



HAL
open science

Développement d'un modèle de calcul simplifié d'un assemblage boulonné de carters composite tissé 3D et métallique soumis à un chargement fortement excentré

Wafaa El Masnaoui

► To cite this version:

Wafaa El Masnaoui. Développement d'un modèle de calcul simplifié d'un assemblage boulonné de carters composite tissé 3D et métallique soumis à un chargement fortement excentré. Génie mécanique [physics.class-ph]. INSA de Toulouse, 2020. Français. NNT : 2020ISAT0033 . tel-04356623

HAL Id: tel-04356623

<https://theses.hal.science/tel-04356623>

Submitted on 20 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)

Présentée et soutenue le 16/12/2020 par :

WAFEA EL MASNAOUI

Développement d'un modèle de calcul simplifié d'un assemblage
boulonné de carters composite tissé 3D et métallique soumis à un
chargement fortement excentré

JURY

PIERRE ALAIN BOUCARD	Professeur des Universités, ENS Paris-Saclay	Rapporteur
LAURENT GORNET	Maître de Conférences HDR, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
HERVÉ WARGNIER	Professeur des Universités, Université de Bordeaux	Président
CHRISTIAN PALECZNY	Ingénieur, Safran Aircraft Engines	Examineur
LISE ANGRAND	Ingénieure, Safran Aircraft Engines	Invitée
ALAIN DAIDIE	Professeur des Universités, INSA Toulouse	Directeur de thèse
FRÉDÉRIC LACHAUD	Professeur, ISAE Supaéro	Co-Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

MEGEP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

Unité de Recherche :

Institut Clément Ader

Directeur(s) de Thèse :

Alain DAIDIE et Frédéric LACHAUD

Rapporteurs :

Pierre Alain BOUCARD et Laurent GORNET

Remerciements

Cette thèse a été réalisée à l'institut Clément Ader Toulouse et Safran Aircraft Engines Villaroche dans le cadre d'une convention CIFRE. Elle s'inscrit dans le projet de recherche concerté PRC MECACOMP, financé par la DGAC.

Je souhaite remercier dans un premier temps mon directeur de thèse Alain DAIDIÉ pour son accompagnement et sa rigueur scientifique, ainsi que pour sa disponibilité inconditionnelle malgré ses multiples engagements. Je tiens à remercier également Frédéric LACHAUD, mon co-directeur de thèse, qui m'a toujours soutenu et encouragé, pour son expertise en composite qui a beaucoup enrichi ces travaux. Je finis avec mon équipe encadrante en remerciant Christian PALECZNY, mon encadrant industriel. Merci pour ta persévérance administrative lors du lancement de la thèse, pour ton soutien moral durant toutes ces années (plus particulièrement vers la fin), pour ton apport scientifique d'un point de vue industriel et puis surtout, pour nos matchs de tennis qui étaient bien au niveau de ROLAND-GARROS :).

Je remercie également Adeline FAU, ingénieure de recherche à l'institut Clément Ader, qui m'a beaucoup aidé à la réalisation de mes travaux, que ça soit sur le plan numérique ou expérimental. Sa rigueur et son implication m'ont été d'un atout indéniable.

Je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté de participer à ma soutenance de thèse. Merci à mes deux rapporteurs Pierre-Alain BOUCARD et Laurent GORNET d'avoir accepté d'évaluer mes travaux et pour leurs remarques pertinentes. Les échanges à l'issue de l'exposé ont été très intéressants et ont permis d'ouvrir plusieurs pistes pour l'amélioration du modèle développé. Merci au président du jury Hervé WARGNIER et à Lise ANGRAND pour leur regard bienveillant sur ces travaux de thèse.

Ces années de thèse ont été partagées entre Toulouse et Villaroche. Du côté de Toulouse, je souhaite remercier l'ensemble des membres du laboratoire et plus particulièrement les doctorants avec qui j'ai partagé d'excellents moments. Une pensée particulière à Laure, Florian, Landry, Adeline, Jim, Simon... Les moments à Villaroche ont été toujours agréables grâce à une ambiance amicale, je tiens à remercier toute l'équipe pour leur accueil et leur bienveillance. Je n'oublierai jamais les multiples petits-déjeuners sublimés par nos discussions constructives autour du foot :). Un remerciement spécial à Didier SORIA, mon tuteur de stage de fin d'études, qui m'a donné le goût pour l'aéronautique et qui m'a toujours soutenu.

Je tiens à témoigner ma gratitude à tous mes amis qui m'ont toujours encouragé et avec qui j'ai passé des moments agréables, me permettant de me déconnecter de la thèse quand il le fallait. Une pensée spéciale à ma sœur de cœur Khaoula, qui a toujours su me motiver pour avancer dans mes travaux.

Je remercie également ma famille, mes parents et mon frère qui m'ont toujours soutenu et cru en moi. L'ambiance à la maison assurée par le philosophe qu'est mon père et la physicienne qu'est ma mère m'ont beaucoup aidé dans le développement de mes démarches scientifiques.

Finalement, merci à toi Nawfal. Tu as tout fait pour me soutenir et me faciliter la vie. Tu m'as encouragé tout au long de ces années de thèse et m'as soutenu pendant les moments les plus difficiles. Sans ta présence, l'aboutissement de cette thèse aurait été beaucoup plus compliquée...

Mon enfant...
à quelques jours de faire ta connaissance, c'est à toi que je dédie cette thèse.

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
1 État de l'art	5
1.1 Composites tissés 3D : Structures et modélisation du comportement mécanique	7
1.2 Comportement des assemblages boulonnés de matériaux composites	27
1.3 Conception préliminaire des assemblages boulonnés : Intérêt et méthodes . .	41
1.4 Synthèse de l'état de l'art	59
2 Modèle semi-analytique d'assemblage boulonné de brides Composite/Composite ou Composite/Métal	61
2.1 Introduction	63
2.2 Présentation du modèle	64
2.3 Méthode des éléments finis appliquée aux coques axisymétriques orthotropes	68
2.4 Construction du modèle	74
2.5 Validation fonctionnelle du modèle	89
2.6 Synthèse	100
3 Étude expérimentale	101
3.1 Introduction	103
3.2 Essais de caractérisation des boulons	104
3.3 Essais de traction sur bride monofixation	109
3.4 Essais de traction sur brides trois-fixations	125
3.5 Bilan de l'étude expérimentale	143
4 Corrélation Calculs-Essais : Application industrielle	145

4.1	Introduction	147
4.2	Modèle monofixation éléments finis 3D	148
4.3	Modélisation semi-analytique	158
4.4	Analyse du modèle EF 3D représentatif de l'essai expérimental	164
4.5	Confrontation des modèles semi-analytique et numériques aux résultats expérimentaux	168
	Conclusion	181
	A La matrice B	185
	B Matrice de raideur des éléments coques axisymétriques orthotropes	187
	C Rupture de la liaison vis-écrou	207
	Bibliographie	216

Table des figures

1	Roadmap pour la réduction des émissions CO_2 [ATA10].	1
2	Moteurs intégrant le CMO comme matériau de la ligne du carter, assemblée grâce à des liaisons boulonnées.	2
1.1	Fibre de carbone ex-PAN à haut module Toray M40.	7
1.2	Quelques applications des composites à matrice organique en aéronautique civile.	9
1.3	Quelques applications des composites à matrice céramique en aéronautique civile et militaire.	9
1.4	Exemples d'applications des composites à matrice métallique.	10
1.5	Différentes architectures des préformes textiles [Ler13].	12
1.6	Zone endommagée par des impacts successifs sur une plaque composite - (a) Tissu 2D après 5 impacts et (b) Tissu interlock 3D orthogonal après 10 impacts [BZ05].	13
1.7	Phases du comportement mécanique d'un composite tissé 3D [Hur15].	14
1.8	Comportement mécanique en traction pure d'un interlock fibre de carbone et matrice epoxy et endommagements associés [Hur15].	15
1.9	Courbe de comportement contraintes-déformations de composites interlock 3D couche-à-couche chargés dans les sens chaîne et trame [WLAG15b].	15
1.10	(a) Illustration du phénomène de kinking [JP17] et (b) courbe de comportement en compression dans le sens chaîne, trame et hors axes à 45° [Hur15].	16
1.11	Vues du montage d'essai de compression hors-plan de l'éprouvette QA : (a) montage classique et (b) montage hyperstatique [Sch11].	17
1.12	Champ de déplacement hors-plan pour le montage classique (a) et le montage hyperstatique (b) [Sch11].	17
1.13	Comportement en cisaillement de plusieurs types de tissés 3D comparés à un UD et à la matrice pure [KFL03].	18
1.14	Schéma représentatif de l'endommagement.	20
1.15	Courbe contraintes-déformations avec endommagement.	21

1.16	Échelles de modélisation des composites tissés	25
1.17	Classification des assemblages boulonnés.	27
1.18	Modes de rupture des assemblages boulonnés.	28
1.19	Courbe expérimentale du comportement d'un assemblage simple recouvrement [McC02].	29
1.20	Paramètres géométriques des pièces assemblées dans les assemblages simple ou double recouvrement.	29
1.21	Influence des paramètres géométriques sur la résistance au matage [Col77]	30
1.22	Faciès de rupture de l'assemblage caractérisé par $E/D = 2$, $W/D = 4$ à gauche et $E/D = 4$, $W/D = 2$ à droite [Asi09].	31
1.23	Comparatif des contraintes ultimes sur stratification "quasi-isotrope" en fonction de E avec $W/D = 7$ [Ald13].	31
1.24	(a) Différentes architectures de tissage (i) ORT, (ii) LTL, (iii) AI et (b) Courbe contraintes-déformations pour les 3 architectures [Sal15].	32
1.25	Modes de rupture de différentes stratifications par ordre de gauche à droite $[0^\circ]_4$, $[0^\circ]_8$, $[QI]_8$ et $[0^\circ]_{16}$ [Ald13].	32
1.26	Courbe contraintes-déformations pour les 3 configurations de tissage [WLAG15a].	33
1.27	Courbe contraintes-déformations pour différentes valeurs de précharge [Gia17].	34
1.28	Évolution de la résistance ultime au matage Vs. différentes valeurs de W/D pour deux cas de serrage : FT- serrage à la main et à $C = 5Nm$ [LA17].	34
1.29	Principe de modélisation (a) et comparaison de la courbe contraintes-déformations pour plusieurs valeurs de m (b) et pas de calculs (c) [War16].	35
1.30	Principe de modélisation de Irisarri et al. [Iri12].	36
1.31	Courbe effort-déplacement d'un essai pull-through (a) et illustration de l'enveloppe d'endommagement (b) [BK99]	37
1.32	Principe de modélisation (a) et comparaison expérimental/numérique de la zone du délaminage (b) [Ada12].	38
1.33	Modes de rupture au chargement ultime Zhou et al. [Zho16]	38
1.34	Montage expérimental de l'essai en traction de la bride en L (a) et distribution des contraintes σ_{zz} (b) [Pis17].	39
1.35	Modélisation de la bride (a) et faciès de rupture à la charge ultime (b) [Jan08].	39

1.36	Évolution des coûts engagés sur un projet et des coûts de développement [BB88].	41
1.37	Cycle en V de l'ingénierie système.	42
1.38	Assemblage boulonné.	43
1.39	Couple-Effort pour plusieurs coefficients de frottement	44
1.40	Assemblage soumis à un chargement axial centré.	45
1.41	Facteur d'introduction de la charge.	46
1.42	Modélisation simplifiée d'un boulon pour le calcul de la raideur axiale.	47
1.43	Cône de compression dans un assemblage préchargé.	48
1.44	Principe de modélisation de Nassar et Abboud [NA09].	49
1.45	Schéma de modélisation de la raideur de l'assemblage basée sur "spring based model".	50
1.46	Raideur équivalente d'un assemblage boulonné chargé axialement dans le cas où l'effort est appliqué aux pièces assemblées (a) et dans le cas où l'effort est appliqué au boulon (b).	51
1.47	Modèle de calcul VDI dans le cas d'un chargement excentré.	52
1.48	Illustration du comportement modélisé par le modèle poutre fléchie [Bak94].	53
1.49	Principe de modélisation du modèle Poutre fléchie [Bak94].	53
1.50	Schéma de principe du modèle semi-analytique d'un assemblage boulonné des couronnes de guidage [LVD08].	56
1.51	Schéma de principe du modèle semi-analytique d'un assemblage boulonné de plaques prismatiques [Cha08b].	56
1.52	Modélisation du boulon avec un connecteur 1D dans un maillage 3D [Laf17]	57
1.53	Principe d'identification de la raideur en région élastique et endommageable d'un assemblage simple ou double recouvrement en cisaillement[GM11].	57
1.54	Comparaison des résultats de calcul 3D tout volumique (à gauche) au calcul 3D avec connecteur (à droite) [Laf17].	58
2.1	Passage d'un chargement réel à un chargement uniforme axisymétrique.	63
2.2	(a) Schéma simplifié d'un secteur de brides cylindriques boulonnées (b) Schéma équivalent du modèle semi-analytique et (c) Zoom sur la modélisation au niveau de la liaison.	65

2.3	Schéma de principe de la loi de Coulomb.	66
2.4	Noeuds considérés pour les couplages cinématiques.	67
2.5	Structure de coque axisymétrique à deux nœuds [Roc75].	69
2.6	Images de la micro tomographie d'une bride en composite tissé 3D issu des travaux de Yan et al. in [YZL19].	72
2.7	Sens du maillage dans le modèle semi-analytique	75
2.8	Schéma de principe de l'adaptation géométrique de la section angulaire d'un secteur de bride (a) à une section circulaire équivalente (b)	76
2.9	Boulon simplifié (a) et modèle poutre équivalent (b).	77
2.10	Schéma simplifié de calcul de la raideur de contact d'un ressort i	79
2.11	Passage du repère local de l'élément au repère global de l'assemblage via la matrice de rotation P	80
2.12	Zoom sur la zone de la liaison dans le modèle semi-analytique avec les nœuds d'application de la précharge.	84
2.13	Illustration des réactions dans l'élément poutre dans le repère global de l'assemblage.	85
2.14	Critères de post-traitement du comportement des brides.	87
2.15	Organigramme du code de calcul du modèle semi-analytique.	88
2.16	Modèle 2D axisymétrique d'une bride en \mathbf{L} soumise à un chargement axial.	89
2.17	Configuration déformée de la bride donnée par le modèle EF 2D axisymétrique (a) et le modèle semi-analytique développé (b) avec une amplification de x50.	90
2.18	Étude d'influence de la taille des éléments dans la partie pied de bride sur le déplacement axial de la bride, donné par le modèle semi-analytique.	91
2.19	Comparaison du déplacement axial (a) et du déplacement radial (b) entre le modèle semi-analytique développé et le modèle EF 2D axisymétrique.	91
2.20	Comparaison du déplacement axial (a) et le déplacement radial (b) entre le modèle semi-analytique développé et le modèle EF 2D axisymétrique après l'introduction du coefficient C_s	92
2.21	Description de la géométrie du cas d'étude.	93
2.22	Description du modèle EF 3D du cas d'étude.	94

2.23	Modèle semi-analytique équivalent au cas d'étude.	95
2.24	Comportement de l'assemblage soumis à la précharge, donné par le modèle semi-analytique (amplification x100).	96
2.25	Comportement global de l'assemblage donné par le modèle EF 3D (a) et le modèle semi-analytique (b).	96
2.26	Comparaison entre le modèle EF 3D et le modèle semi-analytique : contrainte de traction (a), contrainte de flexion (b) et la contrainte normale équivalente (c) au niveau de la section [AB] du boulon.	98
2.27	Section S_{fl} où sont récupérés les efforts et moments dans la bride composite.	98
2.28	Comparaison du comportement de la bride composite entre le modèle EF 3D et le modèle semi-analytique.	99
2.29	Comparaison de l'état de contact entre le modèle EF 3D et le modèle semi-analytique.	99
3.1	Montage d'essai de caractérisation du boulon.	104
3.2	Vis instrumentée avec une seule jauge axiale.	105
3.3	Courbe Effort machine - Déplacement vérin (a) et Courbe Effort machine - Déformation jauge (b).	106
3.4	Courbe contraintes-déformations de la vis.	107
3.5	Caractérisation de la vis à travers l'essai 3.	108
3.6	Découpe de la bride et secteur de bride testé.	109
3.7	Montage d'essai.	110
3.8	Positionnement des jauges sur la bride.	110
3.9	Vis usinée en vue de l'instrumentation (a) CAO et (b) vis réelle.	111
3.10	Schéma d'instrumentation de la vis.	112
3.11	Visualisation du mouchetis sur la tranche de la bride et du socle.	114
3.12	Déformation des jauges (a) et contraintes dans la vis (b) lors du serrage.	115
3.13	Déformation des jauges de la bride (a), de la vis (b) et évolution de l'effort normal dans la vis (c) lors du cyclage.	116
3.14	Courbe effort-déplacement des cycles de chargement C1 (a) et C2 (b).	118

3.15	Courbe effort-déplacement lors de cycles C1 et C2.	119
3.16	Position des points de mesure virtuels avec la corrélation d'images sur la bride.	120
3.17	Champs de déplacement radial (en X) et axial (en Y) au pic des cycles C1 (a-b) et C2 (c-d).	121
3.18	Schéma illustrant la déformée de la bride suite au déplacement radial.	122
3.19	Déformation des jauges de la bride.	122
3.20	Contraintes induites dans la vis lors des phases de chargement des cycles C1 et C2.	123
3.21	124
3.22	Coupe longitudinale d'un moteur.	125
3.23	Bride amont A1 (a) et bride aval B2 (b)	125
3.24	Configuration moteur de l'assemblage de la bride B2.	126
3.25	Principe d'assemblage de la bride B2 pour essai.	126
3.26	Banc d'essai de l'assemblage des brides B2.	128
3.27	Schéma d'instrumentation des brides B2.	129
3.28	Positionnement de la vis lors du serrage.	129
3.29	Niveaux de serrage des trois vis comparés à la consigne, en termes de contrainte de précharge, pour les quatre essais de bride B2.	130
3.30	Déformations des jauges des brides B23 (a) et B25 (b) lors de l'étape du cyclage.	131
3.31	Courbes effort-déplacement pour les essais B22, B23, B24 et B25	132
3.32	Évolution de la contrainte de Von Mises dans les trois vis de chaque essai : (a) B22, (b) B23, (c) B24 et (d) B25.	134
3.33	Rappel de la position et des noms des jauges des vis.	135
3.34	Signal de déformation des jauges des vis 1 (a) 2 (b) et 3 (c) au cours de l'essai B23	136
3.35	Signal de déformation des jauges des vis 1 (a) 2 (b) et 3 (c) au cours de l'essai B25	136
3.36	Photos post-essai B23.	137
3.37	Photos post-essai B25.	137

3.38	Évolution des jauges J_1 (travaillant en traction) des vis 1, 2 et 3 de l'essai B23 (a) et B25 (b).	138
3.39	Déformation des jauges de la bride B23.	139
3.40	Déformation des jauges de la bride B25.	140
3.41	Champs de déplacement dans la bride multifixations (a) déplacement suivant Y et (b) déplacement suivant Z.	141
3.42	Localisation des endommagements dans la bride B25 donnée par l'émission acoustique.	141
3.43	Illustration du décadrage.	142
3.44	Opérations générant du décadrage lors de la fabrication du carter Fan CMO tissé 3D.	142
4.1	Description générale du modèle 3D de l'essai monofixation.	148
4.2	Lois de comportement plastique de la vis (a) et de l'écrou (b) introduites dans le modèle EF 3D.	150
4.3	Illustration de la répartition matérielle de la bride avant (a) et après (b) application de l'effet du décadrage.	151
4.4	Répartition des contraintes normales dans la vis suite à l'application de la précharge, donnée par le modèle angulaire (modèle 1) et le modèle droit (modèle 2).	152
4.5	Contraintes hors-plan dans le pied de bride données par le modèle angulaire (modèle 1) et le modèle droit (modèle 2), à l'étape de précharge.	154
4.6	Courbes effort-déplacement données par le modèle angulaire avec blocage orthoradial et le modèle droit, à l'étape de chargement.	155
4.7	Comparaison de l'évolution des contraintes dans la vis en fonction de l'effort (a) et en fonction du déplacement (b) entre le modèle 1 (angulaire avec blocage orthoradial et le modèle 2 (droit).	156
4.8	Comparaison de l'état des contraintes hors-plan entre le modèle 1 et le modèle 2, à iso-effort $F = 6920 N$.	156
4.9	Comparaison de l'état des contraintes dans le plan entre le modèle 1 et le modèle 2, à iso-effort $F = 6920 N$.	157
4.10	Schéma simplifié du modèle semi-analytique adapté à la configuration de l'essai (a) schéma de l'assemblage et (b) modèle équivalent.	158

4.11 Paramètres matériaux affectés à la bride dans le modèle semi-analytique en fonction de la répartition matérielle adoptée dans le modèle EF 3D.	159
4.12 Conditions aux limites et du chargement dans le modèle semi-analytique. . .	160
4.13 Raideurs axiales de la bride, du socle et du boulon calculées par le modèle semi-analytique et le modèle EF 3D.	161
4.14 Cône de compression dans la bride mettant en évidence sa déformation aux bords.	161
4.15 Nœuds de la bride en contact avec le socle pour lesquelles la raideur de contact est calculée.	163
4.16 Évolution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la bride : (a) dans le plan 13 et (b) dans le plan 23.	165
4.17 Allure de la déformée à la fin du chargement (amplification x10) : (a) déplacement radial et (b) déplacement axial.	166
4.18 Contraintes dans le plan dans le rayon de bride au 1er endommagement. . . .	166
4.19 Contraintes dans le plan dans le rayon de bride au 1er endommagement. . . .	166
4.20 Contraintes de traction hors-plan σ_{33} à l'intérieur du rayon de bride.	167
4.21 Contraintes dans le plan dans le pied de bride au 1er endommagement.	167
4.22 Contraintes hors-plan dans le pied de bride au 1er endommagement.	168
4.23 Distribution des contraintes de compression hors-plan dans l'épaisseur du pied de bride.	168
4.24 Allure de la déformée de la bride et du socle (a) et déplacement hors-plan (suivant z) de la bride, lors de l'étape de précharge, donné par le modèle semi-analytique et le modèle EF 3D (b).	169
4.25 Distribution de la contrainte hors-plan dans le pied de bride (sur la tranche) lors de la précharge.	170
4.26 Allure de la déformée donnée par le modèle semi-analytique et les modèles numériques (amplification x10), ainsi que l'essai expérimental.	171
4.27 Évolution du déplacement radial du point P_8 (en valeur absolue) dans la zone de déformation de la virole, donnée par le modèle semi-analytique et les modèles numériques.	171
4.28 Courbes effort-déplacement données par l'essai expérimental, les modèles EF 3D et le modèle semi-analytique.	172

4.29	Comparaison des déplacements relatifs des extrémités de la bride par rapport au socle.	173
4.30	Éléments représentant les jauges de déformation collées sur la vis.	174
4.31	Comparaison du comportement de la fixation entre le modèle semi-analytique, les modèles numériques et l'essai expérimental	174
4.32	Comparaison des niveaux de déformation de la bride au niveau des jauges unidirectionnelles entre le modèle EF 3D et l'essai expérimental.	176
4.33	Moyenne des déformations des jauges en vis-à-vis.	176
4.34	Torseur d'efforts à la sortie du rayon de bride	177
4.35	Évolution de l'effort axial P et du moment M pendant le chargement.	178
A.1	Paramètres géométriques de l'élément coque axisymétrique.	185

Liste des tableaux

1.1	Propriétés mécaniques des fibres.	7
2.1	Dimensions de la bride L en mm.	89
2.2	Propriétés matériaux de la bride.	90
2.3	Comparaison des déplacements maximums des brides à l'étape de précharge.	95
2.4	Comparaison des contraintes de précharge entre le modèle EF et le modèle semi-analytique (SA).	97
3.1	Estimation des valeurs des couples de freinage à chaque essai.	105
3.2	Valeurs du module de Young et de la limite élastique identifiées à travers chaque essai.	107
3.3	Calcul des différentes sollicitations dans la vis à travers les jauges de déformation.	113
3.4	Matrice d'essais des brides B2.	127
4.1	Coefficients de frottement entre les surfaces en contact.	149
4.2	Propriétés élastiques des matériaux de la vis et de l'écrou.	150
4.3	Propriétés matériaux des parties décadrées et non décadrées de la bride.	151
4.4	Niveaux des contraintes induites dans la bride suite à l'application de la précharge.	164
4.5	Comparatif des temps de conception et la précision du calcul entre le modèle semi-analytique, le modèle EF 3D et l'approche expérimentale.	179

Introduction générale

Contexte industriel

Le nombre de vols annuel a vu une augmentation importante dans les dernières décennies. Plus de 2 milliards de personnes voyagent à travers le monde chaque année avec plus de 360 000 avions [ATA10]. Par conséquent, les émissions de CO_2 dues au transport aérien ont considérablement augmenté. Si des mesures efficaces ne sont pas prises pour réduire ces émissions, elles continueront d'augmenter d'une manière considérable.

Le secteur de l'aviation a signé une déclaration de réduction des émissions de CO_2 de 50% avant 2050 (cf. Figure 1). Pour y parvenir, quatre domaines d'amélioration différents ont été identifiés : la technologie, les opérations, les infrastructures et les mesures économiques. Les progrès de la technologie ont abouti à l'utilisation de matériaux composites permettant de réduire le poids des aéronefs. Comparés au traditionnel alliage d'aluminium, les matériaux composites peuvent représenter une économie de poids de 20% et peuvent être fabriqués en s'appuyant sur des formes complexes. De plus, ces matériaux présentent des propriétés mécaniques très intéressantes et une densité bien plus faible que celle des matériaux utilisés jusqu'alors.

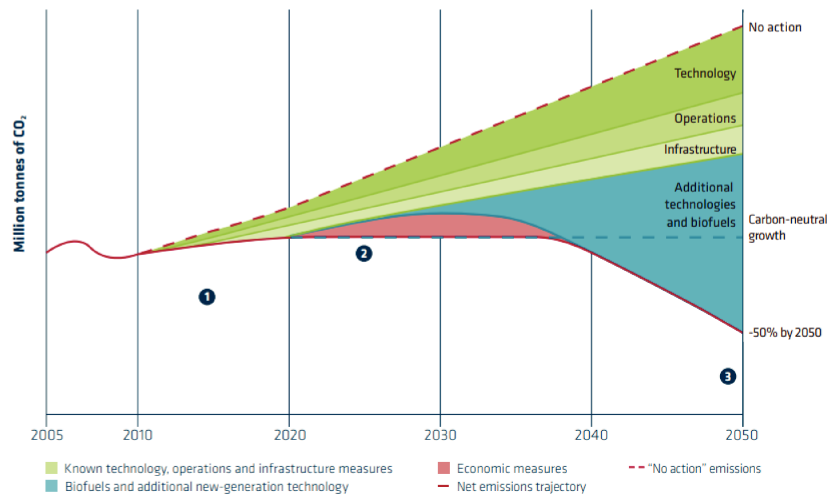


FIGURE 1 – Roadmap pour la réduction des émissions CO_2 [ATA10].

Le groupe Safran participe évidemment à cette démarche. Afin de parvenir aux objectifs, un important projet de recherche a été lancé en 2016. Cette thèse s'inscrit alors dans le cadre de ce projet de recherche concerté (PRC MECACOMP), financé par la DGAC (Direction Générale de l'Aviation Civile) mettant en relation les filiales du groupe SAFRAN et plusieurs institutions de recherche (universités, laboratoires de recherche publics et privés) dont l'institut Clément Ader. Ce programme a pour finalité d'établir une base de connaissances

approfondie sur les matériaux composites à matrice organique (CMO) et à matrice céramique (CMC). Ces matériaux innovants doivent remplacer d'autres matériaux à divers endroits des turboréacteurs, notamment dans les jonctions entre les structures faisant intervenir des liaisons mécaniques telles que les assemblages boulonnés. Ce type d'assemblage mécanique est aujourd'hui utilisé pour l'assemblage de la ligne du carter fan des moteurs LEAP équipant l'A320 d'Airbus, le B737Max de Boeing et le C919 de l'avionneur chinois COMAC. Cette technologie est également utilisée sur le nouveau moteur GE9x, récemment certifié et destiné à équiper le futur gros porteur de Boeing, le 777X.



FIGURE 2 – Moteurs intégrant le CMO comme matériau de la ligne du carter, assemblée grâce à des liaisons boulonnées.

Les diverses études de ce projet national doivent avant tout contribuer à apporter au groupe Safran les modèles nécessaires à la prévision numérique de fonctionnement/comportement de pièces en matériaux composites CMO et CMC. Ainsi, ce projet de thèse s'inscrit dans ce cadre. L'objectif est de développer un modèle numérique permettant le calcul des assemblages boulonnés qui intègrent le CMO tissé 3D comme matériau des pièces assemblées.

Aujourd'hui, la procédure de dimensionnement de ces assemblages pour une géométrie donnée s'appuie sur des modèles numériques 3D et sur des essais expérimentaux qui nécessitent plusieurs mois de préparations. Paradoxalement, le contexte économique impose des délais de conception toujours plus courts. Cela met en évidence l'intérêt des méthodes d'accélération des calculs qui deviennent un enjeu scientifique et industriel important. En effet, les concepteurs cherchent à limiter le nombre de configurations à tester et à calculer, en réduisant le domaine d'optimisation. Il devient alors très difficile d'obtenir des structures qui répondent aux nouveaux objectifs de gain de masse ou d'augmentation de résistance mécanique, tout en réduisant les délais de conception. On comprend alors l'intérêt de développer des méthodes simplifiées, capables de fournir très rapidement une estimation de la tenue de l'assemblage, sans nécessairement avoir une très grande précision. L'idée est surtout d'être capable de sélectionner rapidement une solution technique plutôt qu'une autre. Les méthodes de résolution classiques, plus lentes, peuvent ensuite être utilisées pour avoir une information plus précise sur le comportement de l'assemblage.

Enjeux scientifiques

Les matériaux composites tissés sont des matériaux multiéchelles par nature. On peut distinguer l'échelle microscopique (fibre/matrice), l'échelle mésoscopique (fil/matrice) et l'échelle macroscopique. Dans une démarche de prédimensionnement, il serait inapproprié de parler du comportement à l'échelle matériau. Il s'agirait plutôt de considérer un comportement homogénéisé à l'échelle macroscopique. Il est donc primordial d'identifier un macro-élément permettant de représenter ce comportement tout en intégrant une géométrie adaptée représentative de la géométrie du carter.

Actuellement, les procédés technologiques déployés en production sont majoritairement fondés sur un serrage au couple. De nombreux travaux scientifiques ont démontré que cette approche engendre une dispersion de 10 à 30% sur l'effort de serrage installé dans un assemblage [Ben14]. Les marges de sécurité en tenue statique et en fatigue ainsi obtenues conduisent à des surdimensionnements conséquents. Dans ce contexte d'amélioration de l'efficacité du niveau de prétension, il convient d'inventorier les situations qui occasionneraient une défaillance de serrage. Ainsi, le modèle de calcul simplifié intégrera un élément représentatif de la fixation qui devra être sensible à la précontrainte installée, par la prise en compte du risque de dispersion en fonction du moyen de serrage.

Les sollicitations mécaniques induites dans le carter composite étudié génèrent, au niveau de la liaison, de la flexion et de la traction. Ce type de chargement excentré favorise un décollement partiel à l'interface de contact des carters assemblés. Il convient donc de bien identifier les phénomènes locaux non-linéaires (contact, frottement...) au niveau de la liaison ainsi que la raideur des pièces assemblées dans un assemblage multimatériaux.

Organisation du manuscrit

Ces travaux de recherche sont rassemblés dans un manuscrit qui comporte quatre grandes parties. Une conclusion générale, associée à des perspectives, finalise le document. Le contenu des quatre chapitres est synthétisé ci-dessous :

- Dans le premier chapitre, une étude bibliographique a été réalisée pour comprendre le comportement des matériaux composites, dans un contexte d'assemblages boulonnés. Ensuite, les méthodes de pré-dimensionnement existantes des assemblages boulonnés sont exposées et analysées.
- Dans le chapitre 2, un modèle semi-analytique basé sur la méthode des éléments finis, combinée à des formulations analytiques de calcul des assemblages boulonnés a été développé. La modélisation de chaque pièce de l'assemblage est réalisée grâce à des éléments finis standards (poutre, barre, coque...). Une nouvelle formulation de l'élément

coque orthotrope a été proposée pour s'adapter à la structure composite tissée 3D. Le modèle permet d'évaluer les contraintes dans la vis, les efforts, les déplacements des brides et l'évolution de l'état de contact relatif à un chargement extérieur. Une validation primaire de ce métamodèle a été réalisée grâce à des comparaisons avec des modèles éléments finis 2D et 3D.

- Le chapitre 3 s'intéresse à plusieurs études expérimentales dans le but de comprendre le comportement réel des assemblages composite/métal et d'améliorer le niveau de performance du modèle semi-analytique développé, à travers une base expérimentale de validation. Ainsi, une campagne d'essais à trois niveaux d'échelles a été mise en œuvre. Des essais de caractérisation de la fixation ont permis d'identifier ses paramètres matériaux. Un essai de traction est réalisé sur une bride monofixation dont la configuration sera fortement instrumentée pour obtenir suffisamment d'informations exploitables dans le cadre d'une analyse du comportement physique. Un essai de traction structurel d'un secteur de bride à trois fixations complète ce chapitre expérimental. Ce dernier essai est représentatif de la configuration de l'assemblage de la ligne du carter sur des moteurs réels.

- Dans le chapitre 4, la corrélation calculs-essai a été établie en confrontant les résultats des calculs éléments finis 3D et ceux du modèle semi-analytique aux résultats d'essais obtenus. Cette étude comparative a permis de valider l'intérêt du modèle simplifié développé, en mettant en évidence un gain considérable en temps de calcul et une précision des résultats acceptable dans une logique de pré-dimensionnement.

État de l'art

Ce chapitre a pour objectif d'exposer tout d'abord les travaux de recherches existants traitant des matériaux composites, principalement des structures tissées, et permettant de comprendre leur comportement. Ensuite, un focus sur le comportement mécanique des assemblages boulonnés de structures composites est établi. Finalement, les méthodes de pré-dimensionnement des assemblages, qui seront potentiellement applicables afin d'atteindre l'un des objectifs de cette thèse, sont détaillées et expliquées.

Sommaire

1.1 Composites tissés 3D : Structures et modélisation du comportement mécanique	7
1.1.1 Généralités sur les matériaux composites	7
1.1.1.1 Composite à matrice organique (CMO)	8
1.1.1.2 Composite à matrice céramique (CMC)	9
1.1.1.3 Composite à matrice métallique (CMM)	10
1.1.2 Architecture des composites tissés	11
1.1.3 Avantages des composites tissés	11
1.1.4 Comportement mécanique des composites tissés 3D	13
1.1.4.1 Comportement en traction	14
1.1.4.2 Comportement en compression	16
1.1.4.3 Comportement en cisaillement	17
1.1.5 Modélisation du comportement des composites tissés 3D	18
1.1.5.1 Bases de la Mécanique Continue de l'Endommagement (CDM)	19
1.1.5.2 Modèle de Mazars	22
1.1.5.3 Modèle de Matzenmiller	23
1.1.5.4 Modèle de l'Onera (Onera Damage Model)	24
1.1.5.5 Prévision de la rupture	25
1.2 Comportement des assemblages boulonnés de matériaux composites	27
1.2.1 Assemblages simple/double recouvrement	28
1.2.1.1 Approches expérimentales	28
1.2.1.2 Approches numériques	35
1.2.2 Assemblages axiaux	36
1.3 Conception préliminaire des assemblages boulonnés : Intérêt et méthodes	41
1.3.1 le pré-dimensionnement des assemblages boulonnés dans la conception mécanique	41

1.3.2	Méthodes de pré-dimensionnement des assemblages boulonnés	43
1.3.2.1	Méthodes analytiques	45
1.3.2.2	Méthodes semi-analytiques	55
1.3.2.3	Méthodes numériques simplifiées par intégration de macro- éléments	56
1.4	Synthèse de l'état de l'art	59

1.1 Composites tissés 3D : Structures et modélisation du comportement mécanique

1.1.1 Généralités sur les matériaux composites

Un matériau composite résulte de l'association d'un renfort et d'une matrice dans le but d'obtenir un matériau affichant des performances globales améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à ses constituants et sa masse. Le renfort est destiné à supporter la quasi-totalité des efforts alors que la matrice a pour rôle de maintenir la structure et de la protéger.

Les renforts

Les renforts usuellement utilisés pour les composites à haute performance sont constitués de fibres. Lors de leur fabrication, l'extrême élongation de la matière multiplie de manière considérable la surface du volume étiré, ce qui réduit les défauts de surface. Les fibres ont usuellement des diamètres de l'ordre de dizaine de μm (cf. Figure 1.1). Actuellement, les fibres représentant la plus grande part du marché sont les fibres de verre, de carbone et d'aramide. Le tableau 1.1 répertorie quelques propriétés mécaniques de chaque fibre.

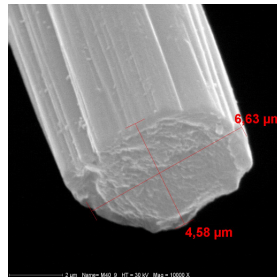


FIGURE 1.1 – Fibre de carbone ex-PAN à haut module Toray M40.

TABLE 1.1 – Propriétés mécaniques des fibres.

Type de fibre	$D_{\text{filaments}}$ (mm)	ρ (kg/m^3)	E (MPa)	σ_R (MPa)	ν
Verre	10	2500	86000	6200	0.2
Carbone HM	6.5	1800	390000	2500	0.35
Carbone HR	7	1750	235000	3200	0.3
Aramide HM	12	1450	130000	3100	-
Aramide HM	12	1780	200000	2800	-

HM : Haut module - HR : Haute résistance

Les matrices

D'un point de vue structural, la matrice a deux fonctions principales : donner une forme géométrique en liant et en maintenant les fibres orientées dans des directions données d'une part, et assurer la transmission des efforts par l'intermédiaire des interfaces d'autre part. Ainsi, plusieurs propriétés sont recherchées pour les matrices en fonction du type d'application :

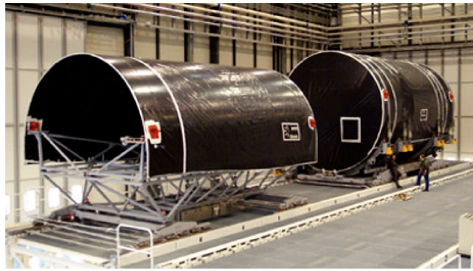
- * Propriétés chimiques : solvants, oxydation dans les milieux sévères, ...
- * Propriétés rhéologiques : principalement pour les besoins d'adaptation aux procédés de fabrication.
- * Propriétés mécaniques : tenue aux sollicitations hors-plan, au cisaillement, ...
- * Propriétés thermiques : tenue au feu, ...

On distingue alors trois grandes classes de matériaux composites, ceux à base de matrice organique (CMO), ceux à base de matrice céramique (CMC) et ceux à base de matrice métallique (CMM).

1.1.1.1 Composite à matrice organique (CMO)

Les CMO sont de loin les matériaux composites les plus répandus. Ce sont en effet les seuls composites ayant, pour beaucoup d'entre eux, des coûts unitaires suffisamment réduits pour pouvoir être produits en grandes séries. Les matrices employées pour ces composites sont des résines polymères de deux types : les thermodurcissables comme les résines polyester et époxy (les plus utilisées en raison de leur plus grande facilité de mise en forme), et les thermoplastiques (moins utilisées mais recyclables). Différentes fibres peuvent être employées avec ces matrices. Les plus courantes sont les fibres de verre (95% des renforts), les fibres de carbone, les fibres d'aramide (kevlar[®]) ou de polypropylène, et les fibres végétales (chanvre, lin). Les applications « hautes performances », comme dans l'industrie aéronautique, utilisent des fibres longues tissées ou encore empilées en plis unidirectionnels, ce qui permet d'optimiser les propriétés mécaniques du composite.

Les composites les plus utilisés dans l'industrie aéronautique sont les composites à matrice organique renforcée par des fibres longues. Citons par exemple, la conception du fuselage du 787 Dreamliner (cf. Figure 1.2a) ou encore celui de l'A350 d'Airbus. Il existe d'autres classes de composites comme les matériaux sandwich, conçus pour alléger les structures tout en améliorant l'isolation phonique. Une autre voie intéressante concerne les techniques textiles qui sont maintenant utilisées pour concevoir des structures composites de plus en plus complexes, notamment les aubes et le carter fan de la nouvelle génération des moteurs d'avion LEAP (cf. Figure 1.2b).



(a) Fuselage CMO du Boeing 787 (Dreamliner) en phase de fabrication.



(b) Aube Fan en CMO des moteurs LEAP.

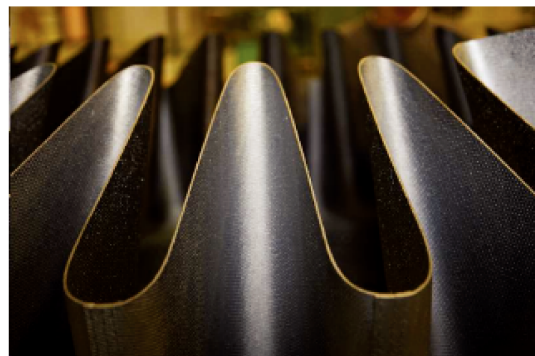
FIGURE 1.2 – Quelques applications des composites à matrice organique en aéronautique civile.

1.1.1.2 Composite à matrice céramique (CMC)

Les CMC sont des matériaux thermostructuraux généralement destinés aux applications de très haute technicité et à haute température comme l'aéronautique et le nucléaire. Les renforts et la matrice sont souvent constitués de carbure de silicium (SiC), de carbone (C) ou d'alumine (Al_2O_3). Ayant des comportements assez similaires aux matrices céramiques, les matrices de carbone sont souvent assimilées aux CMC. Il est relativement fréquent que les renforts et la matrice soient faits du même matériau : le rôle de la structure composite, ici, n'est pas tant de combiner les propriétés des constituants que d'en faire émerger de nouvelles, à savoir la ténacité et la ductilité. Quelques applications des CMC sont illustrées par la Figure 1.3.



(a) Volets froids en composites thermostructuraux C/SiC (Avion de combat Rafale).



(b) Mélangeur en CMC sur moteur CFM56-5C.

FIGURE 1.3 – Quelques applications des composites à matrice céramique en aéronautique civile et militaire.

1.1.1.3 Composite à matrice métallique (CMM)

Les matériaux composites à matrice métallique ont évolué depuis leur apparition dans les années 60 [ML10]. Les matrices utilisées sont souvent des métaux légers, comme l'aluminium, le magnésium, le zinc, etc. . . Quant aux renforts, ils peuvent être métalliques ou céramiques, tels que des fils d'acier, particules de carbure de silicium (S_iC), fibres de carbone, alumine, etc. . . Les composites à matrice métallique ayant de la céramique comme renfort sont appelés cermet. Leur prix relativement élevé limitait leurs applications essentiellement à l'aérospatiale. On en trouve, par exemple, dans des structures du train d'atterrissage et dans les ailerons ventraux du Falcon F-16 (cf. Figure 1.4). De nos jours, et grâce à l'apparition de plusieurs types de renforts, les applications des CMM intéressent aussi les concepteurs des industries automobiles et électroniques pour leur capacité à répondre à des exigences mécaniques spécifiques, tout en se substituant aux matériaux métalliques souvent utilisés dans ces secteurs tel que l'acier, par exemple. Néanmoins, les CMM ont quelques inconvénients. Outre la limitation de la masse volumique comparée aux CMO ou aux CMC, les composites à matrice métallique dans les applications structurelles présentent une fragilisation due à la présence de renforts céramiques cassants. En effet, la présence de particules à fraction volumique élevée favorise la nucléation des dommages sous forme de fissuration des particules et de décohésion d'interface sur la matrice métallique. Ces limitations font des CMM les composites les moins utilisés dans le marché.



(a) Ailerons ventraux du Falcon F-16.



(b) Train d'atterrissage du Falcon F-16.

FIGURE 1.4 – Exemples d'applications des composites à matrice métallique.

1.1.2 Architecture des composites tissés

Une voie intéressante concerne les techniques textiles qui sont maintenant utilisées pour concevoir des structures composites de plus en plus complexes. Toutefois, l'architecture des renforts doit être adaptée aux fonctions techniques à remplir. Dans ces structures, les fibres sont tressées ou alignées en « câbles » nommées torons (fils), comptant chacun quelques centaines ou milliers de fibres. Ces fils sont ensuite tissés selon des motifs plus ou moins sophistiqués. Une fois la mise en forme terminée, la matrice est présente à deux niveaux : au sein des fils (ie. entre les fibres) et au sein du tissu (ie. entre les fils). Les motifs du tissu peuvent être variés. La Figure 1.5 montre une gamme type de préformes textiles plus répandues dans le domaine des structures composites. Elles sont de deux types, bidimensionnelles et tridimensionnelles. Les préformes bidimensionnelles se composent d'un empilement de plis indépendants l'un de l'autre, dont le transfert de charge est réalisé principalement dans les deux directions du plan. Par contre, les préformes tridimensionnelles permettent d'assurer un transfert de charge selon les trois directions de l'espace. La majorité des préformes textiles bidimensionnelles sont les tissus, les tricotés, les tressés et les triaxiaux. Pour les tridimensionnelles, ce sont les tissés, les cousus, les tricotés et les tressés.

1.1.3 Avantages des composites tissés

Les propriétés mécaniques des composites dépendent principalement des propriétés des fibres. Ainsi, le choix de leur fraction volumique, de leur orientation ou encore du type de tissage doit être fait en fonction de l'application visée. Il convient de bien choisir ces paramètres en fonction des chargements auxquels la structure sera sollicitée, aussi, en fonction du volume de fabrication (grande ou petite série) qui peut être affecté par la processabilité du composite.

L'un des intérêts des composites tissés, en particulier à renforts tridimensionnels, concerne la capacité à réaliser des architectures complexes en un nombre limité d'opérations. L'utilisation de procédés issus du savoir-faire de l'industrie textile permet ainsi de réduire les coûts de fabrication [YD04]. En outre, la conception de pièces en un seul bloc permet d'éviter les jonctions (boulonnées ou collées) qui constituent une source de dégradation de la tenue mécanique de la structure finale [GCG89; SB97].

Un autre avantage des composites tissés par rapport aux stratifiés à base de plis UD est une meilleure tenue aux sollicitations hors-plan en général et aux impacts en particulier [Cox92]. En effet, les impacts sur les composites induisent à des délaminages qui s'avèrent beaucoup plus limités dans le cas des composites tissés [CF97; GH03]. Dans le cas d'un stratifié composé de tissu 2D, le nombre de couches indépendantes est divisé par deux par rapport à un stratifié de plis unidirectionnels. L'insertion d'un renfort dans la troisième direction permet de réduire le délaminage. Ce comportement est expliqué par le fait que les renforts hors-plan contribuent à l'arrêt et/ou à la déviation de la propagation des fissures à l'interface. Chou et al. [CCW92] ont montré que l'énergie d'impact nécessaire pour amorcer

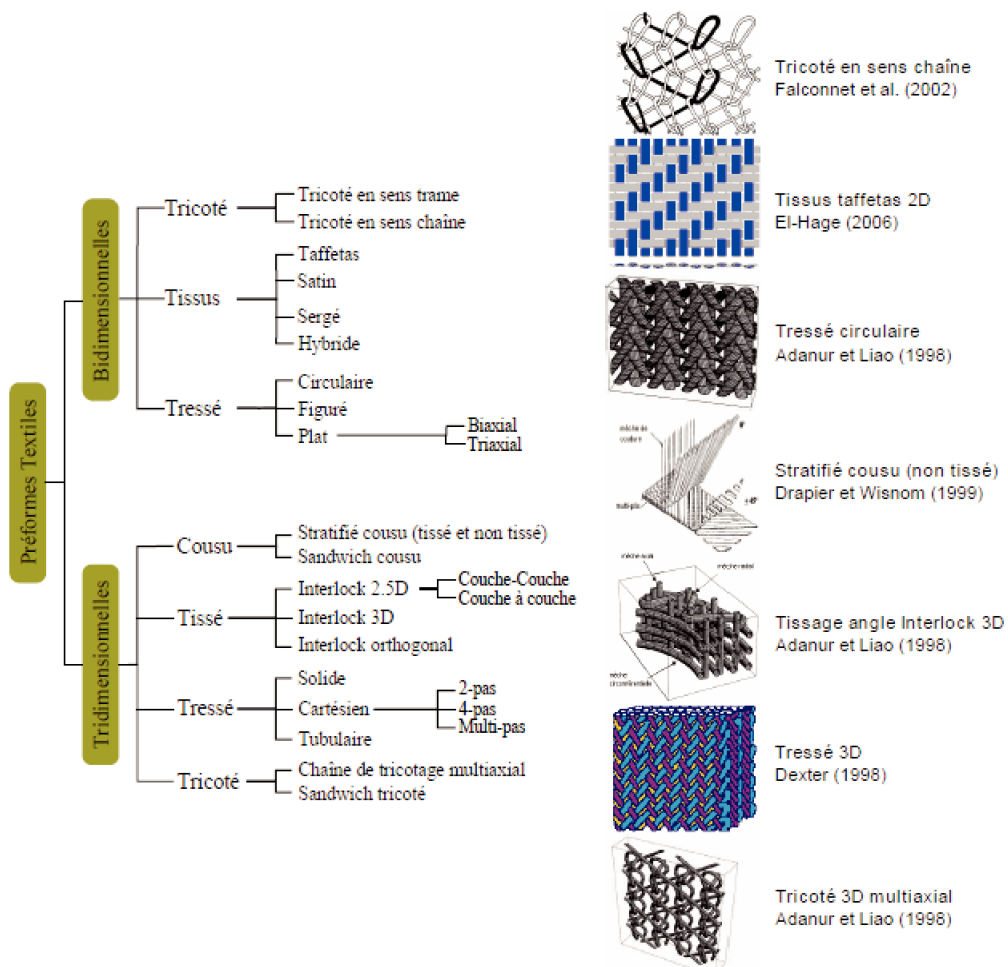


FIGURE 1.5 – Différentes architectures des préformes textiles [Ler13].

un défaut dans un composite tissé 3D est supérieure de 60% à celle d'un stratifié UD. Il est à noter aussi que les architectures 3D ont un pouvoir dissipatif plus important que les composites stratifiés composés de tissus 2D et a fortiori que les stratifiés d'unidirectionnels. Les travaux de Baucom et al. [Bau06] présentent, dans la Figure 1.6, une capture post-mortem d'une plaque composite soumise à des impacts successifs d'une énergie de 18J jusqu'à la perforation de l'éprouvette. Dans le cas du tissu interlock 3D orthogonal, la zone endommagée est beaucoup plus importante que dans le cas d'un tissu 2D. Différentes éprouvettes ont été testées, la perforation d'une plaque en composite tissé 2D a nécessité en moyenne cinq impacts tandis que la plaque en composite tissé 3D a été perforée au bout du dixième impact en moyenne.

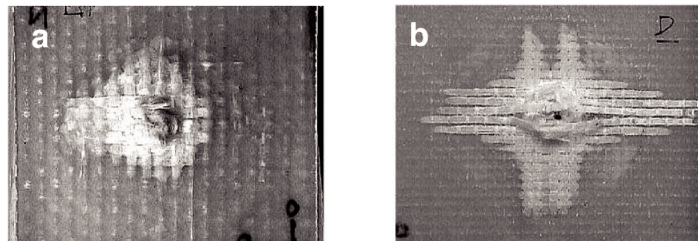


FIGURE 1.6 – Zone endommagée par des impacts successifs sur une plaque composite - (a) Tissu 2D après 5 impacts et (b) Tissu interlock 3D orthogonal après 10 impacts [BZ05].

Les aubes et carter fan du moteur LEAP sont fabriqués en composite tissé 3D grâce au procédé RTM, intégrant la résine époxy comme matrice et la préforme en fibres de carbone. Le choix de ces matériaux, pour les structures citées, se justifie par le besoin de performances mécaniques hors-plan, pour éviter des endommagements catastrophiques du carter lors de la perte d'aube, appelé communément FBO, par exemple. Comprendre le comportement de ce type de matériau est très complexe, ce qui constitue toujours l'objet de plusieurs travaux de recherche.

1.1.4 Comportement mécanique des composites tissés 3D

Le comportement mécanique du composite ainsi que les mécanismes de dégradation conduisant à sa rupture dépendent de la nature des constituants, de l'architecture de la préforme fibreuse, etc... Il est difficile de mettre en évidence un comportement unique pour l'ensemble des composites tissés. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser principalement au comportement des composites tissés 3D à matrice organique, il s'agit du matériau du carter étudié dans le cadre de cette thèse.

Le comportement des CMO tissés 3D est schématisé par la Figure 1.7 et peut être caractérisé par trois phases. La première phase, correspond au comportement viscoélastique du matériau, dû au comportement visqueux de la matrice. La deuxième, correspond à la phase d'apparition des endommagements mésoscopiques ayant un effet sur le comportement visqueux et le comportement élastique. Finalement, la troisième phase correspond à la création d'endommagements macroscopiques qui ont un effet catastrophique sur la tenue du matériau.

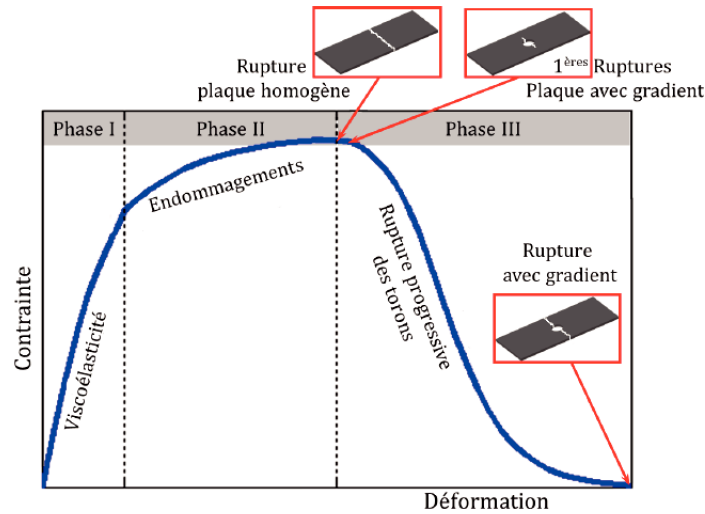


FIGURE 1.7 – Phases du comportement mécanique d'un composite tissé 3D [Hur15].

1.1.4.1 Comportement en traction

Suivant toujours les trois phases du comportement global, le comportement mécanique en traction sens chaîne, trame ou à 45° est illustré par la Figure 1.8. Cette observation émane des travaux de Hurmane [Hur14], qui correspond aussi aux résultats des travaux de Schneider [Sch11] et Rakotoarisoa [Rak11]. Dans un premier temps, Hurmane [Hur14] a observé que le comportement est viscoélastique avec la présence de micro-endommagements (décohésions fibre/matrice). Ensuite, des méso-endommagements (fissurations matricielles en forme de trapèze, associées à des décohésions inter-toron) apparaissent. Ces fissures matricielles ont un effet notable sur le comportement élastique et sont orientées par la microstructure. Finalement, la rupture du matériau en traction est due à la rupture des torons qui est également guidée par la microstructure du matériau.

Afin d'analyser l'influence de l'architecture sur le comportement en traction, Warren et al. [WLAG15b] ont réalisé une campagne expérimentale sur 3 types d'interlock : 3D orthogonal, 12K/24K couche-à-couche et 24K/24K¹ couche-à-couche. Le comportement global, comme illustré par la Figure 1.9 est similaire à celui observé dans les travaux cités précédemment. Les auteurs ont mis en évidence la différence de comportement entre le sens chaîne, trame et 45° , ainsi que l'influence de l'équilibrage du tissu. En effet, les architectures de couche-à-couche tridimensionnelles, comparées les unes aux autres, révèlent que les préformes 24K/24K ont une résistance et une rigidité supérieures que ce soit dans le sens chaîne ou trame. La résistance ultime en traction dans le sens chaîne du matériau couche-à-couche 24K/24K est supérieure de 21% par rapport au matériau couche-à-couche 12K/24K. Elle est de 42% supérieure dans le sens trame. Ceci est expliqué par l'effet de l'ondulation des torons de chaîne dans les 12K/24K, qui est plus importante par rapport à la configuration 24K/24K : conséquence directe de la faible fraction volumique des fibres qui conduit à un affaiblissement de la structure.

1. Ratio Chaîne/Trame

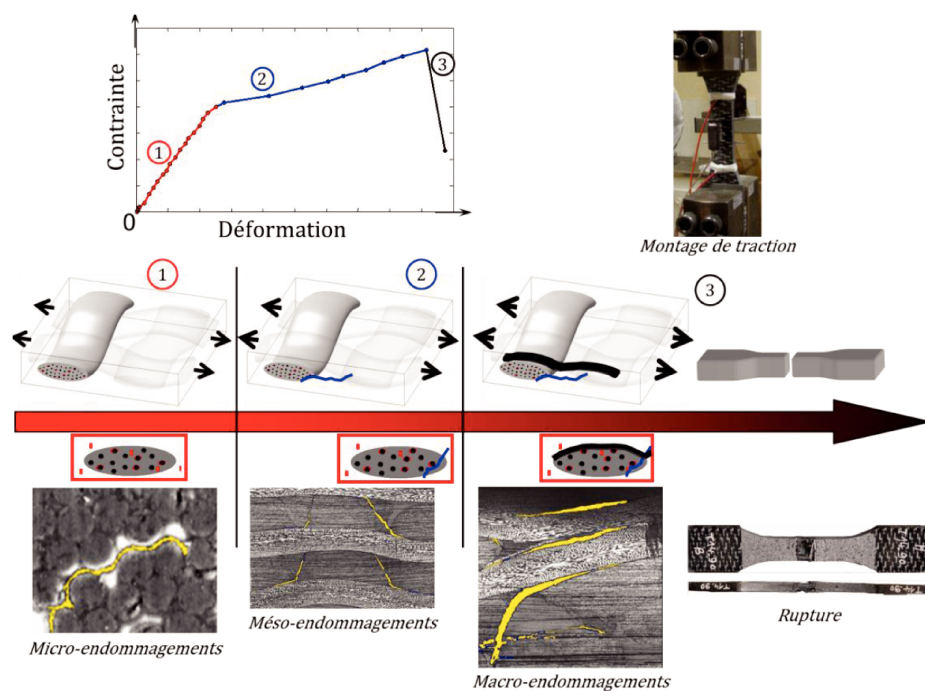


FIGURE 1.8 – Comportement mécanique en traction pure d’un interlock fibre de carbone et matrice epoxy et endommagements associés [Hur15].

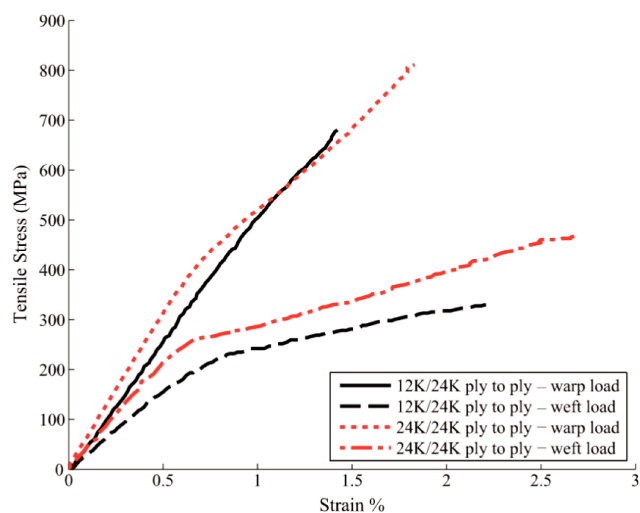


FIGURE 1.9 – Courbe de comportement contraintes-déformations de composites interlock 3D couche-à-couche chargés dans les sens chaîne et trame [WLAG15b].

Outre l'équilibrage du tissu, ces travaux ont montré l'intérêt de l'architecture 3D orthogonal par rapport aux couche-à-couche, la résistance ultime à la traction est supérieure de 63% par rapport au couche-à-couche 12K/24K et de 34% par rapport au 24K/24K.

1.1.4.2 Comportement en compression

Un des premiers auteurs à avoir étudié le comportement en compression des tissés 3D est Cox [Cox92]. Dans ses travaux, le mode d'endommagement principalement constaté est la rupture des torons par kinking (cf. Figure 1.10a) et ce sur plusieurs architectures différentes. Dans les travaux de Hurmane [Hur15], des essais de compression dans le plan, sens chaîne et trame, ont été réalisés. Le scénario observé est tel que très peu d'endommagements ont lieu avant la rupture de l'éprouvette (cf. Figure 1.10b). En effet, après une phase de comportement viscoélastique, l'apparition des premières décohésions intervient très peu de temps avant la rupture totale de l'échantillon. Ces décohésions, intervenant dans les torons où l'embuvage est le plus important, entraînent la rupture par kinking des torons autour de la décohésion. Rapidement, la rupture totale de l'échantillon arrive juste après les premières ruptures de torons par kinking. Le faciès de rupture est similaire à celui observé sur des stratifiés et la présence d'un angle de rupture hors-plan est constatée. Cet angle semble lié à l'architecture du matériau, notamment à l'embuvage maximal des torons. Ainsi, l'angle hors-plan est différent dans les directions chaîne et trame.

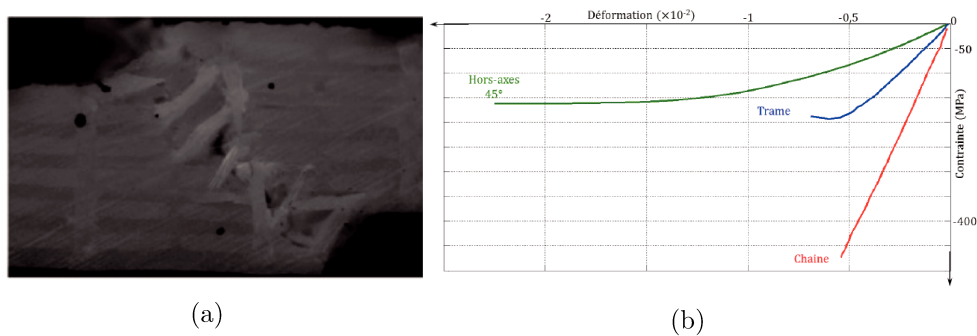


FIGURE 1.10 – (a) Illustration du phénomène de kinking [JP17] et (b) courbe de comportement en compression dans le sens chaîne, trame et hors axes à 45° [Hur15].

Difficultés de la caractérisation de la compression hors-plan

Un des avantages principaux des composites tissés 3D est leur performance hors-plan. Cependant, les essais de caractérisation de leur comportement hors-plan sont assez délicats à mettre en œuvre. La conception des éprouvettes demande un soin particulier, afin d'avoir un champ de contraintes uniforme. En outre, la dimension des éprouvettes est relativement

petite par rapport aux éprouvettes utilisées pour caractériser le comportement dans le plan du matériau ce qui implique des difficultés de manipulation. Dans ce sens, Schneider et al. ont élaboré des essais de traction monotone originaux. Ils ont conçus des éprouvettes avec des formes particulières, afin de déterminer le comportement hors-plan d'un composite tissé 3D à fibres de carbone et résine epoxy [Sch09]. Ces essais leur ont permis de mettre en évidence le comportement élastique linéaire suivi d'une rupture fragile du matériau. Plus précisément, deux types d'éprouvettes ont été utilisées, avec des géométries diabololo (D) et en forme de queue d'aronde (QA). Sur l'éprouvette QA, les auteurs ont mis en évidence l'influence du montage sur la représentativité du comportement hors-plan de l'éprouvette. Un montage hyperstatique ne permettait pas de reproduire le vrai comportement hors-plan (cf. Figures 1.11 et 1.12).

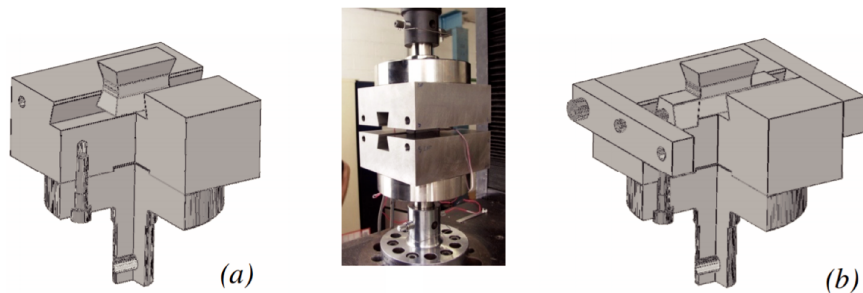


FIGURE 1.11 – Vues du montage d'essai de compression hors-plan de l'éprouvette QA : (a) montage classique et (b) montage hyperstatique [Sch11].

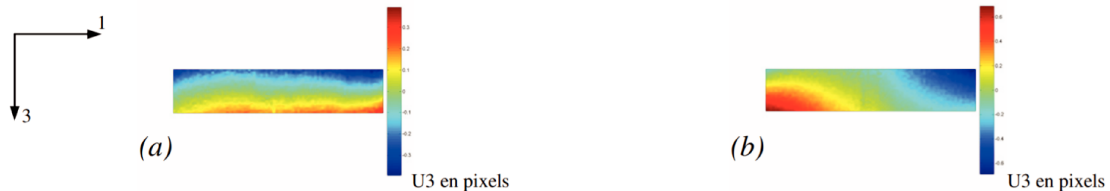


FIGURE 1.12 – Champ de déplacement hors-plan pour le montage classique (a) et le montage hyperstatique (b) [Sch11].

1.1.4.3 Comportement en cisaillement

Le comportement en cisaillement transversal est assez similaire à celui en traction pure. Dans les travaux de kuo et al. [KFL03], une comparaison de la réponse de quatre types de composites tissés 3D à matrice epoxy et fibres de carbone a été établie. La différence entre les spécimens était dans le ratio Chaîne/Trame. Un même comportement a été observé pour les quatre types de composite, montrant un comportement à trois phases comme illustré par la Figure 1.13.

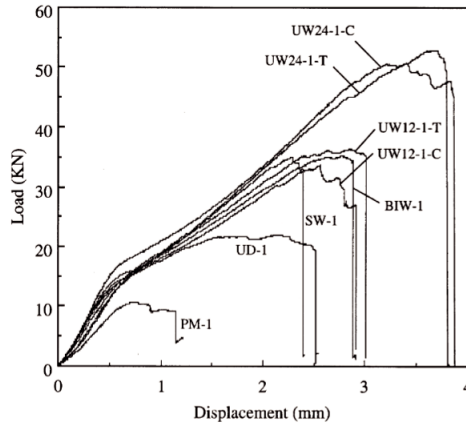


FIGURE 1.13 – Comportement en cisaillement de plusieurs types de tissés 3D comparés à un UD et à la matrice pure [KFL03].

Généralement, la caractérisation du comportement en cisaillement, dans le plan ou hors-plan, doit être réalisée avec plusieurs précautions. En effet, le tissage 3D peut rendre inadéquat le recours à des essais de cisaillement standard type IOSIPESCU (éprouvettes entaillées), ou encore Rail-Shear. Dans le cas de tissage où les torons sont de dimensions significatives, le fait de réaliser des entailles génère des concentrations de contraintes importantes. Celles-ci faussent totalement les caractéristiques qui pourraient en être déduites. De plus, l'état de cisaillement concentré dans un plan n'est pas représentatif et ne permet pas d'identifier le comportement en cisaillement à l'échelle de la pièce, notamment en cisaillement hors-plan. Face à cette problématique, Schneider et al. [Sch09] ont eu recours à des pièces structurales, afin de caractériser le comportement en cisaillement. Deux types d'éprouvettes ont été testés avec deux types d'essais : flexion 3 points et torsion. Les deux essais ont abouti à des valeurs de module de cisaillement assez proches.

1.1.5 Modélisation du comportement des composites tissés 3D

Le comportement des matériaux composites tissés 3D est dépendant des directions de tissage. C'est pour cette raison qu'à l'échelle macroscopique le comportement est communément supposé orthotrope. Il représente une symétrie de comportement selon les plans des directions chaîne, trame et hors-plan. L'écriture générale de la loi de comportement est donnée par :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} \quad (1.1)$$

où $\underline{\varepsilon}$ est le vecteur déformations, $\underline{\sigma}$ est le vecteur contraintes et $\underline{\underline{S}}$ est la matrice de souplesse donnée par :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

La caractérisation du matériau consiste à identifier les paramètres de la matrice de souplesse (ou inversement de raideur). Ensuite, la prévision de la tenue d'une structure, tenant compte de ces paramètres matériaux, se fait par l'intermédiaire de la définition d'un critère. Au préalable, il est impératif de disposer de modèles permettant de décrire au mieux la réponse de la structure, afin de diminuer les facteurs de sécurité dans un processus de dimensionnement. Sous chargement mécanique, l'apparition de l'endommagement dans les composites tissés 3D se traduit par une perte de la rigidité initiale du matériau dans ses différentes directions d'orthotropie. La Mécanique Continue de l'Endommagement constitue un cadre d'étude permettant la prise en compte des mécanismes d'endommagement à l'échelle microscopique en modélisant les effets de ces dégradations au niveau macroscopique.

1.1.5.1 Bases de la Mécanique Continue de l'Endommagement (CDM)

La mécanique continue de l'endommagement, appelée communément Continuum Damage Mechanics (CDM) s'inscrit dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus. Ses fondements ont été introduits par Kachanov [KAC58] et Rabotnov [Rab69] et ont été appliqués aux matériaux métalliques dans le but de modéliser le phénomène du fluage. Le premier a introduit une variable scalaire associée à l'endommagement et le deuxième a défini la notion de la contrainte effective. Suite à ces travaux fondamentaux, la mécanique continue de l'endommagement a été enrichie par les travaux de Lemaître. En effet, des couplages avec le comportement linéaire élastique et le comportement élasto-plastique ont été établis par Lemaitre dans [Lem84] et [Lem85], respectivement. Ensuite, un cadre thermodynamique de cette théorie a été introduit par Chaboche [Cha74]. Les avancées de la mécanique continue de l'endommagement ont permis l'étude et la modélisation de quelques phénomènes physiques tels que la fermeture des fissures en compression, la fatigue ou encore l'endommagement anisotrope. De plus, la mécanique continue de l'endommagement a été appliquée aux matériaux métalliques comme aux matériaux composites [MC97 ; CM02].

