Pour cela, une modélisation faisant appel à de la géométrie basique est proposée à la **Figure 60**. Cette modélisation permet de majorer l'écart entre  $h$  et la plus petite distance des points potentiels trouvés au segment de la couche précédente considéré. Dans ce modèle, cet écart peut être exprimé en fonction de  $h$  et  $d$  uniquement. Le problème est 3D mais invariant par rotation autour du segment liant les deux sphères de voisinage considérées. Il peut donc être transformé en problème 2D sans altérer le raisonnement.

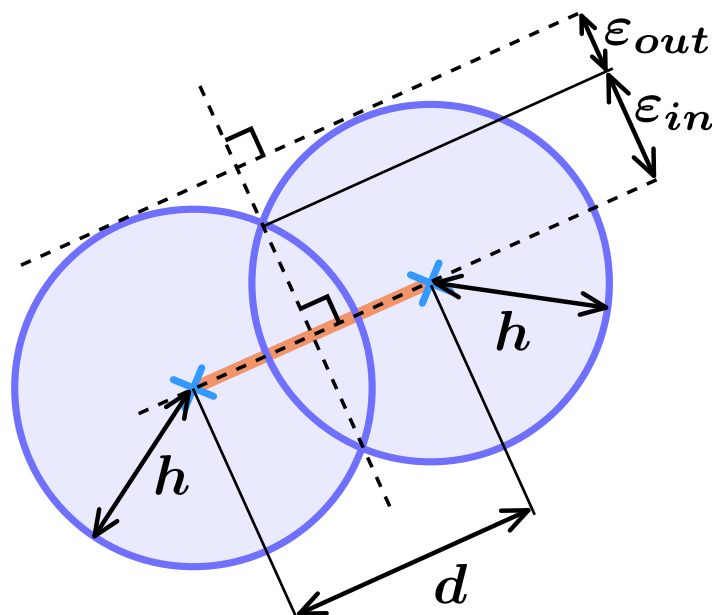


Figure 60 – Modélisation de l'écart maximal de distance euclidienne

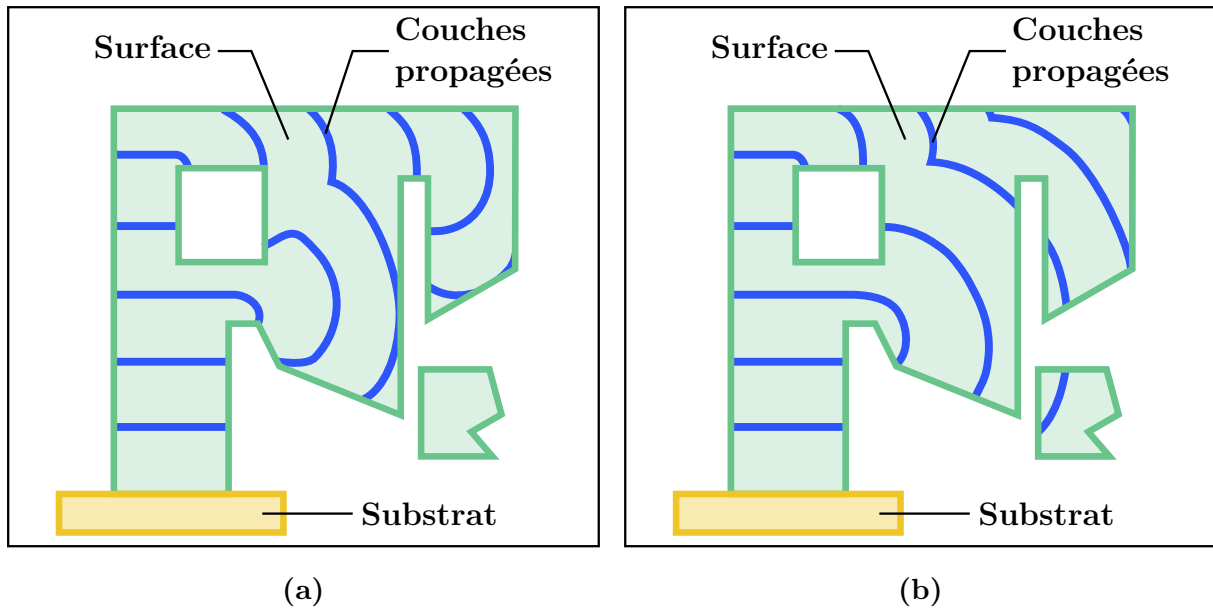
Les potentiels points de la couche suivante sont situés sur l'ensemble formé par les deux sphères de voisinage dont les centres sont les sommets du segment de la couche précédente considérée. Ces sphères sont symbolisées par les cercles en 2D. Le modèle proposé suppose cependant que, pour chaque point potentiel de la couche suivante trouvé, le point de la couche précédente qui en est le plus proche se trouve toujours sur un des segments liés au centre de la sphère de voisinage dont il est issu, et sur aucun autre segment de la couche précédente. Cette simplification n'est pas raisonnable dans le cas général, mais permet une première modélisation guidant les choix de l'algorithme. Une amélioration du modèle tenant compte de cette limitation est proposée à la **Sous-section 3.6.3** du **Chapitre 3**, et utilisée sur les simulations de la **Section 4.1**.

Soient  $\varepsilon_{in}$  la distance minimale des points potentiels de la couche suivante au segment considéré, et  $\varepsilon_{out}$  la différence entre  $\mathbf{h}$  et  $\varepsilon_{in}$ .  $\varepsilon_{in}$  et  $\varepsilon_{out}$  constituent les valeurs extrémales de distance à la couche précédente des points potentiels de la nouvelle couche. À partir de la modélisation de la **Figure 60**, on obtient l'**Équation 18** :

$$\begin{cases} \varepsilon_{in} &= \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 - d^2} \\ \varepsilon_{out} &= h - \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 - d^2} \end{cases} \quad (18)$$

En premier constat, la modélisation n'a de sens que si  $\mathbf{d}$  vaut au plus deux fois  $\mathbf{h}$  pour assurer que les deux sphères de voisinage s'intersectent. Sinon, les formules proposées pour  $\varepsilon_{in}$  et  $\varepsilon_{out}$  ne sont pas valides. Le fait que les deux sphères s'intersectent garantit aussi que le segment est entièrement inclus dans les sphères, et donc que l'union des sphères d'un même segment est connexe. Cette connexité permet de ne pas créer artificiellement d'interruption de dépôt car les points trouvés sur deux régions délimitées de la surface et localement non connexes ne sont théoriquement pas à relier par de la matière.

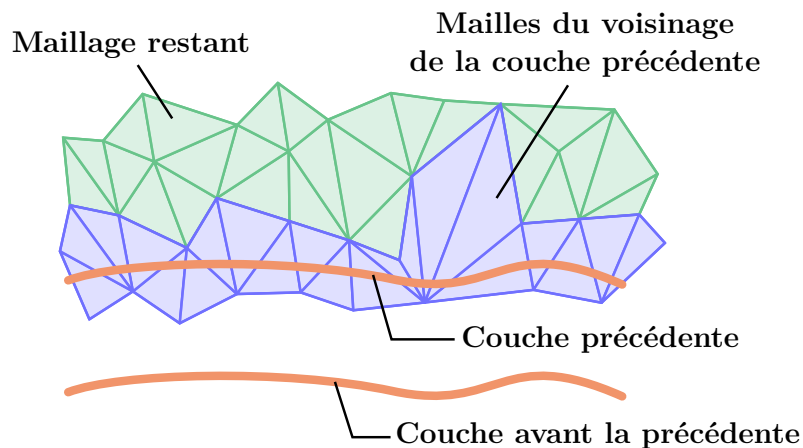
L'évaluation de la connexité est une précaution propre à la nature même des distances euclidiennes. Puisque les distances sont mesurées non pas sur la surface mais sur l'espace de plongement de la surface, ce type de distance ne suit pas le profil de la surface (**Figure 61b**). Au contraire, une distance géodésique suit le profil et donc permet à elle seule de suivre la propagation des couches tout en éliminant naturellement les régions non connexes à cette propagation (**Figure 61a**). Pour que les distances euclidiennes s'adaptent au sens de propagation des couches, les connexités locales sont à évaluer pour réduire l'ensemble des points potentiels pour la prochaine couche. Plus la valeur de  $\mathbf{d}$  est petite, plus  $\varepsilon_{in}$  est proche de  $\mathbf{h}$ . Cela signifie qu'une augmentation de la discrétisation maximise la probabilité que le critère de distance euclidienne  $\mathbf{h}$  soit respecté pour chaque point déterminé. Cependant, cela se fait au détriment du nombre de points et donc au prix du temps de calcul et de l'espace en mémoire. Ces considérations doivent être prises en compte lors du choix de  $\mathbf{d}$ , ce qui est évoqué à la **Sous-section 4.1.1** avec les indications de réglage des paramètres d'entrée de l'algorithme de génération de trajectoire.



**Figure 61** – Propagation des couches depuis le substrat selon le type de distance

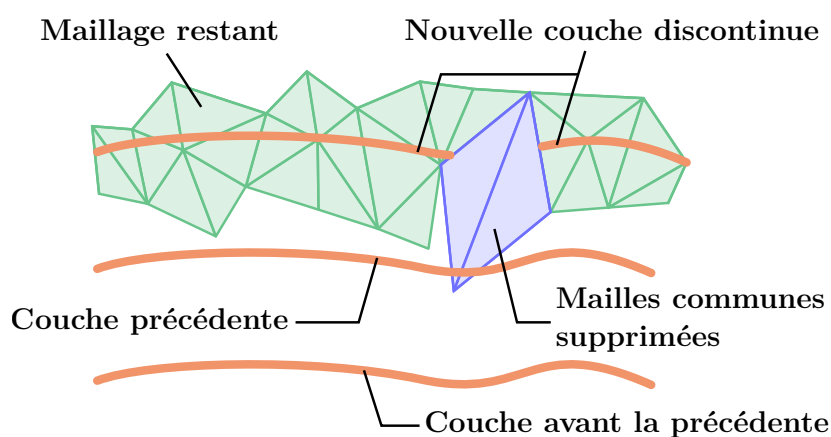
(a) Distances géodésiques (b) Distances euclidiennes

Enfin, la prise en compte de la connexité locale avec les distances euclidiennes ne suffit pas à elle seule à forcer la propagation de la trajectoire selon le profil de la surface. En effet, comme illustré à la **Figure 57**, pour une couche donnée, les potentiels points vérifiant le critère de distance euclidienne se trouvent soit sur la couche qui lui succède, soit sur celle qui la précède. Aussi, si le voisinage n'est pas restreint en amont, la trajectoire pourrait se propager à la fois dans la direction d'empilement des couches et dans la direction opposée, et créer des doublons de couches déjà calculées. Pour éviter cela, l'idée consiste à supprimer les faces du maillage utilisées au fur et à mesure du calcul de la trajectoire pour restreindre les voisinages aux mailles contenues dans les sphères de voisinage (**Figure 62**).



**Figure 62** – Réduction du voisinage

Cela permet aussi de réduire les calculs effectués. Cependant, cela implique aussi une contrainte sur la taille des mailles. En effet, si une maille est de taille trop importante par rapport à  $h$ , alors elle peut être commune à différentes couches de la trajectoire. Par conséquent, si elle est supprimée pour une couche inférieure mais nécessaire pour une couche supérieure, cela créerait un vide sur la trajectoire (**Figure 63**).



**Figure 63** – Conséquence sur la trajectoire de la suppression d'une maille commune à plusieurs couches

Afin d'éviter qu'une maille soit commune à plusieurs couches, une subdivision du maillage peut être effectuée. La subdivision permet de créer un échantillonnage plus fin de la surface pour permettre l'extraction des voisinages locaux et garantir le systématisme des routines quelle que soit la géométrie locale lors de la génération de trajectoire. La taille indicative des arêtes des faces triangulaires du maillage est notée  $e$  pour la suite de ce chapitre et du document. Le raffinement des mailles en sous-mailles plus petites permettrait ainsi de réduire la valeur de  $e$  à une valeur raisonnable devant  $h$ . Cependant, bien que la subdivision permette de forcer la propagation de la trajectoire sur toute la surface, elle augmente le nombre de mailles à considérer et donc le temps de calcul.

Il existe de nombreuses méthodes efficaces de raffinement de maillage par des méthodes récursives, mais cela ne permet pas de maîtriser en amont de la subdivision le nombre de sous-mailles attendues pour maîtriser l'espace en mémoire à solliciter. Davantage d'informations sur les principales méthodes usuelles sont fournies à l'**Annexe A6**. C'est dans ce contexte qu'une méthode exclusive de raffinement permettant de contrôler le nombre de sous-mailles a été développée durant cette thèse. Cette méthode est présentée en détail à l'**Annexe A6**. Le but est l'atteinte d'un maillage subdivisé final présentant un compromis parmi les critères suivants :

- L'obtention de sous-mailles d'arêtes toutes de longueur inférieure à  $h$  ;
- L'obtention de triangles de géométrie acceptable (non plats) ;
- La minimisation du nombre total de sous-mailles.

L'algorithme synthétique de l'étape de subdivision est détaillé à la **Figure 64**. Le maillage de sortie n'est plus nécessairement connecté, c'est-à-dire que des mailles triangulaires adjacentes du maillage ne partagent pas nécessairement des arêtes communes. Cela permet d'apporter plus de souplesse lors de la recherche d'un compromis entre taille de mailles, géométrie et nombre total de mailles lors de la subdivision. La connexion du maillage permet d'en déduire les entités connexes de la pièce et les zones connexes en tout voisinage de la pièce. Il est possible de remonter à cette information sur le maillage final en associant chaque sous-maille à sa maille mère sur le maillage connecté initial.

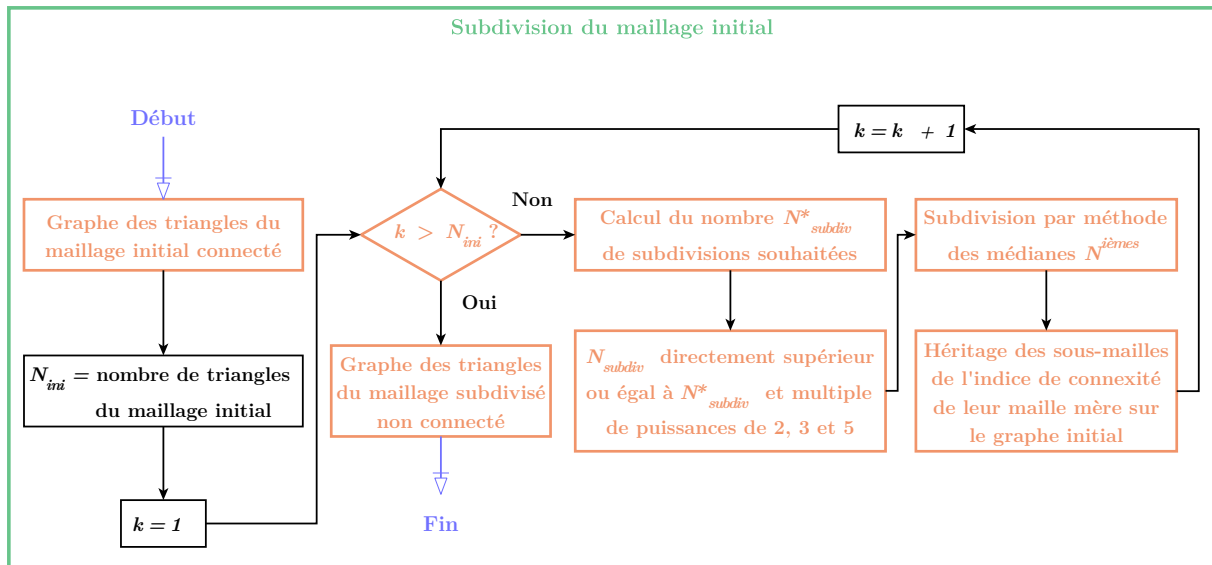


Figure 64 – Étape de subdivision du maillage initial

À l'issue de la subdivision, le maillage est apte à garantir une propagation de la trajectoire dans le sens de l'empilement des couches uniquement par suppression des mailles utilisées une fois, sans générer de discontinuité prématurée sur les couches car toute sous-maille n'intersecte au plus qu'une seule couche après subdivision. Les mailles de voisinage non utilisées sont automatiquement supprimées du maillage restant.

### 3.4 Algorithme complet de la méthode

Une fois le maillage d'entrée subdivisé, le calcul des couches successives peut être effectué. L'algorithme complet de la méthode de génération de trajectoire est disponible à la **Figure 65**. En plus des fichiers STL de la surface à fabriquer et du substrat, quatre paramètres dont deux déjà introduits à la **Section 3.3** sont utilisés. Leur réglage préconisé et leur équivalence physique sont détaillés au **Tableau 10** p140 de la **Sous-section 4.1.1** :

- La hauteur de couche  $h$  ;
- La taille indicative des arêtes du maillage subdivisé  $e$  ;
- La valeur indicative de discrétisation des couches  $d$  ;
- La valeur de filtrage entre nœuds de sous-graphes non connexes  $f$ .

- Surfaces STL : pièce et substrat
- Hauteur de couche ( $h$ )
- Taille indicative des arêtes ( $e$ )
- Valeur indicative de discrétisation des couches ( $d$ )
- Valeur de filtrage entre nœuds de sous-graphes non connexes ( $f$ )

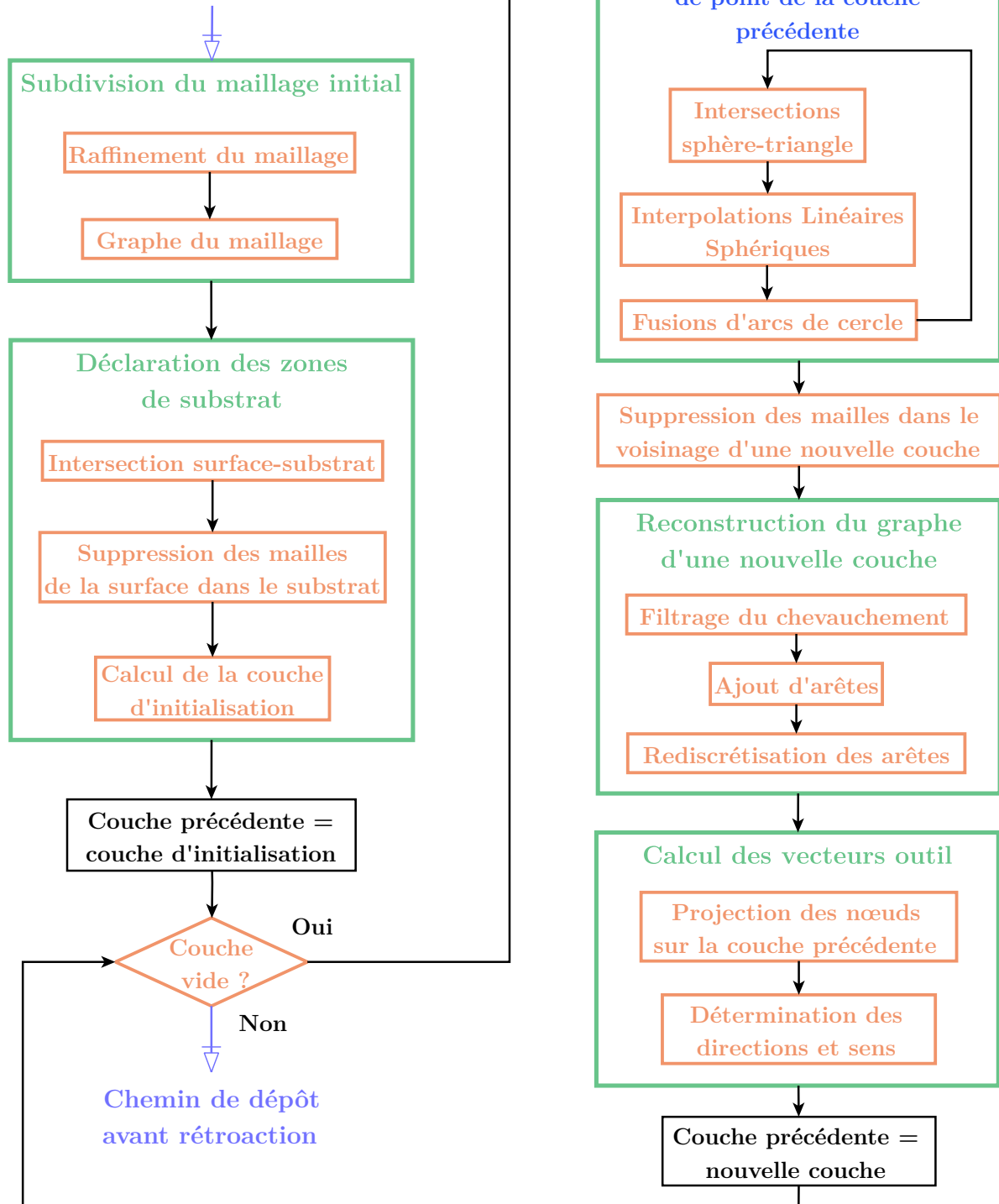


Figure 65 – Algorithme de génération de trajectoire



## 3.5 Outils mathématiques

Les différentes étapes de l'algorithme de génération de trajectoire font appel à diverses méthodes de géométrie ou d'organisation de données. Cette section synthétise les principaux outils numériques utilisés pour l'algorithme et mentionnés par la suite. Ces outils ont notamment été adaptés et utilisés dans les routines de couche d'initialisation (**Sous-section 3.6.1**), de sélection de voisinage (**Sous-section 3.6.2**), de recherche des points potentiels d'une nouvelle couche (**Sous-section 3.6.3**) et la reconstruction de son graphe (**Sous-section 3.6.4**). Quatre notions sont abordées :

- L'intersection entre deux maillages STL (**Sous-section 3.5.1**);
- La détection de collision entre une sphère et un triangle (**Sous-section 3.5.2**);
- L'interpolation linéaire sphérique (**Sous-section 3.5.3**);
- La recherche d'un chemin eulérien sur un graphe (**Sous-section 3.5.4**).

### 3.5.1 Intersection entre deux maillages STL

L'intersection entre deux maillages STL est une étape primordiale pour la création de la couche d'initialisation (**Sous-section 3.6.1**). Le calcul d'intersection entre deux maillages repose sur une adaptation du calcul optimisé de distance entre deux droites, appliqué entre deux triangles sur chacun de leurs trois segments. Le calcul de distances entre points, droites et plans est une préoccupation majeure des calculs en infographie depuis la fin des années 1960 pour la modélisation 3D de solides (**Figure 66**).

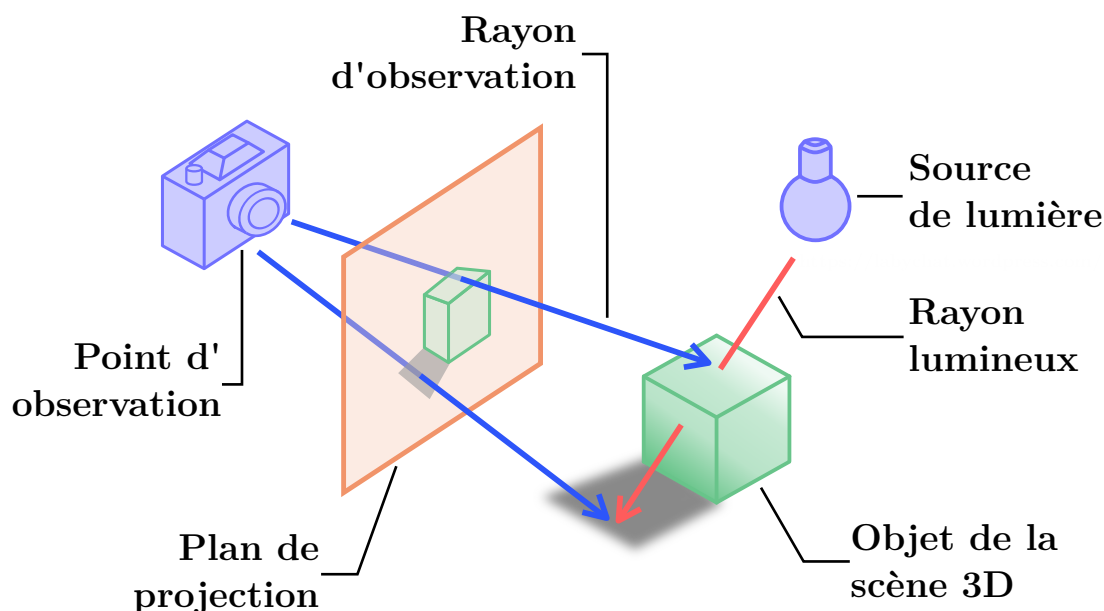


Figure 66 – Principe du ray-tracing

L'effet de perspective se fait par la variation des dimensions des objets éloignés d'un point d'observation et éventuellement de l'intensité lumineuse selon la position des objets par rapport à une source de lumière virtuelle. La lumière est alors modélisée par un ensemble de rayons dont les lieux de réflexion et réfraction sont issus de leur intersection avec les éléments de la scène 3D. Dans de telles applications, un nombre important de distances est calculé entre différents objets en divers endroits de ces derniers, soit pour détecter s'ils sont en collision, soit pour modéliser la diffusion d'une source de lumière à leur surface dans une scène 3D. Les intersections sont calculées à partir de géométrie basique. Une augmentation du nombre d'intersections calculées permet d'améliorer la précision des résultats au coût d'une augmentation du temps de calcul.

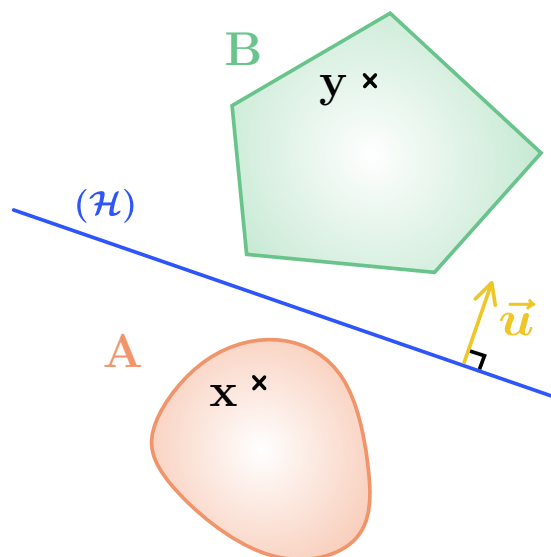
Au cours des décennies, des méthodes de plus en plus rapides ont été développées pour optimiser les calculs. En premier lieu, le ray-tracing (**Figure 66**) a été développé en 1968 dans le but de reproduire plus efficacement la réflexion et la réfraction de la lumière lors du rendu 3D d'images [169]. Puis, en 1982, la méthode a été améliorée de manière significative développant le ray-casting dans le but de modéliser plus efficacement les solides 3D issus d'unions, intersections ou différences de formes primitives dans les logiciels de CAO et FAO [170]. La méthode a été améliorée dans le cas des intersections droite-triangle en 1997 [171]. La même année, une routine adaptant la méthode à des intersections triangle-triangle a été proposée [172]. Cette routine d'intersection triangle-triangle est parfaitement adaptée au calcul d'intersection entre deux maillages STL.

### 3.5.2 Détection de collision sphère-triangle

Les travaux en infographie dans les années 1960 ont aussi été l'occasion de l'apparition de méthodes de détection de collisions entre objets, à des fins de simulation et de rendu en temps réel. Une collision est la caractérisation d'existence d'une intersection sans en décrire la nature. Comme précisé à la **Sous-section 3.1.3**, les collisions pièce-outil ne sont pas considérées dans l'algorithme de génération de trajectoire, puisque le premier trajet de dépôt recherché est amené à être modifié ultérieurement pour en tenir compte par réorganisation intra-couches et inter-couches par rétroaction. L'utilisation d'outils de collision ici sert à déterminer les faces du maillage contenues dans les différentes sphères de voisinage. La méthode est modifiée dans la méthode de génération de trajectoire pour caractériser la nature de l'intersection entre les faces triangulaires du maillage et les sphères de voisinage minimal évoquées à la **Section 3.3** et illustrées à la **Figure 57** p106. Cela est nécessaire pour la recherche des points potentiels d'une nouvelle couche (**Sous-section 3.6.3**).

La détection de collision sphère-triangle est une opération basique. Un tel type de collision peut être calculé en utilisant le Théorème de Séparation des Convexes, plus communément désigné en tant que *Separating Axis Theorem* (SAT). Ce théorème stipule que dans un espace euclidien de dimension  $n$ , deux sous-espaces  $A$  et  $B$  ne sont pas en collision s'il existe un hyperplan  $\mathcal{H}$  qui les sépare. Cet hyperplan est, par définition, un ensemble de dimension  $n - 1$  inclus dans l'espace euclidien de dimension  $n$ . Il est déterminé par son vecteur orthogonal  $\vec{u}$ . Ce théorème est illustré à la **Figure 67** pour un espace de dimension deux. En dimension deux, cet hyperplan est une droite. La traduction mathématique du théorème permet de comprendre son utilisation informatique :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, \vec{u} \neq \vec{0}, \exists c \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} \geq c \\ \vec{y} \cdot \vec{u} \leq c \end{cases} \quad (19)$$



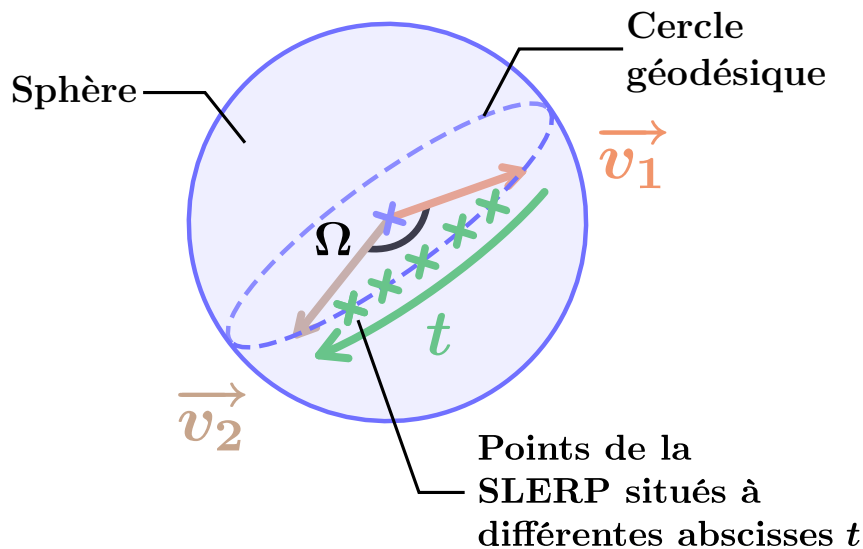
**Figure 67** – Théorème de Séparation des Convexes (SAT) en dimension deux

Ainsi,  $A$  et  $B$  ne sont pas en collision si un hyperplan de séparation existe pour chaque couple d'éléments  $x$  et  $y$  appartenant respectivement à  $A$  et  $B$ . Ce théorème est couramment utilisé en robotique ou en rendu en temps réel pour détecter l'existence d'une collision entre deux objets convexes [173]. Plus précisément, il est utilisé sur des objets convexes décrits par des éléments primitifs simples : des plans, des points et des arêtes. Pour de telles formes, l'existence de la collision entre deux objets convexes peut être déterminée de manière procédurale via une seule méthode, ce qui rend la méthode prédisposée à toute implémentation numérique. Une série de booléens traduisant diverses inégalités géométriques est calculée sur les éléments primitifs. Les deux objets sont alors considérés comme n'étant pas en collision si tous les booléens valent 0. Dans le cas spécifique d'intersection sphère-triangle, le nombre de booléens nécessaire peut être réduit à 7 [174].

### 3.5.3 Interpolation linéaire sphérique

L'interpolation linéaire sphérique, généralement désignée en tant que *Spherical Linear Interpolation* (SLERP), est un outil puissant qui peut être utilisé pour calculer des points uniformément espacés sur des arcs de cercle. Cette méthode est combinée à la détection de collision sphère-triangle pour créer les sous-graphes des points potentiels lors du calcul d'une nouvelle couche (**Sous-section 3.6.3**). Elle est aussi utilisée pour les différentes sélections de voisinage lors du calcul de la trajectoire (**Sous-section 3.6.2**).

La méthode de calcul de SLERP a été initialement développée en 1985 pour animer des rotations dans des espaces de dimension trois [175]. Une SLERP est l'équivalent sur une sphère d'une interpolation linéaire sur une droite pour discrétiser cette dernière de manière uniforme (**Figure 68**).



**Figure 68** – Interpolation linéaire sphérique (SLERP)

Étant donnés deux points situés sur une même sphère dont les coordonnées depuis le centre de cette dernière sont exprimées par les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , les coordonnées des points situés sur le plus petit arc de cercle d'angle  $\Omega$  formé par ces deux vecteurs et constituant un arc de grand cercle de la sphère peuvent être exprimées à l'aide d'un unique paramètre  $t$  variant dans  $[0, 1]$  :

$$\text{Slerp}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, t) = \frac{\sin((1-t)\Omega)}{\sin\Omega} \vec{v}_1 + \frac{\sin(t\Omega)}{\sin\Omega} \vec{v}_2 \quad (20)$$

La SLERP est une méthode valide pour les arcs de cercle dont les angles sont compris dans  $]0, \pi[$ . Notons que dans le cas où l'arc de cercle que l'on souhaite discrétiser est le plus grand arc de cercle formé par les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , alors on peut remplacer  $\Omega$  par  $\Omega - 2\pi$  dans la formule précédente. Si l'arc est un demi-cercle ou un cercle entier, la formule ne fonctionne pas car  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires, et donc le projeté de l'un sur l'autre est nul. Dans ces cas particuliers, la méthode peut être adaptée en choisissant un point supplémentaire faisant partie du demi-cercle ou cercle puis appliquer deux sous-SLERP pour discrétiser entièrement la courbe.

### 3.5.4 Recherche d'un chemin eulérien sur un graphe

Le dernier outil nécessaire pour la génération de trajectoire est une routine permettant d'obtenir un chemin de parcours eulérien des couches calculées. Cette routine est indispensable pour donner un premier sens de parcours aux différentes couches de la trajectoire après leur reconstruction (**Sous-section 3.6.4**). Le but est d'ordonner les arêtes du premier chemin de dépôt, bien que ce dernier soit amené à être réorganisé et localement recalculé ultérieurement par rétroaction en fonction des contre-indications machine et matériau. L'objectif est de déterminer un chemin qui ne passe qu'une fois par chacune des arêtes de dépôt. Pour cela, chaque couche est associée à un graphe. Un graphe est défini par un ensemble de nœuds liés par des arêtes. Le degré du nœud est le nombre de nœuds voisins directement reliés par une arête à ce dernier.

Un graphe est dit "eulérien" s'il est possible de trouver un chemin continu passant par toutes les arêtes une fois et une seule fois seulement : tout chemin correspondant à ces critères est alors appelé un "chemin eulérien" (**Figure 69**). Un chemin eulérien, s'il existe, n'est pas unique, ne serait-ce que parce qu'il peut être parcouru en sens inverse. Ainsi, le type de chemin recherché pour le premier chemin de dépôt est eulérien.

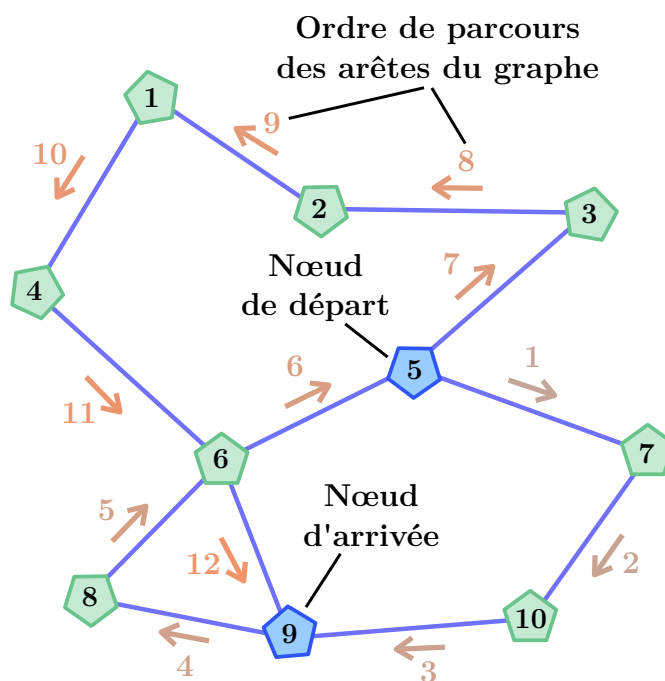


Figure 69 – Chemin eulérien sur un graphe eulérien

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un chemin eulérien sur un graphe connexe est qu'il possède au plus deux nœuds de degré impair. Cela s'explique par le fait qu'un chemin eulérien est tel que chaque nœud, lorsqu'il est visité, arrive par une arête utilisée une unique fois et repart part une autre arête utilisée aussi une seule fois. Or, si le degré du nœud visité est impair, alors il ne peut pas y avoir autant d'arêtes de départ que

d'arrivée pour ce dernier. Par conséquent, un nœud impair correspond nécessairement à un point d'arrivée ou de départ du chemin. Puisqu'il n'y a qu'un point de départ et un seul point d'arrivée car un chemin eulérien est par définition ininterrompu, alors il ne peut y avoir au plus que deux nœuds impairs. Un graphe quelconque peut être transformé en graphe eulérien par ajout d'arêtes virtuelles entre nœuds impairs de sorte qu'après ajout de ces arêtes fictives il n'y ait au plus que deux nœuds de degré impair.

Associer chaque graphe à une couche permet d'envisager l'utilisation d'éléments issus de la théorie des graphes. Cette science permet d'étudier en profondeur les trajets et problèmes d'optimisation de chemin. Parmi eux, le Problème du Voyageur de Commerce, désigné en tant que TSP, est un des plus populaires. Il consiste à trouver un chemin visitant une fois un ensemble de nœuds et retournant au premier [176]. Cependant, le TSP crée les arêtes reliant les nœuds. Dans le cas de la génération de trajectoire, les arêtes sont connues et correspondent à celles liant les points de la couche. Pour ce type de situation, le Problème du Postier Chinois, communément désigné par l'expression CPP, sera préférable : le chemin trouvé utilise les arêtes données en entrée, et s'assure qu'elles sont toutes visitées au moins une fois [177]. Les méthodes de recherche de chemin eulérien sont des cas particuliers du CPP [178].

L'utilisation de graphes ne se limite pas à la création d'un sens de parcours dans l'algorithme de génération de trajectoire. Ils sont aussi utilisés pour la reconstruction des ensembles de segments constituant les couches successives du chemin de dépôt. Cela se fait à l'aide d'un ensemble de sous-graphes et de l'ajout d'arêtes de jonction cohérentes avec la topologie de la surface dont on souhaite générer une trajectoire (**Sous-section 3.6.4**). En effet, les couches à reconstruire sont des courbes 3D passant par tous les points de tous les sous-graphes associés. La reconstruction de courbes 3D à partir d'un nuage de points est nécessaire dans de nombreux domaines : design, reconnaissance d'image et calcul de chemins optimaux [83,179]. Cependant, un nuage de points ne contient pas d'information sur les arêtes liant les différents points.

Des méthodes de reconstruction répondant au besoin dans le cadre de courbes 2D sont accessibles [180]. Néanmoins, si ces méthodes sont appliquées en 3D, elles ne permettent pas l'obtention de courbes, mais de surfaces [181,182,183]. En particulier, l'algorithme Crust est un des plus efficaces pour la reconstruction de courbes 2D et surfaces 3D à partir d'un nuage de points et se base sur une triangulation de Delaunay de ce dernier [184]. Par ailleurs, comme évoqué au **Chapitre 1**, il existe des méthodes d'interpolation de nuages de point efficaces permettant de reconstruire des courbes [83,84,51]. Toutefois, en tant que méthodes d'interpolation, elles ne passent pas par tous les points et ne considèrent pas les éventuelles arêtes liant les différents points.

C'est dans ce contexte qu'une routine spécifique est proposée pour la reconstruction du graphe des couches de la trajectoire à calculer à la **Sous-section 3.6.4**. La méthode développée permet l'obtention d'un graphe 3D correspondant à la nouvelle couche à reconstruire à partir d'un ensemble de sous-graphes connectés les uns aux autres de manière cohérente avec le profil de la surface pour éviter l'ajout d'arête de dépôt hors de la surface à décrire.

### 3.6 Étapes de l'algorithme

Dans cette section, les phases consécutives de la génération de trajectoire après subdivision du maillage initial sont détaillées. L'ordre suit celui de l'algorithme illustré à la **Figure 65**. Les phases détaillées sont les suivantes :

- Détermination de la couche d'initialisation (**Sous-section 3.6.1**) ;
- Sélections de voisinage (**Sous-section 3.6.2**) ;
- Sous-graphes potentiels d'une nouvelle couche (**Sous-section 3.6.3**) ;
- Reconstruction du graphe d'une nouvelle couche (**Sous-section 3.6.4**) ;
- Détermination des vecteurs outil (**Sous-section 3.6.5**).

#### 3.6.1 Détermination de la couche d'initialisation

Une fois le maillage initial de la surface à fabriquer subdivisé pour que les arêtes des faces aient une longueur inférieure à  $h$ , l'étape suivante de la génération de trajectoire consiste à calculer la couche d'initialisation (**Figure 70**). Chaque couche étant calculée à partir de la couche qui la précède, cette couche est nécessaire pour déclencher le calcul de la première couche, et donc, déclencher la propagation de la trajectoire sur la surface. Cette couche est donc simplement définie comme les courbes issues de l'intersection entre la surface à fabriquer et le substrat. C'est pour cela que le fichier STL du substrat est nécessaire en entrée de l'algorithme. Puis, chaque point de la couche d'intersection est associé à une des faces du maillage de la surface à fabriquer contenant l'arête sur laquelle il se trouve, pour aider à affiner les sélections des voisinages qui suivront (**Sous-section 3.6.2**).

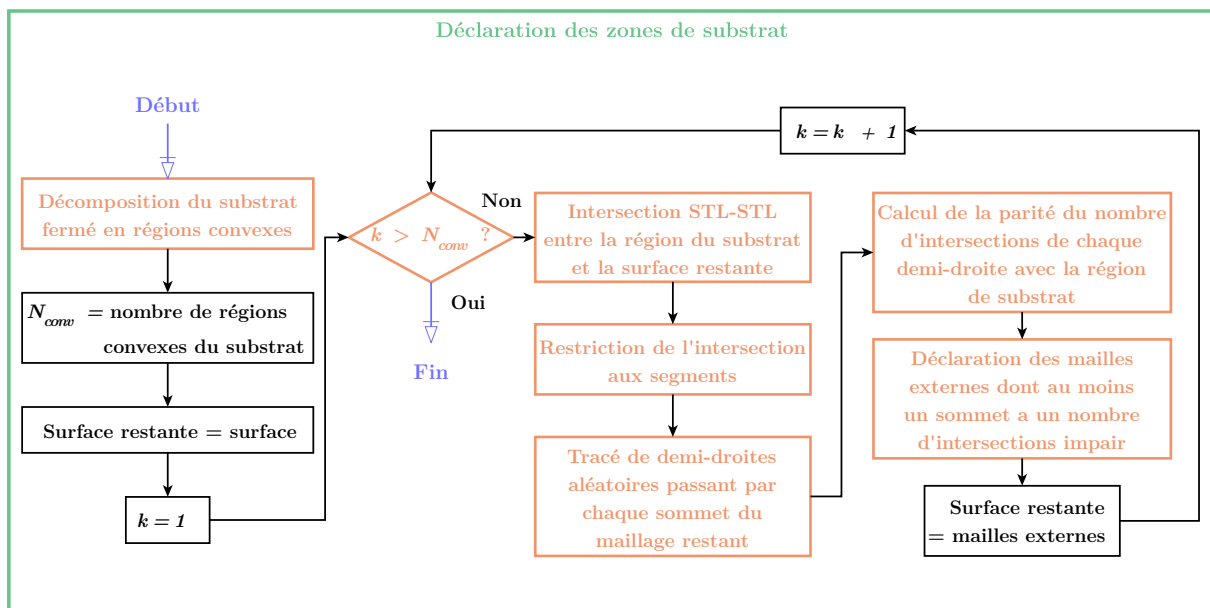
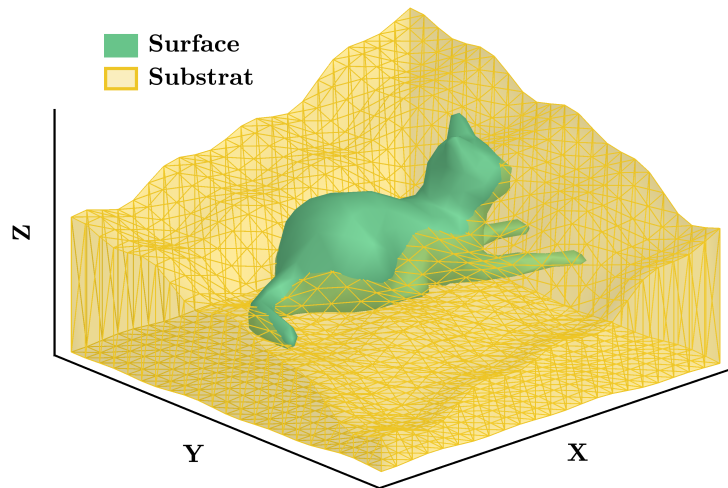


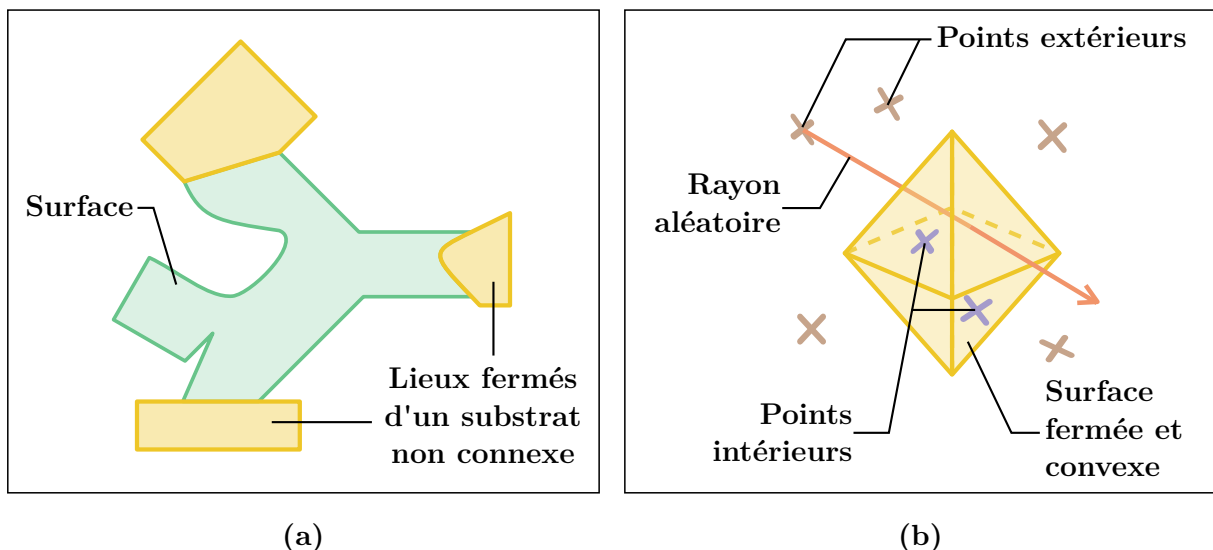
Figure 70 – Étape de déclaration des zones de substrat

La connaissance de la géométrie du substrat et sa position relative par rapport à la surface à fabriquer permettent d'en déduire la couche d'initialisation (**Figure 71**). Contrairement à la surface à fabriquer, le substrat ne nécessite pas d'être subdivisé.



**Figure 71** – Fichier STL-A subdivisé et substrat associé

Le substrat n'est pas forcément connexe et peut être constitué de plusieurs entités indépendantes (**Figure 72a**). Chaque entité indépendante est désignée en tant que "lieu de substrat". L'intersection entre le substrat et la surface à fabriquer existe s'ils sont en contact, ou de manière générale s'ils sont imbriqués l'un dans l'autre.



**Figure 72** – Lieux du substrat

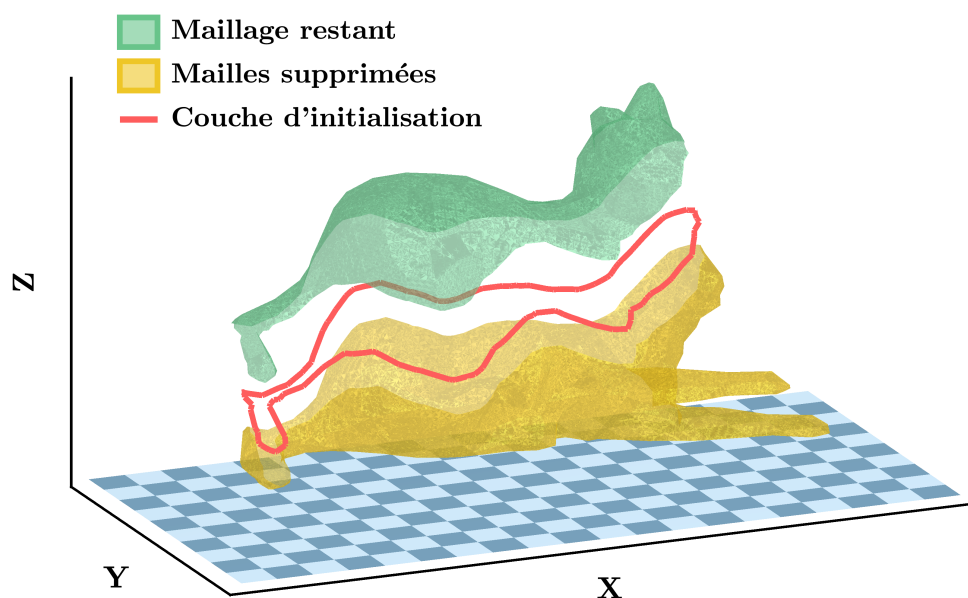
- (a) Substrat formé par plusieurs lieux de substrat
- (b) Position relative d'un point par rapport à une surface fermée et convexe



Si le substrat et la surface sont imbriqués l'un dans l'autre, alors la partie de la surface située à l'intérieur d'un lieu de substrat est virtuelle : aucune trajectoire n'est attendue en ces régions. Aussi, dans cette situation, il est nécessaire de supprimer les mailles concernées de la surface à fabriquer. Pour faciliter cette étape, chaque lieu du substrat déclaré doit être une surface fermée et préalablement subdivisée en entités convexes. En effet, si l'entité considérée est fermée et convexe, il est possible de déterminer la position d'un point quelconque par rapport à l'intérieur ou l'extérieur d'un lieu de substrat en traçant un rayon de direction quelconque, pourvu qu'il ne se trouve pas précisément sur la frontière d'une face, et en comptant le nombre de fois où il traverse une face du lieu du substrat. Si ce nombre est impair, alors il est situé à l'intérieur, tandis que s'il est pair, il est situé à l'extérieur (**Figure 72b**). Toute face triangulaire du maillage est supprimée si au moins un de ses trois sommets se trouve à l'intérieur d'un lieu de substrat.

Notons qu'en tant que polyèdre, le substrat facettisé peut être subdivisé en un ensemble de tétraèdres, qui sont par définition les plus simples polyèdres convexes. Il existe donc toujours une partition du substrat en plusieurs entités convexes afin de détecter la position de points situés sur la surface à fabriquer par rapport à un substrat fermé.

Ainsi, il est possible de retirer du maillage subdivisé les faces se trouvant à l'intérieur des lieux fermés et convexes du substrat déclaré après avoir calculé la couche d'initialisation (**Figure 73**). Cela permet de forcer la direction de propagation de la trajectoire dans le sens attendu uniquement. La couche obtenue est un ensemble de points reliés par des arêtes. Puis, les arêtes sont rediscrétisées par interpolation linéaire de sorte qu'aucune ne soit plus longue que  $d$  pour respecter la contrainte de fiabilité du trajet par rapport à la proximité des sphères de voisinage évoquée à la **Section 3.3**. Pour la couche d'initialisation, il n'est pas indispensable de calculer un sens de parcours eulérien car elle ne fait pas partie de la trajectoire : elle ne sert qu'à en calculer la première couche.



**Figure 73** – Couche d'initialisation et maillage restant de STL-A

Enfin, la méthode de déclaration de substrat anticipe l'utilisation de l'algorithme en cas de réparation de pièce. En effet, si la courbe correspondant à la frontière de la pièce cassée est connue grâce à un scan, le maillage de la pièce correspond à celui de la pièce entière. Il est alors possible de réduire le maillage à la partie à réparer en extrapolant la courbe frontière en une surface fermée et de l'assimiler au substrat initial.

### 3.6.2 Sélections de voisinage

La sélection de voisinage est une considération utile pour accélérer le temps de calcul de génération de trajectoire en réduisant le nombre de points sur lesquels effectuer les calculs. Deux types de sélection de voisinage sont utilisés via la même méthode :

- La sélection des faces du maillage restant situées au voisinage de la couche précédente de la trajectoire (première routine) ;
- La sélection des faces du maillage restant situées au voisinage de chaque sphère de voisinage dont les centres sont situés sur la couche précédente (deuxième routine).

Chaque couche de la trajectoire ou sphère de voisinage possède un voisinage minimal sur lequel il est possible d'effectuer les calculs sans avoir à les réaliser sur tout le maillage restant. Cela n'altère pas la trajectoire si ce voisinage est calculé de manière judicieuse. L'algorithme de la méthode commune aux deux routines est illustré à la **Figure 74**.

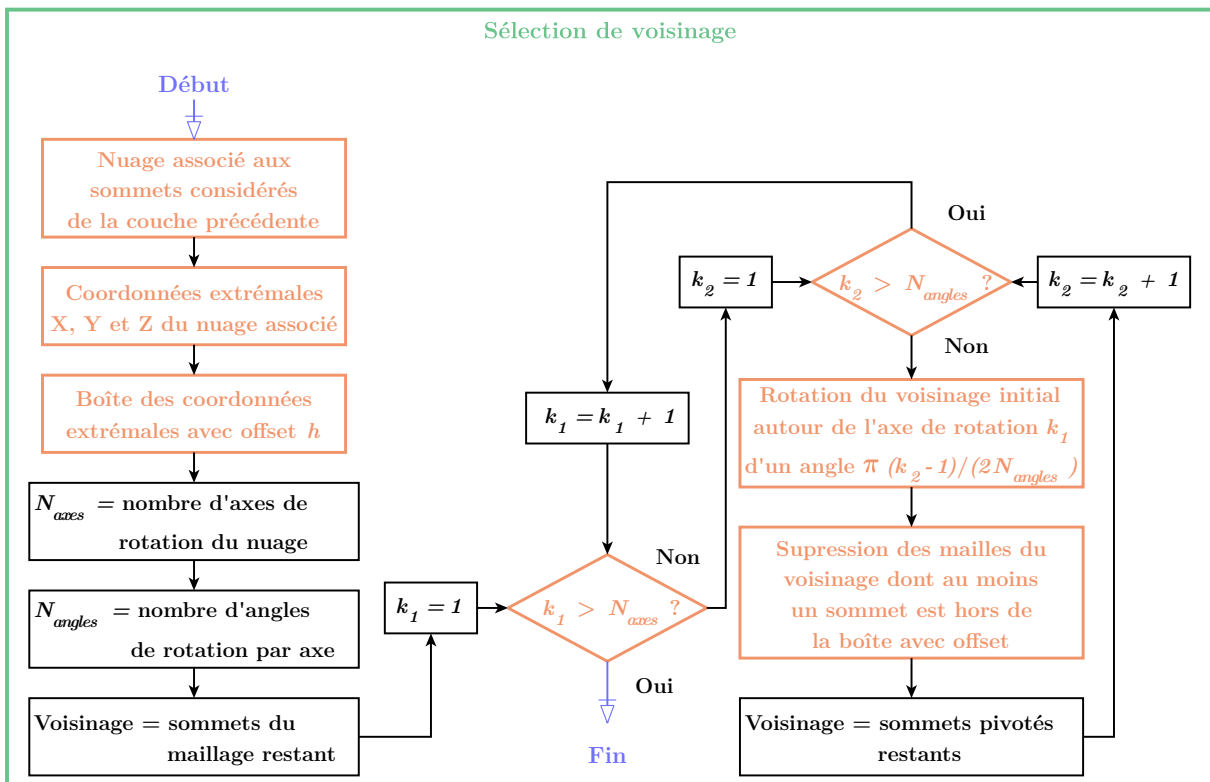
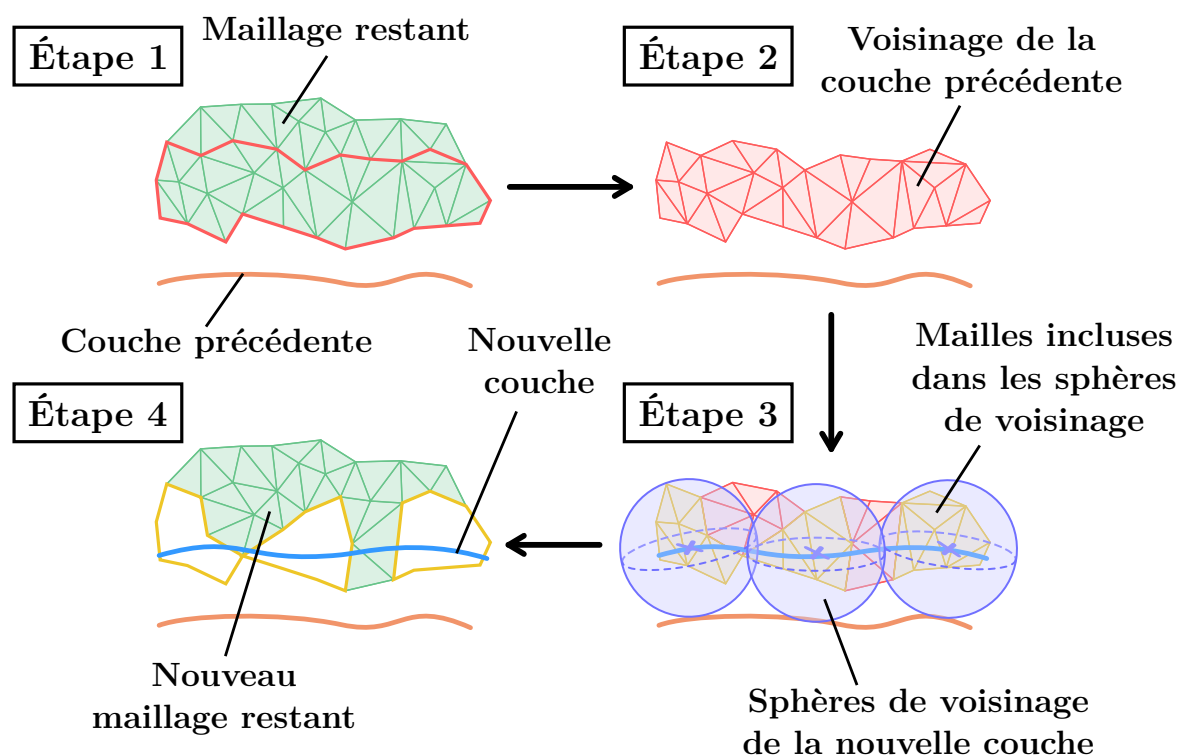


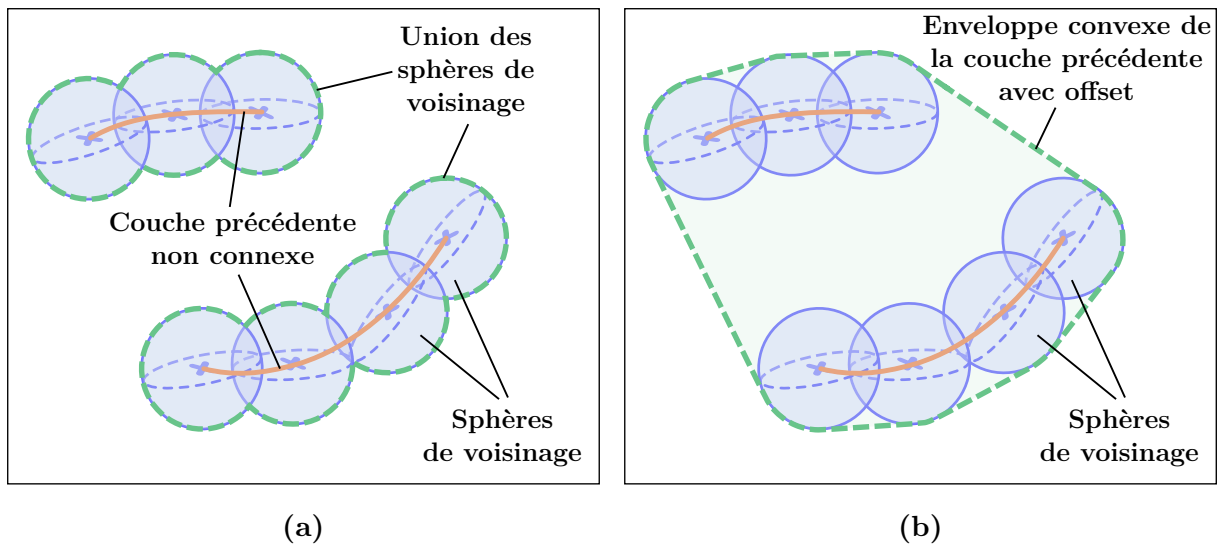
Figure 74 – Méthode de sélection de voisinage

Les quatre étapes de la combinaison successive des deux routines sont illustrées à la **Figure 75**. À partir de la couche précédente de la trajectoire et du maillage restant, un voisinage contenant les points de la couche suivante est calculé. Ce voisinage correspond à une majoration de l'inter-couches entre la couche précédente et la nouvelle couche à calculer (Étape 1, sur la **Figure 75**). Puis, une copie de ce voisinage est créée et utilisée pour calculer le voisinage des sphères de voisinage au fur et à mesure qu'elles sont utilisées (Étape 2, sur la **Figure 75**). Dès que le voisinage d'une sphère de voisinage est utilisé, alors les faces qui y sont situées peuvent être retirées du maillage restant de la copie avant de déterminer les autres sphères de voisinage (Étape 3, sur la **Figure 75**). Une fois le calcul de la nouvelle couche terminé, alors toutes les faces situées à l'intérieur des sphères de voisinage peuvent être supprimées du maillage restant (Étape 4, sur la **Figure 75**). En plus de réduire les mailles à considérer au fur et à mesure du calcul de la trajectoire, cela garantit que la propagation de la trajectoire s'effectue dans le sens attendu.



**Figure 75** – Sélections de voisinage et réduction du maillage

Les routines de sélection se basent sur l'estimation rapide de l'enveloppe convexe d'un nuage de points. Étant donné un nuage de points constitué des points de la couche précédente, alors les points potentiels de la couche suivante sont inclus dans l'union des sphères de voisinage de la couche précédente (**Figure 76a**). Cette union est elle-même contenue dans une enveloppe convexe assimilable à l'enveloppe convexe du nuage de points de la couche précédente à laquelle serait appliqué un offset de longueur  $h$  dans toutes les directions de l'espace (**Figure 76b**).



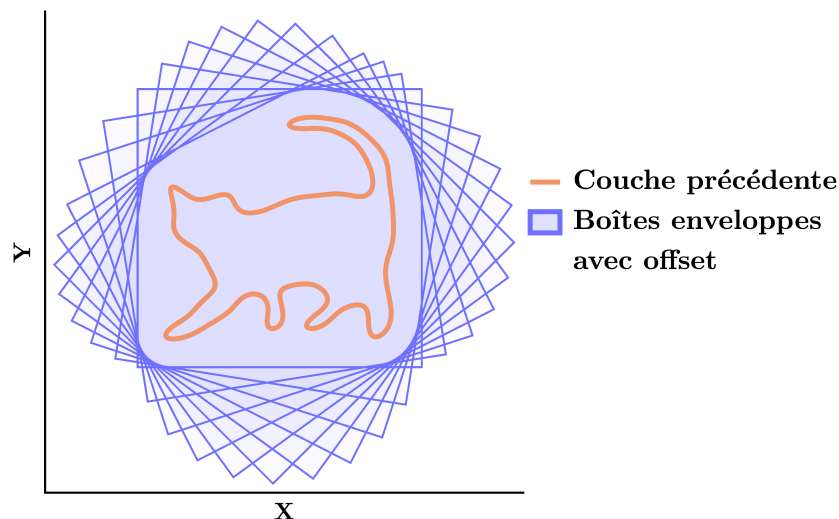
**Figure 76** – Région des points potentiels d’une nouvelle couche

- (a) Union des sphères de voisinage de la couche précédente
- (b) Enveloppe convexe avec offset de la couche précédente

Cette recherche de voisinage pour accélérer les calculs n’est cohérente que si la méthode de sélection de voisinage est suffisamment rapide comparée aux calculs de distance pour déterminer les points potentiels de la trajectoire. La majoration par une enveloppe convexe va dans ce sens. En effet, le calcul d’une forme alpha généralise le concept d’enveloppe concave [185] et permet d’obtenir des enveloppes plus précises à travers des méthodes de calcul souvent exigeantes [186]. Au contraire, les méthodes de calcul d’enveloppe convexe sont en général optimisées pour être plus rapides [187,188].

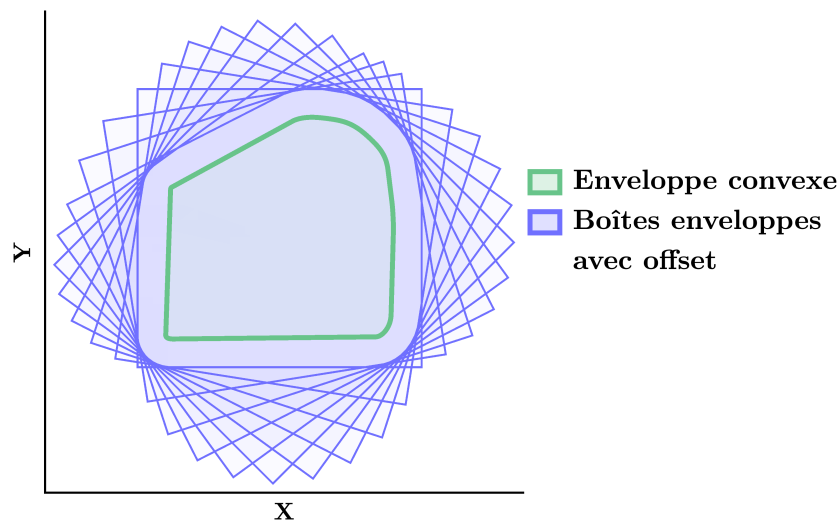
La méthode de sélection de voisinage développée pour les deux routines est inédite par sa capacité à caractériser la position d’un premier nuage de points par rapport à l’enveloppe d’un autre nuage de points différent sans avoir à calculer cette enveloppe avec précision car sa connaissance n’est pas l’information recherchée. Elle consiste à déterminer, dans différents systèmes de coordonnées, les valeurs minimales et maximales selon tous les axes de l’ensemble des points du nuage de points, et d’ajouter un offset de  $h$  à ces coordonnées. Davantage d’informations sont fournies à l’**Annexe A7**. La deuxième routine correspond à un cas particulier de la première routine où le nuage ne comporte qu’un point. Ainsi, étant donné un point arbitraire de l’espace, on peut déterminer sa position à partir de la frontière formée par l’ensemble des coordonnées extrémales en comparant ses coordonnées aux valeurs extrémales du nuage de points.

Cette frontière est une “boîte” limite dont la forme dépend de l’orientation des axes du système de coordonnées. Si l’on fait varier l’orientation du système de coordonnées, la boîte a une forme différente (**Figure 77**). Le problème est ici décrit et illustré pour un cas 2D, mais il nécessite une adaptation 3D pour être utilisable dans le contexte de la génération de trajectoire sur des surfaces quelconques. Cette adaptation est beaucoup plus complexe car elle nécessite de définir plusieurs axes de rotation uniformément espacés dans l’espace. La méthode est décrite et démontrée à l’**Annexe A7**.



**Figure 77** – Boîtes enveloppes 2D avec offset issues de rotations du système de coordonnées

L'intersection de ces boîtes tend vers l'enveloppe convexe du nuage de points avec un offset  $h$  lorsque le nombre de rotations augmente (**Figure 78**). Cela signifie qu'un point arbitraire de l'espace peut être considéré comme étant à l'extérieur de l'enveloppe convexe avec offset s'il n'est dans aucune boîte.



**Figure 78** – Intersection de boîtes enveloppes 2D avec offset et enveloppe convexe

Ainsi, la méthode permet de déterminer la position des sommets des faces du maillage en utilisant un voisinage formé par l'approximation d'une enveloppe convexe d'un nuage de points. Les faces qui ont un sommet dans ce voisinage sont considérées comme faisant partie de ce dernier. Pour garantir que toutes les faces du voisinage sont prises en compte,

l'enveloppe convexe est approximée de manière majorante. Cependant, pour les sphères de voisinage, il est aussi nécessaire de calculer une enveloppe minorante pour éviter que des mailles ne soient supprimées prématurément du maillage restant, créant des discontinuités incohérentes de trajectoires. La sphère est un cas particulier où, une enveloppe minorante peut être obtenue en divisant l'offset de  $h$  par  $\sqrt{3}$  lors de l'approximation de l'enveloppe convexe : cela correspond à la longueur d'arête du cube minimal inclus dans une sphère de rayon  $h$ , qui correspond elle-même à la sphère minimale incluse dans un cube d'arête  $h$ .