L'endommagement est défini à travers l'utilisation d'une variable interne appelée variable d'endommagement D . Construire un modèle d'endommagement d'un matériau quelconque requiert la définition de cette variable d'endommagement, son évolution et son couplage avec la

loi de comportement. L'apparition des microfissures engendre un état irréversible du matériau dû à la perte de rigidité. Au lieu de représenter géométriquement ces fissures et les porosités, la mécanique continue de l'endommagement traduit leurs effets sur les propriétés mécaniques à l'échelle macroscopique. Kachanov [KAC58] a défini la variable d'endommagement D comme étant la densité des micro-fissures et des porosités dans une section de normale \vec{n} dans le VER, avec \tilde{S} la section du matériau endommagé réduite par la présence de micro-fissures et S la section du matériau sain. Ainsi, D peut être interprétée physiquement par le ratio de la surface endommagée S_D sur la surface non endommagée S . La Figure 1.14 et l'équation 1.3 illustrent cette interprétation.

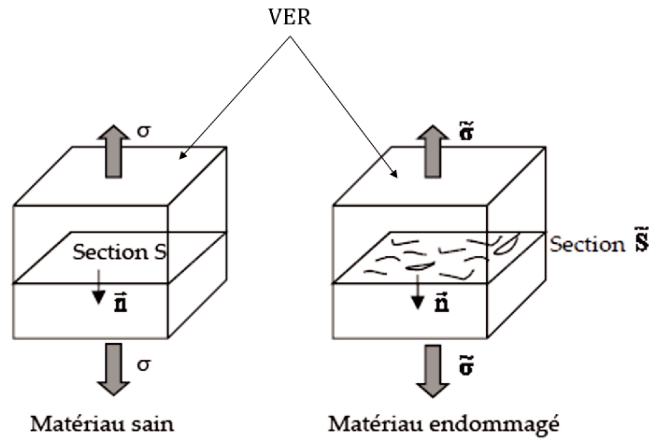


FIGURE 1.14 – Schéma représentatif de l'endommagement.

$$D = \frac{S - \tilde{S}}{S} = \frac{S_D}{S} \quad (1.3)$$

D augmente de façon monotone de $D = 0$, état non endommagé du matériau, à $D = 1$, état de rupture local du matériau. Cette variable d'endommagement est définie en tout point du solide. Dans le cas général de matériaux anisotropes, la variable d'endommagement est un tenseur [Cha82].

Comme évoqué précédemment, l'état de contraintes dans un matériau endommagé peut être décrit au moyen de la contrainte effective introduite par Rabotnov [Rab69] et donné par l'équation Eq.1.4 :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F S}{S \tilde{S}} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (1.4)$$

Sous l'hypothèse de Lemaître [Lem85], qui suppose que l'état de déformation de la structure endommagée dépend uniquement de la contrainte effective, il est considéré que l'état de déformation associé à un état endommagé est équivalent à l'état de déformation de la structure non endommagée soumise à la contrainte effective. Par application de la loi de

Hooke avec E le module d'élasticité de la structure non endommagée, la déformation est donnée par l'équation Eq.1.5.

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (1.5)$$

Ainsi, en considérant la contrainte effective et la déformation qui en découle, l'endommagement D a un effet sur le module d'élasticité. Un module d'élasticité effectif est à son tour défini en fonction de la variable d'endommagement (Eq 1.6) :

$$\tilde{E} = E(1-D) \quad (1.6)$$

Par conséquent, l'augmentation de l'endommagement conduit à la diminution du module d'élasticité et ceci est illustré par la Figure 1.15, la variable D peut être définie aussi par la relation de l'équation Eq.1.7.

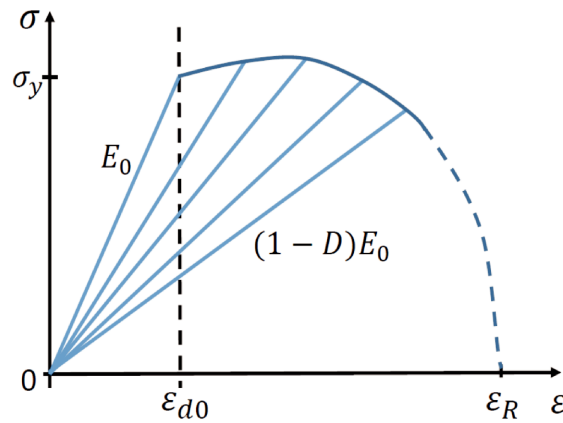


FIGURE 1.15 – Courbe contraintes-déformations avec endommagement.

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (1.7)$$

Cadre thermodynamique de l'endommagement

L'introduction de variables internes associées à l'endommagement impose de vérifier la cohérence de la modélisation avec les lois de la thermodynamique dans un processus irréversible.

Dans le cas de matériaux élastiques endommageables avec l'hypothèse de petites déformations, l'état mécanique du solide est déterminé par deux types de variables :

- * Variables d'état : ε et σ .
- * Variables internes représentant les phénomènes dissipatifs dus à l'endommagement D .

Soit ψ l'énergie libre de Helmholtz, la contrainte σ est donnée par :

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (1.8)$$

Chaboche [Cha77] a introduit la notion de la force thermodynamique Y de l'endommagement donnée par l'équation Eq.1.9 associée à la variable d'état σ .

$$Y = \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad (1.9)$$

Le modèle reste thermodynamiquement admissible tant que la dissipation intrinsèque volumique est positive [LC94], c'est-à-dire :

$$Y \dot{D} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0 \quad (1.10)$$

L'évolution des variables internes étant généralement définie à partir des forces thermodynamiques Y à travers un potentiel de dissipation ϕ , cette condition est assurée si le potentiel de dissipation ϕ choisi est convexe.

$$\dot{D} = \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (1.11)$$

Le potentiel de dissipation peut être identifié à la surface limitant le domaine de non endommagement. Le critère d'endommagement F s'écrit alors :

$$F = F(Y, D) \leq 0 \quad (1.12)$$

si $F < 0$, il n'y a pas d'endommagement, si $F = 0$, il y a endommagement, tandis que le cas $F > 0$ reste impossible. La différence entre un modèle d'endommagement à un autre réside dans la définition de cette fonction seuil, qui définit par conséquent l'expression de la variable d'endommagement.

1.1.5.2 Modèle de Mazars

Le modèle de Mazars [Maz86 ; MPC89] est l'un des modèles les plus simplifiés de l'endommagement et a été développé pour modéliser le comportement endommageable du béton. Il repose sur l'observation que la déformation équivalente traduit l'état local d'extension d'un matériau, il est donc possible d'associer l'apparition et l'évolution de l'endommagement à cette notion. Ainsi, Mazars stipule que l'endommagement apparaît lorsque la déformation équivalente atteint un certain seuil K , dépendant de D :

$$f(\varepsilon, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0 \quad (1.13)$$

$K(D = 0) = \varepsilon_{d0}$ correspond au seuil de l'initiation de dommage où :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1,2,3} \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (1.14)$$

avec

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_i \geq 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_i < 0 \end{cases}$$

L'évolution du dommage est obtenue par l'identification des paramètres matériaux et des variables d'endommagement D_t et D_c tenant compte du caractère unilatéral de dommage et de l'anisotropie traction/compression.

Par la suite, plusieurs auteurs ont proposé des améliorations ou des adaptations du modèle. Gatuingt et al. [GRD06] ont proposé un modèle non local de l'endommagement anisotrope en remplaçant la déformation équivalente locale par une formulation non locale basée sur une intégrale.

Dans des travaux d'évolution du code Aster [ham13], l'auteur a proposé une amélioration du modèle pour tenir compte du cisaillement et de la bicompression du béton en introduisant une déformation équivalente lorsqu'au moins une contrainte principale est négative, à l'aide d'une nouvelle variable. Récemment, Beyer [Bey19] a adapté la formulation de la déformation équivalente en ajoutant les déformations négatives dues à la compression et au cisaillement et en proposant une formulation simple de la fonction K . Ces travaux ont été développés dans le but de simuler l'endommagement par fretting des CMO tissé 3D, similaires à ceux utilisés dans le cadre de cette thèse.

1.1.5.3 Modèle de Matzenmiller

Cette loi est basée sur un modèle d'endommagement initialement développé par Matzenmiller et al. [MLT95] pour les UD et étendu par Xiao et al. [XGGJ07] pour les tissés. Lachaud et el. ont amélioré le modèle [Lac15] afin de prendre en compte l'endommagement après impact. Ce modèle introduit des variables d'endommagement D_i traduisant une perte de raideur des différents modules d'élasticité définis en fonction de variables ϕ_i . Ces dernières variables s'expriment en fonction de f_i qui représentent des critères de rupture liés à chaque mode de rupture. Ces critères sont généralement de Hashin [Has80]. La variable d'endommagement D_i pour un mode de rupture j est donnée par :

$$D_i = \max \{q_{ij} \phi_j, j = 1, \dots, 5\} \quad (1.15)$$

où

$$\phi_i = 1 - e^{\frac{1}{m}(1-r_j^m)}, r_j \geq 1 \quad (1.16)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

r_i est le seuil d'endommagement calculé à partir de f_i par les relations :

$$f_i(\sigma, d) - r_i = 0 \quad (1.18)$$

et m un paramètre matériau à identifier.

1.1.5.4 Modèle de l'Onera (Onera Damage Model)

Le modèle d'endommagement de l'ONERA (Onera Damage Model) a été développé pendant une vingtaine d'années d'abord pour les composites tissés à matrice céramique [JPJ94] puis pour les composites tissés à matrice organique. À travers plusieurs travaux de thèse, il fait l'objet d'enrichissements successifs et a été appliqué à la modélisation :

- d'éprouvettes élémentaires en traction monotone [Mar10]
- d'essais de fatigue sur éprouvettes élémentaires [Rak11]
- de la compression de structures composites [Hur15]
- des impacts basse vitesse / basse énergie [Eli15]
- de la fatigue incrémentale [Ang16]
- du matage des assemblages [Mou17]
- de la ruine de chapes ceinturées [Gar19]

Le modèle ODM est beaucoup plus complexe que ceux cités précédemment vu qu'il tient compte de plusieurs phénomènes physiques : le comportement visqueux de la matrice, les déformations résiduelles de cuisson et l'ouverture/fermeture de fissures.

Le matériau est supposé homogène avec un comportement orthotrope endommageable. L'ODM est composé de différentes variables d'endommagement associées aux trois échelles de modélisation : micro, méso et macro (cf. Figure 1.16). Les variables d'endommagement microscopiques δ_i sont calculées et liées aux variables d'endommagement mésoscopiques d_i et macroscopiques D_i . Ces dernières sont exprimées pour les trois directions principales (1,2,3) et dans les directions hors-plans (0° et 45°) à travers différentes lois d'évolution traduisant les échelles d'endommagement. Enfin, elles sont affectées au comportement macroscopique du matériau.

Le dimensionnement et le calcul de structures repose sur la mise en place de modèles prédictifs du comportement mécanique. Il est nécessaire que ces modèles puissent permettre de vérifier la tenue des structures à travers des critères de rupture.

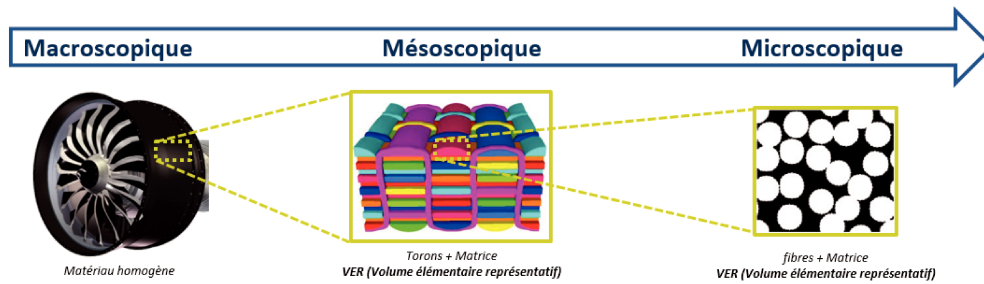


FIGURE 1.16 – Échelles de modélisation des composites tissés

1.1.5.5 Prédiction de la rupture

Les modèles conduisent à une prédiction de la réponse des structures en termes de contraintes et déformations. Dans le but d'évaluer la tenue d'une structure, ces modèles doivent être associés à un critère de rupture, définissant l'instant de défaillance ou de ruine du matériau. De nombreux critères de rupture macroscopiques sont proposés dans la littérature. Ces critères permettent d'identifier les zones de rupture, de déterminer pour quel chargement la pièce a rompu et de définir le mode de rupture de la structure.

Critère de la contrainte maximale

C'est le critère le plus simple et celui qui reste le plus utilisé dans les bureaux d'études. Le matériau est supposé ruiné dès qu'une des composantes du tenseur de contraintes (ou de déformations) dépasse une valeur seuil. Dans le cas des contraintes planes (σ_1 contrainte longitudinale, σ_2 contrainte transverse, σ_{12} contrainte de cisaillement dans le plan), ce critère s'écrit soit dans les axes principaux des contraintes (en général pour les matériaux isotropes) soit dans les axes principaux d'anisotropie du matériau :

$$\begin{aligned}
 X_C &< \sigma_1 < X_T \\
 Y_C &< \sigma_2 < Y_T \\
 -S &< \sigma_{12} < S
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

où X_T et X_C correspondent respectivement à la résistance dans l'axe longitudinal en traction et en compression, Y_T et Y_C correspondent respectivement à la résistance dans l'axe transverse en traction et en compression et S à la résistance en cisaillement.

Le critère de la contrainte maximale est découplé. En effet, bien qu'il informe sur le mode de rupture du matériau, il ne tient pas compte des interactions entre les différentes composantes du tenseur des contraintes. Ainsi, pour des chargements multiaxiaux, il surestime généralement la contrainte à rupture.

Critère de Tsai-Wu

Le critère de Tsai-Wu appartient à la famille des critères quadratiques (comme par exemple le critère de Von Mises qui est le plus courant pour les matériaux métalliques). En général, ils permettent de prendre en compte les interactions entre les différentes composantes du tenseur de contraintes. Le critère de Tsai-Wu [TW71] s'écrit sous forme indicielle comme le montre la relation (1.20).

$$f_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \leq 1 \quad (1.20)$$

où f_i et F_{ij} sont des paramètres matériaux à identifier. Ce critère doit vérifier des conditions de stabilité, afin de garder une enveloppe fermée de type ellipsoïdale :

$$\begin{aligned} F_{ii} F_{jj} - F_{ij}^2 &\geq 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, 3\} \\ F_{ii} &\geq 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, 6\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Critère de l'Onera

Dans le cadre des travaux menés sur les composites tissés à matrice céramique, Aiello a proposé une formulation multicritère pour étudier la tenue du matériau [Aie02]. Ce critère prend en compte l'existence de deux modes de rupture : un premier mode de rupture fragile en compression et un second mode équivalent à une rupture par endommagement dépendant de la partie positive du tenseur des contraintes (noté σ^+) :

$$\sigma^+ = P \cdot \begin{pmatrix} \langle \sigma_I \rangle + & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_{II} \rangle + & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_{III} \rangle + \end{pmatrix} \cdot P^T \quad (1.22)$$

où σ_I , σ_{II} et σ_{III} correspondent aux valeurs propres de σ et P à la matrice de passage de l'espace des déformations principales à l'espace de représentation initial.

Ce critère s'écrit de la façon suivante :

$$\sqrt{\sigma : M_1 : \sigma} + \sqrt{\sigma^+ : M_2 : \sigma^+} \leq 1 \quad (1.23)$$

avec :

$$M_1 = \alpha S^0 \quad (1.24)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} S_{11}^0 & m_{12} S_{12}^0 & m_{13} S_{13}^0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{12} S_{12}^0 & m_{22} S_{22}^0 & m_{23} S_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{13} S_{13}^0 & m_{23} S_{23}^0 & m_{33} S_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} S_{44}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} S_{55}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{66} S_{66}^0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

où S^0 est le tenseur des souplesses initiales. Les coefficients α et m_{ij} sont des paramètres matériaux à identifier.

La caractérisation et la modélisation du comportement des matériaux composites constituent des étapes importantes dans la compréhension et la prédiction de leur comportement dans les applications industrielles, notamment en aéronautique. Ces applications nécessitent dans plusieurs cas le recours à des assemblages mécaniques multimatériaux, afin de faciliter le montage et la maintenance. Ainsi, la problématique des assemblages métallique/composite et composite/composite prend de plus en plus de place dans le domaine industriel et de la recherche.

1.2 Comportement des assemblages boulonnés de matériaux composites

Les structures aéronautiques sont souvent assemblées grâce à des liaisons mécaniques (vis, boulons, goujons, rivets...) dans le but d'assurer leur maintenabilité. L'existence de ces jonctions dans les structures crée des zones de concentration de contraintes qui les affaiblissent. Ainsi, la modélisation et la prédiction du comportement de ces assemblages sont rendues plus complexes et nécessitent une compréhension approfondie de leur comportement. Plusieurs travaux traitant du comportement des assemblages boulonnés des matériaux composites ont été développés dans les deux dernières décennies. Avant de les détailler, il est indispensable de rappeler les différentes configurations d'assemblages illustrées par la Figure 1.17. Les assemblages les plus courants dans le cas des matériaux composites sont les assemblages à simple/double recouvrement, dits de cisaillement. En effet, cette configuration permet de générer moins de flexion sur les pièces assemblées et le boulon est sollicité principalement en cisaillement. Les assemblages axiaux sont, quant à eux, plus communs dans le cas des brides cylindriques adoptés souvent pour répondre à des contraintes de conception d'ordre géométrique et ergonomique. Dans les deux cas, plusieurs modes de rupture, illustrés par la Figure 1.18 peuvent avoir lieu, distincts ou combinés.

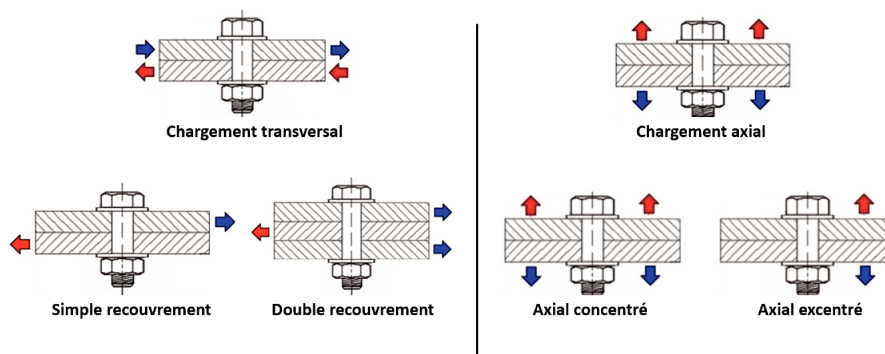


FIGURE 1.17 – Classification des assemblages boulonnés.

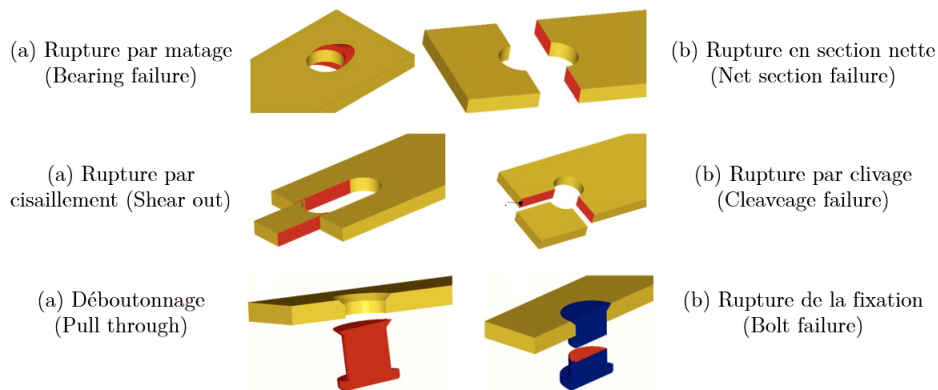


FIGURE 1.18 – Modes de rupture des assemblages boulonnés.

1.2.1 Assemblages simple/double recouvrement

1.2.1.1 Approches expérimentales

Le comportement type des assemblages boulonnés simple ou double recouvrement est régi par la courbe illustrée dans la Figure 1.19. Au début du chargement, le comportement est quasi-linéaire et est piloté par la raideur en cisaillement K_{SHEAR} des pièces assemblées. Ce comportement est dû aux efforts tangentiels induits au niveau du plan de joint. Quand l'effort tangentiel total atteint la force de frottement, un glissement relatif entre les pièces a lieu jusqu'à ce que le fût de la vis soit en contact avec la pièce. Le boulon transmet ainsi les efforts extérieurs et le comportement est piloté principalement par la raideur de la vis K_{BOLT} . Durant cette phase, le comportement est élastique. À partir du point A, la pente de la courbe diminue et le comportement devient non-linéaire à cause de l'endommagement qui évolue jusqu'à rupture totale de l'assemblage (point B). Le comportement de ces assemblages dans la phase élastique étant plus ou moins facile à prédire, ça ne l'est pas dans la région d'endommagement.

Lors de la conception des liaisons boulonnées de matériaux composites, le mode de rupture le plus recherché est le matage. En effet, avec ce mode de ruine, la rupture est d'une part locale et d'autre part, progressive. Plusieurs auteurs ont tenté de comprendre la physique de ce comportement et ont étudié expérimentalement les paramètres induisant à ce mode de ruine.

Influence de la géométrie

Le mode de rupture d'un assemblage simple ou double recouvrement dépend principalement des paramètres géométriques des pièces assemblées, à savoir le diamètre du trou D , l'épaisseur des substrats t et leur largeur W ainsi que l'excentricité du trou E (cf. Figure 1.20).

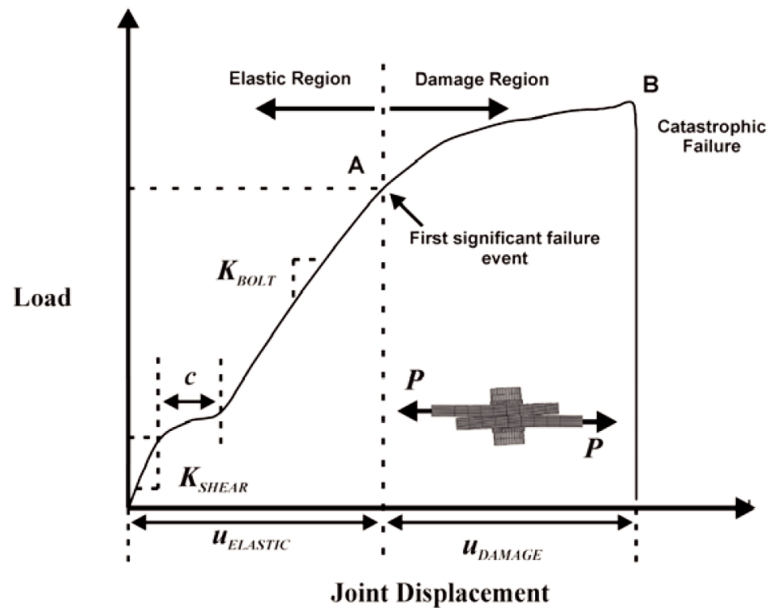


FIGURE 1.19 – Courbe expérimentale du comportement d’un assemblage simple recouvrement [McC02].

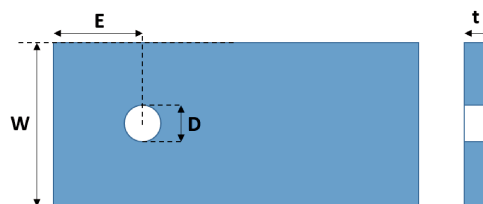


FIGURE 1.20 – Paramètres géométriques des pièces assemblées dans les assemblages simple ou double recouvrement.

Collings [Col77] figure parmi les premiers auteurs à avoir établi cette observation. Il a identifié les mécanismes de rupture pour un assemblage double recouvrement d'un carbone époxy tissé 2D symétrique en fonction des différents ratios des paramètres géométriques. Les Figures 1.21a, 1.21b et 1.21c représentent l'évolution de la contrainte à rupture en fonction de W/D , E/D et D/t respectivement.

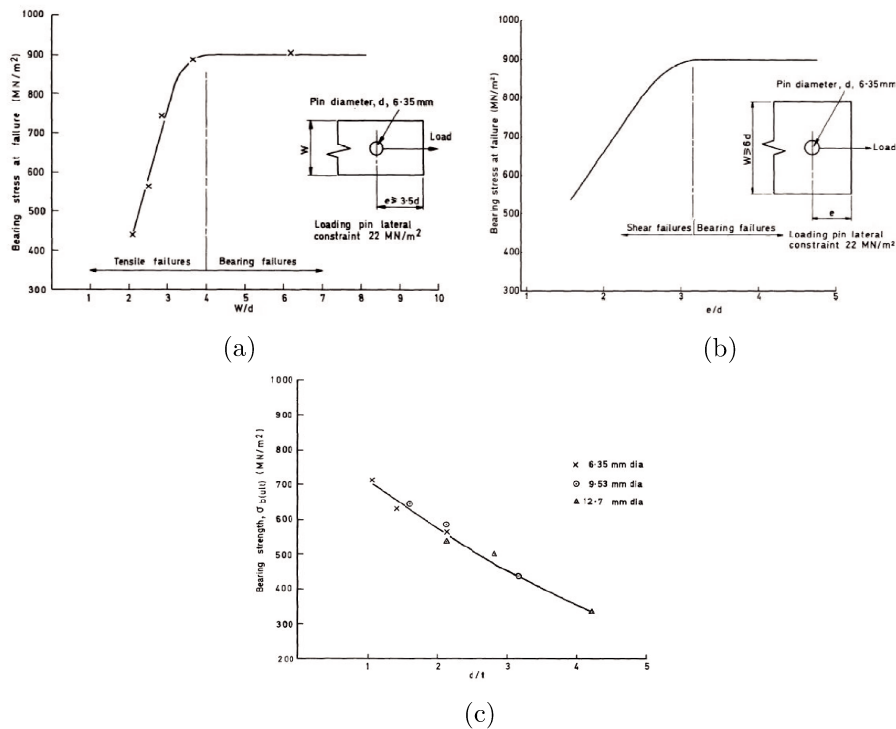


FIGURE 1.21 – Influence des paramètres géométriques sur la résistance au matage [Col77]

D'après les résultats de Collings [Col77], une rupture par matage est atteinte lorsque les dimensions de l'éprouvette sont plus importantes par rapport au diamètre du trou (du boulon par conséquent). Ces observations rejoignent la recommandation de Kyle et al. [WLAG15a] qui suggèrent d'assurer un ratio $W/D = 6$ pour éviter la rupture en cisaillement et en section nette. Asi [Asi09] a réalisé une étude similaire sur des composites verre-epoxy taffetas tissé 2D. Il a été observé que la résistance maximale au matage est atteinte lorsque $W/D = 4$ (à E/D constant) ou quand $E/D = 4$ (à W/D constant). En outre, un mode de rupture mixte combinant cisaillement et matage a été observé dans le cas où $E/D = 2$ et $W/D = 4$, et un mode de rupture mixte combinant rupture en section nette et matage pour $E/D = 4$ et $W/D = 2$ (cf. Figure 1.22).

Aldebert [Ald13] a réalisé une étude d'influence du paramètre E sur la tenue de l'assemblage simple cisaillement d'un tissé 2D du pré-imprégné G803/914 avec une valeur constante de $W/D = 7$. Il a été observé qu'à partir de $E/D = 2.5$, le mode de rupture reste inchangé et il l'est toujours en section nette avec une augmentation peu significative de la contrainte ultime à rupture (de l'ordre de 3,7% pour $E/D = 5$) alors qu'elle est de -15,1% pour $E/D = 1.5$ (cf. Figure 1.23).

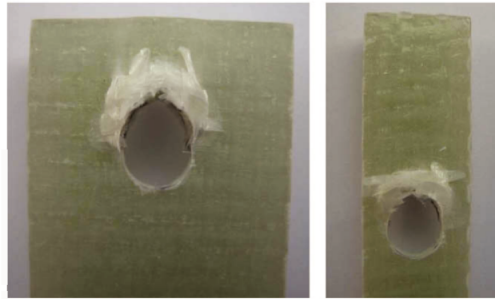


FIGURE 1.22 – Faciès de rupture de l'assemblage caractérisé par $E/D = 2$, $W/D = 4$ à gauche et $E/D = 4$, $W/D = 2$ à droite [Asi09].

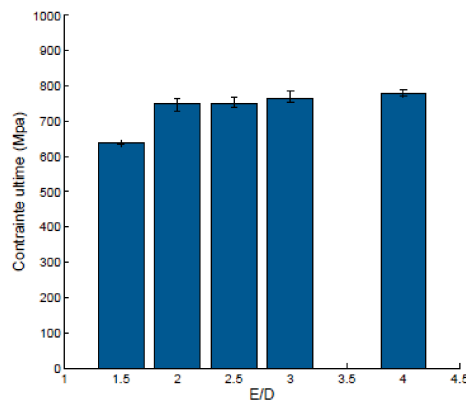


FIGURE 1.23 – Comparatif des contraintes ultimes sur stratification "quasi-isotrope" en fonction de E avec $W/D = 7$ [Ald13].

Influence du tissage

Nous avons vu que le comportement global des composites tissés dépend de la nature du tissage et de son architecture, il en est de même dans les assemblages boulonnés. Saleh et al. [Sal15] ont comparé le comportement au matage de trois architectures de tissage 3D, ORT (orthogonal), LTL (Layer-to-layer) et AI (angle-interlock) sous un chargement transverse dans un assemblage double cisaillement orienté à 45° par rapport à la direction chaîne (Warp). La géométrie de ces architectures est donnée dans la Figure 1.24b. Les auteurs ont constaté qu'il n'y a quasiment pas d'influence de tissage dans la partie linéaire (jusqu'à 50% de la déformation ultime). Pendant la phase du comportement endommageable, il a été observé que les composites tissés ORT permettent d'absorber d'avantage d'énergie de déformation ce qui mène à une déformation à rupture plus élevée ($\sim 140\%$) que pour les AI ($\sim 105\%$) et les LTL ($\sim 85\%$). En effet, les renforts hors-plan (Z-binder) permettent de bloquer la propagation de fissures dans le plan et ceci a été confirmé grâce à des analyses post-mortem des échantillons testés.

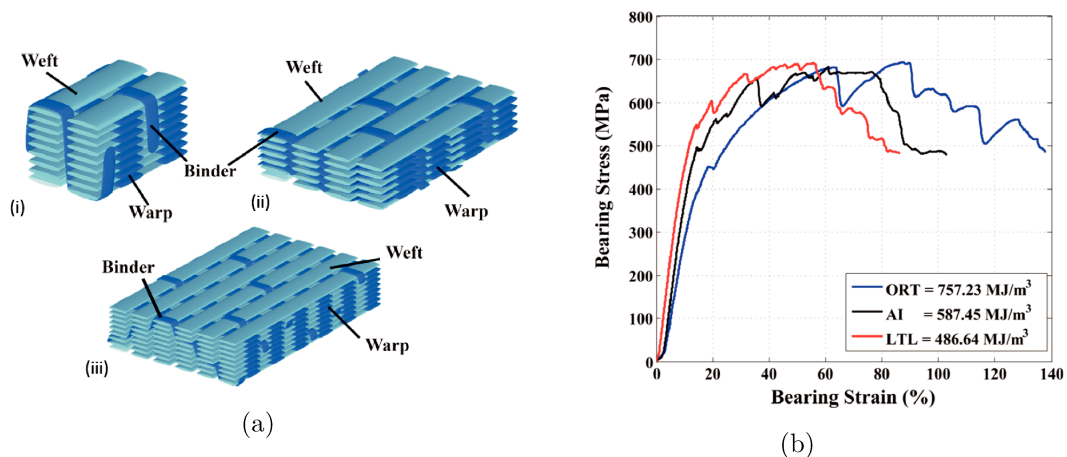


FIGURE 1.24 – (a) Différentes architectures de tissage (i) ORT, (ii) LTL, (iii) AI et (b) Courbe contraintes-déformations pour les 3 architectures [Sal15].

Outre la nature du tissage, la stratification des renforts tissés est aussi un paramètre qui peut influencer sur le comportement de ces assemblages. Dans les mêmes travaux d'Aldebert [Ald13] cités précédemment et en utilisant le même composite, l'auteur a réalisé des essais à rupture d'assemblage simple recouvrement de plusieurs stratifications : $[0^\circ]_4$, $[0^\circ]_8$, $[QI]_8$ et $[0^\circ]_{16}$. Pour la stratification $[0^\circ]_{16}$, la ruine de l'assemblage est due à la rupture du boulon. En effet, l'empilement d'un très grand nombre de plis conduit naturellement à une raideur plus importante du tissé ce qui mène à la perte du boulon. Cette étude confirme la forte dépendance du mode de rupture à la stratification, comme le montre la Figure 1.25, quatre modes de rupture différents ont été obtenus.

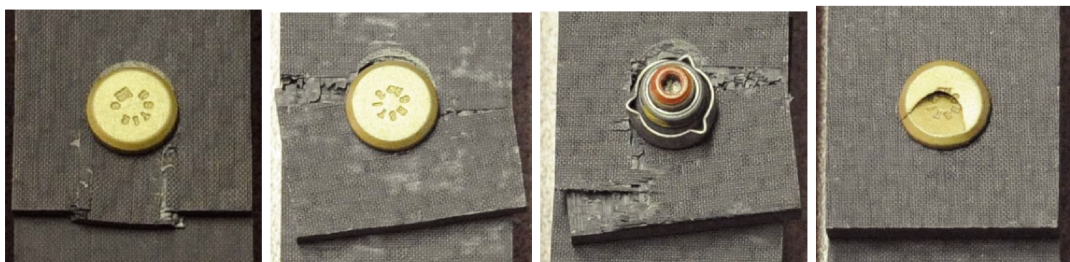


FIGURE 1.25 – Modes de rupture de différentes stratifications par ordre de gauche à droite $[0^\circ]_4$, $[0^\circ]_8$, $[QI]_8$ et $[0^\circ]_{16}$ [Ald13].

Kyle et al. [WLAG15a] ont mené une étude presque similaire mais en regardant en plus, l'influence du ratio chaîne/trame dans le cas d'un AI, en comparaison avec un composite tissé 3D orthogonal. Ainsi, trois architectures ont été utilisées : 3D ORT, AI 12K/24K et AI 24K/24K. Les spécimens ont été testés en double et simple recouvrement ainsi qu'avec plusieurs directions de chargement orientées par rapport au sens chaîne. Les résultats expérimentaux montrent que la contrainte ultime de matage des AI 12K/24K est 5.5% de moins par rapport aux AI 24K/24K. Ceci est dû à l'ondulation des torons lors

du tissage qui est plus importante pour les 12K/24K et qui désoriente plus les torons sens chaîne. Cela conduit aussi à des ruines moins accentuées en cisaillement pour les 24K/24K, ce mode de rupture coexiste en effet avec le matage pour quelques assemblages testés. En outre, l'application du chargement dans une direction orientée à 45° par rapport au sens chaîne engendre une réduction de la résistance au matage de 32.7%, 24.7%, et 30.0% pour les AI 24K/24K, AI 12K/24K et 3D ORT respectivement (cf. Figure 1.26).

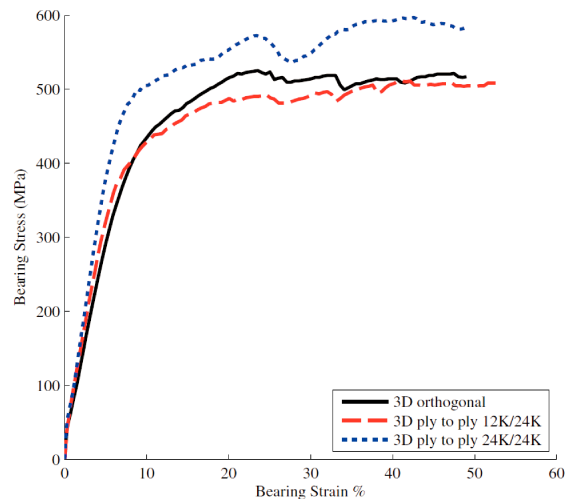


FIGURE 1.26 – Courbe contraintes-déformations pour les 3 configurations de tissage [WLAG15a].

Influence du serrage

L'influence du serrage sur la tenue des assemblages composites a été investiguée par plusieurs auteurs. Le serrage dans ce type de matériaux doit être bien sélectionné car un effort de serrage important peut endommager initialement le matériau et une absence de serrage réduit significativement la raideur de l'assemblage. Giannopoulos et al. [Gia17] ont étudié l'influence de la précharge sur la tenue en matage d'un assemblage composite/composite. Trois niveaux de serrage ont été évalués : 10kN, 5kN et serrage à la main pour un diamètre de vis de 6mm. Les résultats de cette étude sont donnés par la Figure 1.27. Les résistances ultimes au matage observées sont de 770MPa, 1050MPa et 1230MPa pour serrage à la main, 5kN et 10kN respectivement.

Une étude assez similaire a été effectuée par Lee S. Y et Ahmad H. [LA17]. Un des axes de travaux de ces auteurs a été consacré à l'évaluation de l'influence du serrage sur la tenue d'un assemblage hybride double recouvrement de composite tissé renforcé par des fibres kenaf, en considérant plusieurs ratios W/D . Deux cas de figures ont été testés : serrage à la main et serrage à un couple de 5Nm pour un diamètre de vis de 5mm. Les résultats de cette étude montrent le gain qu'apporte le serrage à 5Nm en terme de résistance ultime qui est de 25% maximum pour $W/D = 5$ (cf. Figure 1.28). Il est à noter qu'en deçà de $W/D = 2$, le

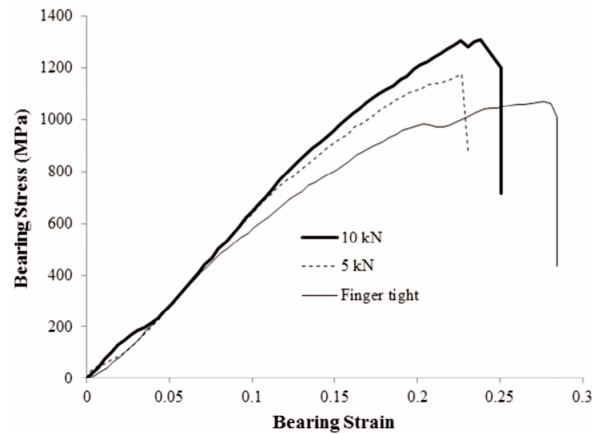


FIGURE 1.27 – Courbe contraintes-déformations pour différentes valeurs de précharge [Gia17].

serrage a peu d'influence vu que la rupture intervient juste après le comportement linéaire de l'assemblage régi par la raideur en cisaillement des pièces assemblées et la présence ou non du serrage ne modifie pas le comportement dans cette phase élastique [Gia17].

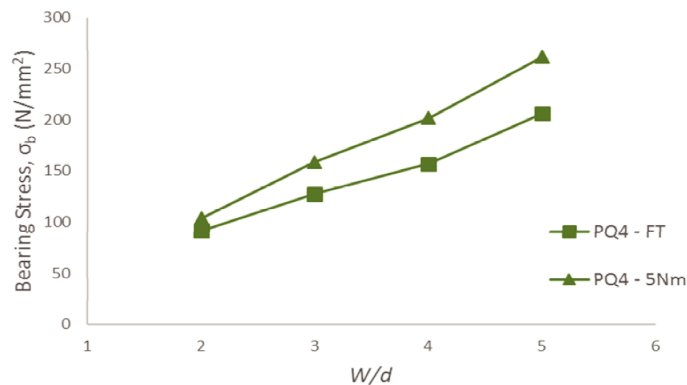


FIGURE 1.28 – Évolution de la résistance ultime au matage Vs. différentes valeurs de W/D pour deux cas de serrage : FT- serrage à la main et à $C = 5Nm$ [LA17].

Le comportement des assemblages boulonnés sous chargement transverse dépend principalement des paramètres géométriques. Le mode de rupture varie en fonction des ratios E/D , W/D et D/t et le mode de ruine par matage est celui le plus recherché. Il est obtenu généralement quand les ratios E/D et W/D sont importants. La rupture par matage permet de conserver la quasi-intégralité de l'assemblage et de lui faire subir une rupture progressive facilement détectable. Ainsi, il convient d'optimiser ces paramètres en fonction des contraintes géométriques et de fonctionnement des pièces assemblées dans les assemblages structuraux. Dans les renforts tissés, l'influence du tissage et de la stratification est mise en évidence. L'ensemble des travaux se rejoignent sur le fait que les architectures orthogonales présentent une meilleure résistance à la rupture grâce aux renforts hors-plan qui arrêtent et/ou dévient la propagation de fissures. Finalement, il a été démontré que l'effort de serrage permet d'assurer une plus longue tenue en service des assemblages composites. Néanmoins,

il faut bien identifier le couple de serrage nécessaire afin de ne pas initier l'endommagement du composite lors du serrage.

1.2.1.2 Approches numériques

Au vu de la complexité de la fabrication des pièces composites à renforts tissés ainsi qu'à la réalisation de différents essais expérimentaux, une multitude de travaux de recherche se sont intéressés au développement de modèles numériques permettant de reproduire le comportement des assemblages boulonnés de structures composites tissés observé lors des essais expérimentaux. L'intérêt principal de ces modèles est qu'ils soient prédictifs et extensibles à plusieurs configurations, sans avoir recours à d'autres essais. Dans cette veille bibliographique, seuls quelques travaux traitant des problématiques d'ordre numérique et de modélisation sont détaillés.

Le premier questionnement qui se pose lors de la modélisation des matériaux composites concerne l'échelle de la modélisation. On rappelle qu'il existe trois échelles de modélisation : microscopique, mésoscopique et macroscopique. Dans le cadre de la modélisation numérique des assemblages boulonnés de composites, la plupart des travaux se sont basés sur des modèles macroscopiques. Toutefois, et dans le but d'analyser la rupture progressive d'un assemblage double recouvrement d'un interlock epoxy-fibres de carbone, Kyle et al. [War16] ont adopté une stratégie permettant de modéliser à l'échelle mésoscopique la portion autour du trou, et à l'échelle macroscopique le reste de l'éprouvette, comme illustré par la Figure 1.29a. En utilisant Hashin [Has80] comme critère de rupture et une loi d'évolution de l'endommagement type Matzenmiller, les auteurs ont réussi à valider le modèle par rapport aux essais expérimentaux réalisés dans [WLAG15a] en recalant le paramètre m du modèle de Matzenmiller (cf. Figure 1.29b). De plus, ils ont effectué une étude de convergence du pas de calcul qui a permis d'identifier 25 incréments comme nombre de pas suffisants pour la convergence du calcul (cf. Figure 1.29a).

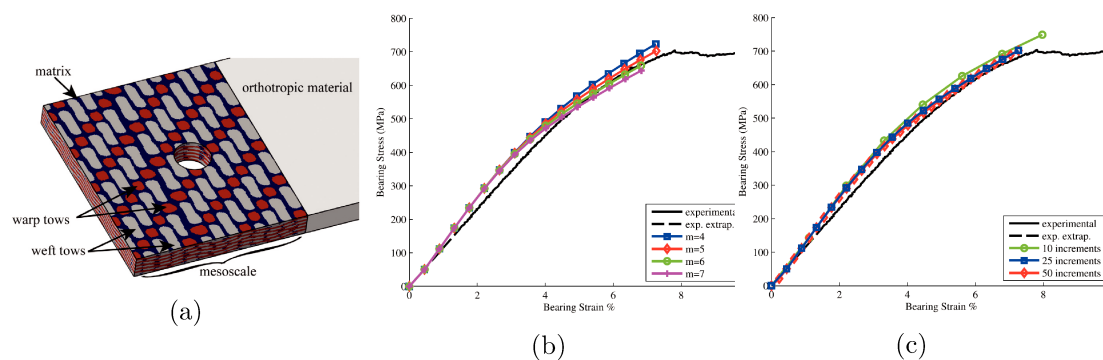


FIGURE 1.29 – Principe de modélisation (a) et comparaison de la courbe contraintes-déformations pour plusieurs valeurs de m (b) et pas de calculs (c) [War16].

Dans la même logique de raffinement du maillage autour du trou, Irisarri et al. [Iri12] ont proposé un modèle EF 3D avec une stratégie multi-modèles, illustrée par la Figure 1.30. En

effet, un maillage raffiné est utilisé au niveau de la zone de contact avec endommagement progressif visco-élastique sur chaque pli. Des éléments cohésifs sont utilisés entre les plis uniquement autour du trou afin de réduire le temps de calcul. Le modèle a montré une très bonne aptitude à corrélérer les essais expérimentaux avec prise en compte des paramètres influents principaux (géométrie, stratification, frottement et jeu). Les auteurs ont tout de même noté que le comportement numérique des interfaces est influencé par la stratification, modifiant ainsi la résistance au matage.

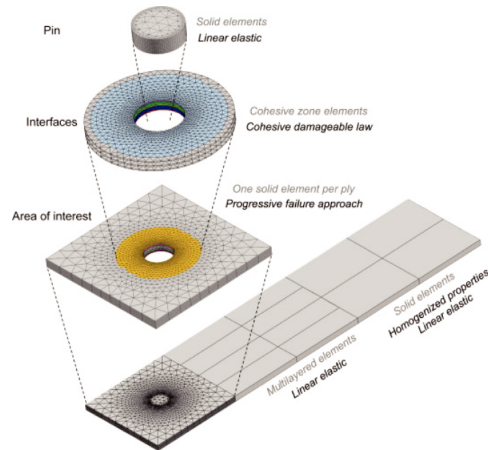


FIGURE 1.30 – Principe de modélisation de Irisarri et al. [Iri12].

1.2.2 Assemblages axiaux

Les assemblages axiaux génèrent principalement une contrainte normale dans le boulon, combinant traction et flexion si le chargement est excentré, et de la traction seule (ou avec prédominance) si le chargement est centré. Contrairement aux assemblages à chargement transverse où la vis (ou le boulon) est sollicitée principalement au cisaillement, à notre connaissance, les travaux qui se sont intéressés aux assemblages axiaux de composites sont peu nombreux comparés à ceux réalisés pour les assemblages en cisaillement, encore moins quand il s'agit des structures tissées.

Dans ce type d'assemblage, notamment quand le chargement est centré (direction de chargement coaxiale à l'axe de la vis), la rupture de la vis ou le pull through sont des modes de ruptures susceptibles d'avoir lieu d'une façon prépondérante. À ce sujet, il existe quelques travaux qui traitent l'analyse de la rupture "pull-through" des assemblages composites stratifiés. Banbury et Kelly [BK99] ont mené une étude expérimentale, afin d'analyser l'influence de quelques paramètres de l'assemblage à savoir la forme de la tête de vis, l'épaisseur du stratifié, la séquence d'empilement et les matériaux du composite sur la tenue en pull-through des assemblages. Différents mécanismes d'endommagement associés à ce mode de rupture ont été étudiés. Globalement, le comportement de ces assemblages est décrit par la courbe effort-déplacement donnée dans la Figure 1.31a. Un comportement légèrement

différent a été observé pour les stratifiés de faible épaisseur. En effet, le comportement linéaire précédant la première chute d'effort représentait de faibles chutes d'efforts successives sans que cela n'affecte la raideur. La première phase de comportement est quasi-linéaire et la non linéarité observée au tout début du chargement est due à la redistribution des efforts entre la résine et les fibres, suite à la flexion de la tête de vis. La deuxième phase correspond à la première chute d'effort qui se traduit par le début de l'évolution de dommage dans l'épaisseur. Finalement, la troisième phase correspond à l'étendue des endommagements vers la zone de blocage (encastrement par exemple), phénomène qui arrête la propagation des endommagements et conduit à la rupture. En faisant des analyses post-mortem, les auteurs ont constaté que l'initiation du dommage conduisant à ce mode de rupture peut être sous deux formes : rupture en cisaillement de la matrice au niveau de la tête de vis ou par rupture en flexion des plis au voisinage du trou. Pour la majorité des configurations testées, c'est la rupture matricielle qui est principalement responsable du pull-through, elle s'initie au niveau de la tête de vis et se propage dans l'épaisseur du stratifié suivant une ligne à 45° (cf. Figure 1.31b). Dans ces travaux, les auteurs ont constaté que le comportement jusqu'à rupture en mode pull-through est similaire à celui observé dans le cas d'impact à faible vitesse.

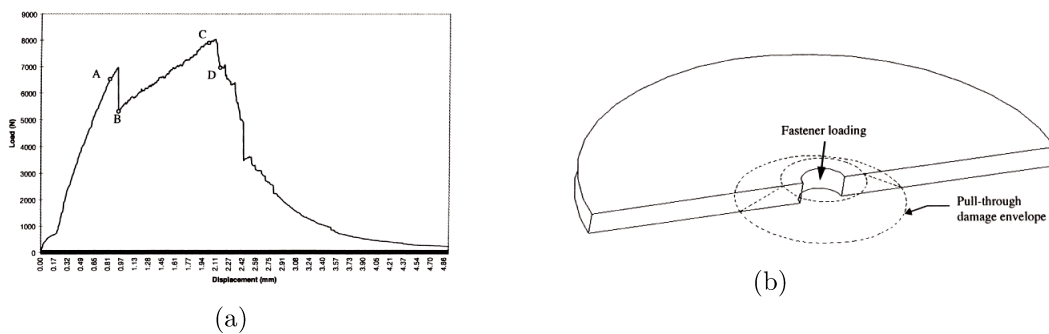


FIGURE 1.31 – Courbe effort-déplacement d'un essai pull-through (a) et illustration de l'enveloppe d'endommagement (b) [BK99]

En se basant sur ce même constat, Adam et al. [Ada12] ont adapté le modèle DPM (Discrete Ply Method) développé par Bouvet et al. [Bou09] pour la modélisation du comportement à l'impact de structures composites. Le modèle consiste en une représentation (maillage) explicite des plis en utilisant des éléments cohésifs comme illustré par la Figure 1.32a, afin de capter le délaminage d'une part et la rupture en cisaillement de la matrice d'autre part. Les résultats numériques ont été comparés aux résultats d'un essai pull through sur un stratifié carbone/epoxy quasi-isotrope. La Figure 1.32b montre que le modèle est capable de prédire le comportement global ainsi que les mécanismes d'endommagement, mais il est moins précis quant à la prédiction de l'effort à rupture.

Il est à noter que dans les applications industrielles, ce mode de rupture (pull-through) est souvent combiné à d'autres, vu qu'un chargement purement centré est difficile à obtenir. Ce comportement est observé notamment dans le cas de l'assemblage de brides, circulaires ou droites. L'analyse du comportement de ce type d'assemblage en intégrant des structures composites est primordiale, d'autant plus qu'il s'agit de l'application principale dans ces travaux de thèse. Zhou et al. [Zho16] ont réalisé une étude expérimentale et numérique sur une nouvelle conception d'un assemblage hybride Composite/Aluminium de brides en

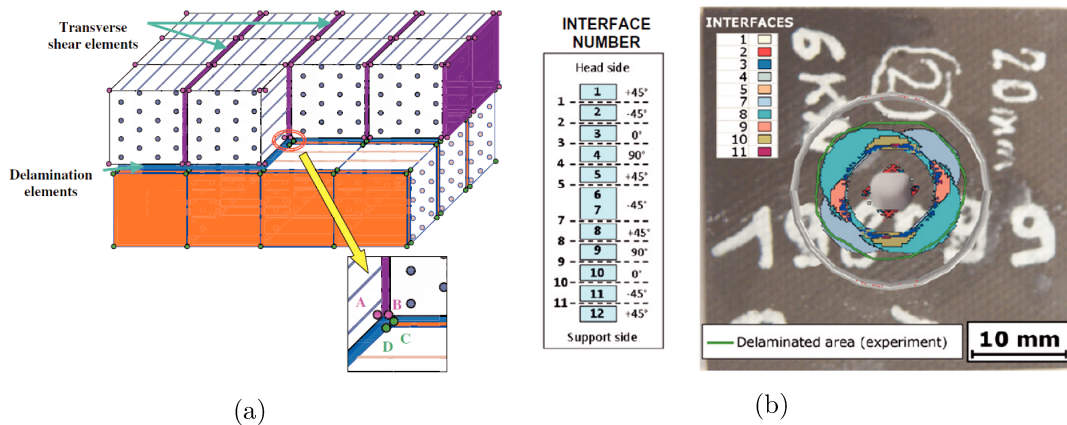


FIGURE 1.32 – Principe de modélisation (a) et comparaison expérimental/numérique de la zone du délaminage (b) [Ada12].

π , permettant de réduire significativement l'endommagement par délaminage. Les résultats, numériques et expérimentaux étant cohérents, ont montré une augmentation de la résistance à rupture comparés aux assemblages π classiques, notamment de 77.5% par rapport au design proposé par Fan et al. dans [Fan15]. Les modes de rupture observés sont principalement du matage et rupture en cisaillement au niveau du trou. La Figure 1.33 montre les modes d'endommagement de la pièce composite au chargement ultime.

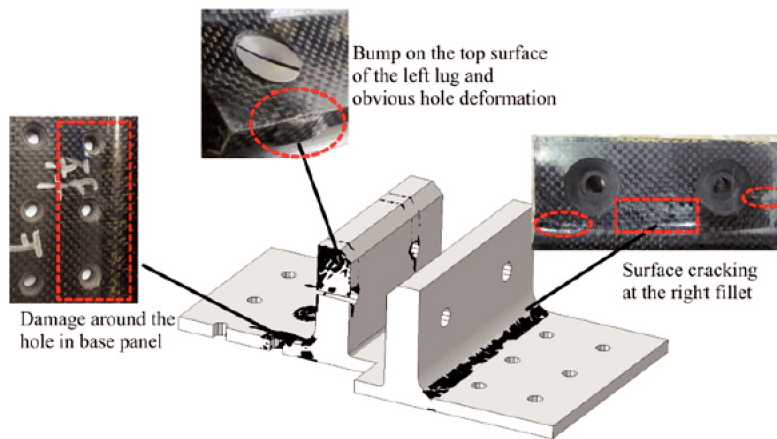


FIGURE 1.33 – Modes de rupture au chargement ultime Zhou et al. [Zho16]

Pisarev et al. [Pis17] se sont intéressés à l'analyse du comportement des brides en L en testant des brides avec ou sans défaut au niveau du rayon. Le protocole expérimental utilisé dans ces travaux est représenté dans la Figure 1.34a. Pour les deux configurations, les auteurs ont constaté que le principal mode d'endommagement est le délaminage inter-plis, qui s'initie dans la zone centrale au niveau du rayon de la surface externe (surface qui s'étend vers les têtes des vis) pour se propager par la suite vers les tranches de la bride. Ce constat a été approuvé numériquement à travers la réalisation d'un modèle 3D de l'essai (cf. Figure 1.34b).

De plus, les auteurs ont observé que l'influence de la présence du défaut a été mise en évidence par la différence entre l'effort au premier endommagement et à rupture. Elle est de 14% pour les brides à défaut et de 35% pour les brides sans défaut.

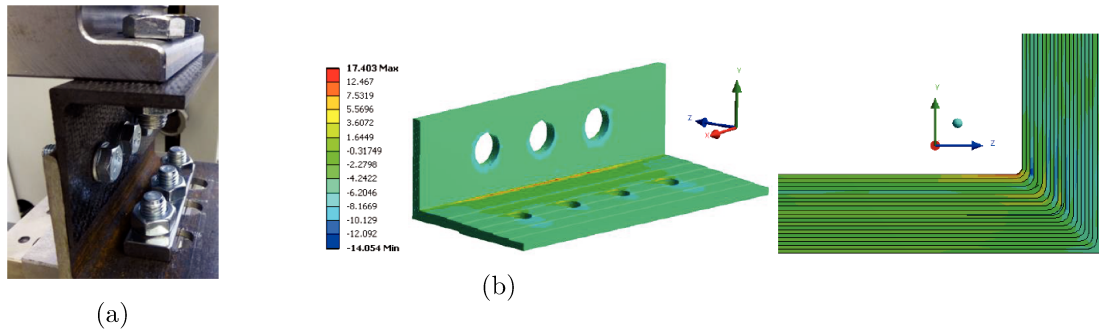


FIGURE 1.34 – Montage expérimental de l'essai en traction de la bride en L (a) et distribution des contraintes σ_{zz} (b) [Pis17].

D'autres travaux conduits par Jansson et al. [Jan08] dont l'application est très similaire à celle envisagée dans le cadre de cette thèse, se sont intéressés à l'analyse du comportement des brides cylindriques d'un composite quasi-isotrope. Les auteurs ont mené un essai expérimental sur des brides cylindriques représentatives de la bride OGV [Kur01]. La bride composite est protégée par une contreplaque venant éviter l'endommagement du composite au niveau du trou. Le mode de rupture constaté est le délaminage au niveau du rayon de bride ce qui rejoint les observations des travaux cités précédemment. Le modèle EF 3D réalisé sous ANSYS®, et sans considération de l'endommagement, a permis de prédire l'effort de décollement qui était de l'ordre de 50% de l'effort à rupture.

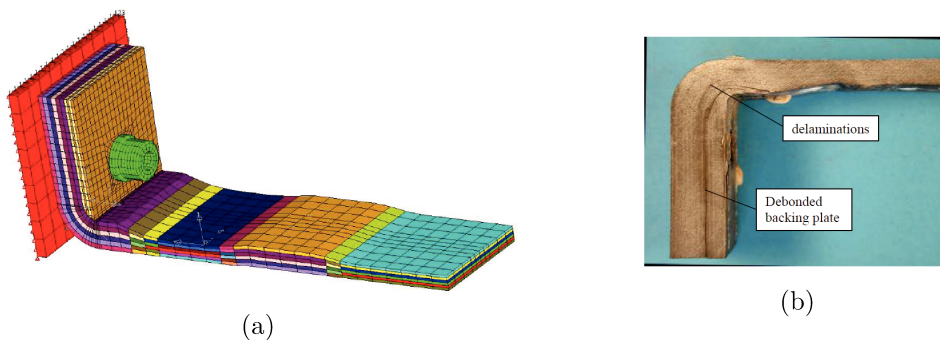


FIGURE 1.35 – Modélisation de la bride (a) et faciès de rupture à la charge ultime (b) [Jan08].

Conclusion partielle

Les assemblages boulonnés sont présents dans de nombreuses applications industrielles sous deux configurations différentes : assemblages à chargement transversal et assemblages à chargement axial. Dans le premier cas, le comportement global et macroscopique de l'assemblage dépend principalement de la raideur en cisaillement des pièces assemblées tandis que dans le deuxième cas, ce sont leurs raideurs axiales (de traction et de flexion) qui pilotent le comportement de l'assemblage. Il a été prouvé dans les différents travaux que ces raideurs dépendent des dimensions de l'assemblage, des matériaux utilisés, du type de tissage et de la stratification, etc... Il convient ainsi de bien choisir ces paramètres afin de concevoir l'assemblage boulonné au juste besoin de la fonction mécanique à satisfaire. De nos jours, la conception des assemblages boulonnés se base en grande partie sur des modélisations numériques avec des stratégies d'optimisation de calcul différentes et préalablement validées par rapport aux essais expérimentaux. Ces modèles devraient permettre un gain de temps et de coût de mise en œuvre comparés à l'approche expérimentale. Cependant, ce temps de conception peut être encore plus réduit et optimisé si l'on utilise des méthodes de pré-dimensionnement.

1.3 Conception préliminaire des assemblages boulonnés : Intérêt et méthodes

Les premières phases de conception prennent une importance croissante dans le processus de définition des produits, notamment en aéronautique. Au sein de Safran Aircraft Engines, la volonté est de diminuer toujours plus les temps de développement des nouveaux moteurs d'avions et/ou de modifications architecturales des structures. Ainsi, le recours à des méthodes de conception préliminaire est primordial. Ces méthodes ont démontré l'importance des premières étapes de conception, puisque ce sont les premiers choix qui impactent le plus la durée et le coût du cycle de conception. La Figure 1.36 montre que la phase de conception préliminaire ne représente qu'une faible part des coûts réels du développement complet du produit, alors qu'elle conditionne largement le coût final du développement [ZZ01]. En effet, à la fin de la phase de conception préliminaire, il n'est plus possible d'agir que sur 30% des coûts du cycle de vie alors qu'à peine 5% des coûts de développement ont été dépensés. Le moment le plus opportun pour réduire les temps et les coûts du cycle de conception est alors au cours de la phase de conception préliminaire, également appelée phase d'avant-projet [Tho99].

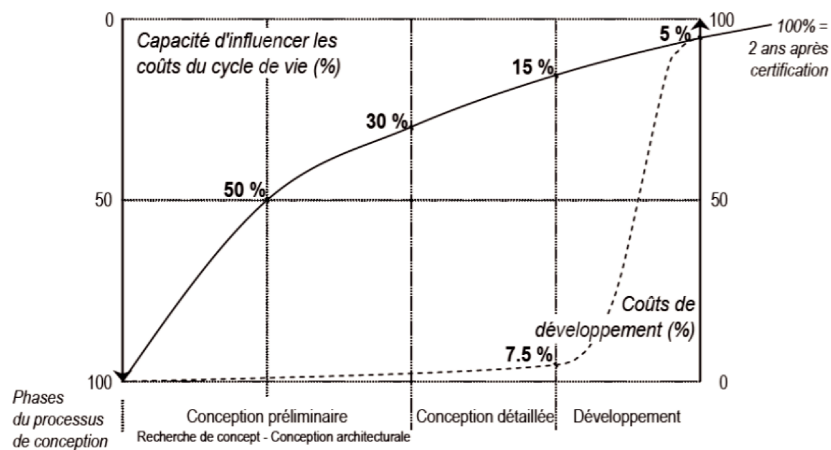


FIGURE 1.36 – Évolution des coûts engagés sur un projet et des coûts de développement [BB88].

1.3.1 le pré-dimensionnement des assemblages boulonnés dans la conception mécanique

De manière générale, le processus de conception se décompose en plusieurs niveaux, décrits de manière fonctionnelle dans le sens descendant, allant des caractéristiques les plus générales aux caractéristiques particulières des éléments constitutifs, et décrits par des solutions technologiques dans le sens ascendant, partant des solutions technologiques de base au système complet. Dans le cycle de conception, les phases sont hiérarchisées entre

les ensembles fonctionnels, les sous-systèmes, les organes et les pièces. La phase de pré-dimensionnement des assemblages boulonnés a pour objectif de spécifier les caractéristiques principales de l'assemblage afin de satisfaire le cahier des charges et ainsi répondre aux critères de conception. Si l'on applique le cycle en V (cf. Figure 1.37) à la conception des assemblages boulonnés, cette phase permet alors de passer de l'étape "Spécifications fonctionnelles", qui sont à priori connues à ce stade, à l'étape "Conception générale" puis "Spécifications détaillées", qui ont pour objectif de définir le système et ses composants qui répondront aux besoins. Cette phase correspond à la phase de conception préliminaire, qui détermine l'architecture globale de la solution, pour ensuite passer à la phase de définition détaillée, qui permet de définir complètement les pièces finales.

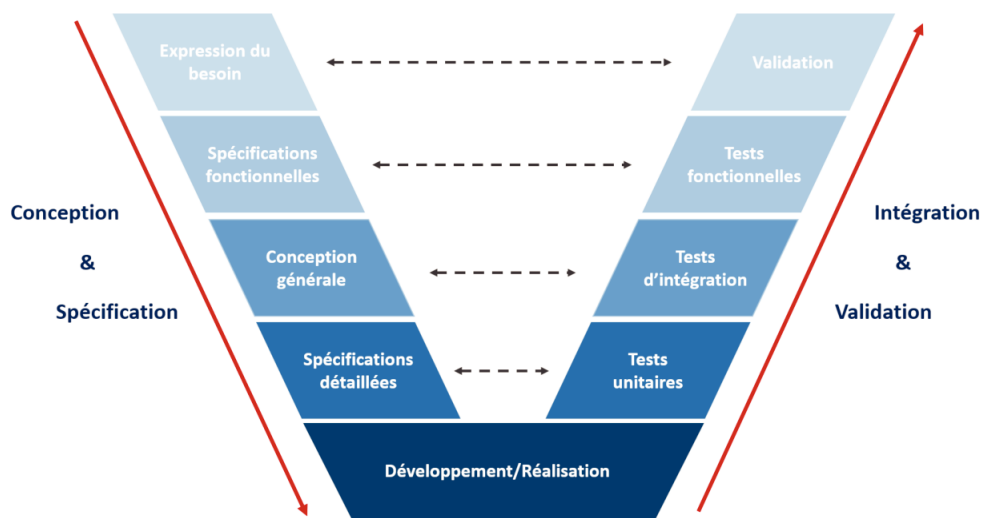


FIGURE 1.37 – Cycle en V de l'ingénierie système.

Pour pouvoir aborder efficacement cette phase de conception préliminaire des assemblages boulonnés, il faut être capable de déterminer rapidement et de manière sûre les principaux paramètres des assemblages boulonnés à concevoir, dans un contexte où les incertitudes et les indéterminations sont encore très nombreuses. C'est tout l'objectif de ces travaux. Le contexte incertain, avec des données d'entrée du problème encore sujettes à variations, implique la nécessité d'être capable de trouver une solution robuste qui sera toujours valable quelles que soient les possibles variations des différents paramètres. De même, pour pouvoir être capable de déterminer rapidement des caractéristiques principales des assemblages boulonnés en avant-projet, il faut pouvoir se baser sur des modèles de calcul juste suffisants, c'est-à-dire suffisamment précis pour être capables de départager différentes solutions, mais également suffisamment rapides pour répondre à la contrainte de temps limité au cours de ces phases où les décisions doivent être prises rapidement. C'est pour cette raison que ces travaux consisteront à développer un modèle simplifié de conception préliminaire des assemblages boulonnés de bride multi-matériaux respectant ces critères. La suite de l'état de l'art va donc se focaliser sur l'existant des modèles de calcul dédiés aux assemblages boulonnés afin de lister les bases nécessaires au développement du modèle.

1.3.2 Méthodes de pré-dimensionnement des assemblages boulonnés

Un assemblage boulonné est un assemblage structural permettant d'assembler deux ou plusieurs pièces grâce à un système vis-écrou (boulon), tout en assurant l'étanchéité et la transmission des efforts statiques et dynamiques dans l'assemblage (cf. Figure 1.38).

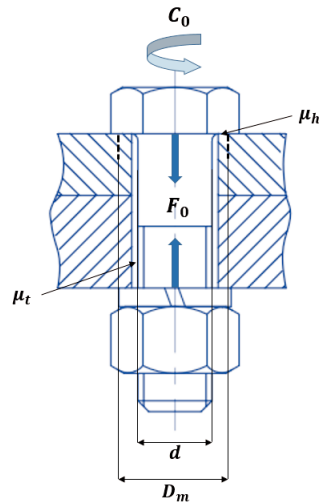


FIGURE 1.38 – Assemblage boulonné.

L'assemblage des pièces se réalise grâce à l'effort de traction appelé *précharge* et noté F_0 , généré par un couple de serrage C_0 appliqué à la tête de vis ou à l'écrou. La relation couple-effort la plus utilisée est celle de Kermman et Klein et elle est donnée par l'équation 1.26. L'effort de précharge dépend des paramètres géométriques et des coefficients de frottement des matériaux mis en jeu dans l'assemblage. Néanmoins, cette formulation a quelques limites : l'hypothèse d'une relation linéaire est de plus en plus remise en cause, de plus, elle ne tient pas compte de la présence d'un écrou autofrein.

$$F_0 = \frac{C_0}{0,159p + 0,583\mu_t d_2 + \mu_r r_m} \quad (1.26)$$

$$d_2 = d - 0.6495p \quad (1.27)$$

où :

p est le pas de la vis.

μ_t est le coefficient de frottement dans le filetage.

μ_h est le coefficient de frottement sous tête (ou sous écrou si le serrage est réalisé sur ce dernier).

d_2 est le diamètre sur flanc qui est calculé à partir du diamètre nominal de la vis et le pas avec l'équation 1.27.

r_m représente le rayon d'appui ($D_m/2$).

Avant toute considération de modélisation et/ou de calcul, un dimensionnement fiable des assemblages boulonnés repose tout d'abord sur la pertinence de la quantification de la donnée d'entrée qu'est la Précharge. Pour cela, il est nécessaire de bien identifier les coefficients de frottement et maîtriser le couple de serrage réel appliqué au boulon. En effet, une petite incertitude sur le couple de serrage engendre une variabilité importante sur l'effort de serrage si le coefficient de frottement n'est pas maîtrisé, comme le montre la Figure 1.39. En outre, les travaux de recherche concernant l'identification des coefficients de frottement composites/composites ou composites/métalliques restent peu nombreux par rapport aux cas métalliques/métalliques.

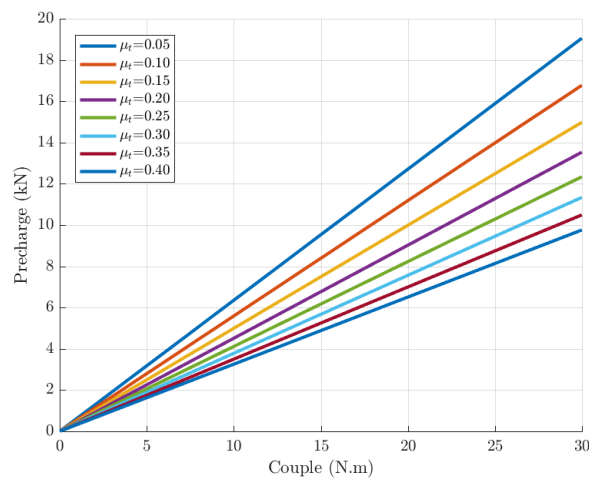


FIGURE 1.39 – Couple-Effort pour plusieurs coefficients de frottement

On en trouve quelques-uns dans la littérature : Tsukizoe et al. [TO86] étaient les premiers à s'intéresser à ce sujet et grâce à des essais expérimentaux, ils ont trouvé que le coefficient de frottement d'un composite unidirectionnel carbone-epoxy/acier dépend de la fraction volumique des fibres et varie de 0.1 à 0.3. D'autres travaux de Schöne [J04] montrent que le coefficient de frottement d'un composite epoxy renforcé avec des fibres de carbone/aluminium est de 0.23, cette valeur augmente après plusieurs cycles de chargement à cause de l'usure et atteint 0.68. Plus récemment, Beyer [Bey19] a identifié le coefficient de frottement acier/composite tissé 2D à matrice epoxy et renforcé par des fibres de carbone. Le coefficient de frottement au début du cyclage dépend de l'effort normal et varie entre 0.1 et 0.3, après 500 cycles, le coefficient de frottement est autour de 0.4 - 0.5.

Partant de l'hypothèse que la précharge est bien connue, le comportement de l'assemblage au serrage et suite à un chargement extérieur est assez complexe vu qu'il dépend de la configuration de l'assemblage, axial ou transversal, de ses paramètres géométriques ainsi que des propriétés matériaux des pièces assemblées. Dans le cadre de cette thèse, seuls les assemblages boulonnés soumis à un chargement axial sont traités. Le prédimensionnement de ces assemblages a fait l'objet de plusieurs travaux qui ont donné naissance à des méthodologies de calcul diverses et variées qu'on peut classer selon trois catégories : Méthodes analytiques, Méthodes semi-analytiques et Méthodes éléments finis avec intégration de macro-éléments.

1.3.2.1 Méthodes analytiques

Dans un contexte industriel, il est intéressant de pouvoir estimer rapidement la tenue des assemblages afin d'optimiser la phase de dimensionnement. Les méthodes de calcul analytique présentent l'avantage de prédire le comportement des assemblages en un temps de calcul très réduit. Toutefois, ils sont spécifiques à un type de sollicitation donné.

Cas d'un chargement axial centré

Considérons un assemblage boulonné précontraint avec une précharge F_0 soumis à un chargement axial F_{ext} dont la direction de l'effort est coaxiale à la vis, comme le montre la Figure 1.40. Le supplément d'effort axial qui transite dans le boulon ΔF_b suite à l'application du chargement extérieur est proportionnel à l'effort appliqué F_{ext} . De même, le supplément d'effort dans les pièces assemblées ΔF_p est proportionnel au chargement extérieur et est complément du supplément d'effort dans le boulon, afin de respecter l'équilibre statique de l'assemblage. ΔF_b et ΔF_p sont donnés par les équations 1.28 et 1.29.

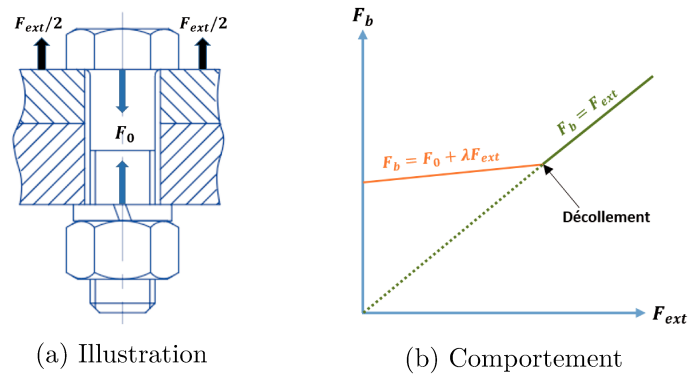


FIGURE 1.40 – Assemblage soumis à un chargement axial centré.

$$\Delta F_b = \lambda F_{ext} \quad (1.28)$$

$$\Delta F_p = (1 - \lambda) F_{ext} \quad (1.29)$$

λ est appelé coefficient de filtrage qui illustre physiquement la proportion de l'effort extérieur qui transite dans le boulon. Ce paramètre dépend des raideurs axiales du boulon K_b et des pièces assemblées K_p ainsi que d'un coefficient β appelé facteur d'introduction de la charge. Ce facteur présente le niveau d'introduction de la charge et est donné comme étant le rapport de la distance entre les plans d'introduction de l'effort extérieur x sur l'épaisseur serrée L_p des pièces assemblées (cf. Figure 1.41). Dans le cas des brides cylindriques, ce facteur vaut 1.

$$\lambda = \beta \frac{K_b}{K_b + K_p} \quad (1.30)$$

$$\beta = \frac{x}{l} \quad (1.31)$$

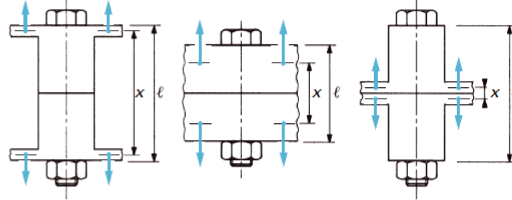


FIGURE 1.41 – Facteur d'introduction de la charge.

Finalement, l'effort F_b qui transite dans le boulon et F_p qui transite dans les pièces assemblées peuvent être calculés respectivement en fonction des raideurs, de la précharge et du facteur d'introduction de la charge comme détaillé dans les équations 1.32 et 1.33 .

$$F_b = F_0 + \frac{x}{L_p} \frac{K_b}{K_b + K_p} F_{ext} \quad (1.32)$$

$$F_p = F_0 - \left(1 - \frac{x}{L_p} \frac{K_b}{K_b + K_p} \right) F_{ext} \quad (1.33)$$

Une des principales difficultés des assemblages boulonnés est le calcul des raideurs axiales du boulon et des pièces assemblées dont dépendent les efforts F_b et F_p . En effet, ces valeurs ne sont pas données dans les standards et dépendent des paramètres géométriques et matériaux des éléments assemblés. Ainsi, plusieurs travaux existents dans la littérature se sont intéressés à l'identification de ces raideurs.

Raideur axiale du boulon

Le principe de modélisation et de calcul de la raideur axiale du boulon se fait principalement sur la base des recommandations VDI [VDI14]. Il s'agit d'un référentiel international utilisé par plusieurs bureaux d'études pour le dimensionnement des assemblages boulonnés chargés axialement. Le principe de modélisation est illustré par la Figure 1.42. Un boulon de diamètre nominal d est considéré comme étant l'empilement de deux cylindres : le premier représente la partie non filetée de diamètre d , de section A_0 et de longueur l_0 , le deuxième cylindre représente la partie filetée de diamètre d_s (diamètre résistant), de section A_s et de longueur l_s . La contribution de la raideur de la tête de vis et de l'écrou est intégrée en additionnant à la partie filetée et non filetée des longueurs proportionnelles au diamètre nominal de la vis d . Les coefficients de proportionnalité sont appelés α_t et α_e respectivement. Ainsi, la raideur équivalente du boulon n'est que la somme des raideurs des deux cylindres équivalents, elle est donnée par l'équation Eq.1.36.

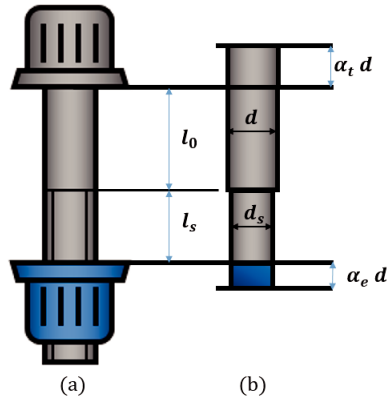


FIGURE 1.42 – Modélisation simplifiée d'un boulon pour le calcul de la raideur axiale.

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} \quad (1.34)$$

$$A_s = \frac{\pi d_s^2}{4} \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{K_b} = \frac{1}{E_b} \left(\frac{\alpha_t d + l_0}{A_0} + \frac{\alpha_e d + l_s}{A_s} \right) \quad (1.36)$$

où E_b est le module de Young du boulon.

Le calcul de la raideur axiale du boulon requiert ainsi l'identification des paramètres α_t et α_e . La documentation VDI a initialement recommandé la valeur 0.4 pour les deux coefficients et dans une version plus récente, la valeur de α_e a été mise à jour et est préconisée à 0.85. Cette dernière recommandation rejoint le résultat des travaux de Fukuoka et al. [FT03] qui, en se basant sur des modélisations et calculs éléments finis 3D, a suggéré une valeur de α_e égale à 0.85. Des travaux postérieurs menés par Massol [Mas94] ont permis d'établir le paramètre α_t en fonction du diamètre du trou D_t . La formule suggérée par ces travaux est donné dans l'équation 1.37. Dans des travaux plus récents, Guillot [GUI07] propose de nouvelles formulations des coefficients α_e et α_t en tenant compte des coefficients de frottement dans les filets et des rapports de raideurs des matériaux assemblés. Ceci a été appliqué pour des vis hexagonales et à tête fraisée.

$$\alpha_t = 0.5 \left[4.895 - 8.1 \frac{D_t}{d} + 4 \left(\frac{D_t}{d} \right)^2 \right] \quad (1.37)$$

Raideur axiale des pièces assemblées

L'expression générale de la raideur axiale est donnée par la relation 1.38 où A_p est la section équivalente de la pièce, L_p sa longueur équivalente et E_p son module de Young. L'effort de serrage résulte en la traction du boulon et en la compression des pièces assemblées. La forme géométrique de la zone comprimée est assimilée à un tronçon de cône, comme

illustré par la Figure 1.43, appelé cône de compression. L'identification de la raideur axiale des pièces assemblées revient ainsi à calculer la raideur axiale de cette zone. Toutefois, la difficulté réside dans la détermination de la section équivalente du cône de compression. Ainsi, de nombreux travaux se sont intéressés à la détermination de ce paramètre.

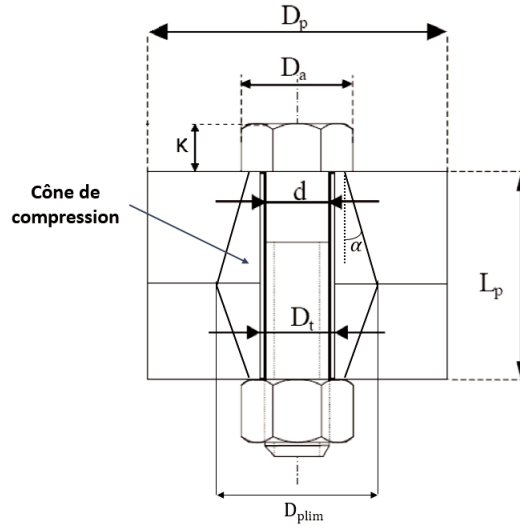


FIGURE 1.43 – Cône de compression dans un assemblage préchargé.

$$K_p = \frac{E_p A_p}{L_p} \quad (1.38)$$

Une des premières études effectuées sur cette thématique est celle de Rasmussen [Ras78]. Avec des paramètres adimensionnés 1.39 établis via les paramètres géométriques de l'assemblage (cf. Figure 1.43) ainsi que des calculs éléments finis assez grossiers, une formulation de la section équivalente A_p du cône de compression dans le cas d'un assemblage boulonné de pièces cylindriques a été établie. Elle est donnée par la relation 1.40. Cette formulation n'est valable que si $L_p/d < 5$.

$$A_p^* = \frac{A_p}{D_a^2} \quad D_p^* = \frac{D_p}{D_a} \quad D_t^* = \frac{D_t}{D_a} \quad L_p^* = \frac{L_p}{D_a} \quad d^* = \frac{d}{D_a} \quad (1.39)$$

$$A_p^* = \frac{\pi}{4} (1 - D_t^{*2}) + 0.5 (D_p^{*2} - 1) + \arctan \left(\frac{0.35 \sqrt{L_p^*} + \sqrt{1 + 2L_p^{*2} - 1}}{2(D_p^{*2} - D_t^{*2})} \right) \quad (1.40)$$

Plus tard, Alkatan [Alk07] a amélioré la formulation de Rasmussen pour l'étendre aux pièces prismatiques en les ramenant à une pièce cylindrique équivalente de diamètre D_{peq} . Avec une approche énergétique, la recommandation VDI [VDI14] a proposé une méthodologie de calcul de la raideur axiale des pièces cylindriques en se basant sur le calcul de l'angle du cône α . En effet, ce paramètre a été déjà introduit par Rotscher [Rot27] et lui a préconisé une valeur de 45° . Suite à des calculs éléments finis, VDI a proposé une formule pour le calcul de l'angle du

cône comme décrit par l'équation 1.41.

$$\tan(\varphi) = 0.362 + 0.032 \ln\left(\frac{L_p^*}{2}\right) + 0.153 \ln(D_p^*) \quad (1.41)$$

Ensuite, la VDI distingue deux cas : le cas où le diamètre de base D_{plim} du cône de compression dépasse le diamètre des pièces assemblées D_p et le cas où le cône de compression reste à l'intérieur des pièces assemblées.

— **Cas 1** : $D_{plim} \leq D_p$:

La zone de compression est constituée de deux cônes équivalents et la raideur équivalente est donnée par la relation (1.42) :

$$\frac{1}{Kp} = \frac{2 \ln\left[\frac{(D_a+D_t)(D_a+L_p \tan(\varphi)-D_t)}{(D_a-D_t)(D_a+L_p \tan(\varphi)+D_t)}\right]}{E_p \pi D_t \tan(\varphi)} \quad (1.42)$$

— **Cas 2** : $D_a \leq D_p < D_{plim}$:

La zone de compression est constituée de deux cônes et d'un cylindre et la raideur équivalente est donnée par la relation (1.43) :

$$\frac{1}{Kp} = \frac{2 \ln\left[\frac{(D_a+D_t)(D_p-D_t)}{(D_a-D_t)(D_p+D_t)}\right]}{E_p \pi} + \frac{\frac{4}{D_a^2-D_t^2} \left[L_p - \frac{(D_p-D_a)}{\tan(\varphi)}\right]}{E_p \pi D_t \tan(\varphi)} \quad (1.43)$$

Toutefois, la formule VDI calcule la raideur du cône en supposant que les pièces assemblées sont du même matériau et un seul module de Young est utilisé. Nassar et Abboud [NA09] ont développé une formulation de la raideur équivalente des pièces assemblées en supposant une distribution polynomiale de la contrainte dans le cône de compression en offrant la possibilité d'avoir un assemblage de matériaux différents. Le principe de modélisation est illustré par la Figure 1.44.

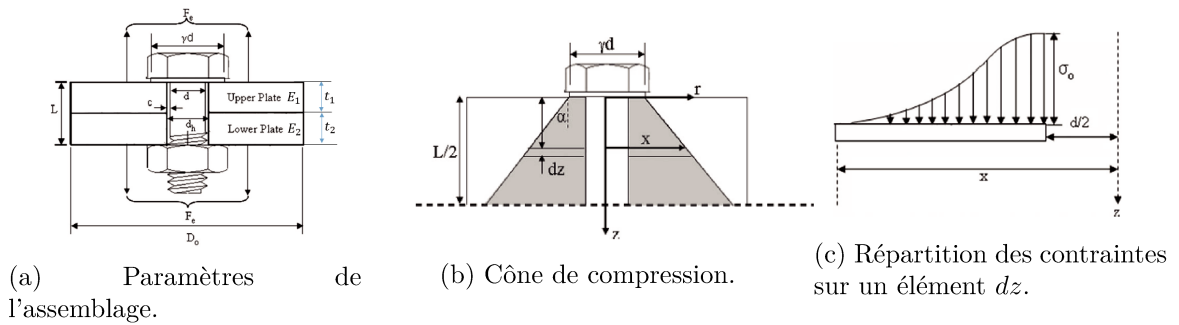


FIGURE 1.44 – Principe de modélisation de Nassar et Abboud [NA09].

De manière similaire à la VDI, Nassar et Abboud [NA09] distinguent les deux cas du développement du cône de compression. Finalement, le calcul de la raideur se fait selon les équations 1.44 et 1.45.

— **Cas 1** : $D_0 \geq L \tan \alpha + \gamma d$

$$K_p = \frac{E_1 E_2 d \pi \tan \alpha}{(E_1 + E_2) \ln \left(\frac{\gamma+3}{\gamma+1} \right) + E_1 \ln \left(\frac{\gamma d + 2t_2 \tan \alpha - d}{\gamma d + 2t_2 \tan \alpha + 3d} \right) + E_2 \ln \left(\frac{\gamma d + 2t_1 \tan \alpha - d}{\gamma d + 2t_1 \tan \alpha + 3d} \right)} \quad (1.44)$$

— **Cas 2** : $\gamma d \leq D_0 < L \tan \alpha + \gamma d$

$$K_p = \frac{E_1 E_2 d \pi \tan \alpha}{\frac{E_1 + E_2}{d} \ln \left[\left(\frac{\gamma+3}{2D_0+3d} \right) \left(\frac{D_0-d}{\gamma-1} \right) \right] + \frac{4E_1(2t_2 \tan \alpha - D_0 + \gamma d) + 4E_2(2t_1 \tan \alpha - D_0 + \gamma d)}{(D_0+3d)(D_0-d)}} \quad (1.45)$$

Dans cette application, Nassar et Abboud [NA09] ont identifié la valeur de $\alpha = 36^\circ$ grâce à des recalages calculs-essais. Le paramètre γ représente le coefficient de proportionnalité entre le diamètre d'appui et le diamètre nominal de la vis.

Raideur axiale de l'assemblage

Le calcul analytique de la raideur de l'assemblage se base sur la modélisation de tous les éléments de l'assemblage avec des raideurs, disposées selon la configuration et le chargement. Tate et Rosenfeld [TR46] sont les premiers à avoir proposé cette technique. Ils ont développé un "spring based model" qui a été validé expérimentalement par Rosenfeld et al. [Ros47]. Notons que cette modélisation a été développée pour les assemblages en cisaillement et pour les matériaux isotropes, Nelson et al. [NBHS83] l'ont étendu pour les matériaux anisotropes et pour la même configuration de chargement. Depuis, ce modèle a fait la base de plusieurs modélisations (exemples dans la Figure 1.45) traitées dans [MMP06; MG11; OSB14].

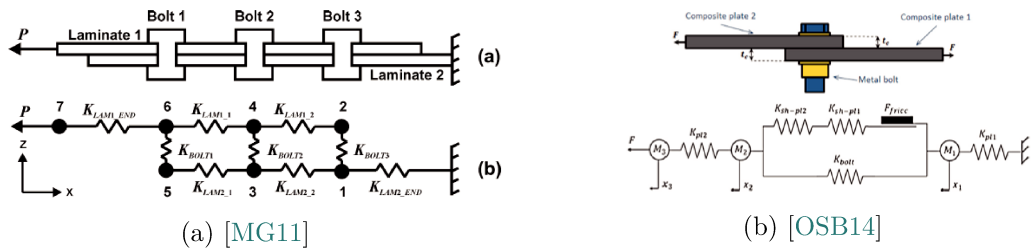


FIGURE 1.45 – Schéma de modélisation de la raideur de l'assemblage basée sur "spring based model".

La modélisation proposée dans les travaux cités précédemment concerne les assemblages en cisaillement. Pour les assemblages boulonnés chargés axialement (effort appliqué aux pièces assemblées), il est commun de les assimiler analytiquement à une superposition en série des raideurs axiales des pièces assemblées K_{p1} et K_{p2} , en parallèle avec la raideur axiale du boulon K_b . La Figure 1.46a illustre ce principe de modélisation. Ainsi, la raideur axiale de l'assemblage peut être calculée par la relation Eq.1.46.

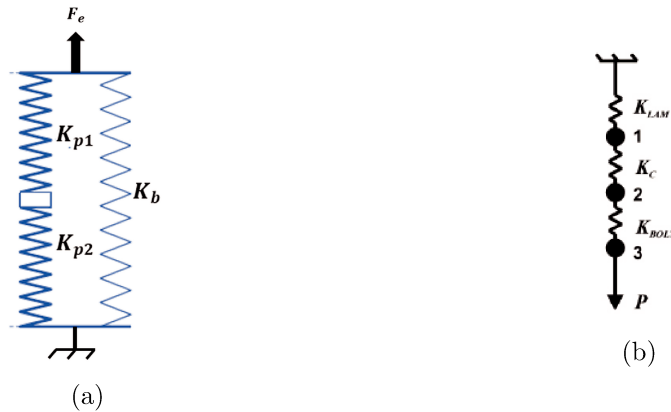


FIGURE 1.46 – Raideur équivalente d'un assemblage boulonné chargé axialement dans le cas où l'effort est appliqué aux pièces assemblées (a) et dans le cas où l'effort est appliqué au boulon (b).

$$K_{ass} = K_b + \left(\frac{1}{K_{p1}} + \frac{1}{K_{p2}} \right) \quad (1.46)$$

Dans le cas où l'effort est appliqué au boulon, Gray et McCarthy [GM12] ont proposé la modélisation illustrée par la Figure 1.46b, où K_c est la raideur équivalente des pièces assemblées (dans la zone de compression) et K_{LAM} est la raideur de la zone en dehors du cône de compression. Cette modélisation a été proposée pour un besoin spécifique qui est l'identification d'un des paramètres d'un élément connecteur. En effet, le cas où l'effort extérieur est appliqué directement sur le boulon est très rare dans l'industrie.

Cas d'un chargement axial excentré

Comme pour les assemblages centrés, la recommandation VDI a proposé des formulations de calcul qui tiennent compte de l'excentricité du boulon par rapport au chargement et à la section équivalente des pièces, qu'on notera m et n respectivement. Les caractéristiques géométriques de l'assemblage sont illustrées sur la Figure 1.47.

La principale hypothèse est de considérer les pièces assemblées comme un solide prismatique soumis à un chargement de traction et/ou de flexion. Le comportement de l'ensemble est assimilé à celui d'une poutre, en respectant les limites définies par les équations 1.47 et 1.48 en correspondance avec la Figure 1.47 :

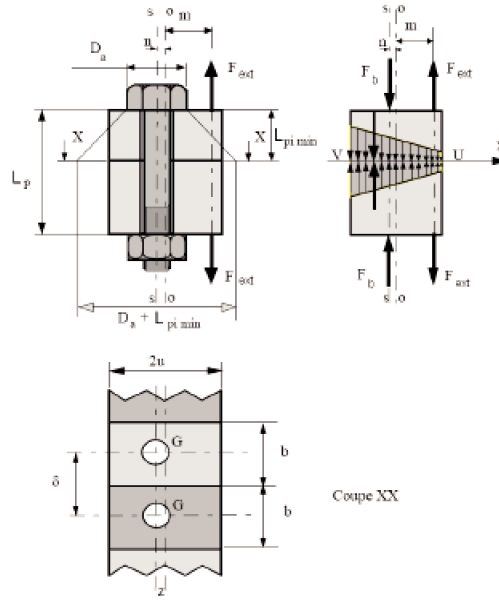


FIGURE 1.47 – Modèle de calcul VDI dans le cas d'un chargement excentré.

$$2u \leq D_a + L_{pimin} \quad (1.47)$$

$$m \leq n \leq \frac{D_a + L_{pimin}}{2} \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} b = \delta & \text{si } \delta \leq D_a + L_{pimin} \\ b = D_a + L_{pimin} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas général, l'expression de la souplesse équivalente (inverse de la raideur) des pièces assemblées est donnée en fonction de la section équivalente A_p et le moment quadratique de la section des pièces I_p par la relation (1.49) :

$$\delta_p^* = \delta_p \left(1 + \frac{mnA_p}{I_p} \right) \quad (1.49)$$

Avec δ_p la souplesse de l'assemblage dans le cas classique où le chargement est axial.

Malgré la pertinence des résultats que fournissent les formulations VDI, cette recommandation a quelques inconvénients à signaler. En effet, le résultat s'appuie sur l'hypothèse d'une répartition uniforme des contraintes sur la surface élémentaire. La forme de la répartition est, elle aussi, supposée connue avec une proportionnalité entre le diamètre extérieur de la zone et l'épaisseur de la pièce. Cette hypothèse ne reste plus vérifiée dès que les épaisseurs des pièces sont relativement faibles et que les jeux radiaux (entre les pièces et le boulon) deviennent importants. Le calcul dépend de l'angle φ de la zone tronconique. La détermination de cet

angle reste délicate car elle est basée sur une allure de répartition uniforme des contraintes axiales, ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité. Le modèle VDI est surtout efficace pour des assemblages de grande épaisseur car le comportement global de l'assemblage est considéré comme un comportement de poutre d'axe neutre parallèle à l'axe du boulon. Cependant, pour de nombreux assemblages, l'épaisseur des pièces reste faible par rapport à leur longueur ou par rapport à l'excentration de l'effort extérieur. Le modèle VDI est alors inapproprié et de nombreuses études ont conduit à développer un nouveau modèle, dont l'effort de sollicitation est fortement excentré par rapport à l'implantation de la fixation. Ce type de modèle est couramment appelé modèle poutre fléchi.

Ce modèle a notamment été développé par Guillot [Gui89] sur la base d'une amélioration de la schématisation proposée initialement par Agatonovic [Aga85]. Des améliorations ont également été proposées par la suite dans des travaux de thèse de Bakhiet [Bak94] pour s'affranchir de nombreuses limitations. Bakhiet propose notamment une modélisation similaire à celle d'Agatonovic mais en prenant en compte la longueur de la zone d'appui.

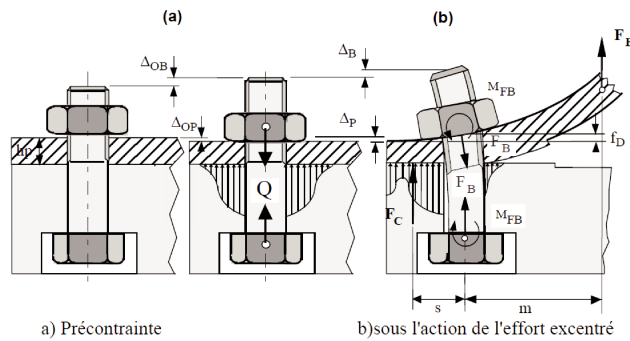


FIGURE 1.48 – Illustration du comportement modélisé par le modèle poutre fléchi [Bak94].

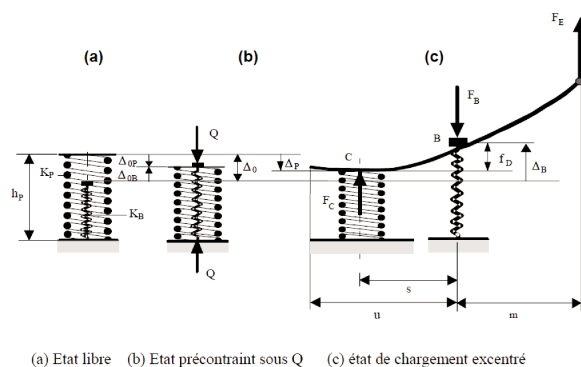


FIGURE 1.49 – Principe de modélisation du modèle Poutre fléchi [Bak94].

La technique proposée consiste à calculer la valeur de l'excentration s de la résultante des forces de contact F_c en utilisant le modèle de poutre défini à la Figure 1.48. Le comportement de l'assemblage est modélisé à partir d'une poutre en flexion (rigidité en flexion) et des

ressorts de raideurs K_b pour le boulon (ou goujon) et K_p pour la pièce représentée sur la Figure 1.49. Les hypothèses principales consistent à admettre que l'influence du trou de passage du boulon sur la rigidité en flexion des pièces est négligeable et que la rigidité en flexion ainsi que la raideur en compression des pièces assemblées restent constantes. Les données de chargement du modèle sont sous la forme d'un effort et d'une valeur d'excentration. Pour déterminer les efforts qui transitent dans le boulon et les déplacements de la tête du boulon, il faut résoudre ce modèle analytique qui se base sur une équation non linéaire du paramètre s d'excentration de l'effort de réaction. Ce paramètre d'excentration de l'effort de réaction du support est régi par l'équation (1.50), obtenue par l'équilibre des efforts, l'équilibre des moments et la compatibilité des déplacements.

$$\frac{ms^3}{6E_p I_p A_p} + \left(\frac{Q}{F_E} - \frac{\delta_b}{\delta_b + \delta_p} \right) s - m = 0 \quad (1.50)$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir le paramètre d'excentration de l'effort de réaction. On en déduit l'effort axial dans le boulon (Eq.1.51) et le moment de flexion (Eq.1.52) qui transitent dans le boulon.

$$F_b = \left(1 + \frac{m}{s} \right) F_E \quad (1.51)$$

$$M_b = \frac{ms}{2h_p} \frac{E_b I_b}{E_p I_p} F_E \quad (1.52)$$

I_b et I_p correspondent au moment quadratique équivalent du boulon et de la pièce respectivement, E_b et E_p les modules de Young du boulon et de la pièce. Le système d'équations (1.50), (1.51) et (1.52) permet de déterminer complètement les contraintes dans le corps du boulon. L'avantage du modèle poutre fléchie est qu'il prend en compte la valeur de la précontrainte Q , ce qui n'est pas le cas du modèle VDI. Le modèle poutre fléchie d'Agatonovic trouve ses limites dans le cas de fortes excentrations. En effet, la répartition des raideurs locales de la pièce est sensiblement modifiée en fonction de la valeur du paramètre s et pour une valeur de $s_{critique}$, la rotation θ_c autour du point théorique d'appui C ne peut être négligée. Bakhiet [Bak94] a proposé un modèle prenant en compte le comportement de l'assemblage au delà de $s_{critique}$. Ce modèle calcule la raideur de contact en fonction de la dimension de la zone d'appui théorique et donne de bons résultats dans toutes les configurations, y compris pour les faibles excentrations.

Parmi les configurations représentant ce type de sollicitation (chargement excentré) on trouve les brides cylindriques, issus généralement de carters. Afin de considérer cette configuration d'assemblage, le modèle poutre fléchie a été adapté par Bakhiet [BG94] et ensuite par Guillot [GUI07] en y intégrant des coefficients q_1 et q_2 dépendants de la configuration de l'assemblage. La résolution du problème linéaire consiste donc à résoudre l'équation de la forme :

$$C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s + C_4 = 0 \quad (1.53)$$

où C_i sont exprimés en fonction des paramètres de l'assemblage et C_2 et C_3 intègrent q_1 et q_2 . Dans le cas d'une bride cylindrique dont la configuration est similaire à celle envisagée dans le cadre de cette thèse, Guillot propose de prendre $q_2 = 0$ et $q_1 = \infty$. Haddar et al. [Had19] ont adapté ces coefficients pour le cas des assemblages des brides des jantes dans les

roues des trains d'atterrissage.

Parmi les applications des liaisons boulonnées où les chargements sont excentrés, on trouve les assemblages des brides circulaires. Ces structures sont soumises généralement à des efforts de traction et des moments de flexion. Couchaux et al [Cou19] proposent un modèle analytique de calcul de ces assemblages, dans le cas des matériaux métalliques. Ces travaux proposent une formulation analytique correspondante au cas où l'effort axial est prédominant, et une autre formulation dans le cas où le moment de flexion est prédominant. L'intérêt de ces travaux consiste aussi en la prise en compte du comportement plastique des matériaux des brides assemblées.

Les méthodes analytiques détaillées précédemment offrent l'avantage d'estimer rapidement les raideurs dans un assemblage boulonné soumis à un chargement axial, centré ou excentré. Néanmoins, elles sont conçues pour des types de sollicitations données. En outre, elles n'offrent pas la possibilité d'accéder directement au comportement local au voisinage d'une zone précise dans la structure étudiée. De ce fait, des méthodes semi-analytiques mieux adaptées aux différentes configurations ont été développées dans le cadre de plusieurs travaux.

1.3.2.2 Méthodes semi-analytiques

Le Laboratoire Génie Mécanique de Toulouse (LGMT), devenu en 2009 l'Institut Clément Ader, a beaucoup investi dans le développement de modèles semi-analytiques. Ce type de modèle consiste à discrétiser chaque pièce de l'assemblage en plusieurs éléments finis structuraux, dont quelques paramètres peuvent être calculés analytiquement, d'où l'appellation "semi-analytique". Le choix du type d'élément dépend de la géométrie de la pièce modélisée ainsi que de son comportement dans l'assemblage. Un des premiers modèles développés avec cette logique est le modèle "Pearl". Ce modèle a été développé pour le pré-dimensionnement des couronnes de guidage, son principe de modélisation est schématisé dans la Figure 1.50. Ce modèle est le résultat de travaux successifs de Vadean [Vad00] et de Leray [LVD08]. Le modèle représente un élément de liaison à un seul boulon composant une couronne d'orientation. Il permet de décrire le comportement d'un secteur qui pourra ensuite être généralisé par axisymétrie pour représenter une couronne complète. Plus tard, Chaib [Cha08a] et Ghosn [Gho09] ont amélioré ce modèle en proposant un calcul de la répartition des efforts sur les liaisons pour ensuite les intégrer comme données d'entrée dans le modèle de liaison pour le secteur le plus sollicité.

Dans la même logique de modélisation, Chakhari et al. [Cha08b] ont développé un modèle semi-analytique d'assemblage de plaques à 2 boulons, le principe de modélisation est schématisé dans la Figure 1.51. Cette configuration est plus générale que celle détaillée précédemment, ce qui facilite son utilisation dans plusieurs applications de prédimensionnement, notamment pour des assemblages de deux pièces prismatiques fixées par deux vis ou deux boulons identiques. La validité du modèle a été vérifiée par confrontation avec des résultats expérimentaux et des résultats issus de modélisations numériques.

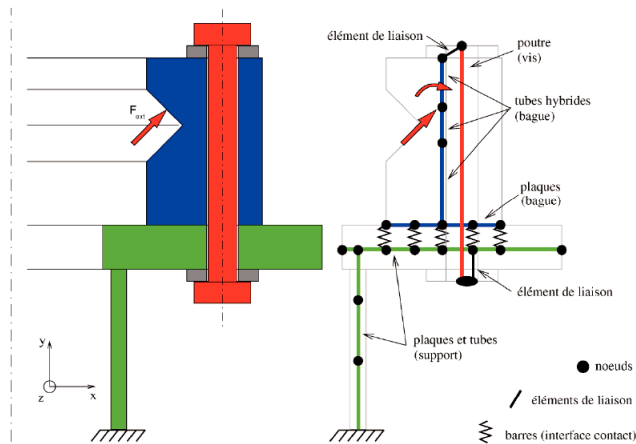


FIGURE 1.50 – Schéma de principe du modèle semi-analytique d'un assemblage boulonné des couronnes de guidage [LVD08].

En se basant sur cette modélisation, Haddar et al. [Had20] ont mis en place un modèle de pré-dimensionnement appliqué aux roues dans les trains d'atterrissage.

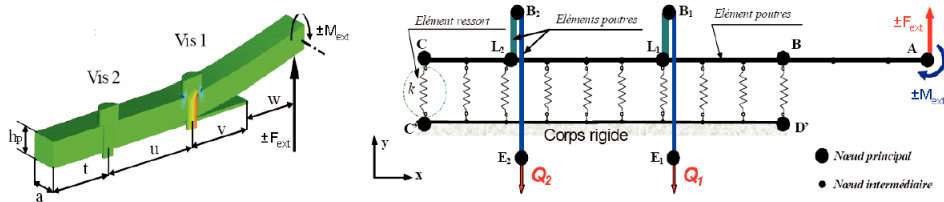


FIGURE 1.51 – Schéma de principe du modèle semi-analytique d'un assemblage boulonné de plaques prismatiques [Cha08b].

1.3.2.3 Méthodes numériques simplifiées par intégration de macro-éléments

Les calculs numériques par la méthode des éléments finis restent généralement plus précis que les méthodes analytiques et semi-analytiques, à condition qu'ils soient bien mis en œuvre. Cependant, le temps de calcul et surtout de mise en œuvre est assez important et ceci n'est pas adapté à une démarche de conception préliminaire. Ainsi, plusieurs travaux se sont intéressés au développement d'éléments utilisateur modélisant le comportement du boulon et le transfert de charge dans un assemblage boulonné, tout en s'épargnant le temps de calcul dû au maillage physique de la vis et à la gestion de contact boulon/pièces assemblées. Ces éléments sont appelés couramment **connecteurs** (cf. Figure 1.52).

Dans la littérature, les travaux de développement de ce type de modèle ont été faits principalement pour les assemblages à simple ou double recouvrement travaillant en

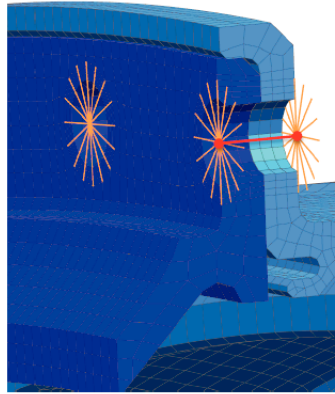


FIGURE 1.52 – Modélisation du boulon avec un connecteur 1D dans un maillage 3D [Laf17]

cisaillement. Gray et McCarthy [GM11] ont développé un élément utilisateur qui permet de reproduire le comportement de ce type d'assemblage, décrit par la Figure 1.53a et intégrant des composites stratifiés.

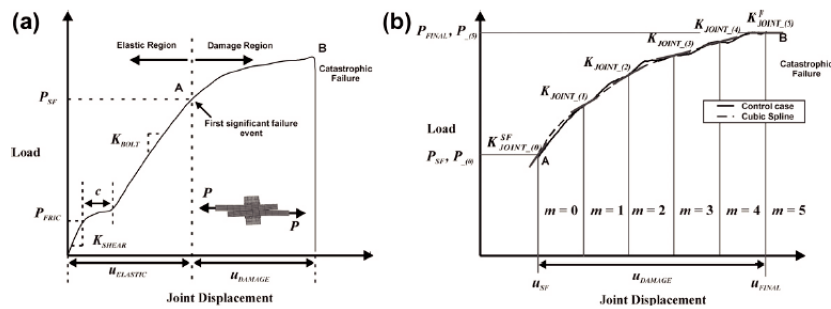


FIGURE 1.53 – Principe d'identification de la raideur en région élastique et endommageable d'un assemblage simple ou double recouvrement en cisaillement [GM11].

Dans le domaine élastique, les raideurs sont calculées analytiquement grâce aux travaux de McCarthy et Gray [MG11]. L'identification de la raideur en région endommageable s'effectue au fur et à mesure du calcul. En effet, le principe de modélisation consiste à discrétiser la courbe effort-déplacement dans cette région, déjà connue, en m parties (cf. Figure 1.53b). La raideur est réactualisée en récupérant les déplacements aux nœuds de l'élément utilisateur calculé par Abaqus/Implicit. Les résultats de cette modélisation ont été validés expérimentalement sur un assemblage monofixation et multifixations, avec perte d'un des boulons. Toutefois, l'élément utilisateur n'est pas générique dans le sens où il dépend de la séquence d'empilement des stratifiés utilisés.

Dans la même configuration d'assemblage, mais dans le cas métallique, Omran [Omr19] a développé un connecteur pour un assemblage à double recouvrement. Les paramètres du connecteur sont les raideurs axiales, radiales et tangentielles et ont été identifiés expérimentalement en se basant sur une approche analytique de modélisation de poutres en flexion. L'inconvénient de ce modèle est la stratégie d'identification des paramètres qui

requiert la réalisation d'essais expérimentaux pour chaque cas étudié, ce qui peut s'avérer très coûteux.

Askri et al. [Ask16] ont développé un modèle réduit du boulon en utilisant les surfaces connectées rigides MCRS (Multi Connected Rigid Surfaces). L'analyse des modes de déformation du boulon dans un assemblage simple recouvrement a permis aux auteurs de modéliser le boulon avec 4 surfaces rigides couplées à 4 nœuds avec deux raideurs de rotation et deux de translation. La raideur équivalente des éléments est obtenue grâce à des calculs EF 3D. Ce modèle est linéaire et impose une rigidification de la surface sous la tête de vis et de l'écrou.

Dans le cadre du projet CARAB (Conception Avancée et Robuste des Assemblages Boulonnés), Soulé de Lafont [Laf17] a proposé un modèle de connecteur non linéaire en tenant compte des sauts de glissement à travers l'identification de cinq principaux paramètres dépendant du cas test : raideur axiale, raideur tangentielle, précharge, coefficient de frottement et le paramètre d'écrouissage. Cette identification s'établit grâce à des formulaires analytiques (typiquement pour la raideur axiale) et/ou à des modèles EF élémentaires paramétrés. Sur un cas industriel, cette modélisation a permis de gagner en moyenne 4 fois plus en temps de calcul (cf. Figure 1.54) avec une erreur maximale de 7% et le connecteur peut être utilisé pour plusieurs cas de charge : traction, flexion et cisaillement. Récemment, Verwaerde et al. [VGB20] ont amélioré ce modèle en mettant en place les différentes stratégies d'identification des paramètres.

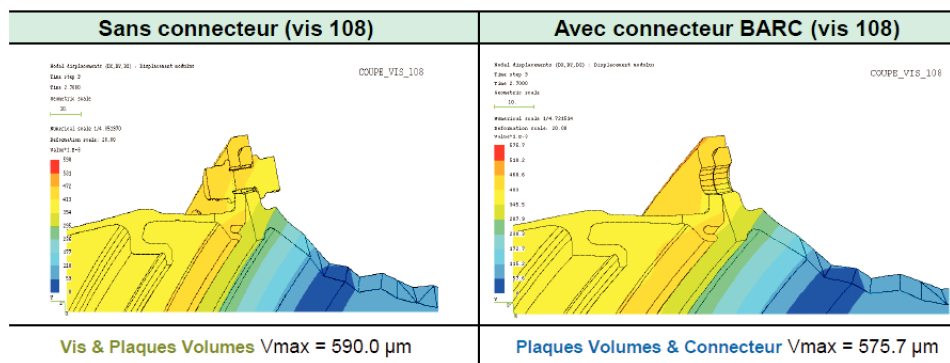


FIGURE 1.54 – Comparaison des résultats de calcul 3D tout volumique (à gauche) au calcul 3D avec connecteur (à droite) [Laf17].

1.4 Synthèse de l'état de l'art

Le travail à effectuer au cours de cette thèse consiste à développer une méthode/un modèle de calcul simplifié d'assemblages boulonnés de matériaux composites tissés 3D CMO et métalliques dans une logique de conception préliminaire. L'application visée concerne la prédiction du comportement de l'assemblage de la ligne du carter fan des moteurs de nouvelle génération. Au travers de la bibliographie, le comportement des matériaux composites tissés 3D sous différents chargements a été étudié. Ce comportement est caractérisé par trois phases, une phase linéaire qui dépend principalement des raideurs élastiques dans les directions d'anisotropie, une deuxième phase d'endommagement qui est caractérisée par la chute de la raideur : le comportement dans cette phase est fortement dépendant de la structure du tissage, et finalement, une troisième phase de rupture. La modélisation des structures composites doit tenir compte de ce comportement en trois phases. Le comportement linéaire est modélisé à travers la prise en compte des propriétés matériaux en supposant un comportement orthotrope, la deuxième phase est représentée par des modèles d'endommagement, permettant de traduire les endommagements ayant lieu à l'échelle microscopique en un comportement endommageable à l'échelle macroscopique, caractérisé par une perte de la raideur. Quant à la rupture, elle est atteinte lorsqu'un critère de rupture est satisfait.

L'étude bibliographique a permis aussi de conclure que dans un assemblage boulonné, le comportement des composites et des différentes pièces assemblées dépend non seulement des paramètres matériaux, mais aussi des paramètres géométriques de l'assemblage ainsi que des niveaux de serrage. La rupture par matage est le mode de rupture souvent recherché dans les applications industrielles des assemblages boulonnés de structures composites, il convient donc de s'assurer d'avoir des ratios géométriques caractéristiques de l'assemblage assez importants. Dans une approche de prédimensionnement, il est impératif de disposer de méthodes simplifiées pour le calcul des assemblages. Les bases de dimensionnement des assemblages boulonnés ont été détaillées et l'ensemble des travaux qui se sont intéressés à leur conception préliminaire ont été étudiés et analysés. Toutefois, très peu d'études se sont intéressées au calcul des assemblages des brides circulaires, encore moins quand il s'agit d'assemblages multimatériaux. Ce type d'assemblage génère des sollicitations de chargement excentré, rapportées à la zone d'implantation de la fixation. Ce cas de sollicitation nécessite d'avoir une bonne connaissance du comportement en raideur hors-plan. Les travaux qui vont suivre vont aborder tous ces axes de recherche pour alimenter le modèle à développer. Celui-ci s'inscrit dans le cadre des modèles semi-analytiques qui semblent être une voie très intéressante puisqu'elle permet de modéliser explicitement l'ensemble des pièces assemblées avec plusieurs configurations et en considérant des matériaux différents. Ainsi, le comportement de l'assemblage peut être analysé à n'importe quel point de la structure, en un temps de calcul très réduit.

Dans le chapitre suivant, un modèle semi-analytique de l'assemblage boulonné de brides composites/métalliques est développé.

Modèle semi-analytique d'assemblage boulonné de brides Composite/Composite ou Composite/Métal

Un code de calcul des assemblages boulonnés de brides multi-matériaux a été développé en s'appuyant sur une modélisation simplifiée basée sur la méthode des éléments finis. Le développement du modèle requiert l'identification préalable de la matrice de raideur des éléments coques axisymétriques, sous l'hypothèse d'orthotropie. Le problème est décrit comme une résolution linéaire, reliant les efforts et déplacements grâce à la matrice de raideur globale de l'assemblage, calculée sous l'hypothèse d'un comportement élastique non endommageable. Les résultats de calcul fournis par le modèle semi-analytique sont évalués par rapport à un calcul EF 3D de référence sur un cas d'étude académique.

Sommaire

2.1 Introduction	63
2.2 Présentation du modèle	64
2.2.1 Choix des éléments	64
2.2.1.1 Élément coque axisymétrique (acg et $a'c'g'$)	64
2.2.1.2 Élément poutre (xy)	64
2.2.1.3 Élément barre (ressorts)	64
2.2.1.4 Élément coque hybride (bd et bd')	66
2.2.1.5 Élément poutre connecteur (zd')	66
2.2.2 Couplages cinématiques	67
2.3 Méthode des éléments finis appliquée aux coques axisymétriques orthotropes	68
2.3.1 Modélisation	69
2.3.2 Écriture des déplacements	69
2.3.3 Expression des déformations	71
2.3.4 Loi de comportement	72
2.3.5 Matrice de raideur	73
2.4 Construction du modèle	74
2.4.1 Lecture des données	74

2.4.2	Maillage	74
2.4.3	Calcul des souplesses	74
2.4.4	Matrice de raideur globale	77
2.4.4.1	Matrices de raideurs élémentaires	77
2.4.4.2	Assemblage	79
2.4.4.3	Intégration des couplages cinématiques	80
2.4.5	Conditions aux limites	82
2.4.6	Application de la précharge	83
2.4.7	Application d'un chargement extérieur	84
2.4.8	Lecture des résultats	84
2.4.8.1	Comportement de la vis	85
2.4.8.2	Comportement des brides	86
2.4.9	Synthèse	87
2.5	Validation fonctionnelle du modèle	89
2.5.1	Élément coque orthotrope axisymétrique	89
2.5.2	Validation sur cas académique d'assemblage boulonné multimatériaux	92
2.5.2.1	Présentation du cas d'étude	93
2.5.2.2	Modèle paramétré éléments finis 3D	93
2.5.2.3	Modèle semi-analytique équivalent	94
2.5.2.4	Discussion	95
2.6	Synthèse	100

2.1 Introduction

Lors de la conception des liaisons boulonnées du carter fan, les concepteurs ont souvent recours à une modélisation éléments finis 3D, en considérant une géométrie cylindrique simplifiée. Ces modèles sont généralement chronophages à cause du nombre important des degrés de liberté du problème numérique, plus particulièrement autour de la liaison, où le maillage doit être plus raffiné.

L'idée est d'adopter une approche multi-échelle en disposant d'un modèle local axisymétrique qui représente un seul secteur de fixation, vu la symétrie de la structure. Cela devrait permettre un gain considérable en temps de calcul. Cependant, si la symétrie géométrique est bien présente au vue de la forme cylindrique des carters, la symétrie du chargement, elle, n'est pas valable. En effet, ces liaisons doivent être dimensionnées pour des cas de charges extrêmes, notamment pour la perte d'aube. Les efforts engendrés suite à ce type de chargement sont très hétérogènes par rapport aux secteurs de l'assemblage. Ainsi, l'hypothèse de l'axisymétrie n'est pas justifiée. Afin de pallier à ce problème, nous allons considérer que, lors des cas de charges extrêmes, le chargement maximal vu par un nombre limité de secteurs de fixation, correspond au chargement vu par l'ensemble des secteurs de la structure. Le principe de la démarche est illustré par la Figure 2.1. Ce choix est justifié par l'approche de pré-dimensionnement dans laquelle s'inscrit le développement du modèle où un léger conservatisme est toléré.

Le modèle semi-analytique développé dans le cadre de ces travaux est un métamodèle basé sur la méthode des éléments finis. Sous l'hypothèse de l'axisymétrie, un seul secteur des brides circulaires assemblées est représenté. Comme discuté auparavant, ce modèle devrait permettre le dimensionnement des liaisons boulonnées de carters composites/composites ou composites/métalliques en un temps de calcul très réduit. Il doit ainsi être capable d'estimer l'ensemble des grandeurs de dimensionnement mécaniques (efforts, déplacements, contraintes, déformations) et vérifier les critères de conception utilisés dans les bureaux d'études pour ce type d'application.

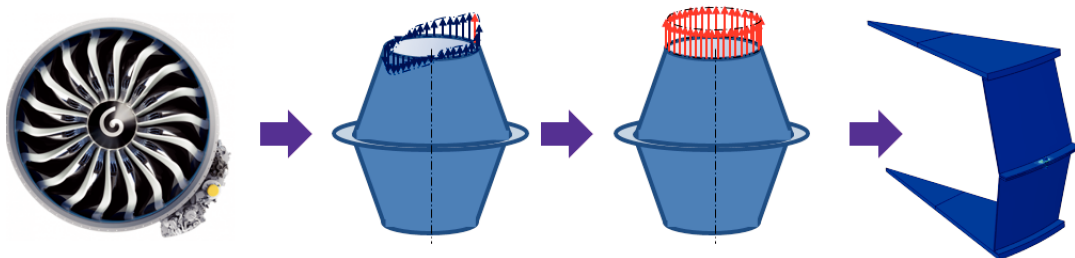


FIGURE 2.1 – Passage d'un chargement réel à un chargement uniforme axisymétrique.

2.2 Présentation du modèle

La description générale du modèle est donnée dans la Figure 2.2. La bride cylindrique inférieure ou supérieure se compose d'un pied de bride et de la virole, cette dernière peut être composée de trois viroles, droites ou inclinées. Le pied de bride et la virole sont modélisés par des éléments coques axisymétriques. Les brides sont assemblées grâce à un boulon qui est modélisé par un élément poutre. Le contact entre les brides est assuré par des éléments barre, traduisant la raideur normale du contact, tandis que la raideur tangentielle est négligée. En effet, dans ce type de configuration de l'assemblage, l'effet du décollement est plus prépondérant que celui du glissement. Finalement, l'équilibre de l'assemblage est assuré grâce à des couplages cinématiques permettant de définir l'interaction entre les pièces assemblées. Le repère global du modèle est un repère cylindrique (r, θ, z) , les déplacements associés à chaque vecteur sont (u, v, w) respectivement.

2.2.1 Choix des éléments

2.2.1.1 Élément coque axisymétrique (acg et $a'c'g'$)

L'élément coque axisymétrique permet de modéliser les brides cylindriques. Le choix de cet élément se justifie par la géométrie des brides et les chargements auxquels elles sont soumises. Ce sont des pièces de révolution dont le ratio e/D est assez faible, où e est l'épaisseur de la bride et D son diamètre moyen. Dans le cas du carter fan du moteur LEAP par exemple, ce ratio est de l'ordre de grandeur de $1/200$.

2.2.1.2 Élément poutre (xy)

L'élément poutre permet de modéliser la vis. En effet, sous un chargement excentré, la vis est soumise à des sollicitations combinées de traction et de flexion qui génèrent un élanement important, ceci est dû au fait que les dimensions de la section sont petites par rapport à la longueur de vis. À titre d'exemple, le ratio L/D des vis utilisées pour l'assemblage du carter fan est de l'ordre de 0.2. La théorie des poutres de Bernoulli [BC09] est donc valable et la modélisation du boulon par un élément poutre est justifiée.

2.2.1.3 Élément barre (ressorts)

La difficulté dans ce type de modèle est de tenir compte de tous les phénomènes physiques pouvant intervenir dans un assemblage, le contact en est un. Physiquement, le problème de contact se traduit principalement par la non-pénétration des surfaces. Il s'agit d'un problème non linéaire puisqu'il est caractérisé par une discontinuité de comportement qui est identifiée par deux phases (adhérence et glissement), comme illustré dans la Figure 2.3. Il s'agit de la loi fondamentale de contact : Loi de Coulomb.

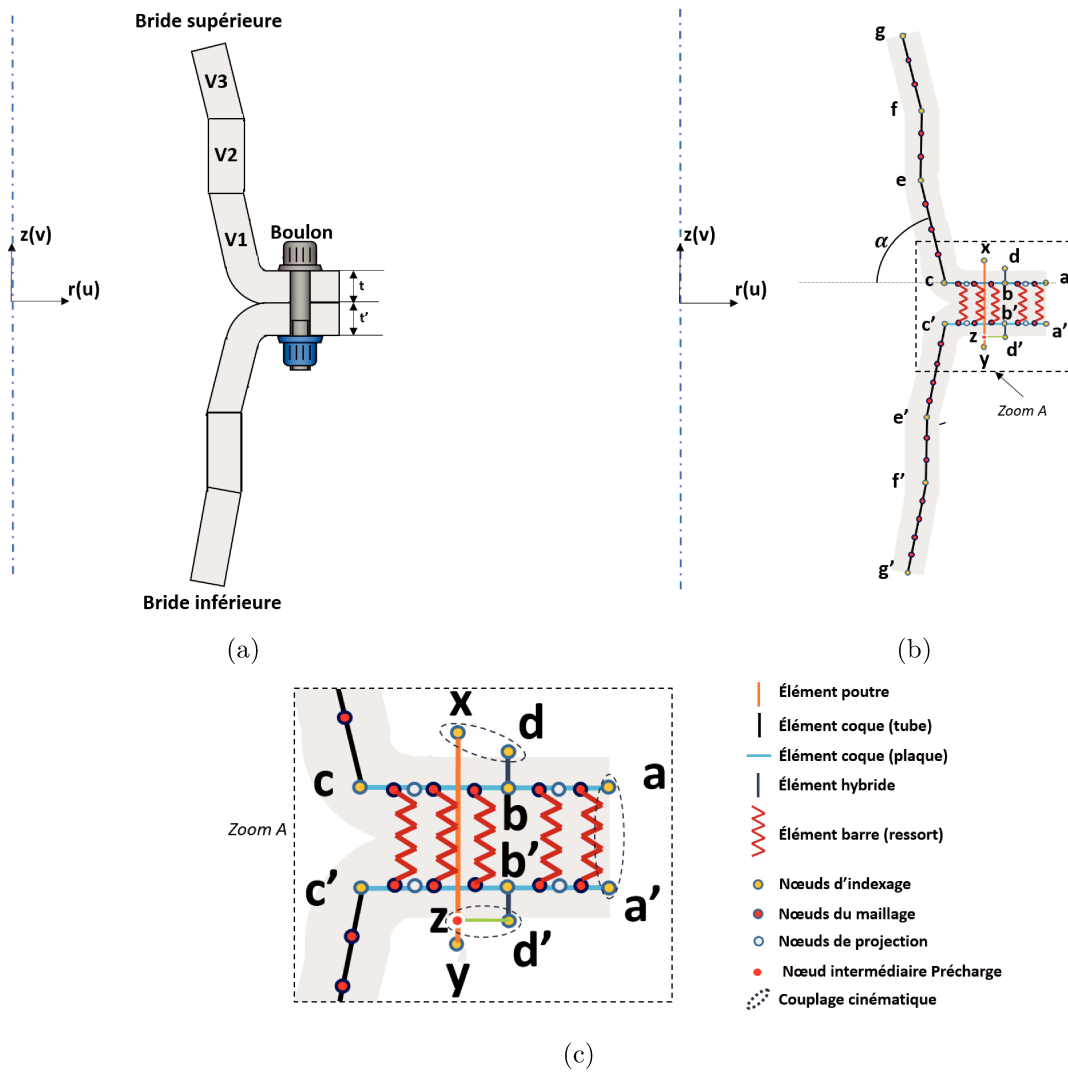


FIGURE 2.2 – (a) Schéma simplifié d'un secteur de brides cylindriques boulonnées (b) Schéma équivalent du modèle semi-analytique et (c) Zoom sur la modélisation au niveau de la liaison.

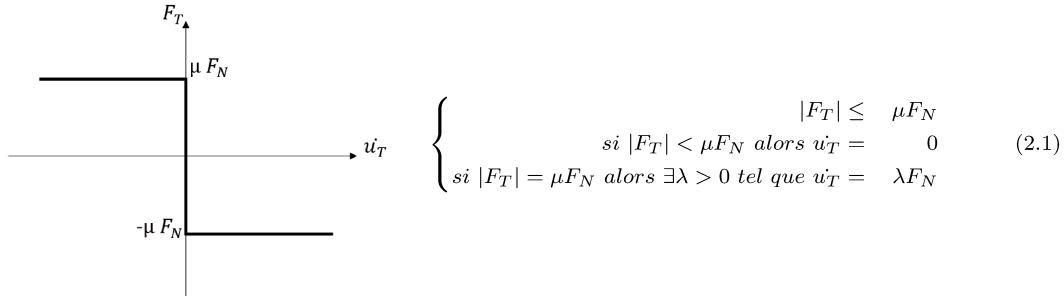


FIGURE 2.3 – Schéma de principe de la loi de Coulomb.

où F_T et F_N sont respectivement la force normale et la force tangentielle du contact, μ est le coefficient de frottement et \dot{u}_T est la vitesse de glissement.

L'hypothèse de non glissement est retenue dans le cadre de ces travaux. En effet, dans le type d'application visée par cette modélisation, il existe un contact radial de la bride supérieure avec la bride inférieure qui empêche le glissement (cf. Figure 1.54). De plus, l'installation de la bonne précharge permet d'éviter ce phénomène. En outre, l'assemblage est soumis à un chargement excentré qui génère un comportement en flexion plus accentué par rapport à celui en cisaillement. Par conséquent, la composante tangentielle du contact peut être négligée devant la composante normale. Ainsi, le contact entre deux nœuds est considéré unilatéral sans frottement. La raideur normale C_N est prise en compte à travers les éléments barre, travaillant en compression ou en traction. Le calcul de cette raideur est détaillé dans la section 2.4.

2.2.1.4 Élément coque hybride (bd et bd')

La raideur axiale d'un assemblage boulonné dépend des raideurs des pièces assemblées ainsi que de la raideur axiale de la vis. Cette raideur traduit le comportement de la zone de compression. Au niveau de la liaison, le rôle de l'élément hybride est de représenter la raideur axiale de la bride, nécessaire au calcul de la raideur axiale de l'assemblage à l'étape de précharge, tout en intégrant les raideurs de flexion d'un élément coque axisymétrique jouant un rôle à l'étape de chargement.

2.2.1.5 Élément poutre connecteur (zd')

L'idée derrière la création de cet élément est de pouvoir disposer d'un nœud intermédiaire agissant comme une "projection" du nœud de l'élément hybride. Le serrage est transmis ainsi à la vis sans avoir à imposer des forces à ses deux nœuds, ce qui permet d'installer des liaisons cinématiques les faisant intervenir.

2.2.2 Couplages cinématiques

Afin de modéliser l'interaction entre les différentes pièces de l'assemblage et d'assurer la bonne installation de la précharge, des couplages cinématiques ont été imposés entre les nœuds, indiqués dans la Figure 2.4. Le déplacement suivant \mathbf{r} est noté u , le déplacement suivant \mathbf{z} est noté v et le déplacement suivant θ est noté w .

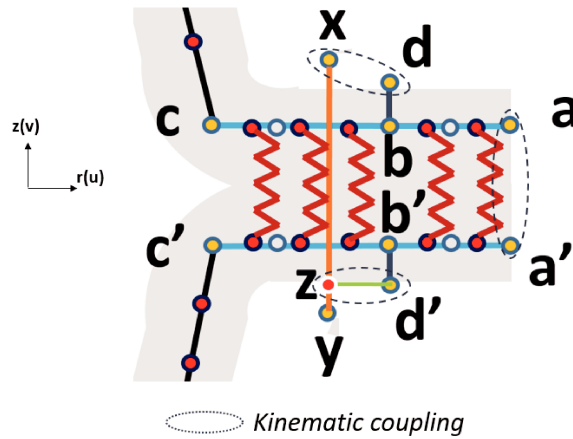


FIGURE 2.4 – Nœuds considérés pour les couplages cinématiques.

Il y a principalement trois couplages cinématiques dans le modèle :

- * **CC1 - entre x et d** : Il s'agit d'une liaison rigide qui se traduit par trois relations cinématiques données par le système d'équations Eq.2.2. L'objectif est d'imposer aux nœuds x et d d'avoir les mêmes degrés de libertés u , v et w afin d'assurer le transfert de charges entre la vis et la bride supérieure.

$$\begin{aligned} u_x &= u_d + \Delta z * w_d \\ v_x &= v_d - \Delta r * w_d \\ w_x &= w_d \end{aligned} \quad (2.2)$$

- * **CC2 - entre z et d'** : C'est une liaison glissière qui permet de modéliser le mouvement de translation relatif non nul entre la vis et la bride inférieure selon la direction axiale (z), en imposant un mouvement relatif nul entre ces deux nœuds en u et w . Le nœud de la bride inférieure est un nœud fictif rajouté à cet effet, en intégrant l'élément poutre connecteur. Ce couplage est traduit par le système d'équations Eq.2.3 et il permettra d'installer la précharge de l'élément de fixation entre un nœud de la vis (nœud y) et l'écrou fictif (nœud z) associé à la bride inférieure (nœud d').

$$\begin{aligned} u_z + u_{a'} &= 0 \\ w_z + w_{a'} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

* *CC3 - entre a et a'* : L'objectif ici est de ne tolérer aucun glissement entre les nœuds a et a' . Cela vient justifier la non prise en compte de la composante tangentielle de contact. Ainsi, le déplacement relatif des deux nœuds dans la direction radiale r est nul. Ce couplage est traduit par l'équation Eq.2.4.

$$u_a + u_{a'} = 0 \tag{2.4}$$

Le modèle de pré-dimensionnement développé dans le cadre de cette thèse se base principalement sur la méthode des éléments finis. Les choix des éléments et des différents couplages cinématiques ont été détaillés et justifiés. Dans le modèle, le comportement de l'assemblage dépend principalement des raideurs des éléments choisis qui doivent être bien identifiées.

La formulation des matrices de raideur des éléments 1D courants tels que les poutres et les barres se trouve facilement dans la littérature. Cependant, la matrice de raideur des coques axisymétriques, qui constitue la base de modélisation des brides composites est moins présente. Dans ce qui suit, la méthode des éléments finis a été appliquée afin d'identifier la matrice de raideur des éléments coques axisymétriques orthotropes.

2.3 Méthode des éléments finis appliquée aux coques axisymétriques orthotropes

Cette modélisation semi-analytique basée sur la méthode des éléments finis directe requiert l'identification des matrices de raideur de chaque élément choisi. Cette méthodologie introduite par Turner [Tur56], vient répondre au besoin d'analyse des structures plus ou moins complexes et difficiles à étudier en se basant sur les approches analytiques tels que la théorie des poutres et la mécanique des milieux continus. Pour les éléments poutre et barre, l'écriture classique des matrices de raideur que l'on trouve facilement dans la littérature est utilisée. Les matrices de raideur des coques axisymétriques sont peu documentées, encore moins quand il s'agit des éléments non isotropes. Toutefois, il existe dans la littérature quelques travaux qui se sont intéressés à ce sujet. Greene [GSW61] a appliqué la méthode pour les structures de coques isotropes et Rockey [Roc75] a détaillé la méthodologie pour identifier les matrices de raideur des coques axisymétriques de révolution. L'objectif ici est d'appliquer la même méthodologie pour identifier la matrice de raideur d'un élément coque en composite tissé 3D. En supposant un comportement orthotrope et en se basant sur les travaux de Rockey [Roc75], nous allons identifier la matrice de raideur des éléments coques orthotropes axisymétriques.

2.3.1 Modélisation

La structure de coque à symétrie axiale est modélisée par une série d'éléments tronçonniques à deux nœuds (cf. Figure 2.5). Les déplacements peuvent être exprimés dans le repère local (r, s) où chaque nœud a trois degrés de libertés : le déplacement dans le plan u , le déplacement normal au plan w et la rotation β , ou dans le repère global (r, z) où chaque nœud a, de manière analogue, les degrés de liberté \bar{u} , \bar{w} et $\bar{\beta}$ dans le repère global. L'angle ϕ définit l'angle que fait le plan de l'élément avec l'axe de révolution.

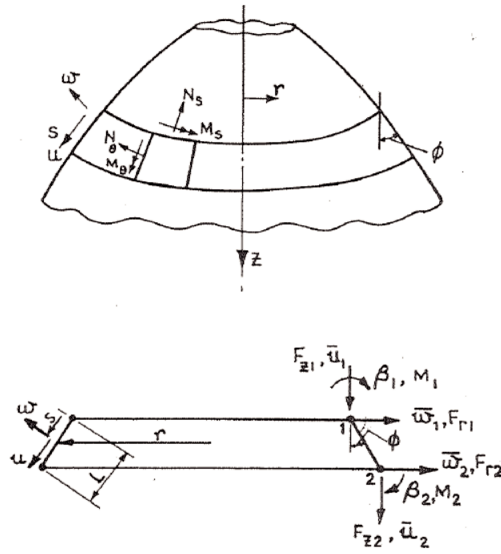


FIGURE 2.5 – Structure de coque axisymétrique à deux nœuds [Roc75].

2.3.2 Écriture des déplacements

À cause de l'inclinaison ϕ , il est plus commode d'exprimer les déplacements nodaux \bar{u} et \bar{w} de l'élément en fonction de ses coordonnées locales (r, s) . Puisqu'il y a six degrés de liberté par élément, on doit prendre six coefficients inconnus dans les polynômes représentant le modèle de déplacement. Ces polynômes proposés par Rockey [Roc75] sont donnés dans le système d'équations Eq.2.5 qui est traduit par l'écriture matricielle de l'équation Eq.2.6.

$$\begin{aligned}
 u &= \alpha_1 + \alpha_2 s \\
 w &= \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \\
 \frac{dw}{ds} &= \alpha_4 + 2\alpha_5 s + 3\alpha_6 s^2
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \frac{dw}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s & 3s^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Afin d'exprimer les déplacements nodaux, il suffit de remplacer s par \mathbf{O} ou \mathbf{L} (nœud 1 ou 2). Ces déplacements sont ainsi exprimés dans le repère local en fonction des coefficients α_i et de la longueur de l'élément L à travers l'équation Eq.2.7.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (\frac{dw}{ds})_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (\frac{dw}{ds})_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Il reste à exprimer les déplacements nodaux dans le repère global. Pour cela, il suffit d'exprimer la matrice de passage du repère local au repère global, qui est fonction de ϕ et qui est donnée par l'équation Eq.2.8

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (\frac{dw}{ds})_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (\frac{dw}{ds})_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

En combinant les équations Eq.2.6, Eq.2.7 et Eq.2.8, les déplacements $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{w}}$ en chaque point de l'élément sont exprimés dans le repère global en fonction des déplacements nodaux et sont donnés par l'équation Eq.2.9 où $p=s/L$. Ce changement de variable permet de faciliter l'intégration et l'ensemble des opérations mathématiques.

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)\cos(\phi) & (1-p)\sin(\phi) & 0 & p\cos(\phi) & p\sin(\phi) & 0 \\ -(1-3p^2+2p^2)\sin(\phi) & (1-3p^2+2p^2)\cos(\phi) & -L(p-2p^2+p^3) & -(3p^2-2p^3)\sin(\phi) & (3p^2-2p^3)\cos(\phi) & -L(-p^2+p^3) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.3.3 Expression des déformations

L'étape suivante consiste à exprimer les déformations dans l'élément de coque dans le repère local (r, s) en fonction des déplacements \bar{u} et \bar{w} identifiés précédemment dans le repère global. Initialement, les déformations d'une coque axisymétrique s'expriment en fonction des extensions ε_s et ε_θ ainsi que les courbures χ_s et χ_θ en fonction des déplacements locaux u et w comme le montre l'équation Eq.2.10.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{\sin(\phi)}{r} & \frac{\cos(\phi)}{r} \\ 0 & \frac{d^2}{ds^2} \\ 0 & -\frac{\sin(\phi)}{r} \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En remplaçant u et w par leurs expressions données par l'équation Eq.2.9, on obtient la matrice B reliant les déformations aux déplacements nodaux exprimés dans le repère global. Son écriture détaillée est donnée dans l'annexe A.

$$\varepsilon(r, s) = [B] \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.3.4 Loi de comportement

À l'échelle macroscopique, le comportement d'un composite tissé 3D est considéré orthotrope. Les contraintes par unité de longueur N_s , N_θ , M_s et M_θ ainsi que les déformations d'extension et de courbures d'un élément coque sont reliées par l'équation 2.12. E_s et E_θ sont respectivement les modules de Young dans le sens trame (weft) et dans le sens chaîne (warp), comme illustré par la Figure 2.6, $\nu_{s\theta}$ et $\nu_{\theta s}$ sont les coefficients de Poisson dans le plan de la coque et t est l'épaisseur de l'élément de coque. Ainsi, tous les paramètres sont exprimés dans le repère matériau du composite tissé.

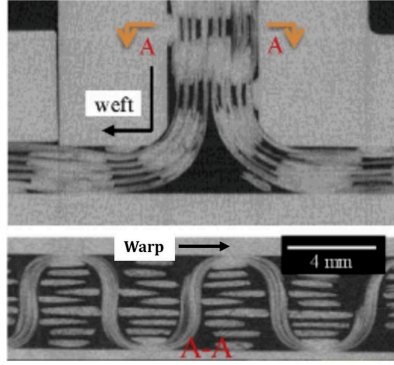


FIGURE 2.6 – Images de la micro tomographie d'une bride en composite tissé 3D issu des travaux de Yan et al. in [YZL19].

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} = \frac{t}{1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \begin{bmatrix} E_s & E_s\nu_{s\theta} & 0 & 0 \\ E_\theta\nu_{\theta s} & E_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12}E_s & \frac{t^2}{12}E_s\nu_{s\theta} \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12}E_\theta\nu_{\theta s} & \frac{t^2}{12}E_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

On note \mathbf{D} la matrice donnée par l'équation Eq.2.14 tel que :

$$[\sigma(r, s)] = [\mathbf{D}] [\varepsilon(r, s)] \quad (2.13)$$

$$[\mathbf{D}] = \frac{t}{1 - \nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} \begin{bmatrix} E_s & E_s\nu_{s\theta} & 0 & 0 \\ E_\theta\nu_{\theta s} & E_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12}E_s & \frac{t^2}{12}E_s\nu_{s\theta} \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12}E_\theta\nu_{\theta s} & \frac{t^2}{12}E_\theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.3.5 Matrice de raideur

Une équivalence statique existe entre les contraintes par unité de longueur $[\sigma_e]$ vues par un élément et les forces nodales $[F_e]$. Ces dernières sont reliées aux déplacements nodaux à travers la matrice de raideur $[K_e]$. Le principe du travail virtuel stipule que durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes. Dans un élément de coque axisymétrique, cela se traduit par l'équation Eq.2.15 :

$$W_{ext} = [\delta^{*e}]^T [F_e] \quad (2.15)$$

$$\text{où } [\delta^{*e}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ (\frac{d\bar{w}}{ds})_2 \end{bmatrix} \text{ et } [F_e] = \begin{bmatrix} F_{z_1} \\ F_{r_1} \\ M_1 \\ F_{z_2} \\ F_{r_2} \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Le travail interne total dans l'élément de coque axisymétrique est défini par la relation de l'équation Eq.2.16 :

$$\int^l W_{int} d(\text{aire}) = \int^l [\varepsilon(r, s)]^T [\sigma(r, s)] d(\text{aire}) \quad (2.16)$$

Ainsi, en écrivant le principe du travail virtuel et en remplaçant $\varepsilon(r, s)$ par son écriture donnée dans l'équation Eq. 2.11, on en déduit la relation entre les forces et les déplacements nodaux, donnée par l'équation Eq.2.17 :

$$[F_e] = \left[\int^S [B]^T [D] [B] dS \right] [\delta^e] \quad (2.17)$$

La matrice de raideur $[K_e]$ est ainsi définie par :

$$[K_e] = \int^S [B]^T [D] [B] dS \quad (2.18)$$

En se rapportant à la Figure 2.5, l'élément de surface dS pour un tronc de cône est donné par $dS = 2\pi r ds$. En intégrant le changement de variable $p = s/L$, l'écriture de la matrice de raideur devient :

$$[K_e] = \int_0^1 [B]^T [D] [B] 2\pi r L dp \quad (2.19)$$

Finalement, l'intégration sur la longueur L de l'élément permet d'identifier la matrice de raideur d'une coque axisymétrique orthotrope. Son écriture explicite intègre les paramètres géométriques et matériaux de l'élément de coque et est donnée dans l'annexe B.