Enfin, pour que la trajectoire reste cohérente avec la surface, et donc qu'aucune arête ne soit créée entre des parties non connexes de la surface ou des trous, les faces de la sphère de voisinage qui ne sont pas sur la même entité connexe locale que la face contenant le centre de cette même sphère sont supprimées de la liste des faces du voisinage.

### 3.6.3 Sous-graphes potentiels d'une nouvelle couche

Une fois le voisinage de la couche précédente obtenu, la nouvelle couche de la trajectoire peut être calculée (**Figure 79**). Les points de la couche précédente sont utilisés de manière successive. Étant donné cette couche, les potentiels points de la nouvelle couche sont situés sur les intersections du maillage restant avec toutes les sphères de voisinage de rayon  $h$  centrées en chaque point de la couche précédente, comme illustré à la **Figure 76a**.

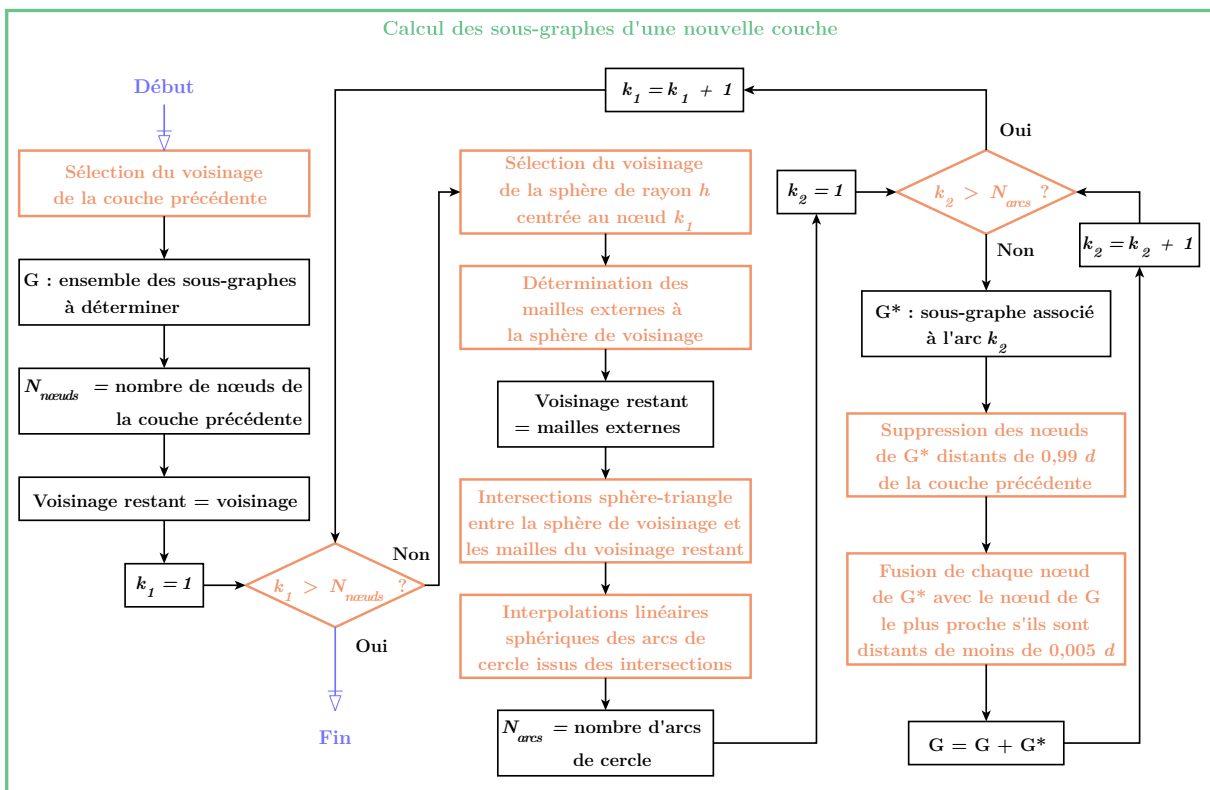
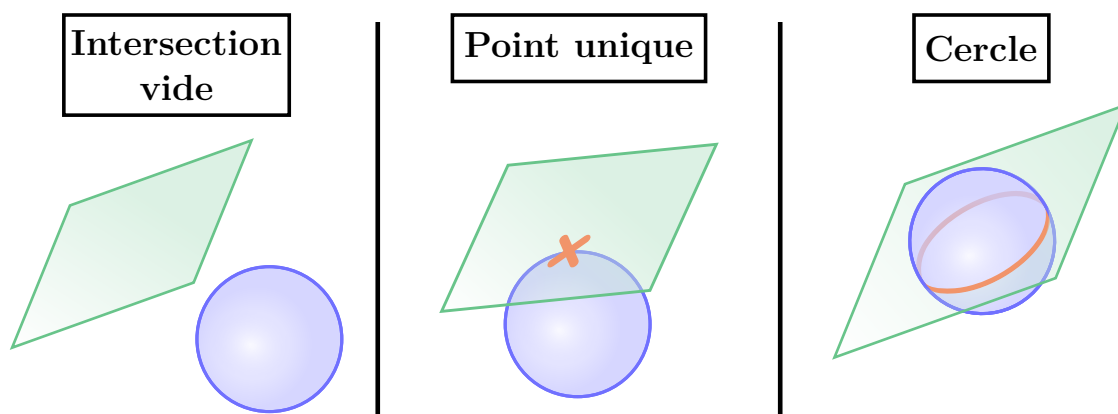


Figure 79 – Étape de calcul des sous-graphes

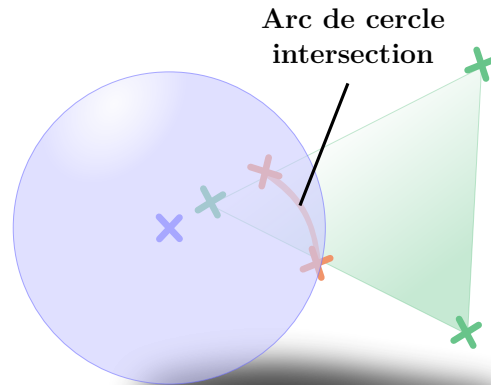
En théorie, l'ordre dans lequel les points de la couche précédente sont utilisés n'a pas d'importance puisqu'un algorithme est appliqué à la fin de la création du graphe de la nouvelle couche pour en déterminer un sens de parcours eulérien. Les points de la couche précédente peuvent donc être utilisés sans tri préalable pour éviter l'augmentation du temps de calcul issu d'une telle étape. L'algorithme de génération de trajectoire a pour objectif principal de trouver un premier chemin de dépôt théorique. Cela signifie qu'il n'est pas indispensable que, pour deux couches superposées, la couche suivante commence là où termine la couche précédente, ne serait-ce car ce premier trajet théorique est amené lui-même à être réorganisé pour obtenir le trajet final. Cependant, dans le but que le premier trajet de dépôt minimise les déplacements, les sphères de voisinage sont considérées dans l'ordre d'apparition de leur centre dans le graphe ordonné de la couche précédente. Ainsi, la routine de calcul de chemin eulérien aboutira à un trajet dont le premier est dans la même région que le dernier point de la couche précédente lorsque cela est possible.

La première étape du calcul de la nouvelle couche consiste à déterminer un ensemble de sous-graphes de points qui la composent, en calculant l'intersection des sphères de voisinage avec le maillage restant. Cela revient à déterminer des intersections sphère-triangle. L'intersection entre une sphère et un plan, si elle est non vide, est généralement un cercle entier, ou un point dans le cas où le plan est tangent à la sphère (**Figure 80**).



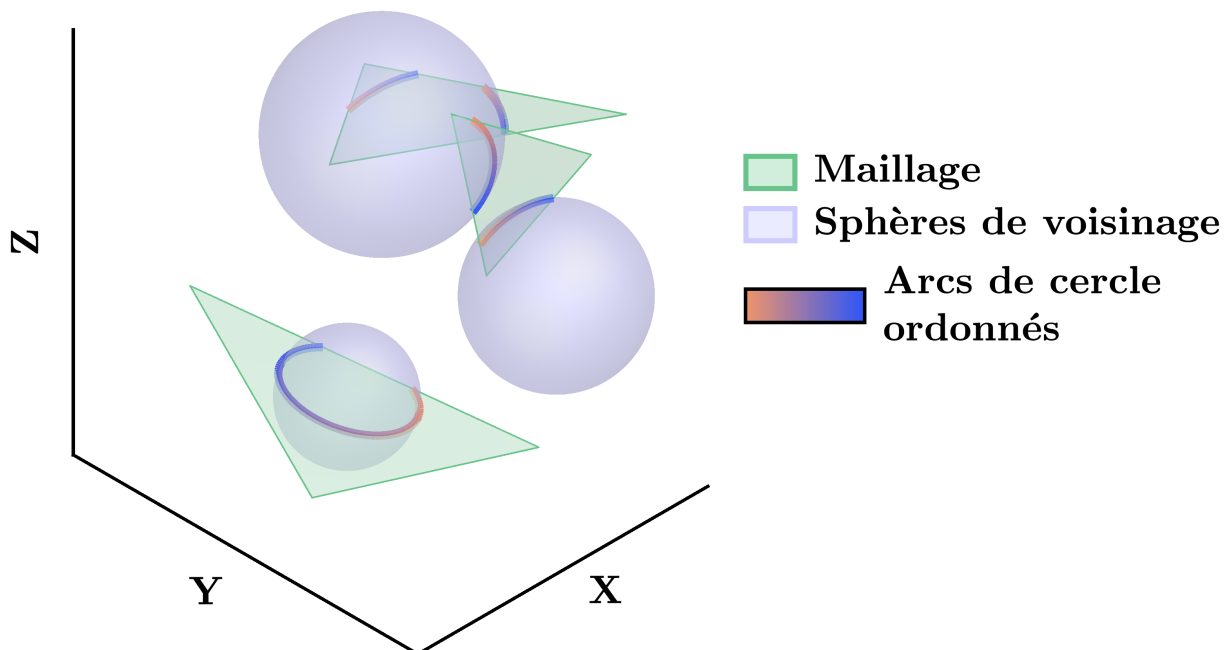
**Figure 80** – Différentes intersections sphère-plan

Un triangle est la restriction d'un plan. Cela signifie donc que, l'intersection entre un triangle et une sphère, si elle existe est un ensemble d'éléments parmi un cercle entier, des points et des arcs de cercle issus d'un même cercle (**Figure 81**). Un point isolé correspond à un sous-graphe sans arête avec un seul nœud. Ils ne sont donc pas considérés car les phases de dépôt se font sur les arêtes : ils ne correspondent donc à aucune phase de dépôt, et peuvent donc être omis pour éviter des déplacements non nécessaires de l'outil de dépôt. Dans le cas où les arcs de cercle issus de l'intersection sont connus, il est possible d'obtenir un sous-graphe associé à chaque arc, en le discrétisant et en lui appliquant une SLERP. La discrétisation est choisie de sorte que les points d'un même arc soient distants de  $d$  pour respecter au mieux la contrainte de discrétisation des couches.



**Figure 81** – Exemple d'intersection sphère-triangle

Or, le nombre d'arcs de cercle, leur position par rapport aux points situés à leurs extrémités dépendent de la géométrie du triangle et de sa position par rapport à la sphère. Il n'y a intersection entre une sphère et un triangle que si la collision entre ces deux derniers existe. Partant de ce constat, la détermination du type d'intersection revient à chercher davantage d'informations sur le type de collision. Cela signifie que davantage de considérations géométriques sont à calculer afin de déterminer totalement la nature de l'intersection. Une fois le type d'intersection connu, une SLERP est appliquée à chaque arc afin d'obtenir des sous-graphes formés d'arcs de cercles ordonnés (**Figure 82**).

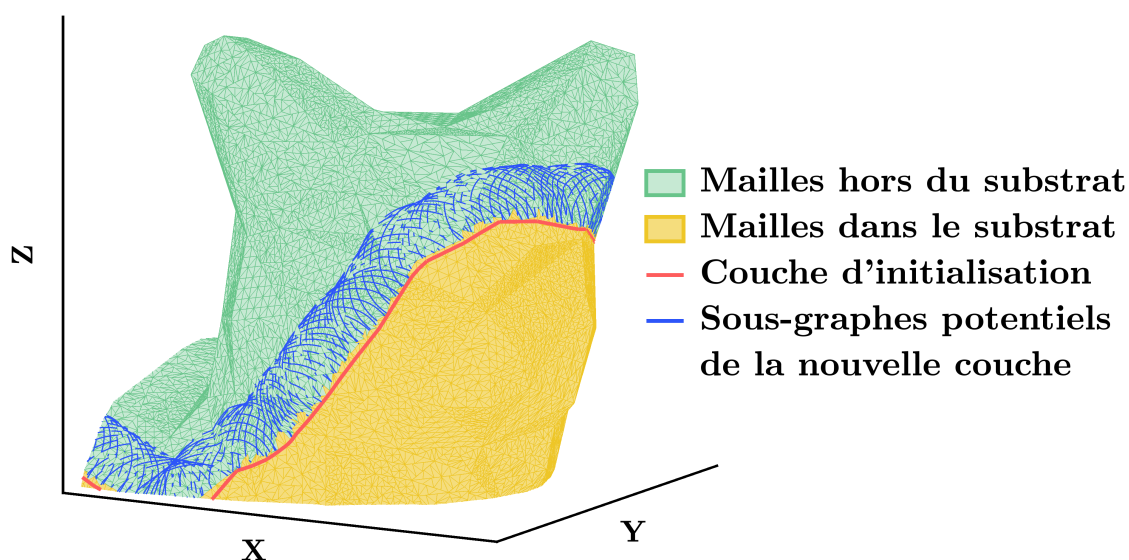


**Figure 82** – Exemple d'arcs de cercle ordonnés issus d'intersections sphère-triangle



Les informations de type d'intersection, tout comme pour l'existence de la collision, peuvent être déterminées à l'aide de booléens, similaires à ceux utilisés dans le cas d'une intersection sphère-triangle, issus d'inégalités géométriques par application du SAT. Il est alors possible, à la connaissance de cette liste de booléens, de déterminer exactement la nature de l'intersection. Dès lors où il y a collision, et donc que l'intersection existe, le problème peut être étudié dans le plan contenant le triangle. Les différents types d'intersection, illustrés dans le plan contenant le triangle, sont détaillés à l'**Annexe A8**.

Dans la pratique, entre chaque utilisation de sphère de voisinage, un filtrage est nécessaire afin de supprimer les nœuds non connexes trop proches, et ainsi faciliter la reconstruction du graphe final de la nouvelle couche (**Figure 83**). Ce phénomène de chevauchement est dû au choix de  $d$ , qui contrôle le rapprochement entre les sphères de voisinage.



**Figure 83** – Phénomène de chevauchement sur STL-A

Comme expliqué à la **Section 3.3**, il est important de trouver une valeur appropriée pour  $d$ , car une valeur trop grande ne permettrait pas aux sphères de voisinage de recouvrir entièrement l'inter-couches, ce qui altérerait la trajectoire qui ne serait pas calculée en certaines régions de la surface. D'un autre côté, une valeur plus petite de  $d$  permet de résoudre ce problème, mais induit un phénomène de chevauchement entre les arcs de cercle car les deux sphères de voisinage s'intersectent. Ce chevauchement est une conséquence directe de l'écart entre les deux distances  $\varepsilon_{in}$  et  $\varepsilon_{out}$  de l'**Équation 18** p109.

Il est possible d'utiliser  $\varepsilon_{in}$  et  $\varepsilon_{out}$  pour filtrer le chevauchement au cours du calcul d'une nouvelle couche. Cela se fait en deux sous-étapes consécutives. Premièrement, les nœuds des sous-graphes calculés pour la sphère de voisinage considérée sont supprimés s'ils sont distants de moins de  $\varepsilon_{in}$  d'un nœud ou d'une arête de la couche précédente. Deuxièmement, ceux distants de moins de  $\varepsilon_{out}$  d'un nœud appartenant à un autre sous-graphe déjà calculé sont remplacés par les plus proches parmi ceux de ces autres sous-graphes.

Cependant, comme souligné à la **Section 3.3**, le modèle du chevauchement n'est valide que si pour chaque point des sous-graphes trouvés, le point directement le plus proche sur la couche précédente est situé sur un des segments liés au centre de la sphère de voisinage dont il est issu. D'autre part, elle n'a de sens que si la discrétisation de la couche est constante et vaut  $d$ , ce qui n'est pas le cas. Ainsi, dans la pratique, le chevauchement est plus prononcé, ce qui nécessite des valeurs de  $\varepsilon_{in}$  et  $\varepsilon_{out}$  plus faibles. Les simulations de trajectoire sur STL-A, STL-B et STL-C ont permis de régler manuellement ces deux valeurs, en fonction de  $d$  uniquement :

$$\begin{cases} \varepsilon_{in} = 0,99 d \\ \varepsilon_{out} = 0,005 d \end{cases} \quad (21)$$

### 3.6.4 Reconstruction du graphe d'une nouvelle couche

Une fois les sous-graphes de la nouvelle couche déterminés, la reconstruction de son graphe est effectuée (**Figure 84**). La connaissance de sous-graphes permet de servir d'appui aidant à l'obtention de la nouvelle couche. Connaître un ensemble de sous-graphes de la nouvelle couche revient à connaître un ensemble de morceaux de courbes de cette dernière, ce qui facilite grandement sa reconstruction. La reconstruction du graphe final se fait en trois sous-étapes.

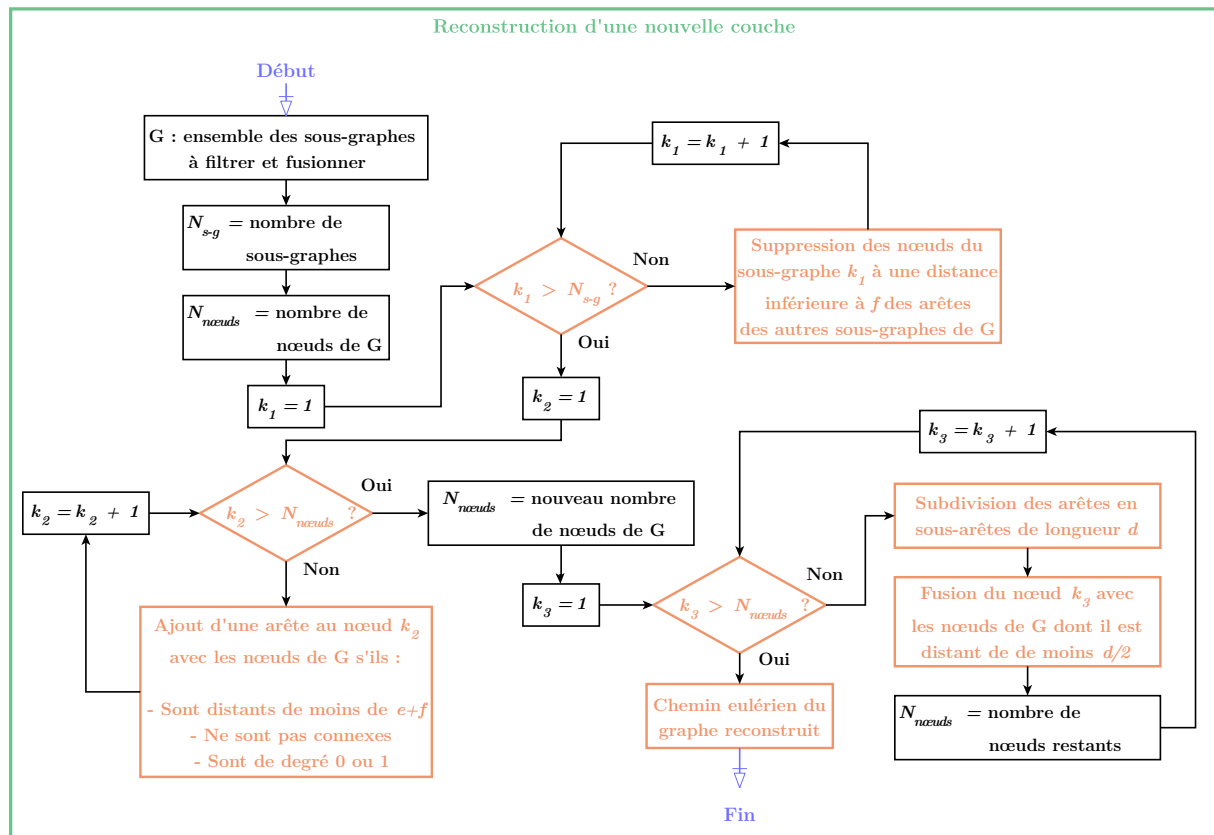
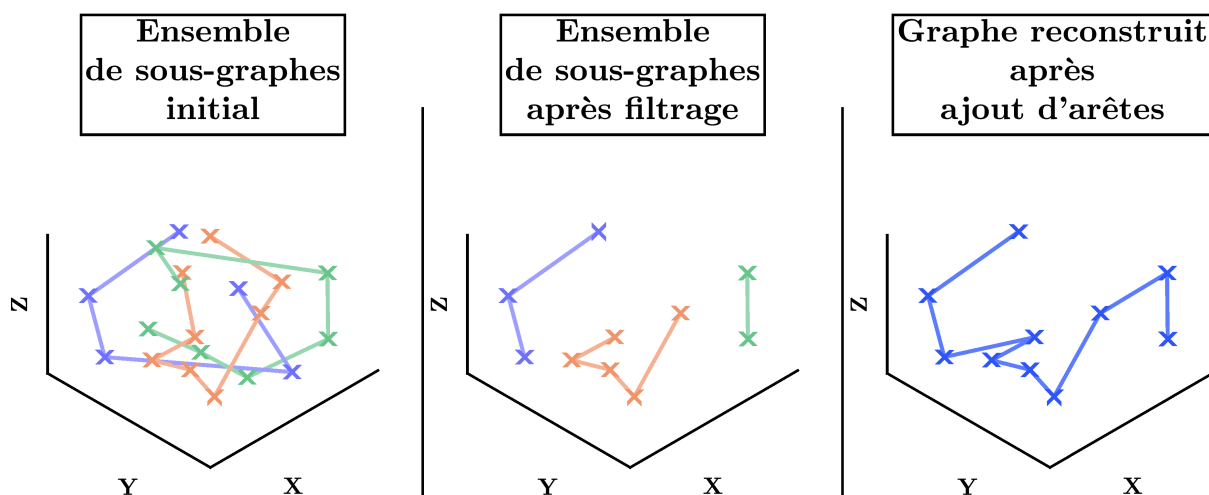


Figure 84 – Étape de reconstruction d'une nouvelle couche

Lors de la première sous-étape, les arêtes de tous les sous-graphes qui sont à une distance inférieure à une certaine valeur de filtrage – notée  $f$  pour la suite – d’une autre arête avec laquelle elles ne sont pas connexes sont supprimées (**Figure 85**). Ce filtrage ne s’applique pas à travers des conditions appliquées aux nœuds, mais appliquées aux arêtes contrairement à ceux présentés à la **Sous-section 3.6.3**. Notons aussi que chaque sous-graphe considéré est constitué d’une unique entité connexe d’après les étapes de leur calcul décrites à la **Sous-section 3.6.3**. Le parcours des points des sous-graphes se fait de manière arbitraire car ce sont les distances relatives entre points non connexes qui importent au cours de cette sous-étape. À la fin de ce processus, aucune arête n’est située à une distance inférieure à  $f$  des autres arêtes. Le rôle de ce filtre est notamment de s’assurer que les cordons de dépôt n’interfèrent pas lors de la fabrication. Par conséquent, l’ordre de grandeur de  $f$  est plus ou moins comparable à celui de la largeur des cordons. Pour réaliser ce filtrage, une adaptation de méthode de calcul droite-droite à une distance segment-segment peut être utilisée [189,190].



**Figure 85** – Reconstruction du graphe de la nouvelle couche avant rediscrétisation

La manipulation des indices des arêtes d’un graphe est plus délicate que celle des nœuds car les arêtes sont définies à partir des indices des deux nœuds qu’elles relient. Le fait que deux nombres soient nécessaires peut poser un problème de manipulation de données. Aussi, une fonction de couplage a été développée spécialement pour l’algorithme de génération de trajectoire.

Cette fonction permet de déterminer un nombre unique à partir d’une paire de deux nombres et sa réciproque permet de les déterminer à nouveau connaissant ce nombre. Elle est un cas particulier des fonctions de couplage classique car, de la même manière que l’ordre des nœuds décrivant une arête n’ont pas d’importance, le nombre unique déterminé ne dépend pas de l’ordre des deux nombres initiaux spécifiés en entrée. La fonction de couplage et sa démonstration sont détaillées à l’**Annexe A9**.

Au cours de la deuxième étape, des arêtes de dépôt supplémentaires sont ajoutées entre les nœuds (**Figure 85**). Des arêtes sont ajoutées si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- Les deux nœuds sont à une distance inférieure à  $e+f$  l'un de l'autre ;
- Ils ne sont pas connexes sur le graphe en cours de reconstruction ;
- Leur degré vaut pour chacun d'eux 0 ou 1.

Puisque  $e$  correspond à la longueur maximale des arêtes des faces du maillage STL subdivisé, la distance  $e+f$  assure que tous les nœuds de degré 0 ou 1 situés sur une même face du maillage sont reliés par une arête. L'offset de  $f$  permet de compenser la tâche de filtrage précédente. L'ensemble de sous-graphes change à chaque itération de cette sous-étape car des arêtes sont ajoutées. Cela signifie que le degré des nœuds change aussi à chaque itération. Ainsi, l'ordre dans lequel les arêtes sont considérées a de l'importance. La priorité d'ajout est donnée aux arêtes potentielles les plus courtes, car elles sont les plus à même à rendre le graphe en cours de reconstruction cohérent.

La troisième sous-étape est la rediscrétisation du graphe reconstruit, de sorte qu'il respecte au mieux la valeur de discrétisation  $d$ . Cela permet d'une part de ne pas compromettre la création de la couche suivante, et d'autre part d'anticiper les contraintes de dynamique du robot de dépôt pouvant se manifester en cas de discrétisation pas assez homogène le long du trajet. Pour cela, les arêtes plus longues que  $d$  sont subdivisées en arêtes plus courtes de longueur  $d$  par interpolation linéaire : des nœuds et des arêtes entre ces derniers sont ajoutés. Après cette interpolation, aucune arête n'est plus longue que  $d$ . Puis, le graphe est parcouru à nouveau et les nœuds aux extrémités des arêtes qui sont moins longues ou de même longueur que  $d/2$  sont fusionnés entre eux (**Figure 86**).

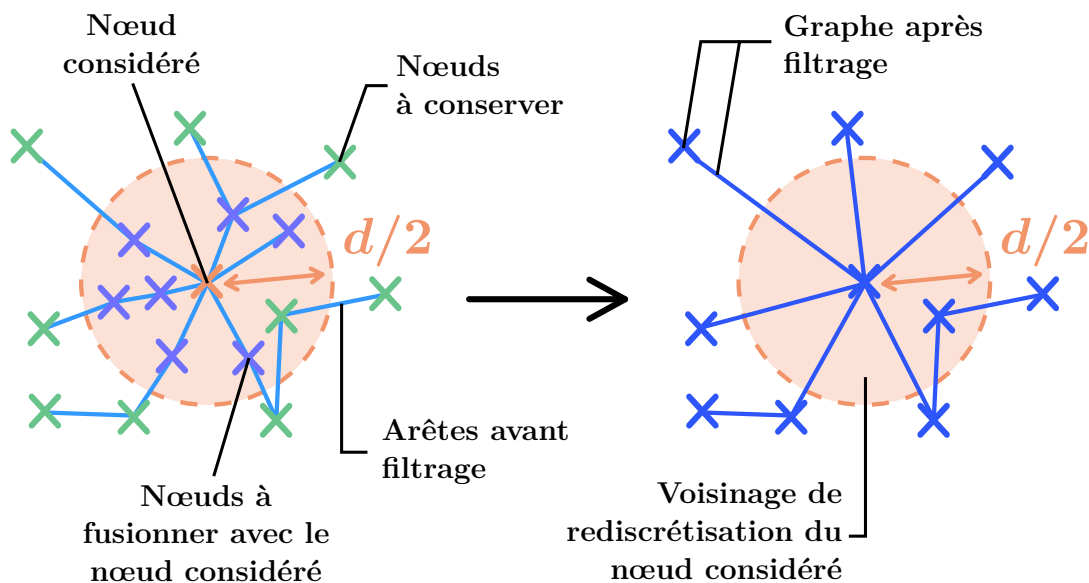


Figure 86 – Rediscrétisation du graphe de la nouvelle couche

Le choix de retirer les arêtes trop courtes permet d'atténuer l'augmentation naturelle du nombre de points par unité de longueur au fur et à mesure que les couches sont calculées si seule une interpolation linéaire est effectuée. Lors de la fusion des arêtes trop courtes, tous les nœuds du graphe sont parcourus. Pour un nœud donné, ce dernier est fusionné avec les nœuds directement connectés avec lui si l'arête qui les lie est inférieure ou égale à  $d/2$ . Le graphe est parcouru jusqu'à qu'il n'y ait plus d'arête à ajouter.

À l'issue de la rediscrétisation, les longueurs des arêtes sont comprises dans  $[d/2, 2d]$ , dont une majorité se situe dans l'intervalle  $[d/2, d]$ . En effet, la fusion des arêtes trop courtes modifie la longueur maximale des arêtes du nouveau graphe qui peuvent devenir supérieures à  $d$ . Le cas le plus défavorable, deux nœuds reliés à une arête de longueur  $d$  sont fusionnés chacun avec un nœud dont ils sont distants de  $d/2$ , et ces 4 nœuds sont alignés sur une même droite. Dans ce cas, l'arête obtenue à l'issue des fusions est de longueur  $2d$ . Le choix de la longueur minimale des arêtes conditionne la borne maximale de l'intervalle. Plus elle sera grande, plus la borne supérieure sera grande devant  $d$ . Néanmoins, cette longueur minimale doit être suffisamment élevée pour éviter que des arêtes ne soient trop courtes, d'où le compromis de  $d/2$  choisi.

Une fois les trois sous-étapes effectuées, le calcul de la nouvelle couche est terminé. Chaque point est ensuite associé à la face sur laquelle il se trouve pour permettre d'affiner la recherche des voisinages de la couche suivante. Un point rajouté par interpolation linéaire ne se situe pas nécessairement sur la surface. Dans ce cas, la face associée est celle qui est la plus proche de ce point. Puis, la recherche d'un chemin eulérien avec l'ajout éventuel d'arêtes virtuelles permet de lui donner un sens de parcours. Ainsi, la couche peut être utilisée pour déterminer la suivante et ainsi générer la trajectoire (**Figure 87**).

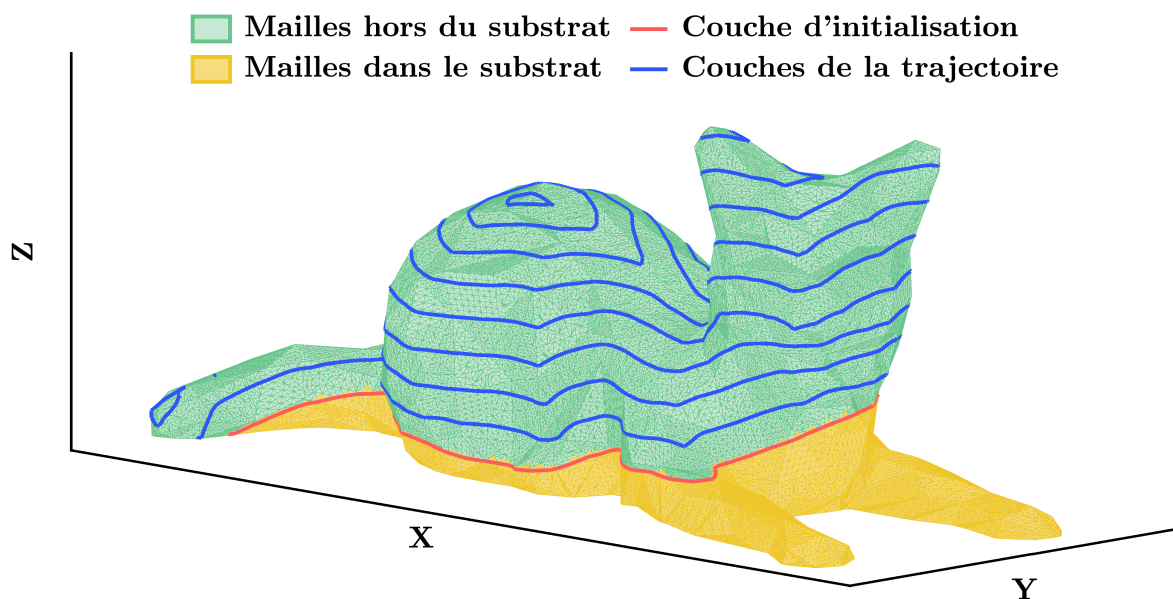
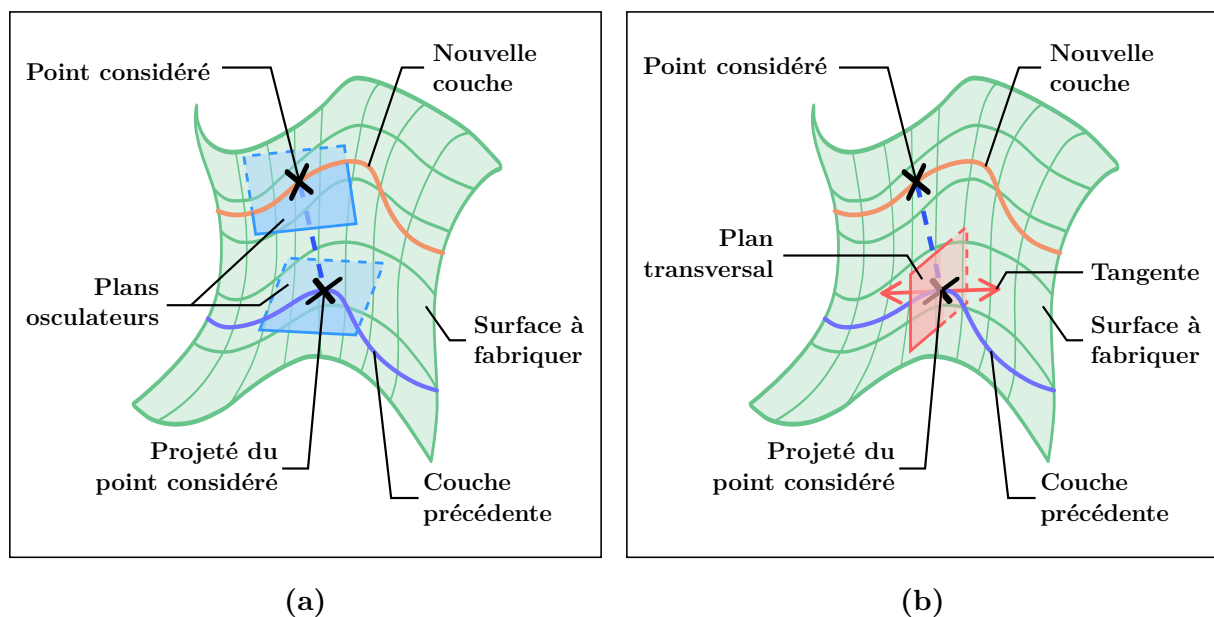


Figure 87 – Génération de couches successives de STL-A

### 3.6.5 Détermination des vecteurs outil

Finalement, les points de la couche calculée sont associés à un vecteur outil. Pour chaque point, ce vecteur outil est tout simplement le vecteur de même direction que la droite de projection de ce point sur la couche précédente et orienté dans le sens de propagation de la trajectoire. En effet, si l'orientation de l'outil est censée garantir des conditions de dépôt les plus constantes possibles, alors la direction de l'outil est censée être dans la direction où s'effectue le dépôt.

Or, le dépôt, dans le cas des procédés DED, et si l'outil est suffisamment proche de la pièce en cours de fabrication, est réalisé au lieu où la pièce est la plus proche de l'outil. Le fait de ne projeter que sur la couche précédente, et non pas sur l'ensemble formé par toutes les couches précédentes est une conséquence directe des hypothèses de génération de trajectoire (**Sous-section 3.1.3**). Les couches étant les plus longues possibles, chaque nouvelle couche est déposée uniquement sur la couche qui la précède : elle est plus proche de cette dernière que des autres couches. L'utilisation de la direction de projection permet ainsi de prendre en compte la tridimensionnalité du problème même s'il n'y a qu'un seul point projeté sur la couche précédente (**Figure 88**).

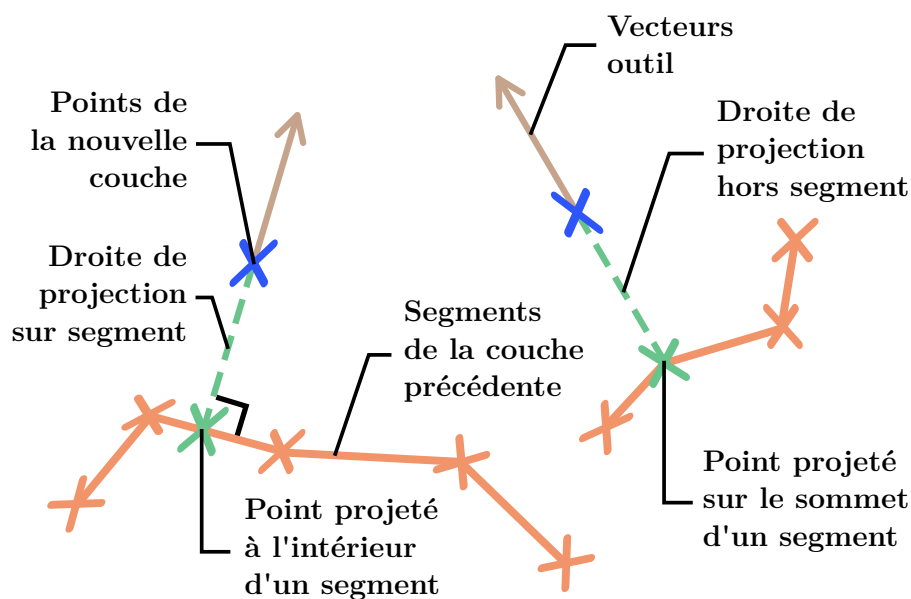


**Figure 88** – Non-coplanarités locales

- (a) Non-coplanarité des plans osculateurs locaux
- (b) Non-coplanarité du point considéré avec le plan transversal de son projeté

En effet, les plans osculateurs au niveau du point considéré de la nouvelle couche dont on souhaite déterminer le vecteur outil et au niveau de son point projeté sur la couche précédente ne sont pas nécessairement coplanaires (**Figure 88a**), et le point courant de la nouvelle couche n'est pas nécessairement inclus dans le plan passant par son point projeté et orthogonal à sa tangente sur la nouvelle couche (**Figure 88b**).

Le simple calcul de la direction de projection sur la couche précédente permet de tenir compte de sa forme, et prend en compte l'éventualité où le projeté se situerait en une région non localement connexe dans le voisinage de rayon  $h$  du point de la couche calculée considéré pour le calcul du vecteur outil (**Figure 89**). Le calcul des vecteurs outils est réalisé en adaptant la méthode de calcul de distance segment-segment utilisée pour le filtrage de l'ensemble des sous-graphes lors du calcul de la nouvelle couche de la trajectoire (**Sous-section 3.6.4**), car cette distance se déduit du calcul des points projetés sur chacun des deux segments [190]. Puis, les vecteurs outil sont normés.



**Figure 89** – Méthode de détermination des vecteurs outil

En cas de présence de plusieurs points de la couche précédente situés à une même distance minimale du point de la couche calculée, plusieurs vecteurs outils potentiels peuvent exister. Dans cette situation, la méthode utilisée consiste à prendre le vecteur normé issu de la somme de tous ces vecteurs outils potentiels, car dans la pratique, il n'y a pas de raison de privilégier une direction plutôt qu'une autre. Cette méthode est utilisée dans l'algorithme de génération de trajectoire (**Figure 90**).

Enfin, dans de rares cas, la somme des vecteurs outils potentiels peut être nulle, ce qui signifie qu'aucun vecteur outil n'est calculé. Le vecteur outil est alors considéré comme indéterminé : son choix est laissé libre selon la configuration locale et les vecteurs outil limitrophes. Il semble préférable de ne pas choisir un des vecteurs projetés ou la somme de certains, car, selon les vecteurs choisis, le vecteur outil obtenu pourrait avoir la même direction mais être orienté dans un sens différent. En effet, puisque la somme des vecteurs est nulle, alors pour tout vecteur issu d'une sous-somme des vecteurs outils, il existe une sous-somme de signe opposé.

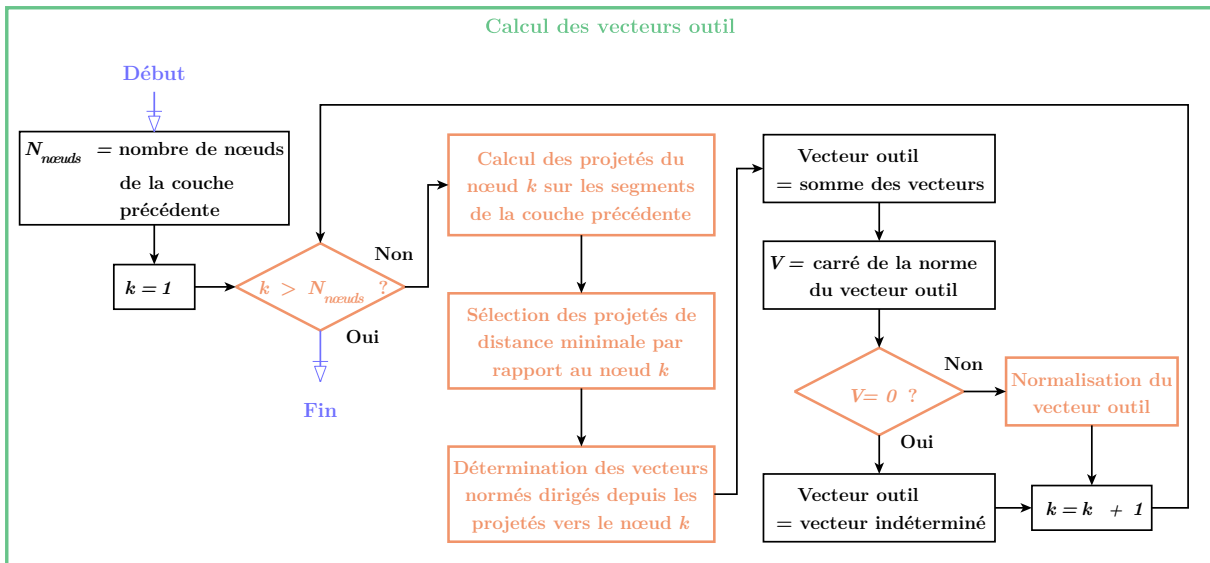


Figure 90 – Étape de calcul des vecteurs outil

L'application de la méthode de calcul des vecteurs outils à STL-A est illustrée à la **Figure 91**. Le fait de pouvoir considérer uniquement la couche précédente pour le calcul des points projetés permet de réduire le temps de calcul sans altérer les vecteurs outils obtenus. Cependant, dans le cas où la trajectoire ne maximiserait pas la longueur des couches, et donc qu'une couche pourrait être déposée sur des couches différentes, alors il serait nécessaire de calculer les projetés sur toutes les couches précédentes, à défaut de pouvoir déterminer quelles sont les couches précédentes servant de support pour le dépôt.

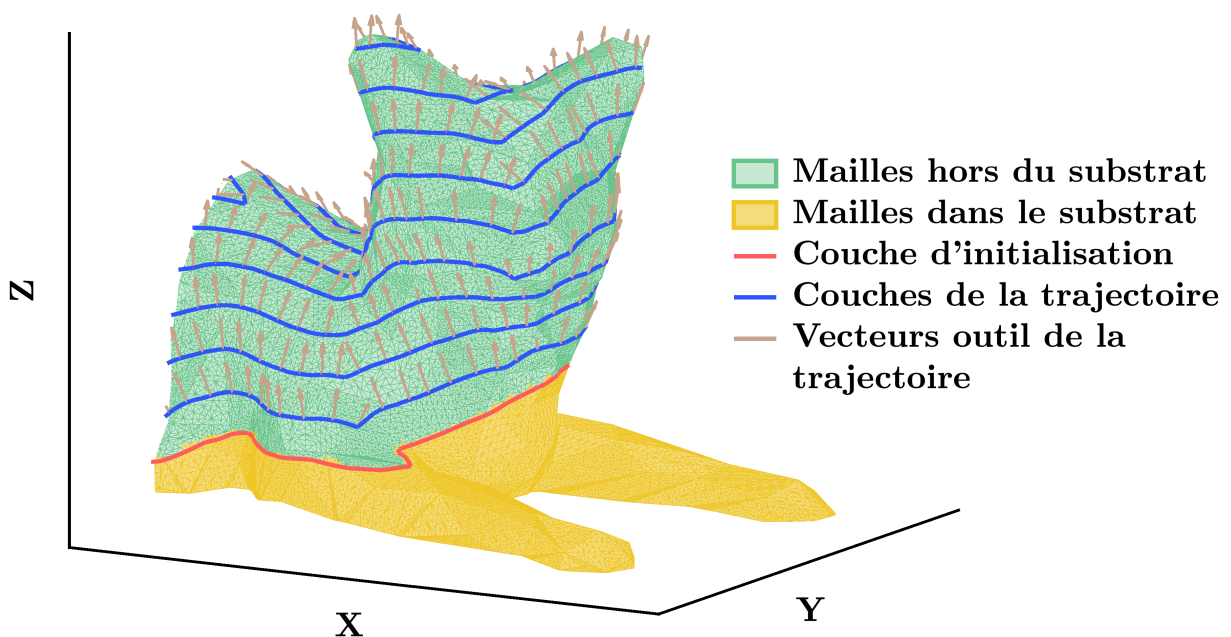


Figure 91 – Calcul des vecteurs outil sur STL-A





# Chapitre 4

## Analyse des résultats et perspectives

Le **Chapitre 3** a permis de détailler les différentes étapes de la méthode de génération de trajectoire. La méthode présentée permet l'obtention d'un premier chemin de dépôt comportant des couches à hauteur constante pour de la fabrication additive DED multi-axes, sans avoir à chercher une direction de fabrication spécifique sur des surfaces facettisées de forme quelconque pour des conditions initiales de substrat arbitraires. Dans le **Chapitre 4**, des simulations sont analysées pour valider la viabilité de l'algorithme et apporter des perspectives d'amélioration et de travaux futurs. Cet ultime chapitre a pour but d'apporter des éléments supplémentaires permettant de démontrer la validité de certains concepts présentés dans la thèse, notamment sa compatibilité avec la rétroaction.

Dans un premier temps, la méthode algorithmique est appliquée par simulation sur cinq TPMS différentes (**Section 4.1**) : le Schoen WP-hybride, le Schwarz P, le Schwarz G, le Schwarz D et le Lidinoïde. Les résultats des différentes simulations sont présentés sous forme de tableaux en vue de l'analyse des performances de la routine et son potentiel.

Dans un deuxième temps, les résultats des simulations sont étudiés suivant trois aspects (**Section 4.2**) : longueur des arêtes de discrétisation, répartition des points calculés sur la surface d'entrée et évolution du temps de calcul. Ces trois études permettent d'apprécier l'impact des paramètres d'entrée les plus influents sur la qualité des points calculés et sur le temps de calcul pour des surfaces identiques.

Dans un troisième temps, des simulations supplémentaires sont effectuées pour valider la versatilité de la méthode (**Section 4.3**) en ce qui concerne les complexités de géométries de surfaces prises en charge. Ces simulations abordent la versatilité autour de quatre axes : les directions de propagation, les sources de complexité locale, les combinaisons pièce-substrat et la prédisposition à la rétroaction.

Dans un quatrième temps, des perspectives sont envisagées concernant l'éventuelle possibilité de quantifier la prédisposition d'une pièce associée à un substrat à être réalisée par fabrication additive d'un point de vue purement trajectoiriste (**Section 4.4**). Cette discussion aborde l'anticipation de la fabricabilité en soulignant ses enjeux pour la conception numérique de pièces, en discutant de l'impact de la hauteur de couche sur la qualité locale de la géométrie et en proposant des principes et modèles d'anticipation de la fabricabilité.

## 4.1 Simulations

### 4.1.1 Liste des essais et conditions initiales

Comme expliqué à la **Section 3.4**,  $h$ ,  $e$ ,  $d$  et  $f$  sont les quatre paramètres principaux de l'algorithme de génération de trajectoire. Le choix du réglage de ces paramètres est une étape à effectuer avec soin pour éviter une mauvaise reconstruction des graphes des couches successives. Étant donné que la génération de trajectoires DED se fait couche par couche, et qu'une nouvelle couche dépend de celle qui la précède, une couche mal calculée aura des conséquences indésirables sur le calcul de la couche suivante. Quelques conseils de réglage sont proposés au **Tableau 10**. Les réglages recommandés offrent davantage de souplesse que les exigences supplémentaires conseillées. Ils permettent un premier réglage rapide avant un éventuel affinage selon la géométrie de la pièce et de son maillage.

Symbole	Paramètre d'entrée associé	Équivalence physique	Utilisation pratique
$h$	Hauteur de couche	Hauteur de cordon	Sélection des voisinages
$e$	Taille indicative des arêtes du maillage subdivisé	Taille des éléments finis	Subdivision du maillage initial
$d$	Valeur indicative de discrétisation des couches	Incrément de déplacement de l'outil de dépôt	Atténuation du chevauchement et rediscrétisation
$f$	Valeur de filtrage entre nœuds de sous graphes non connexes	Interférence de cordons	Reconstruction des graphes des couches

Symbole	Exigence(s) de l'algorithme	Exigence(s) en plus conseillée(s)	Réglage recommandé
$h$	$h > 0$	-	-
$e$	$e > 0$ et $e < h$	$e \leq h/2$	$e = h/2$
$d$	$d > 0$	$d < e$ et $d \leq h/5$	$d \leq h/4$
$f$	$f \geq 0$ et $f \leq h$	$f < e$ et $f \leq h/5$	$f = h/4$

**Table 10** – Réglage des paramètres d'entrée

La hauteur de couche  $h$  est le paramètre qui permet de déterminer tous les autres. Le choix de sa valeur dépend du matériau d'apport utilisé pour la fabrication et des conditions de dépôt. La taille indicative des arêtes du maillage subdivisé  $e$  et la valeur indicative de discrétisation des couches  $d$  doivent être choisies avec sagesse pour limiter le temps de calcul et la saturation de la mémoire informatique allouée à l'algorithme. La valeur de filtrage entre nœuds de sous-graphes non connexes  $f$  quant à elle doit être suffisamment élevée pour permettre une bonne reconstruction des graphes des couches.

Plusieurs simulations ont été effectuées sur différentes TPMS pour valider la méthode. Les surfaces des TPMS utilisées sont issues des équations approximatives obtenues par la méthode des niveaux données au **Tableau 2** p48. Les cinq TPMS suivantes ont été sélectionnées pour les simulations :

- Le Schoen WP-hybride (**Sous-section 4.1.2**) ;
- Le Schwarz P (**Sous-section 4.1.3**) ;
- Le Schwarz G (**Sous-section 4.1.4**) ;
- Le Schwarz D (**Sous-section 4.1.5**) ;
- Le Lidinoïde (**Sous-section 4.1.6**).

Ces simulations sont effectuées sur des motifs unitaires inclus dans un cube de 100mm de côté, et le substrat est un plan en contact avec la face inférieure de ce cube (**Figure 92**). Pour chaque motif, cinq simulations de trajectoires sont effectuées. Les paramètres d'entrée utilisés pour chacun d'eux sont donnés au **Tableau 11** :

$h$ (mm)	$e$ (mm)	$d$ (mm)	$f$ (mm)
1	0,5	0,25	0,25
2	1	0,5	0,5
3	1,5	0,75	0,75
4	2	1	1
5	2,5	1,25	1,25

**Table 11** – Paramètres d'entrée des simulations

Les tableaux des résultats des simulations contiennent un certain nombre de données. Les arêtes de dépôt sont classées selon différents types : les arêtes de “connexion”, de “sur-dépôt” ou “sous-dépôt” et “sur-longues”.

Les arêtes de connexion désignent les arêtes virtuelles ajoutées sur une même couche afin d'en déterminer un chemin de parcours eulérien. Elles ne font pas partie de la trajectoire et indiquent uniquement les phases sans dépôt de retrait et d'approche de l'outil.

Les arêtes de sur-dépôt et de sous-dépôt correspondent à des arêtes pour lesquelles le critère de distance euclidienne, respecté pour leurs sommets, ne l'est pas à l'intérieur du segment les reliant. Dans le cas du sur-dépôt, le point de l'arête le plus proche de la couche qui la précède est à une distance strictement supérieure à  $1,05 h$ . Dans le cas du sous-dépôt, cette distance est strictement inférieure à  $0,95 h$ .

Enfin, une arête sur-longue correspond à une arête dont la longueur est strictement supérieure à  $d$ . Une arête est désignée comme valide si elle n'est ni de sur-dépôt, ni de sous-dépôt et ce, indépendamment qu'il s'agisse d'une arête sur-longue ou non.

Les simulations ont été effectuées avec un système d'exploitation 64 bits sous Windows 10, disposant d'un processeur Intel® Core™ i5-9400H à 2,50GHz, et d'une mémoire de type RAM utilisable de 15,7Go. L'exécution du code se fait en mode monthread.

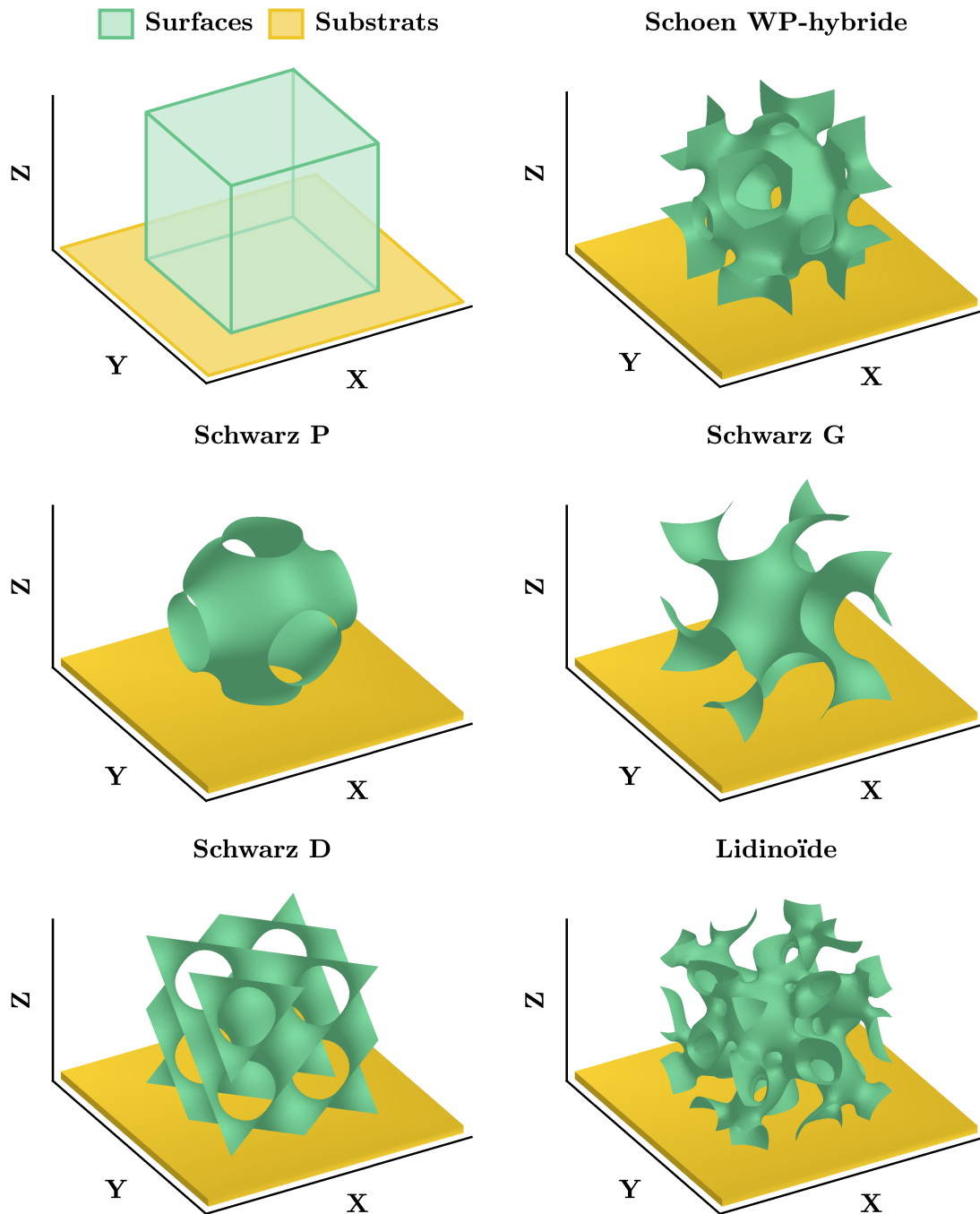


Figure 92 – TPMS utilisées pour les simulations et lieux des substrats

### 4.1.2 Schoen hybride Wrapped Package et Primitif

Le Schoen WP-hybride a une forme qui rappelle le Schoen I-WP et le Schwarz P, d'où son nom qui a remplacé celui donné par Schoen en 1970 lors de sa découverte en se basant sur les deux graphes des squelettes du motif : surface O,C-TO. Sa forme est représentative du degré de complexité des surfaces attendues pour les procédés de fabrication additive.

TPMS	Schoen WP-hybride				
$h$ (mm)	1	2	3	4	5
$e$ (mm)	0,5	1	1,5	2	2,5
$d$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$f$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
Nombre de faces du maillage subdivisé	3 788 659	1 129 064	524 107	317 963	211 718
Temps de génération de trajectoire (s)	90 395	8 454	2 745	1 335	655
Nombre de couches	113	57	37	31	22
Nombre de points de dépôt	190 524	47 489	21 325	11 853	7 583
Nombre total d'arêtes de connexion	475	243	147	108	90
Nombre total d'arêtes de dépôt	190 014	47 250	21 173	11 743	7 495
Nombre d'arêtes de sur-dépôt	0	0	0	0	0
Nombre d'arêtes de sous-dépôt	14	5	0	12	4
Nombre d'arêtes sur-longues	31 750	8 167	2 975	1 988	1 146
Taux d'arêtes non valides (%)	0,01	0,01	0,00	0,10	0,05
Taux d'arêtes sur-longues (%)	16,71	17,28	14,05	16,93	15,29

**Table 12** – Résultats des simulations du Schoen WP-hybride

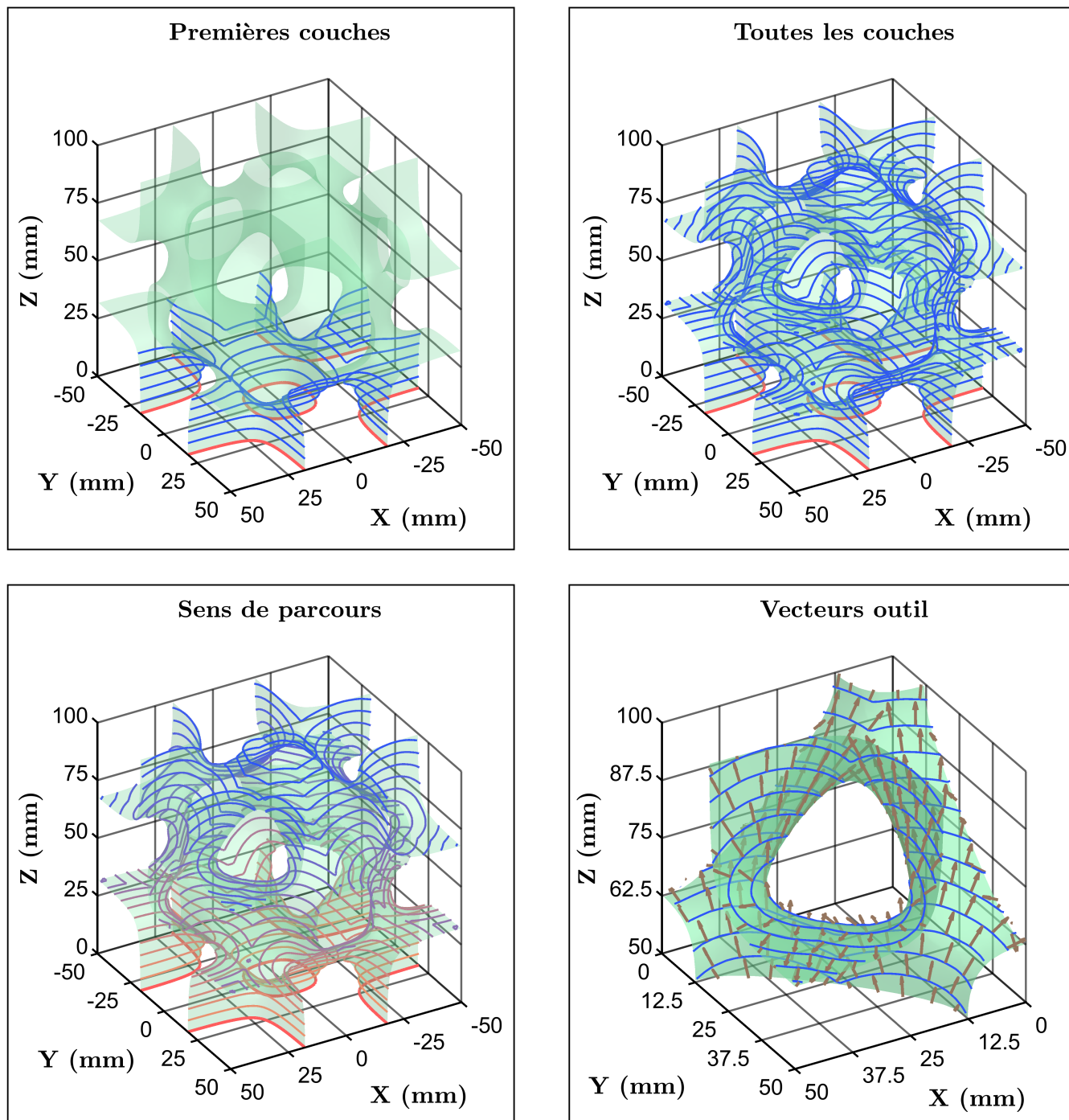
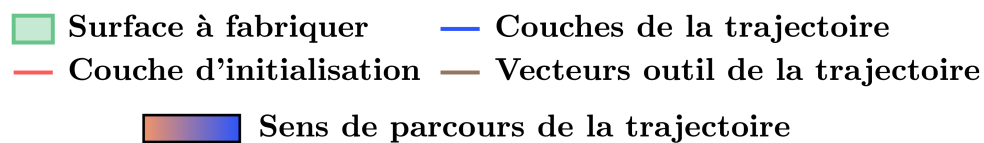


Figure 93 – Trajectoires simulées du Schoen WP-hybride  
 ( $h = 5\text{mm}$ ,  $e = 2,5\text{mm}$ ,  $d = 1,25\text{mm}$ ,  $f = 1,25\text{mm}$ )

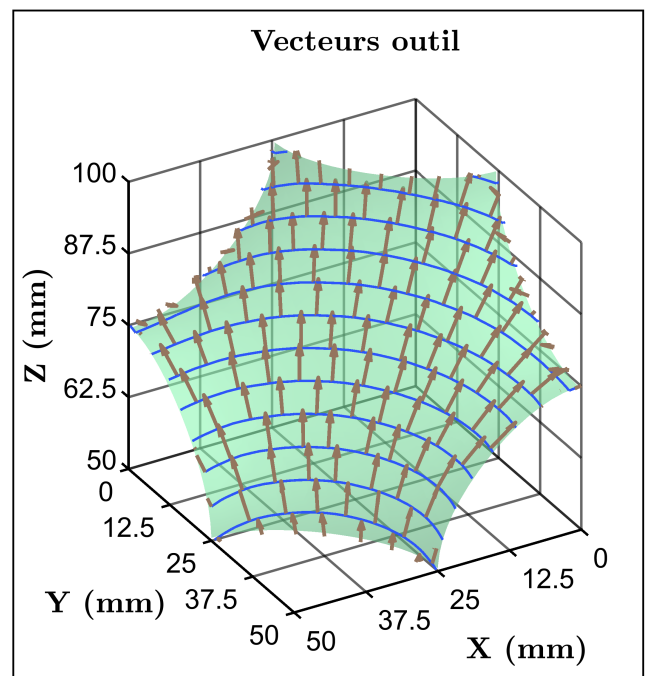
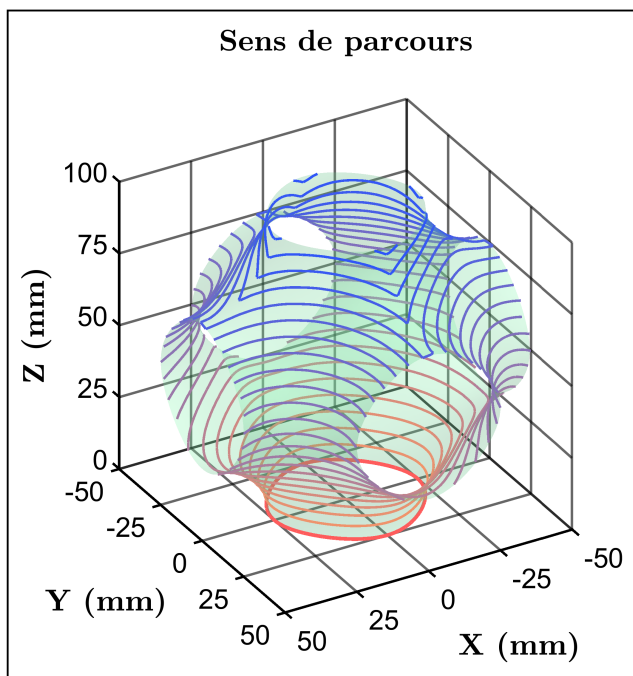
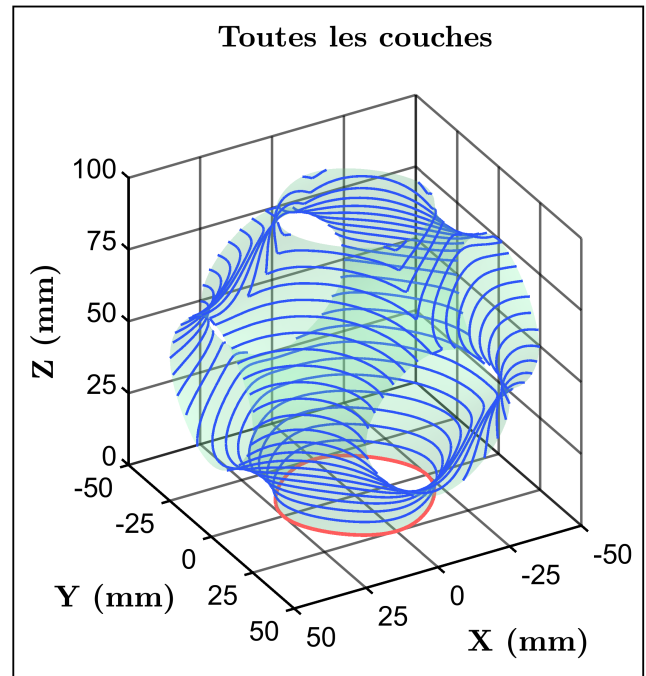
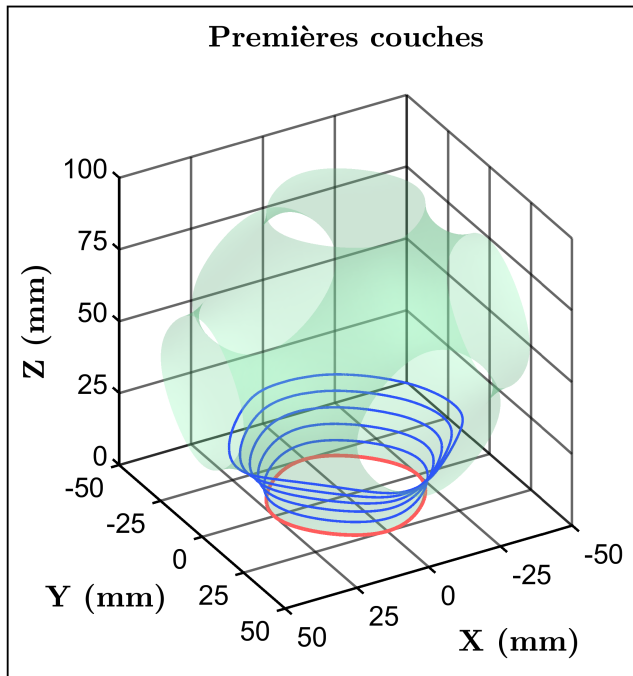
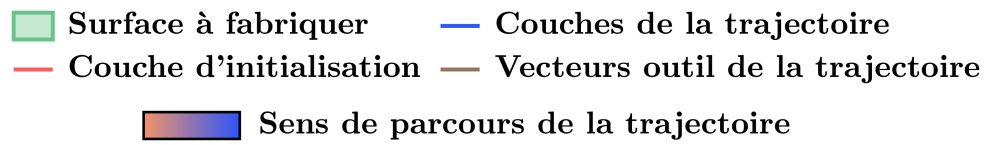
### 4.1.3 Schwarz Primitif

Le Schwarz P est une surface à la complexité très modérée parmi toutes les TPMS disponibles dans la littérature. Les couches de la trajectoire sont globalement empilées dans une seule direction orthogonale au plan du substrat. La présence de trous dans différentes directions reste cependant une source de complexité.

TPMS	Schwarz P				
$h$ (mm)	1	2	3	4	5
$e$ (mm)	0,5	1	1,5	2	2,5
$d$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$f$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
Nombre de faces du maillage subdivisé	2 563 710	721 472	350 048	206 869	142 968
Temps de génération de trajectoire (s)	46 358	4 453	1 326	644	529
Nombre de couches	116	58	39	29	23
Nombre de points de dépôt	119 153	29 837	13 169	7 514	4 715
Nombre total d'arêtes de connexion	195	94	68	45	36
Nombre total d'arêtes de dépôt	118 896	29 713	13 089	7 457	4 667
Nombre d'arêtes de sur-dépôt	0	0	0	0	0
Nombre d'arêtes de sous-dépôt	1	0	8	10	8
Nombre d'arêtes sur-longues	19 467	4 863	2 020	1 166	752
Taux d'arêtes non valides (%)	0,00	0,00	0,06	0,13	0,17
Taux d'arêtes sur-longues (%)	16,37	16,37	15,43	15,64	16,11

**Table 13** – Résultats des simulations du Schwarz P





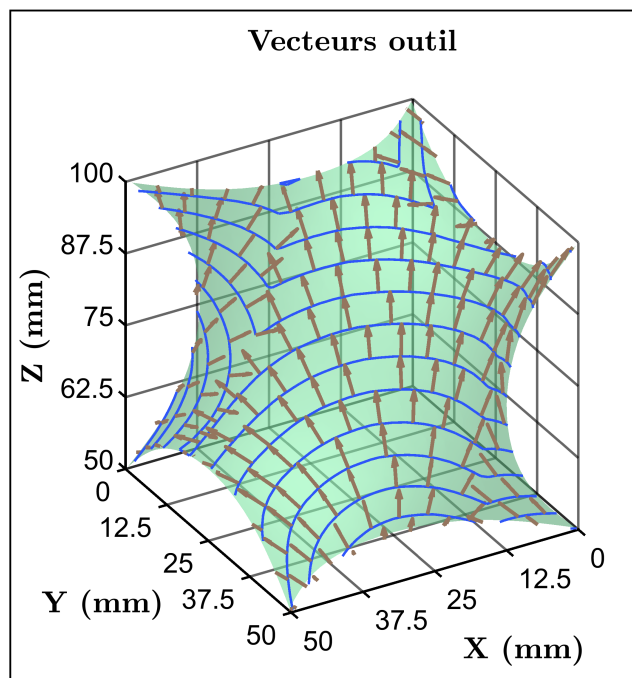
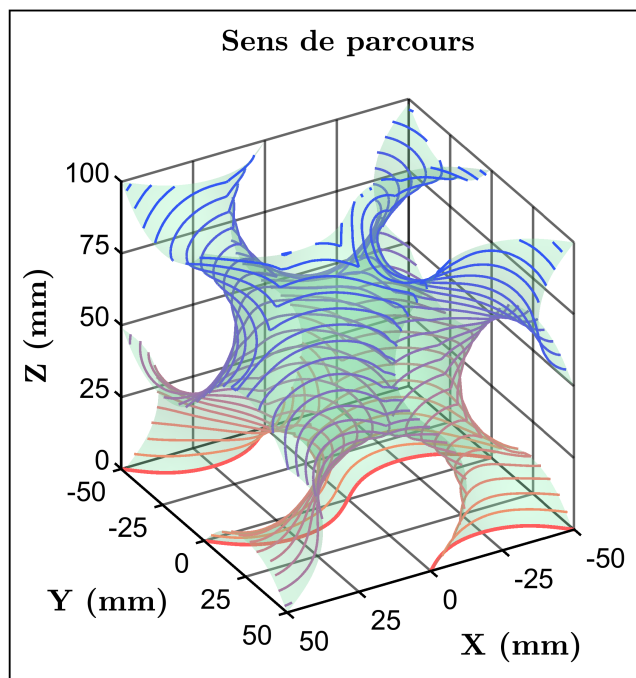
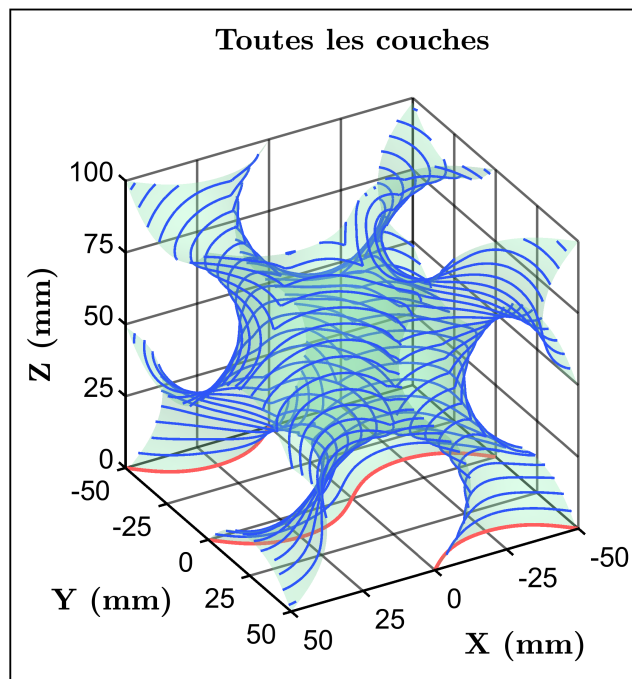
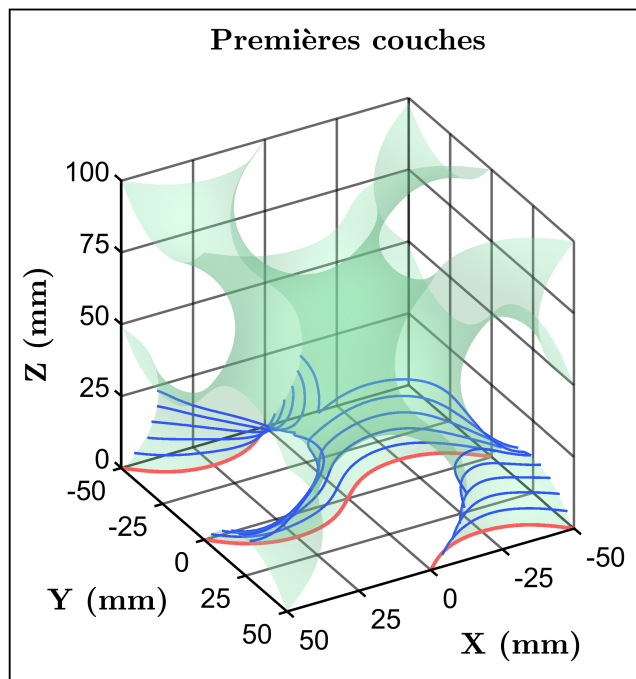
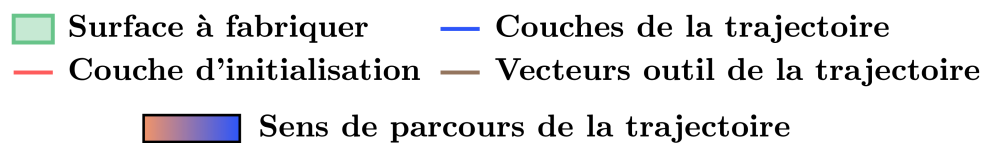
**Figure 94** – Trajectoires simulées du Schwarz P  
 ( $h = 5\text{mm}$ ,  $e = 2,5\text{mm}$ ,  $d = 1,25\text{mm}$ ,  $f = 1,25\text{mm}$ )

#### 4.1.4 Schwarz Gyroïde

Caractérisé par sa forme d'hélice, le Schwarz G est une TPMS élégante dont l'utilisation dans des domaines artistiques vient s'ajouter à son usage pour de l'optimisation de résistance mécanique. La multiplication des directions de propagation des couches constitue une difficulté certaine permettant d'apprécier la robustesse de l'algorithme.

TPMS	Schwarz G				
$h$ (mm)	1	2	3	4	5
$e$ (mm)	0,5	1	1,5	2	2,5
$d$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$f$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
Nombre de faces du maillage subdivisé	3 329 011	942 649	457 501	267 788	187 463
Temps de génération de trajectoire (s)	77 146	7 527	2 160	904	507
Nombre de couches	128	63	42	31	25
Nombre de points de dépôt	156 147	39 121	17 325	9 691	6 217
Nombre total d'arêtes de connexion	283	133	94	66	53
Nombre total d'arêtes de dépôt	155 752	38 931	17 202	9 600	6 148
Nombre d'arêtes de sur-dépôt	20	15	16	15	18
Nombre d'arêtes de sous-dépôt	8	0	8	0	5
Nombre d'arêtes sur-longues	25 734	6 427	2 698	1 603	976
Taux d'arêtes non valides (%)	0,02	0,04	0,14	0,16	0,37
Taux d'arêtes sur-longues (%)	16,52	16,51	15,68	16,70	15,88

**Table 14** – Résultats des simulations du Schwarz G



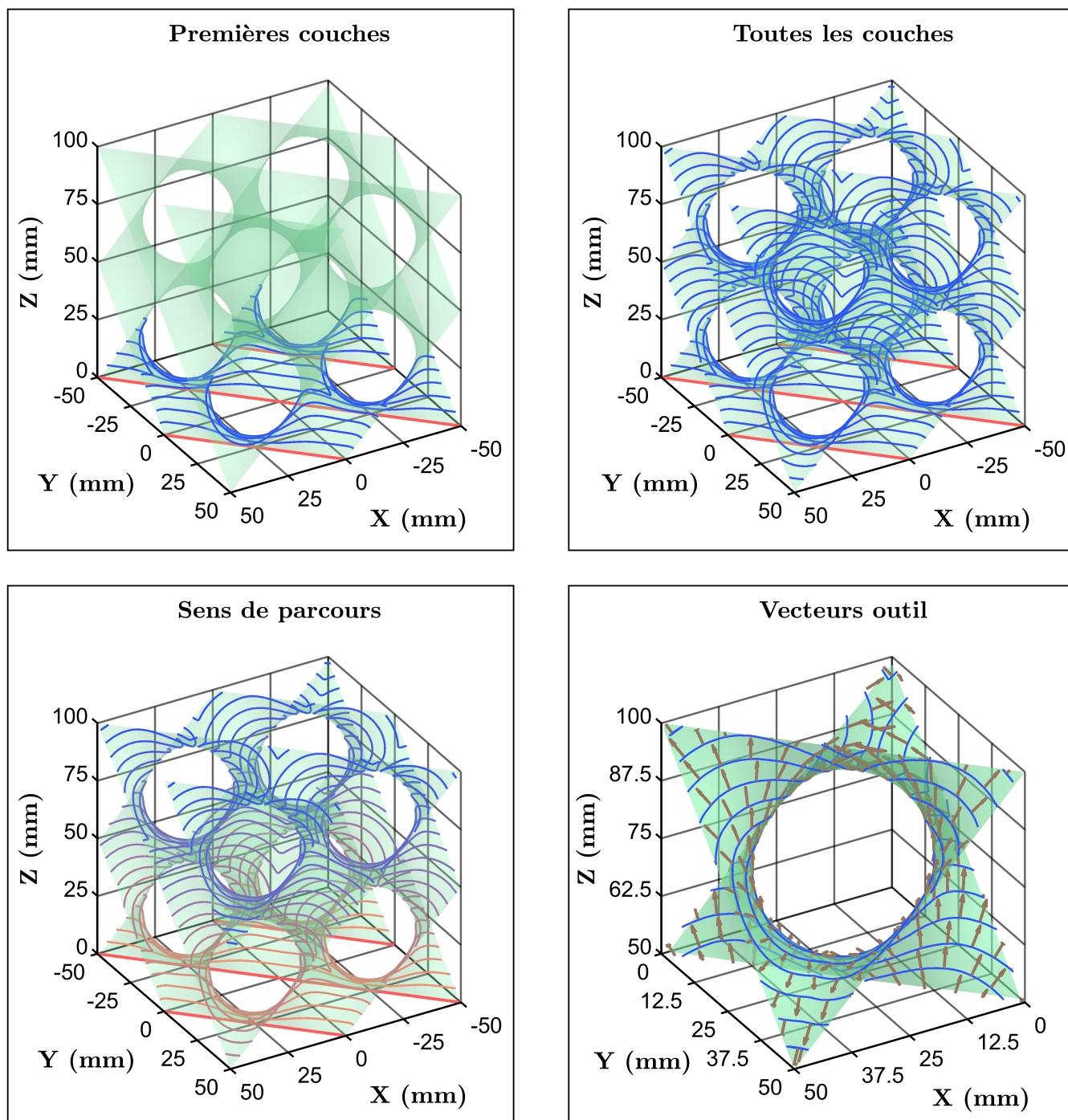
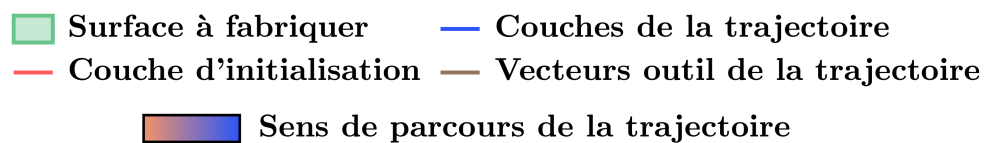
**Figure 95** – Trajectoires simulées du Schwarz G  
 ( $h = 5\text{mm}$ ,  $e = 2,5\text{mm}$ ,  $d = 1,25\text{mm}$ ,  $f = 1,25\text{mm}$ )

### 4.1.5 Schwarz Diamant

La structure du Schwarz D est telle que le profil évolue localement de manière très prononcée en certaines régions. Ces fortes variations ont lieu au voisinage des trous de la surface, et s'estompent dans les régions éloignées. Cette évolution abrupte de profil est une difficulté que l'algorithme se doit de dépasser.

TPMS	Schwarz D				
$h$ (mm)	1	2	3	4	5
$e$ (mm)	0,5	1	1,5	2	2,5
$d$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$f$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
Nombre de faces du maillage subdivisé	4 067 740	1 160 401	561 831	329 662	229 504
Temps de génération de trajectoire (s)	88 442	11 179	3 213	1 368	716
Nombre de couches	117	58	39	29	23
Nombre de points de dépôt	194 239	48 391	21 362	11 996	7 804
Nombre total d'arêtes de connexion	416	185	121	92	67
Nombre total d'arêtes de dépôt	193 739	48 161	21 210	11 885	7 721
Nombre d'arêtes de sur-dépôt	31	30	26	21	21
Nombre d'arêtes de sous-dépôt	12	3	3	1	1
Nombre d'arêtes sur-longues	31 782	8 151	3 419	2 023	1 244
Taux d'arêtes non valides (%)	0,02	0,07	0,14	0,19	0,28
Taux d'arêtes sur-longues (%)	16,40	16,92	16,12	17,02	16,11

**Table 15** – Résultats des simulations du Schwarz D



**Figure 96** – Trajectoires simulées du Schwarz D  
 ( $h = 5\text{mm}$ ,  $e = 2,5\text{mm}$ ,  $d = 1,25\text{mm}$ ,  $f = 1,25\text{mm}$ )

### 4.1.6 Lidinoïde

La structure du Lidinoïde n'est pas sans rappeler la structure interne des mousses métalliques, tout comme le Split P. Cette TPMS peut être vue comme représentative des degrés de complexité les plus élevés de par le caractère irrégulier et non connexe de sa topologie. Il permet de tester la robustesse et la fiabilité de l'algorithme de génération de trajectoire dans une configuration extrême.

TPMS	Lidinoïde				
$h$ (mm)	1	2	3	4	5
$e$ (mm)	0,5	1	1,5	2	2,5
$d$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
$f$ (mm)	0,25	0,5	0,75	1	1,25
Nombre de faces du maillage subdivisé	6 333 171	1 813 705	863 900	540 057	356 805
Temps de génération de trajectoire (s)	326 310	24 286	6 357	2 860	1 638
Nombre de couches	134	66	44	33	26
Nombre de points de dépôt	314 158	78 519	34 251	19 498	12 358
Nombre total d'arêtes de connexion	765	377	247	182	141
Nombre total d'arêtes de dépôt	313 430	78 165	34 023	19 337	12 231
Nombre d'arêtes de sur-dépôt	44	14	18	26	33
Nombre d'arêtes de sous-dépôt	27	32	20	9	15
Nombre d'arêtes sur-longues	52 319	12 846	5 601	3 045	2 039
Taux d'arêtes non valides (%)	0,02	0,06	0,11	0,18	0,39
Taux d'arêtes sur-longues (%)	16,69	16,43	16,46	15,75	16,67

**Table 16** – Résultats des simulations du Lidinoïde

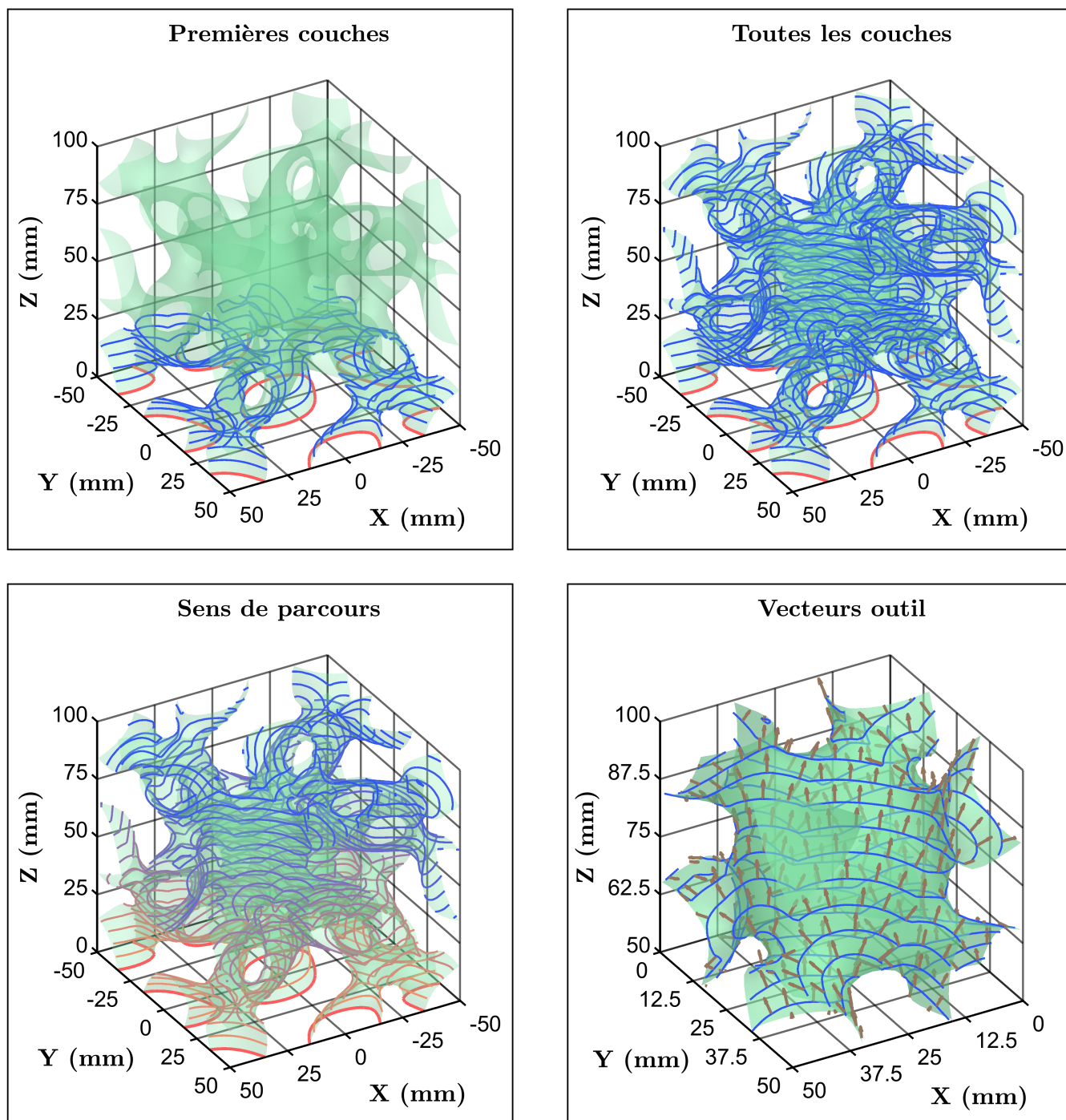
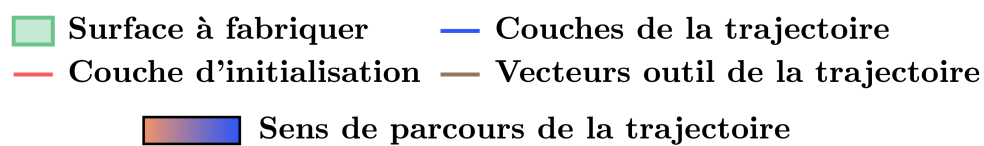


Figure 97 – Trajectoires simulées du Lidinoïde  
 ( $h = 5\text{mm}$ ,  $e = 2,5\text{mm}$ ,  $d = 1,25\text{mm}$ ,  $f = 1,25\text{mm}$ )

## 4.2 Analyse des simulations

Les différentes TPMS choisies pour les simulations de la **Section 4.1** présentent diverses topologies permettant d’apprécier le comportement de l’algorithme pour l’obtention de trajectoires pour des configurations pièce-substrat quelconques. Elles représentent des géométries de complexité variable, et regroupent l’ensemble des sources de complexité de génération de trajectoire évoquées au **Chapitre 1** et illustrées à la **Figure 7** p20 :

- Présence de trous ;
- Zones d’enchevêtrement ;
- Non connexités locales.

L’utilisation de différents ensembles de paramètres d’entrée pour une même surface permet d’apprécier la fiabilité de la génération de trajectoire vis-à-vis de différents ordres de grandeur de voisinage pour de mêmes sources de complexité de géométrie.

Dans cette présente section, les résultats issus des tableaux des simulations de trajectoire des TPMS de la **Section 4.1** sont analysés et discutés sur trois aspects qui permettent d’apprécier la robustesse de l’algorithme de génération de trajectoire :

- La discrétisation des couches à hauteur fixée (**Sous-section 4.2.1**) ;
- La répartition des points sur la surface d’entrée (**Sous-section 4.2.2**) ;
- L’évolution du temps de calcul (**Sous-section 4.2.3**).

### 4.2.1 Discrétisation des couches à hauteur fixée

Une première mesure permettant de valider la fiabilité des simulations vis-à-vis du critère de distance euclidienne est l’évaluation de la distance de chaque arête de dépôt à la couche qui la précède. En effet, comme évoqué à la **Section 3.3**, le critère de distance euclidienne n’est évalué que pour les points des couches lors de leur calcul, et pas pour leurs arêtes. Cette considération permet de réduire drastiquement le nombre d’opérations à effectuer, et est valide à condition que la valeur de discrétisation  $\mathbf{d}$  soit choisie judicieusement par rapport à  $\mathbf{h}$ . Le calcul de distances segment-segment permet ainsi de vérifier la validité du critère de distance euclidienne entre les sommets des arêtes de dépôt.

Les arêtes valides sont telles que leur distance segment-segment avec la couche précédente soit égale à la valeur de la hauteur de couche  $\mathbf{h}$  à  $\pm 5\%$  près. Sur toutes les simulations, on constate que la majorité des arêtes sont valides : le taux d’arêtes non valides ne dépasse pas  $0,4\%$  sur les simulations. En effet, le taux le plus élevé vaut  $0,39\%$  et correspond à la simulation de trajectoire du Lidinoïde pour une valeur  $\mathbf{h} = 5\text{mm}$  (**Tableau 16**). Ainsi, la fiabilité des arêtes calculées vis-à-vis du critère de distance euclidienne est de l’ordre de  $99,6\%$ , ce qui valide la méthode du choix de  $\mathbf{d}$  vis-à-vis de  $\mathbf{h}$  dans l’algorithme. Les arêtes non valides correspondent uniquement à des arêtes aberrantes ajoutées après filtrage des sous-graphes. Elles ne sont pas censées être présentes sur la trajectoire. Davantage d’informations sur les arêtes aberrantes sont fournies à la **Sous-section 4.2.2**.



Une deuxième mesure permettant d'étudier l'homogénéité des arêtes des couches de la trajectoire consiste à examiner les longueurs des arêtes par analyse statistique. La répartition statistique d'arêtes sur-longues – donc de longueur en dehors de  $[d/2, d]$  – pour l'ensemble des 25 trajectoires des TPMS est illustrée à la **Figure 98**. De par la routine de rediscrétisation des arêtes du graphe de toute nouvelle couche calculée présentée à la **Sous-section 3.6.4**, les longueurs de toutes les arêtes sont censées être toutes comprises dans  $[d/2, 2d]$  avec une majorité d'arêtes dans  $[d/2, d]$ .

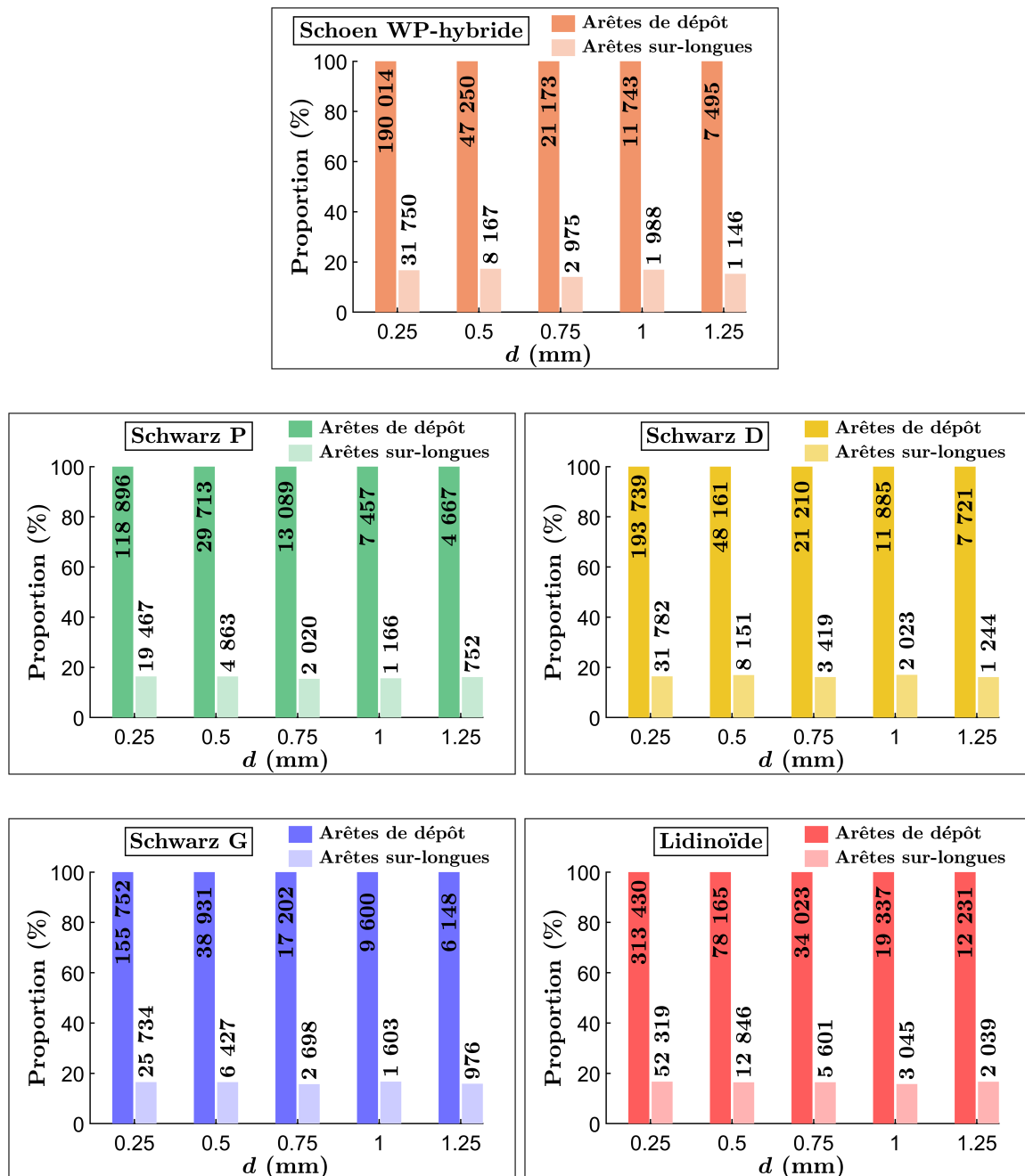


Figure 98 – Proportion d'arêtes de dépôt sur-longues pour chaque TPMS

En effet, dans cette routine de rediscrétisation, les arêtes plus longues que  $\mathbf{d}$  sont subdivisées en arêtes plus courtes de longueur  $\mathbf{d}$  par interpolation linéaire, puis les nœuds partageant une arête de longueur inférieure ou égale à  $\mathbf{d}/2$  sont fusionnés. Par conséquent, à l'issue de l'interpolation linéaire, toute longueur d'arête vaut au plus  $\mathbf{d}$ . Puis, après fusion des nœuds distants de moins de  $\mathbf{d}/2$ , la longueur de certaines arêtes augmente d'un reliquat d'au plus  $\mathbf{d}/2$  au niveau d'une ou de chacune de leurs extrémités. Ainsi, après la fusion, toute arête a une longueur d'au plus  $2\mathbf{d}$ . Or, puisque les reliquats varient sur  $]0, \mathbf{d}/2]$ , que les longueurs des arêtes recevant ce reliquat varient sur  $[\mathbf{d}/2, 2\mathbf{d}]$ , et qu'une arête reçoit au plus et non pas nécessairement deux reliquats, alors une majorité statistique d'arêtes de longueur comprise dans  $[\mathbf{d}/2, 2\mathbf{d}]$  est attendue.

Pour chaque simulation, la longueur des arêtes est comprise dans  $[\mathbf{d}/2, 2\mathbf{d}]$  car la routine de rediscrétisation est appliquée à la fin du calcul de chaque couche. Sur les histogrammes de la **Figure 98**, on constate que le taux d'arêtes sur-longues semble être approximativement constant : sa valeur est d'environ 16,5 % quel que soit le motif et quels que soient les paramètres d'entrée.

Ce taux est déterminé par le choix de la longueur seuil pour laquelle des nœuds directement connectés sont fusionnés. Ici, ce seuil vaut  $\mathbf{d}/2$ . Une valeur différente engendrerait une variation de ce taux. Plus la longueur seuil est petite, plus le taux est amené à diminuer car le reliquat de longueur ajouté aux arêtes dont au moins une extrémité a fusionné avec un autre nœud est plus petit. Par conséquent, l'augmentation de longueur des nouvelles arêtes après fusion est plus faible, et donc statistiquement moins d'arêtes seront de longueur strictement supérieure à  $\mathbf{d}$  après la routine de rediscrétisation. En contrepartie, plus la longueur seuil est petite, plus le nombre total d'arêtes est important car moins de nœuds sont fusionnés.

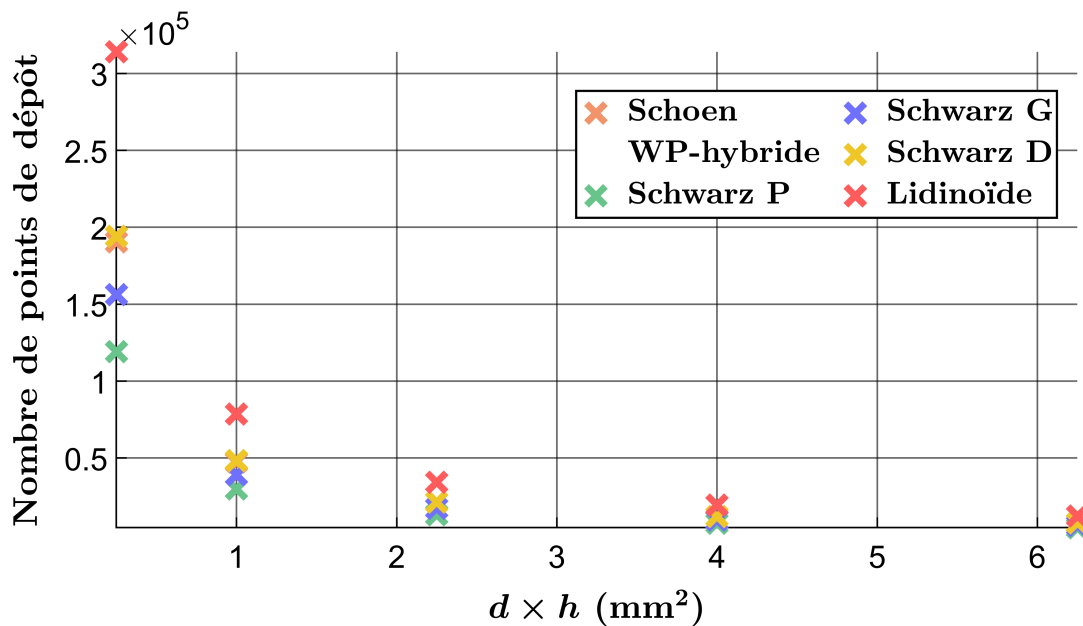
Enfin, rappelons que les arêtes sur-longues sont des arêtes valides. Comme expliqué, leur apparition est une conséquence de la fusion des nœuds proches lors de la rediscrétisation des arêtes. L'instauration d'une borne inférieure permet de limiter l'augmentation naturelle du nombre de points par unité de longueur d'arête au fur et à mesure du calcul des couches successives. Cela borne par conséquent les longueurs d'arêtes sur un intervalle afin que la discrétisation de l'ensemble des arêtes de dépôt soit globalement homogène. Cette borne inférieure a donc aussi un rôle d'auto-compensation permettant d'encadrer dans un intervalle restreint les longueurs des arêtes : les valeurs hors de cet intervalle sont transformées de sorte que leur nouvelle longueur soit incluse dans cet intervalle.

Il s'agit d'une précaution dont l'intérêt est double. Premièrement, cela permet de réduire le nombre de points par unité de longueur au cours du calcul de la trajectoire et donc réduire à la fois l'espace en mémoire nécessaire et le temps de calcul sans compromettre la qualité globale de discrétisation. D'autre part, dans le cas d'une combinaison avec la rétroaction, cela garantit l'obtention d'une trajectoire finale de discrétisation relativement uniforme facilitant l'ajustement uniforme des phases d'accélération et décélération du robot de fabrication.

### 4.2.2 Répartition des points sur la surface d'entrée

L'étude de la discrétisation des couches apporte des informations quant à l'homogénéité des points répartis au sein de chaque couche et le respect du critère de distance euclidienne. Cependant, elle n'apporte pas d'information directe concernant l'homogénéité de l'ensemble des points de la trajectoire sur la surface qu'elle décrit. L'étude de la répartition des points sur la surface d'entrée fournit une information sur la qualité car cela indique que les points représentent les détails de la surface en toute région.

Les points de la trajectoire se situent sur les couches de cette dernière. Ces couches sont censées être approximativement distantes de  $h$ . De plus, les points au sein d'une même couche sont censés être distants d'une valeur indicative  $d$ . On peut assimiler le produit  $dh$  à une aire infinitésimale qui définit un rectangle recouvrant une partie d'inter-couches dont les sommets sont des points de la trajectoire. Ce modèle est valide si les points de la trajectoire sont uniformément répartis sur cette dernière, ce qui est censé être le cas si la trajectoire a été correctement calculée. C'est dans ce contexte que le nombre de points de la trajectoire en fonction de ce produit peut être étudié (**Figure 99**). À chaque point de la **Figure 99** correspond une simulation de la **Section 4.1**.



**Figure 99** – Répartition moyenne des points de dépôt toutes TPMS confondues

À motif fixé, l'aire totale de la surface est constante. Ainsi, si l'aire infinitésimale diminue, alors le nombre de rectangles infinitésimaux nécessaires pour recouvrir la surface augmente. Cela signifie que le nombre de points de la trajectoire augmente. Pour un motif donné, la loi attendue est donc une fonction inverse dont l'allure dépend de son aire. Les allures générales semblent correspondre aux attentes. Pour vérifier cela, une régression linéaire avec fonction de type puissance est appliquée sur chaque motif (**Figure 100**).

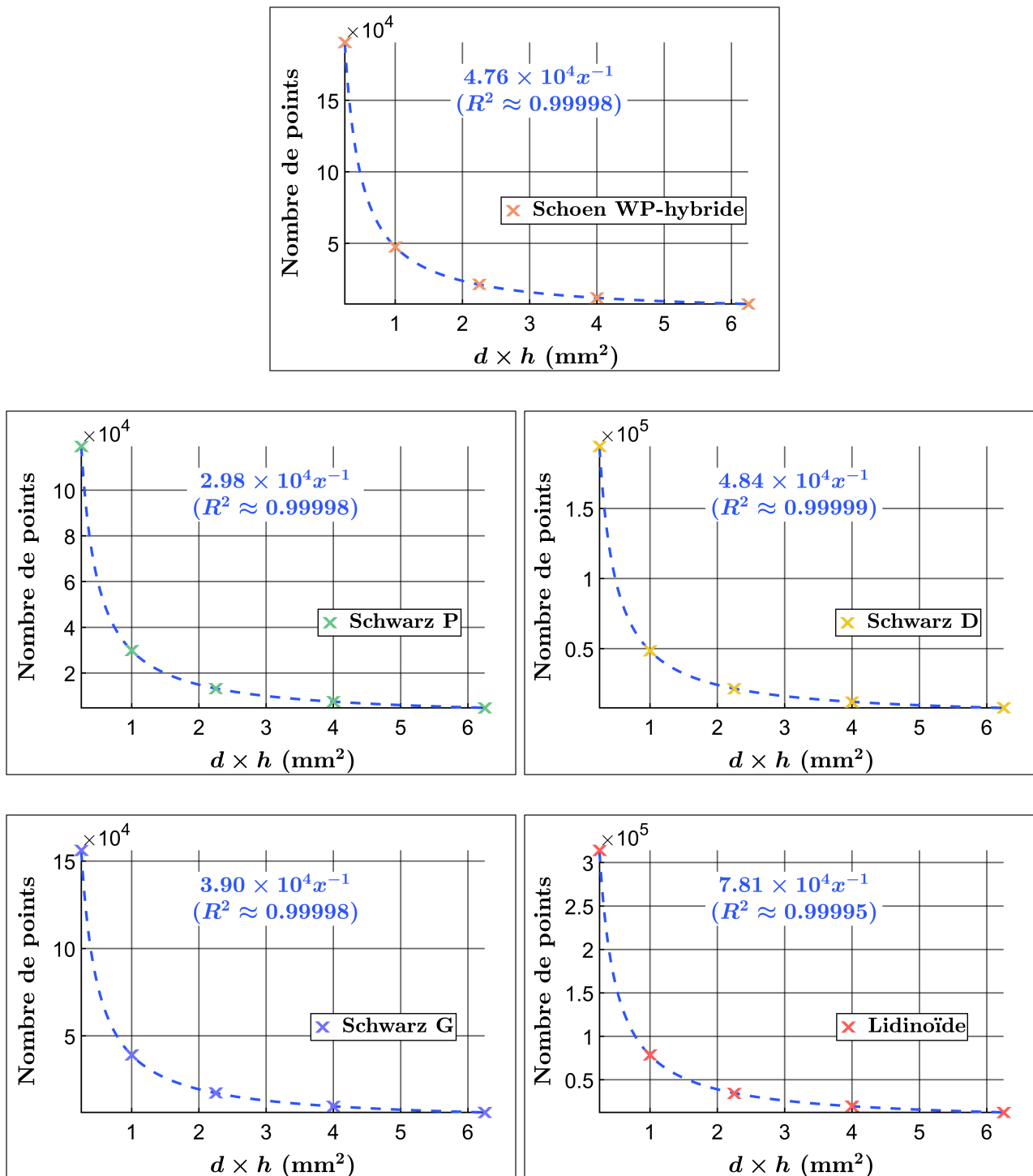
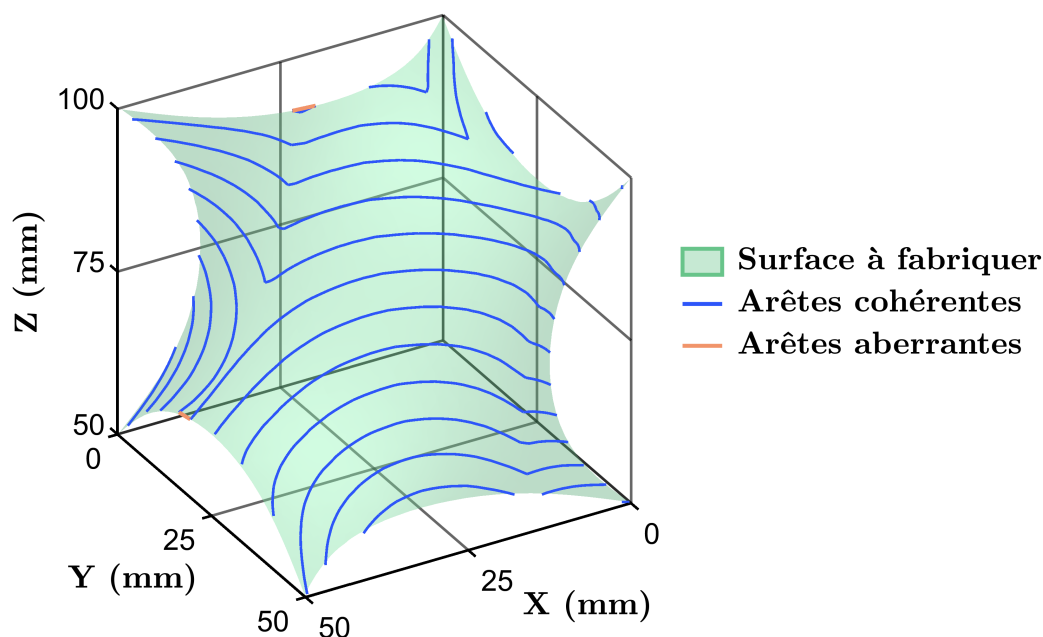


Figure 100 – Répartition moyenne des points de dépôt pour chaque TPMS

Tous les motifs sont effectivement assimilables à des fonctions inverses, ce qui permet de valider l'homogénéité de la répartition des points sur la surface. Cette uniformité constitue un indicateur supplémentaire de la fiabilité des trajectoires calculées, complémentaire à la proportion d'arêtes de dépôt valides. De plus, on note que chaque fonction inverse est associée à un coefficient constant, et qu'il semble augmenter avec la complexité de la sur-

face. Il est ainsi moins élevé pour le Schwarz P, plus élevé pour le Schwarz G, équivalent pour le Schwarz D et le Schoen WP-hybride, et encore plus élevé pour le Lidinoïde. Cela est cohérent avec le fait que plus ce coefficient est élevé, plus la surface possède de points pour une même aire infinitésimale, ce qui signifie que l'aire totale de la surface est plus importante, ce qui est le cas si la TPMS est davantage enchevêtrée sur elle-même.

Finalement, bien que l'analyse de la discrétisation des couches et de la répartition des points de la trajectoire sur la surface d'entrée permettent de quantifier l'uniformité de la dispersion des points et le respect du critère de distance euclidienne, ces études n'apportent pas d'information quant à la cohérence même des connexions entre les arêtes. Ces analyses apportent des informations sur la validité de chaque arête d'une nouvelle couche indépendamment les unes des autres, mais n'évaluent pas la qualité des connexions. L'appréciation des connexions se fait de manière visuelle : de rares artéfacts peuvent parfois être observés en certaines arêtes de la trajectoire (**Figure 101**). Ces artéfacts correspondent à des ajouts d'arêtes inattendus entre nœuds d'une couche. Ils sont dus à une mauvaise reconstruction locale du graphe d'une couche à partir de ses sous-graphes.



**Figure 101** – Arêtes aberrantes sur une trajectoire du Schwarz G  
( $h = 5\text{mm}$ ,  $e = 2,5\text{mm}$ ,  $d = 1,25\text{mm}$ ,  $f = 1,25\text{mm}$ )

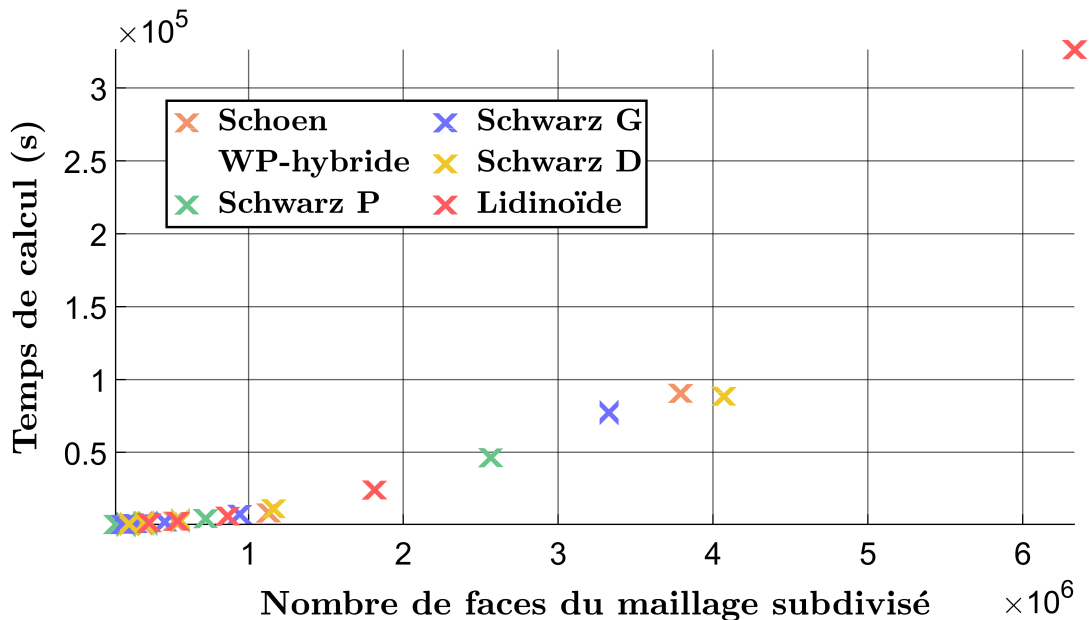
Seul  $f$  influence la présence d'arêtes aberrantes. En effet, la méthode de reconstruction utilisée pour la génération de trajectoire – présentée à la **Sous-section 3.6.4** – procède en deux sous-étapes. Tout d'abord, les sous-graphes sont filtrés, puis des arêtes supplémentaires sont ajoutées. La présence du paramètre de filtrage  $f$  permet d'ajuster le rayon de portée des arêtes potentiellement ajoutées. Une valeur trop faible entraîne un manque d'arêtes de liaison entre les sous-graphes, mais une valeur trop élevée génère des arêtes aberrantes. C'est pour cela que la valeur de  $f$  conseillée est majorée par la taille indicative  $e$  des arêtes du maillage subdivisé et la hauteur de couche  $h$  (**Tableau 10** p140).

### 4.2.3 Évolution du temps de calcul

L'évolution du temps de calcul peut fournir des informations concernant la viabilité de la méthode algorithmique face à l'augmentation de la taille des données d'entrée des routines. Les routines de calcul des couches successives étant appliquées sur le maillage de la surface après sa subdivision, le comparatif des temps de calcul en fonction des tailles des différents maillages subdivisés des TPMS offre une première indication quant à la qualité de l'algorithme. La taille du maillage subdivisé dépend de la taille indicative des arêtes, donc de  $\epsilon$ .

Un deuxième comparatif est proposé en complément du premier : il s'agit de l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre total de points de la trajectoire. Le nombre total de points est une des données de sortie des routines de l'algorithme. Il dépend du nombre de couches et de leur discrétisation, donc de  $h$  et  $d$ . Ainsi, ces deux comparatifs apportent indirectement des informations sur l'influence de la quasi-totalité des paramètres de réglage de l'algorithme. Le dernier paramètre,  $f$ , qui n'est présent que sur la sous-étape d'ajout d'arêtes de la routine de reconstruction du graphe d'une nouvelle couche, n'influence ni la taille du maillage subdivisé ni le nombre de points de sortie.

Le premier comparatif, toutes TPMS confondues, est illustré à la **Figure 102**. Comme prévu, la taille du maillage subdivisé a une influence notable sur le temps de calcul puisque les sous-graphes de toute nouvelle couche de la trajectoire sont déterminés à partir d'intersections sphère-triangle (**Sous-section 3.6.3**). Par conséquent, plus il y a de faces sur le maillage subdivisé, plus il y a d'intersections à calculer.



**Figure 102** – Temps de calcul en fonction de la taille du maillage subdivisé toutes TPMS confondues

## Analyse des résultats et perspectives

Tout d'abord, l'allure semble à première vue indépendante du type de TPMS simulé, et donc être indépendante de la topologie de la surface elle-même. En traçant des courbes de tendance pour chaque motif séparément, on se rend compte que l'allure n'est pas la même (**Figure 103**). En appliquant une régression polynomiale sur chaque courbe, on constate qu'elles peuvent être assimilées à des polynômes du second degré.

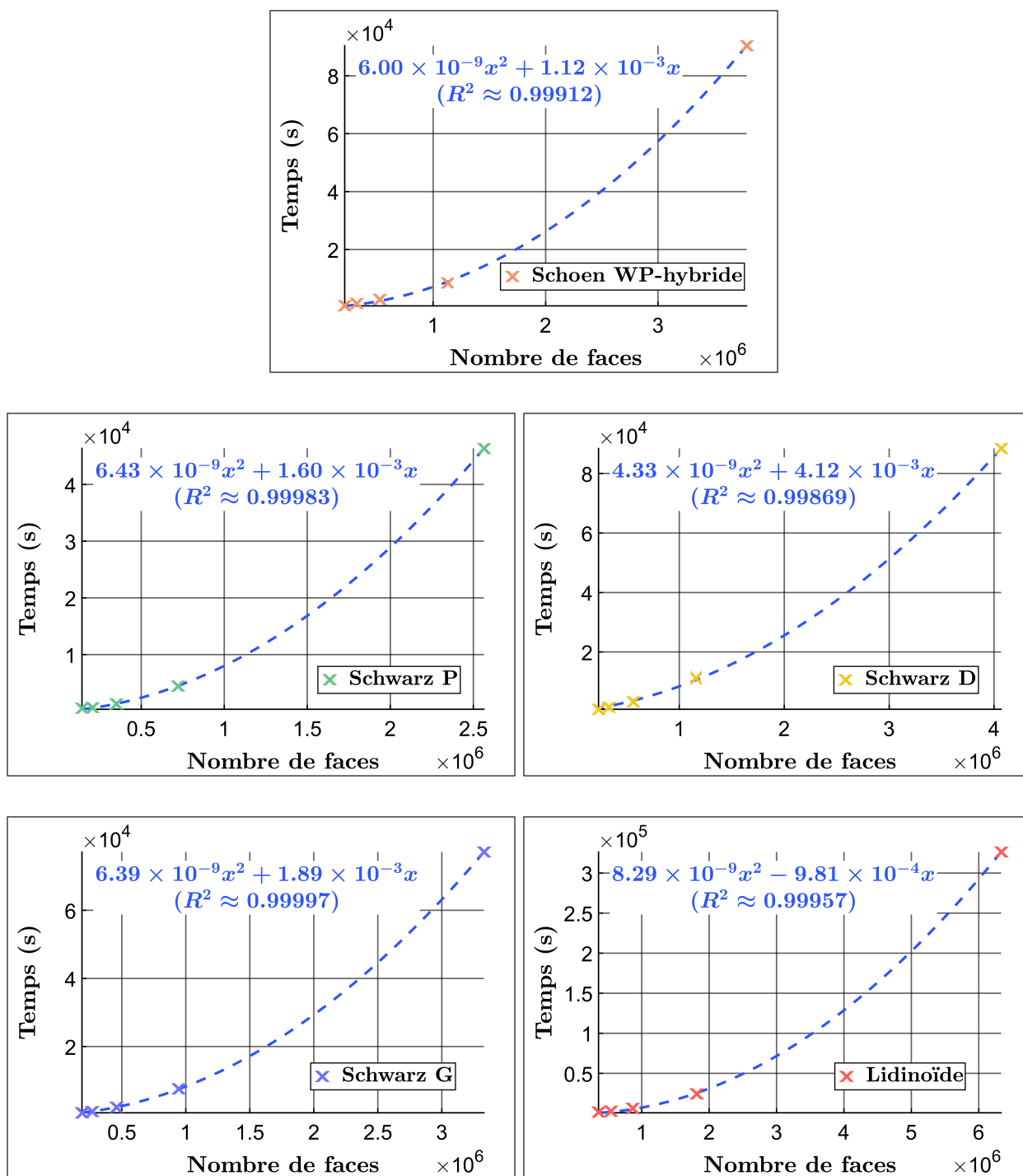
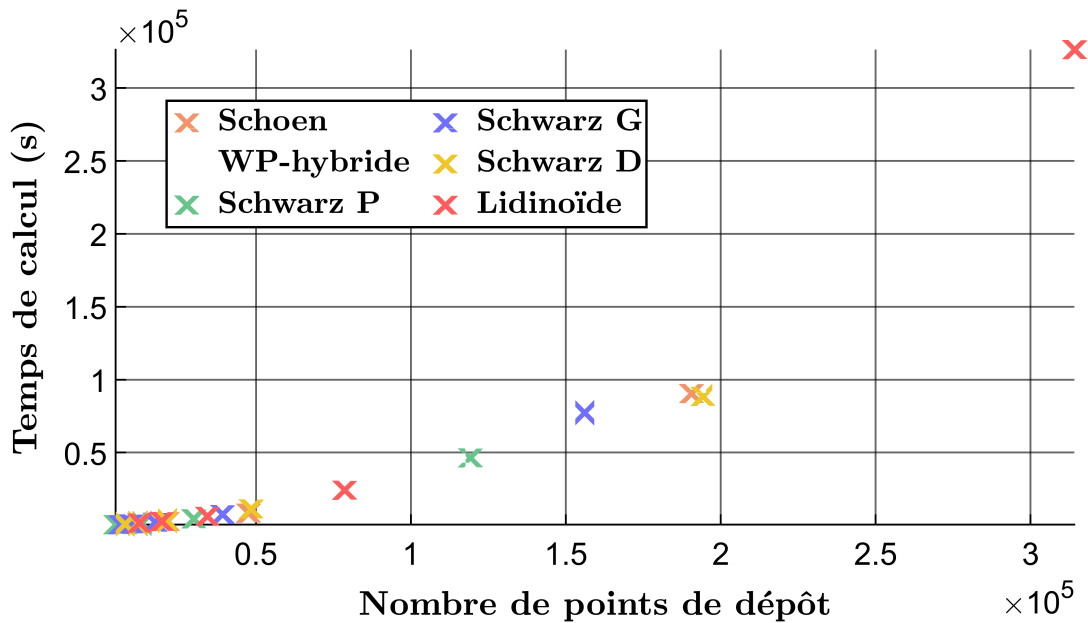


Figure 103 – Modélisations du temps de calcul selon la taille du maillage subdivisé

En théorie, la complexité maximale attendue est de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^2)$  puisque toutes les mailles subdivisées restantes au cours du calcul de la trajectoire sont parcourues puis les mailles sélectionnées dans les voisinages locaux sont à nouveau parcourues pour déterminer les points potentiels d'une nouvelle couche. Ainsi, les polynômes du second degré issus des régressions sont cohérents avec la complexité de type  $\mathcal{O}(n^2)$  attendue.

Ensuite, on constate que le temps de calcul est beaucoup plus élevé pour le Lidinoïde. Sa complexité géométrique globale est plus élevée que les autres surfaces. Or, le Schwarz P a la deuxième loi d'évolution la plus forte, alors qu'il s'agit de la TPMS la moins complexe parmi celles sélectionnées. Enfin, le Schwarz D a la loi d'évolution la plus lente. Cela est dû à l'hétérogénéité des maillages initiaux des TPMS. En effet, ces derniers sont obtenus par des méthodes de niveaux usuelles à partir de leurs équations approximatives. Pour ce faire, l'équation est échantillonnée à des intervalles de niveaux réguliers le long de chaque coordonnée cartésienne. Or, cela ne permet pas l'obtention de mailles homogènes pour les surfaces présentant des variations locales importantes de courbure car en de telles régions, des faces beaucoup plus petites que les autres sont générées pour obtenir une représentation fiable de la surface. Après la subdivision, ces faces gardent un ordre de grandeur plus petit que les autres faces. Le Schwarz D présente les variations locales de profil les plus fortes parmi toutes les TPMS utilisées. Par conséquent, son maillage initial est très hétérogène. Ainsi, bien que le nombre de mailles soit plus élevé, beaucoup se retrouvent inutilisées et directement supprimées du maillage restant lors des sélections de voisinage.

Le deuxième comparatif – temps de calcul et nombre de points de dépôts – est illustré à la **Figure 104**. La tendance est similaire à celle du premier comparatif (**Figure 102**). Le nombre de points sur la trajectoire informe sur la topologie de la surface.



**Figure 104** – Temps de calcul en fonction du nombre de points de la trajectoire toutes TPMS confondues



En effet, une surface enchevêtrée sur elle-même aura tendance à avoir une trajectoire avec plus de points qu'une surface moins dense. Les régressions polynomiales par motif sont représentées à la **Figure 105** : les constats concernant l'évolution du temps de calcul du premier comparatif sont les mêmes, et donc les conclusions transposables.

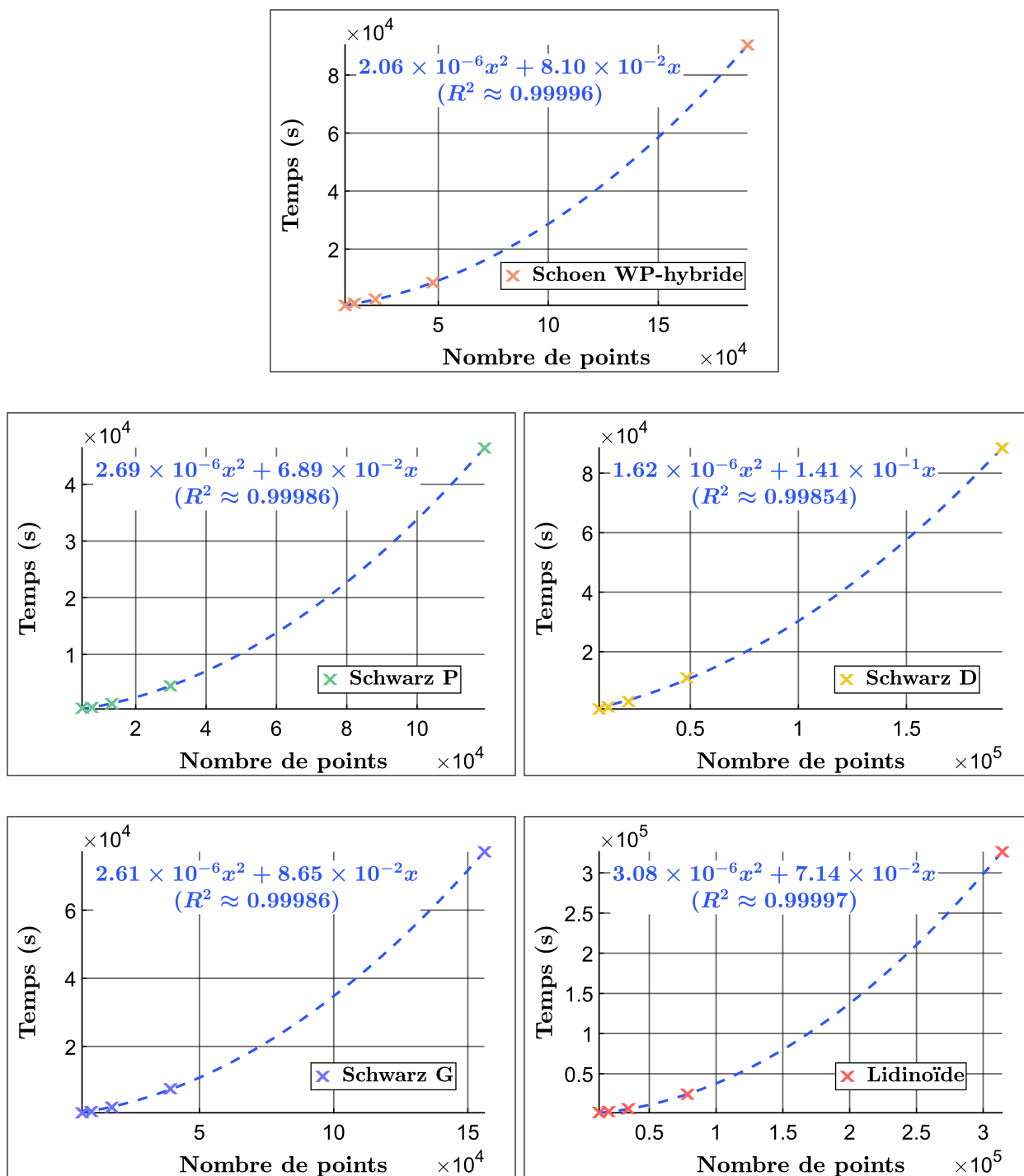


Figure 105 – Modélisations du temps de calcul selon la quantité de points de dépôt

La transposabilité des conclusions des deux comparatifs est appuyée par leur représentation sur de mêmes courbes tridimensionnelles (**Figure 106**). Ainsi, la loi d'évolution du temps de calcul dépend de la forme de la surface donnée en entrée et de l'homogénéité de la taille des faces du maillage subdivisé. Puis, à maillage subdivisé d'arêtes de taille uniforme, le temps de calcul augmente avec l'enchevêtrement de la surface sur elle-même.

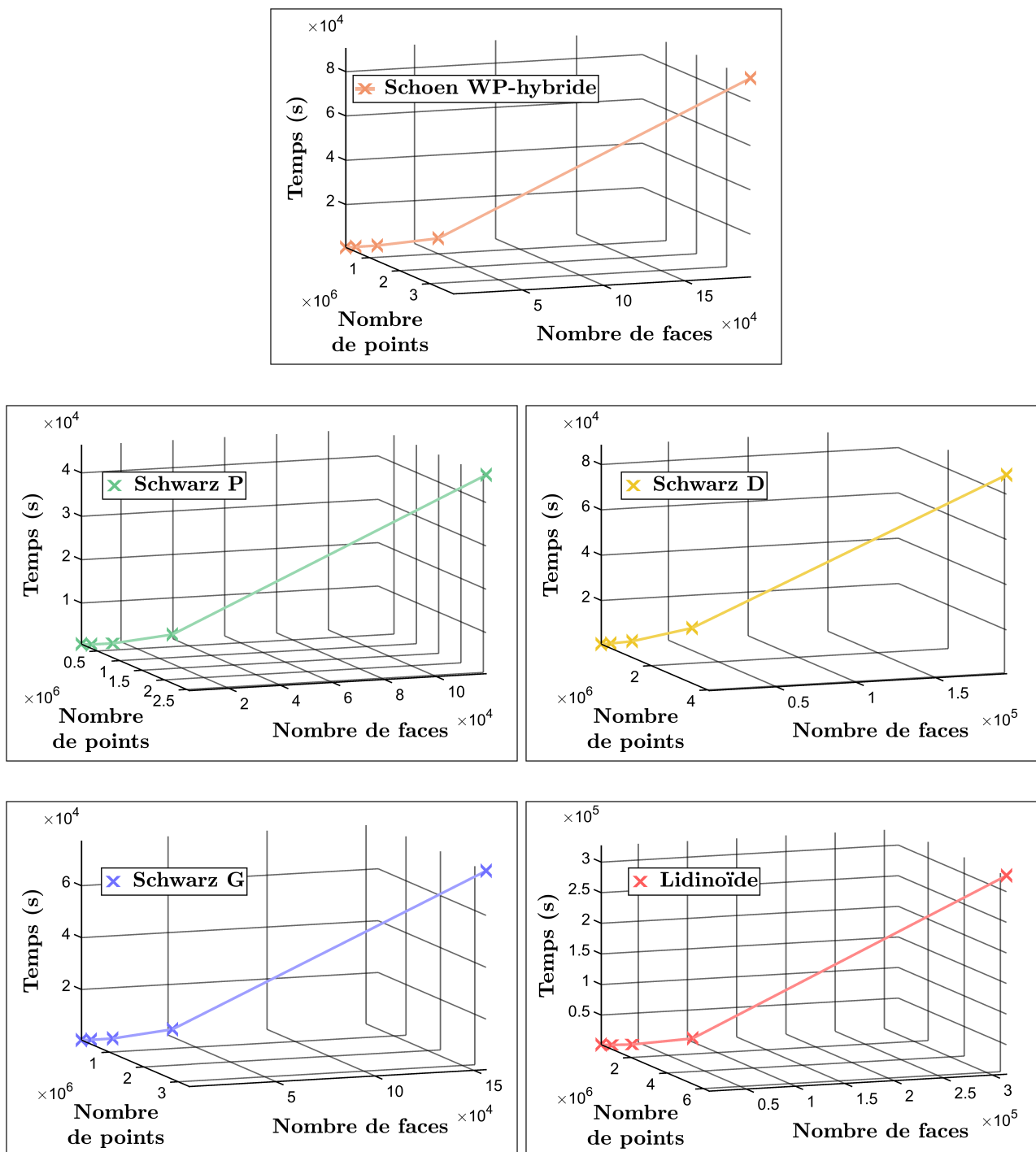


Figure 106 – Temps de calcul en fonction de la subdivision et de la discrétisation

Enfin, notons que les valeurs de temps de calcul sont fournies à titre indicatif uniquement. En effet, comme précisé en introduction du **Chapitre 3**, l'algorithme a été implémenté en MATLAB. Ce langage n'est pas optimisé pour le calcul rapide de trajectoire, mais propose de multiples outils de visualisation qui constituent un réel gain de productivité lors du développement d'un algorithme. Les bibliothèques graphiques disponibles sont un réel avantage qui facilite l'affichage des étapes consécutives de calcul pour la résolution de bugs en vue de la construction d'un algorithme complexe et robuste. Ainsi, ce sont les tendances d'évolution du temps de calcul et non pas les valeurs elles-mêmes qui sont discutées. Il est possible d'envisager une réduction drastique du temps de calcul en adaptant le code à des langages de programmation plus adaptés.

Le langage MATLAB ne fait pas naturellement appel à la carte graphique pour les effectuer, et ne permet donc pas d'envisager des calculs en parallèle pour réduire le temps d'exécution des routines de l'algorithme. Des protocoles de communication avec les cartes graphiques de type NVIDIA, développés en se basant sur les bibliothèques issues de la technologie *Compute Unified Device Architecture* (CUDA), sont disponibles en MATLAB. Cependant, ces bibliothèques ont été initialement développées pour les langages C# et C++ qui, par leur nature de langage de bas niveau compilé, sont davantage adaptés à l'utilisation de la carte graphique. En particulier, l'utilisation de la carte graphique en MATLAB n'est pas permise pour des variables imbriquées dans deux boucles itératives, même si les itérations sont indépendantes. Or, les routines de l'algorithme font appel à des boucles itératives imbriquées, ce qui ne rend donc pas l'utilisation du calcul sur carte graphique envisageable en MATLAB pour une telle application.

L'adaptation des routines en C# ou C++ permettrait d'envisager l'utilisation directe des bibliothèques CUDA pour ajouter des options de calcul en parallèle. De plus, la compilation de ces deux langages accélère naturellement les calculs par rapport aux langages interprétés, dont le MATLAB fait partie. De manière générale, tout algorithme de taille conséquente destiné à être implémenté sur un logiciel est développé en deux phases. La première consiste à développer les routines principales sur un langage de haut niveau pour un développement plus rapide et optimiser la résolution des bugs. Puis, une fois que les routines sont validées, elles sont adaptées sur un langage de plus bas niveau. Les langages de bas niveau ont l'avantage d'être plus rapides et offrir davantage de possibilités d'optimisation de compilation hardware. Cependant, beaucoup plus de temps de programmation serait nécessaire pour valider la viabilité des routines si ces dernières étaient directement écrites en langage de bas niveau en raison de leur niveau d'abstraction et la lisibilité de leur syntaxe.

Une fois le fonctionnement de la méthode algorithmique validée, il est donc hautement recommandé de la développer en C# ou C++ en vue de l'implémentation dans un logiciel de CAO ou FAO. Le parallélisme peut être utilisé pour des tâches indépendantes exécutées en mode multithread. Une piste d'adaptation de l'algorithme pour du parallélisme consiste à envisager une division de chaque couche précédente en plusieurs tronçons indépendants pour le calcul d'une nouvelle couche et de développer une routine de raccord des tronçons adjacents de la nouvelle couche par filtrage et recollement. Pour assurer une cohérence de raccord, les tronçons de la couche précédente pourraient comporter une zone commune.