La nouveauté dans le modèle développé dans le cadre de cette thèse est notamment l'utilisation des éléments orthotropes. La matrice de raideur des éléments coques orthotropes à symétrie

axiale a été identifiée. Dans ce qui suit, la construction du modèle est détaillée avec l'explication de chaque étape de l'algorithme de calcul.

2.4 Construction du modèle

2.4.1 Lecture des données

Afin de faciliter l'utilisation du code semi-analytique, la création du jeu de données se fait à travers un tableur contenant tous les paramètres géométriques et matériaux, ainsi que les données de chargement et du maillage. Une routine automatisée permet de convertir l'ensemble des données en un fichier *.txt* utilisé par le noyau de calcul comme données d'entrée.

2.4.2 Maillage

Le maillage des brides, inférieure et supérieure, est effectué par morceau. L'intérêt est de pouvoir contrôler le maillage de chaque zone vu que son influence peut être importante localement sans qu'elle le soit dans une zone éloignée de la section concernée.

Le maillage de la structure s'effectue en deux étapes principales :

— Maillage primaire :

Dans cette étape, les nœuds d'extrémités de chaque tronçon de bride sont identifiés. Si on se réfère à la Figure 2.2, il s'agit des nœuds **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** et **g**. Ce découpage permettra de paramétrer le maillage de chaque zone. Pour des raisons de gestion de contact qui seront exposées par la suite, une projection des nœuds **a**, **b** et **c** de chaque bride est effectuée sur l'autre bride, dans le cas où ces derniers ne coïncident pas (pieds de brides de dimensions différentes).

— Maillage secondaire :

Le maillage global de la structure s'effectue à cette étape, en subdivisant chaque tronçon de bride en un certain nombre d'éléments, préalablement paramétré en fonction de la taille choisie de l'élément.

L'étape finale de maillage concerne le maillage de la vis. Afin de respecter l'hypothèse du ratio L/D de la théorie des poutres, la vis est modélisée avec un seul élément. Le sens du maillage est illustré par la Figure 2.7.

2.4.3 Calcul des souplesses

Le calcul des souplesses de l'assemblage est une étape primordiale pour l'identification des termes axiaux de la matrice de raideur des éléments sollicités directement par la précharge.

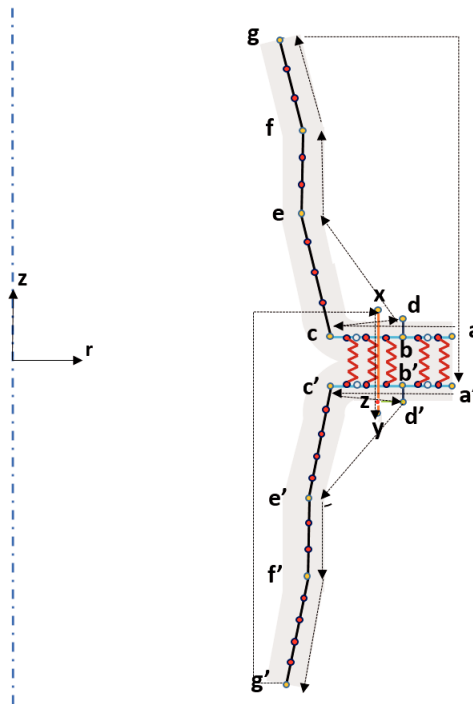


FIGURE 2.7 – Sens du maillage dans le modèle semi-analytique

Trois souplesses sont calculées :

— **Souplesse du boulon :**

Celle-ci est calculée grâce à la formulation classique donnée par l'équation 1.36. Toutefois, les coefficients α_t et α_e ne peuvent pas être pris en fonction des suggestions des études préalablement détaillées dans la section 1.3.2.1. En effet, car les boulons utilisés dans le cadre de ces travaux ne sont pas des boulons standards, ils sont surtout utilisés dans le secteur aéronautique. Afin de déterminer ces coefficients, une évaluation de la contribution de la raideur de la tête de vis ainsi que celle de l'écrou à la raideur du boulon a été réalisée grâce à un calcul éléments finis 3D. Le boulon a été modélisé avec des éléments volumiques et a été soumis à la précharge. La distribution de l'énergie de déformation a permis d'obtenir les valeurs suivantes : $\alpha_t = 0.88$ et $\alpha_e = 0.85$.

— **Souplesse des pièces assemblées :**

La souplesse de la bride se calcule principalement au niveau du pied de bride où se crée le cône de compression. La raideur axiale de chaque bride peut être calculée à l'aide de l'équation 1.38. Cependant, la difficulté réside dans la détermination de la section équivalente. Les résultats des travaux cités dans la section 1.3.2.1 ne peuvent pas être directement appliqués. En effet, la section de bride au niveau de la liaison n'est ni circulaire comme dans le cas des assemblages cylindriques, ni rectangulaire comme dans le cas des assemblages prismatiques. Ainsi, une nouvelle méthodologie a été développée, afin de ramener la section de bride à une section cylindrique équivalente.

Le principe consiste à subdiviser la section en plusieurs tronçons. Chaque tronçon est assimilé à une portion d'angle ϕ_i d'un cylindre équivalent de diamètre $D_i = 2.r_i$ et de section A_i (cf. Figure 2.8). La section équivalente de la bride correspond à la somme des sections élémentaires A_i , rapportées à l'angle ϕ_i tel que :

$$A_p = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \phi_i}{2\pi} \quad (2.20)$$

La section équivalente du cône de compression, correspondant à chaque cylindre de diamètre D_i , est calculée grâce aux formulations de Rasmussen [Ras78].

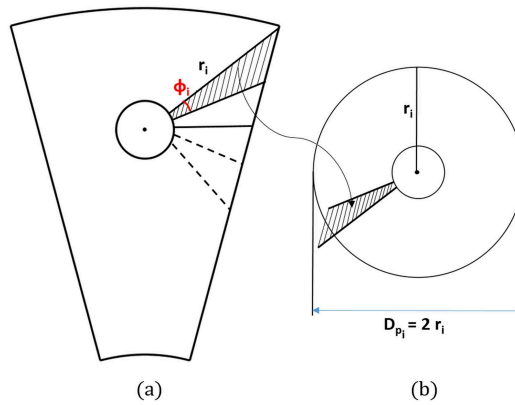


FIGURE 2.8 – Schéma de principe de l'adaptation géométrique de la section angulaire d'un secteur de bride (a) à une section circulaire équivalente (b)

La formulation donnée par l'équation 1.38 pour le calcul de souplesse requiert, en plus de la section équivalente, un module de Young de la pièce considérée. Les brides sont en matériau composite et possèdent macroscopiquement un comportement orthotrope. La question qui se pose est quel module de Young des trois directions d'orthotropie dépend la souplesse axiale de la partie comprimée de la bride ?

L'effort de précharge sollicite les pièces assemblées dans la direction axiale, il peut être donc assimilé à un chargement de compression appliquée à la pièce. Dans ce cas, le comportement de la pièce est piloté, par définition, par le module hors-plan E_{zz} . Cela rejoint les travaux de Gornet et al. [Gor18] qui ont identifié, numériquement et expérimentalement, la souplesse de stratifiés GF/PA6 et T700/PA66 en considérant le module hors-plan E_{zz} . Ainsi, la raideur axiale d'une pièce ayant un comportement orthotrope est donnée par l'équation Eq.2.21.

$$K_{orth} = \frac{E_{zz} A}{L} \quad (2.21)$$

2.4.4 Matrice de raideur globale

2.4.4.1 Matrices de raideurs élémentaires

Élément coque axisymétrique orthotrope

Les étapes de calcul de la matrice de raideur d'une coque orthotrope sont détaillées dans la section 2.3. Son écriture explicite est donnée dans l'annexe B, il est à noter que les paramètres matériaux doivent être exprimés dans le repère local de la coque.

Élément coque hybride

L'élément coque hybride permet de modéliser la souplesse axiale de la partie du pied de bride en contact avec le boulon, tout en gardant les autres termes de raideur d'une coque orthotrope. Sa matrice de raideur est ainsi équivalente à celle de l'élément coque orthotrope de la partie virole, mais avec le remplacement des termes de compression par la souplesse axiale de la bride. En d'autres termes :

$$K_{coque_H}(1,1) = K_{coque_H}(4,4) = K_{orth} \quad (2.22)$$

$$K_{coque_H}(1,4) = K_{coque_H}(4,1) = -K_{orth} \quad (2.23)$$

Élément poutre (Boulon)

Le boulon schématisé par la Figure 2.9a est assimilé à une poutre, illustrée par la Figure 2.9b où E est le module de Young, A_{beq} est la section équivalente, L_{beq} la longueur et I_{beq} le moment quadratique équivalent suivant z (repère local de la poutre). Ces grandeurs sont données par les équations Eq.2.24, Eq.2.25 et Eq.2.26.

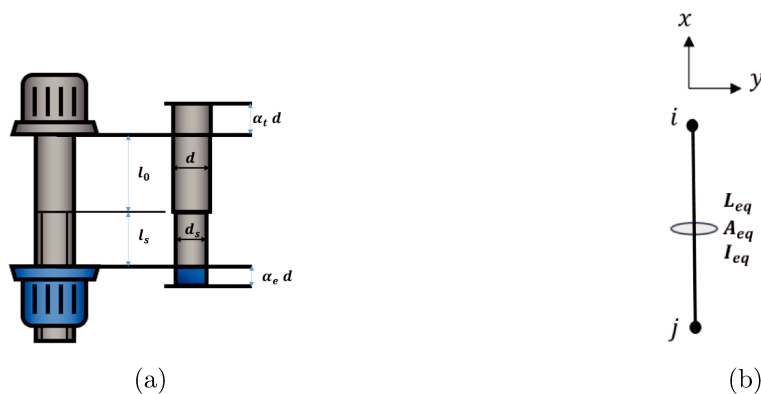


FIGURE 2.9 – Boulon simplifié (a) et modèle poutre équivalent (b).

$$L_{beq} = l_0 + l_1 + \alpha_e d + \alpha_t d \quad (2.24)$$

$$A_{beq} = \frac{l_0 + l_1}{\frac{l_0 + \alpha_e d}{A_0} + \frac{l_1 + \alpha_t d}{A_s}} \quad (2.25)$$

$$I_{beq} = \frac{l_0 + l_1}{\frac{l_0 + \alpha_e d}{I_0} + \frac{l_1 + \alpha_t d}{I_s}} \quad (2.26)$$

Ainsi, la matrice de raideur d'un élément poutre modélisant le boulon est donnée par l'expression de l'équation Eq.2.27.


$$[K_{poutre}] = \begin{bmatrix} \frac{EA_{beq}}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_{beq}}{L_{beq}} & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{12EI_{beq}}{L_{beq}^3} & \frac{6EI_{beq}}{L_{beq}^2} & 0 & -\frac{12EI_{beq}}{L_{beq}^3} & \frac{6EI_{beq}}{L_{beq}^2} \\ \cdot & \cdot & \frac{4EI_{beq}}{L_{beq}} & 0 & -\frac{6EI_{beq}}{L_{beq}^2} & \frac{2EI_{beq}}{L_{beq}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{EA_{beq}}{L} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12EI_{beq}}{L_{beq}^3} & -\frac{6EI_{beq}}{L_{beq}^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{4EI_{beq}}{L_{beq}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Élément poutre connecteur (rigide)

L'élément poutre rigide joue ici le rôle d'un connecteur. Il permet de transmettre la cinétique du boulon au pied de la bride inférieure. C'est pour cette raison qu'on lui attribue les paramètres géométriques du boulon avec un module de Young plus important. On pose $E_{P_{rigide}} = 10^3 \times E_{boulon}$. Sa matrice de raideur est celle d'un élément poutre.

Élément barre (contact)

L'écriture générale de la matrice de raideur d'un élément barre dans le repère local est donnée par la matrice de l'équation Eq.2.28, K_a étant la raideur axiale de l'élément. Identifier la matrice de rigidité de cet élément revient à calculer la raideur en compression de chaque ressort. Celle-ci est calculée en faisant l'hypothèse suivante : la raideur en compression d'un seul ressort K_{a_i} dépend de la surface de contact S_c ainsi que de la raideur totale du contact K_c . Cette dernière est proportionnelle à la raideur totale de l'assemblage K_{ass} à un coefficient C_{rep} près. Les équations Eq.2.29 et 2.30 traduisent ces hypothèses. Cela émane des travaux de Leray [LVD08]. Pratiquement, la raideur locale en tant que raideur d'écrasement est élevée donc C_{rep} devra être faible.



$$[K_{barre}] = \begin{bmatrix} K_a & 0 & -K_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_a & 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La surface de contact est calculée en fonction des surfaces S_i et S_{i-1} des deux éléments adjacents au ressort i et de la surface initiale du contact S_c , avant l'application de la précharge (cf. Figure 2.10).

$$K_{a_i} = K_c * 0.5 * \frac{S_{i-1} + S_i}{S_c} \quad (2.29)$$

$$K_c = \frac{K_{ass}}{C_{rep}} \quad (2.30)$$

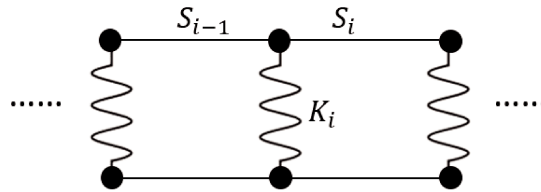


FIGURE 2.10 – Schéma simplifié de calcul de la raideur de contact d'un ressort i .

Après avoir identifié les matrices de raideurs de chaque élément dans son repère local, il est impératif de les exprimer dans le repère global, afin de procéder par la suite à l'assemblage de la matrice de raideur de tout le système.

2.4.4.2 Assemblage

Dans la méthode des éléments finis, appliquée dans le cadre de ces travaux, on cherche à résoudre le système linéaire de l'équation Eq.2.31 où $[F]$ est le vecteur effort, $[U]$ est le vecteur déplacement et $[K]$ la matrice de raideur globale. Celle-ci est obtenue à partir des matrices de raideur élémentaires en deux étapes :

$$[F] = [K] [U] \quad (2.31)$$

- **Étape 1 : Passage local-global :**

Les matrices de raideur élémentaires sont exprimées dans le repère local de l'élément,

il faut les exprimer dans le repère global de l'assemblage. Comme le modèle semi-analytique développé ici est 2D plan, la matrice de passage P est une simple matrice de rotation (cf. Figure 2.11). L'angle de rotation ϕ du repère local de chaque élément vers le repère global de l'assemblage est attribué lors de l'identification des paramètres géométriques et matériaux des éléments.

- **Étape 2 : Assemblage :**

L'étape de l'assemblage consiste à mettre toutes les matrices élémentaires dans la matrice globale, en respectant l'ordre des éléments et des nœuds communs aux éléments.

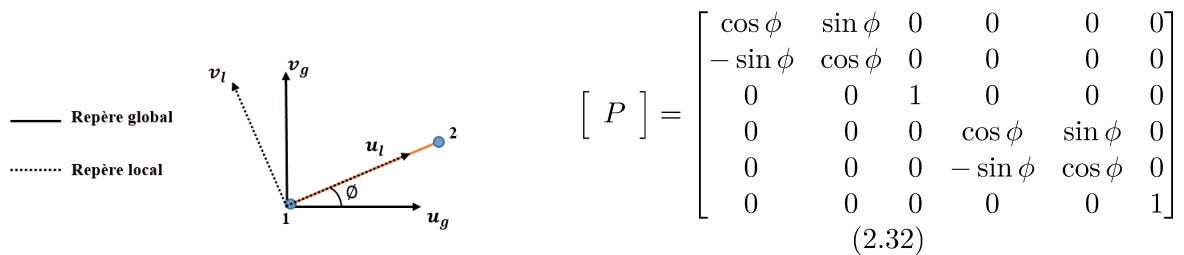


FIGURE 2.11 – Passage du repère local de l'élément au repère global de l'assemblage via la matrice de rotation P .

2.4.4.3 Intégration des couplages cinématiques

Comme il a été expliqué dans la présentation du modèle, des couplages cinématiques sont imposés afin de mieux modéliser le comportement physique de l'assemblage. Mathématiquement, ces couplages se traduisent par des relations linéaires entre les degrés de liberté couplés.

Il existe deux principales méthodes pour l'intégration des relations cinématiques dans un calcul éléments finis. La méthode dite par élimination des degrés de libertés consiste à réduire le vecteur déplacements de rang n en un vecteur de rang $n - m$, m étant le nombre de couplages cinématiques, via une matrice R appelée matrice de réduction. La résolution se réduit ainsi à un nouveau système de dimension $n - m$. La deuxième méthode est la méthode de pénalité, celle-ci est moins coûteuse d'un point de vue numérique mais sa précision dépend du coefficient de pénalité choisi [KT04]. Vu que le nombre des relations cinématiques dans le modèle semi-analytique est très petit et que ces relations ont une expression très simple ($u_i \pm u_j = a$), il a été choisi d'éviter ces deux méthodes et de procéder autrement. En effet, ces méthodes font appel à des opérations matricielles et donc à un nombre d'opérations non négligeables pour de grosses matrices. La méthode utilisée dans le cadre de ces travaux a été développée par Leray [LVD08] et améliorée par Chaib [Cha08a].

Soit le système linéaire de l'équation Eq. 2.33 à résoudre, sans relation cinématique,

de taille n :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_{in} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

et soit la relation cinématique de l'équation Eq. 2.34 à intégrer dans le système :

$$C_m \cdot u_m + C_l \cdot u_l = 0 \quad (2.34)$$

où C_m et C_l sont des constantes.

L'intégration de la relation cinématique 2.34 qui couple le déplacement u_m au déplacement u_l , réduit le nombre d'inconnues cinématiques mais elle va ajouter une inconnue statique : l'effort de réaction « F^r ». Cet effort s'ajoute au vecteur effort $[F]$ comme le montre la relation Eq. 2.35.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_l \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \\ F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F^r \\ 0 \\ 0 \\ -F^r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{1n} \\ \dots & K_{ll} & \dots & \dots & K_{lm} & \dots \\ \dots & \dots & K_{ii} & K_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{ji} & K_{jj} & \dots & \dots \\ \dots & K_{ml} & \dots & \dots & K_{mm} & \dots \\ K_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_l \\ u_i \\ \vdots \\ u_m \\ u_n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$u_m = a - \frac{C_l}{C_m} u_l \quad (2.36)$$

En exprimant ainsi u_m en fonction de u_l comme le montre l'équation Eq. 2.36 et en remplaçant son expression dans 2.35, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{j \neq m, l \\ i \neq m, l}} K_{ij} \cdot u_j + \left(K_{il} - \frac{C_l}{C_m} K_{im} \right) u_l + 0 \cdot u_m = F_i - a \cdot k_{im} \\ \sum_{j \neq m, l} K_{lj} \cdot u_j + \left(K_{ll} - \frac{C_l}{C_m} K_{lm} \right) u_l + 0 \cdot u_m = F_l + F^r - a \cdot k_{lm} \\ \sum_{j \neq m, l} K_{mj} \cdot u_j + \left(K_{ml} - \frac{C_l}{C_m} K_{lm} \right) u_l + 0 \cdot u_m = F_m - F^r - a \cdot k_{lm} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Les expressions du système d'équations 2.37 montrent que :

- On peut remplacer les termes K_{im} par des zéros et les termes K_{il} de la matrice $[K]$ par $K_{il} - \frac{C_l}{C_m} K_{im}$.
- On peut supprimer l'effort de réaction inconnu F^r en additionnant la ligne m à la ligne l

En supprimant la ligne et la colonne m , le système linéaire peut être résolu. Cependant, la matrice devient de rang $n - 1$ au lieu de n dans ce cas. Afin de conserver le rang de la matrice, Chaib [Cha08a] propose d'ajouter la relation cinématique dans la matrice de rigidité $[K]$ et le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} F_1 - a.K_{lm} \\ F_l + F_m - 2.a.K_{lm} \\ F_i - K_{im} \\ \vdots \\ B.a \\ F_n - a.K_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{1l} - \frac{C_l}{C_m} K_{1m} & \dots & \dots & 0 & K_{1n} \\ K_{l1} + K_{m1} & K_{ll}^2 & K_{li} + K_{mi} & K_{lj} + K_{mj} & 0 & K_{ln} + K_{mn} \\ \dots & K_{il} - \frac{C_l}{C_m} K_{im} & K_{ii} & K_{ij} & 0 & \dots \\ \dots & K_{jl} - \frac{C_l}{C_m} K_{jm} & K_{ji} & K_{jj} & 0 & \dots \\ 0 & B.C_l & 0 & 0 & B.C_m & 0 \\ K_{n1} & K_{nl} - \frac{C_l}{C_m} K_{nm} & \dots & \dots & 0 & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_l \\ u_i \\ \vdots \\ u_m \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$K_{ll}^2 = \left(K_{ll} - \frac{C_l}{C_m} K_{lm} \right) + \left(K_{ml} - \frac{C_l}{C_m} K_{mm} \right) \quad (2.38)$$

avec B une constante non perturbatrice du conditionnement de $[K]$. Pour cela, on affecte à B le maximum des termes diagonaux relatifs aux degrés de liberté couplés (u_l et u_m), c'est-à-dire le maximum des termes K_{ll} et K_{mm} .

2.4.5 Conditions aux limites

L'intégration des conditions aux limites dans le modèle développé se fait selon la méthode directe. Le choix de cette méthode est justifié par sa simplicité de mise en œuvre, le nombre réduit des degrés de liberté et des conditions aux limites. De plus, cette méthode permet d'éviter les erreurs dues au conditionnement de la matrice de rigidité globale.

Soit le système linéaire à résoudre de l'équation Eq.2.33. Chaque couple (F_i, U_i) comporte un et un seul élément imposé par les conditions aux limites. Ainsi, le système peut être écrit en séparant les paramètres connus des paramètres inconnus, comme le montre l'équation Eq.2.39.

$$\begin{bmatrix} F_{1,connu} \\ \vdots \\ F_{p,connu} \\ \hline F_{1,inc} \\ \vdots \\ F_{q,inc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ci} & K_{cc} \\ \hline K_{ii} & K_{ic} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,connu} \\ \vdots \\ U_{p,connu} \\ \hline U_{1,inc} \\ \vdots \\ U_{q,inc} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Le système peut être séparé en deux relations :

$$[F_{connu}] = [K_{ci}][U_{inc}] + [K_{cc}][U_{connu}] \quad (2.40)$$

$$[F_{inc}] = [K_{ii}][U_{inc}] + [K_{ic}][U_{connu}] \quad (2.41)$$

La relation 2.40 s'écrit aussi :

$$[F_{connu}] - [K_{cc}][U_{connu}] = [K_{ci}][U_{inc}] \quad (2.42)$$

La relation de l'équation Eq. 2.42 permet ainsi de calculer le vecteur de déplacements inconnus $[U_{inc}]$ par une méthode matricielle classique. Enfin, le vecteur $[U]$ permettra de calculer les efforts inconnus en revenant au système linéaire initial.

2.4.6 Application de la précharge

Le premier chargement auquel un assemblage boulonné est soumis est l'effort de précontrainte introduit par le serrage de la vis. Dans ce modèle, l'effort de serrage n'est pas appliqué directement aux nœuds de la vis. Le nœud \mathbf{z} est introduit pour cette raison. En effet, le nœud \mathbf{x} du boulon est lié cinématiquement au nœud \mathbf{d} de la bride supérieure, ce qui rend impossible une application de l'effort de serrage directement aux deux nœuds du boulon. La précharge est appliquée en imposant un effort positif $+F_0$ au nœud \mathbf{z} et un effort négatif $-F_0$ au deuxième nœud de la vis \mathbf{y} , comme le montre la Figure 2.12. L'élément poutre rigide, en lui affectant un module d'élasticité assez grand, permet le transfert de l'effet de précharge entre la vis et la bride inférieure.

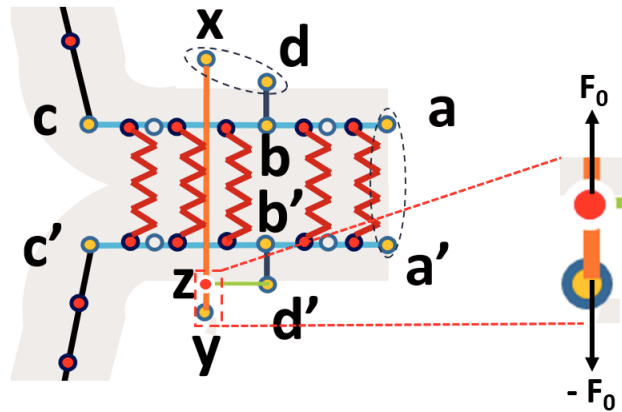


FIGURE 2.12 – Zoom sur la zone de la liaison dans le modèle semi-analytique avec les nœuds d'application de la précharge.

2.4.7 Application d'un chargement extérieur

L'application d'un chargement extérieur comprend deux étapes :

- **Étape 1 : le transfert de l'état précontraint**

L'effort de serrage engendre un déplacement relatif vertical entre les deux nœuds du boulon. Ce déplacement est traduit en une relation cinématique entre les deux nœuds de la vis comme le montre l'équation 2.43, où a est le déplacement relatif des deux nœuds. La matrice de raideur est ainsi modifiée en intégrant ce nouveau couplage cinématique, comme détaillé dans la section 2.4.4.3.

- **Étape 2 : la résolution du système linéaire**

Il suffit de modifier le vecteur $[F]$ en y introduisant la valeur de l'effort extérieur imposé au $i^{\text{ème}}$ degré de liberté souhaité et procéder à la résolution du système linéaire de l'équation Eq.2.44

$$v_z + v_y = a \quad (2.43)$$

$$U = K^{-1}F \quad (2.44)$$

2.4.8 Lecture des résultats

L'analyse des résultats du calcul du modèle semi-analytique et du comportement de l'assemblage repose sur l'identification de trois principaux comportements : le comportement de la vis, le comportement de la bride et l'évolution du contact.

2.4.8.1 Comportement de la vis

Dans ce type d'application, la vis est soumise principalement aux efforts de traction et de flexion, en plus de la torsion due au serrage. Vu qu'aucun effort extérieur n'est appliqué sur l'élément poutre modélisant le boulon en dehors des efforts calculés concentrés aux nœuds, le boulon est soumis à un effort de tension uniforme et un moment de flexion linéaire le long de l'élément, comme illustré par la Figure 2.13.

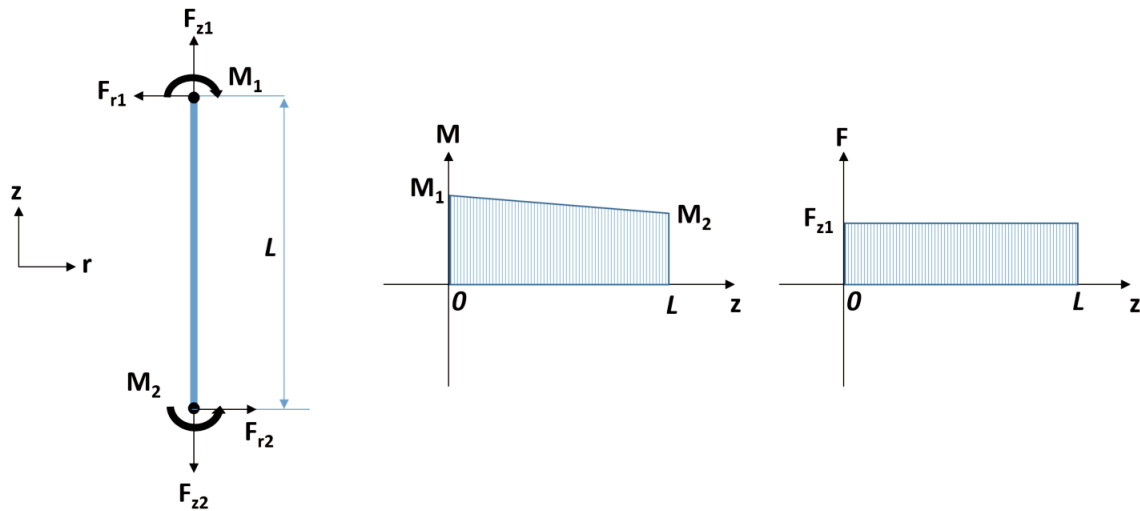


FIGURE 2.13 – Illustration des réactions dans l'élément poutre dans le repère global de l'assemblage.

Les réactions F_{r_i} , F_{z_i} et M_i sont obtenues en faisant le calcul inverse après récupération des déplacements calculés lors de la résolution linéaire, à travers l'équation Eq.2.45 où K_{poutre_G} est la matrice de raideur de l'élément poutre exprimée dans le repère global :

$$[F_{boulon}] = \begin{bmatrix} F_{r_1} \\ F_{z_1} \\ M_1 \\ F_{r_2} \\ F_{z_2} \\ M_2 \end{bmatrix} = [K_{poutre_G}] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Le calcul des efforts et des contraintes nécessaires pour le dimensionnement de la vis est réalisé comme suit :

— **La traction :**

$$F_{traction} = F_{z_1} \quad (2.46)$$

$$\sigma_{traction} = \frac{F_{traction}}{A} \quad (2.47)$$

où A est la section de la vis.

— **La torsion :**

Le couple de torsion C_t est calculé à travers l'équation Eq. 1.26 en prenant $F_0 = F_{z_1}$ suite à la précharge.

$$\sigma_{torsion} = \tau = \frac{C_t \cdot d}{2 \cdot I_o} \quad (2.48)$$

où I_o est le moment polaire de la section de vis autour de l'axe z (dans le repère global (r, θ, z)), et il est donné par $I_o = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$.

— **La flexion :**

La flexion est calculée au niveau de la section médiane de la vis.

$$M_f = \frac{M_1 + M_2}{2} \quad (2.49)$$

$$\sigma_{flexion} = \frac{M_f \cdot d}{2 \cdot I_\theta} \quad (2.50)$$

où I_θ est le moment quadratique de la section de vis autour de l'axe θ (dans le repère global (r, θ, z)) et il est donné par $I_\theta = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$.

À travers le calcul de ces contraintes, les critères de conception établis par chaque utilisateur en fonction du besoin de dimensionnement peuvent être vérifiés.

Remarque

Le diamètre au niveau duquel les contraintes sont calculées reste un choix de l'utilisateur. On peut considérer le diamètre résistant d_s ou le diamètre nominal d .

2.4.8.2 Comportement des brides

L'analyse du comportement de la bride est basé principalement sur les efforts et déplacements calculés à chaque nœud de la bride. Les critères de conception des brides CMO

utilisés par les bureaux d'études sont l'effort et le moment générés à la sortie du rayon de bride (cf. Figure 2.14).

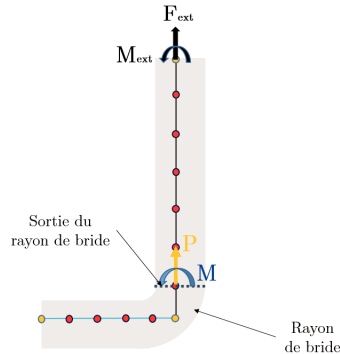


FIGURE 2.14 – Critères de post-traitement du comportement des brides.

2.4.9 Synthèse

L'organigramme de la Figure.2.15 donne un aperçu général des différentes phases et étapes du noyau de calcul. L'outil est programmé sous Matlab®. La première étape consiste en la définition des paramètres du maillage et des matrices de raideur élémentaires, en se basant sur les données géométriques et matériaux, préalablement renseignées. La matrice de raideur globale K_g est ainsi construite en assemblant, d'une part, les matrices de raideur des éléments exprimées initialement dans leurs repères locaux et rapportées dans le repère global du modèle, et d'autre part, en intégrant les relations numériques des couplages cinématiques. Après avoir défini les conditions aux limites, une première étape de résolution du système linéaire de l'équation Eq.2.44 en introduisant l'effort de serrage comme chargement par la modification du vecteur $[F]$. À ce stade, les raideurs des ressorts de contact contribuent toutes à la raideur globale de l'assemblage. Par conséquent, une résolution non linéaire est nécessaire afin de déterminer les ressorts travaillant uniquement en compression, renseignant ainsi un état de contact. Cette vérification est faite de manière itérative, la convergence est atteinte quand deux calculs successifs donnent exactement les mêmes ressorts en compression. L'étape suivante consiste en l'application du chargement extérieur en modifiant le vecteur effort $[F]$. L'état de serrage est traduit dans l'étape de chargement par l'intégration d'une relation cinématique entre les nœuds de la vis. Une nouvelle matrice de raideur est donc obtenue et le nouveau système linéaire est résolu de la même façon qu'à l'étape de serrage.

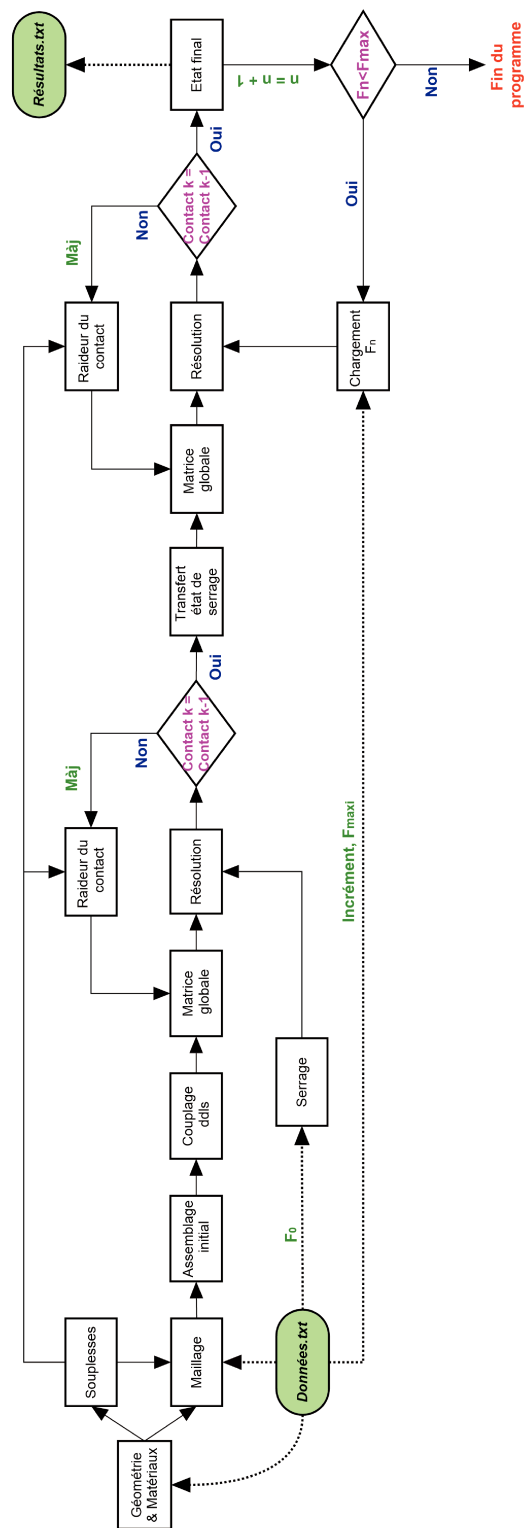


FIGURE 2.15 – Organigramme du code de calcul du modèle semi-analytique.

2.5 Validation fonctionnelle du modèle

Le modèle développé dans le cadre de ces travaux et présenté dans la section précédente permet d'analyser le comportement des assemblages boulonnés multimatériaux de brides cylindriques en se basant sur la méthode des éléments finis. Afin de prendre en compte l'utilisation des matériaux composites, une formulation de la matrice de raideur d'un élément coque orthotrope axisymétrique a été proposée. Avant d'évaluer la représentativité physique et l'efficacité numérique du modèle semi-analytique de l'assemblage, il est indispensable de vérifier la nouvelle formulation de la matrice de raideur des coques orthotropes axisymétriques.

2.5.1 Élément coque orthotrope axisymétrique

Un modèle élément finis 2D axisymétrique d'une bride en **L** a été réalisé dans le solveur Abaqus, afin de valider le comportement de l'élément coque orthotrope axisymétrique développé et utilisé dans le modèle semi-analytique (cf. Figure 2.16). La bride est encastree à l'extrémité droite du pied de bride. Le chargement extérieur est appliqué à l'extrémité de la virole à travers un couplage cinématique avec le point d'application d'un effort axial $F_e = 250 \text{ kN}$. Les éléments utilisés sont les CAX4 avec 4 éléments de maillage dans l'épaisseur. Les dimensions de la bride sont données dans le tableau 2.1 et les paramètres matériaux sont donnés dans le tableau 2.2.

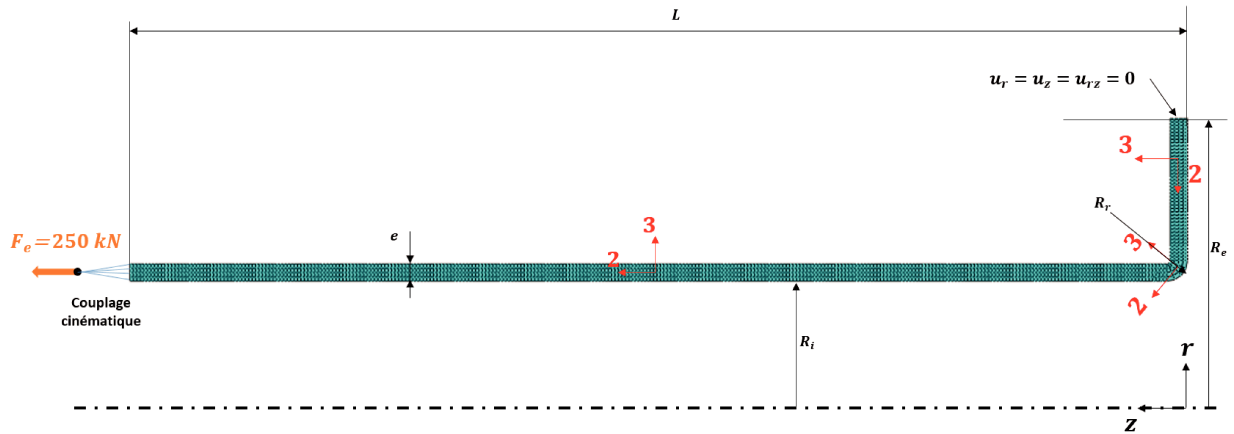


FIGURE 2.16 – Modèle 2D axisymétrique d'une bride en **L** soumise à un chargement axial.

TABLE 2.1 – Dimensions de la bride **L** en mm.

L	e	R_r	R_i	R_e
300	5	6	1017.5	1064

TABLE 2.2 – Propriétés matériaux de la bride.

E_1/E_2	E_1/E_3	ν_{12}/ν_{13}	ν_{12}/ν_{23}	G_{12}/G_{13}	G_{12}/G_{23}
1.3	8.6	0.04	0.05	1.4	1.3

Une comparaison du comportement a été établie entre le modèle 2D axisymétrique et le modèle semi-analytique. La Figure 2.17 montre les deux configurations déformées à la fin du chargement. Qualitativement, les deux modèles montrent le même comportement, l'effort axial génère une légère flexion à la sortie du rayon de bride et le modèle semi-analytique reproduit bien ce comportement.

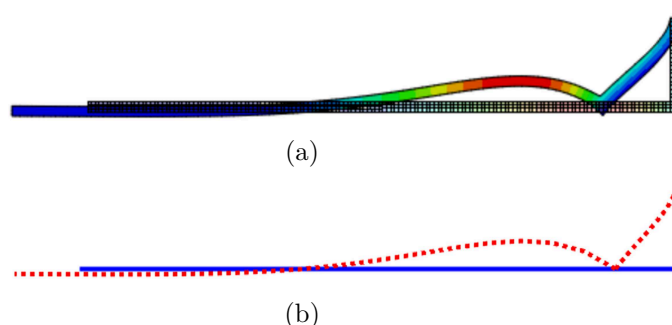


FIGURE 2.17 – Configuration déformée de la bride donnée par le modèle EF 2D axisymétrique (a) et le modèle semi-analytique développé (b) avec une amplification de x50.

Tout d'abord, une influence de maillage sur les résultats de calcul a été constatée. Pour cela, une étude de convergence de maillage a été effectuée au préalable, afin de déterminer la taille de l'élément optimale à choisir. Il s'agit principalement de la taille des éléments au niveau du pied de bride. L'étude d'influence (cf. Figure 2.18) a permis d'observer, d'une part, une surestimation de la raideur quand la taille de l'élément est petite ($\leq 1mm$). En effet, le ratio l/t de l'élément devient très faible, ce qui rigidifie l'élément et résulte en un verrouillage numérique. D'autre part, la convergence a été constatée autour d'une taille de $2.5 mm$ à $3.5 mm$.

Le calcul du comportement de la bride avec le modèle analytique a été réalisé avec des éléments de taille $3mm$ au niveau du pied de bride et de $11mm$ au niveau de la virole. Afin d'évaluer la pertinence de la formulation de l'élément coque axisymétrique, une comparaison quantitative des déplacements calculés par les deux modèles a été établie.

La Figure 2.19 montre les courbes effort-déplacement dans les directions axiales et radiales, données par les deux modèles. En prenant le modèle EF 2D axisymétrique comme modèle de référence, on peut statuer sur le fait que le modèle semi-analytique fournit de bons résultats. Une légère différence est notée pour le calcul des déplacements axiaux. Ceci peut être expliqué par le fait que le cisaillement n'est pas pris en compte dans la matrice de raideur de l'élément coque orthotrope développé ici. Cet effet est présent de manière notable au niveau du pied de bride, où le ratio L/t est faible.

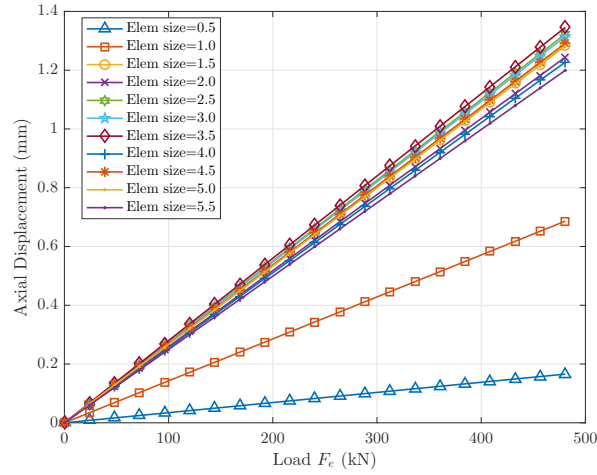


FIGURE 2.18 – Étude d'influence de la taille des éléments dans la partie pied de bride sur le déplacement axial de la bride, donné par le modèle semi-analytique.

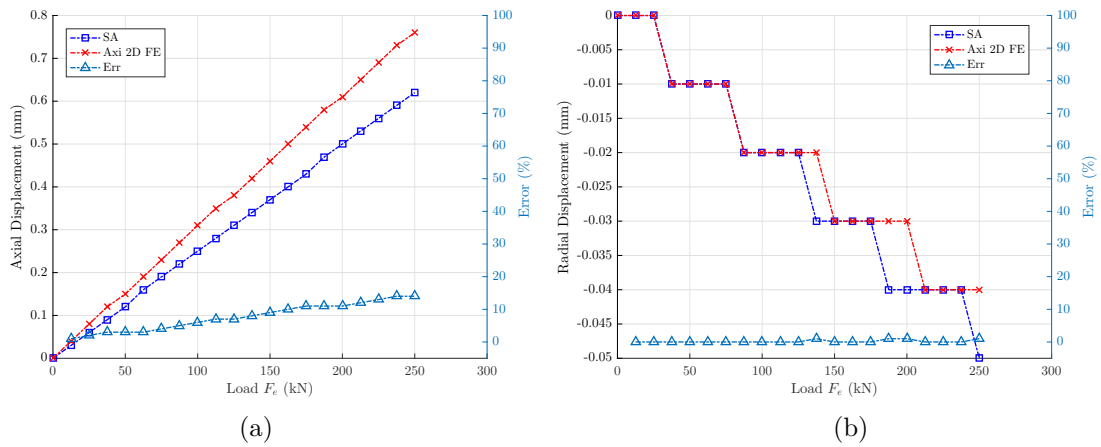


FIGURE 2.19 – Comparaison du déplacement axial (a) et du déplacement radial (b) entre le modèle semi-analytique développé et le modèle EF 2D axisymétrique.

Afin de tenir compte de cet effet d'épaisseur introduisant du cisaillement hors plan, un coefficient correctif qui permet de modifier la matrice de raideur de l'élément coque orthotrope, orienté à 90° (configuration plaque), a été introduit. La matrice de raideur est ainsi multipliée par $C_s = 0.75$. Après l'application de cette correction, les nouveaux résultats du calcul sont répertoriés dans la Figure 2.20.

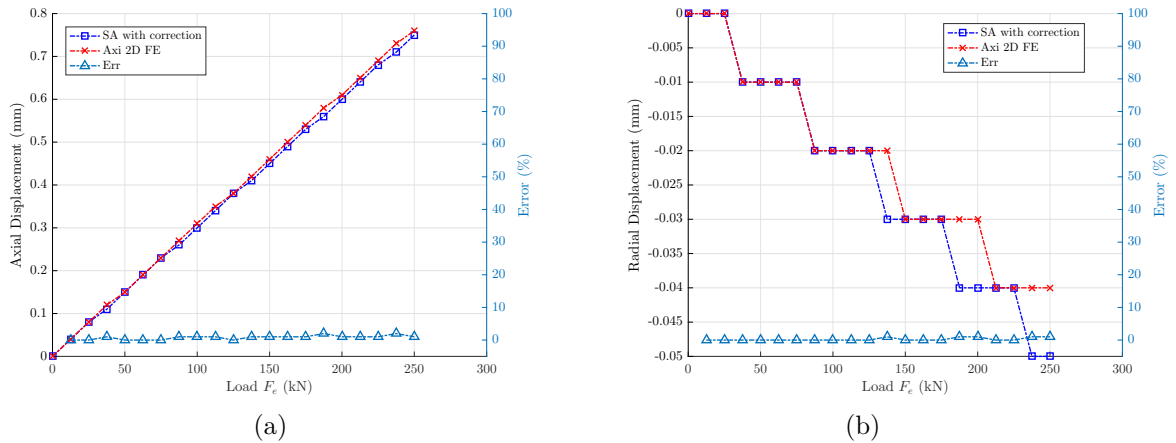


FIGURE 2.20 – Comparaison du déplacement axial (a) et le déplacement radial (b) entre le modèle semi-analytique développé et le modèle EF 2D axisymétrique après l'introduction du coefficient C_s .

L'introduction du coefficient correctif permet d'améliorer les résultats du déplacement axial tout en conservant la corrélation en déplacement radial. L'erreur maximale ne dépasse pas 1,2%.

Cette étude a permis de valider la nouvelle formulation de l'élément coque orthotrope proposée dans ces travaux, elle est utilisée dans l'identification des matrices de raideur des éléments coques représentant la bride composite. Dans ce qui suit, une application du modèle à un cas d'étude académique d'un assemblage composite/métallique est présentée.

2.5.2 Validation sur cas académique d'assemblage boulonné multimatériaux

Le modèle semi-analytique est développé dans une approche de prédimensionnement, il devrait permettre d'effectuer des études paramétriques dans un temps de calcul réduit. Cependant, il faut d'abord que le modèle puisse fournir des résultats physiquement admissibles et reproduire au mieux le comportement réel de l'assemblage.

Comme première vérification, il a été choisi de valider le modèle semi-analytique par rapport à un calcul éléments finis 3D sur un cas d'étude académique.

2.5.2.1 Présentation du cas d'étude

Le modèle a été développé pour le dimensionnement des assemblages de brides des carters, principalement du carter fan. Par conséquent, le choix de la géométrie a été effectué en se basant sur des dimensions du même ordre de grandeur que les brides du carter, sur un secteur angulaire de 1.33° avec une géométrie simplifiée. L'assemblage choisi est un assemblage multimatériaux. La bride supérieure est en matériau composite dont les constantes d'ingénieur sont équivalentes au matériau des brides du carter fan des moteurs LEAP. La bride inférieure est une bride métallique en acier, il en est de même pour le boulon. Ce dernier est modélisé en géométrie simplifiée, prenant le diamètre nominal comme diamètre de la vis.

Un descriptif de la géométrie de l'assemblage est donné dans la Figure 2.21.

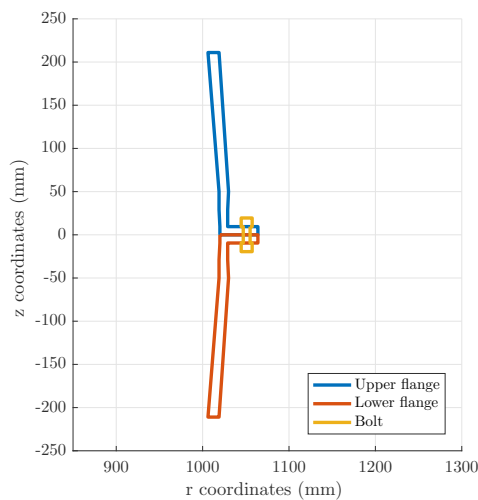


FIGURE 2.21 – Description de la géométrie du cas d'étude.

2.5.2.2 Modèle paramétré éléments finis 3D

Le modèle EF représentatif du cas d'étude est illustré par la Figure 2.22. Une routine Abaqus-Python a été développée afin de faciliter la création automatique des modèles équivalents, tout en agissant rapidement sur les différents paramètres du modèle. Dans cette application, le maillage est réalisé avec les éléments C3D8I, permettant de mieux capter le comportement en flexion. La bride inférieure est encastree tout le long du calcul. La première étape de calcul consiste à installer la précharge. Pour cela, des conditions aux limites, telles qu'elles sont représentées dans la Figure 2.22, sont introduites, afin d'éliminer les modes rigides du boulon. La fonction précharge est appliquée sur la section médiane, au même niveau que le plan de joint de l'assemblage. Les conditions aux limites appliquées à la vis sont désactivées après l'étape de précharge. La deuxième étape consiste à appliquer le chargement

extérieur. Seul un effort axial sectoriel $F_z = 10 \text{ kN}$ est appliqué à la bride supérieure, en 10 incréments, par le biais d'une pression équivalente. Dans le but de représenter l'axisymétrie du modèle semi-analytique, les bords de la bride supérieure et de la bride inférieure sont bloqués dans la direction orthoradiale.

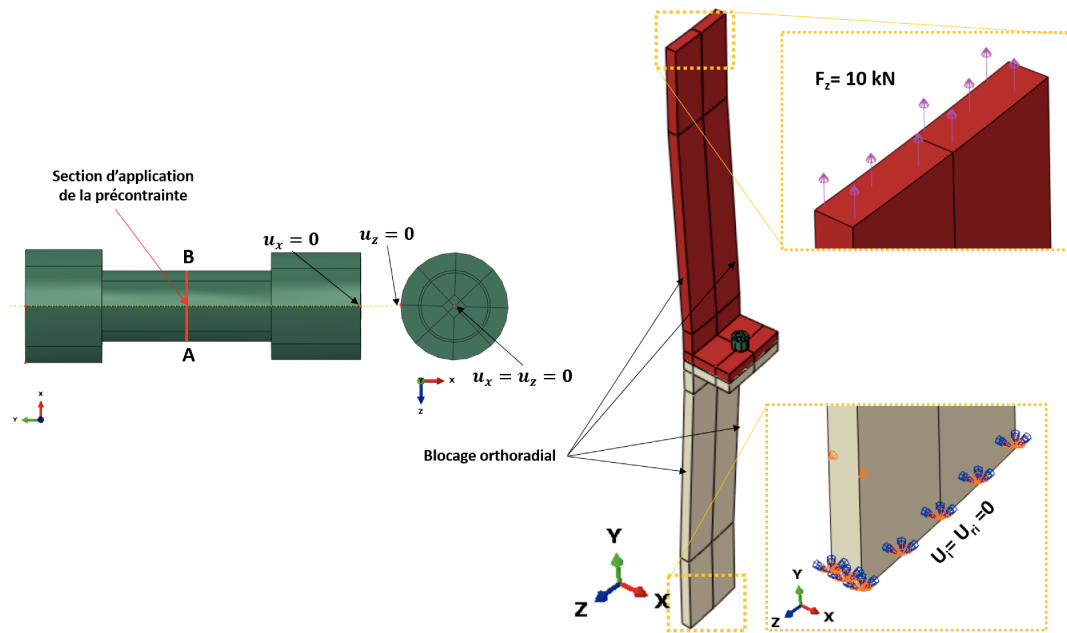


FIGURE 2.22 – Description du modèle EF 3D du cas d'étude.

2.5.2.3 Modèle semi-analytique équivalent

Un aperçu du modèle semi-analytique équivalent de l'assemblage étudié est donné dans la Figure 2.23. Suite aux résultats d'analyse de l'influence de maillage explicite dans la section 2.5.1, les tailles des éléments choisies sont les mêmes que pour la bride en **L**. Afin de mettre en place des conditions aux limites équivalentes au modèle EF 3D, les degrés de libertés du nœud inférieur de la bride inférieure sont bloqués tout au long du calcul. La précharge est appliquée telle que décrite précédemment. À l'étape du chargement, l'effort axial F_z est appliqué au nœud supérieur de la bride supérieure.

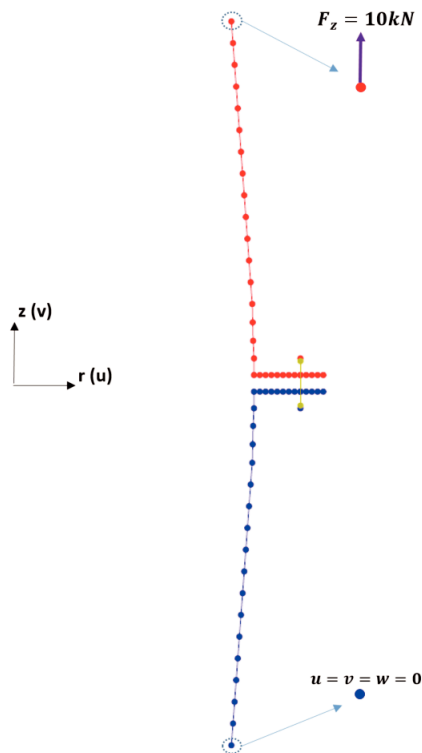


FIGURE 2.23 – Modèle semi-analytique équivalent au cas d'étude.

2.5.2.4 Discussion

Dans un premier temps, l'allure de la déformation de l'assemblage donnée par les deux modèles a été analysée. On constate que le comportement global prédit par les deux modèles est très similaire. À l'étape de précharge (cf. Figure 2.24), les brides sont soumises à une compression et le boulon à la traction. Le déplacement axial de la bride composite est plus important que celui de la bride inférieure ce qui est totalement logique puisque cela représente la différence des deux raideurs. Le tableau 2.3 montre les valeurs des déplacements des deux brides. L'application de l'effort extérieur résulte en la séparation des deux brides et une déformation plus accentuée à la sortie de l'angle droit de la bride. La déformée donnée par les deux modèles est illustrée par la Figure 2.25.

TABLE 2.3 – Comparaison des déplacements maximums des brides à l'étape de précharge.

	Bride supérieure		Bride inférieure	
	EF	SA	EF	SA
$max v $	0.0137	0.0121	0.003	0.002

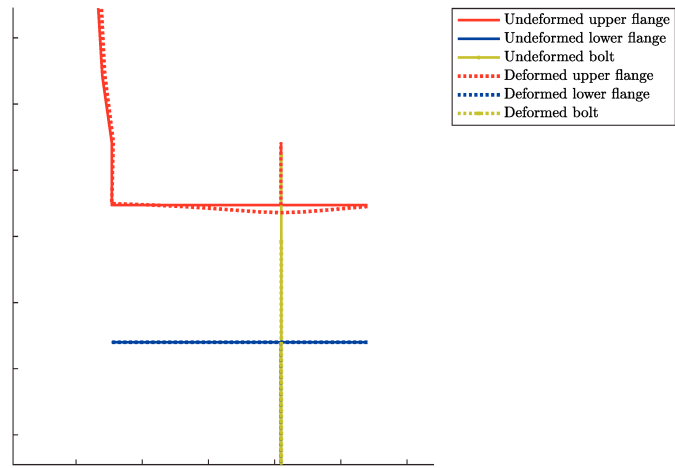


FIGURE 2.24 – Comportement de l'assemblage soumis à la précharge, donné par le modèle semi-analytique (amplification x100).

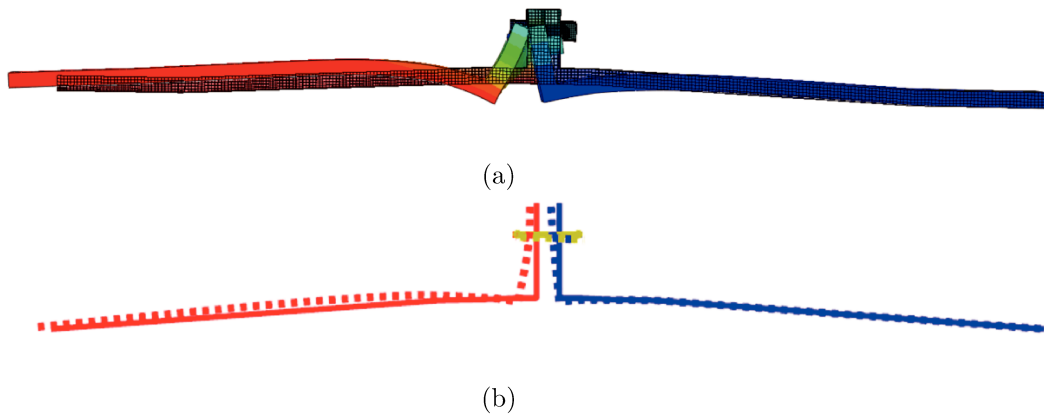


FIGURE 2.25 – Comportement global de l'assemblage donné par le modèle EF 3D (a) et le modèle semi-analytique (b).

Comportement du boulon :

Comme expliqué auparavant, l'application d'un effort axial en haut de la bride supérieure génère de la flexion et de la traction sur le boulon. Le calcul de ces contraintes à travers le modèle semi-analytique se fait avec la méthode expliquée dans la partie 2.4.8.1. Dans le modèle EF 3D, le calcul se fait en récupérant les contraintes aux nœuds **A** et **B** (cf. Figure 2.22) et en appliquant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{t_b} &= \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} \\ \sigma_{f_b} &= \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \\ \sigma_{N_b} &= \sigma_{t_b} + \sigma_{f_b}\end{aligned}\tag{2.51}$$

où σ_{t_b} est la contrainte de traction du boulon, σ_{f_b} est la contrainte de flexion et σ_{N_b} est la contrainte normale totale.

Tout d'abord et dans le but de vérifier que le modèle semi-analytique installe bien la précharge, une vérification des données de serrage a été effectuée. Le tableau 2.4 montre les valeurs de la contrainte à la précharge données par les deux modèles. Il a été constaté que même à la précharge, une légère flexion a lieu au niveau de la section [AB] du boulon.

TABLE 2.4 – Comparaison des contraintes de précharge entre le modèle EF et le modèle semi-analytique (SA).

	Boulon	
	EF	SA
σ_{t_b} (MPa)	405	403.3
σ_{f_b} (MPa)	5.3	1.7

L'évolution de ces contraintes au cours du chargement est tracée dans les courbes de la Figure 2.26. Avant que l'effort extérieur atteigne la valeur de $F_e = 4 \text{ kN}$, le boulon est soumis principalement à sa prétension accompagnée d'une légère flexion. Après le décollement, la pente devient de plus en plus importante et la contrainte de flexion augmente. Il s'agit du comportement type de la liaison dans un assemblage excentré chargé axialement. La comparaison des deux calculs montre que le modèle semi-analytique fournit de très bons résultats. L'écart maximal en valeur absolue est de 58 MPa pour la traction et elle est de 55 MPa pour la flexion. L'écart total relatif en termes de contraintes normales est de 1,6%.

Comportement de la bride :

Nous avons vu que l'allure de la déformée des brides donnée par le modèle semi-analytique correspond bien à celle donnée par le modèle EF 3D. Afin de quantifier les résultats du calcul, l'évolution des efforts et moments dans la bride composite a été analysée. La section où les efforts sont analysés est celle qui se trouve au niveau de la partie la plus déformée,

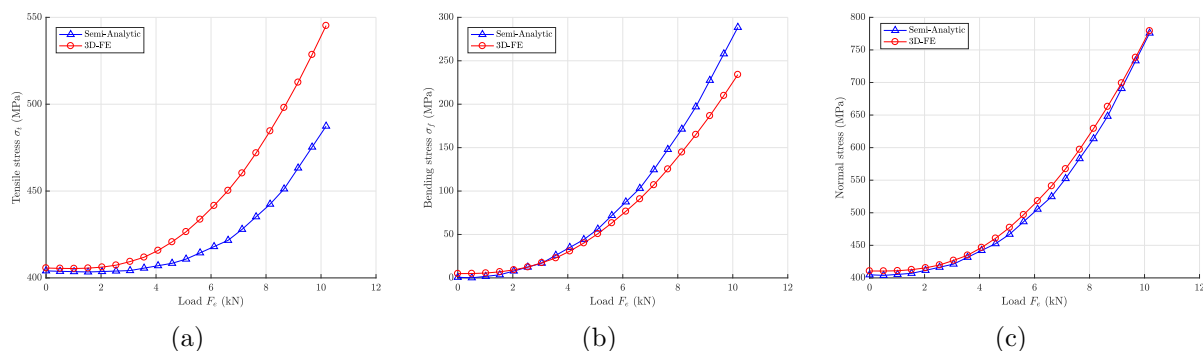


FIGURE 2.26 – Comparaison entre le modèle EF 3D et le modèle semi-analytique : contrainte de traction (a), contrainte de flexion (b) et la contrainte normale équivalente (c) au niveau de la section [AB] du boulon.

notée S_{fl} et illustrée par la Figure 2.27. L'évolution des réactions au niveau de cette section est tracée dans la Figure 2.28 répertoriant les résultats du calcul semi-analytique et EF 3D. Une bonne cohérence des résultats est observée au niveau de l'effort axial et du moment de flexion. Cependant, un écart de 9% est observé pour les valeurs du moment résultant, ceci peut s'expliquer par la formulation de la raideur de l'élément hybride, qui résulte en une légère rotation de la bride à l'étape de serrage.

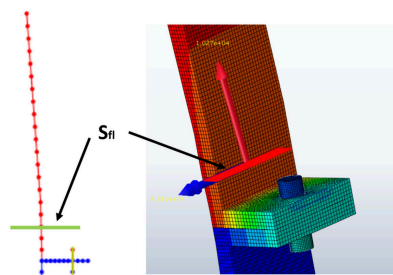


FIGURE 2.27 – Section S_{fl} où sont récupérés les efforts et moments dans la bride composite.

Comportement du contact

L'état de contact entre les deux brides évolue avec l'augmentation de l'effort. La limite de décollement représente dans plusieurs démarches de conception un des critères sensibles de dimensionnement. Physiquement, elle correspond à un effort au-delà duquel la surface de contact dépasse la demi-largeur de la tête de vis. D'un point de vue analytique, elle correspond à l'effort au-delà duquel la vitesse d'évolution de la contrainte de flexion augmente, ce qui correspond dans ce cas d'étude, à l'effort $F_e = 4 \text{ kN}$. Afin d'évaluer la pertinence du modèle semi-analytique à prédire l'évolution de l'état de contact, une comparaison entre les deux modèles a été établie. L'analyse est basée sur le point de décollement et la surface de contact

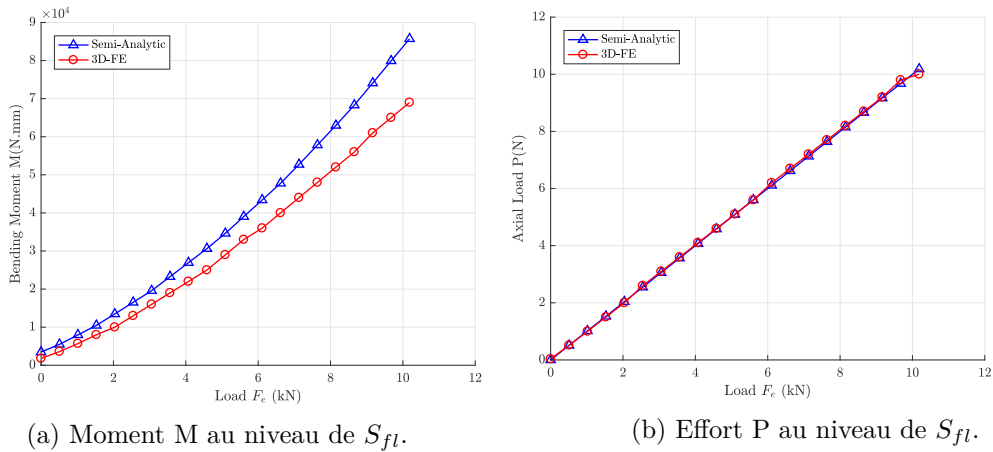


FIGURE 2.28 – Comparaison du comportement de la bride composite entre le modèle EF 3D et le modèle semi-analytique.

apparente. Dans le modèle semi-analytique, la surface de contact est identifiée par la somme des longueurs des éléments adjacents aux ressorts de contact travaillant en compression, ce qui correspond à la pénétration de la bride supérieure dans la bride inférieure. Juste après l'application de la précharge, un léger décollement est observé au niveau du talon et ce phénomène est bien représenté par le modèle semi-analytique. Pendant le chargement, la surface de contact se déplace vers l'extrémité droite du pied de bride avec une diminution de la surface de contact. La Figure 2.29 montre l'état de contact au moment de la précharge, au moment du décollement et à la fin du chargement. On constate que le modèle semi-analytique arrive à bien reproduire l'évolution de l'état de contact.

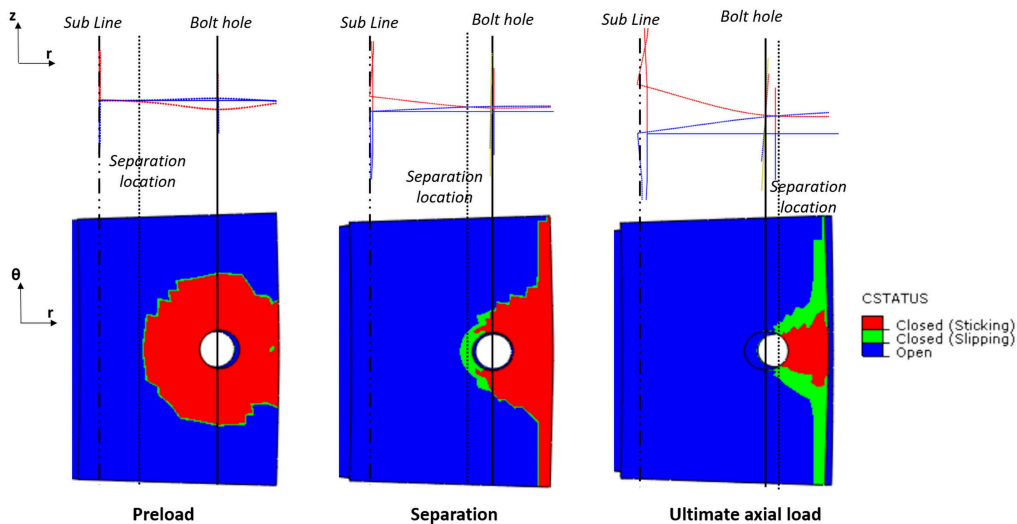


FIGURE 2.29 – Comparaison de l'état de contact entre le modèle EF 3D et le modèle semi-analytique.

La validation primaire du modèle semi-analytique a été réalisée sur la base de comparaison du comportement d'un assemblage boulonné de brides composite/métallique par rapport au comportement donné par le modèle EF 3D de l'assemblage. Les résultats montrent que le modèle arrive à bien reproduire le comportement global de l'assemblage. L'erreur sur les contraintes vues par la vis ne dépasse pas 1,6% et l'erreur sur les réactions dans les brides est d'environ 10%.

2.6 Synthèse

Un code de calcul semi-analytique a été développé dans le but de dimensionner des assemblages boulonnés de brides composites/métalliques, sous les hypothèses d'un comportement linéaire non endommageable et en utilisant la méthode des éléments finis avec des modélisations simplifiées. Le modèle permet d'analyser le comportement global de l'assemblage ainsi que le comportement local du boulon, de la bride et du contact. Grâce à une validation primaire sur un cas d'étude académique, le modèle a démontré ses capacités à prédire le comportement de l'assemblage avec des marges d'erreur acceptables, dans une logique de prédimensionnement. Toutefois, il convient de bien définir les paramètres de maillage, car les résultats en dépendent. Sous l'hypothèse du bon choix des paramètres, le modèle semi-analytique développé ici s'avère très intéressant dans une démarche de prédimensionnement, puisqu'il fournit des résultats satisfaisants et permet un gain en temps de calcul 4 fois plus rapide que le modèle EF 3D (exemple pris sur l'application effectuée dans ce chapitre).

La validation du nouveau modèle de calcul simplifié doit obligatoirement passer par une validation expérimentale, afin de s'affranchir des phénomènes réels, ayant lieu pendant la mise en service des assemblages boulonnés. Pour ce faire, une campagne expérimentale allant de l'échelle du boulon à l'échelle intermédiaire "structure" a été réalisée et fait l'objet du prochain chapitre.

Étude expérimentale

Dans ce chapitre, une campagne expérimentale à trois niveaux d'échelles est présentée : essais de caractérisation du boulon, essais intermédiaires où un secteur de bride à un boulon est soumis à un chargement de traction et enfin, des essais à échelle "structure". Pour ces derniers essais, un secteur de bride à trois boulons, dont le comportement est représentatif de la bride réelle de la ligne de carter, est soumis à un chargement de traction. Le but de ces essais est, d'une part, la compréhension du comportement des assemblages des brides CMO/métal, et d'autre part, de disposer d'une base expérimentale de validation, afin d'évaluer le modèle semi-analytique développé.