## 4.3 Versatilité de l’algorithme

L’objectif de cette section est de mettre en avant les possibilités offertes par l’algorithme en termes de types de surfaces et de conditions initiales pièce-substrat en vue d’une combinaison à de la rétroaction pour le calcul d’une trajectoire finale. Quatre aspects sont abordés :

- La propagation de trajectoire (**Sous-section 4.3.1**) ;
- Les complexités de surfaces (**Sous-section 4.3.2**) ;
- La combinaison pièce-substrat (**Sous-section 4.3.3**) ;
- La prédisposition à la rétroaction (**Sous-section 4.3.4**).

La première illustration de la versatilité de l’algorithme concerne les différentes directions de propagation prises en charge. Rappelons que la génération de trajectoire ne suit pas une direction globale, ce qui permet sa propagation systématique. Ainsi, une trajectoire calculée peut se propager de manière radiale ou dans des directions multiples, conférant ainsi une grande adaptabilité aux diverses situations rencontrées.

La complexité topologique des surfaces prises en charge constitue le deuxième aspect évalué. Une surface quelconque peut présenter des complexités locales caractérisées par la présence de trous, d’entrelacements ou de non-connexités locales. L’algorithme est capable de prendre en compte ces spécificités indépendamment de leur densité, forme et lieu.

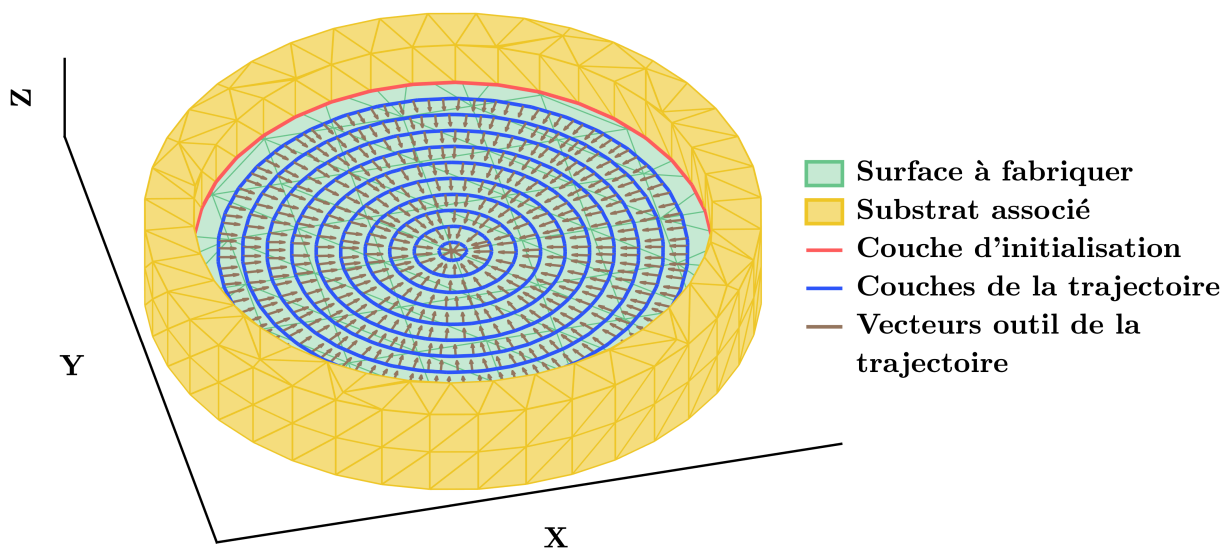
Puis, la versatilité est étudiée vis-à-vis de la combinaison pièce-substrat. Les combinaisons peuvent être quelconques. Le substrat et la surface peuvent être constitués de plusieurs morceaux non connexes. La prise en charge d’une combinaison pièce-substrat arbitraire offre des possibilités d’application pour de la réparation de pièces ayant subi une rupture quelconque.

La prédisposition à la rétroaction est le dernier critère d’examen de la versatilité de la méthode de génération de trajectoire. Les enjeux liés à la rétroaction et la priorisation des régions de travail sont rappelés. Puis, des simulations supplémentaires illustrent l’efficacité de l’algorithme lorsque l’ordre des régions de travail est priorisé.

### 4.3.1 Propagation de trajectoire

Comme souligné à la **Section 1.4**, l’algorithme de génération de trajectoire se différencie des méthodes usuelles par son émancipation de la recherche de direction globale avant calcul des couches. Cela permet d’envisager des recouvrements de surface à la géométrie quelconque et des couches d’initialisation arbitraires. En effet, le choix initial d’une quelconque direction de propagation présuppose d’une part que cette direction existe et est unique, ou tout du moins que la surface puisse être décomposée en sous-régions primitives dites “entités” pour lesquelles une telle direction existe. Or, ne considérer que des surfaces constituées d’un ensemble d’entités primitives réduit les possibilités de géométries.






Les TPMS sont notamment un exemple d'ensemble de géométries pour lesquelles une quelconque décomposition n'est pas permise de par leur complexité topologique. D'autre part, l'absence de direction de propagation unique n'implique pas que la surface présente une géométrie complexe. C'est le cas par exemple d'une trajectoire sur un disque plan dont les couches successives sont des cercles concentriques à ce même disque de plus en plus petits (**Figure 107**). Ce cas illustre l'adaptation de l'algorithme pour remplissage de surface interne [191]. Dans une telle configuration, la propagation de trajectoire est radiale, et donc il n'y a pas de direction d'empilement unique. En raisonnant sur des considérations locales, l'algorithme procède de proche en proche sans avoir besoin d'une direction de progression. Cela permet une génération systématique de couches de recouvrement.

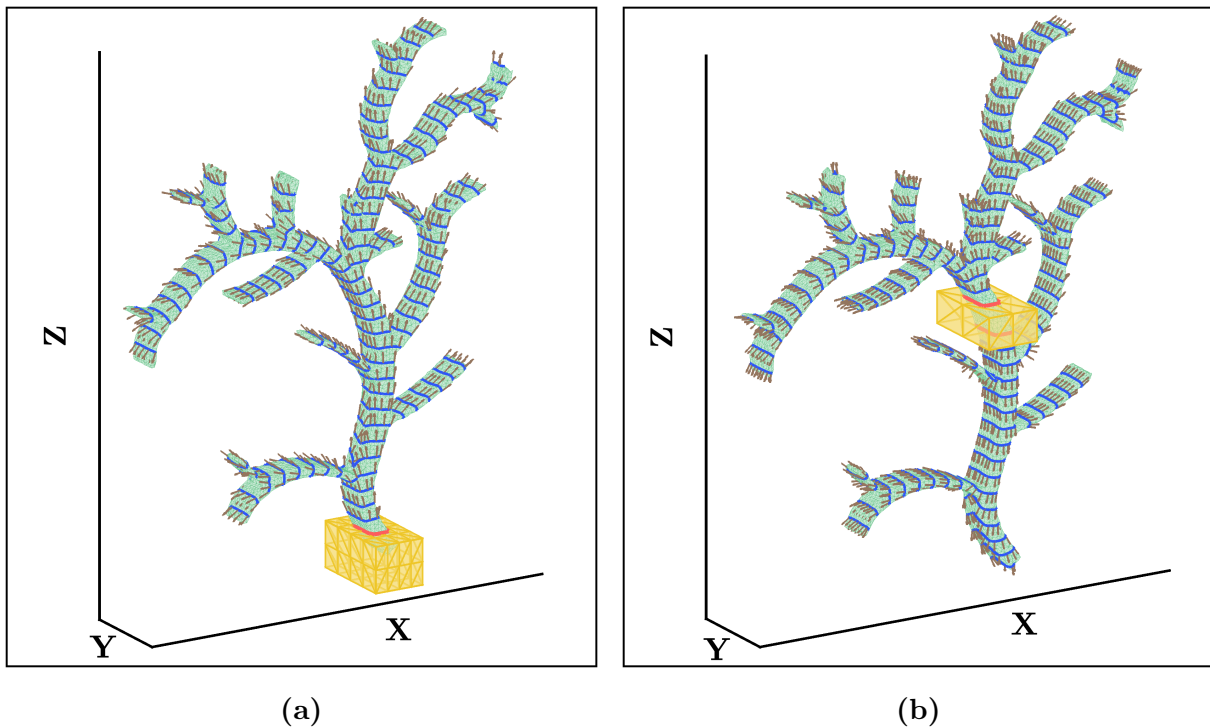


**Figure 107** – Propagation de trajectoire radiale sur un disque

Ainsi, considérer uniquement les voisinages locaux permet de générer la trajectoire de recouvrement dans des directions quelconques. Cette propriété témoigne de la versatilité de l'algorithme face aux variations de conditions initiales à géométrie et substrat donnés. La méthode développée tire avantage des modes de propagation de fronts d'onde des géodésiques qui permettent de recouvrir toute surface connexe aux points sources indépendamment de sa géométrie, mais se différencie par sa capacité à générer des couches vérifiant le critère de distance euclidienne pièce-outil constante qui nécessite de considérer les coordonnées entre points depuis l'espace de plongement de la surface.

Par conséquent, la méthode est indépendante du type de propagation. Premièrement elle prend en charge les mêmes surfaces que celles traitées avec des directions de propagation usuelles tels les tranchages par niveaux de  $Z$  ou par sphères concentriques et les courbes guides sur des tronçons de surface homéomorphes à des cylindres ouverts. Deuxièmement, elle prend en charge toute multiplicité de direction ou tout sens de propagation imaginable à la connaissance seule de la couche d'initialisation quelle qu'elle soit. Cela signifie que, pour une même géométrie de pièce et un même substrat, la méthode de génération est en mesure d'adapter le chemin de recouvrement à leur position relative (**Figure 108**).

- |   |  |
|---|--|
|  Surface à fabriquer     |  Couches de la trajectoire        |
|  Substrat associé        |  Vecteurs outil de la trajectoire |
|  Couche d'initialisation |  |

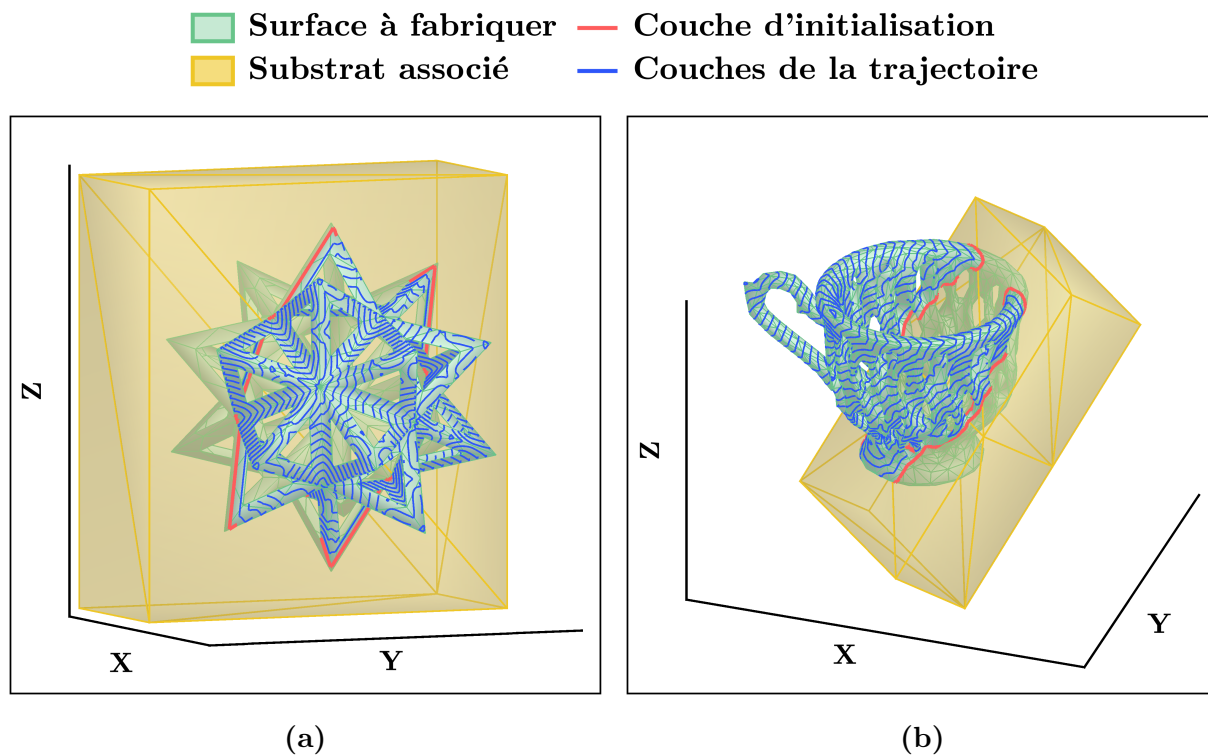


**Figure 108** – Différents types de propagation multi-directionnelle sur un arbre [192]  
 (a) Propagation mono-sens (b) Propagation multi-sens

### 4.3.2 Complexités de surfaces

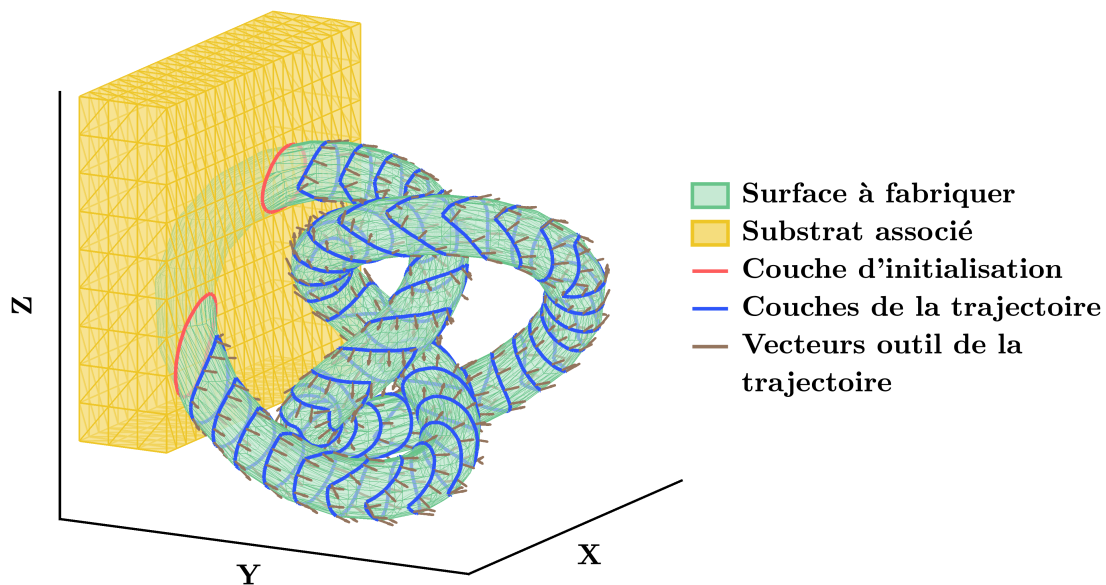
La génération de trajectoire par considérations locales offre aussi davantage de possibilités en termes de complexité topologique des surfaces prises en charge. La complexité peut se manifester de différentes manières, telles que la présence de trous, d'enchevêtrements, de non-connexités locales. Ces particularités peuvent rendre la génération de trajectoire sur une surface difficile car il s'agit de zones de distorsion des flux géodésiques, donc des zones d'altération de propagation globale de trajectoire comme mis en avant à la **Section 1.3**. En calculant la trajectoire exclusivement à partir de constats locaux, les considérations globales ne sont plus nécessaires et les complexités de géométrie ne sont plus un obstacle, ce qui ouvre des possibilités vers de nouvelles gammes de géométries, dont en particulier les structures singulières issues de l'optimisation topologique.

Premièrement, la **Figure 109** présente deux simulations démontrant la robustesse de l'algorithme vis-à-vis de la prise en charge des trous sur la surface. Cela ouvre des possibilités d'application de la méthode pour des structures poreuses. Les couches générées contournent les trous de la surface. La routine de reconstruction des sous-graphes des couches n'ajoute pas d'arête entre les points de part et d'autre des frontières des trous s'ils ne sont pas localement connexes, c'est-à-dire s'ils ne sont pas connexes sur la restriction de la surface présente dans les sphères de voisinage centrées en ces mêmes points. Cette routine prend ainsi en charge les embranchements et jonctions de couches.



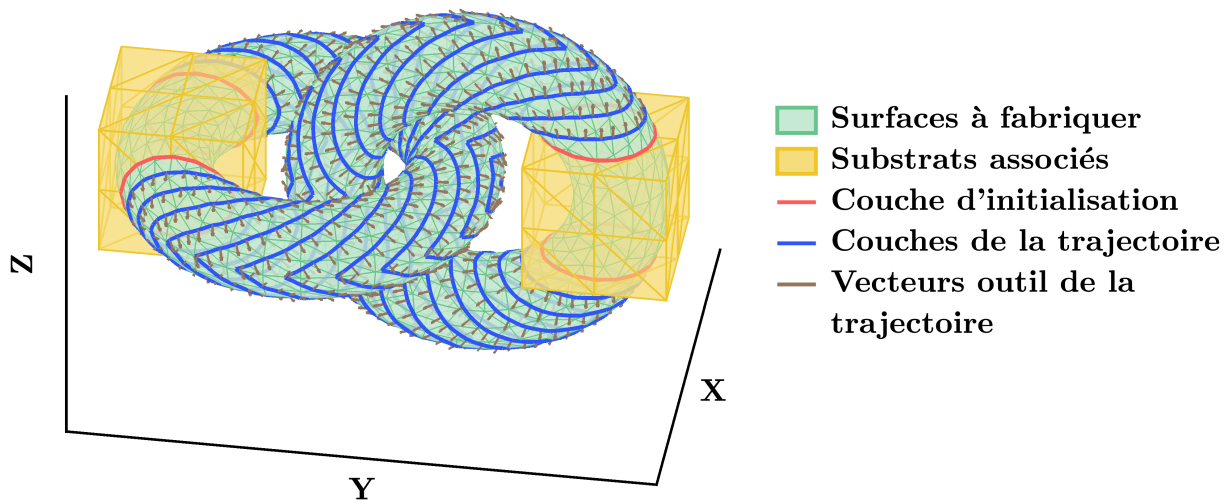
**Figure 109** – Trajectoires sur des surfaces à trous multiples  
 (a) STL-C (b) Tasse à trous allongés [193]

Deuxièmement, la **Figure 110** illustre un cas d'application sur une surface dont le squelette global est replié sur lui-même. La prise en charge de l'enchevêtrement est ainsi effective à toutes les échelles de voisinage : voisinages réduits comme dans le cas TPMS ou voisinages larges uniquement comme dans le cas des nœuds.



**Figure 110** – Trajectoire sur un nœud enchevêtré [194]

Enfin, la **Figure 111** témoigne de l'adaptation de la méthode de génération de trajectoire aux surfaces d'entrée constituées de plusieurs entités non connexes. Il s'agit d'une conséquence directe de la prise en charge de l'enchevêtrement à toutes les échelles de voisinage, où la connexité est évaluée dans le voisinage de taille maximale englobant toutes les composantes connexes de la surface d'entrée.



**Figure 111** – Trajectoire sur deux tores non connexes imbriqués

### 4.3.3 Combinaison pièce-substrat

La prise en charge de surfaces d'entrée non nécessairement connexes peut être élargie aux substrats, qui peuvent être eux aussi non connexes puisque seule la nature de l'intersection pièce-substrat est nécessaire pour déterminer entièrement les conditions initiales de propagation de la trajectoire. Cette intersection est déterminée par la combinaison pièce-substrat, c'est-à-dire les formes et les positions relatives de la pièce et du substrat.

La considération de la combinaison pièce-substrat constitue une contribution majeure puisqu'elle est au centre du systématisme de la méthode de génération de trajectoire. Elle traduit le fait que la complexité de la trajectoire n'est pas uniquement due à celle de la surface, mais aussi à celle de l'interface entre la surface et son substrat. Cela met aussi en avant le bridage que constitue la recherche d'une direction de propagation globale de la trajectoire avant même son calcul au regard de la géométrie de la pièce uniquement, puisque cette trajectoire varie en fonction de la combinaison pièce-substrat.

La dépendance de la complexité de la trajectoire à la nature de la combinaison pièce-substrat est mise en avant à la **Figure 112** pour le cas d'une surface à la topologie simple et un substrat à la structure plus élaborée. La non-connexité du substrat induit une intersection pièce-substrat de forme intriquée quand bien même la surface dont on souhaite générer une trajectoire est une entité primitive.



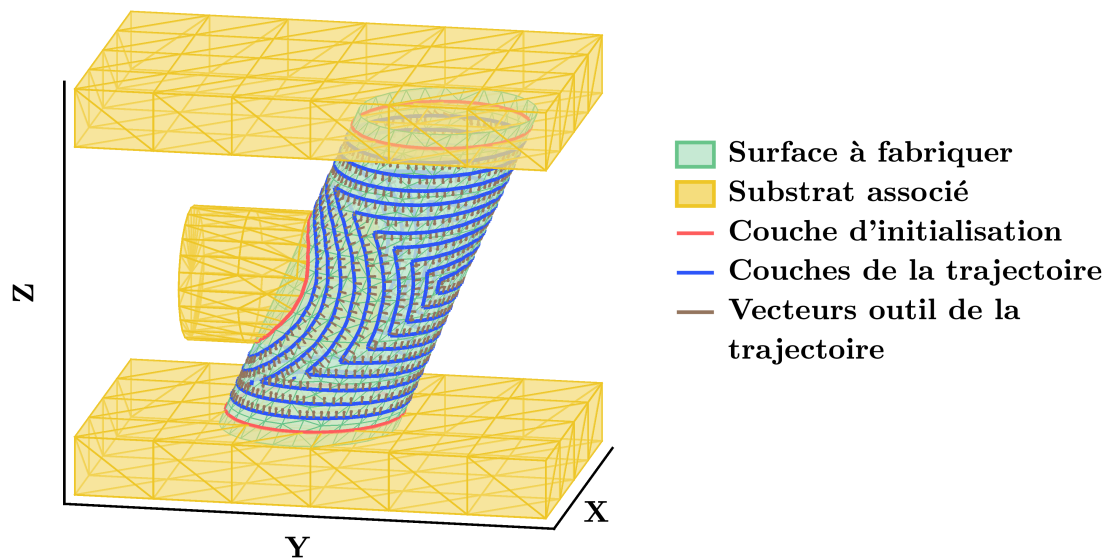


Figure 112 – Trajectoire sur un cylindre penché associé à un substrat non connexe

En prenant en charge toute combinaison pièce-substrat arbitraire, l'algorithme offre aussi une grande flexibilité sur les applications envisageables, dont la réparation de pièces mécaniques (Figure 113). Cette opération est une possibilité envisagée pour la fabrication additive, et constitue une des motivations d'utilisation des procédés DED.

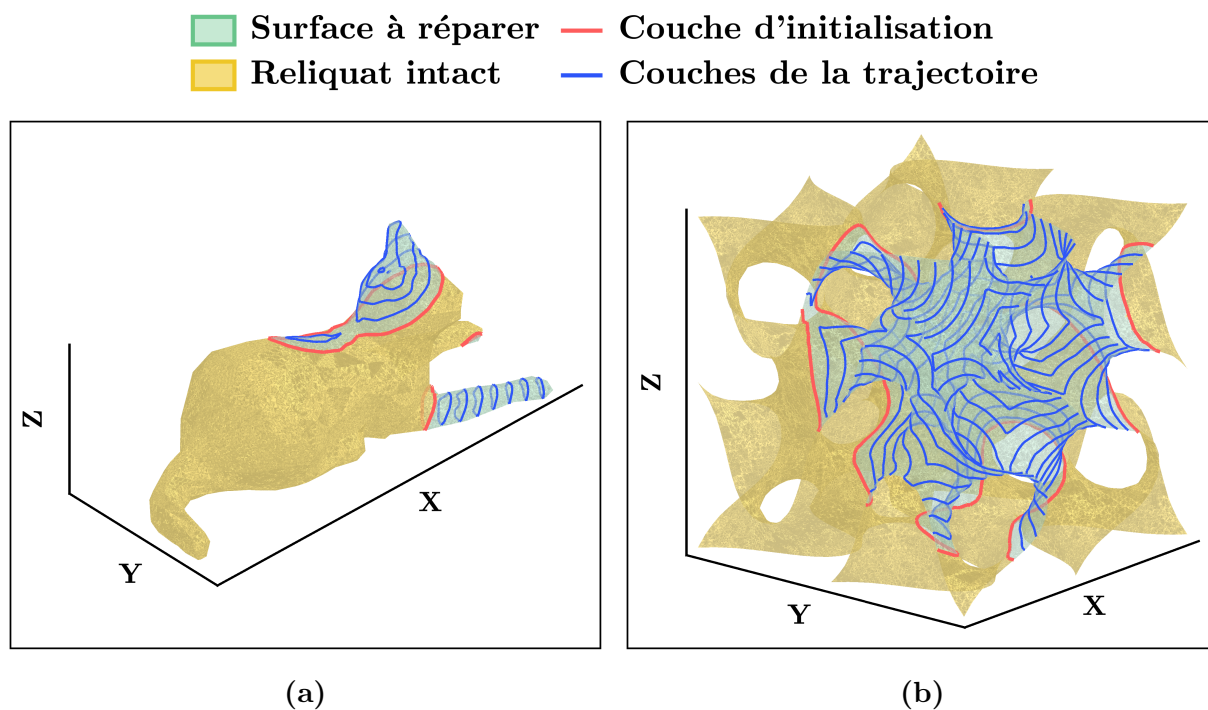


Figure 113 – Trajectoires de réparation de pièce  
 (a) STL-A (b) Fischer-Koch S

En effet, la réparation de pièce consiste à rajouter de la matière pour combler le manque issu d'une rupture de la pièce. Or, les ruptures peuvent être de natures variées, donc quelconques. L'ajout de matière sur une pièce endommagée est réalisé sur les frontières de la rupture, qui peuvent alors être considérées comme les nouvelles conditions initiales de génération de trajectoire. Tout morceau restant de la pièce constitue alors un substrat initial, tandis que les morceaux manquants représentent la surface à fabriquer (**Figure 113**). De la même manière, l'ajout de matière sur une pièce mécanique pour en modifier la fonction, et les fermetures locales d'une pièce par création de couches de hauteur plus petite sont des possibilités prises en charge par la génération de trajectoire.

#### 4.3.4 Prédiposition à la rétroaction

Les trois critères d'examen précédemment discutés démontrent la souplesse d'adaptabilité de l'algorithme pour le recouvrement à distance euclidienne constante d'une surface quelconque associée à une couche d'initialisation quelconque. Cette versatilité offre des perspectives pour l'implémentation de la rétroaction à la génération de trajectoire et ainsi permettre une réorganisation des couches tenant compte de contre-indications quelconques par priorisation des régions. Ces contre-indications peuvent aussi bien être décidées en amont par l'utilisateur, qu'issues du comportement cinématique et dynamique du robot, ou des caractéristiques thermiques du matériau. La rétroaction est donc essentielle pour adapter la trajectoire aux contraintes pouvant survenir au cours de la fabrication.

Rappelons que l'implémentation de la rétroaction ne fait pas partie des travaux de thèse, et qu'elle constitue une perspective d'évolution. La priorisation des régions par rétroaction est illustrée à la **Figure 114**. Elle se veut être induite par l'élaboration d'une file d'attente de zones recouvertes successivement par appel de la méthode de génération de trajectoire. La forme et l'ordre dans la file d'attente de ces zones seraient déterminés par des constats physiques dépendant du matériau et de la machine de fabrication.

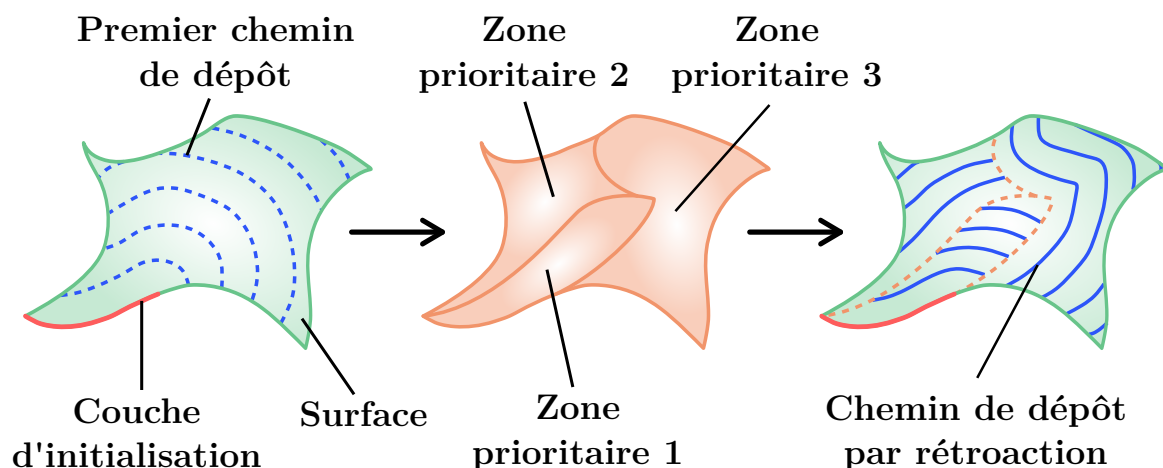
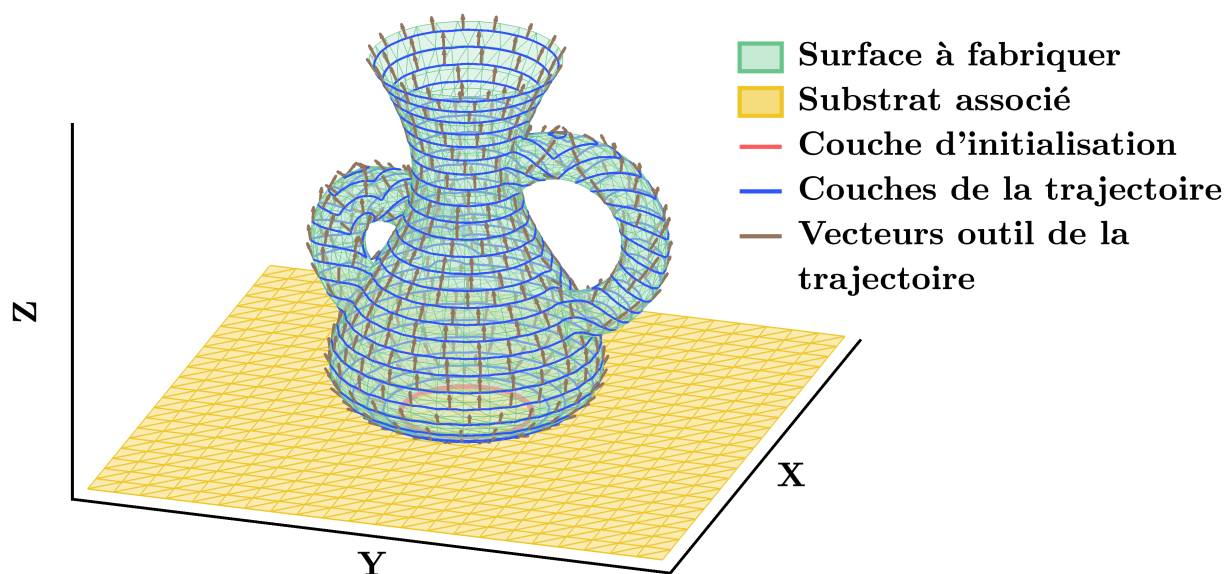


Figure 114 – Priorisation des régions par rétroaction

Enfin, les contre-indications pourraient être évaluées le long du premier chemin de dépôt, calculé pour un recouvrement de la surface entière sans rétroaction. Les constats physiques à l'origine de ces contre-indications peuvent être divers, et dus par exemple à :

- La diffusion thermique pour homogénéiser le refroidissement au cours du dépôt ;
- Des contraintes locales de limites de courses d'axes entre deux points successifs ;
- Un sens d'approche d'outil imposé par la configuration cinématique locale du robot ;
- Des occurrences de collision pièce-outil.

Un ensemble de simulations appliquées sur une même surface fournit un exemple d'application de la rétroaction. La surface choisie est un vase avec des anses. Lors de l'exécution directe de l'algorithme de génération de trajectoire, la surface est entièrement recouverte par des couches à distance euclidienne constante les unes des autres **Figure 115**. Cependant, bien que les couches générées respectent le critère de distance euclidienne, elles ne sont pas directement applicables et nécessitent la connaissance de la machine et du matériau. Tel quel, et comme justifié à la **Sous-section 3.1.3**, le premier chemin de dépôt est valide pour un outil de taille infinitésimale, un robot de dépôt à la cinématique idéale et un temps de dépôt suffisamment lent pour permettre le refroidissement de la pièce.



**Figure 115** – Trajectoire sur un vase sans priorisation des régions

On peut cependant combiner l'algorithme à un choix judicieux des régions de la pièce à fabriquer en priorité pour soulager l'impact de la physique du matériau et du robot, ou éviter les collisions. Les possibilités de priorisation sont diverses par versatilité de l'algorithme, ce qui offre plus de libertés à l'utilisateur. On peut par exemple choisir une priorisation classique où les anses sont réalisées après le corps du vase (**Figure 116**), mais aussi envisager une priorisation plus singulière dans l'objectif de réaliser le vase en deux moitiés par coupe longitudinale (**Figure 117**).

■ Surface à fabriquer    — Couche d'initialisation  
■ Substrat associé        — Couches de la trajectoire

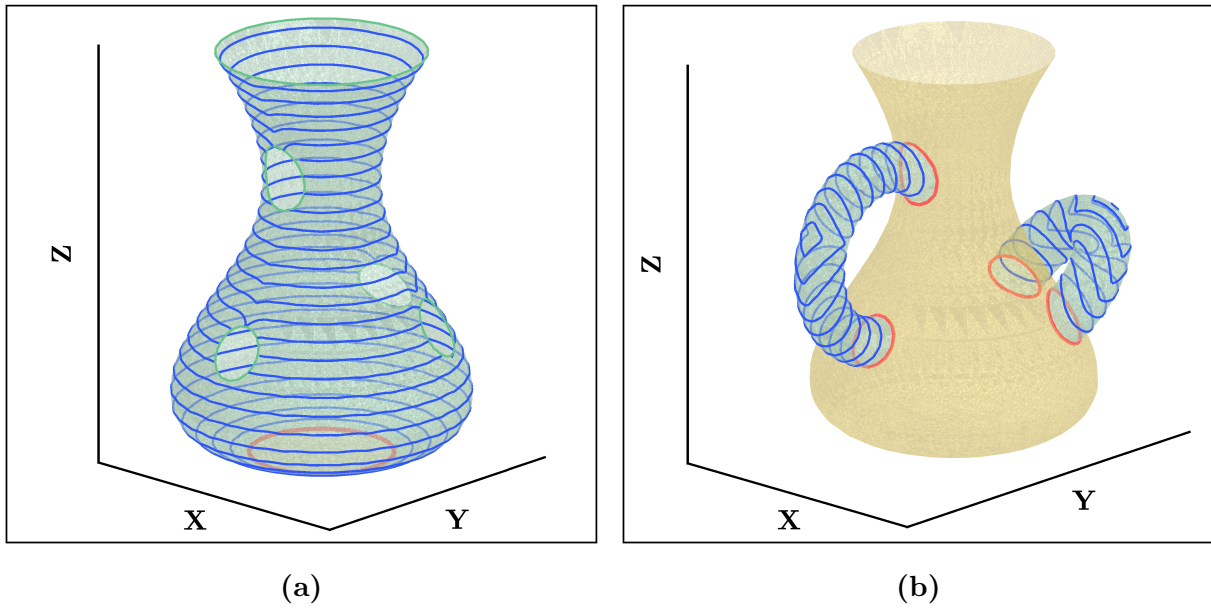


Figure 116 – Trajectoires sur un vase par dépriorisation des anses  
 (a) Corps du vase (b) Anses du vase

■ Surface à fabriquer    — Couche d'initialisation  
■ Substrat associé        — Couches de la trajectoire

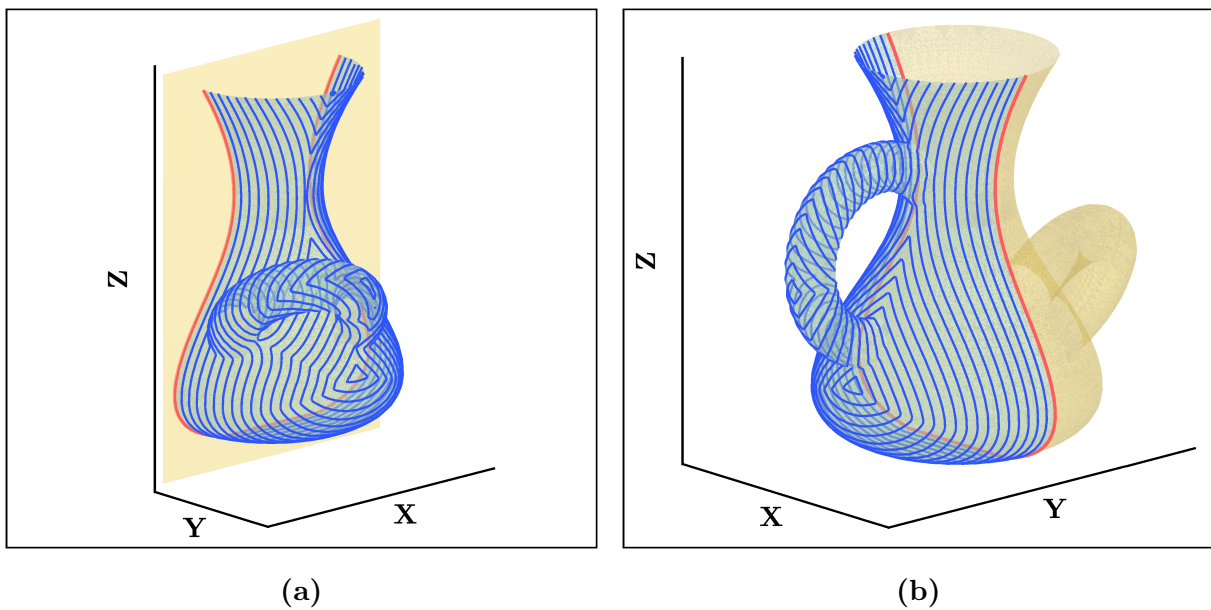


Figure 117 – Trajectoires sur un vase par génération sur moitiés distinctes  
 (a) Première moitié (b) Deuxième moitié

## 4.4 Anticipation de fabricabilité

Pour conclure le **Chapitre 4**, une ultime section est dédiée sur la notion de fabricabilité. Ce concept est un complément permettant d'élargir la rétroaction à la phase de conception numérique sur la chaîne de réalisation d'une pièce mécanique, comme déjà illustré à la **Figure 30** p57 de la **Section 1.4**. En effet, la rétroaction par priorisation se base sur l'apport de contre-indications physiques pour adapter la trajectoire au matériau et à la machine. Cette rétroaction a donc lieu en aval de la chaîne. L'ajout de la rétroaction entre la phase de génération de trajectoire et la phase de conception ajoute un retour d'information en aval de cette chaîne. Son intérêt est double.

Premièrement, elle permet d'ajouter une contribution d'un point de vue purement trajectoiriste sur les choix de conception pour modifier le design de la pièce dans le cas où aucune trajectoire ne conviendrait pour une machine et un matériau donnés. Deuxièmement, cette contribution peut aussi offrir une gamme de critères supplémentaires aux considérations usuelles de résistance aux efforts et de minimisation de masse lors de l'élaboration d'un design par optimisation topologique. Ce deuxième intérêt constitue l'anticipation de fabricabilité. Cette notion est développée suivant quatre axes :

- La présentation des enjeux et la formulation du problème (**Sous-section 4.4.1**) ;
- La limitation de précision par dépôt de couche (**Sous-section 4.4.2**) ;
- La présentation de premiers principes de fabricabilité (**Sous-section 4.4.3**) ;
- La proposition de modèles de fabricabilité (**Sous-section 4.4.4**).

D'abord, la présentation des enjeux fournit des indications supplémentaires sur les perspectives envisageables concernant l'anticipation de fabricabilité. Ces dernières sont détaillées avec des exemples d'applications concrètes. Cette présentation est accompagnée d'une formulation du problème mathématique à résoudre.

Puis, une discussion autour de la limitation naturelle de la précision maximale obtainable par les procédés de fabrication additive par dépôt de couches successives est proposée. Elle permet de mettre en lumière de premiers indicateurs géométriques de fabricabilité d'une surface par procédé de fabrication additive DED.

Ensuite, des premiers principes de fabricabilité sont proposés. Ces derniers résultent d'une synthèse des différents constats évoqués tout au long des différents chapitres de la thèse, et formalisent certaines considérations trajectoiristes qu'il peut être utile de prendre en compte en cas d'implémentation de la rétroaction sur la chaîne de réalisation d'une pièce mécanique, en particulier pour la priorisation de régions.

Finalement, deux types de fabricabilité sont proposés pour illustrer l'anticipation de fabricabilité. Premièrement, l'exigence d'enveloppe caractérise les bornes d'évolution possible de la géométrie de la surface fabriquée à la connaissance de sa hauteur de couche. Deuxièmement, l'exigence de précision fournit une cartographie des lieux de la surface concernés.

### 4.4.1 Enjeux et formulation du problème

Anticiper la fabricabilité d'une pièce présente plusieurs enjeux. Tout d'abord, cela pourrait servir d'outil d'aide à la prise de décision sur la création de designs tenant compte de la difficulté de mise en œuvre de moyens de fabrication. La fabricabilité, si elle peut être estimée, accélérerait la phase de réalisation d'une pièce mécanique en évitant d'avoir à calculer une trajectoire à chaque modification de géométrie de pièce. Elle réduirait donc les délais de conception.

Elle permettrait aussi d'aider sur le choix de la topologie du substrat à géométrie de pièce fixée dans le cas où le cahier des charges offre peu de souplesse sur la modification de la pièce, puisque la trajectoire dépend de la combinaison pièce-substrat comme évoqué à la **Sous-section 4.3.3**.

Enfin, la fabricabilité offrirait une évaluation précise de la conception avant même l'étape de fabrication. Combiné à la versatilité de la méthode de génération de trajectoire qui offre une flexibilité sur les géométries réalisables, la fabricabilité s'inscrirait ainsi dans une logique de prédisposition au prototypage rapide, option fortement attendue pour les procédés de fabrication additive dans le contexte de quatrième révolution industrielle [1].

La difficulté principale sur la notion de fabricabilité est que la trajectoire de fabrication n'est pas prévisible en amont. En effet, comme mis en avant à la **Section 1.3**, la notion d'équidistance d'une couche à une autre n'est pas réciproque, d'où un blocage à prédire la forme des couches avant leur calcul. Cela se traduit par la variation des distances euclidiennes lors d'une déformation (**Figure 118**). Il est donc délicat d'évaluer si une pièce peut être fabriquée avant même de générer sa trajectoire. Par conséquent, tout modèle de fabricabilité a pour vocation de fournir une cartographie au mieux suffisamment fidèle de l'adaptativité d'une pièce à être réalisée par fabrication additive. Un énoncé formel du problème à résoudre lors de l'élaboration de tels modèles est proposé. Il est directement appliqué sur les modèles proposés à la **Sous-section 4.4.4**.

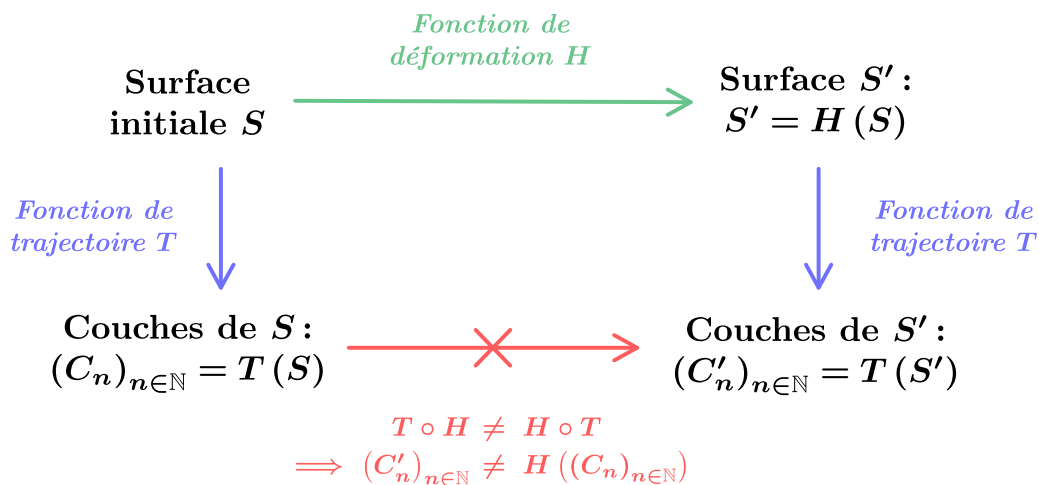


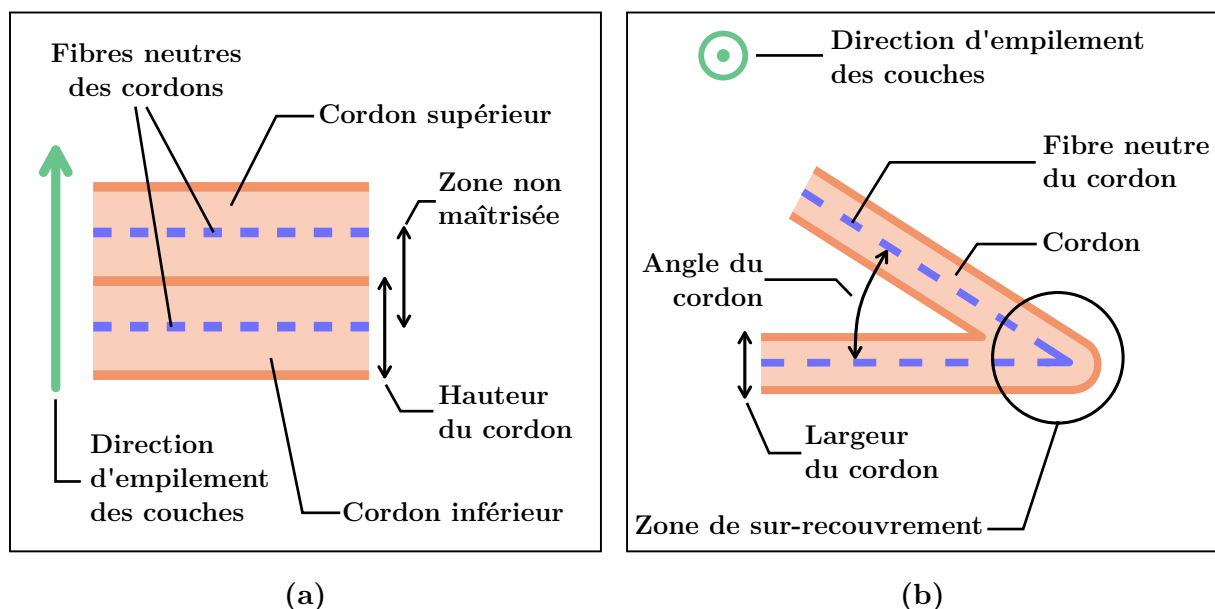
Figure 118 – Obstacle de prédiction d'une trajectoire

**Énoncé.** Soit  $S$  une variété différentielle de dimension deux quelconque plongée dans un espace de dimension trois,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de paramètres et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'applications associées chacune au paramètre de même indice. Chaque application associe à tout point de  $S$  un réel nommé "indicateur partiel". On cherche s'il existe une application combinant ces indicateurs partiels et associant à tout point de  $S$  un réel nommé "indicateur de fabricabilité" représentatif de la tendance statistique qu'un chemin de recouvrement maximal quelconque compatible avec les paramètres de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  passe exactement par ce point, et soit donc situé exactement sur la surface en ce lieu.

#### 4.4.2 Limitation de la précision par dépôt de couches

La précision des procédés de fabrication additive par dépôt de couches est limitée par le manque de contrôle entre les couches successives. En effet, contrairement aux procédés soustractifs, l'outil ne passe qu'une fois à un même endroit, sinon il y aurait collision avec la matière déjà déposée. Cela signifie que l'écart local entre la surface à fabriquer et la surface effectivement fabriquée est conditionné par les dimensions des cordons.

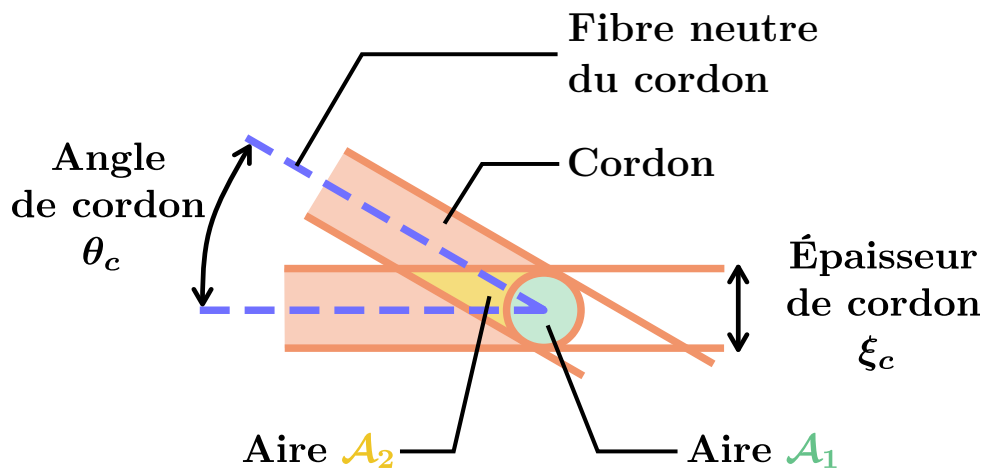
Cela a d'abord pour conséquence que la précision ne peut pas être maîtrisée entre deux cordons. En fixant la hauteur de couche, le niveau de détail dans les directions d'empilement des couches de la pièce est limité (**Figure 119a**). Utiliser une hauteur de couche la plus petite possible améliore le niveau de détail global, mais augmente le nombre de couches, et donc le temps de fabrication. Cela a aussi pour conséquence que la précision peut être limitée le long d'un cordon car sa largeur n'est pas nulle (**Figure 119b**).



**Figure 119** – Limitation du niveau de détail en fabrication additive

(a) Dans la direction d'empilement (b) Le long de la couche

La particularité de la limitation le long des cordons est qu'elle ne dépend pas directement de la hauteur de couche. En considérant la largeur du cordon, la forme de la fibre neutre du cordon est limitée par le fait que le cordon ne doit pas se recouvrir lui-même lors de la phase de dépôt. Sinon, de la matière supplémentaire est déposée, ce qui peut générer des surépaisseurs locales lors de la fabrication. Cela revient à limiter l'angle minimal que puisse réaliser un cordon. Cet angle est contenu dans le plan osculateur local du cordon. Une modélisation de cet angle maximal à partir de la zone de sur-recouvrement du cordon est proposée à la **Figure 120**. Le cordon plan est modélisé comme ayant des parois verticales, et tel que le début et la fin sont des demi-cercles.



**Figure 120** – Modélisation du sur-recouvrement de cordon

Avec le modèle proposé, on peut trouver un angle limite  $\theta_{cmin}$  indépendant de la largeur de cordon en calculant tout d'abord les aires quantifiant le recouvrement avec de la géométrie basique (**Équation 22**) :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \frac{\pi \xi_c^2}{4} \\ \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_c^2}{\sin(\theta_c)} - \mathcal{A}_1 \right) \end{cases} \quad (22)$$

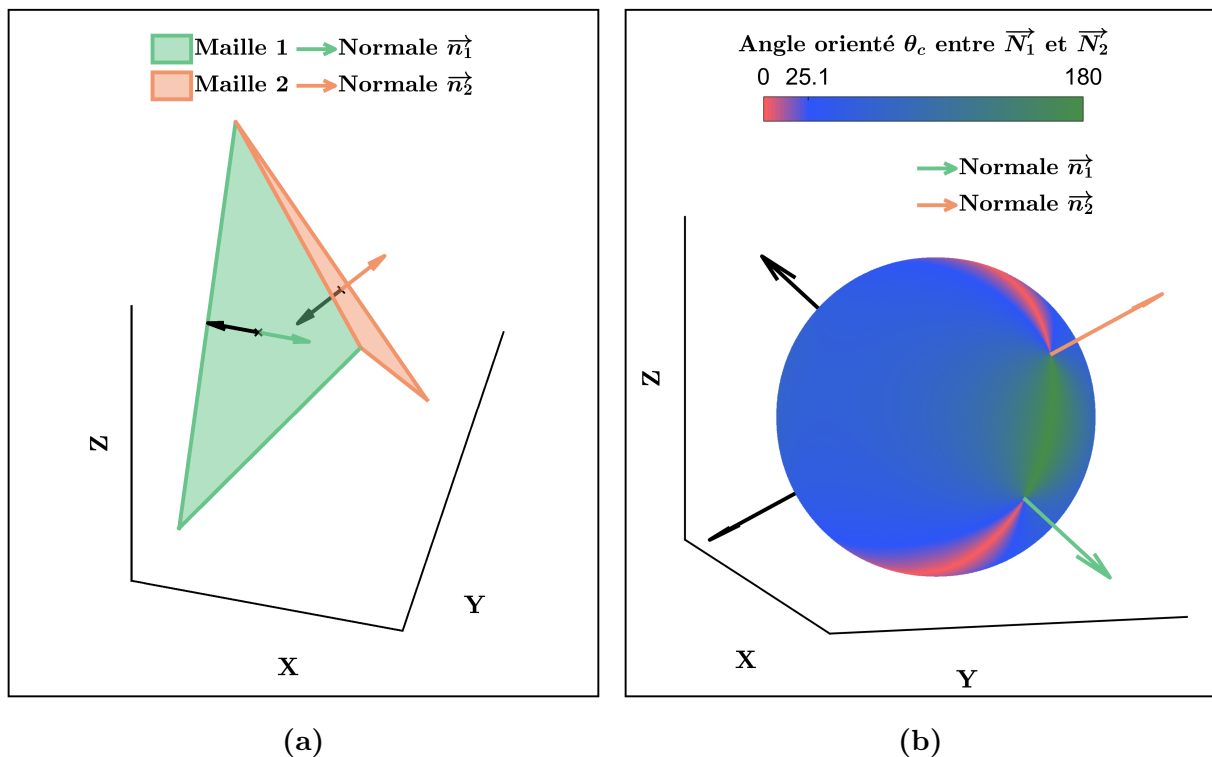
Une condition limite entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  permet de quantifier l'angle maximal de recouvrement. On considère qu'un cordon présente du sur-recouvrement s'il y a plus de sur-dépôt de matière au niveau du coin du cordon que de matière déposée à son sommet :



$$\mathcal{A}_2 < \mathcal{A}_1 \implies \sin(\theta_c) > \frac{4}{3\pi} \quad (23)$$

Notons que par géométrie du problème,  $\theta_c$  est dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ . On peut appliquer la fonction Arc Sinus directement, et on obtient la valeur approximative pour  $\theta_{cmin}$  de  $25,096^\circ$ . Rappelons aussi que la valeur de l'angle obtenu ici est liée au modèle proposé et qu'aucune contribution du matériau n'est prise en compte. Dans la réalité physique, la valeur de l'angle peut être amenée à varier selon les paramètres du procédé et le modèle élaboré [195,196]. L'ajustement de l'angle ne change pas la suite du raisonnement.

Considérons à présent deux mailles quelconques du maillage de la surface à fabriquer qui sont en contact entre elles. Ces deux mailles sont chacune associées à une normale (Figure 121a). Tout cordon passant par le voisinage commun de ces deux mailles correspond à une ligne brisée issue de l'intersection entre les plans associés à ces mailles et un troisième plan. Il existe une infinité de lignes brisées possibles.



**Figure 121** – Influence du maillage sur l'angle théorique des cordons

(a) Mailles locales et plan du cordon (b) Angles de tous les cordons possibles

Le cordon modélisé à la Figure 120 correspond à une de ces lignes brisées. Son angle  $\theta_c$  peut être exprimé à partir des normales aux deux mailles  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  et une normale au plan les intersectant  $\vec{n}_c$ , à condition que  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  soient orientés de part et d'autre de la surface formée par l'ensemble des deux mailles :

$$\begin{cases} \vec{N}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_c \\ \vec{N}_2 = \vec{n}_2 \times \vec{n}_c \\ \theta_c = \widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2} \end{cases} \quad (24)$$

On peut estimer de manière visuelle la proportion statistique de lignes brisées possibles dont l'angle est inférieur à  $\theta_{cmin}$  (**Figure 121b**). Si on représente tous les angles associés à toutes les normales  $\vec{n}_c$  possibles sur une même sphère, on distingue à chaque fois deux types de zones remarquables au niveau des cercles issus de l'intersection entre la sphère et le plan contenant les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ . De manière alternée, entre ces deux vecteurs ou leurs vecteurs opposés, les valeurs augmentent ou diminuent drastiquement. Plus les normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  tendent à être colinéaires, plus les plans des deux mailles tendent à être confondus, et donc plus la proportion de plans de normale  $\vec{n}_c$  dont l'angle de cordon est inférieur à  $\theta_{cmin}$  est petite.

L'allure de cette sphère permet de visualiser la proportion des cordons d'intersection théoriquement valides pour une position relative donnée entre les deux mailles. Deux points diamétralement opposés ont la même couleur car ils sont associés au même plan : les deux vecteurs normaux associés sont opposés. Notons que dans le cas où les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont colinéaires, les deux mailles forment un plan et donc tous les angles des cordons d'intersection sont de  $180^\circ$ . Le cas défavorable où la proportion d'angles inférieurs à  $\theta_{cmin}$  est la plus grande correspond au cas où les plans de chacune des mailles sont orthogonaux.

En conclusion, la précision théorique atteignable en fabrication additive par dépôt de cordons successifs est limitée par la hauteur de couche choisie et la largeur des cordons. Pour limiter le sur-recouvrement au niveau des angles de cordon, un angle minimal peut être imposé. Cet angle minimal contraint directement les variations de rayon de courbure dans le plan osculateur local du cordon. La proportion d'angles acceptables de cordons localement possibles est un premier indicateur partiel permettant de caractériser la fabricabilité théorique d'une pièce (**Sous-section 4.4.1**). Notons qu'elle n'est pas un indicateur complet de fabricabilité, puisqu'il permet d'évaluer les proportions d'angles valides en chaque point d'une surface, mais pas de déterminer l'angle effectif en chaque point avant le calcul de la trajectoire pour une combinaison pièce-substrat et des dimensions de cordon données. Des principes plus généraux sont énoncés à la **Sous-section 4.4.3**.

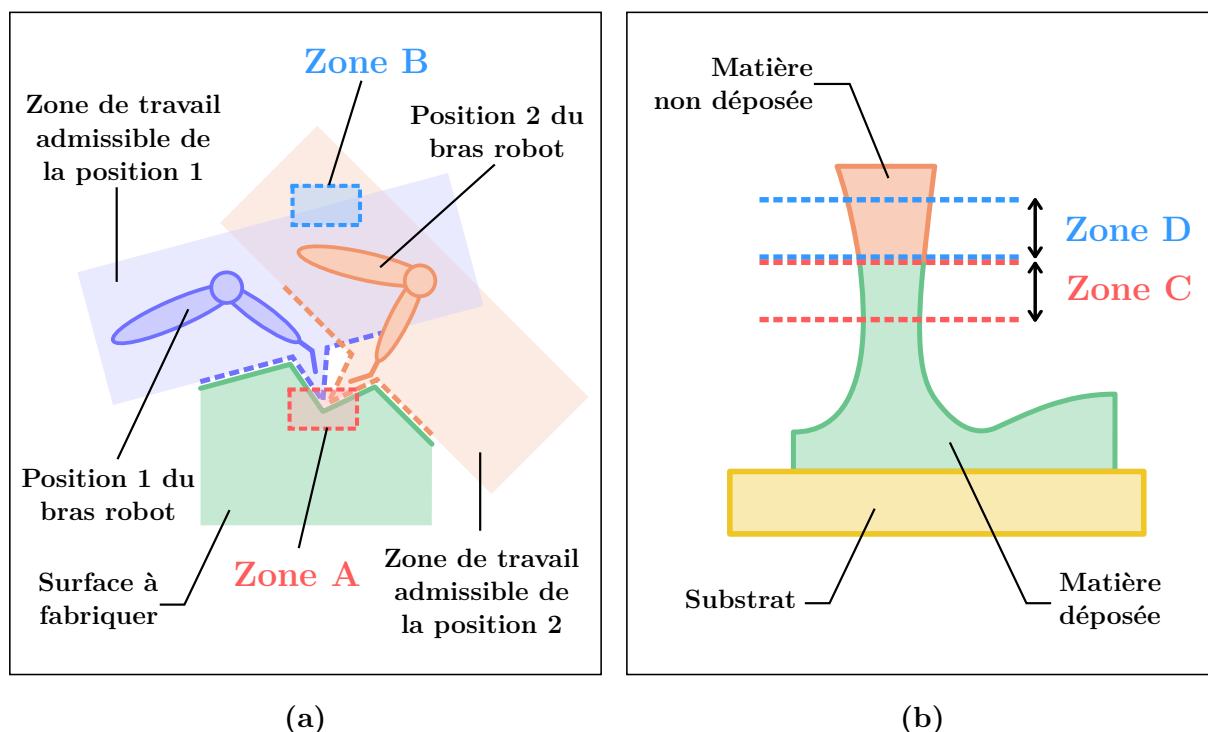
### 4.4.3 Premiers principes de fabricabilité

Trois principes de fabricabilité sont formulés à partir des constats issus des différents chapitres : le principe d'accessibilité, le principe de surface d'appui et le principe de niveau de détail. Les deux premiers principes formalisent notamment la génération d'une trajectoire de recouvrement maximal à hauteur de couche constante, l'absence de matériau support, et fournissent des pistes pour toute éventuelle implémentation de la rétroaction par priorisation de région. Le principe de niveau de détail quant à lui formalise les constats évoqués à la **Sous-section 4.4.2**.

Les principes énoncés apportent des pistes de résolution de la formulation mathématique du problème énoncé à la **Sous-section 4.4.1** en vue de l'élaboration de premiers modèles de fabricabilité suivant différents critères, qui seront présentés à la **Sous-section 4.4.4**.

**Principe d'accessibilité.** *Selon la stratégie de fabrication choisie, il se peut que certaines zones soient réalisées avant d'autres. Selon la forme locale de la pièce et le support local disponible, l'outil dispose d'un espace accessible donné sur lequel il peut effectuer des déplacements sans entrer en collision avec la pièce. Il est nécessaire que les positions de la trajectoire soient atteignables sans conflit de priorité d'accès à la zone de travail. Dans le cas contraire, il n'est pas possible d'accéder à la zone fabriquée : si une zone A n'est pas accessible et qu'une zone B déjà fabriquée est incluse dans la zone de travail théorique disponible relative à la zone A, alors A est prioritaire sur B (**Figure 122a**).*

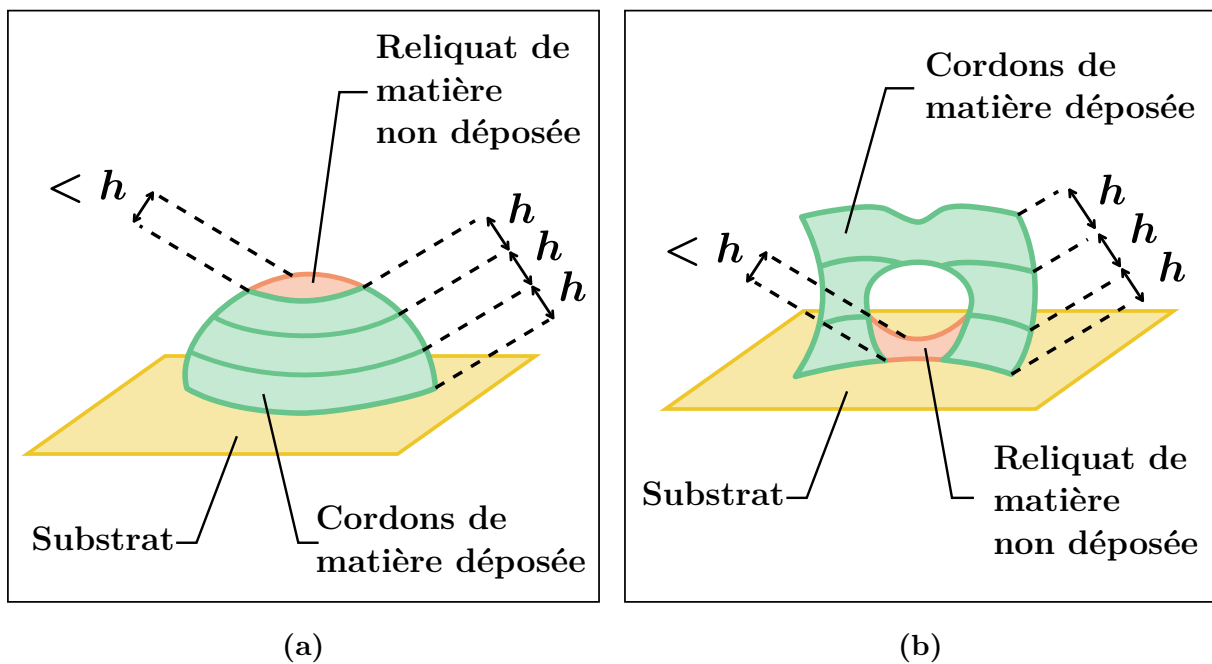
**Principe de surface d'appui.** *Il n'est possible de déposer de la matière à un endroit de la pièce à réaliser que s'il y a déjà de la matière pour soutenir le dépôt. Le principe de surface d'appui stipule qu'une zone C servant de support à une zone D doit être réalisée avant : C est prioritaire sur D (**Figure 122b**). La zone C sert alors d'appui à la zone D. La priorité des différentes zones de la pièce est déterminée par les choix de lieu de dépôt successifs et de la combinaison pièce-substrat.*



**Figure 122** – Principes d'accessibilité et de surface d'appui

(a) Principe d'accessibilité (b) Principe de surface d'appui

**Principe de niveau de détail.** *Étant donné qu'une couche nécessite la couche qui la précède pour être calculée, dans le cas général, les lieux des couches de la trajectoire ne sont pas connus de manière précise avant leur calcul. Le niveau de détail local entre les couches de la trajectoire n'est pas maîtrisé et amène à une limitation globale de la qualité géométrique de la surface dans les directions d'empilement des couches. En outre, l'utilisation d'une hauteur de couche constante peut entraîner un manque de matière localement pour les zones correspondant à une fermeture de la surface, ou encore aux frontières d'un trou selon la direction de propagation des couches vis-à-vis des frontières (Figure 123). La qualité de recouvrement le long d'un cordon est elle aussi limitée par une courbure limite dans les plans osculateurs locaux pouvant générer du sur-recouvrement. Pour éviter qu'un cordon n'interfère avec lui-même, cette courbure doit être telle que le rayon de courbure associé soit supérieur à une valeur limite.*



**Figure 123** – Conséquences majeures du principe de niveau de détail

(a) Fermeture sur une surface (b) Bord d'un trou sur une surface

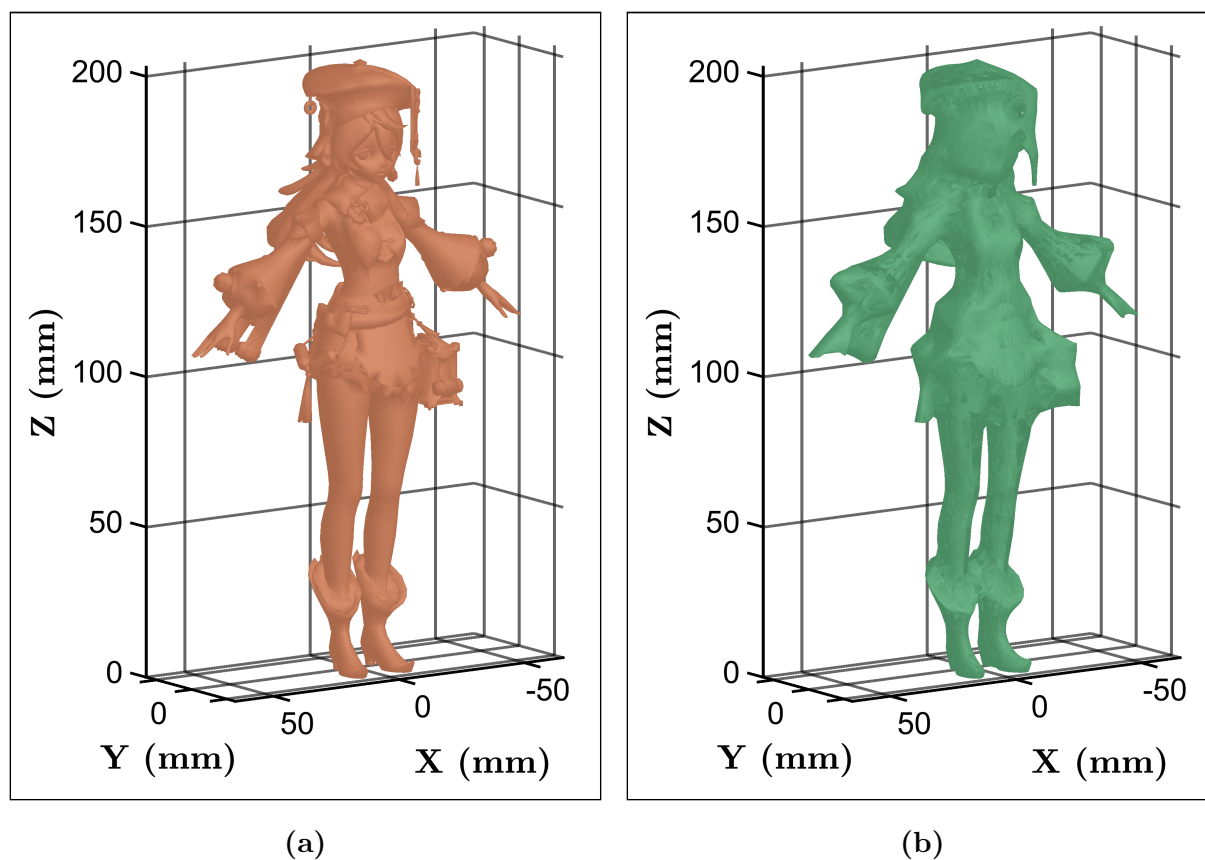
Enfin, notons que ces trois principes, destinés à évoluer, offrent des perspectives de travaux quant à la prise en compte des contraintes purement trajectoiristes lors de la phase de conception numérique d'une pièce mécanique. Ces principes ont pour but d'aider à anticiper la prédisposition du design d'une pièce mécanique à être fabriquée par un procédé de fabrication additive par dépôt de couches – dont font partie les procédés DED – à la connaissance de la topologie de son substrat et des dimensions des cordons.

#### 4.4.4 Proposition de modèles de fabricabilité

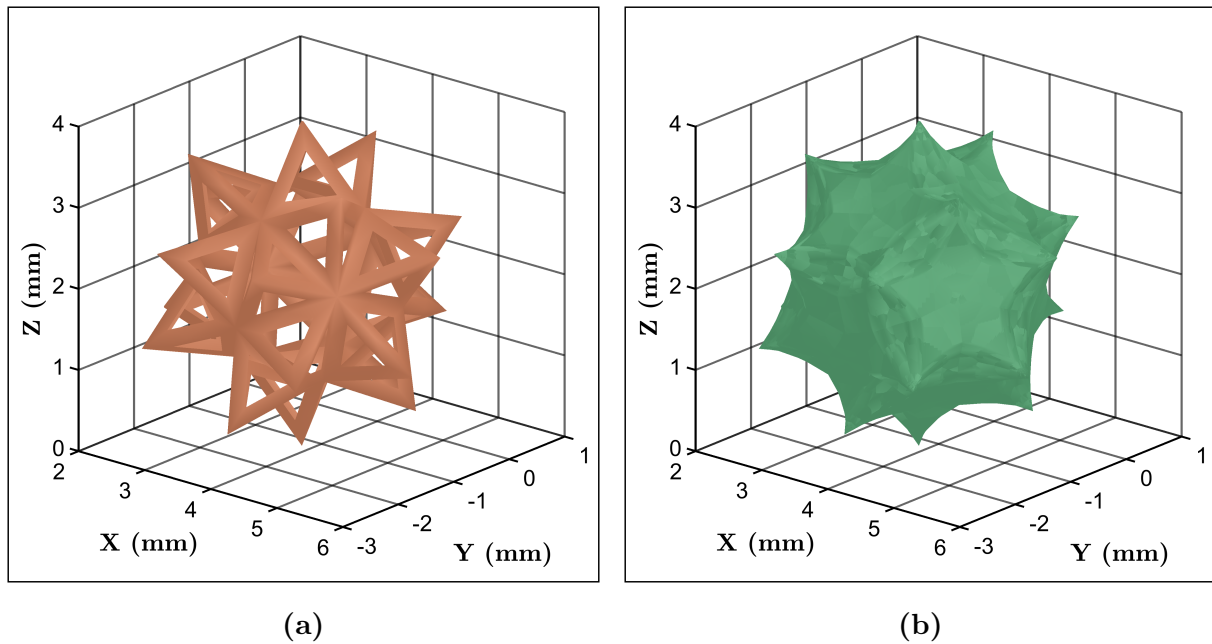
La difficulté principale de l'anticipation de la fabricabilité est qu'elle dépend de la position spatiale des points de la trajectoire. Or, les points de la trajectoire ne peuvent être connus qu'après calcul de la trajectoire du fait de la contrainte de distance euclidienne (**Sous-section 4.4.1**). Ainsi, tout modèle proposé ne représenterait qu'une tendance de fabricabilité associée à une surface dont la fiabilité ne serait validée qu'à travers l'existence d'une corrélation avec la tendance statistique de campagnes de simulations de trajectoires. La démonstration de cette existence ou non constitue des possibilités de travaux futurs. Ici, elle est supposée car il s'agit de présenter les perspectives d'aide à la conception en cas d'existence. Pour conclure ce chapitre, trois modèles sont fournis à titre d'exemple :

- L'enveloppe de précision ;
- L'exigence de précision avec modèle linéaire ;
- L'exigence de précision avec modèle gaussien.

L'enveloppe de précision est formée par les enveloppes convexes des voisinages situés dans une sphère de rayon  $h$  en tout point de la surface. Elle représente la majoration d'imprécision maximale de la surface en tout lieu si les cordons sont plus hauts que larges. Elle est illustrée à la **Figure 124** pour STL-B et à la **Figure 125** pour STL-C.



**Figure 124** – Enveloppe de précision de STL-B ( $h = 4\text{mm}$ ,  $e = 2\text{mm}$ )  
 (a) Surface initiale (b) Enveloppe de précision



**Figure 125** – Enveloppe de précision de STL-C ( $h = 0,5\text{mm}$ ,  $e = 0,25\text{mm}$ )

(a) Surface initiale (b) Enveloppe de précision

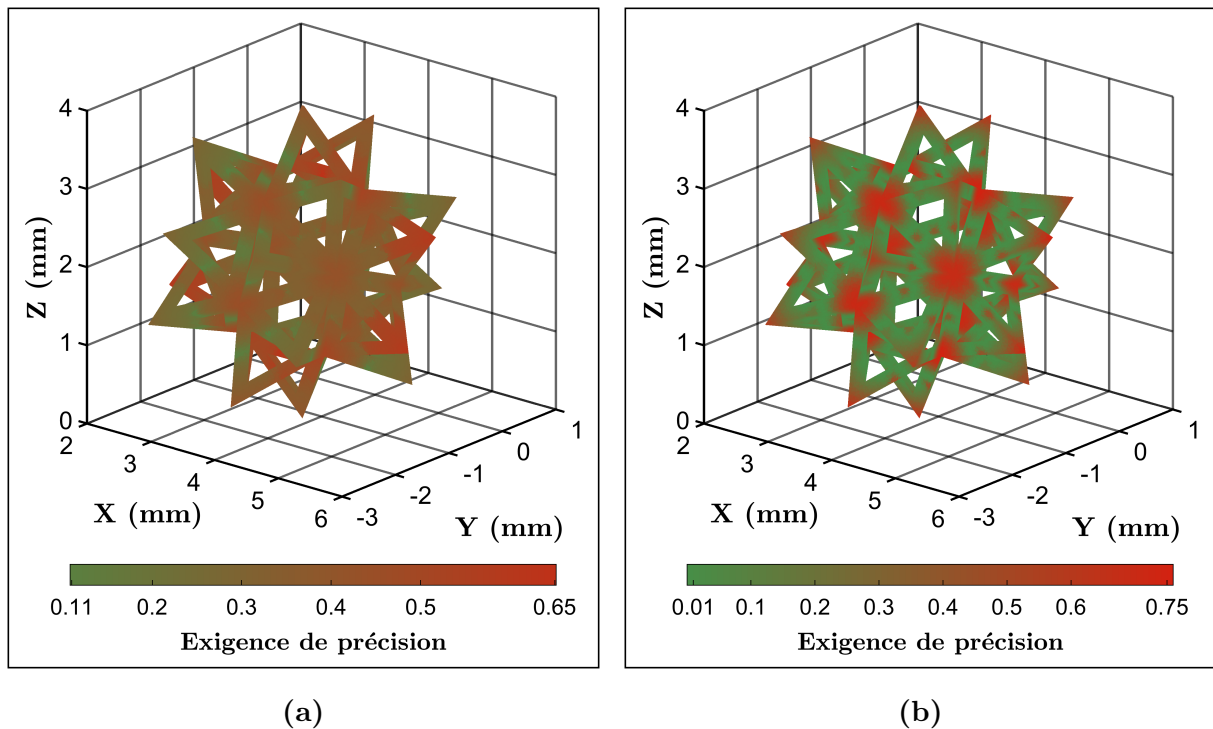
L'enveloppe est représentative de la valeur de  $h$  choisie : ainsi, pour STL-C, l'enveloppe ne possède pas de trou car la valeur de  $h$  de  $0,5\text{mm}$  est de l'ordre de grandeur des trous. Pour des valeurs de  $h$  plus petites, l'enveloppe laisserait apparaître les trous, tandis que pour des valeurs plus élevées, elle tendrait vers l'enveloppe convexe limite de l'icosaèdre constituant STL-C : cette surface limite est un dodécaèdre régulier qui est un polyèdre constitué de 12 faces pentagonales identiques. Dans le cas où la largeur de cordon est plus grande que la hauteur, sa valeur est à utiliser au lieu de  $h$  pour le calcul de l'enveloppe.

L'exigence de précision quant à elle propose une échelle de couleurs en toute région de la surface représentative de l'intensité de variation de la géométrie locale au regard de  $h$ . Deux modèles sont proposés en se basant sur des constats basiques. Comme expliqué, ils ne sont pertinents que s'ils sont calibrés, mais ils permettent tout de même d'apprécier les tendances d'évolution de fabricabilité sur la surface.

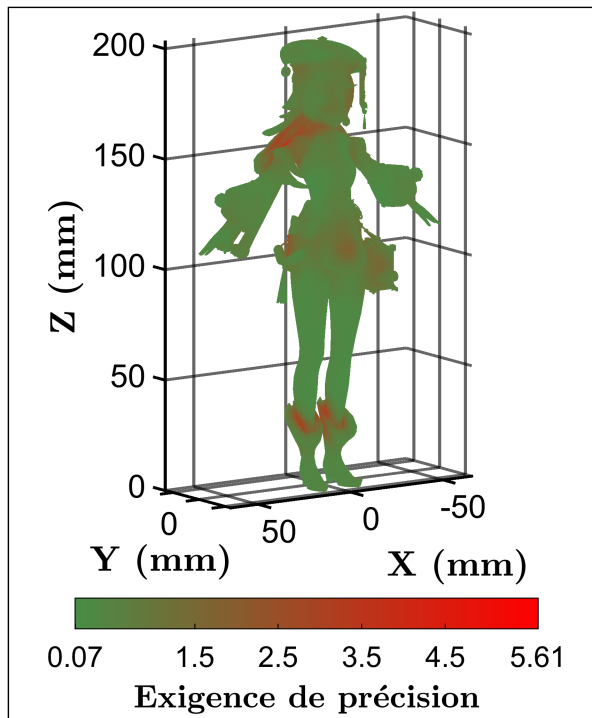
Chaque modèle calcule la faisabilité en tous les points de la surface en estimant la quantité d'aire de la surface  $E_1$  contenue dans la sphère de rayon  $h$  centrée en ce point, et d'une grandeur notée  $E_2$  qui correspond à la déviation moyenne des directions des normales aux mailles contenues dans cette sphère par rapport à la direction moyenne.  $E_1$  et  $E_2$  quantifient localement l'enchevêtrement et la continuité sur la surface. Il s'agit d'indicateurs partiels de fabricabilité (**Sous-section 4.4.1**). Idéalement, une surface fabricable par dépôt de couches successives serait localement assimilable à un plan continu, donc sans trou.  $E_1$  permet de quantifier la tendance qu'a la surface à être localement discontinue tandis que  $E_2$  quantifie la variation de profil locale. L'approche s'inspire de la définition de la courbure de Ricci (**Annexe A2**) et ajoute la notion de discontinuité, qui peut influencer indirectement le nombre de départs et d'arrêts de dépôt sur la trajectoire.

Puis, une loi d'évolution peut être créée à partir de  $E_1$  et  $E_2$ . Une surface aura une tendance à être localement fabricable si  $E_1$  est proche de la surface d'un disque de rayon  $h$  et  $E_2$  tend vers 1. Les modèles utilisés pour illustrer l'exigence de précision sur STL-C (**Figure 126**) et STL-B (**Figure 127** et **Figure 128**) ne sont donnés qu'à titre d'exemple. Les modèles choisis font appel aux coefficients supplémentaires sans unité  $a_{L,1}$ ,  $a_{L,2}$ ,  $a_{G,1}$  et  $a_{G,2}$  dont le choix permet d'augmenter l'influence de  $E_1$  ou  $E_2$  sur l'estimation de la fabricabilité. Pour le modèle linéaire (**Équation 25**), c'est le ratio entre les coefficients qui détermine la cartographie : un même ratio donnera les mêmes résultats, tandis que pour le modèle gaussien (**Équation 26**), un même ratio donnera uniquement une allure identique. Cela est illustré pour STL-B (**Figure 127** et **Figure 128**). Pour chaque modèle, plus la valeur calculée est élevée, moins la région locale est estimée comme fabricable.

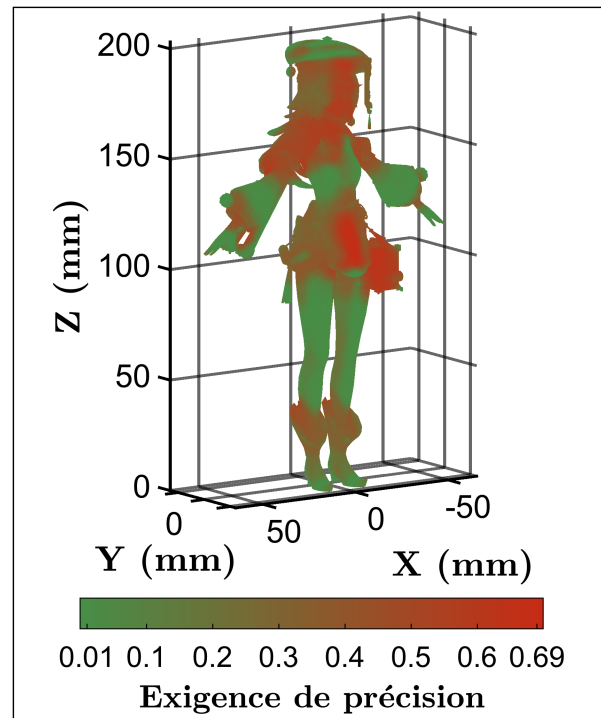
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle linéaire : } \frac{1}{a_{L,1} + a_{L,2}} \left( a_{L,1} \left( 1 - \frac{E_1}{\pi h^2} \right)^2 + a_{L,2} (1 - E_2)^2 \right) \quad (25) \\ \text{Modèle gaussien : } \exp \left( \frac{- \left( 1 - \frac{E_1}{\pi h^2} \right)^4}{a_{G,1}} \right) \exp \left( \frac{- (1 - E_2)^4}{a_{G,2}} \right) \quad (26) \end{array} \right.$$



**Figure 126** – Exemple d'exigence de précision de STL-C ( $h = 0,5\text{mm}$ ,  $e = 0,25\text{mm}$ )  
 (a) Modèle linéaire ( $a_{L,1} = 0,5$ ,  $a_{L,2} = 1$ ) (b) Modèle gaussien ( $a_{G,1} = 0,15$ ,  $a_{L,2} = 0,3$ )

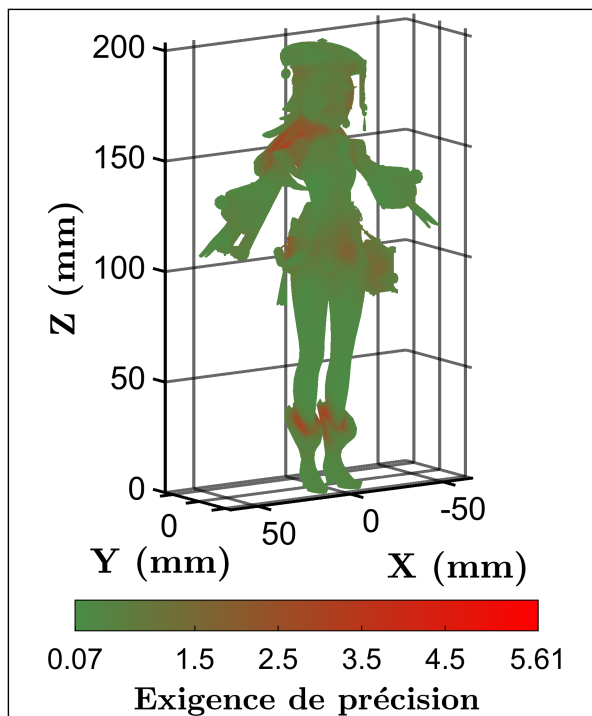


(a)

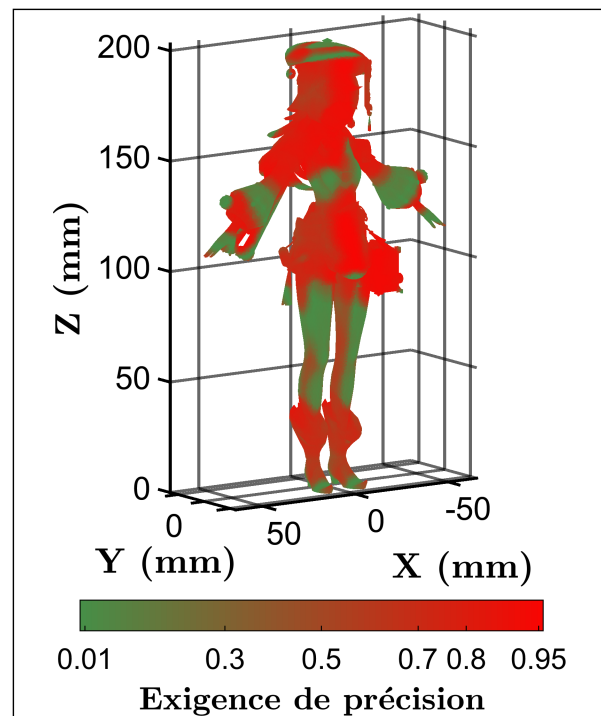


(b)

**Figure 127** – Exemple 1 d'exigence de précision de STL-B ( $h = 10\text{mm}$ ,  $e = 5\text{mm}$ )  
 (a) Modèle linéaire ( $a_{L,1} = 0,5$ ,  $a_{L,2} = 1$ ) (b) Modèle gaussien ( $a_{G,1} = 0,4$ ,  $a_{L,2} = 0,8$ )



(a)



(b)

**Figure 128** – Exemple 2 d'exigence de précision de STL-B ( $h = 10\text{mm}$ ,  $e = 5\text{mm}$ )  
 (a) Modèle linéaire ( $a_{L,1} = 3$ ,  $a_{L,2} = 6$ ) (b) Modèle gaussien ( $a_{G,1} = 0,15$ ,  $a_{L,2} = 0,3$ )



Ainsi, la fabricabilité est une notion qui vise à anticiper la prédisposition d'une pièce à être réalisée par fabrication additive lors de la phase de conception numérique. Cette anticipation est délicate car elle dépend de la position spatiale des points de la trajectoire qui ne peuvent être connus qu'après le calcul de la trajectoire et invite donc une approche statistique dont la validité serait justifiée par une corrélation des modèles avec la topologie des pièces effectivement réalisées à partir d'un ensemble de conditions initiales données.

La discussion sur la limitation de précision par dépôt de couches a permis la mise en évidence de premiers indicateurs partiels de fabricabilité, et de mettre en avant de premiers principes sommaires. Puis, l'élaboration de modèles de fabricabilité souligne les perspectives de travaux pour la création d'outils d'aide à la prise de décision. Les trois modèles proposés fournissent des informations sur la capacité théorique de réalisation d'une surface à partir d'un ensemble d'indicateurs partiels. Ils combinent des indicateurs partiels pour quantifier en tout lieu de la surface les sources de complexité de fabrication par dépôt de couches successives.

# Conclusions

Au sein de la fabrication additive, la génération de trajectoire occupe une place cruciale dans la chaîne de réalisation d'une pièce mécanique, permettant de relier la conception sur logiciel de CAO et la fabrication. La recherche de méthodologies de génération de trajectoire systématiques est un enjeu majeur pour cette famille de procédés, car de telles méthodes permettraient d'obtenir un chemin de dépôt sur des pièces de complexité géométrique quelconque. La résolution de ce défi offrirait davantage de flexibilité pour des opérations telles que le prototypage rapide et la réparation de pièces tout en facilitant la mise en œuvre de la fabrication. Cet objectif s'inscrit pleinement dans la ligne directrice d'intégration d'outils numériques aux procédés de fabrication additive dans un contexte de quatrième révolution industrielle. Les procédés DED sont considérés comme prometteurs pour la réalisation de pièces métalliques en raison de leur coût de production relativement faible et de leur compatibilité avec des robots multi-axes. Pour de tels procédés, une contrainte supplémentaire de distance euclidienne pièce-outil constante tout au cours de la fabrication permet d'homogénéiser la qualité du dépôt.

Cette thèse propose une méthode de génération de trajectoire versatile pour les procédés DED multi-axes répondant à ces besoins. Elle présente une méthode systématique, robuste et flexible permettant de générer un premier chemin de dépôt à hauteur de couche constante apte à recouvrir entièrement des surfaces facettisées quelle que soit leur géométrie, et associées à des substrats de morphologie quelconque, non nécessairement connexes.

Les méthodes de génération de trajectoire usuelles reposent sur des techniques de suivi de directions de propagation préalablement déterminées avant même le calcul de trajectoire. Ces directions, parfois déterminées à partir de flux géodésiques, sont ensuite utilisées pour déterminer des courbes d'intersection avec la surface par tranchage ou équations paramétrisées directes. Puis, ces courbes sont employées comme support de recherche des points de la trajectoire dans le cas de génération à hauteur de couche constante. Ces directions de propagation sont imposées et basées sur des constats globaux.

Or, il existe une infinité de directions localement envisageables pour propager une trajectoire. Ainsi, fixer ces directions avant le calcul réduit la flexibilité des trajectoires réalisables pour une pièce donnée. D'autre part, ces directions globales présupposent qu'il existe localement une direction principale de propagation. Ce n'est le cas que pour des entités primitives à la géométrie peu complexe, ce qui rend difficile l'application des méthodes usuelles sur des géométries de pièces ou de substrat élaborées. En particulier, dans le cas de la génération par paramétrisation, une corrélation est nécessaire entre la forme des iso-courbes et la direction des couches pour assurer la convergence des calculs.

L'algorithme de génération de trajectoire versatile proposé apporte des solutions à ces limitations à travers deux considérations centrales. Premièrement, il évalue la surface de manière locale uniquement, ce qui permet d'étendre la trajectoire sur la surface sans chercher de direction de propagation. Deuxièmement, il déclenche la génération par l'évaluation de la combinaison pièce-substrat. Ces deux considérations permettent d'envisager toute géométrie et position relative de pièce et de substrat. Les surfaces d'entrée prises en charge sont des surfaces facetisées, car elles contiennent toutes les informations locales de la surface.

La génération de trajectoire se fait en six grandes étapes. Le maillage initial de la surface dont on souhaite générer une trajectoire est d'abord subdivisé pour que les dimensions des mailles soient du même ordre de grandeur que la hauteur de couche souhaitée. Puis, la couche d'initialisation est déterminée à partir de l'intersection entre la pièce et le substrat. Les couches sont alors calculées successivement par quatre étapes répétées pour chaque nouvelle couche. Une routine permet de sélectionner les mailles de la pièce situées dans le voisinage de la couche précédente. Chaque point de la couche précédente est ensuite utilisé pour déterminer un ensemble d'arcs de cercle dont les points sont situés à une distance euclidienne égale à la hauteur de couche de ce point. Les sous-graphes associés à ces arcs de cercle sont filtrés et fusionnés pour reconstruire le graphe de la nouvelle couche. Enfin, chaque point de dépôt de la nouvelle couche est associé à un vecteur outil déduit des directions de projection de ce dernier sur la couche précédente. Plusieurs simulations, dont certaines sur différentes TPMS, ont permis de valider la méthode, sa robustesse, ses limites et le choix des paramètres d'entrée de la méthode algorithmique.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse apportent plusieurs contributions à la fabrication additive. La méthode de génération de trajectoire a notamment fait l'objet d'une communication scientifique à l'occasion de la 16<sup>ème</sup> conférence CIRP on Intelligent Computation in Manufacturing Engineering du 13 au 15 Juillet 2022 : *Support-Free-Material Path Generation for DED Processes from Facetized Data* [197]. En premier lieu, les travaux offrent des perspectives de versatilité en vue de l'obtention d'un chemin de recouvrement sur tout type de surface, apte à être modifié aux niveaux intra-couches et inter-couches pour l'obtention d'une trajectoire finale tenant compte des contre-indications issues du robot de fabrication et du matériau de dépôt.

Puis, le développement de la notion de fabricabilité à partir de constats purement trajectoiristes offre un apport sur l'aide à la prise de décision lors de la conception numérique d'une pièce mécanique. Trois principes de fabricabilité sont énoncés : les principes d'accessibilité, de surface d'appui et de niveau de détail. Ils traduisent le fait qu'une trajectoire ne peut, dans le cas général d'une combinaison pièce-substrat quelconque, pas être déterminée de manière exacte avant son calcul même. Des pistes sur l'éventuelle possibilité de création de modèles fiables d'anticipation de fabricabilité à partir de tendances statistiques avant calcul de la trajectoire sont discutées.

Notons que l'algorithme développé présente des limites techniques dont l'apport de solutions constitue des pistes d'amélioration. Premièrement, l'algorithme a été implémenté en MATLAB, ce qui implique un temps d'exécution relativement long. L'adaptation à un

langage compilé et bas niveau tel que le C# ou le C++ pourraient réduire drastiquement le temps de calcul par leur prédisposition à l'utilisation de méthodes de calcul multithread sur carte graphique. Deuxièmement, l'utilisation de maillages facettisés a un impact exponentiel sur la mémoire requise pour stocker les informations locale de la surface d'entrée. La mise en place de files d'attente pourrait réduire l'espace de stockage nécessaire pour envisager la prise en charge de fichiers d'entrée facettisés plus volumineux. Troisièmement, il peut être envisagé d'améliorer les méthodes de filtrage des nœuds des sous-graphes et de reconstruction des couches pour résoudre les problèmes liés à l'apparition de quelques arêtes aberrantes sur les trajectoires générées.

Enfin, en parallèle du développement de solutions autour des limitations techniques de la méthode de génération de trajectoire, d'autres perspectives de travaux futurs peuvent être envisagées, dont notamment :

- L'implémentation de la rétroaction par priorisation de régions ;
- La prise en charge de volumes remplis quelconques ;
- L'étude de l'existence d'éventuels modèles de fabricabilité viables ;
- L'étude de cinématiques robot adaptées à de la fabrication additive.

La flexibilité offerte par la génération ouvre la voie à l'implémentation de la rétroaction permettant ainsi de prioriser la génération de couches en certaines régions de la surface en tenant compte des éventuelles contre-indications. Ces contre-indications peuvent être décidées par l'utilisateur ou être liées à l'environnement de travail, comme le comportement du robot ou les propriétés thermiques du matériau. La rétroaction est donc cruciale pour adapter la trajectoire en fonction des contraintes rencontrées lors de la fabrication.

La recherche de sous-graphes d'une nouvelle couche est compatible avec tout type de pièce facettisée. Elle pourrait donc être directement appliquée à des volumes dont l'intérieur est constitué d'un ensemble de polyèdres. Cela nécessiterait cependant une adaptation des routines de leur filtrage et de la reconstruction du graphe de la nouvelle couche.

L'existence de modèles de fabricabilité, si elle est vérifiée, permettrait la création d'outils d'aide à la prise de décision lors de la phase de conception numérique, et offrirait une contribution notable au prototypage rapide.

L'étude de cinématiques de robots adaptées à de la fabrication additive est un enjeu sur le long terme. En effet, la rétroaction par priorisation des régions a pour vocation de tenir compte des contre-indications du robot, mais un trop grand nombre de contre-indications complexifierait la résolution du problème de priorisation. Les machines multi-axes utilisées peuvent parfois rencontrer des difficultés pour le suivi de trajectoires précises comportant de nombreux points de passage. Cela peut entraîner des limites de courses d'axes imposant des phases d'arrêt et de départ de dépôt supplémentaires au cours de la fabrication. Ainsi, l'utilisation de robots à espace de travail reconfigurable, le développement de méthodes de coordination entre plusieurs robots partageant un même espace de travail, voire la création de robots spécifiques constituent des perspectives envisageables.



# Annexes

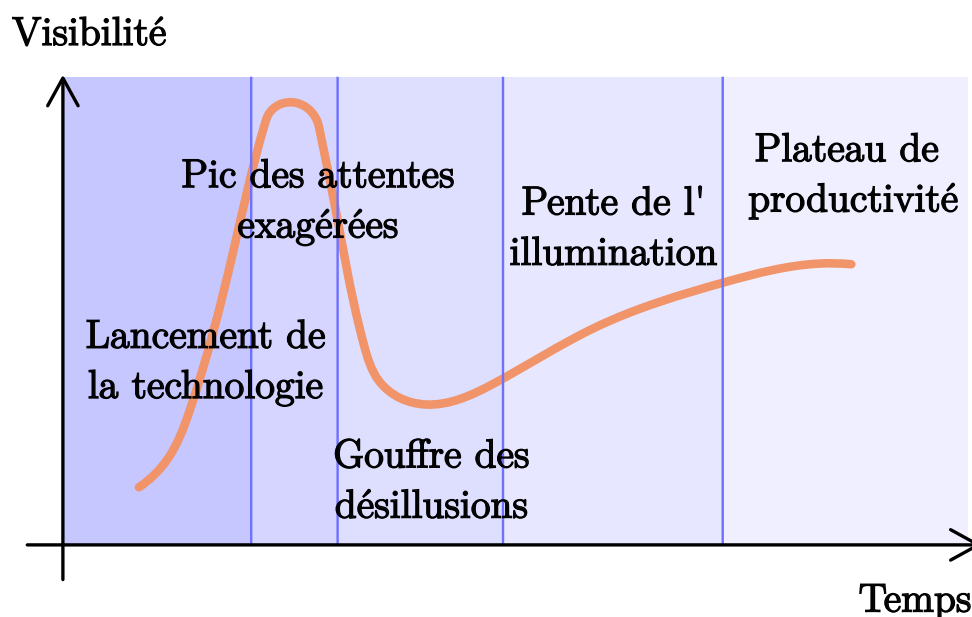
---

<b>A1</b>	<b>Cycle d'adoption d'une technologie . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>A2</b>	<b>Étude des surfaces en algèbre géométrique . . . . .</b>	<b>194</b>
A2.1	Historique . . . . .	194
A2.2	Outils Mathématiques . . . . .	199
<b>A3</b>	<b>Cas particuliers de prédictibilité des couches . . . . .</b>	<b>218</b>
A3.1	Contextualisation . . . . .	218
A3.2	Démonstration . . . . .	218
<b>A4</b>	<b>Détermination de la borne supérieure de <math>d_P</math> . . . . .</b>	<b>219</b>
A4.1	Contextualisation . . . . .	219
A4.2	Approximation de la borne . . . . .	219
<b>A5</b>	<b>Paramètres des simulations par paramétrisation . . . . .</b>	<b>223</b>
<b>A6</b>	<b>Subdivision du maillage initial . . . . .</b>	<b>224</b>
A6.1	Contextualisation . . . . .	224
A6.2	Méthode de subdivision . . . . .	226
<b>A7</b>	<b>Position relative à une enveloppe convexe 3D . . . . .</b>	<b>233</b>
A7.1	Contextualisation . . . . .	233
A7.2	Démonstration . . . . .	234
<b>A8</b>	<b>Liste des 12 cas d'intersection sphère-triangle . . . . .</b>	<b>242</b>
<b>A9</b>	<b>Fonction de couplage des nœuds des graphes . . . . .</b>	<b>243</b>
A9.1	Construction . . . . .	243
A9.2	Démonstration . . . . .	244

---

## A1 Cycle d'adoption d'une technologie

En tant qu'innovation, la fabrication additive, est sujette au “cycle de la hype” [198]. Défini par Jackie Fenn en 1995 [199], ce concept décrit l'évolution de l'intérêt pour une innovation dans le temps. Ce cycle lui a aussi permis d'analyser la phase d'évolution d'intérêt de plusieurs technologies ou concepts émergents [200]. Ce modèle de maturation met en avant que l'émulation scientifique autour d'une thématique est influencée par la communication autour de cette dernière, ce qui estompe les limitations de la technologie par un biais de distorsion des réelles opportunités qu'elle permet [201]. Il se décompose en cinq grandes phases (**Figure A1-1**), qui se produisent successivement au cours de l'arrivée d'une innovation dans le monde scientifique.



**Figure A1-1** – Cycle de la hype d'une innovation

1. Lancement de la technologie : l'innovation arrive sur le marché sous forme de prototypes souvent incomplets désignés comme prometteurs.
2. Pic des attentes exagérées (pic de “*hype*”) : emballement de la communication aboutissant à des attentes non réalistes. La recherche et le développement durant cette phase sont accélérés par effet de mode et de nombreux acteurs industriels investissent dans l'innovation.
3. Gouffre des désillusions (gouffre d’ “*anti-hype*”) : les premiers produits finalisés arrivent sur le marché mais ne répondent pas à tous les besoins issus des espoirs des attentes exagérées. Cette phase de déception s'accompagne d'une prise de conscience des limitations du produit et à une relativisation de sa portée.

4. Pente de l'illumination : beaucoup d'acteurs abandonnent tout investissement sur l'innovation. Certains persistent et développent une nouvelle génération de produits, plus adaptée et plus humble quant aux promesses. Les applications concrètes de la technologie sont mieux comprises. En parallèle, le marché se développe à nouveau, de manière moins rapide que lors du lancement de la technologie, mais de manière plus stable et durable.
  
5. Plateau de productivité : la technologie n'est plus une innovation et est mieux maîtrisée. Cela amène au développement d'une nouvelle génération. Selon le type de technologie, cela amène à une extension des domaines d'emploi pour atteindre de nouveaux marchés, ou à une spécialisation pour intéresser des marchés de niche.

Toutes les technologies ne passent pas par toutes ces étapes, et la durée de chaque étape peut varier considérablement. En outre, toutes les technologies ne parviennent pas à atteindre le plateau de productivité, certaines étant abandonnées avant d'atteindre cette étape de maturation.

Dans le cas de la fabrication additive, les opportunités et menaces en termes de qualité, coût et délais sont sujettes au cycle de hype dans le contexte de son inclusion dans l'industrie 4.0 [202]. En particulier, l'adoption de la fabrication additive présente des limites plus prononcées sur les aspects industriels, sociaux et environnementaux pour les entreprises de petite et moyenne taille effectuant une telle transition que ce ne fut le cas pour les grandes entreprises qui les ont précédées [203]. À cela s'ajoute la prise de conscience progressive sur des enjeux éthiques qui n'avaient pas forcément été anticipés lors de l'émergence de cette technologie, tels que la santé, la propriété intellectuelle et la mutation des emplois [204].



## A2 Étude des surfaces en algèbre géométrique

L'algèbre géométrique est une branche des Mathématiques liant la géométrie à l'algèbre. Cette branche contemporaine cherche à approcher tout objet géométrique à l'aide d'une structure d'algèbre. Contrairement à de la géométrie classique, l'algèbre géométrique permet de formaliser la topologie des objets étudiés, ce qui s'avère très efficace pour aborder les problèmes impliquant l'étude de différentes formes géométriques telles les courbes, les surfaces, et les volumes.

Ce formalisme a su s'imposer en mécanique relativiste, en électromagnétisme, en biomécanique et en infographie. Cependant, son utilisation dans le domaine de la mécanique classique est moins systématique car les outils de géométrie classique conviennent dans de nombreux cas pour des calculs de projections, distances, rotations, translations ou intersections.

Le but de cette annexe est de fournir quelques éléments permettant d'approcher le problème de génération de trajectoire avec moins de bridage. En particulier, elle permet de sensibiliser aux manquements des méthodes de slicing ou de découpage en entités indépendantes de surfaces et volumes qui imposent une direction de propagation de trajectoire soit indépendamment de la forme de la pièce entière à fabriquer, soit indépendamment du substrat initial, et quoi qu'il en soit suppose que la direction de propagation est prévisible avant le calcul de la trajectoire. Tout d'abord, un bref historique met en avant que dès qu'un besoin spécifique en géométrie est identifié, alors des outils spécifiques pour répondre à ce besoin sont souvent amenés à être développés (**Sous-section A2.1**). Puis, les principaux concepts et formalismes pour l'étude des surfaces sont présentés pour aider à la conceptualisation d'outils adaptés à la génération de trajectoire (**Sous-section A2.2**).

### A2.1 Historique

Les premières traces de géométrie remontent à l'Antiquité. Durant la seconde moitié du V<sup>ème</sup> siècle avant Jésus-Christ, Hippias d'Elis crée un mécanisme appelé "quadratrice" [205]. La quadratrice d'Hippias est une courbe obtenue par un mécanisme combinant une translation et une rotation uniformes (**Figure A2-1**). Si la première utilisation de la quadratrice dans un but de quadrature de courbe fermée semble avoir fait débat, l'invention du mécanisme semble être unanimement attribuée à Hippias d'Elis. Il semblerait que son objectif était de résoudre la trisection de l'angle : il s'agit d'un des trois grands problèmes de géométrie de l'Antiquité avec la quadrature du cercle et la duplication du cube.

La trisection de l'angle consiste à trouver une manière de diviser un angle quelconque en trois sous-angles de même taille. La quadrature du cercle consiste à construire un carré de même aire qu'un disque donné. Enfin, le problème de la duplication du cube cherche à trouver comment construire un cube dont le volume est deux fois plus grand qu'un cube donné. Dans les trois cas, la difficulté vient du fait que les seuls outils autorisés outre tout outil d'écriture sont la règle non graduée et le compas.

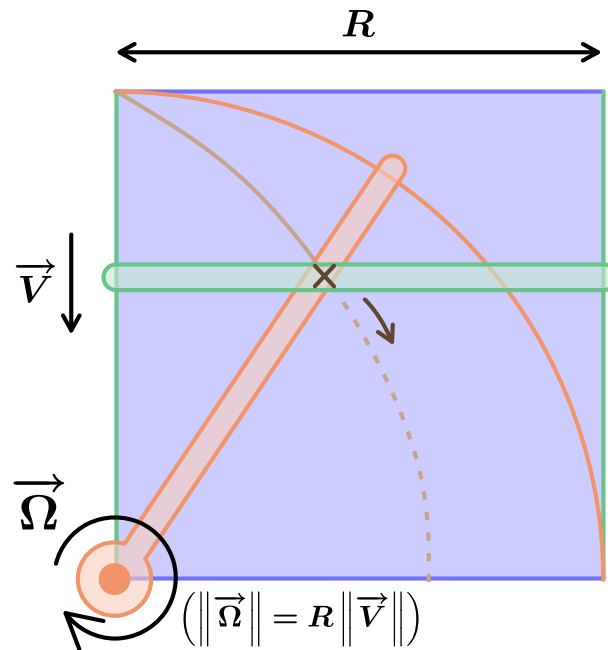


Figure A2-1 – Mécanisme de la quadratrice

Durant les siècles qui ont suivi, les connaissances en géométrie se sont consolidées. Au IV<sup>ème</sup> siècle avant Jésus-Christ, Pappus d’Alexandrie s’intéresse au problème de la duplication du cube, aux polygones et aux polyèdres [206]. Le III<sup>ème</sup> siècle avant Jésus-Christ marque une avancée notable en géométrie. Ératosthène crée le premier instrument de géométrie : le mésolabe d’Ératosthène (Figure A2-2). Cet instrument a pour but de résoudre le problème de duplication du cube. Cet outil est constitué d’un cadre en forme de “U”, d’un triangle rectangle fixe se trouvant à l’intérieur et de plusieurs triangles rectangles identiques au premier couissant dans une rainure située sur un des côtés latéraux du cadre.

En utilisant une application directe du théorème de Thalès, cet outil permet de déterminer des moyennes proportionnelles entre deux segments. Il a permis à Ératosthène de proposer une solution approximative au problème de duplication du cube. Au même siècle, Archimède de Syracuse s’intéresse à bon nombre de thématiques de la géométrie [207]. Il s’intéresse aux cercles et aux coniques, et propose une approximation de  $\pi$  par encadrement à l’aide de polygones réguliers ( $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ ). Puis, il se concentre sur l’étude des aires et des volumes des sphères et cylindres et décrit l’équation de la spirale, appelée “spirale d’Archimède”, pour proposer une solution au problème de la quadrature du cercle. De par son approche des aires et volumes par des arguments physiques, il est considéré comme le fondateur de la mécanique statique mais aussi le fondateur du calcul infinitésimal [208].

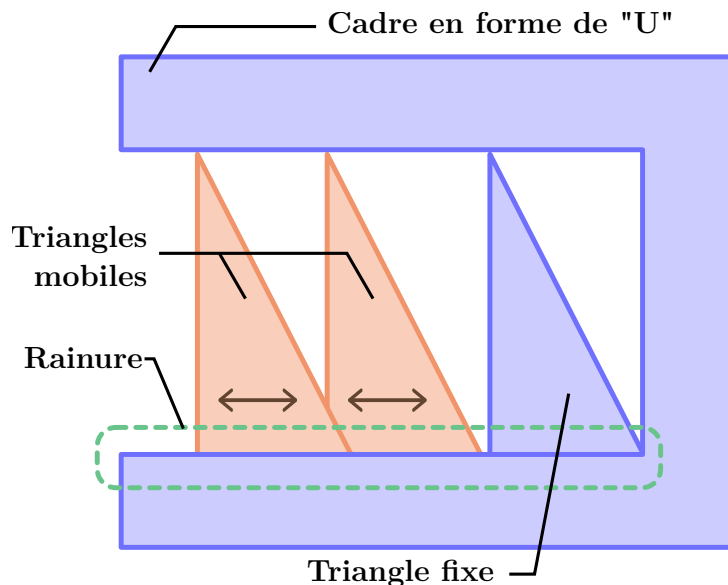


Figure A2-2 – Mésolabe d'Ératosthène

Il faudra attendre le XVII<sup>ème</sup> siècle pour que les surfaces soient à nouveau étudiées. On peut notamment citer Paul Guldin et ses deux théorèmes qui permettent de calculer l'aire latérale et le volume de certaines surfaces de révolution à la seule connaissance de la courbe qui les engendre [209]. Cependant, ces deux théorèmes apparaissaient déjà dans les travaux de Pappus lui-même durant l'Antiquité, et il semblerait que Guldin ait essayé de se les approprier. À cette époque, René Descartes s'est aussi intéressé à la géométrie, en partant des travaux de Pappus. Dans son œuvre "La Géométrie" parue en 1637, il apporte une avancée majeure en étudiant la géométrie sous un œil nouveau de manière analytique, et non plus uniquement à l'aide d'axiomes tel que c'était le cas avec la géométrie dite synthétique de l'Antiquité [210].

Au même siècle, le développement du calcul infinitésimal par les travaux de Pierre de Fermat, Gottfried Wilhelm Leibniz et Isaac Newton amène à nouveau l'étude des surfaces au sein de la communauté scientifique. Le calcul infinitésimal est le fondement crucial de toute la théorie géométrique développée durant les siècles suivants. Fermat a notamment développé l'algorithme de passage à la limite par la méthode des maxima et minima pour calculer la tangente à une courbe dès 1636 [211]. Leibniz et Newton ont eu une contribution majeure sur les calculs différentiel et intégral. Lors de son séjour à Paris de 1672 à 1676, Leibniz montre que l'intégration et la dérivation sont des opérations réciproques et invente la notation encore utilisée aujourd'hui de l'intégrale sous la forme " $\int f(x) dx$ " [212]. Il trouve alors certaines formules de dérivations usuelles : produit, quotient et puissance. En parallèle, Newton découvre aussi le calcul infinitésimal de son côté, qu'il désigne par l'appellation "méthode des fluxions" [213]. Ses premiers travaux datent de 1664 et il achèvera son ouvrage "La méthode des fluxions et des suites infinies" en 1671, qu'il ne publiera pas de son vivant [214], contrairement à Leibniz.

Bien que les deux scientifiques aient découvert le calcul infinitésimal chacun de leur côté, et à leur manière, une violente controverse éclate entre les deux scientifiques et philosophes suite à l'article publié par John Keill [215]. Professeur de l'Université d'Oxford et disciple de Newton à cette époque, il affirme que l'invention vient de Newton et que Leibniz avait plagié ses résultats. Leibniz proteste alors et répond à l'accusation par une lettre expédiée le 4 Mars 1711 à la Royal Society de Londres. La controverse se poursuit les années suivant, jusqu'à la mort de Leibniz le 14 Novembre 1716. Plusieurs années plus tard, il fut considéré que les deux scientifiques avaient contribué au calcul infinitésimal. Leibniz a clairement contribué aux notations qui sont toujours d'actualité, et sa méthode se veut plus géométrique. Le calcul intégral de Newton est quant à lui introduit de manière plus intuitive à travers la cinématique, comme il l'expliquait lui-même en 1687 [216]. Ironie de l'histoire, Leibniz et Newton avaient aussi étudié la combinatoire de leur vivant chacun de leur côté. Les noms et la similitude des formules du binôme de Newton (**Équation A2-1**) et de Leibniz (**Équation A2-2**) est un clin d'œil discret à la controverse sur le calcul différentiel [217]. La formule du binôme de Newton permet d'obtenir la forme développée de la puissance de la somme de deux nombres réels ou complexes  $f$  et  $g$ , tandis que la formule de Leibniz fournit la forme développée de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  du produit de deux fonctions à variables réelles ou complexes dérivables  $n$  fois.

$$\left\{ \begin{array}{l} (f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \\ (f g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A2-1)} \\ \text{(A2-2)} \end{array}$$

Le calcul infinitésimal est un des fondements de l'algèbre géométrique qui implique deux idées majeures complémentaires. D'une part, le calcul différentiel se focalise sur la notion de dérivée et l'étude des variations des fonctions à travers les taux de variations, pentes, vitesses et accélérations. D'autre part, le calcul intégral s'intéresse aux techniques d'intégration à travers le concept d'aire balayée sous le graphe d'une fonction, et s'étend aux volumes, suites et séries. Malgré cette contribution majeure, les travaux ultérieurs sur les surfaces ont été fortement freinés par la controverse entre Newton et Leibniz jusqu'à la seconde moitié du XVIII<sup>ème</sup> siècle.

C'est entre 1750 et 1930 que la géométrie va être abordée à l'aide de l'algèbre. On parle alors d'algèbre géométrique. En particulier, l'apparition des nombres complexes et des multivecteurs va permettre de définir numériquement et qualitativement des transformations géométriques sur les surfaces continues de manière rigoureuse. Dès 1760, Leonhard Euler s'intéresse aux surfaces et à leur courbure [218]. Il travaille alors essentiellement sur des courbes paramétrées. Gaspard Monge poursuit les travaux d'Euler sur les formes paramétrées et publie les nouvelles avancées sous le titre " Application de l'analyse à la géométrie" en 1795 [219]. Le spectre des surfaces étudiées est donc réduit aux surfaces continues définies analytiquement par des équations.

En 1825 et en 1827, Johann Carl Friedrich Gauss apporte une avancée notable en ne considérant plus la géométrie globale des surfaces mais leur géométrie intrinsèque [220]. Ainsi, les propriétés sont définies de manière locale, et ne nécessitent alors qu'un voisinage défini de manière continue. Les propriétés sont alors déterminées seulement par les distances géodésiques entre les points, et de manière indépendante de la définition de l'espace euclidien dans lequel est incluse la surface. On parle dès lors de géométrie non euclidienne. La consécration de sa recherche est sa démonstration de l'invariance de la courbure de Gauss (courbure détaillée à la **Sous-section A2.2**) des surfaces par transformation isométrique. Il s'agit d'une des premières fois où les invariants des surfaces sont étudiés. L'étude des invariants des structures géométriques est la clé de voûte de la topologie, qui est une branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des propriétés invariantes de ces dernières lorsqu'elles sont déformées de manière continue sans déchirure ni raccordement. Bernhard Riemann étend l'étude des surfaces à l'étude des espaces supérieurs en partant des travaux de Gauss - alors lui-même directeur de thèse de Riemann - et en utilisant les nombres complexes. Ainsi, sa thèse, soutenue le 10 Juin 1854, aboutit à une branche de la géométrie appelée de nos jours "géométrie riemannienne" [221]. Henri Poincaré quant à lui a poussé plus loin l'étude des invariants en géométrie. Il est considéré comme le fondateur de la topologie. Il fait progresser la théorie des surfaces avec les méthodes issues de la topologie algébrique entre 1895 et 1904 à travers son œuvre "Analysis Situs" [222].

Enfin, le début du XX<sup>ème</sup> siècle sera marqué par l'application de la géométrie à la physique d'une et par la formalisation des déplacements sur les variétés. La théorie de la relativité générale développée par Albert Einstein entre 1907 et 1915, grâce aux conseils en géométrie riemannienne de Marcel Grossmann et David Hilbert [223] a permis d'étudier les variations de courbure de l'espace-temps en introduisant des outils de dimension supérieure à ceux permettant l'étude de surfaces. Les travaux sur la relativité générale se basent aussi sur ceux datant de 1900 de Gregorio Ricci-Curbastro et Tullio Levi-Civita, précurseurs du calcul tensoriel qui a apporté une grande avancée sur les méthodes de calcul différentiel [224]. Les années 1920 apporteront des connaissances supplémentaires sur la géométrie riemannienne et affineront la théorie de la relativité générale, notamment à travers les travaux d'Élie Cartan [225] et Hermann Weyl [226]. C'est aussi durant cette décennie que Cartan et Weyl, en s'inspirant des travaux de Levi-Civita ont développé la notion de connexion, qui permet de relier les espaces tangents voisins sur des objets géométriques, et donc notamment d'étendre l'étude des géométries aux structures localement non continues. La notion de connexion sera étudiée en profondeur par Jean-Louis Koszul entre 1950 et 1952 [227], et appliquée par Katsumi Nomizu en 1954 [228].

## A2.2 Outils Mathématiques

La géométrie de l'espace étudie des objets définis par une géométrie plane - dite euclidienne - et inclus dans un espace à trois dimensions. Les objets étudiés dans l'espace de dimension trois ne sont alors plus nécessairement contenus dans des plans. Cet espace est appelé "espace usuel" en référence à son utilisation courante pour modéliser bon nombre de phénomènes physiques de la réalité. Puisque l'espace englobant les objets est de dimension trois, les objets qui y sont étudiés sont de dimension au plus trois et non infinis si de dimension trois. De manière plus générale, l'espace dans lequel sont inclus les objets est appelé "espace de plongement". Les objets de dimension un sont les courbes, ceux de dimension deux sont les surfaces et ceux de dimension trois sont les volumes fermés. Contrairement aux courbes et surfaces, les volumes doivent être finis, d'où la nécessité qu'ils soient fermés. La géométrie riemannienne généralise la géométrie de l'espace à des dimensions finies quelconques. Aussi, des espaces de dimension  $n$  permettent d'étudier des objets de dimension au plus  $n$ . Les espaces étudiés sont désignés par l'expression plus générale "espace affine". Les objets géométriques sont alors désignés par le terme "variété". Ainsi, une courbe est une variété différentielle d'ordre un, tandis qu'une surface est une variété différentielle d'ordre deux.

Pour permettre d'effectuer des calculs, les espaces affines sont munis d'objets sur lesquels il est possible d'effectuer des opérations. Ces opérations sont effectuées sur des objets appelés "vecteurs". Ces objets issus de l'algèbre linéaire généralisent la notion de déplacement dans l'espace topologique entre deux points en définissant des couples de points. Ils sont caractérisés par leur direction, correspondant à la droite liant les deux points auxquels ils sont associés, leur sens et leur norme. Ils ne sont pas fixés à une position précise sur l'espace affine. Ils font partie de leur propre espace appelé "espace vectoriel", et permettent de définir les notions de distance et d'angle. Ainsi, on désigne par "espace topologique" un espace affine dirigé par un espace vectoriel.

Les vecteurs décrivent le changement de position d'un point dans l'espace topologique. Un point unique n'étant pas sujet à l'opération de rotation autour de lui-même, les vecteurs peuvent alors être vus comme l'introduction du déplacement par translation dans l'espace. Les vecteurs peuvent naturellement être additionnés entre eux à travers une relation dite "relation de Chasles" (**Définition 1**).

**Définition 1.** Soit  $E$  un espace affine. Pour tous points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'espace  $E$ , on définit la relation de Chasles entre les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  par :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour l'étude des variétés, une opération supplémentaire est ajoutée à l'espace vectoriel : le produit scalaire. Un produit scalaire est nécessaire pour la mesure des distances et des angles dans l'espace topologique (**Définition 2**). Muni d'un produit scalaire, l'espace vectoriel est alors appelé "espace préhilbertien". Une condition supplémentaire sur les variétés de l'espace est qu'elles doivent être localement euclidiennes, c'est-à-dire qu'il est possible de les munir du produit scalaire en tout point.

**Définition 2.** Soit  $F$  un espace vectoriel. Un produit scalaire entre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $F$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive :

- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in F^3, (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$  (linéaire à gauche) ;
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in F^3, \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$  (linéaire à droite) ;
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$  (symétrique) ;
- $\forall \vec{x} \in F, \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}$  (défini) ;
- $\forall \vec{x} \in F, \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$  (positif).

Si l'espace  $F$  est muni d'une métrique euclidienne, alors en notant  $\| \cdot \|$  l'opérateur de norme sur les vecteurs, le produit scalaire dit "usuel"  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est défini à partir de l'angle  $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$  orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \left( \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \right).$$

Le produit scalaire n'est pas le seul type de produit qu'il est possible de définir pour un espace vectoriel. Par exemple, le produit vectoriel est quant à lui une opération qui peut être vue comme l'ajout de la notion de rotation à l'espace topologique (**Définition 3**). Une convention d'orientation de l'espace topologique est alors nécessaire pour définir le sens des rotations lors de l'utilisation du produit vectoriel.

**Définition 3.** Soit  $F$  un espace vectoriel. Le produit vectoriel entre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $F$  non colinéaires, noté  $\vec{u} \times \vec{v}$ , est défini par l'unique vecteur  $\vec{w}$  tel que :

- $\vec{w}$  est orthogonal à la fois à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$  ;
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \left| \sin \left( \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \right) \right|$  ;
- La base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est dans le sens direct.

L'espace vectoriel muni de l'addition, et d'opérations de produit permet d'effectuer des opérations sur les variétés pour définir des notions telles que la courbure, les géodésiques, le transport parallèle, et éventuellement de nouvelles métriques différentes de la métrique euclidienne. De manière plus formelle, une métrique est désignée par l'expression "espace métrique". Pour expliquer toutes ces notions, la suite de la section se basera uniquement sur des surfaces incluses dans l'espace de dimension trois, puisqu'il s'agit du cadre d'application de l'algèbre géométrique pour la génération de trajectoire.

Si les vecteurs suffisent pour étudier des courbes embarquées dans des espaces de dimension deux, leur utilisation peut être relativement vite limitée lorsqu'il s'agit d'étudier des variétés dans des espaces dimension strictement supérieure à deux. En effet, les vecteurs sont des objets unidimensionnels. Ils sont adaptés à travailler directement sur les courbes, elles aussi de dimension un. Dans le cas des surfaces, qui sont de dimension deux, une première méthode consiste à travailler sur des courbes extraites de la surface à étudier. Ces restrictions étant de dimension un, il est donc possible d'utiliser directement des

vecteurs. Elles sont issues de l'intersection entre la surface et l'infinité de plans passant par un point donné de cette dernière. Une deuxième méthode, lorsqu'on travaille localement, consiste à étudier non pas la surface elle-même, mais, son supplémentaire dans l'espace en trois dimensions. La surface est assimilable localement à un plan : puisque l'espace total est de dimension trois, son supplémentaire est de dimension un, et peut être étudié avec des vecteurs. Le supplémentaire du plan local est le sous-espace engendré par un vecteur normal au plan. L'étude du supplémentaire du plan apporte des informations sur le plan lui-même. En dimension trois, on peut donc définir les plans locaux uniquement par leurs vecteurs normaux.

Cependant, ces méthodes se retrouvent relativement vite limitées. Aussi, de nouveaux outils permettant d'adapter la notion de vecteur sont utilisés pour certaines études. La notion de multivecteur est contre-intuitive, et intimement liée aux nombres complexes. S'il est coutume de penser l'imaginaire pur  $i$  comme le nombre tel que  $i^2 = -1$ , la signification est beaucoup plus profonde dès lors où un nombre n'est ni un réel pur, ni un imaginaire pur et se voit attribuer une composante réelle et une composante imaginaire. Au XIX<sup>ème</sup> siècle, l'étude du plan complexe a apporté une nouvelle dimension aux nombres complexes qui n'étaient alors considérés que de manière algébrique dès leur première utilisation à la fin du XVI<sup>ème</sup> siècle. Plus précisément, les nombres complexes sont des multivecteurs. Il s'agit d'objets issus de la somme de deux objets de natures totalement différentes, et dont il est possible de passer de l'un à l'autre uniquement par une opération de multiplication. Ainsi, un réel multiplié par un imaginaire donne un imaginaire dont la composante est le produit des deux composantes initiales. Le produit de deux réels donne un réel lui aussi issu du produit des composantes initiales tandis que celui de deux imaginaires donne un réel issu du produit des composantes initiales avec changement de signe. Le fait de pouvoir basculer d'un espace à un autre a une signification géométrique.

Pour comprendre ce qu'est un multivecteur, il s'agit de rappeler que le produit scalaire permet d'obtenir un scalaire à partir de deux vecteurs, tandis que le produit vectoriel permet d'obtenir un vecteur à partir de deux vecteurs. Le produit scalaire permet donc d'obtenir une sortie de dimension nulle, et le produit vectoriel permet de la conserver à condition que les vecteurs ne soient pas colinéaires. En réalité, le produit vectoriel n'est que la restriction d'un autre produit, consistant à obtenir un vecteur de dimension supérieure à partir de deux vecteurs non colinéaires en entrée. Ce vecteur est appelé un bivecteur, et le produit est désigné par le terme "produit extérieur" (**Définition 4**). Le résultat du produit extérieur est de nature vectorielle. Le produit vectoriel et le produit extérieur sont deux notions différentes. Il est de coutume en France d'utiliser la notation  $\wedge$  pour désigner le produit vectoriel, d'où la possibilité de confusion. Bien que de natures différentes, les deux opérations entretiennent des relations étroites.

**Définition 4.** Soit  $F$  un espace vectoriel. Un produit extérieur entre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $F$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , est une forme bilinéaire et alternée, et par conséquent anti-symétrique :

- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in F^3, (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z}$  (linéaire à gauche) ;
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in F^3, \vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}$  (linéaire à droite) ;



- $\forall \vec{x} \in F, \vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0}$  (*alterné*);
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \vec{x} \wedge \vec{y} = -(\vec{y} \wedge \vec{x})$  (*anti-symétrique*).

Le produit extérieur entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est un bivecteur. Si l'espace  $F$  est muni d'une métrique euclidienne, alors en notant  $\|\cdot\|$  l'opérateur de norme sur les vecteurs, la norme du bivecteur issu du produit extérieur entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est défini à partir de l'angle  $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$  orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$  :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \left| \sin \left( \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \right) \right|.$$

La définition du produit extérieur n'est pas sans rappeler celle du produit scalaire. Le produit scalaire ne s'applique qu'à des vecteurs, mais il est possible de généraliser le produit scalaire par un produit appelé "produit interne", et défini exactement de la même manière que le produit scalaire, où les objets ne sont plus uniquement des vecteurs, mais des multivecteurs. Le résultat est de nature vectorielle. Un multivecteur est la généralisation du concept de vecteur à des variétés de dimensions différentes. Un multivecteur est la combinaison linéaire de  $k$ -vecteurs, qui sont des monovecteurs à  $k$  dimensions. Un monovecteur permet de définir une droite de l'espace orientée. De même, un  $k$ -vecteur permet de définir une variété différentielle d'ordre  $k$  orientée. Ainsi, un bivecteur permet de définir une surface orientée, et un trivecteur permet de définir un volume orienté (Figure A2-3a).

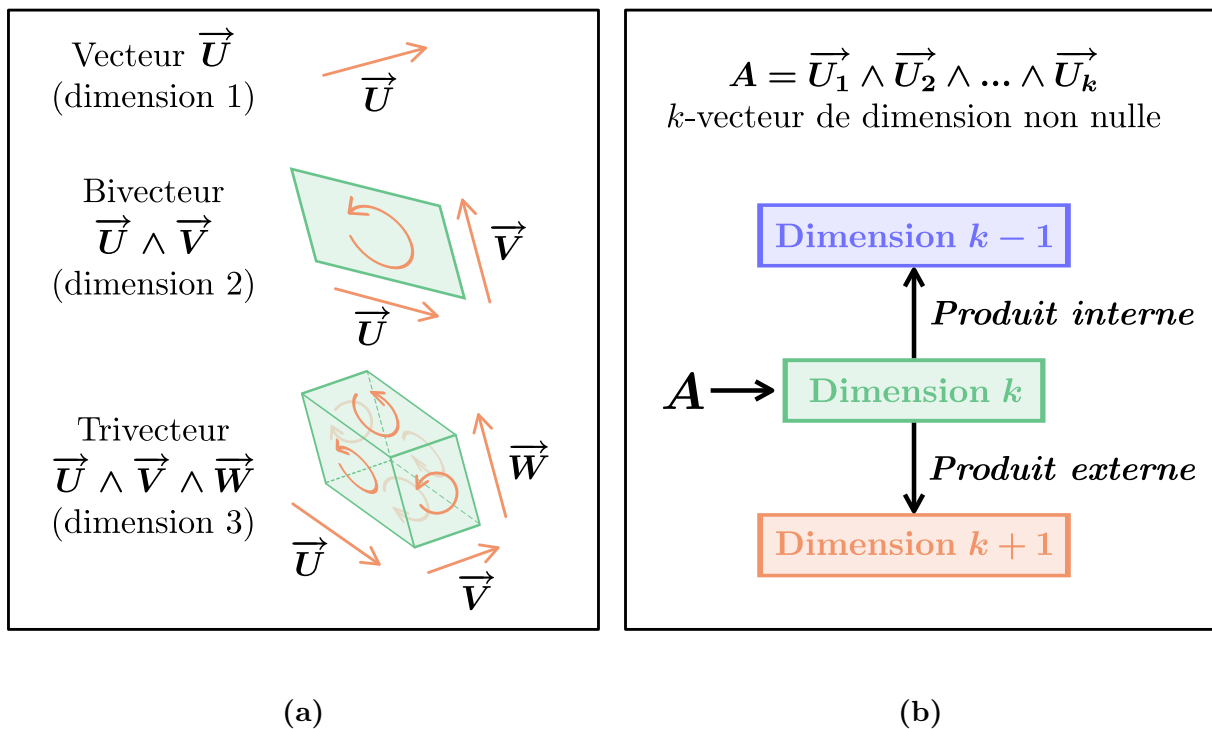


Figure A2-3 – Concepts de  $k$ -vecteurs, produit interne et produit extérieur

(a)  $k$ -vecteurs (b) Produits interne et extérieur

Si  $k$  vaut 0, le  $k$ -vecteur est un scalaire. Il est possible de multiplier un multivecteur avec un autre multivecteur pour obtenir un nouveau multivecteur (**Figure A2-3b**). Le produit interne entre deux multivecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  d'un espace vectoriel  $F$  est couramment noté  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ . Une fois encore, il est parfois coutume d'utiliser aussi cette notation pour désigner le produit scalaire en France, d'où la confusion possible si le contexte n'est pas pris en compte.

Le produit interne est symétrique, et le produit extérieur est anti-symétrique. Il est possible de définir le produit géométrique, parfois appelé "produit de Clifford" en tant que somme du produit interne et du produit extérieur (**Définition 5**). Bien que bien moins intuitif que les deux produits qui le composent, le produit géométrique est l'opération de multiplication propre à la géométrie. À lui seul, il permet de caractériser la relation géométrique entre deux multivecteurs par leur simple multiplication. Alors que la partie interne permet de quantifier leur orthogonalité, la partie extérieure permet de quantifier leur colinéarité. Il est alors possible de définir le produit interne et le produit extérieur à partir du produit géométrique. Cela signifie que ce produit permet à lui seul de déterminer la partie symétrique et anti-symétrique entre deux vecteurs.

Ce produit permet de mieux appréhender la représentation des multivecteurs en tant que variétés différentielles orientées. Un exemple classique pour illustrer cette représentation est le concept de couple d'effort. Usuellement, il est défini comme le produit vectoriel entre un vecteur d'effort modélisant une force et un vecteur de distance modélisant un bras de levier. Le produit vectoriel donne un vecteur. Or, le couple se comprend physiquement comme un effort appliqué pour transmettre un effort en rotation. Il est notamment caractérisé par la surface de contact pour transmettre cet effort. En réalité, le vecteur issu du produit vectoriel n'a pas de sens physique. En considérant un produit extérieur plutôt qu'un produit vectoriel, le support du couple n'est alors plus un vecteur mais un bivecteur : il s'agit donc d'une surface orientée, qui illustre clairement le phénomène de transmission d'effort par le biais d'une surface. Le sens du bivecteur correspond au sens de transmission de l'effort en rotation. Dans la pratique, le produit vectoriel est utilisé car en dimension trois, le supplémentaire d'une surface est un vecteur, et comme expliqué au début de cette section, il suffit à lui seul à décrire le plan, au prix de la signification physique.

**Définition 5.** Soit  $F$  un espace vectoriel. Un produit géométrique entre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $F$ , noté  $\vec{u}\vec{v}$  ou parfois  $\vec{u} \otimes \vec{v}$ , est la somme d'un produit interne  $\langle , \rangle$  et d'un produit extérieur  $\wedge$  entre ces deux vecteurs :

$$\vec{u}\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Le produit interne est la partie symétrique du produit géométrique, et le produit extérieur est sa partie anti-symétrique. Il est possible de les définir directement à partir du produit géométrique :

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \frac{1}{2} (\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}) \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \frac{1}{2} (\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u}). \end{cases}$$

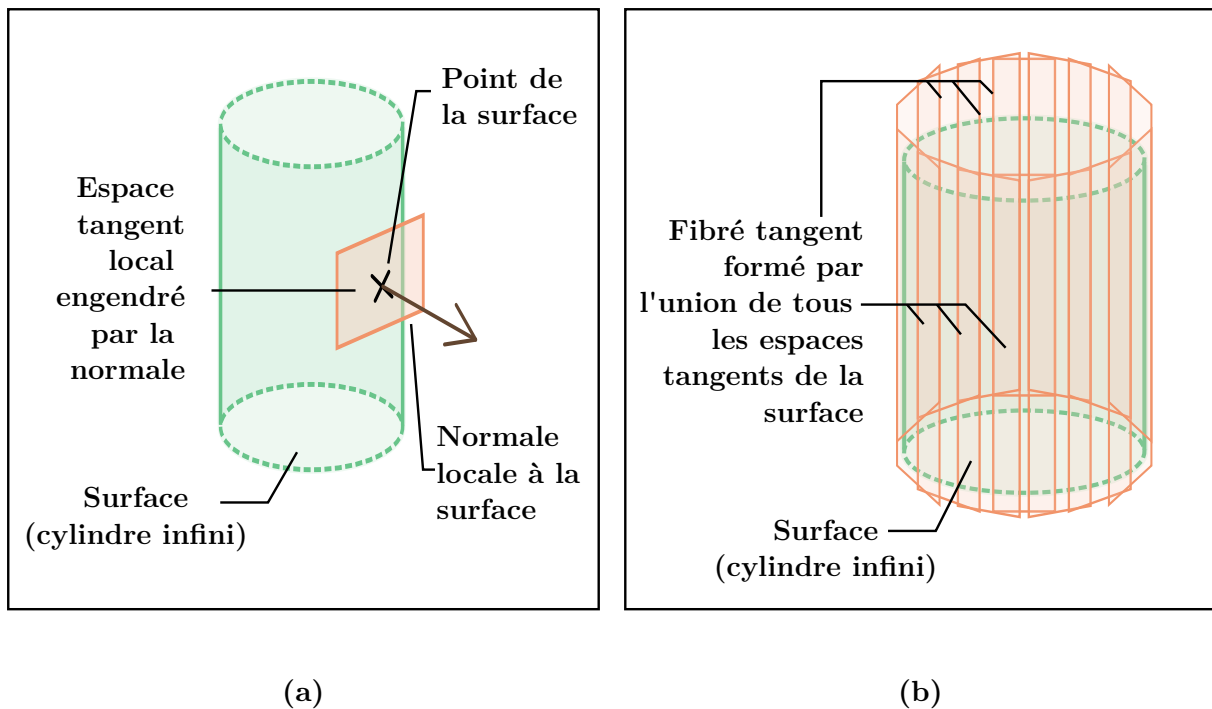
Au niveau calculatoire, on peut penser de manière très imagée aux multivecteurs avec les polynômes. Chaque  $k$ -vecteur serait considéré comme un monôme. Le polynôme constant correspondrait alors à un objet de dimension nulle, donc un scalaire. Dans le cas où l'un des deux multivecteurs d'entrée est un vecteur, donc de dimension un, les calculs de produit interne et extérieur sont relativement aisés. Le produit interne d'un vecteur avec un multivecteur de dimension  $n$  donnera un multivecteur de dimension au plus  $n - 1$ , alors que leur produit extérieur donnera un multivecteur de dimension au plus  $n + 1$ . Les calculs des produits sont de plus en plus compliqués à effectuer dès lors où les deux multivecteurs initiaux sont de dimension élevée.