Sommaire

3.1	Introduction	103
3.2	Essais de caractérisation des boulons	104
3.2.1	Comportement de la liaison	105
3.2.2	Caractérisation de la vis	106
3.3	Essais de traction sur bride monofixation	109
3.3.1	Protocole expérimental	109
3.3.1.1	Montage d'essai	109
3.3.1.2	Instrumentation de la bride	109
3.3.1.3	Instrumentation de la vis	110
3.3.1.4	Corrélation d'images numérique	113
3.3.1.5	Déroulement de l'essai	114
3.3.2	Discussion des résultats	115
3.3.2.1	Serrage	115
3.3.2.2	Cyclage	116
3.3.2.3	Chargement	118
3.3.3	Conclusion partielle	124
3.4	Essais de traction sur brides trois-fixations	125
3.4.1	Description des éléments d'assemblage	126
3.4.2	Matrice d'essais	127
3.4.3	Protocole expérimental	127
3.4.3.1	Montage d'essais	127
3.4.3.2	Instrumentation	127
3.4.3.3	Déroulement de l'essai	129
3.4.4	Analyse des résultats	130
3.4.4.1	Serrage	130

3.4.4.2	Cyclage	130
3.4.4.3	Chargement	131
3.5	Bilan de l'étude expérimentale	143

3.1 Introduction

Nous avons évoqué lors de l'étude bibliographique que les travaux de recherche concernant le comportement des assemblages boulonnés excentrés de matériaux composites sont peu nombreux, encore moins quand il s'agit des structures tissées. Ainsi, la réalisation des essais expérimentaux s'avère primordiale sur des assemblages représentatifs de l'application visée par ces travaux de thèse. De ce fait, des brides composites découpées d'un carter industriel ont été utilisées pour ces essais. Il a été montré dans des expériences précédentes au sein de Safran Aircraft Engines que sur les assemblages boulonnés de ce type de brides, la sollicitation en traction est le chargement le plus représentatif des cas de charges réels, habituels et exceptionnels pour lesquels le carter est dimensionné. Ainsi, des essais de traction sont menés sur deux types de bride :

- Un secteur de bride à un boulon, non représentatif du comportement réel du carter, mais dont la configuration permet d'évaluer le comportement local au niveau de la liaison. Le modèle semi-analytique étant pseudo-axisymétrique (axisymétrie de la structure, mais pas de la fixation), il se réduit à l'étude d'un seul secteur monofixation de la bride. Sous l'hypothèse que la condition limite de blocage orthoradial du secteur n'influence pas le comportement de la liaison, (hypothèse qui sera examinée dans le chapitre 4), cet essai constituera une base de validation directe du modèle simplifié développé dans le cadre de cette thèse.
- Des secteurs de brides à trois boulons, dont le comportement peut être représentatif du comportement réel du carter dans la zone de rétention d'aube, avec la configuration de l'assemblage dédiée.
Dans la configuration moteur, une contreplaque déposée au-dessus du pied de bride fait partie des pièces de l'assemblage. Nous allons étudier son influence lors de ces essais.

L'objectif principal de ces essais est de disposer d'une base expérimentale pour la validation du modèle. Une instrumentation riche a été utilisée afin de suivre en temps réel le comportement des pièces assemblées et du boulon. L'exploitation de ces dispositifs de mesure permet d'analyser et de corréler, par la suite, les grandeurs physiques (déplacements, déformations, contraintes...) à plusieurs endroits des spécimens. Une instrumentation intrusive a été réalisée sur les vis. La bride a été instrumentée avec des jauges de déformation et la stéréo-corrélation d'images numérique.

La première partie de ce chapitre va s'intéresser au comportement de la liaison et à la caractérisation de la vis. L'essai de traction de la bride monofixation sera présenté dans la deuxième partie. Finalement, les essais de traction menés sur les brides 3 fixations feront l'objet de la dernière partie.

3.2 Essais de caractérisation des boulons

L'essai de caractérisation de la liaison a été réalisé pour deux raisons :

- Vérifier les données matériaux qui nous ont été fournies à savoir le module de Young de la vis, sa limite élastique et sa loi de comportement. En effet, il peut y avoir des dispersions non négligeables de propriétés mécaniques entre plusieurs lots de fabrication.
- Analyser le comportement de la liaison vis-écrou, sous la sollicitation de traction.

Pour ce faire, un nouveau montage d'essai a été conçu spécifiquement à cet effet. Il se compose de deux chapes permettant de fixer l'ensemble vis-écrou, deux axes liant chacune des chapes aux plaques qui sont serrées sur les mors de la machine de traction. Cette dernière est une machine de traction-compression hydraulique de la marque INSTRON avec une capacité maximale de 250kN. La Figure 3.1 montre le montage d'essai. Les vis utilisées sont de diamètre nominal $d = 9.52mm$. Afin de vérifier la répétabilité de l'essai, cinq essais à rupture ont été réalisés.

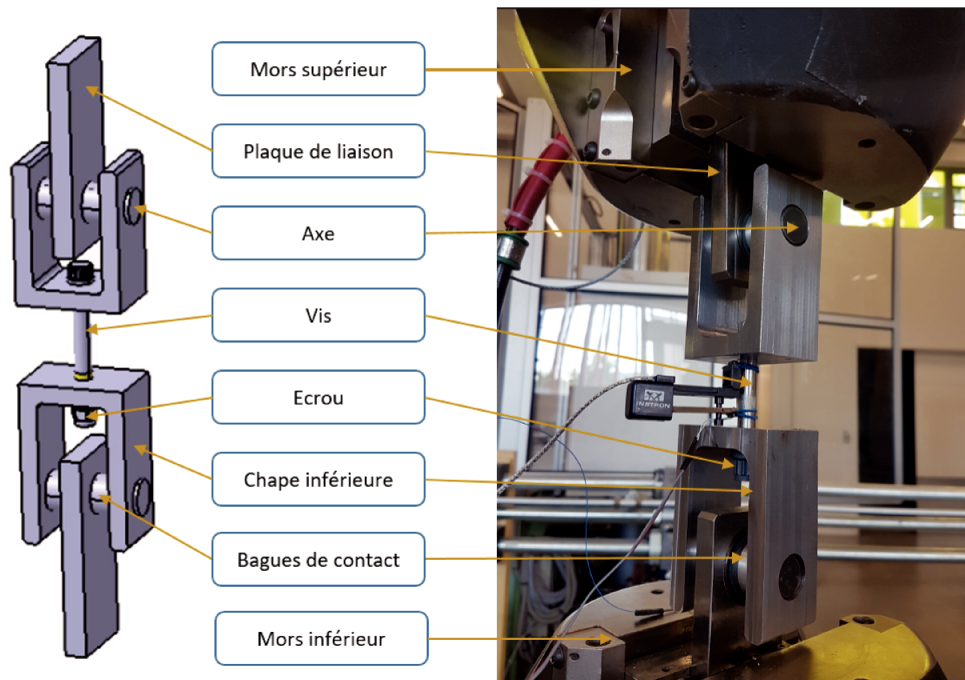


FIGURE 3.1 – Montage d'essai de caractérisation du boulon.

En termes d'instrumentation, une jauge de déformation a été collée sur le fût de la vis, afin de suivre sa déformation réelle (cf. Figure 3.2).

Le vissage s'effectue au niveau de l'écrou, cette méthode permet d'immobiliser la vis afin de ne pas abîmer la jauge de déformation. Le tableau 3.1 récapitule les valeurs des couples de freinage appliqués à chaque essai. Il s'agit du couple résistant de ce type d'écrou utilisé souvent en aéronautique. Celui-ci est vendu légèrement déformé pour générer un couple de freinage et éviter un éventuel risque de dévissage complet, en fonctionnement.

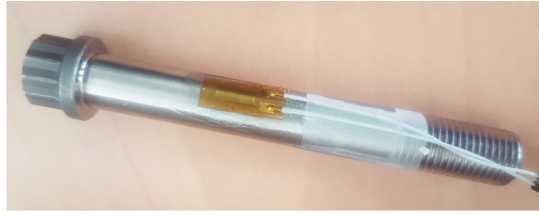


FIGURE 3.2 – Vis instrumentée avec une seule jauge axiale.

TABLE 3.1 – Estimation des valeurs des couples de freinage à chaque essai.

Essai	Couple de freinage (N.m)	Moyen de serrage	Aperçu du serrage
1	2 ~ 3	Clé dynamométrique	3/4 des filets en prise
2	4 ~ 5	Clé dynamométrique	vissage jusqu'au ras de la vis
3	6 ~ 7	Clé dynamométrique	2 filets sortant au bout de la vis
4	5 ~ 6	Clé dynamométrique	1 filet sortant au bout de la vis
5	4 ~ 5	Clé dynamométrique	1 filet sortant au bout de la vis

Remarques

- Ici, le couple de freinage est équivalent au couple de frottement entre la vis et l'écrou car aucun contact n'a lieu entre les deux chapes suite au serrage.
- Il y a eu un glissement entre les mâchoires et les plaques de liaison au cours de l'essai N°4, ce qui nous a forcés à l'arrêter.

3.2.1 Comportement de la liaison

La Figure 3.3a montre la variation de l'effort machine en fonction du déplacement du vérin. La courbe affiche un comportement linéaire identique pour les cinq essais suivi d'un comportement non linéaire marquant des dispersions au voisinage de la rupture. Cette dispersion est due au couple de freinage qui varie d'un essai à un autre. En effet, plus ce couple est important plus la longueur de prise de l'écrou est grande, ce qui fait que la contrainte de cisaillement induite dans les filets de l'écrou est répartie sur un plus grand nombre de filets. Cette répartition augmente par conséquent la résistance de l'écrou. Le couple de freinage lors de l'essai N°1 étant le plus faible, la rupture de l'écrou a eu lieu plus tôt, à $F \sim 72kN$. À ce stade, la plastification de la vis constatée, via la déformation de la jauge, n'est toujours pas atteinte comme le montre la Figure 3.3b, ce qui confirme le mode de rupture obtenu à la fin de l'essai : rupture des filets de l'écrou. En effet, ce mode de rupture a été obtenu pour les cinq essais réalisés. Une visualisation des écrous rompus est donnée dans l'annexe C.

Les autres essais ont montré un comportement presque identique de l'ensemble vis-écrou et de la vis, avec une rupture aux alentours de $82kN$. L'essai N°4 que nous avons arrêté suite au glissement des mors, affiche lui aussi le même comportement (avant glissement) que

l'ensemble des essais. La Figure 3.3b représente la variation de la déformation vue par la jauge en fonction de l'effort. Excepté l'essai $N^{\circ}1$, tous les essais montrent le même comportement avec plus de dispersion au voisinage de la rupture, ces dispersions sont plus accentuées par rapport à la Figure 3.3a. Cela confirme qu'une légère résistance de l'écrou permet de voir plus de plasticité dans la vis. Ici encore, l'influence du couple de freinage est bien mise en évidence. La résistance des filets de l'écrou, suite à l'efficacité du couple de freinage (suppression du jeu par un serrage radial dans les filets de la vis), permet de constater plus de déformations sur la vis, comme dans le cas de l'essai $N^{\circ}3$ où le couple de freinage est le plus élevé.

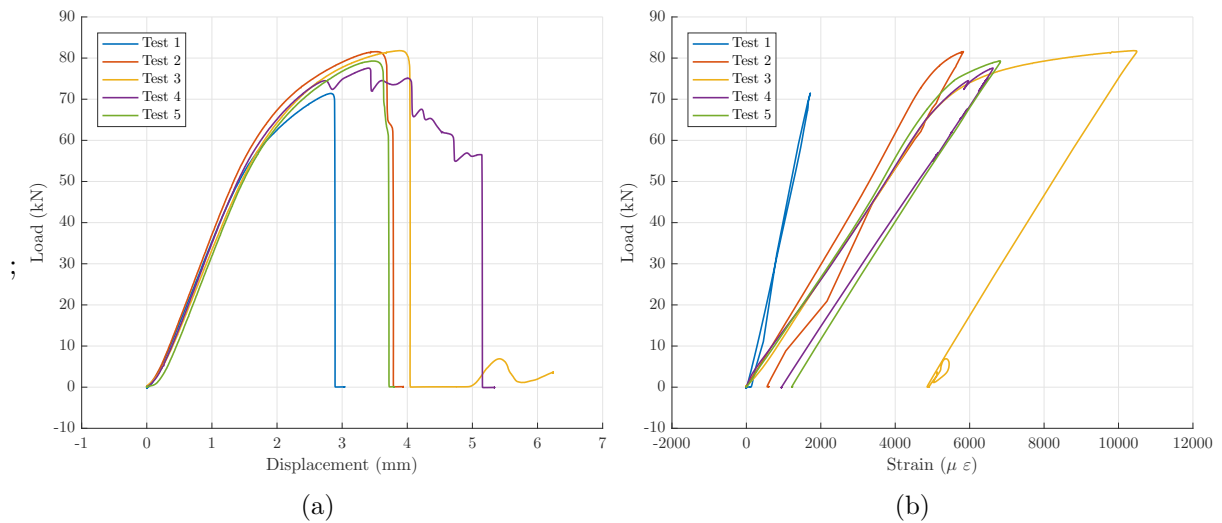


FIGURE 3.3 – Courbe Effort machine - Déplacement vérin (a) et Courbe Effort machine - Déformation jauge (b).

3.2.2 Caractérisation de la vis

Afin d'identifier le module de Young et la limite élastique du matériau de la vis, nous allons nous baser sur les résultats des essais 2, 3, 4 et 5, ceux-ci étant les plus répétitifs. En supposant que l'effort de la machine est le même que celui vu par la section de la vis, où est collée la jauge, on peut tracer la courbe contraintes-déformations vues par la vis à travers le calcul de la contrainte normale :

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

où F est l'effort appliqué par la machine et A la section de la vis. L'évolution de la contrainte en fonction des déformations dans la vis est présentée dans la Figure 3.4.

Le modules de Young ainsi que la limite élastique identifiés à travers ces essais sont donnés dans le tableau 3.2. Les valeurs retenues pour la suite de l'étude sont basées sur la moyenne des valeurs identifiées.

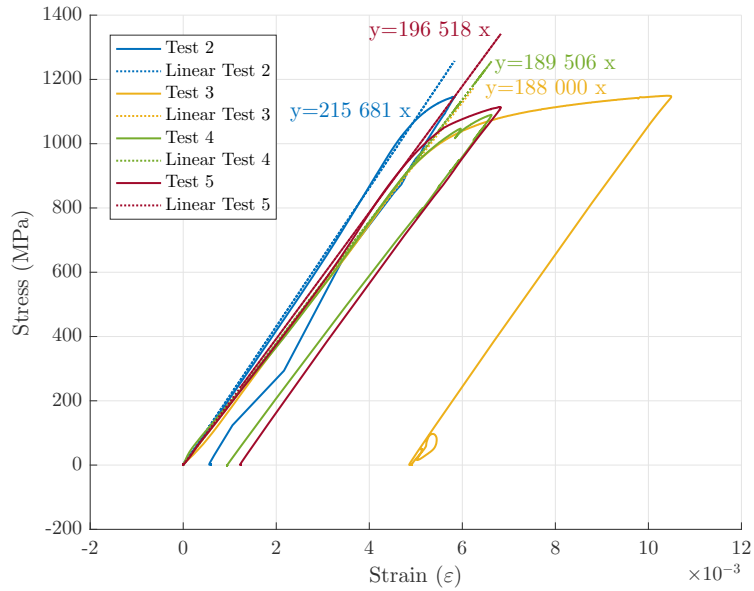


FIGURE 3.4 – Courbe contraintes-déformations de la vis.

TABLE 3.2 – Valeurs du module de Young et de la limite élastique identifiées à travers chaque essai.

Essai	Module de Young E (MPa)	Limite élastique R_e (MPa)
2	215 681	1064
3	188 000	880
4	189 506	912.4
5	196 518	917.4
Moyenne	197 426	947
Ecart type	12 723	71.5

La loi de comportement global de la vis, intégrant le comportement élastoplastique, a été établie à travers les données de l'essai 3, pour lequel un maximum d'allongement a été constaté. Dans un premier temps, les contraintes et déformations vraies (rationnelles) sont calculées et présentées dans la Figure 3.5a. Ensuite, la part des déformations plastiques sont calculées en procédant à la soustraction de la déformation élastique résiduelle.

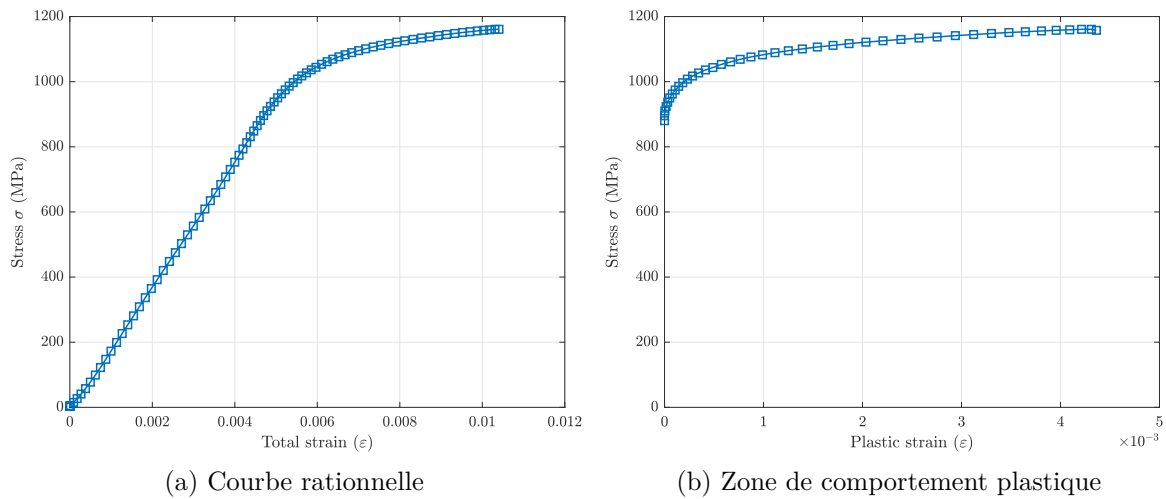


FIGURE 3.5 – Caractérisation de la vis à travers l'essai 3.

Cet essai de traction sur une liaison vis-écrou nous a permis d'analyser, d'une part, le comportement de la liaison sous un chargement axial centré. Pour cette application, la rupture de la liaison est due principalement à la rupture des filets de l'écrou. D'autre part, l'essai a permis de vérifier les caractéristiques matériaux des vis utilisées.

3.3 Essais de traction sur bride monofixation

Afin de disposer d'une base de validation expérimentale dont la configuration est équivalente à l'architecture du modèle semi-analytique, un essai de traction sur une bride d'un secteur angulaire de 1.33° issu d'un carter fan réel a été réalisé. Le secteur testé a été découpé à partir d'une bride se situant dans la zone d'implantation de l'AGB (Accessory Gear Box). La découpe a été réalisée comme le montre la Figure 3.6.

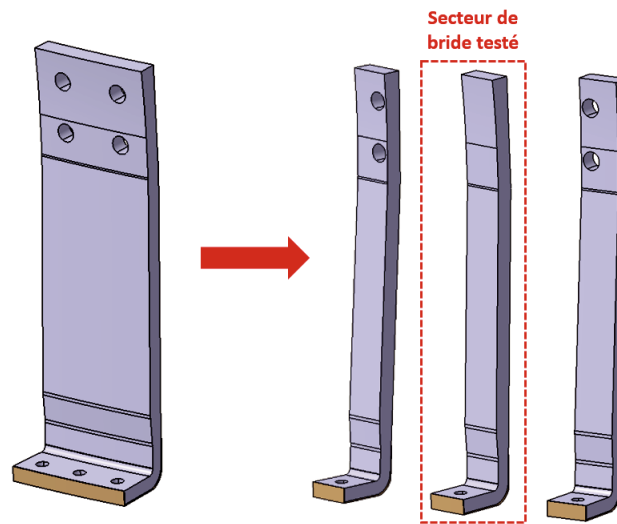


FIGURE 3.6 – Découpe de la bride et secteur de bride testé.

3.3.1 Protocole expérimental

3.3.1.1 Montage d'essai

L'essai est réalisé sur la machine INSTRON, utilisée pour l'essai de traction des boulons. La bride est serrée en haut de la virole entre les mâchoires du mors supérieur et est assemblée grâce à la liaison boulonnée avec un socle, dont la conception et la fabrication ont été réalisées spécifiquement pour les essais de traction sur brides. Le socle est serré à son tour contre les mâchoires du mors inférieur. La Figure 3.7 montre le montage de cet essai.

3.3.1.2 Instrumentation de la bride

Des jauges de déformation ont été collées sur la bride, afin de suivre les déformations et les recalcr à plusieurs positions (cf. Figure 3.8). Dans la partie pied de bride, les jauges **J1**

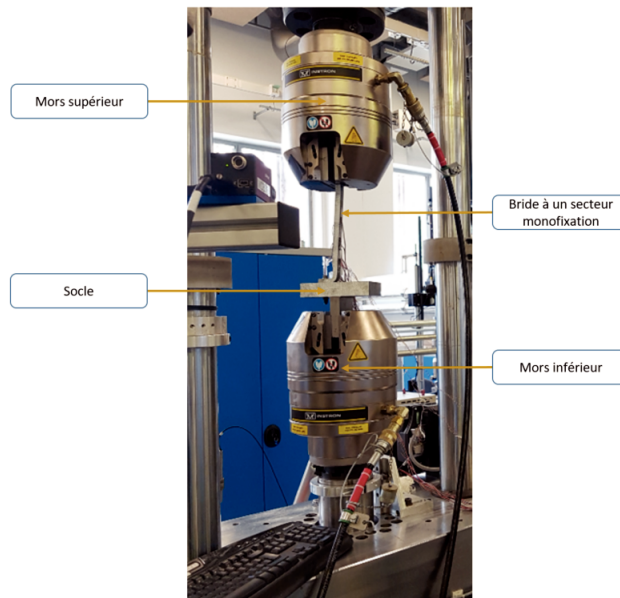


FIGURE 3.7 – Montage d'essai.

et **J2** ont été collées à proximité du trou de perçage. Ce choix permet de s'affranchir des phénomènes ayant lieu autour de la liaison. Ces jauges sont choisies suffisamment petites au regard de leur zones d'implantation. Les jauges **J3**, **J4**, **J5**, **J6**, **J7** et **J8** sont plus grandes car l'espace géométrique d'implantation le permet.

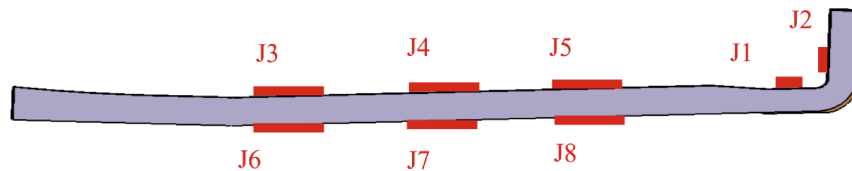


FIGURE 3.8 – Positionnement des jauges sur la bride.

3.3.1.3 Instrumentation de la vis

La démarche de prédimensionnement doit permettre de concevoir un assemblage à travers l'analyse du comportement des différents composants, y compris la vis. Ainsi, ces modèles de conception préliminaires doivent être validés par rapport à des résultats expérimentaux pouvant traduire le comportement réel de la vis. C'est pour cette raison qu'une nouvelle méthode expérimentale d'instrumentation des vis a été mise en œuvre dans le cadre de ces essais.

L'instrumentation développée répond à trois contraintes principales : (i) suivre en temps réel les contraintes de traction, de flexion et de torsion auxquelles la vis est soumise ; (ii) assurer

un minimum de jeu pour empêcher le contact entre les trous de la bride et les jauges, pouvant affecter leur fonctionnement (iii) ; enlever le minimum de matière de la vis, afin de minimiser l'impact de l'instrumentation sur son comportement et sa résistance.

L'instrumentation est réalisée en deux étapes :

Étape 1 : Usinage de la vis

La modification géométrique de la vis en vue de l'instrumentation comprend l'usinage d'une gorge, afin de permettre la bonne pose et la protection des jauges d'une part. D'autre part, des trous de perçages ont été réalisés, afin d'assurer le passage de fils de câblage des jauges à travers la tête de la vis. Pour assurer l'équilibrage de la vis et ne pas modifier son inertie, 4 perçages séparés par un angle de 90° ont été réalisés. Lors de l'usinage de la gorge, une attention particulière doit être portée au fait que la gorge soit réalisée en une seule passe, afin de ne pas créer de zones fragilisées par des reprises de passes qui pourraient favoriser l'initiation et la propagation de fissures. Un aperçu de la vis après usinage est donné par la Figure 3.9.

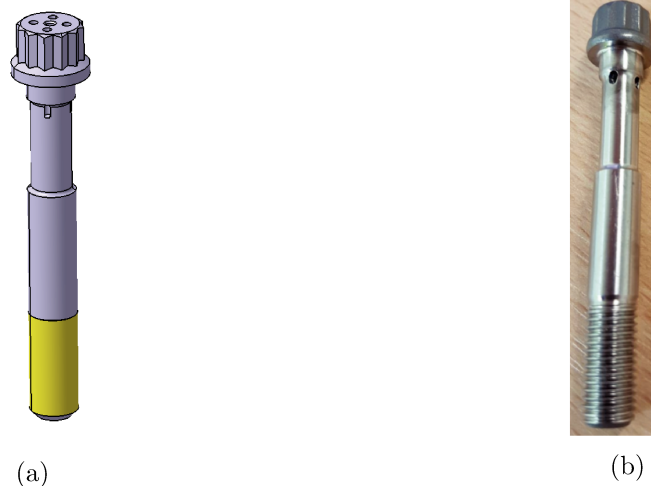


FIGURE 3.9 – Vis usinée en vue de l'instrumentation (a) CAO et (b) vis réelle.

Étape 2 : Pose des jauges

Les jauges sont collées de façon à ce que l'on puisse identifier les trois sollicitations auxquelles la vis serait soumise : la traction, la flexion et la torsion. Trois jauges unidirectionnelles et une rosette $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ ont été collées dans l'alignement des orifices des perçages. La rosette est installée de façon à ce que sa jauge centrale R_{J2} soit parallèle aux trois jauges unidirectionnelles. La Figure 3.10 montre le schéma d'installation des différentes jauges sur la vis. Avec cette instrumentation, les contraintes et déformations sont calculées suivant les formulations récapitulées dans le tableau 3.3.

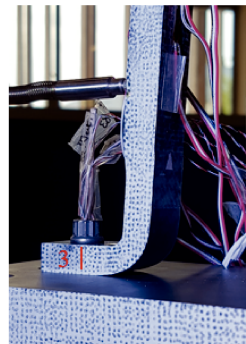
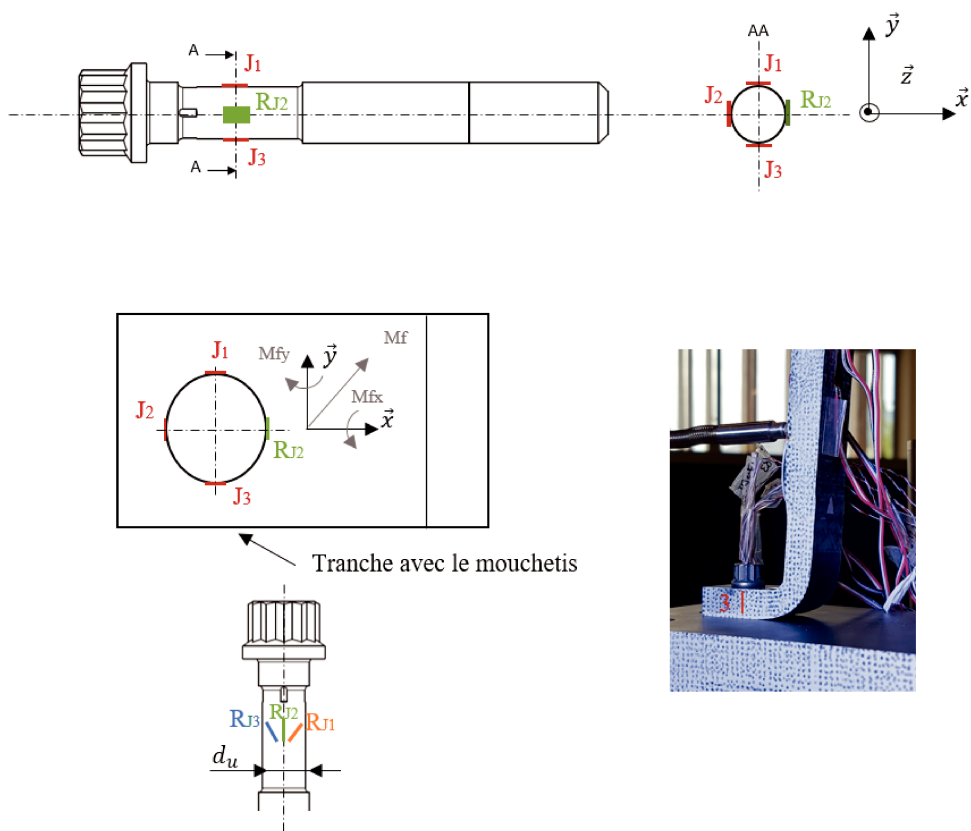


FIGURE 3.10 – Schéma d'instrumentation de la vis.

Le corps de la vis est assimilé à un cylindre de diamètre d_u dont le moment quadratique $I_x = I_y = \frac{\pi d_u^4}{64}$.

TABLE 3.3 – Calcul des différentes sollicitations dans la vis à travers les jauges de déformation.

Sollicitation		Méthode de calcul
Traction	Déformation	$\varepsilon_{traction} = \frac{\varepsilon_{J1} + \varepsilon_{J2} + \varepsilon_{J3} + \varepsilon_{RJ2}}{4}$
	Contrainte	$\sigma_{traction} = E \varepsilon_{traction}$
Flexion \vec{x}	Déformation	$\varepsilon_{flexion_x} = \frac{\varepsilon_{J3} - \varepsilon_{J1}}{2}$
	Contrainte	$\sigma_{flexion_x} = E \varepsilon_{flexion_x}$
	Moment	$M_{flexion_x} = \frac{2 \sigma_{flexion_x} I_x}{d_u}$
Flexion \vec{y}	Déformation	$\varepsilon_{flexion_y} = \frac{\varepsilon_{RJ3} - \varepsilon_{J2}}{2}$
	Contrainte	$\sigma_{flexion_y} = E \varepsilon_{flexion_y}$
	Moment	$M_{flexion_y} = \frac{2 \sigma_{flexion_y} I_y}{d_u}$
Torsion	Déformation	$\varepsilon_{torsion} = \frac{\varepsilon_{RJ3} - \varepsilon_{RJ1}}{2}$
	Contrainte	$\sigma_{torsion} = 2 G \varepsilon_{torsion}$

Avec E le module de Young et G le module de cisaillement.

3.3.1.4 Corrélation d'images numérique

La mesure de champs 3D est réalisée grâce à deux caméras de 5 Mpixels (Pike 505B de résolution 2452x2054 avec un objectif de 16mm). Un mouchetis est réalisé sur la totalité de la tranche de l'éprouvette. Le mouchetis a également été déposé sur la surface du socle, afin de comparer le déplacement du vérin inférieur vu par la corrélation d'images au déplacement machine. La Figure 3.11 montre une visualisation du mouchetis sur la bride et le socle.



FIGURE 3.11 – Visualisation du mouchetis sur la tranche de la bride et du socle.

3.3.1.5 Déroulement de l'essai

Les étapes les plus importantes de l'essai sont les suivantes :

- **Montage** : Consiste à mettre en place l'ensemble de l'assemblage et serrer le socle et la bride dans les mâchoires de la machine.
- **Serrage** : Pour cet essai, une procédure de serrage particulière a été proposée et adoptée. En effet, le serrage s'effectue en suivant les déformations en temps réel des jauges de la vis, jusqu'à ce qu'elles atteignent la consigne de tension (Précharge), qui est calculée en fonction du niveau de serrage souhaité. Cette procédure remplace le serrage au couple, pour lequel plusieurs sources d'incertitudes peuvent exister.

Le serrage s'effectue en deux phases : serrage à 50% de la consigne puis poursuite du serrage jusqu'à atteindre 100% de la consigne. La valeur de la consigne de la tension de serrage a été choisie de façon à limiter l'endommagement de la bride composite lors de la précontrainte, d'une part. D'autre part, le niveau de serrage a été réalisé de sorte que l'assemblage soit suffisamment souple pour faciliter la corrélation essai-calcul par la suite. Ainsi, l'effort de serrage a été fixé à $F_0 = 10360N$ soit $\sigma_0 = 300 MPa$.

- **Cyclage** : Cette étape de l'essai consiste à appliquer des cycles de charge/décharge, à faible amplitude. Elle permet de vérifier le retour à 0 des jauges et de laisser les différentes pièces du montage se positionner correctement. D'une manière générale, cela permet de limiter l'influence d'éventuelles sources d'inélasticité pour l'étape suivante (glissements ou plastification locale).

Dans cet essai, cinq cycles de charge/décharge ont été appliqués dont les deux premiers cycles à $1kN$ et les trois derniers cycles à $1.5kN$. Le pilotage de la machine a été effectué en effort, à une vitesse de chargement de $5kN/min$.

- **Chargement** : Le chargement est effectué en deux cycles. Le premier chargement s'effectue avec un déplacement imposé de 0.75 mm suivi d'un déchargement en effort imposé pour un retour à 0 effort. Le deuxième cycle s'effectue avec un chargement en déplacement imposé de 1 mm et un déchargement en effort imposé, pour un retour à 0. Ce chargement à deux cycles permet d'avoir une phase où le comportement est élastique et une autre phase où l'endommagement de la structure apparaît. Le pilotage de la machine en déplacement imposé est réalisé à une vitesse de $0.5\text{ mm}/\text{min}$.

3.3.2 Discussion des résultats

3.3.2.1 Serrage

Après l'accostage de l'écrou pour le mettre en contact avec le socle, le serrage est réalisé en deux phases comme expliqué auparavant. La Figure 3.12 montre le comportement des jauges et les contraintes induites dans la vis pendant toute la phase de serrage.

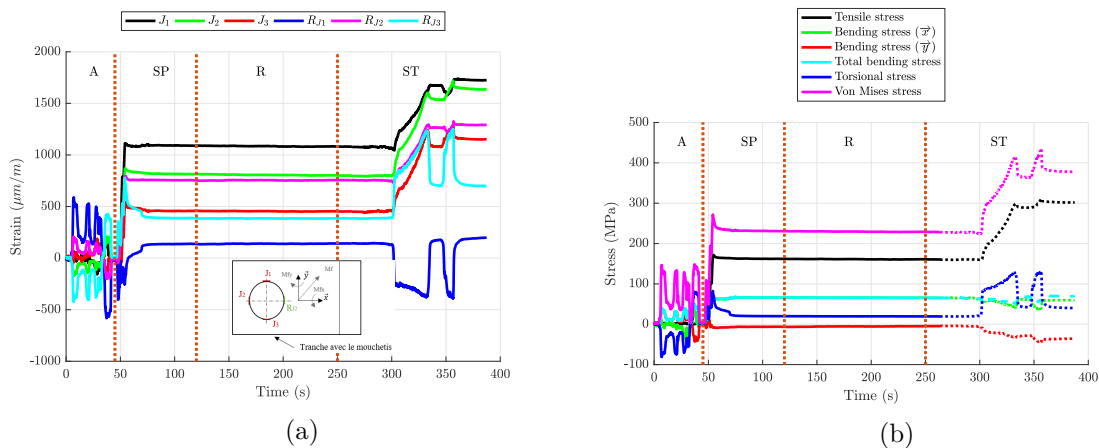


FIGURE 3.12 – Déformation des jauges (a) et contraintes dans la vis (b) lors du serrage.

A : Accostage.

SP : Serrage Partiel.

R : Repos.

ST : Serrage Total.

Les courbes correspondent aux trois phases de serrage : accostage, serrage à 50% et serrage à 100%. Après avoir atteint le niveau de serrage souhaité pendant le serrage partiel, on remarque que les jauges J_1 et J_3 ne mesurent pas le même niveau de déformation, ce qui veut dire qu'une flexion a lieu suivant l'axe \vec{x} . Cependant, les jauges J_2 et R_{J2} affichent quasiment les mêmes valeurs, ce qui signifie qu'il n'y a pas de flexion suivant l'axe \vec{y} . Cela peut s'expliquer par les éventuels défauts de planéité entre le socle et la bride, ou par un défaut de coaxialité entre la

vis et le trou suite à un mauvais centrage de la vis lors du montage. Pendant le serrage final, on constate, en plus de la flexion suivant \vec{x} , une apparition de la flexion suivant \vec{y} . En effet, la précontrainte induite pouvant être assimilée à un effort excentré appliqué sur la bride, elle peut y générer une légère rotation et par la suite la rotation de l'assemblage suivant \vec{y} . Juste après l'arrêt du serrage, une relaxation des contraintes dans la vis se produit. Ce phénomène est très courant dans les assemblages. Cependant, le niveau de relaxation peut varier d'un matériau à un autre et en fonction de la température. Ici, la perte de serrage est de l'ordre de 2% en termes de contrainte normale, à la fin de serrage. Finalement, le niveau de serrage a bien été respecté, avec une valeur finale de contrainte normale de serrage de $\sigma_{0_{exp}} = 302MPa$.

3.3.2.2 Cyclage

Afin de vérifier que la réponse de l'ensemble des jauges suit bien l'allure du chargement appliqué et que le comportement de l'assemblage reste élastique, les déformations des jauges de la bride ainsi que l'évolution de l'effort normal dans la vis sont tracées dans la Figure 3.13.

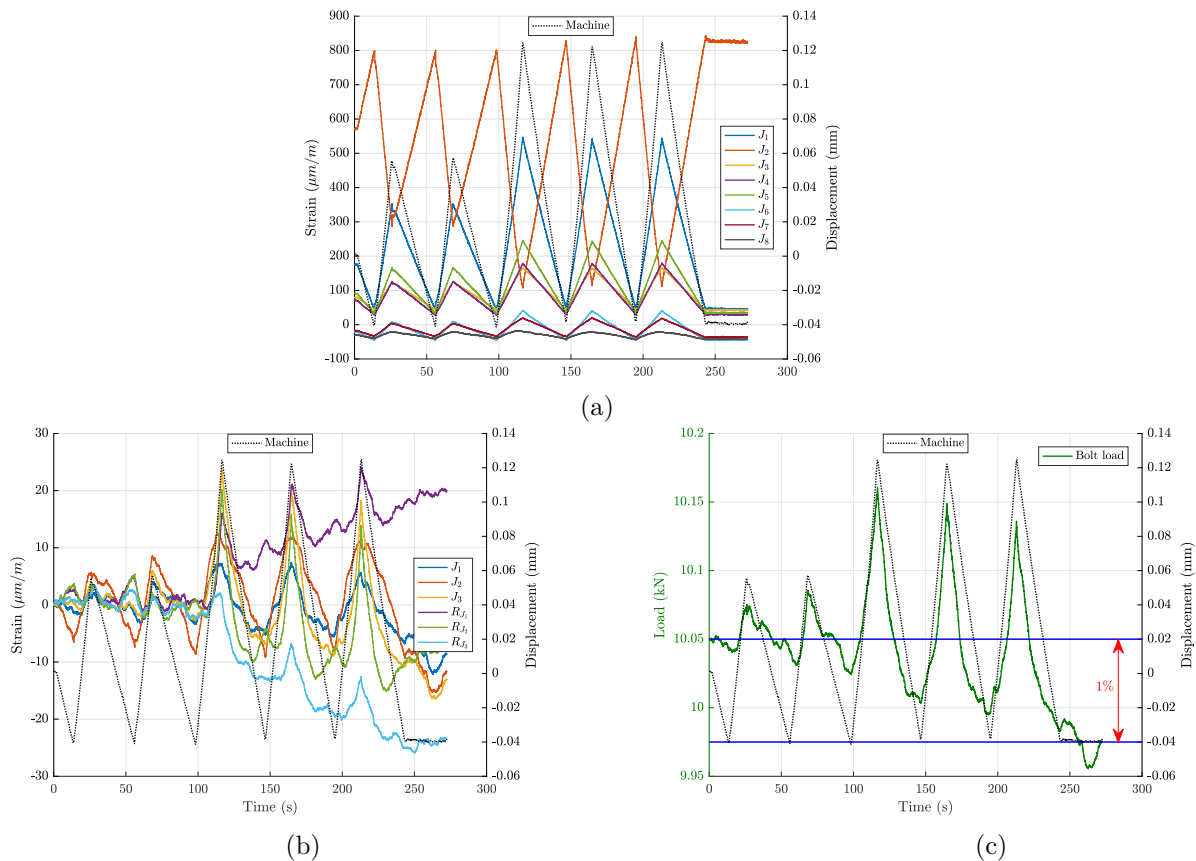


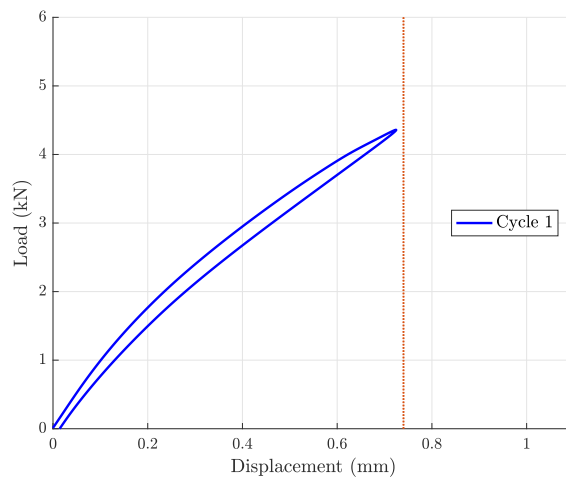
FIGURE 3.13 – Déformation des jauges de la bride (a), de la vis (b) et évolution de l'effort normal dans la vis (c) lors du cyclage.

La Figure 3.13a présente la variation des déformations des jauges de la bride en fonction du chargement à l'étape du cyclage. On constate que l'allure des courbes suit bien celle du chargement appliqué par la machine. En ce qui concerne les déformations dans les jauges de la vis, leur évolution ne permet pas de conclure sur l'élasticité de l'assemblage car leur variation, par rapport à l'état de précharge, est très faible et peut s'interférer avec le bruit de mesure (cf. Figure 3.13b). C'est pour cela que nous avons tracé l'évolution de l'effort de serrage pendant le cyclage, comme le montre la Figure 3.13c. Dans la vis, on constate que les pics de l'effort normal correspondent aux pics du chargement appliqué par la machine. Cela signifie que le comportement de la vis et de l'assemblage est élastique, et que ce dernier est bien mis en place.

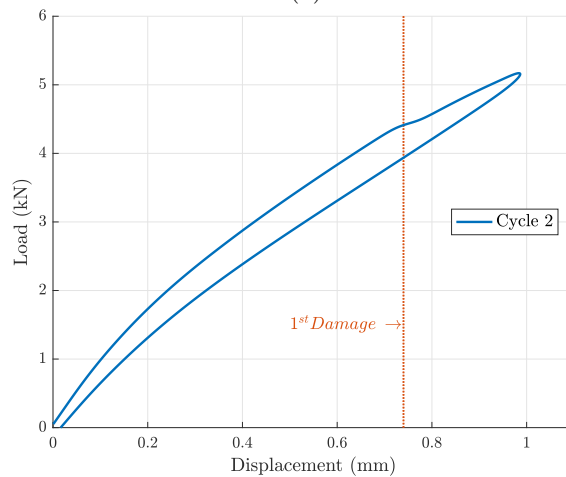
L'étape de cyclage a permis de vérifier l'élasticité de l'assemblage et le retour du déplacement à 0 correspondant à un effort nul. Cependant, elle a contribué à une perte de serrage initial qui est de l'ordre de 1% à la fin du cyclage. La précontrainte stabilisée, après cyclage est de 297MPa. Cela résulte de l'adaptation du montage au premier cyclage.

3.3.2.3 Chargement

Les courbes effort-déplacement pour les cycles de chargement C1 et C2 sont tracées respectivement dans les Figures 3.14a et 3.14b. Les deux cycles de chargement montrent une non-linéarité de comportement qui peut être due d'une part au caractère visco-élastique de la matrice, et d'autre part, à la non linéarité géométrique de la bride et du tissu 3D. Lors du deuxième cycle, une chute d'effort est constatée à un déplacement $d = 0.74 \text{ mm}$, celle-ci pourrait signifier qu'un premier macro-endommagement a eu lieu dans la bride. La décharge lors du cycle 1 a eu lieu juste avant cet instant (où $d = 0.74 \text{ mm}$), ainsi, il se peut que des micro-endommagements aient eu lieu même pendant le premier cycle, sans qu'il y ait d'impact sur la raideur globale de l'assemblage.



(a)



(b)

FIGURE 3.14 – Courbe effort-déplacement des cycles de chargement C1 (a) et C2 (b).

Si l'on superpose les courbes des cycles C1 et C2, comme le montre la Figure 3.15, nous constatons que la déformation résiduelle suite à la décharge est quasi-équivalente. De plus, la raideur de l'assemblage lors du cycle C2 est quasi-identique à celle du cycle C1, ce qui signifie que le comportement global est resté linéaire.

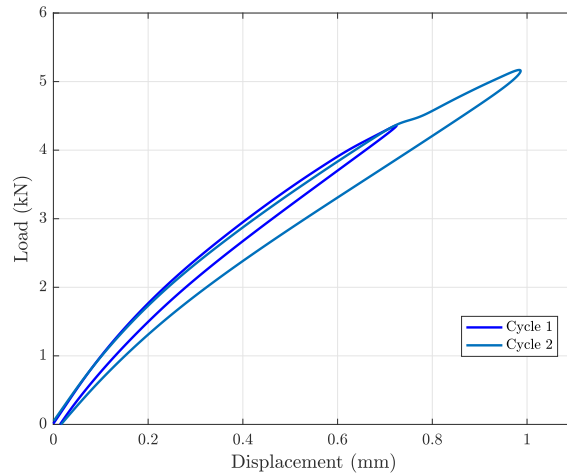


FIGURE 3.15 – Courbe effort-déplacement lors de cycles C1 et C2.

Comportement de la bride

Afin d'étudier le comportement de la bride à travers la corrélation d'images, différents points de mesure virtuels ont été positionnés dans la zone d'intérêt. Ils sont situés sur la ligne moyenne dans l'épaisseur de la bride et à des endroits clés pour comprendre le dépliage dans la direction verticale. Le point **P0** est positionné sur le socle afin de connaître le déplacement du vérin pendant l'essai (le déplacement du socle est considéré identique à celui du vérin, de par la rigidité du montage, de la pression de serrage des mâchoires et les faibles efforts engendrés par le chargement). La position des points P_i est illustrée par la Figure 3.16.

Le champ de déplacement radial et axial, donné par la corrélation d'images numérique aux pics des cycles C1 et C2, est illustré par la Figure 3.17.

La visualisation du champ de déplacement radial permet de voir qu'un déplacement maximal est enregistré au niveau des points **P4**, **P8** et **P9**. Cela signifie que la déformation est plus accentuée au voisinage de ces points, conduisant à un dépliage de la cornière comme le schématise la Figure 3.18b.

Le glissement entre la bride et le socle est évalué par le déplacement relatif entre **P0** et **P1**. Celui-ci est de l'ordre de $\sim 1\%$ ce qui est suffisamment faible pour confirmer l'hypothèse de non glissement considérée dans le chapitre 2, stipulant que dans le cas des assemblages excentrés, la composante tangentielle du contact peut être négligée car le taux de glissement est plutôt faible.

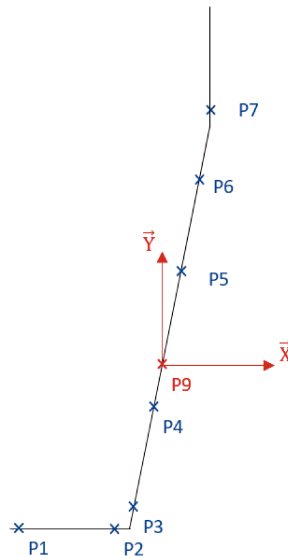
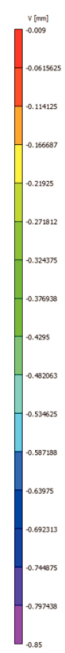
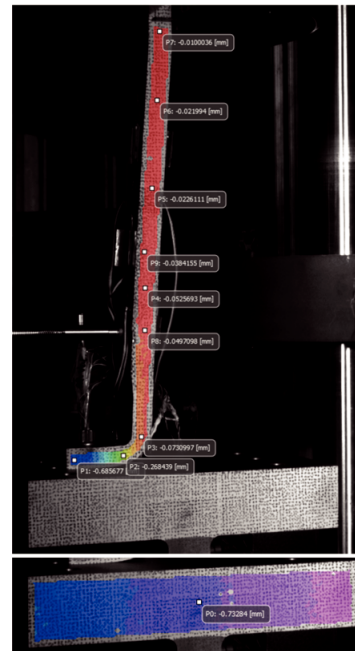
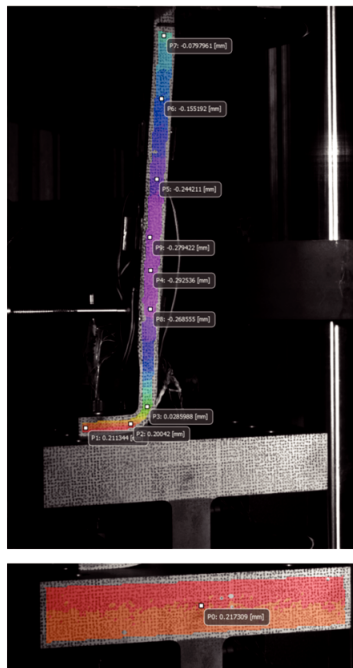


FIGURE 3.16 – Position des points de mesure virtuels avec la corrélation d’images sur la bride.

Cependant, les valeurs de déplacement radial données par la corrélation d’images numérique restent faibles, et du même ordre de grandeur de l’incertitude de mesure. Typiquement, un déplacement de 0.2 mm du socle est largement surestimé au vu de sa rigidité. Ainsi, les valeurs du déplacement radial en l’état, ne sont pas exploitables.

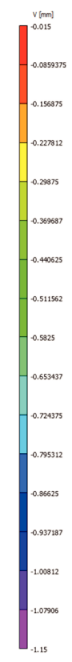
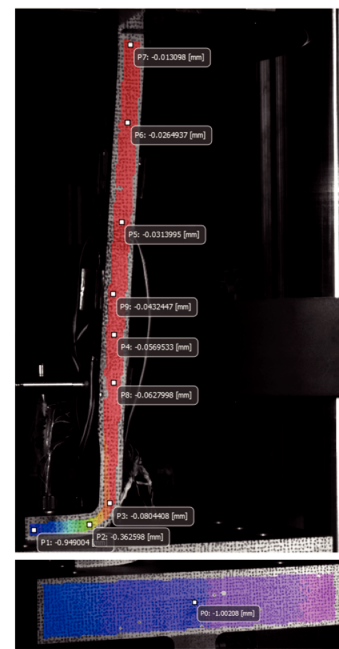
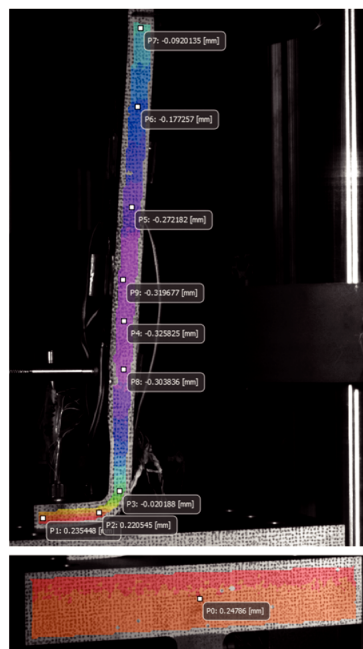
Les déplacements dans la direction axiale (Y) mesurés par VIC, sont plutôt fiables. On remarque que les déplacements du socle et de l’extrémité du pied de bride (**P1**) sont pratiquement identiques et correspondent à la consigne, ce qui est cohérent. L’écart entre le point **P2** et le socle représente le décollement du pied de bride. Pour les points **P3** à **P7**, le déplacement en Y est faible et diminue quand on se rapproche de la zone serrée dans les mâchoires de la machine de traction (proche de **P7**). L’allongement de la partie virole pendant le chargement est donc faible.

Afin d’analyser le comportement local au niveau des jauges, les déformations sont tracées dans la Figure 3.19. On constate que la déformation maximale est vue par la jauge **J1** de la bride, ce qui confirme l’hypothèse d’une forte déformation au niveau de la sortie du rayon de bride. On remarque aussi que seule la jauge **J8** est sollicitée en compression alors que les autres jauges collées sur la partie virole sont sollicitées en traction. Cela confirme qu’un dépliage de cornière a lieu à la sortie du rayon de bride, ce qui rejoint l’interprétation physique du sens des déplacements dans le sens radial.



(a)

(b)



(c)

(d)

FIGURE 3.17 – Champs de déplacement radial (en X) et axial (en Y) au pic des cycles C1 (a-b) et C2 (c-d).

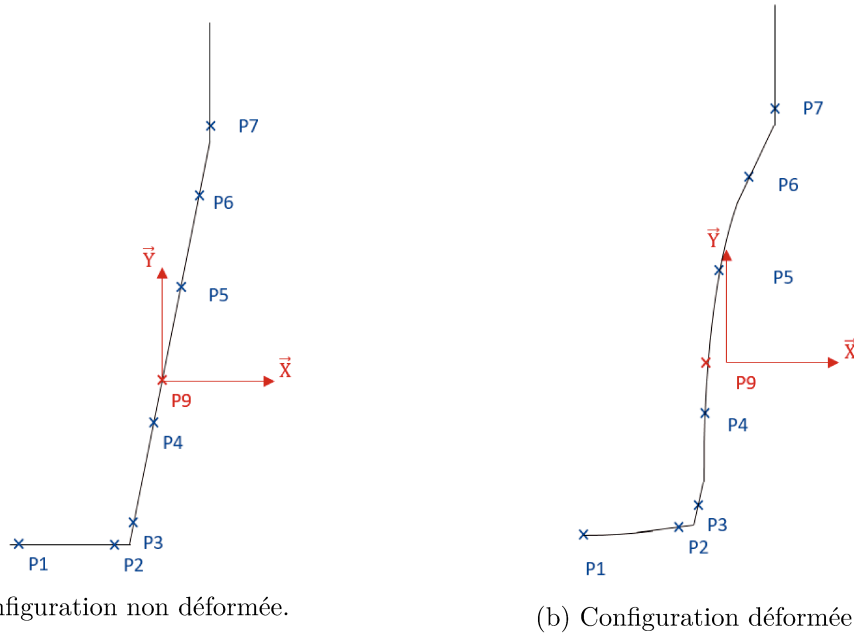


FIGURE 3.18 – Schéma illustrant la déformée de la bride suite au déplacement radial.

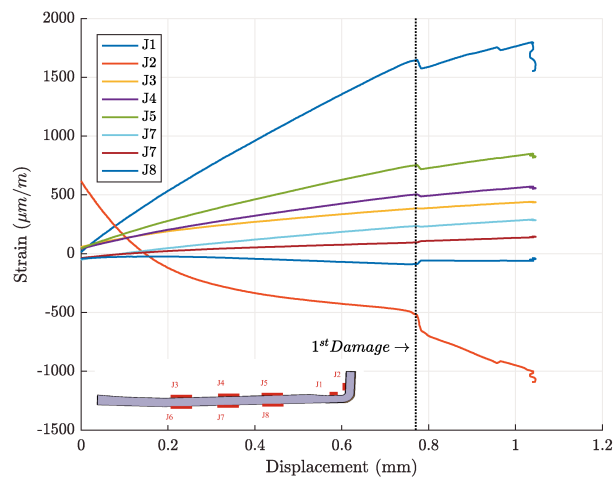


FIGURE 3.19 – Déformation des jauges de la bride.

Comportement de la vis

Les déformations des jauges de la vis ont permis de remonter aux contraintes de traction, de flexion, de torsion et la contrainte totale de Von Mises. Celles ci-sont tracées dans la Figure 3.20, pour les phases de chargement des cycles C1 et C2.

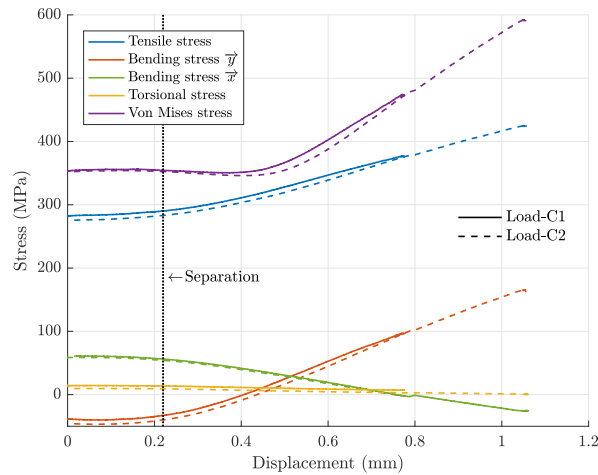


FIGURE 3.20 – Contraintes induites dans la vis lors des phases de chargement des cycles C1 et C2.

Le comportement de la vis lors de la phase de chargement des deux cycles C1 et C2 est très similaire et on peut y identifier deux régions : la première région où la vis est soumise principalement à la précharge, avec une légère augmentation de la flexion suivant \vec{y} , et la deuxième région où la contrainte de flexion augmente fortement ce qui augmente les contraintes normales dans la vis (traction + flexion). La limite entre les deux régions définit le point de décollement, ce qui correspond à la limite de décollement identifiée avec la corrélation d'images.

Le décollement arrive relativement tôt lors du chargement, à $d = 0.22\text{mm}$ ce qui correspond à un effort machine de $\sim 1.95\text{ kN}$. Cela est dû à la précharge installée dans la vis, choisie volontairement assez faible afin de ne pas endommager la bride dès le serrage.

La contrainte maximale de Von Mises induite dans le boulon pendant le chargement est de 600MPa . Cela signifie que la vis n'avait pas encore plastifié au pic du cycle 2.

3.3.3 Conclusion partielle

L'essai de traction sur une bride monofixation a été réalisé et nous a permis de comprendre le comportement de l'assemblage jusqu'au premier endommagement du composite. L'instrumentation de la vis a été mise en œuvre afin de relever les différentes déformations et contraintes induites, à savoir la traction, la flexion et la torsion. Cette dernière est constante durant le chargement, alors que la traction et la flexion évoluent, générant une contrainte normale dans la vis. Cette dernière a eu un comportement élastique durant les deux cycles de chargement, et la contrainte maximale de Von Mises est de l'ordre de 600MPa . La bride subit un léger allongement au niveau de la virole et une forte déformation au niveau du rayon de bride, qui résulte d'un dépliage. Ce comportement a été mis en évidence grâce aux jauges de déformation et la corrélation d'images numérique. Au chargement maximal, un macro-endommagement de la bride est visible au niveau du rayon de bride et ressemblant à du délaminage (cf. Figure 3.21). Tandis que la vis n'a subi aucune déformation plastique.



FIGURE 3.21

3.4 Essais de traction sur brides trois-fixations

Les essais de conception des brides CMO des carters fan sont réalisés sur des brides d'un secteur à trois boulons. Celles-ci sont représentatives du comportement réel de la ligne de carter, à l'amont et à l'aval (cf. Figure 3.22). Dans cette partie, des essais similaires aux essais de conception de cette structure ont été réalisés dans le but d'analyser le comportement dans le cas d'une configuration moteur. De plus, cela constituera une base de validation pour une éventuelle amélioration du modèle semi-analytique, afin de tenir compte des effets de bord et de l'influence d'un secteur monofixation sur un autre.

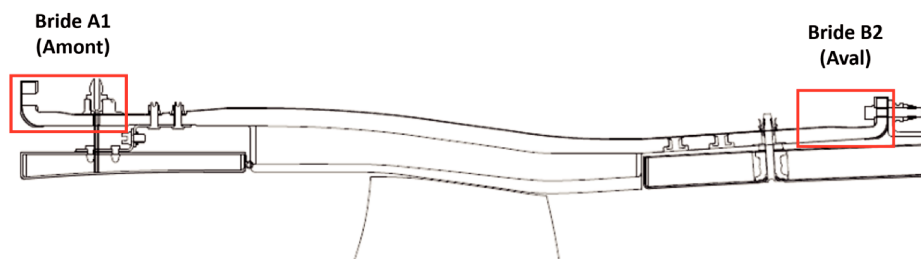


FIGURE 3.22 – Coupe longitudinale d'un moteur.

Les brides amont et aval sont montrées dans les Figures 3.23a et 3.23b. Elles sont appelées respectivement A1 et B2. La bride A1 correspond à un secteur à trois boulons de 30° tandis que la bride B2 correspond à un secteur à trois boulons de 10° .



(a) Bride A1



(b) Bride B2

FIGURE 3.23 – Bride amont A1 (a) et bride aval B2 (b)

Dans ce qui suit, seuls les essais sur les assemblages des brides B2 sont présentés. Les essais de brides A1 restent similaires.

3.4.1 Description des éléments d'assemblage

Dans la configuration moteur (cf. Figure 3.24), la bride B2 est assemblée à la virole du carter intermédiaire (VCI) grâce à une liaison boulonnée. Afin de protéger le composite, une contreplaque est installée entre la tête de vis et la bride, une entretoise est ajoutée entre l'écrou et la VCI dans le but d'assouplir l'assemblage et de diminuer la raideur du boulon. Dans les essais expérimentaux réalisés dans le cadre de cette thèse, la VCI est remplacée par le bâti du montage d'essai, comme le montre la Figure 3.25. Les vis sont les mêmes que celles utilisées pour l'essai monofixation, avec une instrumentation légèrement différente.

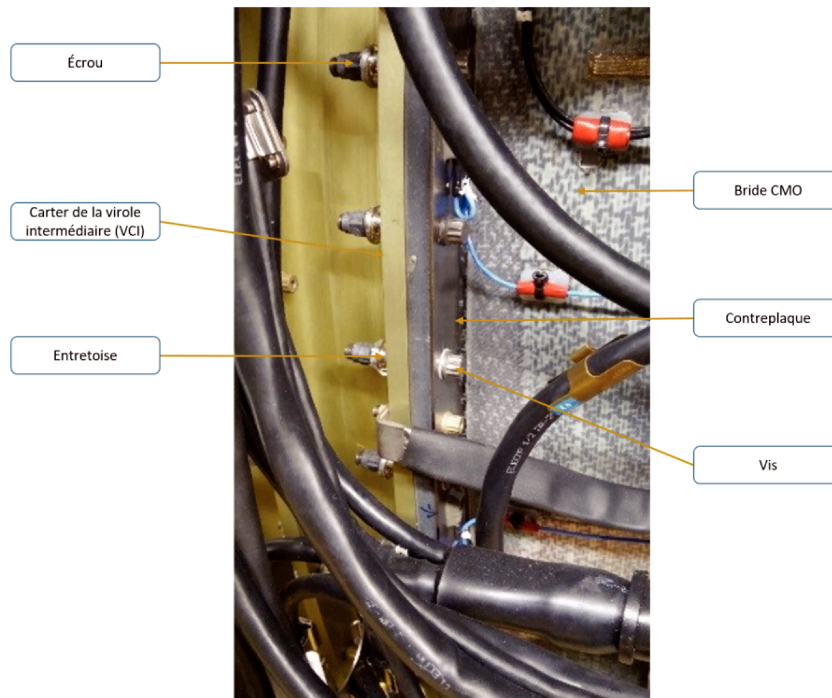


FIGURE 3.24 – Configuration moteur de l'assemblage de la bride B2.

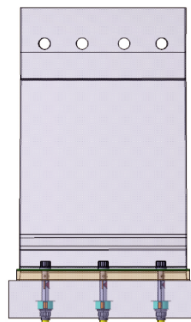


FIGURE 3.25 – Principe d'assemblage de la bride B2 pour essai.

3.4.2 Matrice d'essais

Nous avons eu à notre disposition quatre brides B2. Ainsi, une matrice d'essais a été établie, afin d'analyser l'influence de la contreplaque et d'évaluer le comportement de l'assemblage au 1er endommagement de la bride ainsi qu'à la rupture.

TABLE 3.4 – Matrice d'essais des brides B2.

Nom de l'essai	Présence contreplaque CP	Type de sollicitation	Condition de pilotage	Procédure d'essai	Nombre de pièces à tester
B22	Avec CP	Traction	Pilotage en déplacement	Serrage Cyclage Montée en charge jusqu'au 1er endo	1
B23				Serrage Cyclage Montée en charge jusqu'à rupture	1
B24	Sans CP	Traction	Pilotage en déplacement	Serrage Cyclage Montée en charge jusqu'au 1er endo	1
B25				Serrage Cyclage Montée en charge jusqu'à rupture	1

3.4.3 Protocole expérimental

3.4.3.1 Montage d'essais

Le banc d'essai utilisé ici a été conçu et fabriqué pour des essais précédents. Dans un souci de confidentialité, peu de détails sont fournis par rapport aux pièces du montage, une vue globale est donnée par la Figure 3.26. Un vérin hydraulique permet d'appliquer l'effort de traction à travers un gaufrier, assemblé à la bride par plusieurs vis. La bride est assemblée à une table adaptatrice (via la vis et l'entretoise) sur laquelle sont réalisés plusieurs trous, correspondant à ceux des brides. Cette table est assemblée à son tour au bâti.

3.4.3.2 Instrumentation

Une instrumentation riche a été mise en place dans ces essais. L'objectif étant d'analyser le comportement de l'assemblage au plus grand nombre d'endroits possibles. Ainsi, des jauges de déformation, de la corrélation d'images numérique et de l'émission acoustique ont été utilisées.

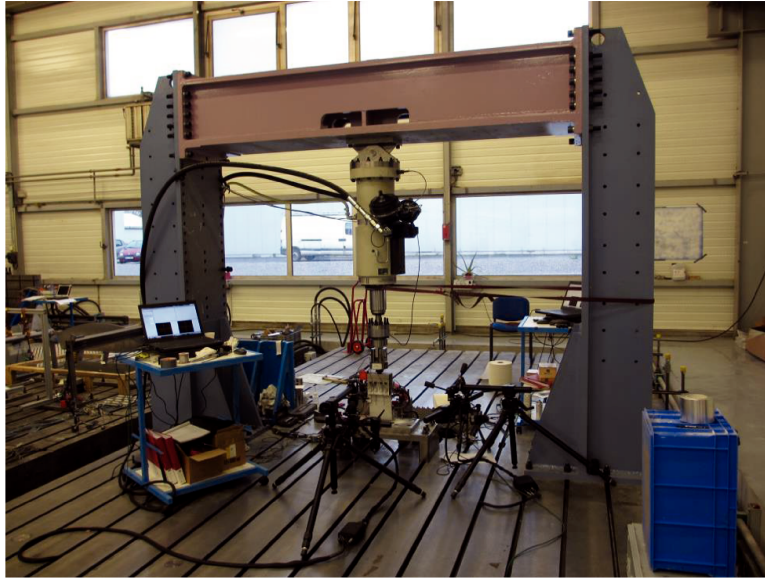


FIGURE 3.26 – Banc d’essai de l’assemblage des brides B2.

Instrumentation de la bride

Des jauges de déformation ont été disposées de manière alignée à chaque vis. Une rangée de jauges a été placée à mi-hauteur de la bride, sur la face interne et externe, et une autre rangée de jauges a été placée à la sortie du rayon de bride (cf. Figure 3.27). Des capteurs acoustiques ont été positionnés aux côtés des jauges de déformation, afin d’identifier l’endommagement du composite lors du chargement. Dans ces travaux, les capteurs utilisés sont des nano30 et la chaîne d’acquisition est de marque MISTRAS d’EuroPhysicalAcoustic. Le suivi des déformations fournies par les jauges est complété par un système de stéréocorrélation d’images, permettant de capturer le champ de déformation sur toute la face interne de la bride, le logiciel utilisé est GOM de Aramis.

Instrumentation de la vis

Comme pour l’essai monofixation, les vis ont été instrumentées, afin d’analyser les sollicitations auxquelles elles sont soumises, à savoir : la traction, la flexion et la torsion. Cependant, une autre méthode d’usinage a été proposée pour ces essais, mais la pose des jauges reste similaire à l’essai monofixation.

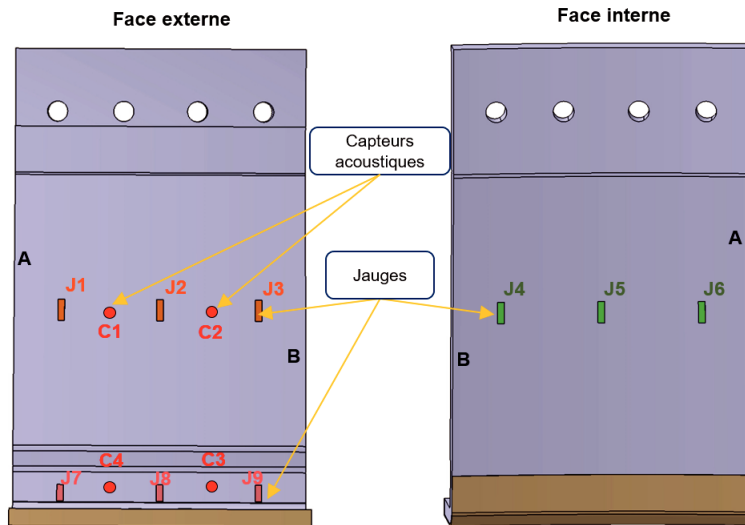


FIGURE 3.27 – Schéma d'instrumentation des brides B2.

3.4.3.3 Déroulement de l'essai

- **Montage** : La première étape du montage s'effectue tout d'abord sur la table adaptatrice, en mettant en contact le boulon avec les pièces assemblées. Ensuite, la bride est assemblée au gaufrier, attaché au vérin, grâce à quatre vis spéciales du banc.
- **Serrage** : Le serrage s'effectue de la même manière que pour l'essai monofixation. Afin d'assurer le maintien en position de la bride et un bon serrage total, un marquage est réalisé selon la disposition jauges des vis comme illustré par la Figure 3.28.
La séquence de serrage a été réalisée en appliquant le protocole suivant :
Serrage partiel de la vis du milieu (Vis 2) → Serrage partiel de la vis de gauche (Vis 1) → Serrage partiel de la vis de droite (Vis 3). Ensuite, la même séquence est appliquée pour le serrage total.