Ainsi, les nombres complexes peuvent être pensés en termes de multivecteurs en associant la droite des réels à un vecteur  $\vec{x}$ , la droite des imaginaires à un vecteur  $\vec{y}$  et en considérant que l'imaginaire  $i$  est le bivecteur  $\vec{x} \wedge \vec{y}$ . Tout nombre complexe  $c$  peut être défini à partir de deux réels uniques  $a$  et  $b$  tels que  $c = a + bi$ . Le multivecteur  $\vec{c}$  associé à  $c$  est donc  $\vec{c} = a + b\vec{x} \wedge \vec{y}$ . Le produit de deux nombres complexes est ainsi similaire au produit vectoriel entre de tels multivecteurs; on retrouve les mêmes propriétés entre produits d'imaginaires et réels purs énoncées précédemment :

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, a \wedge b = ab$ ;
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, a \wedge bi = a \wedge (b \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y})) = (a \wedge b) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) = ab (\vec{x} \wedge \vec{y}) = abi$ ;
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, ai \wedge bi = (a (\vec{x} \wedge \vec{y})) \wedge (b (\vec{x} \wedge \vec{y})) = (a \wedge b) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) = -ab$ .

Une autre manière de se convaincre que  $i$  est un bivecteur et a une interprétation géométrique est de considérer la rotation polaire. Associé avec la fonction exponentielle, il permet d'exprimer une rotation. Ainsi, l'opérateur  $e^{i\theta}$  décrit une rotation dans le plan d'angle  $\theta$ . Cette analogie entre nombres complexes et multivecteurs permet de comprendre pourquoi l'étude des objets géométriques contient certaines équations mettant en jeu des nombres complexes. Plus généralement, l'utilisation de multivecteurs a permis de lier la géométrie à l'algèbre. Dans le cas particulier des surfaces plongées dans un espace de dimension trois, les propriétés de basculement entre réels et imaginaires purs par produit suffisent en général pour modéliser les changements d'espaces dimensionnels. Les fonctions utilisées avec des nombres complexes pour l'étude des surfaces sont souvent définies et dérivables en tout point du sous-ensemble du plan complexe sur lequel elles sont définies. De telles fonctions sont dites "holomorphes". La condition de dérivabilité complexe est plus forte que la dérivabilité réelle, et garantit la continuité des propriétés sur tout le voisinage de la variété. Dans le cas où la fonction n'est pas dérivable en un nombre fini de points, la fonction est dite "méromorphe".

Comme expliqué précédemment, dans le cas de surfaces plongées dans un espace de dimension trois, il est possible d'associer l'étude locale à un plan. Ce plan est tangent à la surface. En tant que variétés différentielles, il est possible de définir les notions de dérivée et d'évolution de profil lors du parcours d'un chemin le long d'une surface. Le plan local tangent en un point de la surface est appelé "espace tangent" (**Figure A2-4a**).



(a) Espace tangent local (b) Fibré tangent global

**Figure A2-4 – Espace et fibré tangents**

L'espace tangent est associé à un fibré tangent (**Figure A2-4b**). Ce fibré tangent est la somme disjointe de tous les espaces tangents. Il est utilisé pour étudier l'évolution de la tangence sur la surface. Muni d'une connexion affine, il constitue l'ensemble de définition des fonctions continues définies sur la surface. Une connexion affine - souvent appelée "connexion" par simplification de langage - est un opérateur qui permet de définir le comportement des fonctions différentielles entre deux espaces tangents infiniment proches. Elle permet en outre à des champs de vecteurs d'être dérivés comme s'il s'agissait de fonctions définies sur la surface. C'est aussi cette notion qui permet d'étudier les déplacements le long des surfaces à travers les notions de courbure et de torsion. En théorie, il est possible de définir une connexion affine selon les besoins de l'étude. Les connexions de Koszul et de Levi-Civita restent cependant les plus utilisées. La connexion de Koszul permet de formaliser le transport d'un vecteur le long de cette dernière. Cette technique est appelée le "transport parallèle". La connexion de Levi-Civita est un cas particulier de la connexion de Koszul sans torsion, qui permet alors de définir la notion de géodésique de manière formelle.

L'étude du transport parallèle d'un vecteur le long d'une surface est intéressante pour comprendre sa topologie locale. En effectuant une boucle fermée sur la surface, il est possible de quantifier l'angle  $\theta$  par lequel le vecteur a tourné au cours de cette opération (**Figure A2-5**). Le signe et la valeur permettent de quantifier l'évolution de la courbure locale de la surface. De manière formelle, cet angle est quantifié par un crochet de Lie (**Définition 6**).

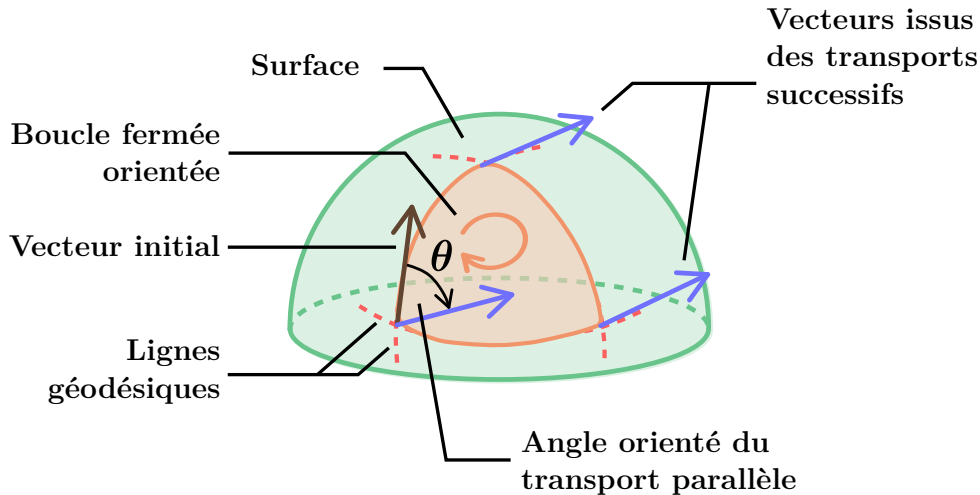


Figure A2-5 – Transport parallèle

**Définition 6.** Soit  $F$  un espace vectoriel muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication. Un crochet de Lie entre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $F$ , noté  $[\vec{u}, \vec{v}]$  est une opération permettant d'obtenir un nouveau vecteur de  $F$ . Cette application est bilinéaire et alternée - donc anti-symétrique - et qui vérifie une relation dite "relation de Jacobi" :

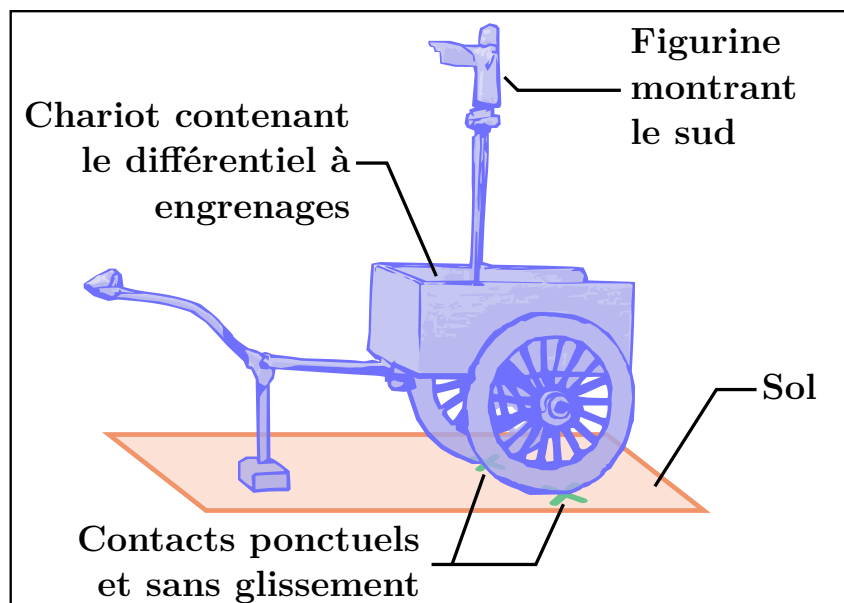
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in F^3, [\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}] + [\vec{y}, \vec{z}]$  (linéaire à gauche) ;
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in F^3, [\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{x}, \vec{z}]$  (linéaire à droite) ;
- $\forall \vec{x} \in F, [\vec{x}, \vec{x}] = \vec{0}$  (alterné) ;
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, [\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}]$  (anti-symétrique) ;
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, [\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] + [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] = \vec{0}$  (relation de Jacobi).

Le crochet de Lie usuel est défini de sorte à pouvoir être appliqué de manière simple sur des champs de vecteurs. Soient  $U$  et  $V$  deux champs de vecteurs définis sur  $F$  et  $g$  une fonction continue définie sur une variété munie d'une connexion affine. La dérivation de  $g$  par rapport aux champs  $U$  et  $V$  est rendue possible par la connexion affine de la variété. On les note respectivement  $X(g)$  et  $Y(g)$ . Le crochet de Lie usuel entre  $X$  et  $Y$  est l'unique champ de vecteurs noté  $[X, Y]$  et parfois  $\mathcal{L}_X Y$  tel que :

$$[X, Y](g) = X(Y(g)) - Y(X(g)).$$

La notation  $\mathcal{L}_X Y$  permet de mettre en avant le fait que le crochet de Lie usuel correspond physiquement à la dérivée du champ vectoriel  $Y$  le long du flux vectoriel généré par  $X$ .

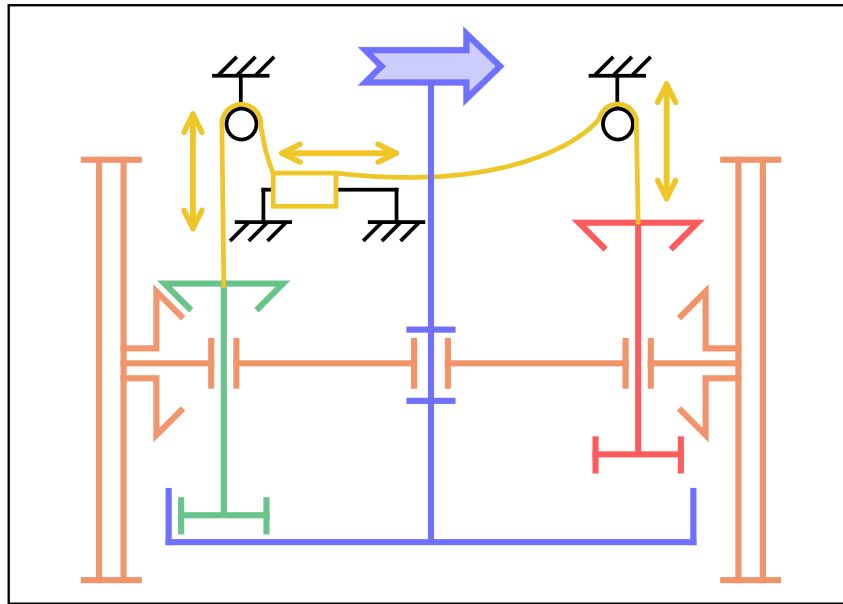
Le crochet de Lie usuel permet de prendre en compte que l'évolution de l'orientation d'un vecteur sur une surface dépend du chemin suivi sur la surface. Il mesure la non-commutativité des flux vectoriels. Il permet le transport des vecteurs sur la surface : il s'agit du "transport parallèle". Cet outil permet de visualiser la variation de courbure d'une surface en se déplaçant sur cette dernière, tout en restant toujours orienté de la même manière sur son fibré tangent. Il est possible de visualiser le transport parallèle de manière qualitative à travers le mécanisme du "zhǐnánchē", aussi désigné par l'expression "Chariot pointant le Sud" [229]. Il s'agit d'un chariot antique chinois servant de boussole non magnétique dont la légende raconte qu'il aurait été inventé par l'Empereur Jaune Huangdi vers 2600 avant Jésus-Christ, mais dont la première version historique semble plutôt créée par l'ingénieur en mécanique Ma Jun, du royaume de Wei durant la période des Trois Royaumes entre 200 et 265. Le chariot est constitué de deux roues et est surmonté d'une figurine qui montre la même direction lorsque le chariot se déplace (**Figure A2-6a**). Cette prouesse est rendue possible par un engrenage différentiel complexe, révolutionnaire pour l'époque, et dont le choix judicieux des rapports de dimensions permet à la figurine de conserver la même orientation malgré le changement de direction du chariot (**Figure A2-6b**). En termes mathématiques, le chariot réalise une approximation du transport parallèle à travers la cinématique du mécanisme. Le différentiel d'engrenages intègre les différences de rotation entre les deux roues et compense la rotation du chariot en faisant pivoter la figurine dans le sens opposé.



(a)

Figure A2-6 – Chariot pointant le Sud

(a) Maquette du chariot



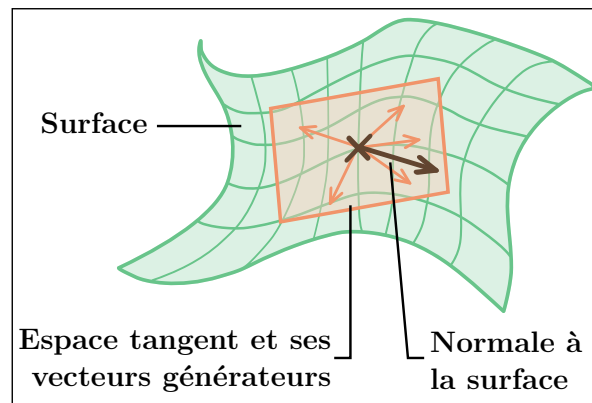
(b)

**Figure A2-6** – Chariot pointant le Sud

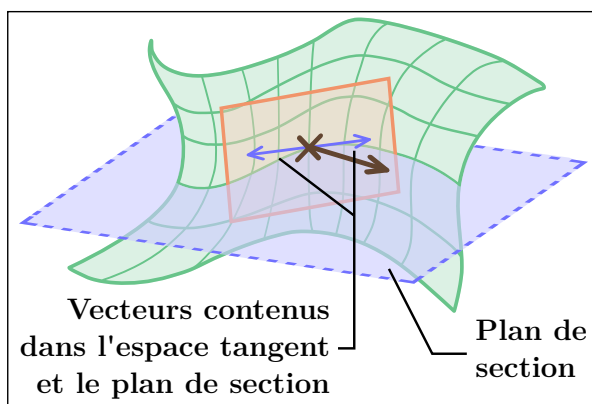
(b) Proposition de schéma cinématique d'époque [230]

Si le crochet de Lie permet de rendre compte de la variation de profil de la surface lors des déplacements sur cette dernière, c'est parce qu'il est intimement lié à l'idée de courbure. S'il est aisé de se représenter l'idée de courbure sur des variétés de dimension un comme l'évolution des tangentes d'une courbe, et donc comme la dérivée seconde de la fonction associée à la courbe, cela est plus délicat pour les surfaces. Il est cependant possible de caractériser la courbure en un point de la surface en étudiant les courbes extraites de la surface passant par ce point. Ces courbes sont donc tangentes au plan tangent associé à ce point.

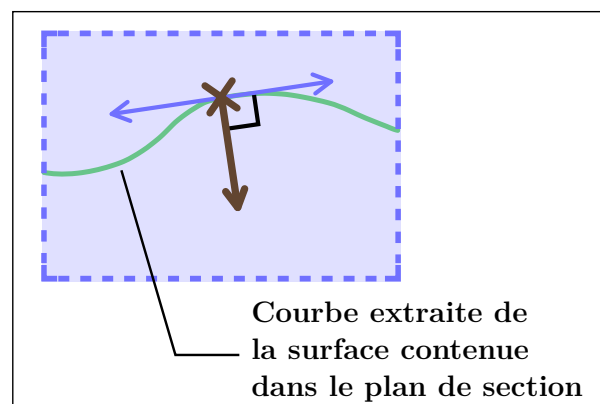
En considérant le plan tangent associé au point de la surface, il est possible d'extraire un ensemble de courbes locales issues de l'intersection de la surface avec la famille des plans normaux au plan tangent, contenant le point de la surface considéré et engendrés par un vecteur générateur du plan tangent (**Figure A2-7**). Les vecteurs générateurs du plan tangent sont issus de la rotation d'un vecteur quelconque du plan tangent autour de l'axe normal au plan tangent passant par le point de la surface étudié. Il est possible d'associer ces vecteurs à la courbure de la courbe extraite associée : il s'agit de l'application de Gauss, qui représente ces vecteurs sur la sphère unité (**Figure A2-8a**).



(a)



(b)



(c)

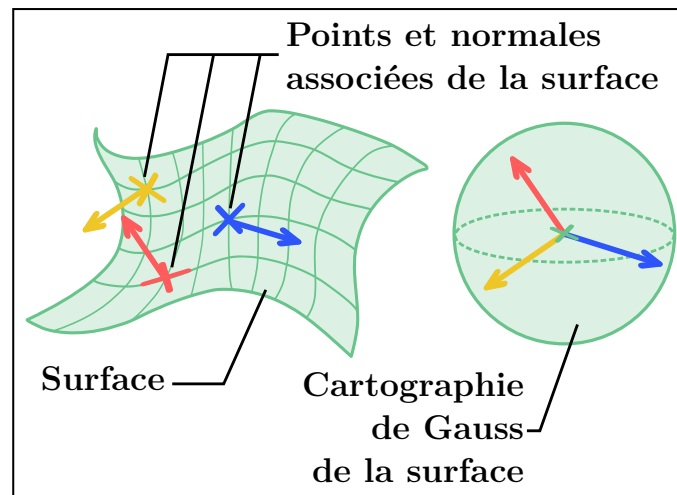
**Figure A2-7** – Courbes extraites du plan tangent

(a) Plan tangent et ses vecteurs générateurs

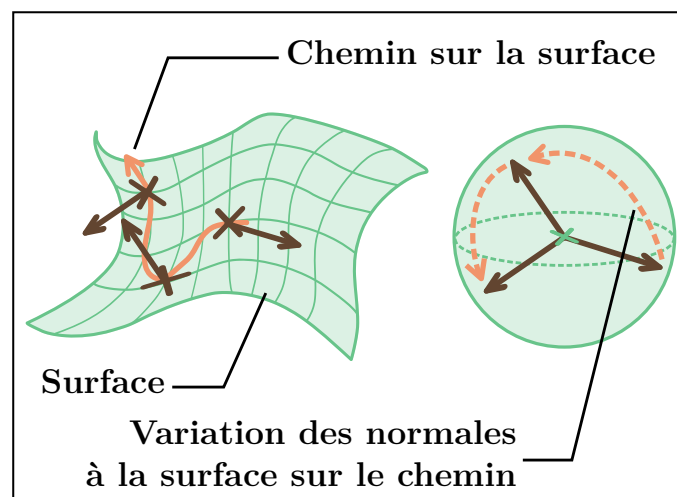
(b) Plan de section de la surface (c) Courbe extraite du plan tangent

Parmi les différentes courbes extraites du plan tangent, deux courbes sont remarquables : l'une possède la plus grande courbure parmi toutes celles des courbes extraites, et l'autre possède la plus petite courbure. Par continuité de la surface, deux courbes extraites de deux plans quasiment superposables (similaires par une rotation d'angle très faible autour de l'axe normal au plan tangent et passant par le point de la surface étudié) auront une courbure très voisine. La courbure des courbes extraites évolue ainsi de manière continue sur une révolution complète du plan d'extraction. Les deux courbes remarquables sont appelées "courbes principales", et leurs courbures sont désignées comme les "courbures principales" de la surface au point considéré. On démontre que les plans d'extraction des courbes principales sont orthogonaux. Les courbures principales sont celles qui ont le plus grand impact sur la forme locale de la surface, et peuvent être utilisées pour caractériser la géométrie de la surface, localement, à l'ordre 2. L'étude de l'évolution des courbures se fait à travers l'endomorphisme de Weingarten (**Figure A2-8b**), qui correspond à la différentielle de l'application de Gauss. Les courbures principales sont les valeurs propres de cet endomorphisme.





(a)

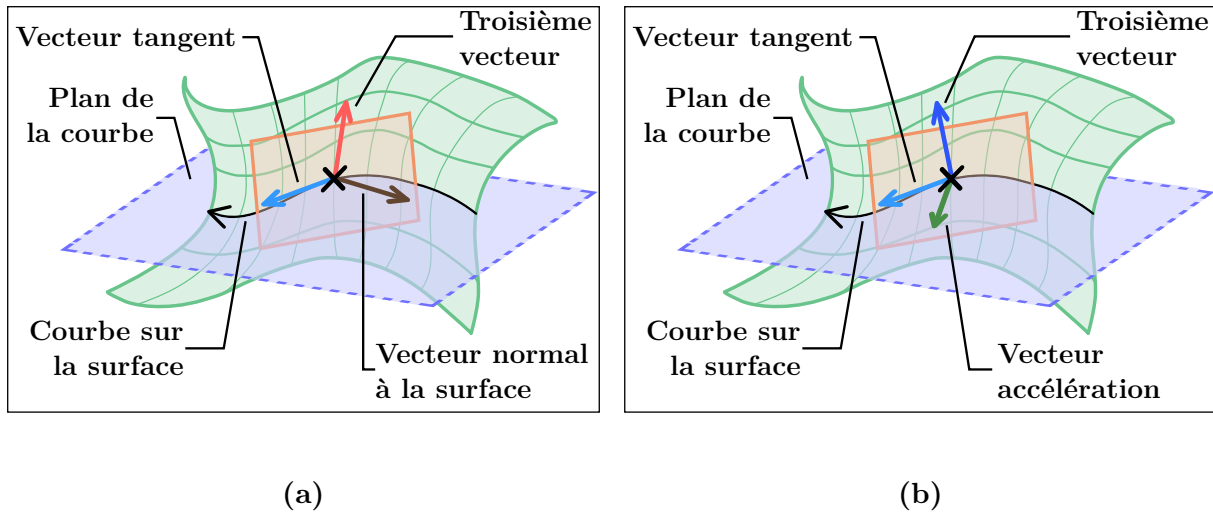


(b)

**Figure A2-8** – Cartographie des courbures locales d’une surface

(a) Application de Gauss (b) Endomorphisme de Weingarten

Le plan tangent peut être localement associé à un repère, appelé “repère de Darboux-Ribaucour” ou plus communément “repère de Darboux”, et parfois “repère géodésique”. Il est utilisé pour étudier des courbes extraites d’une surface, à condition que cette surface soit plongée dans l’espace euclidien. Il s’agit d’un repère orthogonal défini par un vecteur normal à la surface, le vecteur tangent à la courbe étudiée au point considéré orienté dans le sens de parcours, et du produit vectoriel de ces deux derniers (**Figure A2-9a**). Il permet de définir formellement ce qu’est une courbe géodésique. Ce repère diffère du repère orthogonal de Frénet, lui aussi défini par le vecteur tangent, mais dont le deuxième vecteur, aussi contenu dans le plan de la courbe extraite, est obtenu par dérivation du premier par rapport à l’abscisse curviligne de la courbe étudiée (**Figure A2-9b**). Le troisième vecteur est aussi issu du produit vectoriel des deux premiers. Ces deux repères sont restreints à l’étude des courbes extraites et n’ont pas de réelle signification pour la surface elle-même.



**Figure A2-9** – Repères orthogonaux de courbes 3D sur une surface

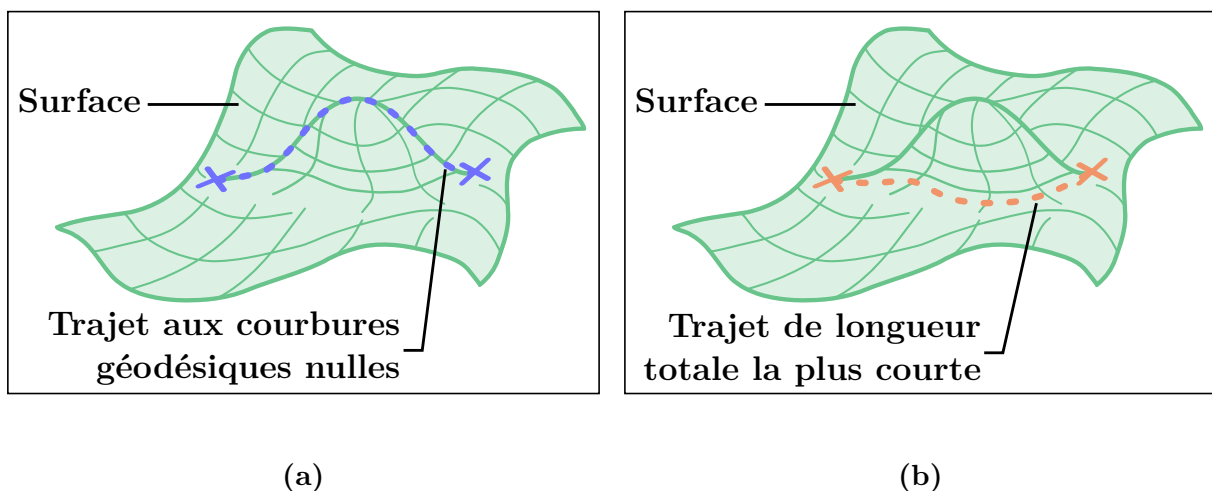
(a) Repère de Darboux-Ribaucour (b) Repère de Frénet

Si chaque vecteur du repère de Darboux est dérivé par rapport à l'abscisse curviligne de la courbe extraite de la surface, ils sont inclus dans le plan généré par les deux autres vecteurs. Les équations sont les formules de Darboux. Ce sont les coefficients associés aux deux autres vecteurs qui permettent de définir la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique (**Définition 7**).

**Définition 7.** Soient  $P$  le point d'une surface  $S$  localement continue et dérivable en  $P$  plongée dans un espace euclidien,  $C$  une courbe extraite de  $S$  passant par  $P$  d'abscisse curviligne  $s$  et  $F$  un espace vectoriel associé à  $S$ . Le vecteur normal à  $S$  en  $P$  est noté  $\vec{N}$  et le vecteur tangent à  $C$  orienté dans le sens croissant de  $s$  est noté  $\vec{T}$ . Le produit vectoriel  $\vec{N} \times \vec{T}$  est noté  $\vec{G}$ . La courbure normale  $\gamma_n$ , la courbure géodésique  $\gamma_g$  et la torsion géodésique  $\tau_g$  sont les uniques coefficients vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} = \gamma_g \vec{G} + \gamma_n \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{G}}{\partial s} = -\gamma_g \vec{T} - \tau_g \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = -\gamma_n \vec{T} + \tau_g \vec{G}. \end{cases}$$

Une courbe géodésique est définie comme une courbe dont la courbure géodésique est nulle en tout point. Cela signifie qu'en tout point, la dérivée du vecteur tangent à la courbe par rapport à son abscisse curviligne - c'est-à-dire le vecteur accélération de la courbe - n'a aucune composante dans le plan tangent : il est colinéaire au vecteur normal à la surface. Ainsi, le géodésique est la généralisation du concept de ligne droite sur une surface courbée. Une telle courbe minimise localement les trajets sur la surface. Cela ne signifie cependant pas toujours qu'une courbe géodésique correspond au chemin le plus court, car cela dépend de la forme globale de la surface (**Figure A2-10**). Une courbe géodésique entre deux points infinimentésimement proches, si elle existe, n'est pas forcément unique. On peut ainsi citer l'exemple classique de la sphère : les géodésiques sur une sphère sont les grands cercles, définis en tant que courbes d'intersection entre la sphère et les plans passant par le centre de la sphère. Dans le cas de la sphère, les géodésiques sont aussi les courbes minimisant le trajet global. Enfin, il existe toujours deux arcs de cercle géodésiques entre deux points différents situés sur la sphère : il s'agit des deux arcs de cercle supplémentaires sur le cercle formé par l'intersection de la courbe avec le plan passant par les deux points extrémités du trajet et le centre de la sphère. Selon le contexte, une courbe géodésique est parfois désignée comme le trajet minimal entre deux points bien qu'il ne s'agisse pas de la définition exacte. Cette confusion d'usage peut s'expliquer par le fait que dans un plan euclidien continu, la ligne droite entre deux points est à la fois le trajet de courbure nulle en tout point, et celui de longueur minimale.



**Figure A2-10** – Minimisation de trajet local et global

(a) Géodésique (minimisation des trajets locaux) (b) Courbe minimisant le trajet global

Chaque courbe extraite du plan tangent au point considéré est ainsi définie par ses courbures géodésique et normale. Ces courbures sont caractéristiques des courbes extraites, et non directement de la surface. Or, il existe une infinité de courbes. Aussi, ces courbures sont utilisées afin de déterminer une seule courbure caractéristique à la surface. Selon le besoin, une courbure issue d'un calcul avec l'ensemble des courbures des courbes extraites est déterminée. Les trois courbures les plus utilisées sont les suivantes :

- La courbure moyenne ;
- La courbure de Gauss ;
- La courbure scalaire de Ricci.

La courbure moyenne, souvent notée  $H$ , est la moyenne des courbures principales. Elle correspond à la moyenne signée de toutes les courbes issues des plans d'extraction, et donc à la demi-trace de l'endomorphisme de Weingarten. Il s'agit d'une propriété extrinsèque de la surface, qui n'est pas préservée par les transformations isométriques. Aussi, il ne s'agit pas d'un invariant topologique. Elle joue néanmoins un rôle prépondérant dans l'étude des surfaces minimales, évoquées dans la **Section 1.2**. La courbure moyenne a une interprétation physique et est liée à la minimisation d'énergie.

La courbure de Gauss, communément notée  $K$ , est définie en tant que produit des courbures principales. Il s'agit donc du déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. Propriété intrinsèque, elle constitue un invariant topologique de la surface et permet donc de caractériser totalement la courbure d'une surface, contrairement à la courbure moyenne. La courbure de Gauss mesure la tendance qu'a la surface à être assimilable à un plan courbé mais non dilaté. Ainsi, elle caractérise le caractère euclidien, elliptique ou hyperbolique de la métrique locale sur la surface (**Figure A2-11**). Une manière d'imaginer la courbure de Gauss consiste à considérer une feuille de papier infinitésimale et rigide dont on essaierait de la faire épouser localement la surface. S'il est possible de la faire épouser parfaitement la surface, la courbure de Gauss est nulle : une des courbures principales est nulle. C'est le cas par exemple d'un plan, ou d'un cylindre. La surface est dite "localement développable", et sa géométrie est localement euclidienne. Physiquement, la courbure de Gauss permet de quantifier la rigidité d'une surface : pour deux surfaces globalement similaires, si l'une a une courbure de Gauss nulle, alors elle sera moins rigide que l'autre. Elle a notamment des applications dans l'étude de la rigidité des membranes biomécaniques [231]. Le signe de la courbure de Gauss informe aussi sur la nature locale de la surface. Si elle est positive, la surface est dite "localement elliptique" et sa géométrie est localement assimilable à un ellipsoïde : la surface a alors l'aspect d'un dôme. Le signe des courbures principales indique alors s'il s'agit localement d'une bosse (courbures principales positives) ou d'un creux (courbures principales négatives). Si elle est négative, sa géométrie est localement assimilable à un hyperboloïde : la surface a localement la forme d'une selle de cheval. En tant qu'invariant, la courbure de Gauss ne dépend que des distances mesurées sur la surface et pas de la manière dont la surface est plongée dans l'espace euclidien.

La courbure scalaire de Ricci, souvent notée  $R$  n'est pas définie directement à partir des courbures principales. Elle caractérise l'évolution relative de géodésiques parallèles infinitésimalement proches. Elle est définie à partir du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, qui caractérise de manière générale la courbure d'une variété différentielle munie d'une connexion affine. Le tenseur est un concept très général utilisé en algèbre géométrique pour représenter des multivecteurs ou des applications linéaires mettant en jeu plusieurs variables vectorielles. La courbure scalaire de Ricci est donc généralisable à des variétés différentielles de dimension quelconque contrairement aux courbures moyenne et de Gauss valables uniquement en dimension deux. Elle permet de mesurer la tendance de la surface à respecter une métrique euclidienne. Pour cela, un voisinage local de la variété

différentielle est créé à partir de courbes géodésiques de même longueur dirigées dans toutes les directions de la variété. Puis, le volume dimensionnel de ce voisinage inclus dans la variété est comparé à celui de la boule dimensionnelle de même rayon de voisinage. Ainsi, dans le cas de surfaces, il s'agit de comparer l'aire du disque de voisinage sur la surface obtenue à partir de géodésiques de longueur infinitésimale à celle du disque euclidien ayant pour rayon la longueur infinitésimale des géodésiques. En quelque sorte, la courbure scalaire de Ricci constitue une généralisation du concept de variation du rayon du cercle osculateur pour les courbes. Dans le cas des surfaces, elle caractérise l'évolution de l'aire des sphères tangentes à cette surface approximant localement la géométrie. La courbure est dite "scalaire" car elle n'exprime aucune information directionnelle. La courbure scalaire de Ricci est en réalité la trace du tenseur de courbure de Ricci, lui-même défini comme le champ tensoriel d'ordre deux de la trace du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Comme la courbure de Gauss, elle est une propriété intrinsèque des surfaces, et constitue donc un invariant topologique : en dimension deux, elle est d'ailleurs égale au double de la courbure de Gauss. Cependant, la courbure scalaire de Ricci ne suffit pas à caractériser complètement la courbure d'une variété riemannienne de dimension strictement supérieure à deux et la connaissance entière du tenseur de courbure de Ricci est nécessaire.

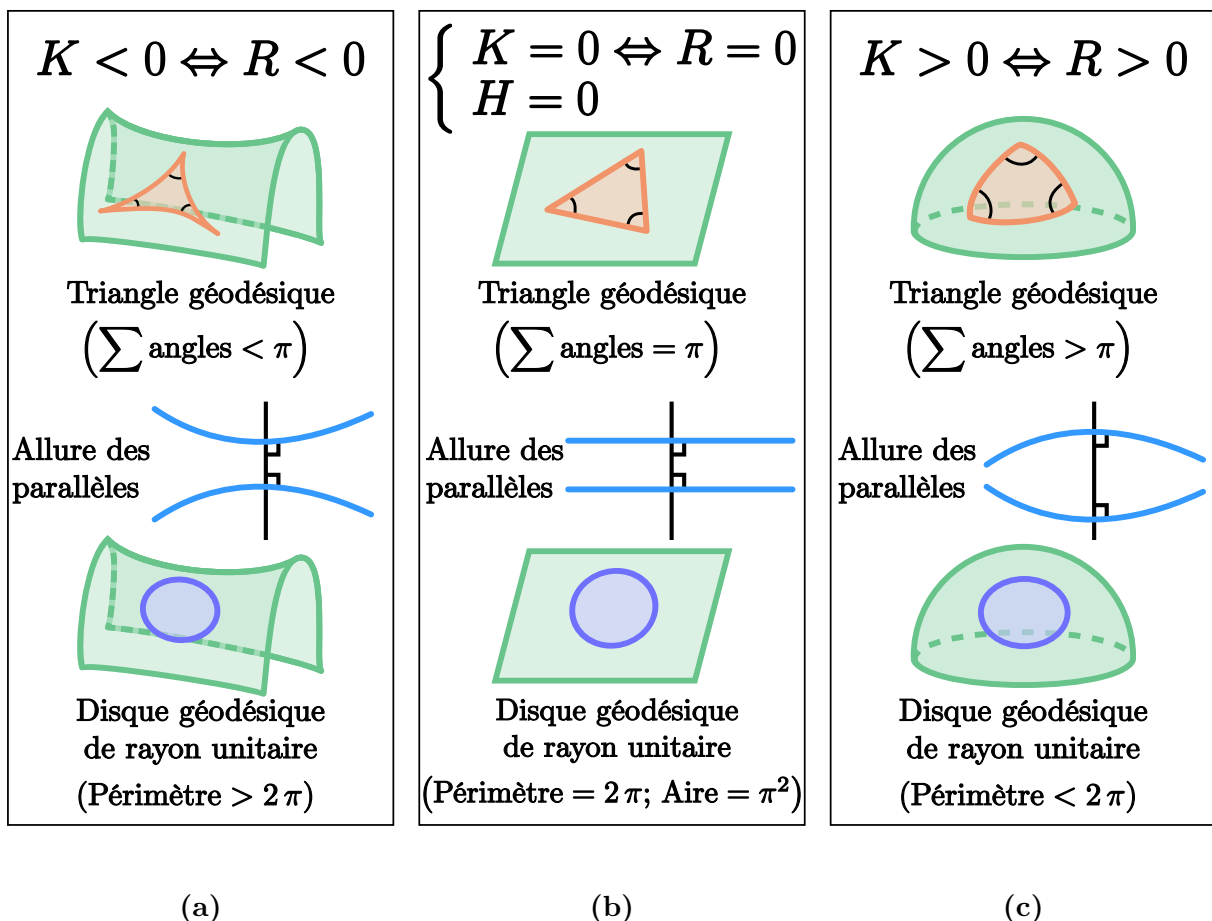


Figure A2-11 – Métriques locales des surfaces

(a) Métrique hyperbolique (b) Métrique euclidienne (c) Métrique elliptique

Comme énoncé précédemment, la courbure de Gauss et la courbure scalaire de Ricci sont des invariants topologiques. Comme expliqué dans la **Sous-section A2.1**, l'étude des invariants des variétés différentielles apporte des informations sur leur structure : ces invariants constituent l'ensemble des propriétés qui ne changent pas lorsque la variété est déformée de manière continue sans déchirure. Une telle déformation est appelée un "homéomorphisme". Par exemple, le nombre de trous indépendants sur une variété, appelé "genre" de la variété, est un invariant. Tout comme pour l'étude des matrices, des variétés qui ont des invariants similaires partageront certaines propriétés. Ainsi, il est parfois possible d'effectuer certaines études sur une variété différentielle ayant une forme plus simple mais possédant les mêmes invariants que la variété initiale, et donc homéomorphe à cette dernière. Le transport parallèle sur une boucle fermée permet lui aussi de déterminer un invariant sur les surfaces.

L'angle  $\theta$  résultant du transport parallèle d'un vecteur par une boucle fermée sur une surface est égal à la somme des intégrales de la courbure de Gauss  $K$  sur la surface  $M_S$  délimitée par la boucle fermée, et de la courbure géodésique  $k_g$  sur sa frontière  $\partial M_S$  délimitée par cette même boucle fermée. Ce résultat majeur de la topologie est donné par la formule de Gauss-Bonnet (**Équation A2-3**) :

$$\theta(M_S) = \int_{M_S} K dA + \int_{\partial M_S} k_g ds = 2\pi \chi(M_S) \quad (\text{A2-3})$$

En divisant  $\theta$  par  $2\pi$ , un angle unitaire noté  $\chi$  est obtenu. Cet angle est appelé "caractéristique d'Euler-Poincaré" ou "caractéristique d'Euler". Sur les surfaces continues, la signification de la caractéristique d'Euler est complexe et met en jeu les notions d'homologie et de cohomologie, concepts très abstraits qui repoussent les frontières de la topologie. Comme expliqué dans la **Sous-section A2.1**, Poincaré s'est intéressé à l'étude des invariants en topologie. C'est justement lui qui a pressenti la notion d'homologie en premier dès 1895 [222]. L'homologie est une méthode consistant à construire des invariants algébriques sur les espaces topologiques. La motivation initiale était de distinguer deux formes en examinant leurs trous. La cohomologie, apparue par la suite, est une méthode cherchant à assigner des invariants algébriques plus riches à l'espace topologique que ceux déterminés par l'homologie.

La caractéristique d'Euler s'interprète très grossièrement comme une quantification du défaut d'angle sur une courbe fermée incluse dans la surface. L'appellation "caractéristique d'Euler" est quant à elle d'origine historique. Sa découverte est issue d'études sur les polyèdres convexes : un polyèdre est une surface fermée constituée d'un ensemble de faces liées par des arêtes communes. Il est convexe si pour tout segment formé par deux points sur le polyèdre est contenu sur le polyèdre ou à l'intérieur du volume qu'il délimite. Pour un polyèdre convexe, il existe une équation liant le nombre de faces  $F_{poly}$ , d'arêtes  $A_{poly}$  et de sommets  $S_{poly}$  (**Équation A2-4**). C'est la constante issue de cette équation qui a été désignée comme caractéristique d'Euler. Or, pour un polyèdre, la somme de tous les angles

relatifs aux sommets est égale à  $4\pi$ . La somme des angles est donc égale au produit de la caractéristique d'Euler par  $2\pi$ , ce qui rejoint sensiblement la formule de Gauss-Bonnet (**Équation A2-3**).

$$\chi_{poly} = F_{poly} - A_{poly} + S_{poly} \quad (\text{A2-4})$$

Ainsi, les outils mathématiques principaux permettant d'étudier les surfaces ont été présentés dans cette section. Ces outils de calcul sont fonctionnels pour des surfaces continues décrites par des fonctions. Dans le cas où la surface est décrite par l'ensemble des points  $M_P$  régis par les deux paramètres  $u$  et  $v$ , il est possible de synthétiser la géométrie différentielle en deux équations : les première et seconde formes quadratiques fondamentales. Pour cela, chaque point  $M_P$  de la surface est associé à un vecteur  $\overrightarrow{M_P}$  et au vecteur  $\overrightarrow{N_P}$  normal à la surface en  $M_P$  issu du repère de Darboux-Ribaucour exprimés dans un repère orthonormé quelconque choisi pour l'étude. La première forme fondamentale (**Équation A2-5**) permet d'étudier une courbe extraite de la surface d'abscisse curviligne  $s$ , tandis que la seconde forme fondamentale (**Équation A2-6**) permet d'étudier le plan tangent :

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial u} \right\|^2 du^2 + 2 \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial v} dudv + \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial v} \right\|^2 dv^2 \quad (\text{A2-5}) \\ d^2 \overrightarrow{M_P} \cdot \overrightarrow{N_P} = \left( \frac{\partial^2 \overrightarrow{M_P}}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 \overrightarrow{M_P}}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 \overrightarrow{M_P}}{\partial v^2} dv^2 \right) \cdot \overrightarrow{N_P} \quad (\text{A2-6}) \end{array} \right.$$

Pour alléger les notations des formes quadratiques fondamentales, il est coutume de poser les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial u} \right\|^2 \\ F = \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial v} \\ G = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M_P}}{\partial v} \right\|^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\partial^2 \overrightarrow{M_P}}{\partial u^2} \\ M = \frac{\partial^2 \overrightarrow{M_P}}{\partial u \partial v} \\ N = \frac{\partial^2 \overrightarrow{M_P}}{\partial v^2} \end{array} \right. \quad (\text{A2-7})$$

La première forme quadratique fondamentale correspond à la formalisation du concept de produit scalaire restreint au fibré tangent de la surface, tandis que la deuxième forme formalise l'endomorphisme de Weingarten. À partir de la simple connaissance des valeurs des deux formes quadratiques fondamentales en un point  $M_P$  d'une surface donnée, il est par exemple possible de remonter à la courbure moyenne  $H$  et à la courbure de Gauss  $K$  en ce point [232] :

$$\begin{cases} H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} \\ K = \frac{LN - N^2}{EG - F^2} \end{cases} \quad (\text{A2-8})$$

Puis, en repartant de la définition de ces deux courbures, il est possible de remonter aux courbures principales  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en  $M_P$ , voire même aux rayons de courbure principaux qui sont égaux à l'inverse des courbures principales. En résolvant un problème à deux équations et deux inconnues issu de  $H$  et  $K$ , et en supposant  $\gamma_1 \geq \gamma_2$ , on obtient ainsi :

$$\begin{cases} \gamma_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \\ \gamma_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \end{cases} \quad (\text{A2-9})$$

Les deux formes quadratiques fondamentales sont étroitement liées, si bien qu'il est possible de n'exprimer la courbure de Gauss en un point d'une surface qu'en utilisant la première forme fondamentale grâce à la formule de Brioschi à l'aide de déterminants [233]. Cette formule, démontrée par Francesco Brioschi au cours de ses travaux sur les surfaces entre 1848 et 1854 se base sur le grand théorème énoncé par Gauss en 1828 : le "Theorema Egregium" [234]. Ce théorème important indique que la courbure en un point d'une surface peut être déterminée uniquement à partir de métrique locale sur cette dernière, et donc que cette grandeur ne dépend pas de l'espace dans lequel la surface est plongée. C'est ce théorème qui a permis une avancée considérable sur l'étude des surfaces en considérant leur géométrie locale, et qui a notamment amené à formuler les deux formes quadratiques fondamentales [235].



## A3 Cas particuliers de prédictibilité des couches

### A3.1 Contextualisation

La recherche d'une direction de propagation est une étape implicitement admise dans les méthodes de génération de trajectoire usuelles permettant de déclencher le recouvrement d'une surface par le calcul de couches successives. Cette étape de recherche de direction et n'a jamais été remise en cause, mais elle présuppose deux faits. Tout d'abord, cela implique qu'une telle direction puisse être déterminée à partir de la géométrie de la pièce à fabriquer. Puis, cela implique que la direction prédite avant le calcul des couches soit cohérente avec les couches effectivement calculées.

Le but de la démonstration suivante proposée est de mettre en avant par un raisonnement mathématique succinct que la fiabilité de la prédiction de cette direction n'est pas nécessairement garantie pour une géométrie quelconque, mais uniquement dans des cas de géométries simples particulières. La démonstration proposée raisonne sur une génération de trajectoire par couches équidistantes et à distance euclidienne fixe. Notons que le raisonnement proposé est généralisable pour des distances variables entre deux mêmes couches.

### A3.2 Démonstration

Soit  $f_h : (\mathbb{R}^3)^m \rightarrow (\mathbb{R}^3)^{m'}$  l'application qui à l'ensemble des  $m$  points de la couche précédente  $C_{n-1}$  associe les  $m'$  points de la nouvelle couche  $C_n$  situés à une distance  $h$  de la couche  $C_{n-1}$ . Les valeurs de  $m$  et  $m'$  sont régies par les contraintes de discrétisation de couche : leur obtention n'est pas considérée pour le raisonnement qui suit. L'obtention d'une nouvelle couche dépend de la couche qui la précède et de la hauteur de couche souhaitée. On note  $C_n = f_h(C_{n-1})$ .

Par involution, la couche  $C_n$  peut être déterminée récursivement à partir de la couche d'intersection pièce-substrat  $C_0$ . On a alors :  $C_n = f_h^n(C_0)$ . Cependant, cela signifie que toutes les couches précédentes doivent être connues pour pouvoir en calculer une nouvelle, et donc que la forme d'une couche ne peut pas être connue avant d'avoir déterminé les précédentes dans le cas général, s'il n'y a pas de simplification de la résultante  $f_h^n$  des  $n$  involutions de  $f$ . Cette non-prévisibilité s'explique par le fait que les distances considérées pour le respect de la hauteur de couche sont plongées dans l'espace 3D, et non pas sur la surface elle-même contrairement à des géodésiques, qui sont cumulatives.

En effet, dans le cas particulier où les distances euclidiennes considérées correspondent toutes à des distances géodésiques sur la surface, on constate, en notant  $f^*$  cette application, que  $C_n = f_h^*(C_{n-1}) = f_{2 \times h}^*(C_{n-2})$ . Ainsi, par récurrence triviale, on montre que  $C_n = f_{n \times h}^*(C_0)$ . Par conséquent, dans ce cas, toute couche peut être déterminée à partir d'une seule et même couche, en particulier la couche d'intersection  $C_0$ .

## A4 Détermination de la borne supérieure de $d_P$

### A4.1 Contextualisation

L'annexe suivante détaille la méthode permettant d'obtenir de manière approximative la borne supérieure de la plage de variation du paramètre  $d_P$  dans l'algorithme de génération de trajectoire du Schwarz P paramétrisé. La démarche part du constat initial que la recherche des points par optimisation numérique nécessite une fonction de coût de gradient au moins continu et non constant pour déclencher la recherche des paramètres de sortie optimaux sans stagner. Rappelons que soit le type d'optimisation utilisée dans l'algorithme, cette fonction de coût est le carré de la différence d'une distance objectif avec la distance du point recherché à sa couche précédente. Cela implique certaines exigences sur le nombre de points de chaque couche de la trajectoire lors de son interpolation.

Pour calculer une nouvelle couche, la couche qui la précède est interpolée par une fonction polynomiale du second degré. Cette interpolation permet l'obtention de trois fonctions de même variable  $s$  régissant les coordonnées de cette couche :  $X(s)$ ,  $Y(s)$  et  $Z(s)$  sont des polynômes du second degré, à condition que la couche possède au moins trois points non alignés. En effet, si la couche contient un unique point alors il n'y a pas d'interpolation car pas de segment à interpoler, tandis que pour une couche contenant deux points, la couche résultante est un segment, c'est-à-dire la restriction d'une droite. Or, dans le cas où les points de la couche précédente sont alignés, l'interpolation correspondante est une droite, donc les fonctions  $X(s)$ ,  $Y(s)$  et  $Z(s)$  sont des polynômes du premier degré. En tant que polynômes du premier degré, leurs dérivées sont constantes.

Or, dans le cas particulier où les fonctions dérivées des polynômes sont toutes les trois constantes, le gradient de la fonction de coût est nul, donc constant. Par conséquent, chaque couche précédente doit contenir au moins trois points, et le choix de la valeur indicative de discrétisation  $d_P$  doit répondre à cette exigence pour ne pas entraver artificiellement la convergence de l'algorithme de génération de trajectoire.

Deux cas sont à distinguer pour la borne supérieure du paramètre  $d_P$  selon le mode de paramétrisation utilisé. Le premier cas concerne le mode  $(z, T)$ , et le deuxième cas s'applique aux modes  $(y_{C1}, T_{y_{C1}})$  et  $(x_{C2}, T_{x_{C2}})$ .

### A4.2 Approximation de la borne

Premièrement, lors de l'utilisation du mode  $(z, T)$ , la propagation des points au sein d'une même couche se fait par l'utilisation des iso-T. Premier et dernier points de la couche mis à part, chaque nouveau point est calculé à partir du point qui le précède dans sur la couche. Le calcul des points de la couche se fait dans le sens croissant des iso-T. Cela signifie qu'entre deux points successifs, une fraction de l'intervalle de variation du paramètre complémentaire  $z$  est parcourue. Au sein d'une même couche, les points ne sont pas situés sur le même iso-Z. Cependant, le mode  $(z, T)$  est uniquement utilisé en dehors du voisinage des couches critiques, où le dénivelé des couches selon la coordonnée cartésienne  $Z$  est plus faible de par la géométrie du Schwarz P.

On peut donc estimer une borne supérieure en considérant qu'elle doit être telle que l'iso-Z de plus petite longueur sur le huitième de Schwarz P contienne au moins trois points pour assurer que la couche interpolée correspondante fournisse un polynôme dont le degré est exactement égal à deux pour les raisons de convergence évoquées précédemment.

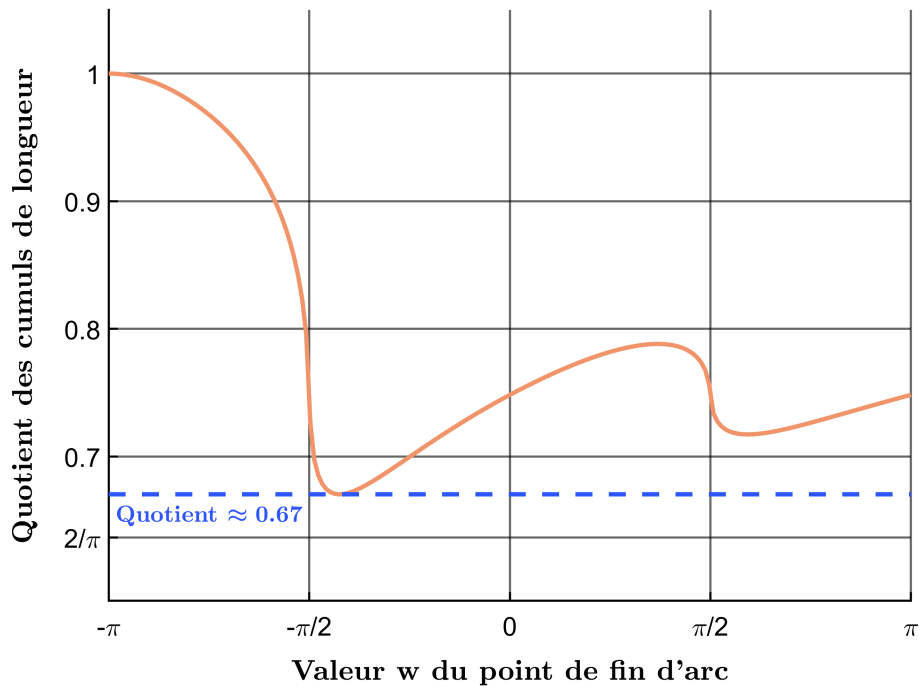
Les iso-Z de plus petite longueur sont atteints pour les valeurs  $z = -\pi$ ,  $z = 0$  et  $z = \pi$ , ce qui correspond respectivement aux iso-Z situés en bas, au milieu et en haut du motif. La longueur de ces iso-Z dépend de la longueur du motif  $l_P$ . On constate néanmoins que le quotient entre cette longueur d'arc et  $l_P$  est une constante qui vaut environ 0,1911. Cela signifie donc qu'à  $l_P$  fixé, la longueur des iso-Z les plus courts vaut 0,1911  $l_P$ . Ainsi, la présence d'au moins trois points uniformément espacés d'une longueur d'arc de valeur  $d_P$  dans le mode  $(z, T)$  signifie que  $d_P$  doit être au plus égal à la moitié de la longueur des plus petits iso-Z, ce qui se traduit par la condition suivante :

$$d_P \leq \frac{0,1911}{2} l_P \quad (\text{A4-1})$$

Deuxièmement, lors de l'utilisation des modes  $(y_{C1}, T_{y_{C1}})$  et  $(x_{C2}, T_{x_{C2}})$ , la borne majorante de  $d_P$  issue du mode  $(z, T)$  est insuffisante car les iso- $y_{C1}$  et les iso- $x_{C2}$  des points des couches concernées sont répartis dans un intervalle plus large. Ces courbes (illustrées à la **Figure 45** de la **Section 2.3** du **Chapitre 2**) étant similaires par translation selon l'axe  $\vec{Z}$ , cela conduit à envisager une même méthode pour trouver une borne supérieure valide pour  $d_P$  lors de l'utilisation de ces deux modes.

Pour une paramétrisation  $(w, T_w)$  quelconque, il y a une différence de cumul de longueur d'arc des iso- $T_w$  entre deux mêmes iso-W. En effet, de par la forme géométrique du Schwarz P, les iso- $T_w$  sont de plus en plus longs lorsque  $T_w$  varie de  $-1$  vers  $0$ . Ainsi, pour une même longueur d'arc de deux iso- $T_w$  de paramètre respectif  $T_w = -1$  et  $T_w = 0$ , et en considérant les points de départ d'arc situés sur le même iso-W, le point de fin de l'arc de l'iso- $T_w$  de paramètre  $T_w = -1$  est tel que son paramètre  $w$  est plus élevé que celui du point de fin de l'arc de l'iso- $T_w$  de paramètre  $T_w = 0$ . Cette différence de valeur sur le paramètre  $w$  constitue le dénivelé selon la direction de propagation des iso-W. On peut donc déduire du quotient des deux longueurs d'arc une grandeur représentative du taux de variation de ce dénivelé.

L'évolution du rapport de cumul de longueur d'arc entre iso- $T_w$  extrémaux, représentative de ce dénivelé, est illustrée à la **Figure A4-1**. Cette évolution n'est pas constante. Dans le cas particulier du mode  $(z, T)$ , ce rapport de cumul correspond approximativement à la variation de l'écart entre les points extrémaux d'une couche selon la direction d'empilement. Or, pour cette paramétrisation, qui est utilisée en dehors du voisinage des couches critiques, les iso-T sont par construction relativement parallèles à la direction de propagation. Il n'y a donc pas d'influence du dénivelé des couches sur le choix de  $d_P$  puisque ce paramètre concerne les iso-Z qui sont orthogonaux à la direction de propagation.



**Figure A4-1** – Évolution du rapport de cumul de longueur d’arc entre iso- $T_w$  extrémaux

Au contraire, pour les deux autres modes l’orientation inclinée de leurs iso- $W$  par rapport à la direction d’empilement des couches nécessite de prendre en compte ce dénivelé. Pour garantir la présence de trois points au moins sur toute couche générée lors de l’utilisation des modes  $(y_{C1}, T_{y_{C1}})$  et  $(x_{C2}, T_{x_{C2}})$ , on se place dans le cas le plus défavorable du dénivelé des couches. Comme expliqué précédemment, la variation du dénivelé des couches est approximativement similaire à l’évolution du rapport de cumul de longueur d’arc entre iso- $T_w$  extrémaux. On peut donc utiliser cette courbe pour estimer la borne supérieure de  $d_P$  recherchée.

Sur la courbe de la **Figure A4-1**, le rapport de longueur est le plus faible pour une valeur de  $w$  légèrement supérieure à  $-\pi/2$ , et vaut approximativement 0,67. Ce rapport minimal concerne des cumuls de longueur d’arc, donc il est valide pour des couches de hauteur infinitésimale. Il peut être utilisé pour l’approximation de la borne supérieure de  $d_P$  car  $h_P$  est négligeable devant l’ordre de grandeur de la longueur des iso- $T_w$ . On minore cependant ce rapport minimal pour augmenter la robustesse de l’approximation. On suppose donc que ce rapport vaut  $2/\pi$ , soit environ 0,63. Par conséquent, quel que soit le lieu des couches à  $h_P$  fixé, l’écart maximal entre iso- $T_w$  extrémaux est majoré par  $(1 - 2/\pi) h_P$ . La condition sur  $d_P$  pour que cette longueur d’arc contienne au moins trois points uniformément espacés se traduit donc par la condition suivante :

$$d_P \leq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) h_P \quad (\text{A4-2})$$

Enfin, rappelons que les deux bornes trouvées sont approximatives. À l'approche du basculement entre une paramétrisation  $(z, T)$ , et une paramétrisation parmi  $(y_{C1}, T_{y_{C1}})$  et  $(x_{C2}, T_{x_{C2}})$ , la borne supérieure estimée pour  $d_P$  bascule d'une valeur à une autre. Le voisinage d'une couche critique constitue une zone d'incertitude sur la paramétrisation idéale. De plus, selon la valeur de la hauteur de couche  $h_P$ , les basculements n'arrivent cependant pas à la même proximité d'une couche critique, étant donné qu'ils sont déclenchés par la première et la dernière traversée de cette dernière par une couche calculée.

Ainsi, pour des valeurs de  $h_P$  petites, les couches successives de la trajectoire sont plus proches les unes des autres, et donc le basculement s'opère à une distance plus faible de la couche critique concernée, ce qui augmente l'incertitude sur la borne approximative à privilégier. Pour pallier à cette incertitude, le minimum des deux bornes est utilisé pour majorer  $h_P$  :

$$d_P \leq \min \left( \frac{0,1911}{2} l_P , \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) h_P \right) \quad (\text{A4-3})$$

## A5 Paramètres des simulations par paramétrisation

Hauteur de couche $h_P$ (mm)	Valeur indicative de discrétisation $d_P$ (mm)	Temps total de calcul (s)	Nombre total de points
0,96	0,17	2 644,4	9 568
1,16	0,21	1 852,4	6 700
1,43	0,25	1 271,1	4 704
1,82	0,33	816,8	3 072
1,83	0,33	880,2	2 968
1,85	0,33	854,0	2 952
1,855	0,33	871,1	2 968
1,865	0,33	829,6	2 960
1,870	0,33	749,9	2 972
1,875	0,33	736,4	2 972
1,89	0,34	731,8	2 884
1,91	0,34	623,8	2 920
1,92	0,34	796,2	2 896
1,93	0,34	719,8	2 896
2,50	0,45	413,9	1 888
2,60	0,47	378,9	1 824
2,65	0,48	414,4	1 784
2,68	0,48	420,4	1 696
2,688	0,48	443,0	1 696
2,694	0,48	378,9	1 724
2,70	0,49	389,7	1 692
3,13	0,57	631,5	1 448
4,70	0,85	140,5	1 016
4,90	0,89	97,7	956
4,95	0,89	100,2	956
5,00	0,90	90,1	948
5,01	0,91	88,9	948
5,02	0,91	92,1 ; 91,6 ; 89,5 ; 70,9	948 ; 948 ; 948 ; 932
5,03	0,91	72,5	932
5,05	0,91	66,2	924
5,10	0,92	64,1	924
5,25	0,95 ; 1,05 ; 1,30 ; 12,00	76,2 ; 180,2 ; 63,4 ; 32,8	900 ; 876 ; 836 ; 736
5,91	1,07	84,3	820
5,95	1,08	69,5	840
6,00	1,01 ; 1,09	64,5 ; 75,4	856 ; 840
6,20	1,05	73,3	840

Table A5-1 – Paramètres d'entrée des simulations ( $l_P=25\text{mm}$ )

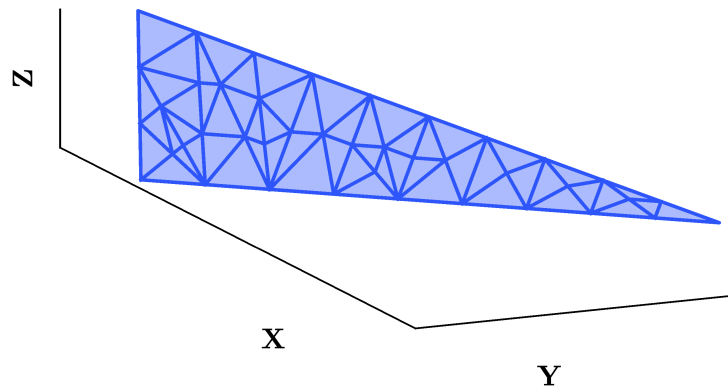
## A6 Subdivision du maillage initial

### A6.1 Contextualisation

L'objectif de la subdivision du maillage STL initial de la surface facettisée dont on souhaite générer une trajectoire est d'obtenir un ensemble de mailles triangulaires de dimension inférieure à la hauteur de couche  $h$  souhaitée. L'intérêt est double : utiliser chaque face du maillage une seule fois donc supprimer du maillage restant les faces utilisées au fur et à mesure de la génération pour réduire le temps de calcul, et empêcher la propagation des couches successives dans le sens opposé à la direction d'empilement.

Il existe de nombreux algorithmes de subdivision de maillage. Les méthodes de subdivision dépendent des exigences sur la taille et la forme des triangles de sortie. Les algorithmes traditionnels appliquent un raffinement par triangulation de Delaunay. Cette méthode a été initialement découverte par Jim Ruppert au début des années 1990 [236] en se basant sur un algorithme de calcul rapide de triangulation de Delaunay : le Premier Algorithme de Chew [237]. Une triangulation de Delaunay, si elle existe, n'est pas unique. La triangulation de Delaunay n'est pas une subdivision à proprement parler dans le sens où un nouveau maillage est créé à partir du premier. Le nouveau maillage est contenu dans l'enveloppe convexe du premier. Ainsi, des mailles peuvent être générées dans des régions non souhaitées si le maillage ne décrit pas un objet entièrement rempli par des mailles et dont l'enveloppe est convexe. En 2D, cela nécessite un maillage sans trou et dont l'enveloppe est convexe. En 3D, cela nécessite en plus que l'objet décrit par le maillage soit un volume et non plus une surface : le raffinement ne se fait plus à partir de triangles, mais de tétraèdres. De même, un raffinement de Delaunay n'est pas une subdivision au sens propre du terme puisque les mailles filles ne sont pas incluses dans les mailles mères. La motivation principale du raffinement était d'adapter la forme des maillages de manière systématique pour les simulations numériques de phénomènes physiques faisant appel à la méthode des éléments finis, tout en assurant que les subdivisions d'une même maille forment un sous-maillage de Delaunay. En effet, une des propriétés intéressantes des maillages de Delaunay est qu'ils maximisent les angles des triangles obtenus, et donc permet d'éviter d'obtenir des mailles de plus en plus allongées.

Durant la fin des années 1990 et au début des années 2000, des méthodes ont été développées pour pallier aux différents problèmes et obtenir des raffinements cohérents avec le maillage de départ, quel qu'il soit [238,239,240]. La maximisation des angles des triangles créés lors d'une triangulation de Delaunay implique une minimisation du nombre de triangles créés, mais ne permet pas de contrôler la taille de leurs arêtes. Il en va de même pour les raffinements de Delaunay. Cela peut ainsi amener à obtenir des triangles de dimensions inférieures dans certaines régions du maillage où leurs dimensions étaient déjà plus petites que la valeur souhaitée. Ainsi, une triangulation de Delaunay est en général appliquée de manière itérative sur les mailles indépendamment les unes des autres dès lors où la motivation principale est une réduction des dimensions des mailles : il s'agit d'une subdivision (**Figure A6-1**). Les mailles dont la taille est adéquate avant application de l'algorithme ne sont ainsi pas subdivisées à nouveau, et le nombre de mailles créées est ainsi limité.



**Figure A6-1** – Subdivision d’une maille par itérations de triangulations de Delaunay

Cependant, avec de telles méthodes de subdivision, le maillage subdivisé total reste connecté. Les mailles d’un fichier STL sont connectées entre elles : toutes les faces du maillage partagent des arêtes et sommets communs avec les faces triangulaires adjacentes. Comme détaillé à l’**Annexe A2**, la connexion sur une surface est un élément indispensable pour pouvoir y définir des opérations de déplacement sur cette dernière. Il en va ainsi de même pour une surface facettisée. Par exemple, c’est la connexion du maillage qui permet le calcul de propagation des champs géodésiques sur des surfaces de type STL par la Méthode de la Chaleur [64,65] évoquée au **Chapitre 1**. En effet, cette propagation se fait en utilisant les arêtes communes en tant que fenêtres de propagation des lignes géodésiques et sa facilité de convergence dépend de la géométrie de maille [241,242].

Or, la connexion, si elle est une propriété utile pour le calcul de phénomènes de propagation sur des surfaces facettisées, est une contrainte supplémentaire lors de la création d’un maillage facettisé, et augmente donc les instructions informatiques à opérer lors de sa détermination. En particulier, la connexion n’est pas indispensable pour la mesure de distances euclidiennes entre points de la surface, étant donné que de telles distances ne sont pas plongées sur la surface. Il n’est donc pas nécessaire que la subdivision du maillage initial possède des mailles connectées. De plus, le nombre d’itérations ne peut pas être anticipé en amont avec les méthodes de subdivision usuelles, ce qui implique que de telles méthodes ne permettent pas de maîtriser le nombre d’itérations à effectuer ni de connaître le nombre total de triangles résultant avant de les réaliser.

Ainsi, l’objectif de la méthode développée est d’offrir une méthode approximative mais systématique permettant d’avoir le contrôle sur le nombre d’itérations à effectuer et le nombre de sous-triangles obtenus avant même l’étape de subdivision. Cela permet de connaître en amont de la subdivision – donc de l’utilisation de l’algorithme de génération de trajectoire – les exigences en termes de stockage mémoire pour prévenir de toute erreur liée à un dépassement de mémoire en cours de calcul. La méthode recherchée doit permettre l’obtention d’un maillage subdivisé dont les mailles ont des arêtes de longueur au plus  $h$ , sont de géométrie acceptable – c’est-à-dire avec des angles suffisamment grands pour s’éloigner de triangles plats – et dont le nombre de mailles est le plus petit possible.



## A6.2 Méthode de subdivision

Les méthodes de subdivision de maillage sont généralement implémentées dans des langages de programmation rapides comme le C# ou le C++. Cela permet de réduire le temps de calcul, qui peut s'avérer exigeant pour des fichiers STL possédant une quantité de mailles importantes. Or, l'algorithme de génération de trajectoire a été développé en MATLAB. Ce langage est par nature plus lent que le C# et le C++ pour de tels calculs. Si l'algorithme de génération de trajectoire pourrait se limiter à des maillages préalablement subdivisés en tenant compte de la valeur de hauteur de couche  $h$  souhaitée pour la surface concernée, une méthode de subdivision a toute de même été développée pour permettre de générer une trajectoire pour un objet dont les mailles seraient trop grandes, et ainsi conserver les caractères de versatilité et d'aptitude au prototypage rapide de la fabrication additive. Ainsi, une méthode de subdivision propre aux exigences de MATLAB a été développée.