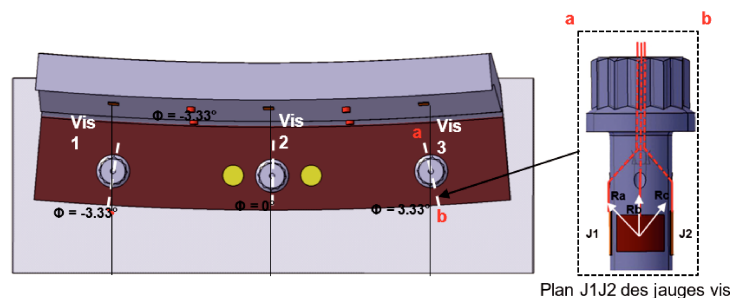


FIGURE 3.28 – Positionnement de la vis lors du serrage.

- **Cyclage** : Comme pour l'essai monofixation, ce chargement permet de s'assurer de la linéarité de l'assemblage et sa bonne mise en place. Ainsi, cinq cycles de charge/décharge ont été appliqués de 0 à 0.1mm avec une période de 1min environ.

- **Chargement** : La montée en charge s'effectue avec un pilotage en déplacement à une vitesse de $2.4mm/min$ jusqu'au 1er endommagement, ou à rupture, selon la matrice d'essai.

3.4.4 Analyse des résultats

3.4.4.1 Serrage

À travers les mesures des jauges de déformation, la contrainte normale générée au serrage est identifiée. Il est à noter qu'une légère flexion est apparue sur les trois vis, comme pour l'essai monofixation. La Figure 3.29 montre les niveaux de serrage enregistrés en termes de contrainte de traction sur chaque vis pour les quatre essais. La première barre (en bleu) correspond à la consigne de serrage.

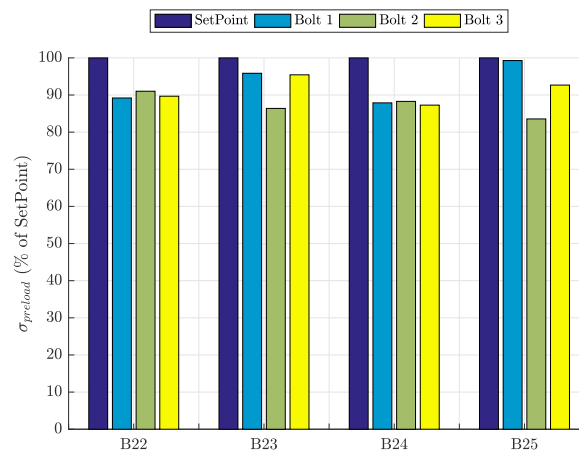


FIGURE 3.29 – Niveaux de serrage des trois vis comparés à la consigne, en termes de contrainte de précharge, pour les quatre essais de bride B2.

Globalement, la consigne de serrage est bien respectée. Nous constatons un écart moyen de $\sim 10\%$ ce qui correspond à notre seuil d'acceptation de serrage. Le niveau de serrage pour les trois vis est globalement homogène, sauf pour les essais B23 et B25, où les vis numéro 2 sont moins serrées que les deux autres. En effet, le suivi des déformations se faisait en suivant en même temps les déformations des deux jauges unidirectionnelles et celles de la jauge axiale de la rosette. Il s'est avéré que sur ces deux essais, deux jauges ont atteint la consigne quand la dernière mesurait un signal plus faible. Ce phénomène est probablement dû à la flexion de la vis, suite à un mauvais centrage.

3.4.4.2 Cyclage

Les déformations des jauges axiales collées sur la bride pendant l'étape de cyclage sont tracées dans la Figure 3.30. Il a été choisi de ne présenter que les jauges des bride B23 et B25

représentant les cas avec ou sans contreplaque.

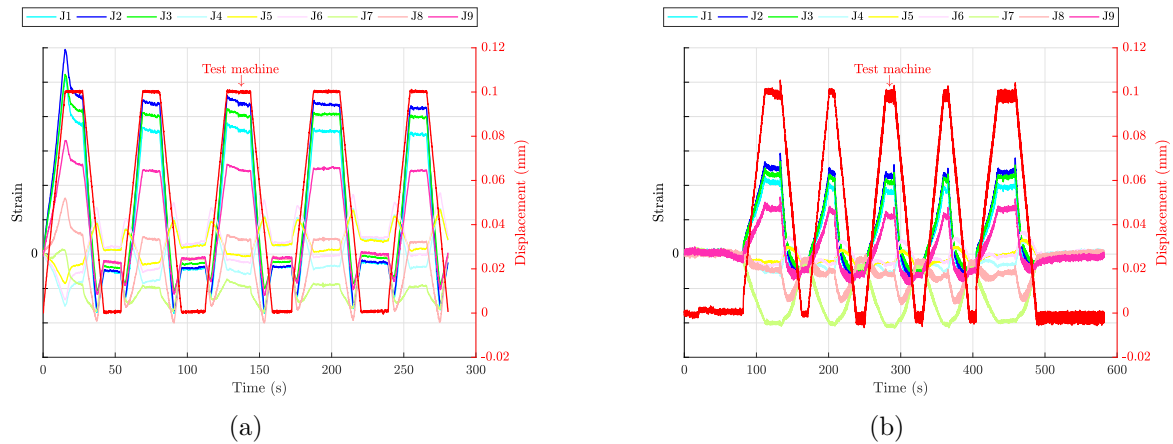


FIGURE 3.30 – Déformations des jauges des brides B23 (a) et B25 (b) lors de l'étape du cyclage.

Comme pour l'essai monofixation, la déformation des jauges voit bien un retour à 0, lors de la décharge, et suit l'allure du chargement lors du cyclage. Cela signifie que le comportement de l'assemblage est élastique. On remarque aussi, d'après les courbes, que le niveau de déformation est plus grand pour les jauges de l'essai avec contreplaque, mais il s'agit de quelques $\mu\epsilon$, ce qui n'est pas très significatif.

3.4.4.3 Chargement

Comportement global de l'assemblage

Afin d'analyser le comportement de l'assemblage et l'influence de la contreplaque sur ce dernier, l'évolution de l'effort en fonction du déplacement a été tracée dans la Figure 3.31.

La Figure 3.31a présente l'évolution de l'effort de la machine en fonction du déplacement pour les essais sans contreplaque, soit B22 et B23. Rappelons que B22 est un essai au premier endommagement et que l'essai B23 est un essai à rupture. De manière conventionnelle, le premier endommagement est atteint lorsque l'un des capteurs acoustiques enregistre un signal à 5000UE (unité d'énergie). Pour cette configuration de l'essai (avec contreplaque), nous constatons que la rupture de l'assemblage a eu lieu juste après le premier endommagement du composite. Les deux essais permettent de voir un début de comportement non linéaire entre 0.3 et 0.4, en déplacement adimensionné. L'origine de ce comportement pourrait provenir de phénomènes non linéaires tels que la plastification de la vis, le contact ou encore l'endommagement du composite. Cependant, les premières chutes d'effort ont eu lieu après le début du comportement non linéaire, ce qui éliminerait l'hypothèse d'une non linéarité due à l'endommagement du composite. De plus, l'essai monofixation nous a permis de constater que sur ce type d'assemblages, les phénomènes non linéaires de contact sont négligeables. Par

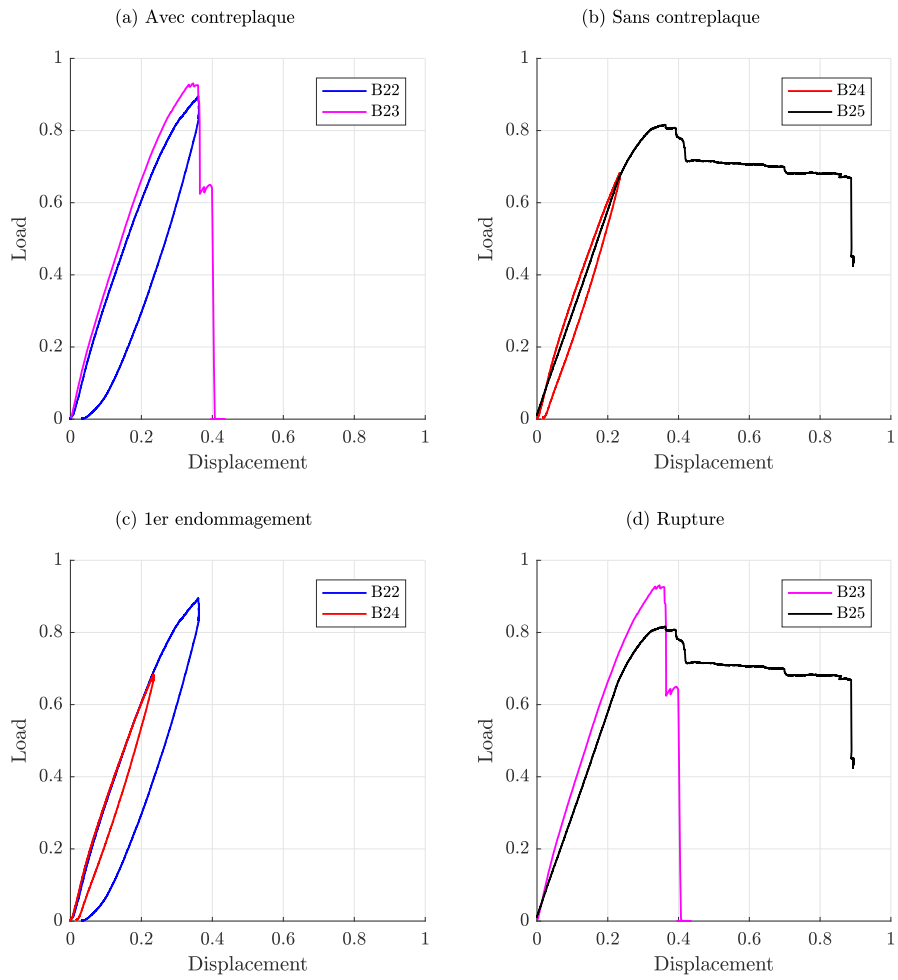


FIGURE 3.31 – Courbes effort-déplacement pour les essais B22, B23, B24 et B25

conséquent, le comportement élastoplastique de la vis serait fort probablement à l'origine du comportement non linéaire de l'assemblage.

La Figure 3.31b montre la même courbe pour les essais sans contreplaque, soit B24 et B25. Rappelons que B24 est un essai au premier endommagement et l'essai B25 est un essai à rupture. L'essai B24 a été arrêté suite au critère du 1er endommagement. Cependant, aucun signe d'un premier endommagement n'est visible sur la courbe effort-déplacement. Cela est peut-être dû à un micro-endommagement qui n'a pas eu d'influence sur la raideur globale de l'assemblage ou à un bruit externe qui a perturbé la détection du seuil d'endommagement. L'essai B25 nous renseigne que le premier endommagement a lieu à une valeur d'effort (adimensionnée) de 0.82. L'absence de la contreplaque permet de voir beaucoup plus d'endommagement sur le composite, accompagné d'un comportement non linéaire (visible entre 0.25 et 0.37 en déplacement adimensionné).

Pour analyser l'influence de la contreplaque, les courbes Effort-Déplacement ont été tracées pour les essais au premier endommagement, soit B22 et B24 (cf. Figure 3.31c) ainsi que pour les essais à rupture, soit B23 et B25 (cf. Figure 3.31d). Premièrement, la présence de la contreplaque permet d'avoir une raideur de l'assemblage légèrement plus importante. La différence n'est cependant pas visible sur les essais au premier endommagement. Toutefois, la comparaison des essais à rupture nous montre l'importance de la contreplaque dans la protection du composite. L'absence de la contreplaque sur l'essai B25 contribue à une sollicitation plus importante de la bride composite et résulte en un endommagement plus remarquable.

Comportement des vis

L'analyse du comportement global de l'assemblage nous laisse prédire que la ruine de l'assemblage est due à la rupture des vis, vu qu'un comportement non linéaire a lieu avant ou en même temps que l'endommagement du composite. Afin d'analyser le comportement des vis durant les quatre essais de traction, l'évolution de la contrainte de Von Mises induite dans les trois vis de chaque essai a été tracée en fonction de l'effort appliqué (cf. Figure 3.32). Les contraintes dans la vis ont été calculées en considérant sa loi de comportement élastoplastique.

Remarques

L'évolution de la contrainte de Von Mises est représentative de l'évolution de la contrainte normale (traction+flexion) car la contrainte de torsion n'évolue pas, ou très peu, au cours de l'essai.

Pour tous les essais, le comportement global est similaire et est cohérent avec le comportement des assemblages boulonnés excentrés. On constate, dans un premier temps, que la contrainte normale évolue très peu, dominée principalement par la contrainte de traction. Ensuite, sa vitesse d'évolution augmente suite à l'augmentation de la contrainte de flexion comparée à la traction. La limite entre les deux zones correspond à la limite de décollement, elle a lieu à

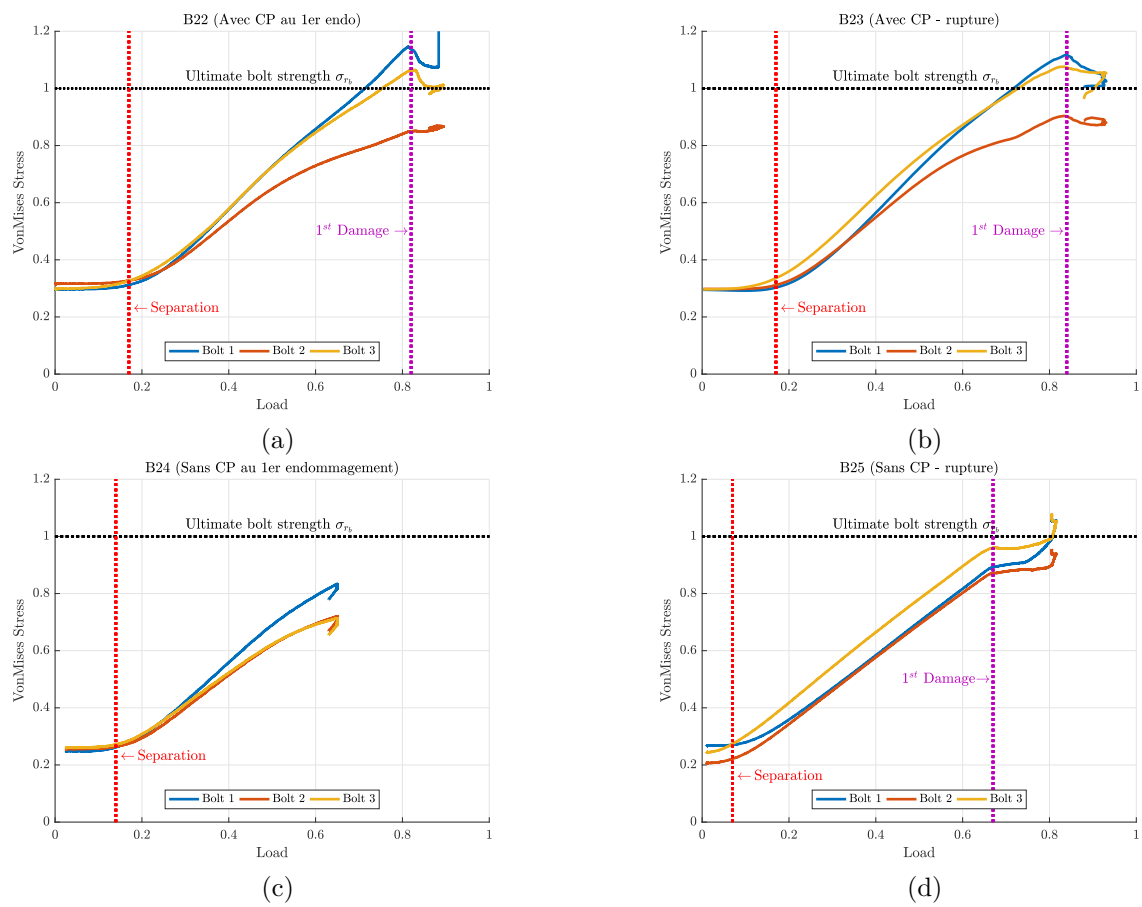


FIGURE 3.32 – Évolution de la contrainte de Von Mises dans les trois vis de chaque essai : (a) B22, (b) B23, (c) B24 et (d) B25.

20% de l'effort à rupture pour l'essai B23 et à 13% pour l'essai B25. Pour ces essais, la chute de contrainte, correspondant au premier endommagement du composite, a lieu à l'approche de la rupture de l'assemblage. L'endommagement du composite résulte en une diminution de la vitesse de déformation des vis, ce qui correspond à une redistribution de l'énergie de déformation entre les vis et la bride.

La présence de la contreplaque permet de repousser la limite de décollement, renforçant ainsi la raideur des pièces assemblées. En effet, à une raideur de vis équivalente, plus la raideur des pièces assemblées est importante, plus la limite de décollement est grande, suivant la relation 3.2. Dans l'essai B25, le décollement a lieu juste après le début de chargement, ce qui ne ressemble pas à l'essai B24 même si les deux essais sont réalisés sans contreplaque. Cela peut s'expliquer par la faible valeur de serrage de la vis N°2 (vis du milieu) dans l'essai B25.

$$F_{dec} = F_{ext} \cdot \left[1 + \frac{K_p}{K_b} \right] \quad (3.2)$$

Où K_p est la raideur des pièces assemblées et K_b la raideur de la vis.

Si l'on analyse les essais à rupture, B23 avec contreplaque et B22 sans contreplaque, on observe que l'effort à rupture atteint pour l'essai avec contreplaque est supérieur à l'effort à rupture de l'essai sans contreplaque. La présence de la contreplaque a permis de gagner environ 16% en effort à rupture, d'où l'importance de la contreplaque à la tenue de l'assemblage.

Dans le cas des essais à rupture, on constate que l'une des vis atteint sa limite à rupture "théorique" bien avant que sa rupture physique ait lieu. Certes, il s'agit d'une valeur théorique de la limite à rupture et que la valeur réelle peut bien la dépasser, mais la subtilité se trouve dans le fait de se baser sur la contrainte équivalente de Von Mises, qui est un critère global et ne nous renseigne pas par rapport à l'état local en tout point de la vis à l'instant de rupture. Pour que l'analyse soit plus rigoureuse, nous avons tracé l'évolution des déformations locales vues par les trois jauges uniaxiales des trois vis jusqu'à perte totale du signal, pour les essais B23 (cf. Figure 3.34) et B25 (cf. Figure 3.35). Un rappel de la position des jauges sur les vis est illustré par la Figure 3.33. L'évolution de l'effort machine est représentée dans les mêmes graphes afin d'identifier l'instant de rupture.

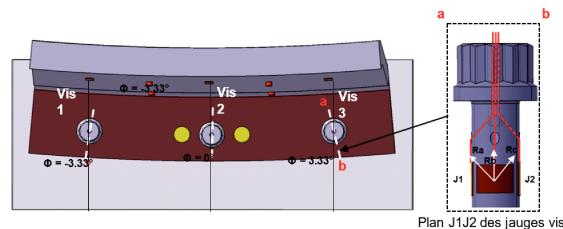


FIGURE 3.33 – Rappel de la position et des noms des jauges des vis.

N.B : La jauge est perdue quand le signal enregistre une valeur de déformation de $-10^6 \mu m/m$.

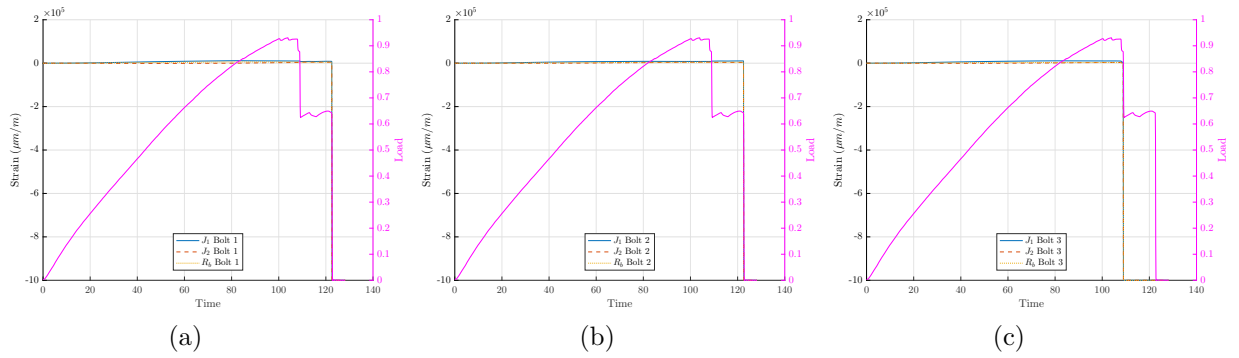


FIGURE 3.34 – Signal de déformation des jauges des vis 1 (a) 2 (b) et 3 (c) au cours de l’essai **B23**.

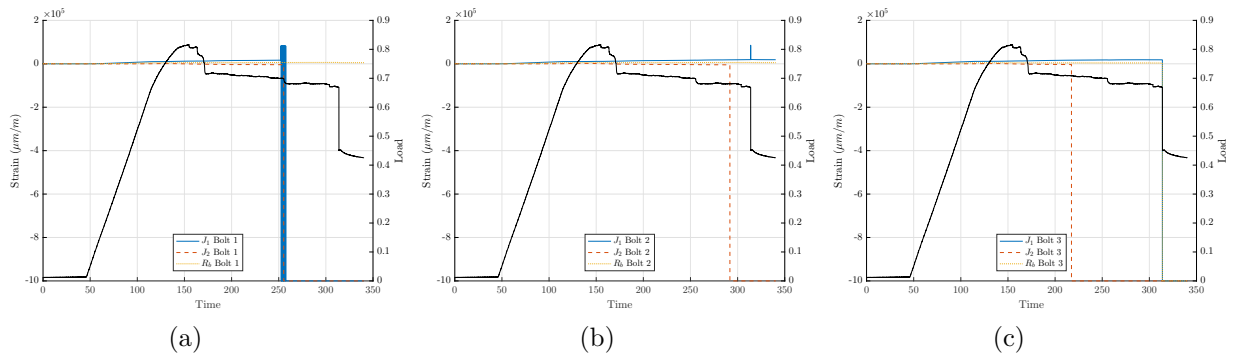
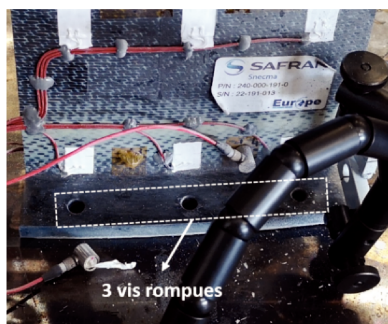


FIGURE 3.35 – Signal de déformation des jauges des vis 1 (a) 2 (b) et 3 (c) au cours de l’essai **B25**.

Pour l'essai B23, l'analyse de la Figure 3.34 permet de conclure que la première grande chute d'effort, qui a lieu à l'instant $t \sim 108s$, est due à la rupture de la vis 3, vu que toutes les jauges ont été perdues. 10 secondes plus tard, on constate la perte simultanée des vis 2 et 1 contribuant ainsi à la ruine de l'assemblage et l'arrêt de l'essai.

Dans l'essai B25, la jauge R_b de la vis 1 semble être toujours fonctionnelle après la rupture de l'assemblage à $t \sim 322s$, tel est le cas pour les jauges J_2 et R_b de la vis 2. Cependant, toutes les jauges de la vis 3 ont été perdues à la fin de l'essai, ce qui laisse déduire que seule la vis 3 a été rompue à l'instant de rupture. La rupture d'une seule vis ne pouvant pas être à l'origine de la rupture de tout l'assemblage, nous en déduisons ainsi que pour cet essai, la bride B23 a elle aussi, atteint une limite d'endommagement comparable à la rupture.

Ces conclusions sont validées par les photos post-essai, données par les Figures 3.36 et 3.37. La Figure 3.36 montre l'état de l'assemblage à la fin de l'essai où toutes les vis ont été rompues et la Figure 3.37 montre que le principal mode d'endommagement de la bride est le délaminage. En effet, la structure du composite tissé utilisé dans le cadre de cette thèse est une superposition de plusieurs couches de tissé 3D.

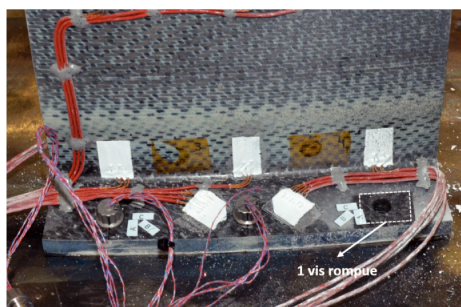


(a) Bride

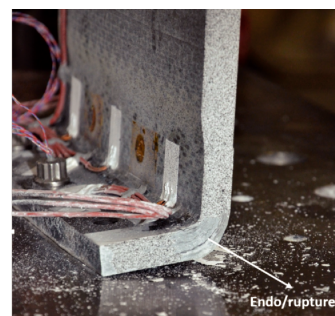


(b) Vis 3

FIGURE 3.36 – Photos post-essai B23.



(a) Bride



(b) Tranche de la bride

FIGURE 3.37 – Photos post-essai B25.

Il est intéressant d'analyser l'état de contrainte locale de la jauge la plus sollicitée des vis 1, 2 et 3 pour les essais à rupture B23 et B25. Le but étant d'identifier la contrainte à rupture de la vis et de la comparer à la valeur théorique. Pour ce faire, l'évolution de la contrainte au niveau des jauges J_1 des trois vis est tracée en fonction du temps dans la Figure 3.38a pour B23 et la Figure 3.38b pour B25.

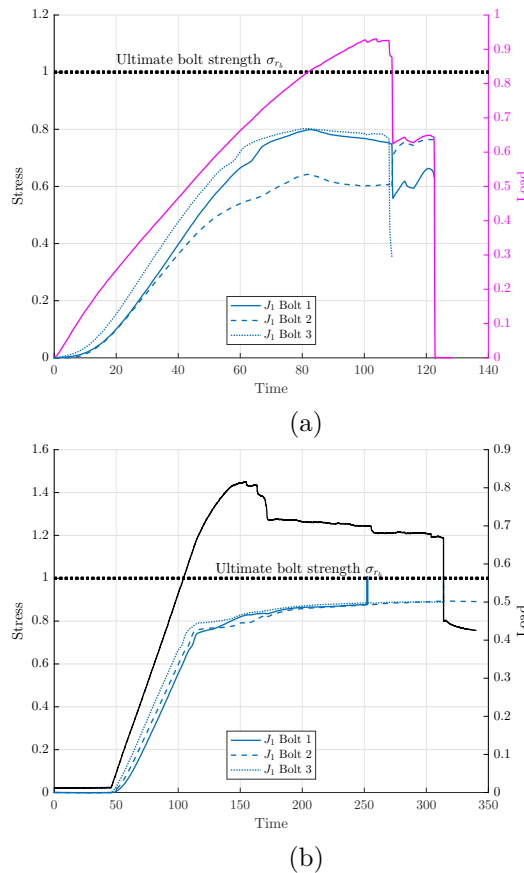


FIGURE 3.38 – Évolution des jauges J_1 (travaillant en traction) des vis 1, 2 et 3 de l'essai B23 (a) et B25 (b).

Pour l'essai B23, la jauge J_1 de la vis 3 a été perdue à une contrainte locale égale à 78% de la limite à rupture théorique et au vu de la chute d'effort, il s'agit de la source de rupture de la vis 3.

Pour l'essai B25, la première jauge à avoir perdu le signal est la jauge J_1 de la vis 1. Cependant, cela n'a pas causé la rupture de la vis, vu qu'elle est restée assemblée à la bride à la fin d'essai (cf. Figure 3.37). La rupture de la vis 3 a eu lieu quand la contrainte locale au niveau de la jauge J_1 a atteint 89% de la limite à rupture théorique.

L'analyse du comportement des vis montre que ces dernières ont été fragilisées et ont contribué à la rupture de l'assemblage. Ceci est dû à leur instrumentation intrusive, qui a nécessité une diminution de la section. De plus, on remarque que c'est la vis 3 qui est la plus

sollicitée et c'est celle qui rompt en premier. Certes, les effets de bords font que les vis 1 et 3 devraient être les plus chargées, mais la vis 3 semble être plus sollicitée que la vis 1. Ce phénomène est-il conséquence d'un comportement particulier de la bride ?

Comportement de la bride

Le suivi des déformations et du déplacement global de la bride est réalisé grâce aux jauges de déformation et à la stéréo-corrélation d'images. L'émission acoustique nous permet d'identifier le niveau d'effort pour les premiers endommagements. Nous allons nous intéresser aux comportements des brides des essais à rupture B23 et B25, qui sont plus riches en informations concernant leur comportement, puisqu'ils sont allés jusqu'à rupture de l'assemblage. Nous cherchons à travers cette étude, à analyser le comportement de la bride, mais aussi, à trouver une interprétation physique, au fait que la vis 3 soit toujours la plus sollicitée.

Les déformations vues par les jauges de la bride sont tracées dans les Figures 3.39 et 3.40 pour les essais B23 et B25 respectivement. Les lignes désignant le premier endommagement et la rupture de l'assemblage sont indiqués en se référant aux instants (Déplacements) identifiés dans les courbes effort-déplacement.

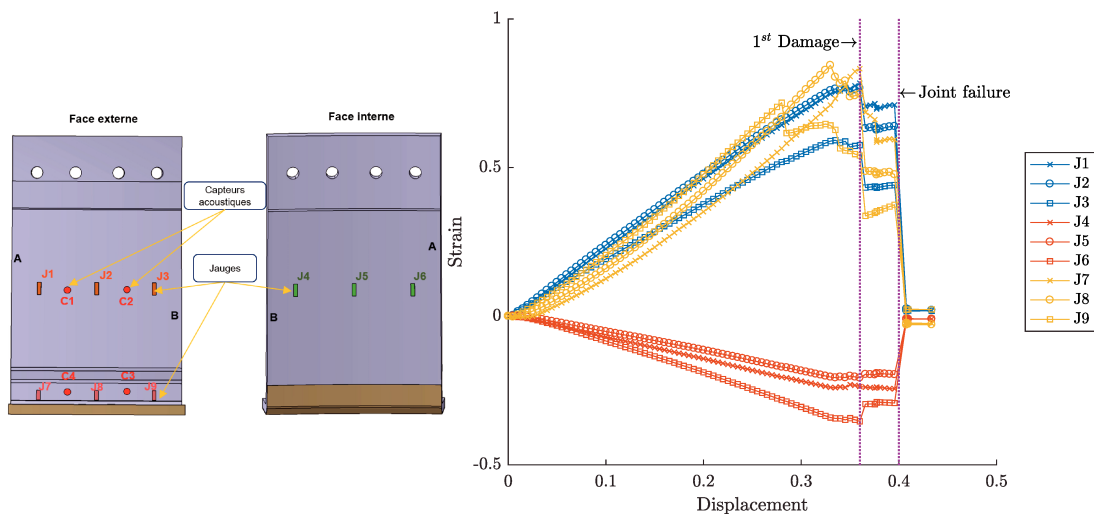


FIGURE 3.39 – Déformation des jauges de la bride B23.

Pour les deux essais, on constate que la bride voit une compression au niveau des jauges **J4**, **J5** et **J6**, alors qu'elle est soumise à la traction au niveau des autres jauges. Ce comportement est similaire au comportement de la jauge **J8** de l'essai monofixation, qui est à l'origine du dépliage de la bride à la sortie du rayon de bride. Toutefois, on s'attendait à ce que les jauges de l'extrémité soient les plus sollicitées à cause des effets de bord, hors ce n'est pas le cas. D'une part, les jauges **J1** et **J2** sont les plus sollicitées en traction et la jauge **J6** est la plus sollicitée en compression. D'autre part, la déformation au niveau de la jauge **J9**

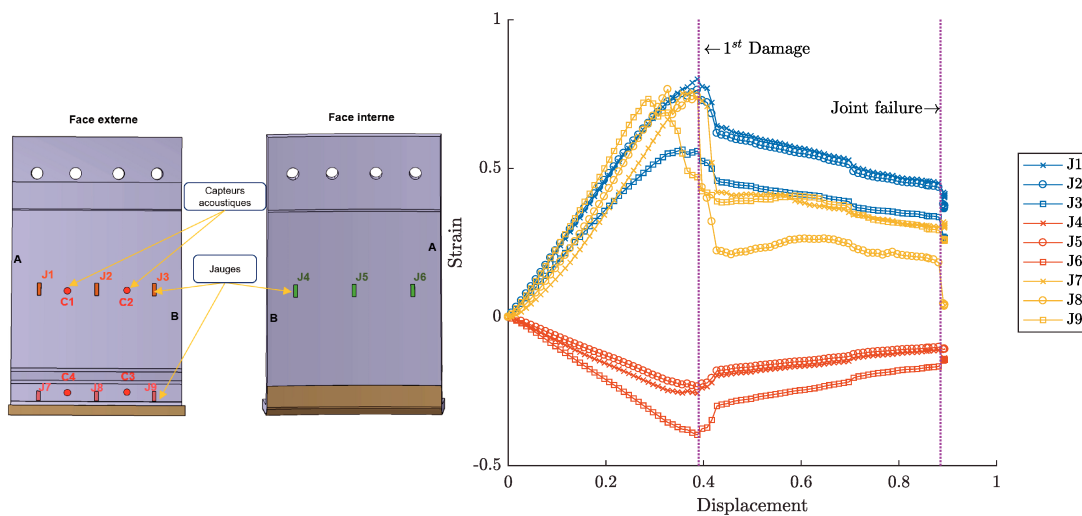


FIGURE 3.40 – Déformation des jauges de la bride B25.

est plus importante que celle vue par la jauge **J8**, qui à son tour, supérieure à la déformation de la jauge **J7**. Cette distribution des déformations traduit un comportement asymétrique de la bride. On assiste donc à une sorte de vrillage de la bride sous un chargement de traction. Afin de valider ce constat, le champ de déplacement donné par la stéréo-corrélation d'images est analysé (cf. Figure 3.41). On considère une section "Section 0" sur la largeur de la bride et une "Section 1" sur sa longueur. Le déplacement axial de la bride est linéaire sur la "Section 0" avec un déplacement maximal à $L=0$, et de même pour la "Section 1", le déplacement radial est linéaire sur la "Section 1" avec un déplacement maximal à $L=0$. Le comportement au niveau de ces sections étant représentatif de la face interne, le vrillage de la bride est donc confirmé.

Ainsi, on peut conclure que ce phénomène de vrillage génère des endommagements plus importants au voisinage de la tranche A (cf. Figure 3.27), où se trouve la vis 1. D'ailleurs, cela explique aussi le comportement de la jauge **J7**, qui voit en premier, une chute du niveau de déformation avant même le premier endommagement identifié à l'échelle globale de la structure (à $d=0.39$ pour B23 et $d=0.35$ pour B25 en déplacement adimensionné), ce qui veut dire que les premiers micro-endommagements ont lieu à ce niveau. De plus, la localisation des endommagements donnée par l'émission acoustique indique le cumul de ces derniers au voisinage de la vis 1, comme le montre la Figure 3.42.

En résumé, le comportement de la bride trois fixations est dissymétrique (perte d'orthotropie). Sa déformation est maximale au voisinage de la vis 1 (tranche A) alors qu'au voisinage de la vis 3 (tranche B), la bride est moins sollicitée et c'est la vis qui absorbe plus d'énergie de déformation. Ce comportement explique le fait que la vis 3 soit toujours la plus sollicitée par rapport aux vis 1 et 2.

Étudié à l'échelle macroscopique, il est communément supposé qu'un matériau composite tissé 3D présente 3 plans de symétrie matérielle (comportement orthotrope). Cependant,

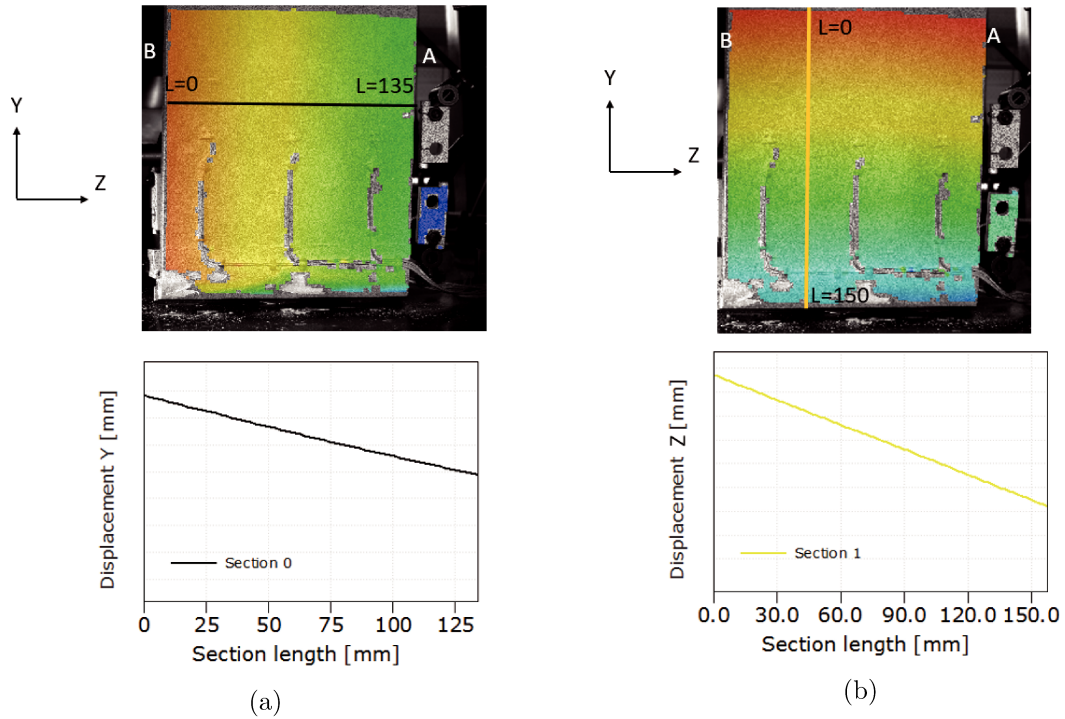


FIGURE 3.41 – Champs de déplacement dans la bride multifixations (a) déplacement suivant Y et (b) déplacement suivant Z.

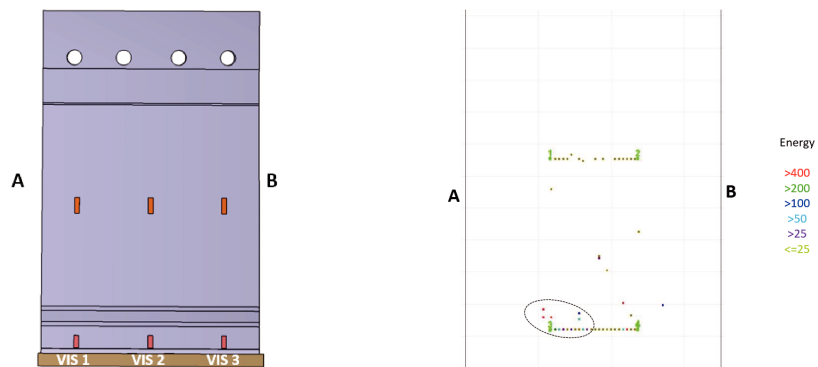


FIGURE 3.42 – Localisation des endommagements dans la bride B25 donnée par l'émission acoustique.

l'observation des brides du carter révèle que l'orientation des chaînes et trames ne fait pas un angle de 90° permettant de conserver l'orthogonalité du repère Chaîne/Trame, comme illustré par la Figure 3.43. Ce phénomène est appelé **le décadrage**.

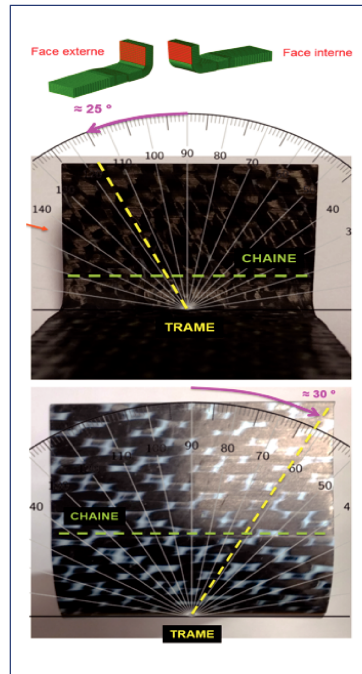
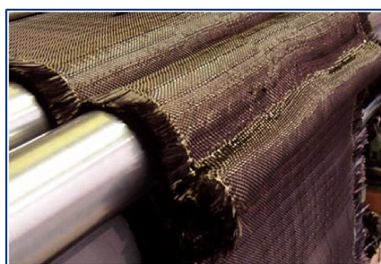


FIGURE 3.43 – Illustration du décadrage.

Le procédé de fabrication du carter fan (RTM (Resin transfer molding)) est à l'origine de ce phénomène. En effet, lors de l'enroulement de la préforme (cf. Figure 3.44a), et en particulier, lors du compactage manuel des brides (cf. Figure 3.44b), les torons sens trame se désorientent par rapport aux torons sens chaîne, faisant généralement un angle de 30° environ sur la face interne et de l'ordre de 25° sur la face externe.



(a) Enroulement de la préforme



(b) Compactage du rayon de bride

FIGURE 3.44 – Opérations générant du décadrage lors de la fabrication du carter Fan CMO tissé 3D.

Suite à plusieurs travaux réalisés en interne chez Safran Aircraft Engines, le décadrage peut être pris en compte en adoptant l'une des deux approches :

- Des méthodes d'homogénéisation ont permis d'estimer l'impact du décadrage sur les 9 paramètres d'élasticité orthotrope.
- L'identification de la matrice de raideur, rendue monoclinique par l'effet du décadrage, à travers une nouvelle méthode basée sur les bases duales de l'algèbre géométrique.

Dans le cadre de ces travaux, c'est la première approche qui sera adoptée. Les nouveaux paramètres matériaux sont donnés en fonction de l'angle de décadrage connu pour le carter fan. Le choix de cette méthode se justifie par sa possibilité d'être implémentée dans le modèle semi-analytique développé dans le cadre de cette thèse.

3.5 Bilan de l'étude expérimentale

Cette étude expérimentale a été réalisée en trois parties : la première concerne la caractérisation de la fixation et l'identification de la loi de comportement de la vis sous un chargement de traction. Dans la deuxième partie, un essai de traction sur la liaison boulonnée d'une bride monofixation a été mis en œuvre. Cet essai a permis de comprendre le comportement de la liaison jusqu'au 1er endommagement de la bride. À cet instant, la vis avait toujours un comportement élastique, ce qui veut dire que l'instrumentation de la vis a peu impacté sa résistance. Les jauges de déformation et la stéréo-corrélation d'images ont permis d'identifier un dépliage de la bride qui a lieu au niveau de la sortie du rayon de bride. Ce comportement a été retrouvé sur les essais de traction des brides multi-fixations, qui ont fait l'objet du troisième et dernier volet de l'étude expérimentale. Dans cette partie, l'intérêt de la contreplaque a été mis en évidence et l'analyse des résultats a montré que, contrairement aux attentes, le comportement de la bride n'est pas symétrique. Ceci a été expliqué par l'effet du décadrage, qui impacte l'orthogonalité entre les chaînes et les trames et, par conséquent, le comportement orthotrope de la bride. Des modes de rupture différents ont été obtenus selon la présence ou pas de la contreplaque : une rupture due à la perte des trois vis pour les essais avec contreplaque, et une rupture mixte (bride et 1 vis) pour les essais sans contreplaque. Comme une instrumentation différente des vis a été utilisée dans ces essais, qui s'est avérée moins robuste par rapport à celle utilisée pour l'essai monofixation, le comportement de la vis a été largement impacté ce qui a diminué sa résistance.

Corrélation Calculs-Essais : Application industrielle

Ce chapitre a pour objectif de comparer les différentes approches : semi-analytique, numérique 3D et expérimental, exploitées dans le cadre de ces travaux. Premièrement, un modèle éléments finis 3D modélisant l'essai monofixation a été développé. Ce modèle permettra, d'une part, d'avoir un modèle éléments finis représentatif de l'essai, et d'autre part, l'identification et la validation des raideurs axiales, calculées par le modèle semi-analytique. Ce dernier a fait l'objet d'une adaptation géométrique, afin de se rapprocher de la configuration essai. Avant d'évaluer le métamodèle développé à travers une confrontation calculs-essai, l'influence de l'axisymétrie a été étudiée. Cette analyse a été réalisée en comparant le modèle EF 3D représentatif de l'essai au même modèle intégrant une condition de blocage orthoradial de la bride. Finalement, une étude comparative des résultats donnés par les trois approches a été établie et des conclusions ont été tirées par rapport à l'intérêt du modèle semi-analytique développé.

Sommaire

4.1	Introduction	147
4.2	Modèle monofixation éléments finis 3D	148
4.2.1	Modélisation	148
4.2.2	Lois de comportement	150
4.2.3	Étude d'influence de l'axisymétrie et de la forme de la bride	152
4.2.3.1	État de précontrainte dû au serrage	152
4.2.3.2	Comportement sous chargement extérieur	153
4.2.3.3	Conclusion partielle	157
4.3	Modélisation semi-analytique	158
4.3.1	Adaptation du modèle semi-analytique à la configuration essai	158
4.3.2	Confrontation du modèle aux résultats numériques	159
4.3.2.1	Identification des raideurs axiales dans l'assemblage	160
4.3.2.2	Identification du coefficient de la raideur de contact	162
4.4	Analyse du modèle EF 3D représentatif de l'essai expérimental	164
4.4.1	État de précontrainte	164
4.4.2	État de chargement	165
4.4.2.1	Comportement du rayon de bride	165
4.4.2.2	Comportement du pied de bride	167

4.5	Confrontation des modèles semi-analytique et numériques aux résultats expérimentaux	168
4.5.1	Évaluation du modèle semi-analytique lors de la précharge	168
4.5.2	Comportement de l'assemblage	170
4.5.2.1	Allure de la déformée	170
4.5.2.2	Raideur globale	170
4.5.3	Comportement de la fixation	173
4.5.4	Comportement de la bride	175
4.5.4.1	Déformations dans la virole	175
4.5.4.2	Vérification des critères technologiques	177
4.5.5	Synthèse	178

4.1 Introduction

L'objectif principal du développement du métamodèle semi-analytique est de disposer d'un outil de conception, permettant le dimensionnement des assemblages multimatériaux en un temps de calcul très réduit, avec une précision de calcul acceptable dans une démarche de prédimensionnement. Afin d'évaluer ce modèle, il doit être confronté à des résultats expérimentaux et/ou des modèles éléments finis fiables.

Le modèle semi-analytique se réduit à l'étude d'un seul secteur de bride, en hypothèse axisymétrique. De plus, il ne tient pas compte, à l'heure actuelle, de la présence éventuelle d'une entretoise ou d'une contreplaque, comme c'est le cas pour l'essai de traction des secteurs de brides à trois boulons. C'est pour ces raisons que nous allons établir une confrontation calculs-essai dans le cas de la configuration de l'assemblage monofixation, pour lequel un modèle EF 3D a été réalisé afin d'enrichir la base de validation du métamodèle.

La problématique qui se pose c'est que l'axisymétrie du modèle semi-analytique développé n'est pas compatible avec l'essai monofixation qui lui, n'est pas axisymétrique. De plus, la découpe du secteur de bride à trois boulons (cf. Figure 3.6) n'a pas été réalisée de façon à conserver la forme angulaire du secteur monofixation. Au vue de ces données, une vérification de l'influence de l'axisymétrie et de la forme de la bride sur le comportement de l'assemblage et plus particulièrement au niveau de la liaison s'impose.

Ainsi, la première étape dans cette démarche de corrélation consiste à :

- Établir un modèle EF 3D du secteur angulaire monofixation en considérant un blocage orthoradial. Celui-ci est le plus représentatif du métamodèle semi-analytique développé.
- Établir un modèle EF 3D représentant la géométrie réelle du secteur de bride testé, sans condition de blocage orthoradial. Ce modèle est représentatif de l'essai expérimental monofixation.
- Évaluer l'influence du blocage orthoradial et de la forme de la bride à travers la comparaison des deux modèles EF 3D.

La deuxième étape de corrélation consiste en une confrontation du modèle semi-analytique au modèle EF 3D angulaire avec blocage orthoradial. Si la comparaison est satisfaisante et que la condition de blocage n'a pas une influence significative sur le comportement au niveau de la liaison (vérification à l'étape 1), le modèle semi-analytique pourra être confronté aux résultats de l'essai expérimental et du modèle EF 3D représentatif de l'essai.

4.2 Modèle monofixation éléments finis 3D

Comme expliqué précédemment, deux modèles EF 3D ont été établis. Le premier représente un secteur angulaire de la bride monofixation et le deuxième représente une bride monofixation "droite" (c'est-à-dire comportant des flans parallèles). Afin de simplifier la lecture, nous allons appeler le modèle du secteur angulaire **Modèle 1** et le modèle du secteur droit **Modèle 2**. La modélisation numérique est réalisée de façon identique entre les deux modèles, la seule différence consiste en l'ajout de la condition du blocage orthoradial sur le modèle angulaire.

4.2.1 Modélisation

La Figure 4.1 montre une description générale de la modélisation numérique des deux modèles EF 3D. Dans le but d'optimiser le maillage et de gagner en temps de calcul, les géométries de la vis et de l'écrou ont été simplifiées. En effet, le filetage n'a pas été représenté et la longueur non usinée de la vis a été modélisée avec un cylindre lisse de diamètre $d = d_s$, le diamètre résistant de la vis. La longueur usinée sur laquelle les jauges de déformation sont collées est modélisée avec un cylindre lisse de diamètre $d = d_u$. Étant donné la symétrie du socle, seule sa moitié a été représentée, le blocage du demi-socle suivant \vec{X} traduit cette symétrie (cf. Figure 4.1f).

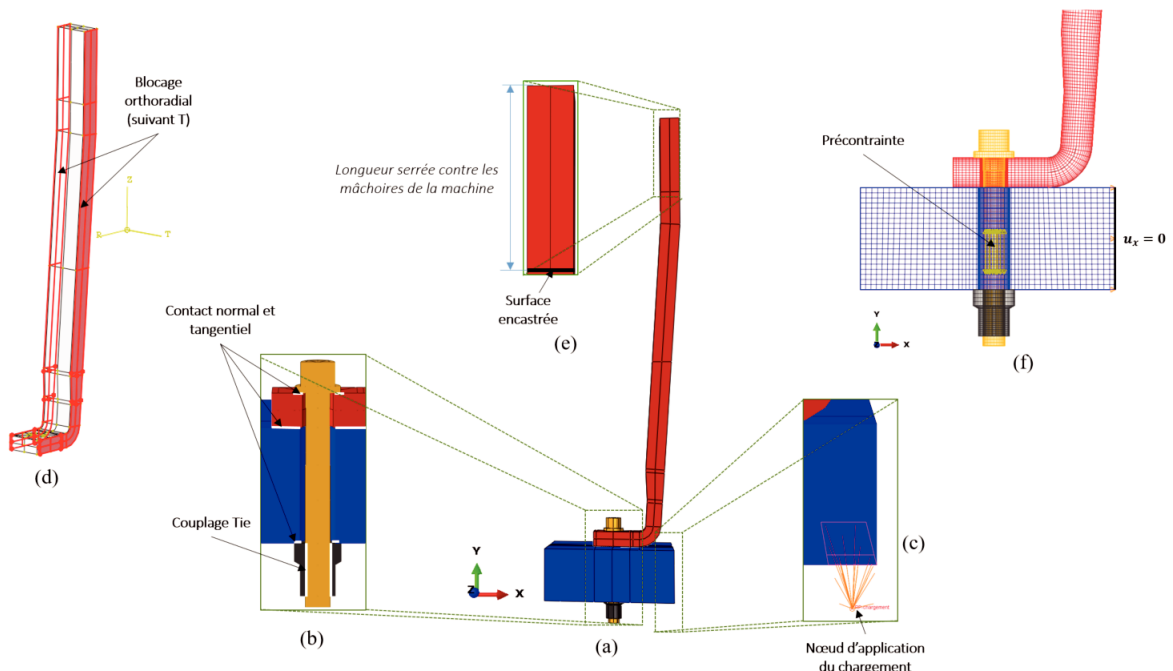


FIGURE 4.1 – Description générale du modèle 3D de l'essai monofixation.

Comme illustré dans la Figure 4.1b, trois zones de contact sont identifiées : entre la tête de vis et la bride, entre la bride et le socle et finalement entre l'écrou et le socle. Il n'y a pas de zone de contact au niveau du fût de la vis car cette dernière est montée initialement avec jeu. De plus, le niveau de chargement est assez faible pour générer une grande flexion de la vis qui pourrait mettre en contact le fût de la vis et la bride. Ce constat a été validé expérimentalement. La méthode de discrétisation choisie pour l'ensemble des contacts est "Surface-to-surface". Le choix de la nature de la surface, maître ou esclave, a été établi suivant deux règles :

- La surface la plus rigide est la surface maître.
- La surface dont le maillage est plus raffiné est la surface esclave.

Pour les trois zones, le contact normal et tangentiel sont activés. Les coefficients de frottement pour chaque couple de contact ainsi que les surfaces maîtres et esclaves sont donnés dans le tableau 4.1. En ce qui concerne l'interaction vis-écrou, une contrainte de collage de type "Tie" est appliquée. Cette fonctionnalité lie tous les degrés de liberté des deux surfaces en contact. L'étude menée par Montgomery et al. [Mon02] montre que cette condition est représentative de la distribution des contraintes générées dans le fût de la vis, dans le cas des modèles où la géométrie des filets est entièrement modélisée.

TABLE 4.1 – Coefficients de frottement entre les surfaces en contact.

Surface maître	Surface esclave	Coef. de frottement
Socle	Tête de l'écrou	0.15
Socle	Bride	0.1
Bride	Tête de vis	0.1

Le choix du coefficient de frottement entre la bride composite et les pièces métalliques est basé sur les travaux de Beyer [Bey19]. Ce dernier a réalisé des essais de fretting sur des composites tissés 2D, utilisant les mêmes fibres et matrice que le composite tissé 3D utilisé dans le cadre de cette thèse. Le coefficient de frottement a été relevé au premier cycle de ces essais.

Rappelons que dans l'essai monofixation, le vérin est lié au mors inférieur de la machine, assemblé au socle. Ainsi, le chargement est appliqué à travers un couplage cinématique entre le point d'application de la charge et la surface du socle correspondante à la chape liée au mors (cf. Figure 4.1c). Un déplacement suivant $-\vec{Y}$ est imposé au point de référence "RP-charge". Le serrage des mâchoires du mors supérieur contre la bride est représenté par un encastrement appliqué au niveau de la surface interne de la bride. Cette surface d'encastrement se trouve à la fin de la longueur de serrage des mâchoires du mors supérieur contre la bride (cf. Figure 4.1e).

La condition de blocage orthoradial, telle qu'elle est illustrée par la Figure 4.1d, est appliquée uniquement au **modèle 1**.

Un aperçu du maillage de l'assemblage est illustré par la Figure 4.1f. Les éléments sont

essentiellement de type C3D8I, ce type d'élément permet de mieux capter la flexion des pièces à travers la désactivation du verrouillage en cisaillement. Le maillage de la bride est réalisé en biais avec un maillage de plus en plus fin vers les surfaces internes et externes de la bride. Cette discrétisation a été réalisée afin de mieux capter le comportement au niveau des jauges de déformation collées sur la bride.

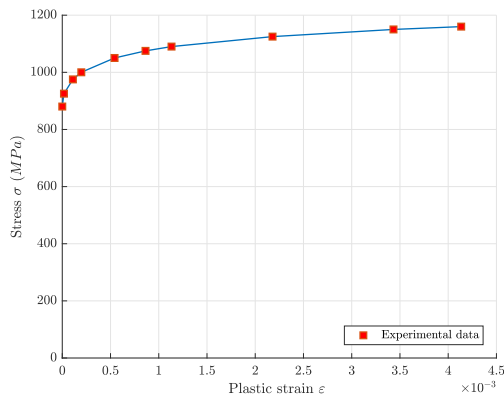
Le calcul est effectué en deux étapes. La première phase consiste en l'application de la précontrainte totale, soit un effort de $F_0 = 9736 \text{ N}$, grâce à la fonction "Bolt-Load" pré-existante dans le logiciel de calcul Abaqus ©. Cette valeur d'effort correspond à une contrainte de précharge équivalente $\sigma_0 = 282 \text{ MPa}$, qui a été relevée au début de chargement lors de l'essai expérimental. Ensuite, un chargement axial est appliqué à travers un déplacement imposé de 1 mm dans la deuxième et dernière étape.

4.2.2 Lois de comportement

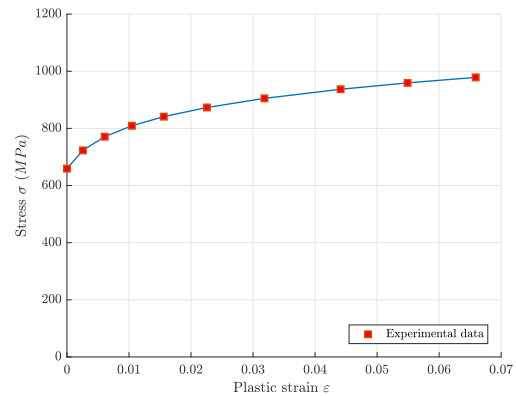
Le comportement considéré pour la vis et l'écrou est élastoplastique, en introduisant les propriétés élastiques données dans le tableau 4.2, et les lois de comportement plastique présentées dans la Figure 4.2.

TABLE 4.2 – Propriétés élastiques des matériaux de la vis et de l'écrou.

	Module de Young E	Coefficient de poisson
Vis	197 500	0.295
Écrou	195 800	0.295



(a) Vis (Inco718)



(b) Écrou (Acier)

FIGURE 4.2 – Lois de comportement plastique de la vis (a) et de l'écrou (b) introduites dans le modèle EF 3D.

Concernant la bride composite, une loi de comportement orthotrope a été considérée sans prise en compte de l'endommagement. La bride est composée en théorie de deux matériaux

ayant pour différence le ratio Chaîne/Trame (cf. Figure 4.3a). La mesure des angles de décadage sur les faces internes et externes de la bride a permis d'identifier une nouvelle partition matérielle, faisant ainsi apparaître cinq matériaux au lieu de deux (cf. Figure 4.3b). L'incidence du décadage sur les paramètres matériaux de chaque portion est présentée dans le tableau 4.3.

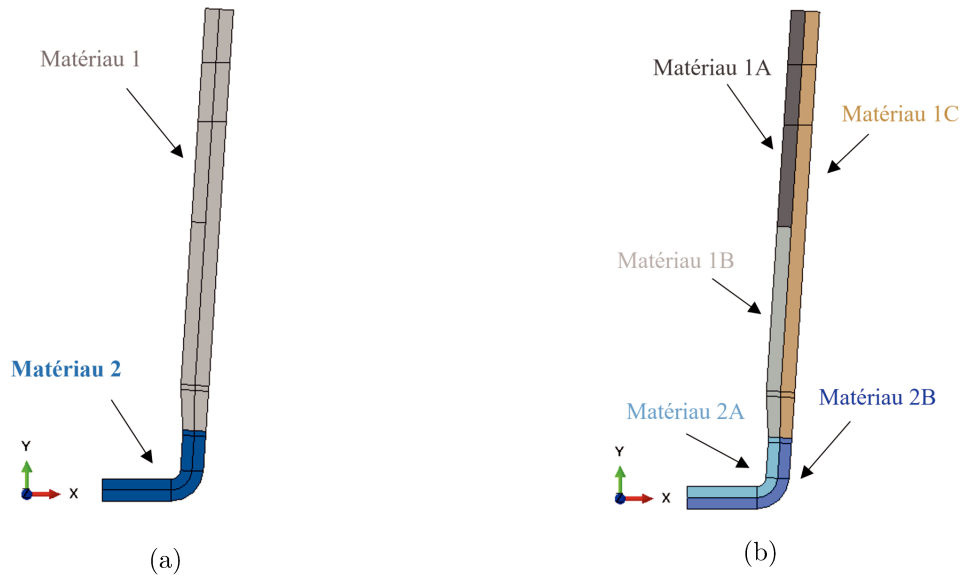


FIGURE 4.3 – Illustration de la répartition matérielle de la bride avant (a) et après (b) application de l'effet du décadage.

TABLE 4.3 – Propriétés matériaux des parties décadrées et non décadrées de la bride.

Matériau	θ	E_{11}	E_{22}	E_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
I (C_1/T_1)	0°	E_{11_I}	E_{22_I}	E_{33_I}	G_{12_I}	G_{13_I}	G_{23_I}	ν_{12_I}	ν_{13_I}	ν_{23_I}
IC (C_1/T_1)	0°	E_{11_I}	E_{22_I}	E_{33_I}	G_{12_I}	G_{13_I}	G_{23_I}	ν_{12_I}	ν_{13_I}	ν_{23_I}
IB (C_1/T_1)	0°	E_{11_I}	E_{22_I}	E_{33_I}	G_{12_I}	G_{13_I}	G_{23_I}	ν_{12_I}	ν_{13_I}	ν_{23_I}
IA (C_1/T_1)	5°	E_{11_I}	$0.9E_{22_I}$	E_{33_I}	$1.12G_{12_I}$	$1.4G_{13_I}$	G_{23_I}	$2.17\nu_{12_I}$	$0.98\nu_{13_I}$	$0.96\nu_{23_I}$
II (C_2/T_2)	0°	$E_{11_{II}}$	$E_{22_{II}}$	$E_{33_{II}}$	$G_{12_{II}}$	$G_{13_{II}}$	$G_{23_{II}}$	$\nu_{12_{II}}$	$\nu_{13_{II}}$	$\nu_{23_{II}}$
II A (C_2/T_2)	10°	$E_{11_{II}}$	$0.82E_{22_{II}}$	$E_{33_{II}}$	$1.22G_{12_{II}}$	$1.08G_{13_{II}}$	$G_{23_{II}}$	$3.3\nu_{12_{II}}$	$0.97\nu_{13_{II}}$	$0.93\nu_{23_{II}}$
II B (C_2/T_2)	30°	$E_{11_{II}}$	$0.66E_{22_{II}}$	$E_{33_{II}}$	$1.68G_{12_{II}}$	$1.25G_{13_{II}}$	$G_{23_{II}}$	$7.8\nu_{12_{II}}$	$0.91\nu_{13_{II}}$	$0.79\nu_{23_{II}}$

4.2.3 Étude d'influence de l'axisymétrie et de la forme de la bride

La validité de la stratégie de confrontation du modèle semi-analytique aux résultats expérimentaux et au modèle EF représentatif de l'essai dépend de l'influence de la condition d'axisymétrie, présente dans le métamodèle, sur le comportement de la liaison boulonnée. L'étude d'influence de cette condition se fera à travers la confrontation des deux modèles EF 3D développés : le modèle EF 3D de l'assemblage de bride droite (modèle 1) et le modèle EF 3D de l'assemblage de bride angulaire avec blocage orthoradial (modèle 2).

4.2.3.1 État de précontrainte dû au serrage

Contraintes normales dans la vis

La Figure 4.4 montre que la répartition des contraintes normales suite à la précharge, données par les deux modèles, est identique. Cette répartition traduit bien que la contrainte de serrage (281 MPa) est très proche de celle appliquée (282 MPa) et ceci quel que soit le modèle.

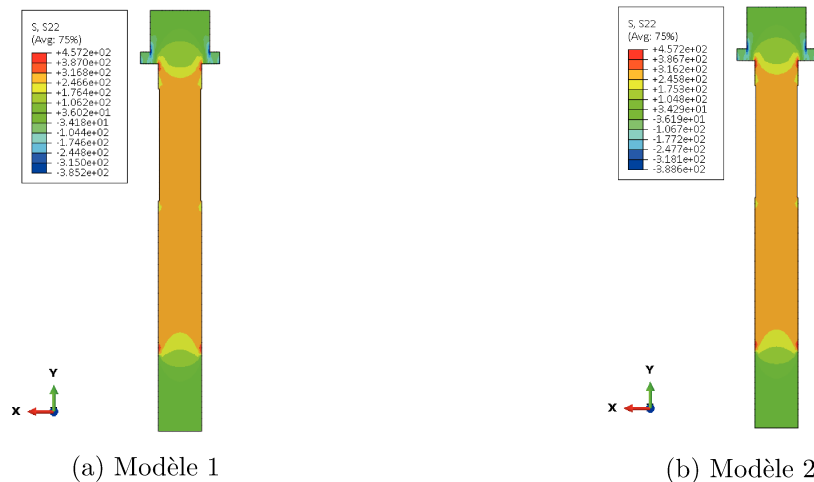


FIGURE 4.4 – Répartition des contraintes normales dans la vis suite à l'application de la précharge, donnée par le modèle angulaire (modèle 1) et le modèle droit (modèle 2).

Contraintes hors-plan dans le pied de bride

L'application de l'effort de serrage génère principalement des contraintes hors-plan au niveau du pied de bride. Il convient d'analyser l'état de ces contraintes dans cette zone et de voir la différence entre les deux modèles. Notons que pour la bride composite, les contraintes sont exprimées dans le repère local du matériau où : 1(C) représente le sens chaîne, 2(T) le sens trame et 3(HP) la direction hors-plan (cf. Figure 4.5). L'analyse des contraintes de compression hors-plan σ_{33} montre que les deux modèles présentent la même distribution du cône de compression. Cependant, le modèle droit sans blocage orthoradial (Modèle 2) montre des contraintes plus importantes au niveau du contact entre la bride et l'arête de la vis. On note une différence de quasiment 60 MPa à ce niveau. En effet, l'application de la précharge provoque un poinçonnement de la bride au niveau de la liaison. Ce poinçonnement est beaucoup plus important dans le cas de la bride droite car l'énergie de déformation due à ce phénomène est évacuée à travers les bords libres. L'écart de contraintes sur la zone de poinçonnement est moins accentué sur les contraintes de cisaillement hors-plan, pour lesquelles les deux modèles affichent une distribution très similaire. Ce phénomène reste très localisé, son influence sur le comportement global au niveau de la liaison est assez faible.

4.2.3.2 Comportement sous chargement extérieur

Comportement global Force-Déplacement

Pendant la phase de chargement, il convient d'analyser l'évolution de la raideur globale de l'assemblage donnée par les deux modèles, à travers l'analyse des courbes effort-déplacement. Les déplacements sont récupérés au point de référence pour lequel le déplacement est imposé (cf. Figure 4.1c). L'effort total correspond à la somme des forces nodales axiales (dans la direction \vec{Y} du repère global) vues par les nœuds de la surface encastree (cf. Figure 4.1e).

L'analyse de la Figure 4.6 montre que le comportement est non linéaire pour les deux configurations. La configuration du modèle angulaire bloqué est globalement plus rigide. En effet, le blocage des bords de la bride empêche les déformations dans sa largeur dues à l'effet Poisson. Ce modèle est équivalent à un modèle en état de déformation plane. L'écart entre les deux modèles évolue avec l'augmentation du chargement pour arriver à un écart maximal de 11% à la fin du chargement.

Comportement de la vis

Lors du chargement, la vis est soumise principalement à une contrainte normale, combinant la traction et la flexion. Nous allons donc nous intéresser à évaluer la différence entre les deux modèles en termes de calcul de la contrainte normale σ_{22} , exprimée dans le repère global du modèle. La valeur de cette contrainte est calculée à travers la somme des contraintes de traction et de flexion, identifiées par les équations Eq.4.1, Eq.4.2 et Eq.4.3 :

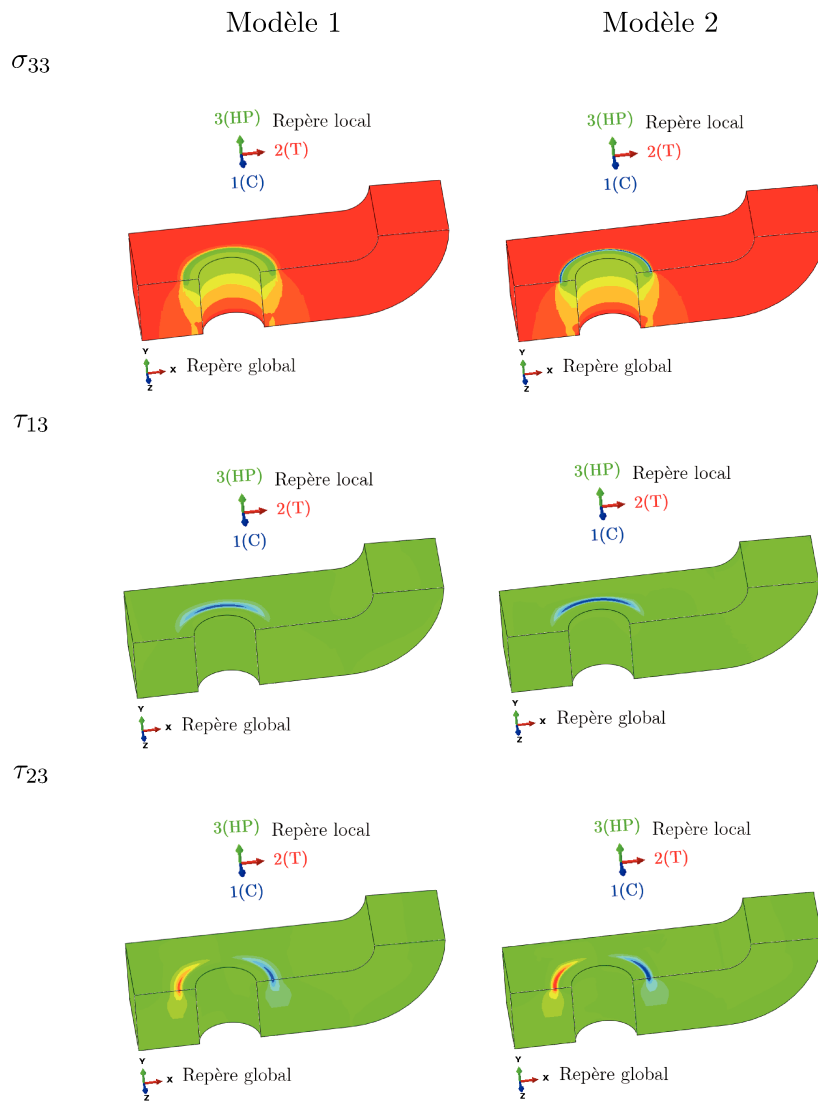


FIGURE 4.5 – Contraintes hors-plan dans le pied de bride données par le modèle angulaire (modèle 1) et le modèle droit (modèle 2), à l'étape de précharge.