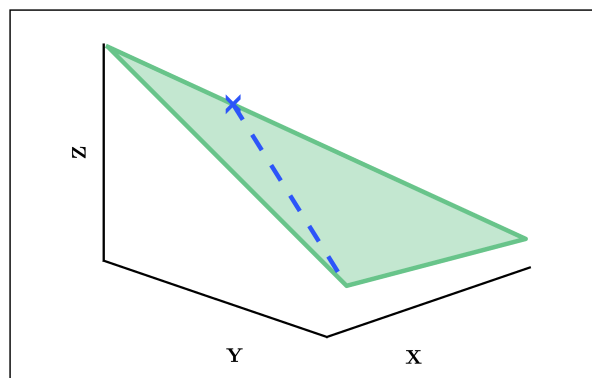
Une bonne pratique en MATLAB est d'utiliser des boucles itératives de type "for" plutôt que des boucles "while" lorsque cela est possible, car les premières peuvent être implémentées de manière vectorisée. La vectorisation est une méthode d'écriture de code en MATLAB optimisée pour la manipulation de matrices et de vecteurs sous forme dense. Les formes vectorisées font appel à des routines MATLAB précompilées et minutieusement optimisées pour réduire grandement le temps de calcul par rapport à une boucle "for" classique. L'objectif principal est donc d'estimer de manière fidèle le nombre d'itérations à réaliser pour obtenir le maillage subdivisé, quitte à augmenter le nombre de mailles. Ainsi, le code sera vectorisable, et le temps de calcul réduit. La méthode recherchée doit proposer un compromis entre la taille des mailles et leur nombre, tout en maximisant au mieux les angles des mailles pour éviter qu'elles ne soient trop allongées.

Tout d'abord, différentes méthodes de subdivisions de triangles ont été étudiées. Les techniques principales trouvées dans la littérature permettent d'obtenir deux, trois ou quatre triangles fils à partir d'un triangle mère [243,244]. La seule manière de diviser un triangle en deux sous-triangles est d'ajouter une arête traversant un sommet et son côté opposé. La méthode la plus courante pour subdiviser un triangle en trois sous-triangles consiste à ajouter un point à l'intérieur du triangle, puis à créer trois nouvelles arêtes entre ce point et chacun des sommets du triangle mère. Cette méthode est appelée la "subdivision par centroïde". Enfin, la quadrissection fait référence à l'ajout de trois sommets sur chaque arête du triangle initial pour obtenir les quatre triangles fils. Ces trois techniques sont illustrées à la **Figure A6-2**.

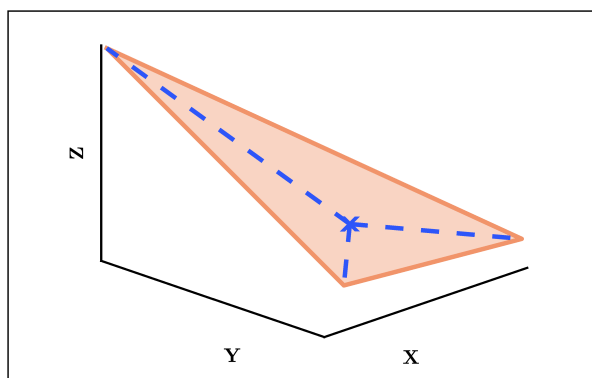
L'angle minimal de chacun des triangles fils doit être le plus grand possible. Dans ce contexte, les triangles équilatéraux sont idéaux. Par extension, cela signifie que les triangles fils doivent être les plus compacts possibles. Une conséquence directe est qu'ils doivent maximiser le quotient de leur aire par leur périmètre. Cela revient à quantifier la proximité entre la forme des mailles et celle d'un cercle. Pour cela, la circularité des mailles est calculée. Il existe plusieurs manières différentes de calculer une circularité, puisque le but est uniquement de pouvoir comparer les formes des triangles [245,246,247]. La définition de la circularité  $C$  d'un triangle  $T$  utilisée est la suivante :

$$C(T) = \frac{4\pi \text{ Aire}(T)}{[\text{Périmètre}(T)]^2} \quad (\text{A6-1})$$

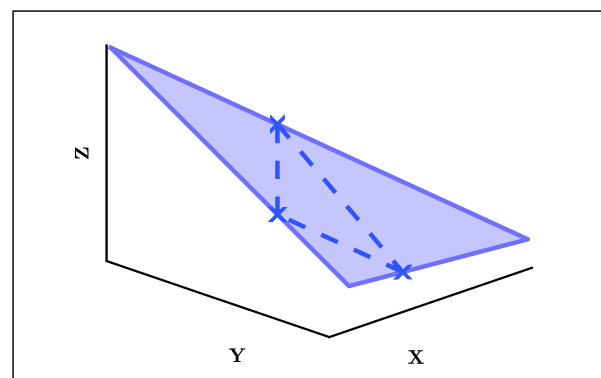
Un cercle a une circularité de 1. La cartographie des circularités de différentes géométries de triangles dont les arêtes sont unitaires – c'est-à-dire que leurs longueurs sont comprises entre 0 et 1 inclus – est illustrée à la **Figure A6-3**. L'impact du type de subdivision choisie sur la circularité des mailles filles a été étudié pour différents paramètres des trois méthodes de subdivision montrées à la **Figure A6-2**. De manière générale, la méthode du côté opposé permet d'obtenir des triangles de meilleure géométrie pour un même nombre de subdivisions. Plus précisément, subdiviser selon la médiane relative au côté le plus long donne les meilleurs résultats.



(a)



(b)

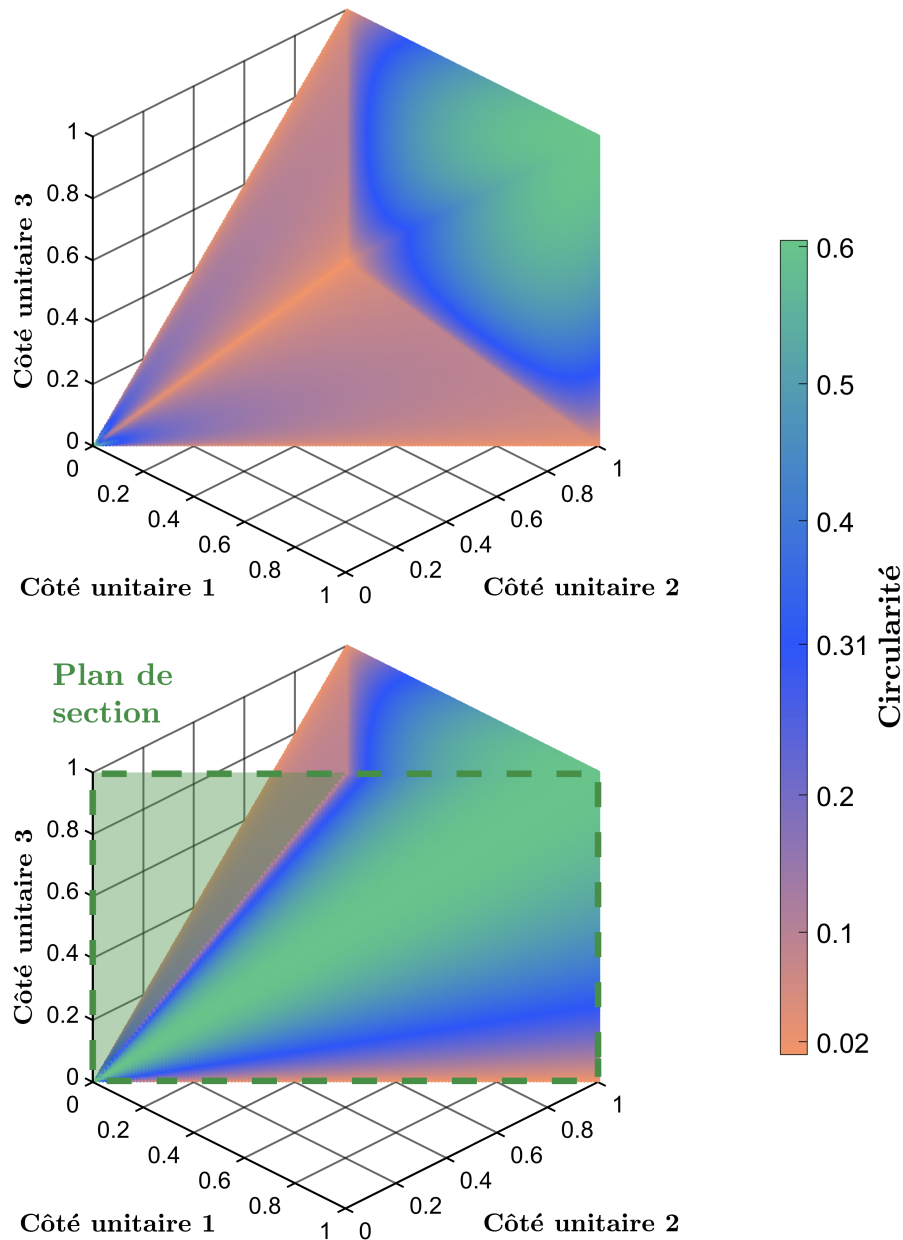


(c)

**Figure A6-2** – Techniques de subdivision d'un triangle

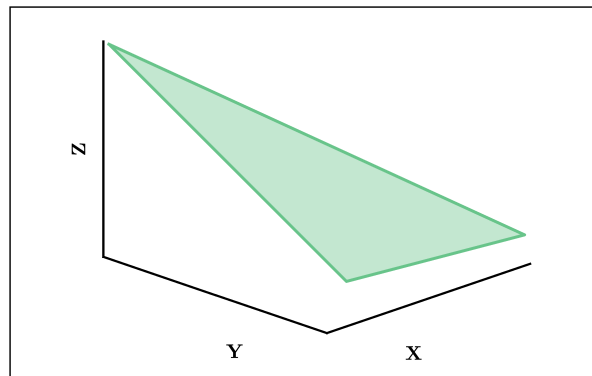
(a) Méthode du côté opposé

(b) Méthode du centroïde (c) Méthode de la quadrisection

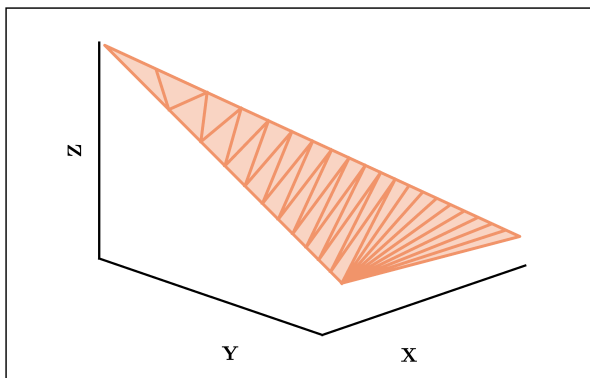


**Figure A6-3** – Circularité des différentes géométries de triangles

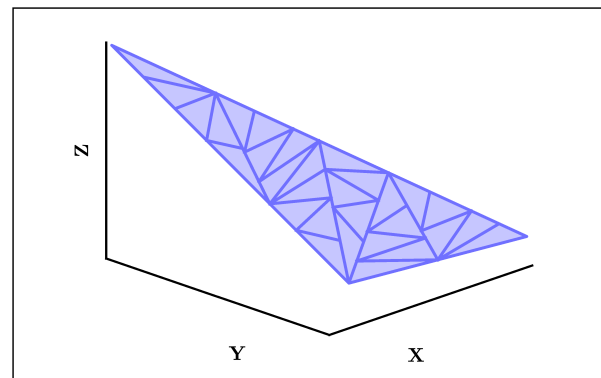
La méthode du côté opposé a été adaptée pour contrôler le nombre de triangles subdivisés. Deux triangles obtenus par la subdivision d'un triangle mère par la médiane ont la même aire. Plus généralement, si une droite passe à travers le sommet d'un triangle et divise le côté opposé en deux sous-segments de longueurs respectives  $l_1$  et  $l_2$ , alors le ratio des aires des deux triangles fils est le même que celui entre  $l_1$  et  $l_2$ . Par conséquent, un triangle peut être subdivisé en  $N$  sous-triangles de même aire via  $N - 1$  subdivisions : à chaque itération  $i$ , le côté le plus long du sous-triangle de plus grande aire issu de la subdivision précédente de l'itération précédente est divisé en deux sous-segments par la droite permettant d'obtenir un ratio de  $N - i$ . La droite est une médiane d'ordre  $N - i$ . Cette méthode est appelée par la suite "méthode de la médiane  $N^{\text{ième}}$ " (**Figure A6-4**).



(a)



(b)



(c)

**Figure A6-4** – Méthode de subdivision par la médiane  $N^{\text{ième}}$  ( $N = 30$ )

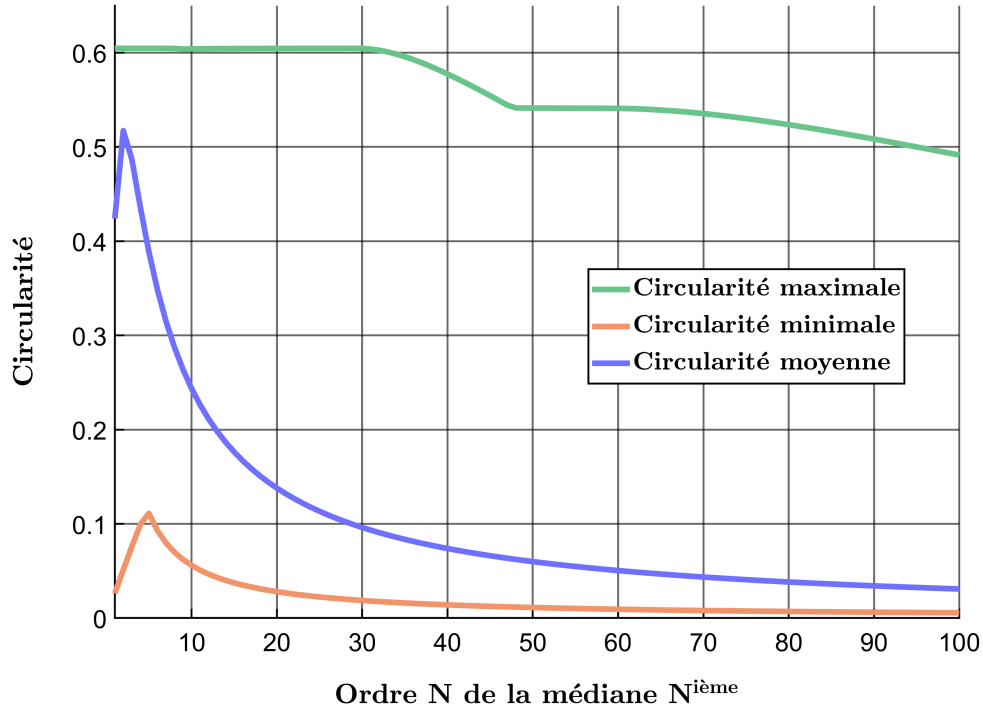
(a) Triangle initial

(b) Subdivision par des médianes d'ordre successifs

(c) Subdivision avec des médianes d'ordre 2, 3 et 5 uniquement

Les paramètres d'entrée de la méthode de la médiane  $N^{\text{ième}}$  sont le maillage initial, la longueur indicative  $e$  souhaitée pour les mailles subdivisées et un coefficient de contrainte  $R$  : plus  $R$  est élevé, plus la taille maximale des arêtes tendra à être inférieure à  $e$ . Ce contrôle de la taille des mailles se fait au coût de leur nombre. La difficulté principale est de trouver un modèle adéquat qui permette d'atteindre un compromis. Il est ainsi plus pertinent dans certains cas de se contenter d'un maillage subdivisé dont certaines arêtes sont plus longues que  $e$  si cela permet d'éviter une augmentation drastique de la taille du maillage. Par conséquent,  $e$  doit être strictement inférieur à  $h$ . En effet,  $e$  n'est qu'une valeur indicative et l'objectif de la subdivision est avant tout que les arêtes aient une longueur strictement inférieure à  $h$ . La méthode de la médiane  $N^{\text{ième}}$  a tendance à naturellement réduire la circularité des mailles au fur et à mesure des itérations (**Figure A6-4b**). De plus, l'effet est d'autant plus marqué si la valeur de  $N$  est très élevée :

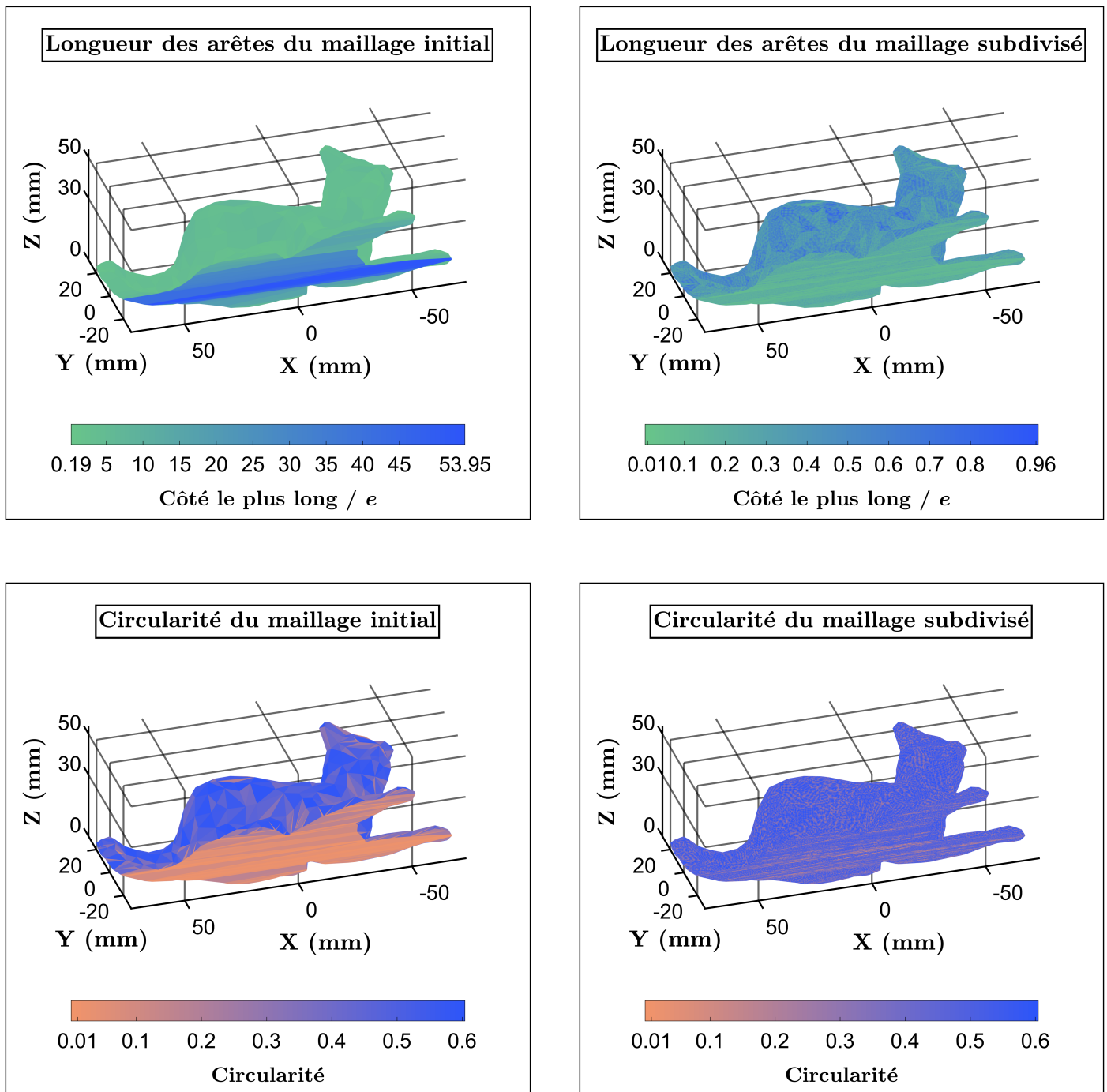
plus  $N$  est grand, plus le plus petit des deux triangles subdivisés à chaque itération est allongé (**Figure A6-5**). Pour pallier à cela, la méthode a été modifiée pour ne permettre que des subdivisions par des médianes d'ordre 2, 3 et 5 (**Figure A6-4c**). Dans ce cas, le nombre de subdivisions effectuées  $N_{subdiv}$  est l'entier multiple de 2, 3 et 5 directement supérieur ou égal au nombre souhaité  $N_{subdiv}^*$ . La méthode est illustrée avec STL-A à la **Figure A6-6** pour une valeur  $e$  de 2,5 mm et avec STL-B à la **Figure A6-7** pour une valeur  $e$  de 2mm.



**Figure A6-5** – Évolution de la circularité du premier triangle subdivisé par méthode de la médiane  $N^{ième}$

Le modèle choisi pour déterminer le nombre de subdivisions à effectuer peut être modifié selon les besoins. Celui utilisé dans l'algorithme de génération de trajectoire a été créé puis calibré manuellement et rapidement en utilisant STL-A, STL-B et STL-C (**Équation A6-2**). Ce modèle n'est ni rigoureux, ni le plus optimal mais constitue un compromis sur le nombre total de subdivisions, la géométrie des sous-triangles et la longueur de leurs côtés. En notant respectivement  $c_{min}$  et  $c_{max}$  les longueurs du plus petit et du plus grand côté d'un triangle  $T$ ,  $C_T$  sa circularité et en désignant la fonction partie entière supérieure par  $\lceil \cdot \rceil$ , le nombre souhaité de sous-triangles  $N_{subdiv}^*$  vaut :

$$N_{subdiv}^*(T) = 2 \left( \left[ \left( \left\lceil \frac{c_{max}(2 + C_T)}{e} \right\rceil - 1 \right) \left( \left( \frac{c_{min}}{c_{max}} \right)^{(1+8R)^{-1}} \right) \right]^{(2-C_T^2)} \right) + 1 \quad (\text{A6-2})$$

Figure A6-6 – Subdivision du maillage STL-A ( $e = 2,5\text{mm}$  et  $R = 1$ )

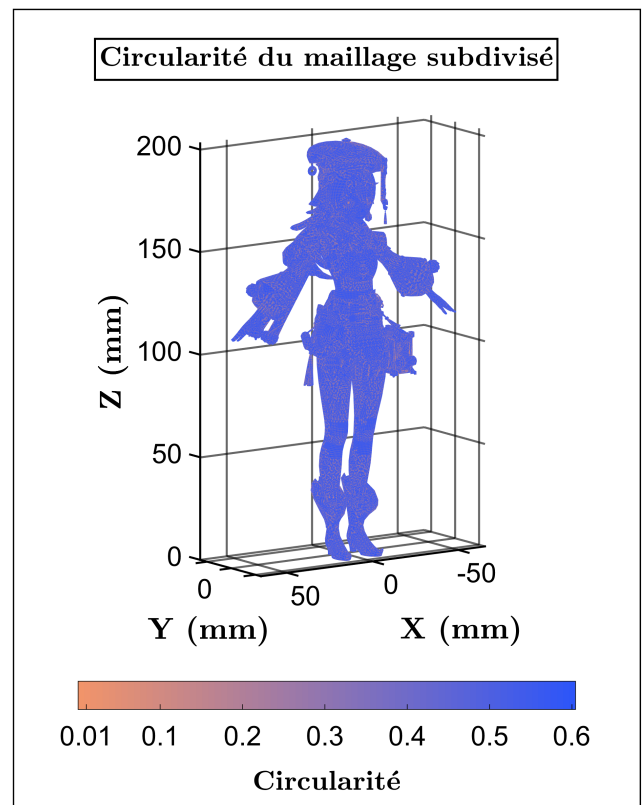
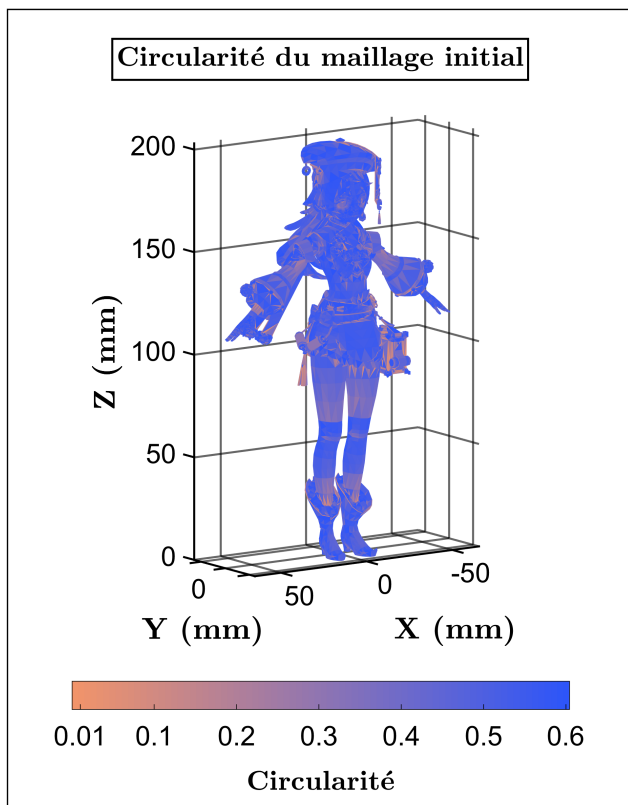
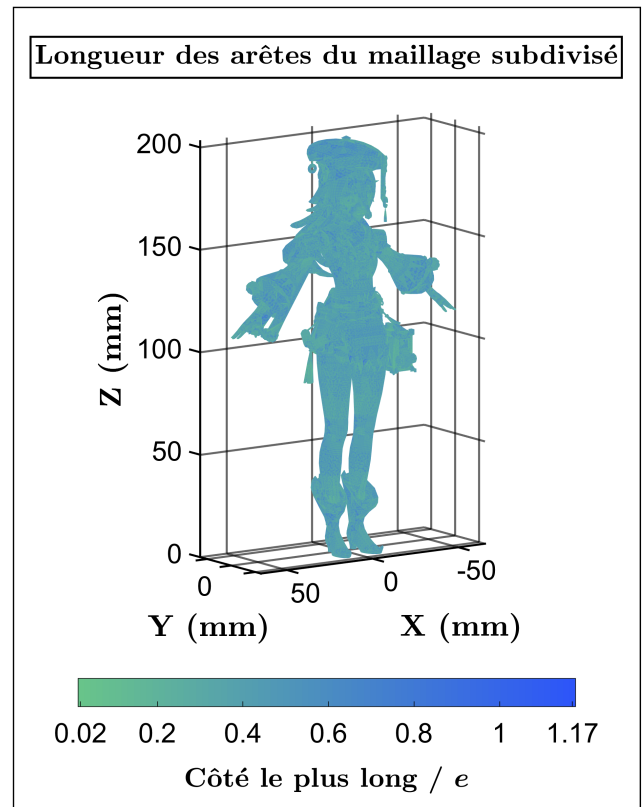
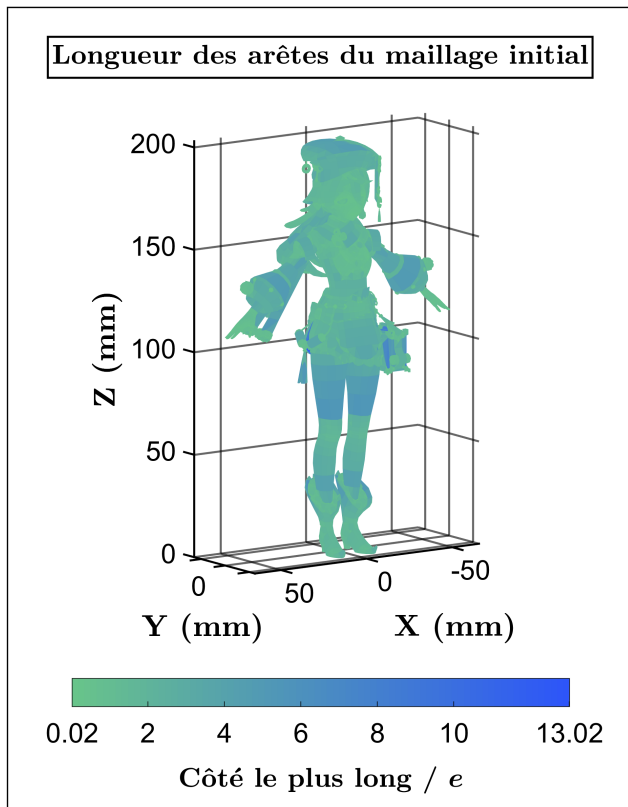


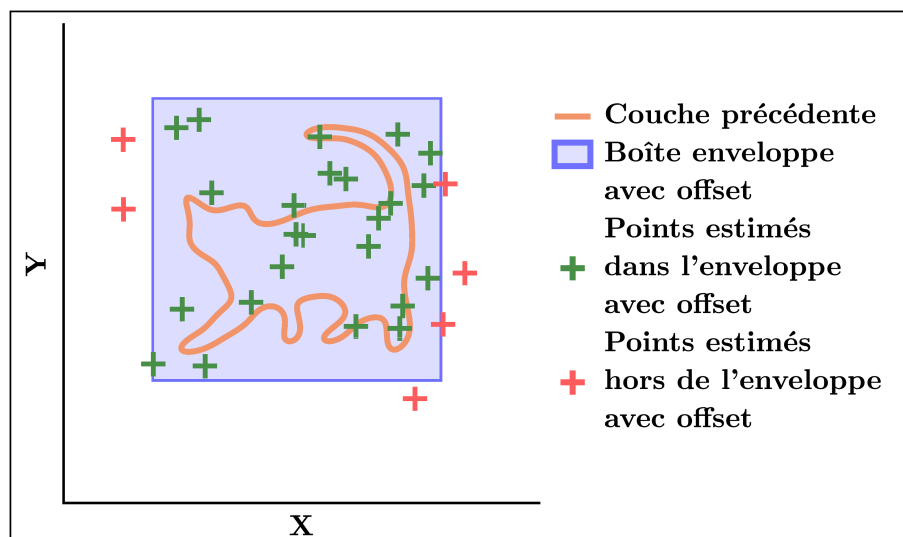
Figure A6-7 – Subdivision du maillage STL-B ( $e = 2\text{mm}$  et  $R = 1$ )

## A7 Position relative à une enveloppe convexe 3D

### A7.1 Contextualisation

La détermination approximative de la position d'un ensemble de points par rapport à l'enveloppe convexe d'un autre nuage de points a pour objectif de réduire le voisinage de points à considérer à chaque étape de l'algorithme de génération de trajectoire. Cela réduit le nombre de points auxquels les calculs doivent être effectués. La méthode doit cependant être suffisamment simple et rapide pour ne pas augmenter le temps total de calcul. En effet, si le temps pris par la méthode de réduction de voisinage suivie des calculs sur les points présents dans ce voisinage est plus long que le temps nécessaire pour effectuer les calculs sur tous les points compris dans un voisinage plus large, alors il n'est pas intéressant de l'implémenter dans l'algorithme. C'est dans cet objectif que les paramètres d'entrée de la méthode d'approximation permettent d'ajuster la précision de l'enveloppe pour ajuster le temps de calcul à allouer à cette étape dans l'algorithme de génération de trajectoire. Un voisinage moins précis est plus large qu'un voisinage moins précis. Un voisinage moins précis contient donc tout voisinage plus précis.

En 2D, l'enveloppe convexe d'un nuage de points, dont les coordonnées sont connues, peut être déterminée très approximativement en comparant les coordonnées des points suivant chaque axe avec les coordonnées extrémales des points suivant ces axes (**Figure A7-1a**). Si le système de coordonnées est orthogonal, les points à conserver se situent à l'intérieur du rectangle formé par les points issus des coordonnées extrémales sur les deux axes. S'il n'est pas orthogonal, le raisonnement reste valide et les points sont situés dans un parallélogramme. La forme du rectangle dépend cependant de l'orientation des axes (**Figure A7-1b**).

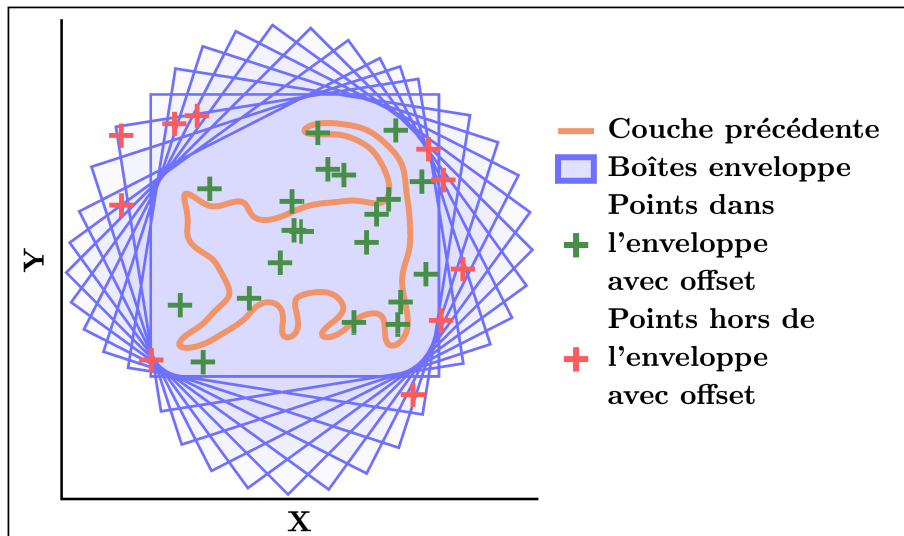


(a)

**Figure A7-1** – Position par rapport à une enveloppe convexe 2D avec offset

(a) Approximation par une seule base





(b)

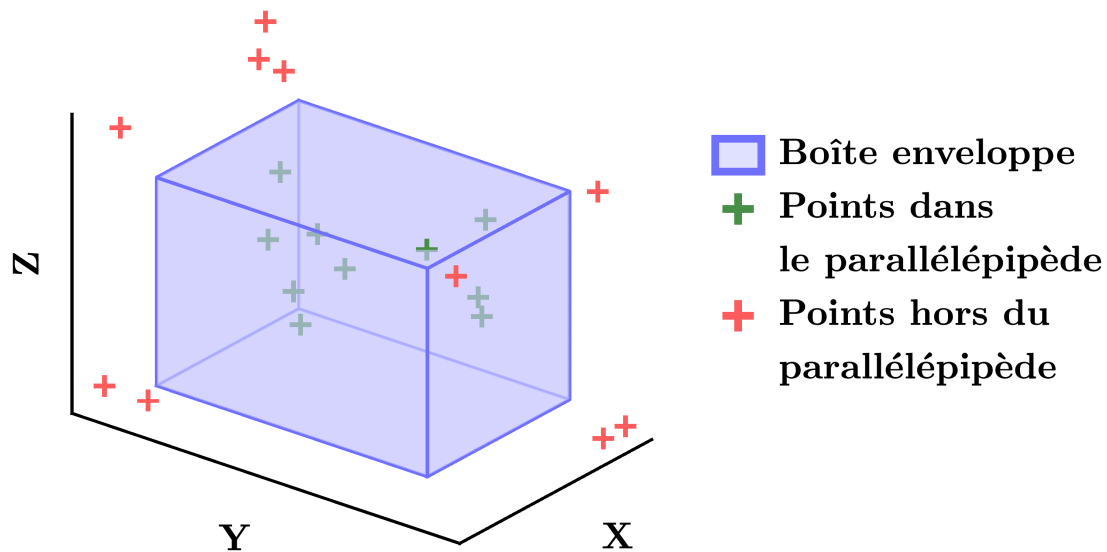
**Figure A7-1** – Position par rapport à une enveloppe convexe 2D avec offset

(b) Approximation par plusieurs bases

Seule l'orientation des axes, et non pas la position de l'origine des coordonnées, change la forme du rectangle puisque les positions relatives des points se font par rapport aux coordonnées extrémales, qui ne dépendent pas du choix de l'origine. Tout point arbitraire situé dans l'enveloppe convexe du nuage de points doit se trouver à l'intérieur de chaque rectangle. Ainsi, l'estimation des points se trouvant à l'intérieur sera d'autant plus précise que la méthode sera appliquée à davantage d'orientations d'axes de coordonnées. Les bases utilisées peuvent par exemple être orthogonales et ne varier que par rotation. Ainsi, la précision de l'estimation est avant tout conditionnée par le nombre  $N_r$  de systèmes de coordonnées considérés qui sont issus de rotations de la base initiale. Dans le cas où les bases sont orthogonales, les rotations peuvent se limiter à des angles compris dans l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  car l'effet d'une base est invariant par permutation de ses axes ou inversement de leur direction. En choisissant une répartition homogène des différentes bases, le pas de l'angle de rotation entre deux bases successives est alors de  $\frac{\pi}{2(N_r)}$ .

## A7.2 Démonstration

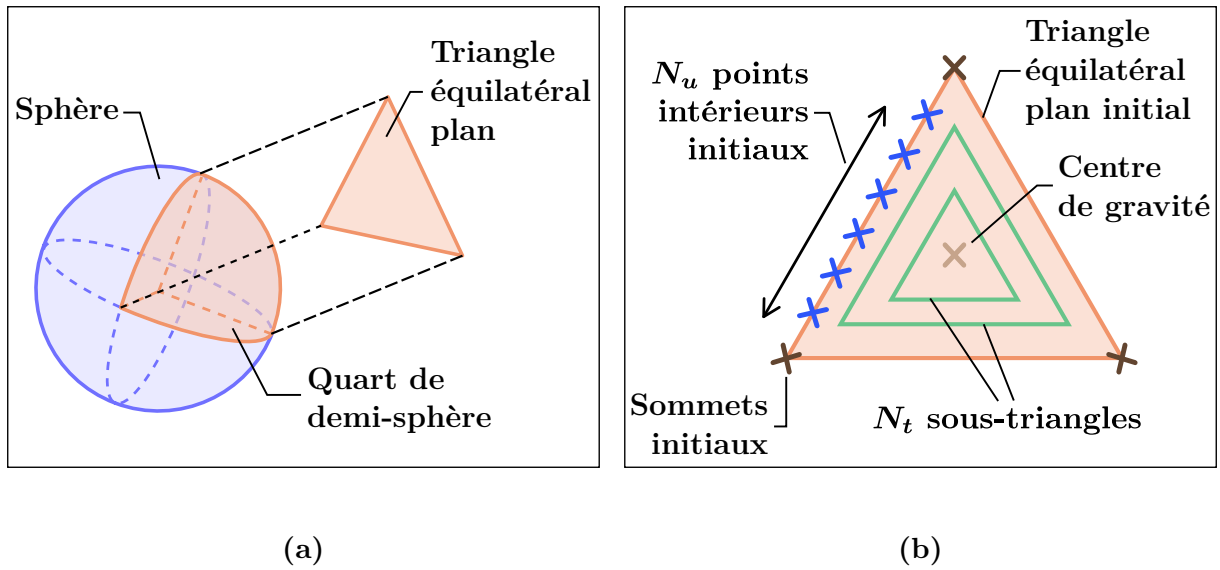
On peut transposer ce raisonnement en 3D en l'adaptant. En 3D, le plan de rotation n'est pas unique : il en existe une infinité. Il s'agit donc, en plus du nombre de rotations  $N_r$ , de choisir l'axe de rotation. Cela augmente donc la complexité de l'algorithme, d'où notamment l'intérêt évoqué précédemment de pouvoir ajuster les paramètres d'entrée pour ajuster le temps de calcul en cas de besoin. Pour chaque base de coordonnées choisie, si cette dernière est orthogonale, l'estimation de points arbitraires situés dans l'enveloppe convexe par considération des coordonnées extrémales des points du nuage de points est un parallélépipède rectangle (**Figure A7-2**).



**Figure A7-2** – Estimation des points inclus dans un parallélépipède rectangle 3D

Chaque axe de rotation parmi l'infinité qu'il est possible de considérer peut être imagé comme tout vecteur dont l'origine se trouverait en un même point et dont l'extrémité se trouverait sur une sphère unitaire. Comme pour le cas 2D, l'effet d'une base sur le parallélépipède rectangle obtenu est invariant par permutation de ses axes et inversion de l'orientation de ses axes. Ainsi, l'infinité des axes de rotation qu'il est possible de considérer peut être réduite à ceux issus d'un huitième de la sphère.

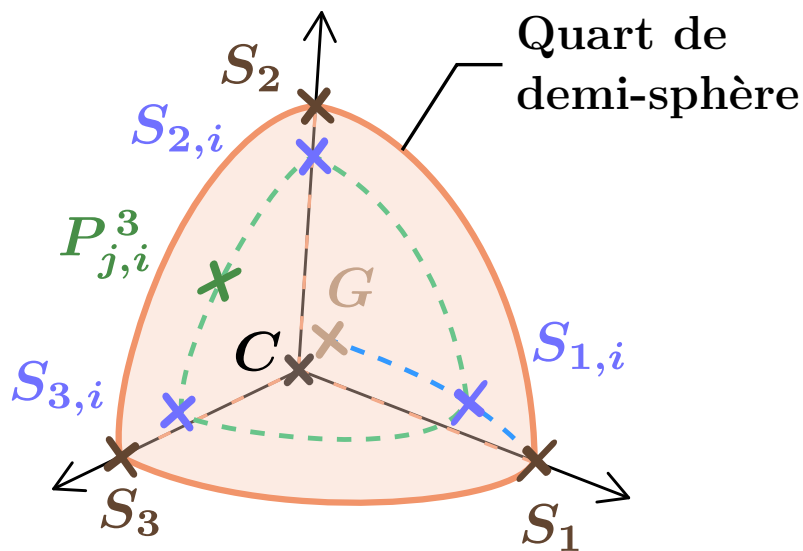
Pour conserver l'homogénéité de la répartition des axes de rotation, l'idée consiste à trouver une méthode de répartition homogène de points sur un quart d'une demi-sphère : ces points correspondront alors à l'extrémité des vecteurs de rotation. Pour cela, le quart de demi-sphère est déformé par homéomorphisme pour transposer le raisonnement sur un triangle équilatéral plan (**Figure A7-3a**). En effet, le quart de demi-sphère est un triangle équilatéral géodésique sur cette dernière. Il constitue donc un triangle équilatéral dans un espace à géométrie sphérique, tandis que le triangle équilatéral plan est plongé dans un espace euclidien. Si l'on souhaitait discrétiser le triangle avec uniquement 4 points, on aurait tendance à choisir ses sommets et son centre de gravité. La discrétisation de la surface triangulaire se fait par la généralisation de cette approche en utilisant des sous-triangles équilatéraux inclus dans le triangle initial et partageant le même centre de gravité (**Figure A7-3b**). Un premier paramètre, noté  $N_t$ , permet de contrôler le nombre de triangles équilatéraux uniformément répartis à l'intérieur du premier triangle équilatéral. Un deuxième paramètre, noté  $N_u$  permet de choisir le nombre de points à l'intérieur de chaque côté du triangle équilatéral initial, sommets exclus. Le choix de  $N_u$  permet d'obtenir une longueur de pas de discrétisation sur le triangle initial, qui est ensuite utilisée pour déterminer le nombre de points à l'intérieur des autres triangles.



**Figure A7-3** – Discrétisation du quart de demi-sphère

- (a) Homéomorphisme vers un triangle équilatéral
- (b) Paramétrisation de la discrétisation du triangle équilatéral

À partir de cette paramétrisation, on peut à présent déterminer les coordonnées des points correspondants sur le quart de demi-sphère. Ce dernier peut être vu comme un triangle équilatéral bombé : les arêtes des triangles équilatéraux correspondent à des triangles géodésiques sur le quart de demi-sphère. La nomenclature des différents points issus de la discrétisation du quart de demi-sphère est illustrée à la **Figure A7-4**.

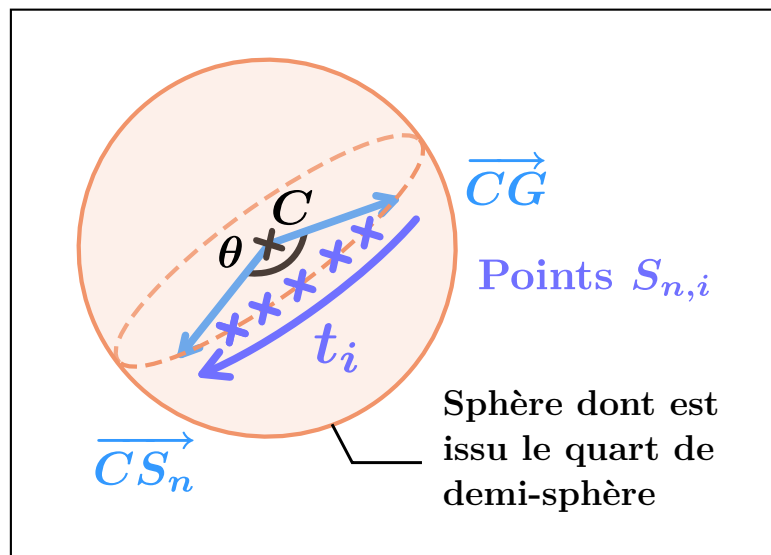


**Figure A7-4** – Nomenclature de discrétisation du quart de demi-sphère

Puisque les arêtes de ces triangles sont des courbes géodésiques, les interpolations linéaires effectuées entre sommets des différents triangles, correspondent alors à des SLERP (notion définie à la **Sous-section 3.5.3** du **Chapitre 3**) dont les sommets correspondent à deux sommets successifs d'un triangle géodésique (**Figure A7-5a**). Les sommets des triangles géodésiques sont quant à eux directement déterminés à partir de SLERP appliquées entre le centre de gravité commun à tous les triangles et les sommets du triangle initial (**Figure A7-5b**).

On se place dans le système de coordonnées dont l'origine est le centre de la sphère  $C$  dont est issu le quart de demi-sphère, et les trois axes sont formés par les vecteurs  $\overrightarrow{CS_n}$ , où  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Dans un tel système de coordonnées, deux des composantes de chaque point  $S_n$  valent 0 et une vaut 1. Le centre de gravité  $G$  des triangles géodésiques se trouve sur la première bissectrice de ce système. Il se situe donc sur la droite passant par  $S$  et de vecteur directeur  $(1, 1, 1)$ . Étant donné que  $G$  se situe sur le quart de demi-sphère, le vecteur  $\overrightarrow{CG}$  est unitaire. Ainsi,  $G$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ . On cherche dans un premier temps à déterminer les coordonnées des sommets du triangle géodésique  $i$ . Pour cela, l'angle  $\theta$  formé par tout vecteur  $\overrightarrow{CS_n}$  avec le vecteur  $\overrightarrow{CG}$  est nécessaire pour pouvoir appliquer une SLERP (**Figure A7-5a**). Puisque le problème est réduit à un quart de demi-sphère, les angles sont dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . On peut donc déterminer tous les angles à l'aide de produits scalaires et de la fonction Arc Cosinus, car tous les vecteurs manipulés sont unitaires. On obtient ainsi :

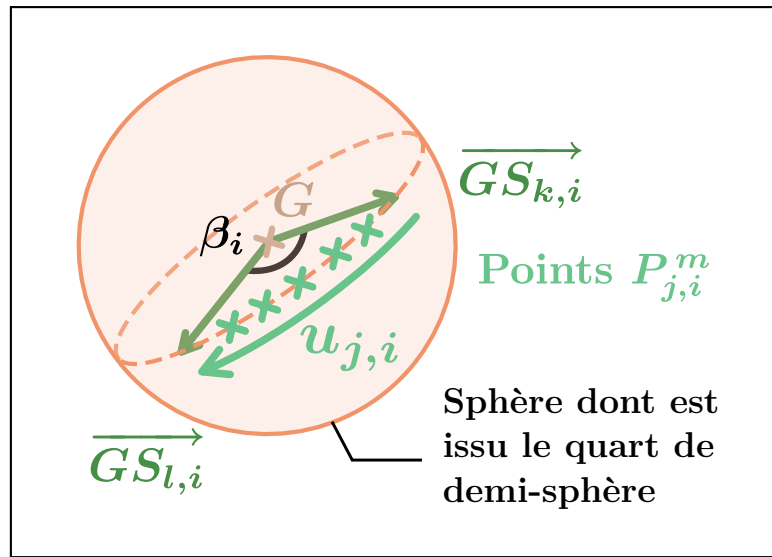
$$\theta = \arccos(\overrightarrow{CS_n} \cdot \overrightarrow{CG}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (\text{A7-1})$$



(a)

**Figure A7-5** – SLERP appliquées sur le quart de demi-sphère

(a) SLERP de calcul des sommets des triangles géodésiques



(b)

**Figure A7-5** – SLERP appliquées sur le quart de demi-sphère  
 (b) SLERP de discrétisation des côtés des triangles géodésiques

On note  $t_i$  le paramètre dans  $]0, 1[$  de discrétisation de la SLERP permettant d'obtenir les sommets  $S_{n,i}$  du triangle géodésique  $i$  à partir des sommets  $S_n$  du triangle géodésique initial. Ce paramètre dépend directement de  $N_t$  par interpolation linéaire de l'intervalle  $[0, 1]$ . On obtient ainsi, en appliquant la définition d'une SLERP et en assimilant les points au vecteur de leurs coordonnées pour alléger les notations :

$$\begin{cases} S_{n,i} = \frac{\sin((1-t_i)\theta)}{\sin(\theta)} G + \frac{\sin(t_i\theta)}{\sin(\theta)} S_n \\ t_i = \frac{i}{N_t + 1}, \text{ avec } i \in \llbracket 1, N_t \rrbracket \end{cases} \quad (\text{A7-2})$$

Dans un deuxième temps, on cherche les coordonnées des points à l'intérieur des côtés du triangle  $i$  formé par deux sommets disjoints  $S_{k,i}$  et  $S_{l,i}$  de ce triangle et opposé au sommet  $S_{m,i}$  : tout comme  $n$ , les indices  $k$ ,  $l$  et  $m$  sont tous trois compris dans  $\{1, 2, 3\}$  avec de plus  $k \neq l \neq m$  et toujours dans l'ordre  $k \rightarrow l \rightarrow m$  à la permutation circulaire près. Le raisonnement est le même que celui pour la première SLERP, mais l'angle  $\beta_i$ , qui dépend aussi des sommets  $S_{k,i}$  et  $S_{l,i}$  dépend donc de la première SLERP. On pose  $\gamma_{1,i}$  et  $\gamma_{2,i}$  les deux valeurs issues de la première SLERP tels que :

$$S_{n,i} = \gamma_{1,i} G + \gamma_{2,i} S_n \quad (\text{A7-3})$$

La deuxième SLERP donne les coordonnées des  $j$  points  $P_{j,i}^m$  situés à l'intérieur – donc sommets exclus – d'un des côtés du triangle géodésique de sommets  $i$   $S_{k,i}$  et  $S_{l,i}$  dont les vecteurs associés forment un angle  $\beta_i$ , à l'aide du paramètre de discrétisation  $u_{j,i}$  compris dans  $]0, 1[$  de discrétisation, qui dépend de  $N_u$  et du paramètre de la première SLERP  $t_i$  :

$$\begin{cases} P_{j,i}^m = \frac{\sin((1 - u_{j,i}) \beta_i)}{\sin(\beta_i)} S_{k,i} + \frac{\sin(u_{j,i} \beta_i)}{\sin(\beta_i)} S_{l,i} \\ u_{j,i} = \frac{j}{N_u + 1}, \text{ avec } u_{i,j} \in \llbracket 1, \max(\lfloor (N_u + 1) t_i - 1 \rfloor - 1, 0) \rrbracket \end{cases} \quad (\text{A7-4})$$

L'opérateur  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la fonction Partie Entière Inférieure. L'intervalle de variation de  $u_{j,i}$  dépend de  $i$  : le nombre de points  $j$  à l'intérieur de chaque côté du triangle géodésique  $i$  est choisi de sorte que ce que la longueur géodésique de discrétisation à l'intérieur de tous les triangles soit la plus proche possible. Le nombre de sous-segments d'un côté d'un triangle géodésique donné correspond ainsi à l'entier naturel issu de l'arrondi à l'unité du ratio entre la longueur des côtés de ce triangle géodésique et celle du triangle géodésique initial. On peut démontrer que ce ratio correspond directement à la valeur  $t_i$  de la première SLERP. Ici, des arrondis par défaut plutôt que par excès sont choisis pour qu'aucun segment géodésique ne soit plus petit que ceux du triangle initial.

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de l'angle  $\beta_i$  à partir de sa définition pour que les points  $P_{j,i}$  puissent être entièrement déterminés :

$$\begin{aligned} \beta_i &= \arccos(\overrightarrow{CS_{k,i}} \cdot \overrightarrow{CS_{l,i}}) \\ &= \arccos\left(\left(\gamma_{1,i} \overrightarrow{CG} + \gamma_{2,i} \overrightarrow{CS_k}\right) \cdot \left(\gamma_{1,i} \overrightarrow{CG} + \gamma_{2,i} \overrightarrow{CS_l}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\gamma_{1,i}^2 \|\overrightarrow{CG}\|^2 + \gamma_{1,i} \gamma_{2,i} \left(\overrightarrow{CS_k} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CS_l} \cdot \overrightarrow{CG}\right) + \gamma_{2,i}^2 \overrightarrow{CS_k} \cdot \overrightarrow{CS_l}\right) \end{aligned}$$

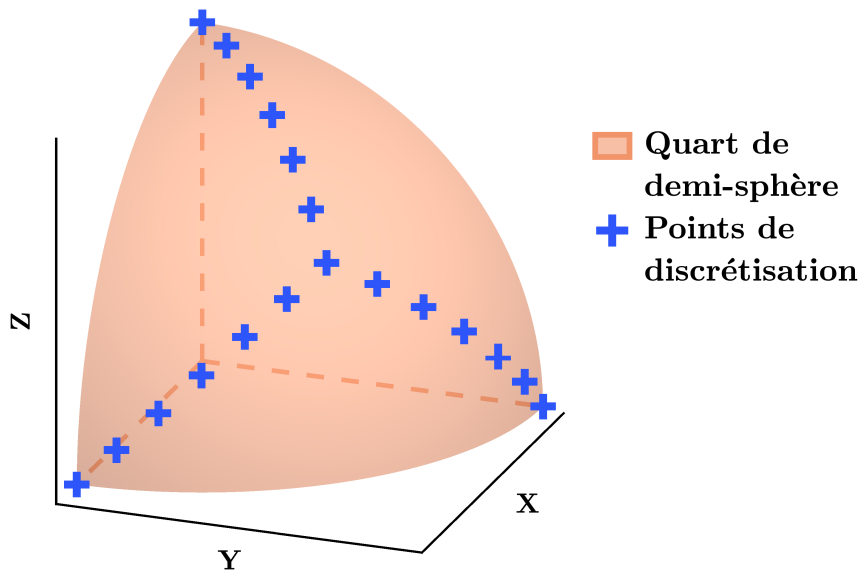
Or,  $S_k$  et  $S_l$  correspondent à deux sommets disjoints du triangle géodésique initial. Ils définissent les extrémités des vecteurs du système de coordonnées, qui est orthogonal. Ainsi, les vecteurs  $\overrightarrow{CS_k}$  et  $\overrightarrow{CS_l}$  sont orthogonaux et donc  $\overrightarrow{CS_k} \cdot \overrightarrow{CS_l} = 0$ . De plus,  $\overrightarrow{CG}$  est par construction unitaire, donc  $\|\overrightarrow{CG}\| = 1$ . Les valeurs de  $\overrightarrow{CS_k} \cdot \overrightarrow{CG}$  et  $\overrightarrow{CS_l} \cdot \overrightarrow{CG}$  sont quant à elles identiques par symétrie du problème. Il s'agit du même produit scalaire qui apparaît dans la définition de l'angle  $\theta : \frac{1}{\sqrt{3}}$ . On obtient ainsi :

$$\beta_i = \arccos\left(\gamma_{1,i} \left(\gamma_{1,i} + \frac{2\gamma_{2,i}}{\sqrt{3}}\right)\right) \quad (\text{A7-5})$$

En conclusion, l'ensemble des sommets des triangles géodésiques  $S_{n,i}$  et des points  $P_{j,i}$  uniformément discrétisés à l'intérieur de ces triangles sont entièrement déterminés à partir des sommets du quart de demi-sphère  $S_n$  et du centre de gravité  $G$  du triangle géodésique formé par sa frontière :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{n,i} = \text{Slerp}(G, S_n, t_i) \text{ , avec } n \in \{1, 2, 3\} \\ t_i = \frac{i}{N_t + 1} \text{ , avec } i \in \llbracket 1, N_t \rrbracket \\ P_{j,i}^m = \text{Slerp}(S_{k,i}, S_{l,i}, u_{j,i}) \text{ , avec } k \neq l \neq m \text{ et } k \rightarrow l \rightarrow m \\ u_{j,i} = \frac{j}{N_u + 1} \text{ , avec } u_{i,j} \in \llbracket 1, \max(\lfloor (N_u + 1) t_i - 1 \rfloor - 1, 0) \rrbracket \end{array} \right. \quad (\text{A7-6})$$

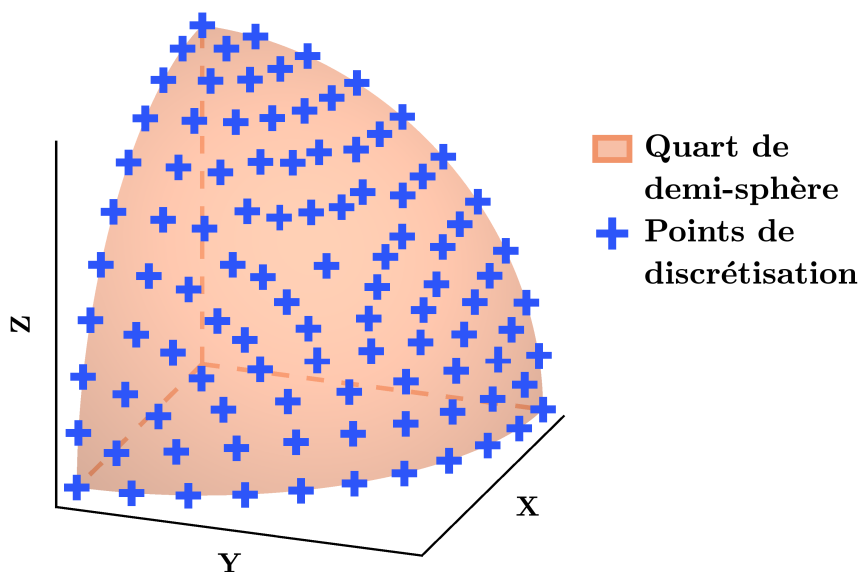
L'ensemble de ces points forme une discrétisation du quart de demi-sphère dont le nombre de points est contrôlé par  $N_t$  et  $N_u$ . Ces points sont ensuite associés à leurs vecteurs, qui sont utilisés pour déterminer l'approximation de l'enveloppe convexe d'un nuage de points 3D. Pour chaque vecteur obtenu, le nuage de points initial est utilisé  $N_r$  fois via des rotations de pas constant autour de l'axe défini par ce vecteur. Un point arbitraire de l'espace donné est considéré comme étant à l'intérieur de l'enveloppe convexe de ce nuage de points s'il se trouve à l'intérieur de tous les parallélépipèdes rectangles formés par les coordonnées extrémales des points du nuage dans les systèmes de coordonnées obtenus à l'issue de chaque rotation autour de chaque axe défini par ces vecteurs. Un mauvais choix de  $N_t$  et  $N_u$  affecte l'homogénéité de la discrétisation (**Figure A7-6**).



**Figure A7-6** – Discrétisation non homogène du quart de demi-sphère ( $N_t = 5$  et  $N_u = 0$ )

$N_t$  et  $N_u$  sont des entiers naturels éventuellement nuls tandis que  $N_r$  doit être un entier naturel non nul. Si  $N_r$  était nul, aucune rotation ne serait effectuée selon les vecteurs et donc tous les systèmes de coordonnées resteraient inchangés, ce qui reviendrait à répéter le même calcul plusieurs fois sans affiner l'approximation de la position relative du point de l'espace considéré par rapport à l'enveloppe convexe du nuage de points. Les sommets du triangle géodésique et son centre de gravité sont toujours inclus dans les discrétisations du quart de demi-sphère. Le cas minimal où  $N_t = N_u = 0$  et  $N_r = 1$  correspond ainsi à l'utilisation d'une seule rotation selon les vecteurs définis par ces 4 points. Dans la pratique, l'algorithme de génération de trajectoire interdit la valeur  $N_u = 0$  pour conserver une homogénéité minimale dans la discrétisation. La cohérence de l'homogénéité de la répartition dépend du choix de  $N_t$  et  $N_u$  l'un par rapport à l'autre. Le choix est laissé libre à l'utilisateur dans l'algorithme de génération de trajectoire. On peut néanmoins préconiser une valeur de  $N_t^*$  étant donné  $N_u$  et inversement pour conserver une certaine cohérence (**Figure A7-7**) en estimant, par exemple, que la longueur géodésique de discrétisation des côtés du triangle initial doit être approximativement égale à celle liant les sommets adjacents de deux triangles géodésiques différents, en utilisant la formule suivante :

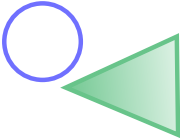
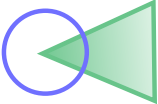
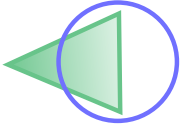
$$\begin{cases} N_u^* = \left\lfloor \frac{\pi N_t}{2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} + 1 \right\rfloor \\ N_t^* = \max\left(\left\lfloor \frac{2}{\pi} (N_u - 1) \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rfloor, 0\right) \end{cases} \quad (\text{A7-7})$$



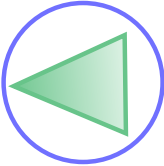
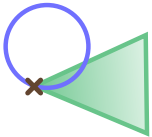

**Figure A7-7** – Discretisation homogène du quart de demi-sphère  
( $N_t = 5$  et  $N_u^* = 9$ )



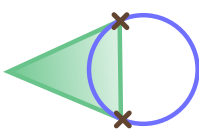
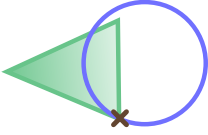
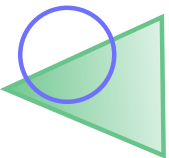
## A8 Liste des 12 cas d'intersection sphère-triangle

	Cas 0	Cas 1	Cas 2
Type d'intersection	Pas de collision	1 arc de cercle	1 arc de cercle
Schéma du cas projeté dans le plan d'intersection			
Entités dans le cercle projeté	Ni sommet, ni arête	1 sommet et 2 arêtes	2 sommets et 3 arêtes
Liste de sous-cas	c0	c1A, c1B, c1C	c2A, c2B, c2C

	Cas 3	Cas 4	Cas 5
Type d'intersection	Pas d'intersection	1 arc de cercle	2 arcs de cercle
Schéma du cas projeté dans le plan d'intersection			
Entités dans le cercle projeté	3 sommets et 3 arêtes	1 sommet et 1 arête	1 sommet et 3 arêtes
Liste des sous-cas	c3	c4AB, c4BA, c4BC, c4CB, c4AC, c4CA	c5A, c5B, c5C

	Cas 6	Cas 7	Cas 8
Type d'intersection	1 arc de cercle	1 arc de cercle	1 arc de cercle
Schéma du cas projeté dans le plan d'intersection			
Entités dans le cercle projeté	2 sommets et 1 arête	2 sommets et 2 arêtes	Pas de sommet et 1 arête
Liste des sous-cas	c6A, c6B, c6C	c7AB, c7BA, c7BC, c7CB, c7AC, c7CA	c8A, c8B, c8C

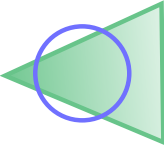
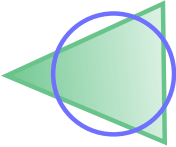
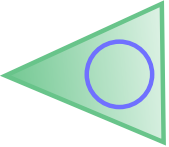
	Cas 9	Cas 10	Cas 11
Type d'intersection	2 arcs de cercle	3 arcs de cercle	Cercle entier
Schéma du cas projeté dans le plan d'intersection			
Entités dans le cercle projeté	Pas de sommet et 2 arêtes	Pas de sommet et 3 arêtes	Ni sommet, ni arête
Liste des sous-cas	c9A, c9B, c9C	c10	c11

Table A8-1 – Détails des 12 cas d'intersection sphère-triangle

## A9 Fonction de couplage des nœuds des graphes

### A9.1 Construction

Une fonction de couplage est une application bijective qui permet d'associer une valeur unique à un couple d'entiers naturels. Une des fonctions de couplage les plus communes est la fonction de couplage de Cantor. Contrairement à une paire, l'ordre des composantes dans un couple a de l'importance. Ainsi, si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels distincts, les couples  $(a, b)$  et  $(b, a)$  sont différents, tandis que  $\{a, b\}$  et  $\{b, a\}$  désignent une même paire. Dans le cas de la génération de trajectoire, la fonction de couplage doit associer la même valeur à deux couples correspondant à une même paire. En effet, la fonction de couplage recherchée a pour vocation d'être appliquée aux arêtes des graphes et sous-graphes manipulés lors de la génération de trajectoire. Une arête est définie par l'indice des deux nœuds situés à ses extrémités et est invariante par permutation de ces nœuds. La fonction que l'on cherche à créer n'est donc pas bijective, et il ne s'agit plus d'une fonction de couplage en toute rigueur. Cependant, l'objectif reste le même : associer une sortie unique à deux entrées, mais à la permutation près.

La construction du couplage souhaité est représentée à la **Figure A9-1**. En toute rigueur, la diagonale devrait être exclue par mesure de sécurité car un nœud d'un graphe n'est pas censé être lié à lui-même dans le cas de la génération de trajectoire, car toutes les liaisons des graphes sont des lignes droites et donc cela reviendrait à déposer de la matière deux fois en un même endroit, ce qui n'est pas censé être le cas. Le choix a été fait de ne pas exclure la diagonale pour permettre l'éventuelle utilisation du couplage pour d'autres besoins de programmation dans l'algorithme où les deux éléments de la paire seraient identiques.