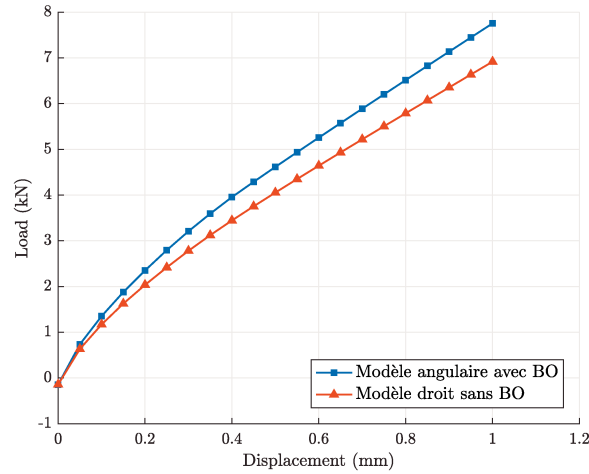
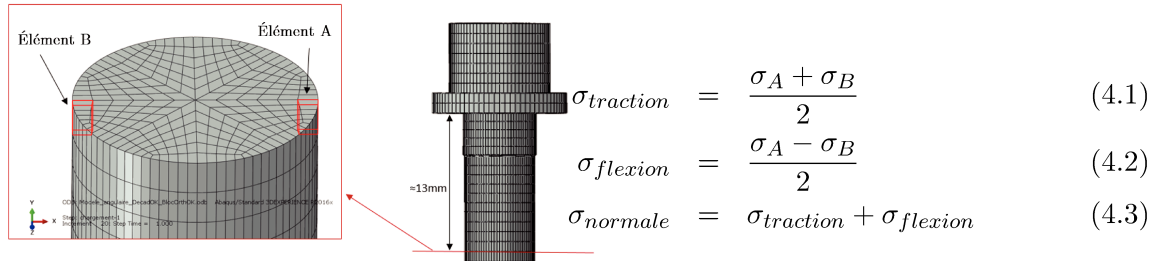


FIGURE 4.6 – Courbes effort-déplacement données par le modèle angulaire avec blocage orthoradial et le modèle droit, à l'étape de chargement.



L'évolution des contraintes dans la vis est comparée entre les deux modèles à effort équivalent et à déplacement équivalent. La Figure 4.7a montre qu'à effort équivalent, les contraintes données par les deux modèles sont très proches. Le modèle 2 (bride droite) voit légèrement plus de contraintes de traction tout au long du chargement alors que pour les contraintes de flexion, elles deviennent légèrement plus importantes dans le modèle 2, à partir de $F \simeq 5.7kN$. Ce constat est confirmé à travers l'analyse de la Figure 4.7b. À déplacement équivalent, les contraintes de flexion vues par la vis dans le modèle 1 (bride angulaire avec blocage orthoradial) sont supérieures à celles du modèle 2. Ainsi, le blocage orthoradial agit principalement sur la contrainte de flexion dans la vis.

Comportement de la bride

Comme expliqué auparavant, l'intérêt de cette étude est d'évaluer l'influence de la forme de la bride et de la condition du blocage orthoradial sur le comportement de l'assemblage **au niveau de la liaison**. De ce fait, une analyse de l'état des contraintes dans cette zone, donnée par les deux modèles à la fin du chargement a été réalisée. Notons que le comportement du pied de bride dépend principalement des sollicitations dans la vis. Ainsi, la comparaison de l'état des contraintes doit se faire à iso-effort vu par la vis.

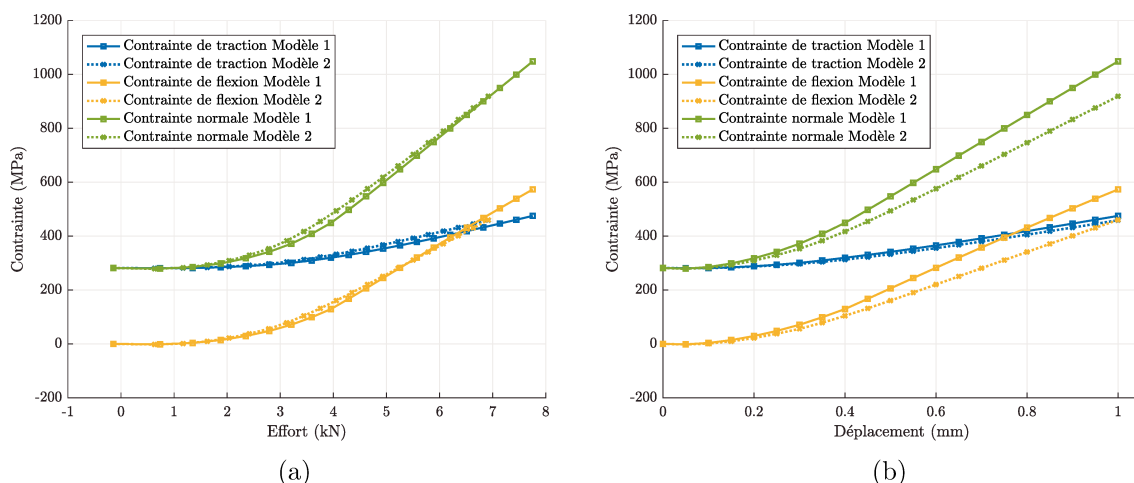


FIGURE 4.7 – Comparaison de l'évolution des contraintes dans la vis en fonction de l'effort (a) et en fonction du déplacement (b) entre le modèle 1 (angulaire avec blocage orthoradial) et le modèle 2 (droit).

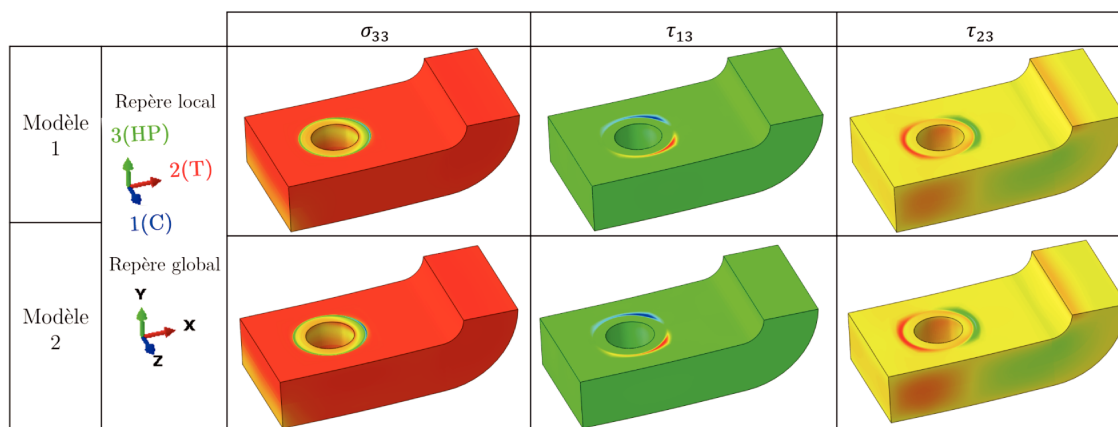


FIGURE 4.8 – Comparaison de l'état des contraintes hors-plan entre le modèle 1 et le modèle 2, à iso-effort $F = 6920 \text{ N}$.

On constate que la distribution globale des contraintes hors-plan σ_{22} et σ_{12} est quasi-identique. Une légère différence est notée au niveau du contact entre la tête de vis et la bride, où le modèle avec une géométrie droite (modèle 2) voit une surcontrainte localisée de compression σ_{22} . Ces surcontraintes localisées sont constatées de façon similaire pour σ_{11} en compression. D'autre part, la distribution de ces contraintes en traction (σ_{11}) montre plus l'influence de la condition de blocage. Les effets de bords qui en résultent provoquent une sollicitation plus importante dans la largeur du pied de bride. Cependant, le niveau de ces contraintes reste assez faible et le comportement de la bride dans cette direction n'est pas critique.

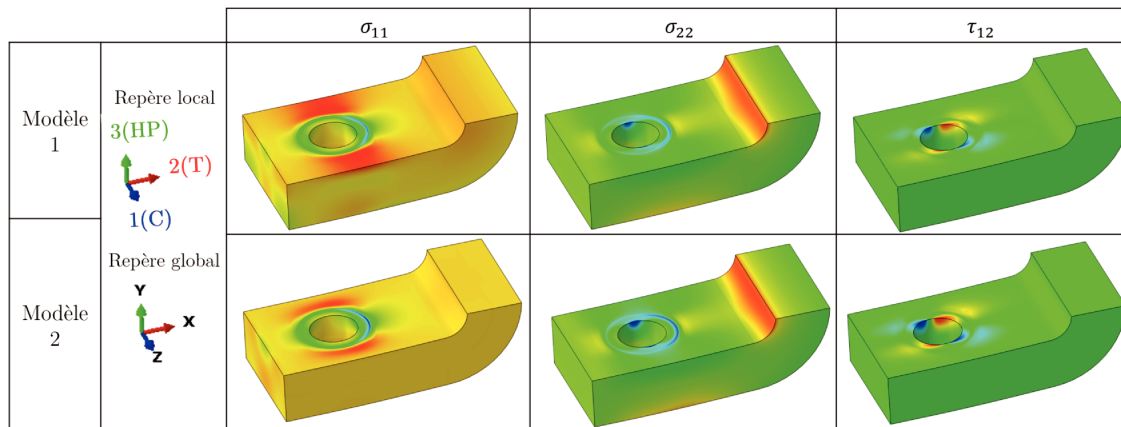


FIGURE 4.9 – Comparaison de l'état des contraintes dans le plan entre le modèle 1 et le modèle 2, à iso-effort $F = 6920 N$.

Concernant les contraintes hors-plan, on constate que leur distribution est très similaire entre les deux modèles. Les surcontraintes ayant lieu au niveau du contact entre la tête de la vis et la bride sont moins accentuées que dans les directions dans le plan et ont lieu dans une zone très localisée. Comme expliqué lors de l'analyse de l'état de serrage, le poinçonnement est plus important dans le cas de la bride droite car l'énergie de déformation due à ce phénomène est évacuée à travers les bords libres. L'écart absolu entre les deux modèles dans cette zone de poinçonnement est maximal pour les contraintes de compression hors-plan σ_{33} , où il est de l'ordre de $60 MPa$.

4.2.3.3 Conclusion partielle

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de l'influence de la condition de blocage orthoradial ainsi que de la forme de la bride, droite ou angulaire, sur le comportement de l'assemblage. L'étude menée montre que ces conditions rendent la bride plus raide, ce qui explique le fait que la vis soit légèrement plus sollicitée dans ce cas, les surcontraintes se manifestent principalement en terme de contraintes de flexion. Le pied de bride représente la zone la plus chargée dans cet assemblage lors du chargement. L'état des contraintes à ce niveau a été analysé. Les résultats montrent que la forme de la bride et le blocage orthoradial ont un impact sur le comportement dans la largeur (sens chaîne) principalement. Cependant, les contraintes hors-plan auxquelles la bride est soumise sont beaucoup plus importantes et pour celles-ci, la condition de blocage orthoradial a très peu d'impact. Globalement, les écarts constatés entre les deux modèles restent acceptables. Le modèle semi-analytique, qui est plus proche du modèle 1 peut être évalué.

4.3 Modélisation semi-analytique

Le modèle semi-analytique se base sur la modélisation des brides avec des éléments coques axisymétriques. Cette condition se traduit par la considération du blocage orthoradiale lors d'une modélisation éléments finis 3D. Ainsi, une confrontation du métamodèle développé au modèle éléments fini 3D de l'assemblage du secteur angulaire (Modèle 1) de la bride est établie.

4.3.1 Adaptation du modèle semi-analytique à la configuration essai

Le modèle semi-analytique tel qu'il est développé et détaillé dans le chapitre 2, n'est pas représentatif de la géométrie de l'assemblage de l'essai monofixation. En effet, le modèle semi-analytique considère deux secteurs de brides monofixation en vis-à-vis et assemblés via une liaison boulonnée. Cependant, la bride composite est assemblée à un socle de forme rectangulaire dans l'essai monofixation. Une nouvelle version du métamodèle adaptée à la configuration de l'essai a été développée.

Le socle a été conçu pour être rigide, afin de ne pas subir de déformation. Ce point a bien été vérifié par les résultats de l'essai et du modèle éléments finis 3D développé dans la section précédente. Ce comportement doit être retrouvé lors de l'adaptation du modèle.

Afin de préserver l'axisymétrie du modèle, nous allons considérer que le socle est de forme circulaire, même si ce n'est pas le cas dans la configuration de l'essai, ni du modèle EF 3D. La propriété principale du socle à vérifier est son comportement rigide, vis-à-vis des autres composants assemblés. L'élément plaque axisymétrique sera attribué au socle et les couplages cinématiques restent inchangés. La Figure 4.10 montre un schéma simplifié du modèle adapté.

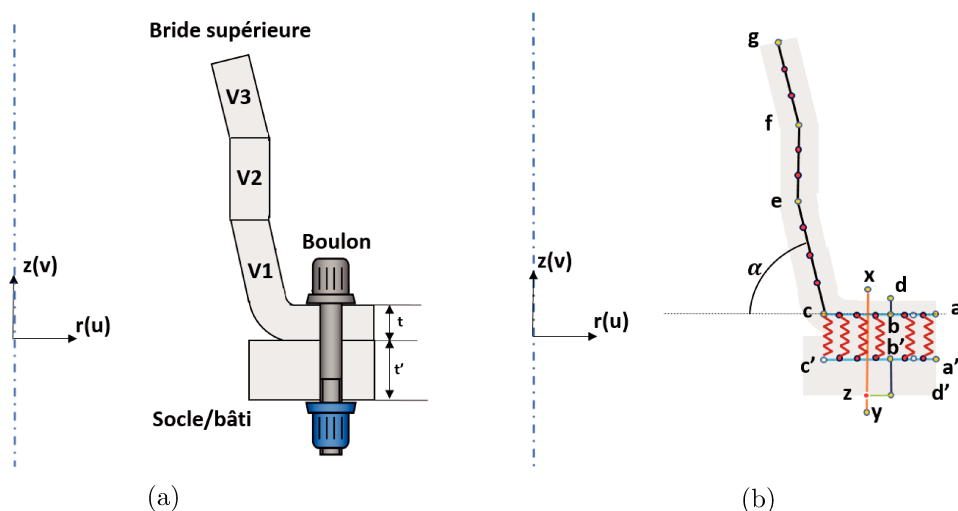


FIGURE 4.10 – Schéma simplifié du modèle semi-analytique adapté à la configuration de l'essai (a) schéma de l'assemblage et (b) modèle équivalent.

Le modèle semi-analytique a été réalisé en considérant les paramètres géométriques de la bride et du socle, les paramètres matériaux ainsi que les conditions de chargement. Le maillage a été effectué en se basant sur les résultats de l'étude paramétrique détaillée dans la section 2.5.1. Afin de tenir compte de la répartition matérielle de la bride due au décadage, l'affectation des propriétés matériaux aux éléments de la bride a été basée sur une moyenne des propriétés matériaux, constituant chaque portion de la bride (P1 et P2). La Figure 4.11 montre un schéma simplifié de l'approche adoptée pour l'identification des propriétés matériaux de la bride dans le modèle semi-analytique. Pour la vis, seuls les propriétés élastiques (E , ν) sont attribués à l'éléments poutre modélisant la fixation car le modèle semi-analytique n'intègre pas un comportement plastique.

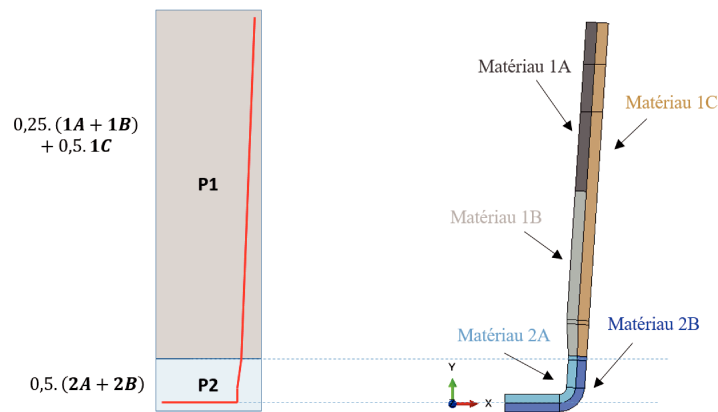


FIGURE 4.11 – Paramètres matériaux affectés à la bride dans le modèle semi-analytique en fonction de la répartition matérielle adoptée dans le modèle EF 3D.

Dans l'essai de traction de la bride monofixation, l'effort extérieur est appliqué au socle à travers le mors inférieur de la machine de traction. Ceci a été appliqué au modèle EF 3D. Toutefois, cette procédure ne peut pas être directement appliquée au modèle semi-analytique car les nœuds du socle sont des nœuds de contact. Ainsi, l'application du chargement a été réalisée d'une façon physiquement équivalente, en appliquant un effort extérieur en haut de la virole de la bride, à la hauteur correspondante à la surface encastrée dans le modèle EF 3D. Cette méthodologie d'appliquer l'effort extérieur est justifiée par l'équilibre statique. Le schéma de la Figure 4.12 illustre la procédure d'application du chargement et des conditions de blocage dans le modèle semi-analytique.

4.3.2 Confrontation du modèle aux résultats numériques

La confrontation du modèle semi-analytique au modèle EF 3D consiste, à ce stade, à analyser les grandeurs physiques qui ne peuvent pas être identifiées expérimentalement, notamment la raideur axiale des pièces assemblées et la raideur de contact. Ces raideurs

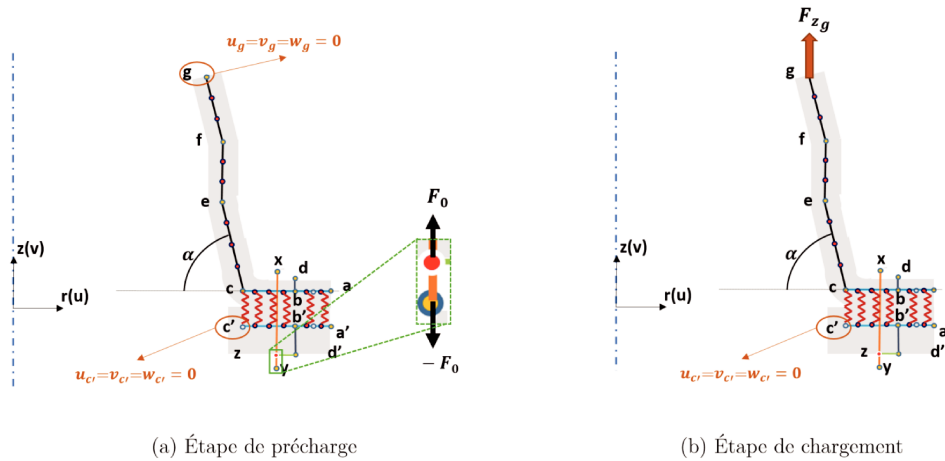


FIGURE 4.12 – Conditions aux limites et du chargement dans le modèle semi-analytique.

sont nécessaires à la bonne identification de la matrice de raideur globale dans le modèle semi-analytique.

4.3.2.1 Identification des raideurs axiales dans l'assemblage

Le calcul des raideurs axiales de la bride, du socle et du boulon, est réalisé dans le modèle semi-analytique grâce aux formulations analytiques détaillées dans la section 1.3.2.1. À travers le modèle EF 3D, ces raideurs peuvent être calculées en se basant sur le calcul de l'énergie de déformation. Cette méthode a été proposée et utilisée par Alkatan et al. [Alk07] pour calculer les raideurs des éléments assemblés par des modèles numériques. L'identification se fait principalement lors de la précharge. La démarche consiste à identifier l'énergie de déformation du cône de compression constitué sur la bride et sur le socle et appliquer par la suite la formule de l'équation Eq.4.4.

$$K = \frac{F^2}{2W} \quad (4.4)$$

où F est l'effort correspondant à la précharge et W est l'énergie de déformation du composant concerné (pièce ou boulon).

La Figure 4.13 montre les valeurs de la raideur axiale calculée par le modèle semi-analytique à l'étape de précharge, comparées à celles données par le modèle EF 3D. Afin de statuer par rapport à la formulation adaptée, les raideurs axiales de la bride et du socle sont calculées par deux méthodes : VDI [VDI14] modifiée et Rasmussen [Ras78] modifiée. La modification consiste en la détermination du diamètre équivalent, à travers la méthodologie développée dans ces travaux et illustrée par la Figure 2.8. Les formulations données par les deux méthodes pour un diamètre D_p équivalent sont ensuite utilisées.

Les valeurs de la raideur axiale de la bride calculée par les deux approches sont assez proches,

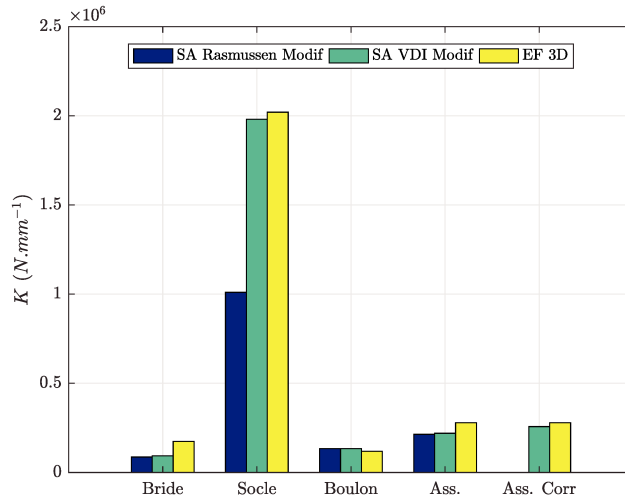


FIGURE 4.13 – Raideurs axiales de la bride, du socle et du boulon calculées par le modèle semi-analytique et le modèle EF 3D.

avec un écart de l'ordre de 50% et 46% par rapport au modèle EF 3D. Ces écarts semblent être importants mais peuvent s'expliquer par le fait que le cône de compression se déforme au voisinage des bords de la bride, cette déformation n'est pas prise en compte par les formulations analytiques, qui sous-estiment la surface équivalente et par conséquent la raideur axiale. La forme du cône de compression dans la bride donnée par le modèle EF est illustrée par la Figure 4.14.

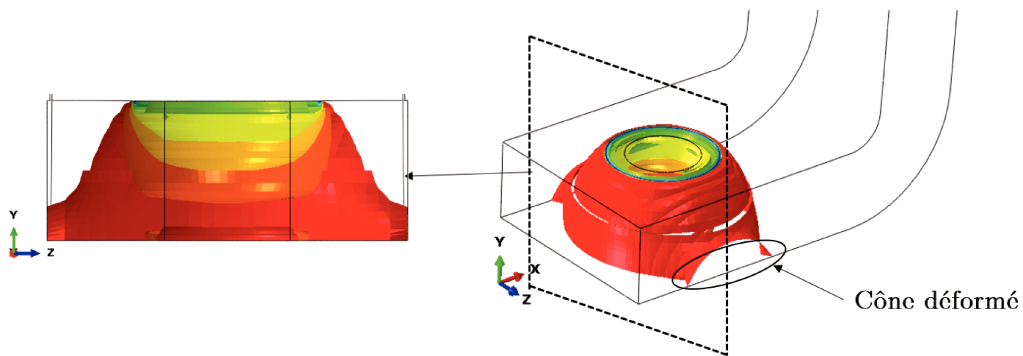


FIGURE 4.14 – Cône de compression dans la bride mettant en évidence sa déformation aux bords.

De ce fait, une correction de la raideur axiale de la bride a été apportée afin de tenir compte de cette déformation. À noter que, cette correction ne s'applique que dans le cas où la bride possède une largeur réduite, l'interaction du cône de compression avec les bords étant dans ce cas non négligeable. La correction consiste à multiplier la raideur axiale de la bride par un coefficient $k = 1.4$, permettant de se rapprocher de la raideur calculée par le modèle EF.

L'introduction de ce coefficient permet de réduire l'écart sur la raideur de l'assemblage de 12% à 6%.

Le phénomène de la déformation du cône de compression ne se produit pas dans le socle puisqu'il est assez large. Cependant, la méthode de Rasmussen sous-estime la raideur axiale et l'écart par rapport à la VDI est de l'ordre de 48%, il est de l'ordre de 50% par rapport au modèle EF. Le calcul de la raideur axiale par la méthode VDI est proche du calcul EF et l'écart est de l'ordre de 2%.

Ainsi, le calcul des raideurs axiales de la bride et du socle se fera dans le modèle semi-analytique par la méthode VDI avec prise en compte de la correction sur la raideur axiale de la bride.

N.B

Les raideurs axiales calculées ici sont des raideurs d'écrasement des pièces assemblées lors de l'application de la précharge. Elles servent uniquement pour l'identification de la raideur d'écrasement de l'assemblage au niveau de la liaison, qui est utilisée ensuite pour identifier la raideur de contact.

Pour le boulon, l'écart est de 12% entre la raideur donnée par le modèle EF et le résultat du calcul réalisé dans le modèle semi-analytique à travers la formule de l'équation Eq.1.36. Ces résultats montrent que les formulations utilisées pour le calcul des raideurs axiales dans le modèle semi-analytique sont cohérentes.

4.3.2.2 Identification du coefficient de la raideur de contact

Pour rappel, le contact est modélisé dans le modèle semi-analytique par des ressorts, ayant comme raideur normale la raideur calculée selon la méthodologie détaillée dans la section 2.4.4.1. Nous rappelons ici que ces raideurs élémentaires sont calculées en fonction de la raideur globale du contact et qui est supposée proportionnelle à la raideur globale de l'assemblage. Ce coefficient de proportionnalité est appelé C_{rep} , où :

$$K_{C_{globale}} = \frac{K_{ass}}{C_{rep}} \quad (4.5)$$

L'identification de ce paramètre à travers le modèle EF 3D se fait à l'étape de précharge, selon la méthodologie suivante :

- **Étape 1** : Calculer la raideur de contact à chaque nœud K_{C_i} en récupérant son déplacement axial U_{2_i} et l'effort normal CFN_{2_i} et en appliquant :

$$K_{C_i} = \frac{CFN_{2_i}}{U_{2_i}} \quad (4.6)$$

- **Étape 2** : Identifier la raideur globale de contact à travers la somme des raideurs élémentaires identifiées à chaque nœud.

$$K_{C_{globale}} = \sum_i K_{C_i} \quad (4.7)$$

Cette procédure d'identification est appliquée sur les nœuds de la bride en contact avec le socle, illustrés par la Figure 4.15, à l'étape de précharge. Tout calcul fait, le coefficient

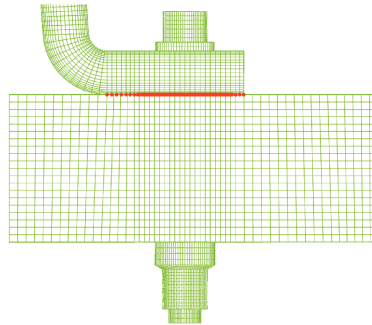


FIGURE 4.15 – Nœuds de la bride en contact avec le socle pour lesquelles la raideur de contact est calculée.

C_{rep} est identifié égale à $C_{rep} = 0.03$. Cela représente une répartition physique de la raideur puisqu'elle permet d'avoir une raideur de contact très importante par rapport à la raideur de l'assemblage. Cependant, le calcul semi-analytique n'a pas pu converger avec cette valeur. Cela est dû probablement au conditionnement de la matrice globale qui voit, dans ce cas, des termes de raideur de contact assez élevés. Une itération a été ainsi effectuée sur ce paramètre jusqu'à la convergence du calcul, celle-ci a été obtenue à $C_{rep} = 0.11$.

La confrontation du modèle semi-analytique au modèle EF 3D angulaire avec blocage orthoradial nous a permis de valider le calcul des raideurs axiales et de choisir la méthode VDI modifiée pour les pièces assemblées d'une part. D'autre part, le coefficient de répartition de la raideur de contact a été identifié ce qui permettra l'identification de la matrice de raideur des éléments barre modélisant le contact.

4.4 Analyse du modèle EF 3D représentatif de l'essai expérimental

4.4.1 État de précontrainte

Lors du serrage du boulon, le modèle EF 3D montre un poinçonnement local du pied de bride par la tête de la vis (cf. Figure 4.5). Bien qu'expérimentalement nous n'ayons pas observé d'endommagement sous tête, il est important de vérifier le niveau de contrainte par rapport aux valeurs à rupture, lors de cet état de serrage.

Le tableau 4.4 montre les niveaux de contraintes générés dans le pied de bride et comparés aux limites à rupture. Les contraintes maximales de cisaillement hors-plan τ_{13} et τ_{23} dépassent respectivement de 68% et 100% leur valeur à rupture. Cependant, ces valeurs localisées à l'interface d'appui de la tête de vis sur le pied de bride sont surestimées de par le choix de modéliser la tête de la vis, avec des arêtes vives. En effet, le congé de raccordement, présent sur la vis réelle permettant d'éviter ce phénomène, n'est pas modélisé. De plus, la contrainte τ_{13} diminue de 100% à 10% de l'épaisseur (idem pour τ_{23}), comme le montre la Figure 4.16).

TABLE 4.4 – Niveaux des contraintes induites dans la bride suite à l'application de la précharge.

Contrainte	σ_{11}		σ_{22}		σ_{33}		τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}
	T	C	T	C	T	C			
Niveau par/ à limite à rupture	10%	63%	16%	67%	-	80%	32%	168%	200%

T : Traction et C : Compression

Concernant la contrainte hors-plan (σ_{33}), elle atteint 80% de la limite à rupture en compression hors-plan à la limite d'appui de la tête de la vis sur le pied de bride. Cette valeur est surestimée pour la même raison qui est la présence de l'arête vive de la vis. L'analyse de la pression sous la tête de la vis montre une valeur plus réaliste qui est de l'ordre de 45% de la limite à rupture. Outre l'effet de l'arête vive de la vis, la surestimation des contraintes peut s'expliquer aussi par des singularités numériques dues au maillage de la bride. En effet, il a été choisi de réaliser un maillage plus fin dans les surfaces externes et internes de la bride afin de mieux capter le comportement des jauges collées sur la bride. La taille des éléments dans cette zone est très petite ce qui explique les surcontraintes à ce niveau.

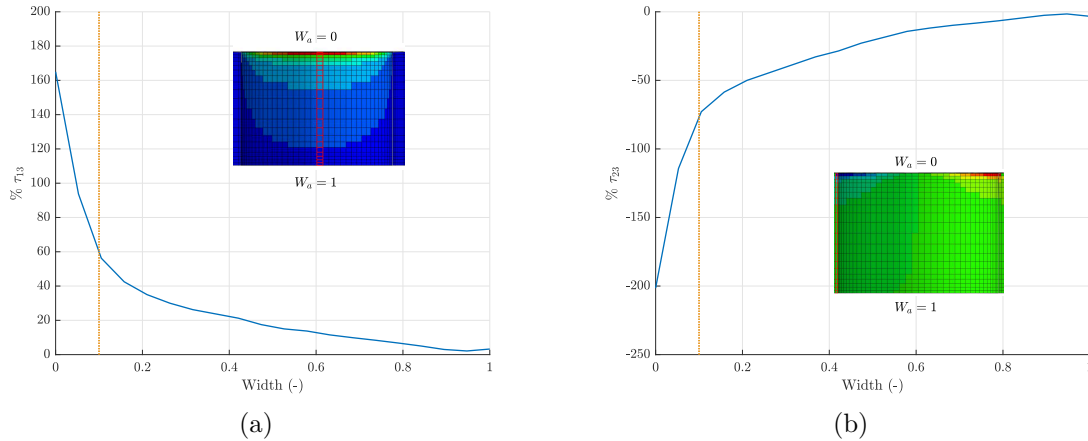


FIGURE 4.16 – Évolution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la bride : (a) dans le plan 13 et (b) dans le plan 23.

4.4.2 État de chargement

Afin d'analyser la réponse du modèle suite à l'application du chargement extérieur, une analyse du comportement global de l'assemblage est réalisée. La Figure 4.17 montre la configuration déformée de l'assemblage à la fin du chargement. La reprise d'effort au niveau de la partie supérieure de la virole entraîne un dépliage de la bride qui peut s'apparenter à du dépliage de cornière. La partie virole se déforme principalement dans la direction \vec{X} et s'allonge très peu dans la direction \vec{Y} . La zone située juste au-dessus du congé a un déplacement important en \vec{X} , ce déplacement donne l'impression que la virole « fait le ventre » à cause de la présence d'un mouvement de rotation du rayon de bride conduisant à sa déformation. Le décollement est accompagné de la déformation du congé et du pied de bride. Ainsi, on peut distinguer deux zones fortement sollicitées, dont le comportement devrait être analysé : le pied de bride et le rayon de bride (congé).

Le modèle n'intégrant pas une loi d'endommagement, nous allons analyser l'état des contraintes dans ces zones jusqu'au 1er endommagement, indiqué par la valeur du déplacement $d = 0.74mm$ dans l'essai monofixation.

4.4.2.1 Comportement du rayon de bride

L'analyse des champs de contraintes dans le plan (cf. Figure 4.18) montre que le rayon de bride est très peu sollicité dans le plan. Des niveaux de contraintes moyens sont constatés pour σ_{22} pour lesquelles le rayon intérieur est sollicité en traction, tandis que le rayon extérieur est sollicité en compression. Cette distribution génère des contraintes de traction hors-plan σ_{33} (cf. Figure 4.19) dont la distribution montre des iso-surfaces de contraintes qui pourraient provoquer un éventuel délaminage, si on tient compte de la stratification réelle du CMO utilisé, fabriqué en quatre couches de tissu 3D. Cet endommagement s'il a lieu devrait donc

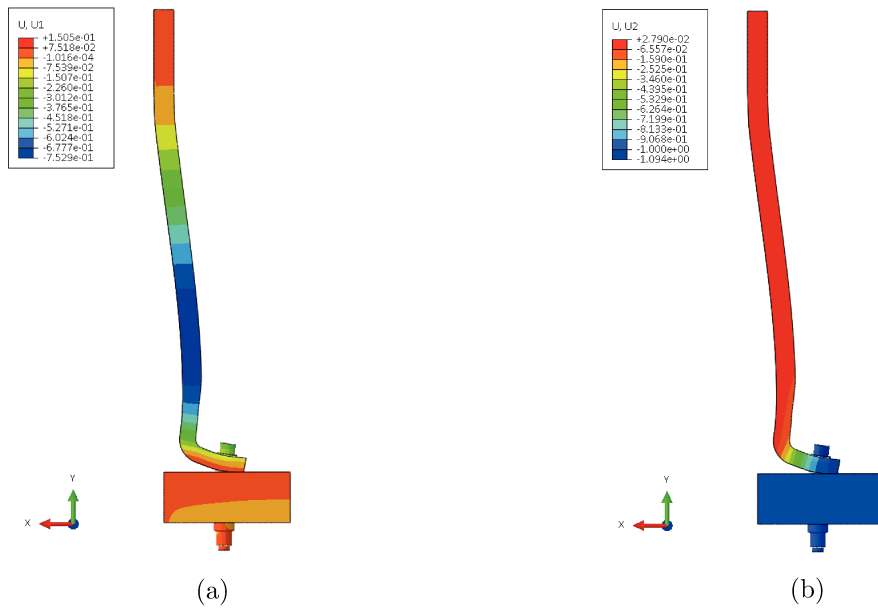


FIGURE 4.17 – Allure de la déformée à la fin du chargement (amplification x10) : (a) déplacement radial et (b) déplacement axial.

s'initier dans le congé, préférentiellement à 1/4 du rayon au centre de la bride (mi-largeur), comme le montre la Figure 4.20.

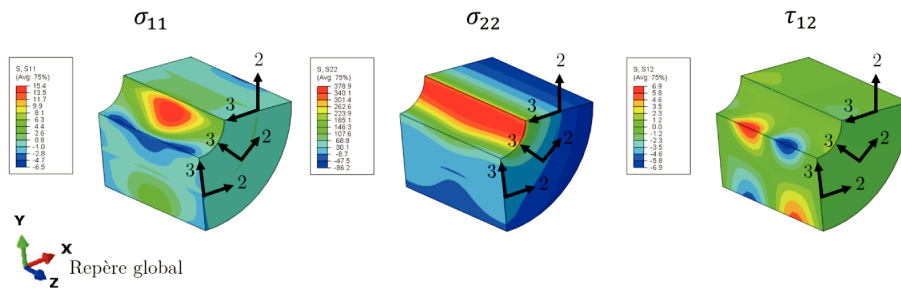


FIGURE 4.18 – Contraintes dans le plan dans le rayon de bride au 1er endommagement.

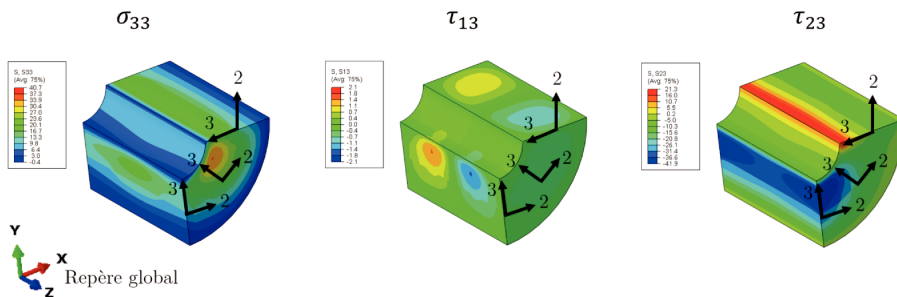


FIGURE 4.19 – Contraintes dans le plan dans le rayon de bride au 1er endommagement.

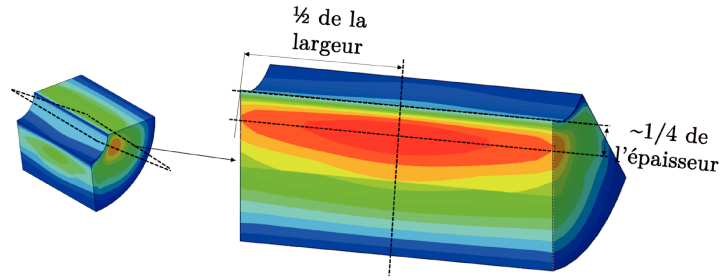


FIGURE 4.20 – Contraintes de traction hors-plan σ_{33} à l'intérieur du rayon de bride.

4.4.2.2 Comportement du pied de bride

Les champs de contraintes hors-plan sont illustrés dans la Figure 4.22. On constate que les valeurs de ces contraintes sont assez élevées. De plus, la distribution des contraintes de cisaillement τ_{13} et τ_{23} , pourrait provoquer un arrachement de la bride au niveau des trous suivant un angle de 90° (45° de part et d'autre). Ce type d'endommagement peut s'expliquer aussi par la distribution du champ de contraintes σ_{33} dans l'épaisseur de la bride (cf. Figure 4.23). En effet, les contraintes de compression hors-plan se déplacent dans l'épaisseur vers l'extrémité de la bride.

Les niveaux de contraintes dans le plan atteints au 1^{er} endommagement et présentés dans la Figure 4.21 sont globalement assez faibles. Seule la zone de poinçonnement voit des surcontraintes dans le plan. Toutefois, celles-ci sont largement surestimées du fait de la présence de l'arête vive de la vis et du maillage de la bride, comme expliqué précédemment.

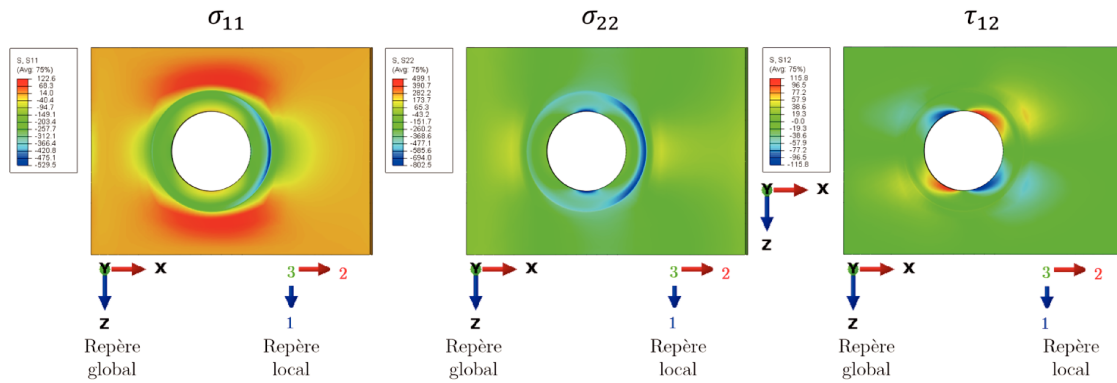


FIGURE 4.21 – Contraintes dans le plan dans le pied de bride au 1er endommagement.

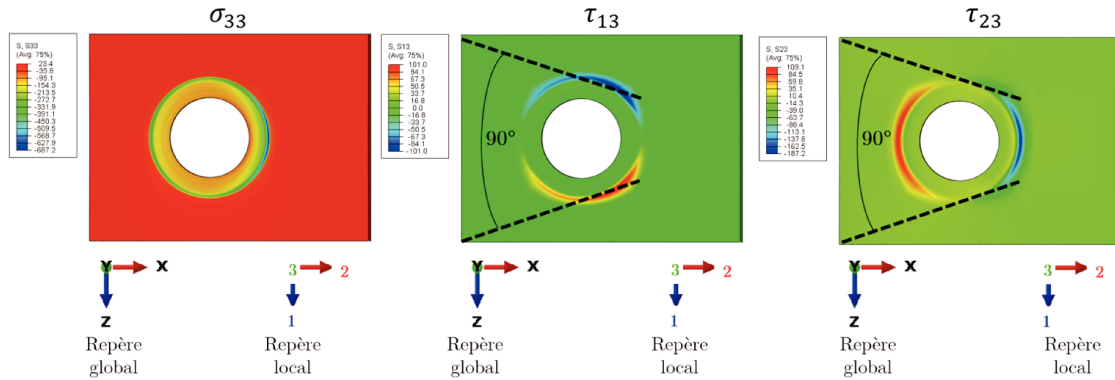


FIGURE 4.22 – Contraintes hors-plan dans le pied de bride au 1er endommagement.

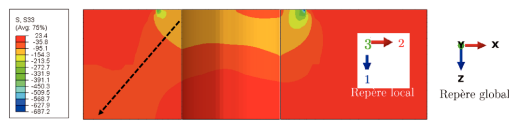


FIGURE 4.23 – Distribution des contraintes de compression hors-plan dans l'épaisseur du pied de bride.

En résumé, l'analyse de l'état des contraintes dans le pied de bride amène à plusieurs remarques. On peut considérer que l'éventuelle ruine de la bride pourrait être due à l'endommagement au niveau du rayon de bride, suite au délaminage. Il est potentiellement possible qu'apparaisse un arrachement matière allant du trou vers l'extrémité du pied de bride. Ces interprétations seraient confirmées si les résultats du modèle EF 3D sont proches de l'essai expérimental. Dans ce qui suit, une comparaison du comportement de l'assemblage entre les modèles numériques, le modèle semi-analytique et l'essai expérimental est établie.

4.5 Confrontation des modèles semi-analytique et numériques aux résultats expérimentaux

Nous avons montré à travers l'étude d'influence du blocage orthoradial sur le comportement de l'assemblage testé dans l'essai monofixation, que le modèle semi-analytique peut être évalué expérimentalement. En effet, les résultats du modèle EF 3D considérant une bride angulaire avec blocage orthoradial, qui est plus proche de la configuration du modèle semi-analytique, sont proches du modèle EF 3D représentatif de l'essai. Ainsi, une confrontation de ces différents modèles aux résultats expérimentaux peut être établie.

4.5.1 Évaluation du modèle semi-analytique lors de la précharge

Dans un premier temps, il est intéressant de vérifier la bonne application de la précharge à travers le modèle semi-analytique. La contrainte de prétension calculée par le métamodèle

développé est de 279 MPa . Cette valeur est très proche de la consigne qui est de 282 MPa . L'application de l'effort de précontrainte engendre une compression hors-plan de la bride. Le socle étant plus rigide, il ne subit pas de déformation. L'état de la bride déformée lors de la précharge est illustré par la Figure 4.24a. L'allure de la déformée montre que le modèle semi-analytique traduit un comportement physique lors de la précharge. Afin d'évaluer la pertinence des résultats, les valeurs de déplacement hors-plan données par le modèle semi-analytique et le modèle EF 3D représentatif de l'essai, lors de la précharge, sont tracées dans la Figure 4.24b. Afin d'éviter la discontinuité géométrique due au trou, et du fait que ce dernier n'est pas pris en compte physiquement dans le modèle semi-analytique, les déplacements axiaux sont récupérés à travers le modèle EF au niveau de la tranche du pied de bride, à mi-épaisseur.

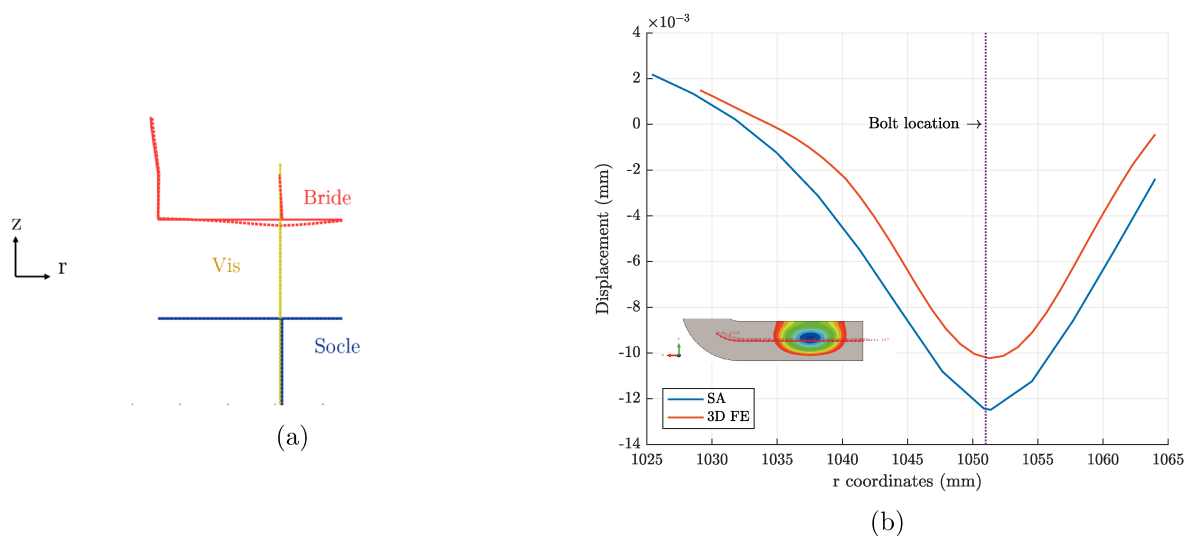


FIGURE 4.24 – Allure de la déformée de la bride et du socle (a) et déplacement hors-plan (suivant z) de la bride, lors de l'étape de précharge, donné par le modèle semi-analytique et le modèle EF 3D (b).

Le déplacement est maximal au niveau du trou où est positionnée la vis ce qui est tout à fait cohérent. L'écart maximal observé entre les deux modèles est de l'ordre de 25% et il est situé au niveau du rayon d'implantation de la vis. Ce déplacement résulte en une contrainte hors-plan qui peut être calculée à travers le modèle semi-analytique. Pour ce faire, il suffit d'appliquer la relation de l'équation 4.8 en considérant la surface équivalente du cône de compression A_{peq} calculée à travers la formulation VDI modifiée.

$$\sigma_{33} = \frac{F_0}{A_{peq}} \quad (4.8)$$

En filtrant les surcontraintes liées aux singularités numériques localisées à l'interface d'appui entre l'arête vive de la vis et la bride, on retrouve des valeurs de contraintes hors-plan similaires entre les deux modèles. Par exemple, si l'on se place à un niveau inférieur de la surface d'appui de 5% de l'épaisseur de la bride (cf. Figure 4.25), l'écart des contraintes est de l'ordre de 4%.

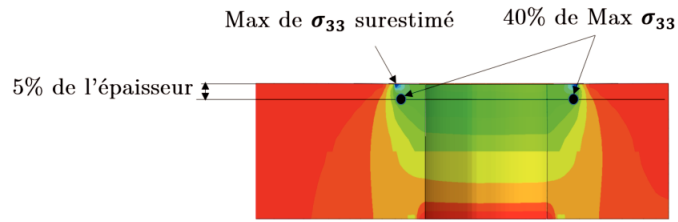


FIGURE 4.25 – Distribution de la contrainte hors-plan dans le pied de bride (sur la tranche) lors de la précharge.

4.5.2 Comportement de l'assemblage

4.5.2.1 Allure de la déformée

L'allure de la déformée de l'assemblage, suite à l'application du chargement extérieur, est illustrée dans la Figure 4.26 pour les différents cas d'étude. On remarque que le modèle semi-analytique reproduit bien l'allure globale de la déformée constatée dans l'essai monofixation et donnée par les modèles EF 3D. On note une déformation plus accentuée de la virole dans le modèle EF 3D droit par rapport au modèle EF 3D angulaire et au modèle semi-analytique. Cela s'explique par la raideur de la bride qui est plus importante sous l'hypothèse d'axisymétrie. Dans le même temps, la déformation maximale dans la virole donnée par le modèle semi-analytique est très proche de celle donnée par le modèle EF 3D angulaire. La Figure 4.27 montre l'évolution du déplacement hors-plan donnée par les trois modèles dans cette zone. Les valeurs expérimentales du déplacement radial sont quant à elles inexploitables, comme expliqué dans la section 3.3.2.3 .

4.5.2.2 Raideur globale

La raideur globale de l'assemblage donnée par les différents modèles est comparée à l'essai expérimental à travers la comparaison des courbes effort-déplacement données par les différentes approches (cf. Figure 4.28). Comme les modèles développés ne tiennent pas compte de l'endommagement, on s'intéresse à analyser le comportement de l'assemblage donné par les différentes approches au 1^{er} endommagement à $d = 0.74mm$.

L'analyse des résultats présentés dans la Figure 4.28 permet de faire les constats suivants :

- Le modèle EF 3D droit et représentatif de l'essai surestime la raideur par rapport à l'essai expérimental.
- Le modèle semi-analytique surestime la raideur par rapport au modèle EF 3D angulaire.
- L'écart entre les deux modèles EF 3D a été expliqué auparavant par l'influence de la condition de blocage orthoradial.

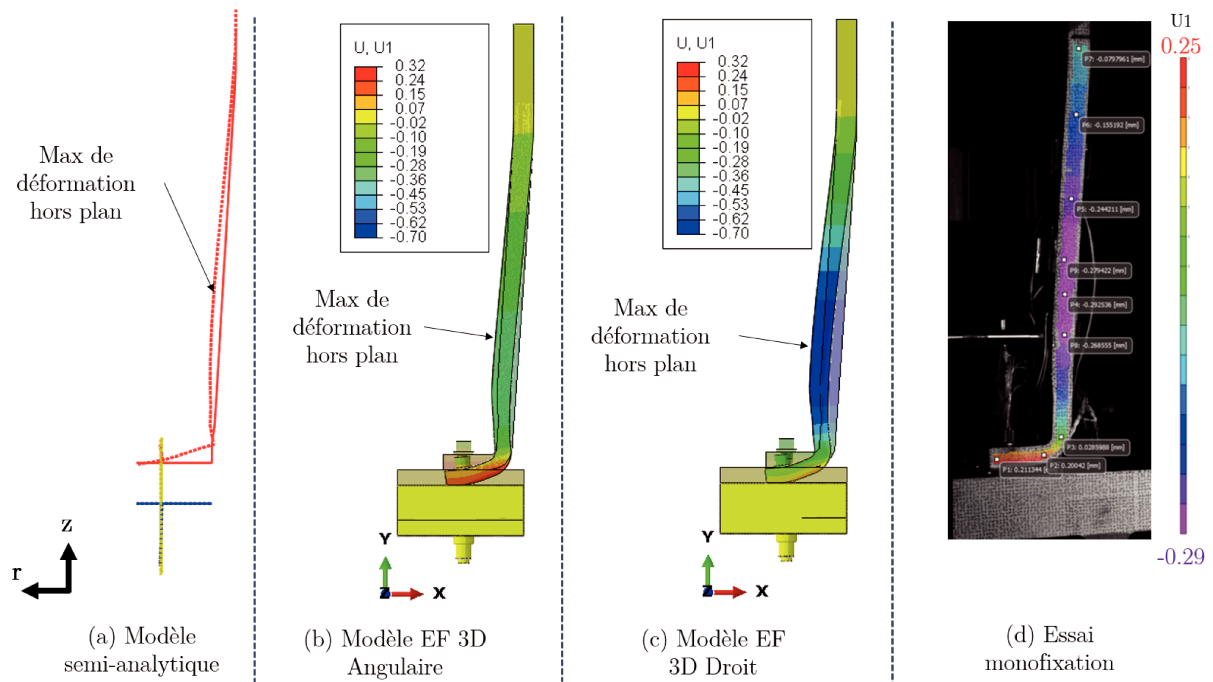


FIGURE 4.26 – Allure de la déformée donnée par le modèle semi-analytique et les modèles numériques (amplification x10), ainsi que l'essai expérimental.

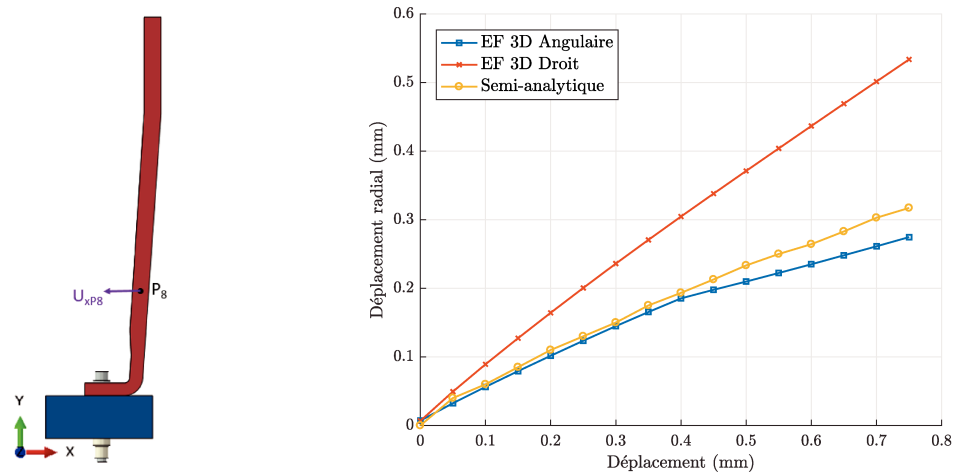


FIGURE 4.27 – Évolution du déplacement radial du point P_8 (en valeur absolue) dans la zone de déformation de la virole, donnée par le modèle semi-analytique et les modèles numériques.

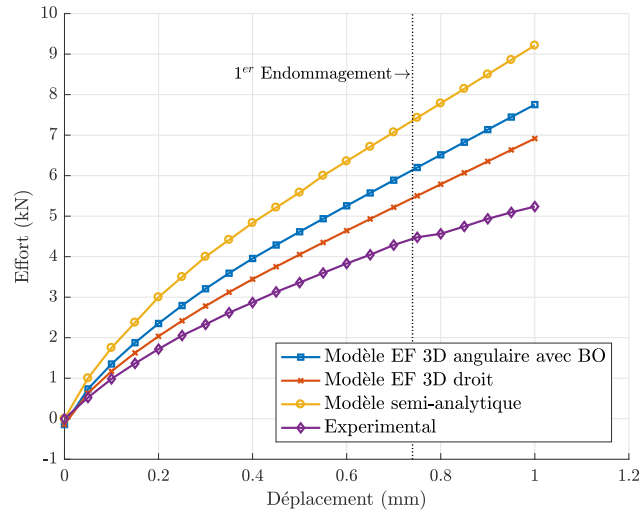


FIGURE 4.28 – Courbes effort-déplacement données par l’essai expérimental, les modèles EF 3D et le modèle semi-analytique.

À l’instant du premier endommagement, l’écart entre le modèle EF 3D de la bride droite et l’essai expérimental est de 23%. Cet écart semble assez élevé car le modèle EF développé reproduit au plus près les conditions de l’essai. Afin de comprendre l’origine de cet écart, nous allons nous baser sur les résultats des déplacements, des points de mesures virtuels P_i obtenus par la stéréo-corrélation d’images lors de l’essai expérimental (cf. Figures 3.16 et 3.17). L’étude est basée sur l’analyse des déplacements relatifs entre le point P_0 appartenant au socle, et les points P_2 et P_7 respectivement. Le point P_7 correspond à la surface encastree dans le modèle EF 3D. Ces points ont été choisis car ils sont les plus éloignés dans la bride. Leur déplacement axial par rapport au socle devrait renseigner sur l’influence de la raideur de la machine dans l’essai expérimental.

Les déplacements relatifs entre P_0 et P_2 et entre P_0 et P_7 sont tracés dans la Figure 4.29. On constate qu’il y a une quasi-superposition de la courbe expérimentale et la courbe numérique pour le déplacement relatif $\Delta P_0 P_2$. Cela confirme le fait que la raideur globale agit très peu sur le comportement au niveau de la liaison. Concernant le déplacement relatif $\Delta P_0 P_7$, les courbes se superposent jusqu’à $d = 0.4mm$. À partir de cette valeur de déplacement, l’écart augmente pour atteindre 4% au premier endommagement. Cet écart reste assez faible et peut s’expliquer par la déformation de la virole dans la direction hors-plan qui impacte entre autres le déplacement axial. Nous pouvons donc conclure que l’écart constaté sur la raideur globale entre le modèle EF 3D de l’essai et l’essai expérimental est dû principalement à la souplesse de la machine. Cependant, son impact sur le comportement au niveau de la liaison reste faible. L’écart constaté entre le modèle semi-analytique et le modèle EF 3D angulaire est maximal à la fin du chargement où il atteint 17%. Cela peut s’expliquer par le fait que les formulations analytiques des matrices de raideur dans le cas de l’axisymétrie sont généralement plus conservatives. Cet écart est de 26% par rapport au modèle EF 3D droit. Ce niveau d’écart est acceptable dans une logique de prédimensionnement, d’autant plus que l’étude d’influence

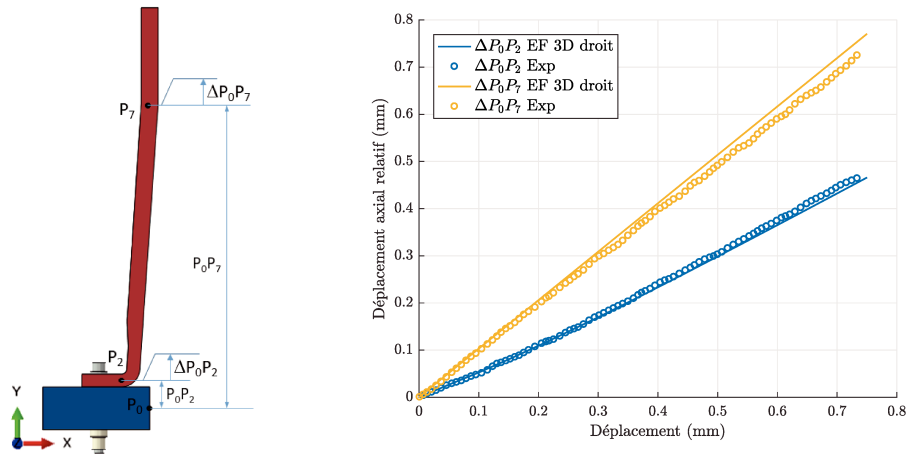


FIGURE 4.29 – Comparaison des déplacements relatifs des extrémités de la bride par rapport au socle.

de l'orthoradialité a montré que les écarts sont réduits au niveau de la liaison. La validité de ce constat par rapport au modèle semi-analytique sera étudiée en évaluant sa prédiction du comportement au niveau de la liaison.

4.5.3 Comportement de la fixation

Il a été vérifié que le modèle semi-analytique permet de mettre en place la précharge souhaitée avec un écart de 1% par rapport à la consigne. Lors de l'application d'un chargement excentré, l'effort dans le boulon évolue et génère une contrainte normale. Ainsi, un comparatif du comportement de la fixation est établi entre le modèle semi-analytique, les modèles EF 3D droit et angulaire et l'essai expérimental.

Rappelons que dans l'essai monofixation, des jauges de déformation ont été collées sur le fût de la vis afin de suivre les déformations, permettant de calculer les contraintes de traction, de flexion et de torsion. Des éléments de jauges virtuelles ont été considérés dans les modèles EF 3D comme illustré par la Figure 4.30. Les contraintes vues par la vis dans chaque jauge sont calculées à travers les modèles EF 3D en moyennant les contraintes sur les éléments de la jauge virtuelle considérée. Ensuite, les formulations détaillées dans le tableau 3.3 sont utilisées pour calculer les contraintes de traction, de flexion et la contrainte normale, données expérimentalement.

Afin de mieux évaluer la réponse de chaque modèle par rapport au comportement de la vis, il faut que la comparaison soit réalisée à iso effort vu par la vis. En considérant l'état précontraint de la fixation comme un état de référence, on définit le supplément de contrainte comme étant la différence entre l'état de contrainte dans la vis dû à un chargement extérieur et l'état précontraint pour lequel le chargement extérieur est nul. Ainsi, l'évolution des suppléments de contraintes, de flexion, de traction et les contraintes normales (somme de ces deux états de contraintes) qui en résultent sont tracées dans la Figure 4.31 en fonction de l'effort.

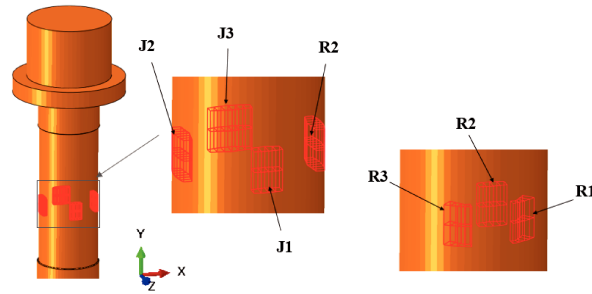


FIGURE 4.30 – Éléments représentant les jauges de déformation collées sur la vis.

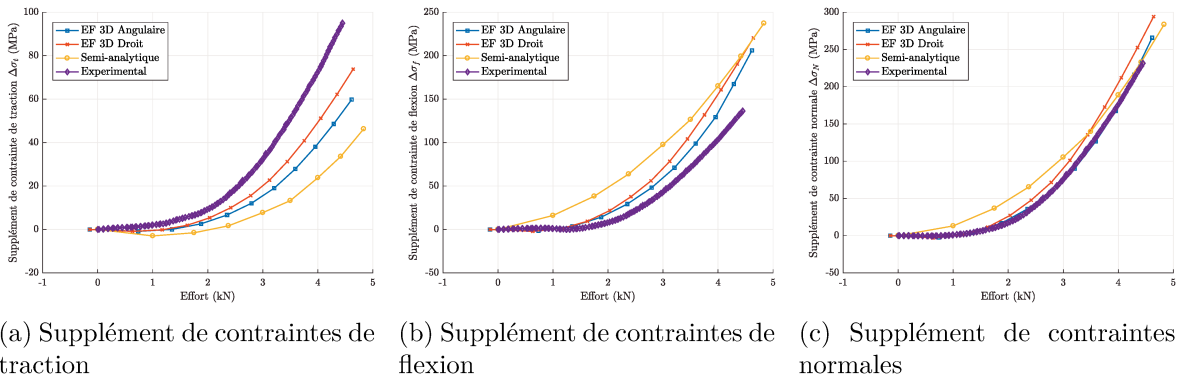


FIGURE 4.31 – Comparaison du comportement de la fixation entre le modèle semi-analytique, les modèles numériques et l'essai expérimental

La confrontation entre les modèles numériques étant réalisée précédemment, on s'intéresse ici à évaluer les résultats fournis par le modèle semi-analytique en les comparant aux modèles EF 3D et à l'essai expérimental.

On constate dans un premier lieu que le modèle semi-analytique sous-estime la contrainte de traction générée lors de l'application du chargement (cf. Figure 4.31a). Ce comportement rejoint le positionnement du modèle EF 3D angulaire avec blocage orthoradial. Ce modèle sous-estime légèrement la contrainte de traction par rapport au modèle EF 3D droit du fait de la raideur de la bride. Cette raideur empêcherait le déplacement axial en mode rigide de tout l'assemblage et son influence se manifesterait plus dans la mise en rotation de la bride, qui génère de la flexion dans la vis pour des chargements plus importants, comme cela a été vu dans la Figure 4.7a.

La Figure 4.31b montre que la vis est soumise à des contraintes de flexion dès le début du chargement. Celles-ci sont surestimées par rapport à la réalité et aux résultats des modèles numériques. Outre le fait que l'axisymétrie rigidifie la bride, ce comportement peut s'expliquer aussi par des phénomènes numériques, propres au développement du métamodèle :

- La convergence du calcul semi-analytique a été obtenue en assouplissant la raideur axiale des éléments barre modélisant le contact. En effet, le coefficient de répartition de la raideur de contact a été établi à $C_{rep} = 0.11$ au lieu de $C_{rep} = 0.03$, identifié grâce au

modèle EF 3D angulaire. Le fait que le contact soit assez souple entraîne un décollement rapide et, par conséquent, la flexion de la vis.

- L'étude d'influence du maillage établi dans le chapitre 2 a permis de fixer la taille des éléments plaques axisymétriques au niveau du pied de bride à $l = 3mm$. Cette valeur a pour conséquence d'avoir un nombre limité de ressorts de contact. Par conséquent, la surface de contact diminue rapidement à chaque itération de chargement.

Toutefois, le modèle semi-analytique fournit des résultats très satisfaisants en termes de calcul des contraintes normales totales dans la vis (cf. Figure 4.31c). L'écart maximal par rapport au modèle EF 3D angulaire est de 6%, il est de 7% par rapport au modèle EF 3D droit et de 9% par rapport à l'essai. Les critères de dimensionnement se basent généralement sur la contrainte de Von Mises équivalente, qui est pilotée principalement par les contraintes normales dans le cas des chargements excentrés.

4.5.4 Comportement de la bride

4.5.4.1 Déformations dans la virole

Les déformations données par le modèle EF 3D droit, qui est plus représentatif de l'essai, sont analysées et comparées aux jauges de déformation collées sur la bride, comme le montre la Figure 4.32).

On constate que la tendance de l'évolution des déformations est bien reproduite par le modèle EF, cependant, les écarts sont importants pour J3, J6, J8 et J2. Pour les niveaux de déformation de J3 et J6, les écarts constatés peuvent être dus à l'influence des mâchoires des mors, pour lesquels la longueur de serrage contre la pièce est proche de la position des jauges J3 et J6. Les écarts peuvent aussi s'expliquer par le fait que l'ensemble des jauges peuvent ne pas capter le comportement du VER, surtout pour la jauge J2 qui est plus courte. Les courbes sont tracées jusqu'au premier endommagement, pour lequel aucun macro-endommagement n'a été identifié. Cependant, les jauges **J1**, **J2** et **J8** voient une chute de déformation brutale vers la fin du chargement, ce qui pourrait renseigner d'un éventuel endommagement du composite ayant lieu au voisinage de ces jauges sans que cela soit identifiable à l'échelle macroscopique. Les écarts peuvent ainsi être dûs à ce phénomène aussi, vu que l'endommagement n'est pas modélisé dans le modèle EF 3D. L'autre interprétation de ce comportement consiste à dire qu'un éventuel décollement des jauges **J1**, **J2** a eu lieu.

De plus, le fait de se baser sur la valeur de déformation sur les faces externes et internes peut être remis en question car le résultat serait dépendant du maillage. Pour cela, la moyenne des déformations calculée sur les deux jauges en vis-à-vis est analysée. Son évolution pour chaque paire de jauges est donnée dans la Figure 4.33. En se basant sur la moyenne des déformations des jauges en vis-à-vis, les écarts ont été fortement réduits. Ce qui confirme qu'une approche plus globale permettrait de se rapprocher des résultats expérimentaux et de prédire le comportement réel de l'assemblage.

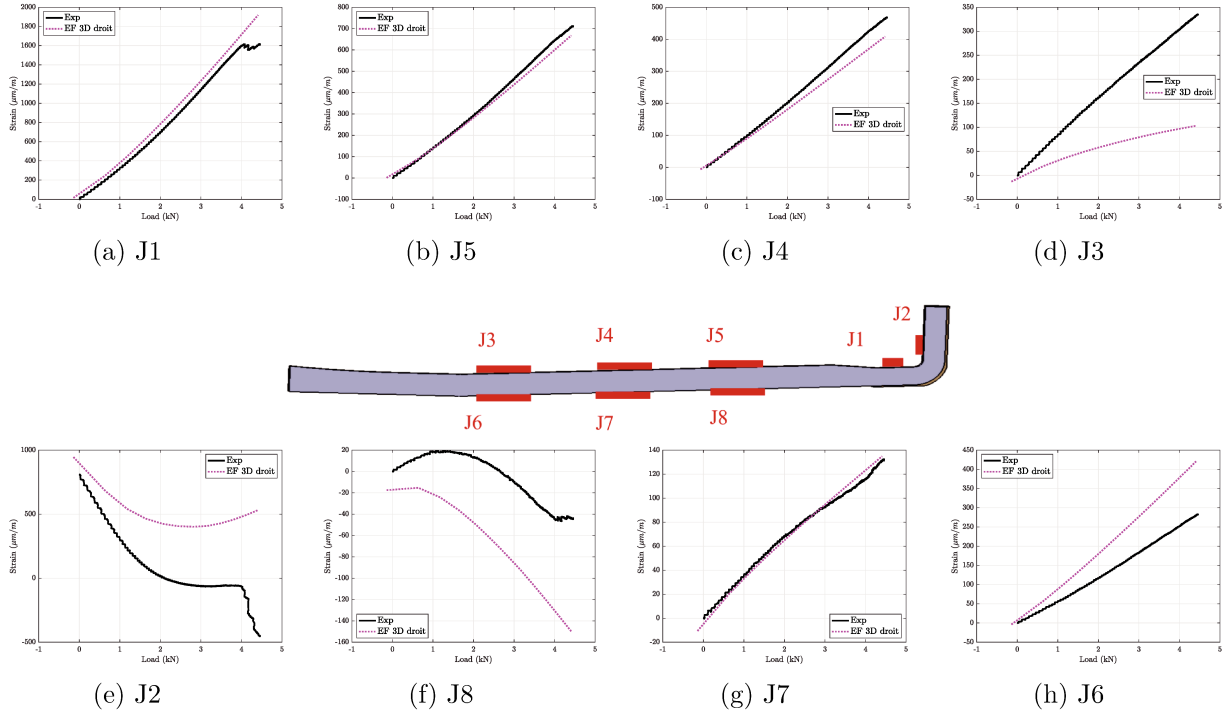


FIGURE 4.32 – Comparaison des niveaux de déformation de la bride au niveau des jauges unidirectionnelles entre le modèle EF 3D et l’essai expérimental.

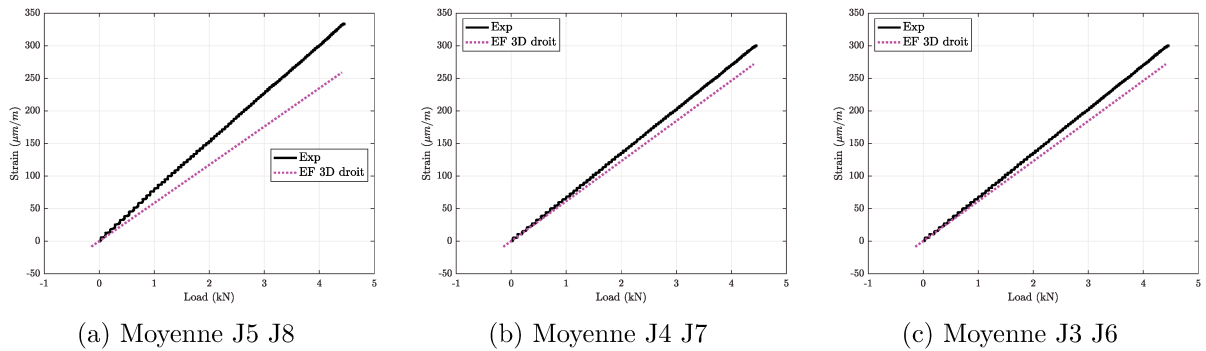


FIGURE 4.33 – Moyenne des déformations des jauges en vis-à-vis.

Globalement, le modèle EF 3D droit représente bien le comportement de l'assemblage au 1^{er} endommagement de la bride et les résultats du modèle semi-analytique y sont assez proches. Il peut être ainsi une référence de validation du modèle semi-analytique, quant à la vérification des critères technologiques pour le dimensionnement de la bride. En effet, ces critères ne peuvent pas être déduits de manière directe à travers les résultats expérimentaux. Ces critères technologiques donnés par le modèle EF 3D droit seront comparés à ceux donnés par le métamodèle semi-analytique.

4.5.4.2 Vérification des critères technologiques

Comme évoqué lors du chapitre 2, le dimensionnement des brides composite dans un assemblage boulonné peut être établi par rapport à des critères technologiques, basés sur le torseur d'efforts dans le rayon de bride, illustré dans la Figure 4.34.

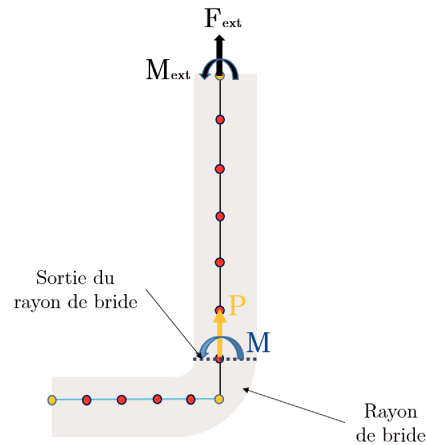


FIGURE 4.34 – Torseur d'efforts à la sortie du rayon de bride

D'après l'analyse des champs de contraintes dans le rayon de bride dans le modèle EF 3D droit, le flux d'effort axial P peut nous renseigner sur l'effort correspondant au 1^{er} endommagement du composite, tandis que le moment M constituerait un critère de dimensionnement au délaminage. En effet, ce moment est générée par les contraintes σ_{33} induites dans le rayon de bride (cf. Figure 4.23), susceptibles de provoquer du délaminage. La Figure 4.35 montre que l'évolution de l'effort est linéaire tandis que celle du moment est légèrement non linéaire. On constate que le modèle semi-analytique prédit bien les valeurs de ces critères avec un léger écart de l'ordre de 5% pour le moment M , dû principalement à la différence ayant lieu au début du chargement. Pour le flux d'effort P , l'écart augmente au fur est à mesure du chargement pour atteindre 4% juste avant le 1^{er} endommagement constaté expérimentalement.

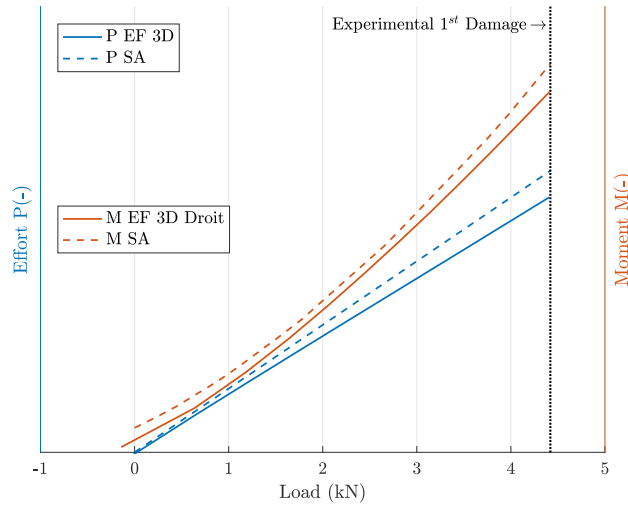


FIGURE 4.35 – Évolution de l’effort axial P et du moment M pendant le chargement.

4.5.5 Synthèse

Dans ce chapitre, une corrélation calculs-essai a été établie entre l’essai de traction de la bride monofixation, le modèle EF représentatif de l’essai et le modèle semi-analytique établi dans le cadre de la thèse. Premièrement, l’influence du blocage orthoradial et de la forme angulaire de la bride a été évaluée. Son impact faible sur le comportement de l’assemblage a permis de procéder à la confrontation du modèle semi-analytique au modèle EF 3D intégrant une bride droite, ce modèle étant représentatif de l’essai. L’analyse des résultats de ce modèle a permis de valider sa cohérence et sa représentativité par rapport au comportement de l’assemblage boulonné de brides composites. En outre, une analyse des contraintes dans la bride a permis de prédire les éventuels modes d’endommagement ou de rupture que la bride pourrait subir. Ensuite, une stratégie d’adaptation du modèle semi-analytique à la configuration de l’essai a été proposée et justifiée. Celle-ci est basée sur la modification du modèle initial en y intégrant le maillage du socle ou du bâti. Le coefficient de répartition C_{rep} permettant le calcul de la matrice de raideur des éléments de contact a été identifié à travers le modèle EF 3D, qui a permis d’autre part, d’évaluer l’expression des raideurs axiales utilisées dans le modèle semi-analytique.

La comparaison des résultats numériques, expérimentaux et ceux du modèle semi-analytique ont permis de confirmer l’intérêt de ce dernier. La condition de l’axisymétrie limite la stratégie de validation expérimentale au comportement local autour de la liaison. En effet, la raideur globale de l’assemblage est surestimée par le modèle en raison de l’axisymétrie, une validation au niveau local est donc établie. Les écarts obtenus quant au comportement de la vis sont de l’ordre de 9% par rapport à la contrainte normale. Cet écart est plus faible par rapport au modèle EF qui est de 6%. De plus, l’évolution des valeurs des critères technologiques dans la bride est bien représentée par le modèle semi-analytique.

En conclusion, le modèle semi-analytique est très prometteur. Il permet d’avoir des résultats très acceptables dans une logique de pré-dimensionnement, tout en gagnant en temps de calcul. Le tableau 4.5 donne une estimation du gain en temps de conception en se basant

sur la modélisation semi-analytique, par rapport à la modélisation EF 3D et à l'approche expérimentale.

TABLE 4.5 – Comparatif des temps de conception et la précision du calcul entre le modèle semi-analytique, le modèle EF 3D et l'approche expérimentale.

Méthode	Exp.	EF 3D	SA
Temps de mise en œuvre/mise en données	4 à 6 mois	8h	10 min
Temps d'exécution/calcul	15 min	5h (2 CPUs)	15 s (2 CPUs)
Écart raideur globale	réf.	26%	40%
Écart maxi contrainte normale vis	réf.	19%	25%
Écart maxi critères techno. bride	-	réf.	5 et 6%
Écart contrainte hors-plan bride à la précharge	-	réf.	4%

Conclusions et perspectives

Dans un contexte économique, les industriels ont besoin de réduire le temps de conception et d'optimiser les structures. Les travaux présentés dans cette thèse ont permis de mettre au point un modèle simplifié de calcul des assemblages boulonnés multimatériaux de brides cylindriques, pouvant intégrer le composite tissé 3D comme matériau des pièces assemblées. Le modèle développé s'inscrit dans une démarche de pré-dimensionnement.

Dans un premier temps, un état de l'art a été dressé à partir des différents travaux qui se sont intéressés à l'analyse du comportement des matériaux composites et plus particulièrement, dans les liaisons boulonnées. Ensuite les différentes méthodes de pré-dimensionnement des assemblages ont été recensées et étudiées. La synthèse de l'étude bibliographique nous a orientés vers les méthodes semi-analytiques, qui permettent de mettre en place un maillage explicite des différentes pièces de l'assemblage. Cette caractéristique offre la possibilité de s'affranchir du comportement local de la liaison.

Un modèle semi-analytique basé sur la méthode des éléments finis a été développé et a fait l'objet du chapitre 2. La construction du modèle, qui se base sur la modélisation des pièces assemblées avec des éléments standards (poutre, barre, coque, ...), a nécessité l'identification de la matrice de raideur des éléments coques axisymétriques. Celle-ci tient compte du comportement orthotrope représentatif du comportement homogénéisé des composites à l'échelle macroscopique. La validation de la matrice de raideur des éléments coques orthotropes a été réalisée grâce à une confrontation au calcul effectué sur un logiciel de calcul commercial. De plus, une validation primaire du modèle a été réalisée en l'appliquant sur un cas académique d'assemblage de brides composite/métallique. La confrontation entre le modèle semi-analytique a démontré l'intérêt du modèle quant à la prédiction des valeurs de contraintes dans la vis et les efforts dans la bride.

Dans le chapitre 3, une étude expérimentale a été réalisée afin de comprendre le comportement des assemblages de brides en CMO et de disposer d'une base de validation expérimentale pour évaluer le modèle semi-analytique. Après avoir réalisé des essais de caractérisation de la vis, un essai de traction sur un secteur de bride monofixation a été mis en œuvre. Une instrumentation riche a été mise en place afin de suivre le comportement de la bride et de la vis. Celle-ci a été instrumentée avec des jauges de déformation permettant de remonter aux différentes sollicitations auxquelles elle est soumise. L'analyse du comportement de l'assemblage a montré un comportement non linéaire élastique dû principalement aux non linéarités géométriques. En effet, la bride subit une forte déformation au niveau du rayon de bride qui est similaire à un dépliage de cornière. Ce comportement provoque une augmentation des contraintes normales dans la vis.

Dans le but de se positionner dans la configuration moteur des assemblages de bride CMO, des essais de traction ont été menés sur des secteurs de brides à trois boulons, représentatifs du comportement de l'assemblage du carter. Une approche d'instrumentation similaire à

celle de l'essai monofixation a été utilisée, avec l'ajout des capteurs acoustiques afin de capter l'endommagement du composite. Dans ces essais, l'intérêt de la contreplaque quant à la protection du composite a été mis en évidence. Ces essais ont montré que dans le cas d'un secteur multifixations, le comportement non linéaire est moins accentué. Cela s'explique par le fait que dans cette configuration, chaque secteur est rigidifié par le secteur adjacent, ce qui amortit les déformations dues au phénomène de dépliage. À travers l'analyse des données issues des différents moyens d'instrumentation, un effet de vrillage a été constaté dans la bride et il a été déduit que le comportement de la bride n'est pas symétrique. Ce phénomène est dû à une perte d'orthogonalité entre les chaînes et les trames, provenant principalement du procédé de fabrication des carters CMO. L'impact de ce phénomène est traduit par une réévaluation des propriétés élastiques du composite en fonction de l'angle réel entre les torons chaîne et trame, appelé angle de décadage. Cette réévaluation est appliquée aux modèles numériques et semi-analytique lors de la corrélation calculs-essai, qui a fait l'objet du chapitre 4.

Dans le dernier chapitre, la corrélation calcul-essais a été établie en confrontant les résultats du calcul éléments finis 3D, ceux du modèle semi-analytique aux résultats d'essais obtenus. Dans un premier temps, une étude d'influence de l'axisymétrie a été réalisée afin de pouvoir procéder à la comparaison du modèle semi-analytique aux résultats expérimentaux. Pour cela, une modélisation éléments finis 3D a été mise en place en considérant deux modèles : un modèle représentatif de l'essai où la bride est de forme droite et ayant des bords libres et un modèle où la forme de la bride est angulaire intégrant la condition de blocage orthoradial, ce dernier étant le plus représentatif du métamodèle. La confrontation des deux modèles a montré que l'influence de la condition de blocage et de la forme de la bride se manifeste dans la raideur globale de l'assemblage où l'écart est de 10% par rapport au modèle de bride droite, mais avec très peu d'impact au niveau de la liaison. Les écarts se manifestent dans trois comportements : (i) à iso-effort appliqué, la vis voit légèrement plus de flexion dans le cas du modèle angulaire à la fin de chargement, l'écart reste très faible (de l'ordre de 2%); (ii) le poinçonnement de la bride est plus important dans la bride droite, mais ce comportement est très localisé; (iii) les contraintes de traction dans le plan dans le pied de bride sont supérieures de 25% dans le modèle angulaire par rapport au modèle droit. Cependant, les niveaux de contraintes dans cette direction restent très faibles et le comportement n'est pas critique. Ces observations nous ont permis d'évaluer le modèle semi-analytique par rapport aux modèles EF 3D et à l'essai expérimental. Cette étude comparative a permis de valider l'intérêt du modèle simplifié développé, en mettant en évidence un gain considérable en temps de calcul et une précision des résultats acceptable dans une logique de pré-dimensionnement. Le calcul est effectué en quelques secondes avec le modèle semi-analytique tandis qu'avec le modèle EF 3D, il dure 5 heures environ. La raideur globale est surestimée de 40% par rapport aux essais et de 26% par rapport au modèle EF 3D. Toutefois, il a été démontré que la raideur globale donnée expérimentalement est sous-estimée à cause de l'influence de la souplesse de la machine. Les écarts constatés sont de l'ordre de 10% au niveau de la fixation par rapport aux résultats expérimentaux et de 7% par rapport au modèle EF 3D.

Le modèle semi-analytique développé dans cette thèse s'avère prometteur, il ouvre un champ de vérification et de validation pour l'industriel très intéressant. À moindre coût, une campagne expérimentale d'un carter complet peut se réduire à un secteur angulaire d'un assemblage de brides. L'analyse de cet essai réduit et de sa transposition vers le modèle semi-analytique réduira considérablement les temps liés au prédimensionnement et aux choix des solutions technologiques relatives aux liaisons boulonnées. Dans le même temps, ces travaux ouvrent de nouvelles perspectives d'améliorations qui peuvent être apportées au modèle proposé :

Perspectives à court terme

- Le modèle a été évalué par rapport à une seule configuration géométrique de l'assemblage, il serait intéressant de réaliser des études paramétriques faisant intervenir des ratios de dimensions géométriques et des propriétés matériaux différentes, afin de valider sa cohérence.
- Il a été constaté lors de l'élaboration du modèle, que des problèmes de convergence peuvent avoir lieu en fonction du maillage, de la raideur de contact, etc... L'idée est de pouvoir statuer sur la sensibilité du modèle à chacun de ces paramètres pouvant affecter la convergence du calcul, notamment le paramètre C_{rep} .
- À ce stade, le calcul des contraintes et déformations dans la bride lors d'un chargement extérieur n'a pas été évalué finement. Il faudrait mettre en place la procédure de calcul dans le modèle. La vérification de ces valeurs permettrait entre autres de mettre en place des critères de dimensionnement de la bride basés sur des critères de contraintes.
- Dans la même perspective de mise en place de critères de conception, il serait intéressant de recenser toutes les grandeurs pouvant être établies à travers le modèle semi-analytique et mettre en place des critères de conception de l'assemblage en fonction des cas de charges pour lesquels le carter est dimensionné.

Perspectives à moyen terme

- La configuration moteur de l'assemblage intègre une entretoise et une contreplaque dans l'assemblage de la ligne de carter. Afin que le modèle puisse être utilisé pour cette configuration, il faudrait mettre en place une stratégie de prise en compte de ces éléments. Cette intégration peut être réalisée de manière explicite, en ajoutant des éléments représentatifs de ces pièces, ou de manière implicite, en intégrant leur raideur dans la raideur des pièces assemblées et du boulon. Les résultats d'essais de traction sur les secteurs de brides à trois boulons permettraient le recalage et la validation du nouveau modèle.
- Dans la même logique d'adaptation géométrique, il faudrait intégrer dans le modèle un maillage de l'arrondi représentant le rayon de bride.
- L'application du modèle sur un domaine plus large de chargement requiert la prise en compte de l'endommagement du composite et de la plasticité de la vis. Il faudrait

- intégrer ces deux comportements.

Perspectives à long terme

- On pourrait envisager une application du modèle aux matériaux composites à matrice céramique.
- La tenue au feu est l'un des critères de dimensionnement des carters composites. Il serait intéressant d'intégrer les effets de la température dans le modèle.
- Le modèle peut constituer une base pour la création d'un outil d'aide à la décision. Un processus d'optimisation peut être mis en place en se basant sur les résultats du modèle semi-analytique.

La matrice B

Pour rappel, la matrice B permet de relier les déformations aux déplacements, exprimés dans le repère global.

Soit un élément coque axisymétrique, ayant les paramètres géométriques illustrés par la Figure A.1 :

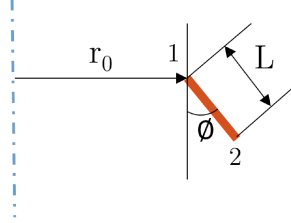


FIGURE A.1 – Paramètres géométriques de l'élément coque axisymétrique.

où :

r_0 est le rayon au nœud 1.

L est la longueur de l'élément coque.

φ est l'angle que fait le plan de l'élément coque avec l'axe de révolution.

Les termes de la matrice B sont identifiés par les expressions suivantes, où $p \in [0; 1]$:

$$B(1, 1) = -\frac{\cos(\phi)}{L}$$

$$B(1, 2) = -\frac{\sin(\phi)}{L}$$

$$B(1, 3) = 0$$

$$B(1, 4) = \frac{\cos(\phi)}{L}$$

$$B(1, 5) = \frac{\sin(\phi)}{L}$$

$$B(1, 6) = 0$$

$$B(2, 1) = -\frac{\sin(2\phi)(2p^3 - 3p^2 + 1)}{2r_0 + 2Lp} - \frac{\cos(\phi)\sin(\phi)(p-1)}{r_0 + Lp}$$

$$B(2, 2) = \frac{\cos(\phi)^2(2p^3 - 3p^2 + 1)}{r_0 + Lp} - \frac{\sin(\phi)^2(p-1)}{r_0 + Lp}$$

$$B(2, 3) = -\frac{L\cos(\phi)(p^3 - 2p^2 + p)}{r_0 + Lp}$$

$$B(2, 4) = \frac{p\cos(\phi)\sin(\phi)}{r_0 + Lp} - \frac{\sin(2\phi)(3p^2 - 2p^3)}{2r_0 + 2Lp}$$

$$B(2, 5) = \frac{p \sin(\phi)^2}{r_0 + Lp} + \frac{\cos(\phi)^2 (3p^2 - 2p^3)}{r_0 + Lp}$$

$$B(2, 6) = \frac{L \cos(\phi) (p^2 - p^3)}{r_0 + Lp}$$

$$B(3, 1) = -\frac{\sin(\phi) (12p - 6)}{L^2}$$

$$B(3, 2) = \frac{\cos(\phi) (12p - 6)}{L^2}$$

$$B(3, 3) = -\frac{6p - 4}{L}$$

$$B(3, 4) = \frac{\sin(\phi) (12p - 6)}{L^2}$$

$$B(3, 5) = -\frac{\cos(\phi) (12p - 6)}{L^2}$$

$$B(3, 6) = -\frac{6p - 2}{L}$$

$$B(4, 1) = -\frac{\sin(\phi)^2 (6p - 6p^2)}{L (r_0 + Lp)}$$

$$B(4, 2) = \frac{\sin(2\phi) (6p - 6p^2)}{L (2r_0 + 2Lp)}$$

$$B(4, 3) = -\frac{\sin(\phi) (3p^2 - 4p + 1)}{r_0 + Lp}$$

$$B(4, 4) = \frac{\sin(\phi)^2 (6p - 6p^2)}{L (r_0 + Lp)}$$

$$B(4, 5) = -\frac{\sin(2\phi) (6p - 6p^2)}{L (2r_0 + 2Lp)}$$

$$B(4, 6) = \frac{\sin(\phi) (2p - 3p^2)}{r_0 + Lp}$$

Matrice de raideur des éléments coques axisymétriques orthotropes

On rappelle que la matrice de raideur d'un élément coque axisymétrique orthotrope est obtenue à travers l'intégrale :

$$[K_e] = \int_0^1 [B]^T [D] [B] 2\pi r L dp \quad (\text{B.1})$$

D étant la loi de comportement faisant intervenir les paramètres matériaux d'un élément coque orthotrope E_s , E_θ , $v_{s\theta}$ et $v_{\theta s}$. Dans un composite tissé, s fait référence au sens trame et θ au sens chaîne.

$$\begin{aligned}
K(1,1) = & \frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [30 \pi E_s L^6 t - 30 \pi E_s L^6 t \sin(\phi)^2 \\
& + \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 - \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_s L^5 r_0 t \\
& + 30 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi)^2 + 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^4 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 - 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 \\
& - 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 - 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& + 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^4 + 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^4 \\
& + 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^4 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 60 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 - 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^4 \\
& + 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^4 - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4] \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(1, 2) = & \frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_s \theta v_{\theta s}} [15 \pi E_s L^6 t \sin(2 \phi) - \frac{21 \pi E_{\theta} L^6 t \sin(2 \phi)}{4} - \frac{\pi E_{\theta} L^6 t \sin(4 \phi)}{8} \\
& - 15 \pi E_s L^4 t^3 \sin(2 \phi) - \frac{15 \pi E_{\theta} L^4 t^3 \sin(2 \phi)}{4} + \frac{15 \pi E_{\theta} L^4 t^3 \sin(4 \phi)}{8} \\
& - 60 \pi E_{\theta} r_0^6 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& - 30 \pi E_{\theta} r_0^6 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) - 30 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(2 \phi) \\
& + 45 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(2 \phi) + 150 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(2 \phi) + 15 \pi E_{\theta} L^3 r_0 t^3 \sin(2 \phi) \\
& + 65 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(2 \phi) - \frac{165 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(2 \phi)}{2} - \frac{45 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(4 \phi)}{2} \\
& + 75 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(4 \phi) - \frac{15 \pi E_{\theta} L^3 r_0 t^3 \sin(4 \phi)}{2} + \frac{125 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(4 \phi)}{2} \\
& + \frac{75 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(4 \phi)}{4} + 60 \pi E_{\theta} r_0^6 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& + 30 \pi E_{\theta} r_0^6 t \sin(4 \phi) \ln(r_0) - 30 \pi E_{\theta} L^6 t v_s \theta \cos(\phi) \\
& - 45 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) + \frac{45 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& + \frac{135 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(2 \phi)}{2} - \frac{135 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(4 \phi)}{4} + 45 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& - \frac{45 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} + 30 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(2 \phi) \\
& + 60 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(2 \phi) - 63 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \sin(2 \phi) + 30 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(4 \phi) + \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \sin(4 \phi) + 90 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \\
& + 135 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) - 60 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& - 105 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) - 45 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(4 \phi) \ln(r_0) \\
& + \frac{195 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} + 45 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(4 \phi) \ln(r_0) + \frac{15 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} \\
& - 45 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) + \frac{45 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& - 180 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) + 30 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& - 90 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) + 45 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& - \frac{45 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} + 180 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& - 30 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) + 90 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(4 \phi) \ln(r_0) - 90 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& - 135 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& + 60 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) + 105 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& + 45 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) - \frac{195 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& - 45 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) - \frac{15 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2}] \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(1, 3) = & \frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [20 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi) - 2 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^3 \\
& + 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} + 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^3 + 2 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi) \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^3 + 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^3 \\
& + 150 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^3 + 740 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^3 + 280 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^3 \\
& - 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \sin(\phi)^2 - 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi) - 18 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi) + 330 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^3 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi) \\
& - 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi) - 740 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi) \\
& - 280 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi) + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^3 + 18 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^3 \\
& - 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi) + 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& + 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) + 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) \\
& + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) - 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& - 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi) - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& + 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)] \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(1, 4) = & -\frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [30 \pi E_s L^6 t - 30 \pi E_s L^6 t \sin(\phi)^2 + \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 \\
& - \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_s L^5 r_0 t + 30 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& + 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^4 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& - 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 - 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 \\
& - 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& + 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^4 + 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^4 \\
& + 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^4 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 60 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 \\
& - 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^4 \\
& + 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^4 - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4] \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(1, 5) = & -\frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [15 \pi E_s L^6 t \sin(2\phi) - \frac{\pi E_\theta L^6 t \sin(2\phi)}{4} - \frac{\pi E_\theta L^6 t \sin(4\phi)}{8} \\
& - 15 \pi E_s L^4 t^3 \sin(2\phi) - \frac{15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(2\phi)}{4} + \frac{15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(4\phi)}{8} \\
& - 60 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) - 30 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0) - 30 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(2\phi) \\
& \quad + 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2\phi) + 150 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2\phi) \\
& \quad + 15 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(2\phi) + 65 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(2\phi) \\
& \quad - \frac{45 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2\phi)}{2} - \frac{45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4\phi)}{2} \\
& \quad + 75 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4\phi) - \frac{15 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(4\phi)}{2} \\
& \quad + \frac{125 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4\phi)}{2} \\
& \quad + \frac{75 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4\phi)}{4} + 60 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + 30 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(4\phi) \ln(r_0) + 30 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \cos(\phi) \\
& \quad - 45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& \quad + \frac{45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} + \frac{135 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2\phi)}{2} \\
& - \frac{135 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4\phi)}{4} + 45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(2\phi) \ln(r_0) - \frac{45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} \\
& \quad + 30 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(2\phi) + 60 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2\phi) - 3 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(2\phi) \\
& + 30 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4\phi) + \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(4\phi) + 90 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + 135 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2\phi) \ln(r_0) - 15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad - 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + \frac{195 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} + 45 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + \frac{15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} - 45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& + \frac{45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} - 180 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& \quad - 90 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0) + 45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad - \frac{45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} + 180 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + 90 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4\phi) \ln(r_0) - 90 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& - 135 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) + 15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& \quad + 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4\phi) \ln(L + r_0) \\
& \quad - \frac{195 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& - 45 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0) - \frac{15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2}] \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(2, 2) = & -\frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [69 \pi E_{\theta} L^6 t - 30 \pi E_s L^4 t^3 + 240 \pi E_{\theta} r_0^6 t \ln(r_0) \\
& - 30 \pi E_s L^6 t \sin(\phi)^2 + 22 \pi E_{\theta} L^6 t \sin(\phi)^2 - \pi E_{\theta} L^6 t \sin(\phi)^4 \\
& + 240 \pi E_{\theta} L r_0^5 t - 192 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t - 60 \pi E_{\theta} L^6 t \ln(L + r_0) \\
& + 30 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi)^2 - 15 \pi E_{\theta} L^4 t^3 \sin(\phi)^2 + 15 \pi E_{\theta} L^4 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& - 240 \pi E_{\theta} r_0^6 t \ln(L + r_0) - 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 + 600 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \\
& + 260 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t - 330 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t + 60 \pi E_{\theta} L^6 t \ln(r_0) + 480 \pi E_{\theta} r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_{\theta} r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 720 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \ln(L + r_0) + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& + 180 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^2 - 1200 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 + 60 \pi E_{\theta} L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& - 760 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 + 180 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 - 180 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& + 600 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_{\theta} L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^4 + 500 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^4 \\
& + 150 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^4 - 480 \pi E_{\theta} r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_{\theta} r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 720 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \ln(r_0) - 180 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 180 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 30 \pi E_{\theta} L^6 t v_{s\theta} \sin(\phi) + 30 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} \sin(\phi) \\
& - 540 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) + 240 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) + 360 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \\
& + 270 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^2 - 270 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 180 \pi E_{\theta} r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 540 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \ln(r_0) - 240 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \\
& - 360 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \ln(r_0) - 60 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 - 480 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(\phi)^2 \\
& + 244 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \sin(\phi)^4 + 8 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \sin(\phi)^4 \\
& + 360 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 1320 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 120 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 360 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 360 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 780 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 360 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 180 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 1440 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 120 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 720 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 180 \pi E_{\theta} L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 1440 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 120 \pi E_{\theta} L^5 r_0 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 720 \pi E_{\theta} L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 360 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 1320 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 120 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 360 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_{\theta} L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 780 \pi E_{\theta} L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 360 \pi E_{\theta} L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_{\theta} L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4] \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(2, 3) = & \frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi)^3 - 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi) \\
& - 2 \pi E_\theta L^6 t \cos(\phi)^3 - 20 \pi E_s L^4 t^3 \cos(\phi) - 30 \pi E_\theta L^6 t \cos(\phi) \\
& - 330 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 + 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 \\
& + 150 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi)^3 + 740 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 + 280 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 220 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi) + 330 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 \\
& + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) - 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) \\
& - 150 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) - 300 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) \\
& + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 + 18 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 120 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& + 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) + 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 360 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& - 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) - 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi) \ln(r_0) - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 360 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) \ln(r_0) + 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
& + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \cos(\phi) \sin(\phi) + 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 120 \pi E_\theta L^5 r_0 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& + 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& + 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0)] \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(2, 4) = & -\frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [15 \pi E_s L^6 t \sin(2 \phi) - \frac{21 \pi E_\theta L^6 t \sin(2 \phi)}{4} \\
& - \frac{\pi E_\theta L^6 t \sin(4 \phi)}{8} - 15 \pi E_s L^4 t^3 \sin(2 \phi) - \\
& \frac{15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(2 \phi)}{4} + \frac{15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(4 \phi)}{8} \\
& - 60 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) - 30 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) \\
& - 30 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(2 \phi) + 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2 \phi) + 150 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2 \phi) \\
& + 15 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(2 \phi) + 65 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(2 \phi) \\
& - \frac{165 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2 \phi)}{2} - \frac{45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4 \phi)}{2} \\
& + 75 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4 \phi) - \frac{15 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(4 \phi)}{2} + \frac{125 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4 \phi)}{2} \\
& + \frac{75 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4 \phi)}{4} + 60 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) + 30 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(4 \phi) \ln(r_0) \\
& - 30 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} \cos(\phi) \\
& - 45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) + \frac{45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& + \frac{135 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2 \phi)}{2} - \frac{135 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4 \phi)}{4} \\
& + 45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(2 \phi) \ln(r_0) - \frac{45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} \\
& + 30 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(2 \phi) + 60 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2 \phi) - 63 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(2 \phi) \\
& + 30 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4 \phi) + \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(4 \phi) + 90 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& + 135 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) - 60 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& - 105 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) - 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4 \phi) \ln(r_0) \\
& + \frac{195 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} + 45 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4 \phi) \ln(r_0) \\
& + \frac{15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} - 45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& + \frac{45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2} - 180 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& + 30 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) - 90 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) + 45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& - \frac{45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4 \phi) \ln(r_0)}{2} + 180 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) - 30 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(2 \phi) \ln(r_0) \\
& + 90 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4 \phi) \ln(r_0) - 90 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) - 135 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& + 60 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) + 105 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2 \phi) \ln(L + r_0) \\
& + 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) - \frac{195 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& - 45 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0) - \frac{15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4 \phi) \ln(L + r_0)}{2}] \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(2, 5) = & \frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [19 \pi E_\theta L^6 t - 30 \pi E_s L^4 t^3 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) - 30 \pi E_s L^6 t \sin(\phi)^2 + 12 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 \\
& - \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^4 + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t - 72 \pi E_\theta L^5 r_0 t + 30 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& - 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^2 + 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^4 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \\
& - 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 + 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t + 260 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t - 210 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \\
+ 480 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 & - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \\
& + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^2 - 1200 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 \\
& + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 - 760 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 \\
& - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^4 + 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& + 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^4 + 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^4 - 480 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
+ 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 & + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 30 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \sin(\phi) \\
& + 30 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} \sin(\phi) - 540 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \\
& + 180 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) + 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^2 - 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
- 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 & + 540 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \\
& - 180 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) - 60 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 - 480 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 \\
& + 124 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^4 + 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^4 \\
+ 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 & - 1320 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
+ 180 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 & - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
+ 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 & + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 1440 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
- 60 \pi E_\theta L^5 r_0 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 & - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
- 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 & - 1440 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 60 \pi E_\theta L^5 r_0 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
- 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 & + 1320 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
+ 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 & - 180 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
- 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 & - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4] \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(2, 6) = & -\frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [40 \pi E_s L^4 t^3 \cos(\phi) - 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi) \\
& + 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi)^3 - 10 \pi E_\theta L^6 t \cos(\phi) + 210 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) \\
& - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 - 30 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi)^3 \\
& - 260 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 - 20 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 40 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi) \\
& - 210 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) \\
& + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) + 30 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) \\
& + 180 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 + 2 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) - 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& - 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& + 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& + 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& + 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) \ln(r_0) + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
& + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
& - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0)] \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(3, 3) = & -\frac{1}{120 L^4 - 120 L^4 v_{s\theta} v_{\theta s}} [240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) - 20 \pi E_s L^4 t^3 - 8 \pi E_\theta L^6 t \\
& + 8 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t + 48 \pi E_\theta L^5 r_0 t + 55 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^2 \\
-240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) & - 80 \pi E_s L^3 r_0 t^3 + 840 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t + 1040 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t + 500 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 960 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& - 840 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 + 260 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 - 1040 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 \\
& - 500 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 - 20 \pi E_\theta L^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 960 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 1440 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) - 960 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) - 240 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \\
& + 390 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^2 + 20 \pi E_\theta L^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 1440 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) + 960 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) + 240 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \\
& - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 - 48 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \sin(\phi) \\
+ 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \sin(\phi) & + 480 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 1440 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 160 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 960 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 440 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
+ 960 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 & + 440 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 960 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 480 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 1440 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 160 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 960 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2] \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(3, 4) = & -\frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [20 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi) - 2 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^3 \\
& + 10 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} + 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^3 + 2 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi) - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^3 + 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^3 + 150 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^3 \\
& + 740 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^3 + 280 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^3 - 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \sin(\phi)^2 \\
& - 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi) - 18 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi) + 330 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^3 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi) \\
& - 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi) - 740 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi) - 280 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi) + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^3 \\
& + 18 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^3 - 10 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& + 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi) + 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) \\
& + 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) - 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi) - 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi) + 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 + 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)] \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(3, 5) = & -\frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi)^3 - 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi) \\
& - 2 \pi E_\theta L^6 t \cos(\phi)^3 - 20 \pi E_s L^4 t^3 \cos(\phi) + 10 \pi E_\theta L^6 t \cos(\phi) \\
& - 330 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 + 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 \\
& + 150 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi)^3 + 740 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 + 280 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 40 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi) + 330 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& - 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) - 150 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) \\
& - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) - 180 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 \\
& + 18 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 10 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} \cos(\phi) \sin(\phi) + 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& + 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) - 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) \ln(r_0) - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& + 840 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
& + 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 300 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) + 420 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 1080 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 600 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 120 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0)] \\
& \hspace{15em} (B.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(3, 6) = & -\frac{1}{120 L^4 - 120 L^4 v_{s\theta} v_{\theta s}} [4 \pi E_\theta L^6 t - 20 \pi E_s L^4 t^3 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) - 4 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t - 12 \pi E_\theta L^5 r_0 t \\
& + 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) - 40 \pi E_s L^3 r_0 t^3 + 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \\
& + 440 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^2 - 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 \\
& + 100 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 - 440 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) - 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \\
& + 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^2 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \\
& + 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 + 12 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 \\
& - 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \sin(\phi) + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \sin(\phi) + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 40 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 220 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 220 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 720 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 40 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2] \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(4, 4) = & \frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [30 \pi E_s L^6 t - 30 \pi E_s L^6 t \sin(\phi)^2 \\
& + \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 - \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_s L^5 r_0 t + 30 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& + 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^4 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 - 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 \\
& - 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 - 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& + 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^4 + 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^4 + 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^4 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 60 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 - 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^4 + 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^4 - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4] \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(4, 5) = & \frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} \left[15 \pi E_s L^6 t \sin(2\phi) - \frac{\pi E_\theta L^6 t \sin(2\phi)}{4} \right. \\
& - \frac{\pi E_\theta L^6 t \sin(4\phi)}{8} - 15 \pi E_s L^4 t^3 \sin(2\phi) - \frac{15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(2\phi)}{4} \\
& + \frac{15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(4\phi)}{8} - 60 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) - 30 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0) \\
& - 30 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(2\phi) + 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2\phi) + 150 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2\phi) \\
& \quad + 15 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(2\phi) + 65 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(2\phi) \\
& - \frac{45 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2\phi)}{2} - \frac{45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4\phi)}{2} + 75 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4\phi) \\
& \quad - \frac{15 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(4\phi)}{2} + \frac{125 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4\phi)}{2} \\
& \quad + \frac{75 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4\phi)}{4} + 60 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + 30 \pi E_\theta r_0^6 t \sin(4\phi) \ln(r_0) + 30 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \cos(\phi) \\
& - 45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(2\phi) \ln(L + r_0) + \frac{45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& \quad + \frac{135 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2\phi)}{2} - \frac{135 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4\phi)}{4} \\
& \quad + 45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(2\phi) \ln(r_0) - \frac{45 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} + 30 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(2\phi) \\
& + 60 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2\phi) - 3 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(2\phi) + 30 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4\phi) + \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(4\phi) \\
& \quad + 90 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2\phi) \ln(r_0) + 135 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad - 15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2\phi) \ln(r_0) - 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4\phi) \ln(r_0) \\
& + \frac{195 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} + 45 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4\phi) \ln(r_0) + \frac{15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} \\
& \quad - 45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2\phi) \ln(L + r_0) + \frac{45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& - 180 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) - 90 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0) + 45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad - \frac{45 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(4\phi) \ln(r_0)}{2} + 180 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(2\phi) \ln(r_0) \\
& \quad + 90 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(4\phi) \ln(r_0) - 90 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& \quad - 135 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) + 15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(2\phi) \ln(L + r_0) \\
& \quad + 45 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(4\phi) \ln(L + r_0) - \frac{195 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} \\
& \quad \left. - 45 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0) - \frac{15 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(4\phi) \ln(L + r_0)}{2} \right] \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$






$$\begin{aligned}
K(4,6) = & -\frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [40 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi) - 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \\
& - 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^3 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^3 \\
& + 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^3 + 30 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^3 + 260 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^3 \\
& + 20 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^3 + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \sin(\phi)^2 + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi) \\
& + 2 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi) + 210 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^3 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) \\
& + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi) - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi) \\
& - 260 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi) - 20 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi) + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^3 \\
& - 2 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^3 + 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& + 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 + 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi) + 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) \\
& + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi) - 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^3 - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi) \\
& - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi) + 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 \\
& - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^3 + 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)] \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(5, 5) = & \frac{1}{30 L^6 - 30 L^6 v_{s\theta} v_{\theta s}} [31 \pi E_\theta L^6 t + 30 \pi E_s L^4 t^3 \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) + 30 \pi E_s L^6 t \sin(\phi)^2 - 2 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 + \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^4 \\
& - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t - 48 \pi E_\theta L^5 r_0 t - 30 \pi E_s L^4 t^3 \sin(\phi)^2 + 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& - 15 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^4 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \\
& - 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t - 260 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t + 90 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t - 480 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) - 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^2 + 1200 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 - 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 \\
& + 760 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& - 600 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^4 + 60 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^4 - 500 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^4 \\
& - 150 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^4 + 480 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 30 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \sin(\phi) + 30 \pi E_s L^6 t v_{\theta s} \sin(\phi) \\
& + 540 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) - 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^2 + 270 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^4 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 540 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \\
& + 60 \pi E_s L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 + 480 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 - 4 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^4 - 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^4 - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 1320 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& - 1440 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 - 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 180 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^4 + 1440 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 - 720 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 1320 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 360 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 780 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 + 360 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4 \\
& + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^4] \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(5, 6) = & \frac{1}{60 L^5 - 60 L^5 v_{s\theta} v_{\theta s}} [40 \pi E_s L^4 t^3 \cos(\phi) - 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi) \\
& + 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \cos(\phi)^3 + 10 \pi E_\theta L^6 t \cos(\phi) + 210 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) \\
& - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 - 30 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi)^3 \\
& - 260 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 - 20 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi)^3 + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& - 20 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi) - 210 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 60 \pi E_s L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) + 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) \\
& + 30 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \cos(\phi) + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) + 60 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \cos(\phi) \\
& - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 + 2 \pi E_\theta L^5 r_0 t \cos(\phi)^3 \\
& - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 10 \pi E_\theta L^6 t v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) - 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) \\
& - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& + 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi) \ln(r_0) + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi) \ln(r_0) \\
& - 600 \pi E_\theta L r_0^5 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
& - 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi) + 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \ln(L + r_0) \cos(\phi)^3 \\
& + 120 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \cos(\phi) \ln(r_0) - 300 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \cos(\phi)^3 \ln(r_0) \\
& - 480 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0) - 120 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \cos(\phi)^3 \ln(r_0)] \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(6,6) = & \frac{1}{120 L^4 - 120 L^4 v_{s\theta} v_{\theta s}} [4 \pi E_\theta L^6 t + 60 \pi E_s L^4 t^3 - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \\
& - 4 \pi E_\theta L^6 t \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L r_0^5 t - 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t + 5 \pi E_\theta L^4 t^3 \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \\
& + 80 \pi E_s L^3 r_0 t^3 - 360 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t - 80 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t + 20 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t - 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 480 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) - 180 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \sin(\phi)^2 + 360 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \sin(\phi)^2 \\
& - 20 \pi E_\theta L^3 r_0 t^3 \sin(\phi)^2 + 80 \pi E_\theta L^3 r_0^3 t \sin(\phi)^2 - 20 \pi E_\theta L^4 r_0^2 t \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta r_0^6 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 480 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) + 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 + 240 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \\
& - 150 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \sin(\phi)^2 - 180 \pi E_\theta r_0^4 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 240 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) + 240 \pi E_\theta L r_0^5 t \sin(\phi)^2 + 8 \pi E_\theta L^5 r_0 t \sin(\phi)^2 \\
& + 10 \pi E_\theta L^4 t^3 v_{s\theta} \sin(\phi) + 10 \pi E_s L^4 t^3 v_{\theta s} \sin(\phi) - 240 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 80 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 \\
& - 480 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 80 \pi E_\theta L^2 r_0^2 t^3 \ln(r_0) \sin(\phi)^2 + 480 \pi E_\theta L r_0^5 t \ln(r_0) \sin(\phi)^2 \\
& + 240 \pi E_\theta L r_0^3 t^3 \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2 - 240 \pi E_\theta L^2 r_0^4 t \ln(L + r_0) \sin(\phi)^2] \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

Rupture de la liaison vis-écrou

Essai 1	
Essai 2	
Essai 3	
Essai 4	
Essai 5	

Bibliographie

- [Ada12] Louis ADAM et al. « Discrete ply model of circular pull-through test of fasteners in laminates ». In : *Composite Structures* 94.10 (2012), p. 3082-3091 (cf. p. 37, 38).
- [Aga85] Petar AGATONOVIC. « Beam model of bolted flanged connections ». In : *Engineering computations* 2.1 (1985), p. 21-29 (cf. p. 53).
- [Aie02] Giacomo AIELLO. « Utilisation des composites à matrice céramique SiC/SiC comme matériau de structure de composants internes du tore d'un réacteur à fusion ». Thèse de doct. Evry, Université d'Evry Val d'Essonne, 2002 (cf. p. 26).
- [Ald13] G ALDEBERT. « Analyse du comportement mécanique des assemblages boulonnés composites à renforts tissés ». Thèse de doct. Thèse Université Toulouse III Paul Sabatier, 2013 (cf. p. 30-32).
- [Alk07] Feras ALKATAN et al. « Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 43.8 (2007), p. 589-598 (cf. p. 48, 160).
- [Ang16] Lise ANGRAND. « Modèle d'endommagement incrémental en temps pour la prévision de la durée de vie des composites tissés 3D en fatigue cyclique et en fatigue aléatoire ». Thèse de doct. 2016 (cf. p. 24).
- [Asi09] Osman ASI. « Effect of different woven linear densities on the bearing strength behaviour of glass fiber reinforced epoxy composites pinned joints ». In : *Composite structures* 90.1 (2009), p. 43-52 (cf. p. 30, 31).
- [Ask16] Ramzi ASKRI et al. « A reduced fastener model using Multi-Connected Rigid Surfaces for the prediction of both local stress field and load distribution between fasteners ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 110 (2016), p. 32-42 (cf. p. 58).
- [ATA10] ATAG. *Beginner's Guide to Aviation Efficiency*. 2010 (cf. p. 1).
- [Bak94] Ezzat BAKHIET. « Etude des assemblages boulonnés à chargement fortement excentré soumis à des sollicitations de fatigue ». Thèse de doct. Toulouse, INSA, 1994 (cf. p. 53, 54).
- [Bau06] JN BAUCOM et al. « Low-velocity impact damage accumulation in woven S2-glass composite systems ». In : *Composites science and technology* 66.10 (2006), p. 1229-1238 (cf. p. 13).
- [BB88] Callie BERLINER et James A BRIMSON. *Cost management for today's advanced manufacturing : The CAM-I conceptual design*. Harvard Business Review Press, 1988 (cf. p. 41).
- [BC09] O. A. BAUCHAU et J. I. CRAIG. « Euler-Bernoulli beam theory ». In : *Structural Analysis*. Sous la dir. d'O. A. BAUCHAU et J. I. CRAIG. Dordrecht : Springer Netherlands, 2009, p. 173-221 (cf. p. 64).

- [Ben14] Taha BENHADDOU et al. « Pre-tensioning effect on fatigue life of bolted shear joints ». In : *Aerospace Science and Technology* 36 (2014), p. 36-43 (cf. p. 3).
- [Bey19] Thibault BEYER. « Semi-analytical modeling of damage under contact loading : Application to heterogeneous materials ». Thèse de doct. INSA Lyon - LAMCOS, 2019 (cf. p. 23, 44, 149).
- [BG94] Ezzat M BAKHIET et Jean F GUILLOT. « Analytical model of bolted joints subjected to high eccentric loadings ». In : *ASME PET DIV PUBL PD, ASME, NEW YORK, NY,(USA), 1994*, 64.7 (1994), p. 301-313 (cf. p. 54).
- [BK99] A BANBURY et DW KELLY. « A study of fastener pull-through failure of composite laminates. Part 1 : Experimental ». In : *Composite structures* 45.4 (1999), p. 241-254 (cf. p. 36, 37).
- [Bou09] Christophe BOUVET et al. « Low velocity impact modelling in laminate composite panels with discrete interface elements ». In : *International Journal of Solids and Structures* 46.14-15 (2009), p. 2809-2821 (cf. p. 37).
- [BZ05] JN BAUCOM, et MA ZIKRY. « Low-velocity impact damage progression in woven E-glass composite systems ». In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 36.5 (2005), p. 658-664 (cf. p. 13).
- [CCW92] Shen CHOU, Hong-Chu CHEN et Chorng-Cherng WU. « BMI resin composites reinforced with 3D carbon-fibre fabrics ». In : *Composites science and technology* 43.2 (1992), p. 117-128 (cf. p. 11).
- [CF97] Brian N COX et Gerry FLANAGAN. « Handbook of analytical methods for textile composites ». In : (1997) (cf. p. 11).
- [Cha08a] Zouhair CHAIB. « Etude du comportement des fixations par vis des couronnes de guidage de grand diamètre : élaboration d'un outil de dimensionnement ». Thèse de doct. Toulouse, INSA, 2008 (cf. p. 55, 80, 82).
- [Cha08b] Jamel CHAKHARI et al. « Numerical model for two-bolted joints subjected to compressive loading ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 44.4 (2008), p. 162-173 (cf. p. 55, 56).
- [Cha74] Jean-Louis CHABOCHE. « UNE LOI DIFFERENTIELLE D'ENDOMMAGEMENT DE FATIGUE AVEC CUMULATION NON LINEAIRE. » In : (1974) (cf. p. 19).
- [Cha77] JL CHABOCHE. « Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement ». In : *Problems Non-Lineaires de Mécanique* (1977), p. 137-159 (cf. p. 22).
- [Cha82] JL CHABOCHE. « Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope ». In : *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*. Springer, 1982, p. 737-760 (cf. p. 20).

- [CM02] J-L CHABOCHE et J-F MAIRE. « A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's ». In : *Aerospace Science and Technology* 6.2 (2002), p. 131-145 (cf. p. 19).
- [Col77] TA COLLINGS. « The strength of bolted joints in multi-directional CFRP laminates ». In : *Composites* 8.1 (1977), p. 43-55 (cf. p. 30).
- [Cou19] M COUCHAUX et al. « Bolted circular flange connections under static bending moment and axial force ». In : *Journal of Constructional Steel Research* 157 (2019), p. 314-336 (cf. p. 55).
- [Cox92] BN COX et al. « Mechanisms of compressive failure in 3D composites ». In : *Acta Metallurgica et Materialia* 40.12 (1992), p. 3285-3298 (cf. p. 11, 16).
- [Eli15] Adrien ELIAS. « Nocivité des défauts induits par impact pour les structures composites tissées 3D à matrice organique ». Thèse de doct. 2015 (cf. p. 24).
- [Fan15] Jingfeng FAN et al. « Experimental and numerical investigation of composite bolted π -joint subjected to bending load ». In : *Composites Part B : Engineering* 78 (2015), p. 324-330 (cf. p. 38).
- [FT03] Toshimichi FUKUOKA et Tomohiro TAKAKI. « Elastic plastic finite element analysis of bolted joint during tightening process ». In : *Journal of Mechanical Design* 125.4 (2003), p. 823-830 (cf. p. 47).
- [Gar19] Cecile GARCIA. « Modélisation de l'endommagement et de la rupture des matériaux composites tissés 3D appliquée aux chapes ceinturées cecile ». Thèse de doct. 2019 (cf. p. 24).
- [GCG89] Valérie A GUÉNON, Tsu-Wei CHOU et John W GILLESPIE. « Toughness properties of a three-dimensional carbon-epoxy composite ». In : *Journal of materials science* 24.11 (1989), p. 4168-4175 (cf. p. 11).
- [GH03] Emile GREENHALGH et Matthew HILEY. « The assessment of novel materials and processes for the impact tolerant design of stiffened composite aerospace structures ». In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 34.2 (2003), p. 151-161 (cf. p. 11).
- [Gho09] Antoine GHOSN. « Modélisation du comportement des fixations d'une couronne d'orientation d'éoliennes de très grand diamètre et à deux rangées d'éléments roulants ». Thèse de doct. Toulouse, INSA, 2009 (cf. p. 55).
- [Gia17] Ioannis K GIANNOPOULOS et al. « Effects of bolt torque tightening on the strength and fatigue life of airframe FRP laminate bolted joints ». In : *Composites Part B : Engineering* 125 (2017), p. 19-26 (cf. p. 33, 34).
- [GM11] PJ GRAY et CT MCCARTHY. « A highly efficient user-defined finite element for load distribution analysis of large-scale bolted composite structures ». In : *Composites Science and Technology* 71.12 (2011), p. 1517-1527 (cf. p. 57).
- [GM12] PJ GRAY et CT MCCARTHY. « An analytical model for the prediction of through-thickness stiffness in tension-loaded composite bolted joints ». In : *Composite Structures* 94.8 (2012), p. 2450-2459 (cf. p. 51).

- [Gor18] Laurent GORNET et al. « Détermination de la souplesse hors plan d'un assemblage de composites boulonnés à l'aide d'une démarche d'homogénéisation ». In : *Matériaux & Techniques* 106.3 (2018), p. 302 (cf. p. 76).
- [GRD06] Fabrice GATUINGT, Frédéric RAGUENEAU et Rodrigue DEMORAT. « Implantation numérique d'un modèle d'endommagement anisotrope non-local ». In : *Revue Européenne de Génie Civil* 10.3 (2006), p. 391-404 (cf. p. 23).
- [GSW61] Bruce E GREENE, Donald R STROME et Raymond C WEIKEL. « Application of the stiffness method to the analysis of shell structures ». In : ASME. 1961 (cf. p. 68).
- [GUI07] Jean GUILLOT. « Calcul des assemblages vissés-Assemblages chargés axialement ». In : (2007) (cf. p. 47, 54).
- [Gui89] Jean GUILLOT. *Assemblages par Elements Filetés Modelisations et Calcul*. Ed. Techniques Ingénieur, 1989 (cf. p. 53).
- [Had19] Ahmed HADDAR et al. « Modèle analytique d'un assemblage boulonné soumis à un chargement fortement excentré ». In : 2019 (cf. p. 54).
- [Had20] Ahmed HADDAR et al. « Development of Semi-analytical Models for Aircraft Wheel Assembly Design ». In : *Advanced Joining Processes*. Springer, 2020, p. 13-28 (cf. p. 56).
- [ham13] Francois HAMON. « Modèle d'endommagement de Mazars ». In : *Fascicule r7.01 : Modélisations pour le Génie Civil et les géomatériaux* (2013), p. 1-15 (cf. p. 23).
- [Has80] Zvi HASHIN. « Failure criteria for unidirectional fiber composites ». In : (1980) (cf. p. 23, 35).
- [Hur14] A HURMANE et al. « Strength analysis of woven interlock composites subjected to compressive loading : experiments and simulations ». In : *Proceedings of the 16th European Conference on Composite Materials*. 2014 (cf. p. 14).
- [Hur15] Antoine HURMANE. « Analyse par un dialogue essais/calculs de la tenue en compression de structures composites tissées interlocks ». Thèse de doct. Châtillon, ONERA, 2015 (cf. p. 14-16, 24).
- [Iri12] F-X IRISARRI et al. « Progressive damage and failure of mechanically fastened joints in CFRP laminates–Part I : Refined finite element modelling of single-fastener joints ». In : *Composite Structures* 94.8 (2012), p. 2269-2277 (cf. p. 35, 36).
- [J04] Schön J. « Coefficient of Friction for Aluminium in Contact with a Carbon Fiber Epoxy Composite ». In : *Tribology International* 37 (2004), p. 395-404 (cf. p. 44).
- [Jan08] NE JANSSON et al. « Testing and analysis of a highly loaded composite flange ». In : *ECCM13 : 13th European Conference on Composite Materials*. 2008 (cf. p. 39).

- [JP17] Shreyas JOGLEKAR et Mark PANKOW. « Modeling of 3D woven composites using the digital element approach for accurate prediction of kinking under compressive loads ». In : *Composite Structures* 160 (2017), p. 547-559 (cf. p. 16).
- [JPJ94] Maire J.F., Lesne P.M. et Chaboche J.L. *Modélisation micro-macro du comportement mécanique des tissus SiC-SiC*. Rapp. tech. ONERA, déc. 1994 (cf. p. 24).
- [KAC58] Lazar M KACHANOV. « Rupture time under creep conditions ». In : (1958) (cf. p. 19, 20).
- [KFL03] Wen-shyong KUO, Jiunn FANG et Horng-Wen LIN. « Failure behavior of 3D woven composites under transverse shear ». In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 34.7 (2003), p. 561-575 (cf. p. 17, 18).
- [KT04] A. KAZBERUK et R. TRIBILLO. « Iterative solution of FE equations with boundary conditions in the form of linear constraints ». In : *Foundations of Civil and Environmental Engineering* No. 4 (2004), p. 15-22 (cf. p. 80).
- [Kur01] J KURZKE. « A Program to calculate Design and Off-Design Performance of Gas Turbines ». In : *GasTurb 9 User's Manual* (2001) (cf. p. 39).
- [LA17] Sim Yee LEE et Hilton AHMAD. « Bearing stress at failure of double-lap hybrid joints in woven fabric kenaf fiber composite plates under quasi-static loading ». In : *MATEC Web of Conferences*. T. 103. EDP Sciences. 2017, p. 02008 (cf. p. 33, 34).
- [Lac15] Frédéric LACHAUD et al. « Strategies for Predicting the Residual Strength of Impacted Composite Aircraft Fuselages ». In : *Applied Composite Materials* 22.6 (2015), p. 599-621 (cf. p. 23).
- [Laf17] Marie Soule de LAFONT. « Conception d'un connecteur élément fini pour la simulation des assemblages boulonnés ». Thèse de doct. ENS Cachan - LMT, 2017 (cf. p. 57, 58).
- [LC94] Jean LEMAITRE et Jean-Louis CHABOCHE. *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press, 1994 (cf. p. 22).
- [Lem84] Jean LEMAITRE. « How to use damage mechanics ». In : *Nuclear engineering and design* 80.2 (1984), p. 233-245 (cf. p. 19).
- [Lem85] Jean LEMAITRE. « A continuous damage mechanics model for ductile fracture ». In : (1985) (cf. p. 19, 20).
- [Ler13] Julien LEROUX. « Modélisation numérique du contact pour matériaux composites ». Thèse de doct. Lyon, INSA, 2013 (cf. p. 12).
- [LVD08] Dimitri LERAY, Aurelian VADEAN et Alain DAIDIE. « Fast computation of preloaded bolted circular joint aiming at fatigue bolt sizing : Hypotheses and modeling ». In : *Engineering Computations* 25.1 (2008), p. 42-54 (cf. p. 55, 56, 78, 80).
- [Mar10] Lionel MARCIN. « Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures ». Thèse de doct. 2010 (cf. p. 24).

- [Mas94] Jerome MASSOL. « Etude des assemblages boulonnés à chargement faiblement excentré soumis à des sollicitations de fatigue ». Thèse de doct. INSA toulouse - LGMT, 1994 (cf. p. 47).
- [Maz86] Jacky MAZARS. « A description of micro-and macroscale damage of concrete structures ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 25.5-6 (1986), p. 729-737 (cf. p. 22).
- [MC97] JF MAIRE et JL CHABOCHE. « A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials ». In : *Aerospace Science and Technology* 1.4 (1997), p. 247-257 (cf. p. 19).
- [McC02] MA MCCARTHY et al. « Bolt-hole clearance effects and strength criteria in single-bolt, single-lap, composite bolted joints ». In : *Composites science and technology* 62.10-11 (2002), p. 1415-1431 (cf. p. 29).
- [MG11] CT MCCARTHY et PJ GRAY. « An analytical model for the prediction of load distribution in highly torqued multi-bolt composite joints ». In : *Composite Structures* 93.2 (2011), p. 287-298 (cf. p. 50, 57).
- [ML10] Andreas MORTENSEN et Javier LLORCA. « Metal matrix composites ». In : *Annual review of materials research* 40 (2010), p. 243-270 (cf. p. 10).
- [MLT95] ALJTR MATZENMILLER, J LUBLINER et RL TAYLOR. « A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites ». In : *Mechanics of materials* 20.2 (1995), p. 125-152 (cf. p. 23).
- [MMP06] MA MCCARTHY, CT MCCARTHY et GS PADHI. « A simple method for determining the effects of bolt-hole clearance on load distribution in single-column multi-bolt composite joints ». In : *Composite Structures* 73.1 (2006), p. 78-87 (cf. p. 50).
- [Mon02] Jerome MONTGOMERY. « Methods for modeling bolts in the bolted joint ». In : *ANSYS User's Conference*. T. 5. 2002 (cf. p. 149).
- [Mou17] Richard MOUNIEN. « Analyse expérimentale 3D et modélisation de la tenue et du comportement au matage de structures composites tissées 3D ». Thèse de doct. 2017 (cf. p. 24).
- [MPC89] Jacky MAZARS et Gilles PIJAUDIER-CABOT. « Continuum damage theory—application to concrete ». In : *Journal of engineering mechanics* 115.2 (1989), p. 345-365 (cf. p. 22).
- [NA09] Sayed A NASSAR et Antoine ABOUD. « An improved stiffness model for bolted joints ». In : *Journal of Mechanical Design* 131.12 (2009), p. 121001 (cf. p. 49, 50).
- [NBHS83] Willard D NELSON, Bruce L BUNIN et Leonard J HART-SMITH. *Critical Joints in Large Composite Aircraft Structure*. Rapp. tech. MCDONNELL DOUGLAS CORP LONG BEACH CA DOUGLAS AIRCRAFT DIV, 1983 (cf. p. 50).
- [Omr19] O OMRAN et al. « Development of a connector element for multi-material bolted-joint under tensile loading ». In : *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 26.21 (2019), p. 1796-1807 (cf. p. 57).

- [OSB14] Alvaro OLMEDO, Carlos SANTIUSTE et E BARBERO. « An analytical model for the secondary bending prediction in single-lap composite bolted-joints ». In : *Composite Structures* 111 (2014), p. 354-361 (cf. p. 50).
- [Pis17] PV PISAREV et al. « Design-experimental analysis of strength of composite flange with a delamination defect ». In : *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. T. 286. 1. IOP Publishing. 2017, p. 012030 (cf. p. 38, 39).
- [Rab69] Yu N RABOTNOV. « Creep problems in structural members ». In : (1969) (cf. p. 19, 20).
- [Rak11] Carole RAKOTOARISOA. « Préviation de la durée de vie en fatigue des composites à matrice organique tissés interlock. » Thèse de doct. Compiègne/Châtillon, Université de Technologie de Compiègne/ONERA, 2011 (cf. p. 14, 24).
- [Ras78] J RASMUSSEN et al. « A two body contact problem with friction ». In : *Euromech Colloquium NR*. T. 110. 1978, p. 115-120 (cf. p. 48, 76, 160).
- [Roc75] Kenneth Charles ROCKEY et al. « The Finite Element Method—A Basic Introduction ». In : *Strain* 11.3 (1975), p. 140-140 (cf. p. 68, 69).
- [Ros47] Samuel J ROSENFELD. « Analytical and experimental investigation of bolted joints ». In : (1947) (cf. p. 50).
- [Rot27] F ROTSCHER. « Die Maschinenelemente,(1927), 234 ». In : (1927) (cf. p. 48).
- [Sal15] Mohamed Nasr SALEH et al. « Investigating the Potential of Using Off-Axis 3D Woven Composites in Composite Joints' Applications ». In : *Applied composite Materials* 24.2 (2015), p. 377-396 (cf. p. 31, 32).
- [SB97] A Brent STRONG et Scott W BECKWITH. « Joining Composite Materials ». In : *Composites Fabrication* (1997), p. 9-15 (cf. p. 11).
- [Sch09] Julien SCHNEIDER et al. « Caractérisation du comportement hors-plan d'un tissé interlock= Off-plan behaviour investigation of an interlock fabric ». In : 2009 (cf. p. 17, 18).
- [Sch11] Julien SCHNEIDER. « Mécanismes d'endommagement dans les composites multicouches à renfort interlock. » Thèse de doct. Compiègne, Université de Technologie de Compiègne, 2011 (cf. p. 14, 17).
- [Tho99] Anna C THORNTON. « Variation risk management using modeling and simulation ». In : *Journal of Mechanical Design* 121 (1999) (cf. p. 41).
- [TO86] Tadasu TSUKIZOE et Nobuo OHMAE. « Friction and wear performance of unidirectionally oriented glass, carbon, aramid and stainless steel fiber-reinforced plastics ». In : *Composite materials series*. T. 1. Elsevier, 1986, p. 205-231 (cf. p. 44).
- [TR46] MB TATE et SJ ROSENFELD. *Preliminary investigation of the loads carried by individual bolts in bolted joints*. National Advisory Committee for Aeronautics. Rapp. tech. Technical Note, 1946 (cf. p. 50).

- [Tur56] MJ TURNER. « Stiffness and deflection analysis of complex structures ». In : *journal of the Aeronautical Sciences* 23.9 (1956), p. 805-823 (cf. p. 68).
- [TW71] Stephen W TSAI et Edward M WU. « A general theory of strength for anisotropic materials ». In : *Journal of composite materials* 5.1 (1971), p. 58-80 (cf. p. 26).
- [Vad00] Aurelian VADEAN. « Modélisation et simulation du comportement des liaisons par éléments filetés de roulements de très grand diamètre ». Thèse de doct. Toulouse, INSA, 2000 (cf. p. 55).
- [VDI14] VDI. « VDI 2230 part 1 : systematic calculation of high duty bolted joints : joints with one cylindrical bolt ». In : *VDI-guideline. VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb* (2014) (cf. p. 46, 48, 160).
- [VGB20] Richard VERWAERDE, Pierre-Alain GUIDAULT et Pierre-Alain BOUCARD. « A nonlinear finite element connector for the simulation of bolted assemblies ». In : *Computational Mechanics* (2020), p. 1-18 (cf. p. 58).
- [War16] Kyle C WARREN et al. « Progressive failure analysis of three-dimensional woven carbon composites in single-bolt, double-shear bearing ». In : *Composites Part B : Engineering* 84 (2016), p. 266-276 (cf. p. 35).
- [WLAG15a] Kyle C WARREN, Roberto A LOPEZ-ANIDO et Jonathan GOERING. « Behavior of three-dimensional woven carbon composites in single-bolt bearing ». In : *Composite Structures* 127 (2015), p. 175-184 (cf. p. 30, 32, 33, 35).
- [WLAG15b] Kyle C WARREN, Roberto A LOPEZ-ANIDO et Jonathan GOERING. « Experimental investigation of three-dimensional woven composites ». In : *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 73 (2015), p. 242-259 (cf. p. 14, 15).
- [XGGJ07] JR XIAO, BA GAMA et JW GILLESPIE JR. « Progressive damage and delamination in plain weave S-2 glass/SC-15 composites under quasi-static punch-shear loading ». In : *Composite structures* 78.2 (2007), p. 182-196 (cf. p. 23).
- [YD04] HL YI et Xin DING. « Conventional approach on manufacturing 3D woven preforms used for composites ». In : *Journal of industrial textiles* 34.1 (2004), p. 39-50 (cf. p. 11).
- [YZL19] Shibo YAN, Xuesen ZENG et Andrew LONG. « Meso-scale modelling of 3D woven composite T-joints with weave variations ». In : *Composites Science and Technology* 171 (2019), p. 171-179 (cf. p. 72).
- [Zho16] Longwei ZHOU et al. « Design and analysis of a novel bolted composite π joint under bending load ». In : *Materials & Design* 98 (2016), p. 201-208 (cf. p. 37, 38).
- [ZZ01] L ZIMMER et P ZABLIT. « " Global Aircraft" pre-design based on constraint propagation and interval analysis ». In : *DGLR BERICHT* 5 (2001), p. 77-86 (cf. p. 41).

Développement d'un modèle de calcul simplifié d'un assemblage boulonné de carters composite tissé 3D et métallique, soumis à un chargement fortement excentré

Résumé — Parmi les innovations dans les turboréacteurs de nouvelle génération figurent les structures composites tissées 3D. Dans de nombreuses applications telle que la ligne des carters fan, ces structures sont assemblées à des pièces composites ou métalliques à travers des liaisons boulonnées. L'optimisation de ces interfaces est une des difficultés majeures rencontrées actuellement, car il n'existe pas de méthodes de conception simples pour le calcul de ces assemblages. En effet, leur dimensionnement s'appuie à l'heure actuelle sur des méthodes numériques 3D lourdes à mettre en place et des essais expérimentaux qui s'avèrent très coûteux.

L'objectif de ces travaux de thèse est de développer une méthode simplifiée facilitant la conception initiale de l'assemblage dans une approche de pré-dimensionnement.

Afin de répondre à cette problématique, un modèle semi-analytique basé sur la méthode des éléments finis combinée à des formulaires analytiques de calcul des assemblages boulonnés a été développé. La modélisation de chaque pièce de l'assemblage est réalisée grâce à des éléments finis standards (poutre, barre, coque, ...). Ainsi, une nouvelle formulation de l'élément coque orthotrope a été proposée. Le modèle permet d'analyser rapidement le comportement global de l'assemblage, à savoir la tenue des pièces assemblées, la tenue du boulon et les limites de décollement, suivant les critères de conception établis. Une validation du modèle a été réalisée grâce à des comparaisons avec des modèles éléments finis 3D et à des études paramétriques certifiant la réponse physique du modèle.

Afin de comprendre le comportement réel de l'assemblage et d'augmenter le niveau de validation du modèle semi-analytique développé, en disposant d'une base de validation expérimentale, une campagne d'essais à trois niveaux d'échelles a été mise en place. Des essais de caractérisation de la fixation qui ont permis d'identifier ses paramètres matériaux, un essai de traction sur bride monofixation dont la configuration est retranscrite sur le modèle semi-analytique et, finalement, un essai de traction sur brides trois fixations représentatives de la configuration existante sur les moteurs réels.

La corrélation calcul-essais a permis de valider l'intérêt du modèle semi-analytique développé, en mettant en évidence un gain considérable en temps de calcul et une précision des résultats acceptable dans une logique de pré-dimensionnement.

Mots clés : Modélisation simplifiée, Méthode des éléments finis, Assemblages boulonnés, Composite, Essais expérimentaux.

Developpement of simplified model for the preliminary design of 3D woven composite/metallic flange bolted assembly, subjected to highly eccentric loading

Abstract — The use of 3D woven composite structures is among major innovations integrated in the new generation of aircraft engines. In many applications such as the line of casing, these structures are assembled to composite or metal parts through bolted connections, the optimization of these interfaces is one of the major difficulties currently encountered because of the lack of simplified methods for the preliminary design and calculation of these connections. Indeed, their dimensioning is currently based on 3D Finite Element Models that are highly time-consuming and experimental tests which are proving to be very expensive. The objective of this thesis is to develop a simplified method for the preliminary design of composite/metal bolted joints.

In order to deal with this issue, a semi-analytical model based on the finite element method combined with analytical forms for the calculation of bolted joints was developed. The modeling of each part of the assembly is carried out using standard finite elements (beam, bar, shell,...). Thus, a new formulation of the orthotropic shell element has been proposed. The developed model allows fast analysis of the overall behavior of the assembly, such as the assembled parts strength, the resistance of the bolt and the separation limits, according to the established design criteria. A validation of the model was carried out thanks to comparisons with 3D finite element models and thanks to parametric studies certifying the physical behavior of the model.

In order to understand the real behavior of the assembly and to increase the level of validation of the semi-analytical model developed here, by having an experimental validation based data, three types of experimental tests have been carried out : tensile tests on the bolt that allowed its characterization and the identification of its material parameters, a tensile test on a single-fastening flange whose configuration is easily transcribed on the semi-analytical model and finally, a tensile test on three-fastening flanges which representing the assembly configuration on the real engines.

The correlation between tests and computations approved the interest of the developed semi-analytical model, by highlighting a considerable gain in computation-time and an acceptable results accuracy in a preliminary design approach.

Keywords : Simplified modelling, Finite element method, bolted assemblies, Composite, Tests.

Institut Clément Ader
3 Rue Caroline Aigle
31400 Toulouse