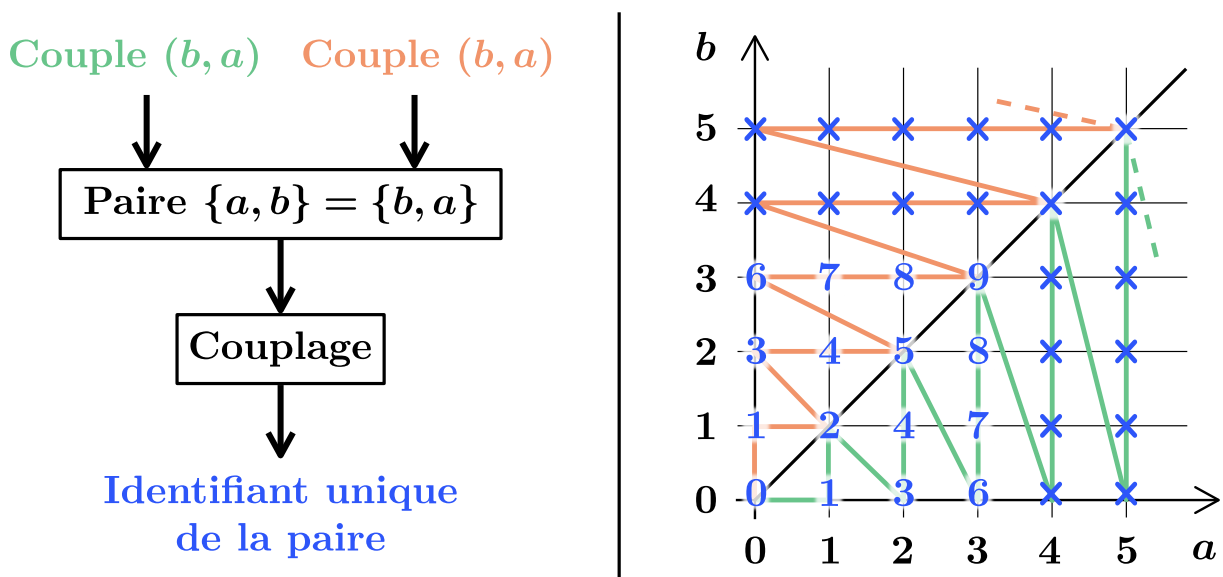


Figure A9-1 – Construction du couplage

## A9.2 Démonstration

L'objectif de la démonstration est de déterminer la loi de la fonction de couplage créée, ainsi que celle de sa réciproque. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels. On note  $\mathcal{F}_c$  la fonction de couplage recherchée, et  $\mathcal{F}_c^{-1}$  sa réciproque. On commence par étudier le cas où  $a$  et  $b$  sont égaux. On constate qu'il y a une relation directe entre  $\mathcal{F}_c(a+1, a+1)$  et  $\mathcal{F}_c(a, a)$  à partir de la représentation de la **Figure A9-1** :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(a+1, a+1) &= \mathcal{F}_c(a, a) + (a+1) + 1 \\ &= \mathcal{F}_c(a, a) + a + 2\end{aligned}\tag{A9-1}$$

On obtient donc en procédant par récurrence la formule suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(a, a) &= \mathcal{F}_c(0, 0) + \sum_{k=0}^{a-1} (k+2) \\ &= 0 + \sum_{i=2}^{a+1} i \\ &= \sum_{i=0}^{a+1} i - \sum_{i=0}^1 i \\ &= \frac{(a+1)(a+2)}{2} - 1\end{aligned}\tag{A9-2}$$

On utilise cette formule pour trouver la fonction  $\mathcal{F}_c$  dans le cas où  $a$  et  $b$  sont différents. On constate sur la **Figure A9-1** que la valeur de  $\mathcal{F}_c(a, b)$  est comprise entre deux valeurs de  $\mathcal{F}_c$  situées sur la diagonale du schéma, donc telles que les entiers d'entrée sont égaux. Si  $a \neq b$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(a, b) &= \mathcal{F}_c(\max(a-1, b-1), \max(a-1, b-1)) + (\min(a, b) + 1) \\ &= \mathcal{F}_c(\max(a, b) - 1, \max(a, b) - 1) + \min(a, b) + 1 \\ &= \frac{[\max(a, b) - 1 + 1][\max(a, b) - 1 + 2]}{2} - 1 + \min(a, b) + 1 \\ &= \frac{\max(a, b)[\max(a, b) + 1]}{2} + \min(a, b)\end{aligned}\tag{A9-3}$$

En appliquant la formule trouvée pour  $a = b$ , on retrouve le résultat précédent. Ainsi, la fonction de couplage recherchée est définie par  $\mathcal{F}_c$  :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \mathcal{F}_c(a, b) = \frac{\max(a, b) [\max(a, b) + 1]}{2} + \min(a, b) \quad (\text{A9-4})$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la loi de la fonction réciproque  $\mathcal{F}_c^{-1}$ . Quel que soit le couplage, on procède en général par analyse-synthèse. On pose  $u = \max(a, b)$ . Soit  $c$  l'entier naturel tel que  $c = \mathcal{F}_c(a, b)$ . Par construction de  $\mathcal{F}_c$ , on a :

$$\mathcal{F}_c(u - 1, u - 1) < c \leq \mathcal{F}_c(u, u) \quad (\text{A9-5})$$

Ainsi,  $c$  est l'unique entier naturel tel que :

$$c \in \left] \frac{(u - 1)^2 + 3(u - 1)}{2}, \frac{u^2 + 3u}{2} \right] \quad (\text{A9-6})$$

L'intervalle est transformé de sorte que la borne inférieure soit finie. Puisque  $c$  est un entier naturel, alors on peut simplement ajouter 1 :

$$c \in \left[ \frac{(u - 1)^2 + 3(u - 1)}{2} + 1, \frac{u^2 + 3u}{2} + 1 \right] \quad (\text{A9-7})$$

Chercher la valeur de  $u$  à  $c$  fixé pour laquelle  $c$  appartient bien à l'intervalle revient à résoudre le polynôme de variable  $u$  sur la borne inférieure de l'intervalle :

$$(u - 1)^2 + 3(u - 1) + 2 - 2c = 0 \quad (\text{A9-8})$$

Le discriminant  $\Delta$  du polynôme vaut  $1 + 8c$ .  $\Delta > 0$  donc le polynôme possède deux racines réelles. La solution réelle  $u_{sol}$  a pour valeur :

$$u_{sol} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8c}}{2} \quad (\text{A9-9})$$

Or, parmi les deux solutions possibles, une est nécessairement strictement négative car le numérateur est strictement négatif et le dénominateur est strictement positif. Pour la deuxième, on constate qu'elle est positive car  $\sqrt{1+8c}$  est strictement supérieur à 1 quelle que soit la valeur de  $c$ . Enfin,  $u$  est l'entier naturel strictement inférieur à  $u_{sol}$ , d'où, en notant  $\lfloor \cdot \rfloor$  la fonction partie entière inférieure :

$$u = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8c}}{2} \right\rfloor \quad (\text{A9-10})$$

On connaît ainsi la valeur  $u$ , qui correspond par définition à celle de  $\max(a, b)$ . On peut ensuite déterminer la valeur de  $\min(a, b)$  à partir de  $c$  et  $\max(a, b)$  en utilisant l'expression de  $\mathcal{F}_c$ . Ainsi,  $\mathcal{F}_c^{-1}$  est entièrement connue :

$$\begin{aligned} \forall c \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_c^{-1}(c) &= \{a, b\} = \{b, a\} \\ &= \left\{ u, c - \frac{1}{2}u(u+1) \right\}, \text{ avec } u = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8c}}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (\text{A9-11})$$

# Bibliographie

- [1] Henning KAGERMANN, Johannes HELBIG, Ariane HELLINGER et Wolfgang WAHLSTER. *Recommendations for Implementing the Strategic Initiative INDUSTRIE 4.0 : Securing the Future of German Manufacturing Industry ; Final Report of the Industrie 4.0 Working Group*. Forschungsunion, Avril 2013.
- [2] Victor CUNNINGHAM, Christopher A. SCHRADER et James YOUNG. *Navy Additive Manufacturing : Adding Parts, Subtracting Steps*. Rapport technique, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2015.
- [3] Ardeshir Raihanian MASHHADI, Behzad ESMAELIAN et Sara BEHDAD. Impact of Additive Manufacturing Adoption on Future of Supply Chains. In *International Manufacturing Science and Engineering Conference*, tome MSEC2015, pages 1-10. American Society of Mechanical Engineers, 2015. DOI : 10.1115/msec2015-9392.
- [4] Venkata P. MODEKURTHY, Xiaoqing F. LIU, Kenneth K. FLETCHER et Ming C. LEU. Design and Implementation of a Broker for Cloud Additive Manufacturing Services. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 137(4), 2015. DOI : 10.1115/1.4030670.
- [5] Michael MOLITCH-HOU. Chapter 1 - Overview of Additive Manufacturing Process. In *Additive Manufacturing - Materials, Processes, Quantifications and Applications*, pages 1-38. Jing Zhang et Yeon-Gil Jung, Mai 2018. ISBN : 978-0-12-812155-9.
- [6] Adrita DASS et Atieh MORIDI. State of the Art in Directed Energy Deposition : From Additive Manufacturing to Materials Design. *Coatings*, 9(7) :418, 2019. DOI : 10.3390/coatings9070418.
- [7] Dong-Gyu AHN. Directed Energy Deposition (DED) Process : State of the Art. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, 8(2) :703-742, 2021. DOI : 10.1007/s40684-020-00302-7.
- [8] J. L. PRADO-CERQUEIRA, J. L. DIÉGUEZ et A. M. CAMACHO. Preliminary Development of a Wire and Arc Additive Manufacturing System (WAAM). *Procedia Manufacturing*, 13 :895-902, 2017. DOI : 10.1016/j.promfg.2017.09.154.
- [9] João Abel Passos dos SANTOS. *Cost Estimation Model for the Directed Energy Deposition Process Adopting an Activity-Based Approach*. Thèse de doctorat, Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2018.
- [10] V. DHINAKARAN, J. AJITH, A. Fathima Yasin FAHMIDHA, T. JAGADEESHA, T. SATHISH et B. STALIN. Wire Arc Additive Manufacturing (WAAM) Process of Nickel Based Superalloys – A Review. *Materials Today : Proceedings*, 21 :920-925, 2020. DOI : 10.1016/j.matpr.2019.08.159.

- [11] C. R. CUNNINGHAM, Sondre WIKSHÅLAND, Fangda XU, Nneji KEMAKOLAM, A. SHOKRANI, Vimal DHOKIA et S. T. NEWMAN. Cost Modelling and Sensitivity Analysis of Wire and Arc Additive Manufacturing. *Procedia Manufacturing*, 11 :650-657, 2017. DOI : 10.1016/j.promfg.2017.07.163.
- [12] Abdollah SABOORI, Alberta AVERSA, Giulio MARCHESE, Sara BIAMINO, Mariangela LOMBARDI et Paolo FINO. Application of Directed Energy Deposition-Based Additive Manufacturing in Repair. *Applied Sciences*, 9(16) :3316, 2019. DOI : 10.3390/app9163316.
- [13] Digital ALLOY. Resolution vs Part Size for Different Metal AM Processes. <https://www.digitalalloys.com/>, 2021.
- [14] K. HARTMANN, R. KRISHNAN, R. MERZ, Gennady NEPLOTNIK, Fritz B. PRINZ, Lawrence SCHULTZ, M. TERK et Lee E. WEISS. Robot-Assisted Shape Deposition Manufacturing. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2890-2895. IEEE, 1994. DOI : 10.1109/robot.1994.350900.
- [15] Donghong DING, Zengxi PAN, Dominic CUIURI et Huijun LI. Process Planning for Robotic Wire and Arc Additive Manufacturing. In *2015 IEEE 10th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, pages 2000-2003. IEEE, 2015. DOI : doi.org/10.1109/iciea.2015.7334441.
- [16] Donghong DING, Chen SHEN, Zengxi PAN, Dominic CUIURI, Huijun LI, Nathan LARKIN et Stephen VAN DUIN. Towards an Automated Robotic Arc-Welding-Based Additive Manufacturing System from CAD to Finished Part. *Computer-Aided Design*, 73 :66-75, 2016. DOI : 10.1016/j.cad.2015.12.003.
- [17] Do-Sik SHIM, Gyeong-Yun BAEK, Jin-Seon SEO, Gwang-Yong SHIN, Kee-Poong KIM et Ki-Yong LEE. Effect of Layer Thickness Setting on Deposition Characteristics in Direct Energy Deposition (DED) Process. *Optics & Laser Technology*, 86 :69-78, 2016. DOI : 10.1016/j.optlastec.2016.07.001.
- [18] Malcolm DINOVTZER, Xiaohu CHEN, Jeremy LALIBERTE, Xiao HUANG et Hanspeter FREI. Effect of Wire and Arc Additive Manufacturing (WAAM) Process Parameters on Bead Geometry and Microstructure. *Additive Manufacturing*, 26 :138-146, 2019. DOI : 10.1016/j.addma.2018.12.013.
- [19] P. M. ALMEIDA et S. WILLIAMS. Innovative Process Model of Ti-6Al-4V Additive Layer Manufacturing Using Cold Metal Transfer (CMT). In *2010 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin, 2010.
- [20] Panagiotis KAZANAS, Preetam DEHERKAR, Pedro ALMEIDA, Helen LOCKETT et Stewart WILLIAMS. Fabrication of Geometrical Features Using Wire and Arc Additive Manufacture. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture*, 226(6) :1042-1051, Juin 2012. DOI : 10.1177/0954405412437126.
- [21] Jun XIONG, Yanjiang LI, Rong LI et Ziqiu YIN. Influences of Process Parameters on Surface Roughness of Multi-Layer Single-Pass Thin-Walled Parts in GMAW-Based Additive Manufacturing. *Journal of Materials Processing Technology*, 252 :128-136, Février 2018. DOI : 10.1016/j.jmatprotec.2017.09.020.
- [22] Chuanchu SU, Xizhang CHEN, Chuang GAO et Yangfan WANG. Effect of Heat Input on Microstructure and Mechanical Properties of Al-Mg Alloys Fabricated by WAAM. *Applied Surface Science*, 486 :431-440, 2019.

- 
- [23] Ahmet Suat YILDIZ, Kemal DAVUT, Barış KOC et Oguzhan YILMAZ. Wire Arc Additive Manufacturing of High-Strength Low Alloy Steels : Study of Process Parameters and Their Influence on The Bead Geometry and Mechanical Characteristics. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 108(11) :3391-3404, 2020. DOI : 10.1007/s00170-020-05482-9.
- [24] Lam NGUYEN, Johannes BUHL et Markus BAMBACH. Multi-Bead Overlapping Models for Tool Path Generation in Wire-Arc Additive Manufacturing Processes. *Procedia Manufacturing*, 47 :1123-1128, 2020. DOI : 10.1016/j.promfg.2020.04.129.
- [25] Yuhong XIONG, John E. SMUGERESKY et Julie M. SCHOENUNG. The Influence of Working Distance on Laser Deposited WC-Co. *Journal of Materials Processing Technology*, 209(10) :4935-4941, 2009. DOI : 10.1016/j.jmatprotec.2009.01.016.
- [26] James C. HALEY, Baolong ZHENG, Umberto Scipioni BERTOLI, Alexander D. DUPUY, Julie M. SCHOENUNG et Enrique J. LAVERNIA. Working Distance Passive Stability in Laser Directed Energy Deposition Additive Manufacturing. *Materials & Design*, 161 :86-94, 2019. DOI : 10.1016/j.matdes.2018.11.021.
- [27] George V. PAUL et Katsushi IKEUCHI. A Quasi-linear Method for Computing and Projecting onto C-surfaces : Planar Case. In *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, tome 3, pages 2032-2037. IEEE, 1997. DOI : 10.1109/robot.1997.619172.
- [28] Junghoon HUR et Kunwoo LEE. The Development of a CAD Environment to Determine the Preferred Build-up Direction for Layered Manufacturing. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 14(4) :247-254, 1998. DOI : 10.1007/bf01199879.
- [29] Paul ALEXANDER, Seth ALLEN et Debasish DUTTA. Part Orientation and Build Cost Determination in Layered Manufacturing. *Computer-Aided Design*, 30(5) :343-356, 1998. DOI : 10.1016/s0010-4485(97)00083-3.
- [30] K. TRIMURTHULU, P. M. PANDEY et N. V. REDDY. Optimum Part Deposition Orientation in Fused Deposition Modelling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44 :585-594, 2004. DOI : 10.1016/j.ijmactools.2003.12.004.
- [31] V. CANELLIDIS, J. GIANNATISIS et V. DEDOUSSIS. Genetic-Algorithm-Based Multi-Objective Optimization of the Build Orientation in Stereolithography. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 45(7) :714-730, 2009. DOI : 10.1007/s00170-009-2006-y.
- [32] Jianpeng DONG, Ju-Hsien KAO, Jose M. PINILLA, Yu-Chi CHANG et Fritz B. PRINZ. Automated Planning for Material Shaping Operations in Additive/Subtractive Solid Freeform Fabrication. In *1999 International Solid Freeform Fabrication Symposium*, 1999. DOI : 10.26153/tsw/725.
- [33] Ismail Enes YIGIT et I. LAZOGLU. Helical Slicing Method for Material Extrusion-Based Robotic Additive Manufacturing. *Progress in Additive Manufacturing*, 4(3) :225-232, 2019. DOI : 10.1007/s40964-019-00090-w.
- [34] Yu-an JIN, Yong HE, Jian-zhong FU, Wen-feng GAN et Zhi-wei LIN. Optimization of Tool-path Generation for Material Extrusion-based Additive Manufacturing Technology. *Additive Manufacturing*, 1 :32-47, 2014. DOI : 10.1016/j.addma.2014.08.004.
-



- [35] Nan LUO et Quan WANG. Fast Slicing Orientation Determining and Optimizing Algorithm for Least Volumetric Error in Rapid Prototyping. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 83(5) :1297-1313, 2016. DOI : 10.1007/s00170-015-7571-7.
- [36] M. HAMOUD et Ahmed SOBHI. A New Algorithm for Optimal Process Parameters Based on Minimum Building Time in Additive Manufacturing. *Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences*, 11(1) :1-18, 2022. DOI : 10.1186/s43088-022-00260-w.
- [37] Gang ZHAO, Guocai MA, Jiangwei FENG et Wenlei XIAO. Nonplanar Slicing and Path Generation Methods for Robotic Additive Manufacturing. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 96(9) :3149-3159, 2018. DOI : 10.1007/s00170-018-1772-9.
- [38] Kamesh TATA, Georges FADEL, Amit BAGCHI et Nadim AZIZ. Efficient Slicing for Layered Manufacturing. *Rapid Prototyping Journal*, 1998. DOI : 10.1108/13552549810239003.
- [39] Prabhjot SINGH et Debasish DUTTA. Multi-Direction Slicing for Layered Manufacturing. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 1(2) :129-142, 2001. DOI : 10.1115/1.1375816.
- [40] Jun ZHANG et Frank LIOU. Adaptive Slicing for a Multi-axis Laser Aided Manufacturing Process. *Journal of Mechanical Design*, 126(2) :254-261, 2004. DOI : 10.1115/1.1649966.
- [41] Pulak Mohan PANDEY, N. Venkata REDDY et Sanjay G. DHANDE. Slicing Procedures in Layered Manufacturing : A Review. *Rapid Prototyping Journal*, 9(5) :274-288, 2003. DOI : 10.1108/13552540310502185.
- [42] John FLEMMER, Norbert PIRCH et Fabian DRINCK. LMDCAM2 : Software Tool for Near-net Repair, Cladding and Built-up by Laser Metal Deposition. In *International Manufacturing Science and Engineering Conference*, tome 1, pages 1-5. American Society of Mechanical Engineers, 2015. DOI : 10.1115/msec2015-9243.
- [43] André DOLENC et Ismo MÄKELÄ. Slicing Procedures for Layered Manufacturing Techniques. *Computer-Aided Design*, 26(2) :119-126, 1994. DOI : 10.1016/0010-4485(94)90032-9.
- [44] Jacopo LETTORI, Roberto RAFFAELI, Pietro BILANCIA, Margherita PERUZZINI et Marcello PELLICCIARI. A Review of Geometry Representation and Processing Methods for Cartesian and Multi-axial Robot-based Additive Manufacturing. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* :1-28, 2022. DOI : 10.1007/s00170-022-10432-8.
- [45] Kristian HILDEBRAND, Bernd BICKEL et Marc ALEXA. Orthogonal Slicing for Additive Manufacturing. *Computers and Graphics*, 37(6) :669-675, 2013. DOI : 10.1016/j.cag.2013.05.011.
- [46] Stefan PESKO. Minimal Total Area Convex Set Partitioning Problem. *Communications-Scientific Letters of the University of Zilina*, 11(3), 2009. DOI : 10.26552/com.c.2009.3.39-42.
- [47] Prahar M. BHATT, Rishi K. MALHAN, Pradeep RAJENDRAN et Satyandra K. GUPTA. Building Free-form Thin Shell Parts Using Supportless Extrusion-based Additive Manufacturing. *Additive Manufacturing*, 32, 2020. DOI : 10.1016/j.addma.2019.101003.

- 
- [48] Weihua SHENG, Ning XI, Heping CHEN, Yifan CHEN et Mumin SONG. Surface Partitioning in Automated CAD-guided Tool Planning for Additive Manufacturing. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, tome 2, pages 2072-2077. IEEE, 2003. DOI : 10.1109/IR0S.2003.1248977.
- [49] Heping CHEN, Ning XI, Zhouhua WEI, Yifan CHEN et Jeffrey DAHL. Robot Trajectory Integration for Painting Automotive Parts with Multiple Patches. In *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, tome 3, pages 3984-3989. IEEE, 2003. DOI : 10.1109/robot.2003.1242209.
- [50] John K. ANTONIO. Optimal Trajectory Planning for Spray Coating. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2570-2577. IEEE, 1994. DOI : 10.1109/ROBOT.1994.351125.
- [51] Renan S. FREITAS, Eduardo EM SOARES, Ramon R. COSTA et Breno B. CARVALHO. High Precision Trajectory Planning on Freeform Surfaces for Robotic Manipulators. In *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3695-3700. IEEE, 2017. DOI : 10.1109/iro.2017.8206216.
- [52] Prashant KULKARNI et Debasish DUTTA. An Accurate Slicing Procedure for Layered Manufacturing. *Computer-Aided Design*, 28(9) :683-697, 1996. DOI : 10.1016/0010-4485(95)00083-6.
- [53] Nandkumar SIRASKAR, Ratnadeep PAUL et Sam ANAND. Adaptive Slicing in Additive Manufacturing Process Using a Modified Boundary Octree Data Structure. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 137(1), 2015. DOI : 10.1115/1.4028579.
- [54] Binil STARLY, Alan LAU, Wei SUN, Wing LAU et Tom BRADBURY. Direct Slicing of STEP Based NURBS Models for Layered Manufacturing. *Computer-Aided Design*, 37(4) :387-397, 2005. DOI : 10.1016/j.cad.2004.06.014.
- [55] Maxime CHALVIN, Sébastien CAMPOCASSO, Thomas BAIZEAU et Vincent HUGEL. Automatic Multi-axis Path Planning for Thinwall Tubing Through Robotized Wire Deposition. *Procedia CIRP*, 79 :89-94, 2019. DOI : 10.1016/j.procir.2019.02.017.
- [56] Bernardo FREIRE, Mihail BABCINSCHI, Lucía FERREIRA, Baltasar SEÑARIS, Felix VIDAL et Pedro NETO. Direct Energy Deposition : A Complete Workflow for the Additive Manufacturing of Complex Shape Parts. *Procedia Manufacturing*, 51 :671-677, 2020. DOI : 10.1016/j.promfg.2020.10.094.
- [57] Yaroslav GARASHCHENKO et Nina ZUBKOVA. Adaptive Slicing in the Additive Manufacturing Process Using the Statistical Layered Analysis. In *Design, Simulation, Manufacturing : The Innovation Exchange*, pages 253-263. Springer, 2020. DOI : 10.1007/978-3-030-50794-7\_25.
- [58] Yaoyu DING, Meysam AKBARI, Xin-Lin GAO, Li AI et Radovan KOVACEVIC. Use of Powder-feed Metal Additive Manufacturing System for Fabricating Metallic Metamaterials. *Manufacturing Techniques for Materials : Engineering and Engineered* :51-65, 2018. DOI : 10.1201/b22313-3.
- [59] Maialen MURUA, Diego GALAR et Roberto SANTANA. Tool-Path Problem in Direct Energy Deposition Metal-Additive Manufacturing : Sequence Strategy Generation. *IEEE Access*, 8 :91574-91585, 2020. DOI : 10.1109/access.2020.2994748.
-

- [60] Jon FLORES, Iker GARMENDIA et Joseba PUJANA. Toolpath Generation for the Manufacture of Metallic Components by Means of the Laser Metal Deposition Technique. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 101(5) :2111-2120, 2019. DOI : 10.1007/s00170-018-3124-1.
- [61] Maxime CHALVIN, Sébastien CAMPOCASSO, Vincent HUGEL et Thomas BAIZEAU. Layer-by-Layer Generation of Optimized Joint Trajectory for Multi-Axis Robotized Additive Manufacturing of Parts of Revolution. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 65 :101960, 2020. DOI : 10.1016/j.rcim.2020.101960.
- [62] Adama DIOURTE, Florian BUGARIN, Cyril BORDREUIL et Stéphane SEGONDS. Continuous Three-Dimensional Path Planning (CTPP) for Complex Thin Parts with Wire Arc Additive Manufacturing. *Additive Manufacturing*, 2020. DOI : 10.1016/j.addma.2020.101622.
- [63] Michael S. FLOATER et Kai HORMANN. Surface Parameterization : A Tutorial and Survey. *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling* :157-186, 2005. DOI : 10.1007/3-540-26808-1\_9.
- [64] Keenan CRANE, Clarisse WEISCHEDEL et Max WARDETZKY. The Heat Method for Distance Computation. *Communications of the ACM*, 60(11) :90-99, 2017. DOI : 10.1145/3131280.
- [65] Nicholas SHARP, Yousuf SOLIMAN et Keenan CRANE. The Vector Heat Method. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 38(3) :1-19, 2019. DOI : doi.org/10.1145/3243651.
- [66] Ke XU, Yingguang LI, Lufeng CHEN et Kai TANG. Curved Layer Based Process Planning for Multi-axis Volume Printing of Freeform Parts. *Computer-Aided Design*, 114 :51-63, 2019. DOI : 10.1016/j.cad.2019.05.007.
- [67] Chengkai DAI, Charlie CL WANG, Chenming WU, Sylvain LEFEBVRE, Guoxin FANG et Yong-Jin LIU. Support-Free Volume Printing by Multi-axis Motion. *ACM Transactions on Graphics*, 37(4) :1-14, 2018. DOI : 10.1145/3197517.3201342.
- [68] Sanjay RAJAGOPALAN, Roger GOLDMAN, Ki-Hoon SHIN, Vinod KUMAR, Mark CUTKOSKY et Debasish DUTTA. Representation of Heterogeneous Objects During Design, Processing and Freeform-fabrication. *Materials & Design*, 22(3) :185-197, 2001. DOI : 10.1016/s0261-3069(00)00065-0.
- [69] Prashant KULKARNI, Anne MARSAN et Debasish DUTTA. A Review of Process Planning Techniques in Layered Manufacturing. *Rapid prototyping journal*, 2000. DOI : 10.1108/13552540010309859.
- [70] Alexander J. WOLFER, Jeremy AIRES, Kevin WHEELER, Jean-Pierre DELPLANQUE, Alexander RUBENCHIK, Andy ANDERSON et Saad KHAIRALLAH. Fast Solution Strategy for Transient Heat Conduction for Arbitrary Scan Paths in Additive Manufacturing. *Additive Manufacturing*, 30 :100898, 2019. DOI : 10.1016/j.addma.2019.100898.
- [71] Emmanuel STATHATOS et George-Christopher VOSNIAKOS. Real-Time Simulation for Long Paths in Laser-based Additive Manufacturing : A Machine Learning Approach. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 104(5) :1967-1984, 2019. DOI : 10.1007/s00170-019-04004-6.
- [72] Qian CHEN, Jikai LIU, Xuan LIANG et Albert C. TO. A Level-set Based Continuous Scanning Path Optimization Method for Reducing Residual Stress and Deformation in Metal Additive Manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 360 :112719, 2020. DOI : 10.1016/j.cma.2019.112719.

- 
- [73] Yoshio MIZUGAKI, Masafumi SAKAMOTO et Keisuke KAMIJO. Fractal Path Application in a Metal Mold Polishing Robot System. In *5th International Conference on Advanced Robotics/Robots in Unstructured Environments*, pages 431-436. IEEE, 1991. DOI : 10.1109/icar.1991.240615.
- [74] Minghao BI, Lingwei XIA, Phuong TRAN, Zhi LI, Qian WAN, Li WANG, Wei SHEN, Guowei MA et Yi Min XIE. Continuous Contour-zigzag Hybrid Toolpath for Large Format Additive Manufacturing. *Additive Manufacturing*, 55, 2022. DOI : 10.1016/j.addma.2022.102822.
- [75] Sadaival SINGH, Ambrish SINGH, Sajan KAPIL et Manas DAS. Utilization of a TSP Solver for Generating Non-retractable, Direction Favouring Toolpath for Additive Manufacturing. *Additive Manufacturing*, 59 :103-126, 2022. DOI : 10.1016/j.addma.2022.103126.
- [76] Lam NGUYEN, Johannes BUHL et Markus BAMBACH. Continuous Eulerian Tool Path Strategies for Wire-arc Additive Manufacturing of Rib-web Structures with Machine-learning-based Adaptive Void Filling. *Additive Manufacturing*, 35 :101265, 2020. DOI : 10.1016/j.addma.2020.101265.
- [77] Andrew T. GAYNOR, Nicholas A. MEISEL, Christopher B. WILLIAMS et James K. GUEST. Topology Optimization for Additive Manufacturing : Considering Maximum Overhang Constraint. In *15th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, pages 1-8, 2014. DOI : 10.2514/6.2014-2036.
- [78] Puikei CHENG, Wing Kam LIU, Kornel EHMANN et Jian CAO. Enumeration of Additive Manufacturing Toolpaths Using Hamiltonian Paths. *Manufacturing Letters*, 26 :29-32, 2020. DOI : 10.1016/j.mfglet.2020.09.008.
- [79] George Q. ZHANG, Wiener MONDESIR, Carlos MARTINEZ, Xiongzi LI, Thomas A. FUHLBRIGGE et Hemant BHEDA. Robotic Additive Manufacturing along Curved Surface - a Step Towards Free-Form Fabrication. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pages 721-726. IEEE, 2015. DOI : 10.1109/robio.2015.7418854.
- [80] Fubao XIE, Xishuang JING, Chengyang ZHANG, Siyu CHEN, Danjie BI, Zhaoyu LI, Dong HE et Kai TANG. Volume Decomposition for Multi-axis Support-free and Gouging-free Printing Based on Ellipsoidal Slicing. *Computer-Aided Design*, 143 :103135, 2022. DOI : 10.1016/j.cad.2021.103135.
- [81] Ismail Enes YIGIT et I. LAZOGLU. Spherical Slicing Method and Its Application on Robotic Additive Manufacturing. *Progress in Additive Manufacturing*, 5(4) :387-394, 2020. DOI : 10.1007/s40964-020-00135-5.
- [82] Sébastien CAMPOCASSO, Maxime CHALVIN, A.-K. REICHLER, R. GERBERS, K. DRÖDER, Vincent HUGEL et F. DIETRICH. A Framework for Future CAM Software Dedicated to Additive Manufacturing by Multi-Axis Deposition. *Procedia CIRP*, 78 :79-84, 2018. DOI : 10.1016/j.procir.2018.08.314.
- [83] In-Kwon LEE. Curve Reconstruction from Unorganized Points. *Computer-Aided Geometric Design*, 17(2) :161-177, 2000. DOI : 10.1016/s0167-8396(99)00044-8.
- [84] Atul KUMAR, P. K. JAIN et Pushparaj Mani PATHAK. Curve Reconstruction of Digitized Surface Using K-means Algorithm. *Procedia Engineering*, 69 :544-549, 2014. DOI : 10.1016/j.proeng.2014.03.024.
-

- [85] Gregory DREIFUS, Kyle GOODRICK, Scott GILES, Milan PATEL, Reed Matthew FOSTER, Cody WILLIAMS, John LINDAHL, Brian POST, Alex ROSCHLI et Lonnie LOVE. Path Optimization along Lattices in Additive Manufacturing Using the Chinese Postman Problem. *3D Printing and Additive Manufacturing*, 4(2) :98-104, 2017. DOI : 10.1089/3dp.2017.0007.
- [86] K. REN, Y. CHEW, Y. F. ZHANG, J. Y. H. FUH et G. J. BI. Thermal Field Prediction for Laser Scanning Paths in Laser Aided Additive Manufacturing by Physics-based Machine Learning. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 362 :1-13, 2020. DOI : 10.1016/j.cma.2019.112734.
- [87] Pierre COLMEZ et Jean-Pierre SERRE. *Correspondance Grothendieck-Serre*. Société Mathématique de France, 2005. ISBN : 2-85629-104-X.
- [88] Laurent PELÉ. La Théorie Des Motifs de Grothendieck. <http://pele.org/la-theorie-des-motifs-de-grothendieck.php>, 1995. (Visité le 28/06/2022).
- [89] Aamer NAZIR, Kalayu Mekonen ABATE, Ajeet KUMAR et Jeng-Ywan JENG. A State-of-the-Art Review on Types, Design, Optimization, and Additive Manufacturing of Cellular Structures. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 104(9) :3489-3510, 2019. DOI : 10.1007/s00170-019-04085-3.
- [90] Aristides A. G. REQUICHA et Jarek R. ROSSIGNAC. Solid Modeling and Beyond. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(5) :31-44, 1992. DOI : 10.1109/38.156011.
- [91] Antoine JULIEN et Lorenzo SADUN. Tiling Deformations, Cohomology, and Orbit Equivalence of Tiling Spaces. *Ann. Henri Poincaré*, 19(10) :3053-3088, Octobre 2018. DOI : 10.1007/s00023-018-0713-3.
- [92] Eric FERLEY, Marie-Paule CANI et Jean-Dominique GASCUEL. Resolution Adaptive Volume Sculpting. *Graphical Models*, 63(6) :459-478, 2001. DOI : 10.1006/gmod.2001.0558.
- [93] Lucian STANCULESCU, Raphaëlle CHAINE et Marie-Paule CANI. Freestyle : Sculpting Meshes with Self-Adaptive Topology. *Computers and Graphics*, 35(3) :614-622, 2011. DOI : 10.1016/j.cag.2011.03.033.
- [94] Marion DUNYACH, David VANDERHAEGHE, Loïc BARTHE et Mario BOTSCH. Adaptive Remeshing for Real-Time Mesh Deformation. In *Eurographics 2013*. The Eurographics Association, 2013. DOI : 10.2312/conf/EG2013/short/029-032.
- [95] S. RESTREPO, S. OCAMPO, J. A. RAMÍREZ, C. PAUCAR et C. GARCÍA. Mechanical Properties of Ceramic Structures Based on Triply Periodic Minimal Surface (TPMS) Processed by 3D Printing. *Journal of Physics : Conference Series*, 935(1), 2017. DOI : 10.1088/1742-6596/935/1/012036.
- [96] Michael F. ASHBY, Tony EVANS, N. A. FLECK, J. W. HUTCHINSON, H. N. G. WADLEY et L. J. GIBSON. *Metal Foams : A Design Guide*. Elsevier, Juillet 2000. ISBN : 978-0-08-051146-7.
- [97] Dong-Wook LEE, Kamran A. KHAN et Rashid K. Abu AL-RUB. Stiffness and Yield Strength of Architected Foams Based on the Schwarz Primitive Triply Periodic Minimal Surface. *International Journal of Plasticity*, 95 :1-20, 2017. DOI : 10.1016/j.ijplas.2017.03.005.
- [98] Rita AMBU et Anna Eva MORABITO. Modeling, Assessment, and Design of Porous Cells Based on Schwartz Primitive Surface for Bone Scaffolds. *The Scientific World Journal*, 2019 :7060847, 2019. DOI : 10.1155/2019/7060847.

- 
- [99] I. MASKERY, L. STURM, A. O. AREMU, A. PANESAR, C. B. WILLIAMS, C. J. TUCK, R. D. WILDMAN, I. A. ASHCROFT et R. J. M. HAGUE. Insights into the Mechanical Properties of Several Triply Periodic Minimal Surface Lattice Structures Made by Polymer Additive Manufacturing. *Polymer*. SI : Advanced Polymers for 3DPrinting/Additive Manufacturing, 152 :62-71, Septembre 2018. DOI : 10.1016/j.polymer.2017.11.049.
- [100] Lei YANG, Chunze YAN, Changjun HAN, Peng CHEN, Shoufeng YANG et Yusheng SHI. Mechanical Response of a Triply Periodic Minimal Surface Cellular Structures Manufactured by Selective Laser Melting. *International Journal of Mechanical Sciences*, 148 :149-157, Novembre 2018. DOI : 10.1016/j.ijmecsci.2018.08.039.
- [101] Yongtao LU, Wenying ZHAO, Zhentao CUI et Chengwei WU. The Anisotropic Elastic Behavior of the Widely-Used Triply-Periodic Minimal Surface Based Scaffolds. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 99, Juillet 2019. DOI : 10.1016/j.jmbbm.2019.07.012.
- [102] Farouq KHOGALI, Hui Leng CHOO et Wei Hsum YAP. Performance of Triply Periodic Minimal Surface Lattice Structures Under Compressive Loading for Tissue Engineering Applications. In *AIP Conference Proceedings*, tome 2233, Janvier 2020. DOI : 10.1063/5.0001631.
- [103] Fernando SIERRA et Carolina M. RODRIGUEZ. Architectural Envelope Systems Based on Triply Periodic Minimal Surfaces. *International Journal of Space Structures*, 29(4) :161-169, 2014. DOI : 10.1260/0266-3511.29.4.161.
- [104] Y. JUNG et S. TORQUATO. Fluid Permeabilities of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Physical Review E*, 72(5) :056319, 2005. DOI : 10.1103/PhysRevE.72.056319.
- [105] Navya THOMAS, Nurshaun SREEDHAR, Oraib AL-KETAN, Reza ROWSHAN, Rashid K. Abu AL-RUB et Hassan ARAFAT. 3D Printed Triply Periodic Minimal Surfaces as Spacers for Enhanced Heat and Mass Transfer in Membrane Distillation. *Desalination*, 443 :256-271, 2018. DOI : DOI:10.1016/j.desal.2018.06.009.
- [106] Hao PENG, Feng GAO et Wenjing HU. Design, Modeling and Characterization on Triply Periodic Minimal Surface Heat Exchangers with Additive Manufacturing. In *2019 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin, 2019. DOI : 10.26153/tsw/17483.
- [107] Weihong LI, Guopeng YU et Zhibin YU. Bioinspired Heat Exchangers Based on Triply Periodic Minimal Surfaces for Supercritical CO<sub>2</sub> Cycles. *Applied Thermal Engineering*, 179 :115686, 2020. DOI : 10.1016/j.applthermaleng.2020.115686.
- [108] Daniel A. CLARKE, Fabian DOLAMORE, Conan J. FEE, Petrik GALVOSAS et Daniel J. HOLLAND. Investigation of Flow Through Triply Periodic Minimal Surface-Structured Porous Media Using MRI and CFD. *Chemical Engineering Science*, 231 :116264, 2021. DOI : 10.1016/j.ces.2020.116264.
- [109] L. MARTIN-MORENO, F. J. GARCIA-VIDAL et A. M. SOMOZA. Self-Assembled Triply Periodic Minimal Surfaces as Molds for Photonic Band Gap Materials. *Physical Review Letters*, 83(1) :73, 1999. DOI : 10.1103/PhysRevLett.83.73.
- [110] Diab W. ABUEIDDA, Iwona JASIUK et Nahil A. SOBH. Acoustic Band Gaps and Elastic Stiffness of PMMA Cellular Solids Based on Triply Periodic Minimal Surfaces. *Materials and Design*, 145 :20-27, 2018. DOI : j.matdes.2018.02.032.
-

- [111] Lei ZHANG, Stefanie FEIH, Stephen DAYNES, Shuai CHANG, Michael Yu WANG, Jun WEI et Wen Feng LU. Energy Absorption Characteristics of Metallic Triply Periodic Minimal Surface Sheet Structures Under Compressive Loading. *Additive Manufacturing*, 23 :505-515, 2018. DOI : 10.1016/j.addma.2018.08.007.
- [112] Diab W. ABUEIDDA, Rashid K. Abu AL-RUB, Ahmed S. DALAQ, Dong-Wook LEE, Kamran A. KHAN et Iwona JASIUK. Effective Conductivities and Elastic Moduli of Novel Foams with Triply Periodic Minimal Surfaces. *Mechanics of Materials*, 95 :102-115, 2016. DOI : 10.1016/j.mechmat.2016.01.004.
- [113] Jiawei FENG, Bo LIU, Zhiwei LIN et Jianzhong FU. Isotropic Porous Structure Design Methods Based on Triply Periodic Minimal Surfaces. *Materials and Design*, 210 :110050, 2021. DOI : 10.1016/j.matdes.2021.110050.
- [114] Chengxing YANG et Q. M. LI. Advanced Lattice Material with High Energy Absorption Based on Topology Optimisation. *Mechanics of Materials*, 148 :103536, 2020. DOI : 10.1016/j.mechmat.2020.103536.
- [115] Xiao GUO, Junhao DING, Xinwei LI, Shuo QU, Xu SONG, Jerry Ying Hsi FUH, Wen Feng LU et Wei ZHAI. Enhancement in the Mechanical Behaviour of a Schwarz Primitive Periodic Minimal Surface Lattice Structure Design. *International Journal of Mechanical Sciences*, 216 :106977, 2022. DOI : 10.1016/j.ijmecsci.2021.106977.
- [116] Ian MASKERY, L. A. PARRY, D. PADRÃO, R. J. M. HAGUE et I. A. ASHCROFT. FLatt Pack : A Research-Focussed Lattice Design Program. *Additive Manufacturing*, 49 :102510, 2022. DOI : 10.1016/j.addma.2021.102510.
- [117] Oraib AL-KETAN, Dong-Wook LEE, Reza ROWSHAN et Rashid K. Abu AL-RUB. Functionally Graded and Multi-Morphology Sheet TPMS Lattices : Design, Manufacturing, and Mechanical Properties. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 102 :103520, 2020. DOI : 10.1016/j.jmbbm.2019.103520.
- [118] Sébastien BLANQUER, Maike WERNER, Markus HANNULA, Shahriar SHARIFI, Guillaume LAJOINIE, David EGLIN, Jari HYTTINEN, André POOT et Dirk GRIJPMAN. Surface Curvature in Triply-Periodic Minimal Surface Architectures as a Distinct Design Parameter in Preparing Advanced Tissue Engineering Scaffolds. *Biofabrication*, 9(2) :1-12, Juin 2017. DOI : 10.1088/1758-5090/aa6553. (Visité le 06/06/2020).
- [119] Martin TRAZET. On the Genus of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 79(2) :243-275, 2008. DOI : 10.4310/jdg/1211512641.
- [120] William H. MEEKS III et Joaquín PÉREZ. The Classical Theory of Minimal Surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48(3) :325-325, Septembre 2011. DOI : 10.1090/S0273-0979-2011-01334-9.
- [121] Shiwei ZHOU et Qing LI. The Relation of Constant Mean Curvature Surfaces to Multiphase Composites with Extremal Thermal Conductivity. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 40(19) :6083, 2007. DOI : 10.1088/0022-3727/40/19/048.
- [122] Madhu Ranjan GUNJAN, Alok KUMAR et Rishi RAJ. Cloaked Droplets on Lubricant-Infused Surfaces : Union of Constant Mean Curvature Interfaces Dictated by Thin-Film Tension. *Langmuir*, 37(22) :6601-6612, 2021. DOI : 10.1021/acs.langmuir.0c03560.

- 
- [123] Patrice JEENER. My Mathematical Engravings. In Claude BRUTER, éditeur, *Mathematics and Modern Art*. Tome 18, pages 85-104. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012. ISBN : 978-3-642-24496-4 978-3-642-24497-1. DOI : 10.1007/978-3-642-24497-1\_9. (Visité le 05/04/2022).
- [124] Heinrich WEBER. *Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke Und Wissenschaftlicher Nachlass*. Benedictus Gotthelf Teubner-Verlag, 1876.
- [125] Hermann Amandus SCHWARZ. Über Ein Die Flächen Kleinsten Flächeninhalts Betreffendes Problem Der Variationsrechnung. In *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Springer, 1890. ISBN : 978-3-642-50356-6.
- [126] S. T. HYDE et Sten ANDERSSON. A Systematic Net Description of Saddle Polyhedra and Periodic Minimal Surfaces. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, 168(1-4) :221-254, 1984. DOI : 10.1524/zkri.1984.168.14.221.
- [127] Tibor RADÓ. On Plateau's Problem. *Annals of Mathematics* :457-469, 1930. DOI : 10.2307/1968237.
- [128] Edvard Rudolf NEOVIUS. *Bestimmung Zweier Speciellen Periodischen Minimalflächen, Auf Welchen Unendlich Viele Gerade Linien Und Unendlich Viele Ebene Geodätische Linien Liegen*. Johan Christopher Frenckell and Son, 1883. ISBN : PPN591417707.
- [129] Alan Hugh SCHOEN. Infinite Periodic Minimal Surfaces Without Self-intersections. Rapport technique, Mai 1970.
- [130] Alan Hugh SCHOEN. Reflections Concerning Triply-Periodic Minimal Surfaces. *Interface Focus*, 2(5) :658-668, 2012. DOI : 10.1098/rsfs.2012.0023.
- [131] Pierre-Ossian BONNET. Note Sur La Théorie Générale Des Surfaces. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, (37) :529-532, Juillet 1853.
- [132] Paul JF GANDY, Djurdje CVIJOVIĆ, Alan L. MACKAY et Jacek KLINOWSKI. Exact Computation of the Triply Periodic D ('Diamond') Minimal Surface. *Chemical Physics Letters*, 314(5-6) :543-551, Décembre 1999. DOI : 10.1016/S0009-2614(99)01000-3.
- [133] Paul JF GANDY et Jacek KLINOWSKI. Exact Computation of the Triply Periodic G ('Gyroid') Minimal Surface. *Chemical Physics Letters*, 321(5-6) :363-371, Mai 2000. DOI : 10.1016/S0009-2614(00)00373-0.
- [134] Paul JF GANDY et Jacek KLINOWSKI. Exact Computation of the Triply Periodic Schwarz P Minimal Surface. *Chemical Physics Letters*, (322) :579-586, Juin 2000. DOI : 10.1016/S0009-2614(00)00453-X.
- [135] Werner FISCHER et Elke KOCH. On 3-Periodic Minimal Surfaces. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, 179(1-4) :31-52, 1987. DOI : doi.org/10.1524/zkri.1987.179.14.31.
- [136] Werner FISCHER et Elke KOCH. New Surface Patches for Minimal Balance Surfaces. I. Branched Catenoids. *Acta Crystallographica Section A : Foundations of Crystallography*, 45(2) :166-169, 1989. DOI : 10.1107/S0108767388010797.
- [137] Sven LIDIN et Stefan LARSSON. Bonnet Transformation of Infinite Periodic Minimal Surfaces with Hexagonal Symmetry. *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions*, 86(5) :769-775, 1990. DOI : 10.1039/FT9908600769.
- [138] Hao CHEN et Matthias WEBER. A New Deformation Family of Schwarz' D Surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 374(4) :2785-2803, 2021. DOI : 10.1090/tran/8274.
-



- [139] Peter PIERUSCHKA et Safran Société ANONYME. Random Interfaces and the Physics of Microemulsions. *Europhysics Letters*, 22(8) :625, 1993. DOI : 10.1209/0295-5075/22/8/011.
- [140] Peter PIERUSCHKA et Safran Société ANONYME. Random Interface Model of Sponge Phases. *Physical Review B*, 31(4) :207, 1995. DOI : 10.1209/0295-5075/31/4/004.
- [141] Hirokazu HASEGAWA. Novel Bicontinuous Microdomain Structures Formed by Neat Block Copolymers and Their Blends with Homopolymers. *Sen'i Gakkaishi*, 55(3) :P82-P86, 1999. DOI : 10.2115/fiber.55.3\_p82.
- [142] Yushu MATSUSHITA, Naoya TORIKAI, Jiro SUZUKI et Motohiro SEKI. Interfacial Structures of Triblock Copolymers and Their Chain Conformations in Bulk. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 60(8-9) :1279-1284, 1999. DOI : 10.1016/S0022-3697(99)00102-X.
- [143] Hermann KARCHER. The Triply Periodic Minimal Surfaces of Alan Schoen and Their Constant Mean Curvature Companions. *Manuscripta Mathematica*, 64(3) :291-357, 1989. DOI : 10.1007/BF01165824.
- [144] Jesse DOUGLAS. Solution of the Problem of Plateau. *Transactions of the American Mathematical Society*, 33(1) :263-321, 1931. DOI : 10.2307/1989472.
- [145] Hermann KARCHER et Konrad POLTHIER. Construction of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 354(1715) :2077-2104, 1996. DOI : 10.1098/rsta.1996.0093.
- [146] Stanley OSHER et Ronald P. FEDKIW. Level Set Methods : An Overview and Some Recent Results. *Journal of Computational physics*, 169(2) :463-502, 2001. DOI : 10.1006/jcph.2000.6636.
- [147] Kristel MICHELSEN et J. S. KOLE. Photonic Band Gaps in Materials with Triply Periodic Surfaces and Related Tubular Structures. *Physical Review B*, 68(11) :115107, 2003. DOI : 10.1103/PhysRevB.68.115107.
- [148] Dong-Jin YOO. Computer-Aided Porous Scaffold Design for Tissue Engineering Using Triply Periodic Minimal Surfaces. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 12(1) :61-71, 2011. DOI : 10.1007/s12541-011-0008-9.
- [149] Yongtao LU, LiangLiang CHENG, Zhuoyue YANG, Junyan LI et Hanxing ZHU. Relationship Between the Morphological, Mechanical and Permeability Properties of Porous Bone Scaffolds and the Underlying Microstructure. *Plos One*, 15(9) :1-19, 2020. DOI : 10.1371/journal.pone.0242181.
- [150] Yunlong TANG, Sheng YANG et Yaoyao Fiona ZHAO. Chapter 2 : Sustainable Design for Additive Manufacturing Through Functionality Integration and Part Consolidation. *Handbook of Sustainability in Additive Manufacturing*, 1 :101-144, 2016. DOI : 10.1007/978-981-10-0549-7\_6.
- [151] Lei YUAN, Zengxi PAN, Joseph POLDEN, Donghong DING, Stephen VAN DUIN et Huijun LI. Integration of a Multi-directional Wire Arc Additive Manufacturing System with an Automated Process Planning Algorithm. *Journal of Industrial Information Integration*, 26 :1-11, 2021. DOI : 10.1016/j.jii.2021.100265.

- 
- [152] S. H. CHOI et Y. CAI. A Virtual Dual-level Reconfigurable Additive Manufacturing System for Digital Object Fabrication. In *2010 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin, 2010. DOI : 10.26153/tsw/15197.
- [153] Denys PLAKHOTNIK, Lothar GLASMACHER, Tom VANEKER, Yury SMETANIN, Marc STAUTNER, Yavuz MURTEZAOGLU et Fred VAN HOUTEN. CAM Planning for Multi-axis Laser Additive Manufacturing Considering Collisions. *CIRP Annals*, 68(1) :447-450, 2019. DOI : 10.1016/j.cirp.2019.04.007.
- [154] Manuel BESCHI, Stefano MUTTI, Giorgio NICOLA, Marco FARONI, Paolo MAGNONI, Enrico VILLAGROSSI et Nicola PEDROCCHI. Optimal Robot Motion Planning of Redundant Robots in Machining and Additive Manufacturing Applications. *Electronics*, 8(12) :1437, 2019. DOI : 10.3390/electronics8121437.
- [155] Tianyu ZHANG, Xiangjia CHEN, Guoxin FANG, Yingjun TIAN et Charlie CL WANG. Singularity-Aware Motion Planning for Multi-axis Additive Manufacturing. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 6(4) :6172-6179, 2021. DOI : 10.1109/lra.2021.3091109.
- [156] Pablo ROMERO-CARRILLO, Eloisa TORRES-JIMENEZ, Ruben DORADO et Francisco DÍAZ-GARRIDO. Analytic Construction and Analysis of Spiral Pocketing via Linear Morphing. *Computer-Aided Design*, 69 :1-10, 2015. DOI : 10.1016/j.cad.2015.07.008.
- [157] Martin HELD et Christian SPIELBERGER. A Smooth Spiral Tool Path for High Speed Machining of 2D Pockets. *Computer-Aided Design*, 41(7) :539-550, 2009. DOI : 10.1016/j.cad.2009.04.002.
- [158] Zhang HINGXIN et Feng JIEQING. *Implicit Surface Modelling*. State Key Lab of Computer-Aided Design and Computer Graphics. Zhejiang University, Janvier 2007.
- [159] Florian A. POTRA et Stephen J. WRIGHT. Interior-Point Methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1-2) :281-302, Décembre 2000. DOI : 10.1016/s0377-0427(00)00433-7.
- [160] MIKI. Parametric Curve Fitting with Iterative Parametrization. <https://meshlogic.github.io>, Juillet 2016.
- [161] Adrien Marie LEGENDRE. *Traité des Fonctions Elliptiques*. Imprimerie de Huzard-Courcier, 1825.
- [162] Rushan ZIATDINOV, Norimasa YOSHIDA et Tae-wan KIM. Analytic Parametric Equations of Log-Aesthetic Curves in Terms of Incomplete Gamma Functions. *Computer-Aided Geometric Design*, 29 :129-140, Février 2012. DOI : 10.1016/j.cagd.2011.11.003.
- [163] Sébastien CAMPOCASSO, Maxime CHALVIN, Ugo BOURGON, Vincent HUGEL et Matthieu MUSEAU. Manufacturing of a Schwarz-P Pattern by Multi-axis WAAM. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* :1-4, 2023. DOI : 10.1016/j.cirp.2023.04.058.
- [164] Jorge MIRELES, David ESPALIN, David ROBERSON, Bob ZINNIEL, Francisco MEDINA et Ryan WICKER. Fused Deposition Modeling of Metals. In *2012 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin, 2012. DOI : 10.26153/tsw/15394.
-

- [165] Giuseppe VENTURINI, Filippo MONTEVECCHI, Antonio SCIPPA et Gianni CAMPATELLI. Optimization of WAAM Deposition Patterns for T-Crossing Features. *Procedia Cirp*, 55 :95-100, 2016. DOI : 10.1016/j.procir.2016.08.043.
- [166] SLAVIK. Low Poly Cat. <https://www.thingiverse.com>, Juillet 2015. (Visité le 15/07/2022).
- [167] HOYOVERSE. Yān Fēi. <https://www.aplaybox.com>, Octobre 2021. (Visité le 15/07/2022).
- [168] Philip L. Stellated Icosahedron. <https://3dwarehouse.sketchup.com>, Novembre 2015. (Visité le 10/01/2022).
- [169] Arthur APPEL. Some Techniques for Shading Machine Renderings of Solids. In *Proceedings of the April 30 - May 2, 1968, Spring Joint Computer Conference*, pages 37-45, 1968. DOI : 10.1145/1468075.1468082.
- [170] Scott D. ROTH. Ray Casting for Modeling Solids. *Computer Graphics and Image Processing*, 18(2) :109-144, 1982. DOI : 10.1016/0146-664X(82)90169-1.
- [171] Tomas MÖLLER et Ben TRUMBORE. Fast, Minimum Storage Ray-Triangle Intersection. *Journal of Graphics Tools*, 2(1) :21-28, Janvier 1997. DOI : 10.1080/10867651.1997.10487468.
- [172] Tomas MÖLLER. A Fast Triangle-Triangle Intersection Test. *Journal of Graphics Tools*, 2(2) :25-30, 1997. DOI : 10.1080/10867651.1997.10487472.
- [173] Inho LEE, Kang Kyu LEE, Okkee SIM, Kim Sung WOO, Cho BUYOUN et Jun-Ho OH. Collision Detection System for the Practical Use of the Humanoid Robot. In *2015 IEEE-RAS 15th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pages 972-976. IEEE, 2015. DOI : 10.1109/HUMANOIDS.2015.7363487.
- [174] Christer ERICSON. Optimizing a Sphere-Triangle Intersection Test. <https://real-timecollisiondetection.net>, Décembre 2010.
- [175] Ken SHOEMAKE. Animating Rotation with Quaternion Curves. In *Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pages 245-254, 1985. DOI : 10.1145/325165.325242.
- [176] Gilbert LAPORTE et Silvano MARTELLO. The Selective Travelling Salesman Problem. *Discrete Applied Mathematics*, 26(2-3) :193-207, 1990. DOI : 10.1016/0166-218X(90)90100-Q.
- [177] Lin YAXIONG et Zhao YONGCHANG. A New Algorithm for the Directed Chinese Postman Problem. *Computers and Operations Research*, 15(6) :577-584, 1988. DOI : 10.1016/0305-0548(88)90053-6.
- [178] Dimitru CIUBATHI. Eulerian Path and Circuit. <http://www.graph-magics.com>, Septembre 2005. (Visité le 14/09/2021).
- [179] C. CANERO, Petia RADEVA, Ricardo TOLEDO, Juan José VILLANUEVA et Josefina MAURI. 3D Curve Reconstruction by Biplane Snakes. In *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition. ICPR-2000*, tome 4, pages 563-566. IEEE, 2000. DOI : 10.1109/icpr.2000.902982.
- [180] Stefan OHRHALLINGER, Jiju PEETHAMBARAN, Amal D. PARAKKAT, Tamal K. DEY et Ramanathan MUTHUGANAPATHY. 2D Points Curve Reconstruction Survey and Benchmark. *Computer Graphics Forum*. Eurographics, 40(2) :611-632, Juin 2021. DOI : 10.1111/cgf.142659.

- 
- [181] Alireza KHATAMIAN et Hamid R. ARABNIA. Survey on 3D Surface Reconstruction. *Journal of Information Processing Systems*, 12(3) :338-357, 2016. DOI : 10.3745/JIPS.01.0010.
- [182] Son TRAN et Larry DAVIS. 3D Surface Reconstruction Using Graph Cuts with Surface Constraints. In *European Conference on Computer Vision*, pages 219-231. Springer, 2006. DOI : 10.1007/11744047\_17.
- [183] Matthew BERGER, Andrea TAGLIASACCHI, Lee M. SEVERSKY, Pierre ALLIEZ, Gael GUENNEBAUD, Joshua A. LEVINE, Andrei SHARF et Claudio T. SILVA. A Survey of Surface Reconstruction from Point Clouds. In *Computer Graphics Forum*, tome 36, pages 301-329. Wiley Online Library, 2017. DOI : 10.1111/cgf.12802.
- [184] Nina AMENTA, Marshall BERN et Manolis KAMVYSSELIS. A New Voronoi-Based Surface Reconstruction Algorithm. In *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pages 415-421, 1998. DOI : 10.1145/280814.280947.
- [185] Herbert EDELSBRUNNER, David KIRKPATRICK et Raimund SEIDEL. On the Shape of a Set of Points in the Plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29(4) :551-559, 1983. DOI : 10.1109/tit.1983.1056714.
- [186] Saeed ASAEEDI, Farzad DIDEHVAR et Ali MOHADES. Alpha-Concave Hull, a Generalization of Convex Hull. *Theoretical Computer Science*, 702 :48-59, 2017. DOI : 10.1016/j.tcs.2017.08.014.
- [187] Bradley EFRON. The Convex Hull of a Random Set of Points. *Biometrika*, 52(3-4) :331-343, 1965. DOI : 10.2307/2333687.
- [188] C. Bradford BARBER, David P. DOBKIN et Hannu HUHDANPAA. The Quickhull Algorithm for Convex Hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 22(4) :469-483, 1996. DOI : 10.1145/235815.235821.
- [189] Vladimir J. LUMELSKY. On Fast Computation of Distance Between Line Segments. *Information Processing Letters*, 21(2) :55-61, 1985. DOI : 10.1016/0020-0190(85)90032-8.
- [190] Johnathon SELSTAD. Segment-Segment Distance in 3D. <https://zalo.github.io/>, Mars 2019. (Visité le 25/07/2022).
- [191] Xiaoya ZHAI et Falai CHEN. Path Planning of a Type of Porous Structures for Additive Manufacturing. *Computer-Aided Design*, 115 :218-230, 2019. DOI : 10.1016/j.cad.2019.06.002.
- [192] Kathryn CRAMER. Branching Network. <https://www.thingiverse.com>, Février 2021. (Visité le 02/04/2023).
- [193] DAVE. Malfunctioning Teacup. <https://www.thingiverse.com>, Janvier 2022. (Visité le 03/04/2023).
- [194] Chris WALLACE. Rolling Knot. <https://www.thingiverse.com>, Janvier 2014. (Visité le 14/01/2023).
- [195] H. H. LIU, T. ZHAO, L. Y. LI, W. J. LIU, T. Q. WANG et J. F. YUE. A Path Planning and Sharp Corner Correction Strategy for Wire and Arc Additive Manufacturing of Solid Components with Polygonal Cross-sections. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 106 :4879-4889, 2020. DOI : 10.1007/s00170-020-04960-4.
-

- [196] Donghong DING, Runzhuo ZHAO, Qinghua LU, Zengxi PAN, Huijun LI, Kai WANG et Kuanfang HE. A Shape Control Strategy for Wire Arc Additive Manufacturing of Thin-walled Aluminium Structures with Sharp Corners. *Journal of Manufacturing Processes*, 64 :253-264, 2021. DOI : 10.1016/j.jmapro.2021.01.029.
- [197] Lewis ANDURAND, Vincent HUGEL, Sébastien CAMPOCASSO et Matthieu MUSEAU. Support-Free-Material Path Generation for DED Processes from Faced-tized Data. *Procedia CIRP*. 16th CIRP Conference on Intelligent Computation in Manufacturing Engineering, 118 :632-637, Juillet 2023. DOI : 10.1016/j.procir.2023.06.108.
- [198] Bhrigu AHUJA, Michael KARG et Michael SCHMIDT. Additive Manufacturing in Production : Challenges and Opportunities. *Laser 3D manufacturing II*, 9353 :11-20, 2015. DOI : 10.1117/12.2082521.
- [199] Jackie FENN. When to Leap on the Hype Cycle. *Gartner Group*, 1, 1995.
- [200] Jackie FENN et Mark RASKINO. *Mastering the Hype Cycle : How to Choose the Right Innovation at the Right Time*. Harvard Business Press, 2008. ISBN : 978-1-4221-2110-8.
- [201] Martin STEINERT et Larry LEIFER. Scrutinizing Gartner's Hype Cycle Approach. In *Picmet 2010 Technology Management for Global Economic Growth*, pages 1-13. IEEE, 2010.
- [202] Lorenzo BASSI. Industry 4.0 : Hope, Hype or Revolution? In *2017 IEEE 3rd International Forum on Research and Technologies for Society and Industry*, pages 1-6, IEEE, Septembre 2017. DOI : 10.1109/RTSI.2017.8065927.
- [203] José M. GONZÁLEZ-VARONA, David POZA, Fernando ACEBES, Félix VILLAFÁÑEZ, Javier PAJARES et Adolfo LÓPEZ-PAREDES. New Business Models for Sustainable Spare Parts Logistics : A Case Study. *Sustainability*, 12(8) :3071, 2020. DOI : doi.org/10.3390/su12083071.
- [204] George Inyila OGOH et N. Ben FAIRWEATHER. The State of the Responsible Research and Innovation Programme : A Case for Its Application in Additive Manufacturing. *Journal of Information, Communication and Ethics in Society*, 17(2) :145-166, 2019. DOI : 10.1108/jices-12-2018-0093.
- [205] Paul TANNERY. Pour l'Histoire des Lignes et Surfaces Courbes dans l'Antiquité. In *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Série 2*. Tome 7, pages 278-291. Gauthier-Villars, 1883.
- [206] Pappus D'ALEXANDRIE. *La Collection Mathématique*, tome 1. Desclée de Brouwer, 1933.
- [207] Archimède DE SYRACUSE. *Oeuvres d'Archimède*, tome 1. Bachelier, 1844.
- [208] Archimède DE SYRACUSE. *Traité de La Méthode*. Armand Colin, 1907.
- [209] BIBMATH. Théorèmes de Guldin. <https://www.bibmath.net>, 1999. (Visité le 22/06/2022).
- [210] René DESCARTES. *La Géométrie*. 1637.
- [211] Jean-Marie-Constant DUHAMEL. *Mémoire Sur La Méthode Des Maxima et Minima de Fermat et Sur Les Méthodes Des Tangentes de Fermat et Descartes*. Gauthier-Villars, 1864.
- [212] BIBMATH. Biographie de Gottfried Leibniz. <https://www.bibmath.net>, 1999. (Visité le 22/06/2022).

- 
- [213] BIBMATH. Biographie de Isaac Newton. <https://www.bibmath.net>, 1999. (Visité le 22/06/2022).
- [214] Isaac NEWTON. *La Méthode Des Fluxions, et Les Suites Infinies*. Debure, 1740.
- [215] John KEILL. Réponse de M. Keill Aux Auteurs Des Remarques Sur Le Différent Entre M. de Leibniz et M. Newton, 1713.
- [216] Isaac NEWTON. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Édition*. Samuel Pepys, 1687.
- [217] Bernard YCART. Newton et Leibniz. <https://membres-ljk.imag.fr>, 2011. (Visité le 22/06/2022).
- [218] Leonhard EULER. *Recherche Sur La Courbure Des Surfaces*. 1767.
- [219] Gaspard MONGE. *Application de l'Analyse à La Géométrie*. Henri-Louis Perronneau, 1795.
- [220] Johann Carl Friedrich GAUSS. *Recherches Générales Sur Les Surfaces*. Bachelier, 1825.
- [221] Bernhard RIEMANN. *Oeuvres Mathématiques de Riemann*. Gauthier-Villars et fils, 1851.
- [222] Henri POINCARÉ. *Analysis Situs*. Journal de l'École Polytechnique, 1895.
- [223] Albert EISTEIN. The Field Equations of Gravitation. *Royal Prussian Academy of Sciences*, Décembre 1915.
- [224] Gregorio CUBASTRO et Tullio LEVI-CIVITA. Méthodes de Calcul Différentiel Absolu et Leurs Applications. *Mathematische Annalen*, 54(1) :125-201, 1900. DOI : 10.1007/BF01454201.
- [225] Élie CARTAN. *La Géométrie Des Espaces de Riemann*. Mémorial Des Sciences Mathématiques. 1925.
- [226] Hermann WEYL. *Space-Time Matter*. Methuen, 1922.
- [227] Jean-Louis KOSZUL. Cohomologie Des Espaces Fibrés Différentiables et Connexions. In *Séminaire Nicolas Bourbaki*, pages 313-319, 1952.
- [228] Katsumi NOMIZU. Invariant Affine Connections on Homogeneous Spaces. *American Journal of Mathematics*, 76(1) :33-65, 1954. DOI : 10.2307/2372398.
- [229] M. SANTANDER. The Chinese South-Seeking Chariot : A Simple Mechanical Device for Visualizing Curvature and Parallel Transport. *American Journal of Physics*, 60(9) :782-787, 1992. DOI : 10.1119/1.17059.
- [230] Hong-Sen YAN et Chun-Wei CHEN. Structural Synthesis of South Pointing Chariots with a Fixed Axis Wheel System. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 31(3) :255-272, 2007. DOI : 10.1139/tcsme-2007-0017.
- [231] Alain GORIELY et Eamonn GAFFNEY. Mathematical Mechanical Biology - Module 2 : Bio-Membranes. In Oxford University, 2015. (Visité le 15/09/2020).
- [232] Robert FERRÉOL. Surfaces. <https://mathcurve.com/>, 1993. (Visité le 14/07/2022).
- [233] Francesco BRIOSCHI. *La Teorica dei Determinanti e le sue Principali Applicazioni*. Pavia, 1854. ISBN : 978-1-273-80368-0.
- [234] Johann Carl Friedrich GAUSS. *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, tome 1. Gottingae, 1828. ISBN : 978-1-249-52326-0.
-

- [235] Alberto COGLIATI. Sulla Ricezione Del Theorema Egregium, 1828-1868. *Sulla ricezione del Theorema Egregium, 1828-1868* :31-60, 2018. DOI : 10 . 19272 / 201809201002.
- [236] Jim RUPPERT. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. *Journal of Algorithms*, 18(3) :548-585, 1995. DOI : 10 . 1006 / jagm . 1995 . 1021.
- [237] L. Paul CHEW. Constrained Delaunay Triangulations. *Algorithmica*, 4(1) :97-108, 1989. DOI : 10 . 1145 / 41958 . 41981.
- [238] Jonathan Richard SHEWCHUK. Tetrahedral Mesh Generation by Delaunay Refinement. In *Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 86-95, 1998. DOI : 10 . 1145 / 276884 . 276894.
- [239] Fausto BERNARDINI, Joshua MITTLEMAN, Holly RUSHMEIER, Cláudio SILVA et Gabriel TAUBIN. The Ball-Pivoting Algorithm for Surface Reconstruction. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(4) :349-359, 1999. DOI : 10 . 1109 / 2945 . 817351.
- [240] S. H. LO. 3D Anisotropic Mesh Refinement in Compliance with a General Metric Specification. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(1) :3-19, 2001. DOI : 10 . 1016 / s0168 - 874x ( 01 ) 00051 - 8.
- [241] James A. SETHIAN. Fast Marching Methods. *SIAM Review*, 41(2) :199-235, 1999. DOI : 10 . 1137 / S0036144598347059.
- [242] Nicholas SHARP et Keenan CRANE. You Can Find Geodesic Paths in Triangle Meshes by Just Flipping Edges. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 39(6) :1-15, 2020. DOI : 10 . 1145 / 3414685 . 3417839.
- [243] Eberhard BÄNSCH. Local Mesh Refinement in 2 and 3 Dimensions. *IMPACT of Computing in Science and Engineering*, 3(3) :181-191, 1991. DOI : 10 . 1016 / 0899 - 8248 ( 91 ) 90006 - G.
- [244] Nouredine HANNOUN et Vasilios ALEXIADES. Issues in Adaptive Mesh Refinement Implementation. In *Electronic Journal of Differential Equations*, tome 15, pages 141-151, 2007.
- [245] Murk J. BOTTEMA. Circularity of Objects in Images. In *2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No. 00CH37100)*, tome 4, pages 2247-2250. IEEE, 2000. DOI : 10 . 1109 / ICASSP . 2000 . 859286.
- [246] Milos STOJMENOVIC et Amiya NAYAK. Shape Based Circularity Measures of Planar Point Sets. In *2007 IEEE International Conference on Signal Processing and Communications*, pages 1279-1282. IEEE, 2007. DOI : 10 . 1109 / icspc . 2007 . 4728560.
- [247] Joviša ŽUNIĆ et Kaoru HIROTA. Measuring Shape Circularity. In *Iberoamerican Congress on Pattern Recognition*, pages 94-101. Springer, 2008. DOI : 10 . 1007 / 978 - 3 - 540 - 85920 - 8 \_ 12.





**Développement d'une méthode de génération de trajectoire  
versatile pour la réalisation de pièces par procédés DED multi-axes  
à partir de surfaces facettisées**

**Résumé :**

La fabrication additive est une catégorie de procédés qui permet l'obtention de pièces mécaniques par apport de matière. Les procédés de type *Directed Energy Deposition* (DED), combinables avec des robots multi-axes, sont prometteurs pour l'obtention de pièces à la structure complexe. Cependant, les méthodes de génération de trajectoire et les structures des machines utilisées restent un enjeu dont les innovations décupleraient les possibilités industrielles.

Cette thèse présente une méthode numérique systématique de génération de trajectoire adaptée aux procédés DED à partir d'une surface facettisée de forme arbitraire. Validée à travers des simulations sur des surfaces minimales tri-périodiques, la méthode permet la création d'un premier trajet de dépôt respectant la contrainte de distance entre la pièce et l'outil. Combinable à de la rétroaction par priorisation de régions, il pourra être modifié ultérieurement selon les contre-indications physiques issues du robot utilisé, du matériau de fabrication et de l'outil.

**Development of a Versatile Path Generation Method for the  
Manufacturing of Parts by Multi-Axis DED Processes from  
Meshed Surfaces**

**Abstract :**

Additive manufacturing is a category of processes that allows the production of mechanical parts by the adding of material. *Directed Energy Deposition* (DED) processes can be combined with multi-axis robots and are a promising option to obtain parts with complex structures. However, the path generation methods and the machine structures used remain an issue. With innovations in these areas, the industrial possibilities would increase tenfold.

This thesis presents a numerical and systematic path generation method based on meshed surfaces and adapted to DED processes. The method was validated through simulations on minimal triply periodic surfaces and allows the creation of a first deposition path that meets the distance constraint between the part and the tool. This first path can be combined with region prioritization feedback to obtain a final path adapted to the physical warnings provided by the robot, the manufacturing material and the tool.